



**HAL**  
open science

# Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes

Sébastien Tordeux

► **To cite this version:**

Sébastien Tordeux. Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes. Mathématiques [math]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004. Français. NNT: . tel-00009246v2

**HAL Id: tel-00009246**

**<https://theses.hal.science/tel-00009246v2>**

Submitted on 4 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présenté à

**UVSQ - Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

Spécialité

**Mathématiques Appliquées**

soutenu par

**Sébastien TORDEUX**

le 6 décembre 2004

Titre

**Méthodes Asymptotiques  
pour la Propagation des Ondes  
dans les Milieux comportant des Fentes**

Directeur de thèse : **Patrick JOLY**

Jury

Président :	M.	<b>Evariste</b>	<b>SANCHEZ-PALENCIA</b>
Rapporteurs :	Mme.	<b>Monique</b>	<b>DAUGE</b>
	M.	<b>Olivier</b>	<b>LAFITTE</b>
Examineurs :	M.	<b>Abderrahmane</b>	<b>BENDALI</b>
	M.	<b>Patrick</b>	<b>JOLY</b>
	M.	<b>Jean-Pierre</b>	<b>PUEL</b>



A ma famille.



# Remerciements

Je profite de la fin de ce travail pour exprimer toute ma reconnaissance à Patrick Joly. Il a su me motiver, me diriger dans une ambiance toujours sympathique et me communiquer sa passion des mathématiques.

Madame Monique Dauge et Monsieur Olivier Lafitte ont accepté de rapporter sur cette thèse. Je les remercie du temps qu'ils ont passé sur ce travail, de tout l'intérêt qu'ils ont manifesté et de toutes leurs remarques.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs Abderrahmane Bendali, Jean-Pierre Puel et Evariste Sanchez-Palencia d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je suis extrêmement reconnaissant à Patrick Ciarlet, Pascal Joly, Eric Luneville et Hasnaa Zidani d'avoir bien voulu me faire confiance et de me permettre d'enseigner à l'ENSTA.

Par l'intermédiaire de ses cours, Marc Lenoir m'a permis d'aborder les bases de l'analyse moderne et de l'analyse fonctionnelle. J'espère qu'il est conscient de la place qu'a pris son enseignement dans ce travail.

Les membres du projet Ondes et du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA ont toujours contribué à rendre l'ambiance scientifique et humaine exceptionnelle. Je leur affirme toute mon amitié.

J'ai toujours aimé travailler et discuter avec les autres thésards des projets Ondes et Estimes. Je les remercie pour toute leur aide et les bons moments que nous avons passés ensemble.

Je remercie de tout mon coeur mes parents, mon frère et mes amis pour m'avoir supporté durant ces trois années. Ils m'ont placé dans un cadre familial et amical idéal pour pouvoir mener de front vie privée et professionnelle.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Modèles de raccord brutal 1D-2D pour l'approximation des problèmes de fentes : justification des modèles unidimensionnels</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Dérivation du problème approché</b>	<b>7</b>
2.1	Le problème modèle . . . . .	8
2.1.1	Présentation du problème modèle . . . . .	8
2.1.2	Application 1 : acoustiques 2D . . . . .	10
2.1.3	Application 2 : électromagnétisme 2D . . . . .	10
2.1.4	Application 3 : les guides d'ondes électromagnétiques . . . . .	12
2.2	Construction du modèle approché : conditions de transmission 2D-1D . . . . .	13
2.3	Dérivation du modèle approché de propagation 1D pour une fente courbe à section constante . . . . .	18
2.3.1	La technique directe . . . . .	19
2.3.2	Méthode des développements asymptotiques formels . . . . .	19
2.3.3	Comparaison des deux modèles . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Analyse du modèle approché : Cas d'une fente infinie</b>	<b>23</b>
3.1	Introduction . . . . .	24
3.2	Derivation of the approximate model . . . . .	27
3.2.1	The general case of a finite slot . . . . .	27
3.2.2	A model problem for the analysis; the semi-infinite problem . . . . .	31
3.3	Main results . . . . .	33
3.3.1	Convergence to the limit problem . . . . .	34
3.3.2	Error estimates for the approximate model . . . . .	35
3.3.3	About the proof . . . . .	36
3.4	Convergence of $u^\varepsilon$ and $\tilde{u}^\varepsilon$ to the limit half-space problem . . . . .	37
3.4.1	Preliminary technical results . . . . .	37
3.4.2	Study of $u^\varepsilon - u^0$ . Proof of theorem 3.4 . . . . .	41
3.4.3	Study of $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ . . . . .	44
3.5	Proofs of theorems 3.9 and 3.11 . . . . .	48
3.5.1	Study of the error in the half-space $\Omega$ . . . . .	48
3.5.2	Study of the error in the slot $\mathcal{O}_\varepsilon$ . . . . .	51
3.6	Numerical results . . . . .	52
3.7	Conclusion and perspectives . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Analyse du modèle : Cas d'une fente finie non résonnante</b>	<b>57</b>
4.1	Convergence de la solution exacte vers la solution limite . . . . .	61
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	64
4.3	Le résultat de stabilité . . . . .	66



4.4	Le résultat de consistance . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Une extension : les <math>\delta</math>-modèles</b>	<b>71</b>
5.1	Dérivation du modèle approché . . . . .	72
5.2	Estimation d'erreur : preuve du théorème 5.1 . . . . .	74
5.3	Le résultat de stabilité : preuve du lemme 5.2 . . . . .	75
5.4	Le résultat de consistance : preuve du lemme 5.3 . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>81</b>
6.1	La méthode numérique utilisée pour la validation des estimations d'erreur théoriques	81
6.1.1	Formulation variationnelle approchée . . . . .	83
6.1.2	Introduction de l'approximation éléments finis . . . . .	86
6.1.3	Formulation matricielle . . . . .	88
6.2	Technique de calcul numérique pour le problème de raccord 1D-2D, (avec $h \gg \varepsilon$ )	88
6.2.1	Le problème continu . . . . .	89
6.2.2	Discrétisation dans le cadre de la théorie de Galerkin . . . . .	92
6.2.3	Une mise en oeuvre numérique . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives de la partie I</b>	<b>97</b>
7.1	Analyse complémentaire du modèle . . . . .	97
7.2	Extension des modèles approchés . . . . .	98
<b>II</b>	<b>Une approche raffinée : les développements asymptotiques raccordés</b>	<b>101</b>
<b>8</b>	<b>Une nouvelle approche pour le raccord 1D-2D : les développements asymptotiques raccordés</b>	<b>105</b>
8.1	Un nouveau découpage géométrique . . . . .	106
8.2	Généralités sur la méthode des développements asymptotiques raccordés. . . . .	107
8.3	Vers l'application de la méthode au problème modèle . . . . .	110
<b>9</b>	<b>Présentation des problèmes satisfaits par les termes des développements asymptotiques</b>	<b>117</b>
9.1	Remarques générales sur la structure des problèmes . . . . .	118
9.2	Les problèmes couplés. . . . .	120
9.2.1	Matériel préliminaire. . . . .	120
9.2.2	Les champs limites . . . . .	127
9.2.3	Problèmes aux limites généralisés pour les termes d'ordre $i$ . . . . .	127
9.3	Résolution du problème couplé . . . . .	129
9.3.1	Résultat préliminaire . . . . .	129
9.3.2	Unicité de la solution du problème couplé . . . . .	133
9.3.3	Existence de la solution du problème couplé . . . . .	135
9.3.4	Cas particuliers où les termes des développements asymptotiques s'expriment de façon simple . . . . .	137
9.3.5	Application au calcul numérique . . . . .	138
9.4	Les ordres 1 et 2. . . . .	141
9.4.1	Résultats préliminaires : partie régulière pour le champ lointain . . . . .	141
9.4.2	Les termes d'ordre 1 . . . . .	141
9.4.3	Les termes d'ordre 2 . . . . .	143

<b>10</b>	<b>Obtention des problèmes satisfaits par les termes des développements asymptotiques</b>	<b>149</b>
10.1	Les Ansatz pour les développements asymptotiques . . . . .	150
10.1.1	Principe de la technique. . . . .	150
10.1.2	Ansatz du champ lointain dans le demi espace . . . . .	151
10.1.3	Ansatz du champ proche . . . . .	152
10.1.4	Ansatz du champ de fente . . . . .	153
10.2	Raccord entre le champ proche et le champ lointain . . . . .	156
10.2.1	Développement du champ lointain au voisinage de l'origine . . . . .	159
10.2.2	Développement du champ proche au voisinage de l'infini . . . . .	161
10.2.3	Deux conséquences immédiates du principe de raccord . . . . .	164
10.2.4	Exploitation du principe de raccord . . . . .	165
10.3	Raccord entre le champ proche et le champ de fente . . . . .	167
10.3.1	Développement du champ proche à l'infini dans la fente . . . . .	169
10.3.2	Résultat préliminaire concernant le champ de fente . . . . .	174
10.3.3	Exploitation du principe de raccord . . . . .	174
<b>11</b>	<b>Elément d'analyse sur les problèmes elliptiques à conditions de radiation généralisées</b>	<b>177</b>
11.1	Résultats sur la séparation de variables . . . . .	179
11.1.1	Pour le champ lointain au voisinage de l'origine . . . . .	179
11.1.2	Pour le champ proche dans le demi espace . . . . .	183
11.1.3	Pour le champ proche dans la fente . . . . .	193
11.2	Les problèmes de Helmholtz dans $\Omega$ singulier en $A$ . . . . .	200
11.2.1	Identification d'un problème modèle . . . . .	200
11.2.2	Caractère bien posé par extraction de la singularité. . . . .	200
11.2.3	Preuve de l'existence et de l'unicité . . . . .	201
11.3	Les problèmes de Laplace en domaine non borné . . . . .	202
11.3.1	Identification d'un problème modèle . . . . .	202
11.3.2	Caractère bien posé . . . . .	204
11.3.3	Application à la définition des termes des développements asymptotiques . . . . .	209
<b>12</b>	<b>Estimations d'erreur</b>	<b>215</b>
12.1	Estimations d'erreur : principes et énoncés . . . . .	217
12.1.1	Estimation d'erreur globale : définition et estimation . . . . .	217
12.1.2	Estimations d'erreurs locales . . . . .	220
12.2	Erreurs de raccord : définitions et estimations . . . . .	222
12.2.1	L'erreur de raccord champ lointain-champ proche . . . . .	222
12.2.2	L'erreur de raccord entre champ de fente et champ proche . . . . .	226
12.3	Preuve de l'estimation d'erreur globale . . . . .	229
12.3.1	Obtention de l'estimation . . . . .	229
12.3.2	Le résultat de stabilité : preuve du lemme 12.14 . . . . .	230
12.3.3	Le résultat de consistance : preuve du lemme 12.15 . . . . .	233
<b>13</b>	<b>Conclusion et perspectives de la partie II</b>	<b>239</b>
13.1	La mise en oeuvre numérique . . . . .	240
13.1.1	Calcul numérique du développement en champ lointain. . . . .	240
13.1.2	Calcul numérique du développement du champ proche. . . . .	241
13.2	Quelques compléments d'analyse . . . . .	241
13.2.1	Les fentes finies . . . . .	241
13.2.2	Les modèles dépendants faiblement de $\varepsilon$ . . . . .	242
13.3	Différentes extensions possibles . . . . .	243
13.3.1	Les structures 3D . . . . .	243
13.3.2	D'autres équations d'ondes . . . . .	245

<b>III</b>	<b>Etude des fentes résonnantes</b>	<b>247</b>
<b>14</b>	<b>Une étude mathématique des résonances des fentes finies</b>	<b>249</b>
14.1	Introduction and position of the problem . . . . .	250
14.2	The case of non resonant frequencies : mathematical analysis . . . . .	252
14.2.1	Reformulation of the problem (14.4) in the domain $\Omega_R$ . . . . .	252
14.2.2	Convergence of $u^\varepsilon$ to $u^0$ . . . . .	254
14.3	The case of resonant frequencies : some numerical computations . . . . .	256
14.4	The case of resonant frequencies : a formal asymptotic analysis . . . . .	261
14.4.1	The ansatz of matched asymptotic expansions . . . . .	261
14.4.2	Determination of the leading terms of the expansion. . . . .	265
14.4.3	Towards a rigorous proof . . . . .	267
<b>15</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>269</b>
15.1	Les principaux résultats obtenus dans cette thèse . . . . .	269
15.2	Confrontation à la bibliographie existante . . . . .	269
15.3	Quelques voies de recherche pour le futur proche . . . . .	270
<b>A</b>	<b>Résultats utiles sur les fonctions de Bessel</b>	<b>271</b>
A.1	Introduction et bibliographie . . . . .	271
A.2	Définition des fonctions de Bessel $J_p$ et $Y_p$ . . . . .	272
A.3	Développement au voisinage de 0 des fonctions $J_p$ . . . . .	274
A.4	Développement au voisinage de 0 des fonctions $Y_p$ . . . . .	274
A.5	Équation différentielle et Wronskien . . . . .	275
A.6	Définition des fonctions de Hankel $H_p^{(1)}$ . . . . .	275
A.7	Opérateur Dirichlet Neumann d'ondes sortantes . . . . .	277
<b>B</b>	<b>Densité de <math>H_{0,0}^1(\Omega_R)</math> dans <math>H^1(\Omega_R)</math></b>	<b>279</b>

# Table des figures

1.1	Géométrie typique d'un problème de couche limite . . . . .	2
1.2	Géométrie typique d'un problème de fente . . . . .	2
2.1	simulation numériques pour les conditions aux limites de Neumann (à gauche) et de Dirichlet (à droite) . . . . .	9
2.2	Géométrie du problème et notations . . . . .	14
2.3	Paramétrisation de la fente courbe. . . . .	15
2.4	Le domaine tronqué $\Omega_\varepsilon^R$ . . . . .	16
3.1	Geometry of the propagation domain. . . . .	25
3.2	Geometry of the problem and notation. . . . .	27
3.3	Parametrization of the curved slot. . . . .	28
3.4	The truncated domain. . . . .	29
3.5	The semi infinite straight slot . . . . .	31
3.6	Numerical computation of $u_t^\varepsilon$ . . . . .	53
3.7	Numerical computation of $u_d^\varepsilon$ . . . . .	53
3.10	$H^1$ -global convergence curves . . . . .	54
3.11	$L^2$ -global convergence curves . . . . .	54
3.8	Numerical computation of $u_d^\varepsilon - \tilde{u}_d^\varepsilon$ . . . . .	54
3.9	Numerical computation of $\tilde{u}_d^\varepsilon$ . . . . .	54
3.12	$H^1$ -local convergence curves . . . . .	55
3.13	$L^2$ -local convergence curves . . . . .	55
3.14	The mesh . . . . .	56
3.15	Geometrical configuration for the $\delta$ -model. . . . .	56
4.1	Le domaine de propagation . . . . .	58
4.2	La fente droite finie . . . . .	58
4.3	Le domaine $\Omega_R \cup \Omega'_R$ . . . . .	59
4.4	Le domaine $\Omega_{R,R'} \cup \Omega'_{R,R'}$ . . . . .	59
4.5	Le domaine $\mathcal{O}_\varepsilon$ . . . . .	60
4.6	Le domaine $\mathcal{O}_\varepsilon^{L_1, L_2}$ . . . . .	60
4.7	Le support $F$ de la source . . . . .	68
5.1	Le domaine d'étude . . . . .	72
5.2	Définition des domaines . . . . .	72
5.3	Le domaine de propagation $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$ . . . . .	73
5.4	Le support $F$ de la source $f$ . . . . .	73
6.1	Une approximation géométrique non conforme . . . . .	86
6.2	L'obstacle . . . . .	89
6.3	Une décomposition du domaine pour les PML . . . . .	90
6.4	Le domaine de calcul . . . . .	91
6.5	Le maillage pour le champ exact . . . . .	94

6.6	Le maillage pour le champ approché . . . . .	94
6.7	Le maillage pour le champ limite . . . . .	94
6.8	Le champ total exact $u_h^\varepsilon$ . . . . .	94
6.9	Le champ total approché $\tilde{u}_h^\varepsilon$ . . . . .	94
6.10	Le champ limite $u_h^0$ . . . . .	94
6.11	Le champ diffracté exact $u_h^\varepsilon - u_h^0$ . . . . .	95
6.12	Le champ diffracté approché $\tilde{u}_h^\varepsilon - u_h^0$ . . . . .	95
6.13	L'erreur du modèle $u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon$ . . . . .	95
6.14	Le champ diffracté exact $u_h^\varepsilon - u_h^0$ . . . . .	95
6.15	Le champ diffracté approché $\tilde{u}_h^\varepsilon - u_h^0$ . . . . .	95
6.16	L'erreur du modèle $u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon$ . . . . .	95
6.17	Le champ diffracté exact $u_h^\varepsilon - u_h^0$ . . . . .	96
6.18	Le champ diffracté approché $\tilde{u}_h^\varepsilon - u_h^0$ . . . . .	96
6.19	L'erreur du modèle $u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon$ . . . . .	96
7.1	Fente petite dans deux directions . . . . .	99
7.2	Fente petite dans une direction . . . . .	99
8.1	Définition des trois domaines . . . . .	106
8.2	Les zones de raccord . . . . .	110
8.3	Domaine du champ lointain dans le demi espace . . . . .	111
8.4	Domaine du champ de fente . . . . .	111
8.5	Domaine du champ proche . . . . .	112
8.6	L'ensemble des indices $(i, k)$ . . . . .	112
8.7	Le chemin $\ell$ croissant. . . . .	112
8.8	La zone de raccord "N-H" dans les coordonnées physiques . . . . .	115
8.9	La zone de raccord "N-H" vue à la loupe . . . . .	115
8.10	La zone de raccord "N-S" dans les coordonnées physiques . . . . .	115
8.11	La zone de raccord "N-S" vue à la loupe . . . . .	115
9.1	Dépendance des termes des développements asymptotiques ( $k = 0$ ) . . . . .	119
9.2	Dépendance des termes des développements asymptotiques ( $k \geq 1$ ) . . . . .	119
9.3	Diagramme de dépendance. . . . .	119
9.4	L'ordre naturel pour les calculs . . . . .	120
9.5	L'organigramme des calculs après découplage . . . . .	120
9.6	Les coordonnées polaires du champ lointain . . . . .	121
9.7	Les coordonnées polaires du champ proche . . . . .	125
9.8	Domaine d'application de la formule de Green Riemann . . . . .	134
10.1	Singularité du champ lointain en $A$ . . . . .	151
10.2	Support de la condition de radiation . . . . .	152
10.3	Les croissances des $\mathcal{U}_i^k$ à l'infini . . . . .	153
10.4	Idée de raccordement . . . . .	154
10.5	Les domaines d'étude de Tuck . . . . .	155
10.6	Trou dans une paroi . . . . .	155
10.7	Les géométries étudiées par McIver et Rawlins . . . . .	156
10.8	La zone de raccord . . . . .	157
10.9	Le domaine $\Omega_R$ . . . . .	159
10.10	Domaine de développement modal du champ proche dans le demi espace . . . . .	161
10.11	Zone de raccord entre le champ proche et le champ de fente . . . . .	167
10.12	Domaine de développement modal du champ proche dans la fente . . . . .	169
10.13	Les $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$ non nuls . . . . .	170
11.1	Le domaine $\Omega$ . . . . .	200

11.2	Le domaine $\widehat{\Omega}_N^*$ . . . . .	202
12.1	Domaine d'estimation du champ lointain . . . . .	217
12.2	Domaine d'estimation du champ proche . . . . .	217
12.3	Domaine d'estimation du champ de fente . . . . .	217
12.4	Schéma du raisonnement inductif . . . . .	217
12.5	Le domaine $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$ . . . . .	219
13.1	Une fente petite dans les deux directions d'espace . . . . .	243
13.2	Une fente infinie dans une direction d'espace . . . . .	244
13.3	Une fente 3D finie . . . . .	244
13.4	Deux nouvelles zones de développements asymptotiques . . . . .	244
14.1	Geometry of the propagation domain with the slot . . . . .	250
14.2	Geometry of the propagation domain without the slot . . . . .	250
14.3	Presentation of the experiment . . . . .	256
14.4	A computational mesh . . . . .	256
14.5	The total field, non resonant . . . . .	257
14.6	The total field, resonant . . . . .	257
14.7	The diffracted Fields . . . . .	257
14.8	The solution inside the slot for $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ , left : non resonant case, right : resonant case. . . . .	258
14.9	$\ u^\varepsilon - u^0\ _{L^2(\Omega_c)} = f(\varepsilon)$ . . . . .	259
14.10	The $H^1(\Omega_R)$ -norm of the diffracted field function of $\varepsilon \sqrt{ \text{Log}_{10}\varepsilon }$ . . . . .	259
14.11	$\ u^\varepsilon\ _{L^2(O_\varepsilon)} = f(\varepsilon)$ . . . . .	259
14.12	$\text{Log} \ u^\varepsilon\ _{L^2(O_\varepsilon)}$ function of $\text{Log}_{10}\varepsilon$ . . . . .	259
14.13	$\ u^\varepsilon - u^0\ _{L^2(\Omega_c)} = f(\varepsilon)$ . . . . .	260
14.14	$\ u^\varepsilon\ _{H^1(\Omega_c)} = f(\varepsilon)$ . . . . .	260
14.15	$\sqrt{\varepsilon} \text{Log} \varepsilon \ u^\varepsilon\ _{L^2(O_\varepsilon)} = f(\varepsilon)$ . . . . .	260
14.16	$1/\ u^\varepsilon - u^0\ _{L^2(\Omega_c)} = f(\log\varepsilon)$ . . . . .	260
14.17	$\frac{1}{\ u^\varepsilon\ _{H^1(O_\varepsilon)}^2} = f(\text{Log}_{10}\varepsilon)$ . . . . .	260
14.18	$\ u^\varepsilon\ _{L^2(O_\varepsilon)} = f(\varepsilon)$ . . . . .	260
14.19	Dependance of the diffracted field with respect to the frequence . . . . .	261
A.1	Graphe de $J_0$ . . . . .	273
A.2	Graphe de $Y_0$ . . . . .	273
A.3	Graphe de $J_1$ . . . . .	273
A.4	Graphe de $Y_1$ . . . . .	273
A.5	Graphe de $J_2$ . . . . .	273
A.6	Graphe de $Y_2$ . . . . .	273
A.7	Graphe de $J_3$ . . . . .	274
A.8	Graphe de $Y_3$ . . . . .	274
A.9	Graphe de $M_0$ . . . . .	276
A.10	Graphe de $M_1$ . . . . .	276
A.11	Graphe de $M_2$ . . . . .	276
A.12	Graphe de $M_3$ . . . . .	276



# Chapitre 1

## Introduction générale

Lorsque l'on réalise des codes de calcul numérique, tenir compte de l'effet de petites perturbations sur un modèle physique peut engendrer un temps de calcul important : le plus souvent une discrétisation assez fine (d'autant plus fine que la perturbation est petite !) s'avère nécessaire. Dans les problèmes de propagation des ondes, l'exemple typique est la prise en compte de domaines géométriques dont au moins une des dimensions est petite devant la longueur d'onde. En face de cette difficulté, une première solution, numérique, s'appuie sur des méthodes de raffinement de maillage local, ce qui permet de diminuer le coût de calcul. Cette technique a déjà fait l'objet de nombreux développements en analyse numérique et notamment au sein du projet Ondes ; on peut citer les travaux de Fouquet (se référer à [21] et [22]) et Rodríguez [75]. Nous suivons une autre voie : nous proposons des modèles approchés du problème continu, plus propices aux approximations numériques que le problème initial. La problématique numérique originelle se ramène alors à une problématique par essence mathématique.

De tels modèles approchés ont été largement étudiés pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par des objets non parfaitement conducteurs. Dans ce cas, le petit paramètre est l'épaisseur de la couche. Lorsque cela est possible, on essaie de remplacer l'obstacle par une condition aux limites approchée. On parle alors de condition d'impédance généralisée (voir par exemple le livre de Senior-Volakakis [80]). L'utilisation d'une telle condition est pertinente si elle est facile à traiter numériquement, ce qui est le cas lorsqu'elle s'exprime à l'aide d'opérateurs différentiels. Dans le cas de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des obstacles parfaitement conducteurs revêtus d'une fine couche de matériau diélectrique, l'effet de la couche sur le milieu extérieur, du fait de sa petite épaisseur, est local en première approximation (voir notamment les travaux de Engquist-Nédélec [33], Bendali-Lemrabet [10], Artola-Cessenat [7],...). Si la théorie est maintenant bien comprise dans le cas de surfaces régulières, l'existence de singularités (coins, arrêtes de l'obstacle) pose des difficultés nouvelles et délicates : les travaux récents de Caloz, Costabel, Dauge et Vial [18] constituent une avancée dans cette direction.

Une autre application est la diffraction par des obstacles fortement absorbants, c'est à dire fortement conducteurs dans le cas de l'électromagnétisme : cette fois, c'est un phénomène physique bien connu, l'effet de peau, qui crée un effet de "couche mince". Il se développe une couche limite d'épaisseur inversement proportionnelle à la racine de la conductivité. A nouveau, l'effet de l'obstacle sur le milieu extérieur est local en première approximation. Dès le début du siècle, Leontovitch a proposé une condition d'ordre 0 qui porte son nom et qui ne voit "localement" que le plan tangent à la frontière. Au cours des années 50, Rytov a généralisé cette condition et, récemment, Antoine et Barucq (se référer à [5] et [6]) ont proposé une nouvelle dérivation de conditions d'impédance généralisée par des techniques d'opérateurs pseudo-différentiels. Les travaux récents réalisés au sein du projet Ondes [45] apportent un éclairage nouveau et une justification mathématique à ce sujet.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des problèmes asymptotiques différents de ceux évoqués



ci-dessus, à savoir la propagation d’ondes dans des domaines comportant des fentes minces. Tant dans le cas des couches minces que des fentes minces, le domaine de propagation est la réunion d’un domaine volumique “épais” et d’un domaine “fin” (la couche ou la fente). La grande différence est que, alors que dans le cas de couches minces la structure fine communique avec le domaine épais par sa grande dimension, dans le cas des fentes minces cela se fait par la petite dimension. En conséquence, les modèles asymptotiques résultants sont très différents :

- dans le cas des couches minces, on va remplacer celle-ci par une condition équivalente aux limites ;
- dans le cas des fentes minces, on va chercher à faire communiquer un modèle approché en dimension  $n - 1$  pour la fente avec un modèle de dimension  $n$  dans le domaine épais ( $n$  désignant la dimension de l’espace). On parle alors de modèles de fente.

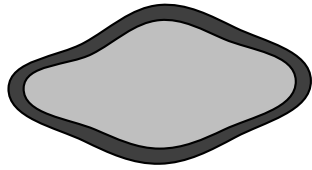


FIG. 1.1 – Géométrie typique d’un problème de couche limite

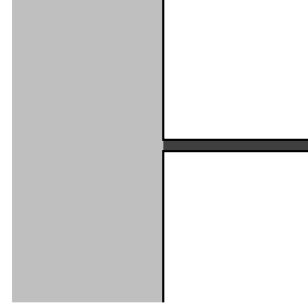


FIG. 1.2 – Géométrie typique d’un problème de fente

Nous nous intéressons ici à cette dernière configuration, et en particulier à la conception, à la validation et à la justification des modèles de fente. La problématique n’est pas nouvelle et a déjà suscité de nombreux travaux notamment dans la littérature physique. Nous pensons plus particulièrement aux modèles de fente développés pour l’électromagnétisme tels qu’ils sont par exemple décrits dans le livre de référence de Taflove [81]. Une particularité de ces modèles approchés est qu’ils sont directement décrits au niveau des schémas numériques utilisés pour la discrétisation des équations. De ce fait, il est parfois difficile d’en mesurer et d’en analyser la précision.

C’est pourquoi, nous avons préféré ici reprendre le problème à la base et nous intéresser à l’introduction de nouveaux modèles de fente “continus”, lesquels fourniront, après discrétisation, de nouveaux modèles numériques de fente. L’un des buts de cette démarche est de pouvoir analyser finement ces modèles de fente via les méthodes d’analyse asymptotique. Il sera possible de contrôler et de jouer sur leur précision. On trouve peu de référence dans la littérature mathématique française (à propos de l’analyse asymptotique des fentes minces). On peut néanmoins citer la thèse de Tatout [84] (qui n’a toutefois malheureusement pas débouché sur des publications) qui s’est intéressé tant du point de vue mathématique que numérique au problème que nous avons choisi de considérer dans ce travail. Cette thèse constitue donc un premier point de référence pour nos travaux. On trouve davantage de contributions dans la littérature russe et britannique. Ces deux écoles ont développé des techniques de développements asymptotiques raccordés qui sont assez largement utilisées dans cette thèse (voir deuxième et troisième partie). En particulier, l’article de McIver et Rawlins [70] considère un problème très proche du nôtre et propose une analyse similaire à celle que nous développerons dans la deuxième partie, sans toutefois aller jusqu’à l’obtention de résultats rigoureux.

Venons-en maintenant à la description des travaux qui constituent cette thèse. Signalons tout d’abord, pour circonscrire la difficulté à la problématique du modèle de fente, que nous avons choisi de nous restreindre à un problème modèle simple : celui de l’équation des ondes scalaires bidimensionnelles munie des conditions aux limites de Neumann homogène (au bord du domaine

de propagation—nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 quant à la pertinence de ces choix). Dans un tel cas de figure, un modèle de fente consistera donc à coupler un modèle de propagation 2D avec un modèle de propagation 1D dans la fente. Nous avons également opté pour le régime harmonique, c’est à dire pour des solutions particulières de la forme

$$u(x) \exp i\omega t, \quad (1.1)$$

où  $\omega > 0$  désigne la pulsation qui est une donnée du problème. L’inconnue  $u$  est alors régie par l’équation de Helmholtz.

### Plan de la thèse.

Les deux premières parties de la thèse sont aussi les deux principales. Elles concernent la conception et l’analyse de modèles de fentes.

Dans la première, nous proposons des modèles de fente par raccordement brutal entre le modèle 1D dans la fente et le modèle 2D hors de celle-ci. Les conditions de raccord que nous proposons sont essentiellement guidées par l’intuition. Nous verrons qu’elles ne sont toutefois pas uniques et qu’elles débouchent sur des modèles qui sont sans doute les plus proches de ceux développés par Taflove. L’analyse complète de ces modèles permet notamment de justifier ou de démontrer leur validité, mais aussi d’en situer les limites.

Dans la deuxième partie, nous avons cherché à concevoir des modèles de fente plus précis. La conclusion de notre travail est qu’il est effectivement possible de mettre au point des modèles de fente de précision arbitraire à condition toutefois d’intercaler entre les domaines 2D et 1D des zones bouchons sur lesquelles on résoudra des problèmes intermédiaires. Pour ce faire, nous avons suivi la démarche classique pour l’établissement de modèles approchés :

- choix d’une heuristique adaptée débouchant sur un développement asymptotique de la solution ;
- exploitation des développements formels pour concevoir des modèles de fente ;
- justification rigoureuse des modèles proposés.

Cette démarche nous a conduit à nous plonger dans les affres et les délices des techniques des développements asymptotiques raccordés (“matched asymptotic expansions”) qui sont relativement absentes des travaux de l’école française d’analyse. Par rapport aux quelques travaux existants (nous pensons en particulier à l’article de McIver et Rawlins), notre apport se situe sur deux plans :

- nous avons établi un développement asymptotique complet avec l’intégralité des termes ;
- nous avons établi rigoureusement l’existence des termes du développement asymptotique et justifié mathématiquement la validité des développements formels.

Un dernier point, sur lequel nous espérons avoir fait oeuvre utile, réside dans une présentation nouvelle de la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le contexte plus particulier des modèles de fente. Au premier abord, cette méthode apparaît souvent comme relativement peu intuitive. Nous espérons avoir contribué à lever le voile sur les mystères qu’elle semblait receler

La troisième partie concerne les résonances de fente. Les justifications mathématiques de nos modèles de fente (tant dans la première partie que dans la deuxième partie) ont été menées dans le cas d’une fente semi-infinie. Une extension de nos démonstrations au cas de fentes finies se heurte à un obstacle. Pour certaines fréquences, il apparaît un phénomène de résonance. Cette difficulté n’est pas purement technique mais liée à un phénomène physique. Ces résonances ont déjà été observées dans la littérature physique, on renverra notamment le lecteur aux travaux de Harrington [48]. Nous proposons dans cette dernière partie un éclairage mathématique, conforté par des simulations numériques, de ces phénomènes dans le cas des fréquences de résonance. L’analyse asymptotique de la propagation des ondes à travers une fente mince doit être modifiée et débouche sur des résultats différents.



## Première partie

# Modèles de raccord brutal 1D-2D pour l'approximation des problèmes de fentes : justification des modèles unidimensionnels



# Chapitre 2

## Dérivation du problème approché

### Sommaire

---

<b>2.1 Le problème modèle</b> . . . . .	<b>8</b>
2.1.1 Présentation du problème modèle . . . . .	8
2.1.2 Application 1 : acoustiques 2D . . . . .	10
2.1.3 Application 2 : électromagnétisme 2D . . . . .	10
2.1.4 Application 3 : les guides d'ondes électromagnétiques . . . . .	12
<b>2.2 Construction du modèle approché : conditions de transmission 2D-1D</b>	<b>13</b>
<b>2.3 Dérivation du modèle approché de propagation 1D pour une fente</b>	
<b>courbe à section constante</b> . . . . .	<b>18</b>
2.3.1 La technique directe . . . . .	19
2.3.2 Méthode des développements asymptotiques formels . . . . .	19
2.3.3 Comparaison des deux modèles . . . . .	22

---

**Résumé :** Dans ce premier chapitre, nous présentons, dans la section 2.1, les problèmes modèles, basés sur l'équation de Helmholtz scalaire, qui feront l'objet du reste de l'étude. Nous y mentionnons les domaines d'application concernés (acoustique 2D, électromagnétisme 2D, guides d'ondes) et justifions notamment par le biais de résultats numériques que nous nous restreignons à la condition de Neumann homogène sur le bord du domaine de propagation. La section 2.2 est la principale de ce chapitre. Elle est consacrée à la conception de modèles approchés de transmission entre des équations 2D à l'extérieur de la fente et 1D dans la fente. Nous introduisons en particulier les notions de raccord de Dirichlet ou de Neumann au sens faible. La section 2.3 est dédiée à la construction de modèles approchés 1D dans la fente (supposée courbe et de hauteur constante).

## 2.1 Le problème modèle

### 2.1.1 Présentation du problème modèle

Dans ce travail, nous considérons le modèle de propagation le plus simple possible : les équations des ondes bidimensionnelles.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F, \quad (2.1)$$

où nous supposons que la vitesse de propagation est 1. Nous nous plaçons en régime temporel et considérons donc la réponse pour  $t \rightarrow +\infty$  à une source de la forme :

$$F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) \cdot \exp(-i \omega t), \quad (2.2)$$

où la pulsation  $\omega > 0$  est une donnée du problème, reliée à la longueur d'onde  $\lambda$  par :

$$\omega \lambda = 2 \pi. \quad (2.3)$$

Dans (2.2), nous supposons que  $f$  est une fonction à support compact, disjoint du domaine de fente. Enfin nous recherchons la solution de ce problème sous la forme :

$$U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \cdot \exp(-i \omega t), \quad (2.4)$$

Ainsi  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz :

$$-\Delta u - \omega^2 u = f. \quad (2.5)$$

Dans les applications, les sources typiques sont pour la plupart des régularisations de  $\delta$ -fonctions modélisant des sources quasi-ponctuelles.

Pour les conditions aux limites, nous considérons les conditions de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (2.6)$$

Les conditions de Neumann sont, à plusieurs points de vue, plus intéressantes que les autres conditions aux limites (Dirichlet, Robin,...). En particulier, ce sont les seules conditions aux limites permettant à la solution d'avoir une nature propagative et non évanescence à l'intérieur de la fente. Ceci est dû au fait que la fente se comporte comme un guide d'onde dont la première fréquence de coupure est 0. Illustrons ce fait à l'aide de quelques clichés de simulations numériques. Sur le domaine de propagation (incluant une fente droite de longueur  $L \in \mathbb{R}$  et de hauteur  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ) :

$$\overline{\Omega_\varepsilon} = \overline{\Omega} \cup \overline{\mathcal{O}_\varepsilon} \cup \overline{\Omega'} \text{ avec } \Omega = ]-\infty, 0[_x \times \mathbb{R}_y, \mathcal{O}_\varepsilon = ]0; L[_x \times ]0; \varepsilon[_y, \Omega = ]L; +\infty[_x \times \mathbb{R}_y, \quad (2.7)$$

nous représentons pour plusieurs valeurs du rapport hauteur de la fente sur longueur d'onde ( $\varepsilon/\lambda$ ), les champs totaux (leurs approximation numérique calculées à l'aide d'une méthode conventionnelle d'éléments finis) induits par une onde plane d'incidence normale. Nous utilisons comme condition aux limites, les conditions de Neumann homogène à gauche et de Dirichlet à droite.

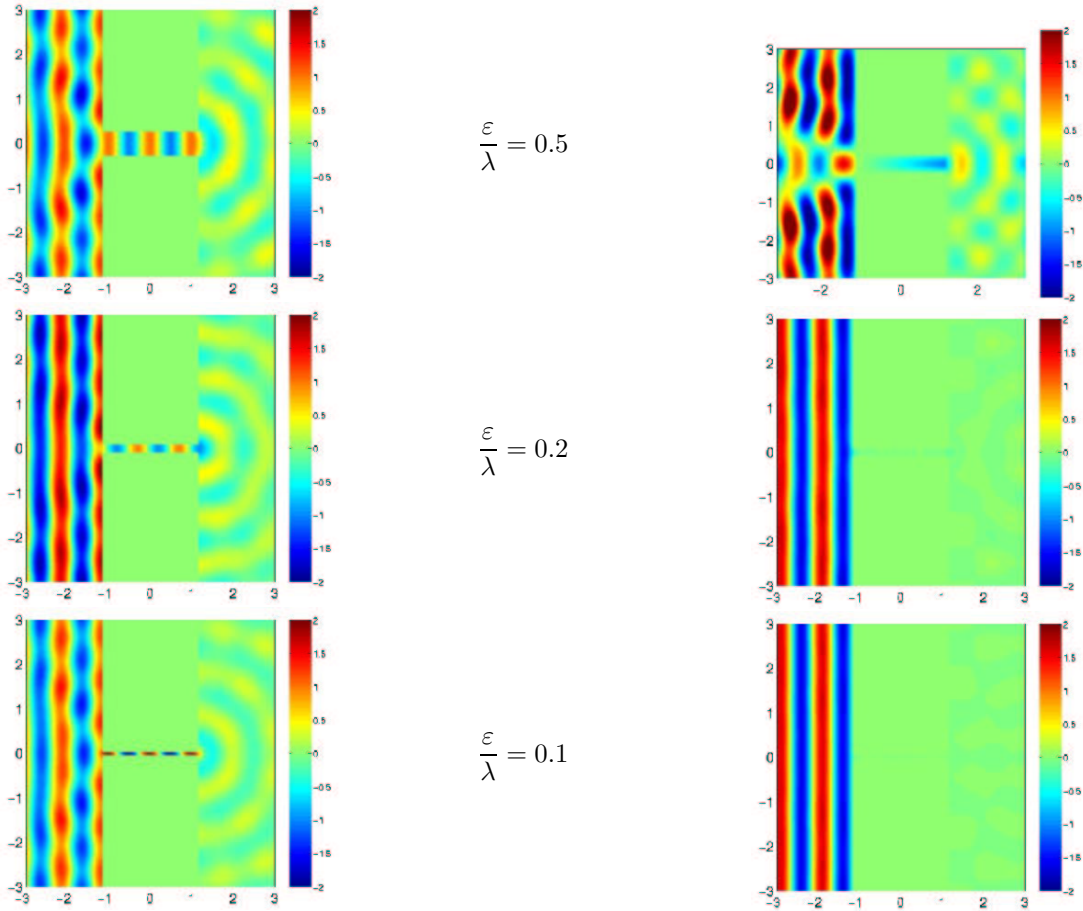


FIG. 2.1 – simulation numériques pour les conditions aux limites de Neumann (à gauche) et de Dirichlet (à droite)

Seulement dans le cas des conditions de Neumann, la fente a une influence sur l'allure générale de la solution (même pour ces valeurs assez grandes de  $\varepsilon$ ). Cet effet est notable, d'une part pour le champ diffracté ( $x < 0$ ) et d'autre part pour le champ transmis ( $x > L$ ).

Ce cadre, Helmholtz bidimensionnel, a été introduit car, tout en étant simple, il permet de faire apparaître les difficultés spécifiques aux fentes. Toutefois, comme nous allons le voir dans les trois paragraphes suivants, ce modèle a des applications pratiques classiques. En acoustique, ce modèle correspond à la propagation des ondes dans un milieu à paroi rigide [25]. En électromagnétisme 2D, (champs ne dépendant pas de  $z$ ), le système de Maxwell, régissant le champ électrique  $(E_x, E_y, E_z)(x, y)$  et le champ magnétique  $(B_x, B_y, B_z)(x, y)$  munis des conditions aux limites correspondant aux matériaux parfaitement conducteurs -c.f. [72]- peut être découpé en deux systèmes. Le premier est relatif à  $(E_x, E_y, B_z)$  le deuxième à  $(B_x, B_y, E_z)$ . La résolution de chacun d'eux peut se réduire à la résolution d'une équation scalaire vérifiée par  $E_z$  et  $B_z$ , qui sont orthogonaux au plan. On pourra se référer à [8] pour un cas très similaire. Citons de plus l'étude des guides d'ondes (acoustiques ou électromagnétiques), dont l'étude se ramène à des problèmes de Helmholtz bidimensionnels (c.f. [52]).

Nous présenterons succinctement le cas de l'acoustique au paragraphe 2.1.2, le cas des équations de Maxwell 2D au paragraphe 2.1.3 et le cas des guides d'ondes électromagnétiques au paragraphe 2.1.4.

Dans les trois paragraphes qui suivent,  $\Omega_\varepsilon$  désigne un domaine de propagation bidimensionnel



contenant une fente (dans le cas droit, nous en avons déjà donné la définition en (2.7) ; pour des situations plus complexes, on pourra se référer à la section 2.2).

### 2.1.2 Application 1 : acoustiques 2D

Les équations de propagation des ondes acoustiques 2D dans l'air et pour de faibles perturbations s'écrivent pour la pression  $p$

$$p : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (2.8)$$

sous la forme :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta p(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.9)$$

où  $c$  désigne la vitesse de propagation du son et  $F, \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{C}$ , un terme source (dans toute sa généralité : onde plane incidente, terme source surfacique).

Nous munissons cette équation au choix des conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, & \text{(bord parfaitement mou),} \\ \frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, & \text{(paroi parfaitement rigide).} \end{cases} \quad (2.10)$$

Si nous supposons que les variables ont les dépendances suivantes :

$$p(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \exp -ikt, \quad (2.11)$$

nous sommes ramenés à résoudre au choix soit le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) - k^2 c^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ u(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.12)$$

soit :

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) - k^2 c^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.13)$$

La résolution de la propagation des ondes acoustiques de pression en domaine fréquentiel, pour les conditions aux limites usuelles, se ramène donc à la résolution de deux équations de Helmholtz et entre donc dans le cadre de l'étude qui suit.

### 2.1.3 Application 2 : électromagnétisme 2D

Etant donné la densité de courant électrique  $\mathbf{j}, \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^3$ , et la densité de charge  $\rho, \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ , vérifiant l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div}_{3D} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.14)$$

nous recherchons, le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{E} : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^3, \\ \mathbf{B} : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^3, \end{cases} \quad (2.15)$$

solutions des équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}_{3D} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \operatorname{div}_{3D} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0}, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{rot}_{3D} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \operatorname{div}_{3D} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

et vérifiant sur  $\partial\Omega_\varepsilon$  les conditions aux limites (conducteurs parfaits) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

où si nous notons les trois composantes d'un vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{C}^3$   $v_x, v_y$  et  $v_z$ , les opérateurs divergence et rotationnel désignent les opérateurs différentiels :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{3D} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_x}{\partial x}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(\mathbf{x}, t), & \\ (\mathbf{rot}_{3D} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))_x = \frac{\partial v_z}{\partial y}(\mathbf{x}, t), & \\ (\mathbf{rot}_{3D} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))_y = -\frac{\partial v_z}{\partial x}(\mathbf{x}, t), & \\ (\mathbf{rot}_{3D} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))_z = \frac{\partial v_y}{\partial x}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(\mathbf{x}, t), & \end{array} \right. \quad (2.18)$$

le vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  désigne à la fois le vecteur  $(\mathbf{t}, 0)$  où  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangent dans  $\mathbb{R}^2$  à  $\partial\Omega_\varepsilon$  et le vecteur  $(\mathbf{0}, 1)$ ; le vecteur  $\boldsymbol{\nu}$  désigne le vecteur  $(\mathbf{n}, 0)$  où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à  $\partial\Omega_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Nous supposons maintenant que toutes les variables ont la dépendance temporelle suivante

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \exp -\mathbf{i}kt, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.19)$$

Ceci amène au système d'équations qui se sépare naturellement en deux parties :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}); E_y(\mathbf{x}); 0) + (0; 0; E_z(\mathbf{x})), & \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) = (0; 0; B_z(\mathbf{x})) + (B_x(\mathbf{x}); B_y(\mathbf{x}); 0). & \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Le couple  $(E_x(\mathbf{x}); E_y(\mathbf{x}); 0)$  et  $(0; 0; B_z(\mathbf{x}))$  s'appelle mode *transverse magnétique* (le champ magnétique est perpendiculaire au plan de propagation). Le couple  $(0; 0; E_z(\mathbf{x}))$  et  $(B_x(\mathbf{x}); B_y(\mathbf{x}); 0)$  se nomme mode *transverse électrique*.

Remarquons que si nous connaissons  $B_z(\mathbf{x})$  et  $E_z(\mathbf{x})$ , il vient  $(E_x(\mathbf{x}); E_y(\mathbf{x}))$  et  $(B_x(\mathbf{x}); B_y(\mathbf{x}))$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial B_z}{\partial y}(\mathbf{x}) = \mu_0 j_x(\mathbf{x}) - \mathbf{i} k \mu_0 \varepsilon_0 E_x(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x}(\mathbf{x}) = \mu_0 j_y(\mathbf{x}) - \mathbf{i} k \mu_0 \varepsilon_0 E_y(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (2.21)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial E_z}{\partial y}(\mathbf{x}) = \mathbf{i} k B_x(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x}(\mathbf{x}) = \mathbf{i} k B_y(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Les champs  $B_z(\mathbf{x})$  et  $E_z(\mathbf{x})$  vérifient les équations :

$$\begin{cases} -\Delta B_z(\mathbf{x}) - k^2 \mu_0 \varepsilon_0 B_z(\mathbf{x}) = \mu_0 \left( \frac{\partial j_y}{\partial x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial j_x}{\partial y}(\mathbf{x}) \right), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial B_z}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.23)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta E_z(\mathbf{x}) - k^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_z(\mathbf{x}) = -\mathbf{i} k \mu_0 j_z, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ E_z(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.24)$$

La résolution des équations de Maxwell est équivalente à la résolution de deux problèmes de Helmholtz. Le premier, relatif au mode transverse magnétique, est muni des conditions aux limites de Neumann. Le deuxième, relatif au mode transverse électrique, est muni des conditions aux limites de Dirichlet.

### 2.1.4 Application 3 : les guides d'ondes électromagnétiques

Nous nous plaçons ici sur un domaine spatial cylindrique tridimensionnel

$$\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \quad (2.25)$$

paramétré par  $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$  et  $z \in \mathbb{R}$ . Nous nous intéressons au problème suivant.

Etant donné la densité de courant électrique  $\mathbf{j}$ ,  $\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^3$  et la densité de charge  $\rho$ ,  $\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, z, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, z, t) = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.26)$$

nous recherchons, le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{E} : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^3, \\ \mathbf{B} : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^3, \end{cases} \quad (2.27)$$

solutions des équations de Maxwell 3D munies des conditions aux limites de conducteur parfait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, z, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, z, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, z, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, z, t)}{\varepsilon_0}, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}, z, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}, z, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, z, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, z, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, z, t) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, z, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon, z \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

où  $\operatorname{rot}$  et  $\operatorname{div}$  désignent les opérateurs différentiels rotationnel et divergence 3D classiques (dans les variables  $(\mathbf{x}, z)$ ).

Nous restreignons notre étude aux solutions et données de la forme

$$u(\mathbf{x}, z, t) = u(\mathbf{x}) \exp(\mathbf{i}k_z z - \mathbf{i}k_t t), \quad (2.29)$$

ce qui correspond à une propagation à la vitesse  $k_t/k_z$  dans la direction de l'axe  $z$  ( $k_z$  est un nombre d'ondes et  $k_t$  une pulsation). Dans la suite chaque vecteur sera représenté à l'aide de ces trois coordonnées :

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z). \quad (2.30)$$

Il est classique de ramener la résolution du système complet à la recherche des composantes longitudinales (à la direction de propagation, c'est à dire l'axe  $z$ ) du champ électrique  $E_z$  et du champ magnétique  $B_z$ . Pour obtenir ces deux champs scalaires, nous devons résoudre tout d'abord les systèmes d'équations différentielles :

$$\begin{cases} -\Delta B_z(\mathbf{x}) - (k_t^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_x^2) B_z(\mathbf{x}) = \mu_0 \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x} \right), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial B_z}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.31)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta E_z(\mathbf{x}) - (k_t^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_x^2) E_z(\mathbf{x}) = -i k_t \mu_0 j_z - \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ E_z(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.32)$$

Puis, les champs vectoriels  $(E_x, E_y)$  et  $(B_x, B_y)$  sont déterminés par la résolution du système matriciel :

$$\begin{cases} i k_t \mu_0 \varepsilon_0 E_x(\mathbf{x}) - i k_z B_y(\mathbf{x}) = \mu_0 j_x(\mathbf{x}) - \frac{\partial B_z}{\partial y}(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ i k_t \mu_0 \varepsilon_0 E_y(\mathbf{x}) + i k_z B_x(\mathbf{x}) = \mu_0 j_y(\mathbf{x}) + \frac{\partial B_z}{\partial x}(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ i k_t B_x(\mathbf{x}) + i k_z E_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial E_z}{\partial y}(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \\ i k_t B_y(\mathbf{x}) - i k_z E_x(\mathbf{x}) = -\frac{\partial E_z}{\partial x}(\mathbf{x}), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.33)$$

Comme pour le cas bidimensionnel, il est possible de représenter la solution à partir de deux modes : transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM). Ces deux modes sont construits par linéarité à partir de (2.33). Le mode TE (resp. TM) a un champ électrique (resp. magnétique) orthogonal à la direction de propagation (l'axe  $z$ ). Ils s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} (E_x^{TE}(\mathbf{x}), E_y^{TE}(\mathbf{x}), 0) \text{ et } (B_x^{TE}(\mathbf{x}), B_y^{TE}(\mathbf{x}), B_z(\mathbf{x})), \\ (E_x^{TM}(\mathbf{x}), E_y^{TM}(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x})) \text{ et } (B_x^{TM}(\mathbf{x}), B_y^{TM}(\mathbf{x}), 0). \end{cases} \quad (2.34)$$

**Remarque 2.1** Notons que la notation peut sembler opposé au cas purement bidimensionnel (c.f. paragraphe 2.1.3). Toutefois, l'idée est la même. Ce sont la ou les directions de propagation qui comptent pour définir quelles sont la ou les directions transverses.

**Remarque 2.2** Evoquons le cas dégénéré  $k_t/k_z = \pm 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$  (c'est à dire où la vitesse longitudinale de l'onde est celle de la lumière). Il peut y avoir apparition d'un mode transverse électromagnétique (à composantes longitudinales nulles  $E_z^{TEM} = 0$  et  $B_z^{TEM} = 0$ ). Remarquons juste que le système d'équations (2.33) ne permet plus de déterminer les composantes transverses du champ.

**Remarque 2.3** Ce calcul, déjà effectué par Tatout [84], permet d'expliquer pourquoi les fentes, ayant une structure cylindrique, sont couramment utilisées dans l'industrie comme des polarisateurs. En effet, il n'est transmis à travers la fente seulement le mode TE (généralisé par  $B_z$  qui vérifie la condition aux limites de Neumann) et non le mode TM (généralisé par  $E_z$  qui vérifie les conditions aux limites de Dirichlet).

## 2.2 Construction du modèle approché : conditions de transmission 2D-1D

Commençons par décrire la géométrie, du problème et introduisons quelques notations. Nous supposons que nous sommes en 2D ( $\mathbf{x} = (x, y)$  désigne le point courant de  $\mathbb{R}^2$ ) et que le domaine

de propagation  $\Omega_\varepsilon$  est composé de trois domaines connectés :

$$\overline{\Omega}_\varepsilon = \overline{\Omega} \cup \overline{\mathcal{O}_\varepsilon} \cup \overline{\Omega'}, \quad (2.35)$$

où  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont deux demi plans parallèles distants de  $L > 0$ .

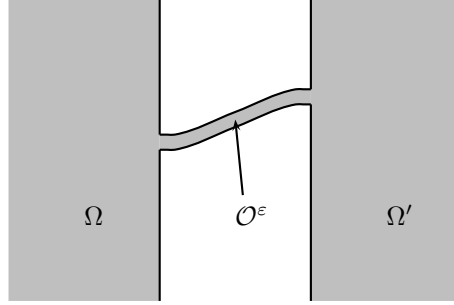


FIG. 2.2 – Géométrie du problème et notations

$$\Omega = ]-\infty, 0[ \times \mathbb{R}, \quad \Omega' = ]L, +\infty[ \times \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

et où  $\mathcal{O}_\varepsilon$  est une fente courbe de hauteur  $\varepsilon$  qui joint deux demis plans (c.f. figure 2.2). Pour être plus précis, nous avons besoin d'introduire de la géométrie. Nous introduisons tout d'abord une courbe  $\mathcal{C}$  de longueur finie  $\tilde{L} \geq L$ , paramétrée en variable curviligne  $s$  :

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} = F(s), s \in ]0, \tilde{L}[ \}, \quad (2.37)$$

où la fonction  $F = (F_x, F_y)^t \in C^2([0, \tilde{L}]; \mathbb{R}^2)$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \forall s \in ]0, \tilde{L}[, \quad |F'(s)| = 1, \\ (ii) \quad F(0) = A \equiv (0, 0)^t, \quad F(\tilde{L}) = B \equiv (L, h)^t \quad \text{avec } h \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ (iii) \quad F'(0) = F'(\tilde{L}) = (1, 0), \\ (iv) \quad F \text{ est injectif de } ]0, \tilde{L}[ \text{ dans } ]0, L[ \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Dans (2.38), (ii) indique que  $\mathcal{C}$  connecte  $\Omega$  et  $\Omega'$  ( $A$  et  $B$  étant les points de connexion), (iii) indique que  $\mathcal{C}$  est normale à  $\Omega$  et  $\Omega'$  et (iv) signifie que  $\mathcal{C}$  n'a pas de points doubles et ne pénètre pas dans  $\Omega$  et  $\Omega'$ . Nous introduisons le vecteur tangent et le vecteur normal à  $\mathcal{C}$  au point  $F(s)$ ,

$$t(s) = F'(s) = (F'_x(s), F'_y(s)), \quad n(s) = (-F'_y(s), F'_x(s)) \quad (2.39)$$

et la courbure  $c(s)$  (qui correspond au rayon de courbure  $R(s) = |c(s)|^{-1}$ ) :

$$c(s) = F''_x(s) F'_y(s) - F'_x(s) F''_y(s). \quad (2.40)$$

Notons  $R_*$  le minimum de ce rayon de courbure :

$$R_* = \min_{s \in ]0, \tilde{L}[} R(s) > 0. \quad (2.41)$$

A  $\varepsilon > 0$  donné, nous introduisons la transformation :

$$\left| \begin{array}{l} \Phi : ]0, \tilde{L}[ \times ]0, \varepsilon[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (s, \nu) \longmapsto F(s) + \nu n(s). \end{array} \right. \quad (2.42)$$

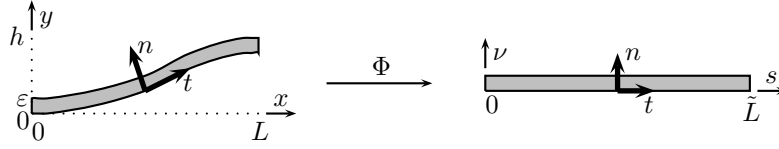


FIG. 2.3 – Paramétrisation de la fente courbe.

dont le jacobien est donné par  $J_\Phi(s, \nu) = 1 - \nu c(s)$ . Par conséquent, dès que  $\varepsilon < R_*$ ,  $\Phi$  est injectif et on peut définir  $\mathcal{O}_\varepsilon$  comme :

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{ x = \Phi(s, \nu), s \in ]0, \tilde{L}[ , \nu \in ]0, \varepsilon[ \}. \quad (2.43)$$

La paire  $(s, \nu)$  constitue un système de coordonnées locales pour  $\mathcal{O}_\varepsilon$  (voir figure 2.3) et  $\Phi$  est une bijection de  $]0, \tilde{L}[ \times ]0, \varepsilon[$  dans  $\mathcal{O}_\varepsilon$ . En particulier, une fonction  $u$  définie dans  $\mathcal{O}_\varepsilon$  peut être identifiée à une fonction  $u(s, \nu)$ .

Nous supposons pour simplifier, ceci n'est pas restrictif, que le domaine de propagation est homogène et de vitesse de propagation 1. Nous supposons qu'une onde harmonique de pulsation  $\omega > 0$  est émise par un terme source  $f$  à support compact inclus dans le demi plan  $\Omega$ . C'est pourquoi, la solution  $u^\varepsilon$  dans  $\Omega_\varepsilon$  obéit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.44)$$

avec la condition de radiation à l'infini. ( $S_R$  est le cercle de rayon  $R$ ) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R \cap \Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} - i\omega u^\varepsilon \right|^2 d\sigma = 0, \quad (r = |\mathbf{x}|). \quad (2.45)$$

Il est bien connu que le problème ((2.44),(2.45)) admet pour tout  $f \in L^2(\Omega)$  à support compact une unique solution  $u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega_\varepsilon)$ . De plus, pour des raisons à la fois pratiques et théoriques, le problème peut être réduit à un domaine borné, à l'aide de conditions artificielles posées sur deux demis cercles fictifs :

$$\begin{cases} \Gamma_R = \{ \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega / |\mathbf{x} - A| = R \}, \\ \Gamma'_R = \{ \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega' / |\mathbf{x} - B| = R \}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Nous rappelons seulement le résultat qui est assez classique. Par séparation de variables en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , il est possible d'écrire une condition aux limites exacte sur  $\Gamma_R$  et  $\Gamma'_R$ , dès que  $R$  est assez grand pour que le support de la source  $f$  soit inclus dans  $\Omega_R$  (c.f. (2.51)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} + T_R(u^\varepsilon) = 0, & \text{sur } \Gamma_R, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} + T'_R(u^\varepsilon) = 0, & \text{sur } \Gamma'_R, \end{cases} \quad (2.47)$$

où  $T_R \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$  et  $T'_R \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma'_R), H^{-1/2}(\Gamma'_R))$  sont deux opérateurs non locaux (DtN) qui sont connus explicitement [56]. Donnons l'expression de  $T_R$  (Il est clair qu'elle

est la même pour  $T'_R$  à quelques modifications évidentes près). Si le demi cercle  $\Gamma_R$  est paramétré par  $\theta \in ]0, \pi[$ , nous avons :

$$T_R : \phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \psi_n(\theta) \quad \mapsto \quad T_R \phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) \phi_n \psi_n(\theta), \quad (2.48)$$

où nous avons noté :

$$\begin{cases} \psi_0(\theta) = \sqrt{\frac{1}{R}}, & \psi_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{R}} \cos(n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \mu_n^R(\omega) = -\omega \frac{H_n^{(1)' }(\omega R)}{H_n^{(1)}(\omega R)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.49)$$

Dans (2.49),  $H_n^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce [63]. Nous rappelons que  $\{\psi_n, n \geq 0\}$  forme une base de  $H^s(\Gamma_R)$  pour tout  $s < 3/2$  [28], qui est orthonormale dans  $L^2(\Gamma_R)$ . Bien entendu, l'utilisation de la condition de radiation à une distance finie (2.47), nous permet de réduire le problème à :

$$\Omega_\varepsilon^R = \Omega_R \cup \mathcal{O}_\varepsilon \cup \Omega'_R, \quad (2.50)$$

où

$$\begin{cases} \Omega_R = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega / |\mathbf{x} - A| < R\}, \\ \Omega'_R = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega' / |\mathbf{x} - B| < R\}. \end{cases} \quad (2.51)$$

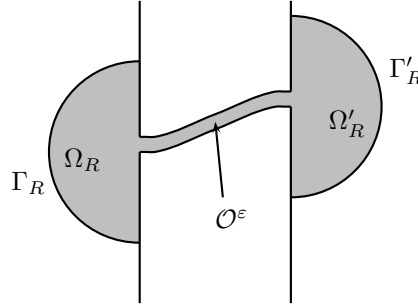


FIG. 2.4 – Le domaine tronqué  $\Omega_\varepsilon^R$ .

L'idée pour la construction du modèle approché consiste à supposer qu'en première approximation le modèle consiste à considérer la solution dans la fente comme constante à  $s$  donné ( $u^\varepsilon$  ne dépend que de  $s$  à l'intérieur de la fente). Autrement dit, nous faisons l'approximation unidimensionnelle :

$$u^\varepsilon(s, \nu) \sim U^\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(s, \nu) d\nu, \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.52)$$

Pour obtenir l'équation vérifiée par  $U^\varepsilon$ , nous intégrons l'équation de Helmholtz suivant  $\nu$ , écrite en coordonnées curvilignes :

$$-\frac{1}{1 + \nu c(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right) - \frac{1}{1 + \nu c(s)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( [1 + \nu c(s)] \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right) - \omega^2 u^\varepsilon = 0. \quad (2.53)$$

En prenant en compte les conditions aux limites, nous tirons :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, \varepsilon) = 0, \quad (2.54)$$

et utilisant l'approximation (2.52), nous obtenons l'équation de propagation 1D :

$$-\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\varepsilon c(s)} \operatorname{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{dU^\varepsilon}{ds} \right) - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = 0. \quad (2.55)$$

Une version plus détaillée de ce calcul ainsi que des modèles de propagation 1D alternatifs sont présentés à la section 2.3.

Introduisons maintenant :

$$\Sigma_\varepsilon = \{(0, y) / 0 < y < \varepsilon\} \subset \partial\Omega \quad (2.56)$$

et

$$\Sigma'_\varepsilon = \{(L, y) / h < y < h + \varepsilon\} \subset \partial\Omega'. \quad (2.57)$$

Nous nous proposons de résoudre le système d'équations suivant : (défini sur le domaine indépendant de  $\varepsilon$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon : \Omega \cup \Omega' \rightarrow \mathbf{C} \text{ et } U^\varepsilon : I = ]0, \tilde{L}[ \rightarrow \mathbf{C} \text{ tels que :} \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \cup \Omega', \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon \cup \partial\Omega' \setminus \Sigma'_\varepsilon, \\ \tilde{u}^\varepsilon \text{ vérifie la condition de radiation (2.45) à l'infini,} \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\varepsilon c(s)} \operatorname{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = 0, \quad s \in I, \end{array} \right. \quad (2.58)$$

ce que nous complétons avec des conditions de transmission entre le modèle 1D et le modèle 2D aux points  $A$  et  $B$ . Ces conditions de transmission doivent être consistantes avec la continuité de  $u^\varepsilon$  (Dirichlet) et  $\partial u^\varepsilon / \partial x$  (Neumann) à la traversée de  $\Sigma_\varepsilon$  et  $\Sigma'_\varepsilon$ . La double difficulté mathématique est la suivante :

- $\Sigma_\varepsilon$  et  $\Sigma'_\varepsilon$  n'ont pas de sens pour  $U^\varepsilon$  : seuls les points  $A(s=0)$  et  $B(s=\tilde{L})$  ont un sens.
- Inversement, nous ne pouvons pas parler de la valeur de  $\tilde{u}^\varepsilon$  ou de  $\partial \tilde{u}^\varepsilon / \partial x$  aux points  $A$  et  $B$  (dans le cadre variationnel classique).

La solution, assez naturelle, que nous proposons, consiste à imposer les conditions de raccord à l'aide de valeurs moyennes. Pour le couplage de Dirichlet, nous relient la valeur moyenne de la fonction 2D sur les deux interfaces de la fente à la valeur aux extrémités de la fente de la fonction 1D :

$$U^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad U^\varepsilon(\tilde{L}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad (2.59)$$

La condition de couplage de Neumann impose  $\partial \tilde{u}^\varepsilon / \partial x$  constant sur  $\Sigma_\varepsilon$  et  $\Sigma'_\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = \frac{dU^\varepsilon}{ds}(0) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = -\frac{dU^\varepsilon}{ds}(\tilde{L}) \text{ sur } \Sigma'_\varepsilon. \quad (2.60)$$

Le problème aux limites ((2.58),(2.59),(2.60)), réduit à un domaine borné à l'aide de (2.47), admet un forme variationnelle dans l'espace de Hilbert :

$$W_\varepsilon^R = \{(v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \times H^1(I) / V^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} v^\varepsilon d\sigma, V^\varepsilon(\tilde{L}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} v^\varepsilon d\sigma\}.$$

Plus précisément, nous nous intéressons au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\tilde{u}^\varepsilon, U^\varepsilon) \in W_\varepsilon^R \text{ tel que, } \forall (v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in W_\varepsilon^R : \\ a_R(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + b_R(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + b'_R(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon a_I(U^\varepsilon, V^\varepsilon) = \int_\Omega f \bar{v}^\varepsilon dx, \end{array} \right. \quad (2.61)$$



où nous avons noté :

$$\begin{cases} a_R(u, v) = \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) \, dx, \\ a_I(U, V) = \int_I \left( \frac{\text{Log} [1 + \varepsilon c(s)]}{\varepsilon c(s)} \frac{dU}{dx} \frac{d\bar{V}}{dx} - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U \bar{V} \right) dx, \end{cases} \quad (2.62)$$

et où la forme bilinéaire  $b_R$  est donnée par (nous ne donnons pas la définition de  $b'_R$  qui est tout à fait similaire) :

$$b_R(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \bar{v}_n^R, \quad u_n^R = \int_{\Gamma_R} u \psi_n \, d\sigma, \quad v_n^R = \int_{\Gamma_R} v \psi_n \, d\sigma. \quad (2.63)$$

Nous utiliserons plus tard les propriétés fondamentales des formes bilinéaires  $b_R$  (ou  $b'_R$ ) qui proviennent des propriétés de signe des parties réelles et imaginaires des  $\mu_n^R(\omega)$  (ceci provient du Wronskien de  $J_n$  et  $Y_n$  et de la formule de Nicholson c.f. annexe A) :

$$\forall u \in H^1(\Omega_R), \quad \text{Re } b_R(u, u) \geq 0, \quad \text{Im } b_R(u, u) \leq 0. \quad (2.64)$$

Grâce à (2.64), c'est un simple exercice sur l'alternative de Fredholm de montrer que le problème (2.61) a une unique solution. De plus, ce problème peut être traité numériquement à l'aide d'une famille d'éléments finis ne dépendant pas de  $\varepsilon$  (la géométrie du domaine de propagation ne dépend pas de  $\varepsilon$ ). Toutefois, les simulations numériques semblent faire apparaître un phénomène classique de verrouillage numérique (la forme bilinéaire  $a_R + \varepsilon a_I$  dépend de  $\varepsilon$ ). En effet, à précision donnée, le choix du pas de maillage  $h$  est faiblement corrélé à la hauteur de la fente  $\varepsilon$  (détérioration des erreurs numériques pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $h$  fixé). On pourra ici se référer au chapitre 6 pour plus de détails.

**Remarque 2.4** *Il y a des manières alternatives d'assurer le raccord entre le modèle 1D et le modèle 2D ((2.59), (2.60)). On peut par exemple intervertir les rôles des raccords de Dirichlet et de Neumann :*

$$\tilde{u}^\varepsilon = U^\varepsilon(0) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon, \quad \tilde{u}^\varepsilon = U^\varepsilon(\tilde{L}) \text{ sur } \Sigma'_\varepsilon, \quad (2.65)$$

$$\frac{dU^\varepsilon}{dx}(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} \, d\sigma, \quad \frac{dU^\varepsilon}{dx}(\tilde{L}) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} \, d\sigma. \quad (2.66)$$

*Il est alors facile de vérifier que la formulation variationnelle de ((2.58), (2.65), (2.66)) est toujours donnée par (2.61) excepté que l'espace  $W_\varepsilon^R$  change en :*

$$W_\varepsilon^R = \{(v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \times H^1(I) / v^\varepsilon = V^\varepsilon(0) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon, v^\varepsilon = V^\varepsilon(\tilde{L}) \text{ sur } \Sigma'_\varepsilon\}.$$

*Bien entendu, des combinaisons linéaires entre ((2.59), (2.60)) et ((2.65), (2.66)) fournissent de nouvelles conditions de raccord.*

**Remarque 2.5** *Pour le cas de la fente droite, il est possible (et c'est ce que nous allons faire) d'écrire une formulation variationnelle seulement sur l'inconnue  $\tilde{u}^\varepsilon$ . Le terme  $a_I$  est remplacé par un opérateur Dirichlet Neumann associé au problème de fente.*

## 2.3 Dérivation du modèle approché de propagation 1D pour une fente courbe à section constante

Cette section constitue un approfondissement de la section 2.2. Nous y avons introduit une fente courbe  $\mathcal{O}^\varepsilon$  de hauteur constante  $\varepsilon$  paramétrée par  $s$  et  $\nu$  les variables curvilignes (c.f figure 2.3). Nous allons d'une part montrer comment on obtient par intégration par partie (2.55). D'autre part nous montrerons que l'introduction d'un développement asymptotique formel nous permet d'obtenir des modèles de fente alternatifs. Rappelons que le développement suivant n'est valide que pour un minimum de rayon de courbure assez grand :

$$\varepsilon < R_*. \quad (2.67)$$

### 2.3.1 La technique directe

Nous montrons ici comment obtenir (2.55) à partir d'une intégration par partie.

Rappelons tout d'abord que le laplacien en coordonnées curvilinéaires est donné par :

$$\Delta u = [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left( [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( [1 + \nu c(s)] \frac{\partial u}{\partial \nu} \right). \quad (2.68)$$

L'idée pour construire le modèle approché consiste à supposer que, en première approximation, la solution reste constante dans une section droite  $s = \text{constante}$ . Autrement dit, on fait l'approximation :

$$u^\varepsilon(s, \nu) \sim U^\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(s, \nu) d\nu, \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.69)$$

Pour obtenir l'équation vérifiée par  $U^\varepsilon$ , on commence par intégrer par rapport à la variable  $\nu$  l'équation :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left( [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( [1 + \nu c(s)] \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right) - [1 + \nu c(s)] \omega^2 u^\varepsilon = 0. \quad (2.70)$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial s} \int_0^\varepsilon \left( [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right) d\nu - \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \nu} \left( [1 + \nu c(s)] \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right) d\nu \\ \qquad \qquad \qquad -\omega^2 \int_0^\varepsilon [1 + \nu c(s)] u^\varepsilon d\nu = 0. \end{array} \right. \quad (2.71)$$

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, \varepsilon) = 0, \quad (2.72)$$

on obtient, par intégration par partie, tout d'abord :

$$-\frac{d}{ds} \left( \int_0^\varepsilon [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} d\nu \right) - \omega^2 \int_0^\varepsilon [1 + \nu c(s)] u^\varepsilon d\nu = 0. \quad (2.73)$$

Puis, en réinjectant l'approximation (2.69), on aboutit à l'équation 1D :

$$-\frac{d}{ds} \left( \left[ \int_0^\varepsilon \frac{d\nu}{1 + \nu c(s)} \right] \frac{dU^\varepsilon}{ds} \right) - \omega^2 \left( \left[ \int_0^\varepsilon 1 + \nu c(s) d\nu \right] U^\varepsilon \right) = 0. \quad (2.74)$$

Enfin, en intégrant, nous tirons (2.55).

### 2.3.2 Méthode des développements asymptotiques formels

Considérons  $u^\varepsilon$  solution du problème de Helmholtz posé en coordonnées curvilignes  $(s, \nu)$  :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (1 + \nu c(s))^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ (1 + \nu c(s)) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right] + (1 + \nu c(s)) \omega^2 u^\varepsilon = 0 \quad (2.75)$$

et pour  $\nu = 0$  ou  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, \nu) = 0. \quad (2.76)$$

Effectuons la normalisation suivante :

$$\nu = \varepsilon z \quad \text{et} \quad u^\varepsilon(s, \nu) = U^\varepsilon(s, z). \quad (2.77)$$

La fonction  $U^\varepsilon$  vérifie alors :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (1 + z\varepsilon c(s))^{-1} \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right] + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 + z\varepsilon c(s)) \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial z} \right] + \omega^2 (1 + z\varepsilon c(s)) U^\varepsilon = 0, \quad (2.78)$$

avec pour  $z = 0$  ou  $1$  :

$$\forall s \in I, \quad \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial z}(s, z) = 0. \quad (2.79)$$

Supposons maintenant que  $U^\varepsilon$  peut se mettre sous la forme d'un développement asymptotique formel appelé aussi Ansatz :

$$U^\varepsilon = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j U_j(s, z). \quad (2.80)$$

où tous les  $U_j$  vérifient la condition aux limites (2.79).

Injectons ce développement dans l'équation (2.78) il vient ainsi les équations (2.81) (2.83) (2.85) (2.90) et (2.94) vérifiées par les  $U_j$  :

$$\forall s \in I, \forall z \in |0, 1|, \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}(s, z) = 0. \quad (2.81)$$

et par conséquent comme  $U_0$  vérifie les conditions aux limites (2.79)

$$U_0(s, z) = U_0(s). \quad (2.82)$$

Le deuxième ordre du développement nous permet d'obtenir la dépendance de  $U_1$  en fonction de  $z$ , en effet :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ z c(s) \frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \right] = 0, \quad (2.83)$$

et grâce à (2.82) puis à (2.79) :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}(s, z) = 0 \implies U_1(s, z) = U_1(s). \quad (2.84)$$

Le troisième ordre nous fournit la dépendance de  $U_2$  en fonction de  $z$  ainsi que l'équation qui régit  $U_0$  :

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ z c(s) \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \right] + \omega^2 U_0 = 0 \quad (2.85)$$

en groupant astucieusement les termes, remarquons à l'aide de (2.84) :

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}(s, z) = -\frac{\partial^2 U_0}{\partial s^2} - \omega^2 U_0 = f(s). \quad (2.86)$$

c'est à dire :

$$\forall (s, z) \in I \times |0, 1|, \quad U_2(s, z) = a^2(s) + b^2(s) z + \frac{f(s)}{2} z^2, \quad (2.87)$$

et ainsi grâce à (2.79) :

$$U_2(s, z) = U_2(s). \quad (2.88)$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial s^2} + \omega^2 U_0 = 0. \quad (2.89)$$

Pour les ordres suivants la dépendance en  $z$  devient polynomiale, en effet :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ -z c(s) \frac{\partial U_0}{\partial s} + \frac{\partial U_1}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ z c(s) \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right] + \omega^2 U_1 + \omega^2 z c(s) U_0 = 0, \quad (2.90)$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} = z \frac{\partial}{\partial s} \left[ c(s) \frac{\partial U_0}{\partial s}(s) \right] - \frac{\partial^2 U_1}{\partial s^2}(s) - \omega^2 U_1(s) - \omega^2 z c(s) U_0. \quad (2.91)$$

On intègre cette équation pour  $z \in ]0, 1[$ , puis on assure la condition aux limites (2.79) pour  $U_3$  en  $z = 0$  et  $z = 1$  on obtient d'une part l'équation vérifiée par  $U_1$  :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial s^2}(s) + \omega^2 U_1(s) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ c(s) \frac{\partial U_0}{\partial s}(s) \right] + \frac{\omega^2 c(s)}{2} U_0 = 0. \quad (2.92)$$

et la dépendance en  $z$  de  $U_3$  (que nous donnons car c'est ce qui permettrait au lecteur de pousser le développement limité à un ordre supérieur)

$$U_3(s, z) = f(s) - \frac{z^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 U_1}{\partial s^2}(s) + \omega^2 U_1(s) \right] + \frac{z^3}{6} \frac{\partial}{\partial s} \left[ c(s) \frac{\partial U_0}{\partial s}(s) - \omega^2 c(s) U_0(s) \right]. \quad (2.93)$$

Pour l'ordre supérieur, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ z^2 (c(s))^2 \frac{\partial U_0}{\partial s} - z c(s) \frac{\partial U_1}{\partial s} + \frac{\partial U_2}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ z c(s) \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{\partial U_4}{\partial z} \right] + \omega^2 U_2 + \omega^2 z c(s) U_1 = 0. \quad (2.94)$$

Nous intégrons cette équation par rapport à  $z$  sur  $]0, 1[$  en appliquant les conditions aux limites (2.79) pour  $U_3$  et  $U_4$  :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \left[ (c(s))^2 \frac{\partial U_0}{\partial s} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ c(s) \frac{\partial U_1}{\partial s} \right] + \frac{\partial^2 U_2}{\partial s^2} + \omega^2 U_2 + \frac{\omega^2 c(s)}{2} U_1 = 0. \quad (2.95)$$

Introduisons maintenant l'approximation  $U_i^\varepsilon$  d'ordre  $i \in \mathbb{N}$  de  $U^\varepsilon$  définie par :

$$U_i^\varepsilon = \sum_{j=0}^i \varepsilon^j U_j \quad (2.96)$$

et ainsi à partir de (2.89) (2.92) et (2.95) il vient :

$U_0^\varepsilon$  ne dépend que de  $s$  et vérifie :

$$\frac{d^2 U_0^\varepsilon}{ds^2} + \omega^2 U_0^\varepsilon = 0 \quad (2.97)$$

$U_1^\varepsilon$  ne dépend que de  $s$  et vérifie :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) \frac{dU_1^\varepsilon}{ds} \right] + \frac{d^2 U_1^\varepsilon}{ds^2} + \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U_1^\varepsilon = r^1(\varepsilon), \\ r^1(\varepsilon)/\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ c(s) \frac{dU_1}{ds} \right] + \omega^2 \frac{c(s)}{2} U_1. \end{cases} \quad (2.98)$$

$U_2^\varepsilon$  ne dépend que de  $s$  et vérifie :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{d}{ds} \left[ \varepsilon^2 (c(s))^2 \frac{dU_2^\varepsilon}{ds} \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ \varepsilon c(s) \frac{dU_2^\varepsilon}{ds} \right] + \frac{d^2 U_2^\varepsilon}{ds^2} + \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U_2^\varepsilon = r^2(\varepsilon), \\ r^2(\varepsilon)/\varepsilon^3 = \frac{1}{3} \frac{d}{ds} \left[ (c(s))^2 \frac{d(U_1 + \varepsilon U_2)}{ds} \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ c(s) \frac{dU_2}{ds} \right] + \omega^2 \frac{c(s)}{2} U_2. \end{cases} \quad (2.99)$$

Nous dérivons alors des approximations de l'équation de Helmholtz dans la fente en remplaçant  $r^1(\varepsilon)$  et  $r^2(\varepsilon)$  par 0.

Nous tirons la famille d'approximations unidimensionnelles de l'équation de Helmholtz dans la fente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0 :} \quad -\frac{d^2 U^\varepsilon}{ds^2} - \omega^2 U^\varepsilon = 0, \\ \text{Ordre 1 :} \quad -\frac{d}{ds} \left( \left[ 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right] \frac{dU^\varepsilon}{ds} \right) - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad -\frac{d}{ds} \left( \left[ 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} + \frac{\varepsilon^2 (c(s))^2}{3} \right] \frac{dU^\varepsilon}{ds} \right) - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = 0. \end{array} \right. \quad (2.100)$$

Pour les ordres supérieurs, on peut remarquer que  $U_n$  dépend alors de la variable normale. Dans notre optique, le développement a un peu moins de sens. Nous venons ici de dériver des nouveaux modèles approchés pour la solution à l'intérieur de la fente. Il est tout à fait possible de remplacer (2.55) dans (2.58) par une des équations de (2.100) (choisie en fonction du degré de précision désiré).

### 2.3.3 Comparaison des deux modèles

Deux questions sont à notre avis d'intérêt :

- (i) Peut-on faire apparaître le lien qu'il existe entre les équations unidimensionnelles (2.100) et (2.55) ?
- (ii) Peut-on déterminer au moins formellement l'ordre d'approximation du modèle de fente (2.55) ?

Toute cette discussion est basée sur le développement limité de  $\text{Log}(1 + \varepsilon c(s))$  à l'ordre 3 :

$$\text{Log}(1 + \varepsilon c(s)) = \varepsilon c(s) - \frac{[\varepsilon c(s)]^2}{2} + \frac{[\varepsilon c(s)]^3}{3} + O(\varepsilon^4). \quad (2.101)$$

Ainsi nous remarquons que (2.55) peut se réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial s^2} - \omega^2 U^\varepsilon = O(\varepsilon), \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right] - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = O(\varepsilon^2), \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} + \frac{[\varepsilon c(s)]^2}{3} \right) \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right] - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = O(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (2.102)$$

Ainsi, les modèles de fente (2.100) correspondent à des développement limités aux ordre 0, 1 et 2 de (2.55).

Pour déterminer l'ordre d'approximation de (2.55) il faut tout d'abord noter les deux points suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} + \frac{\varepsilon^2 (c(s))^2}{3} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right] - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) u^\varepsilon = O(\varepsilon^3), \\ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right] + \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) u^\varepsilon \\ - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\text{Log}(1 + \varepsilon c(s))}{\varepsilon c(s)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right] - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) u^\varepsilon = O(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (2.103)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\text{Log}(1 + \varepsilon c(s))}{\varepsilon c(s)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right] - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) u^\varepsilon = O(\varepsilon^3). \quad (2.104)$$

Ainsi, l'ordre d'approximation de (2.55) est au moins 2. Pour montrer que c'est exactement 2, il faut remarquer que  $U_3$  dépend de  $z$ , ce que n'autorise pas (2.55).

# Chapitre 3

## Analyse du modèle approché : Cas d'une fente infinie

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>Derivation of the approximate model</b>	<b>27</b>
3.2.1	The general case of a finite slot	27
3.2.2	A model problem for the analysis; the semi-infinite problem	31
<b>3.3</b>	<b>Main results</b>	<b>33</b>
3.3.1	Convergence to the limit problem	34
3.3.2	Error estimates for the approximate model	35
3.3.3	About the proof	36
<b>3.4</b>	<b>Convergence of <math>u^\varepsilon</math> and <math>\tilde{u}^\varepsilon</math> to the limit half-space problem</b>	<b>37</b>
3.4.1	Preliminary technical results	37
3.4.2	Study of $u^\varepsilon - u^0$ . Proof of theorem 3.4	41
3.4.3	Study of $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$	44
<b>3.5</b>	<b>Proofs of theorems 3.9 and 3.11</b>	<b>48</b>
3.5.1	Study of the error in the half-space $\Omega$	48
3.5.2	Study of the error in the slot $\mathcal{O}_\varepsilon$	51
<b>3.6</b>	<b>Numerical results</b>	<b>52</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion and perspectives</b>	<b>55</b>

---

**Résumé :** Ce chapitre concerne la validation mathématique rigoureuse des modèles approchés introduits au chapitre précédent. Dans ce chapitre, les sections 3.1 et 3.2.1 reprennent pour l'essentiel une partie du contenu du chapitre 2. La section 3.2 concerne le problème plus particulier de la fente droite semi-infinie que nous étudions dans ce chapitre. Les principaux résultats de l'étude sont présentés au chapitre 3.3 (théorèmes 3.4, 3.9 et 3.11). Nous confrontons ces résultats à ceux du théorème 3.6 pour obtenir les tableaux 1 et 2 qui illustrent la validité des modèles approchés. La section 3.4 concerne l'étude de la convergence des solutions des problèmes approché et exact vers la solution du problème sans fente, étape préliminaire pour l'obtention des estimations d'erreur obtenues à la section 3.5. Afin de travailler dans un domaine indépendant du paramètre  $\varepsilon$ , nous réduisons l'étude au seul demi-espace via l'introduction d'un opérateur Dirichlet-Neumann défini sur le bord de la fente. Les ingrédients clés des preuves sont les lemmes de trace 3.13 à 3.15 et les lemmes de stabilité 3.16 et 3.24. Les résultats théoriques sont illustrés par les résultats numériques de la section 3.6.

L’objectif de ce chapitre, qui est le chapitre principal de la première partie de la thèse, est l’analyse de la précision du modèle approché introduit au chapitre 2. J’ai choisi de reproduire intégralement le texte d’un article écrit avec Patrick Joly, accepté pour publication dans *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. J’attire l’attention du lecteur sur le fait que l’introduction de cet article (sections 3.1 et 3.2) fait doublon avec le chapitre 2 (plus précisément, le chapitre 2, est une extension de ces deux parties). Nous avons néanmoins choisi de les conserver pour faciliter la lecture de l’article.

## Asymptotic analysis of an approximate model for time harmonic waves in media with thin slots

Patrick Joly<sup>1 3</sup>, Sébastien Tordeux<sup>1 2 4</sup>

**Abstract :** In this article, we derive a complete mathematical analysis of a coupled 1D-2D model for 2D wave propagation in media including thin slots. Our error estimates are illustrated by numerical results.

**Keywords :** slit, slot, wave equation, Helmholtz equation, approximate model

**AMS :** 35J05, 65N15, 78M30, 78M35

### 3.1 Introduction

In practical applications concerning both electromagnetic or acoustic waves, many wave propagation problems involve the presence of structures whose at least one space dimension of characteristic length, denoted  $\varepsilon$ , is small with respect to the wave length  $\lambda$  : we think for instance to highly oscillating coefficients, thin layers, thin screens, wires or thin slots, which is the topic we address in this work. For the numerical simulation of such wave propagation problems, it is natural to look for approximate or “effective” models that should permit to avoid to mesh the computational domain, even locally, at the scale of  $\varepsilon$ . In the first three cases, there exist well established mathematical techniques that permit to construct the effective models :

- the homogenization theory [11], [77] for highly heterogeneous media,
- the equivalent boundary (or transmission) conditions for thin layers [7], [10], [33], [80]
- the boundary integral equation theory for thin screens [1], [16].

In the case of wires, there exist so-called wire-approximation models that have been developed in particular by the electric engineering community (see [49], [82], [81] and references therein) but the mathematical justification of such models appears as much less mature than in the three previous situations (let us mention however [23] or [76]). One meets a similar situation for the treatment of thin slots. Let us take the example of a thin slot in a 2D context. The geometry of the problem is represented by figure 3.1.

---

\*UMR POEMS, Projet Ondes, INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, F-78153 Le Chesnay cedex, France,

†UMR POEMS, SMP, ENSTA, 32 Boulevard Victor 75739 Paris cedex 15, France,

‡(patrick.joly@inria.fr).

§(sebastien.tordeux@inria.fr).

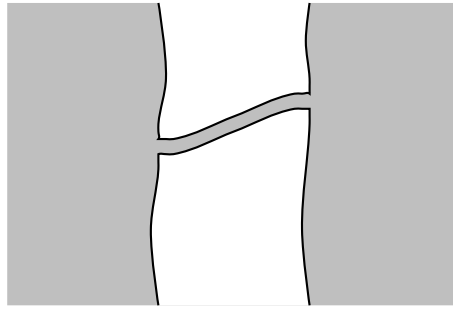


FIG. 3.1 – Geometry of the propagation domain.

A first application is the microwave shielding of thin slots. From the physical point of view, the domain of validity is typically given by :

$$\lambda/1000 < \varepsilon < \lambda/10, \quad \varepsilon < L/10 \quad \text{and} \quad \lambda/10 < L < 10 \lambda, \quad (3.1)$$

where  $\lambda$  is the wave length,  $\varepsilon$  is the width of the slot and  $L$  the length of the slot. One can refer to [83] for examples. A second application in electromagnetism corresponds to the so-called flanged waveguide antenna which corresponds to a semi-infinite straight slot. This case, that has been studied in [57] in a non asymptotic context, will be analyzed in detail in this paper.

An intuitive idea is to try to derive an approximate “1D - 2D” model : a 1D model, posed on the curve that materializes the limit of the slot when  $\varepsilon$  tends to 0, for the propagation inside the slot and a 2D model for the rest of the computational domain. Such models have been designed in the engineering literature (see [17], [36], [48], [83] or [81] for a review) and are commonly used in various computational codes. However, the complete understanding and evaluation of such models suffers, to our opinion, from the following facts :

- These models are very often described at the discrete level, i.e. at the level of the numerical method that is used, and it is not always clear to identify the limit problem that one solves when the discretization parameters tend to 0.
- At the continuous level, it is not difficult to design the appropriate propagation equations for the 1D and 2D models. What is less clear is the way (not unique - see remark 3.1) one couples the two models.
- Even when the continuous approximate model is identified, there is no mathematical result, to our knowledge, that permits to evaluate the error generated by this model.

Our objective is to fill partially the gap between the theory and the application. Mathematical problems of the same nature appear in mechanics, in particular in the theory of junctions (between a 3D solid and a thin plate for instance). However, the mathematical results developed in [19] or [60] are not of the same nature that the ones we shall look for in this article. Concerning wave propagation problems, one can cite some works on the asymptotic behaviour of eigenvalues [26] or resonances [9] in geometrical situations similar to the ones we shall consider here. The mathematical work that is the closest to ours corresponds to the PhD thesis of F. Tatout (work which has not been published). In [84], from the theoretical point of view it obtains in particular some a priori estimates independent on  $\varepsilon$  which are in the same spirit (although different) from the stability results we shall establish. From the numerical point of view, he derived a finite volume scheme with a special 1D treatment of the slot but did not study the quality of this model from the mathematical point of view.

To be complete, we must mention the analytical work by the “british school” of applied mathematics on this type of problem [87], [44], [27], [70]. The aim they pursue a priori is not to derive approximate models for numerical approximation. They wish to describe as accurately as possible the behaviour of the solution with the help of analytical formulas or at least solutions of simple



canonical problems. The technique that is used is the method of matched asymptotics expansions which consists in separating the domain of propagation in several parts in which one makes different ansatz on the solution. For instance, for the slot problem, it would consist in considering three zones : the inner slot, the exterior region and a neighborhood of the end points of the slot. Such techniques permit for instance to take correctly into account the singularities of the solution. Let us mention however that, here again, the developments are essentially formal and that some analysis is needed to justify them from a functional analytic point of view. We also think that this type of technique could be used to derive effective models for numerical computation and we are currently working in this direction.

In this work, we shall consider the simplest possible propagation model, namely the 2D scalarwave equation, that can be used in acoustics of course, but also in electromagnetism if one separates the transverse electric or transverse magnetic polarizations :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F, \quad (3.2)$$

where we have assumed, for simplicity, that the propagation velocity of waves is equal to 1. We shall look at the time harmonic regime, i.e. consider a source term of the form :

$$F(x, t) = f(x) \cdot \exp(-i \omega t). \quad (3.3)$$

where the pulsation  $\omega > 0$  is a data of the problem, related to the wavelength  $\lambda$  by :

$$\omega \lambda = 2 \pi. \quad (3.4)$$

In (3.3),  $f$  denotes a compactly supported function whose support does not intersect the slot. We then look for solutions of the same form :

$$U(x, t) = u(x) \cdot \exp(-i \omega t), \quad (3.5)$$

which leads to the Helmholtz equation for the complex value function  $u$  :

$$-\Delta u - \omega^2 u = f. \quad (3.6)$$

A typical source in application is a regularized  $\delta$ -function an approximation to a point source.

For the boundary condition, we shall consider the homogeneous Neumann condition :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (3.7)$$

In some sense, it is the “only” boundary condition that permits the propagation of waves inside the slot. This is due to the fact that the slot behaves as a waveguide whose first cut-off frequency is 0.

This model is physically relevant. In acoustics, it corresponds to the so called sound hard boundary condition [25]. In 2D electromagnetism (or looks for solutions independent of the space variable  $z$ ), the Maxwell system, satisfied by the electric field  $(E_x, E_y, E_z)(x, y)$  and the electromagnetic field  $(B_x, B_y, B_z)(x, y)$  with the perfectly conducting boundary condition -see [72]-, can be decoupled into two systems. One is relative to  $(E_x, E_y, B_z)$  and the other one is relative to  $(B_x, B_y, E_z)$ . Each of these systems can be reduced to a scalar system satisfied by  $E_z$  and  $B_z$ , which are transverse to the plane. They both satisfy a Helmholtz equation with the Dirichlet boundary condition for the transverse electric field  $E_z$  and the Neumann boundary condition for the transverse magnetic field  $B_z$ . Hence, the field  $B_z$  is solution of our model. One can refer to [8] for more details.

The outline of our article is as follows. In section §3.2, we present the formal derivation of the approximate model and insist in particular on the variational nature of the coupling condition we choose. We also describe the model problem - namely the half-space problem with a semi-infinite

straight slot - that will be the object of the mathematical analysis. In section §3.3, we state our main results which concern first the asymptotic analysis of the exact solution when  $\varepsilon$  tends to 0 (subsection §3.3.1 ) and error estimates between the exact solution and the approximate one (subsection §3.3.2). Section §3.4 is devoted to the proof of the results describing the asymptotic behaviour of the exact solution (subsection §3.4.1) and of the approximate solution (subsection §3.4.2). In section §3.5, we prove the error estimates announced in subsection §3.3.2. Finally in section §3.6, we present numerical results that validate the theoretical ones. Some directions of future research are proposed in section §3.7.

## 3.2 Derivation of the approximate model

### 3.2.1 The general case of a finite slot

Let us first describe the geometry of the problem and introduce the notation. We assume that we are in 2D ( $\mathbf{x} = (x, y)$  will denote the current point of  $\mathbb{R}^2$ ) and that the domain of propagation  $\Omega_\varepsilon$  is the connected union of three domains :

$$\overline{\Omega}_\varepsilon = \overline{\Omega} \cup \overline{\mathcal{O}_\varepsilon} \cup \overline{\Omega'}, \quad (3.8)$$

where  $\Omega$  and  $\Omega'$  are two parallel half-spaces distant from  $L > 0$  :

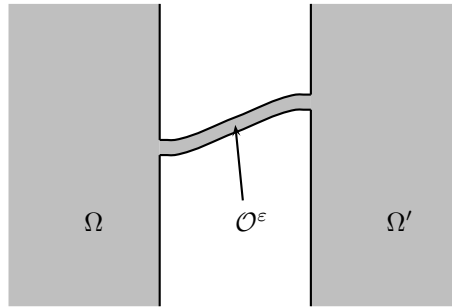


FIG. 3.2 – Geometry of the problem and notation.

$$\Omega = ]-\infty, 0[ \times \mathbb{R}, \quad \Omega' = ]L, +\infty[ \times \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

and where  $\mathcal{O}_\varepsilon$  is a curved slot of width  $\varepsilon$  that joins the two half-spaces, according to figure 3.2. To be more precise, we need to introduce some geometry. We start from a curve  $\mathcal{C}$  of finite length  $\tilde{L} \geq L$ , parameterized with its curvilinear abscissa  $s$  :

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} = F(s), s \in ]0, \tilde{L}[ \}, \quad (3.10)$$

where the function  $F = (F_x, F_y)^t \in C^2([0, \tilde{L}]; \mathbb{R}^2)$  verifies :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \forall s \in ]0, \tilde{L}[, \quad |F'(s)| = 1, \\ (ii) \quad F(0) = A \equiv (0, 0)^t, \quad F(\tilde{L}) = B \equiv (L, h)^t \quad \text{for some } h \in \mathbb{R}, \\ (iii) \quad F'(0) = F'(\tilde{L}) = (1, 0), \\ (iv) \quad F \text{ is injective from } ]0, \tilde{L}[ \text{ in } ]0, L[ \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

In (3.11), (ii) indicates that  $\mathcal{C}$  connects  $\Omega$  and  $\Omega'$  (with connecting points  $A$  and  $B$ ), (iii) indicates that  $\mathcal{C}$  is normal to  $\Omega$  and  $\Omega'$  and (iv) means that  $\mathcal{C}$  has no double points and does not penetrate  $\Omega$  or  $\Omega'$ . We introduce the tangent and normal vectors to  $\mathcal{C}$  at point  $F(s)$ ,

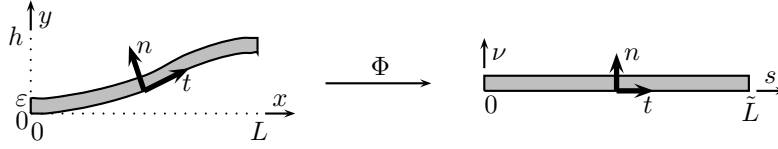


FIG. 3.3 – Parametrization of the curved slot.

$$t(s) = F'(s) = (F'_x(s), F'_y(s)), \quad n(s) = (-F'_y(s), F'_x(s)). \quad (3.12)$$

and the curvature  $c(s)$  (with corresponding radius of curvature  $R(s) = |c(s)|^{-1}$ ) :

$$c(s) = F''_x(s) F'_y(s) - F'_x(s) F''_y(s). \quad (3.13)$$

We denote  $R_*$  the minimum radius of curvature :

$$R_* = \min_{s \in ]0, \tilde{L}[} R(s) > 0. \quad (3.14)$$

For a given  $\varepsilon > 0$ , we introduce the transformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi : ]0, \tilde{L}[ \times ]0, \varepsilon[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (s, \nu) \longmapsto F(s) + \nu n(s). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

whose Jacobian is given by  $J_\Phi(s, \nu) = 1 - \nu c(s)$ . Therefore, as soon as  $\varepsilon < R_*$ ,  $\Phi$  is injective and we can define the open set  $\mathcal{O}_\varepsilon$  as :

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{ x = \Phi(s, \nu), s \in ]0, \tilde{L}[, \nu \in ]0, \varepsilon[ \}. \quad (3.16)$$

The pair  $(s, \nu)$  constitutes a local system of coordinates in  $\mathcal{O}_\varepsilon$  (voir figure 3.3) and  $\Phi$  is a bijection from  $]0, \tilde{L}[ \times ]0, \varepsilon[$  onto  $\mathcal{O}_\varepsilon$ . In particular, a function  $u$  defined in  $\mathcal{O}_\varepsilon$  can be identified to a function  $u(s, \nu)$ .

We assume, to simplify (this is not restrictive), that the propagation medium is a homogeneous medium with velocity  $c = 1$ . We assume that a time harmonic wave of pulsation  $\omega > 0$  is emitted by a source term  $f$  with compact support inside the half-space  $\Omega$ . Thus, the solution  $u^\varepsilon$  inside  $\Omega_\varepsilon$  obeys the following equations :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

as well as the outgoing radiation condition at infinity ( $S_R$  denotes the circle of radius  $R$ ) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R \cap \Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} - i\omega u^\varepsilon \right|^2 d\sigma = 0, \quad (r = |\mathbf{x}|). \quad (3.18)$$

It is well known that problem ((3.17), (3.18)) admits, for any  $f \in L^2(\Omega)$  with compact support, a unique solution  $u^\varepsilon \in H^1_{loc}(\Omega_\varepsilon)$ . Moreover, for both practical and theoretical reasons, the problem can be reduced to a bounded domain, by introducing two artificial (semi-)circular boundaries :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R = \{ \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega / |\mathbf{x} - A| = R \}, \\ \Gamma'_R = \{ \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega' / |\mathbf{x} - B| = R \}. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

We simply recall the results that are quite classical. Using separation of variables in polar coordinates  $(r, \theta)$ , it is possible to write exact boundary conditions on  $\Gamma_R$  and  $\Gamma'_R$ , as soon as  $R$  is large enough so that the support of  $f$  is included in  $\Omega_R$  (see (3.24)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} + T_R(u^\varepsilon) = 0, & \text{on } \Gamma_R, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} + T'_R(u^\varepsilon) = 0, & \text{on } \Gamma'_R, \end{cases} \quad (3.20)$$

where  $T_R \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$  and  $T'_R \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma'_R), H^{-1/2}(\Gamma'_R))$  are two non local (DtN) maps that are known explicitly [56]. For instance, for  $T_R$  (it is the “same” for  $T'_R$ ), if the semi-circle  $\Gamma_R$  is parameterized by  $\theta \in ]0, \pi[$ , one has :

$$T_R : \phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \psi_n(\theta) \quad \mapsto \quad T_R \phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) \phi_n \psi_n(\theta), \quad (3.21)$$

where we have set :

$$\begin{cases} \psi_0(\theta) = \sqrt{\frac{1}{R}}, & \psi_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{R}} \cos(n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \mu_n^R(\omega) = -\omega \frac{H_n^{(1)' }(\omega R)}{H_n^{(1)}(\omega R)}, & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.22)$$

In (3.22),  $H_n^{(1)}$  is the classical first kind Hankel function [63]. We recall the the functions  $\{\psi_n, n \geq 0\}$  form a basis of  $H^s(\Gamma_R)$  for any  $s < 3/2$  [28], which is orthonormal in  $L^2(\Gamma_R)$ . Of course, the use of the radiation conditions at finite distance (3.20), permits us to reduce the problem to :

$$\Omega_\varepsilon^R = \Omega_R \cup \mathcal{O}_\varepsilon \cup \Omega'_R, \quad (3.23)$$

where

$$\begin{cases} \Omega_R = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega / |\mathbf{x} - A| < R\}, \\ \Omega'_R = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega' / |\mathbf{x} - B| < R\}. \end{cases} \quad (3.24)$$

The idea for the construction of the approximate model simply consists in assuming that, as a

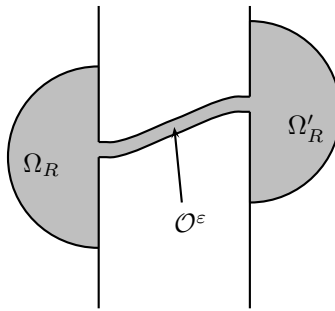


FIG. 3.4 – The truncated domain.

first approximation, the solution remains constant in any section  $s = \text{constant}$  of the slot. In other words, one makes the approximation :

$$u^\varepsilon(s, \nu) \sim U^\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(s, \nu) d\nu, \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.25)$$

To obtain an equation for  $U^\varepsilon$ , one integrates with respect to  $\nu$  the Hemholtz equation, written in curvilinear coordinates :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left( [1 + \nu c(s)]^{-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( [1 + \nu c(s)] \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right) - \omega^2 [1 + \nu c(s)] u^\varepsilon = 0. \quad (3.26)$$

Taking into account the boundary conditions :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(s, \varepsilon) = 0, \quad (3.27)$$

and using the approximation (3.25), we get the 1D equation :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\varepsilon c(s)} \text{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 \left[ 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right] U^\varepsilon = 0. \quad (3.28)$$

Let us set

$$\Sigma_\varepsilon = \{(0, y) / 0 < y < \varepsilon\} \subset \partial\Omega \quad (3.29)$$

and

$$\Sigma'_\varepsilon = \{(L, y) / h < y < h + \varepsilon\} \subset \partial\Omega'. \quad (3.30)$$

We propose then to solve the following set of equations (defined in domains independent of  $\varepsilon$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } \tilde{u}^\varepsilon : \Omega \cup \Omega' \rightarrow \mathbf{C} \text{ and } U^\varepsilon : I = ]0, \tilde{L}[ \rightarrow \mathbf{C} \text{ such that :} \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f \text{ in } \Omega \cup \Omega', \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon \cup \partial\Omega' \setminus \Sigma'_\varepsilon, \\ \tilde{u}^\varepsilon \text{ satisfies the radiation condition (3.18) at infinity,} \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\varepsilon c(s)} \text{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = 0, \quad s \in I, \end{array} \right. \quad (3.31)$$

that must be completed by some approximate "1D-2D transmission conditions" at points  $A$  and  $B$  that must be consistent with the continuity of  $u^\varepsilon$  (Dirichlet) and  $\partial u^\varepsilon / \partial x$  (Neumann) across  $\Sigma_\varepsilon$  and  $\Sigma'_\varepsilon$ . The (double) mathematical difficulty is that :

- $\Sigma_\varepsilon$  and  $\Sigma'_\varepsilon$  have no sense for  $U^\varepsilon$  : only the points  $A(s=0)$  and  $B(s=\tilde{L})$  make sense.
- Conversely, one can not speak of the value of  $\tilde{u}^\varepsilon$  or  $\partial \tilde{u}^\varepsilon / \partial x$  at points  $A$  and  $B$ .

