



**HAL**  
open science

# Oscillations, concentration et dispersion pour des équations d'ondes et de Schrödinger

Rémi Carles

► **To cite this version:**

Rémi Carles. Oscillations, concentration et dispersion pour des équations d'ondes et de Schrödinger. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2005. tel-00009350

**HAL Id: tel-00009350**

**<https://theses.hal.science/tel-00009350>**

Submitted on 31 May 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# RAPPORT SCIENTIFIQUE

présenté à

**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1**

par

**Rémi CARLES**

pour obtenir

**L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

**Oscillations, concentration et dispersion pour des équations  
d'ondes et de Schrödinger**

Soutenue le 27 mai 2005

Après avis des rapporteurs

M. Patrick GÉRARD    Professeur, Université de Paris XI  
M. Jean-Claude SAUT    Professeur, Université de Paris XI  
M. Yoshio TSUTSUMI    Professeur, Université de Tohoku

Devant la commission d'examen composée de

M. Naoufel BEN ABDALLAH    Professeur, Université Toulouse III  
M. Thierry COLIN    Professeur, Université Bordeaux I  
M. Patrick GÉRARD    Professeur, Université de Paris XI  
M. Emmanuel GRENIER    Professeur, ENS Lyon  
M. Guy MÉTIVIER    Professeur, Université Bordeaux I  
M. Francis NIER    Professeur, Université Rennes I  
M. Jean-Claude SAUT    Professeur, Université Paris XI



## Agradecimentos

Guy Métivier, Jeffrey Rauch et Patrick Gérard ont eu une importance cruciale dans mes recherches. Guy évidemment pour la thèse, mais aussi pour la suite : qui le connaît sait qu'il suffit de discuter cinq minutes avec lui pour apprendre quelques chose, ou simplement y voir plus clair. Jeffrey m'a guidé pendant ma thèse et les mois qui ont suivi, notamment en m'accueillant à Ann Arbor où il m'a appris l'enseignement à l'américaine, et beaucoup apporté en termes de recherche. Patrick a accepté de rapporter sur cette habilitation, et je l'en remercie chaleureusement. C'est surtout pour sa disponibilité, son écoute et ses conseils depuis mes débuts dans la recherche que je tiens à le remercier. Plusieurs articles présentés ici n'auraient pas vu le jour sans lui.

Je ne peux dissocier dans ma gratitude à leur égard les aspects scientifiques et humains.

Jean-Claude Saut et Yoshio Tsutsumi ont également accepté de rapporter sur ce travail. Je les en remercie vivement. Naoufel Ben Abdallah, Emmanuel Grenier et Francis Nier me font le plaisir de participer au jury, je leur en suis très reconnaissant. Leurs travaux à tous ne manquent pas d'être une source d'inspiration dans mon travail.

Thierry Colin a rapporté sur ce travail, au sein du laboratoire. Je l'en remercie, ainsi que pour son soutien à Bordeaux et tout le reste.

Alors que je n'avais pas encore de poste, Nicolas Burq m'a proposé de faire partie de son ACI. Les discussions qui en ont résulté m'ont beaucoup apporté. En particulier, celles avec les autres membres de l'ACI, Clotilde Fermanian, Isabelle Gallagher et Luc Miller, se sont concrétisées par des articles, et m'ont laissé le souvenir (ainsi que la perspective) de moments très agréables.

Je n'oublie pas les autres coauteurs, avec qui j'ai pris plaisir à travailler : Jean-François, Dietrich, Sahbi, David, Peter, Norbert, Laurent, Yoshihisa, Christof et Hans Peter.

Depuis ma thèse, j'ai visité un certain nombre de laboratoires. Un peu trop à mon goût : cet excès de mobilité est dû à des circonstances sur lesquelles je n'ai malheureusement pas prise. À chaque séjour, j'ai été très bien accueilli. Je souhaite remercier à ce titre les institutions : l'Université du Michigan, la SISSA, l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan, l'IRMAR, le MAB bien sûr, l'Université d'Osaka, l'Université Libre de Bruxelles, l'Université et l'Institut Supérieur Technique de Lisbonne, et les Instituts Schrödinger et Pauli de Vienne. Et aussi des personnes n'apparaissant pas encore sur cette page : Alberto Bressan, Michel Pierre, Nicolas Lerner, Rémi Abgrall, Alain Bachelot, Jean-Luc Joly, Nakao Hayashi, Paul Godin, João Paulo Dias et Jorge Drumond Silva.

Même après ma thèse, François Castella n'a cessé de me poser des questions embarrassantes. Qu'il en soit remercié, et qu'il continue !

L'environnement scientifique que j'ai rencontré n'aurait pas été le même sans le GDR EAPQ. Ainsi que beaucoup d'autres, je dois à Éric Lombardi d'avoir pu à la fois faire

connaître mon travail, et surtout être en contact avec de nombreux autres collègues, aux thématiques variées.

La liste pourrait s'allonger encore des gens que j'ai pris plaisir à côtoyer. J'espère que ceux auxquels je pense ne seront pas froissés de mon souhait de concision.

Enfin, beaucoup de choses auraient été complètement différentes sans Sophie (y compris mon statut professionnel). Plus simples parfois, mais sans aucun doute beaucoup plus fades.

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1. Focalisation en un point pour des équations semilinéaires</b> .....	5
1.1. Équation de Schrödinger.....	6
1.2. Équation des ondes.....	13
1.3. Une généralisation.....	20
<b>2. Rôle des oscillations quadratiques pour NLS</b> .....	22
2.1. Le cas surcritique $L^2$ .....	23
2.2. Le cas critique $L^2$ .....	25
<b>3. Équation de Schrödinger avec potentiel et perturbation</b> .....	27
3.1. Oscillateur harmonique et perturbation non linéaire.....	28
3.2. Potentiel polynomial et perturbation non linéaire.....	32
3.3. Potentiel répulsif et perturbation linéaire : scattering.....	37
3.4. Ondes de Bloch faiblement non linéaires.....	39
<b>4. Travaux classés par thème</b> .....	41
Focalisation en un point pour des équations semilinéaires.....	41
Rôle des oscillations quadratiques dans NLS.....	42
Équations de Schrödinger avec potentiel et perturbation.....	42
<b>Bibliographie</b> .....	43



## Introduction

Les travaux présentés ici s'orientent principalement autour de trois axes : le phénomène de focalisation en un point pour des équations semilinéaires (essentiellement, de Schrödinger et des ondes), le rôle des oscillations quadratiques pour l'équation de Schrödinger non linéaire, et l'équation de Schrödinger avec potentiel et perturbation linéaire ou non-linéaire.

Le premier aspect concerne directement le contenu de ma thèse, et a été poursuivi pendant les trois années qui ont suivi. Il s'agit principalement de justifier et préciser sur des exemples les calculs formels exposés dans [42]. Reprenons l'équation principalement étudiée dans ma thèse :

$$(1) \quad i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Des données initiales de la forme

$$(2) \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f(x) e^{-i \frac{|x|^2}{2\varepsilon}}$$

donnent lieu, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à un phénomène de focalisation à l'origine à l'instant  $t = 1$ . Dans [42], les auteurs distinguent deux régimes : le régime type optique géométrique (en dehors de toute caustique), et le régime de caustique. Le premier correspond à la méthode BKW usuelle, qui consiste à chercher une solution sous forme de série formelle (dans un premier temps),

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^p e^{i \frac{\phi(t, x)}{\varepsilon}} \left( u^{(0)}(t, x) + \varepsilon^\kappa u^{(1)}(t, x) + \varepsilon^{2\kappa} u^{(2)}(t, x) + \dots \right),$$

où les paramètres  $p$  et  $\kappa$  sont ajustés selon le problème étudié et les phénomènes qu'on souhaite mettre en évidence (voir par exemple [72], [16]). Lorsque la phase initiale  $\phi(0, x)$  (qui vaut  $-|x|^2/2$  dans notre exemple) n'est pas plane,  $\phi$  vérifie une équation eikonale développant en général des singularités en temps fini. Ceci correspond à l'apparition d'une caustique, près de laquelle les termes du développement BKW (non seulement  $\phi$ , mais aussi  $u^{(0)}$ ,  $u^{(1)}$ , etc.) deviennent singuliers : l'approche doit être modifiée. Dans notre cas, l'équation eikonale s'écrit

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla_x \phi|^2 = 0,$$

et on vérifie qu'avec la donnée initiale envisagée ici, on a exactement

$$\phi(t, x) = \frac{|x|^2}{2(t-1)}.$$



Il y a bien formation d'une singularité à l'instant  $t = 1$ , et on peut calculer également, avec  $p = 0$  et  $\alpha > 1$ ,

$$u^{(0)}(t, x) = \frac{1}{(1-t)^{n/2}} f\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

Dans notre exemple, le phénomène de caustique se réduit à une concentration en un point, l'origine. Pour une équation linéaire, des approximations de la solution qui soient valides à la fois hors et près de la caustique ont été obtenues à l'aide d'intégrales oscillantes ([59, 20]). Dans le cas d'équations non linéaires, un nouveau paramètre doit être pris en compte : la taille de la solution, amplifiée, conservée, ou atténuée par les non-linéarités. Hunter et Keller [42] ont suggéré par des calculs formels qu'à chaque régime (BKW en dehors de la caustique, et régime spécifique près de la caustique) est associée une notion d'indice critique concernant la taille de la non-linéarité (ou de la solution, c'est équivalent par changement d'inconnue dans le cas d'une non-linéarité homogène). Pour (1), ceci se traduit par le fait que  $\alpha = 1$  est une valeur critique pour l'optique géométrique, alors que le cas critique près du point focal correspond à  $\alpha = n\sigma$ . Si  $\alpha > 1$  (cas sous-critique), alors la non-linéarité est négligeable en dehors de la caustique (réduite à un point dans notre cas), et si  $\alpha > n\sigma$ , les effets non-linéaires sont négligeables au premier ordre dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  près de la caustique. Dans [C00a], on décrit les phénomènes sous-critiques et critiques correspondants. Le phénomène le plus marquant est que pour  $\alpha = n\sigma > 1$ , le seul effet non-linéaire au premier ordre est décrit par un changement de l'amplitude de la solution  $u^\varepsilon$  à la traversée du point focal, mesuré par un opérateur de scattering. Un tel résultat est à rapprocher de [3].

Les généralisations données après ma thèse concernent la focalisation sur une droite pour le même type d'équation [C00b], une amélioration d'un cas traité de façon partielle dans ma thèse [C01a], et l'étude d'équations des ondes semilinéaires. Ce dernier aspect apparaît dans ma thèse [C98] dans le cas d'ondes radiales oscillantes en dimension trois d'espace. Au cours de mon séjour à Ann Arbor, nous avons commencé une collaboration avec Jeffrey Rauch ([CR02, CR04a, CR04b]), où on remplace le caractère oscillant par des impulsions courtes, techniquement plus souples. Dans [CR02], nous précisons le résultat de [C98] dans le cas d'impulsions courtes. Dans [CR04a], nous construisons un opérateur de scattering, pour montrer que comme dans le cas de l'équation de Schrödinger évoqué ci-dessus, cet opérateur sert à décrire les effets non-linéaires de caustique. En outre, nous décrivons une propriété qualitative (élargissement des impulsions) de cet opérateur. Finalement, dans [CR04b], nous traitons essentiellement des cas où le caractère dissipatif (resp. accréatif) de l'équation d'ondes donne lieu à une absorption (resp. intensification arbitraire) des impulsions à l'approche du foyer. Avec David Lannes, nous avons étudié un cas laissé ouvert dans [CR04b], celui d'équation conservative ([CL03]), puis généralisé des phénomènes mis en évidence dans cette série de papiers au cas d'équations semilinéaires dispersives [CL-p].

Le second axe de recherche analyse une question apparaissant à la lecture de [C00a], suggérée par la comparaison avec [31, 3] : pour des données de la forme (2), on a montré que le cas  $\alpha = n\sigma > 1$  correspond à des effets non-linéaires importants uniquement près du point focal. Réciproquement, si  $\alpha = n\sigma > 1$ , pour quelles données initiales la

non-linéarités a-t-elle un effet au premier ordre? Des réponses à cette question apparaissent dans [CFG03] pour le cas  $\sigma > \frac{2}{n}$ , et [CK-p] pour le cas  $\sigma = \frac{2}{n}$ . Pour  $\sigma > \frac{2}{n}$ , on montre que les données de la forme (2) sont essentiellement les seules à pouvoir “allumer” la non-linéarité, qui se manifeste alors comme dans [C00a]. Pour  $\sigma = \frac{2}{n}$ , l’invariance d’échelle conduit à prendre en compte une plus grande gamme de données initiales. L’approche suivie pour montrer ces résultats est très semblable aux méthodes employées dans [31, 3]. La première étape consiste à établir un critère de linéarisabilité, portant sur la solution d’une équation *linéaire*, qui permette de décider si la non-linéarité a un effet au premier ordre dans l’équation non-linéaire. Un tel résultat se situe dans l’esprit de [31]. L’étape suivante consiste à décrire les données initiales mettant en défaut le critère de linéarisabilité. Cette étape fait appel à la notion de *décomposition en profils*, introduite dans [32] et utilisée dans [3] (puis notamment [52, 27, 26]). Techniquement, la principale différence entre [CFG03] et [CK-p] est la suivante : dans [CFG03], le critère de linéarisabilité est établi à l’aide des seules conservations (masse et énergie) et inégalités de Strichartz, alors que dans [CK-p], la décomposition en profils est utilisée dès cette étape. Dans les deux cas, nous mettons en évidence un principe de superposition non-linéaire.

Le troisième thème est l’étude de l’équation de Schrödinger avec potentiel et perturbation. Dans le cas de perturbation non-linéaire, de telles équations apparaissent en physique, notamment dans l’étude de la condensation de Bose–Einstein. Insistons plutôt sur l’aspect mathématique. Beaucoup de travaux existent sur l’équation de Schrödinger non-linéaire (renvoyons à [13] pour une présentation synthétique récente). Parallèlement, l’étude de l’équation de Schrödinger linéaire avec potentiel a mobilisé beaucoup d’efforts et abouti à de nombreux résultats. Partant d’une culture plutôt non-linéaire, j’ai essayé de comprendre quels résultats pouvaient s’adapter dans le cas avec potentiel. Il s’avère que lorsque le potentiel est polynomial de degré au plus deux, l’adaptation se fait de façon assez souple. La remarque fondamentale est que dans ce cas, un outil classique de l’analyse linéaire (dérivées de Heisenberg) se trouve bien adapté aux problèmes non-linéaires : opérateurs pseudo-différentiels dans le cas général, les dérivées de Heisenberg sont dans ce cas des opérateurs différentiels se comportant à plusieurs égards comme le gradient. Signalons comme exemple marquant celui de l’équation ([C03b])

$$(3) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = -\omega^2 \frac{|x|^2}{2} u + \lambda |u|^{2\sigma} u ; u|_{t=0} = u_0 ,$$

avec  $\omega, \sigma > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u_0$  dans la classe de Schwartz pour fixer les idées. Il est facile d’établir l’existence et l’unicité de solutions locales en temps, grâce aux inégalités de Strichartz. Une technique habituelle pour globaliser consiste à utiliser des estimations a priori fournies par les conservations de la masse et de l’énergie. Dans le cas de (3), celles-ci s’écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Masse : } & \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} , \\ \text{Énergie : } & \frac{1}{2} \|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\omega^2}{2} \|xu(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = \text{Cste} . \end{aligned}$$

Dans le cas sans potentiel ( $\omega = 0$ ), si  $\lambda \geq 0$  (non-linéarité répulsive), on obtient une estimation a priori  $H^1$ , d’où on déduit l’existence globale pour  $\sigma < \frac{2}{n-2}$ , hypothèse

permettant d'utiliser les injections de Sobolev<sup>(1)</sup>. Par contre, dans le cas  $\omega \neq 0$ , la conservation de l'énergie ne permet pas de conclure, quel que soit le signe de  $\lambda$ . Grâce aux opérateurs évoqués plus haut, nous montrons qu'en fait la présence du potentiel  $-\omega^2|x|^2$  permet de contrarier le phénomène d'explosion en temps fini : on a existence globale pour  $\lambda \geq 0$ , et pour  $\lambda < 0$  dans des cas où on a explosion en temps fini quand  $\omega = 0$ .

Dans l'exemple ci-dessus, le rôle du potentiel peut être interprété comme celui d'un accélérateur : dans le cas "habituel" ( $\omega = \lambda = 0$ ), la vitesse asymptotique des particules en grand temps est de l'ordre de  $t$ . Dans le cas linéaire avec un tel potentiel ( $\lambda = 0, \omega > 0$ ), la vitesse asymptotique est de l'ordre de  $e^{\omega t}$ . Il s'ensuit par exemple qu'en terme de théorie du scattering, toute non-linéarité de type puissance sera une perturbation à courte portée, ce qui n'est pas le cas sans potentiel ( $\omega = 0$ , voir [5, 78, 79, 13]). Motivés par cet exemple, nous avons étudié avec Jean-François Bony, Dietrich Häfner et Laurent Michel [BCHM05] le cas d'une perturbation linéaire du hamiltonien  $-\Delta - |x|^2$ , et généralisé au cas de  $-\Delta - |x|^\alpha$ , pour  $0 < \alpha \leq 2$ . Comme ci-dessus, la difficulté mathématique principale tient au fait que le hamiltonien de référence n'est pas elliptique ; nous montrons que le potentiel  $-|x|^\alpha$  accélère les "particules" (nous ne prétendons nullement couvrir un modèle physique), et modifie la notion courte/longue portée. Ceci se montre en adaptant la théorie de Mourre ([63, 17, 28]).

Le dernier paragraphe évoque l'étude d'une équation de Schrödinger en régime semi-classique, en présence d'un potentiel périodique en espace, de période de l'ordre du paramètre semi-classique, d'un potentiel confinant, et d'une perturbation (faiblement) non linéaire :

$$(4) \quad i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = V_\Gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon + U(x)u^\varepsilon + \lambda(t)\varepsilon|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon,$$

où  $V_\Gamma$  est périodique le long d'un réseau  $\Gamma$ ,  $U$  est sous-quadratique au sens large (penser à un oscillateur harmonique, isotrope ou non),  $\lambda$  est une fonction régulière, et  $0 < \sigma < \frac{2}{n-2}$ . Dans le cas linéaire ( $\lambda \equiv 0$ ), on sait dire beaucoup de choses sur cette équation (voir par exemple [4, 30, 33, 70, 80]). L'étude d'une perturbation non linéaire est motivée par la physique (condensation de Bose-Einstein). Dans [CMSp04], nous avons étudié une asymptotique semi-classique pour des données bien préparées, avant formation de caustique.

---

<sup>(1)</sup>Si  $\sigma < \frac{2}{n}$ , on a existence globale  $L^2$  sans passer par l'énergie, avec ou sans potentiel.

# Chapitre 1

## Focalisation en un point pour des équations semilinéaires

L'article fondateur de l'étude d'oscillations par la méthode de l'optique géométrique est dû à Lax ([56]) : soit  $L(y, \partial_y)$  un opérateur différentiel matriciel, où  $y = (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ . On considère le problème de Cauchy

$$(1.1) \quad L(y, \partial_y)u = 0 \quad ; \quad u|_{t=0} = f(x)e^{i\varphi(x)/\varepsilon},$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre tendant vers zéro : physiquement,  $\varepsilon$  peut représenter une longueur d'onde, la constante de Planck, une viscosité, etc. La méthode de Lax consiste à chercher, tout d'abord formellement, une solution de (1.1) sous forme d'un développement asymptotique BKW

$$u(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} e^{i\phi(t, x)/\varepsilon} (u_0(t, x) + \varepsilon u_1(t, x) + \dots),$$

puis à justifier, par des arguments de stabilité, ces calculs formels. On peut lire à ce sujet l'exposé introductif de J. Rauch ([72]). La phase  $\phi$  est solution de l'équation eikonale :

$$\det L(y, d\phi) = 0 \quad ; \quad \phi|_{t=0} = \varphi.$$

Ainsi, pour l'équation des ondes, on trouve

$$(\partial_t \phi)^2 = |\nabla_x \phi|^2,$$

et pour l'équation de Schrödinger,

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla_x \phi|^2 = 0.$$

L'équation eikonale est résolue, localement en temps en général, par la méthode de Hamilton-Jacobi. A priori, la phase  $\phi$  n'est pas définie globalement en temps et il apparaît une caustique.

