



**HAL**  
open science

# Application au désaccordage des roues aubagées. Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence d'incertitudes aléatoires

Evangéline Capiez-Lernout

► **To cite this version:**

Evangéline Capiez-Lernout. Application au désaccordage des roues aubagées. Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence d'incertitudes aléatoires. Matériaux. Université de Marne la Vallée, 2004. Français. NNT: . tel-00009409

**HAL Id: tel-00009409**

**<https://theses.hal.science/tel-00009409>**

Submitted on 7 Jun 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE**

Année 2004

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Evangéline CAPIEZ-LERNOUT**

le 14 octobre 2004

Titre:

**Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence  
d'incertitudes aléatoires. Application au désaccordage des roues aubagées.**

---

**Directeur de thèse**

**Monsieur Christian Soize**

---

**JURY**

M. D. Aubry, *président*  
M. L. Jézéquel, *rapporteur*  
M. J.-P. Lombard, *examineur*  
M. M. Mignolet, *rapporteur*  
M. C. Soize, *directeur de thèse*

# Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à exprimer ma reconnaissance à Christian Soize, mon directeur de thèse, pour avoir mis en œuvre tous ses talents de pédagogue et toute sa minutie afin d'encadrer et de former l'apprentie chercheuse que je suis. Je le remercie vivement pour sa bienveillance, son enthousiasme, sa patience et sa disponibilité constantes. Je tiens également à lui exprimer ma gratitude pour le soutien et la confiance qu'il m'a toujours témoignés.

Je remercie également les membres de ma commission d'examen. Je remercie Denis Aubry pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury. Je remercie tout particulièrement Louis Jézéquel et Marc Mignolet, tous deux rapporteurs de cette thèse, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail ainsi que pour leurs précieux conseils. J'adresse aussi mes remerciements à Jean-Pierre Lombard pour avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie Eric Seinturier, Jean-Pierre Lombard et Christian Dupont de SNECMA MOTEURS, dont le prêt de modèle m'a permis de mener à bien ce travail de recherche.

Je remercie chaleureusement tous les membres du laboratoire de mécanique que j'ai côtoyés pendant cette thèse, dont le soutien et la bonne humeur rendent la vie de ce laboratoire si agréable. Je remercie plus particulièrement Christophe Desceliers pour les innombrables services rendus, pour sa sympathie et pour son écoute. Une mention spéciale pour notre secrétaire Chantal Corroy, toujours disponible pour régler les inévitables tracasseries administratives. Je n'oublie pas non plus mes camarades doctorants : compagnons de bureau et voisins de bureau avec qui j'ai partagé de nombreux moments sympathiques.

Je remercie également tous mes camarades doctorants et ex-doctorants dispatchés dans divers laboratoires parisiens et qui se reconnaîtront d'eux-mêmes.

Je ne peux omettre dans ces remerciements mes amis qui m'ont accompagnés pendant cette thèse et qui ont multiplié les attentions afin d'évacuer mon stress : Michaël Scotto, Florence Cochard et notre "trio de choc", François Alessandroni et Marie Charitable.

Enfin, je terminerai ces remerciements par ma famille proche, pour leur soutien moral et leur présence. Je remercie également ma belle famille pour leur accueil chaleureux. Enfin, je remercie de tout coeur mon François, pour son soutien, sa patience sans limites et pour son réconfort quotidien.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
1. Contexte du sujet . . . . .	11
2. Positionnement de la recherche . . . . .	11
3. Objectifs de la recherche . . . . .	14
4. Stratégie de la recherche . . . . .	14
5. Plan de la thèse . . . . .	16
<b>I Dynamique des structures tournantes</b>	<b>19</b>
1. Introduction . . . . .	19
2. Problème aux limites moyen pour une structure tournante . . . . .	20
3. Forme faible des équations du problème aux limites moyen pour une structure tournante . . . . .	22
<b>II Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique</b>	<b>27</b>
1. Introduction . . . . .	27
2. Description d'une structure à symétrie cyclique . . . . .	28
2.1 Définition des repères locaux . . . . .	28
2.2 Structure à symétrie cyclique . . . . .	29
3. Propriétés des structures à symétrie cyclique . . . . .	30
3.1 Notations et propriétés algébriques . . . . .	30
3.2 Transformée de Fourier discrète . . . . .	31
3.3 Expression des formes sesquilinéaires de la structure à symétrie cyclique . . . . .	32
4. Construction du problème d'élastodynamique et du problème généralisé aux valeurs propres pour une structure à symétrie cyclique . . . . .	34
4.1 Expression du problème d'élastodynamique de la structure à symétrie cyclique . . . . .	34
4.1.1 Expression de la forme antilinéaire d'excitation . . . . .	34
4.1.2 Expression de la relation de contrainte entre les bords inférieur $S_0^-$ et supérieur $S_0^+$ du secteur générateur $\Omega_0$ . . . . .	36
4.1.3 Formulation du problème d'élastodynamique . . . . .	36
4.2 Expression du problème généralisé aux valeurs propres de la structure à symétrie cyclique . . . . .	37
4.2.1 Formulation du problème aux valeurs propres . . . . .	37
4.2.2 Résolution du problème aux valeurs propres . . . . .	38
4.2.3 Restitution des modes physiques de la structure . . . . .	39

TABLE DES MATIÈRES

5.	Discrétisation par la méthode des éléments finis . . . . .	40
5.1	Modèle matriciel élément fini moyen . . . . .	40
5.2	Propriétés des matrices de la structure à symétrie cyclique . . . . .	41
5.2.1	Structure des matrices du modèle matriciel élément fini moyen . . . . .	41
5.2.2	Expression des blocs matriciels des matrices élément fini de la structure . . . . .	42
5.2.3	Discrétisation élément fini de la transformée de Fourier discrète . . . . .	43
5.2.4	Expression des blocs matriciels . . . . .	44
5.3	Stratégie de résolution du problème d'élastodynamique pour la structure à symétrie cyclique . . . . .	44
5.4	Stratégie de résolution du problème généralisé aux valeurs propres pour la structure à symétrie cyclique . . . . .	45
<b>III Construction du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée par deux méthodes utilisant la sous-structuration dynamique</b>		<b>47</b>
1.	Introduction . . . . .	47
2.	Description des sous-structures . . . . .	49
3.	Définition du modèle matriciel élément fini moyen des sous-structures . . . . .	50
3.1	Modèle matriciel élément fini moyen de l'aube $j$ . . . . .	50
3.2	Modèle matriciel élément fini moyen du disque . . . . .	51
4.	Première méthode pour construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée . . . . .	52
4.1	Construction du modèle matriciel réduit moyen pour l'aube $j$ . . . . .	53
4.1.1	Construction de la base de projection . . . . .	53
4.1.2	Equation matricielle réduite moyenne pour l'aube $j$ . . . . .	54
4.1.3	Expression des blocs des matrices réduites . . . . .	55
4.2	Construction du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée . . . . .	56
5.	Deuxième méthode pour construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée . . . . .	57
5.1	Extraction du sous-système associé aux DDLs physiques du disque . . . . .	58
5.2	Problème généralisé aux valeurs propres . . . . .	58
5.3	Construction du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée . . . . .	59
5.3.1	Equation matricielle réduite de la dynamique . . . . .	59
5.3.2	Expressions des blocs des matrices réduites . . . . .	59
5.3.3	Modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée . . . . .	60
6.	Modèles matriciels réduits moyen de la roue aubagée lorsque les forces de couplage gyroscopiques sont négligées . . . . .	61
6.1	Modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée obtenu par la méthode de Craig et Bampton . . . . .	61

## TABLE DES MATIÈRES

6.2	Modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée obtenu par la méthode de Benfield et Hruda . . . . .	62
<b>IV</b>	<b>Modélisation non paramétrique des incertitudes aléatoires pour le désaccordage des roues aubagées</b>	<b>63</b>
1.	Introduction . . . . .	63
2.	Construction du modèle probabiliste non paramétrique pour chaque sous-structure aube . . . . .	65
2.1	Equations aléatoires pour chaque aube . . . . .	65
2.2	Normalisation des matrices aléatoires réduites . . . . .	66
2.3	Information utilisable pour les matrices aléatoires normalisées . . . . .	67
3.	Construction du modèle probabiliste pour les matrices aléatoires normalisées . . . . .	68
3.1	Définition du principe du maximum d'entropie . . . . .	68
3.2	Modèle probabiliste de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ . . . . .	69
3.3	Expression de la densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ . . . . .	70
3.4	Propriétés de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ . . . . .	70
3.5	Représentation algébrique de la matrices aléatoire $[\mathbf{G}]$ . . . . .	71
3.6	Cas d'un ensemble de matrices aléatoires . . . . .	72
4.	Modèles matriciels réduits aléatoires de la roue aubagée obtenus par le modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes de désaccordage. . . . .	73
4.1	Implémentation du modèle probabiliste non paramétrique . . . . .	73
4.2	Equations aléatoires de la roue aubagée . . . . .	74
4.2.1	Premier modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée . . . . .	74
4.2.2	Deuxième modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée . . . . .	76
4.2.3	Troisième modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée . . . . .	76
<b>V</b>	<b>Méthodologie de résolution des équations aléatoires pour l'analyse du désaccordage des roues aubagées</b>	<b>79</b>
1.	Introduction . . . . .	79
2.	Définition des observations aléatoires . . . . .	80
2.1	Quantités énergétiques déterministes . . . . .	80
2.1.1	Définition de l'énergie du signal pour l'aube $j$ . . . . .	80
2.1.2	Définition de l'énergie élastique pour l'aube $j$ . . . . .	80
2.1.3	Définition de l'énergie de référence pour le modèle matriciel moyen de la roue aubagée . . . . .	81
2.2	Quantités énergétiques aléatoires . . . . .	82
2.2.1	Energie du signal aléatoire pour l'aube $j$ . . . . .	82
2.2.2	Energie élastique aléatoire pour l'aube $j$ . . . . .	82
2.3	Définition des facteurs aléatoires d'amplification dynamique . . . . .	83

TABLE DES MATIÈRES

2.3.1	Facteurs aléatoires d'amplification dynamique définis par rapport à l'énergie du signal . . . . .	83
2.3.2	Facteurs aléatoires d'amplification dynamique définis par rapport à l'énergie élastique . . . . .	83
3.	Résolution numérique du problème direct pour l'analyse du désaccordage . . . . .	84
3.1	Définition du système d'équations aléatoires . . . . .	84
3.2	Résolution numérique des équations aléatoires . . . . .	85
4.	Analyse de convergence du système stochastique . . . . .	85
5.	Traitements statistiques . . . . .	86
5.1	Estimation de la probabilité . . . . .	86
5.2	Estimation des régions de confiance par la méthode des quantiles . . . . .	86
<b>VI</b>	<b>Méthodologie du problème inverse de caractérisation des tolérances de l'aube</b>	<b>87</b>
1.	Introduction . . . . .	87
2.	Contexte probabiliste du tolérancement . . . . .	89
3.	Construction du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube . . . . .	89
4.	Construction numérique de la procédure d'identification pour les paramètres de dispersion $\delta_M$ et $\delta_K$ . . . . .	90
4.1	Définition des indicateurs de dispersion $W_M^{\text{para}}$ et $W_K^{\text{para}}$ du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube . . . . .	90
4.2	Définition des indicateurs de dispersion $W_M$ et $W_K$ du modèle probabiliste non paramétrique . . . . .	91
4.3	Expression de l'indicateur de dispersion $W$ d'une matrice aléatoire construite par le modèle probabiliste non paramétrique . . . . .	91
4.4	Expression analytique des indicateurs de dispersion $W_M$ et $W_K$ en fonction des paramètres de dispersion $\delta_M$ et $\delta_K$ . . . . .	92
4.5	Critère d'identification des paramètres de dispersion . . . . .	92
4.6	Remarques sur la définition des indicateurs de dispersion . . . . .	92
5.	Stratégie générale de résolution du problème inverse . . . . .	93
6.	Analyse de sensibilité relative au modèle probabiliste de la géométrie d'aube . . . . .	96
6.1	Sensibilité des paramètres de dispersion à une perturbation aléatoire de géométrie	96
6.1.1	Position du problème . . . . .	96
6.1.2	Développement de Taylor à l'ordre deux de $\tilde{\delta}_M^2(e_0)$ et $\tilde{\delta}_K^2(e_0)$ . . . . .	97
6.1.3	Introduction d'hypothèses simplificatrices . . . . .	97
6.1.4	Expression des fonctions $\text{sensi}_M$ et $\text{sensi}_K$ . . . . .	98
6.2	Mise en œuvre numérique du calcul des gradients . . . . .	99
6.2.1	Discrétisation des dérivées partielles . . . . .	99
6.2.2	Calcul numérique des dérivées partielles . . . . .	99
6.3	Conséquences sur l'analyse du désaccordage de la roue aubagée . . . . .	100