The solution, rather natural, that we propose consists in imposing the Dirichlet and Neumann transmission condition in a mean sense. For the Dirichlet condition, we simply write that :

$$U^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad U^\varepsilon(\tilde{L}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad (3.32)$$

while for the Neumann condition we write that  $\partial \tilde{u}^\varepsilon / \partial x$  is constant along  $\Sigma_\varepsilon$  and  $\Sigma'_\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = \frac{dU^\varepsilon}{ds}(0) \text{ on } \Sigma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = -\frac{dU^\varepsilon}{ds}(\tilde{L}) \text{ on } \Sigma'_\varepsilon. \quad (3.33)$$

The boundary value problem ((3.31),(3.32),(3.33)), when reduced to a bounded domain thanks to conditions (3.20) admits a variational formulation in the Hilbert space :

$$W_\varepsilon^R = \{(v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \times H^1(I) / V^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} v^\varepsilon d\sigma, V^\varepsilon(\tilde{L}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} v^\varepsilon d\sigma\}.$$

More precisely, it is equivalent to :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\tilde{u}^\varepsilon, U^\varepsilon) \in W_\varepsilon^R \text{ such that, } \forall (v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in W_\varepsilon^R : \\ a_R(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + b_R(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + b'_R(\tilde{u}^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon a_I(U^\varepsilon, V^\varepsilon) = \int_\Omega f \bar{v}^\varepsilon dx, \end{array} \right. \quad (3.34)$$

where we have set :

$$\begin{cases} a_R(u, v) = \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) \, dx, \\ a_I(U, V) = \int_I \left( \frac{\text{Log} [1 + \varepsilon c(s)]}{\varepsilon c(s)} \frac{dU}{dx} \frac{d\bar{V}}{dx} - \omega^2 \left(1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2}\right) U \bar{V} \right) dx, \end{cases} \quad (3.35)$$

and where the bilinear form  $b_R$  is given by (we omit the definition of  $b'_R$  which is similar) :

$$b_R(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \bar{v}_n^R, \quad u_n^R = \int_{\Gamma_R} u \psi_n \, d\sigma, \quad v_n^R = \int_{\Gamma_R} v \psi_n \, d\sigma. \quad (3.36)$$

We shall use later the following fundamental properties of the bilinear form  $b_R$  (or  $b'_R$ ) which directly follow from the fact that all the numbers  $\mu_n^R(\omega)$  have strictly positive real parts and strictly negative imaginary parts (This comes from the wronskian of  $J_n$  and  $Y_n$  [63] and from the Nicholson formula [90]) :

$$\forall u \in H^1(\Omega_R), \quad \text{Re } b_R(u, u) \geq 0, \quad \text{Im } b_R(u, u) \leq 0. \quad (3.37)$$

Thanks to (3.37) is a simple exercise on Fredholm's alternative to show that (3.34) has a unique solution. Moreover, this problem can be treated numerically via the finite element method with computational meshes "ignoring" the space scale  $\varepsilon$ . Indeed, the geometry of the domain  $\Omega \cup [0; \tilde{L}]$  does not depend on  $\varepsilon$ . One can refer to [85] for more details.

**Remark 3.1** *As we said in the introduction, there are other ways than ((3.32), (3.33)) to couple  $\tilde{u}^\varepsilon$  and  $U^\varepsilon$ . For instance, we can invert the roles of the Dirichlet and Neumann data and write :*

$$\tilde{u}^\varepsilon = U^\varepsilon(0) \text{ on } \Sigma_\varepsilon, \quad \tilde{u}^\varepsilon = U^\varepsilon(\tilde{L}) \text{ on } \Sigma'_\varepsilon, \quad (3.38)$$

$$\frac{dU^\varepsilon}{dx}(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} \, d\sigma, \quad \frac{dU^\varepsilon}{dx}(\tilde{L}) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} \, d\sigma. \quad (3.39)$$

One easily checks that the (localized) variational formulation of ((3.31), (3.38), (3.39)) is still given by (3.34) except that the space  $W_\varepsilon^R$  has changed :

$$W_\varepsilon^R = \{(v^\varepsilon, V^\varepsilon) \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \times H^1(I) / v^\varepsilon = V^\varepsilon(0) \text{ on } \Sigma_\varepsilon, v^\varepsilon = V^\varepsilon(\tilde{L}) \text{ on } \Sigma'_\varepsilon\}.$$

Of course, linear combinations between ((3.32), (3.33)) and ((3.38), (3.39)) provide new transmission conditions.

**Remark 3.2** *For the case of a straight slot, it is possible (and this is what we will do) to write a variational formulation only on the unknown  $\tilde{u}^\varepsilon$ . The term  $a_I$  is replaced by a Dirichlet to Neumann map associated to the slot problem.*

### 3.2.2 A model problem for the analysis ; the semi-infinite problem

For the mathematical analysis, we shall restrict the study to a simplified academic problem : the semi-infinite straight slot. With the notation of the previous section, this corresponds to :

$$\tilde{L} = +\infty, \quad s = x \text{ and } F(s) = (s, 0)^t, \quad \Omega' = \emptyset. \quad (3.40)$$

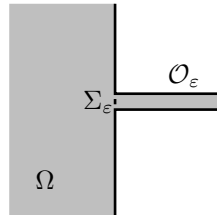


FIG. 3.5 – The semi infinite straight slot

This problem has the advantage to present the main difficulty we wish to address in this paper, namely the "1D-2D" junction at point A. The equations that govern the exact solution are still given by ((3.17),(3.18)). However, since this time the slot

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \mathbb{R}^+ \times ]0, \varepsilon[ \quad (\Sigma_\varepsilon = \{0\} \times ]0, \varepsilon[) \quad (3.41)$$

is infinite in the  $x$ -direction, the outgoing radiation condition corresponds to selecting a certain category of solution inside the slot. To be more explicit, one has to exploit the separation of variables inside  $\mathcal{O}_\varepsilon$ . This naturally leads to introduce the sequence of functions (these are the eigenfunctions of the 1D operator  $-d^2/dy^2$  in the segment  $]0, \varepsilon[$  with homogeneous Neumann boundary conditions at  $y = 0$  and  $y = \varepsilon$ ) :

$$w_0^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{and} \quad w_n^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.42)$$

Let us assume that

$$\varepsilon\omega < \pi, \quad (3.43)$$

which is automatically true for  $\varepsilon$  small enough. As any solution of the homogeneous Helmholtz equation inside  $\mathcal{O}_\varepsilon$ ,  $u^\varepsilon$  is necessarily of the form :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, y) = (a_0^\varepsilon \exp(i\omega x) + b_0^\varepsilon \exp(-i\omega x)) w_0^\varepsilon(y) \\ \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^\varepsilon e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega)x} + b_n^\varepsilon e^{+\xi_n^\varepsilon(\omega)x}) w_n^\varepsilon(y), \end{cases} \quad (3.44)$$

where we have set :

$$\xi_n^\varepsilon(\omega) = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\varepsilon^2} - \omega^2}, \quad n \geq 1, \quad (\xi_n^\varepsilon(\omega) > 0 \quad \text{thanks to (3.43)}). \quad (3.45)$$

Saying that  $u^\varepsilon$  is an outgoing solution means that the coefficients  $b_n^\varepsilon$  are necessarily 0 :

$$u^\varepsilon \text{ is outgoing} \implies u^\varepsilon(x, y) = a_0^\varepsilon \exp(i\omega x) w_0^\varepsilon(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^\varepsilon e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega)x} w_n^\varepsilon(y). \quad (3.46)$$

In other words,  $u^\varepsilon$  appears as the superposition of :

- a single propagative mode :  $a_0^\varepsilon \exp(i\omega x) w_0^\varepsilon(y)$ ,
- an infinity of evanescent (in the direction  $x > 0$ ) modes :  $a_n^\varepsilon e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega)x} w_n^\varepsilon(y)$ .

**Remarque 3.3** *In the half space  $\Omega$ , we say that a solution of the Helmholtz equations is outgoing if :*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right|^2 d\sigma = 0. \quad (3.47)$$

For  $R$  large enough so that the support of  $f$  is included in  $\Omega_R$  (see (3.24)), this is equivalent to :

$$\frac{\partial u}{\partial n} + T_R u = 0, \quad \text{on } \Gamma_R. \quad (\text{see (3.21) and (3.22)}) \quad (3.48)$$

According to the previous section, the approximate problem that we shall consider can be written as (see (3.29) for  $\Sigma_\varepsilon$ ) :

$$\begin{cases} \text{Find } \tilde{u}^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{and} \quad U^\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{such that :} \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ -\frac{d^2 U^\varepsilon}{dx^2} - \omega^2 U^\varepsilon = 0, \text{ on } \mathbb{R}^+, \\ U^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} u^\varepsilon d\sigma, \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = \frac{dU^\varepsilon}{dx}(0) \text{ on } \Sigma_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.49)$$

completed by the fact that  $(\tilde{u}^\varepsilon, U^\varepsilon)$  must be “outgoing at infinity”. For  $\tilde{u}^\varepsilon$ , this is nothing but condition (3.18) (simply replace  $\Omega_\varepsilon$  by  $\Omega$ ). For  $U^\varepsilon$ , it is even simpler. Saying that  $U^\varepsilon$  is outgoing simply amounts to saying that it is of the form :

$$U^\varepsilon(x) = U^\varepsilon(0) \exp(i\omega x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.50)$$

To some extent, it also means that we have retained only the propagative mode in the series (3.46). Of course to define the approximate solution  $\tilde{u}^\varepsilon$  everywhere in  $\Omega_\varepsilon$ , we shall extend  $\tilde{u}^\varepsilon$  in  $\mathcal{O}_\varepsilon$  by :

$$\tilde{u}^\varepsilon(x, y) = U^\varepsilon(x), \quad \text{in } \mathcal{O}_\varepsilon. \quad (3.51)$$

In the remaining of the paper, our goal will be to estimate the difference  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  in  $\Omega$  and  $\mathcal{O}_\varepsilon$ .

In this view, we shall introduce the problem satisfied by the limit  $u^0$  of  $u^\varepsilon$  in  $\Omega$ . As it is intuitive (and will be demonstrated in section §3.3), this problem is the pure half-space problem in the absence of the slot :

$$\begin{cases} -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ u^0 \text{ is outgoing at infinity} & \text{(see remark 3.3)}. \end{cases} \quad (3.52)$$

This problem ignores the slot and consists in saying that no energy is transmitted inside  $\mathcal{O}_\varepsilon$ , which is not the case of the approximate (3.49). A relevant analysis must show that (3.49) provides a better approximation to the exact solution than (3.52). This implies to :

- compare  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  and  $u^\varepsilon - u^0$  in  $\Omega$ ,
- compare  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  and  $u^\varepsilon$  in  $\mathcal{O}_\varepsilon$ .

This is the object of the rest of the paper.

### 3.3 Main results

The object of subsection §3.3.1 is to estimate the difference  $u^\varepsilon - u^0$  in various subdomains of the half-space  $\Omega$ . It will be useful to differentiate the domains  $\Omega_R$ , whose closure contains the origin, from the domains  $\Omega_{R,R'}$  defined for  $0 < R' < R$  by :

$$\Omega_{R,R'} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega / R' < |x| < R\}. \quad (3.53)$$

One intuitive reason is linked to the fact that the function  $u_0$  is smooth at the neighborhood of 0 while, for each  $\varepsilon > 0$ , the exact solution has the maximal regularity (see [39] for instance) :

$$u^\varepsilon \in H^{\frac{5}{3}-\eta}(\Omega_R), \quad \text{for any } \eta > 0. \quad (3.54)$$

This is due to the singularity in  $r^{\frac{2}{3}}$  due to the presence of the two re-entrant corners of aperture  $3\pi/2$ . This makes us expect a different behaviour of  $u^\varepsilon - u^0$  in  $\Omega_R$  and  $\Omega_{R,R'}$ .

In subsection §3.3.2, we shall estimate the error  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  in the same domains  $\Omega_R$  and  $\Omega_{R,R'}$ . Note that  $\tilde{u}^\varepsilon$  is also singular in  $\Omega$  but that its singularity differs from the one of  $u^\varepsilon$ . Notice that the restriction of  $\tilde{u}^\varepsilon$  is solution of a non homogeneous Neumann problem for the Helmholtz operator, the boundary data being equal - up to a multiplicative constant - to a characteristic function, which lives in  $H^{\frac{1}{2}-\eta}(\Gamma)$ . Hence once has :

$$\tilde{u}^\varepsilon \in H^{2-\eta}(\Omega_R), \quad \text{for any } \eta > 0. \quad (3.55)$$



We shall also look at the error in bounded subdomains of the semi-infinite slot  $\mathcal{O}_\varepsilon$ . For any  $0 < L < L'$ , we set :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_\varepsilon^L = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon / x < L\}, \\ \mathcal{O}_\varepsilon^{L, L'} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon / L' < x < L\}. \end{cases} \quad (3.56)$$

Once again, we will see that we get different estimates in  $\mathcal{O}_\varepsilon^L$  and  $\mathcal{O}_\varepsilon^{L, L'}$ .

### 3.3.1 Convergence to the limit problem

Our first result says how fast  $u^\varepsilon$ , the exact solution approaches  $u^0$ , the limit solution.

**Théorème 3.4** *The function  $u^\varepsilon$  converges to  $u^0$  in  $H^1(\Omega_R)$  when  $\varepsilon$  tends to 0 and one has the error estimates,  $C(R)$  denoting a positive constant :*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.57)$$

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.58)$$

Moreover, for any  $0 < R' < R$ , one has the improved error estimate :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_{R, R'})} \leq C(R, R') \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.59)$$

where  $C(R, R')$  is, once again, a positive constant.

**Remarque 3.5** *One can remark that :*

- One gains only the factor  $\sqrt{|\text{Log } \varepsilon|}$  by passing from the  $H^1$  norm to the  $L^2$  norm in  $\Omega_R$  (see also theorem 3.6).
- One does not gain anything in the domains  $\Omega_{R, R'}$  as emphasized by theorem 3.6.

Our next result aims at showing the optimality of the estimates of theorem 3.4.

**Théorème 3.6** *For any  $R > 0$ , there exist two strictly positive constants  $C_1(R)$  and  $C_2(R)$  such that :*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \geq C_1(R) \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} |u^0(0, 0)| - C_2(R) \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)|^{3/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.60)$$

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} \geq C_1(R) \varepsilon |u^0(0, 0)| - C_2(R) \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.61)$$

Moreover, for any  $0 < R' < R$ , there exist two strictly positive constants  $C_1(R, R')$  and  $C_2(R, R')$  such that :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_{R, R'})} \geq C_1(R, R') \varepsilon |u^0(0, 0)| - C_2(R, R') \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.62)$$

**Remarque 3.7** *The inequalities (3.60) to (3.62) prove that the estimates of theorem 3.4 are optimal as soon as  $u^0(0, 0) \neq 0$ , which is generically true. This is not the case, for instance, if  $f$  is odd in  $y$ . However, we think that, in such a case, the estimates over  $u^\varepsilon - u^0$  can be improved.*

**Remarque 3.8** *The initial problems are formulated in an unbounded domain  $\Omega$ , but the error estimates are stated in bounded domains. This is due to the fact that the solutions of the Helmholtz equation are not in  $H^1(\Omega)$  or  $L^2(\Omega)$ .*

### 3.3.2 Error estimates for the approximate model

We first give estimates in subdomains of the half-space  $\Omega$ .

**Théorème 3.9** *For any  $R > 0$ , there exists a positive constant  $C(R)$  such that :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.63)$$

*For any  $\delta > 0$ , there exists a positive constant  $C(R, \delta)$  such that :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C(R, \delta) \varepsilon^{2-\delta} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.64)$$

*For any  $0 < R' < R$ , there exists a positive constant  $C(R, R')$  such that :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} \leq C(R, R') \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.65)$$

**Remarque 3.10** *Let us notice that :*

- *Contrary to what happens in  $\Omega_R$ , in the domains  $\Omega_{R,R'}$  one does not gain anything by passing from the  $H^1$  norm to the  $L^2$  norm : the estimate remains  $O(\varepsilon^2)$ . Our conjecture is that such a result is generically optimal as in theorem 3.6 :*

$$\text{Conjecture :} \quad \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})} \geq C \varepsilon^2. \quad (3.66)$$

*We think this is also true for the estimates (3.63) and (3.65) :*

$$\text{Conjecture :} \quad \begin{cases} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} & \geq C \varepsilon, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} & \geq C \varepsilon^2, \end{cases} \quad (3.67)$$

*and that estimate (3.64) is quasi-optimal :*

$$\text{Conjecture :} \quad \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} \geq C \varepsilon^2. \quad (3.68)$$

*This will be confirmed by numerical results.*

- *It is easy to prove that the estimate (3.65) remains valid in any  $H^s$ -norm,  $s > 0$  :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^s(\Omega_{R,R'})} \leq C(s, R, R') \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.69)$$

*When one looks to higher order Sobolev norms in  $\Omega_R$  (which is only possible for  $s < 5/3$  which corresponds to the maximal regularity of the exact solution  $u^\varepsilon$ ), one can expect to lose powers of  $\varepsilon$  :*

$$\text{Conjecture :} \quad \begin{cases} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^s(\Omega_{R,R'})} \leq C(s) \varepsilon^{g(s)} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \forall s < 5/3, \\ \text{with } C(s) \rightarrow +\infty \text{ and/or } g(s) \rightarrow 0 \text{ when } s \rightarrow \frac{5}{3}. \end{cases}$$

We try to summarize the results of theorems 3.4 and 3.6 in the following table. In particular, in the last line of the table, we study - in the case where  $u_0(0,0) \neq 0$  - the gain in the order of convergence obtained by replacing  $u^0$  by  $\tilde{u}^\varepsilon$ . When one looks in domains containing the origin (the domains  $\Omega_R$ ), this gain is only  $O(|\log \varepsilon|^{-\frac{1}{2}})$  in the  $H^1$ -norm and ‘‘almost’’  $O(\varepsilon)$  in the  $L^2$ -norm. This clearly traduces the fact that the singularity and the boundary layer of the exact solution is not well taken into account by the approximate one. In the domains  $\Omega_{R,R'}$ , which do not contain the origin, this gain is  $O(\varepsilon)$  in  $H^1$ -norm (in fact in any  $H^s$ -norm,  $s \geq 0$ ).

$V$	=	$H^1(\Omega_R)$	$L^2(\Omega_R)$	$H^1(\Omega_{R,R'})$
$\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _V$	$\leq$	$C(R) \varepsilon$	$C(R, \delta) \varepsilon^{2-\delta}, \forall \delta > 0$	$C(R, R') \varepsilon^2$
$\frac{\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _V}{\ u^\varepsilon - u^0\ _V}$	$\leq$	$C(R)  \log(\varepsilon) ^{-1/2}$	$C(R, \delta) \varepsilon^{1-\delta}, \forall \delta > 0$	$C(R, R') \varepsilon$

Table 1 : Error estimates in the half-space.

Next we look at the errors in subdomains of the slot  $\mathcal{O}^\varepsilon$ .

**Théorème 3.11** *For any  $L > 0$ , there exists a positive constant  $C(L)$  such that :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^L)} \leq C(L) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.70)$$

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^L)} \leq C(L) \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.71)$$

For any  $L > L' > 0$ , there exists a positive constant  $C(L, L')$  such that :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L, L'})} \leq C(L, L') \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.72)$$

In order to check that the above estimates are relevant, we have to compare the difference  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  to  $u^\varepsilon$ . For this we shall use the following inequalities (see subsection §3.3.2) :

$$C_1 \sqrt{\varepsilon} |u^0(0, 0)| - C_2 \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon\|_H \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.73)$$

which is valid for  $H = H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^L), L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^L)$  and  $H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L, L'})$ . In (3.73),  $C_1, C_2$  and  $C_3$  are three constants that only depend on the space  $H$ . This permits us to bound the relative errors :

$$\frac{\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_H}{\|u^\varepsilon\|_H},$$

as soon as  $u_0(0, 0) \neq 0$ . The results are summarized in the following table.

$H$	=	$H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^L)$	$L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^L)$	$H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L, L'})$
$\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _H$	$\leq$	$C \varepsilon$	$C \varepsilon^{3/2}  \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$	$C \varepsilon^{3/2}  \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$
$\frac{\ u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\ _H}{\ u^\varepsilon\ _H}$	$\leq$	$C \sqrt{\varepsilon}$	$C \varepsilon  \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$	$C \varepsilon  \text{Log}(\varepsilon) ^{1/2}$

Table 2 : Error estimates in the slot.

### 3.3.3 About the proof

The study of the convergence of  $u^\varepsilon$  to  $u^0$  has an intrinsic interest in order to guarantee the relevance of our estimates on  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ . A priori, looking at the convergence of  $\tilde{u}^\varepsilon$  to  $u^0$  has no direct interest. However, we did not find how to study directly the error  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  without obtaining preliminary results on  $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$ . Indeed, the estimate (see proposition 3.21)

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq C(R, s) \varepsilon^{1-s} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall s \in ]0, 1[, \quad (3.74)$$

will be crucial to obtain the estimate (3.63). Also, we have been able to obtain the optimality results of theorem 3.6 only after having obtained the estimates of theorem 3.9. That is why in the presentation of the proof of theorems 3.4 to 3.11, we shall not follow the order we chose for their statement in subsections 3.3.1 and 3.3.2, but will proceed as indicated below :

1. Study of the convergence of  $u^\varepsilon$  to  $u^0$  (proof of theorem 3.4). This is the object of section 3.4.
2. Estimates of  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  (proof of theorems 3.9 and 3.11). This is the object of section 3.5.
3. Proof of the optimality results (theorem 3.6 and inequalities (3.73)). See both sections 3.4 and 3.5.

### 3.4 Convergence of $u^\varepsilon$ and $\tilde{u}^\varepsilon$ to the limit half-space problem

#### 3.4.1 Preliminary technical results

In what follows, we shall naturally be led to identify  $\Sigma_\varepsilon$  (see (3.29)) to the segment  $]0, \varepsilon[$  and  $\partial\Omega$  to  $\mathbb{R}$ . Moreover, we shall denote by :

$$\varphi : \Sigma_\varepsilon \mapsto \mathbb{C} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\varphi} : \partial\Omega \mapsto \mathbb{C},$$

the operator which consists in extending the fonction  $\varphi$  to  $\partial\Omega$  by 0 outside  $\Sigma_\varepsilon$ .

In the spaces  $H^s(\partial\Omega) \equiv H^s(\mathbb{R})$ , we shall work with the norm :

$$\forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \quad \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{\varphi}(k)|^2 dk, \quad (3.75)$$

where  $\widehat{\varphi}$  denotes the Fourier transform of  $\varphi$ .

#### Norms in $H^s(\Sigma_\varepsilon)$

In the rest of the paper, we shall have to work with Sobolev spaces on  $\Sigma_\varepsilon$  (see (3.29)). Since this domain depends on  $\varepsilon$  and since we are looking for estimates in terms of  $\varepsilon$ , it is quite important to take care of the norms we shall use in the spaces  $H^s(\Sigma_\varepsilon)$  and of the influence of this choice on the constants appearing in various inequalities in particular trace inequalities. The appropriate choice consists in using the basis  $w_n^\varepsilon$  (see (3.42)) which is naturally associated with the problem.

Any function  $\varphi \in L^2(\Sigma_\varepsilon) \equiv L^2(]0, \varepsilon[)$  can be expanded as :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon \quad (\text{in } L^2(\Sigma_\varepsilon)), \quad \varphi_n^\varepsilon = \int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi w_n^\varepsilon d\sigma \equiv (\varphi, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}, \quad (3.76)$$

and one has :

$$\|\varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n^\varepsilon|^2. \quad (3.77)$$

It is well known (see [65] for a similar proof) that one can also characterize the spaces  $H^s(\Sigma_\varepsilon)$ ,  $0 \leq s < 3/2$  as :

$$\varphi \in H^s(\Sigma_\varepsilon) \iff \|\varphi\|_{H^s(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2}\right)^s |\varphi_n^\varepsilon|^2 < +\infty, \quad (3.78)$$

The dual spaces  $H^s(\Sigma_\varepsilon)'$  can be defined analogously but in the definition (3.76) of  $\varphi_n^\varepsilon$ , the scalar product in  $L^2(\Sigma_\varepsilon)$  must be replaced by a duality bracket between  $H^s(\Sigma_\varepsilon)'$  and  $H^s(\Sigma_\varepsilon)$ .

The norm (3.78) is the one that we shall retain for the sequel. Note that these norms can be deduced one from the other by usual interpolation. Moreover, for  $s = 1$  we also have :

$$\|\varphi\|_{H^1(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \int_{\Sigma_\varepsilon} (|\varphi|^2 + |\varphi'|^2) d\sigma, \quad (3.79)$$

where  $\varphi'$  denotes the tangential derivative ( $y$ -derivative) of  $\varphi$ .

#### Trace inequalities

In this paragraph, we derive trace estimates in  $H^s(\Omega)$ .

**Remarque 3.12** *The forthcoming results, namely the uniform inequality (3.82) and the lemmas 3.13 and 3.15, remain obviously valid if one replaces  $\Omega$  by  $\Omega_R$ , for fixed  $R > 0$ . It suffices to use a continuous extension operator from  $H^s(\Omega_R)$  in  $H^s(\Omega)$ .*

Since the  $L^2$  and  $H^1$  norms on  $\Sigma_\varepsilon$  are defined as integrals, we have obviously :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in L^2(\partial\Omega), & \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}, \\ \forall \varphi \in H^1(\partial\Omega), & \|\varphi\|_{H^1(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\partial\Omega)}. \end{cases} \quad (3.80)$$

By interpolation we have :

$$\forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega), \quad \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (3.81)$$

Let  $u$  be in  $H^1(\Omega)$ . For simplicity, we still denote by  $u$  its trace on  $\partial\Omega$  and use indifferently the notation  $u_n^\varepsilon$  or  $(u, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}$ , the coefficients of the expansion in the basis  $w_n^\varepsilon$  of the trace of  $u$ .

Using the trace theorem in  $H^1(\Omega)$  (onto  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ), we deduce from (3.81) :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.82)$$

Our purpose is to provide estimates of traces on  $\Sigma_\varepsilon$  in function of  $\varepsilon$ . In our results, it is useful to distinguish the role of the coefficient  $u_0^\varepsilon$  (on the first (constant) basis function  $w_0^\varepsilon$ ) from the other coefficients  $u_n^\varepsilon, n \geq 1$ . Our first lemma concerns the first coefficient  $u_0^\varepsilon$ .

**Lemme 3.13**

(i) For any  $s \in ]0, 1/2[$ , there exists a constant  $C(s)$  such that :

$$\forall u \in H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega), \quad |u_0^\varepsilon| \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega)}. \quad (3.83)$$

(ii) There exists a constant  $C$  such that :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad |u_0^\varepsilon| \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log}(\varepsilon)|} \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.84)$$

(iii) For any  $s \in ]0, +\infty[$ , there exists a constant  $C(s)$  such that :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad |u_0^\varepsilon| \leq C(s) \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.85)$$

**Proof.** By definition of  $u_0^\varepsilon$ , if we identify  $\partial\Omega$  to  $\mathbb{R}$ , we can write :

$$|u_0^\varepsilon| = \left| \int_{\mathbb{R}} u(0, y) \tilde{w}_0^\varepsilon(y) dy \right| \leq \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R})} \times \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \quad (3.86)$$

where  $\tilde{w}_0^\varepsilon$  is the extension of  $w_0^\varepsilon$  by 0 outside  $\Sigma_\varepsilon$ . Consequently, using trace theorem, we get :

$$|u_0^\varepsilon| \leq C(s) \|u\|_{H^{1/2+s}(\Omega)} \times \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{R})}. \quad (3.87)$$

The result is then a direct consequence of lemma 3.14 below.

**Lemme 3.14** When  $\varepsilon \rightarrow 0$ , one has the following results :

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim C(s) \varepsilon^{-s} \quad \text{for } -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}, \quad (3.88)$$

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \sim \sqrt{2 \varepsilon |\text{Log}(\varepsilon)|}, \quad (3.89)$$

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim C(s) \sqrt{\varepsilon} \quad \text{for } s < -\frac{1}{2} \quad (3.90)$$

where

$$\begin{cases} C(s) = \left( \int_{\mathbb{R}} t^{2(s-1)} \sin^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{for } -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}, \\ C(s) = \left( \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^s dt \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{for } s < -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.91)$$

**Proof.** We only give here the proof of (3.89). The Fourier transform of  $\tilde{w}_0^\varepsilon$  is given by :

$$\widehat{w}_0^\varepsilon(k) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\varepsilon}{2}\right), \quad \text{where } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (3.92)$$

Consequently, 
$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k\varepsilon}{2}\right)}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} dk = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt.$$

We split the last integral into three parts :

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt + \int_{|t|>1} \frac{\operatorname{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt + \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sinc}^2(t) - 1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt \right].$$

The first term can be computed explicitly :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt = 2 \operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \sim 2 |\operatorname{Log} \varepsilon| \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

The inequality  $\frac{\operatorname{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{|t|^3}$  and permits us to use Lebesgue's theorem to show that :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t|>1} \frac{\operatorname{sinc}^2(t)}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt = \int_{|t|>1} \frac{\operatorname{sinc}^2(t)}{|t|} dt. \quad (3.93)$$

In the same way, the bound  $\frac{|\operatorname{sinc}^2(t) - 1|}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|\operatorname{sinc}^2(t) - 1|}{|t|}$  permits us to obtain :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sinc}^2(t) - 1}{\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt = \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sinc}^2(t) - 1}{|t|} dt. \quad (3.94)$$

The conclusion follows immediately.  $\square$

Next we introduce the following semi-norm in  $H^s(\Sigma_\varepsilon)$  :

$$\|\varphi\|_{H_*^s(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2}\right)^s |\varphi_n^\varepsilon|^2. \quad (3.95)$$

**Lemme 3.15**

(i) For any  $s \in [0, 1]$ , there exists a constant  $C(s)$  such that :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.96)$$

(ii) There exists a constant  $C$  such that :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\operatorname{Log}(\varepsilon)|} \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.97)$$

(iii) For any  $s \in ]1, +\infty[$ , there exists a constant  $C(s)$  such that :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}. \quad (3.98)$$

**Proof.** (i) We first prove (3.96) for  $s \leq 1/2$ . Let  $P^\varepsilon$  be the orthogonal projection from  $L^2(\Sigma_\varepsilon)$  on the subspace of constant functions (generated by  $w_0^\varepsilon$ ). As a direct consequence of Bramble-Hilbert lemma, we have :

$$\begin{cases} \|u - P^\varepsilon u\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|u'\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}, & \forall u \in H^1(\Sigma_\varepsilon), \\ \|u - P^\varepsilon u\|_{H^1(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \|u'\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}, & \forall u \in H^1(\Sigma_\varepsilon), \end{cases} \quad (3.99)$$

and by interpolation

$$\|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} = \|u - P^\varepsilon u\|_{H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|u'\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (3.100)$$

which shows the result for  $s = 1/2$  since, by usual trace theorem :

$$\|u'\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|u\|_{H^1(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{H^{3/2}(\Omega)}. \quad (3.101)$$

By interpolation with (3.82), we get the result for  $0 < s < 1/2$ .

For  $s > 1/2$  we shall use the following result (see [65], theorem 11.2 page 63) for Sobolev spaces in one dimension :

For any  $r \in [0, 1/2[$  there exists  $C(r) > 0$  such that :

$$\forall v(y) \in H^r(\mathbb{R}^+), \quad v/y^r \in L^2(\mathbb{R}^+), \quad \left\| \frac{v}{y^r} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C(r) \|v\|_{H^r(\mathbb{R}^+)}. \quad (3.102)$$

Let us apply (3.102) to  $v = u'$ , the  $y$ -derivative of the trace on  $\partial\Omega$  of  $u \in H^{\frac{3}{2}+r}(\Omega)$  :

$$\|u'\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} = \left\| \frac{y^r}{y^r} u' \right\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq \varepsilon^r \left\| \frac{u'}{y^r} \right\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq \varepsilon^r \left\| \frac{u'}{y^r} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \quad (3.103)$$

where we have identified the part of  $\partial\Omega$  made of points  $(0, y), y > 0$  to  $\mathbb{R}^+$ .

Therefore, combining (3.100) and (3.102) with (3.103) and trace theorem in  $H^{\frac{3}{2}+r}(\Omega)$ , we get :

$$\|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(r) \varepsilon^{1/2+r} \|u'\|_{H^r(\mathbb{R}^+)} \leq C(r) \varepsilon^{1/2+r} \|\tilde{u}\|_{H^{\frac{3}{2}+r}(\Omega)}, \quad (3.104)$$

which is nothing but (3.96) for  $1/2 < s < 1$  (set  $r = s - 1/2$ ).

(ii) For any  $v$  in  $H^1(\Omega)$  we have :

$$\|v\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} = |v_0^\varepsilon|^2 + \|v - P^\varepsilon v\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}^2 \quad (3.105)$$

By interpolation between the first inequality of (3.99) and

$$\|v - P^\varepsilon v\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq \|v\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}, \quad (3.106)$$

we get :

$$\|v - P^\varepsilon v\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (3.107)$$

It suffices to use (3.82) and (3.84) to obtain

$$\|v\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log}(\varepsilon)|} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.108)$$

Thus, applying (3.108) to (3.100), with  $v = u'$ , we obtain (3.97).

(iii) In dimension 2, for any  $s > 1$ ,  $H^{1+s}(\Omega)$  is continuously embedded in  $W^{1,\infty}(\overline{\Omega})$  :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega), \quad \|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq C(s) \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \quad (3.109)$$

Thus, coming back to (3.100), we get :

$$\|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|u'\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|u'\|_{L^\infty(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}, \quad (3.110)$$

which concludes the proof.  $\square$

3.4.2 Study of  $u^\varepsilon - u^0$ . Proof of theorem 3.4

 Reformulation of problem (3.17, 3.18) in  $\Omega$ 

As  $u^0$  is only defined in  $\Omega$ , it is useful to characterize the restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega$ . This is done easily by deriving an exact Dirichlet-to-Neumann boundary condition for  $u^\varepsilon$  on  $\Sigma_\varepsilon$  (see (3.29)) from the general form (3.46) of the solution inside the slot [47]. Proceeding this way, one easily shows that the restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega$  is characterized as the unique solution of the boundary value problem :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}|_{\Sigma_\varepsilon} + T^\varepsilon(u^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}) = 0, & \text{on } \Sigma_\varepsilon, \\ u^\varepsilon \text{ is outgoing at infinity.} & \text{(see remark 3.3)} \end{cases} \quad (3.111)$$

where the operator :

$$T^\varepsilon \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon), [H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)]'). \quad (3.112)$$

is defined by (the numbers  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$  are given by (3.45)) :

$$T^\varepsilon : \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon \longrightarrow T^\varepsilon \varphi = -i\omega \varphi_0^\varepsilon w_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon. \quad (3.113)$$

Using the fact that the radiation condition at infinity can be written on  $\Gamma_R$  for  $R$  large enough (cf section §3.2), we can also characterize the restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega_R$  as the unique solution of the variational problem :

$$\begin{cases} \text{Find } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that :} \\ a_R(u^\varepsilon, v) + b_R(u^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_R} f \bar{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R), \end{cases} \quad (3.114)$$

where the bilinear forms  $a(\cdot, \cdot)$  and  $b_R(\cdot, \cdot)$  are respectively defined by (3.35) (in the case  $\Omega'_R = \emptyset$ ) and (3.36), while  $b^\varepsilon(\cdot, \cdot)$  is defined by :

$$b^\varepsilon(u, v) = -i\omega u_0^\varepsilon \bar{v}_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^\varepsilon \bar{v}_n^\varepsilon, \quad \forall (u, v) \in [H^1(\Omega_R)]^2, \quad (3.115)$$

Thanks to Riesz theorem, we can define two linear operators :

$$A_R, B^\varepsilon \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_R), H^1(\Omega_R)) \quad (3.116)$$

such that :

$$\begin{cases} (A_R u, v)_{H^1(\Omega_R)} = a_R(u, v) + b_R(u, v), \quad \forall (u, v) \in [H^1(\Omega_R)]^2, \\ (B^\varepsilon u, v)_{H^1(\Omega_R)} = b^\varepsilon(u, v), \quad \forall (u, v) \in [H^1(\Omega_R)]^2, \end{cases} \quad (3.117)$$

and  $\varphi_f \in H^1(\Omega)$  such that :

$$(\varphi_f, v)_{H^1(\Omega_R)} = \int_{\Omega_R} f \bar{v} \, d\mathbf{x}. \quad (3.118)$$

The problem satisfied by the restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega_R$  can thus be written in a compact way :

$$\text{Find } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that } (A_R + B^\varepsilon) u^\varepsilon = \varphi_f. \quad (3.119)$$



Note that, in the same way, the restriction of  $u^0$  to  $\Omega_R$  is the unique solution of :

$$\text{Find } u^0 \in H^1(\Omega_R) \text{ such that } A_R u^0 = \varphi_f. \quad (3.120)$$

Note that the well posedness of problems (3.49) and (3.52) means that  $A_R$  and  $A_R + B^\varepsilon$  are both isomorphisms. Moreover, the error  $u^\varepsilon - u^0$  satisfies in  $\Omega_R$  :

$$(A_R + B^\varepsilon)(u^0 - u^\varepsilon) = B^\varepsilon u^0. \quad (3.121)$$

In the rest of this section, we shall fix  $R$  (large enough in order that the support of  $f$  be included in  $\Omega_R$ ). In our estimates, for simplicity, we shall not mention explicitly the dependence of the various constants with respect to  $R$ . These constants will be denoted by  $C$  and, as usual, the value of  $C$  may change from one line to another. We shall keep this principle throughout the rest of the article.

### Stability result

The convergence proof of  $u^\varepsilon$  to  $u^0$  will use a stability result. i.e. a uniform estimate of  $(A_R + B^\varepsilon)^{-1}$  in the operator norm.

**Lemme 3.16** *There exists a positive constant  $C$  such that :*

$$\|(A_R + B^\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))} \leq C. \quad (3.122)$$

**Proof.** We make a proof by contradiction. If (3.122) were false, there would exist a sequence  $v^\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  such that :

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} = 1 \quad \text{and} \quad \varphi^\varepsilon = (A_R + B^\varepsilon) v^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{in } H^1(\Omega_R). \quad (3.123)$$

By compactness, let us extract from  $v^\varepsilon$  a subsequence (still denoted  $v^\varepsilon$ ) with  $\varepsilon \rightarrow 0$  such that :

$$v^\varepsilon \rightarrow v^0 \quad \text{weakly in } H^1(\Omega_R) \text{ and strongly in } L^2(\Omega_R). \quad (3.124)$$

By definition of  $A_R$  and  $B^\varepsilon$ , we have :

$$\forall v \in H^1(\Omega_R), \quad a_R(v^\varepsilon, v) + b_R(v^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(v^\varepsilon, v) = (\varphi^\varepsilon, v). \quad (3.125)$$

Let us introduce the subspace of  $H^1(\Omega_R)$  defined by  $(B(0, r))$  denoting, for any  $r > 0$ , the ball of center 0 and radius  $r$ ) :

$$H_{00}^1(\Omega_R) \equiv \{v \in H^1(\Omega_R) / \exists r = r^*(v) > 0 / v = 0 \text{ dans } \Omega_R \cap B(0, r)\}, \quad (3.126)$$

Obviously, for any  $v \in H_{00}^1(\Omega_R)$ ,  $b^\varepsilon(v^\varepsilon, v) = 0$  pour  $\varepsilon < r^*(v)$ , which implies that (we use the weak convergence of  $v^\varepsilon$  in  $H^1(\Omega_R)$ ) :

$$\forall v \in H_{00}^1(\Omega_R), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_R(v^\varepsilon, v) + b_R(v^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(v^\varepsilon, v) = a(v^0, v). \quad (3.127)$$

Taking the limit of (3.125) when  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we get :

$$a_R(v_0, v) + b_R(v_0, v) = 0, \quad \forall v \in H_{00}^1(\Omega_R). \quad (3.128)$$

It is well known (see [54] for an explicit proof in 2D) that  $H_{00}^1(\Omega_R)$  is dense in  $H^1(\Omega_R)$ . Thus, by continuity of  $a_R(., .)$  and  $b_R(., .)$ , we also get :

$$a_R(v_0, v) + b_R(v_0, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R). \quad (3.129)$$

that is to say  $A_R v^0 = 0$  and therefore  $v^0 = 0$  since  $A_R$  is injective.

Let us take  $v = v^\varepsilon$  in (3.125) and look at the real part of the resulting equality :

$$\int_{\Omega_R} |\nabla v^\varepsilon|^2 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |(v^\varepsilon)_n^\varepsilon|^2 + \text{Re } b_R(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = \text{Re } (\varphi^\varepsilon, v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} + \omega^2 \int_{\Omega_R} |v^\varepsilon|^2 dx.$$

From (3.123), (3.37) and the positivity of the coefficients  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$ , we deduce that :

$$\|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} + \omega^2 \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2. \quad (3.130)$$

which, combined with the facts that  $\varphi^\varepsilon$  and  $v^\varepsilon$  converge to 0 respectively in  $H^1(\Omega_R)$  and  $L^2(\Omega_R)$ , proves that  $v^\varepsilon \rightarrow 0$  strongly in  $H^1(\Omega_R)$ . This contradicts  $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} = 1$ .  $\square$

**Consistency estimate**

According to equation (3.121), to complete the error analysis, we have to estimate  $B^\varepsilon u^0$  in  $H^1(\Omega_R)$ . It is easy to see that  $B^\varepsilon$  is uniformly bounded in  $\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))$ . This is a direct consequence of the uniform trace estimate (3.82). However, it can also be shown that  $B^\varepsilon$  does not tend to 0 in  $\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))$  when  $\varepsilon$  tends to 0 : we refer the reader to [54] for the construction of a sequence  $v^\varepsilon$  in  $H^1(\Omega_R)$  such that  $b_\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon)/\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)}^2 \geq \alpha > 0$  ( $\alpha$  independent of  $\varepsilon$ ). However, we are going to see that, due to the fact that  $u^0$  is independent of  $\varepsilon$  and sufficiently smooth,  $B^\varepsilon u^0$  does tend to 0 in  $H^1(\Omega_R)$ .

The proof uses a decomposition of the operator  $B^\varepsilon$  in the form :

$$B^\varepsilon = B_0^\varepsilon + R^\varepsilon, \quad (3.131)$$

that corresponds, in an obvious manner (cf. (3.117)), to the decomposition of  $b^\varepsilon(u, v)$  as :

$$\begin{cases} b^\varepsilon(u, v) = b_0^\varepsilon(u, v) + r^\varepsilon(u, v) \\ b_0^\varepsilon(u, v) = -i\omega u_0^\varepsilon \overline{v_0^\varepsilon}, \quad r^\varepsilon(u, v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^\varepsilon \overline{v_n^\varepsilon}, \end{cases} \quad (3.132)$$

**Lemme 3.17** *There exists a constant  $C > 0$  such that :*

$$\|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\text{Log} \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.133)$$

$$\|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.134)$$

**Proof.** We first prove (3.133). By definition of  $B_0^\varepsilon$ , for any  $u \in H^1(\Omega_R)$  :

$$\|B_0^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_R)} = \sup_{v \in H^1(\Omega_R)} \frac{b_0^\varepsilon(u, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega_R)}} \leq C |u_0^\varepsilon| \sup_{v \in H^1(\Omega_R)} \frac{|v_0^\varepsilon|}{\|v\|_{H^1(\Omega_R)}}. \quad (3.135)$$

Using (3.84) - see lemma 3.13 and remark 3.12 - we thus get :

$$\|B_0^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log}(\varepsilon)|} |u_0^\varepsilon| \quad (3.136)$$

If moreover  $u \in H^{1+s}(\Omega_R)$ ,  $s > 0$ , we deduce from lemma 3.13, estimate (3.85), that :

$$\|B_0^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \quad (3.137)$$

To obtain (3.133), it suffices to apply (3.137) to  $u = u^0$  and  $s = 1$  which satisfies  $u \in H^2(\Omega_R)$  and  $\|u\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$ .

Next, we prove (3.134). By definition of  $R^\varepsilon$ , we have, for any  $u \in H^1(\Omega_R)$ ,

$$\|R^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{v \in H^1(\Omega_R)} \frac{r^\varepsilon(u, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega_R)}}. \quad (3.138)$$

Using the inequality  $|\xi_n^\varepsilon(\omega)| \leq (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$  and the definition (3.132) of  $r^\varepsilon(., .)$  we get :

$$r^\varepsilon(u, v) \leq \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \|v\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \quad (3.139)$$

Using (3.96) - see lemma 3.15 and remark 3.12 - with  $s = 0$ , we get :

$$\|R^\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \|u\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \quad (3.140)$$

As  $f$  is compactly supported in  $\Omega$ , we know that, if  $\mathcal{V}$  denotes a bounded neighborhood of the origin which does not intersect the support of  $f$ , then :

$$\forall s > 1, \quad u^0 \in H^{1+s}(\mathcal{V}), \text{ and } \|u^0\|_{H^{1+s}(\mathcal{V})} \leq C(s, \mathcal{V}) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.141)$$

So, by lemma 3.15, equation (3.98) (applied for instance with  $s = 2!$  - see also remark 3.12), we get :

$$\|u^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.142)$$

we deduce (3.134) from (3.140) and (3.142).  $\square$

**Remarque 3.18** *The inequality (3.136), joined to (3.84), proves that, contrary to  $B^\varepsilon$ ,  $B_0^\varepsilon$  tends to 0 with  $\varepsilon$  in  $\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))$  :*

$$\|B_0^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))} \leq C \varepsilon |\text{Log}(\varepsilon)|. \quad (3.143)$$

**Remarque 3.19** *If the support of  $f$  contains the origin, (3.141) is true only for  $0 \leq s \leq 1$ . This time, we can apply (3.97) to obtain :*

$$\|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.144)$$

$H^1(\Omega_R)$ -estimate of  $u^\varepsilon - u_0$

We simply complete the proof of (3.57). From equation (3.121) and lemma 3.16, we deduce :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq \|B^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq \|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} + \|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)}.$$

Then, it suffices to invoke lemma 3.17 to conclude.

**Remarque 3.20** *According to remark 3.19, if the support of  $f$  contains the origin, the error estimate (3.57) is, a priori, no longer true. However, one has :*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.145)$$

$L^2(\Omega_R)$ -estimate of  $u^\varepsilon - u_0$

Estimate (3.58) could be proven directly using a duality method as we shall do for  $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$  in section (3.4.3). However, it will also appear as a direct consequence of forthcoming results (see the last paragraph of section §3.4).

### 3.4.3 Study of $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$

#### Statement of the approximation results

We give below approximation results for  $\tilde{u}^\varepsilon - u^0$  which are analogous to those of theorems 3.4 and 3.6 for  $u^\varepsilon - u^0$ .

**Proposition 3.21** *For any  $s \in [0, 1[$ , the function  $\tilde{u}^\varepsilon$  converges in  $H^{1+s}(\Omega_R)$  to  $u^0$  when  $\varepsilon$  tends to 0 and one has the error estimates :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq C(R, s) \varepsilon^{1-s} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall s \in ]0, 1[ , \quad (3.146)$$

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.147)$$

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C(R) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.148)$$

**Proposition 3.22** *For any  $R > 0$ , there exist two strictly positive constants  $C_1(R)$  and  $C_2(R)$  such that :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \geq C_1(R) \varepsilon \sqrt{|\text{Log}(\varepsilon)|} |u^0(0,0)| - C_2(R) \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)|^{3/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.149)$$

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} \geq C_1(R) \varepsilon |u^0(0,0)| - C_2(R) \varepsilon^2 |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.150)$$

**Reformulation of problem (3.49) in  $\Omega$** 

As in subsection §3.4.2, we first characterize the restriction of  $\tilde{u}^\varepsilon$  to  $\Omega$ . For this we eliminate  $U^\varepsilon$  in (3.49). Since  $U^\varepsilon$  is given by (3.50), we have in particular :

$$\frac{dU^\varepsilon}{dx}(0) - i\omega U^\varepsilon(0) = 0. \quad (3.151)$$

Using the coupling conditions between  $\tilde{u}^\varepsilon$  and  $U^\varepsilon$  (last line of (3.49)), we see that  $\tilde{u}^\varepsilon$  satisfies on  $\Sigma_\varepsilon$  the boundary condition :

$$\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} - \frac{i\omega}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} u^\varepsilon d\sigma = 0. \quad (3.152)$$

In other words, the restriction of  $\tilde{u}^\varepsilon$  to  $\Omega$  is characterized as the unique solution of the boundary value problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} |_{\Sigma_\varepsilon} + T_0^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon |_{\Sigma_\varepsilon}) = 0, & \text{on } \Sigma_\varepsilon, \\ \tilde{u}^\varepsilon \text{ is outgoing at infinity.} & \text{(see remark 3.3)} \end{array} \right. \quad (3.153)$$

where the operator  $T_0^\varepsilon \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon), [H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)]')$  is defined by :

$$(T_0^\varepsilon \varphi)(y) = -\frac{i\omega}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \varphi(y) dy \iff T_0^\varepsilon \varphi = -i\omega \varphi_0^\varepsilon w_0^\varepsilon, \quad (\varphi_0^\varepsilon \text{ given by (3.76)}). \quad (3.154)$$

Consequently, we can characterize the restriction of  $\tilde{u}^\varepsilon$  to  $\Omega_R$  as the unique solution of the variational problem :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that :} \\ a(\tilde{u}^\varepsilon, v) + b_R(\tilde{u}^\varepsilon, v) + b_0^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_R} f \bar{v} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R), \end{array} \right. \quad (3.155)$$

or equivalently, in the operator form :

$$\text{Find } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that } (A_R + B_0^\varepsilon) \tilde{u}^\varepsilon = \varphi_f. \quad (3.156)$$

**Remarque 3.23** Comparing (3.156) and (3.119), one sees that the approximation analysis amounts, in some sense, to evaluate how the operator  $B_0^\varepsilon$  is a good approximation to  $B^\varepsilon$ .

In what follows, we shall work with the equation satisfied by the “error”  $u^0 - \tilde{u}^\varepsilon$ , namely :

$$(A_R + B_0^\varepsilon)(u^0 - \tilde{u}^\varepsilon) = B_0^\varepsilon u^0. \quad (3.157)$$

**Stability result**

We only state the result whose proof is a trivial consequence of the fact that  $B_0^\varepsilon$  tends to 0 in  $\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))$  (cf. remark 3.18).

**Lemme 3.24** *There exists a positive constant  $C$  such that :*

$$\|(A_R + B_0^\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_R))} \leq C. \quad (3.158)$$

$H^1(\Omega_R)$ -estimate of  $\tilde{u}^\varepsilon - u_0$

We show the estimate (3.147). From (3.157) and lemma 3.24, we deduce that :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)}. \quad (3.159)$$

One concludes thanks to (3.133), (cf. lemma 3.17).

$H^{1+s}(\Omega_R)$ -estimate of  $\tilde{u}^\varepsilon - u_0$ 

We show the estimate (3.146). The reinterpretation of equation (3.157) as a boundary value problem in  $\Omega$  leads to (we set  $\tilde{e}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - u^0$ ) :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{e}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{e}^\varepsilon = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} = i\omega (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{w}_0^\varepsilon, & \text{on } \Sigma^R, \end{cases} \quad (3.160)$$

where  $\tilde{e}^\varepsilon$  satisfies moreover the outgoing radiation condition (3.18). As  $\tilde{w}_0^\varepsilon$ , the extension of  $w_0^\varepsilon$  by zero, belongs to  $H^{-\frac{1}{2}+s}(\partial\Omega)$  for any  $s \in ]0, 1[$ , by localization and standard elliptic regularity estimate for Neumann problems, we obtain :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq C(s) |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-\frac{1}{2}+s}(\mathbb{R})}. \quad (3.161)$$

To estimate the term  $(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}$ , we use the triangular :

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq |(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| + |(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \quad (3.162)$$

For the first term in the right hand side we apply (3.85) (cf. lemma 3.13) to  $u = u^0$  and  $s = 1$  (we simply use the  $H^2$  regularity result for  $u^0$ ) while, for the second term, we use (3.147) and inequality (3.84) of lemma 3.13. We get :

$$|(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\text{Log}(\varepsilon)| \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.163)$$

One easily concludes by combining (3.161), (3.163) and inequality (3.88).

**Remarque 3.25** *One deduces in particular the  $H^{1+s}$  stability estimate :*

$$\forall s \in [0, 1[, \quad \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq C(s) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.164)$$

*If suffices to write  $\tilde{u}^\varepsilon = u^0 + \tilde{u}^\varepsilon - u^0$  and to use the triangular inequality to obtain :*

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq \|u^0\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} + \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{1+s}(\Omega_R)} \leq C(s) (1 + \varepsilon^{1-s}) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Remarque 3.26** *Note that the two estimates (3.146) and (3.147) (and consequently the estimate (3.164) in remark 3.25) remain valid even if the support of  $f$  contains the origin. Indeed, their proof does not require more than the  $H^2$  regularity for  $u^0$ .*

 $L^2(\Omega_R)$ -estimate of  $\tilde{u}^\varepsilon - u_0$ 

We show the estimate (3.148). We use a standard duality technique. Let us introduce  $\psi^\varepsilon$  solution of (let us recall that  $\tilde{e}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - u^0$ ) :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } \psi^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that} \\ (A_R v, \psi^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = (v, \tilde{e}^\varepsilon)_{L^2(\Omega_R)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R). \end{array} \right. \quad (3.165)$$

The function  $\psi^\varepsilon$  is also characterized as the solution of the boundary value problem :

$$\begin{cases} \Delta \psi^\varepsilon + \omega^2 \psi^\varepsilon = -\tilde{e}^\varepsilon, & \text{in } \Omega_R, \\ \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{on } \Sigma^R, \\ \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n} + T_R^* \psi^\varepsilon = 0, & \text{on } \Gamma_R. \end{cases} \quad (3.166)$$

where the operator  $T_R^*$ , the adjoint of  $T_R$ , is defined as  $T_R$  (see (3.21)) by simply replacing  $\mu_n^R(\omega)$  by  $\overline{\mu_n^R(\omega)}$ . Note that, by elliptic regularity,  $\psi^\varepsilon \in H^2(\Omega_R)$  and :

$$\|\psi^\varepsilon\|_{H^2(\Omega_R)} \leq C \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}. \quad (3.167)$$

Let us take  $v = \tilde{e}^\varepsilon$  in (3.165). we get :

$$(A_R \tilde{e}^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2. \quad (3.168)$$

From equations (3.120) and (3.156), we also deduce that :

$$A_R \tilde{e}^\varepsilon = -B_0^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon. \quad (3.169)$$

Therefore, by definition of  $B_0^\varepsilon$  :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = (A_R \tilde{e}^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = -b_0^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon, \psi^\varepsilon) = i\omega (\tilde{u}^\varepsilon)_0^\varepsilon (\psi^\varepsilon)_0^\varepsilon. \quad (3.170)$$

We use (3.163) (see previous paragraph) to bound  $(\tilde{u}^\varepsilon)_0^\varepsilon = (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}$  and apply (3.85) to  $u = \psi^\varepsilon$  (with  $s = 2$ ) to obtain, thanks to (3.167) :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\psi^\varepsilon\|_{H^2(\Omega_R)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} \quad (3.171)$$

This completes the proof of Proposition 3.21.

**A lower bound for  $\tilde{u}^\varepsilon - u_0$  in  $H^1(\Omega_R)$**

We prove (3.149). We shall use the following trace theorem (see [40], theorem 1.5.2 page 25) :

$$\forall u \in H^1(\Omega_R), \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{[H_{00}^{1/2}(\Sigma^R)]'} \leq C (\|u\|_{H^1(\Omega_R)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_R)}). \quad (3.172)$$

Applying (3.172) to  $\tilde{e}^\varepsilon$ , we thus get, since  $\Delta \tilde{e}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{e}^\varepsilon = 0$  in  $\Omega_R$  :

$$\left\| \frac{\partial \tilde{e}^\varepsilon}{\partial n} \right\|_{[H_{00}^{1/2}(\Sigma^R)]'} \leq C \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)},$$

and taking into account the boundary condition satisfied by  $\tilde{e}^\varepsilon$  on  $\Sigma^R$  (see (3.160)) :

$$\omega |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\Sigma^R)]'} \leq C \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)}, \quad (3.173)$$

Moreover, since  $\tilde{w}_0^\varepsilon$  vanishes outside  $\Sigma_\varepsilon$ , it is easy to show (see [54]) that :

$$\|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{[H_{00}^{1/2}(\Sigma^R)]'} \geq C \|\tilde{w}_0^\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \quad (3.174)$$

where  $C$  does not depend on  $\varepsilon$ . Finally, thanks to (3.89) (cf. lemma 3.14) we get :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \geq C \sqrt{\varepsilon |\operatorname{Log} \varepsilon|} |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (3.175)$$

It remains to get a lower bound for  $|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|$ . We start from :

$$|(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \geq |(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| - |(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (3.176)$$

The function  $u^0$  is smooth at the neighborhood of  $\Sigma_\varepsilon$ , due to the fact that  $f$  is compactly supported in  $\Omega$ . In particular, it is Lipschitz continuous in a neighborhood of the origin, the Lipschitz constant being estimated by the  $L^2(\Omega)$ -norm of  $f$ . More precisely, we can write locally :

$$|u^0(0, y) - u^0(0, 0)| \leq C y \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.177)$$

where the constant  $C$  only depends of the neighborhood and the distance from the support of  $f$  to the origin (this follows from elliptic regularity). From (3.177), we deduce :

$$|(u^0; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \geq C \sqrt{\varepsilon} |u^0(0, 0)| - C \varepsilon^{3/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.178)$$

On the other hand, applying successively (3.84) to  $\tilde{e}^\varepsilon$  and estimate (3.147) of Proposition 3.21, we get the estimate :

$$|(\tilde{e}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \varepsilon \sqrt{|\operatorname{Log} \varepsilon|} \|\tilde{e}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon^{3/2} |\operatorname{Log} \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.179)$$

One concludes from (3.175), (3.176), (3.178) and (3.179).

**A lower bound for  $\tilde{u}^\varepsilon - u_0$  in  $L^2(\Omega_{R,R'})$**

We give here a “direct” proof of (3.150) that makes use of an integral representation of  $\tilde{e}^\varepsilon$  (more indirect proofs are also possible). Since  $\tilde{e}^\varepsilon$  is the outgoing solution of the non homogeneous Neumann half-space problem (3.160), it admits the following integral representation :

$$\begin{cases} \tilde{e}^\varepsilon(x, y) = -i\omega \frac{(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon G(x, y, y') dy', \\ G(x, y, y') = \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(\omega \sqrt{x^2 + (y - y')^2}). \end{cases} \quad (3.180)$$

Using polar coordinates ( $x = r \sin \theta, y = r \cos \theta$ ), we can write :

$$G(x, y, y') = \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(\omega r [1 - 2 \frac{y'}{r} \cos \theta + (\frac{y'}{r})^2]^{1/2}). \quad (3.181)$$

Since the Hankel function  $H_0^{(1)}$  is analytic except at the origin, for any  $0 < R' < R$  we deduce the existence of a constant  $C$ , depending only on  $R, R'$  and  $\omega$  such that :

$$\forall (x, y) \in \Omega_{R,R'}, \quad \forall y' \in ]0, \varepsilon[, \quad |G(x, y, y') - \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(\omega r)| \leq C \varepsilon. \quad (3.182)$$

As a consequence, we have :

$$\forall (x, y) \in \Omega_{R,R'}, \quad |\tilde{e}^\varepsilon(x, y) + \frac{\omega}{2} \sqrt{\varepsilon} (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} H_0^{(1)}(\omega r)| \leq C \varepsilon^{3/2} |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|, \quad (3.183)$$

from which we deduce in particular that :

$$\forall (x, y) \in \Omega_{R,R'}, \quad |\tilde{e}^\varepsilon(x, y)|^2 \geq \frac{\omega^2}{4} \varepsilon (\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 \left\{ |H_0^{(1)}(\omega r)|^2 - C \varepsilon \right\}. \quad (3.184)$$

We integrate (3.184) over  $\Omega_{R,R'}$ , take the square root and get, with  $C_1 > 0$  :

$$\|\tilde{e}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})}^2 \geq \left( C_1 \varepsilon^{1/2} - C_2 \varepsilon^{3/2} \right) |(\tilde{u}^\varepsilon; w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (3.185)$$

Finally, (3.61) results from (3.185) and (3.178). The proof of proposition 3.22 is complete.

## 3.5 Proofs of theorems 3.9 and 3.11

### 3.5.1 Study of the error in the half-space $\Omega$

$H^1(\Omega_R)$ -estimate of  $\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon$

We prove (3.63). Let us introduce the error  $\eta^\varepsilon$  :

$$\eta^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon, \quad (3.186)$$

generated by the approximate model. It is easy to see that  $\eta^\varepsilon$  satisfies indifferently :

$$(A_R + B^\varepsilon) \eta^\varepsilon = R^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon \quad \text{and} \quad (A_R + B_0^\varepsilon) \eta^\varepsilon = R^\varepsilon u^\varepsilon. \quad (3.187)$$

By lemma 3.16, we deduce :

$$\|\eta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \|R^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} + \|R^\varepsilon (\tilde{u}^\varepsilon - u^0)\|_{H^1(\Omega_R)} \quad (3.188)$$

We can estimate  $R^\varepsilon u^0$  thanks to (3.134) (lemma 3.17). For the second term, using inequality (3.140) (see proof of lemma 3.17), we can write :

$$\|R^\varepsilon (\tilde{u}^\varepsilon - u^0)\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (3.189)$$

Applying (3.96) (cf. lemma 3.15) to  $u = \tilde{u}^\varepsilon - u^0$  with  $s = 1/2$ , we get :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)}. \quad (3.190)$$

Then, thanks to estimate (3.146) of proposition 3.21 (we take  $s = 1/2$ ), we have :

$$\|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.191)$$

One concludes easily.

**Remarque 3.27** *An (quasi) obvious consequence of (3.63) is that :*

$$\|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.192)$$

*Indeed by triangular inequality and trace estimate (3.96), we have :*

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq \|u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} + \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} + \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \\ \leq \|u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} + C \sqrt{\varepsilon} \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^{3/2}(\Omega_R)} + C \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)}. \end{cases} \quad (3.193)$$

*As the support of  $f$  does not contain the origin we can apply (3.142) - see the proof of lemma 3.17, namely :*

$$\|u^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.194)$$

*Therefore one deduces (3.192) from (3.63) and (3.146). Note that (3.192) requires that the support of  $f$  does not contain the origin.*

$L^2(\Omega_R)$ -estimate of  $\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon$

We prove (3.64) by a duality technique. Let us consider the problem : Let us introduce  $\tilde{\Psi}^\varepsilon$  solution of (let us recall that  $\eta^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon$ ) :

$$\begin{cases} \text{Find } \tilde{\Psi}^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that} \\ ((A_R + B_0^\varepsilon) v, \tilde{\Psi}^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = (v, \eta^\varepsilon)_{L^2(\Omega_R)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R). \end{cases} \quad (3.195)$$

The function  $\tilde{\Psi}^\varepsilon$  is also characterized as the solution on the boundary value problem :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\Psi}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{\Psi}^\varepsilon = -\eta^\varepsilon, & \text{in } \Omega_R, \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}^\varepsilon}{\partial n} + i \omega (\tilde{\Psi}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma^\varepsilon} \tilde{w}_0^\varepsilon = 0, & \text{on } \Sigma^R, \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}^\varepsilon}{\partial n} + T_R^* \tilde{\Psi}^\varepsilon = 0, & \text{on } \Gamma_R. \end{cases} \quad (3.196)$$

Up to the change of  $T_R$  into  $T_R^*$  and  $T_0^\varepsilon$  into its adjoint  $(T_0^\varepsilon)^*$  (simply change  $i\omega$  into  $-i\omega$  in definition (3.154)), the relationship  $\eta^\varepsilon \mapsto \tilde{\Psi}^\varepsilon$  is the same as the relationship  $f \mapsto \tilde{u}^\varepsilon$ . We can thus apply the equivalent of the stability estimate (3.164) (see remark 3.25 and 3.26), which leads to :

$$\forall s \in [0, 1[, \quad \tilde{\Psi}^\varepsilon \in H^{1+s}(\Omega), \quad \|\tilde{\Psi}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.197)$$

Let us take  $v = \eta^\varepsilon$  in (3.195), from (3.187), we get :

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = ((A + B^{\varepsilon,0}) \eta^\varepsilon, \tilde{\Psi}^\varepsilon) = (R^\varepsilon u^\varepsilon, \tilde{\Psi}^\varepsilon) = r^\varepsilon(u^\varepsilon, \tilde{\Psi}^\varepsilon). \quad (3.198)$$

Therefore, applying inequality (3.139) for  $r^\varepsilon(.,.)$  :

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \cdot \|\tilde{\Psi}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (3.199)$$

On the other hand, by (3.96) (lemma 3.15) and (3.197), we have :

$$\forall s \in [0, 1[, \quad \|\tilde{\Psi}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma^\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon^s \|\tilde{\Psi}^\varepsilon\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C(s) \varepsilon^s \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.200)$$

One deduces (3.64) from (3.192), (3.199) and (3.200).



**Estimates of  $\tilde{u}^\varepsilon - u^\varepsilon$  in the domains  $\Omega_{R,R'}$**

. We first prove an  $L^2$  estimate. Let us introduce  $\tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon$  the solution of problem (3.195) (or (3.196)) in which we have replaced  $\eta^\varepsilon$  by :

$$\eta_{R'}^\varepsilon = \eta^\varepsilon|_{\Omega_{R,R'}}. \quad (3.201)$$

Since  $((A_R + B_0^\varepsilon) v, \tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = (v, \eta_{R'}^\varepsilon)_{L^2(\Omega_R)}$  for any  $v \in H^1(\Omega_R)$ , we have in particular, with  $v = \eta^\varepsilon$  :

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})}^2 = (\eta^\varepsilon, \eta_{R'}^\varepsilon)_{L^2(\Omega_{R,R'})} = ((A_R + B_0^\varepsilon) \eta^\varepsilon, \tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = r^\varepsilon (u^\varepsilon, \tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon) \quad (3.202)$$

Thus, applying (3.139) once again :

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})}^2 \leq C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \cdot \|\tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (3.203)$$

The novelty with respect of the previous proof is due to the fact that, since  $\eta_{R'}^\varepsilon$  is supported in  $\Omega_{R,R'}$ , we can apply the estimate (3.192) (see remark 3.27), replacing  $\tilde{u}^\varepsilon$  by  $\tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon$  and  $f$  by  $\eta_{R'}^\varepsilon$  :

$$\|\tilde{\Psi}_{R'}^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(R') \varepsilon \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})}.$$

We thus get  $\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})} \leq C \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}$ , which, thanks to (3.192), leads to

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})} \leq C \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.204)$$

It is now easy to derive the local  $H^1$  estimate (3.65) by localization. Thanks to (3.204), we only have to estimate the  $L^2$  norm of  $\nabla \eta^\varepsilon$ . Let  $R_1 < R' < R < R_2$  and  $\theta$  be a real valued cut-off function in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  such that  $0 \leq \theta(x) \leq 1$  and :

$$\text{supp } \theta \subset \Omega_{R_1, R_2}, \quad \theta(x) = 1 \text{ in } \Omega_{R, R'}.$$

Since  $\Delta \eta^\varepsilon = -\omega^2 \eta^\varepsilon$ , we have, in the sense of distributions in  $\Omega$  :

$$\Delta(\theta \eta^\varepsilon) = (\Delta \theta - \omega^2 \theta) \eta^\varepsilon + 2 \nabla \theta \cdot \nabla \eta^\varepsilon. \quad (3.205)$$

We multiply (3.205) by  $\theta \overline{\eta^\varepsilon}$  and integrate over  $\Omega$ . We get :

$$\int_\Omega |\nabla(\theta \eta^\varepsilon)|^2 dx = \int_\Omega (\Delta \theta - \omega^2 \theta) \theta |\eta^\varepsilon|^2 + 2 \int_\Omega \nabla \theta \cdot \nabla \eta^\varepsilon \theta \overline{\eta^\varepsilon} dx, \quad (3.206)$$

that is to say, using  $\theta \nabla \eta^\varepsilon = \nabla(\theta \eta^\varepsilon) - \eta^\varepsilon \nabla \theta$  :

$$\int_\Omega |\nabla(\theta \eta^\varepsilon)|^2 dx = \int_\Omega [(\Delta \theta - \omega^2 \theta) \theta - 2 |\nabla \theta|^2] |\eta^\varepsilon|^2 dx + 2 \int_\Omega \nabla(\theta \eta^\varepsilon) \nabla \theta \overline{\eta^\varepsilon} dx, \quad (3.207)$$

Using  $2ab \leq (a^2/2 + 2b^2)$  in the last term, we finally obtain :

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(\theta \eta^\varepsilon)|^2 dx \leq \int_\Omega [(\Delta \theta - \omega^2 \theta) \theta] |\eta^\varepsilon|^2 dx. \quad (3.208)$$

Using the properties of the function  $\theta$  we can write :

$$\|\nabla \eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R,R'})}^2 \leq \int_\Omega |\nabla(\theta \eta^\varepsilon)|^2 dx \leq C \|\eta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{R_1, R_2})}^2. \quad (3.209)$$

One concludes by using (3.204) with  $(R', R) = (R_1, R_2)$ . The proof of theorem 3.9 is completed.

**Lower bounds for  $u^\varepsilon - u^0$  in  $H^1(\Omega_R)$  and  $L^2(\Omega_{R,R'})$** 

To obtain (3.60), it suffices to apply the triangular inequality :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} \geq \|\tilde{u}^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} - \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})}, \quad (3.210)$$

and to use the inequalities (3.149) and (3.63). The proof of (3.61) is similar. This completes the proof of theorem 3.6.

**3.5.2 Study of the error in the slot  $\mathcal{O}_\varepsilon$** 
**Estimates of  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$  in  $\mathcal{O}_\varepsilon$** 

We first prove (3.70). Let us recall the expressions of  $u^\varepsilon$  and  $\tilde{u}^\varepsilon$  in  $\mathcal{O}_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, y) = (u^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} w_0^\varepsilon(y) \exp(i \omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u^\varepsilon, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} w_n^\varepsilon(y) e^{-\xi_n^\varepsilon(\omega) x}, \\ \tilde{u}^\varepsilon(x, y) = (\tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} w_0^\varepsilon(y) \exp(i \omega x). \end{cases} \quad (3.211)$$

It is clear that the study of the error passes by the estimate of the series appearing in the second term in the expression of the difference  $(u^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} - (\tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}$ . More precisely :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^L)}^2 = (1 + \omega^2)L (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 \\ \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + 2\xi_n^\varepsilon(\omega)^2) \frac{1 - e^{-2\xi_n^\varepsilon(\omega) L}}{2\xi_n^\varepsilon(\omega)} (u^\varepsilon, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2. \end{cases}$$

Thanks to  $|\xi_n^\varepsilon(\omega)| \leq (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$  and to the fact that the function  $x \mapsto (1 - e^{-x})$  is bounded in  $\mathbb{R}^+$ , this can be rewritten :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^L)}^2 \leq (1 + \omega^2)L (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 + C \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}^2. \quad (3.212)$$

Applying (3.84) of lemma 3.13 (to  $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ ) and (3.63) we get :

$$|(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon |\operatorname{Log} \varepsilon|} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\operatorname{Log} \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.213)$$

One obtains (3.70) thanks to (3.212), (3.213) and (3.192).

For the  $L^2$  norm, we have the formula :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^L)}^2 = L (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - e^{-2\xi_n^\varepsilon(\omega) L}}{2\xi_n^\varepsilon(\omega)} (u^\varepsilon, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2. \quad (3.214)$$

Observing that for all  $n \geq 1$ ,  $\xi_n^\varepsilon(\omega)^{-1} \leq \xi_1^\varepsilon(\omega)^{-1} \leq C \varepsilon$ , we get the (rough) estimate :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^L)}^2 \leq L (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 + C \varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}^2. \quad (3.215)$$

One obtains (3.71) by using once again (3.192) and (3.213).

We finally prove (3.72). In the domain  $\mathcal{O}_\varepsilon^{L,L'}$  we have :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L,L'})}^2 = (1 + \omega^2)(L - L') (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 \\ \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + 2\xi_n^\varepsilon(\omega)^2) \left( \frac{e^{-2\xi_n^\varepsilon(\omega) L'} - e^{-2\xi_n^\varepsilon(\omega) L}}{2\xi_n^\varepsilon(\omega)} \right) (u^\varepsilon, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2, \end{cases} \quad (3.216)$$

which yields

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L,L'})}^2 \leq (1 + \omega^2)L (u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 + C e^{-2 \xi_1^\varepsilon(\omega) L'} \|u^\varepsilon\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}^2. \quad (3.217)$$

The conclusion is immediate since  $e^{-2 \xi_1^\varepsilon(\omega) L'} \leq e^{-2 a \frac{L'}{\varepsilon}}$  for some  $a > 0$ . The proof of theorem 3.11 is complete.

### A lower bound for $u^\varepsilon$ inside the slot

In order to be complete, in particular to justify the table 2, we need to show the double inequality (3.73). Of course, it suffices to show the upper bound for  $H = H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^L)$  and the lower bound for  $H = L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^{L,L'})$ . We prove below this lower bound. The proof of the upper bound, straightforward, is left to the reader. First, we calculate :

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^{L,L'})}^2 = (L - L') (u^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{-2\xi_n^\varepsilon(\omega) L'} - e^{-2\xi_n^\varepsilon(\omega) L}}{2\xi_n^\varepsilon(\omega)} \right) (u^\varepsilon, w_n^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}^2, \quad (3.218)$$

As all the  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$  are (uniformly in  $\varepsilon$ ) bounded from below for  $n \geq 1$ , the series in the right hand side of (3.218) converges to 0 exponentially fast. Therefore :

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^{L,L'})} \geq |L - L'|^{\frac{1}{2}} (u^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon} - C e^{-a\frac{L'}{\varepsilon}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.219)$$

Moreover :

$$|(u^\varepsilon, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \geq |(u^0, w_0^0)_{\Sigma_\varepsilon}| - |(u^\varepsilon - u^0, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}|. \quad (3.220)$$

Reasoning as for (3.213), we get :

$$|(u^\varepsilon - u^0, w_0^\varepsilon)_{\Sigma_\varepsilon}| \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log } \varepsilon|} \|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\text{Log } \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.221)$$

The conclusion follows from (3.219), (3.220), (3.221) and (3.178).

## 3.6 Numerical results

For the numerical simulations, we have chosen to consider a situation which is slightly different from the one of section 3.2. Here, the waves are no longer generated by a source term  $f$ . We study the diffraction of a plane wave of incidence angle  $\theta$  (with respect to the plane  $x = 0$ ) :

$$u^i(\mathbf{x}) = \exp[i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)], \quad (3.222)$$

The presence of the boundary  $\partial\Omega^\varepsilon$  induces two phenomena :

- a reflected wave due to the boundary  $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\mathcal{O}_\varepsilon$ ,
- a diffracted wave due to the slot (plus the propagation of a wave inside the slot).

More precisely, in the absence of a slot, the solution  $u^0$  corresponds to a pure reflection :

$$u^0(\mathbf{x}) = \exp[i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] + \exp[i\omega(-x \cos \theta + y \sin \theta)], \quad (3.223)$$

and the diffracted field due to the slot, namely  $u_d^\varepsilon = u^\varepsilon - u^0$  is therefore the solution of the following problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_d^\varepsilon - \omega^2 u_d^\varepsilon = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_d^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_d^\varepsilon}{\partial n}|_{\Sigma_\varepsilon} + T^\varepsilon(u_d^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}) = -T^\varepsilon(u^0|_{\Sigma_\varepsilon}), & \text{on } \Sigma_\varepsilon, \\ u^\varepsilon \text{ is outgoing at infinity.} \end{array} \right. \quad (3.224)$$

Our method consists in approximating  $u_d^\varepsilon$  by  $\tilde{u}_d^\varepsilon$  solution of the following problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}_d^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}_d^\varepsilon = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_d^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{u}_d^\varepsilon}{\partial n}|_{\Sigma_\varepsilon} + T_0^\varepsilon(\tilde{u}_d^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}) = -T_0^\varepsilon(u^0|_{\Sigma_\varepsilon}), & \text{on } \Sigma_\varepsilon, \\ \tilde{u}_d^\varepsilon \text{ is outgoing at infinity.} \end{array} \right. \quad (3.225)$$

To perform the numerical computation of  $u^\varepsilon$  and  $\tilde{u}^\varepsilon$ , we use the variational formulation of problems (3.224) and (3.225) truncated to the domain  $\Omega_R$  (we omit the details - see section 3.2 and [38]). We use a (large order) truncation of the series appearing in the definition of the bilinear forms  $b_R(\cdot, \cdot)$  and  $b_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ . We apply a  $P_2$  finite element method for the space discretization. The computational code we used is the code MELINA [67] on a very thin mesh (see figure 3.14).

We first present numerical results corresponding to the following set of data :

- the computation domain is  $\Omega_R$  with  $R = 1$ .
- the order of truncation of  $b_\varepsilon$  is 10.
- the order of truncation of  $b_R$  is 15.
- the pulsation  $\omega$  is  $\omega = 2\pi$  which corresponds to a wavelength :  $\lambda = 1$ .
- the width  $\varepsilon$  is fixed to  $\varepsilon = 0.1$ , i.e. one tenth of the wavelength.
- the angle of incidence is  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

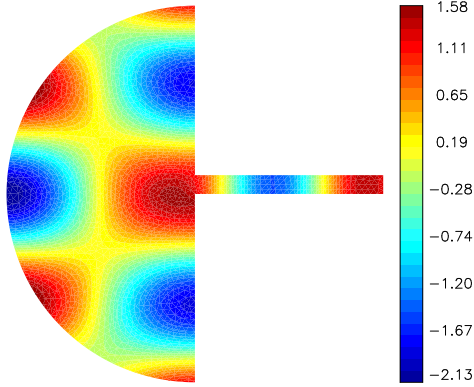


FIG. 3.6 – Numerical computation of  $u_t^\varepsilon$

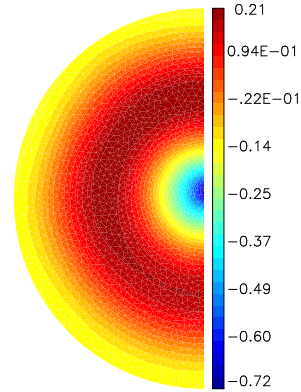
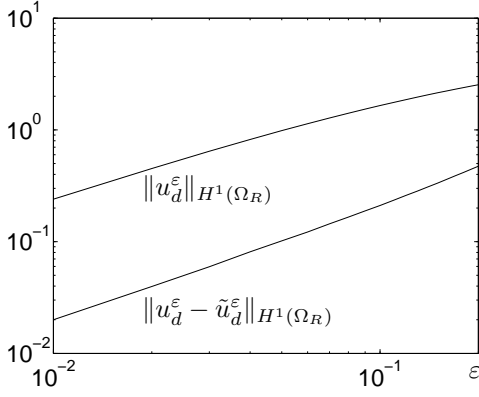
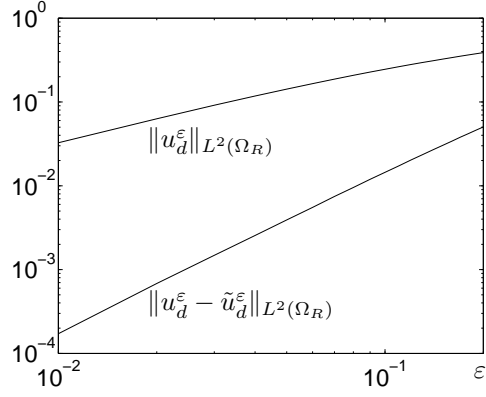
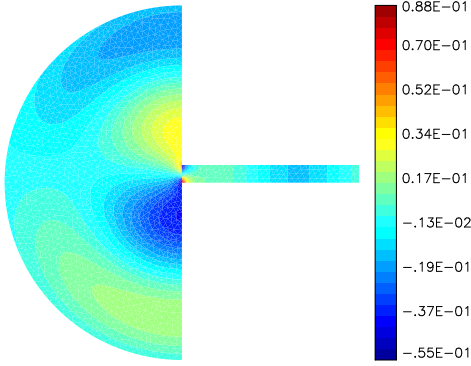
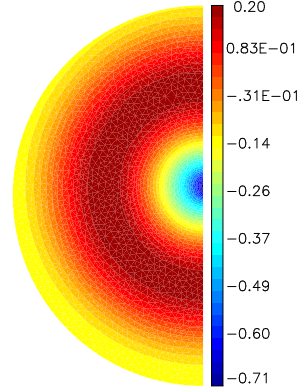


FIG. 3.7 – Numerical computation of  $u_d^\varepsilon$

In figure 3.6 we represent the (real part of) the exact total field  $u_t^\varepsilon$ . Since the slot is thin, it is difficult to see its effect on the total field in the half space. However one clearly sees the wave that is transmitted inside the slot. In figure 3.7, we represent the diffracted field  $u_d^\varepsilon = u_t^\varepsilon - u^0$  (which is of course only represented in the half-space). Note that its amplitude is about 2.5 times smaller than the amplitude on the total field. One can also remark the monopolar structure of this diffracted field : it looks like the response to a point source and is essentially concentrated close to the end of the slot.

In figure 3.9, we represent the diffracted field computed with the approximate model, namely  $\tilde{u}_d^\varepsilon$  and the error committed with the approximate model, namely  $u_d^\varepsilon - \tilde{u}_d^\varepsilon$  in figure 3.8. This time the structure of the error is clearly dipolar (i.e. looks like a field created to a point source term which is a first derivative in  $y$  of a  $\delta$ -function). This is due to the fact that the “constant in  $y$ ” part of the transmitted wave inside the slot is well taken into account by the approximate model. Moreover, this error is once again concentrated close to the end of the slot, even more than the diffracted field itself. Its  $L^\infty$  norm is about ten times smaller than the one of the diffracted field but this ratio is much smaller if one looks at regions that avoid the end of the slot.

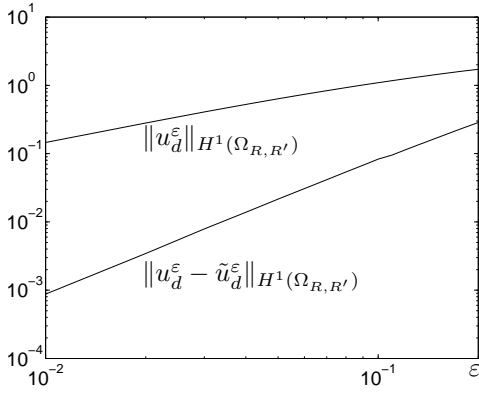
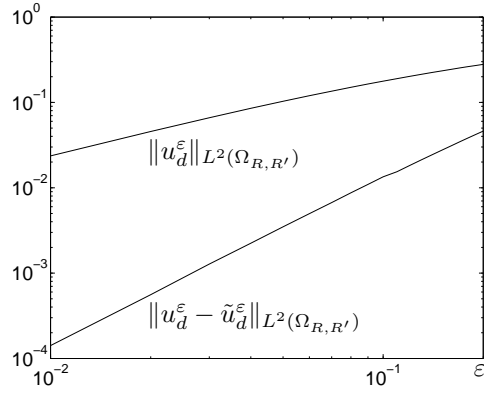

 FIG. 3.10 –  $H^1$ -global convergence curves

 FIG. 3.11 –  $L^2$ -global convergence curves

 FIG. 3.8 – Numerical computation of  $u_d^\varepsilon - \tilde{u}_d^\varepsilon$ 

 FIG. 3.9 – Numerical computation of  $\tilde{u}_d^\varepsilon$ 

This describes what happens for one value of  $\varepsilon$ . To illustrate our theoretical results we vary  $\varepsilon$  and represent the variation of different “errors” as functions of  $\varepsilon$ . In figure 3.10, we compare the diffracted field to the error introduced by the model in the norm of  $H^1(\Omega_R)$ ,  $R = 1$  and we do the same in figure 3.11 with the  $L^2$  norms. The curves are in Log-Log scale and look like straight lines.

Measuring the slope of these lines in figure 3.10, we observe that both  $u_d^\varepsilon = u_t^\varepsilon - u^0$  and  $\tilde{u}_d^\varepsilon - u_d^\varepsilon$  converge “linearly” to 0. However  $\tilde{u}_d^\varepsilon - u_d^\varepsilon$  is smaller than  $u_d^\varepsilon$  by two orders of magnitude. It illustrates in particular estimates (3.57) and (3.60) for  $u_t^\varepsilon - u^0$  and estimate (3.63) for  $\tilde{u}_d^\varepsilon - u_d^\varepsilon$ : graphically, it is almost impossible to detect the presence of the  $\sqrt{|\text{Log } \varepsilon|}$  term in (3.57).

Looking at figure 3.11, one clearly sees that, in  $L^2$  norm, the error  $\tilde{u}_d^\varepsilon - u_d^\varepsilon$  decays much more rapidly to 0 than  $u_t^\varepsilon - u^0$ . In fact, measuring the slopes, one recovers the  $O(\varepsilon)$  estimate for  $u_t^\varepsilon - u^0$  (cf. (3.58)) and the  $O(\varepsilon^2)$  estimate for  $\tilde{u}_d^\varepsilon - u_d^\varepsilon$  (cf. (3.64)).

On figures 3.12 and 3.13, we represent the same quantities except that, for computing the norms, we replace the domain  $\Omega_R$  by  $\Omega_{R,R'}$  with  $R' = 1/2$ . Our results illustrate the local estimates. In particular, one sees clearly the gain of one power of  $\varepsilon$  by passing from  $u_d^\varepsilon = u_t^\varepsilon - u^0$  to  $\tilde{u}_d^\varepsilon - u_d^\varepsilon$  even in the  $H^1$ -norm (contrary to what occurs in the domains  $\Omega_R$ ). This illustrates the estimates (3.59) of theorem 3.4 and (3.65) of theorem 3.9.


 FIG. 3.12 –  $H^1$ -local convergence curves

 FIG. 3.13 –  $L^2$ -local convergence curves

### 3.7 Conclusion and perspectives

We have proposed in this article an approximate coupling “1D-2D” model for the propagation in media including thin slots. This model is similar to models that have been already used in the literature. The main contribution of this article is a quite complete mathematical analysis of this procedure. Our results and error estimates demonstrate the relevance of the approach but they also point out its limits in terms of accuracy, in particular due to a poor representation of the actual singularities of the exact solution. It is not clear how to improve the accuracy of the approximate solution : there does not exist a hierarchy of higher order models as for thin layer approximation.

There remains of course a lot of open questions, of different nature. We propose below a (non exhaustive) list of such questions.

- **About the extension of the 2D analysis.** We think that the forthcoming problems would deserve to be addressed.
  - The case of a slot of finite length. This work has in fact already been achieved and will be written in [85]. The results are essentially identical to the ones of this article. The proof is similar even though additional technical difficulties are introduced by the “resonances” of the finite slot.
  - The case of a curved slot. Provided that the slot remains straight for  $0 < x < \delta$ , this case should be possible to treat thanks to a perturbation analysis with respect to the straight slot case.
  - The case of other approximate transmission conditions such as the ones evoked in remark 3.1. It would be in particular useful to determinate if some of them are more accurate. We think that for those given in remark 3.1, this is not the case. The order of accuracy should be the same. However this question is still open.
  - The theory in the case of the Dirichlet condition. In this case, the situation is quite different since the wave that is transmitted in the slot is purely evanescent and the pure half-space solution already provides a much better approximation than for the Neumann condition.
- **About the extension to time domain.** Writing in time our approximate model is straightforward. The appropriate way to generalize the analysis is less clear. In particular, it seems difficult to use the results for the time harmonic case and transfer them to the time domain. A direct approach in time domain seems preferable.

- **About the numerical analysis of approximate models.** One of the advantages of the model we have constructed is its variational nature. However, the question of an optimal choice of a numerical method for its approximation is raised. In particular, it is known that the numerical approximation of problems with small parameters can suffer from so-called numerical locking phenomena (poor approximation for small values of the parameters). The following questions are then relevant and related :
  - Which is the best way to approach numerically the solution of the approximate problems : finite elements, mixed finite elements, finite volumes, ... ?
  - Is it possible to derive error estimates for the numerical solution that are independent of  $\varepsilon$  ?
- **About generalizations of the 2D model**
  - The 3D case. There are several geometrical configurations that should be analyzed. We had a third dimension associated with the  $z$  direction. The case where the slot is infinite in the  $z$  direction is practically equivalent to the 2D case. However, one can expect different results depending on the fact that the  $z$ -dimension of the slot is  $O(1)$  or  $O(\varepsilon)$ .
  - Maxwell’s system. The interesting case would correspond to the perfectly conducting boundary condition. In such a case, one must expect different behaviours of the different components of the electric field since, in 2D, one meets either the Dirichlet or Neumann condition depending on the polarization of the electromagnetic field (this is already mentioned in [84]).
- **About the improvement of the approximate models.**
  - A first very simple solution would be to begin the 1D model only after  $x = \delta$  for some positive  $\delta$  (see figure 3.15). We have analysed this problem from the mathematical point of view. Exploiting the exponential decay of “non constant in  $y$ ” solutions inside the slot, one can show the “exponential accuracy” of the approximate model. One can refer to [85], for the analysis. However, from a practical point of view, this solution does not solve the “meshing problem” (the geometry depends on  $\varepsilon$ ) which motivates the research of simplified models.
  - Another direction that we are currently investigating consists in trying to exploit the technique of Matched Asymptotics Expansions to derive approximate models for numerical approximation. This will be the object of a forthcoming work. Our preliminary results are quite promising.

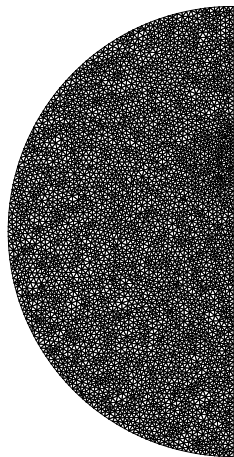


FIG. 3.14 – The mesh

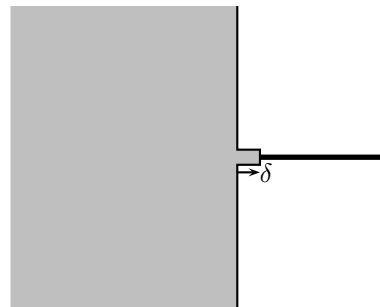


FIG. 3.15 – Geometrical configuration for the  $\delta$ -model.

# Chapitre 4

## Analyse du modèle : Cas d'une fente finie non résonnante

### Sommaire

---

4.1	Convergence de la solution exacte vers la solution limite . . . . .	61
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	64
4.3	Le résultat de stabilité . . . . .	66
4.4	Le résultat de consistance . . . . .	68

---

**Résumé :** L'objectif de ce chapitre est l'extension des résultats mathématiques du chapitre 3 au cas d'une fente finie non résonnante (sa longueur n'est pas un multiple de la demie longueur d'onde). Les ingrédients sont similaires à ceux utilisés pour la fente semi infinie. Le point nouveau est la réduction à un problème de transmission entre deux demi espaces via l'utilisation d'un opérateur Dirichlet Neumann de type matriciel qui n'est défini que pour les fréquences non résonnantes (voir section 4.1).



## Introduction

Nous nous intéressons ici à l'étude théorique de la fente droite finie. Nous nous plaçons ici dans le cadre du chapitre 2. Nous nous demandons quelle est la qualité du modèle approché pour presque toutes les longueurs dites non résonnantes :

$$\omega L \neq \ell\pi, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^* \quad (4.1)$$

La géométrie du domaine de propagation est la suivante :

Le domaine de propagation  $\Omega_\varepsilon$  est constitué de deux demi espaces connectés par une fente droite de longueur  $L \in \mathbb{R}$  et haute de  $\varepsilon$ .

$$\overline{\Omega_\varepsilon} = \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega'} \cup \overline{\mathcal{O}_\varepsilon}, \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{cases} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\}, \\ \Omega' &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > L\}, \\ \mathcal{O}_\varepsilon &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < L \text{ et } 0 < y < \varepsilon\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous désignons par  $A$  et  $A'$  les deux sommets inférieurs gauche et droit de la fente, puis par  $\Sigma_\varepsilon$  et  $\Sigma'_\varepsilon$  les frontières gauche et droite de la figure :

$$\begin{cases} A = (0; 0) \text{ et } A' = (L; 0), \\ \Sigma_\varepsilon = \{0\}_x \times [0; \varepsilon]_y \text{ et } \Sigma'_\varepsilon = \{L\}_x \times [0; \varepsilon]_y. \end{cases} \quad (4.4)$$

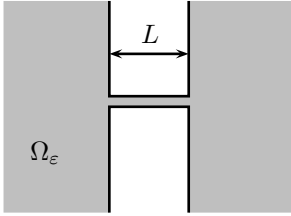


FIG. 4.1 – Le domaine de propagation

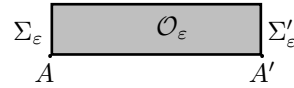


FIG. 4.2 – La fente droite finie

Nous appelons solution exacte, l'unique solution du problème aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega_\varepsilon) \text{ sortante telle que :} \\ -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  est à support compact dans l'ouvert  $\Omega$ .

**Remarque 4.1** *Comme le support de la source est seulement du côté gauche, nous avons choisi d'étudier un problème de réflexion transmission. Il est intuitif de penser que l'énergie transmise tendra vers 0 avec  $\varepsilon$  et que plus  $\varepsilon$  sera petit, plus l'onde sera réfléchie.*

Nous appelons, solution limite, l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^0 \in H_{loc}^1(\Omega_\varepsilon) \text{ sortante telle que :} \\ -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega', \end{cases} \quad (4.6)$$

**Remarque 4.2** La solution limite  $u^0$  correspond à la solution du problème sans fente. Ce qui est tout à fait intuitif. En effet, la solution  $u^0$  est en fait nulle dans le demi espace droit; c'est pourquoi ce problème revient à une réflexion totale et à une transmission nulle.

De même, nous appelons, solution approchée, l'unique solution du problème couplé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Chercher } \tilde{u}^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ sortante et } \tilde{U}^\varepsilon \in H^1([0; L]) \text{ tels que :} & \\ -\Delta \tilde{u}^\varepsilon - \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } (\partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon) \cap (\partial\Omega' \setminus \Sigma'_\varepsilon), \\ -\frac{d^2 \tilde{U}^\varepsilon}{dx^2} - \omega^2 \tilde{U}^\varepsilon = 0, & \text{sur } [0; L]_x, \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon = \tilde{U}^\varepsilon(0) \text{ et } \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon = \tilde{U}^\varepsilon(L), & \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{d\tilde{U}^\varepsilon}{dx}(0) \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\Sigma'_\varepsilon} = \frac{d\tilde{U}^\varepsilon}{dx}(L). & \end{array} \right. \quad (4.7)$$

L'étude des fentes droites finies se divise naturellement en deux parties :

(1) l'étude des fentes résonnantes : elles correspondent à certaines pulsations  $\omega$  particulières.

$$\text{Il existe } \ell \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \omega L = \ell \pi. \quad (4.8)$$

Autrement dit, la longueur du guide est un multiple d'une demie longueur d'onde :

$$L = \frac{\ell \lambda}{2}. \quad (4.9)$$

Pour ces  $\omega$ , les techniques développées ici ne s'appliquent plus. Une ébauche en sera donnée à la partie III. On y trouvera des différences notables par rapport au cas des fentes semies infinies.

(2) l'étude des fentes non résonnantes. Celles-ci correspondent aux pulsations  $\omega$  telles que :

$$\omega L \neq \ell \pi, \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N}^*, \text{ c'est à dire les } L \neq \frac{\ell \lambda}{2}. \quad (4.10)$$

Son étude est très proche de celle de la fente semie infinie (chapitre 3). C'est l'objet de ce chapitre.

Commençons par des estimations dans les demis espaces. Pour des raisons techniques (reliées au défaut de coercivité des équations de Helmholtz), les estimations qui suivent sont relatives à des domaines bornés :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega_R = \{ \mathbf{x} \in \Omega / \|\mathbf{x} - A\| < R \} & \text{et } \Omega_{R,R'} = \{ \mathbf{x} \in \Omega / R' < \|\mathbf{x} - A\| < R \}, \\ \Omega'_R = \{ \mathbf{x} \in \Omega' / \|\mathbf{x} - A'\| < R \} & \text{et } \Omega'_{R,R'} = \{ \mathbf{x} \in \Omega' / R' < \|\mathbf{x} - A'\| < R \}, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

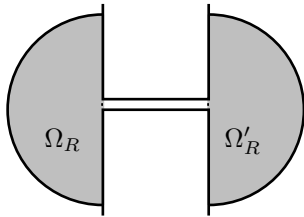


FIG. 4.3 – Le domaine  $\Omega_R \cup \Omega'_R$

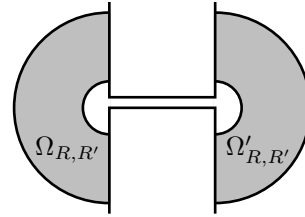


FIG. 4.4 – Le domaine  $\Omega_{R,R'} \cup \Omega'_{R,R'}$

**Théorème 4.3** *Sous la condition*

$$\omega L \neq 0 \quad \text{modulo } \pi \quad (4.12)$$

et pour tous les  $f \in L^2(\Omega)$  à support dans un fermé  $F \subset \Omega$  (de  $\mathbb{R}^2$ ) donné, nous avons :

(i) pour tout réel  $R$  positif, il existe un réel  $C(R, L, F)$  tel que :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L, F) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases} \quad (4.13)$$

(ii) pour tous réels  $R$  et  $\delta$  positifs, il existe des réels  $C(R, L, F)$  et  $C(R, L, \delta, F)$  tels que :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L, \delta, F) \varepsilon^{2-\delta} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases} \quad (4.14)$$

(iii) pour tous réels  $R$  et  $R'$  positifs tels que  $R' < R$ , il existe un réel  $C(R, R', L, F)$  tel que :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_{R, R'} \cup \Omega'_{R, R'})} \leq C(R, L, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R, R'} \cup \Omega'_{R, R'})} \leq C(R, R', L, F) \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (4.15)$$

**Remarque 4.4** *La condition (4.12) place en fait la fente dans un régime non résonnant. Elle est tout à fait fondamentale, en effet, lorsque prend  $L = L_0$  avec*

$$\omega L_0 = 0 \quad \text{modulo } \pi, \quad (\text{mode résonnant}) \quad (4.16)$$

les inégalités (4.13), (4.14) et (4.15) sont fausses. On pourra pour l'instant se contenter d'observer que, dans les preuves qui suivent, les constantes que nous allons exhiber vérifient :

$$\lim_{L \rightarrow L_0} C(\cdot, L) = +\infty. \quad (4.17)$$

Donnons maintenant des estimations dans la fente. Introduisons les domaines de fente :

$$\mathcal{O}_\varepsilon^{L_1, L_2} = \{(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon / L_1 < x < L_2\}, \quad \text{pour } 0 < L_1 < L_2 < L. \quad (4.18)$$

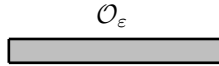


FIG. 4.5 – Le domaine  $\mathcal{O}_\varepsilon$

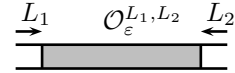


FIG. 4.6 – Le domaine  $\mathcal{O}_\varepsilon^{L_1, L_2}$

Nous avons le

**Théorème 4.5** *Sous la condition (4.12) et pour tous les  $f \in L^2(\Omega)$  dont le support est inclus dans un fermé  $F \subset \Omega$  (de  $\mathbb{R}^2$ ) nous avons :*

(i) Il existe un réel  $C(L, F)$  positif tel que :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C(L, F) \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C(L, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (4.19)$$

(ii) Il existe un réel  $C(L, F)$  positif tel que :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C(L, F) \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C(L, F) \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{cases} \quad (4.20)$$

(iii) Pour tous  $L_1$  et  $L_2$  réels positifs tels que  $0 < L_1 < L_2 < L$ , il existe un réel  $C(L, L_1, L_2, F)$  tel que :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L_1, L_2})} \leq C(L, F) \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^{L_1, L_2})} \leq C(L, L_1, L_2, F) \varepsilon^{3/2} \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{cases} \quad (4.21)$$

Nous allons dans la suite nous contenter de démontrer la première ligne de (4.13)

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L, F) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.22)$$

Pour démontrer les autres inégalités il suffit alors d'adapter les preuves du chapitre 3.

**Remarque 4.6** Remarquons que toutes ces inégalités sont identiques à celles obtenues pour la fente semi infinie. On peut ici se référer aux théorèmes 3.4, 3.9 et 3.11.

## 4.1 Convergence de la solution exacte vers la solution limite

Nous démontrons ici l'inégalité donnée à la première ligne de (4.13). Nous suivons ici la démarche du chapitre 3.

**Opérateur Dirichlet-Neumann : réduction du problème à un domaine ne dépendant pas de  $\varepsilon$**

Pour se ramener à un domaine ne dépendant pas de  $\varepsilon$ , nous avons choisi d'utiliser un opérateur de Dirichlet-Neumann matriciel. Introduisons le problème :

$$\begin{cases} \text{Pour } v \in H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon) \text{ et } v' \in H^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon), \text{ chercher } u \in H^1(\mathcal{O}_\varepsilon) \text{ tel que :} \\ \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } \mathcal{O}_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{en } y = 0 \text{ et } \varepsilon, \\ u|_{\Sigma_\varepsilon} = v \text{ et } u|_{\Sigma'_\varepsilon} = v'. \end{cases} \quad (4.23)$$

Comme  $\omega\varepsilon < \pi$ , il est possible de voir que ce problème est bien posé pour :

$$\omega L \neq 0, \quad \text{modulo } \pi. \quad (4.24)$$

Nous pouvons donc définir l'opérateur Dirichlet-Neumann  $T^{\varepsilon, L}$  qui à  $(v, v')$  associe les traces de Neumann de  $u$  sur  $\Sigma_\varepsilon$  et  $\Sigma'_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} T^{\varepsilon, L} : H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon) \times H^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon) \longrightarrow H^{-1/2}(\Sigma_\varepsilon) \times H^{-1/2}(\Sigma'_\varepsilon) \\ (v, v') \longmapsto (\varphi; \varphi') = \left( -\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon}; \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Sigma'_\varepsilon} \right) \end{cases} \quad (4.25)$$

Avec

$$\begin{cases} v(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^\varepsilon w_n^\varepsilon(y), & \varphi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^\varepsilon w_n^\varepsilon(y), \\ v'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (v')_n^\varepsilon w_n^\varepsilon(y), & \varphi'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi')_n^\varepsilon w_n^\varepsilon(y), \end{cases} \quad (4.26)$$

une forme explicite de  $T^{\varepsilon, L}$  est donnée par :

$$(\varphi_0^\varepsilon; (\varphi')_0^\varepsilon) = \frac{\omega}{\sin(\omega L)} (v_0^\varepsilon; (v')_0^\varepsilon) \begin{bmatrix} \cos(\omega L) & -1 \\ -1 & \cos(\omega L) \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

et pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$(\varphi_n^\varepsilon; (\varphi'_n)^\varepsilon) = \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\sinh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} (v_0^\varepsilon; (v'_0)^\varepsilon) \begin{bmatrix} \cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) & -1 \\ -1 & \cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

où nous avons noté :

$$\xi_n^\varepsilon(\omega) = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} - \omega^2}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.29)$$

**Remarque 4.7** Dans le cas où la condition (4.12) n'est pas vérifiée, c'est à dire :

$$\frac{\omega L}{2} = p \pi, \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^*, \quad (4.30)$$

l'opérateur de Dirichlet-Neumann n'est pas défini (notons que dans (4.27)  $\sin \omega L = 0$ ). Ceci est dû au fait que le problème (4.23) de Dirichlet est mal posé. En effet, dans le cas où

$$\int_0^\varepsilon u^\varepsilon(0, y) dy = (-1)^p \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(L, y) dy, \quad (4.31)$$

il admet un espace vectoriel de dimension 1 de solutions. De plus, dans le cas contraire il n'a pas de solution (alternative de Fredholm).