Dans le cas d'une équation linéaire, on sait complètement décrire les phénomènes qui se produisent au niveau de la caustique, [59, 20]. L'influence de la caustique consiste au premier ordre en l'apparition d'un déphasage à la traversée de la caustique, l'indice de Maslov. Dans [42], les auteurs appliquent formellement l'ansatz de Ludwig pour des lois de conservation. Il ressort de cette approche que selon l'échelle entre l'amplitude et la longueur d'onde de la solution, il convient de distinguer d'une part la nature de la propagation, et d'autre part, la nature de l'influence de la caustique. La nature de la propagation (linéaire ou non linéaire) est celle qui est déterminée par la méthode BKW. En qualifiant l'influence de la caustique de linéaire, les auteurs veulent dire que les effets non linéaires *cumulés* au voisinage de la caustique sont négligeables. Au contraire, si les

effets non linéaires se ressentent au premier ordre à la traversée de caustique, alors on parle de “caustique non linéaire”.

L'étude des phénomènes de caustique pour des équations non linéaires a également donné lieu à plusieurs travaux de Joly, Métivier et Rauch ([43, 44, 45, 46, 49], voir aussi [47] et [48] pour une présentation générale). Plusieurs questions restent toutefois en suspens. Celles auxquelles nous avons apporté quelques réponses traitent en particulier d'équations conservatives (dont le cas modèle étudié est l'équation de Schrödinger) et l'obtention d'estimations  $L^\infty$  (ceci est réalisé en particulier pour des ondes ultra-courtes). Nous avons traité essentiellement le cas où la caustique est réduite à un point, et justifié (dans certains cas, précisé, en décrivant un phénomène non-linéaire au point focal) l'heuristique de [42].

## 1.1. Équation de Schrödinger

**1.1.1. Focalisation en un point.** — Soit l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = 0 \quad ; \quad v|_{t=0} = e^{-i\frac{|x|^2}{2}} \quad ; \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n .$$

Par analyse de Fourier, on constate qu'à l'instant  $t = 1$ , la solution  $v$  vaut la masse de Dirac à l'origine. Il y a apparition d'une singularité à cause des oscillations quadratiques (voir aussi [74]). Un phénomène analogue se produit dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour

$$(1.2) \quad i\varepsilon\partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta v^\varepsilon = 0 \quad ; \quad v^\varepsilon|_{t=0} = f(x)e^{-i\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} ,$$

avec  $f$  par exemple dans la classe de Schwartz. Le noyau de l'opérateur de Schrödinger étant explicite, le théorème de la phase stationnaire permet d'établir

$$(1.3) \quad v^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{(1-t)^{n/2}} f\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} & \text{si } t < 1, \\ \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \widehat{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{si } t \approx 1, \\ \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{(t-1)^{n/2}} f\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

où la transformée de Fourier est définie par

$$(1.4) \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx .$$

Dans ce cas précis, l'indice de Maslov vaut  $-n\frac{\pi}{2}$ . Dans ma thèse, j'ai considéré la perturbation semilinéaire de l'équation précédente,

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon \quad ; \quad u^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon^p f(x) e^{-i\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} .$$

Le signe opposé devant le terme non-linéaire (non-linéarité attractive) a également été considéré, mais de façon suffisamment marginale pour que nous nous restreignions au cas répulsif ci-dessus. La forme de la donnée initiale assure qu'il y a encore formation d'un point focal à l'origine à l'instant  $t = 1$ . Les calculs de Hunter et Keller suggèrent que des notions d'indice critique sont associées à  $\sigma$  et  $p$  (qui mesure la taille des données initiales), pour la propagation en dehors de  $t = 1$  d'une part, et près de  $t = 1$  d'autre part.

Ramenons-nous à des données initiales de taille  $\mathcal{O}(1)$ , en posant  $u^\varepsilon = \varepsilon^{-p} \mathbf{u}^\varepsilon$  :

$$(1.5) \quad i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon \quad ; \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f(x) e^{-i \frac{|x|^2}{2\varepsilon}},$$

c'est-à-dire (1) avec  $\alpha = 2\sigma p$ . Des raisonnements semblables à ceux de [42] conduisent aux distinctions suivantes (voir [C00a]) :

	$\alpha > n\sigma$	$\alpha = n\sigma$
$\alpha > 1$	foyer linéaire optique linéaire	foyer non linéaire optique linéaire
$\alpha = 1$	foyer linéaire optique non linéaire	foyer non linéaire optique non linéaire

Dans [C00a], les quatre cas ont été étudiés, celui d'un foyer non linéaire avec régime d'optique non linéaire se faisant sur un modèle intermédiaire de deux équations linéaires couplées non-linéairement, en dimension un d'espace :

$$(1.6) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 v^\varepsilon = 0 \\ i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \varepsilon |v^\varepsilon|^2 u^\varepsilon. \end{cases}$$

Le modèle complet de l'équation non linéaire cubique a été étudié dans [C01a].

La présentation qui suit ne correspond pas à celle de [C00a, C01a], mais plutôt à une vue d'ensemble ultérieure, utilisée notamment dans [C03a], [CFG03] et [CMSp04].

Un premier réflexe pour étudier la limite semi-classique dans (1) consiste à établir des inégalités d'énergie. Pour contrôler les termes non linéaires, on peut alors penser aux inégalités de Gagliardo–Nirenberg,

$$(1.7) \quad \|u\|_{L^p} \lesssim \|u\|_{L^2}^{1-\delta} \|\nabla u\|_{L^2}^\delta.$$

(Nous ne précisons pas les valeurs autorisées pour  $p$ , ni la valeur de  $\delta(p)$ , ceci n'apportant rien à la présentation.) Dans le cas de fonctions rapidement oscillantes, la dérivation ci-dessus s'avère d'un coût élevé : on ne pourrait pas espérer mieux en général que

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{L^p} \lesssim \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^{1-\delta} \|\nabla_x u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^\delta = \text{Cste} \times \mathcal{O}(\varepsilon^{-\delta}).$$

Considérons dans un premier temps le cas d'un foyer linéaire avec optique linéaire. L'heuristique suggère que la solution de (1.2) fournit une approximation uniforme. D'après (1.3) (que l'on peut énoncer plus précisément),

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L^p} = \mathcal{O}(|t-1|^{-\delta}) = \mathcal{O}_\eta(1) \quad \text{pour } |t-1| \geq \eta > 0.$$

Ainsi, l'estimation donnée par les inégalités de Gagliardo–Nirenberg s'avère loin d'être optimale en terme de puissances de  $\varepsilon$ . Pour palier à ce défaut, on pourrait suivre l'approche introduite par O. Guès ([38]) : en construisant un développement asymptotique suffisamment poussé, la taille du reste peut être affaiblie par les inégalités de Gagliardo–Nirenberg, mais rester assez petite pour justifier le développement (voir aussi [72]). En présence de caustique, il semble délicat de chercher plusieurs termes d'un développement asymptotique : négligeable au premier ordre, la non-linéarité finit par se manifester aux

ordres suivants, et à moins d'imposer de nouvelles conditions à  $\alpha$  (qui ne permettraient plus de justifier le tableau ci-dessus), on serait confronté à de nouveaux problèmes.

L'approche suivie dans [C00a] consiste à profiter autant que possible de la connaissance géométrique de la propagation (voir figure 1). Dans le cas de (1.2), on connaît précisément

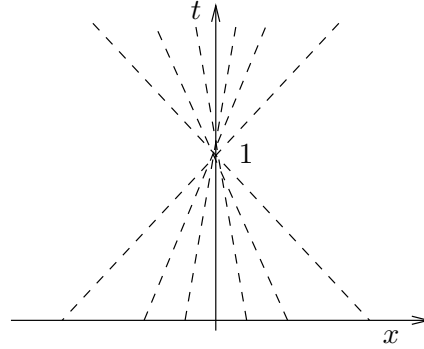


FIGURE 1. Rayons de l'optique géométrique : focalisation en un point.

les oscillations de la solution (1.3). A priori, seules ces oscillations sont responsables du défaut de précision dans les inégalités de Gagliardo–Nirenberg ci-dessus. Commençons donc par compenser ces oscillations *avant* de prendre le gradient, en considérant

$$w \mapsto \nabla_x \left( e^{-i \frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} w \right).$$

Par ailleurs, la vitesse de concentration est connue dans le cas linéaire (1.3) : elle est de l'ordre de  $|t - 1|$  en dehors du point focal. Introduisons alors

$$(1.8) \quad J^\varepsilon(t) = i(t-1) e^{i \frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} \nabla_x \left( e^{-i \frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} \right) = \frac{x}{\varepsilon} + i(t-1) \nabla_x.$$

Cet opérateur n'est autre que l'opérateur de Galilée  $x + it\nabla_x$ , introduit dans [34], modifié par le changement d'échelle

$$T = \frac{t-1}{\varepsilon} \quad ; \quad X = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Cet opérateur permet alors de justifier l'approximation de  $u^\varepsilon$  par  $v^\varepsilon$  en dehors du point focal. Près du point focal, les inégalités de Gagliardo–Nirenberg ci-dessus deviennent essentiellement optimales, et on justifie alors globalement (localement uniformément en temps en général) l'approximation de  $u^\varepsilon$  par  $v^\varepsilon$ , en considérant un système fermé constitué à l'aide des opérateurs  $Id$ ,  $\varepsilon \nabla_x$  et  $\frac{x}{\varepsilon} + i(t-1) \nabla_x$ .

Avant d'expliquer les autres cas du tableau, énonçons un résultat précis. Généralisant l'écriture de [20] au cas non linéaire, suivant ainsi l'approche de [49], écrivons

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i \frac{t-1}{2\varepsilon} \xi^2 + i \frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Cette écriture a toujours un sens car à  $t$  fixé, l'intégrale oscillante ci-dessus définit une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dans le cas linéaire, on a, au premier ordre,  $\partial_t a = 0$ .

Passant à la limite formellement dans l'équation vérifiée par  $a_\varepsilon$ , on trouve dans le cas  $\alpha = 1$  :

$$(1.9) \quad i\partial_t a(t, \xi) = \frac{1}{|2\pi(1-t)|^{n\beta/2}} |a|^\beta a(t, \xi).$$

Introduisons  $\tilde{a}_\varepsilon$  défini par

$$a_\varepsilon(t, \xi) = e^{ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi),$$

où  $g$  est solution de

$$\partial_t g(t, \xi) = \frac{1}{|1-t|^{n\beta/2}} |f(-\xi)|^\beta \quad ; \quad g|_{t=0} = 0.$$

Alors (1.9) devient  $\partial_t \tilde{a} = 0$ . Utilisant la convention  $g \equiv 0$  si  $\alpha > 1$ , écrivons plus généralement :

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Une fois pour toute, notons  $\Sigma = H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$ , où  $\mathcal{F}$  est la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Pour ne pas alourdir les hypothèses, considérons le cas unidimensionnel :

**Théorème 1.1** ([C00a]). — *Supposons  $n = 1$ . Soient  $\sigma > 0$  et  $\alpha \geq 1$ . La donnée initiale de  $\tilde{a}_\varepsilon$  converge :*

$$\tilde{a}_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{i}} f(-\xi) =: a_0(\xi) \text{ dans } \Sigma.$$

1. Pour  $t < 1$ , on a  $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi)$  dans  $\Sigma$ .
2. Pour  $t > 1$ ,  $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Z a_0(\xi)$  dans  $\Sigma$ , où  $Z$  est défini par :
  - $Z = I$  pour un foyer linéaire ( $\alpha > \sigma$ ).
  - $Z = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1}$  pour une optique linéaire ( $\alpha > 1$ ) et un foyer non linéaire ( $\alpha = \sigma$ ), où  $S$  est l'opérateur de scattering (lorsque celui-ci agit de  $\Sigma$  dans  $\Sigma$ ) associé à

$$(1.10) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \Delta \psi = |\psi|^{2\sigma} \psi.$$

Dans le cas  $\alpha = 1 > \sigma$ , seul le terme de phase  $g$  apparaît comme nouveau : il prend en compte les effets non linéaires en dehors du point focal (ces effets sont négligeables au point focal). Ces effets sont *faiblement* non linéaires, dans la mesure où ils n'affectent pas la géométrie de la propagation (ils n'apparaissent pas au niveau de l'équation eikonale), mais seulement l'équation de transport du profil principal.

Considérons maintenant le cas d'un foyer non linéaire,  $\alpha = n\sigma$  (on a le même type de résultat que ci-dessus en toute dimension, voir [C00a]). Pour  $\alpha > 1$ , le seul effet non linéaire au premier ordre est le saut du symbole lagrangien  $a_\varepsilon$  ( $= \tilde{a}_\varepsilon$  car  $\alpha > 1$ ) au point focal, mesuré par l'opérateur de scattering associé à (1.10). Esquissons une démonstration. Définissons  $\psi^\varepsilon$  par

$$(1.11) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \psi^\varepsilon \left( \frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$



On a alors

$$i\partial_t \psi^\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta \psi^\varepsilon = |\psi^\varepsilon|^{2\sigma} \psi^\varepsilon \quad ; \quad \psi^\varepsilon \Big|_{t=-\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon^{n/2} f(\varepsilon x) e^{-i\varepsilon \frac{|x|^2}{2}}.$$

Éclaircissons le caractère surprenant de la donnée de Cauchy. Notons  $U_0(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}$  le groupe associé à l'équation de Schrödinger libre. On vérifie qu'on a la convergence

$$(1.12) \quad U_0(-t)\psi^\varepsilon(t) \Big|_{t=-\frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_- := e^{-in\frac{\pi}{4}} \widehat{f}, \text{ dans } \Sigma.$$

Utilisant les propriétés de l'équation (1.10) (existence d'opérateurs d'ondes, complétude asymptotique et caractère globalement bien posé pour certaines valeurs de  $\sigma$ , voir par exemple [34, 15]), on a

$$\|\psi^\varepsilon - \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t; \Sigma)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où  $\psi$  est l'unique solution du problème de Cauchy en  $-\infty$  :

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta \psi = |\psi|^{2\sigma} \psi \quad ; \quad U_0(-t)\psi^\varepsilon(t) \Big|_{t=-\infty} = \psi_-.$$

La théorie du scattering (voir par exemple [34, 15, 13]) permet en outre de montrer l'existence d'une fonction  $\psi_+ =: S\psi_-$  (ce qui définit l'opérateur de scattering  $S$ ) telle que

$$\|U_0(-t)\psi(t) - \psi_+\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Le résultat du théorème 1.1 suit alors facilement. En particulier, on met en évidence l'existence d'un *profil de caustique* : pour  $t$  proche de 1,

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \psi\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On peut aussi écrire une asymptotique à la manière de (1.3) :

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} \frac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{(1-t)^{n/2}} \mathcal{F}^{-1} \psi_- \left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} & \text{si } t < 1, \\ \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} W_- \psi_- \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{si } t \approx 1, \quad \text{où } W_- : \psi_- \mapsto \psi|_{t=0} \text{ est l'opérateur d'onde,} \\ \frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{(t-1)^{n/2}} \mathcal{F}^{-1} S\psi_- \left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{|x|^2}{2\varepsilon(t-1)}} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

Ce type de résultat (profil de concentration et traversée de point focal décrite par un opérateur de scattering) est à rapprocher de [3].

Dans le cas  $n = 1$  (le cas  $n \geq 2$  n'est pas étudié),  $\alpha = n\sigma = 1$ , on ne peut plus utiliser directement un tel argument. En effet, l'opérateur de scattering  $S$  n'est pas défini : on ne peut plus comparer la dynamique non linéaire (1.10) et la dynamique libre donnée par  $U_0$  ([5, 78, 79, 13]). La construction d'opérateurs d'ondes modifiés pour prendre en compte les effets à longue portée est due initialement à T. Ozawa [69], et une notion de complétude asymptotique est due à N. Hayashi et P. Naumkin [40]. Dans les deux travaux, une hypothèse de petitesse sur les données (état asymptotique pour [69], donnée de Cauchy pour [40]) est nécessaire. Par contre, si grosso modo les résultats de [69] permettent de passer du temps  $t = -\infty$  au temps  $t = 0$ , et les résultats de [40] du temps  $t = 0$  au temps

$t = +\infty$ , on ne peut pas recoller ces résultats, en raison d'un écart de régularité entre la donnée à  $t = 0$  dans [69] et celle de [40].

En reprenant les calculs formels de [C00a] menant à la définition de  $g$  ci-dessus, et par l'étude de certaines intégrales oscillantes et de leur approximation, je redémontre dans [C01a] le résultat d'Ozawa, en précisant la régularité de la donnée à  $t = 0$ , ce qui permet de recoller avec les résultats de [40].

En prévision de la présence d'un opérateur de diffusion à longue portée, nous modifions la donnée initiale de (1.5) pour considérer

$$(1.13) \quad i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2 u^\varepsilon = \lambda\varepsilon|u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon \quad ; \quad u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon} + i\lambda|f(x)|^2 \log \frac{1}{\varepsilon}} f(x).$$

**Théorème 1.2** ([C01a]). — *Supposons  $n = \alpha = \sigma = 1$ .*

1. *On peut définir un opérateur de scattering modifié pour (1.10), pour des données dans  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ , où :*

$$\mathcal{H} = \{f \in H^3(\mathbb{R}); xf \in H^2(\mathbb{R})\}.$$

*Plus précisément, il existe  $\delta > 0$  tel qu'à toute  $\psi_- \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$  avec  $\|\psi_-\|_\Sigma < \delta$ , on peut associer  $\psi \in C(\mathbb{R}_t, \Sigma)$  solution de (1.10), et  $\psi_+ \in L^2$ , telles que*

$$(1.14) \quad \psi(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} e^{iS^\pm(t)} U_0(t) \psi_\pm \quad \text{dans } L^2,$$

où  $S^\pm$  sont définis par  $S^\pm(t, x) := \lambda \left| \widehat{\psi}_\pm \left( \frac{x}{t} \right) \right|^2 \log |t|$ . Notons  $S : \psi_- \mapsto \psi_+$ .

2. *Soit  $f \in \mathcal{H}$ , avec  $\|f\|_\Sigma$  suffisamment petite. Soit  $u^\varepsilon$  la solution de (1.13) (qui est dans  $C(\mathbb{R}; L^2)$ ). On a alors l'asymptotique suivante dans  $L^2$  :*

$$\begin{aligned} - \text{ si } t < 1, \text{ alors : } u^\varepsilon(t, x) &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{1-t}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + i\lambda \left| \widehat{\psi}_- \left( \frac{x}{t-1} \right) \right|^2 \log \frac{1-t}{\varepsilon}} \widehat{\psi}_- \left( \frac{x}{t-1} \right); \\ - \text{ si } t > 1, \text{ alors : } u^\varepsilon(t, x) &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t-1}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + i\lambda \left| \widehat{\psi}_+ \left( \frac{x}{t-1} \right) \right|^2 \log \frac{t-1}{\varepsilon}} \widehat{\psi}_+ \left( \frac{x}{t-1} \right), \end{aligned}$$

où  $\psi_-$  est donnée par (1.12) et  $\psi_+ = S\psi_-$ .