<b>VII</b>	<b>Etude comparative des approches probabilistes sur un exemple numérique simple</b>	<b>101</b>
1.	Introduction . . . . .	101
2.	Description du modèle matriciel moyen . . . . .	102
2.1	Définition du modèle matriciel élément fini moyen . . . . .	102
2.2	Choix de la bande d'analyse fréquentielle et du vecteur des forces d'excitation . . . . .	103
2.3	Choix de l'observation pour la roue aubagée accordée . . . . .	105
2.4	Choix des paramètres numériques pour le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée . . . . .	105
3.	Etude des phénomènes physiques liés au désaccordage . . . . .	107
4.	Etude comparative des résultats obtenus par différentes approches probabilistes . . . . .	109
4.1	Critère pour positionner l'approche probabiliste non paramétrique . . . . .	109
4.1.1	Description du modèle probabiliste paramétrique usuel . . . . .	109
4.1.2	Définition du désaccordage fréquentiel . . . . .	109
4.1.3	Méthodologie de comparaison des approches probabilistes . . . . .	110
4.2	Analyse des résultats sur le facteur d'amplification dynamique des aubes à une fréquence donnée . . . . .	111
4.2.1	Choix des paramètres numériques . . . . .	111
4.2.2	Présentation des résultats numériques et interprétation . . . . .	115
4.3	Analyse des résultats sur le facteur d'amplification dynamique des aubes sur une bande d'analyse fréquentielle . . . . .	116
4.3.1	Etude numérique de l'influence du niveau d'incertitudes de désaccordage . . . . .	116
4.3.2	Etude numérique de l'influence du taux de dissipation de la structure . . . . .	124
4.3.3	Conclusions de l'étude comparative entre les des deux approches probabilistes . . . . .	125
<b>VIII</b>	<b>Validation du problème inverse sur un exemple simple</b>	<b>127</b>
1.	Introduction . . . . .	127
2.	Construction du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube . . . . .	128
2.1	Définition des paramètres tolérancés de l'aube . . . . .	128
2.2	Modèle probabiliste sur la position des nœuds du maillage . . . . .	129
2.2.1	Loi des variables aléatoires modélisant les tolérances . . . . .	129
2.2.2	Définition de la géométrie aléatoire de l'aube . . . . .	129
3.	Identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique . . . . .	130
3.1	Etude de convergence . . . . .	130
3.2	Résultats numériques concernant l'identification des paramètres de dispersion . . . . .	132
4.	Résultats numériques concernant le problème inverse sur les tolérances géométriques de l'aube . . . . .	133
4.1	Données pour l'analyse probabiliste non paramétrique du désaccordage . . . . .	133
4.2	Analyse de l'observation aléatoire $B(\omega)$ . . . . .	134

## TABLE DES MATIÈRES

4.3	Analyse de l'observation aléatoire $B_\infty$ . . . . .	137
4.4	Spécification des tolérances . . . . .	138
<b>IX</b>	<b>Validation du problème inverse sur une structure complexe</b>	<b>143</b>
1.	Introduction . . . . .	143
2.	Description du modèle moyen de la roue aubagée . . . . .	144
2.1	Définition du modèle élément fini moyen . . . . .	144
2.2	Modèle réduit moyen . . . . .	146
3.	Identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique pour la problématique de tolérancement sur l'aube .	147
3.1	Modèle probabiliste de la géométrie de l'aube . . . . .	147
3.1.1	Description géométrique de l'aube nominale . . . . .	147
3.1.2	Définition des paramètres tolérancés . . . . .	148
3.1.3	Construction du modèle probabiliste sur la géométrie de l'aube . . . . .	149
3.2	Identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique	150
3.2.1	Influence de l'hétérodynage des variables aléatoires sur la procédure d'iden- tification . . . . .	151
3.2.2	Résultats numériques concernant l'identification des paramètres de dispersion	153
4.	Résultats numériques concernant le problème inverse sur les tolérances géométriques de l'aube . . . . .	156
4.1	Analyse de convergence stochastique du modèle réduit aléatoire de la roue aubagée	156
4.2	Cas de désaccordage induit par les tolérances sur la longueur de corde des aubes	158
4.2.1	Cas de tolérances angulaires nulles . . . . .	158
4.2.2	Cas de tolérances angulaires non nulles . . . . .	160
4.3	Cas de désaccordage induit par les tolérances angulaires sur la corde des aubes .	161
4.3.1	Définition des niveaux d'incertitudes . . . . .	161
4.3.2	Analyse de l'observation aléatoire $B(\omega)$ . . . . .	162
4.3.3	Analyse de l'observation aléatoire $B_\infty$ . . . . .	165
4.4	Spécification des tolérances . . . . .	170
5.	Analyse de sensibilité par rapport au modèle probabiliste de la géométrie de l'aube	173
	<b>Conclusions</b>	<b>177</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>
<b>A</b>	<b>Théorie des représentations linéaires pour le groupe cyclique d'ordre <math>N</math></b>	<b>187</b>
1.	Définition de la représentation linéaire . . . . .	187
2.	Décomposition de la représentation linéaire . . . . .	188
2.1	Représentations irréductibles . . . . .	188
2.2	Caractères des représentations irréductibles . . . . .	188
3.	Projecteurs . . . . .	189

TABLE DES MATIÈRES

4.	Transformée de Fourier discrète . . . . .	190
<b>B</b>	<b>Hétérodynage des variables aléatoires</b>	<b>191</b>
1.	Simulation des variables aléatoires sans hétérodynage . . . . .	191
2.	Simulation des variables aléatoires hétérodynées . . . . .	191
<b>C</b>	<b>Influence des stratégies d'implémentation du modèle probabiliste non paramétrique sur la réponse forcée désaccordée</b>	<b>193</b>
<b>D</b>	<b>Influence des incertitudes de dissipation sur le désaccordage dynamique du modèle industriel de roue aubagée</b>	<b>195</b>

## *TABLE DES MATIÈRES*

# Introduction générale

## 1. Contexte du sujet

Les modélisations déterministes des systèmes mécaniques possédant une forte complexité structurale s'avèrent généralement insuffisantes pour effectuer des calculs prévisionnels en dynamique des structures. Dans certains cas, la présence d'incertitudes au niveau de la structure (dus principalement aux tolérances géométriques, aux tolérances de montage ou à la dispersion des matériaux utilisés...) peut altérer la prévision de la réponse dynamique du système mécanique. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces incertitudes en construisant des modèles probabilistes d'incertitudes pour accroître la robustesse des prévisions de la réponse dynamique.

Les systèmes physiques possédant des symétries s'avèrent extrêmement sensibles à la présence de perturbations, que ce soit en physique atomique [23], en physique du solide [1] ou bien en dynamique des structures périodiques ou cycliques [50, 81, 51, 5]. Concernant cette dernière thématique, les industries aéronautiques et énergétiques s'intéressent de près à ce type de problématique, notamment dans le cadre de modèles prédictifs de tenue à la fatigue des structures dont la symétrie cyclique est détruite. Les champs d'applications concernés sont les turbomachines et les rotors dont les constituants essentiels sont des roues aubagées, c'est à dire des structures à géométrie cyclique.

Dans la présente recherche, nous nous intéressons à la dynamique linéarisée des structures tournantes à géométrie cyclique en présence d'incertitudes aléatoires, rompant la géométrie cyclique. Nous nous limitons au problème de la réponse forcée harmonique dans le domaine des basses fréquences, pour des excitations harmoniques cycliques déterministes. La classe de structures étudiée concerne les roues aubagées constituées d'un disque et de plusieurs aubes.

## 2. Positionnement de la recherche

Une structure de *roue aubagée accordée* (ou encore *structure accordée*) correspond au cas idéal d'une structure ayant une symétrie cyclique. La théorie de la dynamique des structures à symétrie cyclique (par exemple [101, 47, 103, 10, 11, 108, 55, 76]) peut dans ce cas être utilisée afin d'effectuer l'analyse dynamique de la réponse forcée linéarisée du système mécanique. La modélisation d'un seul secteur générateur de la structure suffit pour reconstituer la dynamique de la structure complète. Les prévisions de la réponse forcée d'une structure à symétrie cyclique soumise à une excitation cyclique montrent que l'énergie vibratoire est uniformément distribuée sur toute la structure [101]. Autrement dit, toutes les aubes de la roue aubagée accordée ont la même amplitude de réponse forcée et ne diffèrent que par un déphasage constant d'une aube à l'autre. Toutefois, les phases de fabrication et d'assemblage des aubes induisent d'inévitables irrégularités sur les propriétés géométriques et mécaniques de la structure. Ceci

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

détruit la cyclicité de la structure, lui conférant un certain degré de désordre appelé *désaccordage*. Malgré la cyclicité de l'excitation, l'énergie vibratoire peut se concentrer sur une région localisée de la structure pour certains cas de désaccordage. Ce confinement d'énergie a pour effet d'augmenter considérablement les amplitudes des vibrations dans cette zone. Ainsi, la réponse forcée de certaines aubes d'une roue aubagée pourra être très amplifiée par rapport à la réponse forcée prédite par l'analyse dynamique de la structure accordée. Le désaccordage peut donc fausser les prédictions de résistance et de durée de vie des aubes de roues aubagées.

Les premières recherches effectuées sur ce sujet ont exhibé le phénomène d'amplification dynamique pour des modèles simples (voir par exemple [106, 35]) et au travers de travaux expérimentaux [36, 37]. Etant donné le caractère aléatoire du phénomène de désaccordage, des approches probabilistes ont été développées sur des modèles mécaniques constitués de chaînes d'oscillateurs linéaires couplés. Ces approches modélisent le module d'Young de chaque aube par une variable aléatoire de loi donnée (par exemple uniforme ou Gaussienne) et utilisent comme méthode de résolution des équations avec opérateur aléatoire, la méthode de simulation numérique de Monte-Carlo (voir [44, 3]), des techniques analytiques de perturbations (voir par exemple [89, 69, 64, 71]) ou encore (voir [90]) des méthodes utilisant des représentations sur les chaos [43]. Avec ce type de modèle probabiliste, des analyses de sensibilité sur la réponse libre ou sur la réponse forcée ont permis de conclure que les paramètres pilotant le désaccordage sont le taux d'amortissement de la structure, la raideur de couplage entre les aubes et le taux de désaccordage appliqué à la structure (voir par exemple [104, 77, 63, 64, 100, 67]). Si ces modèles mécaniques simplifiés génériques suffisent pour comprendre les mécanismes qui régissent le désaccordage, ils se révèlent insuffisants pour prévoir le comportement des structures réelles telles un fan de compresseur.

Sur le plan prévisionnel des structures réelles tridimensionnelles, les modèles éléments finis doivent être utilisés. La prise en compte du désaccordage sur de tels modèles éléments finis ayant plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté (DDLs) est difficile, compte-tenu de la taille des systèmes d'équations stochastiques. Ainsi, de nombreux travaux ont été développés pour construire des modèles réduits (voir par exemple [19, 7, 111, 85, 40, 78]) utilisant des techniques d'analyse modale et de sous-structuration dynamique.

Des méthodes numériques concernant l'identification des paramètres responsables du désaccordage à partir de mesures expérimentales effectuées sur des roues aubagées ont été en outre développées [70, 79, 72, 82, 41, 42].

Ces recherches ont utilisé des approches probabilistes paramétriques pour modéliser les incertitudes aléatoires de désaccordage des aubes. Cependant, ces recherches ont été conduites sous un certain nombre d'hypothèses simplificatrices concernant le modèle probabiliste paramétrique employé.