### Equation opérateur

Ainsi, la restriction de la solution exacte à  $\Omega \cup \Omega'$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega \cup \Omega') \text{ est sortante,} \\ -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, \quad \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } (\partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon) \cup (\partial\Omega' \setminus \Sigma'_\varepsilon), \\ \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\varepsilon}; \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Sigma'_\varepsilon} \right) + T^{\varepsilon, L}(u^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}; u^\varepsilon|_{\Sigma'_\varepsilon}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Soit  $R$  assez grand tel que la demie boule  $\Omega_R$  contient le support de la source  $f$ . La solution exacte vérifie (2.47) sur les frontières  $\Gamma_R$  et  $\Gamma'_R$ .

Par conséquent, la solution exacte est l'unique solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) : \\ a_R(u^\varepsilon, v) + b_R(u^\varepsilon, v) + b'_R(u^\varepsilon, v) + b^{\varepsilon, L}(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega f \bar{v}, \quad (\text{c.f. (3.35) et (3.36)}) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

où les formes bilinéaires sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^{\varepsilon, L}(u, v) = b_0^{\varepsilon, L}(u, v) + r^{\varepsilon, L}(u, v), \\ b_0^{\varepsilon, L}(u, v) = \frac{\omega}{\sin(\omega L)} ((u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon; (u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon) \begin{bmatrix} \cos(\omega L) & -1 \\ -1 & \cos(\omega L) \end{bmatrix} \overline{\left( (v|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon \right)}, \\ r^{\varepsilon, L}(u, v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\sinh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} ((u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon; (u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon) \times \\ \times \begin{bmatrix} \cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) & -1 \\ -1 & \cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) \end{bmatrix} \overline{\left( (v|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon \right)}. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Les formes linéaires  $(\cdot)_n^\varepsilon$  sont définies par :

$$\begin{cases} H^{1/2}([0; \varepsilon]_y) & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ u & \longmapsto & \int_0^\varepsilon u(y) w_n^\varepsilon(y) dy. \end{cases} \quad (4.35)$$

A l'aide du théorème de Riesz, nous définissons les opérateurs  $A_R$ ,  $B_0^{\varepsilon, L}$  et  $R^{\varepsilon, L}$

$$H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \longrightarrow H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \quad (4.36)$$

caractérisés par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } u \text{ et } v \text{ dans } H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) : \\ (A_R u, v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = a_R(u, v) + b_R(u, v) + b'_R(u, v), \\ (B_0^{\varepsilon, L} u, v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = b_0^{\varepsilon, L}(u, v), \\ (R^{\varepsilon, L} u, v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = r^{\varepsilon, L}(u, v). \end{cases} \quad (4.37)$$

De même, nous définissons le vecteur  $\varphi_f \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$

$$(\varphi_f; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = \int_{\Omega_R} f \bar{v}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \quad (f = 0 \text{ dans } \Omega'_R). \quad (4.38)$$

La restriction à  $\Omega_R \cup \Omega'_R$  de la solution exacte est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \text{ tel que :} \\ (A_R + B_0^{\varepsilon, L} + R^{\varepsilon, L}) u^\varepsilon = \varphi_f. \end{cases} \quad (4.39)$$

De plus, la restriction à  $\Omega_R \cup \Omega'_R$  de la solution limite est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^0 \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \text{ tel que :} \\ A_R u^0 = \varphi_f. \end{cases} \quad (4.40)$$

**Remarque 4.8** *De même, on démontre que la restriction à  $\Omega_R \cup \Omega'_R$  de la solution approchée est solution du problème :*

$$\begin{cases} \text{Chercher } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \text{ tel que :} \\ (A_R + B_0^{\varepsilon, L}) \tilde{u}^\varepsilon = \varphi_f. \end{cases} \quad (4.41)$$

Il est facile de démontrer que les opérateurs  $A_R$ ,  $A_R + B_0^{\varepsilon, L}$  et  $A_R + B_0^{\varepsilon, L} + R^{\varepsilon, L}$  sont des automorphismes de  $H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$  (ceci provient de l'alternative de Fredholm, du théorème de continuation unique et des propriétés de signe et de compacité des opérateurs). Ainsi les problèmes (4.39), (4.40) et (4.41) caractérisent les restrictions à  $\Omega_R \cup \Omega'_R$  de  $u^\varepsilon$ ,  $u^0$  et  $\tilde{u}^\varepsilon$ .

**Estimation de la vitesse de convergence  $H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$  de  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$**

Ces équations opérateurs nous permettent d'obtenir les estimations d'erreur. Par exemple, d'après (4.39) et (4.40), nous avons :

$$(A_R + B_0^{\varepsilon, L} + R^{\varepsilon, L})(u^\varepsilon - u^0) = -B_0^{\varepsilon, L} u^0 - R^{\varepsilon, L} u^0. \quad (4.42)$$

Ainsi nous tirons (les normes étant relatives à l'espace  $H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$ ) :

$$\|u^\varepsilon - u^0\| \leq \left\| (A_R + B_0^{\varepsilon, L} + R^{\varepsilon, L})^{-1} \right\| \left( \|B_0^{\varepsilon, L} u^0\| + \|R^{\varepsilon, L} u^0\| \right). \quad (4.43)$$

L'estimation proviendra des lemmes 4.17, 4.19 et 4.20 qui suivent.

## 4.2 Résultats préliminaires

### Etude de l'opérateur $R^{\varepsilon,L}$

Introduisons la semi-norme de  $H^1(\Omega'_R)$  :

$$\|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2} |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega'_R). \quad (4.44)$$

Cette semi-norme est tout à fait similaire à  $\|\cdot\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}$  définie par (3.95). De même que pour le lemme 3.15, nous tirons :

#### Lemme 4.9

(i) Pour tout  $s \in [0; 1[$ , il existe un réel  $C(s)$  tel que :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega \cup \Omega'), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} + \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.45)$$

(ii) Il existe un réel  $C$  tel que :

$$\forall u \in H^2(\Omega \cup \Omega'), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} + \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|u\|_{H^2(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.46)$$

(iii) Pour tout  $s \in ]1; +\infty[$ , il existe un réel  $C(s)$  tel que :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega \cup \Omega'), \quad \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} + \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{1+s}(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.47)$$

**Remarque 4.10** Bien entendu, en utilisant un prolongement de  $H^s(\Omega_R \cup \Omega'_R)$  vers  $H^s(\Omega \cup \Omega')$  on peut remplacer  $\Omega \cup \Omega'$  dans les termes de droite des lemmes 4.9 et 4.14, par le domaine  $\Omega_R \cup \Omega'_R$  ou par tout voisinage fixe (ne dépendant pas de  $\varepsilon$ ) de  $A$  et  $A'$ .

**Lemme 4.11** L'opérateur  $R^{\varepsilon,L}$  est positif, c'est à dire :

$$(R^{\varepsilon,L}u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \geq 0, \quad \forall u \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) \quad (4.48)$$

**Preuve.** Par définition de  $R^{\varepsilon,L}$  nous avons pour tout  $u \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} (R^{\varepsilon,L}u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\sinh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} \left[ \cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\text{Re}((u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon \overline{(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon}) + \cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (4.49)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} (R^{\varepsilon,L}u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\sinh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} \left[ |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2 - 2|(u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon| |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2 \right] \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\sinh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} \left[ |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon| - |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon| \right]^2. \quad \square \end{aligned} \right. \quad (4.50)$$

**Lemme 4.12** Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$ , nous avons :

$$\left| (R^{\varepsilon,L}u; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right| \leq C \left( \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} + \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)} \right) \left( \|v\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} + \|v\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)} \right). \quad (4.51)$$

**Preuve.** Comme  $R^{\varepsilon, L}$  est positif (c.f. lemme 4.11), nous avons :

$$\left| (R^{\varepsilon, L} u; v) \right|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}^2 \leq (R^{\varepsilon, L} u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} (R^{\varepsilon, L} v; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.52)$$

Par définition de  $(R^{\varepsilon, L} u; u)$  est donné par (4.49) et comme  $\cosh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L) \geq 1$ , il vient :

$$(R^{\varepsilon, L} u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\tanh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} \left[ |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2 + 2|(u|_{\Sigma_\varepsilon})_n^\varepsilon| |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_n^\varepsilon|^2 \right]. \quad (4.53)$$

Comme  $\xi_n^\varepsilon(\omega) \leq \sqrt{1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2}$ , il suit du théorème de Cauchy-Schwarz :

$$(R^{\varepsilon, L} u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq \frac{1}{\tanh(\sqrt{\pi^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} L)} \left( \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} + \|u\|_{H_*^{1/2}(\Sigma'_\varepsilon)} \right)^2. \quad (4.54)$$

Pour obtenir la conclusion, il nous suffit de réunir les estimations (4.52) et (4.54) et de remarquer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\tanh(\sqrt{\pi^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} L)} \right] = 1. \quad \square \quad (4.55)$$

Des lemmes 4.9 et 4.12, il vient :

**Lemme 4.13**

(i) Pour tout  $s \in [0; 1[$ , il existe un réel  $C(R, s)$  tel que :

$$\|R^{\varepsilon, L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.56)$$

(ii) Il existe un réel  $C(R)$  tel que :

$$\|R^{\varepsilon, L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|u\|_{H^2(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.57)$$

(iii) Pour tout  $s > 1$ , il existe un réel  $C(R, s)$  tel que :

$$\|R^{\varepsilon, L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, s) \varepsilon \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.58)$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer :

$$\|R^{\varepsilon, L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = \sup_{v \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \frac{(R^{\varepsilon, L} u; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}}{\|v\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}}. \quad (4.59)$$

**Etude de l'opérateur  $B_0^{\varepsilon, L}$**

De même que pour le lemme 3.13, il est possible de montrer le

**Lemme 4.14**

(i) Pour tout  $s \in [0; 1/2[$ , il existe un réel  $C(s)$  tel que :

$$\forall u \in H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega \cup \Omega'), \quad |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.60)$$

(ii) Il existe un réel  $C$  tel que :

$$\forall u \in H^1(\Omega \cup \Omega'), \quad |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log } \varepsilon|} \|u\|_{H^1(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.61)$$

(iii) Pour tout  $s \in ]0; +\infty[$ , il existe un réel  $C(s)$  tel que :

$$\forall u \in H^{1+s}(\Omega \cup \Omega'), \quad |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \leq C(s) \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega \cup \Omega')}. \quad (4.62)$$



**Lemme 4.15** *Sous la condition (4.12), pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$ , nous avons :*

$$(B_0^{\varepsilon,L} u; v)_{H^1(\Omega_R, \Omega'_R)} \leq \frac{\omega}{\sin(\omega L)} \left[ |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \right] \left[ |(v|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(v|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \right]. \quad (4.63)$$

**Preuve.** Par définition de  $B_0^{\varepsilon,L}$ , il vient comme  $|\cos \omega L| \leq 1$  :

$$\begin{aligned} \left| (B_0^{\varepsilon,L} u; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right| &\leq \frac{\omega}{\sin(\omega L)} \left[ |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| |(v|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| |(v|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \right. \\ &\quad \left. + |(u|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| |(v|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| + |(u|_{\Sigma_\varepsilon})_0^\varepsilon| |(v|_{\Sigma'_\varepsilon})_0^\varepsilon| \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

D'où la conclusion.  $\square$

Des lemmes 4.14 et 4.15, il vient :

**Lemme 4.16** *Sous la condition (4.12), nous avons :*

(i) *Pour tout  $u \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$  il existe un réel  $C(L)$  tel que :*

$$\|B_0^{\varepsilon,L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C \varepsilon |\text{Log } \varepsilon| \|u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.65)$$

(ii) *Pour tout  $s > 0$  et  $u \in H^{1+s}(\Omega_R \cup \Omega'_R)$  il existe un réel  $C(s, L)$  positif tel que :*

$$\|B_0^{\varepsilon,L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(s) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.66)$$

**Preuve.** Il suffit ici de remarquer :

$$\|B_0^{\varepsilon,L} u\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq \sup_{v \in H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \frac{(B_0^{\varepsilon,L} u; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}}{\|v\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}}. \quad (4.67)$$

### 4.3 Le résultat de stabilité

L'objet de ce chapitre est de démontrer le résultat de stabilité suivant :

**Lemme 4.17** *Il existe une constante  $C(R, L)$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\left\| (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R))} \leq C(R, L) \quad (4.68)$$

**Preuve.** Nous raisonnons ici par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite  $\varepsilon (= \varepsilon_n)$  convergeant vers 0 telle que :

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = 1 \text{ et } \|(A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \rightarrow 0. \quad (4.69)$$

(i) Comme  $u^\varepsilon$  est borné dans  $H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$ , nous pouvons en extraire une suite qui converge faiblement. Nous montrons que cette limite faible est nulle, ce qui impliquera la convergence faible de  $u^\varepsilon$  vers 0 :

$$u^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)\text{-faible} \cap L^2(\Omega_R \cup \Omega'_R)\text{-fort.} \quad (4.70)$$

Considérons  $v$  dans l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{0,0}^1(\Omega_R \cup \Omega'_R) = \left\{ u \in H^1(\Omega_r \cup \Omega'_R) / \exists r_0 > 0 \text{ tel que} \right. \\ \left. u(x) = 0 \text{ si } \|\mathbf{x} - A\| < r_0 \text{ ou } \|\mathbf{x} - A'\| < r_0 \right\}. \end{array} \right. \quad (4.71)$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit ( $\varepsilon < \text{dist}(\{\mathbf{0}\}, \text{supp}(v))$ ), par définition de  $A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}$  nous avons :

$$\left( (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon; v \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = \left( A_R u^\varepsilon; v \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}. \quad (4.72)$$

Ainsi, d'après (4.69), la limite faible  $u$  de la suite extraite satisfait :

$$(A_R u; v)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} = 0. \quad (4.73)$$

Par densité de  $H_{0,0}^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)$ , nous avons :

$$A_R u = 0. \quad (4.74)$$

Comme  $A_R$  est un automorphisme, nous en déduisons :

$$u = 0. \quad (4.75)$$

(ii) Nous montrons ici que :

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \longrightarrow 0, \quad \text{dans } H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R), \quad (4.76)$$

ce qui est en contradiction avec (4.69) et conclut la preuve.

D'après (4.70), il suffit de remarquer :

$$\nabla u^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_R \cup \Omega'_R). \quad (4.77)$$

Par définition de  $A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon; u^\varepsilon \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} &= \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} \|\nabla u^\varepsilon(\mathbf{x})\|^2 - \omega^2 |u^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \left( B_0^{\varepsilon,L} u^\varepsilon; u^\varepsilon \right) + \left( R^{\varepsilon,L} u^\varepsilon; u^\varepsilon \right) \\ &+ b_R(u^\varepsilon; u^\varepsilon) + b'_R(u^\varepsilon; u^\varepsilon). \end{aligned} \right. \quad (4.78)$$

Nous prenons la partie réelle de cette expression. D'après (2.64), et le lemme 4.11, nous avons :

$$\text{Re}(b_R(u, u)) \geq 0, \quad \text{Re}(b'_R(u, u)) \geq 0 \quad \text{et} \quad (R^{\varepsilon,L} u; u) \geq 0. \quad (4.79)$$

En utilisant (4.79) dans (4.78), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} \|\nabla u^\varepsilon(\mathbf{x})\|^2 &\leq \left| \left( (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon; u^\varepsilon \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right| \\ &+ \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} \omega^2 |u^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \left| \left( B_0^{\varepsilon,L} u^\varepsilon; u^\varepsilon \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right|. \end{aligned} \right. \quad (4.80)$$

Montrons que chacun des termes de droite tend vers 0. Tout d'abord, D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\left| \left( (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon; u^\varepsilon \right) \right| \leq \left\| (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon \right\| \|u^\varepsilon\|. \quad (4.81)$$

Nous déduisons de (4.69) que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left( (A_R + B_0^{\varepsilon,L} + R^{\varepsilon,L}) u^\varepsilon; u^\varepsilon \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right| = 0. \quad (4.82)$$

Par ailleurs, d'après (4.70), nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} |u^\varepsilon|^2 = 0 \quad (4.83)$$

Enfin, d'après le lemme 4.16 et (4.69), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \left( B_0^{\varepsilon, L} u^\varepsilon; u^\varepsilon \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right| \leq \|B_0^{\varepsilon, L} u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \\ \leq C(L, R) \varepsilon |\text{Log } \varepsilon| \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}^2 = C(L, R) \varepsilon |\text{Log } \varepsilon|. \end{array} \right. \quad (4.84)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left( B_0^{\varepsilon, L} u^\varepsilon; u^\varepsilon \right)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \right| = 0. \quad (4.85)$$

Ainsi, de (4.80), (4.82), (4.83) et (4.85), il vient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_R \cup \Omega'_R} \|\nabla u^\varepsilon(\mathbf{x})\|^2 dx = 0, \quad (4.86)$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 4.18** *La principale différence avec le cas de la fente semi infinie se situe au niveau de la forme bilinéaire  $u \mapsto (B_0^{\varepsilon, L} u; u)_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)}$  et de son équivalent  $u \mapsto (B_0^\varepsilon u; u)_{H^1(\Omega_R)}$  (c.f. (3.117), (3.131) et (3.132)).  $(B_0^{\varepsilon, L} u; u)$  n'est plus comme  $(B_0^\varepsilon u; u)$  à partie réelle nulle mais tend vers 0 avec  $\varepsilon$ , ce qui nous permet pourtant de développer la même technique de preuve.*

## 4.4 Le résultat de consistance

Comme le support  $F$  est un fermé inclus dans l'ouvert  $\Omega$ , il existe une boule de centre  $A$  telle que  $f$  soit nul dans l'intersection  $\mathcal{V}(F)$  entre cette boule et  $\Omega$ . Par régularité elliptique, la solution limite est régulière dans  $\mathcal{V}(F)$ . En effet, nous avons :

$$u^0 \in H^s(\mathcal{V}(F)), \quad \text{pour tout } s > 0, \quad (4.87)$$

avec

$$\|u^0\|_{H^s(\mathcal{V}(F))} \leq C(s, F) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.88)$$

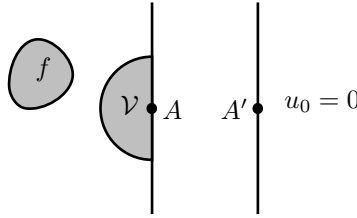


FIG. 4.7 – Le support  $F$  de la source

Introduisons un  $s$ -prolongement stable  $\tilde{u}_s^0$  de  $u^0|_{\mathcal{V}}$  à  $\Omega$ , c'est à dire  $\tilde{u}_s^0$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{u}_s^0\|_{H^s(\Omega)} \leq C(s, F) \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \tilde{u}_s^0 = u^0, \quad \text{dans } \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (4.89)$$

Comme la fonction  $u^0$  est nulle du côté droit, il existe  $\hat{u}^0$  donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^0(\mathbf{x}) = \tilde{u}_3^0(\mathbf{x}), \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \hat{u}^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega' \end{array} \right. \quad (4.90)$$

tel que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit ( $\Sigma_\varepsilon \subset \overline{\mathcal{V}(F)}$ ) :

$$\begin{cases} \widehat{u}^0|_{\Sigma_\varepsilon} = u^0|_{\Sigma_\varepsilon}, \\ \widehat{u}^0|_{\Sigma'_\varepsilon} = u^0|_{\Sigma'_\varepsilon}, \end{cases} \quad (4.91)$$

et

$$\|\widehat{u}^0\|_{H^3(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(F) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.92)$$

De plus, par définition de  $B_0^{\varepsilon,L}$  et  $R^{\varepsilon,L}$ , deux fonctions  $u_1$  et  $u_2$  qui coïncident sur  $\Sigma_\varepsilon$  et  $\Sigma'_\varepsilon$  vérifient :

$$B_0^{\varepsilon,L} u_1 = B_0^{\varepsilon,L} u_2 \quad \text{et} \quad R^{\varepsilon,L} u_1 = R^{\varepsilon,L} u_2. \quad (4.93)$$

Par conséquent, nous avons :

$$B_0^{\varepsilon,L} \widehat{u}_0 = B_0^{\varepsilon,L} u_0 \quad \text{et} \quad R^{\varepsilon,L} \widehat{u}_0 = R^{\varepsilon,L} u_0. \quad (4.94)$$

Ainsi, il vient du point (iii) du lemme 4.13 et du point (ii) du lemme 4.16 :

**Lemme 4.19** *Il existe une constante  $C(R, L, F)$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\|B_0^{\varepsilon,L} u^0\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L, F) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.95)$$

**Lemme 4.20** *Il existe une constante  $C(R, L, F)$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\|R^{\varepsilon,L} u^0\|_{H^1(\Omega_R \cup \Omega'_R)} \leq C(R, L) \varepsilon \|f\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.96)$$



# Chapitre 5

## Une extension : les $\delta$ -modèles

### Sommaire

---

5.1	Dérivation du modèle approché . . . . .	72
5.2	Estimation d'erreur : preuve du théorème 5.1 . . . . .	74
5.3	Le résultat de stabilité : preuve du lemme 5.2 . . . . .	75
5.4	Le résultat de consistance : preuve du lemme 5.3 . . . . .	79

---

**Résumé :** Nous étendons dans ce chapitre l'analyse du chapitre 3 au cas où l'approximation 1D dans la fente ne commence qu'à partir d'une certaine distance  $\delta$ . L'objectif n'est pas seulement de prouver que l'on obtient une qualité d'approximation supérieure (d'autant plus que  $\delta$  est grand), cette étude prépare également l'analyse des méthodes de raccordement de développements asymptotiques qui sera menée au chapitre 12.

## 5.1 Dérivation du modèle approché

Nous nous replaçons ici dans le cadre du problème modèle de la fente droite semi-infinie (c.f. paragraphe 3.2.2),

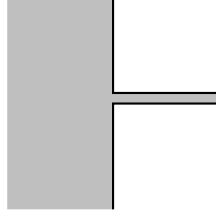


FIG. 5.1 – Le domaine d'étude

Nous allons dans cette section introduire un nouveau modèle approché et effectuer son analyse mathématique. Les points suivants sont à l'origine de son introduction :

(i) La solution exacte est donnée dans la fente par (3.46). Remarquons que la solution exacte est d'autant mieux approchée par

$$a_0^\varepsilon \exp i\omega x \quad (5.1)$$

que  $x$  est grand. L'erreur commise par cette approximation est (formellement) majorée à une constante près par :

$$\exp\left(-\sqrt{\pi^2/\varepsilon^2 - \omega^2}x\right) \quad (5.2)$$

(ii) Au voisinage de l'embouchure de la fente  $\Sigma_\varepsilon$  (c.f. (3.29)), la solution est chahutée, à la fois, par une singularité géométrique (associée aux coins) et par une couche limite (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Il semble donc être une bonne idée de situer la zone de raccord à l'intérieur de la fente. Nous approchons la solution exacte par une fonction 2D pour  $x < \delta$  ( $\delta$  positif donné) et par une solution 1D pour  $x > \delta$ . Introduisons donc les notations suivantes, soit  $\Omega_\varepsilon^\delta$  le domaine d'approximation 2D :

$$\overline{\Omega_\varepsilon^\delta} = \{(x, y) \in \overline{\Omega_\varepsilon} / x < \delta\}. \quad (5.3)$$

au quel nous associons les frontières :

$$\begin{cases} \Gamma_\varepsilon^\delta &= \{(x, y) \in \partial\Omega_\varepsilon / x < \delta\}, \\ \Sigma_\varepsilon^\delta &= \{(x, y) / x = \delta \text{ et } y \in [0; \varepsilon]\}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Définissons de plus le domaine d'approximation unidimensionnelle :

$$I_\delta = [\delta; +\infty[. \quad (5.5)$$

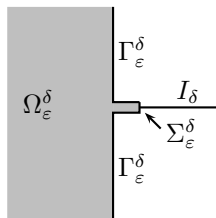


FIG. 5.2 – Définition des domaines

Nous pouvons alors introduire le modèle approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \tilde{u}^{\varepsilon, \delta} : \Omega_\varepsilon^\delta \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } \tilde{U}^{\varepsilon, \delta} : I_\delta \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que :} \\ -\Delta \tilde{u}^{\varepsilon, \delta} - \omega^2 \tilde{u}^{\varepsilon, \delta} = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon^\delta, \quad \frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon, \delta}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon^\delta, \\ \tilde{u}^{\varepsilon, \delta} \text{ vérifie la condition de radiation (3.18) à l'infini,} \\ -\frac{d^2 \tilde{U}^{\varepsilon, \delta}}{dx^2} - \omega^2 \tilde{U}^{\varepsilon, \delta} = 0 \text{ sur } I_\delta, \\ \tilde{U}^{\varepsilon, \delta} \text{ est sortante à l'infini.} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

avec les conditions de couplage :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \tilde{u}^{\varepsilon, \delta}(\delta, y) dy = \tilde{U}^{\varepsilon, \delta}(\delta) \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon, \delta}}{\partial x}(\delta, y) = \frac{d\tilde{U}^{\varepsilon, \delta}}{dx}(\delta) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon^\delta. \quad (5.7)$$

Nous allons tout de suite énoncer une estimation d'erreur portant sur la qualité de l'approximation du modèle approché. Pour des raisons mathématiques classiques liées à l'équation de Helmholtz, nous devons nous restreindre au domaine borné :

$$\overline{\Omega_\varepsilon^{R, \delta}} = \overline{\Omega_R} \cup ([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y). \quad (5.8)$$

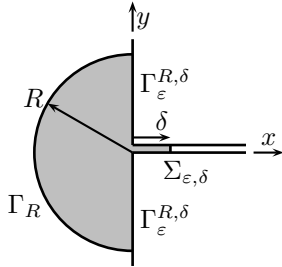


FIG. 5.3 – Le domaine de propagation  $\Omega_\varepsilon^{R, \delta}$

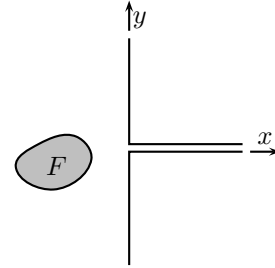


FIG. 5.4 – Le support  $F$  de la source  $f$

**Théorème 5.1** *Pour tout fermé  $F \subset \Omega$  et tous réels positifs  $\omega, R, \delta$ , il existe un réel  $C(\omega, R, \delta, F)$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  et tout  $f$  de support inclus dans  $F$  :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^{\varepsilon, \delta}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} \leq C \varepsilon \exp(-\sqrt{\pi^2/\varepsilon^2 - \omega^2} \delta) \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.9)$$

Ainsi, on peut voir que la solution approchée est une approximation d'ordre infini de la solution exacte. Remarquons que l'inégalité (5.9) est bien cohérente avec l'estimation (3.63) du théorème 3.9 qui correspond au même modèle écrit pour  $\delta = 0$ .

Remarquons que la stratégie adoptée (c.f. (i) et (ii)) a payé. Il semble alors nécessaire de bien approcher la solution exacte dans un voisinage de la fente et de n'utiliser l'approximation 1D seulement à partir de  $\delta > 0$  assez grand dans la fente.

Pourtant, à moins d'utiliser des fonctions de base spécifiques au voisinage de la fente, ce modèle approché est d'utilité pratique nulle. En effet, son approximation numérique nécessite l'introduction d'un domaine dépendant de  $\varepsilon$ , où nous retrouvons les difficultés classiques liées aux fentes. C'est pourquoi nous allons introduire à la partie II une méthode ayant tous les avantages de celle-ci sans en avoir les inconvénients numériques. Toutefois cette technique, ne le cachons pas, sera beaucoup plus complexe à décrire et à étudier.



## 5.2 Estimation d'erreur : preuve du théorème 5.1

Reformulation des problèmes dans le domaine borné  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$

Nous allons dans cette section caractériser les restrictions de  $\tilde{u}^{\varepsilon,\delta}$  et  $u^\varepsilon$  comme les solutions de problèmes variationnels bien posés dans  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$ . Il est facile de démontrer que la solution exacte vérifie le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{R,\delta}, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{R,\delta}, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon^\delta} + T^{\varepsilon,\delta}(u^\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon^\delta}) = 0, & \text{sur } \Sigma_\varepsilon^\delta, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Gamma_R} + T_R(u^\varepsilon|_{\Gamma_R}) = 0 & \text{sur } \Gamma_R. \end{array} \right. \quad (\text{c.f. (3.20), (3.21) et (3.22)}) \quad (5.10)$$

où  $\Gamma_\varepsilon^{R,\delta}$  désigne

$$\Gamma_\varepsilon^{R,\delta} = \partial\Omega_\varepsilon^{R,\delta} \cap \partial\Omega_\varepsilon \quad (5.11)$$

et l'opérateur

$$T^{\varepsilon,\delta} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon^\delta); H^{-1/2}(\Sigma_\varepsilon^\delta)) \quad (5.12)$$

se définit comme  $T^\varepsilon$  (c.f. (3.113)) par

$$T^{\varepsilon,\delta} : \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{\varepsilon,\delta} w_n^\varepsilon \longmapsto T^{\varepsilon,\delta} \varphi = -i\omega \varphi_0^{\varepsilon,\delta} w_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) \varphi_n^{\varepsilon,\delta} w_n^\varepsilon \quad (5.13)$$

où la base orthogonale  $((w_n^\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$  des  $H^s(\Sigma_{\varepsilon,\delta})$  pour  $s \in [0; 3/2[$  (et de leurs espaces duaux) est définie en (3.42) et les scalaires  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$  sont donnés en (3.45).

De même la solution approchée vérifie le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}^{\varepsilon,\delta} - \omega^2 \tilde{u}^{\varepsilon,\delta} = f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{R,\delta}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon,\delta}}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{R,\delta}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon,\delta}}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon} + T_0^{\varepsilon,\delta}(\tilde{u}^{\varepsilon,\delta}|_{\Sigma_\varepsilon}) = 0, & \text{sur } \Sigma_\varepsilon^\delta, \\ \frac{\partial \tilde{u}^{\varepsilon,\delta}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_R} + T_R(\tilde{u}^{\varepsilon,\delta}|_{\Gamma_R}) = 0 & \text{sur } \Gamma_R. \end{array} \right. \quad (\text{c.f. (3.20), (3.21) et (3.22)}) \quad (5.14)$$

où l'opérateur

$$T_0^{\varepsilon,\delta} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Sigma_\varepsilon^\delta); H^{-1/2}(\Sigma_\varepsilon^\delta)) \quad (5.15)$$

se définit par :

$$T_0^{\varepsilon,\delta} : \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{\varepsilon,\delta} w_n^\varepsilon \longmapsto T_0^{\varepsilon,\delta} \varphi = -i\omega \varphi_0^{\varepsilon,\delta} w_0^\varepsilon. \quad (5.16)$$

A l'aide de la formule de Green et du théorème de Riesz, il vient que la restriction à  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$  de  $u^\varepsilon$  et  $\tilde{u}^{\varepsilon,\delta}$  sont solutions des équations opérateurs issues des formulations variationnelles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta} + R^{\varepsilon,\delta}) u^\varepsilon & = L_{R,\delta}^\varepsilon, \\ (A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta}) \tilde{u}^{\varepsilon,\delta} & = L_{R,\delta}^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

où  $A_{R,\delta}^\varepsilon$ ,  $B_0^{\varepsilon,\delta}$ ,  $R^{\varepsilon,\delta}$  et  $L_{R,\delta}^\varepsilon$  sont définis par dualité (pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_{R,\delta}^\varepsilon u; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \overline{v_n^R} \\ (B_0^{\varepsilon,\delta} u; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = - \mathbf{i} \omega u_0^{\varepsilon,\delta} \overline{v_0^{\varepsilon,\delta}}, \\ (R^{\varepsilon,\delta} u; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^{\varepsilon,\delta} \overline{v_n^{\varepsilon,\delta}}, \\ (L_{R,\delta}^\varepsilon u; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} (f \bar{v}) \end{array} \right. \quad (5.18)$$

avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n^R = \int_{\Gamma_R} u(R, \theta) \psi_n(\theta) d\theta, \quad \text{c.f. (3.22),} \\ u_n^{\varepsilon,\delta} = \int_{\Sigma_{\varepsilon,\delta}} u(\delta, y) w_n^\varepsilon(y) dy, \quad \text{c.f. (3.42).} \end{array} \right. \quad (5.19)$$

On se référera à (3.22) pour la définition de  $\mu_n^R(\omega)$  et à (3.45) pour la définition de  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$ .

Montrer que les opérateurs  $(A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta} + R^{\varepsilon,\delta})$  et  $(A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})$  sont des automorphismes de  $H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})$  revient à montrer que les problèmes associés aux problèmes aux dérivées partielles (5.10) et (5.14) sont bien posés. Ceci découle facilement (laissé au lecteur) d'arguments de signe, du théorème de continuation unique et de l'alternative de Fredholm.

### Preuve du théorème 5.1

A l'aide des équations opérateurs (5.17), nous tirons l'équation portant sur l'erreur :

$$(A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta}) (u^\varepsilon - \tilde{u}^{\varepsilon,\delta}) = -R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon \quad (5.20)$$

puis l'estimation d'erreur :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^{\varepsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq \| (A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}))} \|R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}. \quad (5.21)$$

Le théorème 5.1 suit des deux lemmes suivants :

**Lemme 5.2** *Il existe un réel  $C(\omega, R, \delta)$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  tel que :*

$$\| (A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}))} \leq C. \quad (5.22)$$

**Lemme 5.3** *Il existe un réel  $C(\omega)$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  tel que :*

$$\|R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon \exp(-\sqrt{(\pi/\varepsilon)^2 - \omega^2} \delta) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.23)$$

## 5.3 Le résultat de stabilité : preuve du lemme 5.2

Nous raisonnons par l'absurde. Si  $(A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})^{-1}$  n'est pas borné indépendamment de  $\varepsilon$  alors pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, il existe une famille de fonctions  $((u^\varepsilon))$  telle que :

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 1 \text{ et } \| (A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta}) u^\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \rightarrow 0. \quad (5.24)$$

(i) Montrons tout d'abord que  $u^\varepsilon$  converge faiblement vers 0 dans  $H^1(\Omega_R)$  et par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} = 0. \quad (5.25)$$

La restriction de  $u^\varepsilon$  à  $\Omega_R$  est bornée dans  $H^1(\Omega_R)$  car

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \quad (5.26)$$

On peut donc extraire de  $u^\varepsilon$  une sous famille convergeant faiblement dans  $H^1(\Omega_R)$ . Pour tout  $v \in H_{00}^1(\Omega_R)$  (c.f. (3.126)), il existe  $\varepsilon_0(v)$  tel que  $v$  soit nulle dans :

$$[0; \varepsilon_0]_r \times [0; \pi]_\theta \quad (5.27)$$

Pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0(v)$ , nous pouvons donc prolonger  $v$  par 0 dans  $[0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y$  en un élément  $H^1(\Omega_{R,\delta}^\varepsilon)$ . Par définition de  $A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta}$  (5.18), pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0(v)$  :

$$((A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})u^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} (\nabla u^\varepsilon \nabla \bar{v} - \omega^2 u^\varepsilon \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) (u^\varepsilon)_n^R \bar{v}_n^R. \quad (5.28)$$

en passant à la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour tout  $v \in H_{00}^1(\Omega_R)$  :

$$\int_{\Omega_R} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \bar{v}_n^R = 0. \quad (5.29)$$

Par densité de  $H_{00}^1(\Omega_R)$  (c.f. Lemme B.1), nous avons (5.29) pour tout  $v \in H^1(\Omega_R)$ . Le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega_R} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \bar{v}_n^R = 0 \end{array} \right. \quad (5.30)$$

correspond au problème aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que :} \\ \Delta u + \omega^2 u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5.31)$$

Ce problème est classiquement bien posé ; sa solution est de plus identiquement nulle. Ainsi

$$u \equiv 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.32)$$

(ii) Nous allons montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(\cdot, y) dy \right\|_{L^2([0; \delta]_x)} = 0. \quad (5.33)$$

Introduisons l'opérateur  $P^\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\varepsilon : H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y) \longrightarrow H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y), \\ u(x, y) \longmapsto \left[ \int_0^\varepsilon u(x, y') w_0^\varepsilon(y') dy' \right] w_0^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u(x, y') dy'. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

On peut montrer que cet opérateur est l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé des fonctions ne dépendant que de  $x$  tant dans  $L^2([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)$  que dans  $H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)$ . Ainsi nous avons :

$$\|P^\varepsilon u\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)} \leq \|u\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}, \quad (5.35)$$

d'où comme  $\|w_0^\varepsilon\|_{L^2([0;\varepsilon])} = 1$ , nous tirons :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u(x, y) dy \in H^1([0; \delta]_x), \\ \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u(x, y) dy \right\|_{H^1([0; \delta]_x)} \leq \|u\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}. \end{cases} \quad (5.36)$$

Introduisons donc la fonction  $U^\varepsilon \in H^1([0; \delta]_x)$

$$U^\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(x, y) dy. \quad (5.37)$$

De plus,  $U^\varepsilon$  est bornée dans  $H^1([0; \delta]_x)$ , en effet :

$$\|U^\varepsilon\|_{H^1([0; \delta]_x)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} = 1. \quad (5.38)$$

Nous allons démontrer que toute valeur d'adhérence faible dans  $H^1([0; \delta]_x)$  de  $U^\varepsilon$  (pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) vérifie :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 U = 0 & \text{dans } ]0; \delta[, \\ \frac{dU}{dx} - i\omega U = 0, & \text{en } x = \delta, \\ (b) \quad U(0) = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Ainsi, il sera clair que  $U = 0$ . Par conséquent,  $U^\varepsilon$  convergera faiblement vers 0 dans  $H^1([0; \delta])$ . Puis, par compacité, il vient (5.33).

(a) Pour tout  $\varphi \in H^1(]-\infty; \delta])$  tel que  $\varphi(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ , introduisons la fonction  $v^\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})$  telle que :

$$v^\varepsilon = \varphi(x) w_0^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(x) \quad (5.40)$$

La fonction  $v^\varepsilon$  est bornée indépendamment de  $\varepsilon$ . En effet :

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}^2 = \|w_0^\varepsilon\|_{L^2([0; \varepsilon])}^2 \|\varphi\|_{H^1([0; \delta])}^2 = \|\varphi\|_{H^1([0; \delta])}^2. \quad (5.41)$$

Par définition de  $A_{R, \delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon, \delta}$ , nous avons :

$$\begin{cases} ((A_{R, \delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon, \delta})u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} = \int_0^\delta \int_0^\varepsilon \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \omega^2 u^\varepsilon \overline{\varphi} \right) \\ - i \omega \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(\delta, y) dy \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dy \right) \overline{\varphi(\delta)}, \end{cases} \quad (5.42)$$

d'où

$$((A_{R, \delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon, \delta})u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} = \int_0^\delta \left( \frac{dU^\varepsilon}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} - \omega^2 U^\varepsilon \overline{\varphi} \right) - i \omega U^\varepsilon(\delta) \overline{\varphi(\delta)}. \quad (5.43)$$

Puis d'après (5.24) et (5.41), nous avons :

$$\left| ((A_{R, \delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon, \delta})u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} \right| \leq \|(A_{R, \delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon, \delta})u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} \rightarrow 0. \quad (5.44)$$

Par continuité de la forme linéaire (à  $\varphi$  donné) :

$$\begin{cases} H^1([0; \delta]) \longmapsto \mathbb{C}, \\ V \longmapsto \int_0^\delta \left( \frac{dV}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} - \omega^2 V \overline{\varphi} \right) - i \omega V(\delta) \overline{\varphi(\delta)}, \end{cases} \quad (5.45)$$

il vient, par passage à la limite faible pour  $\varepsilon$  tendant vers 0 :

$$0 = \int_0^\delta \left( \frac{dU}{dx} \overline{\frac{d\varphi}{dx}} - \omega^2 U \overline{\varphi} \right) - \mathbf{i} \omega U(\delta) \overline{\varphi(\delta)}, \quad \forall \varphi \in H^1([0; \delta]_x) / \varphi(0) = 0. \quad (5.46)$$

Nous tirons donc que  $U$  vérifie l'équation de Helmholtz et la condition de radiation.

(b) Remarquons que :

$$U^\varepsilon(0) = (u^\varepsilon)_0^\varepsilon \quad (\text{c.f (3.76)}). \quad (5.47)$$

Puis appliquons (3.84), pour déduire :

$$|U^\varepsilon(0)| \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log } \varepsilon|} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log } \varepsilon|} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}. \quad (5.48)$$

D'après (5.24), pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, nous tirons (l'opérateur trace est continu de  $H^1([0; \delta])$  dans  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension finie) :

$$U(0) = 0. \quad (5.49)$$

(iii) Montrons alors que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)} = 0. \quad (5.50)$$

Ceci provient de (5.24) et (5.33), et de l'inégalité de type Poincaré suivante (démontrée plus loin) :

**Lemme 5.4** *Il existe  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $\varepsilon$  tel que pour tout  $u \in H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)$*

$$\|u\|_{L^2([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)}^2 \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u(\cdot, y) dy \right\|_{L^2([0;\delta])}^2 + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)}^2. \quad (5.51)$$

(iv) Pour conclure, nous montrons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 0, \quad (5.52)$$

ce qui contredit (5.24) et termine notre raisonnement par l'absurde.

Par définition (5.18) de  $((A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})u^\varepsilon; u^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} ((A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})u^\varepsilon; u^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} &= \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} (|\nabla u^\varepsilon|^2 - \omega^2 |u^\varepsilon|^2) \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) |(u^\varepsilon)_n^R|^2 - \mathbf{i} \omega |(u^\varepsilon)_0^{\varepsilon,\delta}|^2. \end{aligned} \right. \quad (5.53)$$

D'après le lemme A.5, nous avons :

$$\text{Re}(\mu_n^R(\omega)) \geq 0, \quad \text{pour tout } n > 0, \quad (5.54)$$

En prenant la partie réelle de (5.53), nous tirons :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} |u^\varepsilon|^2 + |\text{Re}(((A_{R,\delta}^\varepsilon + B_0^{\varepsilon,\delta})u^\varepsilon; u^\varepsilon))| \quad (5.55)$$

De (5.24), (5.25) et (5.50), il vient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 0. \quad (5.56)$$

Par conséquent de (5.25) et (5.50), nous déduisons (5.52).

**Preuve du lemme 5.4 :**

Une preuve possible s'appuie sur une diagonalisation de  $H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)$ .

Tout  $u \in H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)$  se représente sous la forme :

$$u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^\varepsilon(x) w_n^\varepsilon(y) \quad \text{dans } H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y), \quad (5.57)$$

avec

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(x) = \int_0^\varepsilon u(x, y) w_0^\varepsilon(y) dy = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u(x, y) dy, \\ u_n^\varepsilon(x) = \int_0^\varepsilon u(x, y) w_n^\varepsilon(y) dy = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u(x, y) \cos \frac{n\pi y}{\varepsilon} dy \end{cases} \quad (5.58)$$

Le calcul explicite donne :

$$\begin{cases} \|u\|_{L^2([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2(0; \delta)}^2, \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2} \|u_n^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2(0; \delta)}^2, \end{cases} \quad (5.59)$$

d'où

$$\begin{cases} \|u\|_{L^2([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}^2 = \|u_0^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2([0; \delta]_x)}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2([0; \delta]_x)}^2 \\ \leq \|u_0^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2([0; \delta]_x)}^2 + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2} \|u_n^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2([0; \delta]_x)}^2 \\ \leq \|u_0^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2([0; \delta]_x)}^2 + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2([0; \delta]_x)}^2. \end{cases} \quad (5.60)$$

Ce qui démontre (5.51).

## 5.4 Le résultat de consistance : preuve du lemme 5.3

(i) La forme explicite de la solution exacte (3.46) à l'intérieur de la fente fournit :

$$(u^\varepsilon)_n^{\varepsilon, \delta} = \exp(-\sqrt{\pi^2 n^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} \delta) (u^\varepsilon)_n^\varepsilon, \quad \forall n > 0, \quad (5.61)$$

d'où

$$|(u^\varepsilon)_n^{\varepsilon, \delta}| \leq \exp(-\sqrt{\pi^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} \delta) |(u^\varepsilon)_n^\varepsilon|. \quad (5.62)$$

Ainsi, il vient (c.f. (3.95)) :

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{1/2} |(u^\varepsilon)_n^{\varepsilon, \delta}|^2 \right)^{1/2} \leq \exp(-\sqrt{\pi^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} \delta) \|(u^\varepsilon)_n^\varepsilon\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (5.63)$$

Par conséquent, nous avons d'après la remarque 3.27 :

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{1/2} |u_n^{\varepsilon, \delta}|^2 \right)^{1/2} \leq C \varepsilon \exp(-\sqrt{\pi^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} \delta) \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.64)$$

(ii) Pour démontrer le théorème de trace uniforme :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{1/2} |v_n^{\varepsilon, \delta}|^2 \right)^{1/2} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})}, \quad (5.65)$$

il suffit de remarquer que le membre de gauche correspond à la norme d'interpolation (relativement aux produits scalaires usuels) de l'interpolé d'ordre  $1/2$  entre les espaces  $H^1(\Sigma_\varepsilon^\delta)$  et  $L^2(\Sigma_\varepsilon^\delta)$  ( $C$  ne dépend pas bien sur de  $\varepsilon$ ). Pour une démonstration plus détaillée, on pourra se référer à (3.80), (3.81) et (3.82).

(iii) Nous pouvons alors conclure, par définition de  $R^{\varepsilon,\delta}$  (c.f. (5.18)) :

$$\left| (R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |(u^\varepsilon)_n^{\varepsilon,\delta}| |v_n^{\varepsilon,\delta}|. \quad (5.66)$$

Comme  $\xi_n^\varepsilon(\omega) \leq \sqrt{1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon}$ , nous avons, d'après le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\left| (R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \right| \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{1/2} |(u^\varepsilon)_n^{\varepsilon,\delta}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2)^{1/2} |v_n^{\varepsilon,\delta}|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.67)$$

D'après (5.64) et (5.65), nous avons :

$$\left| (R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \right| \leq C \varepsilon \exp(-\sqrt{\pi^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} \delta) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}. \quad (5.68)$$

Nous concluons alors par dualité :

$$\|R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = \sup_{v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \frac{(R^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}}{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}}. \quad (5.69)$$

# Chapitre 6

## Approximation numérique

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>La méthode numérique utilisée pour la validation des estimations d'erreur théoriques</b>	<b>81</b>
6.1.1	Formulation variationnelle approchée	83
6.1.2	Introduction de l'approximation éléments finis	86
6.1.3	Formulation matricielle	88
<b>6.2</b>	<b>Technique de calcul numérique pour le problème de raccord 1D-2D, (avec <math>h \gg \varepsilon</math>)</b>	<b>88</b>
6.2.1	Le problème continu	89
6.2.2	Discretisation dans le cadre de la théorie de Galerkin	92
6.2.3	Une mise en oeuvre numérique	93

---

### Introduction

La problématique numérique associée à ce travail théorique est de deux ordres :

- Peut-on vérifier numériquement les estimations théoriques obtenues? Est-il possible d'observer l'optimalité de ces estimations? Nous nous contenterons ici de décrire les méthodes utilisées, les résultats numériques étant inclus dans les sections précédentes.
- Est-il possible à partir de la formulation variationnelle (3.34) de dériver une méthode de calcul numérique dont le pas n'est pas inférieur à  $\varepsilon$ . Quelle est la précision de cette méthode?

Chacun de ces deux points fera l'objet d'une section.

## 6.1 La méthode numérique utilisée pour la validation des estimations d'erreur théoriques

### Introduction

Nous désirons maintenant présenter la méthode numérique qui nous a permis de valider les estimations d'erreur obtenues dans les théorèmes 3.4, 3.9, 4.3 et 5.1.

Nous allons limiter la présentation de la méthode permettant de valider les estimations d'erreur au cas de la fente droite semi-infinie (chapitre 3). Les méthodes numériques validant les estimations relatives aux fentes droites finies (chapitre 4) et aux  $\delta$ -modèles (chapitre 5) sont tout à fait similaires.

Au chapitre 3, nous avons introduit des équations opérateurs (3.119), (3.120) et (3.156) qui sont



vérifiées par les restrictions à  $\Omega_R \cup \Omega'_R$  de  $u^\varepsilon$ ,  $\tilde{u}^\varepsilon$  et  $u^0$ . Ces équations opérateurs sont associées aux formulations variationnelles suivantes idéales pour l'approximation par éléments finis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que :} \\ a_R(u^\varepsilon; v) + b_R(u^\varepsilon; v) + b^\varepsilon(u^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R), \end{array} \right. \quad (6.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^0 \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que :} \\ a_R(u^0; v) + b_R(u^0; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R), \end{array} \right. \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que :} \\ a_R(\tilde{u}^\varepsilon; v) + b_R(\tilde{u}^\varepsilon; v) + b_0^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R), \end{array} \right. \quad (6.3)$$

où les formes bilinéaires sont définies en (3.35), (3.36), (3.115) et (3.132).

L'unique difficulté pour l'approximation numérique de ces équations est le traitement des formes bilinéaires  $b_R$  et  $b^\varepsilon$  associées aux opérateurs Dirichlet-Neumann  $T_R$  et  $T^\varepsilon$  donnés en (3.21) et (3.113). Ceci s'effectue en deux temps. Tout d'abord nous approchons les formulations variationnelles au niveau continu (paragraphe 6.1.1), puis nous introduisons l'approximation numérique passant par l'introduction d'un espace de discrétisation des fonctions tests (paragraphe 6.1.2).

Toutefois, pour le numérique, on peut considérer l'application des opérateurs Dirichlet-Neumann comme classique, de nombreuses références traitant de ce sujet. On pourra se référer par exemple à [38], [47] et [56] pour se faire une idée des bases de cette théorie et à [41], [42] et [43] pour des travaux plus récents.

Du point de vue pratique, nous avons développé cette méthode à l'aide du code MELINA [67]. Ce code est en fait une bibliothèque de procédures éléments finis permettant de résoudre numériquement les problèmes aux dérivées partielles en dimensions 2 et 3. Ce logiciel est, d'une part, facile à utiliser, et, d'autre part possède de nombreuses fonctionnalités évoluées. En particulier, MELINA permet de traiter facilement les opérateurs Dirichlet-Neumann.

**Remarque 6.1** *Ici, il faut bien saisir l'importance d'une méthode numérique précise. En effet, nous n'avons pas accès aux erreurs continues :*

$$u^\varepsilon - u^0 \quad \text{et} \quad u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon, \quad (6.4)$$

*mais aux erreurs numériques*

$$u_h^\varepsilon - u_h^0 \quad \text{et} \quad u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon, \quad (6.5)$$

où les fonctions  $u_h^\varepsilon$ ,  $u_h^0$  et  $\tilde{u}_h^\varepsilon$  désignent les approximations numériques de  $u^\varepsilon$ ,  $u^0$  et  $\tilde{u}^\varepsilon$ . Pour pouvoir valider les estimations numériques portant sur la différence  $u^\varepsilon - u^0$ , il faut que les erreurs numériques soient faibles. En effet, nous avons :

$$\frac{\|u^\varepsilon - u^0\| - \|u_h^\varepsilon - u_h^0\|}{\|u^\varepsilon - u^0\|} \leq \frac{\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| + \|u^0 - u_h^0\|}{\|u^\varepsilon - u^0\|}. \quad (6.6)$$

C'est pourquoi, pour valider numériquement ces estimations, il faut s'assurer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \ll \|u^\varepsilon - u^0\|, \\ \|u^0 - u_h^0\| \ll \|u^\varepsilon - u^0\|. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Il est donc nécessaire d'introduire un pas de maillage  $h$  petit devant la hauteur de la fente  $\varepsilon$ .

### 6.1.1 Formulation variationnelle approchée

Les formes bilinéaires  $b_R$  et  $b^\varepsilon$ , données en (3.36) et (3.115), ne sont pas utilisables numériquement en l'état. En effet, elles contiennent une infinité de termes qu'il va falloir tronquer.

#### Une première idée : une troncature brutale

Une première idée consiste à tronquer les séries qui définissent  $b_R$  et  $b^\varepsilon$ . Nous définissons les formes bilinéaires approchées  $\tilde{b}_R^N$  et  $b_N^\varepsilon$  de  $b_R$  et  $b^\varepsilon$ . Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega_R)$ , nous notons :

$$\begin{cases} \tilde{b}_R^N(u; v) = \sum_{n=0}^N \mu_n^R(\omega) u_n^R \overline{v_n^R}, & \text{c.f. (3.22) et (3.36),} \\ b_N^\varepsilon(u; v) = -i\omega u_0^\varepsilon \overline{v_0^\varepsilon} + \sum_{n=0}^N \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^\varepsilon \overline{v_n^\varepsilon}, & \text{c.f. (3.42) et (3.45).} \end{cases} \quad (6.8)$$

Nous introduisons donc les trois problèmes dont les solutions numériques sont solutions :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_N^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R) : \\ a_R(u_N^\varepsilon; v) + \tilde{b}_R^N(u_N^\varepsilon; v) + b_N^\varepsilon(u_N^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} \text{Chercher } \tilde{u}_N^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R) : \\ a_R(\tilde{u}_N^\varepsilon; v) + \tilde{b}_R^N(\tilde{u}_N^\varepsilon; v) + b_0^\varepsilon(\tilde{u}_N^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_N^0 \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R) : \\ a_R(u_N^0; v) + \tilde{b}_R^N(u_N^0; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{cases} \quad (6.11)$$

Toutefois pour un nombre dénombrable de  $R$ , nous aboutissons alors à des problèmes mal posés. Ceci est improbable, mais, pour  $R$  proche de ces valeurs, la matrice finale à inverser se révèle mal conditionnée. C'est pourquoi, nous écartons cette formulation approchée et nous lui préférons la technique du paragraphe suivant.

**Remarque 6.2** *Illustrons ce fait pour le champ limite. Prenons  $R$  une racine positive de  $J'_p(\omega R)$  pour un  $p > N$ . Définissons la fonction  $u$  :*

$$u(r, \theta) = J_p(\omega r) \cos p\theta, \quad \text{dans } \Omega_R. \quad (6.12)$$

Comme  $u$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, & \text{pour } y \in [-R; R], \\ \frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = \omega J'_p(\omega R) \cos p\theta = 0, & \text{pour } \theta \in [0; \pi], \end{cases} \quad (6.13)$$

nous tirons :

$$a_R(u; v) = \int_{\Omega_R} [\nabla u(\mathbf{x}) \overline{\nabla v(\mathbf{x})} - \omega^2 u(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})}] d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R). \quad (6.14)$$

De plus remarquons, pour tout  $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$  :

$$\int_0^\pi u(R, \theta) \cos n\theta d\theta = 0 \implies u_n^R = 0 \implies b_R^N(u, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R). \quad (6.15)$$

d'où, il vient pour tout  $v \in H^1(\Omega_R)$  :

$$a_R(u; v) + b_R^N(u; v) = 0. \quad (6.16)$$

Ainsi, le problème (6.11), n'admet pas de solution unique. D'après l'alternative de Fredholm, ce problème n'admet pas de solution pour tous les  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Remarque 6.3** On ne peut tout de même pas dire que cette situation est catastrophique. En effet, il est possible de montrer :

(1) à  $R$  donné, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  les problèmes sont bien posés. Dans le cas du champ limite, le plus petit  $N_0$  est donné par :

$$N_0 = \inf \left\{ N \in \mathbb{N} / \forall n > N / J'_n(\omega R) \neq 0 \right\}. \quad (6.17)$$

Si nous posons la notation :

$$j'_n = \inf \left\{ z > 0 / J'_n(z) = 0 \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (6.18)$$

il est possible de voir que la suite des  $j'_n$  est croissante pour  $n \geq 1$  de plus

$$\begin{cases} \text{si } \omega R \in ]0; j'_1[, & \text{alors } N_0 = 0, \\ \text{si } \omega R \in [j'_n; j'_{n+1}[, & \text{alors } N_0 \leq n. \end{cases} \quad (6.19)$$

Donnons les premières valeurs numériques des  $j'_n$  :

$$\begin{cases} j'_1 \simeq 1.841, j'_2 \simeq 3.054, j'_3 \simeq 4.201, j'_4 \simeq 5.317, j'_5 \simeq 6.416, \\ j'_{10} = 11.70, j'_{15} = 17.02, j'_{20} = 22.22 \end{cases} \quad (6.20)$$

(2) à  $N$  donné, il existe  $R_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < R < R_0$ , les problèmes sont bien posés. Dans le cas du champ limite, ce  $R_0$  est donné par :

$$R_0 = j'_{N+1}/\omega. \quad (6.21)$$

### Une deuxième idée : opérateur Dirichlet-Neumann approché modifié

Nous reproduisons ici la technique introduite dans [47].

Notons tout d'abord que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^R \overline{v_n^R} = \int_{\Gamma_R} u \overline{v} \quad (\text{c.f. (3.22) et (3.36)}). \quad (6.22)$$

Puis remarquons que :

$$b_R^N(u; v) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu_n^R(\omega) - \mu_0^R(\omega)) u_n^R \overline{v_n^R} + \mu_0^R(\omega) \int_{\Gamma_R} u \overline{v}, \quad \forall (u, v) \in [H^1(\Omega_R)]^2, \quad (6.23)$$

où les scalaires  $\mu_n^R(\omega)$  sont donnés en (3.22). C'est à ce moment que nous tronquons la somme. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , nous définissons alors les formes linéaires  $b_R^N$  qui approchent  $b_R$  :

$$b_R^N(u; v) = \sum_{n=0}^N (\mu_n^R(\omega) - \mu_0^R(\omega)) u_n^R \overline{v_n^R} + \mu_0^R(\omega) \int_{\Gamma_R} u \overline{v}, \quad \forall (u, v) \in [H^1(\Omega_R)]^2. \quad (6.24)$$

Il n'est en fait pas nécessaire d'effectuer un travail similaire pour  $b_N^\varepsilon$ .

Il est alors naturel d'introduire les solutions des problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_N^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R) : \\ a_R(u_N^\varepsilon; v) + b_R^N(u_N^\varepsilon; v) + b_N^\varepsilon(u_N^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (6.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \tilde{u}_N^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R) : \\ a_R(\tilde{u}_N^\varepsilon; v) + b_R^N(\tilde{u}_N^\varepsilon; v) + b_0^\varepsilon(\tilde{u}_N^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (6.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_N^0 \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que pour tout } v \in H^1(\Omega_R) : \\ a_R(u_N^0; v) + b_R^N(u_N^0; v) = \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (6.27)$$

**Théorème 6.4** Les problèmes (6.25), (6.26) et (6.27) sont bien posés.

**Preuve.** Contentons nous de montrer le résultat dans le cas du problème (6.25). Pour les problèmes (6.26) et (6.27), la démonstration est identique.

D'après l'alternative de Fredholm, il nous suffit de montrer l'injectivité. C'est à dire :

$$\left( a_R(u_N^\varepsilon; v) + b_R^N(u_N^\varepsilon; v) + b_N^\varepsilon(u_N^\varepsilon; v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega_R) \right) \implies u_N^\varepsilon = 0. \quad (6.28)$$

Pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega_R)$ , nous tirons :

$$\int_{\Omega_R} \left( \nabla u_N^\varepsilon(\mathbf{x}) \overline{\nabla v(\mathbf{x})} - \omega^2 u_N^\varepsilon(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (6.29)$$

Ainsi, nous avons :

$$-\Delta u_N^\varepsilon - \omega^2 u_N^\varepsilon = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_R). \quad (6.30)$$

Puis pour  $v \in C^\infty(\Omega_R)$ , nous tirons que les décompositions spectrales de  $u_N^\varepsilon$  et  $\frac{\partial u_N^\varepsilon}{\partial r}$  sur  $\Gamma_R$  sont reliées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N^\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_N^\varepsilon)_n^R \psi_n, \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma_R), \\ \frac{\partial u_N^\varepsilon}{\partial r} = \sum_{n=0}^N \mu_n^R(\omega) (u_N^\varepsilon)_n^R \psi_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu_0^R(\omega) (u_N^\varepsilon)_n^R \psi_n, \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma_R). \end{array} \right. \quad (6.31)$$

où les fonctions  $\psi_n$  et les complexes  $\mu_n^R(\omega)$  sont données en (3.22).

En prenant  $u_N^\varepsilon$  comme fonction test, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \int_{\Omega_R} |\nabla u_N^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 - \omega^2 |u_N^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ - \mathbf{i} \omega |(u_N^\varepsilon)_0^\varepsilon|^2 + \sum_{n=1}^N \xi_n^\varepsilon(\omega) |(u_N^\varepsilon)_n^\varepsilon|^2 \\ + \sum_{n=0}^N \mu_n^R(\omega) |(u_N^\varepsilon)_n^R|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu_0^R(\omega) |(u_N^\varepsilon)_n^R|^2. \end{array} \right. \quad (6.32)$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, il suit :

$$0 = -\mathbf{i} \omega |(u_N^\varepsilon)_0^\varepsilon|^2 + \sum_{n=0}^N \text{Im}(\mu_n^R(\omega)) |(u_N^\varepsilon)_n^R|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \text{Im}(\mu_0^R(\omega)) |(u_N^\varepsilon)_n^R|^2. \quad (6.33)$$

D'où, d'après le lemme A.5, comme  $\text{Im}(\mu_n^R(\omega)) < 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons :

$$(u_N^\varepsilon)_n^R = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.34)$$

Ainsi, il vient de (6.31) :

$$\begin{cases} u_N^\varepsilon = 0, & \text{dans } H^{1/2}(\Gamma_R), \\ \frac{\partial u_N^\varepsilon}{\partial r} = 0, & \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma_R). \end{cases} \quad (6.35)$$

Nous concluons à l'aide du théorème de continuation unique :

$$u_N^\varepsilon \equiv 0, \quad \text{dans } \Omega_R. \quad \square \quad (6.36)$$

Par une démarche stabilité consistante, il est possible de montrer le résultat suivant :

**Théorème 6.5** *Les solutions des problèmes (6.25), (6.27) et (6.26) vérifient :*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N^\varepsilon = u^\varepsilon, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{u}_N^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N^0 = u^0. \quad (6.37)$$

**Preuve.** On pourra s'inspirer de [64].

### 6.1.2 Introduction de l'approximation éléments finis

Introduisons tout d'abord une triangulation (non courbe) de  $\Omega_R$ . L'approximation géométrique d'un cercle par des triangles étant non conforme (c.f. figure 6.1), donnons quelques précisions. Nous notons  $\Omega_R^h$  le polygone formé par l'ensemble des triangles du maillage. Nous imposons que chaque sommet du polygone  $\Omega_R^h$  est un point de  $\partial\Omega_R$  (approximation interne par convexité de  $\Omega_R$ ). De plus, nous faisons correspondre aux extrémités de  $\Sigma_\varepsilon$  deux sommets de la triangulation.

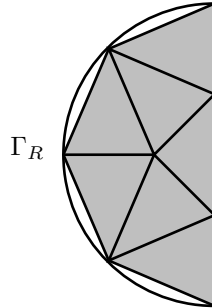


FIG. 6.1 – Une approximation géométrique non conforme

Nous choisissons de rechercher les approximations numériques des solutions dans l'espace  $V$  :

$$V = \left\{ u_h \in H^1(\Omega_R^h) \mid u_h \text{ est } P_2 \text{ sur chaque triangle} \right\}. \quad (6.38)$$

Pour être sur que l'erreur numérique soit négligeable, il faut prendre  $h$  plus petit que  $\varepsilon$ . Nous prenons typiquement :

$$h < \frac{\varepsilon}{10}. \quad (6.39)$$

L'approximation  $a_R^h$  de  $a_R$  est donnée par :

$$a_R^h(u_h; v_h) = \int_{\Omega_R^h} \left( \nabla u_h(\mathbf{x}) \overline{\nabla v_h(\mathbf{x})} - \omega^2 u_h(\mathbf{x}) \overline{v_h(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x}, \quad \text{pour tout } u_h \text{ et } v_h \text{ dans } V. \quad (6.40)$$

La frontière  $\Gamma_R^h (\simeq \Gamma_R)$  étant donnée par :

$$\Gamma_R^h = \left\{ (x, y) \in \partial\Omega_R^h / x \neq 0 \right\}, \quad (6.41)$$

nous approchons la forme bilinéaire  $b_R$  par  $b_R^{N,h}$ , pour tout  $u_h$  et  $v_h$  dans  $V$  :

$$\begin{cases} b_R^{N,h}(u_h; v_h) = \sum_{n=0}^N \left[ (\mu_n^R(\omega) - \mu_0^R(\omega)) u_{h,n}^R \overline{v_{h,n}^R} \right] + \mu_0^R(\omega) \int_{\Gamma_R^h} u_h \overline{v_h}, \\ \text{avec } u_{h,n}^R = \int_{\Gamma_R^h} u_h \psi_{h,n}^R \text{ et } v_{h,n}^R = \int_{\Gamma_R^h} v_h \psi_{h,n}^R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (6.42)$$

où les  $\Psi_{h,n}^R$ , définies sur  $\Gamma_R^h$ , désignent des traces de fonctions de  $V$  qui interpolent les fonctions définies sur  $\Omega_R$  :

$$\begin{cases} \psi_0(r, \theta) = \sqrt{\frac{1}{r}}, \quad \psi_n(x, y) = \sqrt{\frac{2}{r}} \cos n\theta, \quad \text{pour } (r, \theta) \in \Omega_R^h \text{ et } n \in \mathbb{N}^*, \\ \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (6.43)$$

C'est à dire les fonctions continues telles que

$$\psi_{h,n}^R(r, \theta) = \psi_n(r, \theta) \quad (6.44)$$

en chaque extrémité et milieu des segments qui définissent la ligne brisée  $\Gamma_R^h$ , et, qui sont  $P_2$  (en la variable tangentielle) sur chaque segment formant  $\Gamma_R^h$ .

De même, nous définissons l'approximation numérique de  $b_N^\varepsilon$  donnée par :

$$\begin{cases} b_{N,h}^\varepsilon(u_h; v_h) = -i\omega u_{0,h}^\varepsilon \overline{v_{0,h}^\varepsilon} + \sum_{n=1}^N \xi_n^\varepsilon(\omega) u_{n,h}^\varepsilon \overline{v_{n,h}^\varepsilon}, \quad \forall (u_h; v_h) \in V^2, \\ \text{avec } u_{n,h}^\varepsilon = \int_{[0;\varepsilon]_y} u_h(0, y) w_{h,n}^\varepsilon(y) dy, \quad \forall u_h \in P_2, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.45)$$

où  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$  sont donnés en (3.45). Les fonctions  $w_{h,n}^\varepsilon$  sont définies sur  $\Sigma_\varepsilon$  et sont la trace de fonctions de  $V$  qui interpolent les  $w_n^\varepsilon$  (définies en (3.42)). C'est à dire les fonctions continues telles que :

$$w_{h,n}^\varepsilon(y) = w_n^\varepsilon(y). \quad (6.46)$$

en chaque extrémité et milieu des segments de la triangulation qui forme  $\Sigma_\varepsilon$  et qui sont  $P_2$  en la variable  $y$  sur chacun de ces segments.

Enfin, nous approchons le terme source  $f$ . Nous notons  $f_h$  l'élément de  $V$  qui désigne l'interpolé  $P_2$  dans chaque triangle continues de  $f$ , c'est à dire la fonction qui coïncide avec  $f$  en chaque sommet du maillage et en chaque milieu de segment de la triangulation.

Les approximations numériques  $u_{N,h}^\varepsilon$ ,  $u_{N,h}^0$  et de  $\tilde{u}_{N,h}^\varepsilon$  vérifient les formulations variationnelles :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_{N,h}^\varepsilon \in V \text{ tel que pour tout } v_h \in V : \\ a_R^h(u_{N,h}^\varepsilon; v_h) + b_R^{N,h}(u_{N,h}^\varepsilon; v_h) + b_{N,h}^\varepsilon(u_{N,h}^\varepsilon; v_h) = \int_{\Omega_R^h} f_h(\mathbf{x}) \overline{v_h(\mathbf{x})} dx, \end{cases} \quad (6.47)$$

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_{N,h}^0 \in V \text{ tel que pour tout } v_h \in V : \\ a_R^h(u_{N,h}^0; v_h) + b_R^{N,h}(u_{N,h}^0; v_h) = \int_{\Omega_R^h} f_h(\mathbf{x}) \overline{v_h(\mathbf{x})} dx, \end{cases} \quad (6.48)$$

$$\begin{cases} \text{Chercher } \tilde{u}_{N,h}^\varepsilon \in V \text{ tel que pour tout } v_h \in V : \\ a_R^h(\tilde{u}_{N,h}^\varepsilon; v_h) + b_R^{N,h}(\tilde{u}_{N,h}^\varepsilon; v_h) + b_{0,h}^\varepsilon(\tilde{u}_{N,h}^\varepsilon; v_h) = \int_{\Omega_R^h} f_h(\mathbf{x}) \overline{v_h(\mathbf{x})} dx, \end{cases} \quad (6.49)$$

### 6.1.3 Formulation matricielle

Introduisons une base  $((w_p))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket}$  de l'espace  $V$  :

$$u_h = \sum_{p=0}^M u_p w_p, \quad \forall u_h \in P_2. \quad (6.50)$$

Introduisons les suites  $((u_p^\varepsilon))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket}$ ,  $((\tilde{u}_p^\varepsilon))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket}$  et  $((u_p^0))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket}$  telles que :

$$u_{N,h}^\varepsilon = \sum_{p=0}^M u_p^\varepsilon w_p, \quad \tilde{u}_{N,h}^\varepsilon = \sum_{p=0}^M \tilde{u}_p^\varepsilon w_p, \quad u_{N,h}^0 = \sum_{p=0}^M u_p^0 w_p. \quad (6.51)$$

De plus, notons  $A$ ,  $B$  et  $B^0$  les matrices carrées associées aux formes bilinéaires approchées :

$$\begin{cases} A, B, B^0 \in \mathbb{C}^{M \times M}, \\ A_{p,q} = a_R^h(w_p; w_q) + b_R^{N,h}(w_p; w_q), & \forall (p, q) \in \llbracket 0; M \rrbracket^2, \\ B_{p,q} = b_{N,h}^\varepsilon(w_p; w_q), B_{p,q}^0 = b_{0,h}^\varepsilon(w_p; w_q), & \forall (p, q) \in \llbracket 0; M \rrbracket^2, \end{cases} \quad (6.52)$$

et le vecteur ligne  $L$  associé à la source :

$$L_q = \int_{\Omega_R^h} f(\mathbf{x}) \overline{w_q(\mathbf{x})} dx, \quad \forall q \in \llbracket 0; M \rrbracket. \quad (6.53)$$

La résolution des formulations variationnelles approchées (6.47), (6.48) et (6.49) est donc équivalente à la résolution des problèmes matriciels :

$$\begin{cases} \text{Chercher } ((u_p^\varepsilon))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket} \text{ tel que :} \\ \sum_{p=0}^M u_p^\varepsilon (A_{p,q} + B_{p,q}) = L_q, & \forall q \in \llbracket 0; M \rrbracket. \end{cases} \quad (6.54)$$

$$\begin{cases} \text{Chercher } ((u_p^0))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket} \text{ tel que :} \\ \sum_{p=0}^M u_p^0 A_{p,q} = L_q, & \forall q \in \llbracket 0; M \rrbracket. \end{cases} \quad (6.55)$$

$$\begin{cases} \text{Chercher } ((\tilde{u}_p^\varepsilon))_{p \in \llbracket 0; M \rrbracket} \text{ tel que :} \\ \sum_{p=0}^M \tilde{u}_p^\varepsilon (A_{q,p} + B_{p,q}^0) = L_q, & \forall q \in \llbracket 0; M \rrbracket. \end{cases} \quad (6.56)$$

## 6.2 Technique de calcul numérique pour le problème de raccord 1D-2D, (avec $h \gg \varepsilon$ )

Nous montrons ici comment, à partir de la formulation variationnelle (3.31), on peut dériver une méthode d'éléments finis, où le pas de maillage peut être pris plus grand que  $\varepsilon$ . Ce travail a été effectué en collaboration avec Marianne Clausel et Marc Duruflé au sein du projet Ondes à l'INRIA.

Nous nous plaçons ici dans le cas général. Nous n'utilisons pas ici des opérateurs Dirichlet-Neumann pour les raisons suivantes. C'est tout d'abord contraire à nos objectifs (raccord 2D-1D). De plus, dans le cas de la fente courbe, il n'est pas possible d'obtenir l'opérateur Dirichlet-Neumann par une

démarche analytique (on peut toutefois l'obtenir numériquement [38]). Enfin pour des longueurs particulières de la fente correspondant à des résonances, ces opérateurs n'existent pas.

La méthode, que nous présentons ici, est l'analogue variationnel de la méthode par différences finies introduites pour les équations de Maxwell par Taflove dans [81], [82] et [83] (elle est tout à fait adaptable pour les équations de Helmholtz). Les améliorations possibles de cette méthode ne passent pas comme pour la méthode de Taflove par une modification locale du schéma aux différences finies (modèle de Gilbert-Holland c.f. [36]) mais par un enrichissement de l'espace d'approximation en tenant compte du comportement local de la solution (approximation basse fréquence par exemple).

Du point de vue pratique, les tests numériques ont été réalisés à l'aide du code MONTJOIE développé par Marc Duruflé. Ce code d'éléments finis d'ordre élevé pour des maillages constitués de quadrilatères ou de triangles permet de traiter les équations hyperboliques linéaires classiques (acoustique, Maxwell) en domaine temporel ou harmonique. Il n'est pas pour le moment en accès libre.

Une différence entre cette étude pratique par rapport à l'étude théorique est l'utilisation d'une couche parfaitement adaptée PML (perfectly matched layer) pour borner le domaine de calcul. Ces couches PML ont été initialement introduites en régime transitoire par Bérenger [12] et ont été étudiées de façon approfondie dans la littérature [24, 31, 35, 46, 50]. Ce sujet de recherche reste d'actualité, notamment au sein du projet Ondes [30, 34].

Dans cette section, nous montrons tout d'abord (paragraphe 6.2.1) quel est le problème continu (modélisation approchée : couplage 1D-2D) que nous approchons numériquement. Puis, au paragraphe 6.2.2, nous montrons comment on peut utiliser une discrétisation de type Galerkin [13] pour effectuer l'approximation numérique de cette solution. Enfin, nous montrons quelques expérimentations permettant de valider partiellement la méthode présentée auparavant avec le code MONTJOIE (c.f. paragraphe 6.2.3).

### 6.2.1 Le problème continu

Nous considérons ici un problème de diffraction d'ondes par un obstacle borné  $\mathcal{B}_\varepsilon$  donné par :

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \left( \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]_x \times \left[ -\frac{H}{2}, -\frac{\varepsilon}{2} \right]_y \cup \left( \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]_x \times \left[ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{H}{2} \right]_y \right). \quad (6.57)$$

Pour le champ limite, il sera utile de définir la limite  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}_\varepsilon$  :

$$\mathcal{B} = \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]_x \times \left[ -\frac{H}{2}, \frac{H}{2} \right]_y. \quad (6.58)$$

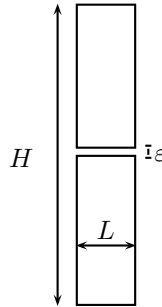


FIG. 6.2 – L'obstacle

Le domaine de propagation consiste en l'extérieur de l'obstacle :

$$\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}. \quad (6.59)$$



De plus, nous avons choisi de prendre les valeurs suivantes pour les différentes longueurs :

$$H = 8 \lambda, \quad L = 0.8 \lambda. \quad (6.60)$$

Nous faisons de plus varier  $\varepsilon$  et  $\lambda$  suivant le critère :

$$10^{-1} \lambda \leq \varepsilon \leq 10^{-3} \lambda. \quad (6.61)$$

Sur ce domaine nous nous intéressons à l'approximation numérique du problème (c'est le problème que vérifie notre solution approchée) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \tilde{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ sortante et } U^\varepsilon \in H^1\left(-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]_s \text{ telles que :} \\ \Delta \tilde{u}^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}^\varepsilon = -f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \left(\Sigma_\varepsilon^- \cup \Sigma_\varepsilon^+\right), \\ \frac{d^2 U^\varepsilon}{ds^2} + \omega^2 U^\varepsilon = 0, \quad \text{dans } \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]_s, \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^\pm} \tilde{u}^\varepsilon = U^\varepsilon\left(\pm \frac{L}{2}\right) \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon^\pm} = \frac{dU^\varepsilon}{ds}\left(\pm \frac{L}{2}\right). \end{array} \right. \quad (6.62)$$

où  $\Sigma_\varepsilon^-$  et  $\Sigma_\varepsilon^+$  sont les deux frontières :

$$\Sigma_\varepsilon^- = \left\{-\frac{L}{2}\right\}_x \times \left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right]_y \text{ et } \Sigma_\varepsilon^+ = \left\{\frac{L}{2}\right\}_x \times \left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right]_y. \quad (6.63)$$

### Reformulation en domaine borné

Pour pouvoir utiliser une méthode de calcul numérique, nous devons borner le domaine, utilisons une couche absorbante parfaitement adaptée. Cette technique consiste tout d'abord à séparer le domaine  $\Omega$  en deux parties, le domaine  $\Omega_R$  et son complémentaire  $\Omega \setminus \overline{\Omega_R}$  (le support de  $f$  est inclus dans  $\Omega_R$ ) :

$$\Omega_R = \left\{(x, y) \in \Omega / -2R - \frac{L}{2} \leq x \leq 2R + \frac{L}{2} \text{ et } -R - H \leq y \leq R + H\right\}. \quad (6.64)$$

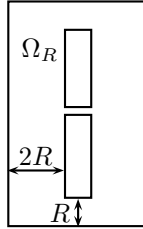


FIG. 6.3 – Une décomposition du domaine pour les PML

Il est alors possible de montrer que la solution  $\tilde{u}_1^\varepsilon$  du problème suivant coïncide avec  $\tilde{u}^\varepsilon$  dans  $\Omega_R$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \tilde{u}_1^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ et } U_1^\varepsilon \in H^1\left(-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]_s \text{ telles que :} \\ \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha(x) \frac{\partial \tilde{u}_1^\varepsilon}{\partial x} \right] + \beta(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \beta(y) \frac{\partial \tilde{u}_1^\varepsilon}{\partial y} \right] + \omega^2 \tilde{u}_1^\varepsilon = -f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \left(\Sigma_\varepsilon^- \cup \Sigma_\varepsilon^+\right), \\ \frac{d^2 U_1^\varepsilon}{ds^2} + \omega^2 U_1^\varepsilon = 0, \quad \text{dans } \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]_s, \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^\pm} \tilde{u}_1^\varepsilon = U_1^\varepsilon\left(\pm \frac{L}{2}\right) \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}_1^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon^\pm} = \frac{dU_1^\varepsilon}{ds}\left(\pm \frac{L}{2}\right). \end{array} \right. \quad (6.65)$$

avec les coefficients  $\alpha(x)$  et  $\beta(y)$  tels que :

$$\begin{cases} \alpha(x) = 1, & \text{si } |x| \leq 2R + \frac{L}{2}, & \alpha(x) = \frac{\mathbf{i}\omega}{\mathbf{i}\omega + \sigma(\omega(|x| - 2R - L/2))}, & \text{si } |x| \geq 2R + \frac{L}{2}, \\ \beta(y) = 1, & \text{si } |y| \leq R + \frac{H}{2}, & \beta(y) = \frac{\mathbf{i}\omega}{\mathbf{i}\omega + \sigma(\omega(|y| - R - H/2))}, & \text{si } |y| \geq R + \frac{H}{2}, \\ \sigma(z) = z^2/2. \end{cases} \quad (6.66)$$

En outre, il est alors possible de montrer que la fonction  $\tilde{u}_1^\varepsilon(x, y)$  est exponentiellement décroissante hors de  $\Omega_R$ . Il est donc naturel de réduire le domaine à un borné (ceci introduit bien entendu une erreur de modélisation mais qui reste négligeable). Introduisons donc la couche :

$$\Omega_{R,R'} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2R + \frac{L}{2} \leq |x| \leq 2R + \frac{L}{2} + R' \text{ et } R + \frac{H}{2} \leq |y| \leq R + \frac{H}{2} + R' \right\}. \quad (6.67)$$

La réunion de cette couche et de  $\Omega_R$  constitue le domaine de calcul  $\Omega_c$  ; notons sa frontière extérieure  $\Gamma_{ext}$  :

$$\Omega_c = \overline{\Omega_R} \cup \Omega_{R,R'}, \quad \Gamma_{ext} = \partial\Omega_c \setminus \partial\Omega. \quad (6.68)$$

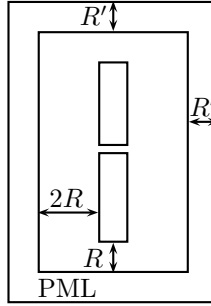


FIG. 6.4 – Le domaine de calcul

Nous nous intéressons maintenant au problème qui approche le problème (6.65) :

$$\begin{cases} \text{Chercher } \tilde{u}_2^\varepsilon \in H^1(\Omega_c) \text{ et } U_2^\varepsilon \in H^1\left(\left]-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]_s\right) \text{ telles que :} \\ \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha(x) \frac{\partial \tilde{u}_2^\varepsilon}{\partial x} \right] + \beta(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \beta(y) \frac{\partial \tilde{u}_2^\varepsilon}{\partial y} \right] + \omega^2 \tilde{u}_2^\varepsilon = -f, & \text{dans } \Omega_c, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \left( \Sigma_\varepsilon^- \cup \Sigma_\varepsilon^+ \right), \\ \tilde{u}_2^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Gamma_{ext}, \\ \frac{d^2 U_2^\varepsilon}{ds^2} + \omega^2 U_2^\varepsilon = 0, & \text{dans } \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]_s, \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^\pm} \tilde{u}_2^\varepsilon = U_2^\varepsilon(\pm \frac{L}{2}) \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}_2^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\Sigma_\varepsilon^\pm} = \frac{dU_2^\varepsilon}{ds}(\pm \frac{L}{2}). \end{cases} \quad (6.69)$$

### Formulation variationnelle du problème continu

Dans l'espace de Hilbert (à  $\varepsilon$  fixé) :

$$W_\varepsilon = \left\{ (v; V) \in H^1(\Omega_c) \times H^1\left(\left]-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]_s\right) \text{ tel que } \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^\pm} v = V(\pm \frac{L}{2}) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_{ext} \right\}, \quad (6.70)$$

ce problème admet la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\tilde{u}_2^\varepsilon; U_2^\varepsilon) \in W_\varepsilon \text{ tel que pour tout } (v, V) \in W_\varepsilon : \\ a_H(\tilde{u}_2^\varepsilon, v) + \varepsilon a_S(U_2^\varepsilon; V) = L_f(v). \end{cases} \quad (6.71)$$

où les formes linéaires et bilinéaires sont données par :

$$\begin{cases} a_H(u, v) &= \int_{\Omega_c} \frac{\alpha(x)}{\beta(y)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\beta(y)}{\alpha(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\omega^2}{\alpha(x)\beta(y)} u \bar{v}, \\ a_S(U; V) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} - \omega^2 U \bar{V}, \\ L_f(v) &= \int_{\Omega_R} f \bar{v}. \end{cases} \quad (6.72)$$

## 6.2.2 Discrétisation dans le cadre de la théorie de Galerkin

### Espace d'approximation numérique

Introduisons maintenant le sous-espace vectoriel  $X$  de dimension finie  $N + 1$ , de l'espace  $H^1(\Omega_c)$ . Nous associons à  $X$  une base  $((w_p))$ , nous avons pour tout  $u \in X$  :

$$u_h = \sum_{p=0}^N u_p w_p, \quad \text{avec } u_p \in \mathbb{C}. \quad (6.73)$$

De même, nous introduisons le sous espace vectoriel  $Y$  de dimension finie  $M + 1$  de  $H^1([-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}])$  et sa base  $((W_p))$ . Pour tout  $u \in Y$ , nous avons :

$$U_h = \sum_{p=0}^M U_p W_p, \quad \text{avec } U_p \in \mathbb{C}. \quad (6.74)$$

Nous supposons de plus que :

$$\begin{cases} W_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad W_p(0) = 0 \quad \text{pour tout } p \neq 0, \\ W_M(\tilde{L}) = 1 \quad \text{et} \quad W_p(\tilde{L}) = 0 \quad \text{pour tout } p \neq M. \end{cases} \quad (6.75)$$

A l'aide de  $X$  et  $Y$ , nous construisons l'approximation interne  $Z_\varepsilon$  de  $W_\varepsilon$  :

$$Z_\varepsilon = (X \times Y) \cap W_\varepsilon. \quad (6.76)$$

Ainsi, une base de  $Z_\varepsilon$ , nous est donnée par :

$$\left( \left( w_p; \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} w_p \right) W_0 + \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^+} w_p \right) W_M \right) \right)_{p \in [0; N]} \cup \left( \left( 0; W_p \right) \right)_{p \in [1; M-1]}. \quad (6.77)$$

Tout  $(u; U)$  dans  $Z_\varepsilon$  se représente sous la forme :

$$\begin{cases} u_h = \sum_{p=0}^N u_p w_p, \\ U_h = \sum_{p=0}^N \left\{ u_p \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} w_p \right) W_0 + \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^+} w_p \right) W_M \right] \right\} + \sum_{p=1}^{M-1} U_p W_p \end{cases} \quad (6.78)$$

où les  $u_p$  et  $U_p$  sont des complexes.

### Formulation matricielle du problème numérique

La base de la théorie de Galerkin est de remplacer l'espace de la solution et de la fonction test (ici  $W_\varepsilon$ ) par l'espace d'approximation ici  $Z_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\tilde{u}_h^\varepsilon, U_h^\varepsilon) \in Z_\varepsilon \quad \text{tel que, } \forall (v_h^\varepsilon, V_h^\varepsilon) \in Z_\varepsilon : \\ a_H(\tilde{u}_h^\varepsilon, v_h^\varepsilon) + \varepsilon a_S(U_h^\varepsilon, V_h^\varepsilon) = \int_{\Omega} f \bar{v}_h^\varepsilon dx, \end{cases} \quad (6.79)$$

Le doublet de fonctions  $(\tilde{u}_h^\varepsilon; U_h^\varepsilon)$  en tant qu'élément de  $Z_\varepsilon$  se représente sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u}_h^\varepsilon &= \sum_{p=0}^N u_p^\varepsilon w_p, \\ U_h^\varepsilon &= \sum_{p=0}^N \left\{ u_p^\varepsilon \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} w_p \right) W_0 + \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^+} w_p \right) W_M \right] \right\} + \sum_{p=1}^{M-1} U_p^\varepsilon W_p \end{cases} \quad (6.80)$$

Introduisons les matrices  $A^H \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $A^S \in \mathbb{C}^{M \times M}$  :

$$\begin{cases} A_{p,q}^H &= a_H(w_p, w_q), & \text{pour tout } (p, q) \in \llbracket 0; N \rrbracket^2, \\ A_{p,q}^S &= \varepsilon a_S(W_p; W_q), & \text{pour tout } (p, q) \in \llbracket 0; M \rrbracket^2. \end{cases} \quad (6.81)$$

Notons  $B_p^-, B_p^+$  et  $L_p$  les vecteurs de  $\mathbb{C}^N$  donnés par :

$$\begin{cases} B_p^- &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^-} w_p, & \text{pour tout } p \in \llbracket 0; N \rrbracket, \\ B_p^+ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon^+} w_p, & \text{pour tout } p \in \llbracket 0; N \rrbracket, \\ L_p &= \int_{\Omega_R} f \overline{w_p} & \text{pour tout } p \in \llbracket 0; N \rrbracket. \end{cases} \quad (6.82)$$

En prenant successivement l'ensemble des vecteurs de base de  $Z_\varepsilon$  (c.f. (6.75), (6.76) et (6.77)), nous obtenons la formulation matricielle permettant de résoudre (6.79) :

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^N u_p^\varepsilon \left[ A_{p,q}^H + B_p^- \overline{B_q^-} A_{0,0}^S + B_p^+ \overline{B_q^+} A_{M,M}^S \right. \\ \quad \left. + B_p^- \overline{B_q^+} A_{0,M}^S + B_p^+ \overline{B_q^-} A_{M,0}^S \right] \\ \quad + \sum_{p=1}^{M-1} U_p^\varepsilon \left[ \overline{B_q^-} A_{p,0}^S + \overline{B_q^+} A_{p,M}^S \right] = L_q, & \forall q \in \llbracket 0; N \rrbracket \\ \sum_{p=0}^N u_p^\varepsilon \left[ B_p^- A_{0,q}^S + B_p^+ A_{M,q}^S \right] + \sum_{p=1}^{M-1} U_p^\varepsilon A_{p,q}^S = 0, & \forall q \in \llbracket 1; M-1 \rrbracket. \end{cases} \quad (6.83)$$

### 6.2.3 Une mise en oeuvre numérique

Nous présentons ici succinctement une expérience numérique qui nous a permis de valider partiellement le modèle approché.

Rappelons que nous nous intéressons à l'approximation pratique (qui nous est donnée par l'approximation numérique de la solution du problème issue de la modélisation approchée) de la solution du problème :

$$\text{modélisation exacte} \begin{cases} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega_\varepsilon) \text{ sortante telle que :} \\ \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (6.84)$$

dont la limite nous est donnée par la résolution du problème :

$$\text{modélisation limite} \begin{cases} \text{Chercher } u^0 \in H_{loc}^1(\Omega_\varepsilon) \text{ sortante telle que :} \\ \Delta u^0 + \omega^2 u^0 = -f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.85)$$

Nous désirons vérifier qu'il est possible de mieux approcher la solution exacte avec l'approximation numérique de la solution approchée qu'avec la solution limite. Dit autrement, nous devons comparer

$$u^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon \text{ à } u^\varepsilon - u^0. \quad (6.86)$$

C'est pourquoi, nous devons calculer de manière très précise (ce qui sera effectué à l'aide d'une méthode éléments finis d'ordre élevé) la solution exacte et la solution limite. Alors, nous pourrions considérer que ces deux solutions (exacte et limite) coïncident avec leurs approximations numériques. La solution exacte de ce problème est calculée à l'aide d'un raffinement local au voisinage de la fente. Ceci nous permet de définir une solution de référence. Les solutions limites et approchées sont calculées à l'aide d'un maillage non raffiné. Les éléments finis utilisés sont  $P_4$  sur les triangles et  $Q_4$  sur les quadrilatères. Nous représentons aux figures 6.5, 6.6 et 6.7 les maillages utilisés pour le calcul de la solution exacte, de la solution approchée et de la solution limite au voisinage de la fente.

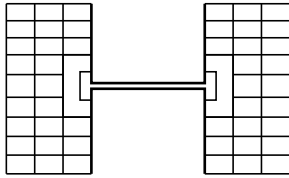


FIG. 6.5 – Le maillage pour le champ exact

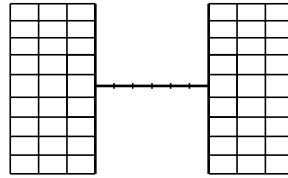


FIG. 6.6 – Le maillage pour le champ approché

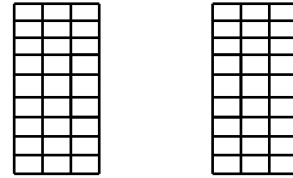


FIG. 6.7 – Le maillage pour le champ limite

Nous représentons ensuite sur les trois prochaines figures les cas d'une expérience numérique où la source est en fait ponctuelle distante de 1.5 de  $x = 0$  (frontière gauche de l'obstacle). Nous avons de plus ici choisi les valeurs suivantes :

$$\lambda = 1.0, H = 4.0, h = 10^{-1}, L = 0.8, R = \lambda, R' = \lambda. \quad (6.87)$$

Une expérience pour  $\varepsilon = 10^{-2}$  et  $h = 10^{-1}$

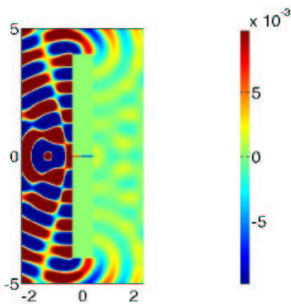


FIG. 6.8 – Le champ total exact  $u_h^\varepsilon$

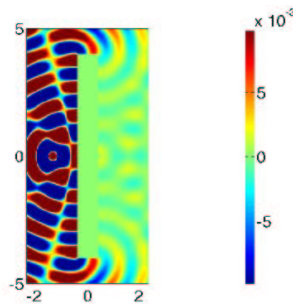


FIG. 6.9 – Le champ total approché  $\tilde{u}_h^\varepsilon$

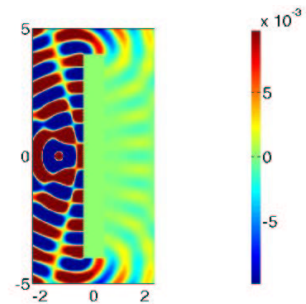


FIG. 6.10 – Le champ limite  $u_h^0$

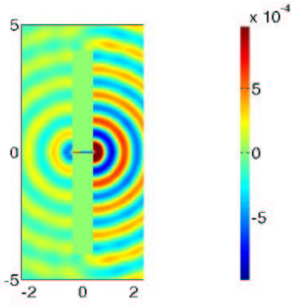


FIG. 6.11 – Le champ diffracté exact  $u_h^\varepsilon - u_h^0$

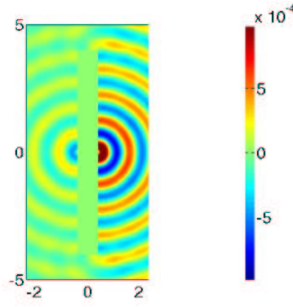


FIG. 6.12 – Le champ diffracté approché  $\tilde{u}_h^\varepsilon - u_h^0$

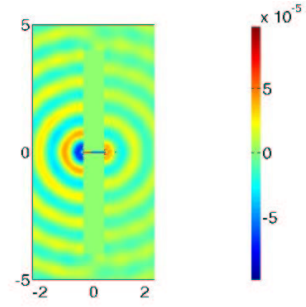


FIG. 6.13 – L'erreur du modèle  $u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon$

Pour cette valeur de  $\varepsilon$ , on peut noter la très bonne approximation de la solution exacte par la solution approchée. De plus, si nous nous intéressons à l'erreur relative pour le champ diffracté, nous obtenons une erreur en la norme  $L^2$  du domaine de calcul privé de la fente de l'ordre de quelques pourcents :

$$\frac{\|u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_c)}}{\|u_h^\varepsilon - u_h^0\|_{L^2(\Omega_c)}} = 2.80\% \quad (6.88)$$

Les mêmes remarques sont valables pour les deux expériences qui suivent :

**Une expérience pour  $\varepsilon = 5.10^{-3}$  et  $h = 10^{-1}$**

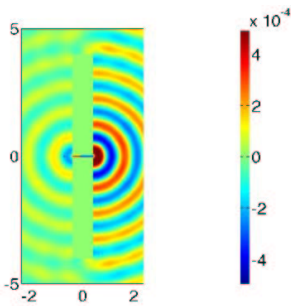


FIG. 6.14 – Le champ diffracté exact  $u_h^\varepsilon - u_h^0$

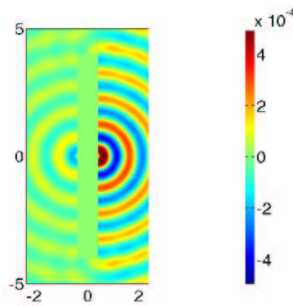


FIG. 6.15 – Le champ diffracté approché  $\tilde{u}_h^\varepsilon - u_h^0$

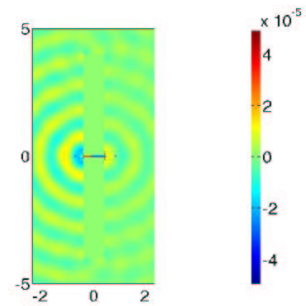


FIG. 6.16 – L'erreur du modèle  $u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon$

$$\frac{\|u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_c)}}{\|u_h^\varepsilon - u_h^0\|_{L^2(\Omega_c)}} = 1.44\% \quad (6.89)$$

Une expérience pour  $\varepsilon = 10^{-3}$  et  $h = 10^{-1}$

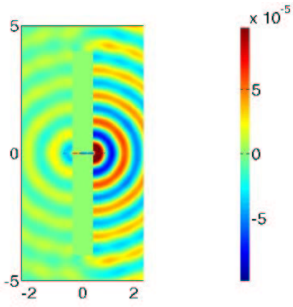


FIG. 6.17 – Le champ diffracté exact  $u_h^\varepsilon - u_h^0$

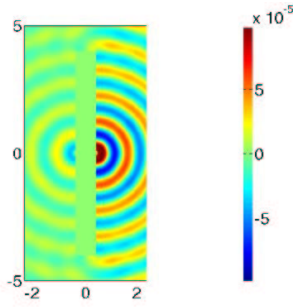


FIG. 6.18 – Le champ diffracté approché  $\tilde{u}_h^\varepsilon - u_h^0$

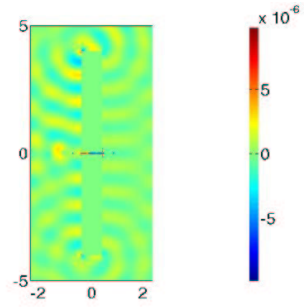


FIG. 6.19 – L'erreur du modèle  $u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon$

$$\frac{\|u_h^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_c)}}{\|u_h^\varepsilon - u_h^0\|_{L^2(\Omega_c)}} = 1.60\% \quad (6.90)$$

**Conclusion :** Nous avons bien montré que la formulation variationnelle (3.31), permet de développer une technique numérique permettant de ne pas raffiner au voisinage de la fente. Toutefois, par manque de temps, nous n'avons pas effectué l'analyse complète de la méthode, on peut notamment se poser la question suivante :

*Peut-on obtenir des estimations d'erreur numérique lorsque  $h$  et  $\varepsilon$  tendent vers 0. Dans ce cas où  $h > \varepsilon$ , cette question semble difficile et se résume à : quelle est la "meilleure" fonction  $g$  telle que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_h^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq g(\varepsilon, h). \quad (6.91)$$

*Quelles sont de plus les dépendances de  $g$  par rapport aux données  $R, f, \text{supp}(f), \omega \dots$*

Cette question est intimement reliée à la question du verrouillage numérique qui semble apparaître à la troisième expérience. Il y a en effet une dégradation de l'erreur relative. Bien qu'il soit possible de prendre  $h > \varepsilon$ , le choix de  $h$  semble être corrélé à  $\varepsilon$ .

De plus, nous pensons qu'un enrichissement de la base de Galerkin (en rajoutant des fonctions de base au voisinage de la fente) peut nettement améliorer la méthode. Une idée serait d'utiliser des solutions de problèmes électrostatiques dans la maille qui touche la fente. Une autre voie d'étude est l'utilisation de la méthode de Galerkin discontinue, qui peut être vue comme une généralisation élégante de la technique de Taflove (qui peut, elle même, être vue comme une technique volumes finis). De plus, Peut être est-il possible de lutter contre le verrouillage numérique, que nous venons d'évoquer, en introduisant une formulation mixte (comme en théorie des plaques).

# Chapitre 7

## Conclusion et perspectives de la partie I

Dans cette partie, nous avons introduit un modèle approché original pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes. Ce modèle consiste en un couplage entre un problème 2D et un problème 1D. Il est basé sur les mêmes idées que ceux introduits dans la littérature.

L'apport de ce travail est d'une part théorique. Le modèle a été étudié et validé de manière détaillée et rigoureuse au niveau continu (on se référera aux chapitres 3 et 4). Par ailleurs, signalons que c'est à notre connaissance le premier modèle approché (efficace en temps de calcul) qui peut être utilisé dans un code d'éléments finis. Les premiers résultats numériques, certes insuffisants pour définitivement conclure, sont très encourageants (on se référera au chapitre 6).

Les  $\delta$ -modèles (on se référera au chapitre 5), nous ont montré que, sous la condition de calculer de manière précise la solution au voisinage de la fente, d'autres modélisations 2D-1D pouvaient amener à des estimations d'erreur exponentiellement petites. C'est ce qui nous a motivé, pour nous diriger vers les techniques de développements asymptotiques raccordés, (c.f. partie II).

Présentons maintenant quelques voies possibles de recherche. Elles se divisent en deux parties. Les premières sont relatives à des analyses complémentaires du modèle approché. L'objectif est de maîtriser l'erreur commise par l'approximation. Les secondes s'intéressent aux extensions et variantes possibles du modèle approché.

### 7.1 Analyse complémentaire du modèle

Nous allons passer en revue les quelques sujets qui à notre avis méritent d'être étudiés. Nous les classons par ordre croissant de difficulté (non pas difficulté absolue, mais en tenant compte des résultats obtenus dans cette partie). Nous pensons qu'il est intéressant d'étudier les points suivants :

(1) **Les fentes courbes.** Dans cette situation, l'approximation unidimensionnelle de la solution exacte dans la fente est régie par l'équation aux dérivées partielles exprimées dans les coordonnées curvilignes  $(s, \nu)$  (on pourra se référer à la section 2.2) :

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{\varepsilon c(s)} \text{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right] - \omega^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2} \right) U^\varepsilon = 0, \quad (7.1)$$

Le développement limité à l'ordre 0 de cette équation nous donne une équation de Helmholtz homogène unidimensionnelle, pour un domaine de longueur de la courbe rectifiée associée à la fente. C'est pourquoi nous pensons que ce cas peut être aisément traité à l'aide d'une théorie de perturbation à partir de la fente droite.



(2) **Les fentes résonantes.** L'analyse du modèle pour les fentes droites finies s'est limitée aux longueurs  $L > 0$  de la fente telles que :

$$L \neq \ell\lambda/2, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*. \quad (7.2)$$

Comme on peut le voir à la partie III, dans le cas contraire, la solution exacte change de nature asymptotique. Du point de vue mathématique, les phénomènes asymptotiques deviennent plus difficiles à étudier. Ceci est principalement dû au fait que le problème de Dirichlet suivant est mal posé :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \omega^2 u(x) = 0, & \forall x \in [0; L], \\ u(0) \text{ et } u(L) \text{ donné.} \end{cases} \quad (7.3)$$

On peut ici se référer à la partie III pour se faire une idée plus précise des difficultés mathématiques.

(3) **L'analyse numérique du modèle approché.** Il semble clair que le modèle approché nécessite une analyse numérique sérieuse. Cette analyse s'avère très délicate. D'une part, le cadre "coercif plus compact négatif" rend en général l'analyse numérique difficile. D'autre part, les problèmes asymptotiques posent par essence des difficultés conceptuelles pour définir ce que l'on appelle estimation d'erreur numérique ( $\varepsilon$  et  $h$  tendent vers 0 indépendamment ou non, verrouillage numérique). Une des questions fondamentales est le choix de  $h$  à hauteur de la fente  $\varepsilon$  et à une précision données.

Une autre question est la mise en concurrence des différentes méthodes existantes. Nous nous contenterons de deux questions. A précision donnée, quelle est la méthode la plus efficace ? Quelle est la méthode la plus facile à implémenter ?

## 7.2 Extension des modèles approchés

Remarquons que le modèle approché est tout d'abord intuitif et facile à décrire. Son implémentation est rapide tout en générant un code de calcul efficace. D'autre part du point de vue mathématique, il nous a permis lors de son analyse d'aborder quelques vrais problèmes de l'analyse asymptotique. Ces raisons nous poussent à proposer différentes généralisations. Nous classons ces sujets par difficultés croissantes :

(1) **L'acoustique 3D.** Le passage au 3D a été effectué en collaboration avec Marianne Clausel (travail de DEA ou maîtrise) sous la direction de Patrick Joly, on devrait pouvoir en trouver une version rédigée dans un futur rapport de recherche INRIA (dans quelques mois). Nous nous sommes aperçus lors de ce stage que le problème des fentes petites dans les deux directions tangentes à la paroi (c.f. figure 7.1) n'était pas semblable aux fentes petites dans une seule direction d'espace (c.f figure 7.2). De manière un peu schématique, nous avons pour la convergence de la solution exacte vers la solution limite :

$$\begin{cases} u^\varepsilon - u^0 = O(\varepsilon^2), & \text{(fente petite dans deux directions)} \\ u^\varepsilon - u^0 = O(\varepsilon), & \text{(fente petite dans une direction)}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Ceci est, d'une part, tout à fait intuitif du point de vue fonctionnel et connu depuis longtemps des ingénieurs qui ne prennent en compte que les structures petites dans une direction.

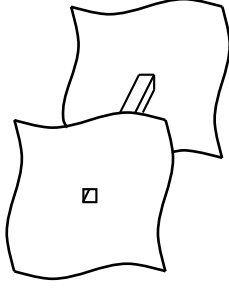


FIG. 7.1 – Fente petite dans deux directions

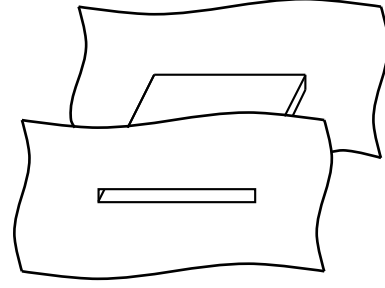


FIG. 7.2 – Fente petite dans une direction

(2) **Les conditions aux limites de Dirichlet.** Il n'y a ici plus de propagation d'ondes à l'intérieur de la fente. Il nous suffit pour approcher la solution de considérer la solution limite. On peut alors se poser la question de l'ordre de convergence de la solution exacte vers la solution limite. De plus, bien qu'il y ait de nombreuses différences, il semble que les preuves soient plus faciles à écrire (notamment le résultat de stabilité). Ce travail ne devrait pas poser de grandes difficultés.