**Remarque 1.3.** — *Des facteurs  $2\pi$  apparaissent dans [C01a] et pas ici, en raison de différentes conventions pour la transformée de Fourier.*

Le déphasage de  $-\pi/2$  entre les deux asymptotiques (avant et après focalisation) est classique : c'est un phénomène linéaire (indice de Maslov, [20]). Le changement d'amplitude, mesuré par un opérateur de scattering, procède comme dans le théorème 1.1. Le phénomène nouveau ici est le déphasage

$$\lambda \left| \widehat{\psi}_+ \left( \frac{x}{t-1} \right) \right|^2 \log \frac{t-1}{\varepsilon} - \lambda \left| \widehat{\psi}_- \left( \frac{x}{t-1} \right) \right|^2 \log \frac{t-1}{\varepsilon},$$

qui est "fortement non linéaire" et dépend de  $\varepsilon$ . Suivant une idée de Guy Métivier, nous avons qualifié ce déphasage d'*aléatoire*.

**1.1.2. Mesures de Wigner.** — Une conséquence directe du théorème 1.1 est que l'on peut calculer explicitement les mesures de Wigner associées à  $u^\varepsilon$ , puisqu'on a des convergences fortes dans  $L^2$ . Rappelons que la mesure de Wigner d'une famille  $(u^\varepsilon(t))_{0 < \varepsilon \leq 1}$  bornée dans  $L^2(\mathbb{R})$  est la limite faible (à extraction d'une sous-suite près) de sa transformée de Wigner,

$$(1.15) \quad W^\varepsilon(u^\varepsilon)(t, x, \xi) = \int u^\varepsilon\left(t, x - \frac{v\varepsilon}{2}\right) \overline{u^\varepsilon}\left(t, x + \frac{v\varepsilon}{2}\right) e^{i\xi v} \frac{dv}{2\pi}.$$

Cette limite est une mesure de Radon positive  $\mu$ , son étude s'est révélée efficace pour des problèmes linéaires semi-classiques ou d'homogénéisation (voir par exemple [58, 33]). Dans le résultat qui suit, nous notons  $\mu_-$  (resp.  $\mu_+$ ) la mesure de Wigner associé à  $u^\varepsilon$  avant (resp. après) la focalisation à  $t = 1$ .

**Théorème 1.4** ([C01b]). — Soit  $n = 1$ . Considérons les problèmes de Cauchy (1.5), pour  $\alpha \geq 1$ ,  $\sigma > 0$ , et (1.13) dans le cas  $\alpha = 1 = \sigma$ .

1. Si  $\alpha > \sigma$ , on a  $\mu^- = \mu^+$ , donnée par

$$\mu^-(t, x, \xi) = \frac{1}{|t-1|} \left| f\left(\frac{x}{1-t}\right) \right|^2 dx \otimes \delta_{\xi = \frac{x}{t-1}}.$$

2. Si  $\alpha = \sigma \geq 1$ , la mesure avant focalisation est encore donnée par  $\mu^-$ , mais la mesure  $\mu^+$  au-delà de la caustique est décrite par un opérateur de diffusion, via la formule

$$\mu^+(t, x, \xi) = \frac{1}{|t-1|} \left| Zf\left(\frac{x}{1-t}\right) \right|^2 dx \otimes \delta_{\xi = \frac{x}{t-1}}, \quad \text{avec } Z = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1}.$$

En particulier,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \mu^-(t, x, \xi) = \delta(x) \otimes |f(\xi)|^2 d\xi; \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} \mu^+(t, x, \xi) = \delta(x) \otimes |Zf(\xi)|^2 d\xi.$$

3. Supposons  $\alpha = \sigma > 1$ . Il existe deux familles  $(u_j^\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ ,  $j = 1, 2$ , solutions de (1.5) (ayant des profils initiaux  $f_j$  différents), avec des mesures de Wigner  $\mu_j^\pm$  avant et après la caustique telles que  $\mu_1^- = \mu_2^-$  et  $\mu_1^+ \neq \mu_2^+$ .

Les deux premiers points, conséquences immédiates des théorèmes 1.1 et 1.2, montrent que dans le cas  $\alpha = 1$  (optique - faiblement - non linéaire), la mesure de Wigner ne voit pas l'effet non linéaire en dehors du point focal. C'est parce que celui-ci se manifeste à travers un terme de phase oscillant à l'échelle  $\mathcal{O}(1)$ .

Le dernier point montre que dans ce contexte, le problème de la traversée du point focal est un problème mal posé. Il découle d'une étude de l'opérateur de scattering  $S$  près de l'origine, à la manière de [31].

**1.1.3. Focalisation sur une droite.** — Dans [C00b], nous avons considéré une géométrie différente, en remplaçant la focalisation en un point par la focalisation sur une droite en dimension deux d'espace (cette dernière hypothèse étant surtout là pour minimiser la complexité technique). Soit donc le problème de Cauchy :

$$(1.16) \quad i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f(x) e^{-i \frac{x_1^2}{2\varepsilon}}.$$

Cette donnée initiale entraîne une focalisation sur la droite  $\{x_1 = 0\}$  à l'instant  $t = 1$  (voir la figure 2). Intuitivement, on répète infiniment le cas mono-dimensionnel de (1.5),  $x_2$

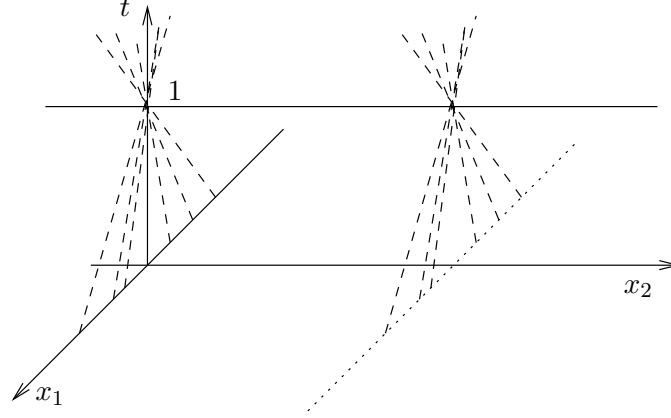


FIGURE 2. Rayons de l'optique géométrique : focalisation sur une droite.

jouant le rôle d'un paramètre. On s'attend alors à avoir le même tableau que précédemment avec  $n = 1$ . La difficulté technique pour justifier cette intuition consiste à contrôler la dépendance en  $x_2$ . En introduisant

$$E := \{ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2) / \partial_{x_1 x_2}^2 \varphi, x_1 \varphi, x_1 \partial_{x_2} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) \},$$

on établit une théorie de la diffusion, suffisante pour adapter le théorème 1.1. Les notations et résultats intermédiaires nécessaires à un énoncé compréhensible étant assez lourds, nous avons renoncé à préciser ici la discussion qui précède.

## 1.2. Équation des ondes

La première partie de ma thèse ([C98]) consistait en l'étude d'une équation des ondes non linéaire en dimension trois d'espace. Pour des données radiales oscillantes, il y a apparition d'un point focal à l'origine (seule la symétrie radiale des oscillations initiales est à l'origine de ce phénomène, voir [45]). Contrairement au cas de l'équation de Schrödinger mentionné précédemment, ce phénomène ne se produit pas à un instant unique, les paquets d'onde voyageant tous à la même vitesse. Concentrons notre étude sur l'équation modèle

$$(1.17) \quad \square u^\varepsilon + a |\partial_t u^\varepsilon|^{p-1} \partial_t u^\varepsilon = 0,$$

où  $\square = \partial_t^2 - \Delta$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et  $p > 1$ . Dans [C98], nous avons considéré des données initiales de la forme

$$u^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon U_0 \left( r, \frac{r}{\varepsilon} \right) \quad ; \quad \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} = U_1 \left( r, \frac{r}{\varepsilon} \right),$$

avec  $U_j(r, \cdot)$   $2\pi$ -périodique. Ceci est un cas particulier des études menées dans [44, 45, 46, 49]. Notons que pour  $a \in \mathbb{R}_+$ , l'équation (1.17) est dissipative : l'énergie linéaire,

$$E^\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^3} (|\partial_t u^\varepsilon(t, x)|^2 + |\nabla_x u^\varepsilon(t, x)|^2) dx,$$

est une fonction décroissante du temps (voir par exemple [57]). Dans [45], les auteurs ont montré que si  $a > 0$  et  $p > 2$ , alors les oscillations sont absorbées au point focal : seule reste une partie non oscillante à la sortie de la caustique, en raison des effets dissipatifs (voir aussi [50] pour une absorption des singularités). Si  $1 < p < 2$ , une étude d'intégrales oscillantes dans  $L^q$  a permis de montrer dans [49] qu'en moyenne (dans des espaces de Lebesgue d'indice fini), aucun effet non linéaire ne se produit au premier ordre à la traversée de la caustique. Dans [C98], nous avons considéré un cadre de travail plus particulier (toujours  $1 < p < 2$ , mais dimension trois et données radiales, ces deux dernières hypothèses permettant de se ramener à un système couplé en dimension un d'espace, analysé par la méthode des caractéristiques), et obtenu des asymptotiques dans  $L^\infty$ . Relevons deux phénomènes :

- La solution approchée fournie par l'optique géométrique est singulière sur la caustique, alors que la solution exacte ne l'est pas, ce que ne permettait pas de vérifier l'étude [49].
- Au-delà de la caustique, de nouveaux termes apparaissent, de taille  $\varepsilon^{2-p}$  (puissance non entière), qui peuvent être vus comme une trace des effets non linéaires de caustique. Notons que ces termes étant  $o(1)$ , on a tout de même une "caustique linéaire".

Ce résultat étant présent dans ma thèse, je ne le détaille pas plus ici. Notons simplement que dans [C98], nous n'avons pas de description réellement simple de la solution exacte près de  $\{r = 0\}$ . Une telle description apparaît dans [CR02], pour des données initiales d'un autre type :

$$u^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon U_0 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right) \quad ; \quad \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} = U_1 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right),$$

où  $r_0 > 0$  et  $U_j(r, \cdot)$  sont à support compact,  $\text{supp } U_j(r, \cdot) \subset [-z_0, z_0]$  pour  $z_0 > 0$  indépendant de  $r$ . Cette dernière hypothèse correspond à l'étude d'impulsions ultra-courtes, initiée dans [1, 2], et motivée par l'existence de lasers dont la taille du support est de l'ordre de quelques longueurs d'onde seulement (au lieu de  $\varepsilon^{-1} \gg 1$  dans le cas de trains d'ondes, voir par exemple [75]).

Nous nous plaçons toujours en dimension trois d'espace. Puisque les données sont radiales, on a encore focalisation à l'origine. Par contre, le fait de considérer des impulsions ultra-courtes localise en temps ce phénomène, qui se produit à l'instant  $t = r_0$  (la vitesse de propagation est choisie égale à 1 dans (1.17)), voir la figure 3 pour le cas bidimensionnel.

Pour énoncer un résultat précis (et aussi en vue des autres cas étudiés), esquissons les calculs. Puisque les conditions initiales sont radiales, il en est de même pour la solution  $u^\varepsilon$ , et en notant encore  $u^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, |x|)$ , introduisons  $v^\varepsilon := (v_-^\varepsilon, v_+^\varepsilon)$  avec

$$\tilde{u}^\varepsilon(t, r) := r u^\varepsilon(t, r), \quad v_\mp^\varepsilon := (\partial_t \pm \partial_r) \tilde{u}^\varepsilon, \quad v_\mp^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r).$$

Notre problème initial devient

$$(1.18) \quad \begin{cases} (\partial_t \pm \partial_r) v_\pm^\varepsilon = r^{1-p} g(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon), & g(y) := b|y|^{p-1}y, \quad b := -a2^{-p}, \\ v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon|_{r=0} = 0, \\ v_\mp^\varepsilon|_{t=0} = P_\mp \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right) \pm \varepsilon P_1 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right), \end{cases}$$

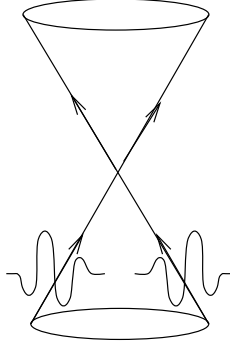


FIGURE 3. Focalisation des impulsions ultra-courtes.

pour des profils  $P$  reliés aux  $U_j$ , possédant la même régularité et satisfaisant à la même condition de support. Adaptant [2], on cherche des solutions approchées de la forme

$$\begin{aligned} (v^\varepsilon)_{\text{app}} &:= ((v_-^\varepsilon)_{\text{app}}, (v_+^\varepsilon)_{\text{app}}), \\ (v_-^\varepsilon)_{\text{app}}(t, r) &:= V^{\text{in}}(t, r, z_1) \Big|_{z_1 = \frac{r-r_0+t}{\varepsilon}}, \\ (v_+^\varepsilon)_{\text{app}}(t, r) &:= V^{\text{foc}}(t, r, z_2) \Big|_{z_2 = \frac{t-r-r_0}{\varepsilon}} + V^{\text{out}}(t, r, z_3) \Big|_{z_3 = \frac{r-t-r_0}{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

pour des profils  $V^{\text{in}}$ ,  $V^{\text{foc}}$  et  $V^{\text{out}}$  à support compact en la variable  $z$ , solutions de :

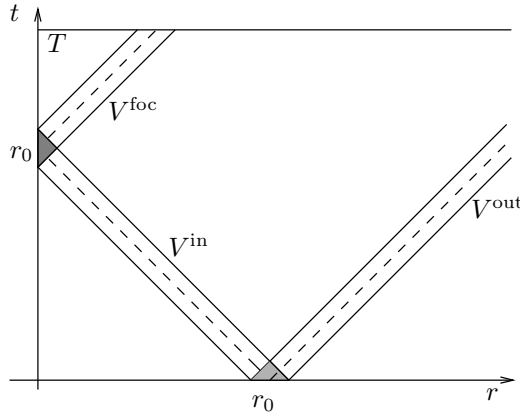


FIGURE 4. Géométrie des rayons caractéristiques.

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_r)V^{\text{in}}(t, r, z_1) &= r^{1-p}g(V^{\text{in}})(t, r, z_1) \quad ; \quad V^{\text{in}}|_{t=0} = P_-(r, z_1), \\ (\partial_t + \partial_r)V^{\text{out}}(t, r, z_3) &= r^{1-p}g(V^{\text{out}})(t, r, z_3) \quad ; \quad V^{\text{out}}|_{t=0} = P_+(r, z_3), \quad V^{\text{out}}|_{r=0} = 0, \\ (\partial_t + \partial_r)V^{\text{foc}}(t, r, z_2) &= r^{1-p}g(V^{\text{foc}})(t, r, z_2) \quad ; \quad (V^{\text{in}} + V^{\text{foc}})|_{r=0} = 0, \quad V^{\text{foc}}|_{t=r=0} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations sont résolues en intégrant des équations différentielles ordinaires le long des rayons de l'optique géométrique (voir la figure 4).

**Théorème 1.5** ([CR02]). — *Supposons  $1 < p < 2$ . Pour tout  $\delta > 0$ ,*

$$\|v_{\pm}^{\varepsilon} - (v_{\pm}^{\varepsilon})_{\text{app}}\|_{L^{\infty}([0, r_0 - \delta] \times [0, \infty])} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

avec  $v^{\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$ . *Pour des temps plus grands ( $T > r_0$ ), on n'a pas mieux que :*

$$\|v_{\pm}^{\varepsilon} - (v_{\pm}^{\varepsilon})_{\text{app}}\|_{L^{\infty}([0, T] \times [0, \infty])} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2-p}).$$

*Soit  $2 - p \leq \alpha \leq 1$ . Définissons  $\mathbf{v}^{\varepsilon} := (\mathbf{v}_-^{\varepsilon}, \mathbf{v}_+^{\varepsilon})$  dans  $\{r \leq \varepsilon^{\alpha}\}$  comme étant des solutions exactes de l'équation d'onde linéaire sous forme caractéristique, se recollant avec la solution de l'optique géométrique le long de  $\{r = \varepsilon^{\alpha}\}$ . On a alors  $v_+^{\varepsilon} + v_-^{\varepsilon} = \mathcal{O}(r/\varepsilon)$  et :*

$$\|v^{\varepsilon} - \mathbf{v}^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}([0, T] \times [0, \varepsilon^{\alpha}])} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2-p}),$$

$$\|(v_+^{\varepsilon} + v_-^{\varepsilon}) - (\mathbf{v}_+^{\varepsilon} + \mathbf{v}_-^{\varepsilon})\|_{L^{\infty}([0, T] \times [0, \varepsilon^{\alpha}])} = \mathcal{O}(r \varepsilon^{\alpha(1-p)}) = o(r/\varepsilon).$$

De retour à  $\partial_t u^{\varepsilon} = (v_+^{\varepsilon} + v_-^{\varepsilon})/2r$ , on voit que le poids dans cette dernière estimation permet d'obtenir une approximation de  $\partial_t u^{\varepsilon}$  à la fois hors de  $\{r = 0\}$  et près du point focal, ce qui précise le résultat de [C98] dans le cas des impulsions ultra-courtes, et justifie le terme de “foyer linéaire” (près du foyer  $\{r \leq \varepsilon^{\alpha}\}$ , la solution exacte est bien approchée par une solution de l'équation linéaire).

Dans [CR04a] et [CR04b], nous avons poursuivi l'étude des équations (1.17), dans le même esprit que pour l'équation de Schrödinger ci-dessus, en modulant la puissance  $p$  ainsi que la taille des données initiales :

$$(1.19) \quad \begin{cases} \square u^{\varepsilon} + a|\partial_t u^{\varepsilon}|^{p-1} \partial_t u^{\varepsilon} = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u^{\varepsilon}|_{t=0} = \varepsilon^{J+1} U_0 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right); \quad \partial_t u^{\varepsilon}|_{t=0} = \varepsilon^J U_1 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right), \end{cases}$$

où  $a$  est un nombre complexe,  $r_0 > 0$ , et  $1 < p < \infty$ . Les fonctions  $U_0$  et  $U_1$  sont régulières, bornées et à support compact comme précédemment. Comme dans [C00a], on établit formellement dans [CR04a] les distinctions suivantes :

	$J > \frac{p-2}{p-1}$	$J = \frac{p-2}{p-1}$	$J < \frac{p-2}{p-1}$
$J > 0$	foyer linéaire optique linéaire	foyer non linéaire optique linéaire	foyer surcritique optique linéaire
$J = 0$	foyer linéaire optique non linéaire	foyer non linéaire optique non linéaire	foyer surcritique optique non linéaire

On a vu ci-dessus que dans le cas “foyer linéaire, optique non linéaire”, on peut obtenir une solution approchée dans  $L^{\infty}$ , donnée par la théorie de l'optique géométrique non linéaire en dehors du foyer, et par propagation libre près de  $\{r = 0\}$ .

Dans [CR04a], nous analysons le cas “foyer non linéaire, optique linéaire”. Le terme non linéaire est négligeable au premier ordre en dehors du foyer, mais a une influence non négligeable près de  $\{r = 0\}$  (dans une couche limite de taille  $\varepsilon$ ). Cette influence est mesurée en moyenne par un opérateur de diffusion non linéaire. Ceci est évidemment très semblable au phénomène rencontré pour l'équation de Schrödinger. Par contre, il nous faut montrer l'existence de l'opérateur de diffusion, ce qui constitue le cœur de [CR04a]. Nous établissons en outre une propriété qualitative intéressante de cet opérateur, dont la

conséquence dans l'étude des impulsions courtes est la suivante : une onde initialement à support compact ressort de la caustique à décroissance algébrique seulement (au moins si l'onde entrante est d'amplitude faible). Nous renvoyons à [CR04a] pour des énoncés précis.