La modélisation probabiliste paramétrique est une approche probabiliste permettant de prendre en compte les incertitudes sur les données. Elle modélise les paramètres physiques incertains du modèle mécanique choisi. Les études du désaccordage sont menées en supposant les incertitudes statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre. Par conséquent, la structure est décomposée en sous-domaines et il est nécessaire de construire un modèle probabiliste pour une aube générique. Ce modèle est ensuite utilisé

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

pour toutes les aubes de la roue aubagée. Dans un premier temps, les paramètres physiques incertains du modèle mécanique de l'aube générique doivent être identifiés. Ces paramètres sont la densité volumique de masse, les composantes du tenseur d'élasticité, les caractéristiques géométriques, les conditions aux limites. Dans un deuxième temps, ces paramètres physiques incertains sont modélisés par des variables aléatoires (et pourraient être éventuellement modélisés par des champs stochastiques). Pour obtenir une description probabiliste complète de ces paramètres aléatoires, des essais expérimentaux doivent être mis en œuvre. Enfin, les transformations donnant les matrices de masse, d'amortissement et de raideur en fonction des paramètres incertains doivent être construites. Le système matriciel d'équations aléatoires est alors résolu par des méthodologies adéquates.

Cette approche probabiliste paramétrique présente cependant l'inconvénient d'avoir à construire le modèle probabiliste de chaque paramètre. Cette construction est d'autant plus difficile à mettre en œuvre que le nombre de paramètres incertains est grand, ce qui s'avère être le cas dans le contexte du désaccordage. Il est à noter que l'état du système étant une fonction non linéaire des paramètres incertains, les lois de probabilité des paramètres incertains sont absolument nécessaires. Par exemple, la modélisation des champs stochastiques représentant les incertitudes de géométrie nécessite d'identifier expérimentalement une très grande quantité d'information liée aux systèmes de lois marginales. Pour ces raisons, les recherches menées jusqu'à présent sur le désaccordage des roues aubagées avec les méthodes probabilistes paramétriques se sont limitées à la seule prise en compte d'incertitudes sur les modules d'Young des matériaux considérés comme isotropes. Cela revient à considérer la rigidité de l'aube comme fonction d'un unique paramètre incertain. Une telle modélisation implique que les fréquences propres de chaque aube (à interface de couplage fixe ou libre) sont des variables aléatoires statistiquement dépendantes. Une amélioration de cette modélisation probabiliste a consisté à modéliser chaque fréquence propre d'aube à interface de couplage fixe (au niveau de sa matrice de rigidité généralisée) par une variable aléatoire. De cette manière, les fréquences propres des aubes sont statistiquement indépendantes dans leur ensemble. Néanmoins, ces modélisations probabilistes n'induisent pas d'incertitudes sur les vecteurs propres, laissant les formes modales de l'aube inchangées par rapport au cas accordé. La terminologie de *désaccordage fréquentiel* est alors employée. Il est à noter que les multiples sources d'incertitudes (géométrie, jonction, loi de comportement) induisent des incertitudes sur les formes modales.

Les recherches précédemment mentionnées montrent que les modèles probabilistes des incertitudes doivent être améliorés afin d'obtenir des modèles qui prennent en compte toutes les incertitudes, ce qui permet de générer des incertitudes sur les modes propres de vibration. Une telle approche probabiliste doit être "réaliste" sur le plan de sa mise en œuvre et sur le plan du problème inverse pour l'identification. Cette approche probabiliste doit aussi conduire à un modèle cohérent en particulier pour les valeurs propres aléatoires et les vecteurs propres aléatoires.

Dans ce travail de recherche, nous présentons une approche probabiliste non paramétrique qui essaye de satisfaire à l'ensemble de ces conditions.

### 3. Objectifs de la recherche

Ce travail de recherche est dédié d'une part, aux aspects probabilistes de modélisation des incertitudes aléatoires conduisant au désaccordage des structures tournantes à géométrie cyclique, d'autre part, à l'analyse du désaccordage induite par ces modèles, et enfin, au problème inverse consistant à déterminer les tolérances d'usinage des aubes pour obtenir un niveau de réponse donné de la structure désaccordée. L'approche probabiliste proposée permet de modéliser le désaccordage en fréquence et le désaccordage en mode de manière cohérente. Celle-ci est basée sur l'utilisation d'un modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes récemment développé en élastodynamique linéaire [93, 94]. La modélisation probabiliste non paramétrique est une approche probabiliste globale tenant compte à la fois des incertitudes de données et des incertitudes de modélisation. Les incertitudes de modélisation appartiennent à la classe d'incertitudes ne pouvant pas être modélisées compte-tenu des approximations géométriques et cinématiques (souvent de nature simplificatrice) introduites dans le modèle mécanique choisi pour représenter la structure réelle. L'approche probabiliste non paramétrique diffère de l'approche probabiliste paramétrique car elle ne requiert pas la connaissance de tous les paramètres incertains. En effet, l'aléa est directement introduit sur les matrices généralisées résultant de la construction d'un modèle matriciel réduit moyen. Pour le problème traité ici, le modèle probabiliste des matrices aléatoires considérées est un modèle probabiliste pour les matrices aléatoires symétriques réelles définies positives construit par le principe du maximum d'entropie [88, 56, 57] avec la seule information disponible [93, 94] cohérente avec la dynamique des structures linéarisée.

Le présent travail de recherche propose une extension de l'approche probabiliste non paramétrique adaptée au contexte du désaccordage des structures tournantes à géométrie cyclique. Une telle approche permet d'analyser avec précision les conséquences du désaccordage sur la réponse forcée et a fait l'objet de publications dans [14, 16]. Par ailleurs, une difficulté majeure consiste à spécifier le taux acceptable de désaccordage pour que l'amplification de la réponse forcée du système désaccordé par rapport à la réponse forcée du système accordé n'excède pas une certaine valeur. De plus, nous proposons une méthodologie s'appuyant sur l'approche probabiliste non paramétrique pour résoudre le problème inverse de tolérances d'usinage défini précédemment. Les premiers résultats concernant ce problème inverse ont fait l'objet d'une publication dans le cas d'un exemple numérique simple [13, 15] et dans le cas d'un modèle industriel de roue aubagée [18, 17]. Dans ce travail, seul le désaccordage des aubes est considéré, comme dans les travaux de ce domaine publiés jusqu'à ce jour. En effet, le disque, de géométrie plus simple que les aubes, est plus facile à usiner, ce qui justifie qu'aucune incertitude aléatoire ne soit introduite à cet endroit.

### 4. Stratégie de la recherche

Pour des modèles de roues aubagées où les aubes sont montées une à une sur la partie disque de la roue, il est légitime de supposer que les incertitudes aléatoires sont statistiquement indépendantes d'une aube



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

à l'autre. Au contraire, dans le cas de roues monoblocs, appelées "blisks", il existe une dépendance statistique entre les aubes.

Dans ce travail de recherche, on s'intéresse au cas des roues aubagées dont les aubes sont montées.

L'hypothèse d'incertitudes statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre nécessite de décomposer la roue aubagée en sous-structures, dans le but d'implémenter le modèle probabiliste pour chaque aube. Comme l'approche probabiliste non paramétrique nécessite la construction d'un modèle matriciel réduit moyen pour chaque sous-structure incertaine, nous utilisons une technique de sous-structuration dynamique.

Dans cette recherche, comme les aubes sont des sous-structures en présence d'incertitudes aléatoires, un modèle matriciel réduit moyen est construit pour chaque aube par la méthode de Craig & Bampton [27]. Le modèle matriciel aléatoire de chaque aube est ensuite construit en implémentant le modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes sur le modèle matriciel réduit moyen de l'aube.

Le modèle stochastique ainsi obtenu reste généralement de grande dimension. Il est donc intéressant de le réduire pour diminuer les coûts numériques. Pour cela, on peut faire appel aux nombreuses techniques de réduction en dynamique des structures. Dans cette recherche, nous nous sommes limités à deux méthodes de réduction.

(1) La première méthode consiste à assembler les matrices aléatoires issues du modèle matriciel réduit aléatoire non paramétrique de chaque aube avec les matrices déterministes issues du modèle matriciel élément fini moyen du disque. On a ainsi un modèle réduit stochastique dont les inconnues sont les coordonnées généralisées des aubes et les DDLs physiques du disque (interface et internes). Puis on réduit ce modèle réduit stochastique. Une base modale déterministe est construite en calculant les modes propres du modèle réduit moyen associé au modèle réduit stochastique. Les inconnues du modèle réduit stochastique sont projetés sur cette base modale. On obtient alors un modèle réduit stochastique dont les inconnues sont de nouvelles coordonnées généralisées.

(2) La seconde méthode consiste à réduire les DDLs du disque sur une base modale du disque. Dans une première phase, une base modale du disque est construite avec la méthode de Benfield et Hruda [6] appliquée aux roues aubagées. Les matrices issues de la condensation statique de chaque aube déterministe sur son interface de couplage sont assemblées avec les matrices issues du modèle matriciel élément fini moyen du disque. Les modes propres du modèle élément fini moyen de disque ainsi obtenu (disque à interface de couplage chargé) constituent une base modale du disque. Dans une deuxième phase, on assemble les matrices aléatoires issues du modèle matriciel réduit aléatoire non paramétrique de chaque aube avec les matrices déterministes issues du modèle matriciel élément fini moyen du disque (voir première méthode). Dans une dernière phase, on projette les DDLs du disque (interface et internes) sur la base modale construite dans la première phase. On obtient un modèle réduit stochastique dont les inconnues sont les coordonnées généralisées des aubes et les coordonnées généralisées du disque.

Les équations aléatoires issues de ces deux stratégies sont ensuite résolues. Nous nous intéressons particulièrement aux statistiques de réponse forcée sur une bande d'analyse fréquentielle concernant l'aube possédant l'amplitude maximale de la réponse forcée. Trois paramètres scalaires de dispersion (issus du

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

modèle probabiliste non paramétrique) relatifs aux matrices de masse, de dissipation et de rigidité de chaque aube, permettent de contrôler les niveaux d'incertitudes de chaque matrice.

Le modèle probabiliste non paramétrique permet de résoudre le problème inverse de détermination des tolérances d'usinage, pour un niveau donné d'amplification de la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée. La méthodologie est constituée de trois étapes. La première consiste à identifier les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique comme une fonction des paramètres de tolérances. Pour cela, un modèle probabiliste de géométrie d'aube représentatif de l'aube manufacturée est construit *a priori*. Néanmoins, ce modèle probabiliste n'est pas utilisé pour analyser la réponse forcée du système désaccordé. Son unique rôle est d'estimer la valeur des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. La procédure d'identification de ces paramètres de dispersion nécessite de construire des indicateurs de dispersion à partir des matrices aléatoires issues de chacune des modélisations probabilistes et exprimées dans une base commune de réduction. Par conséquent, les indicateurs de dispersion ainsi obtenus sont comparables et sont égalisés afin de construire la relation liant les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique aux paramètres des tolérances. La deuxième étape consiste à utiliser le modèle probabiliste non paramétrique pour construire le graphe de la réponse forcée en fonction des paramètres de dispersion. La dernière étape consiste à combiner les résultats intermédiaires obtenus aux deux étapes précédentes pour résoudre graphiquement le problème inverse sur les tolérances d'usinage. Se fixant un niveau de la réponse forcée désaccordée, le graphe construit à la deuxième étape permet de lire directement les valeurs des paramètres de dispersion correspondantes. De même, la relation établie à la première étape permet de trouver les valeurs des paramètres de tolérances qui conduisent aux valeurs des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique précédemment déterminées. Par conséquent, il est possible de caractériser les tolérances d'usinage optimales de l'aube pour un niveau maximal donné de la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée.

## 5. Plan de la thèse

Le manuscrit s'organise de la manière suivante.