(3) **D'autres conditions de transmission.** Comme nous l'avons vu à la remarque 3.1, il y a plusieurs possibilités pour écrire la condition de transmission. Il est naturel de se poser la question de la précision du modèle approché qui leur est associé. Nous pensons que les conditions de raccord brutal, comme celles présentées à la remarque 3.1 ne bénéficient pas de meilleurs ordres d'approximation. Elles ne permettent pas d'une part de prendre en compte la structure locale de la solution (singularité géométrique), et, ce qui est plus fondamental, n'approchent pas à un ordre élevé sa nature asymptotique (couche limite).

(4) **Les équations de l'acoustique temporel.** Dans le domaine temporel, le modèle trouve un équivalent immédiat (on se référera à la section 2.2 pour les notations)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u}^\varepsilon : [0; +\infty[ \times \Omega \cup \Omega' \rightarrow \mathbf{C} \text{ et } U^\varepsilon : [0; +\infty[ \times I \rightarrow \mathbf{C} \text{ tel que :} \\ \left(1 + \frac{\varepsilon c(s)}{2}\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta \tilde{u}^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \cup \Omega', \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon \cup \partial\Omega' \setminus \Sigma'_\varepsilon, \\ \frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\varepsilon c(s)} \text{Log} [1 + \varepsilon c(s)] \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial s} \right) = 0, \quad s \in I, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial t}(0, \mathbf{x}), \tilde{u}^\varepsilon(0, \mathbf{x}), U^\varepsilon(0, s) \text{ et } \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial t}(0, s) = 0 \text{ sont donnés,} \end{array} \right. \quad (7.5)$$

que nous complétons avec des conditions de transmission entre le modèle 1D et le modèle 2D au points  $A$  et  $B$

$$U^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad U^\varepsilon(\tilde{L}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma'_\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon d\sigma, \quad (7.6)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = \frac{dU^\varepsilon}{ds}(0) \text{ sur } \Sigma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial n} = -\frac{dU^\varepsilon}{ds}(\tilde{L}) \text{ sur } \Sigma'_\varepsilon. \quad (7.7)$$

Il est alors possible d'aborder l'analyse sous deux angles complètement différents. Soit directement, il faut alors développer de nouveaux outils d'analyse ou en chercher dans la littérature. Soit par l'intermédiaire de la transformation de Fourier-Laplace, ce thème de recherche nous rapproche de l'automatique et notamment de la théorie des opérateurs diffusifs (transformée de Fourier-Laplace du logarithme).

(5) **Les ondes électromagnétiques.** Notons tout d'abord qu'en dimension 2, l'étude des équations

de Maxwell sont des conséquences évidentes du cas acoustique. En dimension 3, il semble clair qu'il existe deux difficultés. La première est classique et relative au cadre fonctionnel. La deuxième est liée aux opérateurs d'impédance (équivalents électromagnétique des opérateurs Dirichlet-Neumann), On pourra ici se référer à [58, 59].

## Deuxième partie

# Une approche raffinée : les développements asymptotiques raccordés



# Avertissement au lecteur

Dans la suite, nous allons présenter la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le cadre des problèmes de fente mince. Dans la mesure du possible, nous avons essayé de regrouper dans un même document l'ensemble des outils, arguments, et raisonnements ayant un rapport avec cette technique.

Ces divers éléments, constitués de calculs formels, de définitions et de démonstrations mathématiques ont des natures très variées. Par conséquent, quelques précisions s'imposent pour pouvoir lire cette partie dans de bonnes conditions.

Dans un souci de lisibilité, nous avons choisi de séparer l'exposé qui suit en chapitres, une étape du raisonnement étant associée à chacun d'entre eux. Donnons tout d'abord le

## Plan de la partie II.

Au chapitre 8, faisant office d'introduction à la partie II, nous essayons de prendre un peu de recul et tentons, d'une part, de faire comprendre les différents enjeux poursuivis et, d'autre part, de donner les principales idées de la technique des développements asymptotiques raccordés. En particulier, nous profitons de ce chapitre pour introduire les notations et définitions qui sont capitales pour la suite, mais ne nécessitent aucun développement théorique conséquent.

Au chapitre 9, nous définissons les termes du développement asymptotique, qui font l'objet de cette étude. Ce sont ces quantités qui permettront de former une approximation d'ordre arbitraire de la solution, ainsi que sera établi rigoureusement au chapitre 12. Dans un premier temps, nous décrivons les problèmes aux limites, de type elliptique, permettant de définir les termes des développements asymptotiques à tout ordre. Les problèmes consistent à résoudre des équations aux dérivées partielles couplées avec des comportements asymptotiques spatiaux, ponctuels ou à l'infini. En nous appuyant sur des résultats de base qui seront démontrés au chapitre 11, nous montrons ensuite que ces problèmes sont bien posés.

Au chapitre 10, nous présentons en détail (sans justification particulière) les calculs formels qui nous ont permis de poser les problèmes introduits au chapitre 9. Nous obtenons tout d'abord les équations aux dérivées partielles. Essentiellement calculatoire, ce chapitre est basé sur les développements modaux et la séparation de variables (qui seront justifiés au chapitre 11). Il reste le chapitre clé pour comprendre la méthode de construction des termes du développement asymptotique, laquelle n'est pas aussi intuitive que l'on pourrait le penser. La structure de la démonstration est assez classique. On écrit tout d'abord l'erreur entre la solution exacte et son développement tronqué à un ordre donné comme la solution d'un problème dont les sources sont typiquement des erreurs d'approximation (nous les appellerons erreur de troncature ou erreur de raccord). La suite de la preuve repose alors sur une estimation de consistance et sur un résultat de stabilité. L'estimation de consistance revient essentiellement à estimer des restes de série (c'est là que l'on s'inspire des calculs du chapitre 10). Le résultat de stabilité s'appuie sur les techniques développées dans la première partie de la thèse.

Au chapitre 11, nous nous intéressons à l'analyse de problèmes modèles sur lesquels repose la démonstration de l'existence et de l'unicité des termes des développements asymptotiques effectuée au chapitre 9. Ces problèmes présentent quelques aspects non standard qui nécessitent

---

un développement particulier. Par souci de rigueur et de complétude, nous développons de façon rigoureuse la théorie mathématique de la séparation de variables (cette approche est très classique mais on en trouve peu d'exposés complets dans la littérature).

Au chapitre 12, nous estimons les erreurs commises par les approximations de la solution exacte, contruites par troncature à un ordre fini des développements asymptotiques. Du point de vue mathématique, c'est le chapitre clé de la thèse qui permet de démontrer que les développements du chapitre 10 peuvent être rigoureusement justifiés.

### **Aide à la lecture.**

On peut avoir sur cette partie de la thèse deux regards différents.

- 1 celui du lecteur curieux de se familiariser avec les concepts et les principales idées des développements asymptotiques raccordés sans se soucier trop de la justification rigoureuse et des détails techniques des démonstrations.
- 2 celui du mathématicien qui voudra restreindre sa lecture aux parties qui sont complètement justifiées d'un point de vue mathématiques.

En partant de ce postulat, nous pensons que deux modes de lecture sont possibles :

- Si on adopte le premier point de vue on pourra se contenter de lire les chapitre 8, 9 et 10 et éventuellement les énoncés des théorèmes du chapitre 12. On a alors une vision plus à l'anglo-saxonne des méthodes de raccordement de développements asymptotiques
- Le lecteur adoptant le point de vue 2 pourra sauter le chapitre 10 qui n'a pas de nécessité logique absolue (il nous a paru quand même essentiel de la détailler car il a participé à la démarche). On a alors un exposé dans l'esprit des mathématiques à la française (communauté des E.D.P.) ou à la russe.

Nous suggérons aussi un troisième mode de lecture consistant à tout lire. ceci permettrait d'avoir une lecture conciliant les deux points de vue. Tel était l'ambition de la rédaction de cette partie.

## Chapitre 8

# Une nouvelle approche pour le raccord 1D-2D : les développements asymptotiques raccordés

### Sommaire

---

8.1	Un nouveau découpage géométrique . . . . .	106
8.2	Généralités sur la méthode des développements asymptotiques raccordés. . . . .	107
8.3	Vers l'application de la méthode au problème modèle . . . . .	110

---

**Résumé :** Ce chapitre peut être vu comme une introduction à la deuxième partie. Il a comme objet essentiel de présenter, sans entrer dans les détails, les idées de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

La principale nouveauté par rapport à la méthode de raccord brutal (première partie) réside dans l'introduction à la section 8.1 d'une zone intermédiaire (zone de champ proche) entre la fente (zone de champ de fente) et le demi espace (zone de champ lointain). A la section 8.2, nous tentons d'expliquer les principes généraux de la méthode des développements asymptotiques raccordés (hors du simple contexte des fentes). A la section 8.3, nous traduisons ces principes à notre cas particulier. Dans chacune des zones (lointain, proche, fente), nous introduisons un Ansatz qui permet de développer la solution exacte suivant  $\varepsilon$ . L' Ansatz s'appuie sur un changement d'échelle (scaling) adapté à la géométrie de la zone considérée. Notons que les développements asymptotiques se font suivant des produits de puissances de  $\varepsilon$  et de  $\text{Log } \varepsilon$  (qui n'ont, bien entendu, pas la même signification du point de vue de l'ordre d'approximation).



## 8.1 Un nouveau découpage géométrique

Nous changeons maintenant un peu de point de vue, nous considérons non plus deux zones de calcul séparées par l'interface  $\Sigma_\varepsilon$  (l'embouchure de la fente), mais trois zones, la zone supplémentaire constituant une zone de transition (ou zone de raccord) entre le demi espace et la fente (cf. figure 8.1). Ces trois zones vont dépendre de  $\varepsilon$  mais chacune tendra vers une géométrie limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Ces trois zones constituent a priori un partitionnement du domaine de calcul mais leurs interfaces respectives n'ont pas d'existence physique réelle : elles peuvent fluctuer de telle sorte que les trois zones ont vocation à se recouvrir. C'est en particulier ce qui sera à la base de l'écriture des équations de raccord entre les différentes zones (voir section 8.3).

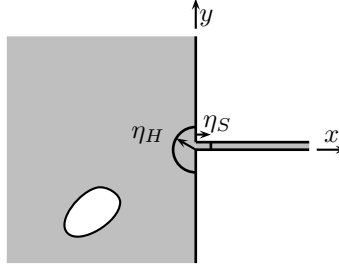


FIG. 8.1 – Définition des trois domaines

### La zone de demi espace ou de champ lointain.

Dans ce paragraphe, l'utilisation de  $H$  en indice fait référence à “half-space” (demi espace en anglais). La zone de champ lointain est définie à partir d'une certaine distance  $\eta_H$  du point A (le point limite de l'embouchure).

$$\Omega_H(\eta_H) = \Omega \setminus \Omega_{\eta_H}, \quad (8.1)$$

où on rappelle que  $\Omega_R$  est défini par (3.24). Dans le contexte d'une analyse asymptotique,  $\eta_H$  sera amené à varier en fonction de  $\varepsilon$  :

$$\eta_H = \eta_H(\varepsilon), \quad (8.2)$$

où nous demanderons à la fonction  $\eta_H(\varepsilon)$  de tendre vers 0 avec  $\varepsilon$ , mais moins vite que  $\varepsilon$  (disons que  $\eta_H$  est petit devant la longueur d'onde  $\lambda$  et grand devant  $\varepsilon$ ). On dira ici que  $\eta_H(\varepsilon)$  vérifie la condition  $(C_0)$  définie par :

$$\eta(\varepsilon) \text{ vérifie la condition } (C_0) \iff \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \end{cases} \quad (8.3)$$

**N.B.** Pour faire ressortir toute la généralité du raccordement de développements asymptotiques nous avons choisi d'ajouter un obstacle (muni des conditions de Neumann) dans le demi-espace. Ceci permettra au lecteur de plus facilement généraliser cette étude à d'autres géométries.

### La zone de fente.

Il s'agit de la fente privée d'un petit voisinage du point A. Elle est définie à l'aide d'une seconde distance  $\eta_S$  :

$$\Omega_S(\eta_S) = \mathcal{O}_\varepsilon \setminus \mathcal{O}_\varepsilon^{\eta_S}, \quad (8.4)$$

où on rappelle que  $\mathcal{O}_\varepsilon^L$  est défini par (3.56) et où, à nouveau,  $\eta_H = \eta_H(\varepsilon)$  satisfait la condition  $(C_0)$  (cf. (8.3)).

### La zone de transition ou de champ proche.

Ici, l'utilisation de l'indice  $N$  fait référence à "Near" (proche en anglais). La zone de champ proche est la zone intermédiaire simplement définie par :

$$\Omega_N(\eta_S, \eta_H) = \Omega_\varepsilon \setminus (\Omega_H(\eta_H) \cup \Omega_S(\eta_S)). \quad (8.5)$$

C'est bien sûr dans l'existence de cette nouvelle zone, dont l'existence est justifiée par les remarques qui ont conclu la première partie du travail, que se situe la principale nouveauté de cette approche.

La problématique est la suivante :

Comment sur chacune de ces zones avoir une bonne approximation de la solution tout en préservant les critères suivants :

- on se limite à un modèle 1D dans la zone de fente (pré-requis de base),
- le calcul des solutions approchées est numériquement viable (efficacité et précision),
- on souhaite pouvoir obtenir une précision arbitraire.

Par rapport à la première partie du travail, on peut voir notre objectif comme une tentative d'amélioration de la méthode présentée dans la première partie de la thèse : on souhaite conserver le raccord entre un modèle 1D et un modèle 2D en autorisant que le raccord s'effectue de façon plus compliquée, i.e. nécessite un calcul dans une zone "bouchon" intermédiaire, l'espoir étant de dépasser la limite de précision constatée avec la première méthode.

La méthode des développements asymptotiques raccordés (Matched Asymptotic Expansions en anglais) a été inventée il y a une trentaine d'années pour obtenir des solutions quasi-analytiques de problèmes de mécanique. Elle semble apporter une réponse intéressante à cette question. C'est cette réponse que nous nous proposons de développer dans cette deuxième partie.

## 8.2 Généralités sur la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Cette méthode a déjà suscité une abondante littérature et on peut en première approximation distinguer deux écoles (qui semblent du reste se citer assez peu mutuellement) :

- l'école anglo-saxonne [27] qui semble à l'origine de cette méthode,
- l'école russe [51] qui a poussé plus loin la justification mathématique rigoureuse.

Signalons également une méthode alternative mais cousine, appelée méthodes des développements multi-échelles, qui peut mener à une présentation et une analyse mathématique légèrement différente (nous y reviendrons dans la partie la plus mathématique du travail) mais qui s'appuie, selon nous, sur les mêmes calculs et mène aux mêmes conclusions.

La façon dont nous avons choisi de présenter ici la méthode des développements asymptotiques raccordés est le résultat d'une "re-digestion" de la littérature sur le sujet et nous semble plus adaptée au point de vue et aux techniques traditionnelles de l'école française d'analyse numérique. Ceci peut être considéré comme une contribution en soi mais, sur le fond, il apparaît également que :

- l'application des développements asymptotiques raccordés aux problèmes d'ondes en fréquence apparaît beaucoup moins répandue que dans les domaines de la mécanique du solide ou des fluides. Le livre de Bouche et Molinet [14], qui s'intéresse à un nombre important de configurations, permet de se faire une bonne idée sur l'état de l'art.
- l'analyse mathématique rigoureuse de ces méthodes dans ce contexte semble une nouveauté,
- l'utilisation à des fins numériques de cet outil analytique est restée confidentielle.

C'est donc aussi dans le fait de remplir ce triple créneau (application - théorie - numérique) que se situe la principale contribution du travail.

On peut considérer l'obtention de développements asymptotiques raccordés comme une machinerie fonctionnant sur quatre pattes dont nous allons tenter ci-dessous - avant de l'appliquer plus loin au problème qui nous intéresse - d'expliquer quelques principes de fonctionnement. Pour simplifier néanmoins, nous nous plaçons dans le contexte général de l'application que nous visons, à savoir la résolution d'une équation aux dérivées partielles en deux dimensions d'espace dans un domaine dépendant d'un petit paramètre  $\varepsilon$  de nature géométrique, dont la solution est ici notée  $u^\varepsilon$ . Certaines des généralités décrites ci-dessous pourront, par manque de précision ou de rigueur, paraître un peu obscures au lecteur mais ces points s'éclairciront au moment d'appliquer ces principes à notre problème modèle.

1. **L'utilisation de coordonnées et géométries normalisées.** On découpe le domaine de calcul initial  $\Omega^\varepsilon$  en un nombre fini de sous-domaines  $\Omega_q(\varepsilon)$  ( $q$  désigne le numéro de la zone - il y en a 3 dans l'application qui nous intéresse), lesquels sont autorisés à se recouvrir. Dans chaque zone géométrique  $\Omega_q(\varepsilon)$ , on va utiliser un jeu de coordonnées normalisées dont le premier objectif est de ramener à une géométrie "indépendante de  $\varepsilon$ " :

$$(X, Y) = \Phi_q^\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_q(\varepsilon)$$

En pratique on verra que le domaine transformé

$$\widehat{\Omega}_q(\varepsilon) = \{(X, Y) = \Phi_q^\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_q(\varepsilon)\},$$

est, typiquement du fait des hypothèses telles que (8.3), un domaine qui continue à varier, de façon croissante, avec  $\varepsilon$  mais converge vers une géométrie "canonique", indépendante de  $\varepsilon$  (qui peut être non bornée même si le domaine d'origine est borné) :

$$\widehat{\Omega}_q(\varepsilon) \rightarrow \widehat{\Omega}_q^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8.6)$$

2. **L'utilisation d'Ansatz.** Comme en théorie de l'homogénéisation par exemple, on postule un développement asymptotique (formel dans un premier temps) de la solution dans le système des coordonnées normalisées :

$$\widehat{u}_q^\varepsilon(X, Y) \equiv u^\varepsilon(\Phi_q^\varepsilon^{-1}(X, Y)) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} f_\ell(\varepsilon) \widehat{u}_q^\ell(X, Y), \quad (X, Y) \in \widehat{\Omega}_q(\varepsilon), \quad (8.7)$$

où les fonctions  $\widehat{u}_q^\ell(X, Y)$ , inconnues, sont définies dans la géométrie de référence et où les  $f_\ell(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ , que nous appellerons des fonctions de jauge, sont données a priori et vérifient :

$$f_{\ell+1}(\varepsilon) = o(f_\ell(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8.8)$$

**Remarque 8.1** *Nous avons implicitement supposé que nous utilisons les mêmes fonctions de jauge dans chaque zone. Ceci n'est toutefois pas restrictif car on peut toujours en considérer la réunion. Dans l'application qui nous concerne, les  $f_\ell(\varepsilon)$  seront elles mêmes des fonctions qui tendent vers 0 (ce n'est pas obligatoire a priori).*

**Remarque 8.2** *Le choix des fonctions de jauge  $f_\ell(\varepsilon)$  n'est pas toujours évident a priori. En première approche, on peut considérer qu'il est guidé par l'intuition ou une par une argumentation "physique" (les physiciens ou les adeptes du calcul formel peuvent voir ce choix comme*

le résultat d'un tâtonnement entre l'intuition et la mise en place des calculs). Toutefois, ces fonctions de jauge sont imposées par les dépendances spatiales de la solution (développements modaux) dans les zones de raccord, c'est à dire par les propriétés mathématiques de la solution.

3. **La traduction d'équations intérieures et de conditions aux limites.** Il s'agit, pour établir les problèmes aux limites définissant les fonctions  $\hat{u}_q^\ell(X, Y)$ , d'écrire pour ces fonctions les équations aux dérivées partielles dans  $\Omega_q^*$  et les conditions aux limites sur sa frontière, qui sont la trace des équations et conditions aux limites pour la solution exacte  $u^\varepsilon$  dans  $\Omega_q(\varepsilon)$ . Notons que ces équations et conditions aux limites ne suffiront pas, comme on l'intuit aisément, à définir de façon unique les  $\hat{u}_q^\ell$ . L'information manquante va être cherchée en imposant que les diverses fonctions  $u^\varepsilon|_{\Omega_q(\varepsilon)}$  doivent se raccorder d'un sous-domaine à l'autre. C'est cette dernière étape qui fournira les conditions permettant de coupler les différents  $\hat{u}_q^\ell$ , fournissant ainsi l'information manquante.
4. **L'écriture de condition de raccord.** C'est la partie à la fois la "moins naturelle" sur le plan conceptuel et la plus délicate sur le plan technique. C'est aussi les résultats de cette étape qui feront que les problèmes aux limites définissant les  $\hat{u}_q^\ell$  seront en général non standard. C'est enfin pour comprendre le déroulement de cette étape qu'il est nécessaire d'imaginer que deux sous-domaines connexes sont appelés à se recouvrir. Le raccord entre deux sous-domaines ne se fera donc pas, comme c'est souvent le cas en décomposition de domaine, à travers une simple surface, mais dans une zone épaisse

$$\Omega_{pq}(\varepsilon) = \Omega_p(\varepsilon) \cap \Omega_q(\varepsilon).$$

L'idée est alors que dans  $\Omega_{pq}(\varepsilon)$  les deux développements de la forme (8.7) postulés respectivement dans  $\Omega_p(\varepsilon)$  et  $\Omega_q(\varepsilon)$  doivent coïncider (on représente la même fonction!) :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} f_\ell(\varepsilon) \hat{u}_p^\ell(\Phi_p^\varepsilon(x, y)) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} f_\ell(\varepsilon) \hat{u}_q^\ell(\Phi_q^\varepsilon(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (8.9)$$

Cette identification ne se fera pas telle quelle, et c'est là que cela se complique, mais plus précisément par le biais de développements supplémentaires (penser séries entières mais ce seront plus souvent des développements généralisés) des  $\hat{u}_q^\ell$  non plus en fonction de  $\varepsilon$  (elles n'en dépendent plus explicitement) mais par rapport à leurs arguments respectifs dans l'égalité (8.9), à savoir respectivement  $\Phi_p^\varepsilon(x, y)$  et  $\Phi_q^\varepsilon(x, y)$ .

Le type de développement à utiliser sera lié au fait que, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, à la géométrie des deux sous domaines des domaines canoniques correspondant à la zone épaisse de raccord, à savoir,

$$\begin{cases} \widehat{\Omega}_{pq}^{(p)}(\varepsilon) = \Phi_p(\Omega_{pq}(\varepsilon)) \\ \widehat{\Omega}_{pq}^{(q)}(\varepsilon) = \Phi_q(\Omega_{pq}(\varepsilon)) \end{cases} \quad (8.10)$$

va "dégénérer". Typiquement, c'est la situation que nous rencontrerons :

- $\widehat{\Omega}_{pq}^{(p)}(\varepsilon)$  dégénère en un point (disons l'origine pour simplifier),
- $\widehat{\Omega}_{pq}^{(q)}(\varepsilon)$  part à l'infini (le domaine  $\widehat{\Omega}_q^*$  étant dans ce cas non borné).

Dans ce cas de figure, on utilisera des développements des  $\hat{u}_p^\ell$  pour des valeurs "petites" de leur argument et des développements des  $\hat{u}_q^\ell$  pour des valeurs "grandes" de leur argument, le choix de la forme de ces développements étant par ailleurs guidé par les équations aux

dérivées partielles satisfaites respectivement.

Au bout du compte, on est amené, via (8.9), à raccorder des développements (généralisés) en les variables  $(x, y, \varepsilon)$  dont l'identification formelle terme à terme (effectuée de façon hiérarchique en  $\varepsilon$ ) mènera aux conditions de raccord entre les  $\hat{u}_p^\ell$  et les  $\hat{u}_q^\ell$ . Dans une situation géométrique comme celle évoquée ci-dessus, ces conditions s'exprimeront sous la forme :

Le comportement des  $\hat{u}_p^\ell$  au voisinage de l'origine se raccorde au comportement des  $\hat{u}_q^\ell$  à l'infini.

En ce sens au moins, les problèmes aux limites définissant les  $\hat{u}_p^\ell$  sont non standard.

### 8.3 Vers l'application de la méthode au problème modèle

Nous décrivons ici dans un premier temps les étapes 1 et 2 en vue de l'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés au problème modèle.

#### Un découpage avec recouvrement.

Pour la suite nous nous appuyons sur un découpage du domaine de calcul légèrement différent de celui introduit dans la section 8.1, en introduisant quatre (et non plus deux) fonctions distances :

$$\begin{cases} 0 < \eta_H^-(\varepsilon) < \eta_H^+(\varepsilon), \\ 0 < \eta_S^-(\varepsilon) < \eta_S^+(\varepsilon), \end{cases} \quad (8.11)$$

que nous supposons toutes vérifier la condition  $(C_0)$  (cf (8.3)).

Les trois zones pour le développement sont alors :

$$\begin{cases} \Omega_H(\varepsilon) = \Omega_H(\eta_H^-(\varepsilon)) \\ \Omega_N(\varepsilon) = \Omega_N(\eta_H^+(\varepsilon), \eta_S^+(\varepsilon)) \\ \Omega_S(\varepsilon) = \Omega_S(\eta_S^-(\varepsilon)) \end{cases} \quad (8.12)$$

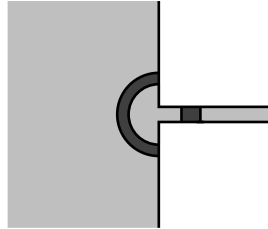


FIG. 8.2 – Les zones de raccord

Les deux régions de raccord entre zones connexes sont donc :

- une demie couronne circulaire pour le raccord champ lointain-champ proche (nous posons  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ ).

$$\Omega_{H,N}(\varepsilon) = \Omega_H(\varepsilon) \cap \Omega_N(\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} / \eta_H^-(\varepsilon) < r < \eta_H^+(\varepsilon)\}, \quad (8.13)$$

- un rectangle pour le raccord champ lointain-champ de fente

$$\Omega_{S,N}(\varepsilon) = \Omega_S(\varepsilon) \cap \Omega_N(\varepsilon) = ]\eta_S^-(\varepsilon), \eta_H^+(\varepsilon)[ \times ]0, \varepsilon[. \quad (8.14)$$

Les coordonnées normalisées.

1. **Pour le champ lointain.** Dans le domaine  $\Omega_H(\varepsilon)$ , il n'y a pas de raison de changer de coordonnées :

$$(X, Y) = (x, y) \quad \text{et} \quad \widehat{\Omega}_H(\varepsilon) = \Omega_H(\varepsilon).$$

et on note que, par passage à la "limite", il vient le domaine  $\widehat{\Omega}_H(\varepsilon)$  converge (en croissant), vers le demi espace  $\{x < 0\}$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{\Omega}_H(\varepsilon) = \widehat{\Omega}_H^* \equiv \Omega.$$

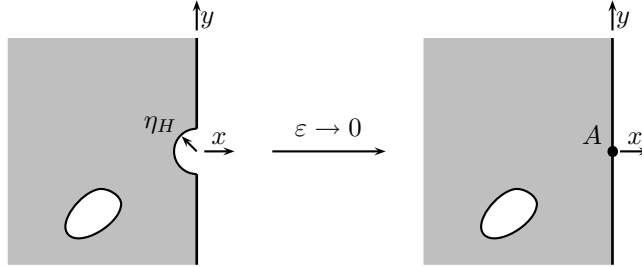


FIG. 8.3 – Domaine du champ lointain dans le demi espace

2. **Pour le champ de fente.** Dans le domaine  $\Omega_S(\varepsilon)$ , il est naturel d'appliquer un changement d'échelle - ou scaling - dans la direction  $y$  :

$$(X, Y) = (x, y/\varepsilon) \quad \text{et} \quad \widehat{\Omega}_S(\varepsilon) = ]\eta_S^-, +\infty[ \times ]0, 1[.$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, le domaine  $\widehat{\Omega}_S(\varepsilon)$  converge vers le rectangle semi-infini, ou fente normalisée :

$$\widehat{\Omega}_S^* = ]0, +\infty[ \times ]0, 1[.$$

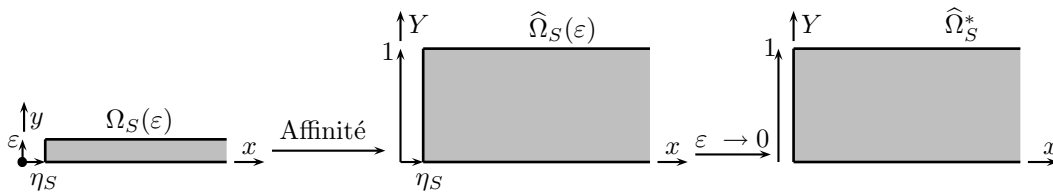


FIG. 8.4 – Domaine du champ de fente

3. **Pour le champ proche.** Dans le domaine  $\Omega_H(\varepsilon)$ , bien que la géométrie ne l'impose pas de façon naturelle, on va appliquer un scaling (en  $\varepsilon$ ) dans les deux directions  $x$  et  $y$ . En d'autres termes on examine ce domaine à la loupe. Ce choix se justifie intuitivement : pour passer continûment d'un champ qui varie à l'échelle  $O(\varepsilon)$  dans la seule direction  $y$  (dans la fente) à un champ qui varie à l'échelle  $O(1)$  dans les deux directions (dans le demi espace),

on conçoit que, dans une zone intermédiaire, le champ varie à l'échelle  $O(\varepsilon)$  dans les deux directions.

$$(X, Y) = (x/\varepsilon, y/\varepsilon).$$

Le domaine  $\widehat{\Omega}_N(\varepsilon)$  a alors la forme d'un "bouchon de champagne" qui converge, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers un domaine canonique  $\widehat{\Omega}_N^*$  infini ayant la forme d'un T.

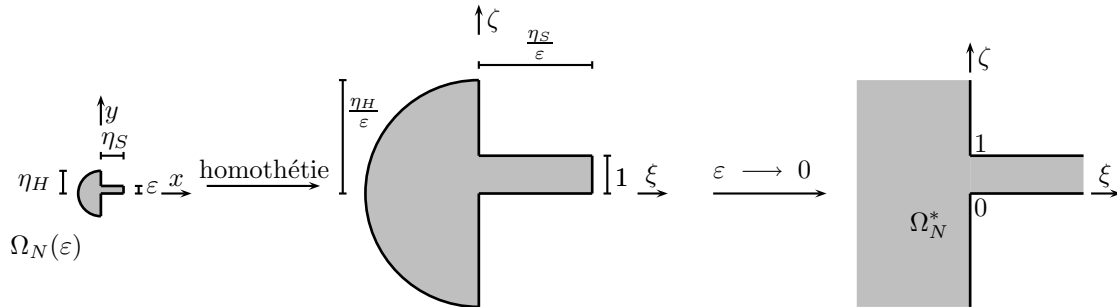


FIG. 8.5 – Domaine du champ proche

**Les Ansatz.**

Du fait que nous travaillons en dimension 2, nous sommes amenés à travailler avec des fonctions de jauge polynomiales et logarithmiques. Ainsi, il est plus naturel de représenter les fonctions  $f_\ell(\varepsilon)$  introduites dans la section précédente à l'aide d'un double indice  $(i, k)$  (deux entiers positifs) :

$$f_\ell(\varepsilon) = f_{i,k}(\varepsilon) = \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \tag{8.15}$$

En fait, on ne fera appel qu'à un sous ensemble d'indices :

$$N = \{(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / k \leq i\}, \tag{8.16}$$

qui correspond à un tableau triangulaire illustré ci-dessous (on pourra alors noter que, sauf pour  $(i, k) = (0, 0)$ , toutes les fonctions  $f_\ell(\varepsilon)$  tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ ) :

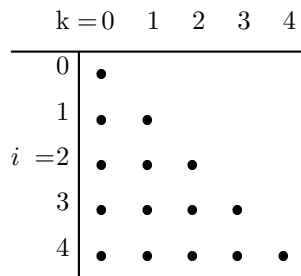


FIG. 8.6 – L'ensemble des indices  $(i, k)$

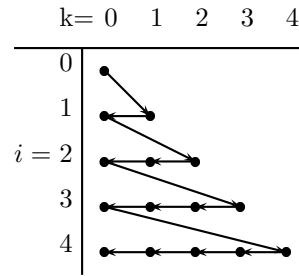


FIG. 8.7 – Le chemin  $\ell$  croissant.

Sur la figure de droite, la flèche indique le chemin à suivre lorsque l'indice  $\ell = (i+1)(i+2)/2 - k$  augmente : lorsque qu'on parcourt le tableau dans ce sens, les fonctions de jauge tendent de plus en plus vite vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

**Remarque 8.3** *Le lecteur constatera que nous avons utilisé  $\varepsilon\omega/2$  comme petit paramètre au lieu de  $\varepsilon$ . Bien sûr, ceci n'est pas fondamental mais se justifie avant tout par le fait que le produit  $\varepsilon\omega$  est sans dimension : il mesure le rapport entre l'épaisseur de la fente et la longueur d'onde. Le facteur  $1/2$  supplémentaire est davantage lié à une commodité technique : il apparaît naturellement dans les développements limités des fonctions de Bessel qui jouent un rôle important dans les calculs (voir section 10.2)*

Nous pouvons alors postuler la forme des développements asymptotiques dans chaque zone.

1. **Forme du développement du champ lointain.** Dans le domaine  $\Omega_H(\varepsilon)$ , on n'applique aucun changement de variables et nous rechercherons  $u^\varepsilon$ , sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) u_i^k + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = u_0^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) u_i^k + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (8.17)$$

où les fonctions inconnues :

$$u_i^k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad (8.18)$$

sont à déterminer.

**Remarque 8.4** *La formule ci-dessus appelle quelques commentaires supplémentaires :*

- *Contrairement à ce que nous avons écrit formellement dans la section 8.2, nous ne pouvons pas exclure la présence d'un reste convergeant vers 0 plus vite que toute puissance de  $\varepsilon$  : c'est la raison d'être du terme  $o(\varepsilon^\infty)$ . Pour notre application, il est clair qu'un tel reste est en partie dû aux modes évanescents. Il est non trivial d'obtenir la vitesse optimale de convergence (avec  $\varepsilon$ ) de ce reste.*
- *On montrera que tous les indices de l'ensemble  $N$  n'interviennent pas dans le champ lointain, mais seulement ceux du sous ensemble :*

$$N_H = \{(i, k) \in N / k < i \text{ dès que } i \geq 1\}.$$

- *Le champ  $u_0^0$  joue bien entendu un rôle particulier : il est la limite de  $u^\varepsilon$ , dans le demi espace, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous savons déjà a priori, ainsi que la première partie de l'étude l'a démontré, de la solution du problème sans fente  $u^0$ .*

2. **Forme du développement du champ de fente.** En accord avec le scaling dans la direction  $y$ , nous introduisons la nouvelle inconnue :

$$u^\varepsilon(x, y) = U^\varepsilon\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right), \quad (x, y) \in \Omega_S(\varepsilon), \quad (8.19)$$

où la fonction  $U^\varepsilon(x, Y)$  est définie dans la géométrie de référence  $\widehat{\Omega}_S^*$ . Elle est a priori recherchée sous la forme :

$$U^\varepsilon(x, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) U_i^k(x, Y) + o(\varepsilon^\infty), \quad (x, Y) \in \widehat{\Omega}_S^*. \quad (8.20)$$

où les fonctions :

$$U_i^k : \widehat{\Omega}_S^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad (8.21)$$

sont à déterminer.



3. **Forme du développement du champ proche.** En accord avec le scaling dans les directions  $x$  et  $y$ , nous introduisons la nouvelle inconnue :

$$u^\varepsilon(x, y) = \mathcal{U}^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right), \quad (x, y) \in \Omega_N(\varepsilon), \quad (8.22)$$

où la fonction  $\mathcal{U}^\varepsilon(x, Y)$  est définie dans la géométrie de référence  $\widehat{\Omega}_N^*$  (le fameux T infini). Elle est a priori recherchée sous la forme :

$$\mathcal{U}^\varepsilon(X, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \mathcal{U}_i^k(X, Y) + o(\varepsilon^\infty), \quad (X, Y) \in \widehat{\Omega}_N^*. \quad (8.23)$$

où les fonctions :

$$\mathcal{U}_i^k : \widehat{\Omega}_N^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad (8.24)$$

sont à déterminer.

Pour conclure ce paragraphe, il convient de définir ce que nous entendrons par solutions approchées. Remarquons tout d'abord que, compte tenu de la façon radicalement différente dont tendent vers 0  $\varepsilon$  et  $(\text{Log } \varepsilon)^{-1}$ , il est clair qu'on n'accordera pas la même importance aux indices  $i$  (que nous associons à une notion d'ordre de précision) et  $k$ .

- Les champs  $u_0^0$ ,  $U_0^0$  et  $\mathcal{U}_0^0$  seront appelés champs limites.
- Pour tout  $i$  strictement positif, les  $(3i + 2)$  champs

$$(u_i^k, k \leq i - 1) \text{ et } (U_i^k, \mathcal{U}_i^k, k \leq i),$$

seront appelés termes des développements asymptotiques d'ordre  $i$  et les sommes partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(\text{Log } \varepsilon) = \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k u_i^k \\ U_i(\text{Log } \varepsilon) = \sum_{k=0}^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) U_i^k \\ \mathcal{U}_i(\text{Log } \varepsilon) = \sum_{k=0}^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \mathcal{U}_i^k \end{array} \right.$$

seront appelées contributions d'ordre  $i$ , les champs  $(u_i^k, U_i^k, \mathcal{U}_i^k)$  étant les contributions secondaires d'ordre  $k$  au terme d'ordre  $i$ .

- Les candidats à fournir des solutions approchées seront alors fournies par les sommes tronquées à un ordre  $n$  des diverses contributions d'ordre  $i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\varepsilon, n} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i u_i(\text{Log } \varepsilon) \\ U^{\varepsilon, n} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i U_i(\text{Log } \varepsilon) \\ \mathcal{U}^{\varepsilon, n} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \mathcal{U}_i(\text{Log } \varepsilon) \end{array} \right.$$

### Les étapes de la suite de l'étude.

Nous décrivons ci-dessous les étapes successives de la suite de l'étude, ce qui nous fournit du même coup un plan naturel pour la suite du mémoire.

1. **Ecriture des problèmes satisfaits par les différents termes des développements asymptotiques.** Il s'agit ici de dérouler la machinerie formelle décrite aux paragraphes précédents, à savoir l'écriture des conditions aux limites satisfaites par ces termes (c'est la partie facile) et surtout les conditions de raccord entre champs lointain, champ proche et champ de fente pour un même couple  $(i, k)$  (c'est de loin la partie la plus technique, la plus difficile et ... la plus fastidieuse. Sans déflorer dès à présent les résultats de cette étape formelle, nous pouvons déjà indiquer la nature des conditions de transmission en analysant par passage à la limite le comportement des zones épaisses de raccord dans les différents systèmes de coordonnées.

- Dans les coordonnées  $(x, y)$  initiales, la couronne  $\Omega_{H,N}(\varepsilon)$  dégénère en l'origine alors que, vue avec la loupe de la zone de transition, c'est à dire dans les coordonnées  $(X, Y)$ , cette couronne "part à l'infini". On s'attend donc à ce que les conditions de raccord champ proche - champ lointain relient le comportement de  $u_i^k$  au voisinage de l'origine au comportement à l'infini (côté demi espace du T) de  $\mathcal{U}_i^k$ .

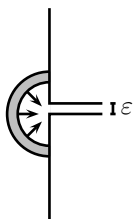


FIG. 8.8 – La zone de raccord "N-H" dans les coordonnées physiques

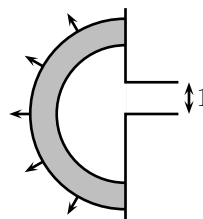


FIG. 8.9 – La zone de raccord "N-H" vue à la loupe

- Dans les coordonnées zoomées  $(X, Y)$ , le rectangle  $\Omega_{S,N}(\varepsilon)$  part à l'infini dans la fente du T dans la direction  $X > 0$  alors que dans les coordonnées  $(x, Y)$ , ce rectangle s'aplatit sur le segment  $\Sigma = 0 \times ]0, 1[$ , c'est à dire l'embouchure de la fente semi-infinie normalisée  $\widehat{\Omega}_S^*$ . On s'attend donc à ce que les conditions de raccord champ proche - champ de fente relient le comportement de  $U_i^k$  au voisinage de  $\Sigma$  (quand  $X$  tend vers 0) au comportement à l'infini (côté fente du T) de  $\mathcal{U}_i^k$ .

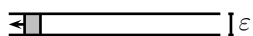


FIG. 8.10 – La zone de raccord "N-S" dans les coordonnées physiques



FIG. 8.11 – La zone de raccord "N-S" vue à la loupe

Compte tenu de la relative complexité de cette étape fondamentale tant en termes de notations que des calculs proprement dits, nous avons choisi de découper sa présentation en deux parties. La seconde peut être omise en première lecture ce qui devrait permettre, selon nous, d'améliorer la compréhension de l'exposé :

- Au chapitre 9, nous nous contenterons de présenter sans explication préalable, les problèmes aux limites couplés satisfaits par les  $(u_i^k, U_i^k, \mathcal{U}_i^k)$ .
- Au chapitre 10, nous détaillerons les calculs qui mènent à l'obtention de ces problèmes et sous-tendent en fait l'ensemble de l'étude.

2. **Étude du caractère bien posé des problèmes satisfaits par les termes des développements asymptotiques.** Cette étape est bien entendu un préalable indispensable à l'analyse d'er-

reur. Elle implique en particulier de mettre en place un cadre fonctionnel adapté et d'appliquer un traitement particulier aux conditions de raccord, lesquelles sont non classiques. On se référera ici au chapitre 11.

3. **Analyse d'erreur des développements asymptotiques raccordés.** C'est la partie fondamentale de l'analyse théorique qui vise à justifier les développements asymptotiques, c'est à dire que, dans des normes convenablement choisies, l'erreur commise par les développements lorsqu'on les tronque à un ordre donné est bien de l'ordre du premier terme négligé. C'est dans cette phase de l'étude qu'on adoptera un point de vue proche de celui des méthodes multiéchelles via l'introduction de fonctions de troncature adaptées. C'est aussi cette phase du travail qui se rapproche le plus du travail théorique réalisé dans la première partie de la thèse : on réutilisera explicitement les outils et arguments mathématiques déjà exploités dans cette première partie. On se référera ici au chapitre 12.
  
4. **Calcul numérique des termes des développements asymptotiques.** Les problèmes aux limites définissant étant non classiques, leur résolution numérique nécessitera le développement de méthodes adaptées en particulier pour ce qui concerne le problème en champ proche dans la zone bouchon, pour lequel nous avons choisi de passer par une méthode d'équations intégrales spécifique. Signalons ici que :
  - Le calcul numérique des termes des développements asymptotiques s'effectuant dans des géométries indépendantes de  $\varepsilon$ , la précision de ce calcul ne devrait pas être entachée par l'existence du petit paramètre  $\varepsilon$ .
  - Il se pose également en pratique le choix des distances  $\eta_H$  et  $\eta_S$  ou, en d'autres termes, la position des zones de recouvrement. Notons que ce choix n'a pas d'influence sur le calcul numérique des  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ , lequel se fait dans des géométries canoniques, mais influe sur la représentation de la solution. Il semble bien que la détermination de la bonne position de la zone de transmission ne peut se faire qu'une fois que le calcul numérique est effectué : la "bonne" zone de recouvrement est alors celle dans laquelle, après reconstitution des séries tronquées, champ proche et champ lointain (ou champ proche et champ de fente) coïncident "le mieux".

## Chapitre 9

# Présentation des problèmes satisfaits par les termes des développements asymptotiques

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Remarques générales sur la structure des problèmes . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>9.2</b>	<b>Les problèmes couplés. . . . .</b>	<b>120</b>
9.2.1	Matériel préliminaire. . . . .	120
9.2.2	Les champs limites . . . . .	127
9.2.3	Problèmes aux limites généralisés pour les termes d'ordre $i$ . . . . .	127
<b>9.3</b>	<b>Résolution du problème couplé . . . . .</b>	<b>129</b>
9.3.1	Résultat préliminaire . . . . .	129
9.3.2	Unicité de la solution du problème couplé . . . . .	133
9.3.3	Existence de la solution du problème couplé . . . . .	135
9.3.4	Cas particuliers où les termes des développements asymptotiques s'expriment de façon simple . . . . .	137
9.3.5	Application au calcul numérique . . . . .	138
<b>9.4</b>	<b>Les ordres 1 et 2. . . . .</b>	<b>141</b>
9.4.1	Résultats préliminaires : partie régulière pour le champ lointain . . . . .	141
9.4.2	Les termes d'ordre 1 . . . . .	141
9.4.3	Les termes d'ordre 2 . . . . .	143

---

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous présentons les divers problèmes permettant de définir ou de caractériser les termes des développements asymptotiques de la solution. Dans chaque zone (lointain, proche, fente), ces problèmes apparaissent comme des problèmes de transmission qui ne sont pas classiques dans la mesure où les raccords se font par des conditions de raccord pontuel ou à l'infini (conditions de radiation généralisée). La section 9.1 essaye de dégager une structure et une algorithmique générale pour ces problèmes, ceux-ci sont présentés en détail à la section 9.2. A la section 9.3, nous démontrons que ces problèmes sont bien posés en s'appuyant sur des résultats canoniques qui sont établis au chapitre 11. Enfin, à la section 9.4, nous donnons une présentation simplifiée des problèmes des termes d'ordre 1 et 2.

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les problèmes aux limites qui permettent de définir les différents termes des développements asymptotiques. Les calculs formels, menant à leurs définitions, sont renvoyés au chapitre 10. En outre, les estimations d'erreur associées pourront être trouvées au chapitre 12.

Un lecteur provenant d'une communauté formelle pourra se contenter de la lecture des chapitres 9 et 10. Toutefois, il perdra l'explication mathématique des développements asymptotiques raccordés. Cette approche rigoureuse reste, selon nous, la véritable justification des raccords introduits dans ce chapitre.

Un lecteur mathématicien pourra, quant à lui, se contenter de la lecture des chapitres 9 (11) et 12. Il aura ainsi un ensemble suffisant pour la compréhension du raccord. En deuxième lecture, il pourra consulter le chapitre 10 pour comprendre les idées qui nous ont permis de nous forger une intuition sur ce sujet technique.

### Plan du chapitre

Pour permettre une meilleure vue générale, nous avons choisi de donner des propriétés générales de ces problèmes dans la section 9.1, notamment pour dégager une structure algorithmique en vue des applications numériques. Puis nous présentons les problèmes définissant les termes des développements asymptotiques d'ordre  $i$  quelconque (section 9.2). Nous montrons (section 9.3) alors pourquoi ces problèmes sont bien posés (la plupart des éléments d'analyse associés à cette preuve étant rejetés au chapitre 11). Enfin (section 9.4), nous revenons successivement sur les problèmes vérifiés par les ordres 1 et 2 (on pourra trouver les champs limites au paragraphe 9.2.2).

## 9.1 Remarques générales sur la structure des problèmes

Des calculs qui seront menés au chapitre suivant, on déduira successivement :

1. Les problèmes définissant les champs limites. En fait, vue leur extrême simplicité, les problèmes définissant les champs limites (lointain  $u_0^0$ , proche  $\mathcal{U}_0^0$  et de fente  $U_0^0$ ) se résoudreont à la main et on pourra directement en donner une expression analytique.
2. Les problèmes définissant les termes des développements asymptotiques d'ordre  $i > 0$  ( $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$  pour  $k \leq i$ ) à partir des termes d'ordre  $j < i$ . De façon plus précise, pour chaque  $(i, k)$  donné dans  $N$ ,
  - Le triplet  $(u_i^k, \mathcal{U}_i^k, U_i^k)$  sera solution d'un problème linéaire dont les données seront fournies par les  $u_{i'}^{k'}$ ,  $\mathcal{U}_{i'}^{k'}$  et  $U_{i'}^{k'}$  pour  $(i', k')$  dans l'ensemble :

$$\{(i', k') \in N / i' \leq i \text{ et } k' \in \{k, k-1\}\} \setminus \{(i, k)\}. \quad (9.1)$$

ce que nous schématisons sous la forme suivante :

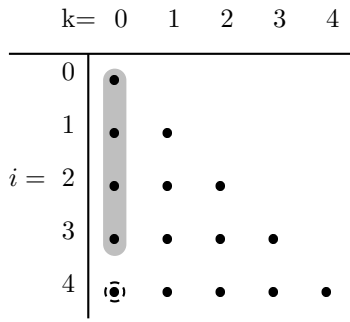


FIG. 9.1 – Dépendance des termes des développements asymptotiques ( $k = 0$ )

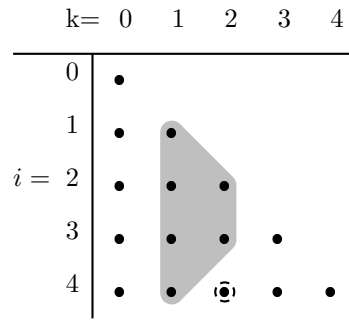


FIG. 9.2 – Dépendance des termes des développements asymptotiques ( $k \geq 1$ )

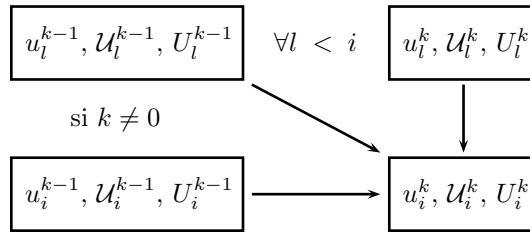


FIG. 9.3 – Diagramme de dépendance.

- Comme c'était déjà le cas pour les champs limites, certains des termes des développements asymptotiques auront une forme très simple. Ainsi :
  - On montrera que, tous les champs  $u_i^i$  sont nuls dès que  $i \geq 1$ . De façon plus générale, pour chaque  $i$ , les  $u_i^k$  pourront être caractérisés comme un élément particulier d'un espace  $E_{i-k}$  de dimension  $i - k$  de fonctions définies dans  $\Omega$  (dont on donnera une base via la résolution de  $i$  problèmes aux limites généralisés dans  $\Omega$ )
  - On montrera que, tous les champs  $U_i^i$  sont constants. De façon générale, pour chaque  $i$  on peut établir l'existence un espace  $\mathcal{E}_i$  de dimension finie de fonctions définies dans  $\widehat{\Omega}_N^*$  tel que  $U_i^k$  appartient à  $\mathcal{E}_i$  pour tout  $k \leq i$ .
  - Du fait qu'ils satisfont une équation de Helmholtz 1-D homogène, les  $U_i^k$  sont de la forme :

$$U_i^k = U_i^k(0) \exp i\omega x.$$

- L'ordre dans lequel on va décrire les  $(i, k) \in N$  pour le calcul correspond donc à la figure suivante :

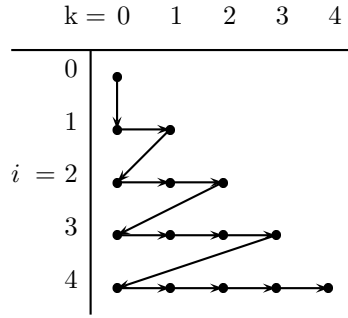


FIG. 9.4 – L'ordre naturel pour les calculs

Notons que cet ordre ne correspond pas à l'ordre naturel associé aux fonctions de jauge  $f_{i,k}$  (voir figure 8.7).

Pour tout  $(i, k)$  fixé, le problème définissant  $(u_i^k, \mathcal{U}_i^k, U_i^k)$  apparaît d'abord comme un problème couplé. Nous montrerons dans une deuxième étape qu'on parvient à découpler ces problèmes de façon à ce qu'ils se calculent dans l'ordre champ lointain puis champ proche puis champ de fente, ce qui correspond au schéma ci-dessous :

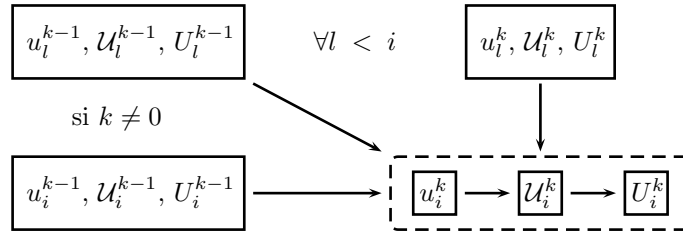


FIG. 9.5 – L'organigramme des calculs après découplage

## 9.2 Les problèmes couplés.

### 9.2.1 Matériel préliminaire.

Quand  $i$  augmente, l'écriture des problèmes définissant les  $u_i^k, \mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$  devient de plus en plus compliquée et il apparaît utile d'introduire quelques notations et résultats préliminaires pour en faciliter la lecture. Ainsi, l'introduction de formes linéaires permet d'éviter d'introduire formellement les notions de *parties régulières* des champs lointains (section 9.4) et *non croissantes* pour le champ proche, lesquelles sont de plus en plus complexes à définir.

#### Le champ lointain

Il est utile d'introduire un espace fonctionnel "de fonctions  $H_{loc}^1$  sauf au voisinage de l'origine" dont la définition repose sur un espace de fonctions de troncature "nulles au voisinage de l'origine" :

$$\Phi_0 = \{\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}) / \exists r_0 > 0 \text{ tel que } |\mathbf{x}| \leq r_0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (9.2)$$

On définit alors l'espace (non hilbertien) :

$$H_{0,loc}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / \forall \varphi \in \Phi_0, \quad \varphi u \in H^1(\Omega)\}. \quad (9.3)$$

**Remarque 9.1** On notera que la grande différence entre l'espace  $H_{0,loc}^1(\Omega)$  et l'espace  $H_{loc}^1(\Omega)$  (sous-espace du précédent) réside dans le fait qu'une fonction de  $H_{0,loc}^1(\Omega)$  peut être arbitrairement singulière au voisinage de l'origine.

**Définition 9.2** On dira qu'une fonction  $u$  dans  $H_{0,loc}^1(\Omega)$  satisfaisant l'équation de Helmholtz homogène :

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (9.4)$$

vérifie la condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{0\} \quad (9.5)$$

si et seulement si (on renvoie à (3.126)) pour la définition de  $H_{00}^1(\Omega)$  :

$$\forall v \in H_{00}^1(\Omega) \text{ à support compact, } \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 u v) dx = 0. \quad (9.6)$$

Bien entendu, par régularité elliptique standard, une telle fonction est nécessairement de classe  $C^\infty$  en dehors de tout voisinage de l'origine et la condition de Neumann homogène est bien vérifiée au sens classique des fonctions sauf à l'origine.

Par ailleurs, dans la suite, on désignera par  $(r, \theta)$  le système de coordonnées polaires associé à la figure 9.6 :

$$x = -r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta. \quad (9.7)$$

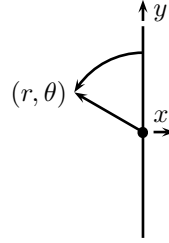


FIG. 9.6 – Les coordonnées polaires du champ lointain

Les nombres  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$ .

L'écriture des problèmes aux limites définissant les  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$  va faire appel à deux suites (à double indice) de nombres complexes  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$ . Pour tout  $p \geq 0$  donné, les suites

$$(J_{p,l})_{l \geq p} \text{ et } (Y_{p,l})_{l \geq -p}$$

sont directement reliées aux coefficients des développements en  $(z/2)^l$  et  $(z/2)^l \text{Log } z/2$  des fonctions de Bessel  $J_p(z)$  et de Neumann  $Y_p(z)$  d'ordre  $p$  :

$$\begin{cases} J_p(z) = \sum_{l=p}^{+\infty} J_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l, \\ Y_p(z) = \sum_{l=-p}^{+\infty} Y_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l + \sum_{l=p}^{+\infty} \frac{2}{\pi} J_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l \text{Log } \frac{z}{2}. \end{cases} \quad (9.8)$$



**Remarque 9.3** Les suites  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$  sont parfaitement connues (voir section A.2). Elle vérifient en particulier :

$$J_{p,l} = 0 \text{ pour } p+l \text{ impair, } Y_{p,l} = 0 \text{ pour } p+l \text{ impair.}$$

Pour la suite, notamment dans un souci de simplification des notations, il sera utile de définir  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$  pour  $l$  entier relatif avec la convention :

$$J_{p,l} = 0, \text{ pour } l < p, \quad Y_{p,l} = 0, \text{ pour } l < -p. \quad (9.9)$$

En particulier, si on se restreint aux indices positifs, la matrice infinie des  $J_{p,l}$  est triangulaire supérieure.

Formes linéaires associées au domaine  $\Omega$ .

Etant donné un entier  $N \geq 0$ , on désigne par  $\mathcal{R}_N$  le sous-espace de  $H_{0,loc}^1(\Omega)$  des fonctions  $u$  pour lesquels les limites :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi Y_p(\omega r)} \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \, d\theta \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-(\omega r)^p}{2^{p-1} (p-1)!} \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \, d\theta \quad (9.10)$$

existent dans  $\mathbb{C}$  pour tout  $p \leq N$ . On définit ainsi des espaces vectoriels emboîtés ( $\mathcal{R}_{N+1} \subset \mathcal{R}_N$ ) et on posera :

$$\mathcal{R}_\infty = \bigcap_{N=0}^{+\infty} \mathcal{R}_N. \quad (9.11)$$

On peut alors définir les formes linéaires :

$$\mathcal{L}_p^0(u) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi Y_p(\omega r)} \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \, d\theta, \quad \forall u \in \mathcal{R}_p. \quad (9.12)$$

On définit ensuite le sous-espace  $\tilde{\mathcal{R}}_N$  de  $\mathcal{R}_N$  des fonctions  $u \in \mathcal{R}_N$  telles que les limites :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi J_p(\omega r)} \int_0^\pi [u(r, \theta) - \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \cos p\theta] \cos p\theta \, d\theta, \quad (9.13)$$

ou, de façon équivalente :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2^{p+1} p!}{\pi (\omega r)^p} \int_0^\pi [u(r, \theta) - \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \cos p\theta] \cos p\theta \, d\theta, \quad (9.14)$$

existent dans  $\mathbb{C}$  pour tout  $p \geq N$ . On notera que, à nouveau,  $\tilde{\mathcal{R}}_{N+1} \subset \tilde{\mathcal{R}}_N$  et on pose de même :

$$\tilde{\mathcal{R}}_\infty = \bigcap_{N=0}^{+\infty} \tilde{\mathcal{R}}_N \quad (9.15)$$

Comme pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{R}}_N \subset \mathcal{R}_N$ , nous avons aussi l'inclusion :

$$\tilde{\mathcal{R}}_\infty \subset \mathcal{R}_\infty. \quad (9.16)$$

On peut alors définir la forme linéaire :

$$\mathcal{L}_p^1(u) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi J_p(\omega r)} \int_0^\pi [u(r, \theta) - \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \cos p\theta] \cos p\theta \, d\theta, \quad \forall u \in \tilde{\mathcal{R}}_p. \quad (9.17)$$

L'introduction des espaces  $\mathcal{R}_p$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_p$  ainsi que des formes linéaires  $\mathcal{L}_p^0$  et  $\mathcal{L}_p^1$  peut ne pas paraître très naturelle en première lecture. En fait, elle est très liée à l'équation de Helmholtz homogène et s'impose naturellement quand on mène des calculs par la méthode de séparation de variables

(voir chapitre 11).

Considérons l'exemple, particulièrement instructif car il concerne l'ensemble des champs lointains  $u_i^k$ , des fonctions de la forme ( $N$  désignant un entier) :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^N \left( a_p J_p(\omega r) + b_p Y_p(\omega r) \right) \cos p\theta + o(r^N), \quad (9.18)$$

Il est facile de voir qu'une telle fonction appartient à l'espace  $\widetilde{\mathcal{R}}_N$  et que :

$$\forall p \leq N, \quad \mathcal{L}_p^0(u) = b_p, \quad \mathcal{L}_p^1(u) = a_p. \quad (9.19)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que :

$$\int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left( a_p J_p(\omega r) + b_p Y_p(\omega r) \right) + o(r^N) \quad (9.20)$$

et d'utiliser le fait que, pour  $r$  petit :

$$J_p(\omega r) \sim \frac{1}{p!} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^p, \quad Y_p(\omega r) \sim (-1)^p \frac{(p-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{\omega r} \right)^p, \quad r \rightarrow 0. \quad (9.21)$$

De façon plus générale on a le :

**Lemme 9.4** *Si  $u \in H_{0,loc}^1(\Omega)$  satisfait l'équation de Helmholtz homogène*

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } 0 < |\mathbf{x}| < R \quad (9.22)$$

*pour un certain  $R > 0$ , ainsi que la condition de Neumann homogène*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \text{pour } 0 < |y| < R, \quad (9.23)$$

*alors  $u$  appartient à l'espace  $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty$ .*

Dit autrement, nous pouvons appliquer les formes linéaires  $\mathcal{L}_p^0$  et  $\mathcal{L}_p^1$  à toute fonction solution, au voisinage de l'origine, de l'équation de Helmholtz homogène vérifiant la condition aux limites de Neumann (avec une éventuelle singularité à l'origine).

Pour clore ce paragraphe, intéressons nous à l'action des formes linéaires  $\mathcal{L}_p^0$  et  $\mathcal{L}_p^1$  sur les fonctions régulières au voisinage de l'origine, c'est à dire des fonctions de  $H_{loc}^1(\Omega)$  qui sont de classe  $C^\infty$  dans  $\overline{\Omega}_R$ , où  $R$  désigne un scalaire plus petit que la distance de l'origine à l'obstacle. La première observation est qu'une telle fonction  $u$  appartient à  $\mathcal{R}_\infty$  (même si elle n'est pas une solution de l'équation de Helmholtz homogène) et vérifie

$$\mathcal{L}_p^0(u) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

En revanche, en général une fonction régulière au voisinage de l'origine n'appartient même pas à l'espace  $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ . Toutefois, dès que  $u$  satisfait dans  $\Omega_R$  l'équation de Helmholtz homogène et la condition de Neumann homogène en  $x = 0$ ; alors, d'après le lemme 9.4,  $u$  appartient à l'espace  $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty$ . De plus, pour tout  $p$ , l'action des formes linéaires  $\mathcal{L}_p^1$  revient à considérer des combinaisons de valeurs à l'origine de dérivées successives de la fonction  $u$  par rapport à la variable  $y$ .

En effet, par séparation des variables, une telle fonction  $u$  admet au voisinage de l'origine, pour tout entier  $N$ , un développement du type :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^N a_p J_p(\omega r) \cos p\theta + o(r^N) \quad (9.24)$$

et par conséquent d'après ce que nous avons vu plus haut, :

$$u \in \widetilde{\mathcal{R}}_N \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_p^1(u) = a_p, \quad \forall p \leq N. \quad (9.25)$$

Or,  $u$  étant régulière,

$$u(0, y) = \sum_{l=0}^N \frac{y^l}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial y^l}(0) + o(y^N). \quad (9.26)$$

Par ailleurs, en faisant  $\theta = 0$  et  $r = y$  dans (9.24)

$$u(0, y) = \sum_{p=0}^N a_p J_p(\omega y) + o(y^N), \quad (9.27)$$

c'est à dire, compte tenu de (9.8),

$$u(0, y) = \sum_{p=0}^N a_p \left[ \sum_{l=p}^N J_{p,l} \left( \frac{\omega y}{2} \right)^l \right] + o(y^N), \quad (9.28)$$

soit, après réarrangement de la somme :

$$u(0, y) = \sum_{l=0}^N \left( \frac{\omega y}{2} \right)^l \left[ \sum_{p=0}^l J_{p,l} a_p \right] + o(y^N). \quad (9.29)$$

Par identification de (9.26) et (9.29), nous obtenons le "système" triangulaire infini en les  $a_p$  :

$$\sum_{p=0}^l J_{p,l} a_p = \frac{1}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{\partial^l u}{\partial y^l}(0), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (9.30)$$

Si on introduit la "matrice" inverse de la transposée de la matrice des  $J_{p,l}$  (triangulaire inférieure), à savoir la matrice (infinie) triangulaire inférieure  $G_{p,l}$  (qui vérifie donc  $G_{p,l} = 0$  pour  $p > l$ ) telle que :

$$\sum_{l=0}^p G_{q,l} J_{p,l} = \delta_{pq}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

on déduit de ce qui précède que :

$$\mathcal{L}_p^1(u) = \sum_{q=0}^p G_{p,q} \frac{1}{q!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^q \frac{\partial^q u}{\partial y^q}(0), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (9.31)$$

Bien entendu, les  $G_{p,l}$  se calculent aisément de proche en proche. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} G_{0,0} = 1, \\ G_{1,0} = 0, \quad G_{1,1} = 1 \\ G_{2,0} = 2, \quad G_{2,1} = 0, \quad G_{2,2} = 2, \dots \end{cases} \quad (9.32)$$

ce qui nous donne, pour les trois premières formes linéaires  $\mathcal{L}_p^1$  appliquées à une fonction  $u$  régulière :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0^1(u) = u(\mathbf{0}), \\ \mathcal{L}_1^1(u) = \frac{2}{\omega} \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{0}), \\ \mathcal{L}_2^1(u) = 2 u(\mathbf{0}) + \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{0}). \end{cases} \quad (9.33)$$

**Le champ proche**

Dans la suite, on désignera par  $(\rho, \theta)$  le système de coordonnées polaires associé aux variables  $(X, Y)$  tel que :

$$X = -\rho \sin \theta, \quad Y = \rho \cos \theta. \quad (9.34)$$

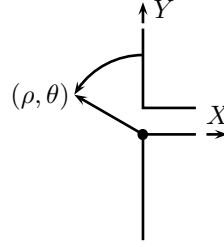


FIG. 9.7 – Les coordonnées polaires du champ proche

Formes linéaires associées au domaine  $\widehat{\Omega}_N^*$ .

Nous en distinguons deux classes. Pour définir la première classe, on désigne par  $\mathcal{P}$  l'espace vectoriel de fonctions de la variable  $\rho \in ]0, +\infty[$  qui sont la somme d'un polynôme en  $\rho$  et d'un polynôme en  $1/\rho$ . Pour ce qui suit on rappelle qu'une suite de nombres complexes  $(\beta_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  est dite *presque nulle* si seulement si les  $\beta_l$  non nuls sont en nombre *fini*.

$$\mathcal{P} = \{f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} / \exists (\beta_l)_{l \in \mathbb{Z}} \text{ presque nulle telle que } f(\rho) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l \rho^l \} \quad (9.35)$$

On désigne par  $\mathcal{P}_{log}$  l'espace des fonctions de la forme  $g(\rho) = \text{Log } \rho f(\rho)$ ,  $f$  décrivant l'ensemble des polynômes de la variable  $\rho$ . Autrement dit :

$$\mathcal{P}_{log} = \{g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} / \exists (\alpha_l)_{l \in \mathbb{N}} \text{ presque nulle telle que } g(\rho) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l \rho^l \text{Log } \rho \}. \quad (9.36)$$

Finalement, nous désignons par  $\mathcal{Q}_{log}$  la somme de ces deux sous-espaces :

$$\mathcal{Q}_{log} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_{log} = \{h = f + g, f \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{P}_{log}\}. \quad (9.37)$$

Sur l'espace  $\mathcal{Q}_{log}$ , nous définissons une famille dénombrable de formes linéaires (qui s'annulent respectivement sur  $\mathcal{P}_{log}$  et  $\mathcal{P}$ ) :

$$\left| \begin{array}{l} p_q^0 : \quad \mathcal{Q}_{log} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ h(\rho) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l \rho^l + \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l \rho^l \text{Log } \rho \quad \longrightarrow \quad \beta_q \equiv p_q^0(h) \end{array} \right. \quad (9.38)$$

$$\left| \begin{array}{l} p_q^1 : \quad \mathcal{Q}_{log} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ h(\rho) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l \rho^l + \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l \rho^l \text{Log } \rho \quad \longrightarrow \quad \alpha_q \equiv p_q^1(h) \end{array} \right. \quad (9.39)$$

Ces formes linéaires seront en pratique appliquées à des fonctions définies sur  $\widehat{\Omega}_N^*$ . Plus précisément, étant donné  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$ , on peut pour tout entier  $p$  définir les fonctions de la variable  $\rho > 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{U})^0(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho, \theta) d\theta, & \text{si } p = 0, \\ (\mathcal{U})^p(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho, \theta) \cos p\theta d\theta, & \text{si } p \geq 1. \end{array} \right. \quad (9.40)$$

On peut alors introduire le sous-espace de  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  défini par :

$$\mathcal{Q}_{log}^{2D}(\widehat{\Omega}_N^*) = \{ \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) / \forall p \geq 0, (\mathcal{U})^p \in \mathcal{Q}_{log} \}, \quad (9.41)$$

sur lesquels on peut définir les formes linéaires ( $q \in \mathbb{N}$ ) :

$$\left| \begin{array}{l} \ell_q^0 : \mathcal{Q}_{log}^{2D}(\widehat{\Omega}_N^*) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{U} \longrightarrow \ell_q^0(\mathcal{U}) = \begin{cases} p_0^1(\mathcal{U}^0) (\pi/2), & \text{si } q = 0, \\ p_{-q}^0(\mathcal{U}^q)/Y_{q,-q}, & \text{si } q \neq 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (9.42)$$

$$\left| \begin{array}{l} \ell_q^1 : \mathcal{Q}_{log}^{2D}(\widehat{\Omega}_N^*) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{U} \longmapsto \ell_q^1(\mathcal{U}) = \left( p_q^0((\mathcal{U})^q) - \frac{\pi Y_{q,q}}{2 J_{q,q}} p_q^1((\mathcal{U})^q) \right) / J_{q,q}. \end{array} \right. \quad (9.43)$$

Le lemme suivant nous permettra dans la suite de donner un sens au problème qui définit les termes des développements asymptotiques :

**Lemme 9.5** *Si  $((\mathcal{U}_i))_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille de fonctions  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  qui vérifie la famille d'équations emboîtées (où  $\mathcal{U}_{-2} = 0$  et  $\mathcal{U}_{-1} = 0$ )*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathcal{U}_i = -4 \mathcal{U}_{i-2}, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \end{array} \right. \quad (9.44)$$

alors chaque  $\mathcal{U}_i$  est un élément de  $\mathcal{Q}_{log}^{2D}(\widehat{\Omega}_N^*)$  et vérifie ( $\rho > 1$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{U}_i)^p(\rho) = \sum_{q=0}^i \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-q}) \left( Y_{p,-p+q} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+q} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+q} \\ + \sum_{q=0}^i \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-q}) J_{p,p+q} \rho^{p+q}. \end{array} \right. \quad (9.45)$$

Forme linéaire associée à la fente :

Introduisons le sous espace de  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  des fonctions  $\mathcal{U}$  telles que :

$$\int_0^1 \mathcal{U}(X, Y) dY \quad (9.46)$$

est un polynôme. Sur cet espace nous introduisons la deuxième classe de formes linéaires :

$$D^l : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}, \\ \mathcal{U} \longmapsto \left[ \frac{d^l}{dX^l} \int_0^1 \mathcal{U}(X, Y) dY \right] (X = 0). \end{array} \right. \quad (9.47)$$

Le lemme suivant nous permettra dans la suite de donner un sens au problème qui définit les termes des développements asymptotiques :

**Lemme 9.6** *Si  $((\mathcal{U}_i))_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille de fonctions  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  qui vérifie la famille d'équations emboîtées (où  $\mathcal{U}_{-2} = 0$  et  $\mathcal{U}_{-1} = 0$ )*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathcal{U}_i = -4 \mathcal{U}_{i-2}, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \end{array} \right. \quad (9.48)$$

alors la fonction :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{C}, \\ X & \longmapsto \int_0^1 \mathcal{U}_i(X, Y) dY, \end{cases} \quad (9.49)$$

est un polynôme de la variable  $X$ .

### 9.2.2 Les champs limites

Ces champs sont particulièrement simples dans leurs formes et faciles à intuitier.

#### Le champ lointain

Comme attendu et déjà annoncé,  $u_0^0 \equiv u^0$ , la solution du problème dans  $\Omega$ , sans fente :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^0 \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que :} \\ -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.50)$$

#### Le champ proche.

Ce champ est constant et donné par la valeur à l'origine du champ lointain limite :

$$\mathcal{U}_0^0(X, Y) = u^0(\mathbf{0}), \quad (X, Y) \in \widehat{\Omega}_N^*. \quad (9.51)$$

#### Le champ de fente.

C'est simplement le résultat du transport dans la fente de la valeur à l'origine du champ lointain limite.

$$U_0^0(x, Y) = u^0(\mathbf{0}) \exp i\omega x, \quad (x, Y) \in \widehat{\Omega}_S^*. \quad (9.52)$$

### 9.2.3 Problèmes aux limites généralisés pour les termes d'ordre $i$ .

Pour des raisons de commodités, nous notons dans la suite pour tout  $(i, k) \notin N$  :

$$\begin{cases} u_i^k \equiv 0, \\ \mathcal{U}_i^k \equiv 0, \\ U_i^k \equiv 0. \end{cases} \quad (9.53)$$

Pour  $(i, k) \in N$  ( $0 \leq k \leq i$ ) et  $i \geq 1$ , nous définissons ici les  $u_i^k, \mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ . On peut alors caractériser ce triplet comme la solution unique du problème aux limites généralisé suivant (problème de Helmholtz homogène dans le demi espace avec condition de Neumann et condition de singularité à l'origine pour  $u_i^k$ ; problème de Laplace pour  $\mathcal{U}_i^k$  avec condition de Neumann et condition de croissance à l'infini pour  $U_i^k$ ; problème de Helmholtz 1D pour  $U_i^k$ ) :

Etant donné pour  $(i', k') \in N$  tels que  $i' \leq i$ ,  $k' \in \{k; k-1\}$  et  $(i', k') \neq (i, k)$  les triplets  $(u_{i'}^{k'}, \mathcal{U}_{i'}^{k'}, U_{i'}^{k'})$ , chercher  $(u_i^k, \mathcal{U}_i^k, U_i^k) \in H_{0,loc}^1(\Omega) \times H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \times H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_S^*)$  tels que

$$\begin{cases} \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_i^k}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (\text{au sens de 9.2}), \\ u_i^k \text{ est sortante,} \\ u_i^k - \sum_{p=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_p(\omega r) \cos p\theta \in H_{loc}^1(\Omega), \end{cases} \quad (9.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U}_i^k = -4 \mathcal{U}_{i-2}^k, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right] \right\} = 0, \\ \mathcal{U}_i^k(X, Y) - \sum_{l=1}^{i-k} \frac{X^l}{l!} D^l(\mathcal{U}_i^k) \quad \text{est bornée quand } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (9.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U_i^k}{dx^2} + \omega^2 U_i^k = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_S^*, \\ U_i^k \text{ est sortante et ne dépend pas de } y. \end{array} \right. \quad (9.56)$$

avec le couplage entre champ lointain et champ proche ( $0 \leq p \leq i - k$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = l_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k), \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}), \end{array} \right. \quad (9.57)$$

et le couplage entre le champ proche et champ de fente ( $0 \leq l \leq i - k$ ) :

$$D^l(\mathcal{U}_i^k) = \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l U_{i-l}^k}{dx^l}(0), \quad (9.58)$$

**Remarque 9.7** Les formes linéaires que nous appliquons à  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$  ont bien un sens. Il nous est donné par les lemmes 9.4, 9.5 et 9.6.

**Remarque 9.8** La relation (9.57) (resp. (9.58)) couple le champ lointain et le champ proche (resp. le champ proche et le champ de fente). C'est ici que l'on peut véritablement comprendre le terme "raccordés" de développements asymptotiques raccordés.

**Remarque 9.9** Les relations de couplage (9.57) (resp. (9.58)) nous fournissent  $i - k$  conditions de couplage. Classons les en deux catégories. La première catégorie, correspondant à  $p = 0$ , (resp.  $l = 0$ ) met en jeu à la fois les fonctions  $u_i^k$  et  $\mathcal{U}_i^k$  (resp.  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ ) avec elles-mêmes. Elle constitue de vraies relations de couplage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = l_p^0(\mathcal{U}_i^k), \\ l_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_i^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_i^{k-1}), \end{array} \right. \quad (9.59)$$

respectivement :

$$D^0(\mathcal{U}_i^k) = U_i^k(0), \quad (9.60)$$

La deuxième catégorie correspond aux  $p$  tels que  $0 < p \leq i - k$  (resp.  $l$  tels que  $0 < l \leq i - k$ ). Elle met en jeu, d'une part,  $u_i^k$  et  $\mathcal{U}_i^k$  (resp.  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ ) et, d'autre part, les  $u_{i-p}^k$  et  $\mathcal{U}_{i-p}^k$  (resp.  $\mathcal{U}_{i-l}^k$  et  $U_{i-l}^k$ ). Il est naturel de les considérer comme des données.

**Remarque 9.10** La limite introduite en (9.55) doit être prise au sens :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}(\rho, \theta) \right\} = \lambda \in \mathbb{C} \iff \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{\theta \in [0; \pi]} |\mathcal{U}(\rho, \theta) - \lambda| \right] = 0. \quad (9.61)$$

Par régularité elliptique, on montre par récurrence que  $\mathcal{U}_i^k$  est de classe  $C^\infty(\cdot; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ . Il est ainsi bien licite d'appliquer cette limite à  $\mathcal{U}_i^k$ .

**Remarque 9.11** Toute solution  $U$  de l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 U = 0, & \text{dans } \widehat{\Omega}_S^*, \\ U \text{ est sortante et ne dépend pas de } y. \end{cases} \quad (9.62)$$

est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$  proportionnelle à  $\exp i\omega x$ , c'est pourquoi nous avons le droit d'introduire les dérivées suivant  $x$  de  $U_i^k$  :

$$U_i^k(x) = U_i^k(0) \exp i\omega x. \quad (9.63)$$

Elles nous sont données par :

$$\left(\frac{2}{\omega}\right)^l \frac{d^l U_i^k}{dx^l}(0) = \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0). \quad (9.64)$$

## 9.3 Résolution du problème couplé

L'objet de cette section est d'abord de démontrer de manière constructive le résultat suivant :

**Théorème 9.12** Pour tout  $(i, k) \in N$ , le triplet  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k; U_i^k)$  est défini de manière unique par le problème du paragraphe 9.2.3.

Puis la preuve servira à tirer la structure de  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k; U_i^k)$  ayant en vue le calcul numérique.

Cette section se déroule de la manière suivante :

- Au paragraphe 9.3.1, nous énonçons des résultats de séparation de variables, d'unicité et d'existence de problèmes non couplés dans les géométries canoniques du champ lointain et du champ proche. Ces résultats sont en fait des pré-requis pour la démonstration du théorème 9.12. On trouvera les preuves de ces résultats au chapitre 11.
- Au paragraphe 9.3.2, nous démontrons l'unicité de la solution du problème couplé dont le triplet  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k; U_i^k)$  est solution.
- Au paragraphe 9.3.3, nous exhibons à l'aide d'un procédé inductif une solution du problème couplé. Ce paragraphe ne contient en vérité que la partie algébrique de la preuve de l'existence. On pourra trouver les éléments d'analyse qui lui sont associés au chapitre 11.
- Au paragraphe 9.3.4, nous revenons sur certains  $(i, k) \in N$  (principalement  $i = k$ ) pour lesquels les  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k; U_i^k)$  s'expriment de façon simple. Plus précisément nous verrons que  $u_i^i = 0$  et  $\mathcal{U}_i^i = cte$ .
- Au paragraphe 9.3.5, nous commentons la preuve du théorème 9.12. Nous en déduisons notamment qu'un nombre fini de fonctions permettent de décrire  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ . Nous montrerons que cette structure permettra de déduire une méthode numérique facile à utiliser pour les champs lointains et de fente. Toutefois, cette structure s'avèrera inadaptée pour le champ proche, c'est pourquoi nous proposerons une méthode alternative plus adaptée.

### 9.3.1 Résultat préliminaire

On trouvera les preuves des résultats qui suivent au chapitre 11.

#### Le champ lointain

Commençons par un résultat de séparation de variables. Si  $u$  est un élément de  $H_{0,loc}^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{0\} \end{cases} \quad (9.65)$$



et  $((b^p))_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de complexes presque nulle alors :

$$u(r, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} b^p Y_p(\omega r) \cos p\theta \in H_{loc}^1(\Omega) \implies \mathcal{L}_p^0(u) = b^p. \quad (9.66)$$

Puis, énonçons un résultat d'unicité pour le champ lointain :

**Lemme 9.13** *Si  $u \in H_{loc}^1(\Omega)$  tel que :*

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u + \omega^2 u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u \text{ est sortante.} \end{array} \right\} \implies u = 0. \quad (9.67)$$

Introduisons maintenant la “base”  $((w_p))_{p \in \mathbb{N}}$  des termes du développement asymptotique en champ lointain. Chaque  $w_p$  se définit par l'intermédiaire du problème bien posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } w_p \in H_{0,loc}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta w_p + \omega^2 w_p = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial w_p}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ w_p(r, \theta) - Y_p(\omega r) \cos p\theta, \quad \in H_{loc}^1(\Omega), \\ w_p \text{ est sortante.} \end{array} \right. \quad (9.68)$$

D'après (9.66),  $w_p$  admet la propriété :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_p^0(w_p) = 1, \\ \mathcal{L}_q^0(w_p) = 0, \quad \text{pour } p \neq q. \end{array} \right. \quad (9.69)$$

### Le champ proche

Commençons par un résultat de séparation de variables. Soit  $((\mathcal{U}_i))_{i \in [1;N]}$  (avec  $N \in \overline{\mathbb{N}}$ ) une famille d'éléments  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U}_i = -4 \mathcal{U}_{i-2}, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*. \end{array} \right. \quad (9.70)$$

où nous avons noté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{-1} \equiv 0, \\ \mathcal{U}_{-2} \equiv 0. \end{array} \right. \quad (9.71)$$

– Par interversion de la dérivation suivant  $\rho$  et de la projection modale en  $\theta$ , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\rho} \left[ \int_0^\pi \mathcal{U}_i(\rho, \theta) d\theta \right] = \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\theta, \quad \forall \rho \geq 1, \\ \frac{d}{dX} \left[ \int_0^1 \mathcal{U}_i(X, Y) dY \right] = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial X}(X, Y) dY, \quad \forall X \geq 0. \end{array} \right. \quad (9.72)$$

- A  $i$  donné, si, pour  $j \in \llbracket 0; i \rrbracket$ ,  $((\alpha_j)^p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $((\beta_j)^p)_{p \in \mathbb{N}}$  sont des suites de complexes presque nulles telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i - \sum_{l=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} (\alpha_{i-l})^p \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} (\beta_{i-l})^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right\} = 0, \end{array} \right. \quad (9.73)$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_0^0(\mathcal{U}_i) = (\alpha_i)^0, \\ \ell_p^1(\mathcal{U}_i) = (\beta_i)^p, \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (9.74)$$

- A  $i$  donné, si  $((\mu^l))_{l \in \mathbb{N}}$  est une suite de complexes presque nulle telle que :

$$\mathcal{U}_i - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mu^l}{l!} X^l \text{ est borné pour } X \rightarrow +\infty. \quad (9.75)$$

alors :

$$D^l(\mathcal{U}_i) = \mu^l \quad (9.76)$$

Puis, un résultat d'unicité pour le champ proche :

**Lemme 9.14** Si  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  alors

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U} = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}(\rho, \theta) \right\} = 0, \\ \mathcal{U} \text{ est borné pour } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right\} \implies \mathcal{U} = 0. \quad (9.77)$$

Introduisons maintenant la “base”  $\{\mathcal{W}_*\} \cup ((\mathcal{W}_p))_{p \in \mathbb{N}}$  pour la résolution du problème de Laplace homogène dans  $\widehat{\Omega}_N^*$ .

- Pour  $p \in \mathbb{N}$ , introduisons l'unique solution  $\mathcal{W}_p \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$  du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{W}_p \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ telle que :} \\ \Delta \mathcal{W}_p = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_p}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{W}_p(\rho, \theta) - J_{p,p} \rho^p \cos p\theta \right\} = 0, \\ \mathcal{W}_p \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad (9.78)$$

De plus, du comportement asymptotique de  $\mathcal{W}_p$  dans le demi espace, nous tirons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_0^0(\mathcal{W}_p) = 0, \\ \ell_p^1(\mathcal{W}_p) = 1, \\ \ell_q^1(\mathcal{W}_p) = 0, \quad \text{pour } q \neq p. \end{array} \right. \quad (9.79)$$

Du comportement asymptotique de  $\mathcal{W}_p$  dans la fente, il vient :

$$D^l(\mathcal{W}_p) = 0, \quad \forall l > 0. \quad (9.80)$$

Par contre, ni les  $\ell_q^0(\mathcal{W}_p)$ , pour  $q \neq 0$ , ni  $D^0(\mathcal{W}_p)$  ne sont a priori nuls.

**Remarque 9.15**  $\mathcal{W} \equiv 1$  est une solution de (9.78) pour  $p = 0$ . Il suit de l'unicité de la solution que  $\mathcal{W}_0$  est en fait donné par :

$$\mathcal{W}_0 \equiv 1. \quad (9.81)$$

– Puis, notons  $\mathcal{W}_*$  l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{W}_* \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ telle que :} \\ \Delta \mathcal{W}_* = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_*}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{W}_*(\rho, \theta) - \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) \right\} = 0, \\ \mathcal{W}_* + 2X \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad (9.82)$$

Du comportement asymptotique dans le demi espace,  $\mathcal{W}_*$  admet les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_0^0(\mathcal{W}_*) = 1, \\ \ell_0^1(\mathcal{W}_*) = 0, \\ \ell_p^1(\mathcal{W}_*) = 0, \quad \text{pour } p \neq 0, \end{array} \right. \quad (9.83)$$

De même, du comportement dans la fente nous tirons :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^1(\mathcal{W}_*) = -2, \\ D^l(\mathcal{W}_*) = 0, \quad \text{pour } l > 1. \end{array} \right. \quad (9.84)$$

Par contre, les complexes  $\ell_q^0(\mathcal{W}_*)$ , pour  $q \neq 0$  et  $D^0(\mathcal{W}_*)$  n'ont pas de raisons d'être nuls.

– Pour tout  $(i, k) \in N$ , considérons  $\widetilde{\mathcal{U}}_i^k$  l'unique solution du problème bien posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \widetilde{\mathcal{U}}_i^k \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ tel que :} \\ \Delta \widetilde{\mathcal{U}}_i^k = -4 \mathcal{U}_{i-2}^k, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \widetilde{\mathcal{U}}_i^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \widetilde{\mathcal{U}}_i^k(\rho, \theta) - \ell_0^0(\widetilde{\mathcal{U}}_i^k) \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right] \right\} = 0, \\ \widetilde{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) - \sum_{l=2}^{i-k} \frac{X^l}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l \mathcal{U}_{i-l}^k}{dx^l}(0) \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (9.85)$$

Du comportement asymptotique dans le demi espace de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  nous tirons :

$$\ell_p^1(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = 0, \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}. \quad (9.86)$$

Puis du comportement asymptotique de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  dans la fente, il vient :

$$\begin{cases} D^1(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = 0, \\ D^l(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = \left(\frac{2}{\omega}\right)^l \frac{d^l U_{i-l}^k}{dx^l}(0), \quad \text{pour } 2 \leq l \leq i-k, \\ D^l(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = 0, \quad \text{pour } l > i-k. \end{cases} \quad (9.87)$$

Par contre, les complexes  $\ell_q^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k)$ , pour  $q \neq 0$ , et  $D^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k)$  n'ont pas de raison d'être nuls.

L'existence et l'unicité de  $\mathcal{W}_*$ ,  $\mathcal{W}_p$  et  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  seront démontrées au chapitre 11.

### 9.3.2 Unicité de la solution du problème couplé

Considérons le triplet  $(u; \mathcal{U}; U)$  différence de deux solutions du problème données au paragraphe 9.2.3. Ainsi, d'après (9.55),  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1(\hat{\Omega}_N^*)$  satisfait à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U} = 0, \quad \text{dans } \hat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \hat{\Omega}_N^* \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}(\rho, \theta) - \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta \right] \right. \\ \quad \left. - \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}) J_{p,p} \rho^p \cos p\theta \right] \right\} = 0, \\ \mathcal{U} - \sum_{l=1}^{i-k} D^l(\mathcal{U}) X^l \text{ est borné pour } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (9.88)$$

avec pour tout  $p > 0$  et tout  $l > 0$

$$\begin{cases} \ell_p^1(\mathcal{U}) = 0, \\ D^l(\mathcal{U}) = 0. \end{cases} \quad (9.89)$$

Comme pour tout  $p > 0$ ,  $\rho^{-p} \cos p\theta \rightarrow 0$  si  $\rho \rightarrow +\infty$ , nous tirons que  $\mathcal{U}$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U} = 0, \quad \text{dans } \hat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \hat{\Omega}_N^* \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}(\rho, \theta) - \ell_0^0(\mathcal{U}) \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) - \ell_0^1(\mathcal{U}) J_{0,0} \right\} = 0, \\ \mathcal{U} \text{ est borné pour } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (9.90)$$

Sur le domaine  $[0; 1]_\rho \times [0; \pi]_\theta$ ,

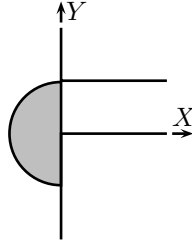


FIG. 9.8 – Domaine d'application de la formule de Green Riemann

appliquons alors la formule de Green Riemann :

$$\int_{[0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta} \Delta \mathcal{U} = \int_{\partial[0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} \implies 0 = \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta + \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(0, Y) dY. \quad (9.91)$$

Nous calculons alors  $\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta$  et  $\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(0, Y) dY$ .

D'après le lemme 9.5, nous avons :

$$(\mathcal{U})^0(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho, \theta) d\theta = \ell_0^0(\mathcal{U}) \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) + \ell_0^1(\mathcal{U}) J_{0,0}, \quad \forall \rho > 1. \quad (9.92)$$

Ainsi, comme  $J_{0,0} = 1$ , nous avons (c.f. (9.72)) :

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\theta = 2 \ell_0^0(\mathcal{U}) \frac{1}{\rho} \quad (9.93)$$

De plus d'après le lemme 9.6,  $X \mapsto \int_0^1 \mathcal{U}(X, Y) dY$  est un polynôme. Le seul polynôme borné étant la constante, nous avons :

$$\int_0^1 \mathcal{U}(X, Y) dY = \int_0^1 \mathcal{U}(0, Y) dY \implies \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(0, Y) dY = 0 \quad (\text{c.f. (9.72)}). \quad (9.94)$$

Par conséquent, d'après (9.72) et comme  $J_{0,0} = 1$  :

$$\begin{cases} \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\theta &= 2 \ell_0^0(\mathcal{U}) \frac{1}{\rho}, \\ \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X, Y) dY &= 0. \end{cases} \quad (9.95)$$

De (9.91) et (9.95) (pour  $p = 0$ ), il vient  $\ell_0^0(\mathcal{U}) = 0$ . Reprenons alors la condition de couplage (9.57) pour  $p = 0$  :

$$\mathcal{L}_0^0(u) = \ell_0^0(\mathcal{U}) \implies \mathcal{L}_0^0(u) = 0. \quad (9.96)$$

De (9.54), nous tirons que  $u$  vérifie

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u - \sum_{p=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \in H_{loc}^1(\Omega), \\ u \text{ est sortante.} \end{cases} \quad (9.97)$$

Comme pour tout  $p > 0$ ,  $\mathcal{L}_p^0(u) = 0$  et de (9.96), nous tirons :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u \in H_{loc}^1(\Omega), \\ u \text{ est sortante.} \end{cases} \quad (9.98)$$

Ainsi, d'après le lemme 9.13,  $u \equiv 0$ . De plus, d'après (9.57),

$$\begin{cases} \ell_0^0(\mathcal{U}) = \mathcal{L}_0^0(u) = 0, \\ \ell_0^1(\mathcal{U}) = \mathcal{L}_0^1(u) = 0. \end{cases} \quad (9.99)$$

Ainsi en reprenant (9.88),  $\mathcal{U}$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U} = 0, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\widehat{\Omega}_N^* \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \{\mathcal{U}(\rho, \theta)\} = 0, \\ \mathcal{U} \text{ est borné pour } X \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (9.100)$$

Ainsi d'après le lemme 9.14,  $\mathcal{U} \equiv 0$ . Puis de (9.58), il vient  $U(0) = 0$  et par conséquent  $U \equiv 0$ . Ceci termine la démonstration de ce résultat d'unicité.

### 9.3.3 Existence de la solution du problème couplé

**Analyse : raisonnement inductif conduisant à l'obtention de  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$**

Supposons qu'il existe  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k; U_i^k)$  solution du problème couplé qui se décompose sous la forme :

$$\begin{cases} u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k} b^p w_p, \\ \mathcal{U}_i^k = \sum_{p=0}^{i-k} [\alpha^p \mathcal{W}_p] + \alpha^* \mathcal{W}_* + \widetilde{\mathcal{U}}_i^k. \end{cases} \quad (9.101)$$

Notre objectif est alors de déterminer les  $b^p$ ;  $\alpha^p$  et  $\alpha^*$ .

Pour  $p \neq 0$ ,  $b_p$  et  $\alpha_p$  sont en fait des données. En effet, pour tout  $0 < p \leq i - k$ , nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = \sum_{q=0}^{i-k} b^q \mathcal{L}_p(w_q) = b^p, \\ \ell_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \sum_{q=0}^{i-k} [\alpha^q \ell_p^1(\mathcal{W}_q)] + \alpha^* \ell_p^1(\mathcal{W}_*) + \ell_p^1(\widetilde{\mathcal{U}}_i^k) = \alpha^p. \end{cases} \quad (9.102)$$

Ainsi nous tirons de (9.57), que pour tout  $0 < p \leq i - k$  :

$$\begin{cases} b^p = \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k), \\ \alpha^p = \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}). \end{cases} \quad (9.103)$$

De même :

$$D^1(\mathcal{U}_i^k) = \sum_{p=0}^{i-k} \left[ \alpha^p D^1(\mathcal{W}_p) \right] + \alpha^* D^1(\mathcal{W}_*) + D^1(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = -2 \alpha^*. \quad (9.104)$$

De (9.58) (écrit pour  $l = 0$ ), il suit :

$$\alpha^* = -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0). \quad (9.105)$$

Il vient de (9.103) et (9.105) que  $u_i^k$  et  $\mathcal{U}_i^k$  se représentent sous la forme :

$$\begin{cases} u_i^k &= b^0 w_0 + \sum_{p=1}^{i-k} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k) w_p, \\ \mathcal{U}_i^k &= \alpha^0 \mathcal{W}_0 + \sum_{p=1}^{i-k} \left[ \left( \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}) \right) \mathcal{W}_p \right] - \frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) \mathcal{W}_* + \tilde{\mathcal{U}}_i^k. \end{cases} \quad (9.106)$$

Et par conséquent :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0^0(u_i^k) &= b^0 \mathcal{L}_0^0(w_0) + \sum_{p=1}^{i-k} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k) \mathcal{L}_0^0(w_p), \\ \ell_0^0(\mathcal{U}_i^k) &= \alpha^0 \ell_0^0(\mathcal{W}_0) + \sum_{p=1}^{i-k} \left[ \left( \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}) \right) \ell_0^0(\mathcal{W}_p) \right] \\ &- \frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) \ell_0^0(\mathcal{W}_*) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k). \end{cases} \quad (9.107)$$

De même :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0^1(u_i^k) &= b^0 \mathcal{L}_0^1(w_0) + \sum_{p=1}^{i-k} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k) \mathcal{L}_0^1(w_p), \\ \ell_0^1(\mathcal{U}_i^k) &= \alpha^0 \ell_0^1(\mathcal{W}_0) + \sum_{p=1}^{i-k} \left[ \left( \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}) \right) \ell_0^1(\mathcal{W}_p) \right] \\ &- \frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) \ell_0^1(\mathcal{W}_*) + \ell_0^1(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = \alpha^0. \end{cases} \quad (9.108)$$

En appliquant la première ligne de (9.57) pour  $p = 0$ , (c'est à dire  $\mathcal{L}_0^0(u_i^k) = \ell_0^0(\mathcal{U}_i^k)$ ), nous tirons :

$$b^0 = -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k). \quad (9.109)$$

Puis, de la deuxième ligne pour  $p = 0$  (c'est à dire  $\mathcal{L}_0^1(u_i^k) = \ell_0^1(\mathcal{U}_i^k) + (2/\pi) \ell_0^0(u_i^{k-1})$ ), il vient :

$$\alpha^0 = \left( -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \right) \mathcal{L}_0^1(w_0) + \sum_{p=1}^{i-k} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k) \mathcal{L}_0^1(w_p) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{k-1}). \quad (9.110)$$

**Synthèse : vérification a posteriori**

Soit  $(u_i^k; \mathcal{U}_i^k; U_i^k)$  le triplet défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^k = \left( -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \right) w_0 + \sum_{p=1}^{i-k} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k) w_p, \\ \mathcal{U}_i^k = \left[ \left( -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \right) \mathcal{L}_0^1(w_0) + \sum_{p=1}^{i-k} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k) \mathcal{L}_0^1(w_p) \right. \\ \quad \left. + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{k-1}) \right] \mathcal{W}_0 \\ \quad + \sum_{p=1}^{i-k} \left[ \left( \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}) \right) \mathcal{W}_p \right] - \frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(0) \mathcal{W}_* + \tilde{\mathcal{U}}_i^k, \\ U_i^k(x) = \int_0^1 \mathcal{U}_i^k(0, Y) dY \exp \mathbf{i} \omega x. \end{array} \right. \quad (9.111)$$

C'est alors un simple jeu d'écriture de déduire que ce triplet est bien solution du problème couplé.

**9.3.4 Cas particuliers où les termes des développements asymptotiques s'expriment de façon simple**

Pour  $i = k$ , appliquons (9.111), dans ce cas particulier. Remarquons tout d'abord que 0 est solution de (9.85) et par unicité,  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  est en fait nul. D'où nous tirons pour tout  $i \geq 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^i = 0, \\ \mathcal{U}_i^i = \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{i-1}) \mathcal{W}_0 = \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{i-1}), \\ U_i^i = \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_0^0(u_i^{i-1}) \exp \mathbf{i} \omega x. \end{array} \right. \quad (9.112)$$

Pour  $i = k - 1$ , appliquons là encore (9.111), pour  $u_i^{i-1}$ . Il est facile de voir que  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  est nul car 0 est solution de (9.85). Ainsi :

$$u_i^{i-1} = -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^{i-1}}{dx}(0) w_0 + \ell_1^0(\mathcal{U}_{i-1}^{i-1}) w_1. \quad (9.113)$$

Comme  $\mathcal{U}_{i-1}^{i-1}$  est constant d'après (9.112), nous tirons :

$$\ell_1^0(\mathcal{U}_{i-1}^{i-1}) = 0. \quad (9.114)$$

De plus, de par la forme explicite de  $U_i^k(x) = U_i^k(0) \exp \mathbf{i} \omega x$ , il suit :

$$\frac{dU_{i-1}^{i-1}}{dx}(0) = \mathbf{i} \omega U_{i-1}^{i-1}(0). \quad (9.115)$$

D'où il vient :

$$u_i^{i-1} = -\mathbf{i} U_{i-1}^{i-1}(0) w_0 \implies \mathcal{L}_0^0(u_i^{i-1}) = -\mathbf{i} U_{i-1}^{i-1}(0). \quad (9.116)$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i^i(0) = -\frac{2\mathbf{i}}{\pi} U_{i-1}^{i-1}(0), \\ u_i^i = 0, \\ \mathcal{U}_i^i = -\frac{2\mathbf{i}}{\pi} U_{i-1}^{i-1}(0), \\ u_i^{i-1} = -\mathbf{i} \left( -\frac{2\mathbf{i}}{\pi} \right) U_{i-1}^{i-1}(0) w_0. \end{array} \right. \quad (9.117)$$



De  $U_0^0(0) = u^0(\mathbf{0})$  et, par récurrence, nous avons :

$$\begin{cases} U_i^i &= \left(-\frac{2\mathbf{i}}{\pi}\right)^i u^0(\mathbf{0}) \exp \mathbf{i}\omega x, \\ u_i^i &= 0, \\ U_i^i &= \left(-\frac{2\mathbf{i}}{\pi}\right)^i u^0(\mathbf{0}), \\ u_i^{i-1} &= -\mathbf{i} \left(-\frac{2\mathbf{i}}{\pi}\right)^{i-1} u^0(\mathbf{0}) w_0. \end{cases} \quad (9.118)$$

### 9.3.5 Application au calcul numérique

#### Remarque concernant le champ lointain

En (9.111), nous avons explicité  $u_i^k$  comme une combinaison linéaire des  $w_p$  pour  $p$  allant de 0 à  $i - k$ . Il est alors naturel d'introduire l'espace vectoriel  $E_N$  engendré par les  $N + 1$  premiers  $w_p$  :

$$E_N = [w_0; \dots; w_N]. \quad (9.119)$$

$u_i^k$  est alors un élément de  $E_{i-k}$ . Toutefois, ce résultat est grossier :  $u_i^k$  est en fait un élément de  $E_{i-k-1}$  (avec  $E_{-1} = \{0\}$ ). En effet, pour tout  $i \geq 1$ ,  $U_i^i$  est constant. Ainsi pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , nous avons :

$$\ell_p^0(U_i^i) = 0. \quad (9.120)$$

Nous avons alors pour tout  $i \geq 1$  :

$$\begin{cases} u_i^k &= \left(-\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^k}{dx}(\mathbf{0}) + \ell_0^0(\tilde{U}_i^k)\right) w_0 + \sum_{p=1}^{i-k-1} \ell_p^0(u_{i-p}^k) w_p, \\ u_i^{i-1} &= -\frac{1}{\omega} \frac{dU_{i-1}^{i-1}}{dx}(\mathbf{0}) w_0 = -\mathbf{i} \left(\frac{-2\mathbf{i}}{\pi}\right)^{i-1} u^0(\mathbf{0}) w_0, \\ u_i^i &= 0. \end{cases} \quad (9.121)$$

Par conséquent, le calcul des  $u_i^k$  pour  $(i, k) \in N$  avec  $i \leq N$  se ramène aux calculs des fonctions  $w_p$  ( $p \leq N - 1$ ) puis de scalaires. A chaque  $(i, k)$ , il faut passer par le calcul de  $\tilde{U}_i^k$  (lequel dépend des termes d'ordre inférieurs). Nous allons éviter cet écueil par le

*calcul analytique de  $\ell_0^0(\tilde{U}_i^k)$*

Nous appliquons ici la formule de Green-Riemann dans un domaine bien choisi  $\hat{\Omega}_N^{int} = [0; 1]_\rho \times [0; \pi]_\theta$  (c.f. figure 9.8) pour déterminer  $\ell_0^0(\tilde{U}_i^k)$  :

$$\int_{\hat{\Omega}_N^{int}} \Delta \tilde{U}_i^k = \int_{\partial \hat{\Omega}_N^{int}} \frac{\partial \tilde{U}_i^k}{\partial n}. \quad (9.122)$$

Ainsi, si nous tenons compte du jeu d'équations aux dérivées partielles qui régissent  $\tilde{U}_i^k$  (fourni par (9.85)) nous obtenons :

$$4 \int_{\hat{\Omega}_N^{int}} U_{i-2}^k + \int_0^\pi \frac{\partial \tilde{U}_i^k}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{U}_i^k}{\partial X}(0, Y) dY = 0. \quad (9.123)$$

D'après le lemme 9.5, nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{U}}_i^k(\rho, \theta) d\theta &= \pi \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) \\ &+ \pi \sum_{l=0}^{i-k} \ell_0^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{0,l} + \frac{2}{\pi} J_{0,l} \text{Log } \rho \right) \rho^l \\ &+ \pi \sum_{l=1}^{i-k} \ell_0^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{0,l} \rho^l. \end{aligned} \right. \quad (9.124)$$

Et par conséquent :

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta = 2 \sum_{l=0}^{i-k} \ell_0^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( \frac{\pi l}{2} Y_{0,l} + J_{0,l} \right) + 2 \sum_{l=1}^{i-k} \ell_0^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) \frac{\pi l}{2} J_{0,l}. \quad (9.125)$$

De même dans la fente, d'après le lemme 9.6 et du comportement asymptotique de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  nous tirons :

$$\int_0^1 \tilde{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{i-k} \frac{X^l}{l!} D^l(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) \quad (9.126)$$

D'où il vient :

$$\int_0^1 \frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}_i^k}{\partial X}(0, Y) = D^1(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) = 0. \quad (9.127)$$

Nous tirons ainsi  $\ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k) &= - \sum_{l=1}^{i-k} \left[ \ell_0^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( \frac{\pi l}{2} Y_{0,l} + J_{0,l} \right) + \frac{\pi l}{2} \ell_0^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{0,l} \right] \\ &- 2 \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_{i-2}^k(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta. \end{aligned} \right. \quad (9.128)$$

### Remarque concernant le champ proche

Une expression de  $\mathcal{U}_i^k$  a été donnée en (9.111). Il est alors naturel d'introduire l'espace vectoriel

$$F_N = [\mathcal{W}_*; \mathcal{W}_0; \dots; \mathcal{W}_N]. \quad (9.129)$$

Ainsi  $\mathcal{U}_i^k$  est un élément de l'espace affine

$$\tilde{\mathcal{U}}_i^k + F_{i-k} \quad (9.130)$$

Il faut avouer que l'utilité numérique de cette structure est peu convaincante. Elle nous ramène au calcul de fonctions de base, de scalaires et de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$ . Le calcul de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  étant à peine plus simple que  $\mathcal{U}_i^k$  nous préférons à cette méthode une

*solution alternative pour le calcul numérique de  $\mathcal{U}_i^k$*

Elle consiste à tenir compte du fait que l'on peut déterminer  $u_i^k$  avant  $\mathcal{U}_i^k$ .