Dans la dernière partie [CR04b], nous abordons les quatre derniers cas du tableau. Dans le cas “foyer linéaire, optique linéaire”, nous montrons que le terme non linéaire est partout négligeable au premier ordre, en suivant essentiellement la même approche que dans [CR02]. Dans les trois autres cas, nous nous restreignons au cas d'une constante de couplage  $a$  réelle. Comme rappelé plus haut, si  $a$  est positive, l'équation est dissipative (accrétive sinon). Nous montrons alors que l'impulsion est dissipée avant d'atteindre le foyer (elle devient arbitrairement grande dans le cas accrétif). Ce résultat rejoint ceux de Joly, Métivier et Rauch ([45, 49]), qui avaient montré un phénomène semblable dans le cas des trains d'ondes. La preuve dans le cas des impulsions radiales en dimension trois est par contre beaucoup plus simple, et plus explicite.

**Théorème 1.6** ([CR04b]). — *Supposons  $0 \leq J < \frac{p-2}{p-1}$  ou  $J = 0 = p - 2$ .*

(1) *Si l'équation est dissipative,  $a > 0$ , alors les impulsions sont absorbées avant d'atteindre le foyer. Si  $T \geq r_0$ ,*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|v_-^\varepsilon(T)\|_{L^\infty(0 \leq r \leq T)} + \|v_+^\varepsilon(T)\|_{L^\infty(0 \leq r \leq T)}) = 0.$$

*Plus précisément, pour  $\lambda > 0$ , définissons  $T(\lambda, \varepsilon)$  comme suit : si  $0 \leq J < \frac{p-2}{p-1}$ , alors  $T(\lambda, \varepsilon) := r_0 - z_0\varepsilon - \lambda\varepsilon^{\alpha/(p-2)}$ , et si  $J = 0 = p - 2$ , alors  $T(\lambda, \varepsilon) := r_0 - z_0\varepsilon - \lambda$ . Pour tout  $T = T(\varepsilon) \geq T(\lambda, \varepsilon)$ ,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|v_-^\varepsilon(T)\|_{L^\infty(0 \leq r \leq T)} + \|v_+^\varepsilon(T)\|_{L^\infty(0 \leq r \leq T)}) = 0.$$

(2) *Si l'équation est accrétive,  $a < 0$ , il existe  $T^* \leq r_0$  tel que la famille  $(v_-^\varepsilon, v_+^\varepsilon)$  ne soit pas bornée dans  $L^\infty([0, T^*] \times \mathbb{R}_+)^2$ .*

Esquissons la preuve de ce résultat dans le cas  $J > 0$ . Comme dans le cas de l'équation de Schrödinger (et dans les calculs de [CR04a, CR04b]), ramenons-nous à des données initiales de tailles  $\mathcal{O}(1)$  pour  $v^\varepsilon$ , en posant  $\alpha := (p-1)J$ . Le problème de Cauchy (1.19) devient alors

$$(1.20) \quad \begin{cases} \square u^\varepsilon + a \varepsilon^\alpha |\partial_t u^\varepsilon|^{p-1} \partial_t u^\varepsilon = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon U_0 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right), & \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} = U_1 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right), \end{cases}$$

et (1.18) s'écrit maintenant

$$(1.21) \quad \begin{cases} (\partial_t \pm \partial_r) v_\pm^\varepsilon = \varepsilon^\alpha r^{1-p} g(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon), & g(y) := b|y|^{p-1}y, \quad b := -a2^{-p}, \\ v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon|_{r=0} = 0, \\ v_\mp^\varepsilon|_{t=0} = P_\mp \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right) \pm \varepsilon P_1 \left( r, \frac{r-r_0}{\varepsilon} \right). \end{cases}$$

(Par abus, nous gardons les mêmes notations.) Considérant un régime d'optique linéaire ( $\alpha > 0$ ), une solution approchée naturelle pour  $v^\varepsilon$  consiste à choisir la solution de l'équation linéaire ( $g \equiv 0$  dans (1.21)) avec données initiales  $P_\mp$ . Bien sûr, pour un foyer non linéaire



(ou surcritique), cette solution cesse d'être une bonne approximation à l'approche du foyer (on peut même montrer que ceci arrive dans une couche limite plus large que dans le cas étudié dans [CR04a]). Pour forcer l'approximation à être valide plus longtemps, inspirons-nous du cas traité dans [CR02], et introduisons la solution approchée donnée par

$$\begin{cases} (\partial_t \pm \partial_r)(v_{\pm}^{\varepsilon})_{\text{app}} = \varepsilon^{\alpha} r^{1-p} g((v_{\pm}^{\varepsilon})_{\text{app}}), & (t, r) \in ([0, r_0 - z_0 \varepsilon] \times \mathbb{R}_+^*), \\ (v_{\pm}^{\varepsilon})_{\text{app}}|_{t=0} = P_{\pm} \left( r, \frac{r - r_0}{\varepsilon} \right). \end{cases}$$

Comme dans [CR02], ces équations sont des équations différentielles ordinaires le long des rayons. Profitons maintenant du fait que dans le cas précis, nous pouvons calculer explicitement ces solutions approchées : pour  $y \geq x > 0$ , définissons  $F_p$  par

$$F_p(x, y) = \int_x^y \frac{ds}{s^{p-1}}.$$

On a alors :

$$(v_{-}^{\varepsilon})_{\text{app}}(t, r) = \frac{P_{-}(r+t, z)}{\left(1 + a2^{-p}(p-1)\varepsilon^{\alpha} F_p(r, r+t) |P_{-}(r+t, z)|^{p-1}\right)^{1/(p-1)}} \Bigg|_{z=(r+t-r_0)/\varepsilon},$$

$$(v_{+}^{\varepsilon})_{\text{app}}(t, r) = \frac{P_{+}(r-t, z)}{\left(1 + a2^{-p}(p-1)\varepsilon^{\alpha} F_p(r-t, r) |P_{+}(r-t, z)|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}} \Bigg|_{z=(r-t-r_0)/\varepsilon}.$$

On montre alors que  $(v_{-}^{\varepsilon})_{\text{app}}$  est une bonne approximation de  $v^{\varepsilon}$  pour  $t \leq T(\lambda, \varepsilon)$  défini dans l'énoncé du théorème 1.6. Ensuite, on remarque que dans le cas  $a > 0$ ,

$$(1.22) \quad \|(v_{-}^{\varepsilon})_{\text{app}}(T_{\lambda, \varepsilon})\|_{L^{\infty}(0, T_{\lambda, \varepsilon})} \leq C \times \begin{cases} \lambda^{(p-2)/(p-1)} & \text{si } p > 2, \\ 1/|\log \lambda| & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

pour une constante  $C$  indépendante de  $\lambda$ . On conclut alors par inégalités d'énergie et en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Le cas  $a < 0$  est semblable.

Dans le cas ‘‘foyer non linéaire, optique non linéaire’’, nous n'avons donc traité que le cas  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $a$  est imaginaire pur, l'équation est conservative, on ne peut donc pas attendre de phénomène d'absorption. Les résultats de [CR04a] suggèrent qu'alors la traversée de foyer est décrite par un opérateur de diffusion à longue portée. Cette remarque est le point de départ de [CL03]. L'équation non linéaire complète paraissant techniquement ardue à traiter, nous avons étudié le système suivant,

$$(1.23) \quad \square \mathbf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad ; \quad \square u^{\varepsilon} + i|\partial_t \mathbf{u}^{\varepsilon}| \partial_t u^{\varepsilon} = 0.$$

Une telle réduction va dans le même esprit que celle traitée dans [C00a], conduisant à (1.6). Dans [C01a], nous avons traité la version ‘‘complètement non linéaire’’ de (1.6), le prix à payer étant une perte de régularité le long de la propagation, et une hypothèse de petitesse sur les données initiales. Il semble que dans le cas de l'équation des ondes, on pourrait également traiter l'équation non linéaire directement, le prix à payer étant du même ordre de grandeur (perte de régularité et données petites). Nous avons préféré rester dans un cadre relativement simple pour mettre à nouveau en évidence le phénomène de

“déphasage aléatoire” (ou arbitrairement grand, selon que l’on considère la phase modulo  $2\pi$  ou non), en  $\ln \varepsilon$ .

Procédant comme précédemment, on se ramène au système :

$$(1.24) \quad \begin{cases} (\partial_t \pm \partial_r)v_{\pm}^{\varepsilon} = \frac{i}{r} \left| f\left(\frac{r+t-r_0}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{t-r-r_0}{\varepsilon}\right) \right| (v_{-}^{\varepsilon} + v_{+}^{\varepsilon}), \\ v_{-}^{\varepsilon} + v_{+}^{\varepsilon} \Big|_{r=0} = 0, \\ v_{-}^{\varepsilon} \Big|_{t=0} = g\left(\frac{r-r_0}{\varepsilon}\right) e^{i \left| f\left(\frac{r-r_0}{\varepsilon}\right) \right| \ln \frac{r_0 \varepsilon}{r}}, \\ v_{+}^{\varepsilon} \Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

L’introduction d’un facteur logarithmique dans la phase peut sembler artificielle. Comme dans [C01a], elle est motivée par la présence (devinée, puis établie) d’un opérateur de diffusion à longue portée, pour lequel ce type de modulation est classique. Par contre, la présence du terme  $r_0/r$  à pour seul but d’alléger les notations dans les calculs. On pourrait facilement l’éliminer, car sur le support de  $f$  (pris compact),  $r - r_0 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

**Théorème 1.7** ([CL03]). — Soient  $f, g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ ,  $r_0 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Alors (1.24) possède une unique solution globale  $(v_{-}^{\varepsilon}, v_{+}^{\varepsilon}) \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)^2$ .

- Le déphasage entre l’onde entrante (avant focalisation) et l’onde sortante (après) se comporte en  $\ln \varepsilon$ .
- Il existe un profil de caustique  $(V_{-}, V_{+}) \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^2$  tel que pour  $|t - r_0| \leq C\varepsilon$  et  $r \leq C\varepsilon$ ,

$$v_{\pm}^{\varepsilon}(t, r) = V_{\pm} \left( \frac{t - r_0}{\varepsilon}, \frac{r}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Le début de la preuve suit le même plan que dans [CR04a] : on éclate les variables près du point focal,

$$\tau = \frac{t - r_0}{\varepsilon} \quad ; \quad \rho = \frac{r}{\varepsilon}.$$

Le problème de Cauchy (1.24) devient

$$(1.25) \quad \begin{cases} (\partial_t \pm \partial_r)\psi_{\pm}^{r_0/\varepsilon} = \frac{i}{\rho} |f(\tau + \rho) - f(\tau - \rho)| (\psi_{-}^{r_0/\varepsilon} + \psi_{+}^{r_0/\varepsilon}), \\ \psi_{-}^{r_0/\varepsilon} + \psi_{+}^{r_0/\varepsilon} \Big|_{\rho=0} = 0, \\ \psi_{-}^{r_0/\varepsilon} \Big|_{\tau=-r_0/\varepsilon} = g(\rho + \tau) e^{i \left| f(\rho + \tau) \right| \ln \frac{r_0}{\rho}} \Big|_{\tau=-r_0/\varepsilon}, \\ \psi_{+}^{r_0/\varepsilon} \Big|_{\tau=-r_0/\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

On considère alors le problème plus général où le paramètre  $r_0/\varepsilon$  vaut  $n$ , destiné à tendre vers l’infini (sans être nécessairement entier). On remarque que le problème est celui de l’existence d’opérateurs d’onde à longue portée pour un problème linéaire. On prend alors en compte le caractère conservatif de l’équation : par une réduction classique, on élimine le terme  $\psi_{+}$  (resp.  $\psi_{-}$ ) dans le membre de droite de l’équation vérifiée par  $\psi_{+}$  (resp.  $\psi_{-}$ ). Des conditions géométriques de support du potentiel et propagation des solutions permettent alors de faire tendre  $n$  vers l’infini.

Comme dans [CR04a], la description sur le système original (1.24) suit facilement.

### 1.3. Une généralisation

Le résultat le plus marquant de [C00a] est celui dont nous avons esquissé la preuve, “optique linéaire et foyer non linéaire”, dans lequel la traversée de caustique est décrite par un opérateur de scattering (à courte portée). Ce résultat a guidé l’analyse dans [CR04a], dans un cas pour lequel l’existence d’un opérateur de scattering n’était pas connue. Dans ces deux contextes, on a un type de comportement semblable à celui mis en évidence pour la première fois dans un cadre non linéaire dans [3] (voir [67] pour un cadre linéaire donnant lieu à une description voisine). Ces trois exemples ont pour point commun qu’il s’agit d’équations dispersives pour lesquelles une théorie du scattering et une théorie du problème de Cauchy globalement bien posé sont disponibles (la seconde contenant généralement la première). Partant de la conclusion (“optique linéaire et foyer non linéaire” avec traversée de foyer décrite par scattering), nous avons précisé des hypothèses sous lesquelles ce type de phénomène arrive à coup sûr : il s’agit d’équations semilinéaires dispersives pour lesquelles on a une théorie du scattering et du problème de Cauchy global [CL-p].

Pour préciser cette discussion, gardons en tête l’esquisse de la preuve du théorème 1.1. Considérons une équation linéaire

$$L(\partial)\psi = 0 \quad ; \quad \psi|_{t=0} = \varphi,$$

où  $\psi$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}^q$  et  $L(\partial) = \partial_t + p(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ ,  $p$  étant un polynôme à coefficients matriciels dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$  (ce cadre permet notamment de considérer les équations d’onde et de Klein-Gordon). Comme pour l’équation de Schrödinger, supposons que  $L(\partial)$  engendre un semi-groupe,  $U_0(t)\varphi = \psi(t)$ , exhibant une asymptotique en temps grands de la forme

$$(1.26) \quad U_0(t)\varphi \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{|t|^\alpha} A_\pm(\varphi)(t, \cdot).$$

Dans le cas de l’équation de Schrödinger, on a  $\alpha = n/2$  (taux de dispersion), et un déphasage de  $-n\frac{\pi}{2}$  apparaît entre les définitions de  $A_-$  et  $A_+$  : l’indice de Maslov est présent dans l’asymptotique précédente. Pour obtenir une focalisation à l’origine à l’instant  $t = 1$ , utilisons à nouveau un éclatement des variables comme dans (1.11) et considérons

$$u|_{t=0}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} U_0\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right) \psi_-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r^\varepsilon(x),$$

le reste  $r^\varepsilon$ , supposé petit, permettant de remplacer le premier terme du membre de droite par l’asymptotique donnée par (1.26).

Considérons maintenant une perturbation non linéaire,

$$(1.27) \quad L(\partial)\psi = F(x, \psi),$$

où  $F(x, \cdot)$  est homogène de degré  $p > 1$ . L’éclatement des variables et l’asymptotique (1.26) conduisent à considérer

$$(1.28) \quad \begin{cases} L(\varepsilon\partial)u^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha(p-1)} F\left(\frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon\right), \\ u|_{t=0}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} U_0\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right) \psi_-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r^\varepsilon(x) = A_-(\psi_-)\left(\frac{-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{r}^\varepsilon(x). \end{cases}$$

Résumons formellement le résultat principal de [CL-p] (nous ne précisons ici ni les définitions des notions en jeu, ni les espaces dans lesquels nous travaillons).

**Théorème 1.8** ([CL-p]). — *Sous les hypothèses précédentes, supposons en outre :*

- *qu’il existe une théorie complète de la diffusion (à courte portée) pour (1.27) ;*
- *que le problème de Cauchy pour (1.27) est globalement bien posé.*

*Alors la solution de (1.28) est définie globalement en temps pour  $0 < \varepsilon \ll 1$ , et on a les asymptotiques suivantes :*

1. *Pour  $0 \leq t < 1$ ,  $u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(1-t)^\alpha} A_-(\psi_-) \left( \frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right)$ .*
2. *Pour  $t-1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ,*

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \varphi \left( \frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

*où  $\varphi = W_- \psi_-$  est l’image de  $\psi_-$  par l’opérateur d’onde en  $-\infty$  associé à (1.27).*

3. *Pour  $t > 1$ ,*

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(t-1)^\alpha} A_+(\psi_+) \left( \frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

*où  $\psi_+ = S\psi_- = W_+^{-1}\varphi$  est l’image de  $\psi_-$  par l’opérateur de diffusion associé à (1.27).*

Dans [CL-p], nous appliquons ces résultats aux équations de Hartree, Klein-Gordon et des ondes, ce dernier cas apportant un regard nouveau sur les résultats de [31]. Nous montrons aussi que si la puissance  $\alpha(p-1)$  de (1.28) est remplacée par  $\delta > \alpha(p-1)$ , alors la non-linéarité est partout négligeable, justifiant ainsi le régime “optique linéaire, foyer linéaire”. Nous discutons également les limitations de notre approche, et les généralisations envisageables, dans l’esprit de [3] et [CFG03] : étant donnée une équation contenant un petit paramètre, dans quels cas les données de Cauchy que nous considérons (qui donnent lieu à une focalisation en un point) sont-elles les seules susceptibles de créer des phénomènes non linéaires perceptibles au premier ordre d’un développement asymptotique ? Dans [3] et [CFG03] (voir chapitre suivant), il s’avère que seules ces données initiales sont pertinentes pour des phénomènes non linéaires. Considérons par contre, en dimension trois d’espace, l’équation des ondes avec non-linéarité cubique :

$$\square u + u^3 = 0.$$

Une telle non-linéarité est critique au niveau du problème de Cauchy dans  $\dot{H}^{1/2}$ , de même que la non-linéarité quintique était critique au niveau de  $\dot{H}^1$  dans [3]. Dans ce cas, des solutions autres que celles du type profil de concentration en un point vont avoir un comportement non linéaire ([29]).

## Chapitre 2

### Rôle des oscillations quadratiques pour NLS

Dans le cas du problème de Cauchy (1.5), les données initiales sont extrêmement particulières : elles donnent lieu à une focalisation en un point, phénomène dont la géométrie est simple et bien comprise. Comme expliqué au paragraphe 1.1.1, les preuves dans [C00a] (et aussi [C01a]) s'appuient de manière essentielle sur cette connaissance de la géométrie. Une question naturelle est alors de se demander ce qui se passe si l'on considère une donnée initiale plus générale. Par exemple, quel est le comportement de  $u^\varepsilon$  avec des données initiales de type BKW,

$$u_{|t=0}^\varepsilon = \sum_{j=1}^J f_j(x) e^{i \frac{\varphi_j(x)}{\varepsilon}} ?$$

Dans [CFG03] et [CK-p], nous avons montré que si la donnée initiale a cette forme, alors la non-linéarité de (1.5) a un effet au premier ordre dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  si et seulement si au moins une phase  $\varphi_j$  est *exactement* quadratique, dans le cas où  $\sigma \geq 2/n$ .

Les données initiales considérées dans [CFG03] et [CK-p] sont en fait plus générales que des données du type BKW comme envisagé ci-dessus. Fixons quelques notations et donnons une définition.