Le chapitre I présente le problème aux limites d'une structure tournante de géométrie quelconque ainsi que la forme faible associée. Le chapitre II prend en compte la géométrie cyclique de la structure. En particulier, les propriétés de symétrie cycliques sont utilisées pour formuler le problème d'élastodynamique et le problème généralisé aux valeurs propres de la structure sur son secteur générique. Ces deux problèmes sont considérés dans le cas des milieux continus et dans le cas des milieux discrétisés par la méthode des éléments finis. Le chapitre III concerne la construction du modèle matriciel réduit moyen de chaque aube et présente deux méthodes pour construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée. Dans le chapitre IV, les fondements de la théorie probabiliste non paramétrique sont synthétisés. La construction détaillée des équations aléatoires de la structure est présentée. Le chapitre V décrit la méthodologie de résolution des équations aléatoires obtenues au chapitre IV. Le chapitre VI est dédié

## *INTRODUCTION GÉNÉRALE*

au problème inverse sur les tolérances géométriques de l'aube. Il développe la méthodologie concernant l'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique, par rapport aux paramètres des tolérances de l'aube.

Dans le chapitre VII, un exemple numérique simple est présenté. Le désaccordage de la structure est modélisé par l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes et par l'approche probabiliste paramétrique usuellement employée dans la littérature pour cette problématique. Les réponses forcées obtenues pour ces deux approches probabilistes sont analysées et comparées. Le chapitre VIII propose une validation de la méthodologie du problème inverse développée au chapitre VII sur l'exemple numérique simple introduit au chapitre VII. Enfin, le chapitre IX est dédié à un modèle industriel de roue aubagée et permet de valider la méthodologie du problème inverse de détermination des tolérances de l'aube sur une structure "réaliste" de roue aubagée.

## *INTRODUCTION GÉNÉRALE*

# Chapitre I

## Dynamique des structures tournantes

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la dynamique d'une structure tournante de géométrie quelconque. La cyclicité sera introduite au Chapitre II. La structure considérée est déterministe. Dans le paragraphe 2, on formule le problème aux limites de la structure dans sa configuration de référence tournante. Il s'agit du problème aux limites moyen. Dans le paragraphe 3, on écrit la forme faible issue de ce problème aux limites moyen.

On introduit les notations suivantes :

On note  $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées symétriques réelles de dimension  $n$ .

Soient  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ . Le produit scalaire hermitien de  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{v}$  est noté  $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} = u_i \bar{v}_i$  en utilisant la convention de sommation sur les indices muets.

Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux tenseurs euclidiens réels du second ordre et soit  $\mathbb{Q}$  un tenseur euclidien réel du quatrième ordre. On note  $\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\}_{jk} = \mathbf{a}_{jl} \mathbf{b}_{lk}$ ,  $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{a}_{jl} \mathbf{b}_{lj}$  et  $\{\mathbb{Q} : \mathbf{a}\}_{jk} = \mathbb{Q}_{jklm} \mathbf{a}_{lm}$ .

## 2. Problème aux limites moyen pour une structure tournante

L'espace physique  $\mathbb{R}^3$  est muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R}_0$  fixe défini par  $(O, \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k})$ . La structure est modélisée par un milieu viscoélastique sans mémoire supposé nonhomogène et anisotrope et occupant un domaine borné de l'espace physique. La structure est en rotation autour d'un axe d'origine  $O$  et de vecteur directeur unitaire  $\mathbf{k}$ , avec une vitesse de rotation constante et égale à  $\Psi$ . Le repère cartésien tournant  $\mathcal{R}_1$  est alors défini par  $(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k})$  (voir figure I.1).

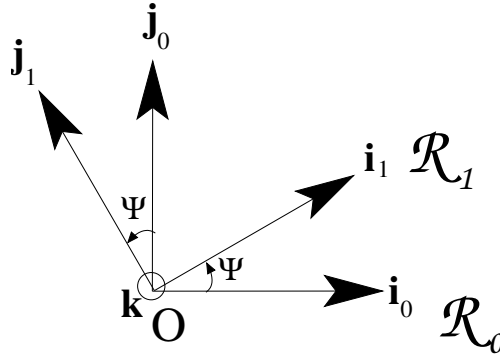


Figure I.1 – Repère tournant  $\mathcal{R}_1$  et repère global  $\mathcal{R}_0$ .

Tout d'abord, nous nous intéressons à l'équilibre de la structure tournante sous l'action de champs volumiques et surfaciques stationnaires et exprimé dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$ . Cette configuration précontrainte est prise comme configuration de référence [30, 31]. Nous nous intéressons donc aux vibrations linéaires de la structure tournante exprimées dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$  autour de cette configuration de référence tournante. Il est à noter que la configuration de référence choisie ne coïncide pas avec la configuration naturelle de la structure au repos généralement utilisée en dynamique des structures comme configuration de référence. Cette configuration de référence s'avère être en fait la plus adaptée au cas des structures tournantes [30, 31].

Comme nous nous intéressons au problème de réponse forcée harmonique pour une excitation harmonique, nous introduisons la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B} = [\omega_{\min}; \omega_{\max}]$  avec  $0 \leq \omega_{\min} \leq \omega_{\max}$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  occupé par la structure tridimensionnelle dans sa configuration de référence tournante. Le bord  $\partial\Omega = \gamma \cup \Gamma$  du domaine  $\Omega$  est supposé suffisamment régulier et est tel que  $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$ . La normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  est notée  $\mathbf{n}$ . Le mouvement de rotation de corps rigide induit par la rotation de la structure et exprimé dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$  se traduit par une condition de Dirichlet d'encastrement sur la partie  $\gamma$  du bord  $\partial\Omega$ . Une schématisation de la structure dans sa configuration de référence est présentée à la figure I.2

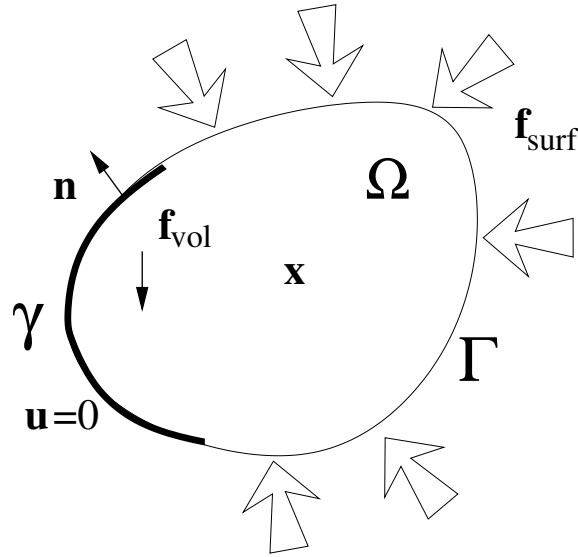


Figure I.2 – Structure dans la configuration de référence.

Soit  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$  le champ de déplacement des vibrations linéarisées par rapport à la configuration de référence et défini en tout point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$ . On a donc pour tout  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = 0 \quad , \forall \mathbf{x} \in \gamma \quad . \quad (\text{I.1})$$

La structure est soumise à un champ de forces surfaciques  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}_{\text{surf}}(\mathbf{x}; \omega)$  défini sur la partie  $\Gamma$  du bord  $\partial\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$ . La structure est également soumise à un champ de forces volumiques  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}_{\text{vol}}(\mathbf{x}; \omega)$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^3$ . Les équations linéarisées harmoniques du problème de la dynamique de la structure tournante, par rapport à la configuration de référence dans le repère tournant s'écrivent :

pour tout  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ , trouver  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  tel que

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{\text{vol}}(\mathbf{x}; \omega) = \rho(\mathbf{x}) [R]^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) + 2i\omega \rho(\mathbf{x}) [R] \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) - \omega^2 \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, (\text{I.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_{\text{surf}}(\mathbf{x}; \omega) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, (\text{I.3})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \gamma, (\text{I.4})$$

où la masse volumique de la structure  $\mathbf{x} \mapsto \rho(\mathbf{x})$  est définie et bornée de  $\Omega$  dans  $]0, +\infty[$  et où  $[R]$  est la matrice des vitesses de rotation telle que

$$[R] = \begin{pmatrix} 0 & -\Psi & 0 \\ \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [R] = -[R]^T \quad . \quad (\text{I.5})$$

Les termes du second membre de l'équation (I.2) sont associés successivement au champ d'accélération centrifuge, au champ d'accélération de Coriolis et au champ d'accélération relatif de la structure. Le

tenseur réel symétrique du second ordre des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}_x \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathfrak{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + i \omega \mathfrak{b}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad . \quad (\text{I.6})$$

Le tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  correspond au tenseur des précontraintes. Le tenseur symétrique linéarisé des déformations de Green-Lagrange  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  s'écrit

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_x \mathbf{u} + \mathbf{grad}_x^T \mathbf{u}) \quad , \quad (\text{I.7})$$

Les tenseurs du quatrième ordre de rigidité élastique  $\mathfrak{c}(\mathbf{x})$  et de dissipation  $\mathfrak{b}(\mathbf{x})$  vérifient les propriétés de symétrie

$$\mathfrak{c}_{jklm}(\mathbf{x}) = \mathfrak{c}_{kjlm}(\mathbf{x}) = \mathfrak{c}_{jkm l}(\mathbf{x}) = \mathfrak{c}_{lmjk}(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{I.8})$$

$$\mathfrak{b}_{jklm}(\mathbf{x}) = \mathfrak{b}_{kjlm}(\mathbf{x}) = \mathfrak{b}_{jkm l}(\mathbf{x}) = \mathfrak{b}_{lmjk}(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{I.9})$$

et les propriétés de définie-positivité suivantes

$$\mathfrak{c}_{jklm} \varkappa_{jk} \varkappa_{lm} \geq c \varkappa_{jk} \varkappa_{jk} \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \varkappa \in \mathbb{M}_3^S(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{I.10})$$

$$\mathfrak{b}_{jklm} \varkappa_{jk} \varkappa_{lm} \geq d \varkappa_{jk} \varkappa_{jk} \quad , \quad d > 0 \quad , \quad \varkappa \in \mathbb{M}_3^S(\mathbb{R}) \quad . \quad (\text{I.11})$$

### 3. Forme faible des équations du problème aux limites moyen pour une structure tournante

Ce paragraphe rappelle la forme faible du problème aux limites défini par les équations (I.2), (I.3) et (I.4) et tiré de [30]. L'espace des fonctions admissibles noté  $\mathcal{C}(\Omega)$  est défini par

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3, \mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{u} \in \gamma\} \quad , \quad (\text{I.12})$$

où  $H^1(\Omega)$  décrit l'ensemble des fonctions définies de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de carré intégrable et dont les dérivées partielles premières sont de carré intégrable. Le produit scalaire sur  $\mathcal{C}(\Omega)$  est

$$(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{grad}_x^T \mathbf{u} : \mathbf{grad}_x \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.13})$$

La norme associée est

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} \quad . \quad (\text{I.14})$$



## CHAPITRE I. DYNAMIQUE DES STRUCTURES TOURNANTES

La formulation faible du problème aux limites moyen, défini par les équations (I.2) à (I.4) s'écrit, en tenant compte des équations (I.6) à (I.9) :

pour tout  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ , trouver  $\mathbf{u}(\omega)$  dans  $\mathcal{C}(\Omega)$  tel que,  $\forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}(\Omega)$  on ait :

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + i\omega \left( \int_{\Omega} 2\rho ([R] \mathbf{u}) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbb{b}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\delta \mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \right) \\
 & + \int_{\Omega} (\mathbb{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\delta \mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho ([R]^2 \mathbf{u}) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{s} : (\mathbf{grad}_x^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_x \overline{\delta \mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma} \mathbf{f}_{\text{surf}} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, ds_x + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \quad . \quad (I.15)
 \end{aligned}$$

On introduit les formes sesquilinéaires et les opérateurs linéaires suivants.