Une fois  $u_i^k$  connu, on peut caractériser  $\mathcal{U}_i^k$  comme la solution unique du problème aux limites généralisé suivant (problème de Laplace inhomogène dans  $\hat{\Omega}_N^*$  avec condition de Neumann et

comportements à l'infini (donnés) coté demi espace et coté fente) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{U}_i^k \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N) \text{ telle que :} \\ \Delta \mathcal{U}_i^k = -4 \mathcal{U}_{i-2}^k, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^* \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right) \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^k) \rho^l \cos p\theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} J_{p,l} \left[ \mathcal{L}_p^1(u_{i-l}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^{k-1}) \right] \rho^l \cos p\theta \right\} = 0, \\ \mathcal{U}_i^k(X, Y) - \sum_{l=1}^{i-k} \frac{1}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l U_{i-l}^k}{dx^l}(0) X^l \quad \text{est bornée quand } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (9.131)$$

**Remarque 9.16** Notons que :

- Les données du problème, qui apparaissent dans la partie non homogène des conditions "à l'infini" (et auxquelles le lemme 9.4 permet de donner un sens), sont fournies par les termes des étapes précédentes et par les  $u_i^k$ , en accord avec le diagramme 9.1.
- On observera que la fonction  $\mathcal{U}_i^k$  est d'autant plus croissante que  $i - k$  est grand (tant à l'infini coté demi espace que dans la fente)

**Remarque concernant le champ de fente**

Le champ de fente  $U_i^k$  étant donné par (9.111) :

$$U_i^k(x) = \int_0^1 \mathcal{U}_i^k(0, Y) dY \exp \mathbf{i}\omega x. \quad (9.132)$$

Son utilisation numérique est triviale.

**Un résultat de dépendance des termes des développements asymptotiques par rapport au champ limite  $u^0$ .**

Il est clair que, de proche en proche, les termes d'ordre  $i$  dépendant linéairement des termes d'ordre inférieur, ils dépendent tous linéairement du premier d'entre eux  $u^0$ . Nous pouvons en fait préciser la nature de cette dépendance à travers le résultat suivant :

**Théorème 9.17** Pour tout couple  $(i, k), i \geq k$ , il existe trois applications linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{i,k}^H \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{i-k}, H_{0,loc}^1(\Omega)) \\ D_{i,k}^N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{i-k+1}, H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)) \\ D_{i,k}^S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{i-k+1}, \mathbb{C}) \end{array} \right. \quad (9.133)$$

telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^k = D_{i,k}^H(u^0(\mathbf{0}), \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial^{i-k-1} u^0}{\partial y^{i-k-1}}(\mathbf{0})) \\ u_i^k = D_{i,k}^N(u^0(\mathbf{0}), \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial^{i-k} u^0}{\partial y^{i-k}}(\mathbf{0})) \\ u_i^k = D_{i,k}^S(u^0(\mathbf{0}), \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial^{i-k} u^0}{\partial y^{i-k}}(\mathbf{0})) \exp \mathbf{i}\omega x. \end{array} \right. \quad (9.134)$$

## 9.4 Les ordres 1 et 2.

Moins les ordres sont élevés, plus la contribution des termes des développements asymptotiques à la reconstruction de la solution exacte est importante. C'est pourquoi nous dédions toute une section aux ordres 1 et 2. Nous choisissons de donner un point de vue beaucoup plus concret pour la présentation des problèmes. Nous n'aurons en particulier pas recours aux formes linéaires  $\mathcal{L}_p^0$ ,  $\mathcal{L}_p^1$ ,  $\ell_p^0$ ,  $\ell_p^1$ . Toutefois, dès que l'ordre est strictement supérieur à 2, elles deviennent pratiquement incontournables.

### 9.4.1 Résultats préliminaires : partie régulière pour le champ lointain

Soit  $R$  un scalaire positif. Si  $u \in H_{0,loc}^1(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = 0, & \text{pour } 0 < |y| < R, \end{cases} \quad (9.135)$$

et  $((b_p))_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de scalaires presque nulle telle que :

$$u(r, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p Y_p(\omega r) \cos p\theta \in H_{loc}^1(\Omega). \quad (9.136)$$

alors

$$R(u)(r, \theta) = u(r, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p Y_p(\omega r) \cos p\theta \quad (9.137)$$

vérifie pour  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p^0(R(u)) = 0, \\ \mathcal{L}_p^1(R(u)) = \mathcal{L}_p^1(u). \end{cases} \quad (9.138)$$

De plus, comme  $R(u)$  est de plus de classe  $C^\infty(\Omega_R)$  et vérifie :

$$\begin{cases} \Delta R(u) + \omega^2 R(u) = 0, & \text{dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial R(u)}{\partial n}(0, y) = 0, & \text{pour } 0 < |y| < R, \end{cases} \quad (9.139)$$

d'après (9.33), nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0^1(u) = R(u)(\mathbf{0}), \\ \mathcal{L}_1^1(u) = \frac{2}{\omega} \frac{\partial R(u)}{\partial y}(\mathbf{0}), \\ \mathcal{L}_2^1(u) = 2 R(u)(\mathbf{0}) + \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 R(u)}{\partial y^2}(\mathbf{0}), \end{cases} \quad (9.140)$$

et

$$\mathcal{L}_p^0(u) = b_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (9.141)$$

### 9.4.2 Les termes d'ordre 1

#### Le champ lointain

Le champ  $u_1^1$  étant nul, il suffit de caractériser  $u_1^0$ . L'expression de  $u_1^0$  a été donnée en (9.118) :

$$u_1^0 = -\mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) w_0. \quad (9.142)$$

De manière équivalente, nous pouvons rechercher le champ  $u_1^0$  dans  $H_{0,loc}^1(\Omega)$ , caractérisé comme la solution du problème aux limites généralisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Chercher } u_1^0 \in H_{0,loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que :} & \\ \Delta u_1^0 + \omega^2 u_1^0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (\text{voir Définition 9.2}). \\ u_1^0 + \mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) Y_0(\omega r) & \in H_{loc}^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (9.143)$$

– la seule donnée du problème est  $u^0(\mathbf{0})$  et apparaît dans la seule équation “non homogène” de (9.143) à savoir la condition

$$u_1^0 + \mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) Y_0(\omega r) \in H_{loc}^1(\Omega), \quad (9.144)$$

– La fonction  $Y_0(\omega r)$  est bien dans  $H_{0,loc}^1(\Omega)$ . Compte tenu du comportement :

$$Y_0(\omega r) = \frac{2}{\pi} \text{Log} \frac{\omega r}{2} + O(1) = \frac{2}{\pi} \text{Log} r + O(1), \quad r \rightarrow 0,$$

elle n'appartient pas à  $H_{loc}^1(\Omega)$  (et donc  $u_1^0$  non plus par voie de conséquence). On notera que la condition peut se réécrire :

$$u_1^0 + \frac{2\mathbf{i}}{\pi} u^0(\mathbf{0}) \text{Log} r \in H_{loc}^1(\Omega). \quad (9.145)$$

### Le champ proche.

Nous avons 2 contributions d'ordre 1, à savoir les champs  $\mathcal{U}_1^0$  et  $\mathcal{U}_1^1$ .

*Le champ  $\mathcal{U}_1^0$ .* Il est défini comme une fonction harmonique particulière dans  $\widehat{\Omega}_N^*$ . Plus précisément il se caractérise comme la solution d'un problème aux limites avec conditions à l'infini non homogènes côté demi espace et côté fente. Comme indiqué sur le diagramme 9.5, les données non homogènes de ce problème seront fournies par les champs  $u^0$  et  $u_1^0$ . Pour formuler ces problèmes il sera utile d'introduire ce que nous appellerons la *partie régulière* de  $u_1^0$ , à savoir le champ  $R(u_1^0)$  défini par :

$$R(u_1^0) := u_1^0 + \mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) Y_0(\omega r) \quad (9.146)$$

Le champ  $\mathcal{U}_1^0$  est alors l'unique solution du problème aux limites (ce n'est qu'une réécriture de (9.131) en tenant compte de (9.140) et (9.141)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{U}_1^0 \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ tel que :} \\ \Delta \mathcal{U}_1^0 = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_1^0}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_1^0(\rho, \theta) - R(u_1^0)(\mathbf{0}) + \frac{2\mathbf{i}}{\pi} u^0(\mathbf{0}) [\text{Log}(\rho) + \gamma] - \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \rho \cos \theta \right\} = 0 \\ \{ \mathcal{U}_1^0(X, Y) - 2\mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) X \} \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (9.147)$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler  $\gamma \simeq 0.5772$ .

**Remarque 9.18** *Notons que :*

- Les données du problème apparaissent dans les conditions non homogènes à l’infini et sont fournies par  $u^0$  et par  $u_1^0$  via  $R(u_1^0)$ .
- On peut identifier un sous-espace de dimension 2 “simple” contenant  $U_1^0$ . Pour cela, on introduit la partie régulière de  $w_0$ , à savoir :

$$r_0 := R(w_0) = w_0 - Y_0(\omega r) \quad (9.148)$$

de telle sorte que  $R(u_1^0) = \mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) r_0$ . On réinterprète alors simplement par :

$$U_1^0 = -\mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) \left( \mathcal{W}_* + r_0(\mathbf{0}) \mathcal{W}_0 \right) + \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \mathcal{W}_1. \quad (9.149)$$

Autrement dit, on a identifié  $U_1^0$  comme un élément de l’espace de dimension 2 :

$$\mathcal{E}_1^1 = [\mathcal{W}_* + r_0(\mathbf{0}) \mathcal{W}_0; \mathcal{W}_1].$$

Le champ  $U_1^1$ . Ce champ est constant donné par :

$$U_1^1 = -\frac{2\mathbf{i}}{\pi} u^0(\mathbf{0}) \mathcal{W}_0 \equiv -\frac{2\mathbf{i}}{\pi} u^0(\mathbf{0}), \quad (X, Y) \in \widehat{\Omega}_N^*. \quad (9.150)$$

**Remarque 9.19** Ce résultat est à mettre en balance avec le fait que  $U_1^0$  croît linéairement avec  $\rho$  coté demi espace et avec  $X$  coté fente.

**Le champ de fente.**

Le champ  $U_1^0$  est alors donné par :

$$U_1^0(x, Y) = D^0(U_1^0) \exp \mathbf{i} \omega x = \left( \int_0^1 U_1^0(0, Y) dY \right) \exp \mathbf{i} \omega x, \quad (x, Y) \in \widehat{\Omega}_S^*. \quad (9.151)$$

On notera que, compte tenu de (9.149)

$$U_1^0 \text{ est une combinaison linéaire de } u^0(\mathbf{0}) \text{ et } \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}). \quad (9.152)$$

Nous pouvons même expliciter cette dépendance grâce à (9.149) :

$$U_1^0(x, Y) = \left[ -\mathbf{i} u^0(\mathbf{0}) \left( D^0(\mathcal{W}_*) + r_0(\mathbf{0}) \right) + \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) D^0(\mathcal{W}_1) \right] \exp \mathbf{i} \omega x. \quad (9.153)$$

Nous avons ici utilisé que :

$$\mathcal{W}_0 \equiv 1. \quad (9.154)$$

Le champ  $U_1^1$  est donné par (9.118) :

$$U_1^1(x, Y) = -\frac{2\mathbf{i}}{\pi} u^0(\mathbf{0}) \exp \mathbf{i} \omega x, \quad (x, Y) \in \widehat{\Omega}_S^*. \quad (9.155)$$

### 9.4.3 Les termes d’ordre 2

Nous avons choisi de présenter séparément les termes des développements asymptotiques d’ordre 2 pour deux raisons :

- Tout d’abord, c’est avec ces termes d’ordre 2 que l’on va pouvoir dépasser la limite de précision  $O(\varepsilon)$  observée avec la méthode de raccord brutal développé dans la partie I.
- C’est à l’ordre 2 qu’apparaît pour la première fois la structure générale des problèmes définissant les termes des développements asymptotiques d’ordre quelconque (en effet, c’est pour  $i \geq 2$  que l’indice  $k$  est autorisé à prendre des valeurs autres que  $i - 1$  et  $i$ ).

**Le champ lointain**

Nous avons deux champs à caractériser. *Le champ*  $u_2^0$ . Le champ  $u_2^0$  est donné par (9.121) :

$$u_2^0 = \left( -\frac{1}{\omega} \frac{dU_1^0}{dx}(0) + \ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_2^0) \right) w_0 + \ell_1^0(\mathcal{U}_1^0) w_1. \quad (9.156)$$

avec  $\ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_2^0)$  donné par (9.128)

$$\ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_2^0) = -\sum_{l=1}^2 \left[ \ell_0^0(\mathcal{U}_{2-l}^0) \left( \frac{\pi l}{2} J_{0,l} + Y_{0,l} \right) + \ell_0^1(\mathcal{U}_{2-l}^0) \frac{\pi l}{2} J_{0,l} \right] - \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_0^0(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (9.157)$$

Comme  $J_{1,0} = Y_{1,0} = 0$  :

$$\ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_2^0) = -\left[ \ell_0^0(\mathcal{U}_0^0) \left( \pi J_{0,2} + Y_{0,2} \right) + \ell_0^1(\mathcal{U}_0^0) \pi J_{0,2} \right] - 2 \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_0^0(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (9.158)$$

et d'après (9.51)  $\mathcal{U}_0^0 = u^0(\mathbf{0})$ , nous avons :

$$\begin{cases} \ell_0^0(\mathcal{U}_0^0) = 0, \\ \ell_0^1(\mathcal{U}_0^0) = u^0(\mathbf{0}), \\ \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_0^0(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{2} u^0(0) \end{cases} \quad (9.159)$$

D'où ( $J_{0,2} = -1$ ) :

$$\ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_2^0) = 0. \quad (9.160)$$

Déterminons maintenant  $\ell_1^0(\mathcal{U}_1^0)$ . Comme d'après (9.147),  $\mathcal{U}_1^0$  vérifie :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_1^0(\rho, \theta) - R(u_1^0(\mathbf{0})) + \frac{2\mathbf{i}}{\pi} u^0(\mathbf{0}) [\text{Log}(\rho) + \gamma] - \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \rho \cos \theta \right\} = 0. \quad (9.161)$$

Nous avons d'après (9.74) :

$$\ell_1^1(\mathcal{U}_1^0) = \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \quad (9.162)$$

De plus d'après (9.45)

$$\begin{cases} (\mathcal{U}_1^0)^1(\rho) = \ell_1^1(\mathcal{U}_1^0) J_{1,1} \rho + \ell_1^0(\mathcal{U}_1^0) \left( Y_{1,-1} + \frac{2}{\pi} \text{Log} \rho \right) \frac{1}{\rho} \\ = \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) J_{1,1} \rho + \ell_1^0(\mathcal{U}_1^0) Y_{1,-1} \frac{1}{\rho}. \end{cases} \quad (9.163)$$

D'où en appliquant cette relation pour  $\rho = 1$  ( $Y_{1,-1} = -(1/\pi)$  et  $J_{1,1} = 1$ ) :

$$\ell_1^0(\mathcal{U}_1^0) = \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) - 2 \int_0^\pi \left[ \mathcal{U}_1^0(1, \theta) \cos \theta \right] d\theta. \quad (9.164)$$

Ainsi  $u_2^0$  est fourni par :

$$u_2^0 = -\frac{1}{\omega} \frac{dU_1^0}{dx}(0) w_0 + \left( \frac{2}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) - 2 \int_0^\pi \left[ \mathcal{U}_1^0(1, \theta) \cos \theta \right] d\theta \right) w_1. \quad (9.165)$$

ou de manière équivalente, il est l'unique solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_2^0 \in H_{0,loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que :} \\ \Delta u_2^0 + \omega^2 u_2^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u_2^0 + \frac{1}{\omega} \frac{dU_1^0}{dx}(0) Y_0(\omega r) \\ \quad - \left( \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) - 2 \int_0^\pi [\mathcal{U}_1^0(1, \theta) \cos \theta] d\theta \right) Y_1(\omega r) \cos \theta \in H_{loc}^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (9.166)$$

Le champ  $u_2^1$  est donné par :

$$u_2^1 = -\frac{2}{\pi} u^0(\mathbf{0}) w_0. \quad (9.167)$$

De façon équivalente, c'est la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_2^1 \text{ sortante telle que :} \\ \Delta u_2^1 + \omega^2 u_2^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_2^1}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u_2^1 + \frac{2}{\pi} u^0(\mathbf{0}) Y_0(\omega r) \in H_{loc}^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (9.168)$$

**Remarque 9.20** *Remarquons que ;*

- Les données des problèmes en  $u_2^0$  et  $u_2^1$ , qui apparaissent dans la condition à l'origine, sont bien fournies par les termes des développements asymptotiques d'ordre 1.
- A l'origine, la fonction  $u_2^0$  (en  $1/r$ ) est plus singulière que  $u_2^1$  (en  $\text{Log} r$ ).
- il est clair que :

$$u_2^0 \in E_1 = [w_0, w_1], \quad u_2^1 \in E_0 = [w_0] \subset E_1. \quad (9.169)$$

En outre, les coefficients de la décomposition de  $u_2^0$  (resp.  $u_2^1$ ) dans la base  $\{w_0, w_1\}$  (resp.  $\{w_0\}$ ) dépendent linéairement de

$$u^0(\mathbf{0}) \text{ et } \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \quad (\text{resp. } u^0(\mathbf{0})). \quad (9.170)$$

### Le champ proche

Le champ  $\mathcal{U}_2^0$ . Pour caractériser  $\mathcal{U}_2^0$ , il est utile d'introduire ce que nous appellerons la *partie régulière* de  $u_2^0$ , à savoir le champ  $R(u_2^0)$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(u_2^0) := u_2^0 + \frac{1}{\omega} \frac{dU_1^0}{dx}(0) Y_0(\omega r) \\ \quad - \left( \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) - 2 \int_0^\pi [\mathcal{U}_1^0(1, \theta) \cos \theta] d\theta \right) Y_1(\omega r) \cos \theta. \end{array} \right. \quad (9.171)$$

On notera que, comme  $\mathcal{U}_1^0$  (cf. (9.149)) et par suite  $U_1^0(0)$  (cf. (9.152)) sont des combinaisons linéaires de  $u^0(\mathbf{0})$  et  $\frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0})$ , il est clair que :

$$R(u_2^0) \text{ est une combinaison linéaire de } u^0(\mathbf{0}) \text{ et } \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \quad (9.172)$$



D'après (9.166), il est clair que  $R(u_2^0)$  est de classe  $C^\infty$ .  $\mathcal{U}_2^0$  est défini par la résolution du problème bien posé (ceci n'est qu'une réécriture de (9.131)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{U}_2^0 \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ tel que :} \\ \Delta \mathcal{U}_2^0 = -4 u^0(\mathbf{0}), \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_2^0}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_2^0(\rho, \theta) + u^0(\mathbf{0}) \rho^2 - \left( u^0(\mathbf{0}) + \frac{2}{\omega^2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}(\mathbf{0}) \right) \rho^2 \cos 2\theta \right. \\ \quad \left. - \frac{2}{\omega} \frac{\partial R(u_1^0)}{\partial y}(\mathbf{0}) \rho \cos \theta - R(u_2^0)(\mathbf{0}) + \frac{2 \mathbf{i}}{\pi} U_1^0(0) (\text{Log } \rho + \gamma) \right\} = 0 \\ \left\{ \mathcal{U}_2^0(X, Y) + 2 u^0(\mathbf{0}) X^2 - \frac{2}{\omega} U_1^0(0) X \right\} \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (9.173)$$

Le champ  $\mathcal{U}_2^1$ . Pour caractériser  $\mathcal{U}_2^1$ , il est utile d'introduire ce que nous appellerons la *partie régulière* de  $u_2^1$ , à savoir le champ  $R(u_2^1)$  défini par :

$$R(u_2^1) := u_2^1 + \frac{1}{\omega} \frac{dU_1^1}{dx}(0) Y_0(\omega r) = u_2^1 + \frac{2}{\omega} u^0(\mathbf{0}) Y_0(\omega r) \quad (9.174)$$

Au même titre que  $R(u_2^0)$ ,

$$R(u_2^1) \text{ est une combinaison linéaire de } u^0(\mathbf{0}). \quad (9.175)$$

Ainsi,  $\mathcal{U}_2^1$  est l'unique solution du problème aux limites généralisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{U}_2^1 \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ tel que :} \\ \Delta \mathcal{U}_2^1 = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_2^1}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_2^1(\rho, \theta) - R(u_2^1)(\mathbf{0}) + \frac{2}{\pi \omega} \frac{dU_1^0}{dx}(0) + \frac{2}{\pi \omega} \frac{dU_1^1}{dx}(0) (\text{Log } \rho + \gamma) \right\} = 0 \\ \left\{ \mathcal{U}_2^1(X, Y) - 2 \mathbf{i} U_1^1(0) X \right\} \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (9.176)$$

Le champ  $\mathcal{U}_2^2$ . Ce champ est constant et donné par :

$$\mathcal{U}_2^2(X, Y) = -\frac{2}{\pi \omega} \frac{dU_1^1}{dx}(0) = -\frac{4}{\pi^2} u^0(\mathbf{0}). \quad (9.177)$$

**Remarque 9.21** *Le lecteur attentif remarquera que :*

- Les champs  $(\mathcal{U}_2^0, \mathcal{U}_2^1, \mathcal{U}_2^2)$  sont bien déterminés par les termes d'ordre 0 et 1, lesquels interviennent comme données des problèmes en  $(\mathcal{U}_2^0, \mathcal{U}_2^1)$  par l'intermédiaire des conditions à l'infini mais aussi (pour  $\mathcal{U}_2^0$ ) du second membre de l'équation de Laplace.
- Compte tenu de la dépendance linéaire précédemment observée des termes d'ordre 1 par rapport à

$$u^0(\mathbf{0}) \text{ et } \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0})$$

des termes d'ordre 1 (voir (9.142), (9.149), (9.150), (9.152) et (9.155)) et des fonctions  $R(u_2^0)$  et  $R(u_2^1)$  (cf (9.172) et (9.175)), il est clair, à la lecture du problème, que nous pouvons construire trois fonctions "canoniques", en particulier indépendantes de la fréquence  $\omega$ , de  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$ , soit

$$((\mathcal{W}_2^0)_0, (\mathcal{W}_2^0)_1, (\mathcal{W}_2^0)_2)$$

telles que l'on puisse écrire :

$$\bar{u}_2^0 = u^0(\mathbf{0}) (\mathcal{W}_2^0)_0 + \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) (\mathcal{W}_2^0)_1 + \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}(\mathbf{0}) (\mathcal{W}_2^0)_2. \quad (9.178)$$

De même, nous pouvons construire deux fonctions "canoniques"

$$((\mathcal{W}_2^1)_0, (\mathcal{W}_2^1)_1)$$

telles que :

$$\mathcal{U}_2^1 = u^0(\mathbf{0}) (\mathcal{W}_2^1)_0 + \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) (\mathcal{W}_2^1)_1. \quad (9.179)$$

D'après (9.177),  $\mathcal{U}_2^2$  dépend linéairement de  $u^0(\mathbf{0})$ .

### Le champ de fente

Pour  $k = 0, 1$ , les champs de fente d'ordre 2 sont donnés par :

$$\begin{cases} U_2^0(x) &= \left( \int_0^1 \mathcal{U}_2^0(0, Y) dY \right) \exp(\mathbf{i}\omega x), \\ U_2^1(x) &= \left( \int_0^1 \mathcal{U}_2^1(0, Y) dY \right) \exp(\mathbf{i}\omega x), \\ U_2^2(x) &= \left( \int_0^1 \mathcal{U}_2^2(0, Y) dY \right) \exp(\mathbf{i}\omega x) = -\frac{4}{\pi^2} u^0(\mathbf{0}) \exp(\mathbf{i}\omega x). \end{cases} \quad (9.180)$$

Compte tenu de (9.178) (resp. (9.179)),  $U_2^0$  (resp.  $U_2^1$  et  $U_2^2$ ) dépend linéairement de

$$\left( u^0(\mathbf{0}), \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}), \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}(\mathbf{0}) \right) \quad \left( \text{resp. de } \left( u^0(\mathbf{0}), \frac{\partial u^0}{\partial y}(\mathbf{0}) \right) \text{ et } u^0(\mathbf{0}) \right). \quad (9.181)$$



# Chapitre 10

## Obtention des problèmes satisfaits par les termes des développements asymptotiques

### Sommaire

---

<b>10.1 Les Ansatz pour les développements asymptotiques . . . . .</b>	<b>150</b>
10.1.1 Principe de la technique. . . . .	150
10.1.2 Ansatz du champ lointain dans le demi espace . . . . .	151
10.1.3 Ansatz du champ proche . . . . .	152
10.1.4 Ansatz du champ de fente . . . . .	153
<b>10.2 Raccord entre le champ proche et le champ lointain . . . . .</b>	<b>156</b>
10.2.1 Développement du champ lointain au voisinage de l'origine . . . . .	159
10.2.2 Développement du champ proche au voisinage de l'infini . . . . .	161
10.2.3 Deux conséquences immédiates du principe de raccord . . . . .	164
10.2.4 Exploitation du principe de raccord . . . . .	165
<b>10.3 Raccord entre le champ proche et le champ de fente . . . . .</b>	<b>167</b>
10.3.1 Développement du champ proche à l'infini dans la fente . . . . .	169
10.3.2 Résultat préliminaire concernant le champ de fente . . . . .	174
10.3.3 Exploitation du principe de raccord . . . . .	174

---

**Résumé :** Ce chapitre présente en détail les calculs permettant d'obtenir les problèmes présentés au chapitre 9. Il s'appuie essentiellement sur des représentations modales particulières des solutions dans différentes régions des trois zones de calcul (séparation de variables) et sur des propriétés élémentaires des fonctions de Bessel. Dans la section 10.1, nous dérivons les équations intérieures vérifiées par chacun des termes du développement : équation de Helmholtz homogène dans la zone demi-espace, équation de Helmholtz 1D dans la zone de champ de fente et équation de Laplace non homogène dans la zone de champ proche. Les deux sections principales de ce chapitre sont les sections 10.2 et 10.3 qui traitent respectivement du raccord entre champ proche et champ lointain et du raccord entre champ proche et champ de fente.

## Introduction

Nous allons dans ce chapitre obtenir des équations vérifiées par les composantes secondaires du champ lointain, du champ proche et du champ de fente. Nous allons donc avoir recours au calcul formel. Nous interprétons l'ensemble des relations de ce chapitre comme des conditions nécessaires pour que le développement en champ lointain, champ proche et champ de fente soit licite.

Il ne faut pas donner à ce chapitre la valeur d'un raisonnement mathématique. En effet, ce chapitre ne contient ni théorème ni preuve au sens rigoureux du terme, mais plutôt une suite de raisonnements formels basés sur le "bons sens". On peut voir ce travail comme un intermédiaire formel nous permettant de poser des problèmes rigoureux (chapitre 9).

Nous avons eu le souci d'une grande précision. Ceci aura comme avantage que le lecteur pourra se convaincre de l'honnêteté des calculs et des arguments formels. A contrario, nous sommes conscients que cette approche pourra ralentir la lecture de ce chapitre et laisser une impression de lourdeurs rédactionnelles.

A posteriori, ce chapitre n'a pas de nécessité logique. En effet, nous aurions pu ne pas inclure ce chapitre dans la rédaction de la deuxième partie. Toutefois, il nous a semblé légitime de les présenter pour ce qu'il apporte à la compréhension des phénomènes asymptotiques.

Donnons maintenant le plan du chapitre :

A la section 10.1, nous obtiendrons à l'aide de la technique des développements formels asymptotiques les équation volumiques que vérifient les composantes secondaires du champ lointain, du champ proche et du champ de fente :  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ .

Aux sections 10.2 et 10.3, nous développerons une méthode de raccord de développement asymptotique. Ainsi, à la section 10.2, nous raccorderons le champ lointain et le champ proche. Nous obtiendrons alors un couplage entre le comportement des  $u_i^k$  au voisinage de  $A$  et le comportement des  $\mathcal{U}_i^k$  au voisinage de l'infini dans le demi espace. A la section 10.3, nous raccorderons le champ proche et le champ de fente. Nous obtiendrons cette fois un couplage entre le comportement du champ proche au voisinage de l'infini dans la fente et la valeur du champ de fente en  $x = 0$ . Les sections 10.2 et 10.3 sont très similaires. Nous recommandons aux lecteurs intéressés de les étudier en parallèle.

## 10.1 Les Ansatz pour les développements asymptotiques

### 10.1.1 Principe de la technique.

La technique des développements formels ou "Ansatz" est classique pour la recherche des solutions des équations différentielles ou aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre (petit ou grand). Elle repose sur les principes suivants :

- on postule des formes de développements dans des géométries normalisées (ce qui dans notre cas a déjà été effectué dans l'introduction en (8.17), (8.20) et (8.23)).

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) u_i^k, \\ \mathcal{U}^\varepsilon = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \mathcal{U}_i^k, \\ U^\varepsilon = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) U_i^k. \end{array} \right. \quad (10.1)$$

- on autorise l'interversion de ce développement avec les opérations courantes de l'analyse et on recherche des équations portant sur les différents termes du développement (c'est l'objet de cette section).

**Remarque 10.1** *Le postulat des séries du champ lointain et du champ proche peut ressembler à une révélation. En vérité, ce postulat provient de nombreux essais de développements formels. Parmi ceux que nous avons essayés, c'est le seul qui convient à l'étude suivante. Pourtant ceci n'est pas suffisant pour affirmer que nous ayons un bon développement de  $u^\varepsilon$  suivant  $\varepsilon$ . Il est nécessaire pour le valider d'obtenir des estimations de convergence.*

### 10.1.2 Ansatz du champ lointain dans le demi espace

Le développement formel (8.17) en champ lointain dans le demi espace étant présumé, cherchons ce que l'on peut tirer de l'interversion des opérateurs aux dérivées partielles avec la somme de ce développement.

Nous partons de l'équation de Helmholtz posée dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} -f = \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) (\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k) + o(\varepsilon^\infty) \\ = \Delta u^0 + \omega^2 u^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) (\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k) + o(\varepsilon^\infty). \end{cases} \quad (10.2)$$

et ceci pour tout  $\varepsilon$ ; par conséquent on a :

$$\begin{cases} \Delta u^0 + \omega^2 u^0 = -f, & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0, & \text{dans } \Omega, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \llbracket 0, i \rrbracket. \end{cases} \quad (10.3)$$

Traisons de la même manière la condition aux limites, pour tout  $\varepsilon$ , nous avons :

$$0 = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \frac{\partial u_i^k}{\partial n} + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \Sigma_\varepsilon. \quad (10.4)$$

Avec cette fois une subtilité pour le lieu de la relation, on a :

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \forall (i, k) \in N. \quad (10.5)$$

**Remarque 10.2** *Il ne faut pas prendre cette égalité au sens  $H^{-1/2}(\mathbb{R})$ ;  $l^*$  nous laisse la possibilité d'introduire des mesures ponctuelles comme  $\delta$ ,  $\delta'$ , ... Pour se représenter la situation, il faut se dire que les fonctions  $u_i^k$  sont singulières au voisinage de  $A$ .*

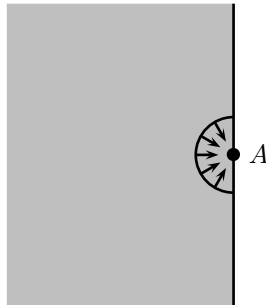


FIG. 10.1 – Singularité du champ lointain en  $A$

La condition de radiation s'exprimant sur toute surface  $\Gamma_R$  éloignée de l'origine de  $R$  suffisamment grand (c'est à dire telle que  $\Omega_R$  contienne le support de la source et l'obstacle)

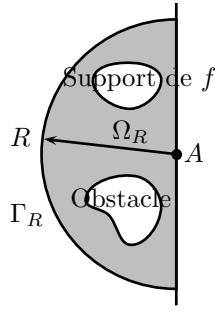


FIG. 10.2 – Support de la condition de radiation

nous avons :

$$0 = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + T^R u^\varepsilon = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial n} + T^R u_i^k\right) + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{sur } \Gamma_R, \quad (10.6)$$

où l'opérateur linéaire  $T^R$  est donné en (3.21) et (3.22). Nous obtenons que chaque  $u_i^k$  vérifie une condition de radiation. Remarquons que la linéarité de  $T^R$  a joué un rôle capital.

### 10.1.3 Ansatz du champ proche

Le développement du champ proche (8.23) étant présupposé, effectuons l'inversion de la somme et des opérateurs aux dérivées partielles. Du changement de variable (8.22) il vient pour les opérateurs dérivations :

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla_{X,Y} = \nabla_{x,y}. \quad (10.7)$$

$u^\varepsilon$  est solution au voisinage de la fente de l'équation de Helmholtz homogène :

$$\begin{cases} 0 = \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta \mathcal{U}^\varepsilon + \omega^2 \mathcal{U}^\varepsilon \\ = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) (\varepsilon^{-2} \Delta \mathcal{U}_i^k + \omega^2 \mathcal{U}_i^k) + o(\varepsilon^\infty) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \text{ ou } \widehat{\Omega}_N^*. \quad (10.8)$$

Et par conséquent, tous les  $\mathcal{U}_i^k$  sont solutions de problèmes de Laplace dans  $\mathcal{B}_1$ . Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  nous avons :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U}_k^k = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \Delta \mathcal{U}_{k+1}^k = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \Delta \mathcal{U}_i^k + 4 \mathcal{U}_{i-2}^k = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \quad \forall i \geq k+2. \end{cases} \quad (10.9)$$

Sur  $\partial\Omega_\varepsilon$ ,  $u^\varepsilon$  vérifie la condition de Neumann homogène :

$$0 = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{U}^\varepsilon}{\partial n} = \sum_{(i,k) \in N} (\omega\varepsilon)^{i-1} (\text{Log } \omega\varepsilon)^k \frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial n} + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \text{ ou } \partial\widehat{\Omega}_N^*. \quad (10.10)$$

Nous tirons que tous les  $\mathcal{U}_i^k$  vérifient la condition de Neumann homogène :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_i^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\widehat{\Omega}_N^* \quad \forall (i,k) \in N. \quad (10.11)$$

**Remarque 10.3** *Il ne faut pas associer directement à  $\mathcal{U}_i^k$  le cadre variationnel classique de l'équation de Laplace en domaine non borné. En effet, nous verrons que les fonctions  $\mathcal{U}_i^k$  sont croissantes à l'infini dans la fente et le demi espace.*

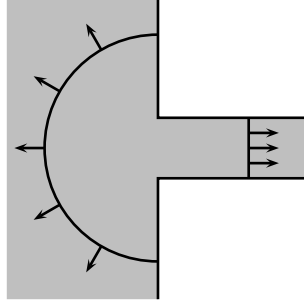


FIG. 10.3 – Les croissances des  $\mathcal{U}_i^k$  à l'infini

#### 10.1.4 Ansatz du champ de fente

Le développement étant postulé en (8.20), cherchons ce que l'on peut tirer de l'interversion de la somme de ce développement et des opérateurs aux dérivées partielles.

Le changement de variable (8.19) affecte la dérivation en la variable normale à la fente :

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}. \quad (10.12)$$

De la même façon que dans les deux dernières sections, on obtient que les  $\mathcal{U}_i^k$  vérifient les équations volumiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U_k^k}{\partial Y^2} = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_S^*, \\ \frac{\partial^2 U_{k+1}^k}{\partial Y^2} = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_S^*, \\ \frac{\partial^2 U_{i+2}^k}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U_i^k}{\partial X^2} + \omega^2 U_i^k = 0, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_S^*, \quad \forall i \geq k. \end{array} \right. \quad (10.13)$$

et la condition de Neumann homogène sur les bords horizontaux de  $\mathcal{O}_1$

$$0 = \frac{\partial U_i^k}{\partial Y}, \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \times \{1\}. \quad (10.14)$$

Chaque  $U_i^k$  ne dépend que de  $X$ . En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $i = k$  ou  $k + 1$

$$\left. \begin{array}{l} (10.13) \implies U_i^k(X, Y) = a(X) + Y b(X) \\ (10.14) \end{array} \right\} \implies U_i^k(X, Y) = U_i^k(X). \quad (10.15)$$

Puis par récurrence, pour  $i \geq k$

$$\left. \begin{array}{l} U_i^k(X, Y) = U_i^k(X) \\ (10.13) \end{array} \right\} \implies U_{i+2}^k(X, Y) = a(X) + Y b(X) + Y^2 c(X) \quad (10.16)$$

Nous concluons à l'aide de (10.14). Nous identifierons dans la suite  $U_i^k$  définie sur  $\mathcal{O}_1$  avec les fonctions du même nom de la demie droite réelle positive.



Nous tirons donc de (10.13) que chaque  $U_i^k(x)$  vérifie une équation de Helmholtz unidimensionnelle :

$$\frac{d^2 U_i^k}{dx^2} + \omega^2 U_i^k = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^+. \quad (10.17)$$

De la condition de radiation, on tire que chaque  $U_i^k$  vérifie la condition de radiation unidimensionnelle :

$$\frac{dU_i^k}{dx}(a) - i\omega U_i^k(a) = 0. \quad (10.18)$$

Nous avons ici une solution explicite pour  $U_i^k$  :

$$U_i^k(x) = U_i^k(0) \exp(i\omega x), \quad \forall (i, k) \in N. \quad (10.19)$$

**Remarque 10.4** *Comme à la partie I, nous approchons la solution exacte par une fonction 1D dans la fente :*

$$\tilde{U}^\varepsilon(x) = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) U_i^k(x). \quad (10.20)$$

*La différence entre ces deux méthodes d'approximation se situe plutôt au niveau de la condition de couplage. Le raccord avec le champ 2D (champ lointain) ne se fait plus brutalement mais par l'intermédiaire du champ proche.*

## Bibliographie sur les techniques de raccord

Dans la suite, nous allons écrire le raccord entre les développements en champ lointain et proche d'une part, et en champ proche et de fente d'autre part. Avant de commencer cette étude, effectuons une étude bibliographique des techniques de raccord en partant du général pour finir sur la littérature spécifique aux travaux sur la propagation des ondes dans la fente.

Les "matching methods" sont une généralisation de l'idée suivante. Considérons un champ  $u$  dont on cherche une approximation décomposée en un champ lointain et une couche limite (cf. figure 10.4). La vitesse de variation du champ de la couche limite est celle de la variable rapide  $X = x/\varepsilon$  et le champ lointain varie comme la variable  $x$ . Le raccord de ces deux champs s'exprime :

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_{\text{lointain}}(x, y) = \lim_{X \rightarrow +\infty} u_{\text{couche\_limite}}(X, y). \quad (10.21)$$

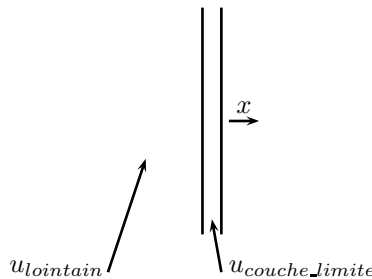


FIG. 10.4 – Idée de raccordement

Malheureusement, dans beaucoup de cas, cette formule échoue. Ceci est principalement dû au fait que la majorité des problèmes asymptotiques ont des champs lointains et des couches limites singuliers. Ainsi il n'est pas possible de définir ces limites. Une deuxième raison est que l'obtention d'un modèle d'ordre élevé nécessite plusieurs relations de couplage, ce que ne fait pas (10.21).

C'est pourquoi des techniques évoluées de raccord de développements asymptotiques ont été introduites. Elles ont dans certains cas la capacité de traiter les croissances et singularités. Grossièrement, nous divisons les travaux récents en deux parties :

- La plus populaire en occident est la technique des *matched asymptotic expansions*, introduite par l'école anglo-saxonne. On pourra en trouver une étude bibliographique dans [27]. Ces techniques font appels à des principes de raccord qui sont postulés à priori et non obtenus par le calcul. Ceci a pour conséquence qu'elles ne sont pas capables de traiter certains cas dégénérés. C'est en particulier vrai pour notre application.
- Les plus abouties sont les techniques développées par l'école russe. Notre travail se situe dans cette optique. On pourra en trouver une présentation ainsi qu'une étude bibliographique dans [51]. Notre travail est tout à fait similaire à ces techniques et se base exactement sur les mêmes idées que celles développés par cette école.

Bien que ces techniques soient plus ou moins maîtrisées par les différentes communautés scientifiques, les raccordements de développements asymptotiques ont eu un impact important dans beaucoup de domaines de la physique. L'importance de ces techniques a été certainement la plus visible dans le domaine de la mécanique des fluides. Elles permettent en effet de comprendre sans moyen de calcul numérique évolué l'apparition de couches limites dans de multiples configuration (bord de fuite d'une aile d'avion, voisinage d'une paroi, ...).

Concernant l'étude des fentes, nous nous devons de citer les travaux de Tuck [44, 87]. Ils sont similaires par la géométrie, mais différents de par la nature du problème étudié. Tuck s'intéresse à la propagation de la houle entre deux bassins reliés par un tuyau d'épaisseur faible

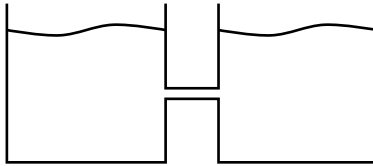


FIG. 10.5 – Les domaines d'étude de Tuck

Cette étude, effectuée par des mécaniciens, est plus simple à plusieurs égards :

- l'équation étudiée n'est pas l'équation de Helmholtz mais l'équation de Laplace
- seul l'ordre 0 est étudié
- aucune preuve de convergence n'est donnée (le travail est validé analytiquement à l'aide de transformation conforme et d'expérimentation physique, essais en bassin).

Pour l'équation de Helmholtz, trouver le bon développement asymptotique est un vrai défi. En effet, les développements asymptotiques classiques du champ diffracté par une fente d'épaisseur nulle ou trou, sont de nature totalement différentes.

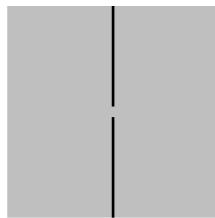


FIG. 10.6 – Trou dans une paroi

Ceci a amené dans un premier temps à des développements hâtifs faux [66]. McIver et Rawlins [70] ont alors proposé un développement asymptotique de la solution à l'ordre 2 pour le champ lointain

et à l'ordre 1 pour le champ proche et de fente. Leurs techniques pour le champ proche, basées sur une transformation conforme, ne leur permettaient pas de traiter les équations de Laplace inhomogène (c.f. (10.9)). C'est pourquoi, ils n'ont pas pu obtenir l'ordre 2 pour le champ proche. De plus, cet article ne contient pas de preuves de convergence mais des comparaisons pour des cas donnés avec une solution analytique obtenue par Noble [73]. Cet article d'un nombre important de configurations géométriques :

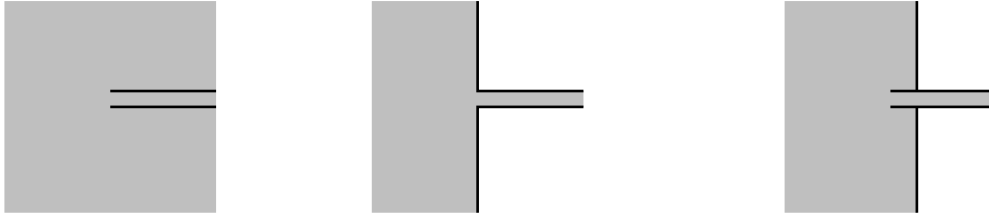


FIG. 10.7 – Les géométries étudiées par McIver et Rawlins

Nous ne pouvons terminer cette section sans parler de la technique concurrente la plus répandue : les techniques de développements multiéchelles. Elle consiste à faire coïncider sur chacune des zones plusieurs échelles et à considérer des fonctions qui dépendent à la fois des variables lentes et des variables rapides.

$$u(x, y) \simeq \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u^i(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}). \quad (10.22)$$

Nous ne doutons pas du fait que ces techniques bénéficient, par rapport à la technique de raccord, d'avantages théoriques importants. En effet, il est souvent plus facile d'écrire les preuves d'estimations d'erreurs. Toutefois les techniques de raccordement de développement asymptotique bénéficient d'une contrepartie appréciable : la facilité de définir des méthodes de calculs numériques à partir des problèmes formels obtenus. Ce sont ces considérations numériques qui nous ont fait choisir ces méthodes.

L'idée d'introduire les développements asymptotiques raccordés pour le traitement numérique a été introduite notamment dans la thèse de Dorra Drissi [32]. De plus, on pourra se référer à [68, 69, 74] pour une étude bibliographique au sujet des méthodes multi-échelles.

## 10.2 Raccord entre le champ proche et le champ lointain

Nous venons d'exhiber des systèmes d'équations différentielles pour les  $u_i^k$  et  $\mathcal{U}_i^k$ . Nous allons maintenant rechercher le comportement de  $u_i^k$  proche de l'origine et le comportement de  $\mathcal{U}_i^k$  proche de l'infini dans le demi espace. Nous nous rapprocherons ainsi de notre objectif : définir, à l'aide de problèmes bien posés, les  $u_i^k$  et  $\mathcal{U}_i^k$ .

Dans cette partie, nous considérerons des développements asymptotiques de  $u_i^k$  proche de l'origine et de  $\mathcal{U}_i^k$  proche de l'infini. Nous allons dériver des raccords entre ces développements asymptotiques. Ces raccords consisteront à exprimer le fait que les développements en champ lointain et champ proche sont des approximations de la même fonction.

Plutôt que d'effectuer le raccord sur une surface précise (par exemple le demi cercle de rayon  $\eta_H$ ), l'idée est de faire coïncider (jusqu'à un certain degré de précision) le champ proche et le champ lointain dans le demi espace dans une couronne "épaisse" correspondant grosso modo à des valeurs de  $\eta_H$  telles que :

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda. \quad (10.23)$$

Cette zone correspond en fait aux points qui sont proches vis à vis de la longueur d'onde mais loins vis-à-vis de la hauteur de la fente, de l'origine. Plus précisément, nous donnons un sens à la

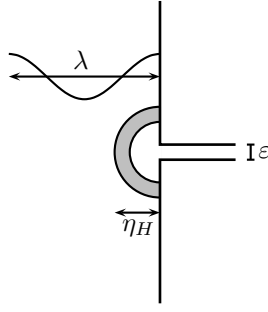


FIG. 10.8 – La zone de raccord

relation (10.23) en considérant que  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  et que  $\eta_H$  est un élément de  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\eta_1(\varepsilon) < \eta_H < \eta_2(\varepsilon) \quad (10.24)$$

où  $\eta_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , sont deux fonctions positives de  $\varepsilon$  qui vérifient :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_i(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_i(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \end{cases} \quad (10.25)$$

Dans cette zone, nous exprimerons de façon approchée (à  $o(\varepsilon^\infty)$  près) la relation :

$$u^\varepsilon(\eta_H, \theta) = \mathcal{U}^\varepsilon(\eta_H/\varepsilon, \theta). \quad (10.26)$$

Plus précisément, nous imposons la relation suivante, à prendre comme égalité formelle entre deux séries :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (\omega\varepsilon/2)^i u_i(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \eta_H, \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} (\omega\varepsilon/2)^i \mathcal{U}_i(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \eta_H/\varepsilon, \theta). \quad (10.27)$$

Nous avons ici injecté les développements (9.112) et (9.57) dans (10.26).

Ainsi, nous avons besoin de connaître le comportement du champ lointain au voisinage de l'origine et le comportement du champ proche au voisinage de l'infini. Proche de l'origine, nous verrons, au paragraphe 10.2.1, que chaque  $u_i$  admet le développement généralisé suivant :

$$u_i(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\omega r}{2}\right)^{-l} u_{i,l}(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \text{Log}(\omega r/2), \theta), \quad (10.28)$$

où  $u_{i,l}$  désigne un polynôme de degré au plus  $i$  en  $\text{Log}(\omega\varepsilon/2)$  et de degré au plus 1 en  $\text{Log}(\omega r/2)$ , dont chaque coefficient est une fonction de  $\theta$ .

De même, proche de l'infini, nous verrons, au paragraphe 10.2.2, que chaque  $\mathcal{U}_i^k$  se développe sous la forme suivante :

$$\mathcal{U}_i(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \rho, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \rho^l \mathcal{U}_{i,l}(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \text{Log}(\rho), \theta), \quad (10.29)$$

où  $\mathcal{U}_{i,l}$  désigne un polynôme de degré au plus  $i$  en  $\text{Log}(\omega\varepsilon/2)$  et de degré au plus 1 en  $\text{Log}(\rho)$  dont chaque coefficient est une fonction de  $\theta$ .

Par conséquent, le problème de raccord revient à assurer la relation :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\omega\eta_H}{2}\right)^{-l} u_{i,l}(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}\right)^l \mathcal{U}_{i,l}(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta).$$

Nous avons ici injecter les équations (10.28) et (10.29) dans (10.27).

Nous modifions alors le terme de droite par le changement de variables  $i' = i - l$ ,  $l' = -l$  :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\omega\eta_H}{2}\right)^{-l} u_{i,l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\omega\eta_H}{2}\right)^{-l} \mathcal{U}_{i-l,-l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right).$$

Les fonctions  $u_{i,l}$  et  $\mathcal{U}_{i,l}$  ne dépendant que faiblement de  $\omega\varepsilon/2$  et  $\omega\eta_H/2$  (dépendance logarithmique), il est tout à fait naturel d'identifier ordre par ordre ces deux séries formelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,l} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l > i \iff u_{i,l} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l > i, \\ \mathcal{U}_{i-l,-l} = 0, \quad \forall i < 0, \quad \forall l \leq i \iff \mathcal{U}_{i,l} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l > i, \\ u_{i,l} = \mathcal{U}_{i-l,-l}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \leq i \iff \begin{cases} u_{i,l} = \mathcal{U}_{i-l,-l}, & \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \llbracket 0, i \rrbracket, \\ \mathcal{U}_{i,l} = u_{i-l,-l}, & \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \llbracket 0, i \rrbracket. \end{cases} \end{array} \right. \quad (10.30)$$

**Principe 10.5** *Le principe de raccord entre le champ proche et le champ lointain s'exprime :*

$$u_{i,l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta\right) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l > i, \quad (10.31)$$

$$\mathcal{U}_{i,l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l > i, \quad (10.32)$$

$$u_{i,l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta\right) = \mathcal{U}_{i-l,-l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \llbracket 0, i \rrbracket, \quad (10.33)$$

$$\mathcal{U}_{i,l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right) = u_{i-l,-l} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta\right), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \llbracket 0, i \rrbracket. \quad (10.34)$$

C'est ce principe qui nous donnera le comportement des  $u_i^k$  au voisinage de  $A$  et des  $\mathcal{U}_i^k$  au voisinage de l'infini. Le reste de cette section concerne les points suivants :

- Au paragraphe 10.2.1, nous étudions les propriétés du champ lointain au voisinage de  $A$ .
- Au paragraphe 10.2.2, nous ferons le même travail pour le champ proche, c'est à dire l'étude de propriétés des  $\mathcal{U}_i^k$  au voisinage de l'infini dans le demi espace.
- Au paragraphe 10.2.3, nous exploitons une partie du principe de raccord. Nous tirons les conséquences des relations (10.31) et (10.32).
- Au paragraphe 10.2.4, nous terminons l'exploitation du principe de raccord. Nous tirons les conséquences des relations (10.33) et (10.34).

A la fin de cette section nous aurons montré formellement la

**Proposition 10.6** *Pour tout  $(i, k) \in N$  :*

*Une représentation modale de  $u_i^k$  est donnée sous la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des complexes } (a_i^k)^p \text{ et } (b_i^k)^p, \quad p \in \mathbb{N} \text{ tels que :} \\ u_i^k(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p J_p(\omega r) \cos(p\theta) + \sum_{p=0}^{+\infty} (b_i^k)^p Y_p(\omega r) \cos(p\theta). \end{array} \right. \quad (10.35)$$

*Une représentation modale de  $\mathcal{U}_i^k$  est donnée sous la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des scalaires } (\alpha_i^k)^p \in \mathbb{C} \text{ et } (\beta_i^k)^p \in \mathbb{C} \text{ pour } (p, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \text{ tels que :} \\ \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{i-k} (\alpha_{i-l}^k)^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos(p\theta) \\ + \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{i-k} (\beta_{i-l}^k)^p \left[ Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log} \rho \right] \rho^{-p+l} \cos(p\theta). \end{array} \right. \quad (10.36)$$

De plus les coefficients de ces développements sont reliés, pour  $p \in \mathbb{N}$ , par :

$$\begin{cases} (b_i^k)^p = (\beta_{i-p}^k)^p, & \text{pour } 0 \leq p \leq i - k, \\ (b_i^k)^p = 0, & \text{pour } p > i - k. \end{cases} \quad (10.37)$$

$$\begin{cases} (\alpha_i^k)^p = (a_{i-p}^k)^p + \frac{2}{\pi} (b_{i-p}^{k-1})^p, & \text{pour } 0 \leq p \leq i - k, \\ (\alpha_i^k)^p = 0, & \text{pour } p > i - k, \end{cases} \quad (10.38)$$

où nous avons posé la notation  $(\alpha_i^{-1})^p = 0$ .

### 10.2.1 Développement du champ lointain au voisinage de l'origine

#### Représentation modale de $u_i^k$ en zone proche

Soit  $R \in \mathbb{R}^{*,+}$ , un scalaire tel que  $R$  est inférieur à la distance de l'origine à l'obstacle et à la distance de l'origine au support de la source. Considérons la demie boule de rayon  $R$ ,  $\Omega_R = [0; R[_r \times ]0; \pi[_\theta$ :

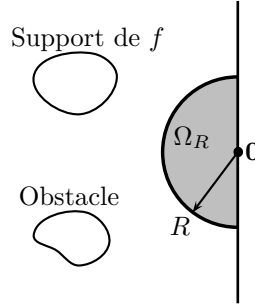


FIG. 10.9 – Le domaine  $\Omega_R$

Dans la proposition suivante,  $J_p$  désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $p$  et  $Y_p$  est la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre  $p$ . Pour plus de détails, on peut se référer à l'annexe A.

**Proposition 10.7** *Pour tout  $(i, k) \in \mathbb{N}$ ,  $u_i^k$  admet la représentation modale :*

$$\begin{cases} \text{Il existe des complexes } (a_i^k)^p \text{ et } (b_i^k)^p, p \in \mathbb{N} \text{ tels que pour } (r, \theta) \in \overline{\Omega_R} \setminus \{0\} \\ u_i^k(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p J_p(\omega r) \cos(p\theta) + \sum_{p=0}^{+\infty} (b_i^k)^p Y_p(\omega r) \cos(p\theta). \end{cases} \quad (10.39)$$

**Preuve formelle.** La fonction  $u_i^k$  vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_i^k \in C^\infty(\overline{\Omega_R} \setminus \{0\}), \\ \Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0, & \text{dans } \overline{\Omega_R} \setminus \{0\}, \\ \frac{\partial u_i^k}{\partial n} = 0, & \text{en } X = 0. \end{cases} \quad (10.40)$$

Si nous effectuons une décomposition spectrale suivant la variable angulaire, nous avons :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} u^p(r) \cos(p\theta). \quad (10.41)$$

Chaque  $u^p$  est une fonction  $C^\infty(]0, R[)$  et vérifie une équation de Bessel d'ordre  $p$  :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} u^p(r) \right] + \left[ \omega^2 - \frac{p^2}{r^2} \right] u^p(r) = 0. \quad (10.42)$$

Il est classique de montrer que  $u^p$  est dans un espace vectoriel à 2 dimensions :

$$u^p(r) = a^p J_p(\omega r) + b^p Y_p(\omega r). \quad (10.43)$$

### Développement généralisé de $u_i^k$ au voisinage de l'origine

Nous nous plaçons ici à  $i$  et  $k$  donnés dans  $N$ , et nous considérons  $u_i^k$ . Nous reprenons ici le développement modal de  $u_i^k$  fourni à la proposition 10.7 et nous développons  $u_i^k$  suivant  $r$  proche de 0. Ces développements passent par ceux des  $J_p(\omega r)$  et  $Y_p(\omega r)$ . Comme on peut le voir à la section A.2, chaque  $J_p(\omega r)$  et  $Y_p(\omega r)$  est développable sous la forme d'une série en puissance de  $\omega r/2$  et  $\text{Log}(\omega r/2)$  :

$$\begin{cases} J_p(\omega r) &= \sum_{l=p}^{+\infty} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l, \\ Y_p(\omega r) &= \sum_{l=-p}^{+\infty} Y_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l + \sum_{l=p}^{+\infty} \frac{2}{\pi} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \text{Log} \left( \frac{\omega r}{2} \right). \end{cases} \quad (10.44)$$

avec  $J_{p,l} = 0$  pour  $p+l$  impair et  $Y_{p,l} = 0$ ,  $p+l$  impair .

Nous plongeons ce développement dans un développement plus riche avec un certain nombre de coefficients nuls (ceci a pour effet de simplifier très largement les calculs qui vont suivre).

$$\begin{cases} J_p(\omega r) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l, \\ Y_p(\omega r) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \text{Log} \left( \frac{\omega r}{2} \right). \end{cases} \quad (10.45)$$

avec  $J_{p,l} = 0$  pour  $l < p$  ou  $p+l$  impair et  $Y_{p,l} = 0$ , pour  $l < -p$  ou  $p+l$  impair .

Ainsi, si nous injectons (10.45) dans (10.39), nous tirons le développement de  $u_i^k$  au voisinage de l'origine :

$$\begin{cases} u_i^k(r, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (a_i^k)^p J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \cos(p\theta) \\ &+ \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (b_i^k)^p Y_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \cos(p\theta) \\ &+ \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (b_i^k)^p \frac{2}{\pi} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \text{Log} \left( \frac{\omega r}{2} \right) \cos(p\theta). \end{cases} \quad (10.46)$$

### Développement généralisé de $u_i$ au voisinage de l'origine

Nous donnons ici la justification du développement (10.28).

Nous nous plaçons à  $i \in \mathbb{N}$  donné et nous considérons le champ lointain d'ordre  $i$ , composé de toutes les contributions secondaires d'ordre  $k$  :

$$u_i(\text{Log}(\omega \varepsilon/2), r, \theta) = \sum_{k=0}^i \text{Log}^k(\omega \varepsilon/2) u_i^k(r, \theta). \quad (10.47)$$

Nous injectons le développement (10.46) à l'intérieur de cette somme et nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} u_i(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), r, \theta) &= \sum_{k=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\omega r}{2}\right)^l \cos(p\theta) (a_i^k)^p J_{p,l} \\ &+ \sum_{k=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\omega r}{2}\right)^l \cos(p\theta) (b_i^k)^p Y_{p,l} \\ &+ \sum_{k=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\omega r}{2}\right)^l \cos(p\theta) (b_i^k)^p J_{p,l} \frac{2}{\pi} \text{Log}\left(\frac{\omega r}{2}\right). \end{aligned} \right. \quad (10.48)$$

Nous définissons alors les fonctions  $u_{i,l}$  telles que l'on ait la relation :

$$u_i(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\omega r/2)^{-l} u_{i,l}(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \text{Log}(\omega r/2), \theta). \quad (10.49)$$

**Définition 10.8** Soit  $i$  un élément de  $\mathbb{N}$  et  $l$  un élément de  $\mathbb{Z}$  :

Introduisons  $u_{i,l}$  le polynôme d'ordre au plus  $i$  en  $\text{Log}(\omega\varepsilon/2)$  et d'ordre au plus 1 en  $\text{Log}(\omega r/2)$  dont chaque coefficient est une série formelle de fonctions de  $\theta$  :

$$\left\{ \begin{aligned} u_{i,l}(\text{Log}(\frac{\omega\varepsilon}{2}), \text{Log}(\frac{\omega r}{2}), \theta) &= \sum_{k=0}^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left[ \sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p J_{p,-l} \cos(p\theta) \right] \\ &+ \sum_{k=0}^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left[ \sum_{p=0}^{+\infty} (b_i^k)^p Y_{p,-l} \cos(p\theta) \right] \\ &+ \sum_{k=0}^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \text{Log}\left(\frac{\omega r}{2}\right) \left[ \sum_{p=0}^{+\infty} (b_i^k)^p \frac{2}{\pi} J_{p,-l} \cos(p\theta) \right]. \end{aligned} \right. \quad (10.50)$$

Notons que pour  $l$  strictement positif  $J_{p,-l} = 0$ . Ainsi pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $l > 0$ , nous avons :

$$u_{i,l}(\text{Log}(\frac{\omega\varepsilon}{2}), \text{Log}(\frac{\omega r}{2}), \theta) = \sum_{k=0}^i \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \left[ \sum_{p=0}^{+\infty} (b_i^k)^p Y_{p,-l} \cos(p\theta) \right]. \quad (10.51)$$

## 10.2.2 Développement du champ proche au voisinage de l'infini

### Représentation modale de $\mathcal{U}_i^k$ au voisinage de l'infini

Introduisons le sous domaine de  $\hat{\Omega}_N^*$ , des points du demi espace tel que  $\rho > 1$  :

$$]1; +\infty[_\rho \times ]0; \pi[_\theta. \quad (10.52)$$

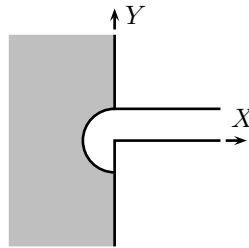


FIG. 10.10 – Domaine de développement modal du champ proche dans le demi espace



**Proposition 10.9** Pour tout  $(i, k) \in N$  :

La fonction  $\mathcal{U}_i^k$  admet la représentation modale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des scalaires } (\alpha_i^k)^p \in \mathbb{C} \text{ et } (\beta_i^k)^p \in \mathbb{C} \text{ pour } p \in \mathbb{N} \text{ tels que pour } \rho > 1 \text{ et } \theta \in [0; \pi] : \\ \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{i-k} (\alpha_{i-l}^k)^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos(p\theta) \\ + \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{i-k} (\beta_{i-l}^k)^p \left[ Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right] \rho^{-p+l} \cos(p\theta). \end{array} \right. \quad (10.53)$$

**Preuve formelle.** Introduisons la série formelle :

$$\mathcal{U}(h) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k \mathcal{U}_i^k \quad (10.54)$$

que nous plongeons dans un développement plus grand avec  $\mathcal{U}_i^k = 0$  pour tout  $(i, k) \notin N$  :

$$\mathcal{U}(h) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k \mathcal{U}_i^k. \quad (10.55)$$

Comme  $\mathcal{U}_i^k$  vérifie (10.9) et (10.11) nous tirons pour  $\mathcal{U}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U} + h^2 \mathcal{U} = 0, \quad \text{pour } (\rho, \theta) \in [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, \quad \text{en } X = 0. \end{array} \right. \quad (10.56)$$

Ainsi,  $\mathcal{U}$  se représente sous la forme :

$$\mathcal{U}(h) = \sum_{p=0}^{+\infty} \gamma^p(h) J_p(h\rho) + \delta^p(h) Y_p(h\rho). \quad (10.57)$$

De plus  $J_p$  et  $Y_p$  se développent en séries sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_p(h\rho) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{p,l} \left(\frac{h\rho}{2}\right)^l \\ Y_p(h\rho) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_{p,l} \left(\frac{h\rho}{2}\right)^l + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \left(\frac{h\rho}{2}\right)^l \text{Log } \frac{h\rho}{2}. \end{array} \right. \quad (10.58)$$

Il est alors naturel de rechercher  $\gamma^p$  et  $\delta^p$  sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^p(h) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k (\gamma_i^k)^p, \\ \delta^p(h) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k (\delta_i^k)^p, \end{array} \right. \quad (10.59)$$

Ainsi, nous tirons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,k} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k \mathcal{U}_i^k = \sum_{i,k,l,p} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+l} (\text{Log } \frac{h}{2})^k (\gamma_i^k)^p J_{p,l} \rho^l \cos p\theta \\ + \sum_{i,k,l,p} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+l} (\text{Log } \frac{h}{2})^k (\delta_i^k)^p \left[ Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right] \rho^l \cos p\theta \\ + \sum_{i,k,l,p} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+l} (\text{Log } \frac{h}{2})^{k+1} (\delta_i^k)^p \frac{2}{\pi} J_{p,l} \rho^l \cos p\theta \end{array} \right.$$

Par changement de variable, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,k} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k \mathcal{U}_i^k = \sum_{i,k,l,p} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k \left[ (\gamma_{i-l}^k)^p + \frac{2}{\pi} (\delta_{i-l}^{k-1})^p \right] J_{p,l} \rho^l \cos p\theta \\ + \sum_{i,k,l,p} \left(\frac{h}{2}\right)^i (\text{Log } \frac{h}{2})^k (\delta_{i-l}^k)^p \left[ Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right] \rho^l \cos p\theta. \end{array} \right.$$

En identifiant ordre par ordre, et en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_i^k)^p = (\gamma_{i-p}^k)^p + \frac{2}{\pi} (\delta_{i-p}^{k-1})^p, \\ (\beta_i^k)^p = (\delta_{i+p}^k)^p. \end{array} \right. \quad (10.60)$$

il suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) = \sum_{l,p} (\alpha_{i-l}^k)^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \\ + \sum_{l,p} (\beta_{i-l}^k)^p \left[ Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right] \rho^{-p+l} \cos p\theta. \end{array} \right. \quad (10.61)$$

Pour  $i < k$ , nous avons :

$$0 = \sum_{l,p} (\alpha_{i-l}^k)^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta + \sum_{l,p} (\beta_{i-l}^k)^p \left[ Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right] \rho^{-p+l} \cos p\theta. \quad (10.62)$$

Ainsi, en annulant tous les termes, nous tirons en particulier :

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha_i^k)^p J_{p,p} = 0, \\ (\beta_i^k)^p Y_{p,-p} = 0, \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_i^k)^p = 0, \\ (\beta_i^k)^p = 0. \end{array} \right. \quad (10.63)$$

En effet  $J_{p,p}$  et  $Y_{p,-p}$  sont différents de 0. Ce qui implique pour  $(i, k)$  quelconque :

$$\forall l > i - k \quad (\alpha_{i-l}^k)^p = 0 \text{ et } (\beta_{i-l}^k)^p = 0. \quad (10.64)$$

De plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{p,l} = 0, \quad \forall l < p, \\ Y_{p,l} = 0, \quad \forall l < -p. \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} J_{p,p+l} = 0, \quad \forall l < 0, \\ Y_{p,-p+l} = 0, \quad \forall l < 0. \end{array} \right. \quad (10.65)$$

Nous tirons donc la conclusion de (10.61), (10.64) et (10.65)

### Développement généralisé de $\mathcal{U}_i^k$

Nous ordonnons ici le développement modal de  $\mathcal{U}_i^k$  suivant les puissances de  $\rho$  croissantes. Pour cela introduisons la convention de nullité :

$$(\alpha_i^k)^p = 0 \text{ et } (\beta_i^k)^p \text{ pour tout } (i, k) \notin N. \quad (10.66)$$

Nous avons alors (en utilisant de plus (10.65)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\alpha_{i-l}^k)^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos(p\theta) \\ + \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\beta_{i-l}^k)^p \left[ Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \right] \rho^{-p+l} \cos(p\theta). \end{array} \right. \quad (10.67)$$

Par changement de variable, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\alpha_{i+p-l}^k)^p J_{p,l} \rho^l \cos(p\theta) \\ &+ \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\beta_{i-p-l}^k)^p \left[ Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right] \rho^l \cos(p\theta). \end{aligned} \right. \quad (10.68)$$

**Développement généralisé de  $\mathcal{U}_i$**

Rappelons que  $\mathcal{U}_i(\text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2})$  est défini par :

$$\mathcal{U}_i(\text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2}) = \sum_{k=0}^i \left( \text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k. \quad (10.69)$$

En injectant (10.68), nous tirons le développement généralisé de  $\mathcal{U}_i$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{U}_i(\text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2}, \rho, \theta) &= \sum_{k=0}^i \sum_{l,p} \left( \text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k (\alpha_{i+p-l}^k)^p J_{p,l} \rho^l \cos(p\theta) \\ &+ \sum_{k=0}^i \sum_{l,p} \left( \text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k (\beta_{i-p-l}^k)^p \left[ Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right] \rho^l \cos(p\theta). \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons enfin introduire les fonctions  $\mathcal{U}_{i,l}$  qui vérifient (10.29) :

**Définition 10.10** Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $l \in \mathbb{Z}$ , soit

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{U}_{i,l}(\text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log } \rho, \theta) &= \sum_{k=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k (\alpha_{i+p-l}^k)^p J_{p,l} \cos(p\theta) \\ &+ \sum_{k=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \text{Log } \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k (\beta_{i-p-l}^k)^p \left[ Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right] \cos(p\theta). \end{aligned} \right.$$

avec la convention de nullité :

$$(\alpha_i^k)^p = 0 \text{ et } (\beta_i^k)^p = 0 \text{ pour tout } (i, k) \notin \mathbb{N}. \quad (10.70)$$

### 10.2.3 Deux conséquences immédiates du principe de raccord

Nous avons donné, aux propositions 10.7 et 10.9, les représentation modales du champ proche et du champ lointain, nous allons montrer ici qu'elles sont en fait trop riches, nous introduisons ici des représentations modales réduites du champ lointain et du champ proche.

Tout d'abord, nous allons montrer que, si nous appliquons la relation :

$$u_{i,l}(\text{Log } (\omega\varepsilon/2), \text{Log } (\omega\eta_H/2), \theta) = 0, \quad \forall l > i \quad (10.71)$$

nous obtenons

$$(b_i^k)^p = 0, \quad \forall p > i. \quad (10.72)$$

Puis, nous allons montrer que, si nous appliquons la relation :

$$\mathcal{U}_{i,l}(\text{Log } (\omega\varepsilon/2), \text{Log } (\eta_H/\varepsilon), \theta) = 0, \quad \forall l > i, \quad (10.73)$$

nous obtenons :

$$(\alpha_i^k)^p = 0, \quad \forall p > i. \quad (10.74)$$

**Pour le champ lointain (preuve formelle de (10.72))**

A  $i$  donné, considérons  $l > i$  :

Nous appliquons ici la relation (10.71). Comme  $l$  est strictement positif,  $u_{i,l}$  nous est donné par (10.51). Ainsi, il vient :

$$\sum_{k=0}^i \text{Log}^k \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right) \left[ \sum_{p=0}^{+\infty} (b_i^k)^p Y_{p,-l} \cos(p\theta) \right] = 0. \quad (10.75)$$

Les fonctions  $\cos(p\theta)$  étant des fonctions indépendantes, nous tirons :

$$\sum_{k=0}^i \text{Log}^k \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right) (b_i^k)^p Y_{p,-l} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (10.76)$$

Puis, nous annulons chacun des coefficients de ce polynôme en  $\text{Log}(\omega\varepsilon/2)$  :

$$(b_i^k)^p Y_{p,-l} = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, i \rrbracket, \forall p \in \mathbb{N}. \quad (10.77)$$

On choisit alors  $p = l (> i)$ , et nous tirons :

$$(b_i^k)^p Y_{p,-p} = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, i \rrbracket, \forall p > i. \quad (10.78)$$

Comme  $Y_{p,-p}$  n'est pas nul ( $Y_{p,-p} = -(1/\pi)(p-1)!$ ), il vient :

$$(b_i^k)^p = 0, \quad \forall p > i. \quad (10.79)$$

**Pour le champ proche (preuve formelle de (10.74))**

Donnons nous  $i$  et  $l$  deux éléments de  $\mathbb{N}$  tels que  $l > i$  :

Nous appliquons ici la relation (10.73).  $\mathcal{U}_{i,l}$  est donné par la définition 10.10. Or, comme

$$i - p - l < 0 \implies i - p - l \leq k \implies (\alpha_{i-p-l}^k)^p = 0, \quad (10.80)$$

il suit :

$$0 = \sum_{k=0}^i \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k (\alpha_{i+p-l}^k)^p J_{p,l} \cos(p\theta) \quad (10.81)$$

Les fonctions  $\cos(p\theta)$  étant des fonctions indépendantes, et comme cette relation est vraie pour tout  $\varepsilon$ , il vient :

$$(\alpha_{i+p-l}^k)^p J_{p,l} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (10.82)$$

On choisit alors  $p = l$  (qui est bien positif) :

$$(\alpha_i^k)^l J_{l,l} = 0. \quad (10.83)$$

C'est à dire, comme  $J_{l,l} \neq 0$ , (10.74).

**10.2.4 Exploitation du principe de raccord**

Remarquons que l'on peut effectuer les décompositions modales suivantes :  $u_{i,l}$  nous est donné par (10.50) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,l}(\text{Log}(\frac{\omega\varepsilon}{2}), \text{Log}(\frac{\omega r}{2}), \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{i,l,p}(\text{Log}(\frac{\omega\varepsilon}{2}), \text{Log}(\frac{\omega r}{2}), \theta) \cos(p\theta), \\ u_{i,l,p}(\text{Log}(\frac{\omega\varepsilon}{2}), \text{Log}(\frac{\omega r}{2}), \theta) = \sum_{k=0}^i \text{Log}^k \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right) J_{p,-l} (a_i^k)^p \\ \quad + \sum_{k=0}^i \text{Log}^k \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right) \left[ Y_{p,-l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-l} \text{Log} \left( \frac{\omega r}{2} \right) \right] (b_i^k)^p. \end{array} \right. \quad (10.84)$$

$\mathcal{U}_{i,l}$  nous est donné par la définition 10.10 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{i,l}(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \text{Log}(\rho), \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{U}_{i,l,p}(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \text{Log}(\rho), \theta) \cos(p\theta), \\ \mathcal{U}_{i,l,p}(\text{Log}(\omega\varepsilon/2), \text{Log}(\rho), \theta) = \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\alpha_{i+p-l}^k)^p J_{p,l} \\ \quad + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\beta_{i-p-l}^k)^p \left[ Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log} \rho \right]. \end{array} \right. \quad (10.85)$$

Comme la famille  $\{\theta \mapsto \cos(p\theta) / p \in \mathbb{N}\}$  est une famille indépendante, les relations (10.33) et (10.34), il vient :

$$u_{i,l,p}(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta) = \mathcal{U}_{i-l,-l,p}(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in [0, i], (10.86)$$

$$\mathcal{U}_{i,l,p}(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta) = u_{i-l,-l,p}(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}, \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2}, \theta), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall l \in [0, i]. (10.87)$$

**Preuve formelle de (10.37)**

Nous partons de la relation (10.86). Pour  $p = l$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k J_{l,-l} (a_i^k)^l + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \left[ Y_{l,-l} + \frac{2}{\pi} J_{l,-l} \text{Log} \left(\frac{\omega\eta_H}{2}\right) \right] (b_i^k)^l = \\ \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\alpha_{i+l}^k)^l J_{l,-l} + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\beta_{i-l}^k)^l \left[ Y_{l,-l} + \frac{2}{\pi} J_{l,-l} \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon} \right]. \end{array} \right. \quad (10.88)$$

Ainsi, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{i+1} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \left[ (a_i^k)^l + \frac{2}{\pi} (b_i^{k-1})^l \right] J_{l,-l} + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (b_i^k)^l \left[ Y_{l,-l} + \frac{2}{\pi} J_{l,-l} \text{Log} \left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}\right) \right] = \\ \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\alpha_{i+l}^k)^l J_{l,-l} + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\beta_{i-l}^k)^l \left[ Y_{l,-l} + \frac{2}{\pi} J_{l,-l} \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon} \right]. \end{array} \right.$$

Comme cette relation est vraie pour tout  $\varepsilon$  et  $\eta_H$ , nous tirons :

$$(b_i^k)^l \left[ Y_{l,-l} + \frac{2}{\pi} J_{l,-l} \text{Log} \left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}\right) \right] = (\beta_{i-l}^k)^l \left[ Y_{l,-l} + \frac{2}{\pi} J_{l,-l} \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon} \right]. \quad (10.89)$$

Comme  $Y_{l,-l} = -(1/\pi)(l-1)!$  est non nul, nous tirons la conclusion.

**Preuve formelle de (10.38)**

Le point de départ est la relation (10.87), nous choisissons  $p = l$ , il suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{i+1} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \left[ (a_{i-l}^k)^l + \frac{2}{\pi} (b_{i-l}^{k-1})^l \right] J_{l,l} + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (b_{i-l}^k)^l \left[ Y_{l,l} + \frac{2}{\pi} J_{l,l} \text{Log} \left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}\right) \right] = \\ \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\alpha_i^k)^l J_{l,l} + \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k (\beta_{i-2l}^k)^l \left[ Y_{l,l} + \frac{2}{\pi} J_{l,l} \text{Log} \frac{\eta_H}{\varepsilon} \right]. \end{array} \right.$$

Cette relation étant vraie pour tout  $\varepsilon$  et tout  $\eta_H$ , il vient :

$$\left[ (a_{i-l}^k)^l + \frac{2}{\pi} (b_{i-l}^{k-1})^l \right] J_{l,l} = (\alpha_i^k)^l J_{l,l}. \quad (10.90)$$

Comme  $J_{l,l} = 1/l!$  est non nul, nous concluons.

## 10.3 Raccord entre le champ proche et le champ de fente

Cette section est similaire à la section 10.2.

Nous allons dans cette partie obtenir que le comportement de chaque  $\mathcal{U}_i^k$  au voisinage de l'infini dans la fente est couplé à la valeur en 0 de chaque  $U_i^k$ . Pour cela, nous allons exprimer le fait que les développements asymptotiques en champ proche et en champ de fente sont des approximations de la même fonction  $u^\varepsilon$ .

Plutôt que d'effectuer le raccord sur un segment précis  $\{(x, y) \in \Omega_\varepsilon / x = \eta_S\}$ , nous allons exprimer ce raccord sur une zone épaisse constituée des points éloignés d'une longueur  $\eta_S$  de l'origine. La distance  $\eta_S$  sera petite vis-à-vis de la longueur d'onde mais grande par rapport à la hauteur de la fente  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda. \quad (10.91)$$

Pour donner un sens à cette relation nous considérons deux fonctions croissantes de  $\varepsilon$   $\eta_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ ,  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_i(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_i(\varepsilon)/\varepsilon = +\infty \quad \text{et} \quad \eta_1(\varepsilon) \leq \eta_2(\varepsilon) \quad (10.92)$$

et nous introduisons la zone :

$$\{(\eta_S, y) \in \Omega_\varepsilon / \eta_1(\varepsilon) \leq \eta_S \leq \eta_2(\varepsilon)\}. \quad (10.93)$$

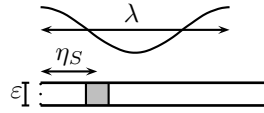


FIG. 10.11 – Zone de raccord entre le champ proche et le champ de fente

Sur ce domaine, nous allons approcher la relation :

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\eta_S/\varepsilon, y/\varepsilon) = U^\varepsilon(\eta_S, y/\varepsilon). \quad (10.94)$$

Si nous injectons les développements en champ proche et champ de fente, nous obtenons :

$$\sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^{k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)} \mathcal{U}_i^k\left(\frac{\eta_S}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon^\infty) = \sum_{(i,k) \in N} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \text{Log}^{k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)} U_i^k(\eta_S) + o(\varepsilon^\infty). \quad (10.95)$$

Nous développons alors le champ proche pour  $\eta_S/\varepsilon$  au voisinage de l'infini et le champ de fente pour  $\eta_S$  au voisinage de 0 :

- Nous montrerons au paragraphe 10.3.1 que les  $\mathcal{U}_i^k$  se développent au voisinage de l'infini comme suit :

$$\mathcal{U}_i^k(\eta_S/\varepsilon, y/\varepsilon) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{l=0}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^p (\eta_S/\varepsilon)^l \exp(p\pi\eta_S/\varepsilon) \cos(p\pi y/\varepsilon) + o((\varepsilon/\eta_S)^\infty). \quad (10.96)$$

où les  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  sont des complexes.

- Nous montrerons au paragraphe 10.3.2 que les  $U_i^k$  se développent au voisinage de 0 sous la forme d'un développement limité :

$$U_i^k(\eta_S) = \sum_{l=0}^{\infty} [U_i^k]_{-l} (\omega\eta_S/2)^l. \quad (10.97)$$

où les  $[U_i^k]_{-l}$ , sont des complexes.

Ainsi, nous tenons compte de la relation (10.94) en imposant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,k) \in N} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\eta_S}{\varepsilon}\right)^l \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \exp(p\pi\eta_S/\varepsilon) \cos(p\pi y/\varepsilon) [\mathcal{U}_i^k]_l^p = \\ \sum_{(i,k) \in N} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\omega\eta_S}{2}\right)^l \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) [U_i^k]_{-l}. \end{array} \right. \quad (10.98)$$

Nous n'avons pas ici tenu compte des termes à décroissance rapide. En effet ils sont exponentiellement petits. Comme la famille de fonctions  $\{y \mapsto \cos(p\pi y/\varepsilon) / p \in \mathbb{N}\}$  est une famille indépendante, il vient :

$$\sum_{(i,k) \in N} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{i-l} \left(\frac{\omega\eta_S}{2}\right)^l \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = \sum_{(i,k) \in N} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\omega\eta_S}{2}\right)^l \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) [U_i^k]_{-l}, \quad (10.99)$$

$$\sum_{(i,k) \in N} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\frac{\eta_S}{\varepsilon}\right)^l \text{Log}^k\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) \exp(p\pi\eta_S/\varepsilon) [\mathcal{U}_i^k]_l^p = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (10.100)$$

Comme la famille de fonctions de deux variables

$$\{(\omega\varepsilon/2; \omega\eta_S/2) \mapsto (\omega\varepsilon/2)^i (\omega\eta_S/2)^l \text{Log}^k(\omega\varepsilon/2) / i \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\} \quad (10.101)$$

est une famille libre : nous tirons de (10.99) que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $l \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{i-l} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = \sum_{i=k}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i [U_i^k]_{-l}. \quad (10.102)$$

Par changement de variable, il vient :

$$\sum_{i=k-l}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i [\mathcal{U}_{i+l}^k]_l^0 = \sum_{i=k}^{+\infty} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i [U_i^k]_{-l}. \quad (10.103)$$

Par identification terme à terme, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{U}_{i-l}^k]_{-l}^0 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [k; k+l-1[, \\ [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = [U_{i-l}^k]_{-l}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [k+l; +\infty[. \end{array} \right. \quad (10.104)$$

D'où nous tirons (10.106), (10.107) et (10.109) du principe de raccord 10.11 qui suit.

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  donné, comme la famille de fonctions de deux variables

$$\{(\omega\varepsilon/2; \omega\eta_S/2) \mapsto (\omega\varepsilon/2)^i (\eta_S/\varepsilon)^l \text{Log}^k(\omega\varepsilon/2) \exp(p\pi\eta_S/\varepsilon) / (i, k) \in N, l \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\} \quad (10.105)$$

est une famille indépendante, nous tirons de (10.100), (10.108) de la proposition 10.11.

**Principe 10.11** Pour tout  $(i, k) \in N$ ,

$$[\mathcal{U}_i^k]_l^0 = [U_{i-l}^k]_{-l}, \quad \forall l \in [0; i-k], \quad (10.106)$$

$$[\mathcal{U}_i^k]_l^0 = 0, \quad \forall l > i-k, \quad (10.107)$$

$$[\mathcal{U}_i^k]_l^p = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (10.108)$$

$$[U_i^k]_0 = [\mathcal{U}_i^k]_0^0. \quad (10.109)$$

La fin de cette section consiste tout d'abord en la justification des résultats qui nous ont permis de postuler le principe de raccord (étude en amont), puis en son exploitation (étude en aval). Donnons le plan de travail :

- Au paragraphe 10.3.1, nous justifierons le développement (10.96). Nous donnerons de plus la définition précise de  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$ . Nous verrons que ce développement provient en fait d'un développement modal de la solution à l'intérieur de la fente.
- Au paragraphe 10.3.2, nous justifierons le développement (10.97), qui proviendra d'un simple développement limité de  $U_i^k$ . De plus, nous donnerons une relation explicite pour  $[U_i^k]_l$  :

$$[U_i^k]_{-l} = \frac{1}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l U_i^k}{dx^l}(0) = \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0). \quad (10.110)$$

- Au paragraphe 10.3.3, nous exploiterons le principe 10.11 de raccord entre le champ proche et le champ de fente. Nous obtiendrons ainsi, les relations de couplage entre le champ proche et le champ de fente.

Au terme de cette section, nous aurons obtenu que le raccord entre champ de fente et champ proche s'exprime de la manière suivante :

**Proposition 10.12** *Pour tout  $(i, k) \in N$  nous avons :*

$$U_i^k(x) = U_i^k(0) \exp(i\omega x). \quad (10.111)$$

Avec  $I = E((i - k)/2)$ , un développement modal de  $\mathcal{U}_i^k$  nous est donné par :

$$\mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{i-k} \frac{1}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l U_{i-l}^k}{dx^l}(0) X^l + \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^I [\mathcal{U}_i^k]_l^{-p} X^l \exp(-p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (10.112)$$

Pour  $i > k + 2$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $l \in \llbracket 1; I \rrbracket$ , les  $[\mathcal{U}_i^k]_l^{-p}$  sont donnés par récurrence :

$$[\mathcal{U}_i^k]_l^{-p} = \frac{1}{p^2 \pi^2} \sum_{m=l-1}^{I-1} \left[ \frac{m!}{l!} \left( \frac{1}{2p\pi} \right)^{m-l} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_m^{-p} \right]. \quad (10.113)$$

### 10.3.1 Développement du champ proche à l'infini dans la fente

#### Développement modal du champ proche dans la fente

Nous nous plaçons ici dans le sous-domaine de  $\Omega_N^*$  constitué des points d'abscisse positive :

$$[0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y. \quad (10.114)$$

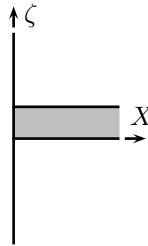


FIG. 10.12 – Domaine de développement modal du champ proche dans la fente



**Proposition 10.13** Pour tout  $(i, k)$  dans  $N$  :

Un développement modal de  $\mathcal{U}_i^k$  nous est donné pour  $(X, Y) \in [0, +\infty[ \times [0, 1]$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des scalaires } [\mathcal{U}_i^k]_l^p \in \mathbb{C} \text{ pour } (p, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ tels que :} \\ \mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^p X^l \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{array} \right. \quad (10.115)$$

De plus, les coefficients  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  vérifient :

(i) Pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = 0, & \text{pour } l > 2E[(i-k)/2] + 1, \\ [\mathcal{U}_i^k]_l^p = 0, & \text{pour } p \neq 0 \text{ et } l > E[(i-k)/2], \end{array} \right. \quad (10.116)$$

(ii) Pour  $i \geq k + 2$ , pour  $p \in \mathbb{Z}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} l! [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = -4(l-2)! [\mathcal{U}_i^k]_{l-2}^0, & \text{pour } l \geq 2, \\ \frac{l!}{(2p\pi)^l} [\mathcal{U}_i^k]_l^p + \frac{(l-1)!}{(2p\pi)^{l-1}} [\mathcal{U}_i^k]_{l-1}^p = -\frac{1}{p^2\pi^2} \frac{(l-2)!}{(2p\pi)^{l-2}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{l-2}^p, & \text{pour } l \geq 1. \end{array} \right. \quad (10.117)$$

**Remarque 10.14** Le développement (10.115) est un développement asymptotique au voisinage de 0. Il justifie en particulier (10.96). Plus précisément le terme à décroissance rapide nous est donné par :

$$o(X^{-\infty}) = \sum_{p=-\infty}^{-1} \sum_{l=0}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^{-p} X^l \exp(-p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (10.118)$$

De plus, en tenant compte de (10.116), nous avons :

$$o(X^{-\infty}) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{E(\frac{i-k}{2})} [\mathcal{U}_i^k]_l^{-p} X^l \exp(-p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (10.119)$$

Remarquons de plus qu'à  $X$  donné cette fonction est à moyenne nulle. En effet

$$\int_0^1 \cos(p\pi Y) dY = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (10.120)$$

**Remarque 10.15** L'ensemble des  $(p, l)$ , pour lesquels  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  est non nul, est inclus dans l'ensemble suivant :

$$\{(p, l) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N} / l \leq E(\frac{i-k}{2})\} \cup \{(0, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / l \leq 2E(\frac{i-k}{2}) + 1\}. \quad (10.121)$$

Nous représentons cet ensemble à l'aide de la figure suivante, (nous avons ici  $E((i-k)/2) = 2$ ) :

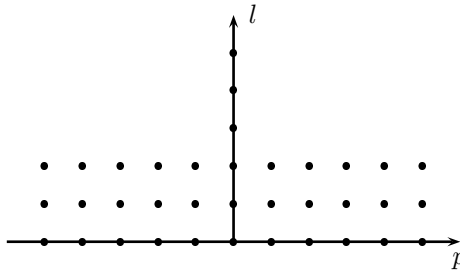


FIG. 10.13 – Les  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  non nuls

**Remarque 10.16** *Explicitons la proposition 10.13. Pour  $(i, k) \in N$ , le développement modal de  $\mathcal{U}_i^k$  est donné par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des scalaires } [\mathcal{U}_i^k]_l^p \in \mathbb{C} \text{ tels que :} \\ \mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{2E((i-k)/2)+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 X^l + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=0}^{E((i-k)/2)} [\mathcal{U}_i^k]_l^p X^l \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{array} \right. \quad (10.122)$$

– Nous n'avons pas d'informations supplémentaires sur :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{U}_i^k]_0^0 \text{ et } [\mathcal{U}_i^k]_1^0, \\ [\mathcal{U}_i^k]_0^p \text{ pour } p \in \mathbb{Z}^*. \end{array} \right. \quad (10.123)$$

– Si nous connaissons les scalaires  $[\mathcal{U}_i^k]_0^0$  et  $[\mathcal{U}_i^k]_1^0$  pour tous les  $(i, k) \in \mathbb{N}$  alors nous connaissons tous les  $[\mathcal{U}_i^k]_l^0$  pour  $l \in \mathbb{N}$ . En effet ils nous sont donnés par les formules obtenues par récurrence de (10.117) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = \frac{(2i)^l}{l!} [\mathcal{U}_{i-l}^k]_0^0 \quad \text{pour } l \in \llbracket 2; 2E(i-k/2) + 1 \rrbracket \text{ et } l \text{ pair,} \\ [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = \frac{(2i)^{l-1}}{l!} [\mathcal{U}_{i-l}^k]_1^0 \quad \text{pour } l \in \llbracket 2; 2E(i-k/2) + 1 \rrbracket \text{ et } l \text{ impair,} \\ [\mathcal{U}_i^k]_l^0 = 0 \quad \text{pour } l > 2E(i-k/2) + 1. \end{array} \right. \quad (10.124)$$

– Pour  $p \in \mathbb{Z}^*$  et  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq l \leq E((i-k)/2) =: I$ ,  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  est donné par la résolution du système matriciel :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1!}{2p\pi} [\mathcal{U}_i^k]_1^p \\ \frac{2!}{(2p\pi)^2} [\mathcal{U}_i^k]_2^p \\ \frac{3!}{(2p\pi)^3} [\mathcal{U}_i^k]_3^p \\ \dots \\ \frac{l!}{(2p\pi)^l} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \\ \frac{(l+1)!}{(2p\pi)^{l+1}} [\mathcal{U}_i^k]_{l+1}^p \\ \dots \\ \frac{(I-1)!}{(2p\pi)^{I-1}} [\mathcal{U}_i^k]_{I-1}^p \\ \frac{I!}{(2p\pi)^I} [\mathcal{U}_i^k]_I^p \end{bmatrix} = -\frac{1}{p^2\pi^2} \begin{bmatrix} \frac{0!}{(2p\pi)^0} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_0^p \\ \frac{1!}{2p\pi} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_1^p \\ \dots \\ \dots \\ \frac{(l-1)!}{(2p\pi)^{l-1}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{l-1}^p \\ \dots \\ \dots \\ \frac{(I-2)!}{(2p\pi)^{I-2}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{I-2}^p \\ \frac{(I-1)!}{(2p\pi)^{I-1}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{I-1}^p \end{bmatrix}$$

Il est facile de voir (à l'aide de la série de Neumann) que ce système s'inverse en :

$$\begin{bmatrix} \frac{1!}{2p\pi} [\mathcal{U}_i^k]_1^p \\ \frac{2!}{(2p\pi)^2} [\mathcal{U}_i^k]_2^p \\ \frac{3!}{(2p\pi)^3} [\mathcal{U}_i^k]_3^p \\ \dots \\ \frac{l!}{(2p\pi)^l} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \\ \frac{(l+1)!}{(2p\pi)^{l+1}} [\mathcal{U}_i^k]_{l+1}^p \\ \dots \\ \frac{(I-1)!}{(2p\pi)^{I-1}} [\mathcal{U}_i^k]_{I-1}^p \\ \frac{I!}{(2p\pi)^I} [\mathcal{U}_i^k]_I^p \end{bmatrix} = -\frac{1}{p^2\pi^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \dots & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0!}{(2p\pi)^0} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_0^p \\ \frac{1!}{2p\pi} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_1^p \\ \dots \\ \dots \\ \frac{(l-1)!}{(2p\pi)^{l-1}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{l-1}^p \\ \dots \\ \dots \\ \frac{(I-2)!}{(2p\pi)^{I-2}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{I-2}^p \\ \frac{(I-1)!}{(2p\pi)^{I-1}} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{I-1}^p \end{bmatrix}$$

Ainsi nous relierons  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  aux  $[\mathcal{U}_{i-2}^k]_m^p$  par les formules :

$$\frac{l!}{(-2p\pi)^l} [\mathcal{U}_i^k]_l^p = \frac{1}{p^2\pi^2} \sum_{m=l-1}^{E((i-2-k)/2)} \left[ \frac{m!}{(-2p\pi)^m} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_m^p \right]. \quad (10.125)$$

**Preuve formelle de la proposition 10.13**

Pour montrer ce lemme nous allons agir par récurrence. Nous nous plaçons à  $k$  donné dans  $\mathbb{N}$ , nous montrons :

a) Tout d'abord, pour  $i = k$  ou  $k + 1$  que  $\mathcal{U}_i^k$  admet le développement modal suivant :

$$\mathcal{U}_i^k(X, Y) = [\mathcal{U}_i^k]_0^0 + [\mathcal{U}_i^k]_1^0 X + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} [\mathcal{U}_i^k]_0^p \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (10.126)$$

b) Puis, nous allons montrer par récurrence le résultat dans le cas où  $i \geq k + 2$ . C'est à dire que  $\mathcal{U}_i^k$  vérifie le développement modal :

$$\mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{2E((i-k)/2)+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 X^l + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=0}^{E((i-k)/2)} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (10.127)$$

ainsi que la relation (10.117).

a) Pour  $i = k$  ou  $k + 1$ , les fonctions  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_i^k$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U} = 0 & \text{pour } (X, Y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 1], \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 & \text{pour } (X, Y) \in ]0, +\infty[ \times (\{0\} \cup \{1\}). \end{cases} \quad (10.128)$$

A l'aide de la théorie spectrale, nous décomposons la fonction  $\mathcal{U}_i^k$  sur les vecteurs propres du laplacien orthogonal muni des conditions aux limites de Neumann :

$$\mathcal{U}(X, Y) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{U}_p(X) \cos(p\pi Y). \quad (10.129)$$

Par séparation de variable, chaque  $\mathcal{U}_p$  vérifie une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{d^2 \mathcal{U}_p}{dX^2}(X) - p^2 \pi^2 \mathcal{U}_p(X) = 0. \quad (10.130)$$

Cette équation admet un espace vectoriel à 2 dimensions fourni par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0(X) = [\mathcal{U}_i^k]_0^0 + [\mathcal{U}_i^k]_1^0 X, \\ \mathcal{U}_p(X) = [\mathcal{U}_i^k]_0^p \exp(p\pi X) + [\mathcal{U}_i^k]_0^{-p} \exp(-p\pi X) \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (10.131)$$

Nous tirons le résultat de (10.129) et (10.131).

b) Supposons que  $\mathcal{U}_{i-2}^k$  admet le développement suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{i-2}^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{2E((i-2-k)/2)+1} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_l^0 X^l \\ \quad + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=0}^{E((i-2-k)/2)} X^l [\mathcal{U}_{i-2}^k]_l^p \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{cases} \quad (10.132)$$

Construisons une solution particulière du système d'équations dont  $\mathcal{U}_i^k$  est solution :

$$\begin{cases} \Delta \hat{\mathcal{U}} = -4 \mathcal{U}_i^k & \text{dans } ]0, +\infty[ \times ]0, 1] \\ \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial n} = 0 & \text{dans } ]0, +\infty[ \times (\{0\} \cup \{1\}). \end{cases} \quad (10.133)$$

Soit  $\hat{\mathcal{U}}_i^k$  la série formelle suivante :

$$\hat{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) = \sum_{l=2}^{2E((i-k)/2)+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 X^l + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=1}^{E((i-2-k)/2)} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (10.134)$$

avec les  $[\mathcal{U}_i^k]_l^0$  donnés par la résolution de (10.117).

$\hat{\mathcal{U}}_i^k$  vérifie bien l'équation de Laplace, en effet :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \hat{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) &= \sum_{l=2}^{2E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 l(l-1) X^{l-2} \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=1}^{E(\frac{i-k}{2})} [\mathcal{U}_i^k]_l^p l(l-1) X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y) \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=1}^{E(\frac{i-k}{2})} [\mathcal{U}_i^k]_l^p 2l p\pi X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{aligned} \right. \quad (10.135)$$

En notant  $[\mathcal{U}_i^k]_{E(\frac{i-k}{2})+1}^p = 0$ , nous tirons :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \hat{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) &= \sum_{l=2}^{2E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 l(l-1) X^{l-2} \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=2}^{E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^p l(l-1) X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y) \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=1}^{E(\frac{i-k}{2})} [\mathcal{U}_i^k]_l^p 2l p\pi X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{aligned} \right. \quad (10.136)$$

Par changement de variable, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \hat{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) &= \sum_{l=2}^{2E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^0 l(l-1) X^{l-2} \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=2}^{E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_i^k]_l^p l(l-1) X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y) \\ &+ \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=2}^{E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_i^k]_{l-1}^p 2(l-1) p\pi X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{aligned} \right.$$

Et donc par définition des  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \hat{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) &= -4 \sum_{l=2}^{2E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{l-2}^0 l(l-1) X^{l-2} \\ &- 4 \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \sum_{l=2}^{E(\frac{i-k}{2})+1} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_{l-2}^p X^{l-2} \exp(p\pi X) \cos(p\pi Y). \end{aligned} \right. \quad (10.137)$$

C'est à dire, par hypothèse de récurrence (10.132) :

$$\Delta \hat{\mathcal{U}}_i^k = -4 \mathcal{U}_{i-2}^k. \quad (10.138)$$

Pour la dérivée normale le résultat provient de la nullité de la dérivée suivant  $Y$  de  $Y \mapsto \cos(p\pi Y)$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) en  $Y = 0$  et  $Y = 1$ .

Remarquons maintenant que  $\mathcal{U}_i^k - \hat{\mathcal{U}}_i^k$  vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta(\mathcal{U}_i^k - \hat{\mathcal{U}}_i^k) = 0 & \text{dans } ]0, +\infty[ \times ]0, 1[ \\ \frac{\partial(\mathcal{U}_i^k - \hat{\mathcal{U}}_i^k)}{\partial n} = 0 & \text{dans } ]0, +\infty[ \times (\{0\} \cup \{1\}). \end{cases} \quad (10.139)$$

Nous sommes alors ramenés au a). Nous en déduisons donc que  $\mathcal{U}_i^k$  admet le développement (10.127).

### 10.3.2 Résultat préliminaire concernant le champ de fente

Nous justifions le développement (10.97) .

Soit  $(i, k)$  un élément de  $N$  :

Nous avons vu en (10.19) que  $U_i^k$  est donné par :

$$U_i^k(x) = U_i^k(0) \exp(\mathbf{i}\omega x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (10.140)$$

$\exp \mathbf{i}\omega x$  étant une fonction analytique, nous pouvons représenter  $U_i^k$  à l'aide de sa série de Taylor :

$$U_i^k(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ \frac{1}{l!} \frac{d^l U_i^k}{dx^l}(0) x^l \right] = \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\omega x}{2} \right)^l \frac{1}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l U_i^k}{dx^l}(0) \right]. \quad (10.141)$$

Plus explicitement, nous pouvons aussi développer  $\exp(\mathbf{i}\omega x)$  en série entière (de rayon de convergence infini) et nous obtenons :

$$\begin{cases} U_i^k(x) = U_i^k(0) \left[ \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{i} \omega x)^l}{l!} \right] \\ = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\omega x}{2} \right)^l \frac{(2\mathbf{i})^l}{l!} U_i^k(0) \right]. \end{cases} \quad (10.142)$$

Définissons maintenant les  $[U_i^k]_{-l}$  qui vérifient (10.97) ou, plus généralement :

$$U_i^k(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left( \frac{\omega x}{2} \right)^l [U_i^k]_{-l}. \quad (10.143)$$

**Définition 10.17** Soit  $(i, k)$  un élément de  $N$  et  $l$  un entier relatif négatif :

$$[U_i^k]_l = \frac{1}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l U_i^k}{dx^l}(0) = \frac{(2\mathbf{i})^{-l}}{(-l)!} U_i^k(0). \quad (10.144)$$

### 10.3.3 Exploitation du principe de raccord

#### Preuve formelle de la proposition 10.12

Cette proposition en fait ne fait que rassembler des résultats déjà obtenus au principe 10.11 (principe de raccord champ proche champ de fente), à la proposition 10.13 (développement modal du champ proche), de (10.19) (expression explicite du champ de fente) et (10.110) (définition des  $[U_i^k]_{-l}$ ).

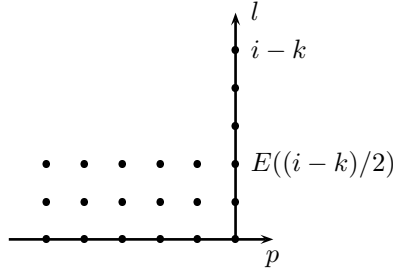
**Quelques conséquences simples de la proposition 10.12**

Plaçons nous à  $(i, k)$  donné dans  $\mathbb{N}$ .

L'ensemble des  $(p, l)$  pour lesquels  $[\mathcal{U}_i^k]_l^p$  est non nul est inclus dans l'ensemble suivant :

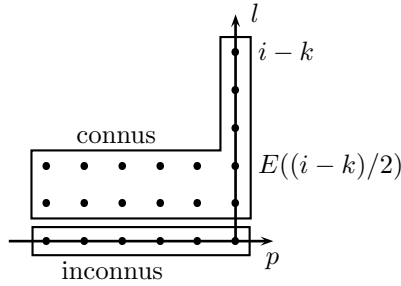
$$\left\{ (p, l) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N} / l \leq E\left(\frac{i-k}{2}\right) \right\} \cup \left\{ (0, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / l \leq i-k \right\}. \quad (10.145)$$

Nous représentons cet ensemble à l'aide de la figure suivante, (nous avons ici  $E((i-k)/2) = 2$ ) :

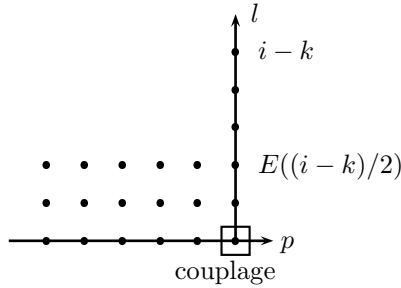


Supposons maintenant que les  $\mathcal{U}_{i'}^k$  et  $U_{i'}^k$  sont connus pour  $k \leq i' \leq i$ . Nous répondons ici à la question suivante : Quelles sont les inconnues dans les développements du champ proche ?