**Notation 2.1.** — Pour une famille  $(a^\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , notons (suivant [38])

$$\|a^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1} := \|a^\varepsilon\|_{L^2} + \|\varepsilon \nabla a^\varepsilon\|_{L^2}.$$

On dira que  $a^\varepsilon$  est bornée (resp. tend vers zéro) dans  $H_\varepsilon^1$  si

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|a^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1} < \infty \text{ (resp. } = 0\text{)}.$$

Nous considérons dans ce chapitre le problème de Cauchy

$$(2.1) \quad i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \lambda \varepsilon^{n\sigma} |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon \quad ; \quad u_{|t=0}^\varepsilon = u_0^\varepsilon,$$

où  $\lambda \in \{-1, +1\}$ ,  $\sigma \geq 2/n$  et  $u_0^\varepsilon$  est bornée dans  $L^2$  ou  $H_\varepsilon^1$ . Introduisons une fonction de référence, solution de l'équation linéaire associée, avec même donnée de Cauchy :

$$(2.2) \quad i\varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta v^\varepsilon = 0 \quad ; \quad v_{|t=0}^\varepsilon = u_0^\varepsilon.$$

**Définition 2.2 (Linéarisabilité).** — Soit  $u_0^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , et soit  $I^\varepsilon$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , dépendant éventuellement de  $\varepsilon$ .

i) La solution  $u^\varepsilon$  est linéarisable sur  $I^\varepsilon$  dans  $L^2$  si

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in I^\varepsilon} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

ii) Si de plus  $u_0^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n)$  et  $u_0^\varepsilon$  est bornée dans  $H_\varepsilon^1$ , on dit que  $u^\varepsilon$  est linéarisable sur  $I^\varepsilon$  dans  $H_\varepsilon^1$  si

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in I^\varepsilon} \left( \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\varepsilon \nabla_x u^\varepsilon(t) - \varepsilon \nabla_x v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) = 0.$$

Dans les cas  $\sigma > 2/n$  et  $\sigma = 2/n$ , on obtient deux critères de linéarisabilité différents. Une conséquence est que l'ensemble des données évoluant en une fonction non linéarisable est plus grand dans le cas critique  $L^2$  ( $\sigma = 2/n$ ) que dans le cas surcritique ( $\sigma > 2/n$ ). Ceci est dû précisément à l'invariance d'échelle au niveau  $L^2$ .

Dans les deux cas, la stratégie générale de démonstration suit celle de [31] et [3] : on commence par établir un critère de linéarisabilité portant uniquement sur  $v^\varepsilon$ , ce qui ramène l'étude du problème non linéaire initial à l'étude de l'équation *linéaire* (2.2). Cette dernière se mène à l'aide de décomposition en profils, notion introduite dans [32] (voir aussi [62]).

## 2.1. Le cas surcritique $L^2$

Le cas  $\sigma > 2/n$  fait l'objet de l'article [CFG03]. Nous établissons le critère de linéarisabilité suivant, très proche de l'équivalent pour l'équation des ondes [31] :

**Théorème 2.3** ([CFG03]). — Supposons  $\sigma > \frac{2}{n}$ , avec  $\sigma < \frac{2}{n-2}$  si  $n \geq 3$ . Soient  $u_0^\varepsilon$  bornée dans  $H_\varepsilon^1$ , et  $T > 0$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $u^\varepsilon$  est linéarisable sur  $[0, T]$  dans  $H_\varepsilon^1$ .
- (2) La fonction  $v^\varepsilon$  vérifie

$$(2.3) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \varepsilon^{n\sigma} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = 0.$$

La comparaison avec le critère prouvé dans [31] est motivée par le fait que la quantité apparaissant dans (2.3) est liée à la conservation de l'énergie. Rappelons que pour les solutions de (2.1), on a les conservations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Masse : } & \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2}, \\ \text{Énergie : } & \frac{1}{2} \|\varepsilon \nabla_x u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda \varepsilon^{n\sigma}}{\sigma + 1} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = C^\varepsilon \text{ (constante indépendante du temps)}. \end{aligned}$$

Ces conservations permettent de montrer facilement qu'on a toujours (c'est-à-dire sans nécessairement supposer  $\sigma > 2/n$ ) (1) $\Rightarrow$ (2) dans le théorème précédent. La réciproque est plus lourde à montrer, mais repose sur des outils standards (inégalités de Strichartz et de Hölder). Notons que c'est à cette étape que la condition  $\sigma > 2/n$  apparaît. Nous verrons au paragraphe 2.2 que cette condition est nécessaire, et n'est pas un artifice technique comme on pouvait le croire. Notons aussi que les indices de Strichartz et de Hölder permettant de montrer (2) $\Rightarrow$ (1) sont suggérés par les puissances de  $\varepsilon$  apparaissant lorsque  $u^\varepsilon$  est la solution de (1.5), qu'on attend être les pires possibles. Enfin, relevons que dans le cas du

théorème 2.3, nous n'avons aucune information géométrique a priori (en particulier, il est hors de question d'utiliser des opérateurs du type  $J^\varepsilon(t)$  introduit en (1.8)). L'étude de la condition de linéarisabilité (2.3) va rigidifier le cadre de travail.

Avant d'énoncer le résultat principal de [CFG03], donnons une définition d'orthogonalité (qui est généralisée dans le cas critique [CK-p]).

**Définition 2.4.** — Soit  $(z_j^\varepsilon)_{j \in \mathbb{N}}$  une famille de suites dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Nous dirons que cette famille est orthogonale si

$$\forall j \neq k, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|z_j^\varepsilon - z_k^\varepsilon|}{\varepsilon} = \infty.$$

**Théorème 2.5.** — Supposons  $\sigma > \frac{2}{n}$ , avec  $\sigma < \frac{2}{n-2}$  si  $n \geq 3$ . Soient  $u_0^\varepsilon$  bornée dans  $H_\varepsilon^1$ , et  $T > 0$ . Supposons que (2.3) ne soit pas vérifiée. Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe une famille orthogonale  $(t_j^\varepsilon, x_j^\varepsilon)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ , une famille  $(\Psi_\ell^\varepsilon)_{\ell \in \mathbb{N}}$ , bornée dans  $H_\varepsilon^1(\mathbb{R}^n)$ , et une famille (non vide)  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , bornée dans  $\mathcal{F}(H^1)$  telles que :

$$(2.4) \quad u_0^\varepsilon(x) = \Psi_\ell^\varepsilon(x) + r_\ell^\varepsilon(x), \quad \text{avec } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|U_0^\varepsilon(t)r_\ell^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L_\varepsilon^{2\sigma+2})} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

et pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , on a l'asymptotique suivante dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$(2.5) \quad \Psi_\ell^\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{(t_j^\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \varphi_j \left( \frac{x - x_j^\varepsilon}{t_j^\varepsilon} \right) e^{-i \frac{(x - x_j^\varepsilon)^2}{2\varepsilon t_j^\varepsilon}} + o(1).$$

Enfin,  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} t_j^\varepsilon \in [0, T]$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

La seconde partie de (2.4) signifie qu'à la limite  $\ell \rightarrow +\infty$ , le reste  $r_\ell^\varepsilon$  a une évolution essentiellement linéaire, d'après le théorème 2.3. Ainsi, l'unique obstruction à la linéarisabilité de  $u^\varepsilon$  vient de  $\Psi_\ell^\varepsilon$ , c'est-à-dire, d'après (2.5), de la présence dans la donnée initiale d'au moins une oscillation quadratique, à l'origine d'une focalisation en un point, dans le futur (éventuellement à l'instant  $t = 0$  sous les hypothèses présentes).

Décrivons le schéma de la preuve du théorème 2.5. Puisque la condition (2.3) porte sur l'évolution linéaire de la donnée initiale, nous utilisons la décomposition en profils associée à cette évolution linéaire, établie par S. Keraani dans [52]. Pour éviter les lourdeurs d'écriture, nous nous sommes limités au cas de la dimension trois d'espace. Avec le changement d'échelle

$$(2.6) \quad V^\varepsilon(s, y) := \varepsilon^{\frac{3}{2}} v^\varepsilon(\varepsilon s, \varepsilon y),$$

les résultats de [52] entraînent qu'à extraction d'une sous-suite près,

$$V^\varepsilon(s, y) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{\eta_j^\varepsilon}} V_j \left( \frac{s - s_j^\varepsilon}{(\eta_j^\varepsilon)^2}, \frac{y - y_j^\varepsilon}{\eta_j^\varepsilon} \right) + W_\ell^\varepsilon(s, y)$$

avec  $\eta_j^\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , et certaines conditions d'orthogonalité. De plus,  $W_\ell^\varepsilon$  vérifie

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|W_\ell^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r)} \rightarrow 0 \quad \text{pour } \ell \rightarrow \infty, \quad \text{avec } \frac{2}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}, \quad r < +\infty.$$

Enfin, les  $V_j$  et  $W_\ell^\varepsilon$  sont solutions de l'équation de Schrödinger linéaire (avec  $\varepsilon = 1$ ), dans  $L^\infty(\mathbb{R}, \dot{H}^1)$ .

On montre ensuite que quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer que toutes les échelles  $\eta_j^\varepsilon$  sont égales à 1, les termes correspondant aux échelles tendant vers zéro ou l'infini étant incorporés au reste (car leur contribution va vérifier (2.3)). De là on déduit que les  $V_j$  (et donc  $W_\ell^\varepsilon$ ) sont dans l'espace de Sobolev *inhomogène*  $H^1$ , puisque  $V^\varepsilon$  est bornée dans  $H^1$ .

L'apparition des oscillations quadratiques découle alors du développement asymptotique en temps grand des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire (un tel régime apparaissant par le changement d'échelle (2.6)).

Nous montrons réciproquement que si la donnée initiale  $u_0^\varepsilon$  s'écrit comme somme (finie) d'oscillations quadratiques, alors la solution  $u^\varepsilon$  peut s'écrire comme la somme des évolutions non linéaires de chaque oscillation quadratique, plus un terme linéarisable. L'idée est que ce principe de superposition non linéaire est pratiquement un principe de superposition linéaire. En effet, on a vu dans [C00a] que l'évolution non linéaire de chaque oscillation quadratique n'est réellement non linéaire qu'au voisinage du point focal associé. En dehors, la non-linéarité est négligeable. Par ailleurs, on sait plus précisément que lors du phénomène des focalisation, la non-linéarité intervient dans un voisinage de taille  $\Lambda\varepsilon$  du point focal (avec moralement  $\Lambda \rightarrow +\infty$ ). L'interaction non linéaire est alors évitée par le principe d'orthogonalité énoncé dans la définition 2.4.

## 2.2. Le cas critique $L^2$

Le cas critique  $L^2$  ( $\sigma = 2/n$ ) fait l'objet de l'article [CK-p].

Il est facile de voir que des données initiales autres que celles du théorème 2.5 ont une évolution non linéaire au premier ordre. Soit en effet  $U$  une solution de

$$(2.7) \quad i\partial_t U + \frac{1}{2}\Delta U = |U|^{4/n}U,$$

avec  $U|_{t=0} = \phi$ . Si  $\phi \in \Sigma$ , alors  $U$  est définie globalement en temps, avec  $U \in C(\mathbb{R}_t; \Sigma)$  (voir par exemple [13]). Soit  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . On constate que la fonction

$$(2.8) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/4}} U\left(t - t_0, \frac{x - x_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

est solution de (2.1) avec  $\sigma = 2/n$ , et que  $u^\varepsilon(0, \cdot)$  et  $\varepsilon\nabla_x u^\varepsilon(0, \cdot)$  sont bornées dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Cette solution particulière est telle que la non-linéarité de (2.1) à une influence au premier ordre en tout temps (fini) près de  $x = x_0$ .

Une telle solution n'apparaît pas dans le cas  $\sigma > 2/n$ . On vérifie que les solutions (2.8) sont déduites de celles du théorème 2.5 par changement d'échelle,

$$\tilde{U}(t, x) = \lambda^{n/2} U(\lambda^2 t, \lambda x),$$

qui laisse invariante l'équation (2.7), avec  $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ . Nous avons vu plus haut qu'une des étapes décisives dans la preuve du théorème 2.5 consiste à isoler l'échelle  $\eta_j^\varepsilon = 1$  en



montrant que les autres échelles donnent lieu à une évolution linéarisable. Cette étape doit donc être revue dans le cas  $\sigma = 2/n$ .

En fait, il faut reprendre l'étude au tout début : nous avons vu que l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du théorème 2.3 reste vraie en particulier dans le cas  $\sigma = 2/n$ . Par contre, on vérifie aisément que dans l'exemple ci-dessus, la condition (2) est remplie, c'est-à-dire que (2.3) est vérifiée, et ceci bien que la solution  $u^\varepsilon$  soit évidemment non linéarisable : on n'a plus (2) $\Rightarrow$ (1) dans le cas  $\sigma = 2/n$ , et la limitation  $\sigma > 2/n$  dans la preuve du théorème 2.3 n'était pas un artifice technique. On a le nouveau critère de linéarisabilité suivant :

**Théorème 2.6** ([CK-p]). — *Supposons  $\sigma = \frac{2}{n}$ , pour  $n = 1$  ou  $2$ . Soient  $u_0^\varepsilon$  bornée dans  $L^2$ , et  $I^\varepsilon \ni 0$  un intervalle de temps.*

- *$u^\varepsilon$  est linéarisable sur  $I^\varepsilon$  dans  $L^2$  si et seulement si*

$$(2.9) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|v^\varepsilon\|_{L^{2+4/n}(I^\varepsilon \times \mathbb{R}^n)}^{2+4/n} = 0.$$

- *Si de plus  $u_0^\varepsilon \in H^1$  et  $u_0^\varepsilon$  est bornée dans  $H_\varepsilon^1$ , alors  $u^\varepsilon$  est linéarisable sur  $I^\varepsilon$  dans  $H_\varepsilon^1$  si et seulement si (2.9) est vérifiée.*

La preuve que (2.9) implique la linéarisabilité ( $L^2$  ou  $H_\varepsilon^1$ ) procède de la même façon que l'étude de l'équation (2.7) avec données petites [14]. Il s'agit d'appliquer les inégalités de Strichartz en remarquant que le couple  $(2 + 4/n, 2 + 4/n)$  est admissible, et se prête bien aux inégalités de Hölder, en vue d'un argument de type bootstrap.

C'est dans la preuve de la réciproque qu'apparaît la restriction  $n = 1$  ou  $2$ . Nous pensons qu'il s'agit là d'un aspect technique, mais sans doute difficile à contourner. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction générale, cette partie de la preuve fait appel à la notion de décomposition en profils, qui apparaît donc plus tôt dans l'étude que dans le cas  $\sigma > 2/n$ . De plus, il s'agit d'appliquer cette technique non seulement à des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire, mais aussi à des solutions de l'équation non linéaire, à la manière de [3, 52]. Cette partie repose donc sur l'existence de ces deux décompositions, qui se montrent à partir d'inégalités de Strichartz précisées. Dans le cas  $n = 2$ , de telles inégalités furent obtenues à partir de travaux de J. Bourgain [7, 64, 8], et des décompositions en profils furent données par F. Merle et L. Vega [61]. Le cas  $n = 1$  a été établi par Sahbi Keraani dans sa thèse [51], et apparaît pour la première fois sous forme d'article dans [CK-p].

On peut alors démontrer l'analogie du théorème 2.5, en généralisant la notion d'orthogonalité donnée dans la définition 2.4, de manière à prendre en compte des échelles autres que  $\varepsilon$ . Les notations étant assez lourdes, nous allons décrire assez qualitativement les résultats, et renvoyer à [CK-p] pour les énoncés précis. Il ressort notamment que si la donnée  $u_0^\varepsilon$  est bornée dans  $H_\varepsilon^1$ , alors les exemples de [CFG03] et (2.8) sont les deux cas limites de fonctions non linéarisables. Autrement dit, toutes les échelles de concentration en espace entre  $\varepsilon$  et  $\sqrt{\varepsilon}$  sont à prendre en compte, et uniquement celles-là (l'échelle de concentration en temps est alors donnée par l'invariance d'échelle de l'équation). Nous donnons en outre un résultat concernant les solutions explosives de l'équation de Schrödinger avec non-linéarité critique  $L^2$ , précisant ainsi le résultat de [61].

## Chapitre 3

### Équation de Schrödinger avec potentiel et perturbation

La remarque à l'origine des travaux de ce chapitre, due à Luc Miller, est qu'on obtient une géométrie de propagation semblable à celle décrite sur la figure 1, en supprimant la phase quadratique dans (1.2) et en ajoutant le potentiel harmonique  $|x|^2$  au second membre de l'équation de Schrödinger. Cette remarque visait à étendre la problématique de [12, 53] au cas d'une non-linéarité répulsive, susceptible de jouer un rôle analogue au potentiel à courte portée de [67], comme explicité dans [C03a, CM04]. On attend alors le même type de distinctions que celles présentées au paragraphe 1.1.1. La principale difficulté technique consiste à trouver l'analogie de l'opérateur  $J^\varepsilon$  (opérateur de Galilée après mise à l'échelle). Ceci apparaît dans [C03a], dans le même esprit que l'obtention de  $J^\varepsilon$  telle que présentée au paragraphe 1.1.1.

Une telle équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel harmonique est apparue particulièrement à la mode, car elle sert parfois de modèle en physique dans l'étude de la condensation de Bose–Einstein (voir par exemple [71]). Cet aspect a motivé des travaux sur le problème de Cauchy associé ([C02a, C02b]), et un modèle proche, motivé par l'étude du système de Schrödinger–Poisson [CMSt-p].

Les outils employés pour les études évoquées ci-dessus s'étendent au cas de l'équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel polynomial de degré au plus deux [CM04, CN04]. Par contre, il semble y avoir un fossé important entre ce cas d'étude, et le cas d'un potentiel sous-quadratique général, comme expliqué dans [CM04].

Le cas d'un potentiel harmonique “répulsif”, mentionné dans l'introduction (3), permet de jeter un autre regard sur les cas précédents, en mettant notamment en évidence des interactions entre effets linéaires (potentiel) et non linéaires conduisant à une modification du phénomène d'explosion en temps fini. Une généralisation a été considérée dans [C05], et une synthèse de résultats présentée dans [C-p].

Comme décrit en introduction, l'étude de [C03b] apporte également des résultats surprenant en théorie du scattering non linéaire. Nous avons montré que ce phénomène se manifestait également dans un cadre linéaire, et étendu cette étude à une classe de potentiel formant en quelque sorte un continuum entre l'absence de potentiel et le potentiel harmonique répulsif [BCHM05].

Enfin, nous présentons une étude de type BKW effectuée dans [CMSp04].