(1) La forme sesquilinéaire de masse  $\underline{m}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ , définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est telle que

$$\underline{m}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \quad , \quad (I.16)$$

et a les propriétés de symétrie hermitienne et de positivité

$$\underline{m}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \overline{\underline{m}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad , \quad \underline{m}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad . \quad (I.17)$$

L'opérateur linéaire de masse  $\underline{\mathbf{M}}$  est alors défini par

$$\langle \underline{\mathbf{M}} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \rangle = \underline{m}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad , \quad (I.18)$$

et a les propriétés

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}}^T \quad , \quad \langle \underline{\mathbf{M}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \quad . \quad (I.19)$$

(2) La forme sesquilinéaire de couplage gyroscopique  $\underline{c}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ , définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est telle que

$$\underline{c}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} 2\rho ([R] \mathbf{u}) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \quad , \quad (I.20)$$

et a les propriétés d'antisymétrie hermitienne

$$\underline{c}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = -\overline{\underline{c}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad . \quad (I.21)$$

L'opérateur linéaire de couplage gyroscopique  $\underline{\mathbf{C}}$  est alors défini par

$$\langle \underline{\mathbf{C}} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \rangle = \underline{c}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad , \quad (I.22)$$

et a les propriétés

$$\underline{\mathbf{C}} = -\underline{\mathbf{C}}^T \quad . \quad (I.23)$$

(3) La forme sesquilinéaire de dissipation  $\underline{d}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ , définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est telle que

$$\underline{d}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\mathbb{b}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\delta \mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \quad , \quad (I.24)$$

et a les propriétés de symétrie hermitienne et de positivité

$$\underline{d}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \overline{\underline{d}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad , \quad \underline{d}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad . \quad (\text{I.25})$$

L'opérateur linéaire de dissipation  $\underline{\mathbf{D}}$  est alors défini par

$$\langle \underline{\mathbf{D}} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \rangle = \underline{d}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad , \quad (\text{I.26})$$

et a les propriétés

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}^T \quad , \quad \langle \underline{\mathbf{D}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \quad . \quad (\text{I.27})$$

(4) La forme sesquilinéaire de raideur élastique  $\underline{k}_e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est telle que

$$\underline{k}_e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\mathbb{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\delta \mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{I.28})$$

et a la propriété de symétrie hermitienne et de positivité

$$\underline{k}_e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \overline{\underline{k}_e(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad , \quad \underline{k}_e(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad . \quad (\text{I.29})$$

L'opérateur linéaire réel de raideur élastique  $\underline{\mathbf{K}}_e$  est défini par

$$\langle \underline{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \rangle = \underline{k}_e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad , \quad (\text{I.30})$$

et a les propriétés

$$\underline{\mathbf{K}}_e = \underline{\mathbf{K}}_e^T \quad , \quad \langle \underline{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \quad . \quad (\text{I.31})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le crochet d'antidualité entre  $\mathcal{C}'(\Omega)$ , antidual de  $\mathcal{C}(\Omega)$  et  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

(5) La forme sesquilinéaire de raideur centrifuge  $\underline{k}_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est telle que

$$\underline{k}_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho ([R]^2 \mathbf{u}) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{I.32})$$

et compte-tenu de l'équation (I.5), a la propriété de symétrie hermitienne et de négativité

$$\underline{k}_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \overline{\underline{k}_c(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad , \quad \underline{k}_c(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad . \quad (\text{I.33})$$

L'opérateur linéaire réel de raideur centrifuge  $\underline{\mathbf{K}}_c$  est défini par

$$\langle \underline{\mathbf{K}}_c \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \rangle = \underline{k}_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad , \quad (\text{I.34})$$

et a les propriétés

$$\underline{\mathbf{K}}_c = \underline{\mathbf{K}}_c^T \quad , \quad \langle \underline{\mathbf{K}}_c \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \leq 0 \quad . \quad (\text{I.35})$$

(6) La forme sesquilinéaire de raideur géométrique  $\underline{k}_g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ , définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est telle que

$$\underline{k}_g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{s} : (\mathbf{grad}_x^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_x \overline{\delta \mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{I.36})$$

## CHAPITRE I. DYNAMIQUE DES STRUCTURES TOURNANTES

et a la propriété de symétrie hermitienne

$$\underline{k}_g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \overline{\underline{k}_g(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad . \quad (\text{I.37})$$

L'opérateur linéaire réel de raideur géométrique  $\underline{\mathbf{K}}_g$  est alors défini par

$$\langle \underline{\mathbf{K}}_g \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \rangle = \underline{k}_g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad , \quad (\text{I.38})$$

et a la propriété

$$\underline{\mathbf{K}}_g = \underline{\mathbf{K}}_g^T \quad . \quad (\text{I.39})$$

(7) La forme sesquilinéaire de raideur globale  $\underline{k}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ , définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  est définie par

$$\underline{k}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \underline{k}_e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \underline{k}_c(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \underline{k}_g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad . \quad (\text{I.40})$$

L'opérateur linéaire réel symétrique de raideur globale  $\underline{\mathbf{K}}$  est alors défini par la relation

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}_e + \underline{\mathbf{K}}_c + \underline{\mathbf{K}}_g \quad . \quad (\text{I.41})$$

Bien qu'aucune signature ne soit attaché à l'opérateur  $\underline{\mathbf{K}}$ , on se restreindra à la classe des opérateurs symétriques définis positifs qui correspond à un système mécanique stable, c'est à dire

$$\langle \underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \quad , \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}(\Omega) \quad . \quad (\text{I.42})$$

(8) Pour tout  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ , on définit la forme antilinéaire d'excitation  $l(\delta\mathbf{u}; \omega)$  définie sur  $\mathcal{C}(\Omega)$  telle que

$$l(\delta\mathbf{u}; \omega) = \int_{\Gamma} \mathbf{f}_{\text{surf}}(\mathbf{x}; \omega) \cdot \overline{\delta\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{vol}}(\mathbf{x}; \omega) \cdot \overline{\delta\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.43})$$

Le vecteur complexe d'excitation  $\mathbf{f}(\omega)$  est alors défini par :

$$\langle \mathbf{f}(\omega), \delta\mathbf{u} \rangle = l(\delta\mathbf{u}; \omega) \quad . \quad (\text{I.44})$$

(9) La forme sesquilinéaire de raideur dynamique  $\underline{a}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}; \omega)$  définie sur  $\mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$  pour tout  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$  est alors introduite telle que

$$\underline{a}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}; \omega) = -\omega^2 \underline{m}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + i\omega (\underline{d}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \underline{c}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})) + \underline{k}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad . \quad (\text{I.45})$$

La forme faible définie par l'équation (I.15) se réécrit alors :

pour tout  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , trouver  $\mathbf{u}(\omega)$  dans  $\mathcal{C}(\Omega)$  tel que, pour tout  $\delta\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{C}(\Omega)$  on ait

$$\underline{a}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}; \omega) = l(\delta\mathbf{u}; \omega) \quad . \quad (\text{I.46})$$

En terme d'opérateurs, la forme faible définie par l'équation (I.46) se réécrit donc

$$(-\omega^2 \underline{\mathbf{M}} + i\omega (\underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{D}}) + \underline{\mathbf{K}}) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad . \quad (\text{I.47})$$



# Chapitre II

## Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un certain nombre de résultats généraux concernant la dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique [101, 47, 103, 108, 55, 76]. Il est à noter que ces résultats sont issus de recherches théoriques [87, 2], trouvant leur application en physique [105, 65], ou en dynamique des structures [39, 10, 45, 46, 11, 73].

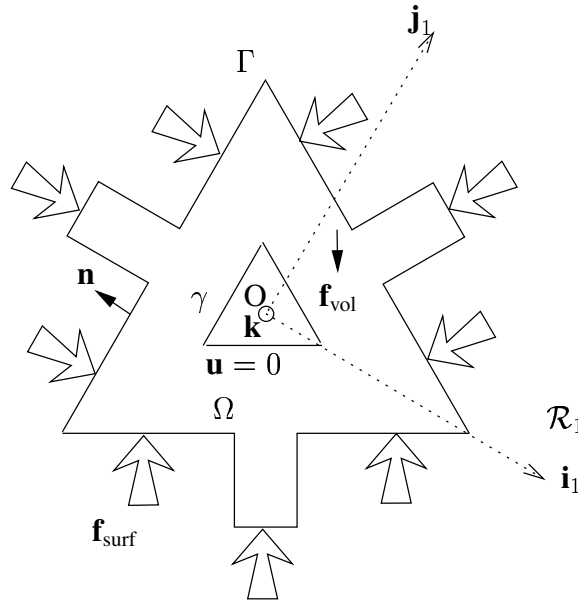
Concernant le problème d'élastodynamique en symétrie cyclique, la méthode de résolution consiste à formuler et résoudre le problème d'élastodynamique sur le secteur générateur de la structure, et à recomposer ensuite la réponse forcée sur la structure par une transformation linéaire. Dans cette recherche, nous utiliserons cette méthode afin de calculer la réponse forcée de référence de roues aubagées à symétrie cyclique. De la même manière, nous nous intéresserons aux méthodes de résolution du problème généralisé aux valeurs propres en symétrie cyclique. Dans cette recherche, nous utiliserons cette méthode pour calculer les bases modales nécessaires à la construction de modèles réduits de roues aubagées.

Dans le paragraphe 2, on décrit la structure à symétrie cyclique dans sa configuration de référence tournante. Dans le paragraphe 3, on introduit tout d'abord quelques propriétés algébriques concernant les structures à symétrie cycliques. Puis, on énonce la transformée de Fourier discrète du champ de déplacement admissible. Ensuite, on écrit les expressions des formes sesquilineaires relatives à la structure. Le paragraphe 4 concerne les formulations du problème d'élastodynamique et du problème généralisé aux valeurs propres pour les structures à symétrie cyclique. Dans un premier temps, le problème d'élastodynamique de la structure à symétrie cyclique sous l'effet d'un chargement extérieur cyclique est considéré dans sa configuration de référence tournante. On montre que le problème d'élastodynamique de la structure équivaut à, (1) résoudre un ensemble de problèmes d'élastodynamique définis sur le secteur générateur de la structure, (2) restituer la réponse forcée physique à partir des solutions de ces sous-problèmes. Dans un second temps, on s'intéresse au problème généralisé aux valeurs propres de la structure dans sa configuration de référence tournante. On montre que le problème spectral de la structure nécessite de, (1) résoudre un ensemble de problèmes spectraux définis sur le secteur générateur de la structure, (2) restituer les déformées modales de la structure à partir des solutions de ces sous-problèmes. Dans le paragraphe 5, la structure à symétrie cyclique est discrétisée par la méthode des éléments finis. On décrit les propriétés des matrices éléments finis de la structure à symétrie cyclique. On écrit la discrétisation éléments finis du problème d'élastodynamique et du problème généralisé aux valeurs propres de la structure, reformulés au paragraphe 4 dans le cadre de la symétrie cyclique.

## 2. Description d'une structure à symétrie cyclique

On considère la structure tournante définie au chapitre I, dont la configuration de référence dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$  est le domaine  $\Omega$ . L'axe de rotation de la structure tournante est  $(O, \mathbf{k})$ . Le domaine  $\Omega$  de bord  $\partial\Omega = \Gamma \cup \gamma$  possède une symétrie cyclique d'ordre  $N$  et d'axe  $(O, \mathbf{k})$  (voir figure II.1), tel que

$$\Omega = \cup_{m=0}^{N-1} \Omega_m \quad . \quad (\text{II.1})$$



**Figure II.1** – Structure à symétrie cyclique dans sa configuration de référence pour une symétrie cyclique d'ordre  $N = 3$

Dans l'équation (II.1), le domaine  $\Omega_0$  est le secteur générateur du domaine  $\Omega$ . Chaque secteur  $\Omega_m$  est déduit du secteur  $\Omega_0$  par  $m$  rotations successives d'angle  $2\pi/N$  et d'axe  $(O, \mathbf{k})$ . Il est à noter que l'axe de rotation de la structure est supposé confondu avec l'axe de la symétrie cyclique de la structure.

### 2.1 Définition des repères locaux

Soit  $r^m$  l'opérateur de rotation d'angle  $\alpha_m = 2\pi m/N$  et d'axe  $(O, \mathbf{k})$  défini sur  $\Omega_0$ . Sa représentation matricielle dans  $\mathbb{R}^3$  est la matrice orthogonale de rotation  $[P_m]$  définie par

$$[P_m] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_m) & -\sin(\alpha_m) & 0 \\ \sin(\alpha_m) & \cos(\alpha_m) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{II.2})$$

et qui vérifie les propriétés usuelles  $[P_m]^{-1} = [P_m]^T$ ,  $\det [P_m] = 1$ .

Pour tout  $m \in \{0, \dots, N-1\}$ , on introduit le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$  associé au secteur  $\Omega_m$  et défini par  $(O, \mathbf{e}_{x_m}, \mathbf{e}_{y_m}, \mathbf{k})$  (voir figure II.2). En particulier, le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_0}$  coïncide avec le repère tournant  $\mathcal{R}_1$ .