Ce sont les  $(\mathcal{U}_j^k)_0^{-p}$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ . A contrario, tous les  $(\mathcal{U}_j^k)_l^{-p}$  pour  $l > 1$  et  $p \in \mathbb{N}$  sont déjà déterminés par récurrence. Ce que nous représentons par la figure :



Pour le champ de fente, la réponse est beaucoup plus claire, seule la valeur en 0 reste à déterminer, Le couplage entre  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$  ne s'effectuant que par l'intermédiaire de  $[\mathcal{U}_i^k]_0^0$  et  $U_i^k(0)$ .





# Chapitre 11

## Élément d'analyse sur les problèmes elliptiques à conditions de radiation généralisées

### Sommaire

---

<b>11.1 Résultats sur la séparation de variables . . . . .</b>	<b>179</b>
11.1.1 Pour le champ lointain au voisinage de l'origine . . . . .	179
11.1.2 Pour le champ proche dans le demi espace . . . . .	183
11.1.3 Pour le champ proche dans la fente . . . . .	193
<b>11.2 Les problèmes de Helmholtz dans <math>\Omega</math> singulier en <math>A</math> . . . . .</b>	<b>200</b>
11.2.1 Identification d'un problème modèle . . . . .	200
11.2.2 Caractère bien posé par extraction de la singularité . . . . .	200
11.2.3 Preuve de l'existence et de l'unicité . . . . .	201
<b>11.3 Les problèmes de Laplace en domaine non borné . . . . .</b>	<b>202</b>
11.3.1 Identification d'un problème modèle . . . . .	202
11.3.2 Caractère bien posé . . . . .	204
11.3.3 Application à la définition des termes des développements asymptotiques	209

---

**Résumé :** Ce chapitre intermédiaire étudie les problèmes élémentaires qui sont à la base des théorèmes d'existence et d'unicité du chapitre 9 (problème de Helmholtz avec singularité ponctuelle dans la section 11.2 et problème de Laplace inhomogène en domaine non borné à la section 11.3). Les preuves s'appuient notamment sur des techniques de séparation de variables déjà abordées au chapitre 10 mais présentées de façon rigoureuse à la section 11.1.



## Introduction

Dans ce chapitre, nous répondons aux questions relatives au cadre fonctionnel pour les problèmes introduits au chapitre 9. Il est clair que ces problèmes ne relèvent pas de l'analyse classique. En effet, leurs données ne sont pas fournies par des termes surfaciques ou volumiques mais par des comportements asymptotiques (au voisinage de l'origine pour le champ lointain ; au voisinage de l'infini dans le demi espace et la fente pour le champ proche).

Plusieurs méthodes présentes dans la littérature permettent de traiter ces problèmes. A notre avis, les plus adaptées sont la technique de séparation de variables, les espaces de Sobolev à poids et l'utilisation de fonctions de troncature.

La technique de séparation de variables est utile pour avoir une connaissance explicite de la solution, ce qui rend son utilisation très agréable. Elle est pourtant restrictive. En effet, elle n'est utilisable que dans le cas où le domaine et les équations (volumiques et surfaciques) qui lui sont associées admettent une nature tensorielle. Tel est ici le cas dans chacune des zones de raccord considérées. La technique de séparation de variables est classique et est une conséquence de la théorie spectrale. Le lecteur intéressé par d'autres ouvrages où cette technique est introduite pourra par exemple se référer à [39, 40] où sont notamment étudiées les solutions des équations elliptiques dans des bandes  $\mathbb{R}_x \times [0; H]_y$  et les singularités du laplacien au voisinage des coins. On pourra aussi se référer à une théorie connexe : la théorie des semi-groupes dont les générateurs admettent une décomposition spectrale (le cas simple étant autoadjoint à résolvante compacte), présentée par exemple dans [29] chapitre 9.

Les espaces de Sobolev à poids sont un bon cadre fonctionnel pour les fonctions croissantes à l'infini. En  $2D$ , on peut séparer les résultats présents dans la littérature en deux familles. La première famille est relative aux domaines bidimensionnels infinis présentant une structure radiale. L'idée originale, due à Le Roux [61, 62], consiste à utiliser une inégalité de Hardy généralisée. De plus, on pourra trouver les développements qui ont suivi dans la thèse d'état de Giroire [37] et les livres de Nédélec [71, 72]. Pour des résultats plus récents, on pourra, par exemple, se référer aux articles de Amrouche [3, 4] (qui donnent des résultats fins en ce qui concernent le cadre  $L^p$  pour  $p \neq 2$ ) et de Boulmezaoud [15] (pour des résultats sur les traces dans le demi espace). La deuxième famille concerne les problèmes bénéficiant d'une direction privilégiée. Son étude est basée sur l'inégalité de Hardy (non modifiée). On pourra par exemple se référer à la thèse d'état de Joly [53] où l'auteur étudie le potentiel électrostatique induit par une plaque chargée.

Les fonctions de troncature sont utilisées pour enlever aux solutions recherchées leur singularité ou leur croissance. Ainsi, comme nous allons le voir il est possible de réduire les comportement asymptotiques à des termes sources volumiques avec un cadre fonctionnel "classique".

Toutefois, nous n'avons pas trouvé de références complètement adaptées à notre cas. C'est pourquoi nous avons pris la décision de redévelopper la théorie. L'originalité de ce travail se situe plus dans la nature des géométries étudiées (2D-1D) et dans le fait que ces techniques sont utilisées en même temps et non indépendamment. La suite de ce chapitre se déroulera de la manière suivante :

- A la section 11.1, nous développerons la théorie de séparation de variables d'un point de vue mathématique pour les trois géométries suivantes : un voisinage de l'origine pour le champ lointain, les voisinages de l'infini (dans le demi espace et la fente normalisée) pour le champ proche.
- A la section 11.2, nous donnons ici les résultats d'existence-unicité relatifs au champ lointain, nous verrons que les comportements singuliers du champ lointain au voisinage de l'origine sont pris en compte par l'utilisation d'une fonction de troncature.
- A la section 11.3, on trouvera les résultats pour le champ proche, nous partirons d'un problème plus général que ceux introduits au chapitre 9, puis nous leur appliquerons cette théorie.

## 11.1 Résultats sur la séparation de variables

### 11.1.1 Pour le champ lointain au voisinage de l'origine

Dans tout ce paragraphe,  $R$  désigne un réel positif strictement plus petit que la distance qui sépare l'origine de l'obstacle. Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le domaine :

$$\Omega_R = ]0; R[_r \times ]0; \pi[_\theta, \quad (\text{c.f. figure 10.9}). \quad (11.1)$$

$\Omega_R$  bénéficie dans les coordonnées  $(r, \theta)$  d'une nature tensorielle. Les résultats de séparation de variables qui suivent sont des conséquences du théorème de la théorie spectrale :

**Théorème 11.1** *Les vecteurs propres  $((\cos p\theta))_{p \in \mathbb{N}}$  de l'opérateur autoadjoint non borné à résolvante compacte de  $L^2([0; \pi]_\theta)$*

$$u \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (11.2)$$

de domaine de définition :

$$\left\{ u \in H^2([0; \pi]_\theta) / \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = 0 \text{ et } \pi \right\} \quad (11.3)$$

forment une base orthogonale de  $L^2([0; \pi]_\theta)$  et  $H^1([0; \pi]_\theta)$ .

**Décomposition modale dans  $H_{0,loc}^1(\Omega)$**

Considérons  $u$  dans la classe des fonctions  $H_{0,loc}^1(\Omega_R)$  (c.f. (9.3)), par conséquent :

$$u \in H^1([a, R]_r \times [0, \pi]_\theta), \quad \forall a \in ]0; R[. \quad (11.4)$$

Pour presque tout  $0 < r < R$ ,  $u$  admet une trace  $u(r, \cdot) \in H^1([0; \pi]_\theta)$  et  $\frac{\partial u}{\partial r}$  admet une trace  $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \cdot) \in L^2([0; \pi]_\theta)$ . Partout où ces traces existent, par décomposition spectrale, nous avons :

$$\begin{cases} u(r, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(r) \cos p\theta, & \text{dans } H^1([0; \pi]_\theta), \quad p.p. r, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_p(r) \cos p\theta, & \text{dans } L^2([0; \pi]_\theta), \quad p.p. r, \end{cases} \quad (11.5)$$

où nous notons pour tout  $v \in L^2([0; \pi]_\theta)$  :

$$\begin{cases} v_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v(\theta) d\theta, \\ v_p &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(\theta) \cos p\theta d\theta, \quad \forall p > 0, \end{cases} \quad (11.6)$$

La famille  $\cos p\theta$  est orthogonale dans  $L^2([0; \pi]_\theta)$  et  $H^1([0; \pi]_\theta)$ . Par orthogonalité, pour tout  $v \in L^2([0; \pi]_\theta)$ , nous avons :

$$\begin{cases} \pi |v_0|^2 &\leq \|v\|_{L^2([0; \pi]_\theta)}^2, \\ \frac{\pi}{2} |v_p|^2 &\leq \|v\|_{L^2([0; \pi]_\theta)}^2 \end{cases} \quad (11.7)$$

Ainsi, pour tout  $a$  tel que  $0 < a < R$ , nous avons :

$$\int_a^R |u_p(r)|^2 r dr < +\infty, \quad (11.8)$$

Ce qui nous permet de considérer  $u_p(r)$  comme une distribution du segment  $]0; R[$  (il est par ailleurs possible de montrer la mesurabilité). Les décompositions spectrales de  $u(r, \cdot)$  et  $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \cdot)$  sont reliées par :

$$\frac{\partial u_p}{\partial r} = \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_p, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0; R[). \quad (11.9)$$

En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(]0; R[)$ , il suit du théorème de Fubini et d'une intégration par partie :

$$\left\{ \begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_p}{\partial r}; \varphi \right\rangle_{]0; R[} &= -\frac{1 \text{ ou } 2}{\pi} \int_0^R \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \varphi'(r) \, d\theta \, dr \\ &= \frac{1 \text{ ou } 2}{\pi} \int_0^R \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) \cos p\theta \varphi(r) \, d\theta \, dr \\ &= \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_p; \varphi \right\rangle_{]0; R[}. \end{aligned} \right. \quad (11.10)$$

Pour tout  $a > 0$ , nous avons dans  $H^1([a; R]_r \times [0; \pi]_\theta)$  :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(r) \cos p\theta, \quad (11.11)$$

c'est à dire :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{p=0}^N u_p(r) \cos p\theta \right] = u, \quad \text{dans } H^1([a; R]_r \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.12)$$

En effet, pour presque tout  $0 < r < R$  et  $N \in \mathbb{N}$ , si nous notons :

$$\left\{ \begin{aligned} I_N(r) &= \int_0^\pi \left\| \nabla u(r, \theta) - \sum_{p=0}^N \nabla [u_p(r) \cos p\theta] \right\|^2 + \left| u(r, \theta) - \sum_{p=0}^N [u_p(r) \cos p\theta] \right|^2 \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left\| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) - \sum_{p=0}^N \left[ \frac{\partial u_p}{\partial r}(r) \cos p\theta \right] \right\|^2 \, d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \left\| \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta) - \sum_{p=0}^N \frac{\partial [u_p(r) \cos p\theta]}{\partial \theta} \right\|^2 \, d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi \left| u(r, \theta) - \sum_{p=0}^N [u_p(r) \cos p\theta] \right|^2 \, d\theta. \end{aligned} \right. \quad (11.13)$$

alors d'après (11.5) et (11.9), il y a convergence simple presque partout pour  $N \rightarrow +\infty$ . Il vient par orthogonalité (la somme tronquée correspond à une projection orthogonale dans  $L^2([0; \pi]_\theta)$  et  $H^1([0; \pi]_\theta)$ ) :

$$I_N(r) \leq \int_0^\pi \left\| \nabla u(r, \theta) \right\|^2 + |u(r, \theta)|^2 \, d\theta. \quad (11.14)$$

La conclusion provient alors du théorème de Lebesgues.

Pour terminer, remarquons que par construction, les fonctions  $(r, \theta) \rightarrow u_p(r) \cos p\theta$  sont deux à deux orthogonales dans  $H^1([a; R]_r \times [0; \pi]_\theta)$  (pour tout  $a > 0$ ).

### Développement modal des solutions de l'équation de Helmholtz

Supposons maintenant que  $u \in H_{0,loc}^1(\Omega_R)$  vérifie :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u + \omega^2 u &= 0, & \text{dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 0, & \text{pour } 0 < |y| < R. \end{aligned} \right. \quad (11.15)$$

**N.B.** Dans la suite, un tel  $u$  sera dit solution de l'équation de Helmholtz. De plus, comme pour la définition 9.2, il faut ici prendre (11.15) au sens de :

$$\forall v \in H_{00}^1(\Omega) \text{ à support dans } \Omega_R, \quad \int_{\Omega} \left( \nabla u(\mathbf{x}) \overline{\nabla v(\mathbf{x})} - \omega^2 u(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (11.16)$$

Comme  $u$ ,  $\Delta u$  est un élément de  $H_{0,loc}^1(\Omega_R)$ . Il est alors possible de définir les  $((\Delta u)_p)_{p \in \mathbb{N}}$  qui vérifient :

$$(\Delta u)_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{du_p}{dr} \right] - \frac{p^2}{r^2} u_p, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0; R]). \quad (11.17)$$

En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(]0; R])$ , nous avons par double intégration par partie :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle (\Delta u)_p; \varphi \rangle &= \frac{1 \text{ ou } 2}{\pi} \int_0^R \int_0^\pi \Delta u(r, \theta) \varphi(r) \cos p\theta \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1 \text{ ou } 2}{\pi} \int_0^R \int_0^\pi u(r, \theta) \Delta \left[ \varphi(r) \cos p\theta \right] \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1 \text{ ou } 2}{\pi} \int_0^R \left[ \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \, d\theta \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{p^2}{r^2} \right] \varphi(r) \, r \, dr \\ &= \left\langle \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{p^2}{r^2} \right] u_p; \varphi \right\rangle \end{aligned} \right. \quad (11.18)$$

Les formules de Green ont utilisé de façon fondamentale les conditions aux limites de  $u$ ,  $\varphi$  et  $\cos p\theta$ .

Nous tirons de (11.15) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{du_p}{dr} \right] + \left[ \omega^2 - \frac{p^2}{r^2} \right] u_p = 0. \quad (11.19)$$

Ainsi  $u_p$  est solution d'une équation aux dérivées ordinaires d'ordre 2 dont les solutions sont de la forme (c.f. annexe A) :

$$u_p(r) = a_p J_p(\omega r) + b_p Y_p(\omega r), \quad \forall r \in ]0; R]. \quad (11.20)$$

Ainsi, pour tout  $a > 0$ , nous avons d'après (11.11) :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ a_p J_p(\omega r) \cos p\theta + b_p Y_p(\omega r) \cos p\theta \right], \quad \text{dans } H^1([a; R]_r \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.21)$$

### A propos des formes linéaires $\mathcal{L}_p^0$ et $\mathcal{L}_p^1$

Nous nous intéressons ici aux formes linéaires  $\mathcal{L}_p^0$  et  $\mathcal{L}_p^1$  définies en (9.12) et (9.17). Nous montrons en particulier le **Lemme 9.4** qui affirme que tout  $u$  solution de l'équation de Helmholtz est dans le domaine de définition des  $\mathcal{L}_p^0$  et  $\mathcal{L}_p^1$ .

Considérons  $u$  une solution de l'équation de Helmholtz homogène (on se référera à (11.15)). Comme d'après les comportements asymptotiques de  $J_p$  et  $Y_p$  proche de 0 nous avons :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_p(\omega r)}{Y_p(\omega r)} = 0. \quad (11.22)$$

Ainsi, d'après (11.6) et (11.20), nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} b_0 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_0(r)}{Y_0(\omega r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi Y_0(\omega r)} \int_0^\pi u(r, \theta) d\theta, \\ b_p &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_p(r)}{Y_p(\omega r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi Y_p(\omega r)} \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta \, d\theta, \quad \forall p > 0. \end{aligned} \right. \quad (11.23)$$

Par définition (c.f. (9.10) et (9.12)),  $u$  est alors dans le domaine de définition des formes linéaires  $\mathcal{L}_p^0$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{L}_p^0(u) = b_p. \quad (11.24)$$

De même, remarquons que l'on peut déterminer les  $a_p$  à l'aide des limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_0(r) - b_0 Y_0(\omega r)}{J_0(\omega r)} \\ \quad = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi J_0(\omega r)} \int_0^\pi \left( u(r, \theta) - \mathcal{L}_0^0(u) Y_0(\omega r) \right) d\theta, \\ a_p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_p(r) - b_p Y_p(\omega r)}{J_p(\omega r)} \\ \quad = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi J_p(\omega r)} \int_0^\pi \left( u(r, \theta) - \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \cos p\theta \right) \cos p\theta d\theta, \quad \forall p > 0. \end{array} \right. \quad (11.25)$$

D'où (on se référera à (9.13) et (9.17)),  $u$  est dans le domaine des formes linéaires  $\mathcal{L}_p^1$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{L}_p^1(u) = a_p. \quad (11.26)$$

Remarquons que nous venons de démontrer le **Lemme 9.4**. Plus précisément, nous avons :

**Lemme 11.2** *Pour tout  $u$  de classe  $H_{0,loc}^1(\Omega_R)$  (c.f. (9.3)), la famille de fonctions avec*

$$\left( (u_p(r) \cos p\theta) \right)_{p \in \mathbb{N}} \quad \left( \text{avec } u_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(r, \theta) d\theta \text{ et } u_p(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(r, \theta) \cos p\theta d\theta \right) \quad (11.27)$$

*est orthogonale dans  $H^1([a; R]_r \times [0; \pi]_\theta)$ . De plus, nous avons la formule de représentation :*

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(r) \cos p\theta, \quad \text{dans } H^1([a; R]_r \times [0; \pi]_\theta), \quad \forall a \in ]0; R[, \quad (11.28)$$

Enfin, si  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz (c.f. (11.15)) alors :

$$u_p(r) = \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) + \mathcal{L}_p^1(u) J_p(\omega r) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (\text{c.f. (9.12) et (9.17)}). \quad (11.29)$$

### Décomposition modale dans $H_{loc}^1(\Omega)$

De même que pour  $H_{0,loc}^1(\Omega_R)$ , nous pouvons démontrer

**Lemme 11.3** *Pour tout  $u \in H^1(\Omega_R)$ , la famille de fonctions  $(r, \theta) \rightarrow u_p(r) \cos p\theta$  est orthogonale dans  $H^1(\Omega_R)$ ; nous avons de plus :*

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(r) \cos p\theta, \quad \text{dans } H^1(\Omega_R). \quad (\text{c.f. (11.27)}) \quad (11.30)$$

De plus, si  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz (c.f. (11.15)) alors :

$$u_p(r) = \mathcal{L}_p^1(u) J_p(\omega r) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_p^0(u) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (11.31)$$

Pour prouver (11.31), le point central consiste à remarquer que :

$$J_p(\omega r) \cos p\theta \in H^1(\Omega_R) \quad \text{et} \quad Y_p(\omega r) \cos p\theta \notin H^1(\Omega_R). \quad (11.32)$$

### Cas particulier d'un nombre fini de singularités

Considérons  $u$  solution de l'équation de Helmholtz et supposons qu'il existe une suite de complexes presque nulle  $((b_p))_{p \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$u - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p Y_p(\omega r) \cos p\theta \in H_{loc}^1(\Omega). \quad (11.33)$$

Alors, d'après le lemme 11.3, nous avons pour tout  $q \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{L}_q^0 \left( u - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p Y_p(\omega r) \cos p\theta \right) = 0. \quad (11.34)$$

Or pour tout  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}$ , il vient de (9.12) et (9.17) :

$$\mathcal{L}_q^0(Y_p(\omega r) \cos p\theta) = \delta_{q,p} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_q^1(Y_p(\omega r) \cos p\theta) = 0 \quad (11.35)$$

où  $\delta_{p,q}$  désigne le symbole de Kroenecker.

Par conséquent, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , nous avons :

$$\mathcal{L}_p^0(u) = b_p \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_p^1 \left( u - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p Y_p(\omega r) \cos p\theta \right) = \mathcal{L}_p^1(u). \quad (11.36)$$

Considérons  $u \in H_{0,loc}^1(\Omega)$  solution de l'équation de Helmholtz homogène. Supposons, de plus, que la suite  $((\mathcal{L}_p^0(u)))_{p \in \mathbb{N}}$  est presque nulle (c'est à dire ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls). Nous appelons partie régulière de  $u$  la fonction :

$$R(u)(r, \theta) := u(r, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \cos p\theta \quad (11.37)$$

**Lemme 11.4** *Si  $((b_p))_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite presque nulle et  $u$  un élément de  $H_{0,loc}^1(\Omega_R)$  qui vérifie (11.33), alors :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}_p^0(u) = b_p \quad \text{et} \quad R(u)(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u) J_p(\omega r) \cos p\theta, \quad \text{dans } H^1(\Omega_R). \quad (11.38)$$

### 11.1.2 Pour le champ proche dans le demi espace

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans le domaine :

$$[1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \quad (\text{c.f. figure 10.10}) \quad (11.39)$$

Comme pour le champ lointain, ce domaine est bien de nature tensorielle dans les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ .

Les résultats qui suivent sont en fait des corollaires du théorème 11.1.

**Décomposition modale dans  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$**

Considérons  $\mathcal{U}$  dans la classe des fonctions  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ . Ainsi  $\mathcal{U}$  vérifie :

$$\mathcal{U} \in H^1([1; L[_\rho \times [0; \pi]_\theta), \quad \forall L > 1. \quad (11.40)$$

Pour presque tout  $\rho > 1$ ,  $\mathcal{U}$  admet une trace  $\mathcal{U}(\rho, \cdot) \in H^1([0; \pi]_\theta)$  et  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}$  admet une trace  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}(\rho, \cdot) \in L^2([0; \pi]_\theta)$ . Par décomposition spectrale, nous avons pour presque tout  $\rho$  :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(\rho, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} (\mathcal{U})^p(\rho) \cos p\theta, & \text{dans } H^1([0; \pi]_\theta), & p.p. \rho, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}\right)^p(\rho) \cos p\theta, & \text{dans } L^2([0; \pi]_\theta), & p.p. \rho. \end{cases} \quad (11.41)$$

où nous avons noté pour tout  $\rho \geq 1$  :

$$\begin{cases} (\mathcal{U})^0(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho, \theta) d\theta, \\ (\mathcal{U})^p(\rho) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho, \theta) \cos p\theta d\theta. \end{cases} \quad (11.42)$$

De même que pour le champ lointain,

$$\frac{d(\mathcal{U})^p}{d\rho} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}\right)^p \quad (11.43)$$

et pour tout  $L > 1$ , nous avons :

$$\mathcal{U}(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} (\mathcal{U})^p(\rho) \cos p\theta, \quad \text{dans } H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.44)$$

### Développement modal des solutions de l'équation de Laplace homogène

Supposons que  $\mathcal{U}$  vérifie :

$$\begin{cases} \mathcal{U} \in H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) \\ \Delta \mathcal{U} = 0, & \text{dans } ]1; +\infty[_\rho \times ]0; \pi[_\theta, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, & \text{en } X = 0. \end{cases} \quad (11.45)$$

**N.B. :** Dans la suite, pour abrégé, un tel  $\mathcal{U}$  sera dit *solution de l'équation homogène*.

Comme pour le champ lointain, nous avons alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$  (c'est ici qu'interviennent les conditions aux limites) :

$$(\Delta \mathcal{U})^p = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d(\mathcal{U})^p}{d\rho} \right] - \frac{p^2}{\rho^2} (\mathcal{U})^p, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (11.46)$$

D'où,  $(\mathcal{U})^p$  est solution de l'équation aux dérivées ordinaires (avec  $\rho > 1$ ) :

$$\rho^2 \frac{d^2(\mathcal{U})^p}{d\rho^2} + \rho \frac{d(\mathcal{U})^p}{d\rho} - p^2 (\mathcal{U})^p = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (11.47)$$

Cette équation admet un espace vectoriel de solutions à 2 dimensions qui est donné par :

$$\begin{cases} \text{il existe des complexes } ((\alpha_p))_{p \in \mathbb{N}} \text{ et } ((\beta_p))_{p \in \mathbb{N}} \text{ tels que :} \\ (\mathcal{U})^0(\rho) = \alpha_0 \text{Log } \rho + \beta_0, \\ (\mathcal{U})^p(\rho) = \alpha_p \rho^p + \beta_p \rho^{-p}, \quad \forall p > 0. \end{cases} \quad (11.48)$$

Cette écriture n'étant pas pratique pour la suite nous préférons exprimer  $(\mathcal{U})^p$  comme :

$$\begin{cases} \text{Il existe deux suites de complexes } (((\alpha)^p))_{p \in \mathbb{N}} \text{ et } (((\beta)^p))_{p \in \mathbb{N}} \text{ telles que :} \\ (\mathcal{U})^p(\rho) = (\alpha)^p J_{p,p} \rho^p + (\beta)^p \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p}, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (11.49)$$

Il a fallu ici noter que (c.f. annexe A) :

$$\begin{cases} J_{p,p} \neq 0, & \forall p \in \mathbb{N}, \\ Y_{p,-p} \neq 0, & \forall p \in \mathbb{N}, \\ J_{p,-p} = 0, & \forall p > 0. \end{cases} \quad (11.50)$$

### Développement modal des solutions du système d'équations de Laplace emboîtées

Soit  $N$  un entier relatif, considérons maintenant une famille de fonctions  $((\mathcal{U}_i))_{i \in [1;N]}$  telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_i \in H_{loc}^1([1; +\infty[_{\rho} \times [0; \pi]_{\theta}) \\ \Delta \mathcal{U}_i = -4 \mathcal{U}_{i-2}, & \text{dans } [1; +\infty[_{\rho} \times [0; \pi]_{\theta}, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} = 0, & \text{en } X = 0, \end{cases} \quad (11.51)$$

où nous avons posé la notation  $\mathcal{U}_{-2} \equiv 0$  et  $\mathcal{U}_{-1} \equiv 0$ .

**N.B.** Dans la suite, on dira qu'une telle famille est *solution du système d'équations emboîtées*.

Nous avons alors pour tout  $\rho > 1$  :

$$\rho^2 \frac{d^2(\mathcal{U}_i)^p}{d\rho^2} + \rho \frac{d(\mathcal{U}_i)^p}{d\rho} - p^2 (\mathcal{U}_i)^p = -4 \rho^2 (\mathcal{U}_{i-2})^p. \quad (11.52)$$

Pour obtenir l'expression de  $(\mathcal{U}_i)^p$ , nous raisonnons par récurrence. L'initialisation étant effectuée en (11.49), pour  $j < i$ , nous supposons qu'il existe des suite de complexes  $(((\alpha_j)^p))_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(((\beta_j)^p))_{p \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$\begin{cases} (\mathcal{U}_j)^p(\rho) = \sum_{l=0}^j [(\alpha_{j-l})^p J_{p,p+l} \rho^{p+l}] \\ \quad + \sum_{l=0}^j [(\beta_{j-l})^p \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l}], \quad \forall \rho > 1. \end{cases} \quad (11.53)$$

Nous vérifions alors que :

$$\begin{cases} (\widehat{\mathcal{U}}_i)^p(\rho) = \sum_{l=1}^i [(\alpha_{i-l})^p J_{p,p+l} \rho^{p+l}] \\ \quad + \sum_{l=1}^i [(\beta_{i-l})^p \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l}], \quad \forall \rho > 1. \end{cases} \quad (11.54)$$

est une solution de (11.52). Puis il nous suffit d'ajouter l'espace vectoriel des solutions homogènes fourni par (11.49) pour obtenir la conclusion.



Pour tout  $i \in \llbracket 0; N \rrbracket$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des suites de complexes } ((\alpha_i)^p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ et } ((\beta_i)^p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ telles que :} \\ (\mathcal{U}_i)^p(\rho) = \sum_{l=0}^i \left[ (\alpha_{i-l})^p J_{p,p+l} \rho^{p+l} \right] \\ \quad + \sum_{l=0}^i \left[ (\beta_{i-l})^p \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \right], \quad \forall \rho > 1. \end{array} \right. \quad (11.55)$$

### A propos des formes linéaires $\ell_p^0$ et $\ell_p^1$

Les notations relatives aux formes linéaires  $\ell_p^0$  et  $\ell_p^1$  pourront être trouvées au paragraphe 9.2.1. Le but de ce paragraphe est d'obtenir le lemme 11.5.

Considérons  $((\mathcal{U}_i)_{i \in \llbracket 0; N \rrbracket})$  solution du système d'équations emboîtées. D'après (11.55),  $\mathcal{U}_i$  est un élément de  $Q_{\log}^{2D}$  (c.f. (9.41)), ainsi nous pouvons lui appliquer les formes linéaires  $\ell_p^0$  et  $\ell_p^1$ . Il suit des définitions (9.42) et (9.43) que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_p^0(\mathcal{U}_i) = (\beta_i)^p, \\ \ell_p^1(\mathcal{U}_i) = (\alpha_i)^p. \end{array} \right. \quad (11.56)$$

Il vient donc de (11.55) le **Lemme 9.5**. Plus précisément, nous avons :

**Lemme 11.5** *Pour tout  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ , la familles de fonctions*

$$((\mathcal{U})^p(\rho) \cos p\theta)_{p \in \mathbb{N}} \quad (\text{c.f. (11.42)}) \quad (11.57)$$

*est orthogonale dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  ( $\forall L > 1$ ) et nous avons la formule de représentation :*

$$\mathcal{U}(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} (\mathcal{U})^p(\rho) \cos p\theta, \quad \text{dans } H^1([1; L]_\rho) \times [0; \pi]_\theta. \quad (11.58)$$

*De plus si  $\mathcal{U}_i$  est une famille solution de l'équation de Laplace emboîtée (c.f. (11.51)) alors :*

$$(\mathcal{U}_i)^p(\rho) = \sum_{l=0}^i \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{p,p+l} \rho^{p+l} + \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \right]. \quad (11.59)$$

### Deux résultats techniques

Passons maintenant à la démonstration de deux résultats techniques. Essayons tout d'abord de faire comprendre leur utilité.

Le premier nous permet de considérer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_i) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \quad (11.60)$$

en tant qu'élément de  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  (indépendamment du fait que  $\mathcal{U}_{i+l}$  soit ou ne soit pas défini).

Le deuxième donnera dans la suite un sens à la notion de limite dans un sous-espace des solutions du système d'équations emboîtées.

**Lemme 11.6** *Etant donné  $L > 1$ , si la série*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p} \cos p\theta \right] \quad (11.61)$$

*converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  alors, pour tout  $l \geq 1$ , il en est de même pour :*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p+l} \cos p\theta \right]. \quad (11.62)$$

**preuve.** Remarquons que dans le cas  $l$  impair, le résultat est trivial. En effet (c.f. annexe A) :

$$J_{p,-p+l} = 0 \quad \text{et} \quad Y_{p,-p+l} = 0. \quad (11.63)$$

Passons maintenant au cas où  $l$  est pair.

Pour tout  $l \geq 1$ , Nous nous intéressons à la série :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p+2l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+2l} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p+2l} \cos p\theta \right], \quad (11.64)$$

Comme  $J_{p,q} = 0$  dès que  $q < 0$  et comme pour  $l \in \mathbb{N}$  la famille  $((\rho^{-p+2l} \cos p\theta))_{p \in \mathbb{N}}$  est orthogonale dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ , les convergences des séries (11.61) et (11.62) sont équivalentes à celles des séries numériques (définies pour tout  $L > 1$ ) :

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p} \right)^2 |\beta_p|^2 \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2 \right] < +\infty, \\ \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p+2l} \right)^2 |\beta_p|^2 \|\rho^{-p+2l} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2 \right] < +\infty. \end{cases} \quad (11.65)$$

Ainsi nous tirons la conclusion car :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|Y_{p,-p+2l}|^2 \|\rho^{-p+2l} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2}{|Y_{p,-p}|^2 \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2} = 0. \quad (11.66)$$

En effet, le calcul direct nous donne pour tout  $l \geq 0$  :

$$\begin{cases} \|\rho^{-p+2l} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2 = \frac{\pi}{4} \frac{1}{p-2l-1} \left[ 1 - L^{-2p+4l+2} \right] \\ \quad + \frac{\pi}{4} \frac{(p-2l)^2 + p^2}{p-2l} \left[ 1 - L^{-2p+4l} \right] \end{cases} \quad (11.67)$$

et par conséquent :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|\rho^{-p+2l} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2}{\|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2} = 1. \quad (11.68)$$

De plus, on peut voir à la section A.2 que pour  $p > l$  :

$$\begin{cases} Y_{p,-p+2l} = -\frac{(p-l-1)!}{\pi l!}, \\ Y_{p,-p} = -\frac{(p-1)!}{\pi}. \end{cases} \quad (11.69)$$

D'où :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{Y_{p,-p+2l}}{Y_{p,-p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( l! \prod_{q=p-l}^{p-1} q \right)^{-1} = 0. \quad \square \quad (11.70)$$

Introduisons la notation :

$$\{\mathcal{V}(\rho, \theta)\} = \sup_{\theta \in [0; \pi]} |\mathcal{V}(\rho, \theta)| \quad (11.71)$$

Nous disons qu'une fonction  $\mathcal{V}$  admet une limite  $\lambda$  en  $+\infty$  si :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \{\mathcal{V}(\rho, \theta) - \lambda\} = 0. \quad (11.72)$$

Nous venons ainsi de définir une notion de limite uniforme en  $\theta$ . Nous notons aussi plus simplement

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\rho, \theta) = \lambda. \quad (11.73)$$

**Lemme 11.7** Soit  $((\beta_p))_p \in \mathbb{N}$  une suite de complexes. Si la série :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p} \cos p\theta \right] \quad (11.74)$$

converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour  $L > 1$ , alors pour tout  $l$  et  $m$  entiers naturels tels que  $m \geq l$  :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sum_{p=m+1}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \right\} = 0. \quad (11.75)$$

**Preuve.** Dans le cadre de cette preuve, posons la notation :

$$\begin{cases} S(\rho, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p} \cos p\theta \right], \\ S_{l,m}(\rho, \theta) &= \sum_{p=m+1}^{+\infty} \left[ \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \operatorname{Log} \rho \right) \beta_p \rho^{-p+l} \cos p\theta \right]. \end{cases} \quad (11.76)$$

Comme pour  $l$  impair  $S_{l,m} = 0$ , seul le cas  $l$  pair nécessite un développement. Comme  $J_{p,q} = 0$  pour tout  $q < 0$ , nous tirons que pour tout  $\rho \geq L$  :

$$\begin{cases} |\rho S_{2l,m}(\rho, \theta)| &\leq \sum_{p=m+1}^{+\infty} |\beta_p Y_{p,-p+2l} \rho^{-p+2l+1} \cos p\theta| \\ &\leq \sum_{p=2l+1}^{+\infty} |\beta_p Y_{p,-p+2l} \rho^{-p+2l+1} \cos p\theta| \\ &\leq \sum_{p=2l+1}^{+\infty} \left[ |\beta_p Y_{p,-p+2l}| L^{-p+2l+1} \right]. \end{cases} \quad (11.77)$$

Il nous suffit alors de montrer la convergence de la série majorante. Elle provient de :

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} |Y_{p,-p+2l} \beta_p|^{1/p} \leq 1 \quad (11.78)$$

En effet d'après (11.69),

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{Y_{p,-p+2l}}{Y_{p,-p}} \right|^{1/p} = 1, \quad (11.79)$$

Comme la série (11.74) converge, par orthogonalité, nous avons :

$$|Y_{p,-p} \beta_p| \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1;L]_\rho \times [0,\pi]_\theta)} \leq \|S\|_{H^1([1;L]_\rho \times [0,\pi]_\theta)}. \quad (11.80)$$

D'où

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \left( |Y_{p,-p} \beta_p| \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1;L]_\rho \times [0,\pi]_\theta)} \right)^{1/p} \leq 1. \quad (11.81)$$

Comme d'après (11.67),  $\|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1;L]_\rho \times [0,\pi]_\theta)}$  est équivalent à  $\sqrt{p\pi/2}$ , il vient :

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1;L]_\rho \times [0,\pi]_\theta)}^{1/p} = 1. \quad (11.82)$$

Nous tirons (11.78) de (11.79), (11.81) et (11.82).  $\square$

### Les solutions du système d'équations emboîtées à croissance lente

Dans la suite, nous disons que  $\mathcal{V} \in H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  est à croissance lente si et seulement si il existe  $L' > 1$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\sup_{\theta \in [0; \pi]} |\mathcal{V}(\rho, \theta)| \leq C \rho^N, \quad \forall \rho > L'. \quad (11.83)$$

**Remarque 11.8** Si  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  et  $((\alpha_l^p))_{(p,l) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{N}^2$  et  $((\beta_l^p))_{(p,l) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{N}^2$  sont deux suites à double indice presque nulles telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i(\rho, \theta) - \sum_{(p,l) \in \mathbb{N}^2} \alpha_l^p J_{p,l} \rho^l \cos p\theta \right. \\ \left. - \sum_{(p,l) \in \mathbb{N}^2} \beta_l^p \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right) \rho^l \cos p\theta \right\} = 0, \end{array} \right. \quad (11.84)$$

alors  $\mathcal{U}$  est à croissance lente.

Supposons que  $((\mathcal{U}_i))_{i \in [0; N]}$  est une famille de solutions du système d'équations de Laplace emboîtées dont les éléments sont à croissance lente. En multipliant  $\mathcal{U}_i$  par  $1/\pi$  ou  $(2/\pi) \cos p\theta$ , en l'intégrant suivant  $\theta$ , puis en majorant par (11.83), nous tirons :

$$|(\mathcal{U}_i)^p(\rho)| \leq C \rho^N, \quad \forall \rho \geq L'. \quad (11.85)$$

En comparant ceci à (11.55), nous tirons :

$$\ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) = 0, \quad \forall p > N, \forall l \in [0; i]. \quad (11.86)$$

Par conséquent, les séries :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta, \\ \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^i \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \end{array} \right. \quad \forall l \in [0; i], \quad (11.87)$$

ne contiennent qu'un nombre fini de termes, elles convergent, par conséquent, dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour tout  $L > 1$ . Ainsi, la série suivante converge aussi dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour tout  $L > 1$  :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^i \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.88)$$

Montrons maintenant que pour tout  $i$ ,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_i) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.89)$$

Pour  $i = 0$ , le résultat nous est donné par (11.88) (écrit pour  $i = 0$ ). Supposons que pour tout  $j < i$  :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_j) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.90)$$

D'après le lemme 11.6, il vient que pour tout  $l \geq 0$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_j) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.91)$$

Et par conséquent, il en est de même pour :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=1}^i \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \quad (11.92)$$

Nous tirons la conclusion de (11.88) et (11.92). Nous venons de démontrer le

**Lemme 11.9** *Si  $((\mathcal{U}_i))_{i \in [0; N]}$  est une solution du système d'équations de Laplace emboîtées à croissance lente, alors pour tout  $i \in [0; N]$  et  $l \geq 0$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^1(\mathcal{U}_i) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta, \\ \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_i) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \end{array} \right. \quad (11.93)$$

converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour tout  $L > 1$ ; la suite  $((\ell_p^1(\mathcal{U}_i)))_{p \in \mathbb{N}}$  est de plus presque nulle (ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls).

### Notion de limite pour les solutions du système d'équations emboîtées

**Lemme 11.10** *Si  $((\mathcal{U}_i))$  est une solution du système d'équations emboîtées dont les éléments sont à croissance lente alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i(\rho, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^i \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right. \\ \left. - \sum_{p=0}^i \sum_{l=0}^i \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (11.94)$$

**Preuve.** Du lemme 11.9, il vient que pour tout  $l \in [0; i]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta), \\ \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \in H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta). \end{array} \right. \quad (11.95)$$

Puis du lemme 11.7 il suit que pour tout  $l \in \llbracket 0; i \rrbracket$  :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{p=i+1}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right\} = 0. \quad (11.96)$$

D'où

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{p=i+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^i \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \right\} = 0. \quad (11.97)$$

Ainsi il vient la conclusion.  $\square$

### Les solutions de l'équation homogène bornées à l'infini

Introduisons l'espace de Sobolev à poids  $W_H^1$  défini sur le domaine  $[1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_H^1 = \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{D}'([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) / \nabla \mathcal{U} \in L^2([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) \text{ et} \right. \\ \left. \frac{\mathcal{U}}{\rho \text{Log}(1+\rho)} \in L^2([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) \right\}, \\ (\mathcal{U}; \mathcal{V})_{W_H^1} = \int_{[1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta} \left[ \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + \frac{\mathcal{U} \overline{\mathcal{V}}}{\rho^2 (\text{Log}(1+\rho))^2} \right] \rho \, d\rho \, d\theta. \end{array} \right. \quad (11.98)$$

Nous allons voir que cet espace a pour rôle de sélectionner les solutions non croissantes dans le demi espace de l'équation de Laplace homogène. Dans un premier temps remarquons tout d'abord que pour tout  $p > 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{0,0} = 1 \text{ et } \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta \in W_H^1, \\ J_{p,p} \rho^p \cos p\theta \text{ et } Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho = \frac{2}{\pi} (\text{Log } \rho + \gamma) \notin W_H^1. \end{array} \right. \quad (11.99)$$

Dans la suite, nous disons que  $\mathcal{V}$  est borné à l'infini (dans le demi espace) si et seulement si :

$$\limsup_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{V}(\rho, \theta) \right\} < +\infty. \quad (11.100)$$

où nous avons repris la notation (11.71).

*Toute solution bornée de l'équation homogène est un élément de  $W_H^1$*

Considérons  $\mathcal{U}$  solution de l'équation homogène telle que  $\mathcal{U}$  est bornée à l'infini dans le demi espace :

$$\limsup_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}(\rho, \theta) \right\} < +\infty. \quad (11.101)$$

En multipliant cette relation par  $\frac{1}{\pi}$  ou  $\frac{2}{\pi} \cos p\theta$ , puis en intégrant suivant  $\theta$  il vient :

$$\limsup_{\rho \rightarrow +\infty} |(\mathcal{U})^p(\rho)| < +\infty. \quad (11.102)$$

D'où comme  $(\mathcal{U})^p$  est donné par :

$$\mathcal{U}^p(\rho) = \ell_p^1(\mathcal{U}) J_{p,p} \rho^p \cos p\theta + \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta. \quad (11.103)$$

Ainsi, nous tirons que :

$$\ell_0^0(\mathcal{U}) = 0 \text{ et } \ell_p^1(\mathcal{U}) = 0 \text{ pour tout } p > 0. \quad (11.104)$$

Ainsi  $\mathcal{U}$  se représente dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  sous la forme ( $J_{0,0} = 1$ ) :

$$\mathcal{U}(\rho, \theta) = \ell_0^1(\mathcal{U}) + \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta \quad (11.105)$$

Montrons que cette série converge dans  $W_H^1$ . Cette série étant formée de termes orthogonaux dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ . Sa convergence est équivalente à celle de la série numérique :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |\ell_p^0(\mathcal{U}) Y_{p,-p}|^2 \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)}^2. \quad (11.106)$$

Le calcul direct montre qu'il existe  $C(L)$  ne dépendant pas de  $p$  tel que :

$$\|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{W_H^1} \leq C(L) \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)} \quad (11.107)$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |\ell_p^0(\mathcal{U}) Y_{p,-p}|^2 \|\rho^{-p} \cos p\theta\|_{W_H^1}^2 < +\infty. \quad (11.108)$$

Par orthogonalité de  $\rho^{-p} \cos p\theta$  dans  $W_H^1$  nous tirons que  $\mathcal{U}$  est bien un élément de  $W_H^1$ .

*Toute solution  $W_H^1$  de l'équation homogène est bornée à l'infini*

Considérons  $\mathcal{U} \in W_H^1$  solution de l'équation homogène. De la même façon que pour le champ lointain, il vient :

$$\mathcal{U}(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{U}_p(\rho) \cos p\theta \quad \text{dans } W_H^1. \quad (11.109)$$

De plus, par orthogonalité, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathcal{U})^p(\rho) \cos p\theta$  est un élément de  $W_H^1$ . Comme  $(\mathcal{U})^p(\rho)$  est donné par :

$$\mathcal{U}^p(\rho) = \ell_p^1(\mathcal{U}) J_{p,p} \rho^p \cos p\theta + \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta. \quad (11.110)$$

Nous tirons de (11.99) que :

$$\ell_0^1(\mathcal{U}) = 0 \text{ et } \ell_p^0(\mathcal{U}) = 0 \quad \text{pour tout } p > 1. \quad (11.111)$$

Nous avons donc dans  $W_H^1$  et par voie de conséquence dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  :

$$\mathcal{U} = \ell_0^1(\mathcal{U}) + \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta. \quad (11.112)$$

Du lemme 11.7, il vient :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta \right\} = 0. \quad (11.113)$$

Ainsi,  $\mathcal{U}$  est la somme d'un scalaire  $\ell_0^1(\mathcal{U})$  et d'une fonction tendant vers 0 en  $+\infty$ . Elle est donc bornée à l'infini.

*Existence et expression de la limite*

Considérons une solution de l'équation homogène bornée. Comme d'après (11.105),  $\mathcal{U}$  admet un nombre fini de croissances il vient de (11.94) :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}(\rho, \theta) - \ell_0^1(\mathcal{U}) \right\} = 0. \quad (11.114)$$

De plus nous avons pour tout  $\rho \geq 1$  :

$$\ell_0^1(\mathcal{U}) = (\mathcal{U})^0(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho, \theta) d\theta. \quad (11.115)$$

D'où

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho', \theta) d\theta, \quad \text{pour tout } \rho' > 1. \quad (11.116)$$

*Conclusion* : nous regroupons ici les résultats obtenus dans ce paragraphe

**Lemme 11.11** *Si nous introduisons l'espace des solutions du problème de Laplace homogène :*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{loc}^1(\Delta_N, [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) = \left\{ \mathcal{U} \in H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) / \right. \\ \left. \mathcal{U} \text{ est solution de l'équation homogène} \right\}, \end{array} \right. \quad (11.117)$$

et l'espace des solutions  $W_H^1$  de l'équation homogène :

$$W_H^2 = \left\{ \mathcal{U} \in W_H^1 / \mathcal{U} \text{ est solution de l'équation homogène} \right\}, \quad (11.118)$$

nous avons l'identité algébrique suivante :

$$W_H^2 = \left\{ \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\Delta_N, [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta) / \mathcal{U} \text{ est bornée à l'infini} \right\}, \quad (11.119)$$

et de plus pour tout  $\mathcal{U} \in W_H^2$ , la limite est donnée par :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho', \theta) d\theta, \quad \text{pour tout } \rho' > 1. \quad (11.120)$$

De plus, pour tout  $L > 1$ ,  $\mathcal{U}$  admet le développement modal dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  et  $W_H^1$  :

$$\mathcal{U}(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{U}(\rho', \theta) + \sum_{p=1}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos p\theta. \quad (11.121)$$

### 11.1.3 Pour le champ proche dans la fente

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le domaine :

$$]0; +\infty[_X \times ]0; 1[_Y \quad (\text{c.f. figure 10.12}). \quad (11.122)$$

Ce domaine bénéficie d'une nature tensorielle en les coordonnées cartésiennes  $X$  et  $Y$ . Les résultats de séparation de variables qui suivent sont basés sur le théorème ci-dessous issu de la théorie spectrale :

**Théorème 11.12** *Les vecteurs propres  $((\cos p\pi Y))_{p \in \mathbb{N}}$  de l'opérateur autoadjoint non borné à résolvante compacte de  $L^2([0; 1]_Y)$  :*

$$\mathcal{U} \mapsto \frac{d^2 \mathcal{U}}{dY^2} \quad (11.123)$$

sur le domaine de définition

$$\left\{ \mathcal{U} \in H^2([0; 1]_Y) / \frac{d\mathcal{U}}{dY} = 0 \text{ en } Y=0 \text{ et } Y=1 \right\} \quad (11.124)$$

forment une base orthogonale de  $L^2([0; 1]_Y)$  et  $H^1([0; 1]_Y)$ .

Les difficultés mathématiques de ce paragraphe étant très proches de celles des deux précédents nous serons plus concis.



**Décomposition modale des fonctions**  $H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$

Nous considérons ici une fonction  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*)$ . Pour presque tout  $X$ ,  $\mathcal{U}$  (resp.  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}$ ) admet une trace  $\mathcal{U}(X, \cdot) \in H^1([0; 1]_Y)$  (resp.  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(X, \cdot) \in L^2([0; 1]_Y)$ ). De plus,  $\mathcal{U}(X, \cdot)$  et  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X, \cdot)$  admettent les décompositions spectrales :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(X, Y) &= \sum_{p=0}^{+\infty} [\mathcal{U}]^p(X) \cos p\pi Y, & \text{dans } H^1([0; 1]_Y), \quad p.p. X, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X, Y) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} \right]^p(X) \cos p\pi Y, & \text{dans } L^2([0; 1]_Y), \quad p.p. X. \end{cases} \quad (11.125)$$

où pour tout  $\mathcal{V} \in L^2([0; 1]_Y)$  nous avons noté :

$$\begin{cases} [\mathcal{V}]^0 &= \int_0^1 \mathcal{V}(Y) dY, \\ [\mathcal{V}]^p &= 2 \int_0^1 \mathcal{V}(Y) \cos p\pi Y dY, \quad \text{pour tout } p > 0. \end{cases} \quad (11.126)$$

Comme pour le champ lointain, on montre que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $[\mathcal{U}]^p$  est un élément de  $\mathcal{D}'(]0; +\infty[)$  et que l'on peut intervertir la projection et la dérivation suivant  $X$  :

$$\frac{d[\mathcal{U}]^p}{dX} = \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X} \right]^p, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0; +\infty[). \quad (11.127)$$

De plus, pour tout  $L' > 0$ , nous avons au sens de  $H^1([0; L']_X \times [0; 1]_Y)$

$$\mathcal{U}(X, Y) = \sum_{p=0}^{+\infty} [\mathcal{U}]^p(X) \cos p\pi Y, \quad (11.128)$$

la série du second membre étant constituée de termes deux à deux orthogonaux.

**Développement modal des solutions de l'équation de Laplace homogène**

Dans la suite, on dit que  $\mathcal{U} \in H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$  est à croissance lente (dans la fente) si et seulement si il existe un polynôme  $P$  et un réel  $L'$  positif tels que :

$$\mathcal{U}(X, Y) \leq P(X), \quad p.p. (X, Y) \in [L'; +\infty[_X \times [0; 1]_Y \quad (11.129)$$

Considérons maintenant  $\mathcal{U}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{U} \in H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; \pi]_\theta), \\ \Delta \mathcal{U} = 0, \quad \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, \quad \text{en } Y = 0 \text{ et } Y = 1, \\ \mathcal{U} \text{ est à croissance lente.} \end{cases} \quad (11.130)$$

**N.B.** Dans la suite, nous dirons que  $\mathcal{U}$  est solution de l'équation homogène.

Comme  $\Delta \mathcal{U} \in L_{loc}^2([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$ , par double intégration par partie, il est facile de voir que (c'est ici qu'interviennent les conditions aux limites de Neumann) :

$$[\Delta \mathcal{U}]^p = \frac{d^2 [\mathcal{U}]^p}{dX^2} - p^2 \pi^2 [\mathcal{U}]^p \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0; +\infty[). \quad (11.131)$$

Ainsi,  $[\mathcal{U}]^p$  satisfait à :

$$\frac{d^2 [\mathcal{U}]^p}{dX^2} - p^2 \pi^2 [\mathcal{U}]^p = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0; +\infty[). \quad (11.132)$$

Et par conséquent  $[\mathcal{U}]^p$  est donné par :

$$\begin{cases} [\mathcal{U}]^0(X) = [\mathcal{U}]_0^0 + [\mathcal{U}]_1^0 X, \\ [\mathcal{U}]^p(X) = [\mathcal{U}]_0^p \exp p\pi X + [\mathcal{U}]_0^{-p} \exp -p\pi X, \end{cases} \quad \forall p > 0. \quad (11.133)$$

où les  $[\mathcal{U}]_l^p$  désignent des complexes.

Comme  $\mathcal{U}$  est à croissance lente :

$$|[\mathcal{U}]^p(X)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\mathcal{U}(X, Y)| dY \leq 2 |P(X)|. \quad (11.134)$$

D'où :

$$\begin{cases} [\mathcal{U}]^0(X) = [\mathcal{U}]_0^0 + [\mathcal{U}]_1^0 X, \\ [\mathcal{U}]^p(X) = [\mathcal{U}]_0^{-p} \exp -p\pi X, \end{cases} \quad \forall p > 0. \quad (11.135)$$

Ainsi, pour tout  $L' > 0$ , nous avons dans  $H^1([0; L']_X \times [0; \pi]_Y)$

$$\mathcal{U}(X, Y) = [\mathcal{U}]_1^0 X + \sum_{p=0}^{+\infty} [\mathcal{U}]_0^{-p} \exp -p\pi X \cos p\pi Y. \quad (11.136)$$

### Développement modal des solutions du système d'équations de Laplace emboîtées

Soit  $N$  un entier naturel, considérons la famille de fonctions  $(\mathcal{U}_i)_{i \in [0; N]}$  telle que pour tout  $0 \leq i \leq N$  :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_i \in H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y), \\ \Delta \mathcal{U}_i = -4 \mathcal{U}_{i-2}, & \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial n} = 0, & \text{en } Y = 0 \text{ et } Y = 1, \\ \mathcal{U}_i \text{ est à croissance lente.} \end{cases} \quad (11.137)$$

où nous avons noté  $\mathcal{U}_{-2} = 0$  et  $\mathcal{U}_{-1} = 0$ .

**N.B.** Dans la suite, nous dirons que  $(\mathcal{U}_i)$  est solution du système d'équations de Laplace emboîtées.

Cette fois  $[\mathcal{U}_i]^p$  vérifie les équations aux dérivées ordinaires emboîtées suivantes :

$$\frac{d^2 [\mathcal{U}_i]^p}{dX^2} - p^2 \pi^2 [\mathcal{U}_i]^p = -4 [\mathcal{U}_{i-2}]^p, \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0; +\infty[). \quad (11.138)$$

Chaque  $\mathcal{U}_i$  vérifie alors la propriété de développement modale suivante :

**Lemme 11.13** *Pour tout  $i$ , il existe des scalaires  $[\mathcal{U}_i]_l^p$  ( $p \in \mathbb{N}$  et  $l$  décrivant les sommes qui suivent) tels que :*

$$\begin{cases} [\mathcal{U}_i]^0(X) = \sum_{l=0}^{2E(i/2)+1} [\mathcal{U}_i]_l^0 X^l, \\ [\mathcal{U}_i]^p(X) = \sum_{l=0}^{E(i/2)} [\mathcal{U}_i]_l^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y, \end{cases} \quad \forall p > 0, \quad (11.139)$$

où de plus pour  $l$  tel que  $2 \leq l \leq 2E(i/2) + 1$  :

$$[\mathcal{U}_i]_l^0 = -\frac{4}{l(l-1)} [\mathcal{U}_{i-2}]_{l-2}^0 \quad (11.140)$$

et pour  $l$  tels que  $0 < l \leq E(i/2)$  et  $p > 0$  :

$$[\mathcal{U}_i]_l^p = \sum_{m=l-1}^{E((i-2)/2)} \left[ \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} \frac{(-2p\pi)^l}{(-2p\pi)^m} [\mathcal{U}_{i-2}]_m^p \right]. \quad (11.141)$$

**Preuve.** Le lemme provient pour  $i = 0$  et  $1$  de (11.135). Pour tout  $i \geq 2$ , Construisons  $[\widehat{\mathcal{U}}_i]^p$ ,

$$\begin{cases} [\widehat{\mathcal{U}}_i]^0(X) = \sum_{l=2}^{2E(i/2)+1} [\mathcal{U}_i]_l^0 X^l, \\ [\widehat{\mathcal{U}}_i]^p(X) = \sum_{l=1}^{E(i/2)} [\mathcal{U}_i]_l^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y, \end{cases} \quad (11.142)$$

où  $[\mathcal{U}_i]_l^0$  et  $[\mathcal{U}_i]_l^p$  sont donnés par (11.140) et (11.141). On vérifie alors que  $[\widehat{\mathcal{U}}_i]^p$  vérifie :

$$\frac{d^2[\widehat{\mathcal{U}}_i]^p}{dX^2} - p^2 \pi^2 [\widehat{\mathcal{U}}_i]^p = -4 [\mathcal{U}_{i-2}]^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (11.143)$$

D'où,  $[\widehat{\mathcal{U}}_i]^p$  et  $[\mathcal{U}_i]^p$  ne diffèrent que d'une solution de l'équation homogène :

$$\frac{d^2[\mathcal{U}]^p}{dX^2} - p^2 \pi^2 [\mathcal{U}]^p = 0 \quad (11.144)$$

Nous tirons la conclusion en imposant la condition de non croissance à l'infini.  $\square$

**Remarque 11.14** On se référera à (10.125) pour comprendre d'où provient (11.141).

#### A propos des formes linéaires $D^l(\mathcal{U})$

Soit la famille de fonctions  $(\mathcal{U}_i)$  solution du système d'équations emboîtées. De (11.139), nous tirons que :

$$[\mathcal{U}_i]^0(X) = \int_0^1 \mathcal{U}_i(X, Y) dY \quad (11.145)$$

est un polynôme de la variable  $X$ . Remarquons que nous venons de démontrer le **Lemme 9.6**. Pour  $l \in \mathbb{N}$ , nous pouvons alors appliquer les formes linéaires  $D^l$  à  $\mathcal{U}_i$  (c.f. (9.47)).

De plus, par dérivations successives, il vient :

$$\begin{cases} D^l(\mathcal{U}_i) = l! [\mathcal{U}_i]_l^0, & \text{pour } 0 \leq l \leq 2E(i/2) + 1, \\ D^l(\mathcal{U}_i) = 0, & \text{pour } l > 2E(i/2) + 1. \end{cases} \quad (11.146)$$

#### Deux résultats techniques

Passons maintenant à la preuve de deux résultats techniques. Le premier est relatif à la convergence d'une série dans  $H_{loc}^1([0; +\infty[ \times [0; \pi]_\theta)$ . Le deuxième est un lemme qui nous permet d'introduire la notion de limite.

**Lemme 11.15** Si la série :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \quad (11.147)$$

converge dans  $H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; \pi]_Y)$  alors, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , il en est de même pour la série :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} \frac{(-2p\pi)^l}{(-2p\pi)^m} X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y. \quad (11.148)$$

**Preuve.** Notons ici

$$\Psi_{l,p}(X, Y) = X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y. \quad (11.149)$$

A  $a$  donné positif, on montre par le calcul et majoration (grâce à la décroissance exponentielle dans la direction  $X > 0$ ) qu'à  $m$  et  $l$  donnés il existe  $P(m, l)$  tel que pour tout  $p \geq P$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|\Psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)} \leq \|\Psi_{m,p}\|_{H^1([0;a]_X \times [0;1]_Y)} \leq 2 \|\Psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}, \\ \frac{1}{2} \|\Psi_{l,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)} \leq \|\Psi_{l,p}\|_{H^1([0;a]_X \times [0;1]_Y)} \leq 2 \|\Psi_{l,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}. \end{cases}$$

De plus, les familles  $((\psi_{l,p}))_{p \in \mathbb{N}}$  et  $((\psi_{m,p}))_{p \in \mathbb{N}}$  sont orthogonales dans  $H^1([0; a[_X \times [0; 1]_Y)$  et  $H^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$ ; ainsi les convergences  $H^1_{loc}$  des séries (11.147) et (11.148) sont équivalentes aux convergences  $H^1$ . Ainsi nous tirons les critères de convergence :

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{+\infty} |\mu_p|^2 \|\psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}^2 < +\infty, \\ \sum_{p=1}^{+\infty} |\mu_p|^2 \left| \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} (-2p\pi)^{l-m} \right|^2 \|\psi_{l,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}^2 < +\infty. \end{cases} \quad (11.150)$$

De

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} (-2p\pi)^{l-m} \frac{\|\psi_{l,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}}{\|\psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}} \right] = 0 \quad (11.151)$$

il vient la conclusion. En effet le calcul direct donne :

$$\begin{cases} \|\psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{(2m)!}{(-2p\pi)^{2m+1}} (1 + 2p^2 \pi^2 + 4p^2 \pi^2 m^2), \\ \|\psi_{l,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{(2l)!}{(-2p\pi)^{2l+1}} (1 + 2p^2 \pi^2 + 4p^2 \pi^2 l^2) \end{cases} \quad (11.152)$$

Ainsi pour  $p$  au voisinage de l'infini :

$$\frac{\|\psi_{l,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}}{\|\psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}} \sim \sqrt{\frac{(2l)!}{(2m)!}} (-2p\pi)^{m-l} \frac{l}{m}. \quad (11.153)$$

D'où nous tirons (11.151).  $\square$

Posons la notation :

$$\{\mathcal{V}(X, Y)\} = \sup_{Y \in [0;1]} |\mathcal{V}(X, Y)| \quad (11.154)$$

$\mathcal{V}$  admet une limite  $\lambda$  en  $X = +\infty$  si et seulement si :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \{\mathcal{V}(X, Y) - \lambda\} = 0. \quad (11.155)$$

**Lemme 11.16** Soit  $m$  un entier naturel et  $((\mu_p))_{p \in \mathbb{N}^*}$  une suite de complexes. Si la série :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \quad (11.156)$$

converge dans  $H^1_{loc}([0; L'_X \times [0; \pi]_Y)$  pour tout  $L' > 0$  alors :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right\} = 0. \quad (11.157)$$

**Preuve.** Commençons par majorer la série (11.156) pour tout  $X > 0$  :

$$\left| X \sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right| \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \mu_p X^{m+1} \exp -p\pi X \right| \quad (11.158)$$

La fonction  $X^{m+1} \exp -p\pi X$  étant décroissante pour  $X > m+1 (\geq (m+1)/(p\pi))$ , nous avons pour  $X > m+1$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \left| X \sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right| &\leq \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \mu_p (m+1)^{m+1} \exp -p\pi(m+1) \right| \\ &\leq C(m) \sum_{p=1}^{+\infty} |\mu_p \exp -p\pi|. \end{aligned} \right. \quad (11.159)$$

De plus, la convergence de la série (11.156) est équivalente à celle de la série numérique :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |\mu_p|^2 \|\psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)}^2 < +\infty, \quad (11.160)$$

D'où

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} |\mu_p| \|\psi_{m,p}\|_{H^1([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)} = 0. \quad (11.161)$$

Et donc d'après (11.152), il existe  $C(m)$  tel que :

$$|\mu_p| \leq C(m) (-p\pi)^{m-1/2} \quad (11.162)$$

Par conséquent, d'après (11.159) :

$$\left| X \sum_{p=1}^{+\infty} \mu_p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right| \leq C(m) \sum_{p=1}^{+\infty} (-p\pi)^{m-1/2} \exp -p\pi < +\infty \quad (11.163)$$

Ce qui termine la preuve de ce lemme.  $\square$

### Convergence à $l$ donné des séries

Comme pour le champ proche dans le demi espace, nous avons :

**Lemme 11.17** *Soit  $(\mathcal{U}_i)$ , une famille de solutions de l'équation de Laplace emboîtées alors pour tout  $i$  et  $l \in \llbracket 0; E(i/2) \rrbracket$  la série :*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} [\mathcal{U}_i]_l^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y \quad (11.164)$$

converge pour tout  $L' > 0$  dans  $H^1([1; L']_X \times [0; 1]_Y)$ .

### Limite et caractère borné des solutions du système d'équations emboîtées

Dans la suite, nous disons que  $\mathcal{V}$  est borné à l'infini (dans la fente). si et seulement si :

$$\limsup_{X \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{V}(X, Y) \right\} < +\infty, \quad (\text{c.f. (11.154)}). \quad (11.165)$$

Comme pour le champ proche dans le demi espace, nous pouvons montrer le résultat suivant :

**Lemme 11.18** Soit  $((\mathcal{U}_i))$ , une solution du système d'équations emboîtées, alors pour tout  $i$  nous avons :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i(X, Y) - \sum_{l=0}^{2E(i/2)+1} [\mathcal{U}_i]_l^0 X^l \right\} = 0. \quad (11.166)$$

De plus si  $(([\mu]_l))_{l \in \mathbb{N}}$  est une suite de complexes presque nulle telle que :

$$\mathcal{U}_i(X, Y) - \sum_{l=1}^{+\infty} [\mu]_l X^l \text{ est borné à l'infini.} \quad (11.167)$$

Alors,

$$\begin{cases} [\mu]_l = [\mathcal{U}]_l^0, & \text{pour } l \in \llbracket 1; 2E(i/2) + 1 \rrbracket, \\ [\mu]_l = 0, & \text{pour } l > 2E(i/2) + 1. \end{cases} \quad (11.168)$$

### Les solutions de l'équation homogène borné

Introduisons de plus l'espace de Sobolev à poids :

$$\begin{cases} W_S^1 = \left\{ \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) / \nabla \mathcal{U} \in L^2([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y) \right. \\ \quad \left. \text{et } \frac{\mathcal{U}}{1+X} \in L^2([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y) \right\}, \\ (\mathcal{U}; \mathcal{V})_{W_S^1} = \int_0^{+\infty} \int_0^1 \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + \frac{\mathcal{U} \overline{\mathcal{V}}}{(1+X)^2} dX dY. \end{cases} \quad (11.169)$$

Comme pour le champ lointain, nous avons la caractérisation suivante :

**Lemme 11.19** Si nous introduisons l'espace des solutions du problème de Laplace homogène :

$$H_{loc}^1(\Delta_N, \widehat{\Omega}_N^*) = \left\{ \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) / \mathcal{U} \text{ est solution de l'équation homogène} \right\}, \quad (11.170)$$

et l'espace des solutions homogènes  $W_S^1$  :

$$W_S^2 = \left\{ \mathcal{U} \in W_S^1 / \mathcal{U} \text{ est solution de l'équation homogène} \right\}, \quad (11.171)$$

nous avons l'identité algébrique suivante :

$$W_S^2 = \left\{ \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\Delta_N, \widehat{\Omega}_N^H) / \mathcal{U} \text{ est borné à l'infini dans la fente} \right\}, \quad (11.172)$$

et de plus pour tout  $\mathcal{U} \in W_S^2$ , la limite est donnée par :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(X, Y) = D^0(\mathcal{U}) = \int_0^1 \mathcal{U}(X', Y) dY, \quad \text{pour tout } X' > 0. \quad (11.173)$$

et nous avons pour tout  $L' > 0$  dans  $H_{loc}^1([0; L']_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  :

$$\mathcal{U}(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} [\mathcal{U}]_p^0 \exp -p\pi X \cos p\pi Y. \quad (11.174)$$

## 11.2 Les problèmes de Helmholtz dans $\Omega$ singulier en $A$

Nous nous plaçons dans cette section dans le demi espace gauche privé de l'obstacle.

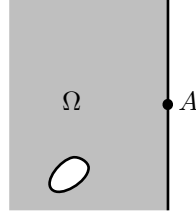


FIG. 11.1 – Le domaine  $\Omega$

A la section 9.3.1, nous avons introduit en (9.68), des problèmes de Helmholtz avec condition de singularité au voisinage de l'origine. Toute la difficulté est ici de traiter ces singularités.

La solution recherchée n'étant pas  $H_{loc}^1(\Omega)$ , mais  $H_{0,loc}^1(\Omega)$ , la théorie variationnelle classique ne peut donc pas être appliquée directement. C'est pourquoi nous allons extraire la singularité de la solution à l'aide d'une fonction de troncature pour nous ramener au cas des fonctions  $H_{loc}^1(\Omega)$ .

### 11.2.1 Identification d'un problème modèle

Etant donné une suite de complexes  $((b_p))_{p \in \mathbb{N}}$  presque nulle, notons  $s$  la fonction :

$$s(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p Y_p(\omega r) \cos(p\theta). \quad (11.175)$$

Comme seul un nombre fini de  $b_p$  sont différents de 0, la fonction  $s$  est bien définie ; c'est un élément de  $H_{0,loc}^1(\Omega)$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta s + \omega^2 s = 0, & \text{dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial s}{\partial x}(0, y) = 0, & \text{pour } 0 < |y| < R \end{cases} \quad (11.176)$$

pour tout  $R$  plus petit que la distance de l'origine à l'obstacle (c.f. figure 10.9).

Nous nous intéressons au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H_{0,loc}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ w := u - s \in H_{loc}^1(\Omega), \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ u \text{ est sortante.} \end{array} \right. \quad (11.177)$$

### 11.2.2 Caractère bien posé par extraction de la singularité

**Théorème 11.20** *Le problème (11.177) admet une unique solution. De plus, pour tout  $R$  plus petit que la distance qui sépare l'origine de l'obstacle,  $u$  se représente sous la forme :*

$$u(r, \theta) - \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^0(u) Y_p(\omega r) \cos(p\theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u) J_p(\omega r) \cos(p\theta) \quad \text{dans } H^1(\Omega_R), \quad (11.178)$$

avec pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{L}_p^0(u) = b_p. \quad (11.179)$$

Les identités (11.178) et (11.179) n'étant que des conséquences directes du paragraphe 11.1.1, il ne nous reste plus qu'à montrer l'existence unicité de la solution.

**Remarque 11.21** Dans le cas où  $\Omega$  ne contient pas d'obstacle ( $\Omega = \mathbb{R}^{2,-}$ ),  $u$  doit à la fois vérifier la condition d'onde sortante qui s'exprime :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos(p\theta) \quad \text{dans } H_{loc}^1(\Omega), \quad (11.180)$$

et (11.178), ce qui implique (comme  $H_p^{(1)} = J_p + i Y_p$ ) :

$$u(r, \theta) = \sum_{p=0}^N \frac{b_p}{i} H_p^{(1)}(\omega r) \cos(p\theta) \quad \text{dans } \Omega. \quad (11.181)$$

**Remarque 11.22** Le lemme 9.13 est un corollaire de ce résultat. en effet, Ce problème admet comme solution la fonction nulle. Il correspond en effet à la suite  $((b_p))_{p \in \mathbb{N}}$  identiquement nulle. La conclusion provenant de l'unicité.

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , l'existence unicité des fonction  $w_p$  (c.f. (9.68)) est aussi une conséquence de ce théorème, il suffit en effet de prendre pour tout  $q \in \mathbb{N}$  :

$$b_q = \delta_{p,q}. \quad (11.182)$$

où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker.

### 11.2.3 Preuve de l'existence et de l'unicité

Passons maintenant au problème d'existence unicité. Soient  $R$  et  $R'$  deux réels positifs plus petit que la distance qui sépare l'origine du support de la source tels que :

$$R < R', \quad (11.183)$$

Introduisons une fonction de troncature  $\chi$  radiale qui vaut 0 hors de  $\Omega^{R'}$  et 1 dans de  $\Omega_R$ . Soit  $u$  une solution du problème (11.177). Définissons la fonction  $v$  :

$$v = u - \chi s. \quad (11.184)$$

Ainsi,  $v$  satisfait les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in H_{loc}^1(\Omega) \\ \Delta v + \omega^2 v = -(\Delta \chi) s - 2(\nabla \chi)(\nabla s) \quad (\text{à support compact}) \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ v \text{ est sortante.} \end{array} \right. \quad (11.185)$$

Par densité de  $H_{00}^1(\Omega_R)$  dans  $H^1(\Omega_R)$ , nous tirons :

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \implies \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (11.186)$$

Le problème, qui est associé à (11.185), est classiquement bien posé. Inversement il est clair que si  $v$  est solution du problème associé aux équations (11.185) alors  $v + \chi s$  est aussi solution du problème (11.177).



### 11.3 Les problèmes de Laplace en domaine non borné

Nous nous plaçons dans cette section dans le domaine  $\widehat{\Omega}_N$

$$\overline{\widehat{\Omega}_N^*} = \mathbb{R}^{2,-} \cup [0, +\infty[_X \times [0, 1]_Y, \quad (11.187)$$

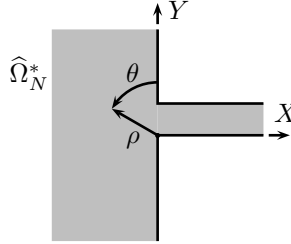


FIG. 11.2 – Le domaine  $\widehat{\Omega}_N^*$

Nous nous intéressons ici à des problèmes de Laplace inhomogènes avec condition de croissance à l'infini. Toute la difficulté est bien sûr de prendre en compte ces croissances. Cette difficulté sera résolue via l'introduction de deux fonctions auxiliaires  $\mathcal{U}_H$  et  $\mathcal{U}_S$  (“H” comme half-space et “S” comme slot); ces fonctions contiendront toute l'information relative à ce comportement croissant.

Cette partie se décompose en trois paragraphes :

- (1) le premier consiste en l'identification d'un problème modèle, et en l'énoncé du résultat d'existence unicité,
- (2) le deuxième consiste en la preuve du résultat via les espaces de Sobolev à poids et l'introduction de fonctions de troncature,
- (3) le troisième montre comment nous appliquons cette théorie pour la définition des termes des développements asymptotiques.

#### 11.3.1 Identification d'un problème modèle

Etant donné  $f$  une fonction  $L^2_{loc}(\widehat{\Omega}_N^*)$  et deux fonctions  $\mathcal{U}_H$  et  $\mathcal{U}_S$  telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_H \in H^1_{loc}([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta), \\ \Delta \mathcal{U}_H = -f & \text{dans } [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial n} = 0, & \text{en } X = 0, \end{cases} \quad (11.188)$$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_S \in H^1_{loc}([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y), \\ \Delta \mathcal{U}_S = -f & \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial n} = 0, & \text{en } Y = 0 \text{ et } 1. \end{cases} \quad (11.189)$$

Nous nous intéressons au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathcal{U} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ tel que :} \\ \Delta \mathcal{U} = -f, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \{ \mathcal{U} - \mathcal{U}_H \} = 0, \quad (\text{c.f. (11.71)}) \\ \mathcal{U} - \mathcal{U}_S \text{ est borné lorsque } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (11.190)$$

**Remarque 11.23** *Ce problème est un problème de Laplace inhomogène avec des conditions aux limites de Neumann et des conditions de croissance à l'infini. Les fonctions  $\mathcal{U}_H$  et  $\mathcal{U}_S$  fixent les croissances à l'infini de  $\mathcal{U}$ . En effet,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}_H$  ne diffèrent à l'infini que d'une fonction de limite nulle. D'autre part,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}_S$  diffèrent d'une fonction bornée.*

Le problème (11.190) est bien posé. En effet, nous avons le

**Théorème 11.24** *Sous la condition :*

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta + \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial X}(0, Y) dY + \int_{[0,1]_\rho \times [0,\pi]_\theta} f = 0. \quad (11.191)$$

le problème (11.190) admet une unique solution. De plus,

(i)  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_H$  se représente dans  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  et  $W_H^1$  sous la forme :

$$\mathcal{U} - \mathcal{U}_H = \sum_{p=1}^{+\infty} \mathcal{L}_p^0(\mathcal{U} - \mathcal{U}_H) \left( Y_{p,-p} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p} \cos(p\theta). \quad (11.192)$$

(ii)  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_S$  se représente dans  $H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$  et  $W_S^1$  sous la forme :

$$\mathcal{U} - \mathcal{U}_S = \sum_{p=0}^{+\infty} [\mathcal{U} - \mathcal{U}_S]_0^p \exp(-p\pi X) \cos(p\pi Y). \quad (11.193)$$

**Remarque 11.25** *Les deux points suivants sont à la base des preuves qui vont suivre ; c'est pourquoi nous les présentons ici. Supposons qu'il existe  $\mathcal{U}$  solution du problème (11.190). Alors  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_H$  vérifie les équations suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} - \mathcal{U}_H \in H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta), \\ \Delta[\mathcal{U} - \mathcal{U}_H] = 0, \quad \text{dans } [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ \frac{\partial[\mathcal{U} - \mathcal{U}_H]}{\partial n} = 0, \quad \text{en } X = 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \{ \mathcal{U}(\rho, \theta) - \mathcal{U}_H(\rho, \theta) \} = 0. \end{array} \right. \quad (11.194)$$

D'où d'après le lemme 11.11,  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_H$  est un élément de  $W_H^2$  et a fortiori de  $W_H^1$  et :

$$\int_0^\pi (\mathcal{U} - \mathcal{U}_H(\rho, \theta)) d\theta = 0. \quad (11.195)$$

De même  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_S$  vérifie les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} - \mathcal{U}_S \in H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y), \\ \Delta[\mathcal{U} - \mathcal{U}_S] = 0, \quad \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ \frac{\partial[\mathcal{U} - \mathcal{U}_S]}{\partial n} = 0, \quad \text{en } Y = 0 \text{ et } 1. \\ \mathcal{U} - \mathcal{U}_S \text{ est borné au voisinage de l'infini dans la fente.} \end{array} \right. \quad (11.196)$$

C'est pourquoi, d'après le lemme 11.19,  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_S$  est un élément de  $W_S^2$  et à fortiori de  $W_S^1$ .

Remarquons de plus que les points (i) et (ii) du théorème 11.24 sont alors des conséquences de l'appartenance à  $W_H^2$  et  $W_S^2$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer l'existence et l'unicité de la solution.

### 11.3.2 Caractère bien posé

#### Preuve du résultat d'existence unicité

Soit  $L$  un réel strictement supérieur à 1 et  $L'$  un réel strictement positif. Nous supposons dans la suite que les données  $f$ ,  $\mathcal{U}_H$  et  $\mathcal{U}_S$  vérifient (11.191).

*Analyse* : Supposons que  $\mathcal{U}$  est solution du problème (11.190). Introduisons une fonction de troncature  $\chi$  de classe  $C^\infty(\widehat{\Omega}_N^*)$ , radiale dans le demi espace et ne dépendant que de  $X$  dans la fente. telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(\rho, \theta) = 1, \quad \text{dans } [L; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ \chi(X, Y) = 1, \quad \text{dans } [L'; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ \chi(\rho, \theta) = 0, \quad \text{dans } [0; 1]_\rho \times [0; \pi]_\theta. \end{array} \right. \quad (11.197)$$

Introduisons la fonction  $\mathcal{V}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \mathcal{U} - \chi \mathcal{U}_H \quad \text{pour } \rho > 1, \\ \mathcal{V} = \mathcal{U} - \chi \mathcal{U}_S \quad \text{pour } X' > 0, \\ \mathcal{V} = \mathcal{U} \quad \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (11.198)$$

$\mathcal{V}$  satisfait les propriétés suivantes :

(a)  $\Delta \mathcal{V}$  est un élément de  $L_{loc}^2(\widehat{\Omega}_N^*)$  à support compact :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{V} = -f - \Delta(\chi \mathcal{U}_H) \\ \quad = (\chi - 1)f + 2(\nabla \chi)(\nabla \mathcal{U}_H) + (\Delta \chi) \mathcal{U}_H \text{ pour } \rho > 1, \\ \Delta \mathcal{V} = -f - \Delta(\chi \mathcal{U}_S) \\ \quad = (\chi - 1)f + 2(\nabla \chi)(\nabla \mathcal{U}_S) + (\Delta \chi) \mathcal{U}_S \text{ pour } X > 0, \\ \Delta \mathcal{V} = -f \text{ sinon.} \end{array} \right. \quad (11.199)$$

En particulier,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{V} = 0, \quad \text{pour } \rho > L, \\ \Delta \mathcal{V} = 0, \quad \text{pour } X > L'. \end{array} \right. \quad (11.200)$$

(b)  $\mathcal{V}$  vérifie les conditions aux limites de Neumann homogène (ceci provient de la dépendance radiale de  $\chi$  dans le demi espace et de  $X$  dans la fente) :

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \quad (11.201)$$

(c)  $\mathcal{V}$  admet le cadre fonctionnel (c.f. remarque 11.25) :

$$\begin{cases} \mathcal{V} \in W_H^1 \cap W_S^1, \\ \int_0^\pi \mathcal{V}(\rho, \theta) d\theta = 0, \quad \forall \rho > L. \end{cases} \quad (11.202)$$

*Synthèse* : Nous avons besoin du

**Lemme 11.26** Soit  $g$  un élément de  $L^2(\widehat{\Omega}_N^*)$  à support compact ( $g(\rho, \theta) = 0$ , pour tout  $\rho > L$  et  $g(X, Y) = 0$  pour tout  $X > L'$ ).

Sous la condition :

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} g = 0. \quad (11.203)$$

Il existe un unique  $\mathcal{V} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \cap W_H^1 \cap W_S^1$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{V} = -g, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^* \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \int_0^\pi \mathcal{V}(\rho, \theta) d\theta = 0, & \forall \rho \in [L; +\infty[. \end{cases} \quad (11.204)$$

Cherchons alors  $\mathcal{V} \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \cap W_H^1 \cap W_S^1$  qui vérifie les équations (11.204) avec  $g \in L_{loc}^2(\widehat{\Omega}_N^*)$  à support compact donné par :

$$\begin{cases} g = f + \Delta(\chi \mathcal{U}_H), & \text{dans } [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ g = f + \Delta(\chi \mathcal{U}_S), & \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ g = f \text{ sinon.} \end{cases} \quad (11.205)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de  $\mathcal{V}$ , il nous suffit de vérifier la condition de compatibilité (11.203) qui s'exprime :

$$\int_{[1, L]_\rho \times [0, \pi]_\theta} f + \Delta(\chi \mathcal{U}_H) + \int_{[0, 1]_\rho \times [0, \pi]_\theta} f + \int_{[0, L']_X \times [0, 1]_Y} f + \Delta(\chi \mathcal{U}_S) = 0. \quad (11.206)$$

Il nous suffit alors d'appliquer la formule de Green-Riemann :

$$\begin{cases} \int_{[1, L]_\rho \times [0, \pi]_\theta} f + \Delta(\chi \mathcal{U}_H) &= \int_{[1, L]_\rho \times [0, \pi]_\theta} \Delta[(\chi - 1)\mathcal{U}_H] \\ &= \int_{\partial[1, L]_\rho \times [0, \pi]_\theta} \frac{\partial((\chi - 1)\mathcal{U}_H)}{\partial n} = \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta, \end{cases} \quad (11.207)$$

$$\begin{cases} \int_{[0, L']_X \times [0, 1]_Y} f + \Delta(\chi \mathcal{U}_S) &= \int_{[0, L']_X \times [0, 1]_Y} \Delta[(\chi - 1)\mathcal{U}_S] \\ &= \int_{\partial[0, L']_X \times [0, 1]_Y} \frac{\partial((\chi - 1)\mathcal{U}_S)}{\partial n} = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial \rho}(0, Y) dY, \end{cases} \quad (11.208)$$

Ainsi (11.203) provient de (11.191). Il ne nous reste plus qu'à remarquer que si  $\mathcal{V}$  est solution de (11.202) alors  $\mathcal{U}$  défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \mathcal{V} + \chi \mathcal{U}_H & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^H \\ \mathcal{U} = \mathcal{V} + \chi \mathcal{U}_S & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^S \\ \mathcal{U} = \mathcal{V} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.209)$$

est solution du problème (11.190).

Ce qui termine la démonstration du théorème 11.24 à la preuve du lemme 11.26 près. La fin de ce paragraphe consiste en la

### Preuve du lemme 11.26

#### Caractère bien posé via la théorie variationnelle

Introduisons l'espace :

$$W = H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \cap W_H^1 \cap W_S^1 \quad (11.210)$$

Cet espace est hilbertien si nous le munissons du produit scalaire :

$$\begin{cases} (\mathcal{U}; \mathcal{V})_W = \int_1^{+\infty} \int_0^\pi \left[ \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + \frac{\mathcal{U} \overline{\mathcal{V}}}{\rho^2 (\text{Log}(1+\rho))^2} \right] \rho \, d\rho \, d\theta \\ + \int_0^1 \int_0^\pi \left[ \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + \mathcal{U} \overline{\mathcal{V}} \right] \rho \, d\rho \, d\theta \\ + \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left[ \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + \frac{\mathcal{U} \overline{\mathcal{V}}}{(1+X)^2} \right] dX \, dY. \end{cases} \quad (11.211)$$

Nous allons donner une preuve du lemme 11.26 via la théorie variationnelle. Introduisons le problème :

$$\begin{cases} \text{Chercher } \mathcal{U} \in W \text{ tel que pour tout } \mathcal{V} \in W : \\ a(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = L(\mathcal{V}), \end{cases} \quad (11.212)$$

où nous avons noté pour tout  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  dans  $W$  :

$$\begin{cases} a(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \int_{\widehat{\Omega}_N^*} \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + l(\mathcal{U}) \overline{l(\mathcal{V})}, \\ L(\mathcal{V}) = \int_{\widehat{\Omega}_N^*} g \overline{\mathcal{V}}, \quad (g \in L^2(\Omega_N^*) \text{ à support compact}), \\ l(\mathcal{V}) = \left[ \int_L^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathcal{V}}{[\rho \text{Log}(1+\rho)]^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right]. \end{cases} \quad (11.213)$$

Les deux lemmes suivants permettent de conclure. □

**Lemme 11.27** *Si la donnée  $g \in L^2(\widehat{\Omega}_N^*)$  (avec la propriété de support) vérifie :*

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} g = 0, \quad (11.214)$$

*alors le problème (11.204) est équivalent au problème (11.212).*

**Lemme 11.28** *Le problème (11.212) admet une unique solution.*

**Preuve du lemme 11.27**

La formule de Green joue un rôle central dans cette démonstration. Donnons en ici une version sur  $W$

Pour tout  $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in W \times W$  tel que  $\Delta \mathcal{U} \in L^2(\widehat{\Omega}_N^*)$  et  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0$  dans  $H^{-1/2}(\partial \widehat{\Omega}_N^*)$

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} + \int_{\widehat{\Omega}_N^*} \Delta \mathcal{U} \overline{\mathcal{V}} = 0. \quad (11.215)$$

Elle provient clairement de : pour tout  $\mathcal{U} \in H(\text{div}, \Omega_N^*)$  tel que  $\mathcal{U}.n = 0$  sur  $\partial \widehat{\Omega}_N^*$  et  $\mathcal{V} \in H^1(\Omega_N^*)$  :

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} \text{div } \mathcal{U} \overline{\mathcal{V}} + \int_{\widehat{\Omega}_N^*} \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} = 0. \quad (11.216)$$

⇐ D'après la formule de Green, toute solution du problème 11.26 satisfait d'une part :

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} = \int_{\widehat{\Omega}_N^*} g \overline{\mathcal{V}} \quad (11.217)$$

et d'autre part :

$$l(\mathcal{U}) = 0 \implies l(\mathcal{U}) \overline{l(\mathcal{V})} = 0. \quad (11.218)$$

Il ne nous reste plus qu'à sommer pour montrer que  $\mathcal{U}$  est solution du problème (11.212).

⇒ Soit donc  $\mathcal{U}$  une solution du problème (11.212). Choisissons d'abord  $\mathcal{V} = 1$  comme fonction test, il vient :

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla 1} + l(\mathcal{U}) \overline{l(1)} = \int_{\widehat{\Omega}_N^*} g \cdot 1. \quad (11.219)$$

D'après (11.214), il vient :

$$l(\mathcal{U}) = 0. \quad (11.220)$$

D'où nous tirons :

$$\int_{\widehat{\Omega}_N^*} \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla \mathcal{V}} = \int_{\widehat{\Omega}_N^*} g \overline{\mathcal{V}}. \quad (11.221)$$

La fin est alors triviale :  $\mathcal{U}$  est une solution du problème (11.204).  $\square$

**Preuve du lemme 11.28**

Il est clair qu'il nous suffit de vérifier la coercivité de la forme hermitienne  $a$ . C'est à dire une inégalité de type Poincaré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\mathcal{U}}{\rho \text{Log}(1 + \rho)} \right\|_{L^2(\rho \geq 1)} + \|\mathcal{U}\|_{L^2([0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta)} + \left\| \frac{\mathcal{U}}{1 + X} \right\|_{L^2(X \geq 0)} \\ \leq C \|\nabla \mathcal{U}\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} + C \left| \int_{\Omega_N^{ext}} \frac{\mathcal{U}}{[\rho \text{Log} 1 + \rho]^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right|. \end{array} \right. \quad (11.222)$$

Nous nous appuyons sur deux inégalités classiques :

Pour tout  $\mathcal{U} \in W_H^1$  tel que  $\mathcal{V} = 0$  en  $\rho = 1$  :

$$\left\| \frac{\mathcal{V}(\rho, \theta)}{\rho \text{Log}(1 + \rho)} \right\|_{L^2([0;+\infty[_\rho \times [0;\pi]_\theta)} \leq 2 \|\nabla \mathcal{V}\|_{L^2([0;+\infty[_\rho \times [0;\pi]_\theta)} \quad (\text{Le Roux}). \quad (11.223)$$

Pour tout  $\mathcal{V} \in W_S^1$  tel que  $\mathcal{V} = 0$  en  $X = L'$  :

$$\left\| \frac{\mathcal{V}(X, Y)}{1 + X} \right\|_{L^2([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)} \leq \|\nabla \mathcal{V}\|_{L^2([0;+\infty[_X \times [0;1]_Y)} \quad (\text{Hardy}). \quad (11.224)$$

Nous raisonnons par l'absurde. Si l'inégalité (11.222) est fautive, il existe une suite  $\mathcal{U}_n$  de  $W$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\mathcal{U}_n}{\rho \operatorname{Log}(1+\rho)} \right\|_{L^2(\rho \geq 1)} + \|\mathcal{U}_n\|_{L^2([0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta)} + \left\| \frac{\mathcal{U}_n}{1+X} \right\|_{L^2(X \geq 0)} = 1, \\ \|\nabla \mathcal{U}_n\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} \rightarrow 0, \quad \left| \int_L^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathcal{U}_n}{[\rho \operatorname{Log}(1+\rho)]^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right| \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (11.225)$$

$\mathcal{U}_n$  étant borné dans  $W$ , nous pouvons en extraire une sous suite qui converge faiblement. Nous déterminons sa limite faible  $\mathcal{U}$  à l'aide des deux arguments suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\nabla \mathcal{U}_n\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} \rightarrow 0 & \implies \nabla \mathcal{U} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\widehat{\Omega}_N^*) \\ & \implies \mathcal{U} = \text{cte}, \\ \int_L^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathcal{U}_n}{[\rho \operatorname{Log}(1+\rho)]^2} \rho \, d\rho \, d\theta \rightarrow 0 & \implies \int_L^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathcal{U}}{[\rho \operatorname{Log}(1+\rho)]^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 0 \\ & \implies \mathcal{U} = 0. \end{array} \right. \quad (11.226)$$

Introduisons la notation :

$$\widehat{\Omega}_N^{int} = ([0; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta) \cup ([0; L']_X \times [0; 1]_Y) \quad (11.227)$$

En se limitant aux formes linéaires continues sur  $W$  de la forme :

$$l_V(\mathcal{U}) = \int_{\widehat{\Omega}_N^{int}} \nabla \mathcal{U} \overline{\nabla V} + \mathcal{U} \overline{V}. \quad (11.228)$$

Nous tirons la convergence faible de  $\mathcal{U}_n$  vers 0 dans  $H^1(\widehat{\Omega}_N^{int})$  et d'après le théorème de Rellich la convergence forte vers 0 dans ce même espace :

$$\|\mathcal{U}_n\|_{H^1(\widehat{\Omega}_N^{int})} \longrightarrow 0. \quad (11.229)$$

Nous utilisons alors la fonction  $\chi$  introduite en (11.197).  $\chi \mathcal{U}_n$  est clairement un élément de  $W$  s'annulant en  $\rho = L$  et  $X = L'$ ; ainsi des inégalités de Le Roux et Hardy, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\chi \mathcal{U}_n}{\rho \operatorname{Log}(1+\rho)} \right\|_{L^2(\rho \geq 1)} + \|\chi \mathcal{U}_n\|_{L^2([0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta)} + \left\| \frac{\chi \mathcal{U}_n}{1+X} \right\|_{L^2(X \geq 0)} \\ \leq C \|\nabla(\chi \mathcal{U}_n)\|_{L^2(\rho \geq 1)} + 0 + C \|\nabla(\chi \mathcal{U}_n)\|_{L^2(X \geq 0)} \leq C \|\nabla(\chi \mathcal{U}_n)\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} \\ \leq C \|\chi \nabla(\mathcal{U}_n)\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} + C \|\nabla(\chi) \mathcal{U}_n\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} \\ \leq C \|\nabla \mathcal{U}_n\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^*)} + C \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^{int})} \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (11.230)$$

Il fallait noter que  $\nabla \chi$  est à support dans  $\widehat{\Omega}_N^{int}$ .

De plus comme  $(1-\chi)$  est à support dans  $\widehat{\Omega}_N^{int}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{(1-\chi)\mathcal{U}_n}{\rho \operatorname{Log}(1+\rho)} \right\|_{L^2(\rho \geq 1)} + \|(1-\chi)\mathcal{U}_n\|_{L^2([0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta)} + \left\| \frac{(1-\chi)\mathcal{U}_n}{1+X} \right\|_{L^2(X \geq 0)} \\ \leq C \|\mathcal{U}_n\|_{L^2(\widehat{\Omega}_N^{int})} \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (11.231)$$

Ainsi par inégalité triangulaire il suit de (11.231) et (11.230)

$$\left\| \frac{\mathcal{U}_n}{\rho \operatorname{Log}(1+\rho)} \right\|_{L^2(\rho \geq 0)} + \|\mathcal{U}_n\|_{L^2([0;1]_\rho \times [0;\pi]_\theta)} + \left\| \frac{\mathcal{U}_n}{1+X} \right\|_{L^2(X \geq 0)} \rightarrow 0. \quad (11.232)$$

Ce qui contredit (11.225).  $\square$

### 11.3.3 Application à la définition des termes des développements asymptotiques

Nous avons au paragraphe 9.3.3, une preuve de l'existence-unicité des termes des développements asymptotiques. Elle nécessitait des résultats préliminaires sur le champ proche d'existence unicité. C'est ici que nous montrons ces résultats. Ces résultats sont en fait des applications directes du théorème 11.24. Tout réside en fait dans le choix de  $\mathcal{U}_H$ ,  $\mathcal{U}_S$  et  $f$ .

#### Le résultat d'unicité pour le champ proche : preuve du Lemme 9.14

Pour démontrer ce résultat il suffit de prendre :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_H \equiv 0, & \text{dans } [1; +\infty]_\rho \times [0; \pi]_Y, \\ \mathcal{U}_S \equiv 0, & \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ f \equiv 0, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*. \end{cases} \quad (11.233)$$

Il est clair que ce choix assure (11.188), (11.189) et (11.191). Nous vérifions alors que  $\mathcal{U} \equiv 0$  est bien solution, la conclusion provient de l'unicité.

#### Existence et unicité de $\mathcal{W}_p$ (c.f. (9.78))

Nous prenons :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_H(\rho, \theta) = J_{p,p} \rho^p \cos p\theta, & \text{dans } [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ \mathcal{U}_S \equiv 0, & \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ f \equiv 0, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*. \end{cases} \quad (11.234)$$

Des calculs très simples (laissés au lecteurs) montrent bien que ce choix vérifie (11.188), (11.189) et (11.191). Ce qui montre l'existence unicité de  $\mathcal{W}_p$ .

Nous rappelons au lecteur qu'en coordonnées polaires le laplacien est donné par :

$$\Delta_{\rho,\theta} u = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (11.235)$$

#### Existence et unicité de $\mathcal{W}_*$ (c.f. (9.82))

Nous prenons :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_H(\rho, \theta) = Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho, & \text{dans } [1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta, \\ \mathcal{U}_S(X, Y) = -2X, & \text{dans } [0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y, \\ f \equiv 0, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*. \end{cases} \quad (11.236)$$

Le calcul direct nous montre que ce choix vérifie bien (11.188), et (11.189). De plus, comme  $J_{0,0} = 1$ , nous avons :

$$\begin{cases} \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta = 2, \\ \int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial X}(0, Y) dY = -2, \\ \int_0^1 \int_0^\pi f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = 0. \end{cases} \quad (11.237)$$

Nous venons de vérifier (11.191). Ce qui nous permet de conclure à l'existence-unicité.



**Existence unicité de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  (c.f. (9.85))**

Soir  $(i, k)$  un élément fixe de  $N$ .

*Hypothèse de récurrence et travaux préparatoires* : Il ne faut ici pas oublier que la définition de  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  se situe à l'intérieur d'une récurrence. Nous rappelons que pour tout  $(j, k)$  dans

$$\left\{ (j, k') \in N \mid j \leq i \text{ et } k' = k \text{ ou } k - 1 \right\} \setminus \{(i, k)\}. \quad (11.238)$$

les fonctions  $\mathcal{U}_j^k$  vérifient (c.f. (9.55) et la convention de nullité (9.53)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U}_j^{k'} = -4 \mathcal{U}_{j-2}^{k'}, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_j^{k'}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_j^{k'}(\rho, \theta) - \sum_{l=0}^{j-k'} \sum_{p=0}^{j-k'} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{j-l}^{k'}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \right. \\ \quad \left. - \sum_{l=0}^{j-k'} \sum_{p=0}^{j-k'} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{j-l}^{k'}) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right] \right\} = 0, \\ \mathcal{U}_j^{k'}(X, Y) - \sum_{l=1}^{j-k'} \frac{X^l}{l!} D^l(\mathcal{U}_j^{k'}) \quad \text{est bornée quand } X \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (11.239)$$

Ainsi d'après la remarque 11.8, nous tirons que  $\mathcal{U}_j^{k'}$  est à croissance lente, ce qui implique (c.f. (11.86)) que les  $\ell_p^0(\mathcal{U}_{j-l}^{k'})$  sont presque tous nuls. Puis du lemme 11.10, nous tirons :

$$\ell_p^1(\mathcal{U}_j^{k'}) = 0, \quad \text{pour tout } p > j - k'. \quad (11.240)$$

Enfin, d'après les lemmes 11.7 et 11.9, il vient que pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et  $m \geq l$  :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_j^{k'}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \right] \rho^{-p+l} \cos p\theta, \quad (11.241)$$

a bien un sens dans  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  (cette série converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour tout  $L > 1$ ) et

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{p=m+1}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_j^{k'}) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \right] \rho^{-p+l} \cos p\theta \right\} = 0, \quad (11.242)$$

De même, d'après les lemmes 11.15, 11.16 et 11.17, nous tirons que :

$$\sum_{l=0}^{E((j-k')/2)} \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} \frac{(-2p\pi)^l}{(-2p\pi)^m} [\mathcal{U}_j^{k'}]_l^p X^m \cos p\theta \right] \quad (11.243)$$

a bien un sens dans  $H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$  (cette série converge dans  $H^1([0; L']_X \times [0; 1]_Y)$  pour tout  $L' > 0$ ) et que :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{E((j-k')/2)} \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} \frac{(-2p\pi)^l}{(-2p\pi)^m} [\mathcal{U}_j^{k'}]_l^p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right] \right\} = 0. \quad (11.244)$$

Par conséquent (11.243) est borné lorsque  $X \rightarrow +\infty$ .

Nous tirons de cette étude le

**Lemme 11.29** Sous l'hypothèse que les  $\mathcal{U}_j^{k'}$  sont définis pour  $(j, k')$  dans (11.238) :

(i) La série :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \\ & + \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (11.245)$$

a bien un sens dans  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  (elle converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour tout  $L > 1$ ). De plus :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=i-k+1}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \right\} = 0, \quad (11.246)$$

(ii) La série :

$$\sum_{m=1}^{E((i-k)/2)} \sum_{l=0}^{E((i-2-k)/2)} \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} \frac{(-2p\pi)^l}{(-2p\pi)^m} [\mathcal{U}_{i-2l}^k]^p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right] \quad (11.247)$$

a bien un sens dans  $H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$ , en effet elle converge pour tout  $L' > 0$  dans  $H_{loc}^1([0; L']_X \times [0; 1]_Y)$ . De plus cette série est bornée lorsque  $X$  tend vers l'infini.

*Analyse* : Supposons tout d'abord qu'il existe une solution  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  de (9.85), alors  $\ell_0^0(\tilde{\mathcal{U}}_i^k)$  est donné par (9.128). Ainsi, d'après le lemme 11.29, il nous suffit de montrer que le problème suivant admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{Chercher } \tilde{\mathcal{U}}_i^k \in H_{loc}^1(\widehat{\Omega}_N^*) \text{ tel que :} \\ & \Delta \tilde{\mathcal{U}}_i^k = -4 \mathcal{U}_{i-2}^k, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, \\ & \frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}_i^k}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial \widehat{\Omega}_N^*, \\ & \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \tilde{\mathcal{U}}_i^k(\rho, \theta) - \mathcal{U}_H \right\} = 0, \\ & \tilde{\mathcal{U}}_i^k(X, Y) - \mathcal{U}_S(X, Y) \text{ est bornée quand } X \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right. \quad (11.248)$$

où nous posons pour ce paragraphe :

$\mathcal{U}_H$  la fonction de  $H_{loc}^1([0; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  donnée par :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{U}_H(\rho, \theta) = & - \left\{ \sum_{l=1}^{i-k} \left[ \ell_0^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( \frac{\pi l}{2} Y_{0,l} + J_{0,l} \right) + \frac{\pi l}{2} \ell_0^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{0,l} \right] \right. \\ & \left. + 2 \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_{i-2}^k(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \right\} \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) \\ & + \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p,-p+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \\ & + \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right]. \end{aligned} \right. \quad (11.249)$$

$\mathcal{U}_S$  la fonction  $H_{loc}^1([0; +\infty[_X \times [0; \pi]_Y)$  donnée par : (avec  $I = E(i - k/2)$ )

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{U}_S(X, Y) = & \sum_{l=2}^{i-k} \frac{X^l}{l!} \left(\frac{2}{\omega}\right)^l \frac{d^l U_{i-l}^k}{dx^l}(0) \\ & + \sum_{m=1}^I \sum_{l=0}^{I-1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{p^2 \pi^2} \frac{m!}{l!} \frac{(-2p\pi)^l}{(-2p\pi)^m} [\mathcal{U}_{i-2}^k]_l^p X^m \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right] \end{aligned} \right. \quad (11.250)$$

$f$  est la fonction  $L_{loc}^2(\widehat{\Omega}_N^*)$ .

$$f = 4 \mathcal{U}_{i-2}^k. \quad (11.251)$$

Vérification de (11.188) et (11.189) :

La série convergeant dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ , pour tout  $L > 1$ , nous pouvons calculer le laplacien dans  $\mathcal{D}'([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  par interversion de la somme et de l'intégrale :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \mathcal{U}_H(\rho, \theta) = & + \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p, -p-2+l} + \frac{2}{\pi} J_{p, -p-2+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p-2+l} \cos p\theta \right] \\ & + \sum_{l=1}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{p, p-2+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right]. \end{aligned} \right. \quad (11.252)$$

Puis par changement de variable et en remarquant que  $J_{p, p-1} = J_{p, -p-1} = Y_{p, -p-1} = 0$  (c.f. annexe A), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \mathcal{U}_H(\rho, \theta) = & - 4 \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-2-l}^k) \left( Y_{p, -p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p, -p-2+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \\ & - 4 \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-2-l}^k) J_{p, p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right]. \end{aligned} \right. \quad (11.253)$$

D'où, d'après le lemme 11.9

$$\Delta \mathcal{U}_H = -4 \mathcal{U}_{i-2}^k = -f. \quad (11.254)$$

De plus,

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-2-l}^k) \left( Y_{p, -p+l} + \frac{2}{\pi} J_{p, -p-2+l} \text{Log } \rho \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta \right] \\ & + \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[ \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-2-l}^k) J_{p, p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \right] \end{aligned} \right. \quad (11.255)$$

converge vers  $\mathcal{U}_{i-2}^k$  dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  pour tout  $L > 1$ . Ainsi l'écriture en série de  $\mathcal{U}_H$  converge vers  $\mathcal{U}_H$  par rapport aux normes définies pour tout  $L > 1$  :

$$\|\mathcal{U}\|_{H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)} + \|\Delta \mathcal{U}\|_{L^2([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)} \quad (11.256)$$

Nous pouvons ainsi intervertir l'opérateur "dérivée normale" et la série (dans  $(H_{00}^{1/2}(X=0 \text{ et } 1 < |Y| < L))^*$ ), ce qui nous fournit :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial n} = 0, \quad \text{en } X = 0. \quad (11.257)$$

Nous venons de démontrer que  $\mathcal{U}_H$  vérifie (11.188). Des arguments similaires mènent de même à (11.189).