### 3.1. Oscillateur harmonique et perturbation non linéaire

**3.1.1. Non-linéarité locale : analyse semi-classique.** — Considérons l'équation de Schrödinger linéaire avec potentiel harmonique isotrope, en régime semi-classique :

$$(3.1) \quad i\varepsilon\partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta v^\varepsilon = \frac{|x|^2}{2}v^\varepsilon \quad ; \quad v^\varepsilon|_{t=0} = f.$$

Le hamiltonien classique associé vaut

$$p(t, x, \tau, \xi) = \frac{1}{2} (|\xi|^2 + |x|^2),$$

et les trajectoires classiques (rayons de l'optique géométrique) sont données par

$$x(t) = x(0) \cos t + \xi(0) \sin t.$$

Dans le cas de (3.1), il n'y a pas d'oscillation initiale à l'échelle  $\varepsilon$ , on a donc  $\xi(0) = 0$ , et les rayons se croisent à l'origine à l'instant  $t = \frac{\pi}{2}$ , puis à chaque incrément de  $\pi$  en temps (voir figure 5). On a ainsi, périodiquement en temps, un phénomène semblable à celui

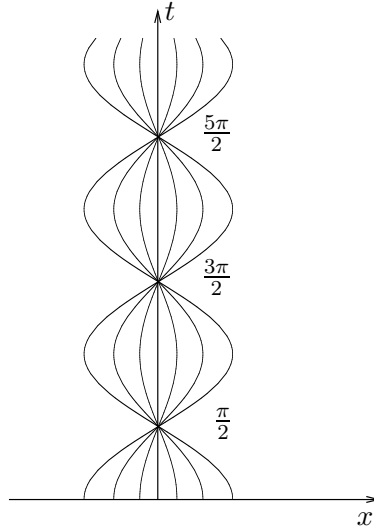


FIGURE 5. Rayons de l'optique géométrique : sinusoides.

représenté sur la figure 1. On peut donc se demander si on peut prolonger le parallèle, et mener une étude semblable à celle rappelée au paragraphe 1.1.1. Ceci fait l'objet du papier [C03a], où on traite uniquement le cas “optique linéaire, foyer non linéaire” (le cas “optique linéaire, foyer linéaire” serait un corollaire facile de la preuve), c'est-à-dire qu'on s'intéresse au problème de Cauchy

$$(3.2) \quad i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = \frac{|x|^2}{2}u^\varepsilon + \varepsilon^{n\sigma}|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon \quad ; \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f.$$

Comme au paragraphe 1.1.1, l'outil principal utilisé provient de l'étude de la solution linéaire (3.1). On peut trouver par le calcul (explicite) des bicaractéristiques,

$$(3.3) \quad v^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(\cos t)^{n/2}} f\left(\frac{x}{\cos t}\right) e^{-i\frac{|x|^2}{2\varepsilon} \tan t}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

Cette asymptotique peut aussi se retrouver grâce à la connaissance explicite de la solution fondamentale, donnée par la formule de Mehler (voir par exemple [22, 41]) :

$$(3.4) \quad v^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{(2i\pi\varepsilon \sin t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon \sin t} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \cos t - x \cdot y \right)} f(y) dy, \quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

L'asymptotique (3.3) peut alors se retrouver par des arguments de phase stationnaire. Comme au paragraphe 1.1.1, on peut essayer d'obtenir des estimations type  $L_x^p$  de la solution linéaire  $v^\varepsilon$  via les inégalités de Gagliardo–Nirenberg (les seules inégalités de Strichartz semblent être insuffisantes). Il s'agit encore dans un premier temps de neutraliser les oscillations rapides du membre de droite de (3.3), puis de prendre en compte le facteur le dilatation. Ceci nous amène à considérer

$$J^\varepsilon(t) = -i(\cos t) e^{-i\frac{|x|^2}{2\varepsilon} \tan t} \nabla_x (e^{i\frac{|x|^2}{2\varepsilon} \tan t} \cdot) = \frac{x}{\varepsilon} \sin t - i \cos t \nabla_x.$$

Remarquons que cet opérateur était bien connu depuis longtemps (voir par exemple [81]) : c'est une dérivée de Heisenberg,

$$J^\varepsilon(t) = U^\varepsilon(t)(-i\nabla_x)U^\varepsilon(-t), \quad \text{où } U^\varepsilon(t) = e^{i\frac{t}{\varepsilon} \left( -\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta + \frac{x^2}{2} \right)}.$$

Il est ainsi immédiat que l'opérateur  $J^\varepsilon$  commute avec l'équation (3.1), c'est-à-dire la partie linéaire de (3.2). La notation  $J^\varepsilon$  n'est pas innocente : cet opérateur possède les mêmes propriétés que son cousin utilisé au paragraphe 1.1.1. Outre la propriété de commutation évoquée ci-dessus, la définition même de  $J^\varepsilon$  permet de constater que cet opérateur agit comme le gradient sur des non-linéarités de la forme  $F(|z|^2)z$ , et fournit des inégalités de Gagliardo–Nirenberg, à poids optimal dans le cas linéaire, dans les régions  $|t - \frac{\pi}{2} - k\pi| \gg \varepsilon$ . Pour des temps proches de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , on introduit un opérateur  $H^\varepsilon$  jouissant des mêmes propriétés. Notons le parallèle avec les opérateurs parfois utilisés dans l'étude d'équations des ondes (champs de Killing, [54]). Le résultat principal que nous montrons est le suivant :

**Théorème 3.1** ([C03a]). — Soient  $f \in \Sigma$  et  $0 < \sigma < \frac{2}{n-2}$  de sorte que la théorie de la diffusion pour (1.10) soit disponible dans  $\Sigma$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a alors l'asymptotique suivante pour  $u^\varepsilon$  lorsque  $\pi/2 + (k-1)\pi < a \leq b < \pi/2 + k\pi$  :

$$\sup_{a \leq t \leq b} \left\| A^\varepsilon(t) \left( u^\varepsilon(t, x) - \frac{e^{-ink\frac{\pi}{2}}}{|\cos t|^{n/2}} (\mathcal{F} \circ S^k \circ \mathcal{F}^{-1}) f\left(\frac{x}{\cos t}\right) e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon} \tan t} \right) \right\|_{L_x^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où  $A^\varepsilon \in \{Id, J^\varepsilon, H^\varepsilon\}$  et  $S^k$  représente l'itérée  $k^{\text{ième}}$  de l'opérateur de scattering  $S$  associé à (1.10). Aux foyers,

$$\left\| B^\varepsilon \left( u^\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{e^{-ink\frac{\pi}{2}}}{\varepsilon^{n/2}} (\mathcal{F} \circ S^k) f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

pour  $B^\varepsilon \in \{Id, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon \nabla_x\}$ .

Le schéma de la preuve est le suivant. Pour  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ , la solution linéaire  $v^\varepsilon$  fournit une solution approchée pour  $u^\varepsilon$ . Ceci se montre grâce à des estimations de Strichartz sur  $u^\varepsilon$  et  $J^\varepsilon(t)u^\varepsilon$ . Les estimations analogues pour  $H^\varepsilon(t)u^\varepsilon$  s'en déduisent alors. La transition régime linéaire/régime non linéaire s'effectue dans la région  $\{t = \frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon\}$ , dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Éclatant les variables comme en paragraphe 1.1.1, introduisons  $\psi^\varepsilon$  donnée par

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \psi^\varepsilon \left( \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

La limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  permet de faire coïncider la fin du régime linéaire avec le début du régime non-linéaire en fournissant à  $\psi^\varepsilon$  une donnée  $\psi_-$  en  $-\infty$ . Près du foyer, l'idée est que la solution  $u^\varepsilon$  étant concentrée à l'origine (à l'échelle  $\varepsilon$ ), le terme  $|x|^2 u^\varepsilon(t, x)$  est négligeable devant les autres termes de (3.2). On introduit alors la fonction  $\psi$  donnée par

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \Delta \psi = |\psi|^{2\sigma} \psi \quad ; \quad e^{i\frac{t}{2} \Delta} \psi(t) \Big|_{t=-\infty} = \psi_-.$$

On montre que  $\psi^\varepsilon \rightarrow \psi$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t; \Sigma)$ , ce qui permet de ressortir du foyer pratiquement comme on y est entrés, avec pour effet non linéaire moyen l'action de l'opérateur  $S$ . Comme on n'a perdu aucune régularité au passage et comme l'analyse autorise des petites perturbations dans la donnée initiale, on peut réitérer la manœuvre pour obtenir le théorème 3.1. Notons que le terme  $e^{-ink\frac{\pi}{2}}$  n'est rien d'autre que l'indice de Maslov, et est présent dans le cas linéaire. Nous renvoyons enfin à [C03a] pour une analogie avec un résultat de F. Nier dans un cadre linéaire [66, 67].

**3.1.2. Remarques sur le problème de Cauchy.** — Au cours de l'étude de (3.2), j'ai découvert que cette équation était parfois prise comme modèle pour la condensation de Bose–Einstein, en dimensions un et deux au moins, avec  $\sigma = 2/n$ ,  $\varepsilon = \hbar$ , et une constante de couplage devant la non-linéarité, positive ou négative selon l'élément chimique considéré (voir par exemple [11, 10, 55, 71]). Oublions le paramètre semi-classique, et considérons le problème de Cauchy

$$(3.5) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \frac{\omega^2}{2} |x|^2 u + \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \quad u|_{t=0} = u_0 \in \Sigma,$$

pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega > 0$ ,  $0 < \sigma < \frac{2}{n-2}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La formule de Mehler (3.4) fournit des inégalités de Strichartz (locales en temps à cause de l'existence de valeur propres pour l'oscillateur harmonique), et reprenant les opérateurs utilisés dans [C03a] ( $J^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$  avec  $\varepsilon = 1$ ), on constate que la résolution de (3.5) par un argument de point fixe sur la formule de Duhamel est pratiquement équivalente à celle du cas  $\omega = 0$ . Ceci permet dans [C02a] de retrouver de façon immédiate des résultats de [68] dans le cas particulier du potentiel harmonique isotrope (l'isotropie n'est pas nécessaire). On établit en outre une loi d'évolution analogue à la loi de conservation pseudo-conforme du cas  $\omega = 0$  établie dans [34] :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|J(t)u\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \cos^2(\omega t) \|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \right) = \frac{\omega\lambda}{2\sigma+2} (n\sigma - 2) \sin(2\omega t) \|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2},$$

où  $J(t) = \omega x \sin(\omega t) - i \cos(\omega t) \nabla_x$ . On en déduit facilement le résultat suivant :

**Proposition 3.2** ([C02a]). — Soient  $u_0 \in \Sigma$  non nulle,  $\lambda < 0$  et  $2/n \leq \sigma < 2/(n-2)$ . Supposons que

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u_0\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq 0.$$

Alors  $u$  explose en temps fini avant l'instant  $\pi/2\omega$  :

$$\exists t_* \in \left] 0, \frac{\pi}{2\omega} \right], \quad \lim_{t \rightarrow t_*} \|\nabla_x u(t)\|_{L^2} = \infty \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow t_*} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty.$$

Remarquons que cette condition est plus faible que celle apparaissant dans [13],

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u_0\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} + \frac{\omega^2}{2} \|xu_0\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Dans [C02a], nous établissons aussi une borne inférieure sur le temps d'explosion dans la limite semi-classique  $\hbar \rightarrow 0$ , lorsque nous prenons en compte les échelles utilisées dans la modélisation physique, en dimensions un, deux et trois. Essentiellement, nous montrons que si la donnée initiale  $u_0^\hbar$  est telle que  $u_0^\hbar$ ,  $xu_0^\hbar$  et  $\hbar \nabla_x u_0^\hbar$  sont bornées dans  $L^2$  uniformément pour  $\hbar \in ]0, 1]$ , alors la majoration de la proposition 3.2 est optimale, c'est-à-dire  $t_*^\hbar$  tend vers  $\frac{\pi}{2\omega}$  lorsque  $\hbar \rightarrow 0$ .

Dans [87], J. Zhang a relevé un parallèle entre l'équation de Schrödinger avec non-linéarité critique  $L^2 - (3.5)$  avec  $\omega = 0$  et  $\sigma = 2/n$  – et la même équation avec potentiel harmonique – (3.5) avec  $\omega > 0$  et  $\sigma = 2/n$  – dans le cas attractif  $\lambda < 0$ . Dans [C02b], nous expliquons ce résultat de façon simple : un changement de variable relie les deux équations. Notons  $v$  la solution de (3.5) avec  $\omega = 0$  et  $\sigma = 2/n$ . Alors pourvu que le terme du membre de droite soit bien défini, on a :

$$(3.6) \quad u(t, x) = \frac{1}{(\cos \omega t)^{n/2}} e^{-i\frac{\omega}{2}x^2 \tan \omega t} v\left(\frac{\tan \omega t}{\omega}, \frac{x}{\cos \omega t}\right).$$

Ceci apparait pour la première fois dans [65] pour le cas linéaire  $\lambda = 0$ , et avait été remarqué indépendamment par des physiciens dans le cas non linéaire [76]. Notons que malgré cette formule,  $u$  n'explose pas forcément à l'instant  $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ . En effet, lorsque  $t \rightarrow t_1$ , la variable de temps  $\frac{\tan \omega t}{\omega}$  de  $v$  tend vers l'infini. Les propriétés de dispersion des solutions de l'équation de Schrödinger peuvent alors compenser l'annulation du cosinus.

Relevons cependant que le potentiel harmonique engendre de nouvelles solutions explosives. Tout d'abord, si  $v$  explose à l'instant  $T > 0$ , alors  $u$  explose à l'instant  $\frac{\arctan(\omega T)}{\omega}$ , c'est-à-dire toujours avant  $v$ . De plus, si  $v$  n'est pas suffisamment dispersive (typiquement, une onde solitaire  $v(t, x) = e^{i\kappa t} Q(x)$ ), alors  $u$  explose à l'instant  $\frac{\pi}{2\omega}$ . D'un point de vue heuristique, les propriétés de confinement du potentiel harmonique compactifient le temps (ce qui exclut également l'existence d'une théorie de la diffusion).

**3.1.3. Analyse semi-classique : non-linéarité de type Hartree.** — Dans [C03a], nous avons étudié le régime “optique linéaire, foyer non linéaire”, avec les mêmes échelles que dans [C00a]. Comme nous l'avons déjà relevé, le cas “optique linéaire, foyer linéaire” serait une conséquence facile de la preuve. Par contre, les deux autres cas du tableau présenté au paragraphe 1.1.1 posent problème. Pour une optique non linéaire avec foyer linéaire, on rencontre le même problème de différentiabilité de la non-linéarité que dans

[C00a] (où ce cas n'est complètement traité qu'en dimension un d'espace). Pour une optique non linéaire avec foyer non linéaire, les théorèmes 1.2 et 3.1 suggèrent qu'on doive itérer l'opérateur de scattering à longue portée. Apparaît alors le problème de la perte de régularité présent dans le théorème 1.2. Le premier obstacle peut disparaître si l'on considère, plutôt qu'une non-linéarité de type puissance, une non-linéarité de type Hartree. C'est ce que nous avons fait dans [CMSt-p]. La motivation initiale était de considérer un système de Schrödinger–Poisson en dimension trois, en présence d'un potentiel harmonique. Par résolution de l'équation de Poisson, ceci se ramène à l'étude d'une équation de Schrödinger avec potentiel harmonique et non-linéarité de type Hartree,

$$\left(\frac{1}{|x|} * |\psi|^2\right) \psi.$$

C'est parce que le potentiel coulombien présent dans la convolution est critique au niveau de la théorie de la diffusion que nous avons effectué une étude dans l'esprit de [C00a] :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = \frac{|x|^2}{2}u^\varepsilon + \varepsilon^\alpha (|x|^{-\gamma} * |u^\varepsilon|^2) u^\varepsilon \quad ; \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f,$$

avec  $\gamma > 0$ ,  $\alpha \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 2$ . On a les distinctions suivantes :

	$\alpha > \gamma$	$\alpha = \gamma$
$\alpha > 1$	Optique linéaire, foyer linéaire	Optique linéaire, foyer non linéaire
$\alpha = 1$	Optique non linéaire, foyer linéaire	Optique non linéaire, foyer non linéaire

Le cas “optique non linéaire, foyer non linéaire” étant apparemment très délicat techniquement, nous avons justifié les trois autres cas du tableau, et esquissé un calcul formel dans le cas relevant du système de Schrödinger–Poisson, les trois cas rigoureux étant là pour renforcer la conviction que le calcul formel est raisonnable. Pour le cas “optique linéaire, foyer non linéaire”, nous avons simplement donné les arguments permettant d'adapter la preuve de [C03a]. Pour le cas “optique non linéaire, foyer linéaire”, nous avons repris une écriture de la solution exacte sous forme d'intégrale lagrangienne, qui nous permet une étude très précise de ce régime. Nous renvoyons au papier pour les énoncés des résultats.

### 3.2. Potentiel polynomial et perturbation non linéaire

Comme mentionné au paragraphe 3.1.2, les bonnes propriétés des opérateurs  $J^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$  s'adaptent au cas où le potentiel harmonique est anisotrope, au moins au niveau de l'étude locale du problème de Cauchy. Il en est de même pour tout potentiel polynomial de degré au plus deux. Par contre, l'analogue de la loi de conservation pseudo-conforme dont se déduit la proposition 3.2 semble être particulière aux potentiels isotropes.

**3.2.1. Analyse semi-classique.** — Considérons une équation de Schrödinger non linéaire semi-classique, avec potentiel polynomial de degré au plus deux :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = V(y)u^\varepsilon + \lambda\varepsilon^{n\sigma}|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon,$$

avec non-linéarité répulsive  $\lambda > 0$  et donnée de Cauchy concentrée en un point :

$$u^\varepsilon(0, y) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \varphi\left(\frac{y - y_0}{\varepsilon}\right) e^{i\frac{y \cdot \eta_0}{\varepsilon}}.$$

Outre l'extension du résultat de [C03a], donnons une autre motivation pour cette étude. Le cas  $\lambda < 0$  a donné lieu à plusieurs études, au moins pour un profil initial  $\varphi$  particulier (voir par exemple [12, 53, 23]). L'idée est que pour une non-linéarité attractive, il peut y avoir équilibre entre les effets dispersifs de l'équation de Schrödinger et les effets non-linéaires. La dynamique engendrée par le potentiel impose alors le déplacement du point de l'espace des phases où se concentre la solution. Dans le cas  $\lambda > 0$ , on attend que les propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger ne soient pas atténuées par la non-linéarité, puisqu'il existe une théorie du scattering. Par contre, comme le montre l'exemple du potentiel harmonique [C03a], le potentiel lui-même peut contrarier les propriétés de dispersion. À notre connaissance, la seule étude dans le cas d'une non-linéarité répulsive est (outre [C03a]) celle effectuée dans [CM04].

Le potentiel  $V$  étant un polynôme arbitraire de degré au plus deux, on peut diagonaliser sa partie quadratique dans une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  ; le changement de base ne modifie pas le laplacien. Ensuite, en passant par la forme canonique dans chaque direction, on peut supposer, quitte à translater l'origine, que  $V$  s'écrit

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j^2 x_j^2 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c,$$

avec  $\omega_j > 0$ ,  $\delta_j \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $b_j, c \in \mathbb{R}$  et pour tout  $j$ ,  $\delta_j b_j = 0$  : on a soit uniquement un terme quadratique, soit uniquement un terme linéaire, soit juste une constante. Ce dernier cas se ramène au cas de la constante nulle par changement de fonction pour une équation de Schrödinger. Comme remarqué dans [CN04], le cas d'un terme linéaire peut également être traité par changement de fonction inconnue (la formule d'Avron–Herbst commute avec les non-linéarités  $F(|z|^2)z$ ), et on peut en fait se ramener au cas où  $V$  est une forme quadratique, éventuellement dégénérée. Généralisant les opérateurs utilisés dans [C03a], on a alors, *pourvu que  $V$  ne soit pas un potentiel harmonique isotrope comme dans [C03a]* :

**Théorème 3.3** ([CM04]). — *Pour de "bonnes" valeurs de  $\sigma$ , on a :*

1. *Pour tout  $T > 0$ , il existe  $\varepsilon(T) > 0$  tel que pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(T)$ ,  $u^\varepsilon \in C([-T, T]; \Sigma)$ .*
2. *On a de plus les asymptotiques suivantes :*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\Lambda \varepsilon \leq \pm t \leq T} \|A^\varepsilon(t) (u^\varepsilon(t) - u_\pm^\varepsilon(t))\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0, \quad A^\varepsilon(t) \in \{Id, \varepsilon \nabla_x, x - x(t)\},$$

où  $x(t)$  est la trajectoire classique issue de  $(x_0, \xi_0)$  (obtenu à partir de  $(y_0, \eta_0)$  après les transformations précédentes), et  $u_\pm^\varepsilon \in C(\mathbb{R}; \Sigma)$  sont les solutions de

$$i\varepsilon \partial_t u_\pm^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u_\pm^\varepsilon = V(x) u_\pm^\varepsilon \quad ; \quad u_\pm^\varepsilon|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \psi_\pm \left( \frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) e^{ix \cdot \xi_0 / \varepsilon},$$

$\psi_\pm$  étant déduites de  $\varphi$  par scattering non linéaire associé à (1.10).