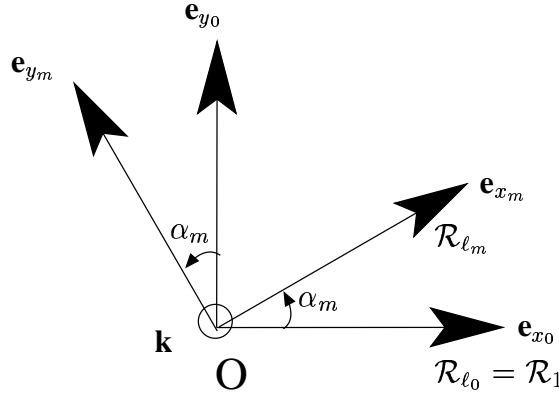


Figure II.2 – Définition des repères locaux tournants  $\mathcal{R}_{\ell_m}$

## 2.2 Structure à symétrie cyclique

Chaque secteur  $\Omega_m$  de la structure de domaine  $\Omega$  est donc défini par

$$\Omega_m = \{\mathbf{x}_m \in \Omega \mid \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0\} . \quad (\text{II.3})$$

Le bord  $\partial \Omega_m$  du domaine  $\Omega_m$  est tel que

$$\partial \Omega_m = S_m^+ \cup S_m^- \cup \Gamma_m \cup \gamma_m, \quad (\text{II.4})$$

où  $S_m^-$  et  $S_m^+$  sont les bords droit et gauche du secteur  $\Omega_m$  (voir figure II.3). Le bord  $\Gamma_m$  est la partie de bord définie par

$$\Gamma_m = \partial \Omega_m \cap \Gamma, \quad \Gamma_m = \{\mathbf{x}_m \in \Gamma \mid \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Gamma_0\} . \quad (\text{II.5})$$

Le bord  $\gamma_m$  est la partie de bord sur laquelle est appliquée la condition de Dirichlet (I.4) ; il est défini par

$$\gamma_m = \partial \Omega_m \cap \gamma, \quad \gamma_m = \{\mathbf{x}_m \in \gamma \mid \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \gamma_0\} . \quad (\text{II.6})$$

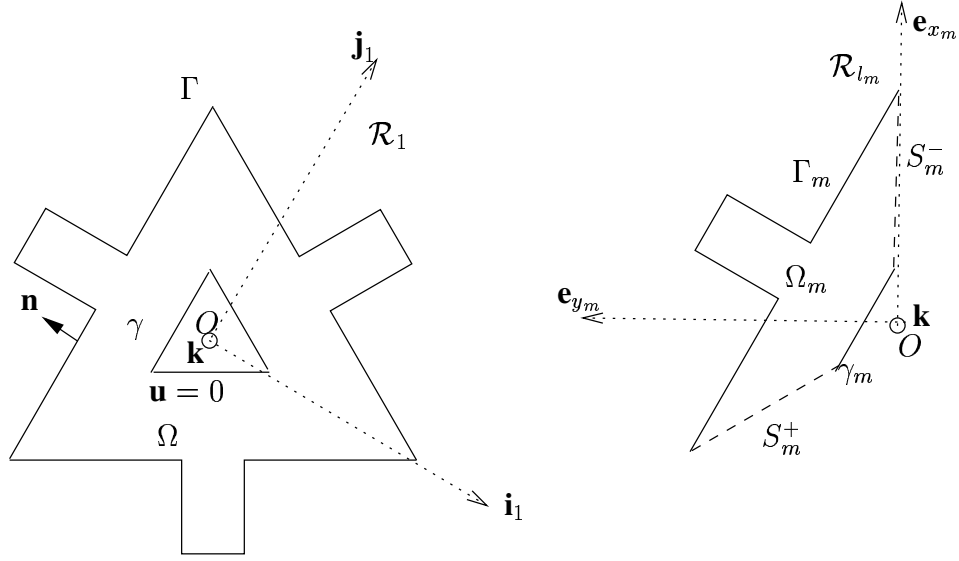


Figure II.3 – Structure à géométrie cyclique - Secteur de la structure

De plus, les propriétés mécaniques des matériaux de la structure obéissent aux propriétés de symétrie cyclique suivantes

$$\mathbf{s}_{ij}^m(\mathbf{x}_m) = \mathbf{s}_{ij}^0(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0 \quad , \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0 \quad , \quad (\text{II.7})$$

$$\mathfrak{a}_{ijkh}^m(\mathbf{x}_m) = \mathfrak{a}_{ijkh}^0(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0 \quad , \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0 \quad , \quad (\text{II.8})$$

$$\mathfrak{b}_{ijkh}^m(\mathbf{x}_m) = \mathfrak{b}_{ijkh}^0(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0 \quad , \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0 \quad , \quad (\text{II.9})$$

$$\rho(\mathbf{x}_m) = \rho(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0 \quad , \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0 \quad , \quad (\text{II.10})$$

où  $\mathfrak{a}_{ijkh}^m(\mathbf{x}_m)$ ,  $\mathfrak{b}_{ijkh}^m(\mathbf{x}_m)$  et  $\mathbf{s}_{ij}^m(\mathbf{x}_m)$  sont les composantes des restrictions des tenseurs  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  et  $\mathbf{s}$  au secteur  $\Omega_m$  exprimées dans le repère local  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ .

### 3. Propriétés des structures à symétrie cyclique

#### 3.1 Notations et propriétés algébriques

Dans ce paragraphe, on précise quelques propriétés algébriques.

Soit  $\mathbf{u}$  un champ défini sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  dont les composantes  $u_p$ ,  $p \in \{1, 2, 3\}$  sont exprimées dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$ . Soit  $\mathbf{u}^m$  la restriction du champ  $\mathbf{u}$  au secteur  $\Omega_m$  dont les composantes  $u_p^m$ ,  $p \in \{1, 2, 3\}$  sont exprimées dans le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ .



## CHAPITRE II. DYNAMIQUE DES STRUCTURES TOURNANTES À SYMÉTRIE CYCLIQUE

Soit  $\mathbf{a}$  un tenseur réel du second ordre défini sur  $\Omega$  dont les composantes  $\mathbf{a}_{pq}$ ,  $\{p, q\} \in \{1, 2, 3\}^2$  sont exprimées dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$ . Soit  $\mathbf{a}^m$  la restriction du tenseur  $\mathbf{a}$  au secteur  $\Omega_m$  dont les composantes  $\mathbf{a}_{pq}^m$ ,  $\{p, q\} \in \{1, 2, 3\}^2$  sont exprimées dans le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ .

Soit  $\mathfrak{O}$  un tenseur réel du quatrième ordre défini sur  $\Omega$  dont les composantes  $\mathfrak{O}_{pqrs}$ ,  $\{p, q, r, s\} \in \{1, 2, 3\}^4$  sont exprimées dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$ . Soit  $\mathfrak{O}^m$  la restriction du tenseur  $\mathfrak{O}$  au secteur  $\Omega_m$  dont les composantes  $\mathfrak{O}_{pqrs}^m$ ,  $\{p, q, r, s\} \in \{1, 2, 3\}^4$  sont exprimées dans le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ . On a les relations suivantes

$$u_p = [P_m]_{pi} u_i^m \quad , \quad (\text{II.11})$$

$$\mathbf{a}_{pq} = [P_m]_{pi} [P_m]_{qj} \mathbf{a}_{ij}^m \quad , \quad (\text{II.12})$$

$$\mathfrak{O}_{pqrs} = [P_m]_{pi} [P_m]_{qj} [P_m]_{rk} [P_m]_{sl} \mathfrak{O}_{ijkl}^m \quad , \quad (\text{II.13})$$

où  $[P_m]$  est la matrice orthogonale de rotation définie par l'équation (II.2).

En utilisant la propriété d'orthogonalité de la matrice  $[P_m]$ , on obtient les propriétés suivantes

$$u_p v_p = [P_m]_{pi} u_i^m [P_m]_{pj} v_j^m = u_i^m v_i^m \quad , \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_{pqrs} \mathbf{a}_{pq} \mathbf{a}_{rs} &= [P_m]_{pi} [P_m]_{qj} [P_m]_{rk} [P_m]_{sl} [P_m]_{ra} [P_m]_{sb} [P_m]_{pc} [P_m]_{qd} \mathfrak{O}_{ijkl}^m \mathbf{a}_{ab}^m \mathbf{a}_{cd}^m \quad , \\ &= \mathfrak{O}_{ijkl}^m \mathbf{a}_{kl}^m \mathbf{a}_{ij}^m \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{pq} \mathbf{b}_{qr} \mathbf{c}_{rp} &= [P_m]_{pi} [P_m]_{qj} [P_m]_{qk} [P_m]_{rl} [P_m]_{ra} [P_m]_{pb} \mathbf{a}_{ij}^m \mathbf{b}_{kl}^m \mathbf{c}_{ab}^m \\ &= \mathbf{a}_{ij}^m \mathbf{b}_{jl}^m \mathbf{c}_{li}^m \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

### 3.2 Transformée de Fourier discrète

Soit  $\mathbf{x}_m$  défini par  $\mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0$ ,  $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0$ . En utilisant la théorie des représentations linéaires des groupes cycliques d'ordre  $N$ , dont les principaux résultats sont exposés dans l'Annexe A, on écrit

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \quad , \quad (\text{II.17})$$

où

$$\mathbf{u}^m \text{ est la restriction du champ } \mathbf{u} \text{ au secteur } \Omega_m \text{ et exprimé dans le repère local tournant } \mathcal{R}_{\ell_m}. \quad (\text{II.18})$$

Dans l'équation (II.17),  $w_{n,m}$  est tel que

$$w_{n,m} = \exp \frac{2i\pi mn}{N} \quad . \quad (\text{II.19})$$

L'équation (II.17) est une transformée de Fourier discrète [92, 76]. Les  $\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)$  sont les composantes complexes harmoniques d'ordre  $n$  définies sur le secteur  $\Omega_0$ . Elles appartiennent à l'espace admissible  $\widehat{W}_n$  défini dans le paragraphe 3 de l'Annexe A.

### 3.3 Expression des formes sesquilinéaires de la structure à symétrie cyclique

En utilisant les propriétés (II.10) et (II.14), la transformée de Fourier discrète (II.17) et la relation d'orthogonalité (A.11), la forme sesquilinéaire de masse définie par l'équation (I.16) se réécrit

$$\begin{aligned}
 \underline{m}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad , \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Omega_m} \rho(\mathbf{x}_m) \mathbf{u}(\mathbf{x}_m) \cdot \overline{\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_m)} d\mathbf{x}_m \quad , \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Omega_m} \rho(\mathbf{x}_m) \mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m) \cdot \overline{\delta\mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m)} d\mathbf{x}_m, \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}_0) \left( \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \overline{\left( \sum_{n'=0}^{N-1} \overline{w_{n',m}} \delta\hat{\mathbf{u}}_{n'}(\mathbf{x}_0) \right)} d\mathbf{x}_0 \quad , \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} (w_n | w_{n'}) N \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}_0) \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \cdot \overline{\delta\hat{\mathbf{u}}_{n'}(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \quad , \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}_0) \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \cdot \overline{\delta\hat{\mathbf{u}}_{n'}(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \quad . \tag{II.20}
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\underline{m}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = N \sum_{n=0}^{N-1} \underline{m}_0(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta\hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad \underline{m}_0(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta\hat{\mathbf{u}}_n) = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}_0) \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \cdot \overline{\delta\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \quad , \tag{II.21}$$

où  $\underline{m}_0(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta\hat{\mathbf{u}}_n)$  est la forme sesquilinéaire de masse définie sur  $\widehat{W}_n \times \widehat{W}_n$ .