Obtention de (11.191) : Remarquons tout d'abord que :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \mathcal{U}_H(\rho, \theta) d\theta &= -\pi \left\{ \sum_{l=1}^{i-k} \left[ \ell_0^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( \frac{\pi l}{2} Y_{0,l} + J_{0,l} \right) + \frac{\pi l}{2} \ell_0^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{0,l} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_{i-2}^k(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \right\} \left( Y_{0,0} + \frac{2}{\pi} J_{0,0} \text{Log } \rho \right) \\ &+ \pi \sum_{l=1}^{i-k} \left[ \ell_0^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{0,l} + \frac{2}{\pi} J_{0,l} \text{Log } \rho \right) \rho^l \right] \\ &+ \pi \sum_{l=1}^{i-k} \left[ \ell_0^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{0,l} \rho^l \right]. \end{aligned} \right. \quad (11.258)$$

Puis en dérivant par rapport à  $\rho$  puis en prenant la trace en  $\rho = 1$  il vient :

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta = \frac{d}{d\rho} \left[ \int_0^\pi \mathcal{U}_H(\rho, \theta) d\theta \right] (\rho = 1) = -4 \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{U}_{i-2}^k(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (11.259)$$

Il est licite de prendre la trace car la série qui définit  $\mathcal{U}_H$  converge par rapport aux normes (11.256) ; de plus tous les termes de la série sont à dérivée normale nulle sur le bord  $X = 0$ . Ceci permet de définir la trace de Neumann de la série sur le bord  $\rho = 1$  au sens  $H^{-1/2}$ .

De même, pour  $\mathcal{U}_S$  nous avons :

$$\int_0^1 \mathcal{U}_S(X, Y) dY = \sum_{l=2}^{i-k} \frac{X^l}{l!} \left( \frac{2}{\omega} \right)^l \frac{d^l \mathcal{U}_{i-l}^k}{dx^l}(0) \quad (11.260)$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial X}(0, Y) dY = \frac{d}{dX} \left[ \int_0^1 \mathcal{U}_S(X, Y) dY \right] (X = 0) = 0 \quad (11.261)$$

Enfin nous tirons :

$$\int_0^\pi \frac{\partial \mathcal{U}_H}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta + \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial X}(0, Y) dY + \int_0^1 \int_0^\pi f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = 0. \quad (11.262)$$

Nous venons ainsi de montrer que  $\tilde{\mathcal{U}}_i^k$  est défini de manière unique.



# Chapitre 12

## Estimations d'erreur

### Sommaire

---

<b>12.1 Estimations d'erreur : principes et énoncés . . . . .</b>	<b>217</b>
12.1.1 Estimation d'erreur globale : définition et estimation . . . . .	217
12.1.2 Estimations d'erreurs locales . . . . .	220
<b>12.2 Erreurs de raccord : définitions et estimations . . . . .</b>	<b>222</b>
12.2.1 L'erreur de raccord champ lointain-champ proche . . . . .	222
12.2.2 L'erreur de raccord entre champ de fente et champ proche . . . . .	226
<b>12.3 Preuve de l'estimation d'erreur globale . . . . .</b>	<b>229</b>
12.3.1 Obtention de l'estimation . . . . .	229
12.3.2 Le résultat de stabilité : preuve du lemme 12.14 . . . . .	230
12.3.3 Le résultat de consistance : preuve du lemme 12.15 . . . . .	233

---

**Résumé :** Ce chapitre est le chapitre principal de la seconde partie du point de vue de l'analyse mathématique. Nous commençons par énoncer les principaux résultats de l'étude, à savoir les estimations d'erreur (optimales) obtenues en tronquant les développements asymptotiques du chapitre 9 (théorème 12.1, 12.2 et 12.3). A la section 12.1, nous montrons que ces résultats sont en fait des corollaires d'une estimation d'erreur globale, qui sera démontrée à la section 12.3. La preuve de l'estimation d'erreur globale adopte une structure classique consistant à combiner des résultats de consistance (lemme 12.15) à des résultats de stabilité (lemme 12.14), voir section 12.3. Le résultat de stabilité est une modification légère de celui obtenu au chapitre 5 pour les  $\delta$  modèles tandis que le résultat de consistance repose sur une estimation des erreurs de raccord, objet de la section 12.2, dans les zones intermédiaires champ proche-champ lointain de longueur  $\eta_H(\varepsilon)$ , champ proche-champ de fente (de longueur  $\eta_S(\varepsilon)$ ). Nous pourrions ici se référer aux lemmes 12.9 et 12.11. Une des particularités de l'étude consiste à jouer avec les longueurs  $\eta_S(\varepsilon)$  et  $\eta_H(\varepsilon)$ , qui définissent la géométrie des zones de raccord et que nous cherchons alors à choisir de manière optimale en fonction de  $\varepsilon$ .

## Introduction

Au chapitre 8, nous avons postulé les développements en champ lointain, proche et de fente. Puis, au chapitre 10, nous avons obtenu les équations qui régissent les termes des développements asymptotiques. A posteriori, ceci nous a permis aux chapitres 9 et 11 de définir de manière rigoureuse et indépendamment du travail formel (postulats et calculs) les  $u_i^k$ ,  $\mathcal{U}_i^k$  et  $U_i^k$ . Du point de vue rigoureux, nous ne pouvons pas pour le moment affirmer que les développements en champ lointain, proche et de fente constituent de bonnes approximations de la solution. C'est à cette question que nous répondons dans ce paragraphe.

Présentons dès à présent les résultats obtenus :

Rappelons que nous appelons approximation de champ lointain d'ordre  $n$  dans  $\Omega$  la fonction :

$$\begin{cases} u_n^\varepsilon &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k u_i^k \\ &= u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k u_i^k \quad (u_i^i = 0, \forall i > 0). \end{cases} \quad (12.1)$$

Pour  $R$  et  $R'$  deux réels positifs tels que  $0 < R' < R$ , introduisons le domaine  $\Omega_{R,R'}$  donné par :

$$\Omega_{R,R'} = \left\{ (r, \theta) \in \Omega / R' \leq r \leq R \right\} \quad (\text{c.f. figure 12.1}). \quad (12.2)$$

**Théorème 12.1** *Pour tout  $R$  et  $R'$  réels tels que  $0 < R' < R$ , il existe un réel  $C(f, R, R', n, \omega)$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$*

$$\|u^\varepsilon - u_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} \leq C \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1} \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^n \quad (12.3)$$

De même, nous appelons approximation de champ proche d'ordre  $n$  de

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\mathbf{X}) := u^\varepsilon(\varepsilon\mathbf{X}), \quad \text{pour } \mathbf{X} \in \widehat{\Omega}_N^* \quad (12.4)$$

dans le domaine normalisé  $\widehat{\Omega}_N^*$  la fonction

$$\mathcal{U}_n^\varepsilon = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \mathcal{U}_i^k. \quad (12.5)$$

Pour tout  $L > 1$  et  $L' > 0$ , introduisons le domaine  $\widehat{\Omega}_N^{L,L'}$  défini par :

$$\widehat{\Omega}_N^{L,L'} = ([0; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta) \cup ([0; L]_X \times [0; 1]_Y) \quad (\text{c.f. figure 12.2}). \quad (12.6)$$

Le théorème suivant affirme que  $\mathcal{U}_n^\varepsilon$  approche à l'ordre  $n+1$  en  $\omega\varepsilon/2$  de  $\mathcal{U}^\varepsilon$  :

**Théorème 12.2** *Pour tout  $L > 1$  et  $L' > 0$ , il existe un réel  $C(f, L, L', n, \omega)$  tel que :*

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{U}_n^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_N^{L,L'})} \leq C \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.7)$$

Enfin, nous appelons approximation de champ de fente d'ordre  $n$  de

$$U^\varepsilon(x, Y) := u^\varepsilon(x, \varepsilon Y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } Y \in [0; 1] \quad (12.8)$$

Pour tous réels  $L$  et  $L'$  tels que  $0 < L' < L$  notons :

$$\widehat{\Omega}_S^{L,L'} = [L'; L]_x \times [0; 1]_Y \quad (\text{c.f. figure 12.3}). \quad (12.9)$$

Le théorème suivant affirme que  $\mathcal{U}_n^\varepsilon$  approche à l'ordre  $n+1$  en  $\omega\varepsilon/2$  de  $\mathcal{U}^\varepsilon$  :

**Théorème 12.3** Pour tout  $0 < L < L'$ , il existe un réel  $C(f, L, L', \omega, n)$  tel que :

$$\|U^\varepsilon - U_n^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_S^{L, L'})} \leq C \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.10)$$

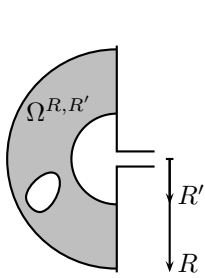


FIG. 12.1 – Domaine d'estimation du champ lointain

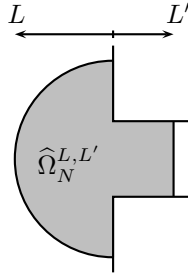


FIG. 12.2 – Domaine d'estimation du champ proche

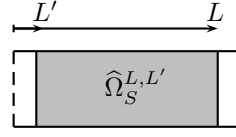


FIG. 12.3 – Domaine d'estimation du champ de fente

Nous verrons que les preuves de ces théorèmes mettent en avant les notions de zones de raccord ( $\eta_H$  et  $\eta_S$ ) et d'erreurs de raccord entre les différents développements (lointain proche et de fente), qui sont à la base même de la partie formelle (chapitre 10). Ainsi, on pourra voir en ce chapitre une justification a posteriori de la partie formelle. Inversement la partie formelle a été d'un grand secours pour la construction des preuves qui suivent.

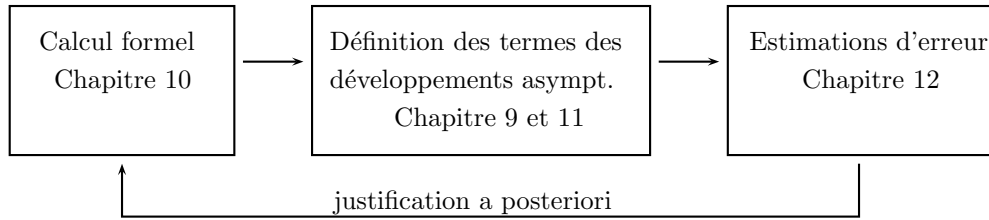


FIG. 12.4 – Schéma du raisonnement inductif

## 12.1 Estimations d'erreur : principes et énoncés

### 12.1.1 Estimation d'erreur globale : définition et estimation

Soit  $\eta_H$  et  $\eta_S$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_H(\varepsilon) \text{ est croissante,} \\ \varepsilon/\eta_H(\varepsilon) \text{ est croissante,} \\ \varepsilon \leq \eta_H(\varepsilon) \leq R, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_H(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)} = 0. \end{array} \right. \quad (12.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_S(\varepsilon) \text{ est croissante,} \\ \varepsilon/\eta_S(\varepsilon) \text{ est croissante,} \\ \varepsilon \leq \eta_S(\varepsilon), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_S(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)} = 0. \end{array} \right. \quad (12.12)$$

Remarquons que de tels fonctions  $\eta_H$  et  $\eta_S$  nous sont fournis par les puissance de  $\varepsilon$

$$\varepsilon^s, \quad \text{avec } s \in ]0; 1[. \quad (12.13)$$



Considérons la fonction de troncature  $\chi$  de  $\mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  telle que :

$$\begin{cases} \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \\ \chi(z) = 0, & \text{si } z \leq 1 \\ \chi(z) = 1, & \text{si } z \geq 2 \end{cases} \quad (12.14)$$

Dans chacune des zones, les fonctions  $u_n^\varepsilon$ ,  $\mathcal{U}_n^\varepsilon$  et  $U_n^\varepsilon$ , fournissent une approximation locale de la solution exacte dans chacune des zones. Une manière naturelle pour obtenir une approximation globale de la solution est de choisir une fonction qui soit égale :

- (i) au champ lointain  $u_n^\varepsilon$  dans  $\Omega$  privé d'un voisinage petit de l'origine
- (ii) au champ proche  $\mathcal{U}_n^\varepsilon$  dans un voisinage petit de l'embouchure de la fente
- (iii) au champ de fente  $U_n^\varepsilon$  dans la fente pour  $x$  suffisamment grand
- (iv) à une combinaison linéaire de ces trois champs dans les zones de raccord.

Introduisons donc la

**Définition 12.4** On appelle approximation globale d'ordre  $n$  la fonction  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  de  $\Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$  dont :

(i) la restriction à  $\Omega$  est donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^\varepsilon(r, \theta) = [1 - \chi(r/\eta_H(\varepsilon))] \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(r/\varepsilon, \theta) \right] \\ \quad + \chi(r/\eta_H(\varepsilon)) \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k u_i^k(r, \theta) \right]. \end{cases} \quad (12.15)$$

(ii) la restriction à  $[0; +\infty[_x \times [0; \varepsilon]_y$  est donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^\varepsilon(x, y) = [1 - \chi(x/\eta_S(\varepsilon))] \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \right] \\ \quad + \chi(x/\eta_S(\varepsilon)) \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k U_i^k(x) \right]. \end{cases} \quad (12.16)$$

**Remarque 12.5** Dans  $\Omega$ , notons que

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(r/\varepsilon, \theta) \right] = \mathcal{U}_n^\varepsilon(r/\varepsilon, \theta), & \text{pour } r \leq \eta_H(\varepsilon), \\ \tilde{u}_n^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k u_i^k(r, \theta) \right] = u_n^\varepsilon(r, \theta), & \text{pour } r \geq 2\eta_H(\varepsilon). \end{cases} \quad (12.17)$$

De plus, pour  $\eta_H(\varepsilon) \leq r \leq 2\eta_H(\varepsilon)$ ,  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  est une moyenne pondérée de ces deux fonctions.

$$\tilde{u}_n^\varepsilon(r, \theta) = [1 - \chi(r/\eta_H(\varepsilon))] \mathcal{U}_n^\varepsilon(r/\varepsilon, \theta) + \chi(r/\eta_H(\varepsilon)) u_n^\varepsilon(r, \theta) \quad (12.18)$$

Dans  $[0; +\infty[_x \times [0; \varepsilon]_y$ , remarquons que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \right] = \mathcal{U}_n^\varepsilon(x/\varepsilon, y/\varepsilon), & \text{pour } x \leq \eta_S(\varepsilon), \\ \tilde{u}_n^\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k U_i^k(x) \right] = U_n^\varepsilon(x), & \text{pour } x \geq 2\eta_S(\varepsilon). \end{cases} \quad (12.19)$$

De plus, pour  $\eta_S(\varepsilon) \leq x \leq 2\eta_S(\varepsilon)$ ,  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  est une moyenne pondérée de ces deux fonctions :

$$\tilde{u}_n^\varepsilon(x, y) = [1 - \chi(x/\eta_S(\varepsilon))] \mathcal{U}_n^\varepsilon(x/\varepsilon, y/\varepsilon) + \chi(x/\eta_S(\varepsilon)) U_n^\varepsilon(x). \quad (12.20)$$

Il est intéressant de se poser la question de la qualité de l'approximation globale. C'est à dire l'ordre en  $\varepsilon$  de la différence entre l'approximation globale et la solution exacte. Introduisons les domaines d'étude :

**N.B.** Dans la suite,

- (i)  $\delta$  désigne un réel strictement positif,
- (ii)  $R$  désigne un scalaire positif suffisamment grand pour que la demie boule

$$[0; R]_r \times [0; \pi]_\theta \quad (12.21)$$

contienne à la fois la source et l'obstacle.

Introduisons le domaine  $\Omega_\varepsilon^{R, \delta}$  borné :

$$\overline{\Omega_\varepsilon^{R, \delta}} = \overline{\Omega_R} \cup ([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y). \quad (12.22)$$

Nous décomposons la frontière de  $\Omega_\varepsilon^{R, \delta}$  en trois parties :

$$\begin{cases} \Gamma_R & = \{\mathbf{x} \in \Omega / r = R\}, \\ \Gamma_\varepsilon^{R, \delta} & = \partial\Omega_\varepsilon^{\delta, R} \cap \partial\Omega_\varepsilon, \\ \Sigma_{\varepsilon, \delta} & = \{\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon / x = \delta\}. \end{cases} \quad (12.23)$$

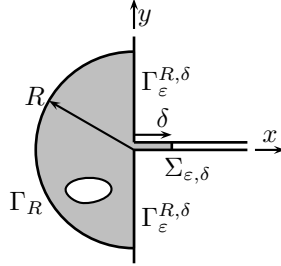


FIG. 12.5 – Le domaine  $\Omega_\varepsilon^{R, \delta}$

Nous avons alors le

**Théorème 12.6** Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $C(N, n, f, \omega)$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$  :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H(\varepsilon)}{2} \right|^{3/2} \left[ \left( \frac{\omega\eta_H(\varepsilon)}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)} \right)^{n+1} \right] \\ + C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\eta_S(\varepsilon)} \left[ \left( \frac{\omega\eta_S(\varepsilon)}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)} \right)^N \right]. \end{cases} \quad (12.24)$$

On trouvera la preuve de ce théorème à la section 12.3, dont l'étude nécessite la lecture de la section 12.2.

**Remarque 12.7** Ce théorème n'est pas optimal, en effet il est possible de raffiner la preuve pour obtenir des estimations plus précises. Pour se faire, il faut utiliser des propriétés fines de la solution ce qui alourdit considérablement la démonstration. C'est pourquoi nous choisissons de nous restreindre à cette estimation qui est suffisante pour obtenir les théorèmes 12.1, 12.2 et 12.3.

**Remarque 12.8** *Il est naturel de se poser la question du choix de  $\eta_H$  et  $\eta_S$ . C'est à dire la question de la localisation des zones de raccord. Si nous nous limitons au puissance de  $\varepsilon$*

$$\begin{cases} \frac{\omega\eta_H(\varepsilon)}{2} = \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{s_H}, & \text{pour } 0 < s_H < 1, \\ \frac{\omega\eta_S(\varepsilon)}{2} = \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{s_S}, & \text{pour } 0 < s_S < 1. \end{cases} \quad (12.25)$$

*En optimisant le choix de  $\eta_H$  pour que la première ligne de (12.24) bénéficie de la meilleure estimation en  $\varepsilon$  puis en prenant  $\eta_S$  et  $N$  (il n'y a pas unicité dans le choix de  $\eta_S$  et  $N$ ) pour que les ordres des deux lignes de (12.24) soient les mêmes, il vient :*

*Pour le choix*

$$\begin{cases} \frac{\omega\eta_H(\varepsilon)}{2} = \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{1/2}, \\ \frac{\omega\eta_S(\varepsilon)}{2} = \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{1/2}, \\ N = n + 1, \end{cases} \quad (12.26)$$

*il existe un réel  $C(n, f, \omega)$  tel que :*

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^{n+3/2} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{(n+1)/2}. \quad (12.27)$$

*Cette remarque a principalement deux intérêts :*

(a) *le premier théorique, elle nous permet tout d'abord de prouver les trois estimations locales des théorèmes 12.1, 12.2 et 12.3.*

(b) *le deuxième numérique, malgré le défaut d'optimalité, elle nous permet de placer d'une manière satisfaisante les zones de raccord entre l'approximation de champ lointain et l'approximation de champ proche.*

### 12.1.2 Estimations d'erreurs locales

Nous démontrons ici les théorèmes 12.1, 12.2 et 12.3. Comme nous l'avons annoncé ces théorèmes vont être vus comme des corollaires du théorème 12.6, et plus précisément de (12.27). Il est toutefois possible d'écrire des preuves directes ne faisant pas intervenir l'erreur globale. Ces preuves sont beaucoup plus techniques et moins intuitives (au sens où elles n'entretiennent pas de rapport avec la partie formelle), elles ne seront donc pas présentées.

#### Preuve du théorème 12.1

$\eta_H$ ,  $\eta_S$  et  $N$  étant fixés par (12.26), nous choisissons  $m > n$  suffisamment grand pour que :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.28)$$

Nous nous restreignons alors au domaine  $\Omega_{R,R'}$  qui est inclus dans  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$  :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.29)$$

Or comme pour  $R' \leq r \leq R$

$$\tilde{u}_m^\varepsilon = u_m^\varepsilon, \quad (12.30)$$

nous avons :

$$\|\tilde{u}_m^\varepsilon - u_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} = \|u_m^\varepsilon - u_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} \leq \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \|u_i^k\|_{H^1(\Omega_{R,R'})}. \quad (12.31)$$

D'où comme chaque  $u_i^k$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  :

$$\|\tilde{u}_m^\varepsilon - u_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_{R,R'})} \leq C \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \leq C \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^n \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.32)$$

Nous tirons la conclusion par inégalité triangulaire de (12.29) et (12.32).

### Preuve du théorème 12.2

$\eta_H$ ,  $\eta_S$  et  $N$  étant fixés par (12.26), nous choisissons  $m > n$  suffisamment grand pour que :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^{n+1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.33)$$

Nous nous restreignons alors au domaine

$$([0; L\varepsilon]_r \times [0; \pi]_\theta) \cup ([0; L'\varepsilon]_x \times [0; \varepsilon]_y) \subset \Omega_\varepsilon^{R,\delta} \quad (12.34)$$

nous avons donc :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1\left(\left([0; L\varepsilon]_r \times [0; \pi]_\theta\right) \cup \left([0; L'\varepsilon]_x \times [0; \varepsilon]_y\right)\right)} \leq C \varepsilon \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^{n+1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.35)$$

Or comme pour  $\mathbf{X} \in \widehat{\Omega}_N^{L,L'}$

$$\begin{cases} \mathcal{U}^\varepsilon(\mathbf{X}) &= u^\varepsilon(\varepsilon\mathbf{X}), \\ \mathcal{U}_m^\varepsilon(\mathbf{X}) &= \tilde{u}_m^\varepsilon(\varepsilon\mathbf{X}) \end{cases} \quad (12.36)$$

par changement de variable, il vient :

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{U}_m^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_N^{L,L'})} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1\left(\left([0; L\varepsilon]_r \times [0; \pi]_\theta\right) \cup \left([0; L'\varepsilon]_x \times [0; \varepsilon]_y\right)\right)} \quad (12.37)$$

et par conséquent :

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{U}_m^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_N^{L,L'})} \leq C \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^{n+1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.38)$$

Comme chaque  $\mathcal{U}_i^k$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , il vient :

$$\begin{cases} \|\mathcal{U}_m^\varepsilon - \mathcal{U}_n^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_N^{L,L'})} &\leq \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \|\mathcal{U}_i^k\|_{H^1(\widehat{\Omega}_N^{L,L'})} \\ &\leq C \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \end{cases} \quad (12.39)$$

Nous concluons par inégalité triangulaire à l'aide (12.38) et (12.39).

### Preuve du théorème 12.3

Pour  $0 < L' < L < \delta$  (quelconque),  $\eta_H$ ,  $\eta_S$  et  $N$  étant fixés par (12.26), nous choisissons  $m > n$  suffisamment grand pour que :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \sqrt{\varepsilon} \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^{n+1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.40)$$

Nous nous restreignons alors au domaine

$$[L'; L]_x \times [0; \varepsilon]_y \subset \Omega_\varepsilon^{R,\delta} \quad (12.41)$$

nous avons donc :

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1([L'; L]_x \times [0; \varepsilon]_y)} \leq C \varepsilon \left|\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right|^{n+1} \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^{n+1}. \quad (12.42)$$

Or comme pour  $(x, Y) \in \widehat{\Omega}_S^{L, L'}$

$$\begin{cases} U^\varepsilon(x, Y) &= u^\varepsilon(x, \varepsilon Y), \\ U_m^\varepsilon(x, Y) &= \tilde{u}_m^\varepsilon(x, \varepsilon Y), \end{cases} \quad (12.43)$$

par changement de variables, il vient :

$$\|U^\varepsilon - U_m^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_S^{L, L'})} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_m^\varepsilon\|_{H^1([L'\varepsilon; L\varepsilon]_x \times [0; \varepsilon]_y)} \quad (12.44)$$

et par conséquent :

$$\|U^\varepsilon - U_m^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_S^{L, L'})} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^{n+1} \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^{n+1}. \quad (12.45)$$

Comme chaque  $U_i^k$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , il vient :

$$\begin{cases} \|U_m^\varepsilon - U_n^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_S^{L, L'})} &\leq \sum_{i=n+1}^m \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \|U_m^\varepsilon - U_n^\varepsilon\|_{H^1(\widehat{\Omega}_S^{L, L'})} \\ &\leq C \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^{n+1} \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^{n+1}. \end{cases} \quad (12.46)$$

Nous concluons par inégalité triangulaire à l'aide (12.45) et (12.46).

## 12.2 Erreurs de raccord : définitions et estimations

Dans la preuve (section 12.3) du théorème 12.6 apparaissent de manière naturelle et centrale, deux quantités qui mesurent l'écart dans la zone de raccord entre les développements en champ proche et en champ lointain ou de fente. Nous appelons ces quantités erreurs de raccord et nous leur dédions cette section.

### 12.2.1 L'erreur de raccord champ lointain-champ proche

Nous appelons  $\mathcal{E}_n^\varepsilon$ , erreur de raccord d'ordre  $n$  entre le champ lointain et le champ proche, la fonction de domaine de définition  $[\varepsilon; R]_\rho \times [0; \pi]_\theta \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_n^\varepsilon(r, \theta) &= \mathcal{U}_n^\varepsilon(r/\varepsilon, \theta) - u_n^\varepsilon(r, \theta) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k u_i^k(r, \theta) \end{cases} \quad (12.47)$$

Nous allons en effectuer l'étude de cette erreur de raccord pour  $\varepsilon$  tendant vers 0. L'objet de ce paragraphe est de montrer le

**Lemme 12.9** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un réel positif  $C(\omega, n, f)$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$  :*

$$\begin{cases} \|\mathcal{E}_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_H \leq r \leq 2\eta_H)} &\leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n+1} + \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n+1} \right], \\ \|\nabla \mathcal{E}_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_H \leq r \leq 2\eta_H)} &\leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \frac{1}{\eta_H} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n+1} + \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n+1} \right]. \end{cases} \quad (12.48)$$

**Remarque 12.10** *Formellement, les développements en champ lointain et en champ proche sont (de bons candidats pour être) des développements asymptotiques de la solution exacte. C'est pourquoi*

ils doivent vérifier dans un domaine intermédiaire ( $\eta_H(\varepsilon) \leq r \leq 2\eta_H(\varepsilon)$ ) proche de l'origine vis-à-vis de la longueur d'onde mais loin par rapport à la hauteur de la fente :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, y) \simeq \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k u_i^k(x, y), \\ u^\varepsilon(x, y) \simeq \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \mathcal{U}_i^k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right). \end{cases} \quad (12.49)$$

Une condition nécessaire pour que nous ayons un bon développement est que l'erreur de raccord  $\mathcal{E}_n^\varepsilon$  soit d'autant plus petite que  $n$  est grand ( $\varepsilon$ ,  $\eta_H$  et  $\varepsilon/\eta_H$  tendant vers 0). C'est ce qu'exprime de manière rigoureuse le lemme 12.9.

### Quelques rappels

A la section 9.2, les champs proches et lointains (et de fente) ont été définis par l'intermédiaire d'un problème aux limites avec conditions de radiation généralisées. Le couplage s'effectuant par l'intermédiaire des développements modaux :

**N.B.** : Nous désignons par  $R'$  un réel strictement positif tel que  $R'$  soit strictement inférieur à la distance de l'origine à l'obstacle et à la distance de l'origine à la source,

Pour tout  $(i, k) \in N$ , le terme du développement asymptotique en champ lointain  $u_i^k$  est donné dans  $H_{0,loc}^1([0; R']_r \times [0; \pi]_\theta)$  par :

$$u_i^k(r, \theta) = \sum_{p=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) Y_p(\omega r) \cos p\theta + \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_p(\omega r) \cos p\theta. \quad (12.50)$$

Il faut comprendre cette relation au sens : la série suivante converge dans  $H^1([0; R']_r \times [0; \pi]_\theta)$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_p(\omega r) \cos p\theta. \quad (12.51)$$

De plus,

$$\mathcal{L}_p^0(u_i^k) = 0, \quad \forall p > i - k \quad (12.52)$$

Pour tout  $(i, k) \in N$ , le terme du développement asymptotique en champ proche  $\mathcal{U}_i^k$  admet le développement modal dans  $H_{loc}^1([1; +\infty[_\rho \times [0; \pi]_\theta)$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \ell_p^1(\mathcal{U}_{i-l}^k) J_{p,p+l} \rho^{p+l} \cos p\theta \\ + \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} \text{Log} \rho J_{-p+l,l} \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta. \end{cases} \quad (12.53)$$

Cette égalité doit être prise au sens : pour tout  $l \in [0; i - k]$  et  $L > 1$ , la série suivante converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} \text{Log} \rho J_{-p+l,l} \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta. \quad (12.54)$$

De plus, nous avons :

$$\ell_p^1(\mathcal{U}_i^k) = 0, \quad \text{pour tout } p > i - k. \quad (12.55)$$

Les développements (12.50) et (12.53) sont couplés par l'intermédiaire des relations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) = \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-p}^k), & \forall p \in [0; i - k], \\ \ell_p^1(\mathcal{U}_i^k) = \mathcal{L}_p^1(u_{i-p}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-p}^{k-1}), & \forall p \in [0; i - k]. \end{cases} \quad (12.56)$$

## Calcul explicite de l'erreur de raccord

Le premier point pour obtenir l'erreur de troncature est de ré-exprimer le développement modal du champ proche (12.53) en utilisant (12.56). Nous tirons que pour tout  $n > i$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$  (nous tenons bien entendu compte de la convention de nullité (9.53)) :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) &= \sum_{l=-n+i}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^k) \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right) \rho^l \cos p\theta \\ &+ \sum_{l=-n+i}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \mathcal{L}_p^1(u_{i-l}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^{k-1}) \right) J_{p,l} \rho^l \cos p\theta \\ &+ \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=n-i+1+l}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) \left( Y_{p,-p+l} + \frac{2}{\pi} \text{Log } \rho J_{p,-p+l} \right) \rho^{-p+l} \cos p\theta. \end{aligned} \right. \quad (12.57)$$

Cette écriture a bien un sens car les sommes des deux premières lignes comportent un nombre fini de termes et, pour tout  $L > 1$ , les séries de la troisième ligne bénéficient d'une convergence dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ .

De même, nous développons le champ lointain suivant  $r$  proche de 0 :

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^k(r, \theta) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{n-i} \left[ \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \frac{\omega r}{2} \right) \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \cos p\theta \right] \\ &+ \sum_{p=0}^{n-i} \sum_{l=-\infty}^{n-i} \left[ \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \cos p\theta \right] \\ &+ \sum_{p=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left[ Y_p(\omega r) - \sum_{l=-\infty}^{n-i} \left[ \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \frac{\omega r}{2} \right) \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \right] \right] \cos p\theta \\ &+ \sum_{p=0}^{n-i} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) \left[ J_p(\omega r) - \sum_{l=-\infty}^{n-i} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \right] \cos p\theta \\ &+ \sum_{p=n-i+1}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_p(\omega r) \cos p\theta. \end{aligned} \right. \quad (12.58)$$

Remarquons que les séries des quatre premières lignes ne contiennent qu'un nombre fini de termes alors que la dernière série contient un nombre infini de termes mais converge dans  $H^1(\Omega_{R'})$ .

Le calcul explicite de l'erreur de troncature nous donne (calcul long non retranscrit amenant à la simplification, après sommation sur  $i$  et  $k$  des deux premières lignes de (12.57) et (12.58)) :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_n^\varepsilon(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log } \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^k \left\{ \right. \\ &\quad \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=n-i+1+l}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{p,-p+l} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-p+l} \cos p\theta \\ &\quad - \sum_{p=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left[ Y_p(\omega r) - \sum_{l=-\infty}^{n-i} \left[ \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \frac{\omega r}{2} \right) \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \right] \right] \cos p\theta \\ &\quad - \sum_{p=0}^{n-i} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) \left[ J_p(\omega r) - \sum_{l=-\infty}^{n-i} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \right] \cos p\theta \\ &\quad \left. - \sum_{p=n-i+1}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_p(\omega r) \cos p\theta \right\} \right]. \end{aligned} \right. \quad (12.59)$$

Cette expression ayant un sens dans  $H^1([\varepsilon, R]_r \times [0; \pi]_\theta)$

**Estimation de l'erreur de raccord**

Nous allons estimer tour à tour chacune des lignes de (12.59) :

(i) Rappelons que d'après le lemme 11.9, pour tout  $L > 1$ , la série suivante converge dans  $H^1([1; L]_\rho \times [0; \pi]_\theta)$  :

$$\sum_{p=n-i+1+l}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{p,-p+l} \rho^{-p+l} \cos p\theta \quad (12.60)$$

Puis en considérant la série de fonctions de  $\rho$

$$\rho^{n-i+1} \sum_{p=n-i+1+l}^{+\infty} \sup_{\theta \in [0; \pi]} \left[ \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{p,-p+l} \rho^{-p+l} \cos p\theta \right], \quad (12.61)$$

une technique similaire à celle développée dans la démonstration du lemme 11.7, basée sur le calcul direct nous permet de démontrer qu'il existe  $C(L)$  tel que pour tout  $\rho > L$  :

$$\left| \sum_{p=n-i+1+l}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{p,-p+l} \rho^{-p+l} \cos p\theta \right| \leq C \frac{1}{\rho^{n-i+1}}. \quad (12.62)$$

D'où, nous tirons que pour tout  $r \in [\eta_H(\varepsilon); 2\eta_H(\varepsilon)]$  :

$$\left| \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=n-i+1+l}^{+\infty} \ell_p^0(\mathcal{U}_{i-l}^k) Y_{p,-p+l} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p+l} \cos p\theta \right| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\eta_H}\right)^{n-i+1}. \quad (12.63)$$

(ii) D'après les lemmes A.1 et A.2, nous tirons que pour tout  $r \in [\eta_H(\varepsilon); 2\eta_H(\varepsilon)]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{p=0}^{i-k} \mathcal{L}_p^0(u_i^k) \left[ Y_p(\omega r) - \sum_{l=-\infty}^{n-i} \left[ \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \operatorname{Log} \frac{\omega r}{2} \right) \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \right] \right] \cos p\theta \right| \leq \\ C \left( \frac{\omega \eta_H}{2} \right)^{n-i+1} \left| \operatorname{Log} \frac{\omega \eta_H}{2} \right| \end{array} \right. \quad (12.64)$$

et

$$\left| \sum_{p=0}^{n-i} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) \left[ J_p(\omega r) - \sum_{l=-\infty}^{n-i} J_{p,l} \left( \frac{\omega r}{2} \right)^l \right] \cos p\theta \right| \leq C \left( \frac{\omega \eta_H}{2} \right)^{n-i+1}. \quad (12.65)$$

(iii) Rappelons tout d'abord que

$$\sum_{p=n-i+1}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_p(\omega r) \cos p\theta \quad (12.66)$$

converge dans  $H^1([0; R']_\rho \times [0; \pi]_\theta)$ . Remarquons que chaque terme de cette série est une solution de l'équation de Helmholtz homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega_{R'}), \\ \Delta u + \omega^2 u = 0, \quad \text{dans } \Omega_{R'}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{en } X = 0. \end{array} \right. \quad (12.67)$$

Ainsi, par régularité elliptique, cette série converge dans  $H^m(\Omega_a)$  pour tout  $m > 0$  et  $0 < a < R$  et donc dans  $C^{m'}(\Omega_a)$  pour tout  $m' > 0$ . Nous pouvons donc définir ses dérivées ponctuelles en  $A$  et intervertir la dérivation ponctuelle en  $A$  et les sommes. Nous remarquons que pour tout  $p > n - i$  et tout 2-uplet  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$  tel que  $|\alpha| \leq n - i$ , nous avons :

$$\frac{\partial^\alpha J_p(\omega r) \cos p\theta}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(A) = 0, \quad (12.68)$$



Ainsi, par développement limité, il suit que pour tout  $r \leq 2\eta_H$  :

$$\left| \sum_{p=n-i+1}^{+\infty} \mathcal{L}_p^1(u_i^k) J_p(\omega r) \cos p\theta \right| \leq C \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n-i+1}. \quad (12.69)$$

(iv) En regroupant les estimations (12.63), (12.65) et (12.69), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{E}_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_H(\varepsilon), 2\eta_H(\varepsilon))} \leq C \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^k \\ \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n-i+1} + \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n-i+1} \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \right] \end{array} \right. \quad (12.70)$$

Puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{E}_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_H(\varepsilon), 2\eta_H(\varepsilon))} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \sum_{i=0}^n \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \\ \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n-i+1} + \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n-i+1} \right] \end{array} \right. \quad (12.71)$$

Comme de plus  $\eta_H \geq \varepsilon$ , nous tirons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{E}_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_H(\varepsilon), 2\eta_H(\varepsilon))} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \sum_{i=0}^n \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^i \\ \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n-i+1} + \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n-i+1} \right]. \end{array} \right. \quad (12.72)$$

De  $a^p b^q \leq a^{p+q} + b^{p+q}$  pour tout  $a, b$  positifs, nous tirons :

$$\|\mathcal{E}_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_H(\varepsilon), 2\eta_H(\varepsilon))} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \sum_{i=0}^n \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n+1} + \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n+1} \right]. \quad (12.73)$$

Nous venons de démontrer la première ligne de (12.59). A l'aide d'arguments similaires, on démontre l'estimation pour le gradient.

### 12.2.2 L'erreur de raccord entre champ de fente et champ proche

On appelle erreur de raccord entre champ de fente et champ proche d'ordre  $n$ , la fonction  $E_n^\varepsilon$  définie par :

$$E_n^\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(x/\varepsilon, y/\varepsilon) - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k U_i^k(x) \quad (12.74)$$

L'objectif de cette section est de montrer le

**Lemme 12.11** *Pour tout  $n$  et  $N$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe un réel positif  $C(N, n, f, \omega)$  et  $\varepsilon_0$  un réel strictement positif tels que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|E_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_S \leq r \leq 2\eta_S)} \leq C \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^n \left[ \left( \frac{\omega\eta_S}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_S} \right)^N \right], \\ \|\nabla E_n^\varepsilon\|_{L^\infty(\eta_S \leq r \leq 2\eta_S)} \leq C \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^n \frac{1}{\eta_S} \left[ \left( \frac{\omega\eta_S}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_S} \right)^N \right]. \end{array} \right. \quad (12.75)$$

**Remarque 12.12** *Formellement, on peut dire que dans une zone intermédiaire loin de la fente relativement à la hauteur de la fente mais proche de la fente relativement à la longueur d'onde. Ainsi dans cette zone intermédiaire nous devons avoir :*

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \simeq \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^k U_i^k(x). \quad (12.76)$$

C'est pourquoi plus  $n$  est grand plus l'erreur de raccord  $E_n^\varepsilon$  doit être petite. C'est ce qu'exprime de manière rigoureuse le lemme 12.11.

### Quelques rappels

Commençons par rappeler la structure des solutions dans la zone de raccord :

Le champ proche dans la fente admet le développement modal dans  $[0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y$

$$\mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{i-k} [\mathcal{U}_{i-l}^k]_l^0 X^l + \sum_{l=0}^{E((i-k)/2)+\infty} \sum_{p=1} [\mathcal{U}_i^k]_l^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y \quad (12.77)$$

où chacune des sommes

$$\sum_{p=1}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y \quad (12.78)$$

converge dans  $H^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$ .

De plus, le champ de fente est donné par la série de rayon de convergence infini fournie par le développement de  $\exp i\omega x$  :

$$U_i^k(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} U_i^k(0) \frac{(2i)^l}{l!} \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l. \quad (12.79)$$

Enfin, le champ proche et le champ de fente se raccordent par :

$$[\mathcal{U}_i^k]_l^0 = \frac{(2i)^l}{l!} U_{i-l}^k(0). \quad (12.80)$$

### Calcul explicite de l'erreur de raccord

Le premier point est de réexprimer les développements (12.77) des champs proches sous la forme :

$$\mathcal{U}_i^k(X, Y) = \sum_{l=0}^{i-k} \frac{(2i)^l}{l!} U_{i-l}^k(0) X^l + \sum_{l=0}^{E((i-k)/2)+\infty} \sum_{p=1} [\mathcal{U}_i^k]_l^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y \quad (12.81)$$

Nous séparons la série qui représente le champ de fente en deux parties :

$$U_i^k(x) = \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0) \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l + \sum_{l=n-i+1}^{+\infty} \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0) \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l. \quad (12.82)$$

Puis nous effectuons le calcul explicite de  $E_n^\varepsilon$  dans  $[0; +\infty]_x \times [0; 1]_y$  :

$$\left\{ \begin{aligned} E_n^\varepsilon(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \left\{ \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=0}^{E((i-k)/2)+\infty} \sum_{p=1} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^l \exp -\frac{p\pi x}{\varepsilon} \cos \frac{p\pi y}{\varepsilon} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=n-i+1}^{+\infty} U_i^k(0) \frac{(2i)^l}{l!} \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l \right\} \right]. \end{aligned} \right. \quad (12.83)$$

### Estimation de l'erreur de raccord

Nous majorons indépendamment les deux lignes de (12.80), puis nous concluons.

(i) Nous estimons tout d'abord :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^l \exp -\frac{p\pi x}{\varepsilon} \cos \frac{p\pi y}{\varepsilon} \quad (12.84)$$

à l'aide du

**Lemme 12.13** Soient  $l$  un réel  $((\mu^p))_{p \in \mathbb{N}^*}$  une suite de complexes telle que la série

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \mu^p \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^l \exp -\frac{p\pi x}{\varepsilon} \cos \frac{p\pi y}{\varepsilon} \quad (12.85)$$

converge dans  $H^1([0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y)$  alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $L > 0$  il existe  $C$  positif tel que pour  $X \geq L$  :

$$\sup_{Y \in [0,1]} \left| \sum_{p=1}^{+\infty} \mu^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y \right| \leq C \frac{1}{X^N}. \quad (12.86)$$

**Preuve.** Elle est analogue à celle du lemme 11.16, il suffit en effet d'étudier :

$$X^N \sum_{p=1}^{+\infty} \mu^p X^l \exp -p\pi X \cos p\pi Y. \quad \square \quad (12.87)$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , nous tirons de ce lemme qu'il existe une constante  $C$  telle que pour  $\eta_S(\varepsilon) \leq x \leq 2\eta_S(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{p=1}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^l \exp -\frac{p\pi x}{\varepsilon} \cos \frac{p\pi y}{\varepsilon} \right| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S}\right)^N \quad (12.88)$$

Et par conséquent pour  $\eta_S(\varepsilon) \leq x \leq \eta_S(\varepsilon)$  :

$$\left| \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=1}^{+\infty} [\mathcal{U}_i^k]_l^p \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^l \exp -\frac{p\pi x}{\varepsilon} \cos \frac{p\pi y}{\varepsilon} \right| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S}\right)^N \quad (12.89)$$

(ii) La deuxième estimation concerne la série :

$$\sum_{l=0}^{n-i} \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0) \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l \quad (12.90)$$

Comme cette série entière est convergente pour tout  $x > 0$ , il vient :

$$\left| \sum_{n-i+1}^{+\infty} \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0) \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l \right| \leq C \left(\frac{\omega x}{2}\right)^{n-i+1} \quad (12.91)$$

Finalement pour  $\eta_S(\varepsilon) \leq x \leq 2\eta_S(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{n-i+1}^{+\infty} \frac{(2i)^l}{l!} U_i^k(0) \left(\frac{\omega x}{2}\right)^l \right| \leq C \left(\frac{\omega \eta_S}{2}\right)^{n-i+1} \quad (12.92)$$

(iii) Il ne nous reste plus qu'à sommer les estimations (12.91) et (12.89) pour tirer l'estimation sur  $E_n^\varepsilon$  pour  $\eta_S(\varepsilon) \leq x \leq 2\eta_S(\varepsilon)$  :

$$|E_n^\varepsilon(x, y)| \leq C \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega \varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2}\right)^k \left[ \left(\frac{\omega \eta_S}{2}\right)^{n-i+1} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S}\right)^N \right]. \quad (12.93)$$

Puis :

$$|E_n^\varepsilon(x, y)| \leq C \left(\text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2}\right)^n \left[ \left(\frac{\omega \eta_S}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S}\right)^N \right]. \quad (12.94)$$

Nous venons de démontrer la première ligne de (12.75). L'estimation du gradient s'obtient par des arguments identiques.

## 12.3 Preuve de l'estimation d'erreur globale

### 12.3.1 Obtention de l'estimation

Nous basons la preuve d'estimation d'erreur sur la formulation variationnelle de la solution exacte. Comme les solutions de l'équation de Helmholtz ne sont pas  $H^1(\Omega_\varepsilon)$  mais  $H^1_{loc}(\Omega_\varepsilon)$ , il est classique de se placer sur un domaine borné. Il faut alors exprimer les conditions d'ondes sortantes à l'aide de conditions équivalentes. Comme à notre habitude, nous choisissons parmi les outils de la littérature, d'utiliser des opérateurs non locaux de Dirichlet-Neumann.

La restriction de la solution exacte  $u^\varepsilon$  à  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$  vérifie les équation suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f, & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{R,\delta}, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{R,\delta}, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + T_R u^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Gamma_R, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + T^{\varepsilon,\delta} u^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon,\delta} \end{array} \right. \quad (12.95)$$

On se référera à (3.21) et (3.22) pour la définition de  $T_R$ . L'opérateur

$$T^{\varepsilon,\delta} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon,\delta}); H^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon,\delta})) \quad (12.96)$$

se définit comme  $T_\varepsilon$  (c.f. (3.113)) par

$$T^{\varepsilon,\delta} : \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{\varepsilon,\delta} w_n^\varepsilon \longmapsto T^{\varepsilon,\delta} \varphi = -i\omega \varphi_0^{\varepsilon,\delta} w_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) \varphi_n^{\varepsilon,\delta} w_n^\varepsilon \quad (12.97)$$

où la base orthogonale  $((w_n^\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$  des  $H^s(\Sigma_{\varepsilon,\delta})$  pour  $s \in [0; 3/2[$  (et de leurs espaces duaux) est définie en (3.42) et les scalaires  $\xi_n^\varepsilon(\omega)$  sont donnés en (3.45).

La restriction de  $u^\varepsilon$  à  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$  se caractérise alors comme l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \text{ tel que :} \\ a_\varepsilon^{R,\delta}(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} f \bar{v}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \end{array} \right. \quad (12.98)$$

où la forme bilinéaire :

$$a_\varepsilon^{R,\delta} : H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \times H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \longmapsto \mathbb{C} \quad (12.99)$$

est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\varepsilon^{R,\delta}(u; v) = \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \bar{v}_n^R \\ - i\omega u_0^{\varepsilon,\delta} \bar{v}_0^{\varepsilon,\delta} + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) u_n^{\varepsilon,\delta} \bar{v}_n^{\varepsilon,\delta}. \end{array} \right. \quad (12.100)$$

avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_n^R = \int_{\Gamma_R} u(R, \theta) \psi_n(\theta) d\theta, & \text{c.f. (3.22),} \\ u_n^{\varepsilon,\delta} = \int_{\Sigma_{\varepsilon,\delta}} u(\delta, y) w_n^\varepsilon(y) dy, & \text{c.f. (3.42).} \end{array} \right. \quad (12.101)$$

On se réfère à (3.22) pour la définition de  $\mu_n^R(\omega)$ .

Associons maintenant à cette formulation variationnelle, une équation opérateur, notons

$$A_{R,\delta}^\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \longrightarrow H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \quad (12.102)$$

l'opérateur défini par le théorème de Riesz :

$$(A_{R,\delta}^\varepsilon u; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = a_\varepsilon^{R,\delta}(u, v), \quad \text{pour tous } u, v \text{ dans } H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \quad (12.103)$$

et  $L$  l'élément de  $H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})$  défini par :

$$(L_{R,\delta}^\varepsilon, v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} f \bar{v}, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}). \quad (12.104)$$

Le problème (12.98) devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \text{ tel que :} \\ A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon = L_{R,\delta}^\varepsilon. \end{cases} \quad (12.105)$$

Nous écrivons alors l'équation portant sur l'erreur provenant de (12.105) :

$$A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon = A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R,\delta}^\varepsilon. \quad (12.106)$$

Ainsi, comme  $A_{R,\delta}^\varepsilon$  est un automorphisme, il vient :

$$\|\tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq \| (A_{R,\delta}^\varepsilon)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}))} \left( \| A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R,\delta}^\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \right) \quad (12.107)$$

La fin de la preuve résulte alors des deux lemmes techniques : le lemme de stabilité 12.14 et le lemme de consistance 12.15

**Lemme 12.14** *Il existe un réel positif  $C(\omega, R, \delta)$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  tel que :*

$$\| (A_{R,\delta}^\varepsilon)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}))} \leq C. \quad (12.108)$$

**Lemme 12.15** *Pour tout  $N > 0$ , il existe  $C$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  tel que :*

$$\begin{cases} \| A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R,\delta}^\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right|^{3/2} \left[ \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n+1} \right] \\ + C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\eta_S(\varepsilon)} \left[ \left( \frac{\omega\eta_S}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_S} \right)^N \right]. \end{cases} \quad (12.109)$$

### 12.3.2 Le résultat de stabilité : preuve du lemme 12.14

Nous raisonnons par l'absurde. Si  $(A_{R,\delta}^\varepsilon)^{-1}$  n'est pas borné indépendamment de  $\varepsilon$  alors pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, il existe une famille de fonctions  $(u^\varepsilon)$  telle que :

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 1 \text{ et } \|A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \rightarrow 0. \quad (12.110)$$

(i) Montrons tout d'abord que  $u^\varepsilon$  converge faiblement vers 0 dans  $H^1(\Omega_R)$  et par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_R)} = 0. \quad (12.111)$$

La restriction de  $u^\varepsilon$  à  $\Omega_R$  est bornée car

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \quad (12.112)$$

On peut donc extraire de  $u^\varepsilon$  une sous famille convergeant faiblement dans  $H^1(\Omega_R)$ . Pour tout  $v \in H_{00}^1(\Omega_R)$  (c.f. (3.126)), il existe  $\varepsilon_0(v)$  tel que  $v$  soit nulle dans :

$$[0; \varepsilon_0]_r \times [0; \pi]_\theta \quad (12.113)$$

Pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0(v)$ , nous pouvons donc prolonger  $v$  par 0 en un élément  $H^1(\Omega_{R,\delta}^\varepsilon)$  à  $[0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y$ . Par définition de  $A_{R,\delta}^\varepsilon$  et pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0(v)$  (c.f. (12.103)) :

$$(A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon; v) = \int_{\Omega_R} (\nabla u^\varepsilon \nabla \bar{v} - \omega^2 u^\varepsilon \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) (u^\varepsilon)_n^R \overline{v_n^R}. \quad (12.114)$$

en passant à la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour tout  $v \in H_{00}^1(\Omega_R)$  :

$$\int_{\Omega_R} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \overline{v_n^R} = 0. \quad (12.115)$$

Par densité de  $H_{00}^1(\Omega_R)$  (c.f Lemme B.1), nous avons (12.115) pour tout  $v \in H^1(\Omega_R)$ . Le problème variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega_R) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega_R} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \overline{v_n^R} = 0 \end{array} \right. \quad (12.116)$$

qui correspond au problème aux dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver la fonction } u \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ sortante telle que :} \\ \Delta u + \omega^2 u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (12.117)$$

Problème classiquement bien posé dont la solution est identiquement nulle. Ainsi

$$u \equiv 0 \quad (12.118)$$

(ii) Montrons alors que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)} = 0 \quad (12.119)$$

Considérons tout d'abord la fonction :

$$U^\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(x, y) dy, \quad \forall x \in [0; \delta]. \quad (12.120)$$

Il est facile de voir que :

$$\|U^\varepsilon\|_{H^1([0;\delta]_x)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)} \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)} = 1. \quad (12.121)$$

Nous allons montrer alors que toute valeur d'adhérence  $U$  de  $U^\varepsilon$  (pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 U = 0, \quad \text{dans } ]0; \delta[, \\ \frac{dU}{dx}(\delta) - i\omega U(\delta) = 0, \\ (\beta) \quad U(0) = 0. \end{array} \right. \quad (12.122)$$

Ainsi, comme ce système d'équations correspond à un système bien posé et admet la fonction nulle comme unique solution, nous tirons  $U = 0$ . Par conséquent,  $U^\varepsilon$  converge faiblement vers 0 dans  $H^1([0; \delta]_x)$ . Puis par compacité, il vient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(x, y) dy \right\|_{L^2([0;\delta]_x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|U^\varepsilon\|_{L^2([0;\delta]_x)} = 0. \quad (12.123)$$

Nous tirons alors la relation (12.119) du lemme 5.4 et de l'hypothèse (12.110).

Montrons maintenant les points  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  :

$(\alpha)$  Pour tout  $\varphi \in H^1([-\infty; \delta])$  tel que  $\varphi(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ , introduisons la fonction test définie sur  $\Omega_\varepsilon^{R,\delta}$  :

$$v^\varepsilon(x, y) = \varphi(x) w_0^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(x). \quad (12.124)$$

Remarquons que  $v^\varepsilon$  est bornée indépendamment de  $\varepsilon$  :

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}^2 = \|w_0^\varepsilon\|_{L^2(0;\varepsilon)}^2 \|\varphi\|_{H^1([0;\delta])}^2 = \|\varphi\|_{H^1([0;\delta])}^2. \quad (12.125)$$

Par définition de  $A_{R,\delta}^\varepsilon$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} (A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon; v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} &= \int_0^\delta \int_0^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x, y) \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) - \omega^2 u^\varepsilon(x, y) \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(x) \\ &- \mathbf{i} \omega (u^\varepsilon)_0^{\varepsilon,\delta} \overline{(v^\varepsilon)_0^{\varepsilon,\delta}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) (u^\varepsilon)_n^{\varepsilon,\delta} \overline{(v^\varepsilon)_n^{\varepsilon,\delta}}. \end{aligned} \right. \quad (12.126)$$

D'où, il vient ( $v^\varepsilon$  ne dépend pas de  $y$  donc  $(v^\varepsilon)_n^{\varepsilon,\delta} = 0$  pour  $n \neq 0$ ) :

$$(A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon; v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = \int_0^\delta \frac{dU^\varepsilon}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) - \omega^2 U^\varepsilon(x) \overline{\varphi(x)} dx - \mathbf{i} \omega U^\varepsilon(\delta) \overline{\varphi(\delta)}. \quad (12.127)$$

De plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les équations (12.110) et (12.125), nous avons :

$$(A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon; v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq \|A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (12.128)$$

Ainsi, grâce à (12.128), et par continuité de la forme linéaire de  $H^1([0; \delta])$  (à  $\varphi$  donné)

$$V \mapsto \int_0^\delta \frac{dV}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) - \omega^2 V(x) \overline{\varphi(x)} dx - \mathbf{i} \omega V(\delta) \overline{\varphi(\delta)}, \quad (12.129)$$

nous pouvons passer à la limite faible dans (12.127). Nous avons donc pour tout  $\varphi \in H^1([0; \delta])$  tel que  $\varphi(0) = 0$  :

$$\int_0^\delta \frac{dV}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) - \omega^2 V(x) \overline{\varphi(x)} dx - \mathbf{i} \omega V(\delta) \overline{\varphi(\delta)} = 0. \quad (12.130)$$

Ce qui nous permet d'obtenir  $(\alpha)$ .

$(\beta)$  Comme la forme linéaire  $V \mapsto V(0)$  de  $H^1([0; \delta])$  est continue, nous avons :

$$U(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U^\varepsilon(0). \quad (12.131)$$

Puis par définition de  $U^\varepsilon$ , nous avons :

$$U^\varepsilon(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(x, y) dy \right] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\varepsilon u^\varepsilon(0, y) dy = (u^\varepsilon)_0^\varepsilon, \quad (12.132)$$

où l'interversion de la limite en  $x$  et de l'intégrale est justifiée par l'intermédiaire du théorème de Lebesgues et de l'estimation de trace ( $C$  ne dépendant pas de  $x$ ) :

$$\int_0^\varepsilon u^\varepsilon(x, y) dy \leq C(\varepsilon) \|u\|_{H^1([0;\delta]_x \times [0;\varepsilon]_y)}. \quad (12.133)$$

De plus, d'après le lemme 3.13 et la remarque 3.12, nous obtenons la majoration :

$$|(u^\varepsilon)_0^\varepsilon| \leq C \sqrt{\varepsilon |\text{Log } \varepsilon|} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)}. \quad (12.134)$$

la proposition  $(\beta)$  provient alors de (12.131) (12.132) et (12.134) et de l'hypothèse (12.110).

(iii) Pour conclure, nous calculons  $(A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon; u^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}$ .

$$\left\{ \begin{aligned} (A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon; u^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} &= \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} (|\nabla u^\varepsilon|^2 - \omega^2 |u^\varepsilon|^2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) |(u^\varepsilon)_n^R|^2 \\ &- \mathbf{i}\omega |(u^\varepsilon)_0^{\varepsilon,\delta}|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^\varepsilon(\omega) |(u^\varepsilon)_n^{\varepsilon,\delta}|^2. \end{aligned} \right. \quad (12.135)$$

D'après le lemme A.5 et (3.45), nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re}(\mu_n^R(\omega)) &\geq 0, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{Re}(\xi_n^\varepsilon(\omega)) &\geq 0, & \text{pour tout } n > 0. \end{aligned} \right. \quad (12.136)$$

En prenant la partie réelle de (12.135), nous tirons :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} |u^\varepsilon|^2 + |\operatorname{Re}((A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon, u^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})})| \quad (12.137)$$

Il vient de l'inégalité de Cauchy Schwarz et de (12.110) :

$$|\operatorname{Re}((A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon, u^\varepsilon)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})})| \leq \|A_{R,\delta}^\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (12.138)$$

En outre, d'après (12.111) et (12.119), nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 0. \quad (12.139)$$

D'où d'après (12.137), (12.138) et (12.139), il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 0. \quad (12.140)$$

Ainsi, il suit de (12.139) et (12.140) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} = 0. \quad (12.141)$$

Ce qui est bien entendu contraire à (12.110).

### 12.3.3 Le résultat de consistance : preuve du lemme 12.15

Pour obtenir l'estimation (12.109), nous utilisons la caractérisation suivante de la norme  $H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})$

$$\|A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R,\delta}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq \sup_{v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta}) \setminus \{0\}} \frac{(A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R,\delta}^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}}{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})}} \quad (12.142)$$

D'après les définition (12.103) et (12.103), puis par formule de Green, en remarquant de plus que  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  vérifie la condition de Neumann homogène sur  $\Gamma_\varepsilon^{R,\delta}$ , il vient que pour tout  $v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})$  :

$$\left\{ \begin{aligned} (A_{R,\delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R,\delta}^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} &= - \int_{\Omega_\varepsilon^{R,\delta}} ((\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon + f) \bar{v}) \\ &+ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_n^\varepsilon}{\partial n} + T^{\varepsilon,\delta} \tilde{u}_n^\varepsilon; v \right\rangle_{\Sigma^{\varepsilon,\delta}} \\ &+ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_n^\varepsilon}{\partial n} + T_R \tilde{u}_n^\varepsilon; v \right\rangle_{\Gamma_R} \end{aligned} \right. \quad (12.143)$$



Il faut alors remarquer que dans un voisinage de  $x = \delta$ , ( $x \geq 2\eta_S(\varepsilon)$ ),  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  est proportionnel à  $\exp i\omega x$  (c.f. (12.19)) qui est une solution sortante de l'équation des ondes dans la fente, donc vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\partial \tilde{u}_n^\varepsilon}{\partial n} + T^{\varepsilon, \delta} \tilde{u}_n^\varepsilon = 0. \quad (12.144)$$

De même, dans le demi espace dans un voisinage de  $r = R$ , ( $r \geq 2\eta_H(\varepsilon)$ )  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  coïncide avec le développement en champ lointain (c.f. (12.17)) qui vérifie la condition d'onde sortante donc :

$$\frac{\partial \tilde{u}_n^\varepsilon}{\partial n} + T_R \tilde{u}_n^\varepsilon = 0. \quad (12.145)$$

D'où

$$\begin{cases} (A_{R, \delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R, \delta}^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} = - \int_{\Omega_R} \left( (\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon + f) \bar{v} \right) \\ - \int_{[0; \delta]_x \times [0; 1]_y} \left( (\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon + f) \bar{v} \right) \end{cases} \quad (12.146)$$

Puis, pour les mêmes arguments que précédemment il nous suffit de considérer les domaines :

$$\begin{cases} [0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta \subset \Omega_R, \\ [0; 2\eta_S(\varepsilon)]_x \times [0; \varepsilon]_y \subset [0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y. \end{cases} \quad (12.147)$$

Ainsi comme de plus sur ces domaines  $f = 0$  :

$$\begin{cases} (A_{R, \delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R, \delta}^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} = - \int_{[0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta} \left( (\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon) \bar{v} \right) \\ - \int_{[0; 2\eta_S(\varepsilon)]_x \times [0; 1]_y} \left( (\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon) \bar{v} \right) \end{cases} \quad (12.148)$$

Il vient alors en majorant :

$$\begin{cases} \left| (A_{R, \delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R, \delta}^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})} \right| \leq \left\| \Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{L^\infty([0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)} \\ \times \|v\|_{L^1([0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)} \\ + \left\| \Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{L^\infty([0; 2\eta_S(\varepsilon)]_x \times [0; 1]_y)} \\ \times \|v\|_{L^1([0; 2\eta_S(\varepsilon)]_x \times [0; 1]_y)}. \end{cases} \quad (12.149)$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer chacun des quatre termes du membre droit.

**Estimation de**  $\left\| \Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{L^\infty([0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)}$

*Majoration de  $\mathcal{U}_i^k$  en  $+\infty$  :*

Nous aurons besoin dans la suite de l'estimation suivante :

$$\left( \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^i \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0; 2\eta_H/\varepsilon]_\rho \times [0; \pi]_\theta)} \leq C \left( \frac{\omega \eta_H}{2} \right)^i. \quad (12.150)$$

Elle provient du comportement à l'infini dans le demi espace de  $\mathcal{U}_i^k$  qui donné par (9.131) :

$$\begin{cases} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right) \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^k) \rho^l \cos p\theta \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} J_{p,l} \left[ \mathcal{L}_p^1(u_{i-l}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^{k-1}) \right] \rho^l \cos p\theta \right\} = 0, \end{cases} \quad (12.151)$$

Notons que  $u_i^i$  est soit nul soit régulier pour  $u_0^0$  Ainsi,

$$\mathcal{L}_p^0(u_i^i) = 0 \quad (12.152)$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \mathcal{U}_i^k(\rho, \theta) - \sum_{l=0}^{i-k-1} \sum_{p=0}^{i-k} \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log } \rho \right) \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^k) \rho^l \cos p\theta \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{i-k} \sum_{p=0}^{i-k} J_{p,l} \left[ \mathcal{L}_p^1(u_{i-l}^k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{L}_p^0(u_{i-l}^{k-1}) \right] \rho^l \cos p\theta \right\} = 0. \end{array} \right. \quad (12.153)$$

Une majoration de  $\mathcal{U}_i^k$  s'obtient en ne gardant que les termes prépondérants à l'infini dans (12.153) :

$$\|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0; 2\eta_H]_\rho) \times [0; \pi]_\theta} \leq C \left( \frac{\eta_H}{\varepsilon} \right)^{i-k} \leq C \left( \frac{\eta_H}{\varepsilon} \right)^i \leq C \left( \frac{\omega \eta_H}{2} \right)^i \left( \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^{-i}. \quad (12.154)$$

D'où nous tirons (12.150).

*Conclusion*

Remplaçons tout d'abord  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  par sa définition dans  $\Omega$  fournie en (12.15) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log } \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^k \left\{ \right. \right. \\ \quad \Delta [\chi(\mathbf{r}/\eta_H) u_i^k(\mathbf{x})] + \omega^2 \chi(\mathbf{r}/\eta_H) u_i^k(\mathbf{x}) \\ \quad \left. \left. + \Delta [(1 - \chi(\mathbf{r}/\eta_H)) \mathcal{U}_i^k(\mathbf{x}/\varepsilon)] + \omega^2 (1 - \chi(\mathbf{r}/\eta_H)) \mathcal{U}_i^k(\mathbf{x}/\varepsilon) \right\} \right] \end{array} \right. \quad (12.155)$$

En développement le laplacien, nous tirons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log } \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^k \left\{ \right. \right. \\ \quad \chi(\mathbf{r}/\eta_H) [\Delta u_i^k(\mathbf{x}) + \omega^2 u_i^k(\mathbf{x})] \\ \quad + \frac{2}{\eta_H} [\nabla_R \chi(R)] (R = \mathbf{r}/\eta_H) \nabla [u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\mathbf{x}/\varepsilon)] \\ \quad + \frac{1}{\eta_H^2} [\Delta_R \chi(R)] (R = \mathbf{r}/\eta_H) [u_i^k(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_i^k(\mathbf{x}/\varepsilon)] \\ \quad \left. \left. + (1 - \chi(\mathbf{r}/\eta_H)) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\Delta \mathcal{U}_i^k](\mathbf{x}/\varepsilon) + \omega^2 \mathcal{U}_i^k(\mathbf{x}/\varepsilon) \right) \right\} \right] \end{array} \right. \quad (12.156)$$

Puis, en notant que chaque  $u_i^k$  vérifie l'équation de Helmholtz homogène dans ce voisinage de la fente, que  $\mathcal{U}_i^k$  vérifie le système d'équations emboîtées et en introduisant l'erreur de raccord donnée en (12.47), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = - \frac{2}{\eta_H} [\nabla_R \chi(R)] (R = \mathbf{r}/\eta_H) \nabla E_n^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \quad - \frac{1}{\eta_H^2} [\Delta_R \chi(R)] (R = \mathbf{r}/\eta_H) E_n^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \quad + (1 - \chi(\mathbf{r}/\eta_H)) \omega^2 \sum_{i=n-1}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^i \left( \text{Log } \frac{\omega \varepsilon}{2} \right)^k \mathcal{U}_i^k(\mathbf{x}/\varepsilon) \right] \end{array} \right. \quad (12.157)$$

Ainsi par inégalité triangulaire, puis comme les supports du gradient et du laplacien polaire de  $\chi$  sont inclus dans le segment  $[\eta_H; 2\eta_H]$  il vient de la régularité de  $\chi$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \|\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{L^\infty([0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)} &\leq \frac{C}{\eta_H} \|\nabla E^\varepsilon\|_{L^\infty([\eta_H(\varepsilon); 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)} \\ &+ \frac{C}{\eta_H^2} \|E^\varepsilon\|_{L^\infty([\eta_H(\varepsilon); 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)} \\ &+ C \left( \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^n \sum_{i=n-1}^n \sum_{k=0}^i \left[ \left( \frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^i \right. \\ &\quad \left. \|\mathcal{U}_i^k\|_{L^\infty([0; 2\eta_H(\varepsilon)/\varepsilon]_\rho \times [0; \pi]_\theta)} \right]. \end{aligned} \right. \quad (12.158)$$

Ainsi, d'après le lemme 12.9 et (12.150) :

$$\|\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{L^\infty([0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)} \leq \frac{C}{\eta_H^2} \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right| \left[ \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n+1} \right] \quad (12.159)$$

**Estimation de  $\|v\|_{L^1([0; 2\eta_H(\varepsilon)]_r \times [0; \pi]_\theta)}$**

Soit  $r_0$ , un réel positif plus petit que la distance qui sépare l'origine et l'obstacle. Limitons nous tout d'abord aux  $v \in C^\infty(\Omega)$  tels que  $v(r_0, \theta) = 0$ , pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  :

$$I(\eta) = \int_0^{2\eta} \int_0^\pi |v(r, \theta)| r dr d\theta \leq \int_0^{2\eta} \int_0^\pi \left| \int_r^{r_0} \frac{\partial v}{\partial r}(r', \theta) dr' \right| r dr d\theta \quad (12.160)$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \int_r^{r_0} \frac{\partial v}{\partial r}(r', \theta) dr' \right| &\leq \left( \int_r^{r_0} \left| \frac{\partial v}{\partial r}(r', \theta) \right|^2 r' dr' d\theta \right)^{1/2} \left( \int_r^{r_0} \frac{1}{r'} dr' d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \int_0^{r_0} \left| \frac{\partial v}{\partial r}(r', \theta) \right|^2 r' dr' d\theta \right)^{1/2} (|\text{Log } r| + 1)^{1/2}. \end{aligned} \right. \quad (12.161)$$

Intégrons cette expression suivant  $r$  et  $\theta$  :

$$I(\eta) \leq C \int_0^{2\eta} \int_0^\pi \left[ \left( \int_0^{r_0} \left| \frac{\partial v}{\partial r}(r', \theta) \right|^2 r' dr' \right)^{1/2} (|\text{Log } r| + 1)^{1/2} \right] r dr d\theta. \quad (12.162)$$

Appliquons une deuxième fois le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$I(\eta) \leq C \left[ \int_0^{2\eta} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \left| \frac{\partial v}{\partial r}(r', \theta) \right|^2 r' dr' r dr d\theta \right]^{1/2} \left[ \int_0^{2\eta} \int_0^\pi (|\text{Log } r| + 1) r dr d\theta \right]^{1/2}. \quad (12.163)$$

On intègre alors explicitement et on majore :

$$I(\eta_H(\varepsilon)) \leq C \eta_H(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega_R)} \eta_H(\varepsilon) \sqrt{|\text{Log } \eta_H(\varepsilon)|}. \quad (12.164)$$

Pour  $v \in H^1(\Omega_R)$ , il nous suffit alors d'agir par régularisation-troncature pour nous ramener au cas précédent, nous obtenons :

Il existe une constante  $C$  ne dépendant pas de  $\eta_H(\varepsilon)$  telle que :

$$\int_{[0; 2\eta_H]_r \times [0; \pi]_\theta} |v| \leq C (\eta_H(\varepsilon))^2 \sqrt{|\text{Log } \eta_H(\varepsilon)|} \|v\|_{H^1(\Omega_R)} \quad (12.165)$$

**Estimation de**  $\|\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{L^\infty([0; 2\eta_S(\varepsilon)]_r \times [0; 1]_y)}$

De la même manière que pour le champ lointain, on montre que pour tout  $N$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe  $C$  tel que :

$$\|\Delta \tilde{u}_n^\varepsilon + \omega^2 \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{L^\infty([0; 2\eta_S(\varepsilon)]_r \times [0; 1]_y)} \leq \frac{C}{\eta_S^2} \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^{n+1} \left[ \left( \frac{\omega\eta_S}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_S} \right)^N \right] \quad (12.166)$$

**Estimation de**  $\|v\|_{L^1([0; 2\eta_S(\varepsilon)]_x \times [0; 1]_y)}$

Soit  $x_0$  un réel positif, inférieur à  $\delta$ , considérons tout d'abord  $v$  de classe  $C^\infty([0; \delta] \times [0; \varepsilon]_y)$  dont le support est inclus dans  $[0; x_0]_x \times [0; \varepsilon]_y$ . Notons

$$J(\eta) = \int_0^\eta \int_0^\varepsilon |v(x, y)| dx dy \quad (12.167)$$

Pour tout  $x, y \in [0; \eta]_x \times [0; \varepsilon]_y$ , nous avons :

$$|v(x, y)| = \left| \int_x^{x_0} \frac{\partial v}{\partial x}(x', y) dx' \right| \leq \int_0^\delta \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x', y) \right| dx' \leq \sqrt{\delta} \sqrt{\int_0^\delta \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x', y) \right|^2 dx'}. \quad (12.168)$$

D'où  $J(\eta)$  est donné par :

$$J(\eta) \leq C \int_0^\eta \int_0^\varepsilon \left( \int_0^\delta \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x', y) \right|^2 dx' \right)^{1/2} dx dy. \quad (12.169)$$

Par conséquent d'après le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$J(\eta) \leq C \left( \int_0^\eta \int_0^\varepsilon \int_0^\delta \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x', y) \right|^2 dx' dx dy \right)^{1/2} \left( \int_0^\eta \int_0^\varepsilon \int_0^\delta \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x', y) \right|^2 dx' dx dy \right)^{1/2}. \quad (12.170)$$

D'où :

$$\int_0^\eta \int_0^\varepsilon |v(x, y)| dx dy \leq C \eta \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)}. \quad (12.171)$$

Par régularisation-troncature nous tirons le même résultat pour  $v \in H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)$ . Ainsi

$$\|v\|_{L^1([0; 2\eta_S]_x \times [0; \varepsilon]_y)} \leq C \eta_S \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1([0; \delta]_x \times [0; \varepsilon]_y)} \quad (12.172)$$

### Conclusion

Il nous suffit ici de regrouper les résultats obtenus. De (12.149), (12.165), (12.165), (12.166), et (12.172) il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|(A_{R, \delta}^\varepsilon \tilde{u}_n^\varepsilon - L_{R, \delta}^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})}|}{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R, \delta})}} \leq C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \left| \text{Log} \frac{\omega\eta_H}{2} \right|^{3/2} \left[ \left( \frac{\omega\eta_H}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_H} \right)^{n+1} \right] \\ + C \left| \text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2} \right|^n \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\eta_S} \left[ \left( \frac{\omega\eta_S}{2} \right)^{n+1} + \left( \frac{\varepsilon}{\eta_S} \right)^N \right]. \end{array} \right. \quad (12.173)$$

La conclusion provient de (12.142).



## Chapitre 13

# Conclusion et perspectives de la partie II

Dans la partie II, nous avons exhibé dans trois zones (champ lointain, champ proche et champ de fente) les développements asymptotiques de la solution exacte à l'aide de la technique de raccordement de développements asymptotiques. Nous avons détaillé les différentes étapes permettant de mettre en oeuvre cette technique et de justifier mathématiquement cette approche. Nous avons ainsi obtenu des modèles de fente d'ordre arbitrairement élevé permettant de calculer numériquement une approximation de la solution exacte.

Nous sommes conscients que cette technique est difficile à présenter et peut parfois paraître obscure au lecteur. Toutefois, nous pensons qu'elle nous a permis d'obtenir de très nombreuses précisions sur les propriétés de la solution relatives à la fente.

Nous espérons avoir amélioré la compréhension de la technique des développements asymptotiques raccordés pour l'équation de Helmholtz bidimensionnelle. Revenons, chapitre par chapitre, sur les quelques difficultés techniques et principaux résultats obtenus.

Au chapitre 9, la plus grosse difficulté était de trouver le cadre dans lequel poser les problèmes couplés définissant les termes des développements asymptotiques. Les relations (9.57) et (9.58) couplant ces différents termes étant le résultat le plus important de ce chapitre (voir même de la partie II). Ce cadre étant bien choisi, la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution n'était plus qu'une question de technique mathématique.

Au chapitre 10, nous avons revisité la technique formelle de raccordement de développements asymptotiques. La technique formelle, qui y est décrite, est très proche de celle développée par l'école russe. Elle permet d'obtenir de manière systématique et dans le cas de nombreuses configurations le raccord entre les différents champs (lointains, proches, extérieurs, intérieurs,...). Malgré la similitude avec les techniques russes, nous pensons avoir amélioré la systématisation de cette technique formelle.

Au chapitre 11, nous avons développé des éléments d'analyse spécifiques à ce problème de fente. Cette analyse est par essence très technique. Toutefois, en analyse asymptotique, de nombreux auteurs s'intéressent à ce type de problèmes. C'est pourquoi cette discipline est maintenant assez bien balisée (tout en ne devenant pas une trivialité). Nous pensons que de nombreuses améliorations locales (principalement au niveau du cadre fonctionnelle) peuvent être apportées à ce chapitre.

Au chapitre 12, nous avons développé des preuves permettant de montrer des estimations d'erreur. Il est apparu de manière centrale dans les démonstrations des quantités que nous avons appelées erreurs de raccord (c.f. (12.47) pour proche-lointain et (12.74) pour proche-fente). A notre avis, cette technique de preuve est un des résultats importants de la partie II.

Nous nous proposons maintenant de présenter quelques points qui n'ont pu être abordés par

manque de temps. Nous espérons ainsi donner une bonne vue d'ensemble des différentes voies de recherche possibles.

## 13.1 La mise en oeuvre numérique

Revenons maintenant sur un point important. Nous n'avons pas mis en oeuvre la technique numérique, toutefois tout le matériel est à disposition pour développer une technique numérique précise. En effet chacun des termes des développements asymptotiques est défini à l'aide de problèmes dont les données et la géométrie ne dépendent pas de  $\varepsilon$ . Toutefois, les termes des développements asymptotiques relèvent de l'analyse des problèmes avec conditions de radiation généralisées, c'est pourquoi nous donnons quelques précisions pour en tirer une méthode de calcul numérique.

La mise en oeuvre de cette technique nous aurait permis non seulement de valider les estimations d'erreurs, mais aussi de démontrer l'efficacité de cette technique.

### 13.1.1 Calcul numérique du développement en champ lointain.

Le calcul des  $u_i^k$  du champ lointain se ramène au calcul des  $w_p$  qui sont définis en (9.68). La difficulté ici provient du fait que chacun des  $w_p$  est singulier en zéro. Les  $w_p$  peuvent être calculés de plusieurs façons qui dépendent du code de calculs numériques auquel on a accès.

La première idée consiste à s'intéresser à la différence  $\varphi_p(r, \theta) = w_p(r, \theta) - Y_p(\omega r) \cos p\theta$ . Cette inconnue est régulière au voisinage de l'origine et vérifie les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \varphi_p \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta \varphi_p + \omega^2 \varphi_p = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial n} = 0, \quad \text{en } x = 0, \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial n} = -\frac{\partial Y_p(\omega r) \cos p\theta}{\partial n}, \quad \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega \text{ tel que } x \neq 0, \\ \varphi_p + Y_p(\omega r) \cos p\theta \text{ est sortante.} \end{array} \right. \quad (13.1)$$

Une idée alternative, qui s'appuie directement sur les idées, développées au chapitre 11, est de considérer la fonction  $\varphi_p = w_p - \chi(r) Y_p(\omega r) \cos p\theta$ . La fonction de troncature  $\chi$  vaut 1 au voisinage de 0 et 0 à partir d'un certain  $r$ . Nous devons alors résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \varphi_p \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta \varphi_p + \omega^2 \varphi_p = \Delta[\chi(r)] Y_p(\omega r) \cos p\theta + 2 \chi'(r) Y_p'(\omega r) \cos p\theta, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \varphi_p \text{ est sortante.} \end{array} \right. \quad (13.2)$$

Il est alors classique de calculer  $\varphi_p$  à l'aide d'une technique éléments finis.

Une autre idée consiste à exclure de la zone de calcul numérique un petit voisinage de l'origine. Nous utilisons alors l'opérateur Dirichlet Neumann associé au développement modal de  $u_p$  au voisinage de l'origine pour tenir compte de son comportement dans cette zone :

$$u_p(r, \theta) = Y_p(\omega r) \cos p\theta + \sum_{p=0}^{+\infty} a_p J_p(\omega r) \cos p\theta. \quad (13.3)$$

### 13.1.2 Calcul numérique du développement du champ proche.

Les  $\mathcal{U}_i^k$  sont définis dans une géométrie infinie en forme de T. Chacun des  $\mathcal{U}_i^k$  vérifie un problème de Laplace homogène ou non-homogène avec condition de Neumann sur les frontières. Toute la difficulté est de prendre en compte une éventuelle croissance à l'infini. Citons trois techniques permettant de traiter numériquement ces différents problèmes.

On peut tout d'abord penser à l'utilisation d'une équation intégrale dont le domaine de calcul est le segment  $\{(x, y) / x = 0 \text{ et } y \in [0; 1]\}$ . Cette méthode de calcul numérique est limitée au cas où il n'y a pas d'obstacle dans le demi espace et provient en fait du développement asymptotique de l'équation intégrale associée au problème exact.

Une autre technique consiste à utiliser des fonctions de troncature comme dans la partie théorique (se référer au chapitre 11) pour se ramener à des termes sources homogènes et des comportements asymptotiques homogènes à l'infini. Pour calculer la solution, on peut alors, soit utiliser une réduction à un domaine borné (équation intégrale, Dirichlet Neumann, ...) soit utiliser une méthode de Galerkin en domaine infini (de type méthode des résidus).

Il est aussi possible d'utiliser des opérateurs Dirichlet-Neumann pour calculer directement les  $\mathcal{U}_i^k$  sur un domaine borné. Nous utilisons ici les développements modaux des  $\mathcal{U}_i^k$  à l'infini pour déterminer le bon opérateur Dirichlet-Neumann.

## 13.2 Quelques compléments d'analyse

### 13.2.1 Les fentes finies

L'étude des fentes finies se divise naturellement en deux parties, les fentes non résonnantes, i.e. les fentes de longueur  $L > 0$  telles que :

$$L \neq \ell \frac{\lambda}{2}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^* \quad (13.4)$$

et les fentes résonnantes c'est à dire les fentes de longueur  $L > 0$  telles qu'il existe  $\ell \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$L = \ell \frac{\lambda}{2}. \quad (13.5)$$

**Les fentes non résonnantes.** Il est dans ce cas tout à fait possible d'adapter la théorie que nous venons d'exposer ici. Le lecteur devra tout de même effectuer quelques modifications mineures. Il tirera, notamment, les mêmes formes de développement (même type de développement en  $\varepsilon^i (\text{Log } \varepsilon)^k$ ) et pourra utiliser tels quels tous les résultats théoriques démontrés dans cette partie. Cette partie n'a pas été rédigée vu son caractère très similaire au cas de la fente semi-infinie.

**Les fentes résonnantes.** Dans ce cas, le développement asymptotique postulé pour le cas de la fente semi-infinie devient faux. Il faut alors chercher ces développements sous la forme (que ce soit du côté gauche ou du côté droit) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon = u^0 + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{i-1} \varepsilon^i (\text{Log } \varepsilon)^k u_i^k, \\ \mathcal{U}^\varepsilon = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^i \varepsilon^i (\text{Log } \varepsilon)^k \mathcal{U}_i^k, \\ U^\varepsilon = \sum_{i=-1}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^i \varepsilon^i (\text{Log } \varepsilon)^k U_i^k. \end{array} \right. \quad (13.6)$$

L'obtention du développement asymptotique complet semble être un travail long mais facile. La difficulté principale étant d'effectuer les preuves de convergence de la méthode. On pourra ici se référer à la partie III de cette thèse pour se faire une idée plus précise de la question (la dérivation de l'Ansatz est restée au niveau formel).



### 13.2.2 Les modèles dépendants faiblement de $\varepsilon$ .

Un des inconvénients notables de la méthode est la multiplication du nombre de termes qu'il faut calculer lorsque l'ordre augmente. Deux techniques, que l'on peut considérer comme classiques, permettent de résoudre ce problème. Présentons les succinctement :

**Un seul terme du développement asymptotique par ordre donné et par type de champ.** Cette technique consiste à écrire le problème vérifié par

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k u_i^k \\ \mathcal{U}_i^\varepsilon &= \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \mathcal{U}_i^k, \\ U_i^\varepsilon &= \sum_{k=0}^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k U_i^k. \end{cases} \quad (13.7)$$

Il est facile de voir que ces fonctions, qui dépendent faiblement de  $\varepsilon$ , vérifient des problèmes du type de ceux vérifiés par les  $u_i^k$ . Ainsi pour calculer une approximation à l'ordre  $i$  de la solution nous n'aurons plus qu'à calculer  $3(i+1)$  termes.

**Calcul direct de l'ordre  $i$ .** L'idée est ici de s'intéresser à des approximations des développements asymptotiques :

$$\begin{cases} u_n^\varepsilon &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k u_i^k + o(\varepsilon^n), \\ \mathcal{U}_n^\varepsilon &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k \mathcal{U}_i^k + o(\varepsilon^n), \\ U_n^\varepsilon &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^i \left(\text{Log} \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^k U_i^k + o(\varepsilon^n). \end{cases} \quad (13.8)$$

Il n'y a bien entendu pas unicité dans la manière de définir  $u_n^\varepsilon$ . Toutefois on peut voir qu'une façon intuitive est de considérer la solution du problème couplé :

Chercher  $u_n^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sortante,  $\mathcal{U}_n^\varepsilon : \widehat{\Omega}_N^* \rightarrow \mathbb{C}$  et  $U_n^\varepsilon : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  sortante telles que :

$$\begin{cases} \Delta u_n^\varepsilon + \omega^2 u_n^\varepsilon = -f, & \text{dans } \Omega, & \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{0\}, \\ \Delta \mathcal{U}_n^\varepsilon + \omega^2 \varepsilon^2 \mathcal{U}_n^\varepsilon = 0, & \text{dans } \widehat{\Omega}_N^*, & \frac{\partial \mathcal{U}_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\widehat{\Omega}_N^*, \\ \frac{d^2 U_n^\varepsilon}{dx^2} + \omega^2 U_n^\varepsilon = 0, & \text{dans } [0; +\infty[. \end{cases} \quad (13.9)$$

et les complexes  $a_p$  et  $b_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) tels que (dans les deux demis espaces pour  $r$  suffisamment petit et  $\rho \geq 1$ ) :

$$\begin{cases} u_n^\varepsilon(r, \theta) &= \sum_{p=0}^n \left( (a_p J_p(\omega r) + b_p Y_p(\omega r)) \cos p\theta \right) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left( a_p J_p(\omega r) \cos p\theta \right), \\ \mathcal{U}_n^\varepsilon(\rho, \theta) &= \sum_{p=0}^n \left( (a_p J_p(\omega\varepsilon\rho) + b_p Y_p(\omega\varepsilon\rho)) \cos p\theta \right) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left( b_p Y_p(\omega\varepsilon\rho) \cos p\theta \right), \end{cases} \quad (13.10)$$

et

$$U_n^\varepsilon(X, Y) = U_n^\varepsilon(0) \exp i\omega\varepsilon X + o(1), \quad \forall X > 0 \text{ et } Y \in [0; 1]. \quad (13.11)$$

Ce modèle est selon nous le plus prometteur, nous n'avons pas eu le temps de l'étudier ni du point de vue théorique ni du point de vue numérique. Du point de vue pratique, il semble très facile mettre en oeuvre, tandis que du point de vue théorique, de nombreux verrous restent à lever.

## 13.3 Différentes extensions possibles

La technique de raccordement de développements asymptotiques est applicable à de nombreuses configurations, essayons d'en fournir celles qui nous semblent les plus importantes :

### 13.3.1 Les structures 3D

**Les trous.** La première famille de structure 3D est fournie par une fente petite dans les deux directions d'espace (cylindre dont le diamètre de la section est de l'ordre de  $\varepsilon$ ).

$$\mathcal{O}_\varepsilon = O_\varepsilon \times [0; L], \text{ avec } O_\varepsilon \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \text{diam}(O_\varepsilon) = O(\varepsilon) \quad (13.12)$$

Dans ce cas, il nous semble clair que la technique peut être appliquée et que des fonctions de jauges polynomiales (cadre purement 3D) permettent de décrire le comportement asymptotique de la solution.

$$u^\varepsilon = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i + o(\varepsilon^\infty), \quad (13.13)$$

Du point de vue difficulté de réalisation, nous pensons que ce cas ne nécessite qu'une simple retouche des techniques développées dans cette partie.

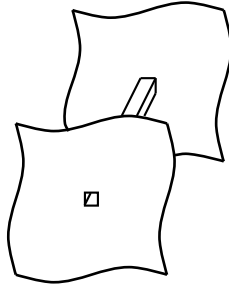


FIG. 13.1 – Une fente petite dans les deux directions d'espace

**Une fente 3D infinie.** Un autre cas intéressant est le cas d'une fente petite dans une direction et infinie dans l'autre. Remarquons que l'on peut se ramener au cas 2D en effectuant une transformation de Fourier dans la direction infinie. C'est pourquoi nous pensons que ce problème se décompose tout d'abord en trois zones. Une zone de champ lointain dans le(s) demi(s) espace(s), une zone de champ proche correspondant à un voisinage de l'embouchure de la fente où il faut étudier la solution dans le jeu de coordonnées normalisées :

$$X = x, Y = \frac{y}{\varepsilon}, Z = \frac{z}{\varepsilon} \quad (13.14)$$

et une zone de champ de fente associé au changement de coordonnées :

$$X = x, Y = y, Z = \frac{z}{\varepsilon}. \quad (13.15)$$

Les développements asymptotiques des solutions devront être recherchés à l'aide des fonctions de jauge  $\varepsilon^i (\text{Log } \varepsilon)^k$  (essence 2D de la géométrie). Ce cas ne devrait a priori pas poser beaucoup plus de difficultés que le cas 2D.

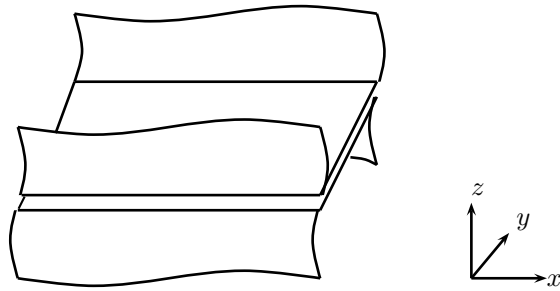


FIG. 13.2 – Une fente infinie dans une direction d’espace

**Une fente 3D finie.** Le dernier cas que nous présentons ici est une fente d’épaisseur  $\varepsilon$  et de largeur finie (en  $O(1)$ ).

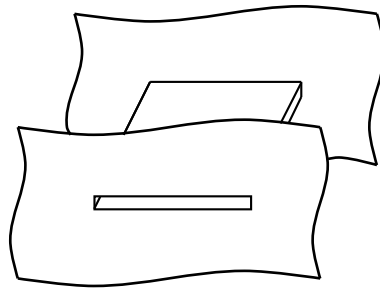


FIG. 13.3 – Une fente 3D finie

Ici, au trois zones traditionnelles (lointain, proche, fente), il faut ici ajouter deux zones correspondant aux extrémités gauches et droites de la fente auquel nous appliquons le changement de variables :

$$X = \frac{x}{\varepsilon}, Y = \frac{y}{\varepsilon}, Z = \frac{z}{\varepsilon}. \quad (13.16)$$

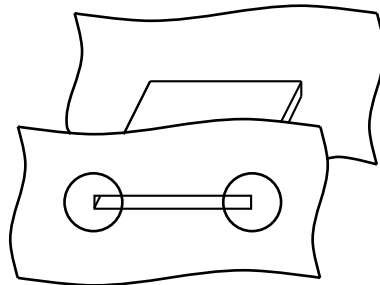


FIG. 13.4 – Deux nouvelles zones de développements asymptotiques

Les fonctions de jauge qui devront être utilisées pour rechercher les différents développements asymptotiques sont de la forme  $\varepsilon^i (\text{Log } \varepsilon)^k$ .

La technique semble s'appliquer, toutefois ce problème se révèle pour nous très difficile. On peut considérer ce problème comme ouvert.

#### 13.3.2 D'autres équations d'ondes

**Les ondes acoustiques en régime temporel.** De plusieurs points de vue, ajouter une dimension temporelle est très similaire à ajouter une dimension d'espace infinie. Ce travail est pourtant moins clair que celui de la fente infinie, les couplages entre les différents champs devant s'effectuer à tout instant  $t$ .

**Les ondes électromagnétiques.** Le cas des ondes électromagnétiques n'a de signification qu'en 3D (réduction à deux problèmes de Helmholtz en 2D). Par contre en 3D, il cumule la majorité des difficultés déjà évoquées. De plus il est à noter que les résultats de séparation de variables ont joué un rôle important dans cette partie, ils sont beaucoup plus complexes pour les cas Maxwell 3D. C'est pourquoi ce sujet est le plus ouvert même du point de vue totalement formel.



Troisième partie

Etude des fentes résonnantes



# Chapitre 14

## Une étude mathématique des résonances des fentes finies

### Sommaire

---

14.1 Introduction and position of the problem . . . . .	250
14.2 The case of non resonant frequencies : mathematical analysis . . . .	252
14.2.1 Reformulation of the problem (14.4) in the domain $\Omega_R$ . . . . .	252
14.2.2 Convergence of $u^\varepsilon$ to $u^0$ . . . . .	254
14.3 The case of resonant frequencies : some numerical computations . .	256
14.4 The case of resonant frequencies : a formal asymptotic analysis . .	261
14.4.1 The ansatz of matched asymptotic expansions . . . . .	261
14.4.2 Determination of the leading terms of the expansion. . . . .	265
14.4.3 Towards a rigorous proof . . . . .	267

---

**Résumé :** L'objectif de ce chapitre est l'étude théorique et numérique d'un phénomène spécifique aux fentes finies. En effet pour certaines fréquences spécifiques, appelées fréquences de résonance, l'asymptotique de la solution du problème de la fente finie devient totalement différente de celle de la solution du problème de fente semi infinie. J'ai choisi de reproduire intégralement le texte d'un article écrit avec Marianne Clausel, Marc Duruflé et Patrick Joly, soumis à publication. Ce travail complète en quelques sortes celui mené au chapitre 4 dans le cas des fréquences non résonnantes. Cet article reprend dans la section 14.2 les résultats déjà établis dans le cas des fréquences non résonnantes. Le cas des fréquences résonnantes est abordé par le biais des simulations numériques au chapitre 14.3 et par la méthode des développements asymptotiques raccordés à la section 14.4. On montre que dans les demi espaces la convergence de la solution vers la solution d'un problème sans fente est très lente : en  $O(1/\text{Log } \varepsilon)$  au lieu de  $O(\varepsilon)$  dans le cas non résonnant et que la solution explose dans la fente typiquement en  $O(1/\varepsilon \text{Log } \varepsilon)$ . Signalons ici que notre étude reste formelle et à compléter mathématiquement.



## A mathematical analysis of the resonance of the finite thin slots

M. Clausel <sup>\*</sup>, M. Duruflé <sup>\*</sup>, P. Joly <sup>\*</sup>, Sébastien Tordeux<sup>\* † §</sup>

**Abstract :** In this article we are interested in the asymptotic behaviour of the solution of a wave propagation problem in a domain including a thin slot. Some rate of convergences are obtained and illustrated by numerical results.

**Keywords :** thin slot, slit, resonance, Helmholtz, wave equation,

**AMS :** 35J05, 65N15, 78M30, 78M35

### 14.1 Introduction and position of the problem

The analysis of the propagation of waves in media including thin slots poses, as any PDE problem involving a small scale (here the width of the slot), some difficulties from the numerical point of view and raises exciting related mathematical questions. Moreover, this kind of problem appears in a lot of applications in acoustics and electromagnetism and has already generated an abundant litterature in the engineering community.

In [55], we study the case of the 2D time harmonic wave equation with Neumann boundary conditions (which is physically relevant in acoustics and electromagnetism) and investigated the question of building an approximate model, in view of its numerical discretization, consisting of coupling a 1D model for the slot to a 2D model for the rest of the domain of propagation. We proposed a coupling strategy that we analyzed in detail in the case of a semi-infinite straight slot. The basic ingredient of the analysis is of course the study of the asymptotic behaviour of the solution when the width  $\varepsilon$  of the slot tends to 0. The analysis of the same question for finite slot, that we wish to investigate in this paper, appears to be more delicate. One has in particular to face the question of resonant frequencies (or equivalently critical slot lengths), a phenomenon which is already known by engineers [48] and that we propose to analyze from both analytical and numerical points of view.

Let us first present our model problem and begin by the description of the geometry of the problem.

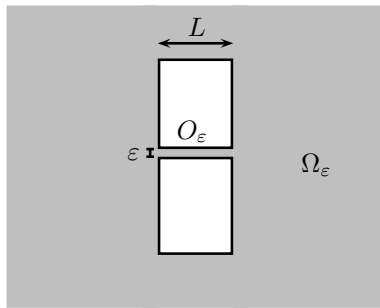


FIG. 14.1 – Geometry of the propagation domain with the slot

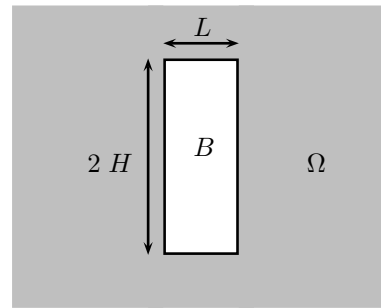


FIG. 14.2 – Geometry of the propagation domain without the slot

We assume that we are in 2D ( $\mathbf{x} = (x, y)$  will denote the current point of  $\mathbb{R}^2$ ) and that the domain of propagation  $\Omega_\varepsilon$  given by (with  $L > 0$  and  $0 < \varepsilon < H$ ) :

$$\overline{\Omega_\varepsilon} = \overline{\Omega} \cup \overline{O_\varepsilon}, \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B, \tag{14.1}$$

$$B = [0, L] \times [-H, H], \quad (\text{a rectangle}) \tag{14.2}$$

---

Projets POems : unité de recherche mixte 2706 CNRS-ENSTA-INRIA  
<sup>\*</sup>INRIA, Projet Ondes, Batiment 13, INRIA, Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France  
<sup>†</sup>ENSTA, 32 Boulevard Victor 75739 Paris cedex 15, France

$$O_\varepsilon = ]0, L[ \times ]0, \varepsilon[, \quad (\text{a straight finite slot}) \quad (14.3)$$

We shall call “end points” of the slot the two points  $\mathbf{A}^- = (a^-, b^-) \equiv (0, 0)$  and  $\mathbf{A}^+ = (a^+, b^+) \equiv (L, 0)$  and denote  $\mathbf{A}$  the middle of  $[\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+]$ .

We assume that a time harmonic wave of pulsation  $\omega > 0$  ( $c = 1$ ) is emitted by a source term  $f$  with compact support  $F$  included inside the open set  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \text{Find } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ outgoing such that :} \\ -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = f, & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (14.4)$$

It is classical and useful to reduce the problem to a bounded domain thanks to a transparent boundary condition on the circle  $\Gamma_R = \{\mathbf{x} \in \Omega / |\mathbf{x} - \mathbf{A}| = R\}$ , where the radius  $R > 0$  is large enough so that the obstacle and the support  $F$  of  $f$  are contained in  $\Omega_R := \{\mathbf{x} \in \Omega / |\mathbf{x} - \mathbf{A}| < R\}$ . A Dirichlet to Neumann transparent boundary condition can be put on  $\Gamma_R$  as :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + T_R u^\varepsilon = 0, \quad \text{on } \Gamma_R, \quad (14.5)$$

where the operator  $T_R$  from  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$  to  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$  is given by :

$$\begin{cases} T_R u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \psi_n^R, \\ u_n^R = \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \psi_n^R(\theta) R d\theta, \quad \psi_n^R(\theta) = \sqrt{1/(2\pi R)} \exp in\theta, \\ \mu_n^R(\omega) = -\omega \frac{(H_{|n|}^{(1)})'(\omega R)}{H_{|n|}^{(1)}(\omega R)}, \quad \text{Re}(\mu_n^R(\omega)) \geq 0 \text{ and } \text{Im}(\mu_n^R(\omega)) \leq 0. \end{cases} \quad (14.6)$$

In this paper, we are interested in the behaviour of the solution  $u^\varepsilon$  when the width  $\varepsilon$  tends to 0. The intuition suggests that  $u^\varepsilon$  should converge to the solution  $u^0$  of the “slotless” problem :

$$\begin{cases} \text{Find } u^0 \in H^1(\Omega) \text{ outgoing such that :} \\ -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (14.7)$$

This is what we proved in [55] in the case of the semi-infinite slot (i. e.  $L = +\infty$ ), where we proved moreover that

$$u^\varepsilon - u^0 = O(\varepsilon), \quad \text{in } L_{loc}^2. \quad (14.8)$$

In the case of the finite slot, we shall see that such an estimate is correct except for a set of exceptional frequencies  $\omega$ , called resonant frequencies, corresponding to :

$$\omega L = \ell\pi, \quad \ell \in \mathbb{N}^*, \quad (14.9)$$

for which the convergence is much slower. More precisely :

$$u^\varepsilon - u^0 = O\left(\frac{1}{|\text{Log}\varepsilon|}\right), \quad \text{in } L_{loc}^2. \quad (14.10)$$

Inside the slot, the solution remains bounded for non resonant frequencies but blows up for resonant frequencies.

The outline of the rest of the paper is as follows. In section 2, we investigate the case of non resonant frequencies and prove, in this case the convergence of  $u^\varepsilon$  to  $u^0$ . In section 3, we investigate the case of resonant frequencies through numerical results. Our results suggest that the solution  $u^\varepsilon$  slowly converges outside the slot to the limit  $u^0$  -see equation (14.10)- and blows up inside the slot. Finally, in section 4, we give a formal analysis of these observations, using the technique of matched asymptotic expansions.

## 14.2 The case of non resonant frequencies : mathematical analysis

The aim of this section is to prove the following theorem, which formulates in a precise way one of the assertions in the introduction. Note that estimates (14.11) can be shown to be generically optimal as in [55] and that we conjecture that the constant  $C$  blows up as  $1/d(\omega)$  where  $d(\omega)$  denotes the distance to the set of resonant frequencies.

**Théorem 14.1** *For all  $\omega, L, R$  in  $\mathbb{R}^{*,+}$  and  $F \subset \Omega$  a closed subset of  $\mathbb{R}^2$  and not in the case of (14.9), there exists  $C \in \mathbb{R}$  and  $\varepsilon_0 > 0$  such that for all  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  and  $f \in L^2(\Omega)$  with support included in  $F$ , we have :*

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(\omega, L, R, F) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C(\omega, L, R, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (14.11)$$

and

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(O_\varepsilon)} \leq C(\omega, L, F) \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (14.12)$$

### 14.2.1 Reformulation of the problem (14.4) in the domain $\Omega_R$ .

**Preliminary material.** We first recall precise trace theorems on :

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon^- \cup \Sigma_\varepsilon^+, \quad \Sigma_\varepsilon^- = \{0\} \times ]0; \varepsilon[, \quad \Sigma_\varepsilon^+ = \{0\} \times ]\varepsilon; \infty[. \quad (14.13)$$

In what follows, we shall often identify  $\Sigma_\varepsilon^-$  and  $\Sigma_\varepsilon^+$  to the segment  $]0; \varepsilon[$ .

We introduce  $((w_n^\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ , the orthogonal basis of  $H^s(]0; \varepsilon[)$  for  $s \in [0; \frac{3}{2}[$  :

$$w_0^\varepsilon(y) = \sqrt{1/\varepsilon} \quad \text{and} \quad w_n^\varepsilon(y) = \sqrt{2/\varepsilon} \cos \frac{n\pi y}{\varepsilon}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (14.14)$$

For all  $\mathbf{u}$  in  $L^2(\Sigma_\varepsilon)$  we denote by  $\mathbf{u}_n^\varepsilon \in \mathbb{C}^2$  the vector of the coefficients of the respective restrictions of  $\mathbf{u}$  to  $\Sigma_\varepsilon^-$  and  $\Sigma_\varepsilon^+$  :

$$\mathbf{u}_n^\varepsilon = \left( \int_{\Sigma_\varepsilon^-} \mathbf{u} w_n^\varepsilon d\sigma, \int_{\Sigma_\varepsilon^+} \mathbf{u} w_n^\varepsilon d\sigma \right)^t \quad (14.15)$$

that allows us to characterize the spaces  $H^s(\Sigma_\varepsilon)$  for  $0 \leq s < \frac{3}{2}$  :

$$\mathbf{u} \in H^s(\Sigma_\varepsilon) \iff \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2\right)^s |\mathbf{u}_n^\varepsilon|^2 < +\infty \quad (14.16)$$

The dual space  $(H^s(\Sigma_\varepsilon))^*$  can be defined analogously if one replaces the integrals by duality brackets in (14.15). We shall also use the following semi-norm in  $H^s(\Sigma_\varepsilon)$  :

$$\|\mathbf{u}\|_{H_*^s(\Sigma_\varepsilon)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \pi^2 n^2 / \varepsilon^2\right)^s |\mathbf{u}_n^\varepsilon|^2. \quad (14.17)$$

Form now on, we shall often denote by  $\mathbf{u}$  the trace on  $\Sigma_\varepsilon$  of a function  $u \in H_{loc}^1(\Omega)$  and by  $\mathbf{u}_n^\varepsilon$  the vectors of its generalized Fourier coefficients. One can easily adapt the proof of [55] to obtain the following results.