Nous n'avons pas écrit l'asymptotique dans la couche limite  $|t| \leq \Lambda \varepsilon$  pour alléger l'énoncé, et renvoyons à l'article pour un énoncé complet. Ainsi, à moins que  $V$  soit



un potentiel harmonique isotrope, les effets non linéaires ne se manifestent au premier ordre que pour des temps  $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . L'idée est que l'énergie est portée par les rayons de l'optique géométrique, qui ne se rencontrent tous en un point pour des temps non nuls que si le potentiel est quadratique et qu'en outre soit il est isotrope, soit ses pulsations sont rationnellement liées (voir [C03a, CM04]). Dans le cas contraire, les focalisations éventuelles sont sous-critiques pour les échelles de non-linéarité considérées ici, ce qui donne lieu à des "caustiques linéaires".

Notons que l'étude dans la couche limite  $|t| \leq \Lambda\varepsilon$  est généralisée au cas où le potentiel  $V$  est sous-quadratique (non nécessairement polynomial), hypothèse raisonnable d'après les résultats de [24, 25, 73, 21, 83, 84, 85]. Par contre, la preuve du théorème 3.3 repose de manière cruciale sur les opérateurs  $J^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$  généralisés en dehors de cette couche limite. Relevons que comme dans [C03a], ces opérateurs sont des dérivées de Heisenberg (donc commutent à la partie linéaire de l'équation), et se factorisent sous la forme

$$(3.7) \quad f(t)e^{i\phi(t,x)/\varepsilon}\nabla_x \left( e^{-i\phi(t,x)/\varepsilon} \cdot \right),$$

pour des fonctions  $\phi$  solutions de l'équation eikonale

$$(3.8) \quad \partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi|^2 + V(x) = 0.$$

L'écriture (3.7) est particulièrement confortable vis-à-vis de non-linéarités de la forme  $F(|z|^2)z$  : les opérateurs agissent comme le gradient, et fournissent des inégalités de Gagliardo–Nirenberg à poids (fonction  $f$ ), ces poids étant essentiellement optimaux en dehors du foyer initial. Nous nous sommes posés la question de l'existence de tels opérateurs dans un cadre plus général (potentiel régulier sous-quadratique). Partant de l'écriture (3.7), nous avons cherché à savoir quand un tel opérateur commute à la partie linéaire de l'équation. La conclusion est que ceci n'est possible que si  $\phi$  est solution de l'équation eikonale (3.8) et si  $V$  est un polynôme de degré au plus deux. Le problème est qu'apparemment, une commutation approchée génère des erreurs non négligeables, ce qui semble montrer les limites de notre approche.

**3.2.2. Potentiel harmonique répulsif.** — Revenons à l'équation présentée en introduction, une équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel harmonique "répulsif" (3). Comme nous l'avons signalé, la fonctionnelle d'énergie n'est pas positive, même dans le cas linéaire. La motivation principale pour étudier cette équation réside dans l'interaction entre les effets linéaires engendrés par le potentiel, et les effets non linéaires. Donnons deux arguments plus précis. Tout d'abord, on a l'analogie de la formule de Mehler (3.4) (voir [41]) :

$$(3.9) \quad e^{-i\frac{t}{2}(-\Delta - \omega^2|x|^2)}u_0 = e^{-in\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}t} \left| \frac{\omega}{2\pi\operatorname{sh}\omega t} \right|^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\omega}{\operatorname{sh}\omega t} \left( \frac{x^2+y^2}{2} \operatorname{ch}\omega t - x \cdot y \right)} u_0(y) dy.$$

On en déduit une estimation de dispersion

$$\left\| e^{-i\frac{t}{2}(-\Delta - \omega^2|x|^2)}u_0 \right\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq \left| \frac{\omega}{2\pi\operatorname{sh}\omega t} \right|^{n/2} \leq \left| \frac{1}{2\pi t} \right|^{n/2},$$

qui est “meilleure” que dans le cas sans potentiel. En particulier, on a les mêmes inégalités de Strichartz que dans le cas  $\omega = 0$  (on en a même d’autres, comme utilisé dans [C05]). La dispersion exponentielle en temps grand suggère par exemple que la théorie de la diffusion associée à cet opérateur possède une classe plus large de perturbations à courte portée ([C03b] pour la théorie non linéaire, [BCHM05] pour la contrepartie linéaire). L’autre argument (en réalité pas vraiment différent) consiste en l’examen des trajectoires classiques, avec pour motivation l’étude du phénomène d’explosion en temps fini pour l’équation de Schrödinger non linéaire. Dans le cas sans potentiel, le critère d’explosion à l’instant  $T^*$  s’écrit :

$$\|\nabla_x u(t)\|_{L^2} \xrightarrow{t \rightarrow T^*} +\infty.$$

Comme la norme  $L^2$  de  $u$  est conservée, ceci suggère une forte concentration de l’énergie en au moins un point de l’espace (voir [82, 60] pour des exemples). En régime semi-classique, l’énergie est portée asymptotiquement par les bicaractéristiques. Intuitivement, la géométrie des rayons peut ainsi aider ou contrarier le phénomène d’explosion en temps fini. Nous avons vu que dans le cas de l’oscillateur harmonique, on a plutôt plus d’explosion que dans le cas sans potentiel (proposition 3.2 et [C02b]), avec des rayons tracés sur la figure 5. Dans le cas de l’oscillateur harmonique répulsif, les rayons sont solutions de l’équation

$$\ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0,$$

et tendent en général vers l’infini exponentiellement vite. On retrouve donc un phénomène de dispersion plus fort que dans le cas sans potentiel, suggérant maintenant que le potentiel harmonique répulsif s’oppose au phénomène d’explosion en temps fini. Nous renvoyons à l’introduction de [C03b] pour une discussion plus détaillée, ainsi qu’à celle de l’exposé à Forges-les-Eaux (même référence dans le présent document), où on mentionne en particulier des résultats de [15] et [CN04]. Les principaux résultats de [C03b] sont les suivants :

**Théorème 3.4** ([C03b]). — Soient  $u_0 \in \Sigma$ ,  $\sigma > 0$ , avec  $\sigma < 2/(n-2)$  si  $n \geq 3$ .

1. Supposons  $\lambda > 0$ .

1.i. Il existe une unique solution  $u \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$  pour (3). De plus, il existe un unique  $u_+ \in \Sigma$  tel que, notant  $U_\omega(t) = e^{-i\frac{t}{2}(-\Delta - \omega^2|x|^2)}$ , on ait :

$$\|U_\omega(-t)u(t) - u_+\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

1.ii. Pour tout  $u_- \in \Sigma$ , il existe un unique  $u_0 \in \Sigma$  tel que la solution  $u \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$  de (3) satisfasse

$$\|U_\omega(-t)u(t) - u_-\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

2. Supposons  $\lambda < 0$  et  $\sigma \geq 2/n$  : on peut avoir explosion en temps fini pour (3).

2.i. Il existe  $\omega_1 > 0$  tel que pour tout  $\omega \geq \omega_1$ ,  $u$  est globale en temps :  $u \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$ .

2.ii. Supposons  $\sigma = 2/n$ . Si la solution  $v$  de

$$i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = \lambda|v|^{4/n}v \quad ; \quad v|_{t=0} = u_0$$

explose à l’instant  $T > 0$ , alors :

- pour  $\omega < 1/T$ ,  $u$  explose à l’instant  $\arg \operatorname{th}(\omega T)/\omega > T$ .
- pour  $\omega \geq 1/T$ ,  $u$  est globale dans le futur :  $u \in C(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ .

L'approche suivie pour les preuves consiste à remarquer qu'on obtient (3) à partir de (3.5) en remplaçant  $\omega$  par  $\pm i\omega$ . L'analogie de la partie algébrique de [C02a] et [C02b] est donc immédiat (les fonctions trigonométriques deviennent des fonctions hyperboliques) : on a en particulier un autre analogue de la loi de conservation pseudo-conforme et un changement de variable reliant  $u$  et  $v$  prouvant immédiatement le dernier point. Relevons que dans le cas  $\omega = 1/T$ , nous exhibons des solutions à croissance exponentielle en temps. Pour les autres points, il s'agit dans un premier temps d'étudier soigneusement le problème de Cauchy local et de montrer que l'obstruction à l'existence globale est la même que d'habitude. On passe alors du local au global en utilisant la nouvelle loi de conservation pseudo-conforme. Des conditions suffisantes d'explosion en temps fini se montrent par la méthode de Zakharov–Glasse ([35, 13]).

Ces résultats confirment l'heuristique initiale : le potentiel harmonique répulsif disperse suffisamment pour modifier la théorie de la diffusion (toute non-linéarité de type puissance est à courte portée) et le phénomène d'explosion en temps fini (en augmentant le paramètre  $\omega$ , on obtient à coup sûr une solution globale).

**3.2.3. Généralisation.** — L'aspect le plus frustrant des résultats de [C02a, C02b, C03b] est que leurs preuves reposent de manière cruciale sur des “miracles algébriques” : tout d'abord, la présence des opérateurs  $J$  et  $H$ , dont nous avons vu qu'elle est essentiellement caractéristique des potentiels polynomiaux d'ordre deux, et aussi l'existence de lois d'évolution analogues à la loi pseudo-conforme du cas sans potentiel. Cette seconde propriété semble de plus caractéristique d'un potentiel *isotrope*, alors que les preuves de la proposition 3.2 et du théorème 3.4 y recourent de façon apparemment essentielle. Par ailleurs, nous avons vu qu'heuristiquement, le potentiel harmonique encourage l'explosion en temps fini, alors que le potentiel harmonique répulsif la combat, cette intuition étant vérifiée dans le cas isotrope. Que se passe-t-il lorsque ces deux aspects sont en compétition ? Une réponse partielle est apportée dans [C05], où nous considérons comme équation modèle

$$(3.10) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \frac{1}{2}(-\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2)u + \lambda|u|^{2\sigma}u \quad ; \quad u|_{t=0} = u_0.$$

La dimension d'espace est  $n \geq 2$ . Nous montrons que si les effets répulsifs sont suffisamment forts (dans l'absolu, et comparés aux effets confinants), alors on a existence globale :

**Théorème 3.5** ([C05]). — Soient  $n \geq 2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq \frac{2}{n}$  avec  $\sigma < \frac{2}{n-2}$  si  $n \geq 3$ , et  $u_0 \in \Sigma$ . Alors il existe  $\Lambda = \Lambda(n, \sigma, |\lambda|, \|u_0\|_\Sigma)$  tel que pour

$$\omega_1 \geq \Lambda(1 + \omega_2) + \frac{2\sigma^2}{2 - (n-2)\sigma}(1 + \omega_2) \ln(1 + \omega_2),$$

la solution  $u$  de (3.10) est globale en temps :  $u \in C(\mathbb{R}; \Sigma)$ . De plus, il y a scattering : il existe  $u_-, u_+ \in \Sigma$  tels que

$$\|U_V(-t)u(t) - u_\pm\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \text{où} \quad U_V(t) = \exp\left(-i\frac{t}{2}(-\Delta - \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2)\right).$$

La preuve de ce résultat repose encore sur les opérateurs  $J$  et  $H$ , qui fournissent en particulier des inégalités de Gagliardo–Nirenberg

$$\|f\|_{L^p} \leq C_p \left( \frac{\|J_1(t)f\|_{L^2}}{\operatorname{ch}(\omega_1 t)} \right)^{\frac{\delta(p)}{n}} \left( \frac{\|J_2(t)f\|_{L^2}}{|\cos(\omega_2 t)|} \right)^{\frac{\delta(p)}{n}} \|f\|_{L^2}^{1-\delta(p)} \prod_{j=3}^n \|\partial_j f\|_{L^2}^{\frac{\delta(p)}{n}}.$$

On montre dans un premier temps un résultat d'existence locale sur un intervalle  $[-t_0, t_0]$ , avec

$$\frac{\eta}{1 + \omega_2} \leq t_0 \leq \frac{\pi}{4\omega_2}, \quad \eta > 0 \text{ indépendant de } \omega_1 \text{ et } \omega_2.$$

À l'instant  $t_0$ , les normes  $L^2$  de  $u$ ,  $Ju$  et  $Hu$  sont bornées, indépendamment de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . L'estimation ci-dessus montre alors que les normes  $L^p$  ( $p \neq 2$ ) sont petites pour  $\omega_1 \gg 1 + \omega_2$  :

$$\|u(t_0)\|_{L^p} \lesssim \exp\left(-\eta \frac{\omega_1}{1 + \omega_2}\right).$$

Un argument de continuité permet ensuite de montrer que sous l'hypothèse du théorème,  $u$  ne peut pas trop s'éloigner de la solution linéaire coïncidant avec  $u$  à l'instant  $t_0$  : heuristiquement, l'inégalité ci-dessus montre que le “potentiel non linéaire”  $|u|^{2\sigma}$  devient petit (et le reste). Le scattering suit alors facilement, grâce à la décroissance exponentielle.

Une difficulté n'apparaît pas dans cette ébauche de preuve : pour montrer l'existence locale, nous utilisons des inégalités de Strichartz locales en temps. D'après la formule de Mehler, on a

$$\|U_V(t)\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim \left| \frac{\omega_1 \omega_2}{t^{n-2} \operatorname{sh}(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)} \right|^{1/2}.$$

Ainsi, pour des temps petits, on a la dispersion habituelle en  $|t|^{-n/2}$ . Pour passer au global en temps, des inégalités de Strichartz locales en temps semblent insuffisantes : on retrouve la compétition entre la dispersion exponentielle et la focalisation périodique en temps. Nous montrons des inégalités de Strichartz globales en temps en remarquant que l'hypothèse habituelle de dispersion en  $|t|^{-n/2}$  peut être remplacée par une décroissance en  $w(t)^{n/2}$ , où la fonction  $w$  est dans  $L^1_{\text{faible}}$ . Cet argument permet également de montrer des résultats “inhabituels” dans le cas des données petites : pour  $u_0 \in L^2$  avec  $\|u_0\|_{L^2} \ll 1$ , on montre existence globale *et scattering* pour (3.10) avec  $\sigma \leq 2/n$  par les seules inégalités de Strichartz (on ne peut pas utiliser  $J$  et  $H$  dans un cadre  $L^2$ ).

Mentionnons également que le théorème 3.5 laisse la porte ouverte à plusieurs questions : a-t-on existence globale pour  $\lambda > 0$  sans condition sur  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ? Peut-on exhiber une condition suffisante d'explosion en temps fini ?

Signalons enfin qu'une synthèse des résultats présentés jusqu'ici dans le chapitre 3 est rédigée dans [C-p].

### 3.3. Potentiel répulsif et perturbation linéaire : scattering

Laissons de côté la question de l'explosion en temps fini pour nous concentrer sur celle du scattering. Le théorème 3.4 montre qu'on n'a pas de phénomène à longue portée dans le cas d'une non-linéarité de type puissance. Une question naturelle consiste alors à considérer non pas une perturbation non linéaire du hamiltonien associé, mais une perturbation

linéaire. C'est l'objet initial du travail [BCHM05], qui va beaucoup plus loin, en considérant comme hamiltonien de référence et perturbation :

$$\mathbf{H}_{\alpha,0} = -\Delta - |x|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad ; \quad \mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_{\alpha,0} + V_\alpha(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1.$$

De mon point de vue, le but de cette collaboration était d'apprendre des techniques différentes. L'outil principalement utilisé est la théorie de Mourre ([63, 17, 28]). Notons que nous considérons aussi des potentiels quadratiques assez généraux, correspondant à une forme quadratique non dégénérée (cette dernière hypothèse permettant d'obtenir des propriétés de compacité) ; nous ne mentionnerons ici que les résultats concernant  $\mathbf{H}_\alpha$ .

Nous avons déjà vu que pour le cas  $\alpha = 2$ , les trajectoires classiques partent à l'infini exponentiellement vite en général. Pour  $0 < \alpha < 2$ , les rayons sont solutions de

$$\ddot{x}(t) - \alpha|x(t)|^{\alpha-2}x(t) = 0.$$

Cherchant le premier terme d'un développement asymptotique formel  $x(t) \approx t^\kappa y$ , on trouve  $\kappa = \frac{2}{2-\alpha}$  : la vitesse de fuite à l'infini augmente avec  $\alpha$ , pour atteindre le cas critique  $\alpha = 2$  avec une vitesse exponentielle (pour  $\alpha > 2$ ,  $\mathbf{H}_{\alpha,0}$  n'est plus essentiellement auto-adjoint justement à cause de la possibilité de vitesse infinie, [21]). Nous définissons la position de sorte que  $p_\alpha(x(t)) \approx t$  par :

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \ln \langle x \rangle & \text{si } \alpha = 2, \\ \langle x \rangle^{1-\alpha/2} & \text{si } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

La condition de courte portée habituelle  $|V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-1-\varepsilon}$  est remplacée par :

$$(3.11) \quad |V_\alpha(x)| \lesssim p_\alpha(x)^{-1-\varepsilon}, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{pour un } \varepsilon > 0.$$

Le résultat principal de [BCHM05] est le suivant :

**Théorème 3.6** ([BCHM05]). — *Soient  $0 < \alpha \leq 2$  et  $V_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  vérifiant (3.11). Alors les limites suivantes existent :*

$$s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{it\mathbf{H}_\alpha} e^{-it\mathbf{H}_{\alpha,0}} \quad ; \quad s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{it\mathbf{H}_{\alpha,0}} e^{-it\mathbf{H}_\alpha} \mathbb{1}^c(\mathbf{H}_\alpha),$$

où  $\mathbb{1}^c(\mathbf{H}_\alpha)$  est la projection sur le spectre continu de  $\mathbf{H}_\alpha$ . Si on note  $\Omega^+$  la première limite, alors la seconde est égale à  $(\Omega^+)^*$ , et

$$(\Omega^+)^* \Omega^+ = 1 \quad ; \quad \Omega^+(\Omega^+)^* = \mathbb{1}^c(\mathbf{H}_\alpha).$$

La preuve de ce résultat repose sur de nouvelles estimations de Mourre. Dans le cas  $\alpha = 2$ , essayons la fonction de fuite habituelle, de symbole  $x \cdot \xi$  :

$$i[\mathbf{H}_{2,0}, (xD + Dx)/2] = -2\Delta + 2x^2.$$

On obtient l'oscillateur harmonique, qui est bien sûr positif. Pourtant, il n'est pas  $\mathbf{H}_{2,0}$ -borné. Plaçons-nous en dimension un d'espace et cherchons alors un opérateur pseudo-différentiel  $A_2$  de symbole  $a_2(x, \xi)$  tel que :

$$\{\xi^2 - x^2, a_2(x, \xi)\} = 4, \quad \text{sur la surface d'énergie } \{(x, \xi) ; \xi^2 - x^2 = E\}.$$

On propose la solution suivante :  $a_2(x, \xi) = \ln(\xi+x) - \ln(\xi-x)$ . Maintenant pour  $0 < \alpha < 2$  et  $x > 0$ , essayons de résoudre

$$\{\xi^2 - x^\alpha, a_\alpha(x, \xi)\} = 2 - \alpha, \quad \text{sur } \{(x, \xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} ; \xi^2 - x^\alpha = E\}.$$

Avec  $a_\alpha(x, \xi) = \xi x^{1-\alpha}$ , on a

$$\{\xi^2 - x^\alpha, a_\alpha(x, \xi)\} = 2 - \alpha + 2E(1 - \alpha)x^{-\alpha}, \quad \text{pour } \xi^2 - x^\alpha = E.$$

Ces calculs conduisent à introduire les nouvelles fonctions de fuite. En outre, nous construisons la vitesse asymptotique, qui précisent la façon dont le potentiel  $-|x|^\alpha$  accélère les “particules”.