En utilisant les propriétés (II.7) à (II.9) et (II.14) à (II.16), la transformée de Fourier discrète (II.17) et la relation d'orthogonalité (A.11), on obtient

$$\underline{k}_e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = N \sum_{n=0}^{N-1} \underline{k}_{e_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.22})$$

$$\underline{k}_c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = N \sum_{n=0}^{N-1} \underline{k}_{c_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.23})$$

$$\underline{k}_g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = N \sum_{n=0}^{N-1} \underline{k}_{g_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.24})$$

$$\underline{d}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = N \sum_{n=0}^{N-1} \underline{d}_0(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.25})$$

$$\underline{c}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = N \sum_{n=0}^{N-1} \underline{c}_0(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.26})$$

où  $\underline{k}_{e_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n)$ ,  $\underline{k}_{c_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n)$ ,  $\underline{k}_{g_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n)$ ,  $\underline{d}_0(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n)$  et  $\underline{c}_0(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n)$  sont les formes sesquilinéaires définies sur  $\widehat{W}_n \times \widehat{W}_n$  telles que

$$\underline{k}_{e_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) = \int_{\Omega_0} \left( \mathbb{C}^0(\mathbf{x}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\widehat{\mathbf{u}}_n) \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n}) d\mathbf{x}_0 \quad , \quad (\text{II.27})$$

$$\underline{k}_{c_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}_0) \left( [R]^2 \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \quad , \quad (\text{II.28})$$

$$\underline{k}_{g_0}(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) = \int_{\Omega_0} \mathbf{s}^0(\mathbf{x}_0) : \left( \mathbf{grad}_{\mathbf{x}_0}^T \widehat{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}_0} \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n} \right) d\mathbf{x}_0 \quad , \quad (\text{II.29})$$

$$\underline{d}_0(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) = \int_{\Omega_0} \left( \mathbb{b}^0(\mathbf{x}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\widehat{\mathbf{u}}_n) \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n}) d\mathbf{x}_0 \quad , \quad (\text{II.30})$$

$$\underline{c}_0(\widehat{\mathbf{u}}_n, \delta \widehat{\mathbf{u}}_n) = \int_{\Omega_0} 2 \rho(\mathbf{x}_0) \left( [R] \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \right) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \quad . \quad (\text{II.31})$$

Les opérateurs linéaires  $\underline{\mathbf{M}}_0, \underline{\mathbf{K}}_{e_0}, \underline{\mathbf{K}}_{c_0}, \underline{\mathbf{K}}_{g_0}, \underline{\mathbf{D}}_0$  et  $\underline{\mathbf{C}}_0$  relatifs au secteur générateur de la structure à symétrie cyclique sont alors définis par

$$\langle \underline{\mathbf{M}}_0 \hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \rangle = \underline{m}_{l_0}(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.32})$$

$$\langle \underline{\mathbf{K}}_{e_0} \hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \rangle = \underline{k}_{e_0}(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.33})$$

$$\langle \underline{\mathbf{K}}_{c_0} \hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \rangle = \underline{k}_{c_0}(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.34})$$

$$\langle \underline{\mathbf{K}}_{g_0} \hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \rangle = \underline{k}_{g_0}(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.35})$$

$$\langle \underline{\mathbf{D}}_0 \hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \rangle = \underline{d}_0(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.36})$$

$$\langle \underline{\mathbf{C}}_0 \hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n \rangle = \underline{c}_0(\hat{\mathbf{u}}_n, \delta \hat{\mathbf{u}}_n) \quad , \quad (\text{II.37})$$

et possèdent les mêmes propriétés algébriques que les opérateurs  $\underline{\mathbf{M}}, \underline{\mathbf{K}}_e, \underline{\mathbf{K}}_c, \underline{\mathbf{K}}_g, \underline{\mathbf{D}}$  et  $\underline{\mathbf{C}}$  relatifs à la structure entière, et définies au paragraphe 3 du chapitre I. On définit l'opérateur de rigidité globale  $\underline{\mathbf{K}}_0$ , supposé symétrique défini positif, par

$$\underline{\mathbf{K}}_0 = \underline{\mathbf{K}}_{e_0} + \underline{\mathbf{K}}_{c_0} + \underline{\mathbf{K}}_{g_0} \quad . \quad (\text{II.38})$$

L'introduction de cette hypothèse correspond à un système mécanique stable.

## 4. Construction du problème d'élastodynamique et du problème généralisé aux valeurs propres pour une structure à symétrie cyclique

### 4.1 Expression du problème d'élastodynamique de la structure à symétrie cyclique

Dans ce paragraphe, le problème d'élastodynamique défini par l'équation (I.46) est formulé en exploitant les propriétés des structures à symétrie cyclique. Ceci permet d'étudier la réponse forcée de la structure complète en formulant le problème d'élastodynamique sur le secteur générateur  $\Omega_0$  du domaine  $\Omega$ .

#### 4.1.1 Expression de la forme antilinéaire d'excitation

Les champs de forces surfaciques et volumiques sont supposés cycliques. Soient  $\mathbf{f}_{\text{vol}}^m$  et  $\mathbf{f}_{\text{surf}}^m$  les restrictions des champs  $\mathbf{f}_{\text{vol}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{surf}}$  au secteur  $\Omega_m$  et exprimées dans le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ . Ils s'écrivent

sous la forme

$$\mathbf{f}_{\text{vol}}^m(\mathbf{x}_m; \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{vol},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \quad , \quad (\text{II.39})$$

$$\mathbf{f}_{\text{surf}}^m(\mathbf{x}_m; \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{surf},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \quad , \quad (\text{II.40})$$

où pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ , les champs  $\mathbf{x}_0 \mapsto \widehat{\mathbf{f}}_{\text{vol},n}(\mathbf{x}_0; \omega)$  et  $\mathbf{x}_0 \mapsto \widehat{\mathbf{f}}_{\text{surf},n}(\mathbf{x}_0; \omega)$  sont donnés. En utilisant l'équation (II.14), la transformée de Fourier discrète (II.17) et la relation d'orthogonalité (A.11), la forme antilinéaire d'excitation définie par l'équation (I.44) se réécrit

$$\begin{aligned} l(\delta \widehat{\mathbf{u}}; \omega) &= \int_{\Gamma} \mathbf{f}_{\text{surf}}(\mathbf{x}; \omega) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})} ds_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{vol}}(\mathbf{x}; \omega) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad , \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left( \int_{\Gamma_m} \mathbf{f}_{\text{surf}}(\mathbf{x}_m; \omega) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_m)} ds_{\mathbf{x}_m} + \int_{\Omega_m} \mathbf{f}_{\text{vol}}(\mathbf{x}_m; \omega) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_m)} d\mathbf{x}_m \right) \quad , \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left( \int_{\Gamma_m} \mathbf{f}_{\text{surf}}^m(\mathbf{x}_m; \omega) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m)} ds_{\mathbf{x}_m} + \int_{\Omega_m} \mathbf{f}_{\text{vol}}^m(\mathbf{x}_m; \omega) \cdot \overline{\delta \mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m)} d\mathbf{x}_m \right) \quad , \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left( \int_{\Gamma_0} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{surf},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \right) \cdot \overline{\left( \sum_{n'=0}^{N-1} \overline{w_{n',m}} \delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \right)} ds_{\mathbf{x}_0} + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega_0} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{vol},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \right) \cdot \overline{\left( \sum_{n'=0}^{N-1} \overline{w_{n',m}} \delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \right)} d\mathbf{x}_0 \right) \quad , \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} (w_n | w_{n'}) N \left( \int_{\Gamma_0} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{surf},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_{n'}(\mathbf{x}_0)} ds_{\mathbf{x}_0} + \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{vol},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_{n'}(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \right) \quad , \\ &= N \sum_{n=0}^{N-1} \left( \int_{\Gamma_0} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{surf},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} ds_{\mathbf{x}_0} + \int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{vol},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \right) \quad (\text{II.41}) \end{aligned}$$

On en déduit

$$l(\delta \widehat{\mathbf{u}}; \omega) = N \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{l}_0(\delta \widehat{\mathbf{u}}_n; \omega) \quad , \quad (\text{II.42})$$

$$\widehat{l}_0(\delta \widehat{\mathbf{u}}_n; \omega) = \left( \int_{\Gamma_0} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{surf},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} ds_{\mathbf{x}_0} + \int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{f}}_{\text{vol},n}(\mathbf{x}_0; \omega) \cdot \overline{\delta \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}_0 \right) \quad . \quad (\text{II.43})$$

Le vecteur force  $\widehat{\mathbf{f}}_{0,n}$  est alors défini par

$$\langle \widehat{\mathbf{f}}_{0,n}(\omega), \delta \widehat{\mathbf{u}}_n \rangle = \widehat{l}_0(\delta \widehat{\mathbf{u}}_n; \omega) \quad . \quad (\text{II.44})$$

#### 4.1.2 Expression de la relation de contrainte entre les bords inférieur $S_0^-$ et supérieur $S_0^+$ du secteur générateur $\Omega_0$

Soit  $\mathbf{x}_0$  un point du bord  $S_0^-$  du secteur générateur  $\Omega_0$ . Le point  $\mathbf{x}_m$  défini par  $\mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0$  peut être considéré comme un point du bord  $S_m^-$  du secteur  $\Omega_m$  ou comme un point du bord  $S_{m-1}^+$  du secteur  $\Omega_{m-1}$ . Le champ de déplacement au point  $\mathbf{x}_m$  et exprimé dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$  peut s'écrire indifféremment, d'après les équations (II.11), (II.17), (II.19) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_m) = [P_m] \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \quad , \quad (\text{II.45})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_m) = [P_{m-1}] \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m-1}} \widehat{\mathbf{u}}_n(r \mathbf{x}_0) \quad , \quad (\text{II.46})$$

où  $[P_m]$  est la matrice orthogonale de rotation définie par l'équation (II.2). En écrivant l'égalité des équations (II.45) et (II.46), on obtient les relations de contraintes, définies pour tout  $\mathbf{x}_0$  de  $S_0^-$  et pour tout  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$

$$\widehat{\mathbf{u}}_n(r \mathbf{x}_0) = \overline{w_{n,1}} [P_1] \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \quad . \quad (\text{II.47})$$

#### 4.1.3 Formulation du problème d'élastodynamique

Soit  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  l'espace des fonctions admissibles défini par

$$\mathbf{u} \in \widehat{\mathcal{W}}_n = \{ \mathbf{u} \in \widehat{W}_n, \mathbf{u}(r \mathbf{x}_0) = \overline{w_{n,1}} [P_1] \mathbf{u}(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x}_0 \in S_0^- \} \quad , \quad (\text{II.48})$$

et soit  $\overline{\widehat{\mathcal{W}}}_n$  l'espace des fonctions admissibles défini par

$$\overline{\mathbf{u}} \in \overline{\widehat{\mathcal{W}}}_n = \{ \overline{\mathbf{u}} \in \widehat{W}_n, \overline{\mathbf{u}}(r \mathbf{x}_0) = w_{n,1} [P_1] \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x}_0 \in S_0^- \} \quad . \quad (\text{II.49})$$

En utilisant les équations (II.21) à (II.38), (II.42), (II.44) à (II.48), la forme faible du problème d'élastodynamique donnée par l'équation (I.47) est remplacée par  $N$  sous-problèmes découplés notés  $\mathcal{P}_n$  avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Chaque problème  $\mathcal{P}_n$  d'inconnue  $\widehat{\mathbf{u}}_n$  est formulé sur le secteur de référence  $\Omega_0$  et s'écrit :

pour tout  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ , trouver  $\widehat{\mathbf{u}}_n$  dans  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  tel que

$$\underline{\mathbf{A}}_0(\omega) \widehat{\mathbf{u}}_n(\omega) = \widehat{\mathbf{f}}_{0,n}(\omega) \quad , \quad (\text{II.50})$$

où  $\underline{\mathbf{A}}_0(\omega)$  est l'opérateur de rigidité dynamique défini par

$$\underline{\mathbf{A}}_0(\omega) = \left( -\omega^2 \underline{\mathbf{M}}_0 + i\omega (\underline{\mathbf{C}}_0 + \underline{\mathbf{D}}_0) + \underline{\mathbf{K}}_0 \right) \quad (\text{II.51})$$

La réponse physique  $\mathbf{u}^m$  est ensuite reconstituée sur le secteur  $\Omega_m$  en utilisant la transformée de Fourier discrète (II.17).

## 4.2 Expression du problème généralisé aux valeurs propres de la structure à symétrie cyclique

Dans ce paragraphe, le problème généralisé aux valeurs propres est formulé en exploitant les propriétés des structures à symétrie cyclique. Ceci permet de calculer les modes propres de la structure complète en formulant le problème aux valeurs propres sur le secteur générateur du domaine  $\Omega$ .