**Lemme 14.1** *For any neighborhood  $V$  of  $A^-$  and  $A^+$ , for  $s \in \mathbb{R}^+$ , there exists  $C(s) \in \mathbb{R}$  and  $\varepsilon_0 > 0$  such that for all  $u \in H^{1+s}(\Omega \cap V)$  and  $\varepsilon \in ]0; \varepsilon_0]$  :*

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{1+s}(\Omega \cap V)}, & \text{if } 0 \leq s < 1, \\ \|\mathbf{u}\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|u\|_{H^{1+s}(\Omega \cap V)}, & \text{if } s = 1, \\ \|\mathbf{u}\|_{H_*^{1/2}(\Sigma_\varepsilon)} \leq C(s) \varepsilon \|u\|_{H^{1+s}(\Omega \cap V)}, & \text{if } s > 1. \end{cases} \quad (14.18)$$

Moreover, for all  $u \in H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega \cap V)$  and  $\varepsilon \in ]0; \varepsilon_0]$  :

$$\begin{cases} |\mathbf{u}_0^\varepsilon| \leq C(s) \varepsilon^s \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega \cap V)}, & \text{if } 0 < s < \frac{1}{2}, \\ |\mathbf{u}_0^\varepsilon| \leq C(s) \sqrt{\varepsilon |\text{Log } \varepsilon|} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega \cap V)}, & \text{if } s = \frac{1}{2}, \\ |\mathbf{u}_0^\varepsilon| \leq C(s) \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+s}(\Omega \cap V)}, & \text{if } s > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (14.19)$$

**Reduction to  $\Omega_R$ .** Our objective in this section is now to characterize the restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega_R$  (a domain independent of  $\varepsilon$ ) thanks to DtN maps on  $\Sigma_\varepsilon^-$  and  $\Sigma_\varepsilon^+$ . To be able to define these operators, we need to solve the interior problem inside  $O_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \omega^2 u^\varepsilon = 0, & \text{in } O_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y} = 0, & \text{if } y = 0 \text{ or } \varepsilon, \end{cases} \quad (14.20)$$

completed by given Dirichlet data on  $\Sigma_\varepsilon^-$  and  $\Sigma_\varepsilon^+$ . Such a problem is well posed if and only if  $\omega^2$  is not in the spectrum of the operator  $-\Delta$  with domain :

$$D(-\Delta) = \left\{ u \in H^1(O_\varepsilon) / \Delta u \in L^2(O_\varepsilon), u = 0 \text{ on } \Sigma_\varepsilon, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ if } y = 0 \text{ or } \varepsilon \right\},$$

that is to say :  $\omega^2 \neq \left\{ n^2 \pi^2 / \varepsilon^2 + p^2 \pi^2 / L^2 / n \in \mathbb{N} \text{ and } p \in \mathbb{N}^* \right\}$ . (14.21)

If we assume that the slot is not resonant, i.e. that  $\omega L$  is not a multiple of  $\pi$  - see equation (14.9) -, it is clear that the condition (14.21) is satisfied for  $\varepsilon$  small enough. Then one can define the Dirichlet to Neumann-map (the normal  $n$  is exterior with respect to  $\Omega$ )

$$T^\varepsilon(\omega, L) : u|_{\Sigma_\varepsilon} \mapsto -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\varepsilon}.$$

This operator is continuous from  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)$  to  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)$  and can be computed explicitly :

$$T^\varepsilon(\omega, L) : \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{g} \iff \mathbf{g}_n^\varepsilon = M_n^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{u}_n^\varepsilon, \quad (14.22)$$

where the matrices  $M_n^\varepsilon(\omega, L)$  are defined by (note that  $\sin \omega L \neq 0$ ) :

$$M_0^\varepsilon(\omega, L) = \frac{\omega}{\sin \omega L} \begin{bmatrix} \cos \omega L & -1 \\ -1 & \cos \omega L \end{bmatrix}, \quad (14.23)$$

and, for all strictly positive  $n$ , setting  $\xi_n^\varepsilon(\omega) = \sqrt{\pi^2 n^2 / \varepsilon^2 - \omega^2} > 0$  :

$$M_n^\varepsilon(\omega, L) = \frac{\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\sinh \xi_n^\varepsilon(\omega) L} \begin{bmatrix} \cosh \xi_n^\varepsilon(\omega) L & -1 \\ -1 & \cosh \xi_n^\varepsilon(\omega) L \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (14.24)$$

It is easy to see that this matrices have the following properties ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  and  $|\mathbf{u}|$  denote respectively the usual inner product and associated norm in  $\mathbb{C}^2$ ) :

$$\begin{cases} (M_0^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}, (M_0^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \leq \frac{2\omega}{\sin \omega L} |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|, \\ (M_n^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}^+, (M_n^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \leq \frac{2 \xi_n^\varepsilon(\omega)}{\tanh \xi_n^\varepsilon(\omega) L} |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|. \end{cases} \quad (14.25)$$

By construction, the restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega$  is characterized by the transparent condition on  $\Sigma_\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Sigma_\varepsilon} + T^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{u}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = 0. \quad (14.26)$$

The restriction of  $u^\varepsilon$  to  $\Omega_R$  can equivalently be characterized as the unique solution of the problem ( $\varphi_f \in H^1(\Omega_R)$ ) is defined by  $(\varphi_f, v)_{H^1(\Omega_R)} = (f, v)_L^2(\Omega_R)$  for any  $v \in H^1(\Omega_R)$

$$\text{Find } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_R) \text{ such that : } A_R u^\varepsilon + B_0^\varepsilon u^\varepsilon + R^\varepsilon u^\varepsilon = \varphi_f, \quad (14.27)$$

where the operators  $A_R$ ,  $B_0^\varepsilon$  and  $R^\varepsilon$ ,  $H^1(\Omega_R) \rightarrow H^1(\Omega_R)$ , are defined, using the Riesz theorem, by :

$$\begin{cases} (A_R u; v)_{H^1(\Omega_R)} = \int_{\Omega_R} (\nabla u \overline{\nabla v} - \omega^2 u \overline{v}) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n^R(\omega) u_n^R \overline{v_n^R}, \\ (B_0^\varepsilon u; v)_{H^1(\Omega_R)} = M_0^\varepsilon \mathbf{u}_0^\varepsilon \mathbf{v}_0^\varepsilon, \quad (R^\varepsilon u; v)_{H^1(\Omega_R)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_n^\varepsilon \mathbf{u}_n^\varepsilon \mathbf{v}_n^\varepsilon. \end{cases} \quad (14.28)$$

$$\text{In the same way, } u^0 \in H^1(\Omega_R) \text{ is the unique solution of : } A_R u^0 = \varphi_f. \quad (14.29)$$

### 14.2.2 Convergence of $u^\varepsilon$ to $u^0$ .

We only prove the  $H^1$ -error estimate of (14.11). The  $L^2$ -error estimate is shown by a duality argument as in [55]. From (14.27) and (14.29), we deduce :

$$(A_R + B_0^\varepsilon + R^\varepsilon)(u^\varepsilon - u^0) = - (B_0^\varepsilon + R^\varepsilon) u^0. \quad (14.30)$$

The conclusion follows from the two following lemmas and from (the operator norms below are norms in  $L(H^1(\Omega_R))$ ) :

$$\|u^\varepsilon - u^0\| \leq \|(A_R + B_0^\varepsilon + R^\varepsilon)^{-1}\| \left( \|B_0^\varepsilon u^0\| + \|R^\varepsilon u^0\| \right). \quad (14.31)$$

**Lemme 14.2** *If the condition (14.9) is not satisfied, there exists  $\varepsilon_0(\omega, R, L)$  strictly positive and  $C(\omega, R, L)$  real such that for all  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  :*

$$\|(A_R + B_0^\varepsilon + R^\varepsilon)^{-1}\|_{L(H^1(\Omega_R))} \leq C(\omega, R, L). \quad (14.32)$$

**Lemme 14.3** *If the condition (14.9) is not satisfied, there exists  $\varepsilon_0(\omega, R, L, F)$  strictly positive and  $C(\omega, R, L, F)$  real such that for all  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  :*

$$\begin{cases} \|B_0^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(\omega, R, L, F) \varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(\omega, R, L, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (14.33)$$

**Proof.** Proof of lemma 14.2. We make a proof by contradiction. If (14.32) were false, there would exist a sequence  $v^\varepsilon \in H^1(\Omega_R)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , such that :

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)} = 1 \text{ and } \varphi^\varepsilon = (A_R + B_0^\varepsilon + R^\varepsilon)v^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{in } H^1(\Omega_R). \quad (14.34)$$

By compactness, let us extract from  $v^\varepsilon$  a subsequence (still denoted  $v^\varepsilon$ ) with  $\varepsilon \rightarrow 0$  such that :

$$v^\varepsilon \rightarrow v^0 \quad \text{weakly in } H^1(\Omega_R) \text{ and strongly in } L^2(\Omega_R). \quad (14.35)$$

Let us introduce the subspace  $H_{00}^1(\Omega_R)$  of  $H^1(\Omega_R)$  made of functions vanishing in a neighborhood  $V$  of  $A^-$  and  $A^+$  ( $v = 0$  in  $V \cap \Omega$ ). For any  $v \in H_{00}^1(\Omega_R)$ , as soon as  $\varepsilon$  is small enough,  $B_0^\varepsilon v = 0$  and  $R^\varepsilon v = 0$ . Thus

$$(\varphi^\varepsilon; v)_{H^1(\Omega_R)} = (A_R v^\varepsilon; v). \quad (14.36)$$

Taking the limit as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we get  $(A_R v^0; v)_{H^1(\Omega_R)} = 0$ ,  $\forall v \in H_{00}^1(\Omega_R)$  which implies, by density of  $H_{00}^1(\Omega_R)$  in  $H^1(\Omega_R)$  that  $A_R v^0 = 0$  that is to say, since  $A_R$  is an isomorphism (this

is nothing but the well-posedness of the slotless problem),  $v^0 = 0$ .

We choose now  $v = v^\varepsilon$  in (14.36), and consider the real part of the resulting equality. We obtain, by definition of  $A_R$ ,  $B_0^\varepsilon$  and  $R^\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} (\varphi^\varepsilon; v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} = \int_{\Omega_R} |\nabla v^\varepsilon|^2 - \omega^2 \int_{\Omega_R} |v^\varepsilon|^2 + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu_n^R(\omega)) |u_n^R|^2 \\ + M_0^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{v}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{v}_0^\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n^\varepsilon(\omega, L) \mathbf{v}_n^\varepsilon \cdot \mathbf{v}_n^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Due to properties (14.6) and (14.25), we thus have :

$$\int_{\Omega_R} |\nabla v^\varepsilon|^2 \leq \left| (\varphi^\varepsilon; v^\varepsilon)_{H^1(\Omega_R)} \right| + \omega^2 \int_{\Omega_R} |v^\varepsilon|^2 + \frac{2\omega}{\sin \omega L} |\mathbf{v}_0^\varepsilon|^2. \quad (14.37)$$

Besides, from lemma 14.1 (with  $s = \frac{1}{2}$ ), we get :

$$|\mathbf{v}_0^\varepsilon|^2 \leq C(R) \varepsilon |\operatorname{Log} \varepsilon| \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_R)}^2 = C(R) \varepsilon |\operatorname{Log} \varepsilon|. \quad (14.38)$$

Hence, from (14.35), (14.37), and (14.38), we deduce that  $\nabla v^\varepsilon$  converges to 0 in  $L^2(\Omega_R)$ . Therefore  $v^\varepsilon$  converges strongly to 0 in  $H^1(\Omega_R)$ , which contradicts (14.34) and concludes the proof. **■ Proof.** Proof of lemma 14.3. As  $u^0$  is a solution of a Helmholtz problem of domain  $\Omega$  with a term source with compact support  $F \subset \Omega$ , by elliptic regularity there exists a neighborhood  $V(F)$  of  $A^-$  and  $A^+$  such that  $u^0 \in H^m(V(F) \cap \Omega)$ , for all  $m > 0$  and :

$$\|u^0\|_{H^m(V(F) \cap \Omega)} \leq C(m, F) \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall m > 0. \quad (14.39)$$

(i) By definition of  $R^\varepsilon$  and property (14.25), we have for all  $v \in H^1(\Omega_R)$  :

$$(R^\varepsilon u^0; v)_{H^1(\Omega_R)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \xi_n^\varepsilon(\omega)}{\tanh \xi_n^\varepsilon(\omega)L} |(\mathbf{u}^0)_n^\varepsilon| |\mathbf{v}_n^\varepsilon|. \quad (14.40)$$

For  $\varepsilon < \pi/2\omega$ , we have the inequalities for all  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{2\xi_n^\varepsilon(\omega)}{\tanh(\xi_n^\varepsilon(\omega)L)} \leq \frac{2}{\tanh(\omega L/2)} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 n^2}{\varepsilon^2}} \quad (14.41)$$

The Cauchy-Schwartz inequality leads to :

$$(R^\varepsilon u^0; v)_{H^1(\Omega_R)} \leq \frac{2}{\tanh(\omega L/2)} \|\mathbf{u}^0\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)} \|\mathbf{v}\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\varepsilon)}. \quad (14.42)$$

Using (14.18) with  $s = 2$  for  $\mathbf{u}^0$ ,  $s = 0$  for  $\mathbf{v}$ , and using (14.39) with  $m = 3$ , we get :

$$(R^\varepsilon u^0; v)_{H^1(\Omega_R)} \leq C(\omega, R, L, F) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega_R)}. \quad (14.43)$$

The result follows from  $\|R^\varepsilon u^0\|_{H^1(\Omega_R)} = \sup_{v \in H^1(\Omega_R)} \frac{(R^\varepsilon u^0; v)_{H^1(\Omega_R)}}{\|v\|_{H^1(\Omega_R)}}$ .

(ii) By definition of  $B_0^\varepsilon$ , and due to (14.25) we have :

$$(B_0^\varepsilon u^0; v)_{H^1(\Omega_R)} \leq \frac{2\omega}{\sin(\omega L)} |(\mathbf{u}^0)_0^\varepsilon| |\mathbf{v}_0^\varepsilon|. \quad (14.44)$$

Using (14.19) with  $s = 1$  for  $\mathbf{u}^0$ ,  $s = \frac{1}{2}$  for  $\mathbf{v}$ , and using (14.39) with  $m = \frac{3}{2}$ , we get :

$$(B_0^\varepsilon u^0; v)_{H^1(\Omega_R)} \leq C(\omega, R, L, F) \varepsilon \sqrt{|\operatorname{Log} \varepsilon|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega_R)}. \quad (14.45)$$

One concludes as for point (i). **■**

### 14.3 The case of resonant frequencies : some numerical computations

**Presentation of the experiment.** The experiment we simulate is explained in Figure 14.3. We choose  $\omega = 2\pi$ , which corresponds to a unit wave length. We shall make our computations with two values of the length of the slot :  $L=0.8$  (the non resonant case) and  $L=1$  (the resonant case). The height  $2H$  of the rectangle  $B$  is  $2H = 8.0$ . The distance from the point source to  $B$  is  $D = 0.5$  in the non resonant case and  $D = 0.4$  in the resonant case. The numerical results are obtained by a  $Q_2$  finite element code working with quadrilateral elements [20]. The computational domain (the grey region in figure 14.3) is delimited by a rectangle of respective dimensions 5 in the  $x$  direction and 10 in the  $y$  direction. The computational mesh is refined at the neighborhood of the slot as represented in figure 14.4 (each of the triangle appearing in the picture is divided into three quadrilaterals). In this way, one has about 160 points per wavelength close to the slot and 16 points per wavelength far away. A PML of width 1, surrounding  $\Omega_c$ , is used to simulate an infinite domain.

FIG. 14.3 – Presentation of the experiment

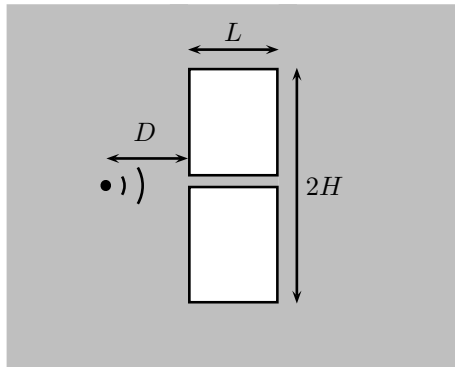


FIG. 14.4 – A computational mesh

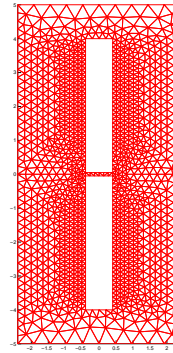


FIG. 14.5 – The total field, non resonant

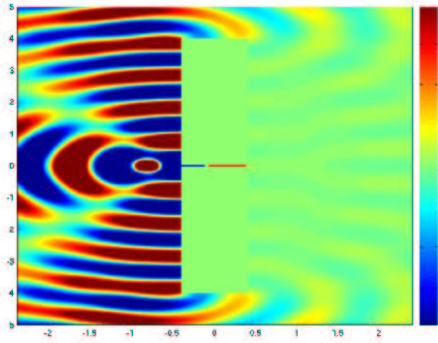


FIG. 14.6 – The total field, resonant

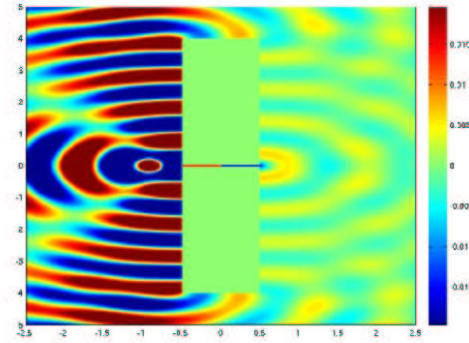
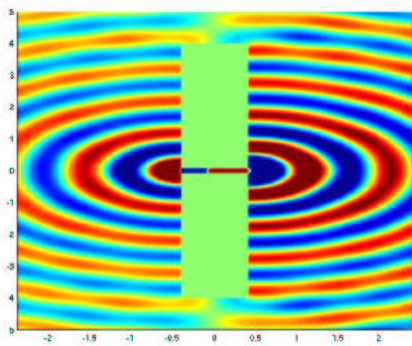
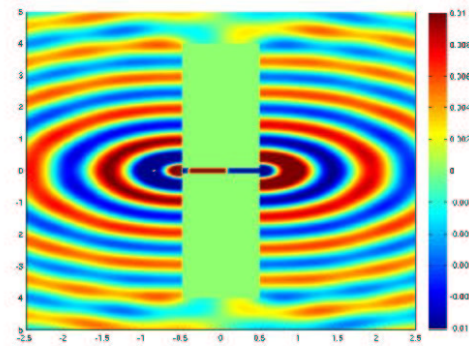


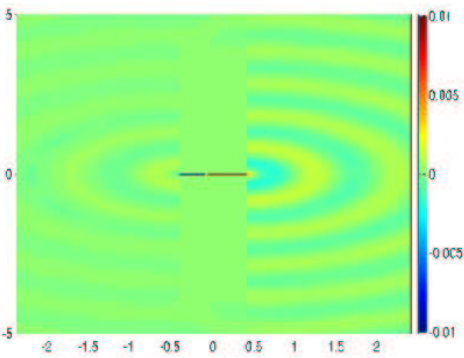
FIG. 14.7 – The diffracted Fields



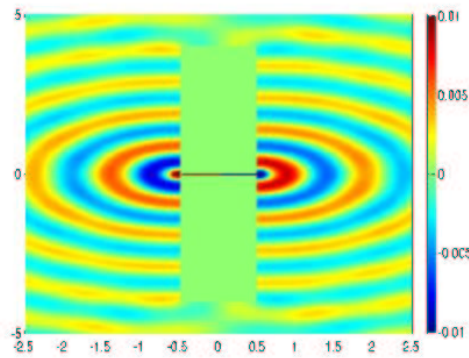
Non resonant,  $\varepsilon = 10^{-1}$



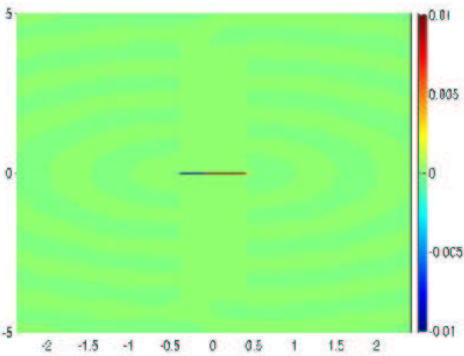
Resonant,  $\varepsilon = 10^{-1}$



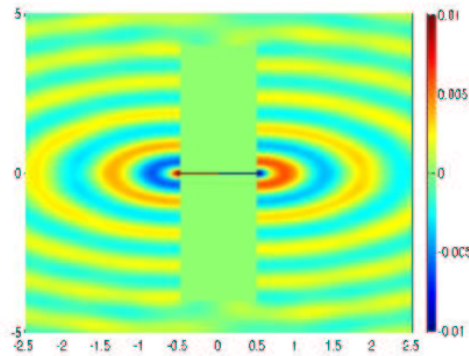
Non resonant,  $\varepsilon = 10^{-2}$



Resonant,  $\varepsilon = 10^{-2}$



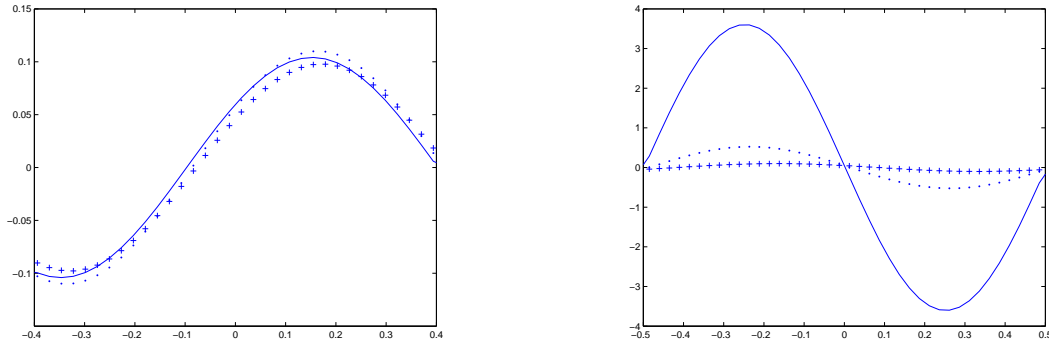
Non resonant,  $\varepsilon = 10^{-3}$



Resonant,  $\varepsilon = 10^{-3}$



FIG. 14.8 – The solution inside the slot for  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ , left : non resonant case, right : resonant case.



**Comments of the results.** On figures 14.5 and 14.6, we represent the (real part of) solution  $u^\varepsilon$  (called total field) in the two cases, for  $\varepsilon = 10^{-3}$ . In this picture, it already appears that much more energy has been transmitted through the slot in the resonant case.

This appears much more clearly when we look at what we shall call the diffracted fields, i. e. the difference  $u^\varepsilon - u^0$  between the solution and the solution in the absence of the slot (be careful, we do not use the same scale in the  $x$  and  $y$  directions, reason why the circular wave fronts look like ellipses). In figure 14.7, we represent these fields for the three values of  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ . The diffracted field decays much more strongly with  $\varepsilon$  in the non resonant case than in the resonant case, for which it is even not so clear that the diffracted field converges to 0!

In figure 14.8, we are interested in the solution inside the slot. We represent the variation of the solution along the symmetry line of the slot. Note that the two scales for the two pictures are completely different. Our results show that, while the slot field stabilizes when  $\varepsilon$  goes to 0, it blows up in the resonant case.

We now make vary  $\varepsilon$  continuously and represent the variations of various norms of the diffracted field and slot fields as a function of  $\varepsilon$ .

We first look at the results associated to the non resonant case. In figure 14.9, we represent the  $L^2$  norm in  $\Omega_c$  of the diffracted field. The obtained curve confirms the theory : the  $L^2$  norm of the diffracted field tends to 0 as  $O(\varepsilon)$ . In figure 14.11, we represent the variations of the norm of the solution  $u^\varepsilon$  in  $L^2(O_\varepsilon)$ . The shape of the curve suggests that this norm decays to 0 sublinearly. In figure 14.10, we represent the variation of the  $H^1$ -norm of the diffracted field as a function of  $\varepsilon \sqrt{|\text{Log } \varepsilon|}$ , the linear behaviour closed to  $\varepsilon \rightarrow 0$  seems to confirm the theory, see theorem 14.1. When we represent in figure 14.12 the Log of this quantity as a function of  $\text{Log } \varepsilon$ , we obtain a straight line of slope  $\sim 0.5$  which confirms a behaviour in  $O(\sqrt{\varepsilon})$ .

In the resonant case, the figure 14.13 shows that the  $L^2$  norm of the diffracted field converges to 0 sublinearly. The result of figure 14.15 (we represent the inverse of the  $L^2$  norm of the diffracted field as a function of  $\text{Log } \varepsilon$ ) suggests in fact that it behaves as  $1/(A \text{Log } \varepsilon + B + o(1))$ . In figures 14.14 and 14.17, we are interested into the  $H^1$  norm of the diffracted fields. Our results suggest that this norm decays as  $1/\sqrt{(A \text{Log } \varepsilon + B + o(1))}$ . Finally, figure 14.15 shows that the  $L^2$  norm of the slot field blows up when  $\varepsilon$  goes to 0 and figure 14.18 suggests more precisely that it behaves as  $1/(\sqrt{\varepsilon} |\text{Log } \varepsilon|)$ .

Finally, in figure 14.19, we fix  $\varepsilon = 10^{-3}$  and make  $\omega$  vary such that the frequency  $f = \omega/2\pi$  goes from 0 to 2.5. One observes that the two curves depicting respectively the  $L^2$  norm of the

FIG. 14.9 –  $\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_c)} = f(\varepsilon)$

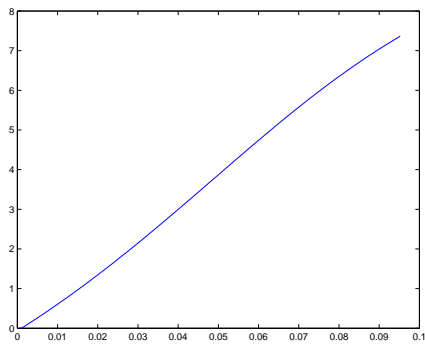


FIG. 14.11 –  $\|u^\varepsilon\|_{L^2(O_\varepsilon)} = f(\varepsilon)$

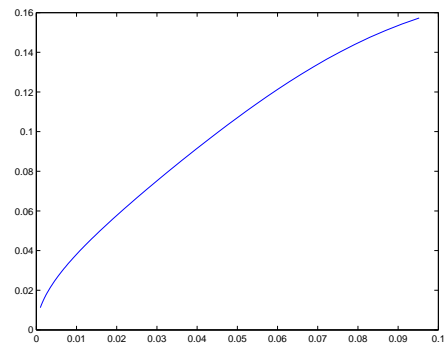


FIG. 14.10 – The  $H^1(\Omega_R)$ -norm of the diffracted field function of  $\varepsilon \sqrt{|\text{Log}_{10}\varepsilon|}$

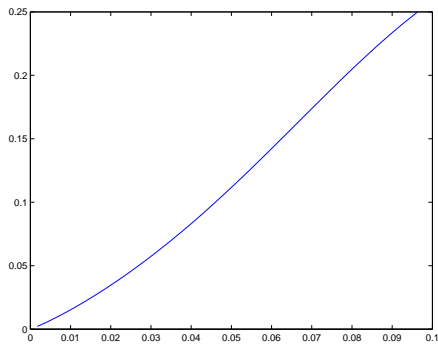


FIG. 14.12 –  $\text{Log}\|u^\varepsilon\|_{L^2(O_\varepsilon)}$  function of  $\text{Log}_{10}\varepsilon$

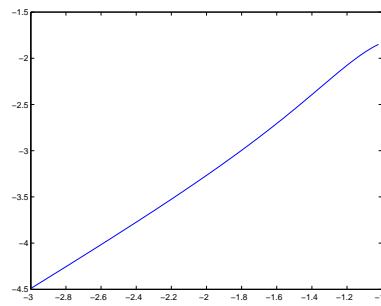


FIG. 14.13 -  $\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_c)} = f(\varepsilon)$

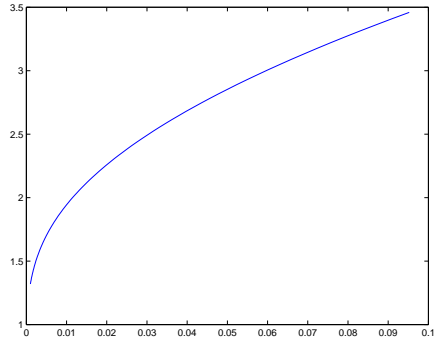


FIG. 14.14 -  $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_c)} = f(\varepsilon)$

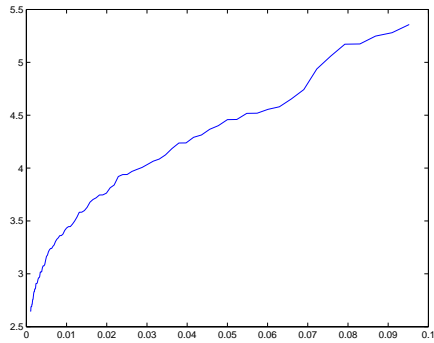


FIG. 14.15 -  $\sqrt{\varepsilon} \operatorname{Log} \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{L^2(O_\varepsilon)} = f(\varepsilon)$

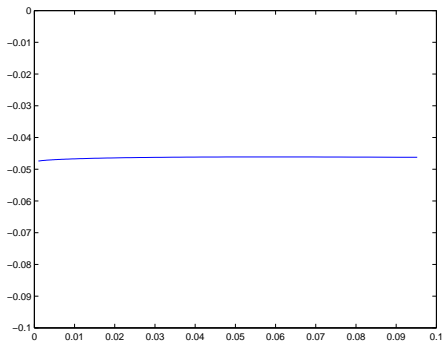


FIG. 14.16 -  $1/\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_c)} = f(\log \varepsilon)$

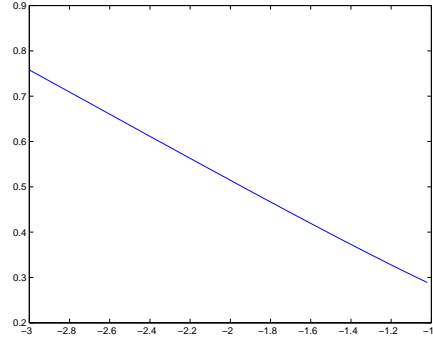


FIG. 14.17 -  $\frac{1}{\|u^\varepsilon\|_{H^1(O_\varepsilon)}^2} = f(\operatorname{Log}_{10} \varepsilon)$

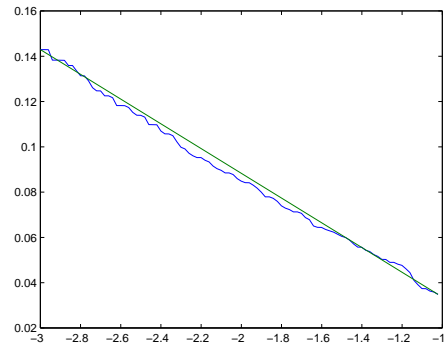


FIG. 14.18 -  $\|u^\varepsilon\|_{L^2(O_\varepsilon)} = f(\varepsilon)$

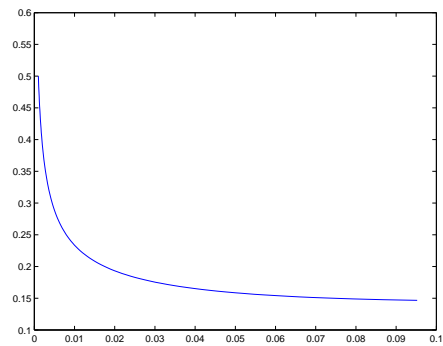
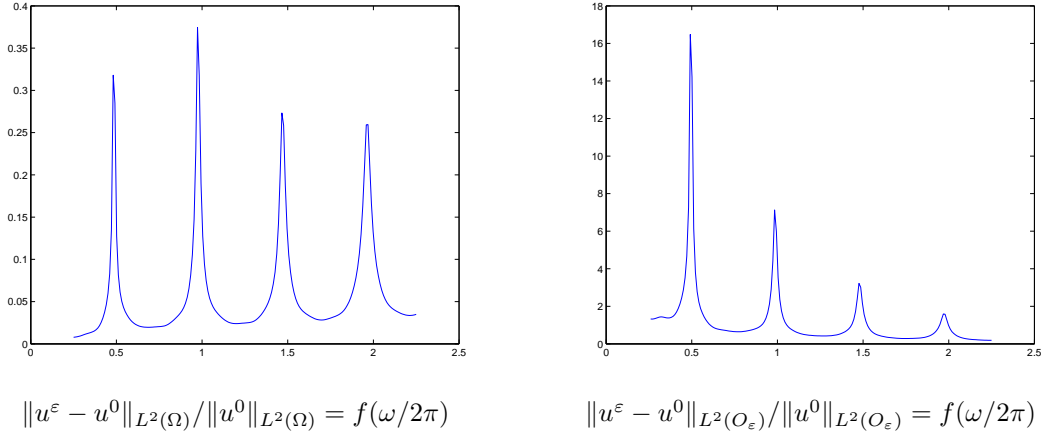


FIG. 14.19 – Dependence of the diffracted field with respect to the frequency



diffracted field (normalized by the one of  $u^0$ ) and the  $L^2$  norm of the slot field present very sharp pics corresponding to the resonant frequencies ( $f$  is an integer multiple of  $\frac{1}{2}$ ). One also observes the the height of these pics decays with  $f$  for sufficiently large  $f$ .

## 14.4 The case of resonant frequencies : a formal asymptotic analysis

We now provide a (formal) analysis of the results observed in the previous section thanks to the help of matched asymptotic expansions. Of course, it is not our purpose to present in detail this (rather complicated) technique and we refer the reader to the references [27], [51] for more information and to [70] for an application to the semi-infinite slot problem. We shall restrict ourselves to present the main ideas of the method. In particular, we shall introduce our Ansatz without particular justification, despite of the fact it can be done (rather tediously) as in [85].

Throughout this section, we assume that :

$$\omega L = \ell\pi, \quad \ell \in \mathbb{N}^*. \quad (14.46)$$

### 14.4.1 The ansatz of matched asymptotic expansions

The principle is to decompose the domain  $\Omega_\varepsilon$  into four (overlapping) subdomains wich are :

- a “far field” zone (or exterior zone)  $\Omega_F(\varepsilon)$  in which we shall describe the behaviour of the solution outside the slot.
- a “slot” zone  $\Omega_S(\varepsilon)$  to describe the behaviour of the solution in the slot.
- two “near field” zones (or junction zones)  $\Omega_N^-(\varepsilon)$  and  $\Omega_N^+(\varepsilon)$  in which we describe the behaviour of the solution at the neighborhood of  $\mathbf{A}^-$  and  $\mathbf{A}^+$ .

The precise definition of these domains uses 4 functions of  $\varepsilon$  :

$$0 < \eta_F^-(\varepsilon) < \eta_F^+(\varepsilon), 0 < \eta_S^-(\varepsilon) < \eta_S^+(\varepsilon) \quad (14.47)$$

that are supposed to belong to the class of continuous functions  $\eta(\varepsilon)$  satisfying :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon)/\varepsilon = +\infty. \quad (14.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_F(\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \Omega / |\mathbf{x} - \mathbf{A}^-| > \eta_F^-(\varepsilon) \text{ and } |\mathbf{x} - \mathbf{A}^+| > \eta_F^-(\varepsilon)\} \\ \Omega_S(\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in O_\varepsilon / x > \eta_S^-(\varepsilon) \text{ and } L - x > \eta_S^-(\varepsilon)\} \\ \Omega_N^\pm(\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \Omega / |\mathbf{x} - \mathbf{A}^\pm| < \eta_F^\pm(\varepsilon)\} \cup \{\mathbf{x} \in O_\varepsilon / |x - a^\pm| < \eta_S^\pm(\varepsilon)\} \end{array} \right. \quad (14.49)$$

Note in particular that, when  $\varepsilon$  tends to 0,  $\Omega_N^-(\varepsilon)$  and  $\Omega_N^+(\varepsilon)$  collapse to one point,  $\Omega_S(\varepsilon)$  to the segment  $[\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+]$  while  $\Omega_F(\varepsilon)$  converges to  $\Omega$ .

The next step consists in working with *normalized* coordinates in each zone and postulating some asymptotic expansion of the solution in these coordinates. For 2D problems, it is well known that powers of  $\varepsilon$  are not sufficient and one must use the set of gauge functions :

$$f_{i,k}(\varepsilon) = \varepsilon^i \text{Log}^k \varepsilon, \quad \text{where } (i, k) \text{ are integers.} \quad (14.50)$$

One of the difficulty is to choose the good set of indices  $(i, k)$  in each zone but we shall be guided by our numerical results. In the paragraph below, we present our ansatz and point out the leading term in each expansion (the one we are interested in in this paper, the other terms being lower order correctors).

**Notation.** From now on, for any function  $v^\varepsilon$  defined as a formal series :

$$v^\varepsilon = \sum_i \sum_k \varepsilon^i \text{Log}^k \varepsilon v_i^k \quad (14.51)$$

we shall set  $v_i^\varepsilon = \sum_k \text{Log}^k \varepsilon v_i^k$ .

This allows us to distinguish the dependence of  $v^\varepsilon$  with respect to  $\varepsilon$  and  $\text{Log} \varepsilon$ , which is justified by the fact that :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon = o(|\text{Log} \varepsilon|^k). \quad (14.52)$$

**Solution in the far field zone.** We keep here the physical coordinates  $(x, y)$  and look for  $u^\varepsilon$  of the form (the leading term corresponds to  $(i, k) = (0, 0)$  which means that  $u^\varepsilon$  converges to a limit in  $\Omega$ ). In the expansion below, the functions  $u_i^k$  and  $u_i^\varepsilon$  are defined in the canonical (i.e. independent of  $\varepsilon$ ) slotless domain  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^i \varepsilon^i \text{Log}^k \varepsilon u_i^k(x, y) + o(\varepsilon^\infty). \\ = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i^\varepsilon(x, y) + o(\varepsilon^\infty) = u_0^\varepsilon + o(1) \end{array} \right. \quad (14.53)$$

Inserting (14.53) into (14.4), it is easy to see that :

$$\Delta u_0^\varepsilon + \omega^2 u_0^\varepsilon = -f, \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \setminus \{A^-, A^+\}. \quad (14.54)$$

The fact that  $u_0^\varepsilon$  satisfies the Neumann condition except at points  $A^-$  and  $A^+$  authorizes  $u_0^\varepsilon$  to be singular at  $A^-$  and  $A^+$ . Therefore, one needs additional informations about the behaviour of  $u_0^\varepsilon$  at the neighborhood of these two points.

**Solution in the slot zone.** We use the coordinates  $(x, y/\varepsilon)$  that maps  $O_\varepsilon$  into  $O_1$ , a slot of unit width, and look for  $u^\varepsilon$  of the form (the leading term corresponds this time to  $(i, k) = (-1, -1)$  which means that  $u^\varepsilon$  blows up in  $O_\varepsilon$  as  $O(1/(\varepsilon \text{Log} \varepsilon))$ . The leading term  $U_{-1}^\varepsilon$  and the next term  $U_0^\varepsilon$  play a role in the calculation) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon(x, y) = U^\varepsilon(x, \frac{y}{\varepsilon}) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^i \varepsilon^i \text{Log}^k \varepsilon U_i^k(x, \frac{y}{\varepsilon}) + o(\varepsilon^\infty) \\ = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i U_i^\varepsilon(x, \frac{y}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon} U_{-1}^\varepsilon(x, y/\varepsilon) + U_0^\varepsilon(x, y/\varepsilon) + o(1). \end{array} \right. \quad (14.55)$$

Substituting (14.55) into (14.4), one sees that  $U_i^\varepsilon$  depends only from  $x$  and that :

$$\frac{d^2 U_i^\varepsilon}{dx^2} + \omega^2 U_i^\varepsilon = 0, \quad \text{in } O_1. \quad (14.56)$$

Note that, to determine  $U_i^\varepsilon$ , one needs additional informations at  $x = 0$  or  $L$ .

**Solution in the near field zones.** We present only the case of the zone  $\Omega_N^-(\varepsilon)$ , the case of the zone  $\Omega_N^+(\varepsilon)$  is obviously similar. We use the coordinates  $(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$ , a scaling that maps the region  $\Omega_N^-(\varepsilon)$  in to a domain that converges to an infinite ‘‘T-shape’’ domain  $\widehat{\Omega}_N^-$  defined as :

$$\widehat{\Omega}_N^- = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / X \leq 0\} \cup \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / X \geq 0 \text{ et } 0 \leq Y \leq 1\}. \quad (14.57)$$

We look for  $u^\varepsilon$  of the form (we point out in the second line the terms that will play a role in the computation of the leading term) :

$$\left\{ \begin{aligned} u^\varepsilon(x, y) &= \mathbf{U}^{-,\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^i \varepsilon^i \text{Log}^k \varepsilon \mathbf{U}_i^{-,k}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon^\infty) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \mathbf{U}_i^{-,\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon^\infty) = \mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + o(1). \end{aligned} \right. \quad (14.58)$$

where the  $\mathbf{U}_i^{-,k}$  and  $\mathbf{U}_i^{-,\varepsilon}$  are defined in  $\widehat{\Omega}_N^-$ . Note that this time, it is not clear from the numerical computations to determine the good leading term of the expansion. Substituting (14.58) into (14.4), one easily obtains :

$$\Delta \mathbf{U}_0^{-,\varepsilon} = 0, \quad \text{in } \widehat{\Omega}_N^-, \quad \frac{\partial \mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial \widehat{\Omega}_N^-. \quad (14.59)$$

To determine  $\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}$ , one needs to prescribe its behaviour at infinity in  $\widehat{\Omega}_N^-$ .

In the same way, to describe the near field in the second junction region using the scaled coordinates  $(X = (x - L)/\varepsilon, Y = y/\varepsilon)$ , we introduce an harmonic function  $\mathbf{U}_0^{+,\varepsilon}$  that is defined in the domain :

$$\widehat{\Omega}_N^+ = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / X \geq 0\} \cup \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / X \leq 0 \text{ et } 0 \leq Y \leq 1\}. \quad (14.60)$$

and satisfies the homogeneous Neumann condition on  $\partial \widehat{\Omega}_N^+$ .

**Summary of the first step of the method.** Our objective will be to determine the four functions  $u_0^\varepsilon$ ,  $U_{-1}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}$  and  $\mathbf{U}_0^{+,\varepsilon}$ . We know the PDE’s satisfied by these functions in their respective domains of definition, as well as the boundary conditions they satisfy. We still need :

- to know the asymptotic behaviour of  $u_0^\varepsilon$  at the neighborhood of  $A^-$  and  $A^+$ ,
- to know the boundary conditions for  $U_{-1}^\varepsilon$  at  $x = 0$  and  $x = L$ ,
- to know the asymptotic behaviour at infinity of  $\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}$  and  $\mathbf{U}_0^{+,\varepsilon}$ .

This missing information will be provided by the application of the matching principle which will express, in some approximate way, that the various expansions (14.53), (14.55), (14.58) represent the same function in the overlapping zones.

**Remark.** *Although we do not need to determine  $U_0^\varepsilon$ , this function will naturally appear in the application of the matching principle.*

**Matching between the near field and the slot field** On the domain  $\Omega_S(\varepsilon) \cap \Omega_N^-(\varepsilon)$ ,  $U^\varepsilon(x, y/\varepsilon)$  and  $\mathcal{U}^\varepsilon(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$  must coincide. In particular, we need to match the truncated expansions ( in  $o(1)$  ) in (14.55) and (14.58). Noticing that, in the overlapping zone,  $x \rightarrow 0$  and  $x/\varepsilon \rightarrow +\infty$ , this can be reduced to :

$$\lim_{x \rightarrow 0, \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\varepsilon} U_{-1}^\varepsilon\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) + U_0^\varepsilon\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right) - \mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \right] = 0. \quad (14.61)$$

In the domain  $[0; +\infty[_X \times [0; 1]_Y$ , since the near field  $\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}$  satisfies the Laplace equation with Neumann boundary condition on the two horizontal boundaries, by separation of variable, if we exclude exponentially growing solutions inside the slot (which can be proved), we know that  $\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}$  is of the form  $(\mu_-^\varepsilon, \nu_-^\varepsilon$  and  $(\nu_-^\varepsilon)^p$  are complex funtions of  $\text{Log } \varepsilon$  :

$$\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}(X, Y) = \mu_-^\varepsilon X + \nu_-^\varepsilon + \sum_{p=1}^{+\infty} (\nu_-^\varepsilon)^p \exp -p\pi X \cos p\pi Y, \quad X > 0. \quad (14.62)$$

Since the slot field satisfies the 1D Helmholtz equation, there exists complex functions  $(A_i^\varepsilon, B_i^\varepsilon, i = -1, 0)$  of  $\text{Log } \varepsilon$  such that :

$$U_i^\varepsilon(x) = A_i^\varepsilon \cos \omega x + B_i^\varepsilon \sin \omega x, \quad i = -1, 0. \quad (14.63)$$

Hence, when  $x \rightarrow 0$  and  $x/\varepsilon \rightarrow +\infty$ , one has :

$$\frac{1}{\varepsilon} U_{-1}^\varepsilon(x, \frac{y}{\varepsilon}) + U_0^\varepsilon(x, \frac{y}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon} A_{-1}^\varepsilon + \omega B_{-1}^\varepsilon \frac{x}{\varepsilon} + A_0^\varepsilon + o(1), \quad (14.64)$$

$$\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}) = \mu_-^\varepsilon \frac{x}{\varepsilon} + \nu_-^\varepsilon + o(1). \quad (14.65)$$

$$\text{Therefore, (14.61) leads to : } A_{-1}^\varepsilon = 0, \quad \omega B_{-1}^\varepsilon = \mu_-^\varepsilon, \quad A_0^\varepsilon = \nu_-^\varepsilon. \quad (14.66)$$

By symmetry, we have also :

$$\mathbf{U}_0^{+,\varepsilon}(X, Y) = \mu_+^\varepsilon X + \nu_+^\varepsilon + o(1), \quad \text{when } X \rightarrow -\infty. \quad (14.67)$$

$$\text{with the relations : } A_{-1}^\varepsilon = 0, \quad (-1)^\ell \omega B_{-1}^\varepsilon = \mu_+^\varepsilon, \quad (-1)^\ell A_0^\varepsilon = \nu_+^\varepsilon. \quad (14.68)$$

**Matching between the far field and the near field** On the domain  $\Omega_F(\varepsilon) \cap \Omega_N^-(\varepsilon)$ ,  $u^\varepsilon(x, y)$  and  $\mathcal{U}^{-,\varepsilon}(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$  must coincide. In particular, we need to match the truncated expansions ( in  $o(1)$  ) of (14.53) and (14.58). Let us use the polarcoordinates  $(r^-, \theta^-)$  associated to the point  $\mathbf{A}^-$  (and such that  $\theta^- = 0$  or  $\pi$  coincides with the line  $x = 0$ ). Noticing that, in the overlapping zone,  $r^- \rightarrow 0$  and  $r^-/\varepsilon \rightarrow +\infty$ , this can be reduced to :

$$\lim_{r^- \rightarrow 0, \frac{r^-}{\varepsilon} \rightarrow +\infty} \left[ u_0^\varepsilon(r^-, \theta^-) - \mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}(\frac{r^-}{\varepsilon}, \theta^-) \right] = 0. \quad (14.69)$$

As  $f$  has a compact support include in  $\Omega$ , there exists  $0 < R < \inf(H, L)$ , such that, for  $r^- < R$ , by separation of variables,  $u_0^\varepsilon$  can be written as a linear combination of :

$$\begin{cases} J_p(\omega r^-) \cos(p\theta^-), & p \in \mathbb{N} \quad (\text{smooth functions of } r^-) \\ Y_p(\omega r^-) \cos(p\theta^-), & p \in \mathbb{N} \quad (\text{which are singular close to } r^- = 0) \end{cases} \quad (14.70)$$

It can be shown (but the proof is omitted here) that the only function  $Y_p(\omega r^-)$  that may appear in the expansion corresponds to  $p = 0$ . Therefore, we have an expression of the form (for  $r^- < R$ ) :

$$u_0^\varepsilon(r^-, \theta^-) = \sum_{p=1}^{+\infty} (b_-^\varepsilon)^p J_p(\omega r^-) \cos(p\theta^-) + a_-^\varepsilon Y_0(\omega r^-) + b_-^\varepsilon J_0(\omega r^-). \quad (14.71)$$

In the same way, if we use  $(\rho^-, \theta^-)$  the polar coordinates associated to the variables  $(X, Y)$  in  $\widehat{\Omega}_N^-$ , since  $\mathcal{U}_0^\varepsilon$  satisfies the homogeneous Laplace equation with homogeneous Neumann condition, by separation of variables, in the domain  $\rho^- > 1$ ,  $\mathcal{U}_0^{-,\varepsilon}$  can be written as a linear combination of :

$$\{(\rho^-)^p \cos(p\theta^-), (\rho^-)^{-p} \cos(p\theta^-), p \geq 1\}, \text{Log } \rho^-, 1.$$

One can show (once again, the proof is omitted here) that  $\mathcal{U}_0^{-,\varepsilon}$  cannot grow more rapidly than  $\text{Log } \rho^-$  when  $\rho^-$  goes to  $+\infty$ . Therefore, we have an expression of the form ( $\rho^- > 1$ ) :

$$\mathcal{U}_0^{-,\varepsilon}(\rho^-, \theta^-) = \sum_{p=1}^{+\infty} (\beta_-^\varepsilon)^p (\rho^-)^{-p} \cos(p\theta^-) + \alpha_-^\varepsilon \text{Log } \rho^- + \beta_-^\varepsilon. \quad (14.72)$$

Recalling that ( $\gamma$  denotes the Euler number [2]) :

$$\lim_{z \rightarrow 0} J_0(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} J_p(z) = 0 \text{ for } p \geq 1, \quad Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \left( \frac{z}{2} \right) + \gamma \right) + o(1),$$

we deduce that :

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(r^-, \theta^-) = \frac{2}{\pi} a_-^\varepsilon \left( \text{Log} \frac{\omega r^-}{2} + \gamma \right) + b_-^\varepsilon + o(1), & (r^- \rightarrow 0), \\ \mathcal{U}_0^{-,\varepsilon}(r^-/\varepsilon, \theta^-) = \alpha_-^\varepsilon \text{Log} \frac{r^-}{\varepsilon} + \beta_-^\varepsilon + o(1) & (r^-/\varepsilon \rightarrow +\infty). \end{cases} \quad (14.73)$$

Therefore, (14.69) leads to :

$$\frac{2}{\pi} a_-^\varepsilon = \alpha_-^\varepsilon, \quad \frac{2}{\pi} a_-^\varepsilon \left( \text{Log} \frac{\omega}{2} + \gamma \right) + b_-^\varepsilon = -\alpha_-^\varepsilon \text{Log } \varepsilon + \beta_-^\varepsilon. \quad (14.74)$$

In the same way (with obvious notations for polar coordinates), we have :

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(r^+, \theta^+) = \frac{2}{\pi} a_+^\varepsilon \left( \text{Log} \frac{\omega r^+}{2} + \gamma \right) + b_+^\varepsilon + o(1), & (r^+ \rightarrow 0), \\ \mathcal{U}_0^{+,\varepsilon}(r^+/\varepsilon, \theta^+) = \alpha_+^\varepsilon \text{Log} \frac{r^+}{\varepsilon} + \beta_+^\varepsilon + o(1) & (r^+/\varepsilon \rightarrow +\infty). \end{cases} \quad (14.75)$$

with the relations :

$$\frac{2}{\pi} a_+^\varepsilon = \alpha_+^\varepsilon, \quad \frac{2}{\pi} a_+^\varepsilon \left( \text{Log} \frac{\omega}{2} + \gamma \right) + b_+^\varepsilon = -\alpha_+^\varepsilon \text{Log } \varepsilon + \beta_+^\varepsilon. \quad (14.76)$$

We have now all the necessary informations to determine the fields  $u_0^\varepsilon$ ,  $U_{-1}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{U}_0^{-,\varepsilon}$  and  $\mathbf{U}_0^{+,\varepsilon}$ .

#### 14.4.2 Determination of the leading terms of the expansion.

The analysis of the far field  $u_0^\varepsilon$  will rely on the following lemma. The proof, omitted here can be adapted from those in [85].

**Lemme 14.4** *There exists a unique function  $u^*$ , outgoing solution of the homogeneous Helmholtz equation in  $\Omega$  satisfying the homogeneous Neumann boundary condition on  $\partial\Omega \setminus \{\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+\}$  such that there exists  $b^* \in \mathbb{C}$  such that :*

$$\begin{cases} u^*(r^-, \theta^-) - \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega r^-}{2} + \gamma \right) \rightarrow b^*, & \text{when } r^- \rightarrow 0, \\ u^*(r^+, \theta^+) + (-1)^\ell \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega r^+}{2} + \gamma \right) \rightarrow (-1)^{\ell+1} b^*, & \text{when } r^+ \rightarrow 0. \end{cases} \quad (14.77)$$

By linearity, we deduce the following

**Corollary 14.5** *If  $v$  is an outgoing solution of the homogeneous Helmholtz equation in  $\Omega$  with Neumann boundary condition in  $\partial\Omega \setminus \{\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+\}$  and satisfies the local behaviours :*

$$\begin{cases} v(r^-, \theta^-) - \frac{2}{\pi} a \left( \text{Log} \frac{\omega r^-}{2} + \gamma \right) & \text{has a finite limit when } r^- \rightarrow 0, \\ v(r^+, \theta^+) + (-1)^\ell \frac{2}{\pi} a \left( \text{Log} \frac{\omega r^+}{2} + \gamma \right) & \text{has a finite limit when } r^+ \rightarrow 0, \end{cases}$$

then, one has :  $v = a u^*$ .



We first notice that, if we integrate the equation (14.59) over the domain :

$$\widehat{\Omega}_{N,1}^- = \{\mathbf{x} \in \widehat{\Omega}_N^- / 0 < \rho^+ < 1, 0 < \theta^+ < \pi\}. \quad (14.78)$$

$$\text{One easily obtain the relation : } \alpha_-^\varepsilon = -\frac{1}{\pi} \mu_-^\varepsilon. \quad (14.79)$$

$$\text{In the same way, we show that : } \alpha_+^\varepsilon = \frac{1}{\pi} \mu_+^\varepsilon. \quad (14.80)$$

Therefore, using (14.74), (14.66) and (14.79) (respectively (14.76), (14.68) and (14.80)), one can obtain the relations :

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} a_-^\varepsilon = \alpha_-^\varepsilon = -\frac{1}{\pi} \mu_-^\varepsilon = -\frac{\omega B_{-1}^\varepsilon}{\pi}, \\ \frac{2}{\pi} a_+^\varepsilon = \alpha_+^\varepsilon = \frac{1}{\pi} \mu_+^\varepsilon = (-1)^\ell \frac{\omega B_{-1}^\varepsilon}{\pi}, \end{cases} \quad (14.81)$$

$$\text{which implies in particular : } a_-^\varepsilon = (-1)^{\ell+1} a_+^\varepsilon \quad (:= a^\varepsilon). \quad (14.82)$$

$$\text{Applying corollary 14.5 to } v = u^\varepsilon - u^0, \text{ we obtain : } u_0^\varepsilon = u^0 + a^\varepsilon u^*. \quad (14.83)$$

Therefore  $u_0^\varepsilon$  has the following behaviour at the neighborhood of  $A^+$  and  $A^-$  :

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(r^-, \theta^-) = u^0(A^-) + a^\varepsilon \left[ \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega r^-}{2} + \gamma \right) + b^* \right] + o(1), \\ u_0^\varepsilon(r^+, \theta^+) = u^0(A^+) + (-1)^{\ell+1} a^\varepsilon \left[ \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega r^+}{2} + \gamma \right) + b^* \right] + o(1), \end{cases} \quad (14.84)$$

Comparing (14.73,14.75) and (14.84), we have :

$$b_-^\varepsilon = a^\varepsilon b^* + u^0(A^-), \quad b_+^\varepsilon = (-1)^{\ell+1} a^\varepsilon b^* + u^0(A^+). \quad (14.85)$$

For the near field we shall use the following result (adapting the proof of [86]) :

**Lemme 14.6** *There exists a unique function  $U_\pm^*$ , harmonic in  $\widehat{\Omega}_N^\pm$ , which satisfies, when  $\rho^\pm \rightarrow +\infty$  and  $\mp X \rightarrow +\infty$  :*

$$U_\pm^*(\rho^\pm, \theta^\pm) = \text{Log} \rho^\pm + o(1), \quad U_\pm^*(X, Y) = O(|X|). \quad (14.86)$$

*as well as the homogeneous Neumann boundary condition on  $\partial\widehat{\Omega}_N^\pm$ . Moreover, there exists  $\nu^* \in \mathbb{C}$  such that :*

$$U_\pm^*(X, Y) = \pm\pi X + \nu^* + o(1), \quad \text{when } \mp X \rightarrow +\infty \quad (14.87)$$

**Corollary 14.7** *Let  $V_\pm$  a solution of the homogeneous Laplace equation in  $\widehat{\Omega}_N^\pm$  satisfying the homogeneous Neumann boundary condition on  $\partial\widehat{\Omega}_N^\pm$  and :*

$$\begin{cases} V_\pm(\rho^\pm, \theta^\pm) = \alpha_\pm \text{Log} \rho^\pm + \beta_\pm + o(1), & \rho^\pm \rightarrow +\infty \\ V_\pm(X, Y) = O(|X|), & \mp X \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (14.88)$$

*then :*  $V_\pm = \alpha_\pm U_\pm^* + \beta_\pm$ .

Applying corollary 14.7 to  $U_0^{-,\varepsilon}$  and  $U_0^{+,\varepsilon}$ , we obtain using equations (14.73,14.75), (14.74,14.76) and (14.85) :

$$\begin{cases} U_0^{-,\varepsilon} = a^\varepsilon \left[ \frac{2}{\pi} \left( U_-^* + \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma \right) + b^* \right] + u^0(\mathbf{A}^-), \\ U_0^{+,\varepsilon} = (-1)^{\ell+1} a^\varepsilon \left[ \frac{2}{\pi} \left( U_+^* + \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma \right) + b^* \right] + u^0(\mathbf{A}^+). \end{cases} \quad (14.89)$$

Moreover,  $U_{-1}^\varepsilon$  is given via (14.63) and (14.82) :  $U_{-1}^\varepsilon(x) = \frac{2}{\omega} a^\varepsilon \sin \omega x.$  (14.90)

As it can be seen in the formules (14.83), (14.89), (14.90), we know  $u_0^\varepsilon, \mathbf{U}_0^{\pm, \varepsilon}$  and  $U_{-1}^\varepsilon$  as soon as we know  $a^\varepsilon$ . To obtain  $a^\varepsilon$ , we have to ensure :

From equations (14.66) and (14.68) we deduce :  $\nu_-^\varepsilon = (-1)^\ell \nu_+^\varepsilon$  (14.91)

Equations (14.89) and (14.87) leads to :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0^{-, \varepsilon}(X, Y) &= a^\varepsilon \left[ -2X + \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma + \nu^* \right) + b^* \right] \\ &\quad + u^0(\mathbf{A}^-) + o(1), \\ \mathbf{U}_0^{+, \varepsilon}(X, Y) &= (-1)^{\ell+1} a^\varepsilon \left[ \left( 2X + \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma + \nu^* \right) \right) + b^* \right] \\ &\quad + u^0(\mathbf{A}^+) + o(1). \end{cases} \quad (14.92)$$

Identifying (14.65,14.67) and (14.92), one obtains :

$$\begin{cases} \nu_-^\varepsilon &= a^\varepsilon \left[ \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma + \nu^* \right) + b^* \right] + u^0(A^-), \\ \nu_+^\varepsilon &= (-1)^{\ell+1} a^\varepsilon \left[ \frac{2}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma + \nu^* \right) + b^* \right] + u^0(A^+). \end{cases} \quad (14.93)$$

It follows from (14.91) and (14.93) :  $a^\varepsilon = \frac{(-1)^\ell u^0(A^+) - u^0(A^-)}{\frac{4}{\pi} \left( \text{Log} \frac{\omega \varepsilon}{2} + \gamma + \nu^* \right) + 2 b^*}$  (14.94)

### 14.4.3 Towards a rigorous proof

As  $a_\varepsilon \sim \frac{\pi}{4} \frac{(-1)^\ell u^0(A^+) - u^0(A^-)}{\text{Log} \varepsilon}$ , we conjecture the estimate :

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_R)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} / |\text{Log} \varepsilon|, \\ \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(O_\varepsilon)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} / (\varepsilon^{1/2} |\text{Log} \varepsilon|), \end{cases} \quad (14.95)$$

Moreover, due to the two logarithmic singularities at the point  $A^-$  and  $A^+$ ,  $u^*$  is not in  $H_{loc}^1(\Omega)$ . Therefore we can not have the same inequality for the  $H^1(\Omega_R)$ -norm as for the  $L^2(\Omega_R)$ -norm. One can expect the (generically optimal) estimate :

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C(\omega, L, R, F) \|f\|_{L^2(\Omega)} / |\sqrt{\text{Log} \varepsilon}|. \quad (14.96)$$

All this results are coherent with those obtain numerically in section 14.3. One can refer to figure 14.13, 14.14, 14.15, 14.16, 14.17, 14.18. The proof of (14.95) and (14.96) should follow the lines of the proof of theorem but the stability argument, that used the DtN map, has to be adequately modified. This work is delayed to a forthcoming work.



# Chapitre 15

## Conclusion générale

### 15.1 Les principaux résultats obtenus dans cette thèse

Dans la première partie, nous avons introduit et validé un nouveau modèle de couplage 1D-2D pour le traitement des fentes minces. C'est à notre connaissance (au moins du point de vue des estimations globales), la première validation d'un modèle de ce type. De plus, ce modèle peut être intégré à des codes éléments finis industriels.

Dans la deuxième partie, toujours dans le cadre des fentes minces, nous avons revisité la méthode de raccordement de développements asymptotiques. Nous en avons fait un exposé qui nous semble plus à même d'être compris par l'école française que les présentations de l'école russe ou anglo-saxonne. Ainsi, nous avons obtenu les développements asymptotiques de la solution exacte (justifié par les preuves de convergence, ce qui n'a été que très rarement effectué pour les équations de Helmholtz). Enfin, nous avons jeté les bases d'une méthode numérique dérivée de cette technique.

Dans la troisième partie, nous nous sommes intéressés à un phénomène de résonance déjà connu des ingénieurs. Nous en avons trouvé une explication mathématique qui permet de bien comprendre la nature du phénomène à partir des équations.

Ce travail devrait conduire aux publications suivantes :

S. Tordeux, P. Joly, Asymptotic Analysis of an Approximate Model for Time Harmonic Waves in Media With Thin Slots, 2005, SIAM journal of mathematical analysis (accepté).

S. Tordeux, Un Problème de Laplace Non Standard en Milieu Non Borné, note au Compte Rendu de l'Académie des Sciences, 2005 (soumis).

M. Clausel, M. Duruflé, P. Joly, S. Tordeux, A Mathematical Analysis of the Resonance of the Finite Thin Slots, 2005 (soumis)

Deux autres articles devraient être écrits avec P. Joly sur la deuxième partie.

### 15.2 Confrontation à la bibliographie existante

Lors de l'écriture de cette thèse, nous avons eu le souci constant de rendre le document indépendant de toute autre source. Nous désirons maintenant revenir sur quelques travaux effectués par d'autres équipes auxquels on pourra s'intéresser pour compléter la lecture de cette thèse.

**Les développements asymptotiques raccordés.** Nous avons essayé lors de cette thèse d'effectuer une nouvelle présentation de la technique de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Cette présentation a été adaptée des techniques développées par l'école russe, on se référera par exemple à [51]. Toutefois un lecteur, pris par le temps, pourra se référer à des techniques plus anciennes provenant de l'école anglo-saxonne (c.f. [27]) dont l'application échoue dans certains cas pathologiques.

Pour bien se rendre compte de l'apport de cette thèse à l'étude formelle des fentes nous pensons qu'il est de plus utile de lire les travaux de Tuck [44] [87] et McIvers et Rawlins [70].

**L'article de Taflove et ses améliorations.** Les méthodes de calcul numérique par différences finies ont été introduits dans [36] [81] et [83]. Nous pensons qu'il est utile de relire ces articles à la lumière de cette thèse où nous avons exhibé de nombreuses propriétés de la solution. Il ne faut pas ici négliger la difficulté d'effectuer une analyse numérique sérieuse de ces techniques, la principale difficulté étant d'obtenir des estimations d'erreur théoriques ( $\varepsilon$  et  $h$  tendant vers 0).

**Quelques résultats théoriques pour compléter l'étude.** Pour compléter la lecture de ce document nous recommandons, pour ceux intéressés par le point de vue mathématique, l'article de Beale [9] qui s'intéresse aux fréquences propres des résonateurs de Helmholtz. On pourra notamment y trouver des liens avec l'étude des résonances. On pourra de plus se référer à la thèse de Tatout [84] qui est une thèse tout à fait complémentaire de celle-ci. On pourra notamment y trouver de nombreux résultats de stabilité et une étude numérique des méthodes par différences finies.

### 15.3 Quelques voies de recherche pour le futur proche

**Les extensions directes.** Elles ont déjà été présentées dans les conclusions des première et deuxième parties. Nous renvoyons le lecteur aux chapitres 7 et 13.

Nous proposons enfin deux voies de recherche possibles dont les liens sont évidents avec les thèmes que nous avons développés dans cette thèse.

**Les approximations filaires.** Nous pensons que les techniques développées ici peuvent être d'intérêt pour la justification des modèles filaires (voir [49] et [82]). Espérons que cette étude puisse de plus déboucher sur de nouveaux modèles permettant de traiter les fils avec une plus grande précision. Ceci devrait être dans le futur proche un thème de recherche du projet Ondes (UMR POems).

**L'analyse multiéchelle.** La technique de raccordement de développements asymptotiques est en concurrence avec la technique de développement multiéchelle (voir [18] et [88]). Elle permet principalement de traiter un certain nombre de problèmes plus facilement. Il est intéressant ici de se poser la question de la possibilité d'utiliser cette technique et du rapport qui existe entre ces deux méthodes. Les travaux réalisés ici devraient permettre d'effectuer ce travail plus rapidement.

# Annexe A

## Résultats utiles sur les fonctions de Bessel

### Sommaire

---

A.1	Introduction et bibliographie . . . . .	271
A.2	Définition des fonctions de Bessel $J_p$ et $Y_p$ . . . . .	272
A.3	Développement au voisinage de 0 des fonctions $J_p$ . . . . .	274
A.4	Développement au voisinage de 0 des fonctions $Y_p$ . . . . .	274
A.5	Équation différentielle et Wronskien . . . . .	275
A.6	Définition des fonctions de Hankel $H_p^{(1)}$ . . . . .	275
A.7	Opérateur Dirichlet Neumann d'ondes sortantes . . . . .	277

---

### A.1 Introduction et bibliographie

Les fonctions de Bessel ont joué un rôle important lors de notre exposé. Nous avons choisi de regrouper dans cette partie les résultats utiles pour notre étude, pour les raisons suivantes :

- Nous ne voulions pas supposé de pré-requis concernant les fonctions de Bessel. Le lecteur pourra trouver un ensemble cohérent à ce sujet.
- Malgré une littérature abondante, il est parfois difficile des résultats prêts à l'emploi.

Nous conseillons les ouvrages suivants dont nous nous sommes largement inspirés, pour une étude bibliographique :

- [2] est un ouvrage de mathématiques générales. Plus précisément c'est un recueil de formules. Bien que assez indigestes il s'avère utile pour rechercher rapidement de l'information. Ceci est en particulier vrai sur les fonctions de Bessel.
- [63] est une introduction aux fonctions spéciales. Il possède notamment deux chapitres très bien faits sur le fonctions de Bessel.
- [89] est un traité consacré exclusivement aux fontions de Bessel. On peut par exemple y trouver de nombreuses preuves. Il reste à notre avis la référence.

## A.2 Définition des fonctions de Bessel $J_p$ et $Y_p$

Les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  sont définies comme la série entière de rayon de convergence  $+\infty$

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{p+2k}}{k!(p+k)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.1})$$

Les fonctions de Bessel de deuxième espèce d'ordre  $n$  sont définies à l'aide d'une série entière de rayon de convergence infini.

$$\left\{ \begin{aligned} Y_p(z) &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Log}(z/2) J_p(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-p} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{p+2k}}{k!(p+k)!} (\psi(k+1) + \psi(p+k+1)), \end{aligned} \right. \quad (\text{A.2})$$

où  $\psi$  est la dérivée logarithmique de la fonction d'Euler ( $\gamma$  étant le nombre d'Euler  $\gamma \simeq 0.5772$ ) :

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(k+1) = -\gamma + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.3})$$

Les fonctions  $Y_p$  sont aussi couramment appelées fonctions de Neumann ou fonctions de Weber.

Remarquons que  $J_p$  est analytique sur  $\mathbb{C}$  et que  $Y_p$  est analytique sur  $\mathbb{C}^*$ . Si nous nous limitons aux  $z \in \mathbb{R}^+$ , remarquons qu'à partir d'un certain rang toutes les séries sont alternées.

Introduisons maintenant les nombres  $J_{p,l}$  et  $Y_{p,l}$  pour  $(p,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  tels que :

$$\left\{ \begin{aligned} J_p(z) &= \sum_{l=0}^{+\infty} J_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l, \\ Y_p(z) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \operatorname{Log} \frac{z}{2} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^l. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.4})$$

De (A.1), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} J_{p,l} &= 0, & \text{si } l < p \text{ ou } p+l \text{ impair,} \\ J_{p,l} &= \frac{(-1)^{\frac{l-p}{2}}}{\left(\frac{l-p}{2}\right)! \left(\frac{l+p}{2}\right)!} & \text{sinon,} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.5})$$

Puis de (A.2), nous tirons :

$$\left\{ \begin{aligned} Y_{p,l} &= 0, & \text{si } l < -p \text{ ou } p+l \text{ impair,} \\ Y_{p,l} &= -\frac{1}{\pi} \frac{\left(\frac{p-l}{2}-1\right)!}{\left(\frac{p+l}{2}\right)!}, & \text{si } -p \leq l < p \text{ et } p+l \text{ pair,} \\ Y_{p,l} &= -\frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{l-p}{2}}}{\left(\frac{l-p}{2}\right)! \left(\frac{l+p}{2}\right)!} (\psi(\frac{l-p}{2}) + \psi(\frac{l+p}{2} + 1)), & \text{si } p \leq l \text{ et } p+l \text{ pair} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons largement réduire les sommes de (A.4), tout d'abord en ne sommant que sur les  $l$  tels que  $p+l$  est pair puis en tenant compte des nullités pour les  $l$  plus petit que  $p$  pour  $J_{p,l}$  ou  $-p$  pour  $Y_{p,l}$  :

$$\left\{ \begin{aligned} J_p(z) &= \sum_{l=p}^{+\infty} \left[ J_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l \right], \\ Y_p(z) &= \sum_{l=-p}^{+\infty} \left[ Y_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{l=p}^{+\infty} \left[ J_{p,l} \operatorname{Log} \frac{z}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^l \right]. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.7})$$

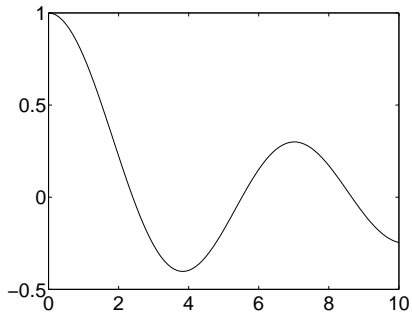


FIG. A.1 – Graphe de  $J_0$

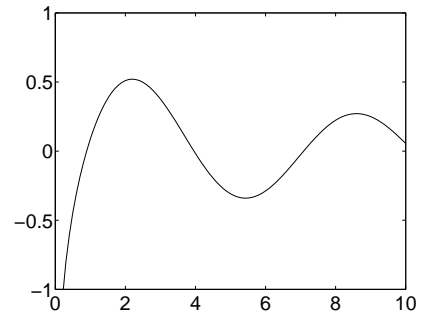


FIG. A.2 – Graphe de  $Y_0$

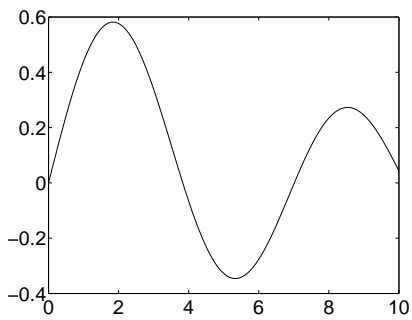


FIG. A.3 – Graphe de  $J_1$

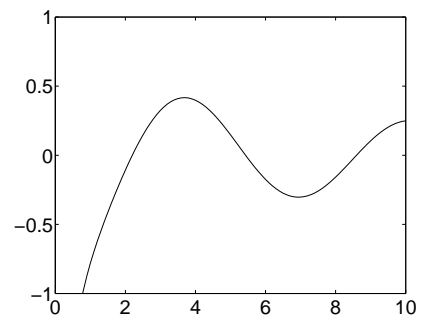


FIG. A.4 – Graphe de  $Y_1$

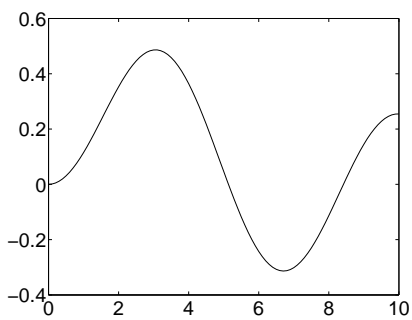


FIG. A.5 – Graphe de  $J_2$

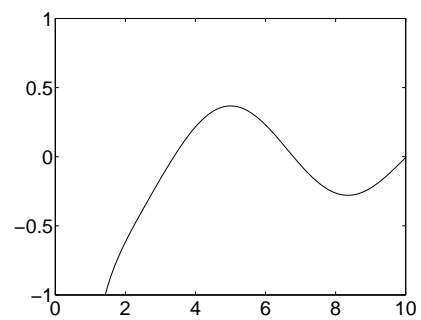
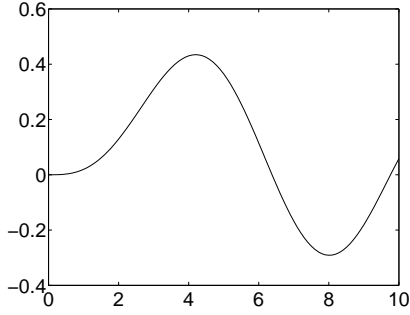
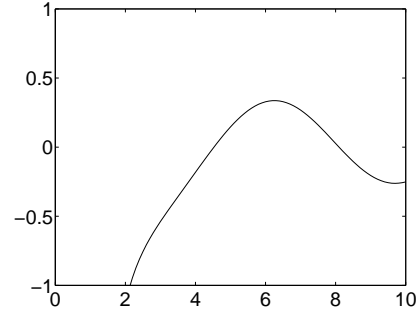


FIG. A.6 – Graphe de  $Y_2$




 FIG. A.7 – Graphe de  $J_3$ 

 FIG. A.8 – Graphe de  $Y_3$ 

### A.3 Développement au voisinage de 0 des fonctions $J_p$

De la définition des fonctions de Bessel de première espèce  $J_p$  (A.1), on tire des équivalents des  $J_p$  proche de 0 :

$$J_p(z) \sim J_{p,l} (z/2)^p = \frac{(z/2)^p}{p!} \quad (\text{A.8})$$

Plus généralement comme  $J_p$  est analytique nous avons le

**Lemme A.1** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}^{+,*}$ , il existe  $C(p, l, a)$  tel que pour tout  $z$  réel dans l'intervalle  $[0; a]$  :*

$$\left| J_p(z) - \sum_{l=-\infty}^m J_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l \right| \leq C \left(\frac{z}{2}\right)^{m+1} \quad (\text{A.9})$$

Bien entendu la somme de (A.9) ne contient qu'un nombre fini de termes :

$$\left| J_p(z) - \sum_{l=p}^m J_{p,l} \left(\frac{z}{2}\right)^l \right| \leq C \left(\frac{z}{2}\right)^{m+1} \quad (\text{A.10})$$

### A.4 Développement au voisinage de 0 des fonctions $Y_p$

Par définition, l'équivalent en 0 de  $Y_p$  est donné

$$\begin{cases} Y_0(z) \sim \frac{2}{\pi} \text{Log} \frac{z}{2}, \\ Y_p(z) \sim -\frac{(p-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p}. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Plus précisément, nous avons le

**Lemme A.2** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$   $a > 0$  il existe un réel positif  $C(p, m, a)$  tel que pour tout  $z$  réel dans l'intervalle  $[0; a]$  :*

$$\left| Y_p(z) - \sum_{l=-\infty}^m \left[ \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log} \frac{z}{2} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^l \right] \right| \leq C \left(\frac{z}{2}\right)^{m+1} \left(1 + \left| \text{Log} \frac{z}{2} \right| \right) \quad (\text{A.12})$$

Nous pouvons aussi réduire les sommes de (A.12) :

$$\left| Y_p(z) - \sum_{l=-p}^m \left[ \left( Y_{p,l} + \frac{2}{\pi} J_{p,l} \text{Log} \frac{z}{2} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^l \right] \right| \leq C \left(\frac{z}{2}\right)^{m+1} \left(1 + \left| \text{Log} \frac{z}{2} \right| \right) \quad (\text{A.13})$$

## A.5 Équation différentielle et Wronskien

On appelle équation de Bessel l'équation posée dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{*,+})$  :

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - p^2) u = 0, \quad (\text{A.14})$$

Grâce aux théorèmes classiques d'analyse [79], il est facile de voir que cette équation admet comme ensemble de solution un espace vectoriel de dimension 2. Puis, il est montré par exemple dans [78] que  $J_p$  et  $Y_p$  sont solutions (au sens classique et donc au sens des distributions) de cette équation. Il suffit pour montrer cela d'injecter les définitions dans (A.14).

Un outil fondamental relié aux équations ordinaires d'ordre 2 est le wronskien, il mesure à priori la distance algébrique entre deux solutions (directions de solutions). On le définit de la manière suivante :

$$W(u, v) = uv' - u'v. \quad (\text{A.15})$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux solutions de (A.14) on a au sens de  $(C^\infty(\mathbb{R}^{*,+}))$  :

$$\frac{dW(u, v)}{dz} = uv'' - u''v = -\frac{1}{z}uv' - (z^2 - p^2)uv + \frac{1}{z}u'v + (z^2 - p^2)uv = -\frac{W(u, v)}{z}. \quad (\text{A.16})$$

Ainsi nous connaissons  $W$  à une constante multiplicative près :

$$z \frac{dW(u, v)}{dz} + W(u, v) = 0 \quad \implies \quad W(u, v) = \frac{k}{z}. \quad (\text{A.17})$$

On détermine cette constante  $k$  dans le cas de  $J_p$  et  $Y_p$  par passage à la limite sur  $zW(J_p, Y_p)$  pour  $z$  tendant vers 0 grâce aux équivalents en 0 de  $J_p$  et  $Y_p$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$W(J_p(z), Y_p(z)) = J_p(z) Y_p'(z) - J_p'(z) Y_p(z) = \frac{2}{\pi z} \quad (\text{A.18})$$

Ainsi, nous tirons :

**Lemme A.3** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , et tout  $z \in \mathbb{R}^{*,+}$ , nous avons :*

$$J_p(z) Y_p'(z) - J_p'(z) Y_p(z) > 0 \quad (\text{A.19})$$

## A.6 Définition des fonctions de Hankel $H_p^{(1)}$

On appelle fonction de Hankel de première espèce d'ordre  $p$  ou fonction de Bessel de troisième espèce la fonction :

$$H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + i Y_p(z). \quad (\text{A.20})$$

On appelle fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre  $p$  la fonction :

$$H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - i Y_p(z). \quad (\text{A.21})$$

Introduisons leurs modules au carré  $M_p$  de  $H_p^{(1)}$  et  $H_p^{(2)}$  :

$$M_p^2 = J_p^2 + Y_p^2. \quad (\text{A.22})$$

Il est intéressant de se poser la question de la monotonie de  $M_p$ . Pour cela, nous aurons besoin de quelques outils :

– La fonction de Kelvin  $K_0$  :

$$K_0(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi \cosh(x)} \cosh(px) dx \quad (\text{A.23})$$

– La formule de Nicholson :

$$M_p^2(z) = \int_0^\infty K_0(2z \sinh(t)) \cosh(2pt) dt \quad (\text{A.24})$$

Commençons par montrer que  $K_0$  est strictement décroissante; si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont deux réels positifs alors :

$$\xi_1 < \xi_2 \implies e^{-\xi_1 \cosh x} > e^{-\xi_2 \cosh(x)} \implies K_0(\xi_1) < K_0(\xi_2). \quad (\text{A.25})$$

Ce qui nous permet de montrer la décroissance de  $M_p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 < z_2 \implies 2z_1 \sinh(t) < 2z_2 \sinh(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^{*,+} \\ \implies K_0(2z_1 \sinh(t)) < K_0(2z_2 \sinh(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^{*,+} \\ \implies M_p^2(z_1) > M_p^2(z_2). \end{array} \right. \quad (\text{A.26})$$

Il est clair que comme, pour tout  $p$ , les  $M_p$  sont décroissants alors  $J_p$  et  $Y_p$  sont bornées sur  $[z, +\infty)$  ( $z > 0$ ) par  $M_p(z)$ . Une autre conséquence immédiate de la décroissance de  $M_p$  est la proposition suivante :

**Lemme A.4** Pour tout  $z \in \mathbb{R}^{*,+}$ , on a l'inégalité suivante :

$$J_p'(z) J_p(z) + Y_p'(z) Y_p(z) < 0. \quad (\text{A.27})$$

**Preuve.** En effet, nous avons :

$$(M_p^2)'(z) = (J_p^2 + Y_p^2)'(z) = 2 J_p'(z) J_p(z) + 2 Y_p'(z) Y_p(z). \quad (\text{A.28})$$

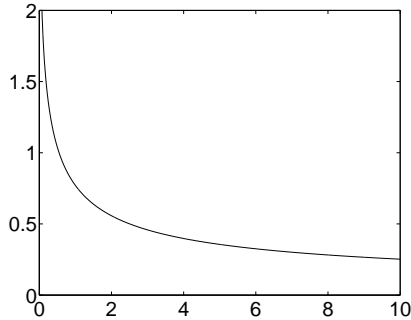


FIG. A.9 – Graphe de  $M_0$

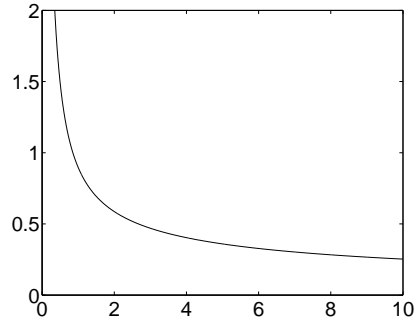


FIG. A.10 – Graphe de  $M_1$

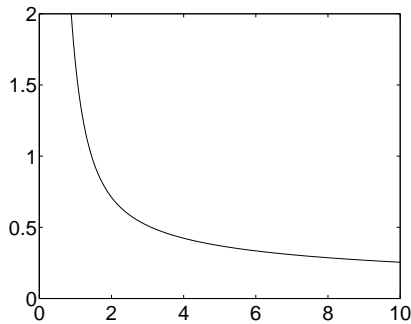


FIG. A.11 – Graphe de  $M_2$

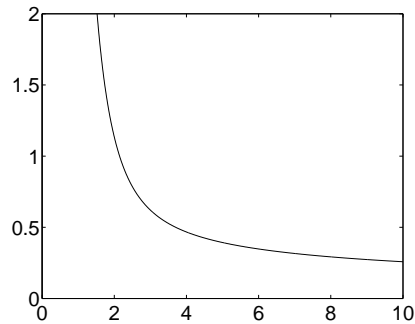


FIG. A.12 – Graphe de  $M_3$

## A.7 Opérateur Dirichlet Neumann d'ondes sortantes

Par séparation de variable, il est possible de voir que toute fonction  $u \in H_{loc}^1([R, +\infty[_r \times [0; \pi]_\theta)$  solution sortante de :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u = 0, & \text{dans } [R, +\infty[_r \times [0; \pi]_\theta, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{en } x = 0 \text{ et } |y| > R. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

vérifie :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n H_n^{(1)}(\omega r) \cos n\theta \quad (\text{A.30})$$

où la somme du second membre converge par rapport aux normes définies pour tout  $R' > 0$  :

$$\|u\|_{H^1([R; R']_r \times [0; \pi]_\theta)} + \|\Delta u\|_{L^2([R; R']_r \times [0; \pi]_\theta)}. \quad (\text{A.31})$$

De plus pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial}{\partial n} [H_n^{(1)}(\omega r) \cos n\theta] = 0, \quad \text{en } x = 0 \text{ et } |y| > R. \quad (\text{A.32})$$

Il est donc possible d'associer à cet espace de solutions un opérateur

$$T_R : H^{1/2}(\Gamma_R = \{(R, \theta) / \theta \in [0; \pi]_\theta\}) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R) \quad (\text{A.33})$$

de Dirichlet Neumann qui à la trace de Dirichlet en  $r = R$  associe la trace de Neumann sur cette même frontière, on trouvera l'expression de l'opérateur  $T_R$  en (3.21), que l'on obtient par décomposition spectrale. Des propriétés intéressantes (ils nous permettent notamment de se placer dans le cadre de la théorie de Fredholm) de cet opérateur sont les signes des parties réelles et imaginaires de la forme quadratique de  $H^{1/2}(\Gamma_R)$

$$\begin{cases} H^{1/2}(\Gamma_R) & \longrightarrow \mathbb{C}, \\ u & \longmapsto (T_R u; u). \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

Nous avons en effet pour tout  $u \in H^{1/2}(\Gamma_R)$  :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(T_R u; u) & \geq 0, \\ \operatorname{Im}(T_R u; u) & \leq 0. \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

Ceci provient en fait du lemme :

**Lemme A.5** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\mu_n^R(\omega)) & \geq 0, \\ \operatorname{Im}(\mu_n^R(\omega)) & \leq 0. \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

où nous rappelons que  $\mu_n^R(\omega)$  est donné en (3.22)

**Preuve.** Le calcul des parties réelles et imaginaires de  $\mu_n^R(\omega)$  donne :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\mu_n^R(\omega)) & = -\omega \frac{J_n'(\omega r) J_n(\omega r) + Y_n'(\omega r) Y_n(\omega r)}{(J_n(\omega r))^2 + (Y_n(\omega r))^2}, \\ \operatorname{Im}(\mu_n^R(\omega)) & = -\omega \frac{J_n(\omega r) Y_n'(\omega r) - J_n'(\omega r) Y_n(\omega r)}{(J_n(\omega r))^2 + (Y_n(\omega r))^2}. \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Ainsi, d'après les lemmes A.3 et A.4, nous tirons la conclusion.



## Annexe B

# Densité de $H_{0,0}^1(\Omega_R)$ dans $H^1(\Omega_R)$

Rappelons que  $\Omega_R$  désigne la demie boule

$$\Omega_R = \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega \mid |\mathbf{x}| \leq R \text{ et } x \leq 0 \right\} \quad (\text{B.1})$$

paramétrée en coordonnée curviligne :

$$r = |\mathbf{x}| \text{ et } \theta = \arccos \frac{y}{|\mathbf{x}|} \quad (\text{B.2})$$

Nous désignons par  $H_{0,0}^1(\Omega_R)$  l'ensemble de fonctions :

$$H_{0,0}^1(\Omega_R) = \left\{ u \in H^1(\Omega_R) \mid \exists r_0 > 0 \text{ tel que } u(r, \theta) = 0 \forall r < r_0 \right\}. \quad (\text{B.3})$$

**Lemme B.1**  $H_{0,0}^1(\Omega_R)$  est dense dans  $H^1(\Omega_R)$ .

**Preuve.** Pour tout  $v \in H^1(\Omega_R)$ , il s'agit de construire une suite  $(v_a \in H_{0,0}^1(\Omega_R), a > 0)$  telle que :

$$\lim_{a \rightarrow 0} v_a = v \quad \text{dans } H^1(\Omega_R). \quad (\text{B.4})$$

L'espace  $C^\infty(\overline{\Omega_R})$  étant dense dans  $H^1(\Omega_R)$ , il suffit de construire une telle suite pour :

$$v \in C^\infty(\overline{\Omega_R}). \quad (\text{B.5})$$

Pour tout  $a > 0$ , introduisons la fonction de troncature :

$$\Psi_a(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a, \\ \text{Log} \left( \frac{r}{a} \right) \left( \text{Log} \left( \frac{1}{a} \right) \right)^{-1} & \text{si } a < r < 1, \\ 1 & \text{si } r > 1. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous allons vérifier que  $v_a = \Psi_a v$  convient. En effet :

$$\begin{cases} \|v - \Psi_a v\|_{H^1(\Omega_R)} = \|v - \Psi_a v\|_{L^2(\Omega_R)} + \|\nabla(v - \Psi_a v)\|_{L^2(\Omega_R)} \\ \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega_R)} (\|1 - \Psi_a\|_{L^2(\Omega_R)} + \|\nabla \Psi_a\|_{L^2(\Omega_R)}) \\ \quad + \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega_R)} \|1 - \Psi_a\|_{L^2(\Omega_R)}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme  $\Psi_a$  est à support dans la boule  $B(0, 1)$  de centre 0 et de rayon 1, est majorée par 1 et converge presque partout vers 1 lorsque  $a$  tend vers 0, alors :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|1 - \Psi_a\|_{L^2(\Omega_R)} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Par ailleurs, on calcule aisément que :

$$\|\nabla\Psi_a\|_{L^2(B(0,1))}^2 = \frac{2\pi}{(-\text{Log}(a))}, \quad (\text{B.9})$$

ce qui montre que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\nabla\Psi_a\|_{L^2(\Omega_R)} = 0, \quad (\text{B.10})$$

et achève la démonstration.  $\square$

**Remarque B.2** Ce résultat de densité est clairement relié au défaut de continuité des fonctions  $H^1$  :

$$H^1(\mathbb{R}^2) \not\subset C^0(\mathbb{R}^2) \quad (\text{B.11})$$

Un autre point tout à fait similaire est l'impossibilité de prolonger par continuité l'application valeur ponctuelle de  $C^1(\mathbb{R}^2)$  dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$  (valeur en l'origine par exemple). Pour se convaincre on peut remarquer que la fonction  $\frac{1}{r^2+|\text{Log} \text{Log}(r)|}$  est un élément de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  mais qui diverge en l'origine.

# Bibliographie

- [1] T. Abboud and F. Starling. Scattering of an electromagnetic wave by a screen. In *Boundary Value Problems and Integral Equations in Nonsmooth Domains (Luminy, 1993)*, volume 167 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 1–17. Dekker, New York, 1995.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.
- [3] C. Amrouche. The Neumann problem in the half-space. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 335(2) :151–156, 2002.
- [4] C. Amrouche and Š. Nečasová. Laplace equation in the half-space with a nonhomogeneous Dirichlet boundary condition. In *Proceedings of Partial Differential Equations and Applications (Olomouc, 1999)*, volume 126, pages 265–274, 2001.
- [5] X. Antoine, H. Barucq, and L. Vernhet. Approximate numerical solution of the acoustic scattering by a penetrable object using impedance boundary conditions. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, pages 709–713. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [6] X. Antoine, H. Barucq, and L. Vernhet. Approximate solution of a time-harmonic scattering problem by a penetrable obstacle. In *Actes des VI<sup>èmes</sup> Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques (Jaca, 1999)*, pages 85–92. Publ. Univ. Pau, Pau, 2001.
- [7] M. Artola and M. Cessenat. Diffraction d’une onde électromagnétique par une couche composite mince accolée à un corps conducteur épais. I. Cas des inclusions fortement conductrices. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(5) :231–236, 1991.
- [8] F. Assous, P. Ciarlet Jr., and J. Segré. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : the singular complement method. *J. Comput. Phys.*, 161(1) :218–249, 2000.
- [9] J.T. Beale. Scattering frequencies of resonators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 26 :549–563, 1973.
- [10] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [11] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [12] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comp. Physics*, 1994.
- [13] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques*, volume 45 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [14] D. Bouche and F. Molinet. *Méthodes Asymptotiques en Electromagnétisme*, volume 16 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994. With a preface by Robert Dautray.



- [15] T.Z. Boulmezaoud. Espaces de sobolev avec poids pour l'équation de laplace dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 73(1) :221–226, 1999.
- [16] A. Buffa and S.H. Christiansen. The electric field integral equation on Lipschitz screens : definitions and numerical approximation. *Numer. Math.*, 94(2) :229–267, 2003.
- [17] C.M. Butler and D.R. Wilton. General analysis of narrow strips and slots. *IEEE Trans Ant. and Propag.*, 28(1), 1980.
- [18] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, and G. Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. page 43, à paraître, soumis en avril 2004.
- [19] P. G. Ciarlet. *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures*, volume 14 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1990. An asymptotic analysis.
- [20] G. Cohen and M. Duruflé. Mixed spectral elements for the helmholtz equation. In G. C. Cohen, E. Heikkola, P. Joly, and P. Neittaanmäki, editors, *Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finland.*, pages 743–748. Springer-Verlag, 2003.
- [21] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. I. Construction. *Numer. Math.*, 95(2) :197–221, 2003.
- [22] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. II. Analysis. *Numer. Math.*, 95(2) :223–251, 2003.
- [23] F. Collino and F. Millot. Fils et méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell. Le modèle de Holland revisité. Rapport INRIA 3472, INRIA, <http://www.inria.fr>, Aout 1998.
- [24] F. Collino and C. Tsogka. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66 :294–307, 2001.
- [25] D.L. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.
- [26] C. Conca and E. Zuazua. Asymptotic analysis of a multidimensional vibrating structure. *SIAM J. Math. Anal.*, 25(3) :836–858, 1994.
- [27] D.G. Crighton, A.P. Dowling, J.E Ffowks Williams, M. Heckl, and F.G. Leppington. *Modern Methods in Analytical acoustics*. Lecture Notes. Springer-Verlag, London, 1992. An Asymptotic Analysis.
- [28] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques. Tome 3*. Masson, Paris, 1985.
- [29] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Evolution problems. I, With the collaboration of Michel Artola, Michel Cessenat and Hélène Lanchon, Translated from the French by Alan Craig.
- [30] J. Diaz. *Approches Analytiques et Numériques de Problèmes de Transmission en Propagation d'Ondes en Régime Transitoire. Application au Couplage Fluide-Structure et aux Méthodes de Couches Parfaitement Adaptées Couches Absorbantes Parfaitement Adaptées, Acoustique en Ecoulement et Interaction Fluide-Structure : une Etude Analytique et Numérique*. Doctorat, Université Paris 6, 2005.
- [31] J. Diaz and P. Joly. Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 115–119. Springer, 2003.
- [32] D. Drissi. *Simulation des Silencieux d'Echappement par une Méthode D'éléments Finis Homogénéisée*. Doctorat, Université de Tunis, 2003.
- [33] B. Engquist and J. C. Nédélec. Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Technical Report 278, Ecole Polytechnique CMAP (France), 1993.

- [34] A. Ezziani. *Modélisation Mathématique et Numérique de la Propagation d'Ondes dans les Milieux Viscoélastiques et Poroélastiques*. Doctorat, Université Paris 9, 2005.
- [35] S. Fauqueux. *Eléments Finis mixtes Spectraux et Couches Absorbantes Parfaitement Adaptées pour la Propagation d'Ondes Élastiques en Régime Transitoire*. Doctorat, Université Paris 9, 2003.
- [36] J. Gilbert and R. Holland. Implementation of the thin-slot formalism in the finite-difference code threedii. *IEEE Trans Nuc Science*, 28(6) :4269–4274, December 1981.
- [37] J. Giroire. *Etude de Quelques Problèmes aux Limites Extérieures et Résolution par Equations Intégrales*. Thèse d'Etat, Université de Pierre et Marie Curie, septembre 1987.
- [38] D. Givoli, I. Patlashenko, and J.B. Keller. Discrete Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 164(1-2) :173–185, 1998. Exterior problems of wave propagation (Boulder, CO, 1997; San Francisco, CA, 1997).
- [39] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [40] P. Grisvard. *Singularities in Boundary Value Problems*, volume 22 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1992.
- [41] M. J. Grote. Non-reflecting boundary conditions for electromagnetic scattering. *Int. J. Num. Model.*, 13(5) :397–416, 2000.
- [42] M. J. Grote and J. B. Keller. Nonreflecting boundary conditions for time-dependent scattering. *J. Comput. Phys.*, 127(1) :52–65, 1996.
- [43] M. J. Grote and J. B. Keller. Nonreflecting boundary conditions for Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 139(2) :327–342, 1998.
- [44] D.C. Guiney, B.J. Noye, and E.O. Tuck. Transmission of water waves through small apertures. *J. Fluid Mech.*, 55(1) :149–161, 1972.
- [45] H. Haddar, P. Joly, and H. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : The scalar case. page 35, à paraître, soumis en 2003.
- [46] T. Hagstrom and I. Nazarov. Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations. In *Proc. of the 8th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, 17-19 june 2002, Breckenridge, CO, USA*, 2002. AIAA paper 2002-2606.
- [47] I. Harari, I. Patlashenko, and D. Givoli. Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides. *J. Comput. Phys.*, 143(1) :200–223, 1998.
- [48] P. Harrington and D. Auckland. Electromagnetic transmission through narrow slots in thick conducting screens. *IEEE Trans Antenna Propagation*, 28(5) :616–622, sept. 1980.
- [49] R. Holland and L. Simpson. Finite-difference analysis EMP coupling to thin struts and wires. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 23(2), 1981.
- [50] F. Q. Hu. A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables. *J. Comput. Phys.*, 173 :455–480, 2001.
- [51] A. M. Il'in. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, volume 102 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the Russian by V. Minachin [V. V. Minakhin].
- [52] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1975.
- [53] P. Joly. *Analyse numérique et mathématique de quelques modèles de propagation d'ondes acoustiques élastiques et électromagnétiques*. Thèse d'Etat, INRIA, avril 1987.
- [54] P. Joly and S. Tordeux. Modèles asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes. Rapport inria, INRIA, <http://www.inria.fr>, 2003.
- [55] P. Joly and S. Tordeux. An asymptotic analysis of time harmonic waves in media with thin slots. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, to be published.

- [56] J.B. Keller and D. Givoli. Exact nonreflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 82(1) :172–192, 1989.
- [57] G.A. Kriegsmann. The flanged waveguide antenna : discrete reciprocity and conservation. *Wave Motion*, 29(1) :81–95, 1999.
- [58] O. Lafitte. Diffraction for a Neumann boundary condition. *Comm. Partial Differential Equations*, 22(3-4) :555–580, 1997.
- [59] O. Lafitte and G. Lebeau. Équations de Maxwell et opérateur d'impédance sur le bord d'un obstacle convexe absorbant. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316(11) :1177–1182, 1993.
- [60] H. Le Dret. *Problèmes Variationnels dans les Multi-domaines*, volume 19 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1991. Modélisation des jonctions et applications. [Modeling of junctions and applications].
- [61] M.N. Le Roux. *Résolution Numérique du Problème de Potentiel dans le Plan par une Méthode Variationnelle d'Éléments finis*. Doctorat, Université de Rennes, octobre 1974.
- [62] M.N. Le Roux. Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2. *RAIRO Anal. Numér.*, 11(1) :27–60, 112, 1977.
- [63] N.N. Lebedev. *Special Functions and their Applications*. Revised English edition. Translated and edited by Richard A. Silverman. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [64] M. Lenoir and A. Tounsi. The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(4) :729–752, 1988.
- [65] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I*. Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181.
- [66] P. L.-F. Liu. Scattering of water waves by a pair of semi-infinite barriers. *ASME*, 75 :777–779, 1975.
- [67] D. Martin. Documentation de la librairie elements finis melina. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>, 1996-2003.
- [68] V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, and B.A. Plamenevskii. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten I*. Mathematische Monographien, Band 82. Akademie Verlag, Berlin, 1991.
- [69] V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, and B.A. Plamenevskii. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten II*. Mathematische Monographien, Band 83. Akademie Verlag, Berlin, 1991.
- [70] P. McIver and A. D. Rawlins. Two-dimensional wave-scattering problems involving parallel-walled ducts. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 46(1) :89–116, 1993.
- [71] J.C. Nédélec. *Approximation des Equations Intégrales en Mécanique et en Physique*. Ecole Polytechnique, Palaiseau France, 1977.
- [72] J.C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral Representations for Harmonic Problems.
- [73] B. Noble. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. Vol. 7. Pergamon Press, New York, 1958.
- [74] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, and G.A. Yosifian. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Studies in mathematics and its applications. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [75] J. Rodríguez. *Raffinement de Maillage Spatio-Temporel pour les Équations de l'Élastodynamique*. Doctorat, Université de Dauphine, décembre 2004.
- [76] F. Rogier. *Problèmes Mathématiques et Numériques Liés à l'Approximation de la Géométrie d'un Corps Diffractant dans les Equations de l'Electromagnétisme*. Doctorat, Université de Paris 6, 1989.

- 
- [77] E. Sánchez-Palencia. *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*, volume 127 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [78] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [79] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [80] T.B.A. Senior and J.L. Volakis. *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*. IEE Press, New York and London, 1995.
- [81] A. Taflove. *Computational electrodynamics*. Artech House Inc., Boston, MA, 1995. The finite-difference time-domain method.
- [82] A. Taflove, K. Umashankar, and B. Becker. Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity. *IEEE Trans Antenna and Propagation*, 35(11) :1248–1257, 1987.
- [83] A. Taflove, K. Umashankar, B. Becker, F. Harfoush, and K.S. Yee. Detailed FDTD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in thick conducting screens. *IEEE Trans Antenna and Propagation*, 36(2) :247–257, February 1988.
- [84] F. Tatout. *Propagation d'une Onde Electromagnétique dans une Fente Mince. Propagation et Réflexion d'Ondes en Elasticité. Application au contrôle*. Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, dec. 1996.
- [85] S. Tordeux. *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux Comportant des Fentes*. Doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2004.
- [86] S. Tordeux. Un problème de laplace non standard en milieu non borné. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2005.
- [87] E.O. Tuck. Matching problems involving flow through small holes. In *Advances in Applied Mechanics, Vol. 15*, pages 89–158. Academic Press, New York, 1975.
- [88] G. Vial. *Analyse Multiéchelle et Conditions aux Limites Approchées pour un Problème de Couche Mince dans un Domaine à Coin*. Doctorat, Université de Rennes, 2003.
- [89] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.
- [90] G.N. Watson. Bessel functions and Kapteyn series. *Proc. London Math. Soc.*, pages 150–174, April 1916.





## Résumé

Cette thèse porte sur la modélisation de la diffraction d'ondes en régime harmonique dans des milieux bidimensionnels comportant des fentes minces. Tout d'abord, nous introduisons et analysons un modèle approché dont la propriété principale est d'utiliser une approximation unidimensionnelle dans la fente. L'originalité de ce modèle se situe au niveau des conditions de couplage par raccord "brutal" à travers les extrémités de la fente. La précision de cette première technique étant limitée, nous utilisons la technique des développements asymptotiques raccordés pour obtenir et justifier le développement asymptotique de la solution à tout ordre en fonction de l'épaisseur de la fente. Les résultats sont radicalement différents suivant que la longueur de la fente est un multiple de la demi-longueur d'onde ou non, auquel cas un phénomène de résonance est observé. De nouvelles procédures de raccord 1D-2D peuvent être déduites de cette étude.

**Mots clés :** Helmholtz, fentes minces, raccordement de développements asymptotiques, modélisation, estimations d'erreur

## Abstract

This PhD thesis concerns the modelizing of scattering in the harmonic regime in two dimensional domains with thin slots. We first introduce and analyse an approximate model, which considers a 1D approximation inside the slot. This approximate model is based on two new "brute" coupling conditions at each end of the slot. As the accuracy of this technique is limited, we then use the technique of matching asymptotic expansions to obtain and justify the asymptotic expansion of the solution to any order with respect to the width of the slot. The results are totally different if the slot length is a multiple of half of the wave length. In this case a phenomena of resonance can be observed. New 1D-2D matching procedures can be deduced from this study.

**Key words :** Helmholtz, thin slots, matching of asymptotic expansions, modelization, error estimates.