Un autre obstacle sérieux consiste à manipuler des fonctions de troncature en énergie, qui dans notre cas sont de la forme  $\chi(-\Delta - |x|^\alpha)$ . Cependant,  $\mathbb{H}_{\alpha,0}$  n’étant pas elliptique, cette formule n’est pas très fiable. Pour retrouver un cadre propice au calcul pseudo-différentiel, nous utilisons des troncatures de symbole

$$\chi\left(\frac{|\xi|^2 - |x|^\alpha}{|\xi|^2 + |x|^\alpha}\right).$$

### 3.4. Ondes de Bloch faiblement non linéaires

Concluons ce mémoire par l’étude de l’équation (4), menée dans [CMSp04]. Dans le cas linéaire  $\lambda \equiv 0$ , l’analyse semi-classique a été effectuée dans [70, 80] (limite adiabatique) et [4, 30, 33] (mesures de Wigner). La motivation pour étudier une perturbation non linéaire réside dans les progrès récents sur la condensation de Bose–Einstein. Notre approche consiste à effectuer un développement de type BKW à deux échelles (ce qui limite le résultat aux temps précédents la formation d’une caustique), à la manière de [6, 18, 39]. Il s’agit d’introduire une variable supplémentaire correspondant à l’échelle  $x/\varepsilon$ . Dans le cas linéaire, l’analogie de l’équation eikonale fait apparaître un problème de valeurs propres (ondes de Bloch). Ainsi, les modes de Bloch peuvent être considérés comme un analogue des modes de Fourier de l’optique géométrique [72].

Le facteur  $\varepsilon$  devant la non-linéarité explique le terme “faiblement non linéaire” du titre du papier : dans le développement BKW, la non-linéarité n’apparaît qu’au niveau de l’équation de transport de l’amplitude, pas au niveau de l’équation eikonale. Dans l’idéal, on voudrait traiter le cas fortement non linéaire (pas de  $\varepsilon$  devant la non-linéarité), dans l’esprit de [37]. Le problème réside dans la façon de découpler les variables  $x$  et  $x/\varepsilon$ , qui n’est pas du tout claire. Ce problème disparaît dans le cas faiblement non linéaire. Le résultat principal, énoncé de façon vague en raison de la lourdeur des notations nécessaires à le rendre précis, est le suivant :

**Théorème 3.7** ([CMSp04]). — *Soient  $V_\Gamma$  et  $U$  des potentiels réels réguliers,  $V_\Gamma$  étant  $\Gamma$ -périodique,  $U$  sous-quadratique, et soit  $\lambda$  régulière à valeurs réelles. Supposons la donnée initiale  $\psi_I^\varepsilon$  bien préparée le long d’une fonction propre  $\chi_n = \chi_n(y, k)$  associée à une bande simple isolée  $E_n = E_n(k)$  :*

$$u_I^\varepsilon(x) = a_I(x)\chi_n\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\phi_I(x)\right) e^{i\phi_I(x)/\varepsilon} + \varepsilon\varphi_I^\varepsilon(x).$$

*Supposons qu’il n’y a pas de caustique avant l’instant  $\tau > 0$ , et soit  $\tau_0 \in ]0, \tau[$ . Alors pour  $\varepsilon$  assez petit, la solution de (4) existe jusqu’à l’instant  $\tau_0$ , avec l’asymptotique suivante :*

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau_0} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon); \quad \forall \eta > 0, \quad \sup_{0 \leq t \leq \tau_0} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1-\eta}),$$

où la solution approchée  $v^\varepsilon$  est donnée par :

$$v^\varepsilon(t, x) = \frac{a_I(X_t^{-1}(x))}{\sqrt{J_t(X_t^{-1}(x))}} \chi_n\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x \phi(t, x)\right) e^{i\omega(t, X_t^{-1}(x))} e^{i\phi(t, x)/\varepsilon}.$$

La phase  $\phi$  est solution de l'équation de Hamilton–Jacobi correspondant au flot classique  $(t, x) \mapsto X_t(x)$ ,  $J_t$  est le déterminant de Jacobi, et  $\omega$  est donné par

$$\begin{aligned} \omega(t, x) = & -i \int_0^t \beta(s, X_s(x)) ds \\ & - |a_I(x)|^{2\sigma} \int_0^t \frac{\lambda(s)}{J_s(x)^\sigma} \int_Y |\chi_n(y, \nabla_x \phi(s, X_s(x)))|^{2\sigma+2} dy ds. \end{aligned}$$

Ici,  $\beta \in i\mathbb{R}$  représente la phase de Berry, et  $Y$  est le domaine fondamental centré de  $\Gamma$ .

La phase de Berry est un phénomène linéaire ([77, 80]), aussi le seul phénomène non linéaire visible au premier ordre est la modification de cette phase, donnée par  $\omega$ . Ce phénomène est à rapprocher de l'auto-modulation de phase de la physique des lasers ([86, 9, 19]). La démonstration consiste en un calcul formel de type BKW et en une justification dans l'esprit de l'optique géométrique dans des espaces du type  $H_\varepsilon^s$  d'Olivier Guès [38]. Plusieurs questions intéressantes subsistent : par exemple, le cas d'une non-linéarité plus forte, ou le cas de données portées par plusieurs bandes de Bloch (avec ou sans croisement). Notons qu'un traitement numérique a été effectué dans [36], permettant éventuellement de guider l'intuition sur certaines questions laissées ouvertes.

## Chapitre 4

### Travaux classés par thème

Des liens vers la version électronique de la plupart des travaux sont disponibles à :  
<http://www.math.u-bordeaux.fr/~carles/publi.fr.html>

#### Focalisation en un point pour des équations semilinéaires

- [C98] R. Carles, *Comportements précisés près d'une caustique en optique géométrique non linéaire*, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), no. 11-12, 1929–1967.
- [C00a] ———, *Geometric optics with caustic crossing for some nonlinear Schrödinger equations*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 2, 475–551.  
Dans les actes de : Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000), SIAM, Philadelphia, 610–615.
- [C00b] ———, *Focusing on a line for nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^2$* , Asymptot. Anal. **23** (2000), no. 3-4, 255–276.
- [C01a] ———, *Geometric optics and long range scattering for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001), no. 1, 41–67.
- [C01b] ———, *Remarques sur les mesures de Wigner*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I **332** (2001), no. 11, 981–984.
- [CL03] R. Carles et D. Lannes, *Focusing of a pulse with arbitrary phase shift for a nonlinear wave equation*, Bull. Soc. Math. France **131** (2003), no. 2, 289–306.
- [CL-p] ———, *Focusing at a point with caustic crossing for a class of nonlinear equations*, Colloque franco-tunisien, Hammamet, 2003.
- [CR02] R. Carles et J. Rauch, *Focusing of spherical nonlinear pulses in  $\mathbb{R}^{1+3}$* , Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 3, 791–804.
- [CR04a] ———, *Focusing of Spherical Nonlinear Pulses in  $\mathbb{R}^{1+3}$  II. Nonlinear Caustic*, Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 3, 815–864.  
Annoncé dans : C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 12, 1077–1082.
- [CR04b] ———, *Focusing of Spherical Nonlinear Pulses in  $\mathbb{R}^{1+3}$  III. Sub and Supercritical cases*, Tohoku Math. J. **56** (2004), 393–410.  
Annoncé dans : C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 11, 985–990.



### Rôle des oscillations quadratiques dans NLS

- [CFG03] R. Carles, C. Fermanian et I. Gallagher, *On the role of quadratic oscillations in nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **203** (2003), no. 2, 453–493.  
Annoncé par I. Gallagher, Séminaire X-EDP, 2002–2003, Exp. No. IX.
- [CK-p] R. Carles et S. Keraani, *On the role of quadratic oscillations in nonlinear Schrödinger equations II. The  $L^2$ -critical case*, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.

### Équations de Schrödinger avec potentiel et perturbation

- [BCHM05] J.-F. Bony, R. Carles, D. Häfner et L. Michel, *Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential*, J. Math. Pures Appl. **84** (2005), no. 5, 509–579.  
Annoncé dans : C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), no. 6, 453–456.
- [C02a] R. Carles, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 4, 757–772.  
Annoncé dans : C. R. Acad. Sci. Paris, t. 334, Série I **334** (2002), 763–766.
- [C02b] ———, *Critical nonlinear Schrödinger equations with and without harmonic potential*, Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (2002), no. 10, 1513–1523.
- [C03a] ———, *Semi-classical Schrödinger equations with harmonic potential and nonlinear perturbation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003), no. 3, 501–542.  
Annoncé dans : Séminaire X-EDP, 2001–2002, Exp. No. III.
- [C03b] ———, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2003), no. 4, 823–843.  
Synthèse de résultats dans : Journées EDP, Forges–les–Eaux, 2003.
- [C05] ———, *Global existence results for nonlinear Schrödinger equations with quadratic potentials*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **13** (2005), no. 2, 385–398.
- [C-p] ———, *Linear vs. nonlinear effects for nonlinear Schrödinger equations with potential*, Commun. Contemp. Math., à paraître.
- [CMSp04] R. Carles, P. A. Markowich et C. Sparber, *Semiclassical asymptotics for weakly nonlinear Bloch waves*, J. Stat. Phys. **117** (2004), nos. 1-2, 343–375.
- [CMSt-p] R. Carles, N. J. Mauser et H. P. Stimming, *(Semi)classical limit of the Hartree equation with harmonic potential*, SIAM J. Appl. Math., à paraître.
- [CM04] R. Carles et L. Miller, *Semiclassical nonlinear Schrödinger equations with potential and focusing initial data*, Osaka J. Math. **41** (2004), no. 3, 693–725.
- [CN04] R. Carles et Y. Nakamura, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential*, Hokkaido Math. J. **33** (2004), no. 3, 719–729.

## Bibliographie

- [1] D. Alterman, *Diffractional nonlinear geometric optics for short pulses*, thèse de doctorat, University of Michigan, 1999.
- [2] D. Alterman et J. Rauch, *Nonlinear geometric optics for short pulses*, J. Diff. Eq. **178** (2002), no. 2, 437–465.
- [3] H. Bahouri et P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, Amer. J. Math. **121** (1999), no. 1, 131–175.
- [4] G. Bal, A. Fannjiang, G. Papanicolaou, et L. Ryzhik, *Radiative transport in a periodic structure*, J. Stat. Phys. **95** (1999), no. 1-2, 479–494.
- [5] J. E. Barab, *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.
- [6] A. Bensoussan, J. L. Lions, et G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [7] J. Bourgain, *Some new estimates on oscillatory integrals*, Essays on Fourier analysis in honor of Elias M. Stein (Princeton, NJ, 1991), Princeton Math. Ser., vol. 42, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995, pp. 83–112.
- [8] ———, *Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 5, 253–283.
- [9] R. W. Boyd, *Nonlinear optics*, Academic Press, New York, 1992.
- [10] C. C. Bradley, C. A. Sackett, et R. G. Hulet, *Bose-Einstein condensation of Lithium : Observation of limited condensate number*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 985–989.
- [11] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, et R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 1687–1690.
- [12] J. C. Bronski et R. L. Jerrard, *Soliton dynamics in a potential*, Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 2-3, 329–342.
- [13] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.
- [14] T. Cazenave et F. Weissler, *Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case*, Lect. Notes in Math., vol. 1394, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 18–29.

- [15] ———, *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), 75–100.
- [16] T. Colin et D. Lannes, *Long-wave short-wave resonance for nonlinear geometric optics*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 351–419.
- [17] J. Dereziński et C. Gérard, *Scattering theory of quantum and classical  $N$ -particle systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [18] M. Dimassi, J.-C. Guillot, et J. Ralston, *Semi-classical asymptotics in magnetic Bloch bands*, J. Phys. A **35** (2002), no. 35, 7597–7605.
- [19] P. Donnât, *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire*, thèse de doctorat, École polytechnique, Palaiseau (France), 1994.
- [20] J. J. Duistermaat, *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 207–281.
- [21] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators. Part II : Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London, 1963.
- [22] R. P. Feynman et A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals (International Series in Pure and Applied Physics)*, Maidenhead, Berksh. : McGraw-Hill Publishing Company, Ltd., 365 p., 1965.
- [23] J. Frohlich, S. Gustafson, B. L. G. Jonsson, et I. M. Sigal, *Solitary Wave Dynamics in an External Potential*, Comm. Math. Phys. **250** (2004), no. 3, 613–642.
- [24] D. Fujiwara, *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation*, J. Analyse Math. **35** (1979), 41–96.
- [25] ———, *Remarks on the convergence of the Feynman path integrals*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 3, 559–600.
- [26] I. Gallagher, *Profile decomposition for solutions of the Navier-Stokes equations*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 2, 285–316.
- [27] I. Gallagher et P. Gérard, *Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle*, J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 1, 1–49.
- [28] C. Gérard et F. Nier, *Scattering theory for the perturbations of periodic Schrödinger operators*, J. Math. Kyoto Univ. **38** (1998), no. 4, 595–634.
- [29] P. Gérard, communication personnelle.
- [30] ———, *Mesures semi-classique et ondes de Bloch*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1990–1991 (Palaiseau), École Polytech., 1991, pp. Exp. No. XVI, 19.
- [31] ———, *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations*, J. Funct. Anal. **141** (1996), no. 1, 60–98.

- [32] ———, *Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 213–233.
- [33] P. Gérard, P. A. Markowich, N. J. Mauser, et F. Poupaud, *Homogenization limits and Wigner transforms*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 4, 323–379.
- [34] J. Ginibre et G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. II Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33–71.
- [35] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), 1794–1797.
- [36] L. Gosse et N. Mauser, *Multiphase semiclassical approximation of an electron in a one-dimensional crystalline lattice III. From ab-initio models to WKB for Schrödinger-Poisson*, preprint, 2004.
- [37] E. Grenier, *Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 2, 523–530.
- [38] O. Guès, *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasi-linéaires*, Asymptotic Anal. **6** (1993), no. 3, 241–269.
- [39] J.-C. Guillot, J. Ralston, et E. Trubowitz, *Semiclassical asymptotics in solid-state physics*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), no. 3, 401–415.
- [40] N. Hayashi et P. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.
- [41] L. Hörmander, *Symplectic classification of quadratic forms, and general Mehler formulas*, Math. Z. **219** (1995), no. 3, 413–449.
- [42] J. Hunter et J. Keller, *Caustics of nonlinear waves*, Wave motion **9** (1987), 429–443.
- [43] J.-L. Joly, G. Métivier, et J. Rauch, *Remarques sur l'optique géométrique non linéaire multidimensionnelle*, Séminaire équations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique, no. 1, 1990-91.
- [44] ———, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*, Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup. **28** (1995), 51–113.
- [45] ———, *Focusing at a point and absorption of nonlinear oscillations*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 10, 3921–3969.
- [46] ———, *Nonlinear oscillations beyond caustics*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), no. 5, 443–527.
- [47] ———, *Several recent results in nonlinear geometric optics*, Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995 ; Lund, 1995), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996, pp. 181–206.

- [48] ———, *Caustics for dissipative semilinear oscillations*, Geometrical Optics and Related Topics (F. Colombini et N. Lerner, eds.), Birkäuser, 1997, pp. 245–266.
- [49] ———, *Caustics for dissipative semilinear oscillations*, Mem. Amer. Math. Soc. **144** (2000), no. 685, viii+72.
- [50] ———, *Nonlinear hyperbolic smoothing at a focal point*, Michigan Math. J. **47** (2000), no. 2, 295–312.
- [51] S. Keraani, *Études de quelques régimes asymptotiques de l'équation de Schrödinger*, thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Orsay, 2000.
- [52] ———, *On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equations*, J. Diff. Eq. **175** (2001), no. 2, 353–392.
- [53] ———, *Semiclassical limit for a class of Nonlinear Schrödinger Equations with potential*, Comm. Part. Diff. Eq. **27** (2002), no. 3-4, 693–704.
- [54] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 3, 321–332.
- [55] E. B. Kolomeisky, T. J. Newman, J. P. Straley, et X. Qi, *Low-dimensional Bose liquids : Beyond the Gross-Pitaevskii approximation*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), no. 6, 1146–1149.
- [56] P. D. Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Math. J. **24** (1957), 627–646.
- [57] J.-L. Lions et W. A. Strauss, *Some non-linear evolution equations*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 43–96.
- [58] P.-L. Lions et T. Paul, *Sur les mesures de Wigner*, Rev. Mat. Iberoamericana **9** (1993), no. 3, 553–618.
- [59] D. Ludwig, *Uniform asymptotic expansions at a caustic*, Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 215–250.
- [60] F. Merle, *Construction of solutions with exactly  $k$  blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), no. 2, 223–240.
- [61] F. Merle et L. Vega, *Compactness at blow-up time for  $L^2$  solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 8, 399–425.
- [62] G. Métivier et S. Schochet, *Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves*, Duke Math. J. **95** (1998), no. 2, 241–304.
- [63] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Comm. Math. Phys. **78** (1981), no. 3, 391–408.
- [64] A. Moyua, A. Vargas, et L. Vega, *Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in  $\mathbb{R}^3$* , Duke Math. J. **96** (1999), no. 3, 547–574.

- [65] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance groups of Schrödinger equations with arbitrary potentials*, Helv. Phys. Acta **47** (1974), 167–172.
- [66] F. Nier, *Une description semi-classique de la diffusion quantique*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1994–1995, École Polytech., Palaiseau, 1995, pp. Exp. No. VIII, 10.
- [67] ———, *A semi-classical picture of quantum scattering*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 2, 149–183.
- [68] Y.-G. Oh, *Cauchy problem and Ehrenfest's law of nonlinear Schrödinger equations with potentials*, J. Diff. Eq. **81** (1989), no. 2, 255–274.
- [69] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.
- [70] G. Panati, H. Spohn, et S. Teufel, *Effective dynamics for Bloch electrons : Peierls substitution and beyond*, Commun. Math. Phys. **242** (2003), no. 3, 547–578.
- [71] L. Pitaevskii et S. Stringari, *Bose-Einstein condensation*, International Series of Monographs on Physics, vol. 116, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [72] J. Rauch et M. Keel, *Lectures on geometric optics*, Hyperbolic equations and frequency interactions (Park City, UT, 1995), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 383–466.
- [73] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [74] L. Robbiano et C. Zuily, *Effet régularisant microlocal analytique pour l'équation de Schrödinger : le cas des données oscillantes*, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), no. 9-10, 1891–1906.
- [75] J. E. Rothenberg, *Space-time focusing : breakdown of the slowly varying envelope approximation in the self-focusing of femtosecond pulses*, Optics Letters **17** (1992), 1340–1342.
- [76] A. V. Rybin, G. G. Varzugin, M. Lindberg, J. Timonen, et R. K. Bullough, *Similarity solutions and collapse in the attractive Gross-Pitaevskii equation*, Phys. Rev. E (3) **62** (2000), no. 5, part A, 6224–6228.
- [77] A. Shapere et F. Wilczek (eds.), *Geometric Phases in Physics*, Advances Series in Mathematical Physics, vol. 5, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989.
- [78] W. A. Strauss, *Nonlinear scattering theory*, Scattering theory in mathematical physics (J. Lavita et J. P. Marchand, eds.), Reidel, 1974.
- [79] ———, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 110–133.
- [80] S. Teufel, *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1821, Springer, 2003.
- [81] W. Thirring, *A course in mathematical physics. Vol. 3*, Springer-Verlag, New York, 1981, Quantum mechanics of atoms and molecules, Translated from the German by Evans M. Harrell, Lecture Notes in Physics, 141.

- [82] M. I. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Comm. Math. Phys. **87** (1982/83), no. 4, 567–576.
- [83] K. Yajima, *Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), no. 3, 605–629.
- [84] K. Yajima et G. Zhang, *Smoothing property for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), no. 3, 573–590.
- [85] ———, *Local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity*, J. Diff. Eq. **202** (2004), no. 1, 81–110.
- [86] V. E. Zakharov et A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Ž. Èksper. Teoret. Fiz. **61** (1971), no. 1, 118–134.
- [87] J. Zhang, *Stability of attractive Bose-Einstein condensates*, J. Stat. Phys. **101** (2000), no. 3-4, 731–746.