### 4.2.1 Formulation du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres associé au système mécanique défini par l'équation (I.47), conservatif et homogène, s'écrit :

trouver  $(\underline{\lambda}, \underline{\varphi})$  avec  $\underline{\varphi}$  dans  $\mathcal{C}(\Omega)$  tel que

$$\left( \underline{\mathbf{K}} + i \sqrt{\underline{\lambda}} \underline{\mathbf{C}} - \underline{\lambda} \underline{\mathbf{M}} \right) \underline{\varphi} = 0 \quad . \quad (\text{II.52})$$

Lorsque les forces de couplage gyroscopiques, représentées par le terme  $i \omega \underline{\mathbf{C}} \mathbf{u}(\omega)$ , peuvent être négligées, le problème généralisé aux valeurs propres est réécrit

trouver  $(\underline{\lambda}, \underline{\varphi})$  avec  $\underline{\varphi}$  dans  $\mathcal{C}(\Omega)$  tel que

$$\left( \underline{\mathbf{K}} - \underline{\lambda} \underline{\mathbf{M}} \right) \underline{\varphi} = 0 \quad . \quad (\text{II.53})$$

Il est à noter que les opérateurs  $\underline{\mathbf{M}}$  et  $\underline{\mathbf{K}}$  étant symétriques définis positifs, on a

$$\underline{\lambda} > 0 \quad . \quad (\text{II.54})$$

Les valeurs propres positives  $\underline{\lambda}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , sont ordonnées par valeurs croissantes indicées en  $\alpha$ . Les vecteurs propres  $\underline{\varphi}_\alpha$  associés aux valeurs propres  $\underline{\lambda}_\alpha$  vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$\langle \underline{\mathbf{M}} \underline{\varphi}_\alpha, \underline{\varphi}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \langle \underline{\mathbf{K}} \underline{\varphi}_\alpha, \underline{\varphi}_\beta \rangle = \underline{\lambda}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{II.55})$$

En utilisant les équations (II.21), (II.22) à (II.24), (II.32) à (II.35), (II.47) et (II.48), le problème spectral généralisé donné par l'équation (II.53) est remplacé par  $N$  sous-problèmes aux valeurs propres découplés notés  $\mathcal{Q}_n$  avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Chaque problème  $\mathcal{Q}_n$  d'inconnue  $\hat{\underline{\varphi}}_n$  est formulé sur le secteur

de référence  $\Omega_0$  et s'écrit :

trouver  $(\underline{\lambda}_n, \underline{\hat{\varphi}}_n)$  avec  $\underline{\hat{\varphi}}_n$  dans  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  tel que

$$\left( \underline{\mathbf{K}}_0 - \underline{\lambda}_n \underline{\mathbf{M}}_0 \right) \underline{\hat{\varphi}}_n = 0 \quad . \quad (\text{II.56})$$

Il est à noter que les opérateurs  $\underline{\mathbf{M}}_0$  et  $\underline{\mathbf{K}}_0$  étant symétriques réels définis positifs, on a

$$\underline{\lambda}_n > 0, \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\} \quad . \quad (\text{II.57})$$

Pour  $n$  fixé, les valeurs propres  $\underline{\lambda}_{n,\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$  associées aux vecteurs propres  $\underline{\hat{\varphi}}_{n,\alpha}$  sont ordonnées par valeurs croissantes indicées en  $\alpha$ . Les vecteurs propres  $\underline{\hat{\varphi}}_{n,\alpha}$  associés aux valeurs propres  $\underline{\lambda}_{n,\alpha}$  vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$\langle \underline{\mathbf{M}}_0 \underline{\hat{\varphi}}_{n,\alpha}, \underline{\hat{\varphi}}_{n,\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \langle \underline{\mathbf{K}}_0 \underline{\hat{\varphi}}_{n,\alpha}, \underline{\hat{\varphi}}_{n,\beta} \rangle = \underline{\lambda}_{n,\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{II.58})$$

#### 4.2.2 Résolution du problème aux valeurs propres

Soit  $\mathcal{N}_R$  et  $\mathcal{N}_C$  les ensembles définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_R &= 0 \text{ si } N \text{ impair} & , & \quad \mathcal{N}_R = \{0, \frac{N}{2}\} \text{ si } N \text{ pair} \\ \mathcal{N}_C &= \{1, \dots, \frac{N-1}{2}\} \text{ si } N \text{ impair} & , & \quad \mathcal{N}_C = \{1, \dots, \frac{N}{2} - 1\} \text{ si } N \text{ pair} \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Soit  $n$  dans  $\mathcal{N}_R$ . D'après les équations (II.19) et (II.48), les vecteurs propres solutions des problèmes  $\mathcal{Q}_n$  avec  $n$  dans  $\mathcal{N}_R$  sont réels.

Soit  $n$  dans  $\mathcal{N}_C$ . D'après les équations (II.19) et (II.48), les vecteurs propres solutions des problèmes  $\mathcal{Q}_n$  avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\} \setminus \mathcal{N}_R$  sont complexes. Soit  $\overline{\mathcal{Q}}_n$  le complexe conjugué du problème  $\mathcal{Q}_n$ . Le problème  $\overline{\mathcal{Q}}_n$  s'écrit :

trouver  $(\underline{\lambda}_n, \overline{\underline{\hat{\varphi}}}_n)$  avec  $\overline{\underline{\hat{\varphi}}}_n$  dans  $\overline{\widehat{\mathcal{W}}}_n$  tel que

$$\left( \underline{\mathbf{K}}_0 - \underline{\lambda}_n \underline{\mathbf{M}}_0 \right) \overline{\underline{\hat{\varphi}}}_n = 0 \quad , \quad (\text{II.60})$$

où  $\overline{\widehat{\mathcal{W}}}_n$  est l'espace admissible défini par l'équation (II.49) et où  $\overline{\underline{\hat{\varphi}}}_n$  est le complexe conjugué de  $\underline{\hat{\varphi}}_n$ . En utilisant les équations (II.19), (II.48), (II.49) et (II.56), on s'aperçoit que les problèmes  $\overline{\mathcal{Q}}_n$  et  $\mathcal{Q}_{N-n}$  sont équivalents. On en déduit

$$\underline{\lambda}_n = \underline{\lambda}_{N-n} \quad , \quad \overline{\underline{\hat{\varphi}}}_n = \underline{\hat{\varphi}}_{N-n} \quad . \quad (\text{II.61})$$

On obtient des valeurs propres de multiplicité 2 dont les vecteurs propres associés sont complexes conjugués. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre tous les problèmes  $\mathcal{Q}_n$  avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\} \setminus \mathcal{N}_R$ . Il suffit de résoudre les problèmes  $\mathcal{Q}_n$  avec  $n$  dans  $\mathcal{N}_C$  et de déduire les solutions des problèmes



$\mathcal{Q}_{N-n}$  avec  $n$  dans  $\mathcal{N}_C$  par les relations (II.61).

En résumé, le problème spectral de la structure de domaine  $\Omega$  nécessite de résoudre

les problèmes réels  $\mathcal{Q}_n$ ,  $n$  dans  $\mathcal{N}_R$

les problèmes complexes  $\mathcal{Q}_n$ ,  $n$  dans  $\mathcal{N}_C$ .

### 4.2.3 Restitution des modes physiques de la structure

Soit  $\mathcal{R}_{nn'}$  le problème défini par :

trouver  $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{n'}$  dans  $\widehat{\mathcal{W}}_{n'}$  tel que

$$(\mathbf{K}_0 - \lambda_n \mathbf{M}_0) \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{n'} = 0 \quad , \quad \lambda_n \text{ valeur propre solution de } \mathcal{Q}_n \quad . \quad (\text{II.62})$$

On déduit des relations (II.61) que la solution  $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{n'}$  du problème  $\mathcal{R}_{nn'}$  s'écrit

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{n'} = \epsilon_n \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n \delta_{nn'} \quad , \quad \text{si } n \text{ dans } \mathcal{N}_R \quad , \quad (\text{II.63})$$

$$\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{n'} = \epsilon_n \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_n \delta_{nn'} + \epsilon_{N-n} \overline{\widehat{\boldsymbol{\varphi}}}_n \delta_{N-n,n'} \quad , \quad \text{si } n \text{ dans } \mathcal{N}_C \quad , \quad (\text{II.64})$$

où  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{N-n}$  sont des constantes arbitraires.

La restitution des vecteurs propres physiques s'effectue en utilisant la transformée de Fourier discrète (II.17) décrite pour les  $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{n'}$ .

Soit  $\alpha$  un entier positif fixé. Deux cas sont à considérer :

– Si  $n$  est dans  $\mathcal{N}_R$ , la valeur propre  $\lambda_{n,\alpha}$  solution de l'équation (II.56) est de multiplicité 1. Elle est donc associée à un unique vecteur propre physique  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^1$  qui s'écrit sur le secteur  $\Omega_m$  d'après les équations (II.17), (II.63)

$$\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^{m,1}(\mathbf{x}_m) = \overline{w_{n,m}} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}(\mathbf{x}_0) \quad \text{avec } \epsilon_n = 1 \quad . \quad (\text{II.65})$$

– Si  $n$  est dans  $\mathcal{N}_C$ , la valeur propre  $\lambda_{n,\alpha}$  solution de l'équation (II.56) est de multiplicité 2 d'après l'équation (II.61). Elle est donc associée à deux vecteurs propres physiques  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^1$  et  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^2$ , s'écrivant d'après les équations (II.17) et (II.64) :

$$\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^{m,1}(\mathbf{x}_m) = \sqrt{2} \Re(\overline{w_{n,m}} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}(\mathbf{x}_0)) \quad \text{avec } \epsilon_n = \epsilon_{N-n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad (\text{II.66})$$

$$\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^{m,2}(\mathbf{x}_m) = \sqrt{2} \Im(\overline{w_{n,m}} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}(\mathbf{x}_0)) \quad \text{avec } \epsilon_n = -\epsilon_{N-n} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad (\text{II.67})$$

où  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^{m,1}$  (ou  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^{m,2}$ ) est la restriction du vecteur propre  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^1$  (ou  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{n,\alpha}^2$ ) au secteur  $\Omega_m$  et exprimé dans le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ . Il est à noter, compte-tenu des relations (II.58), que les choix de  $\epsilon_n$  et

$\epsilon_{N-n}$  permettent de reconstituer les vecteurs propres physiques réels vérifiant les conditions d'orthogonalité (II.55).

Les vecteurs propres d'une structure à géométrie cyclique d'ordre  $N$  peuvent être décrits en fonction de l'ordre  $n$  de l'harmonique qui leur est associée. A chaque harmonique correspond un nombre de diamètres nodaux, représentant le nombre de lignes diamétrales de la structure, pour lesquelles le mode considéré ne vibre pas. Les équations (II.65) à (II.67) montrent que pour  $n$  fixé dans  $\mathcal{N}_R \cup \mathcal{N}_C$ , le mode  $\underline{\varphi}_{n,\alpha}^1$  (ou  $\underline{\varphi}_{n,\alpha}^2$ ) diffère d'un secteur à un autre d'une phase constante  $\sigma_n = 2\pi n/N$ , et possède  $n$  diamètres nodaux.

## 5. Discrétisation par la méthode des éléments finis

Les ensembles matriciels suivants sont introduits. On désigne par  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les matrices  $(m \times n)$  rectangulaires réelles. Par abus de notation, l'ensemble de toutes les matrices  $(n \times n)$  réelles est noté  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ . Soient alors  $\mathbb{M}_n^{AS}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , les ensembles de toutes les matrices  $(n \times n)$  réelles antisymétriques, réelles symétriques, réelles symétriques semi-définies positives, réelles symétriques définies positives tels que

$$\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \mathbb{M}_n^{AS}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \quad . \quad (\text{II.68})$$

### 5.1 Modèle matriciel élément fini moyen

Le domaine  $\Omega$  est discrétisé par la méthode des éléments finis [53, 112, 28, 4]. Une approximation du champ de déplacement est obtenue en construisant un projecteur qui projette l'espace vectoriel admissible  $\mathcal{C}(\Omega)$  sur le sous-espace vectoriel  $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$  de dimension finie  $n_{ddl}$  tel que  $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ . On a alors

$$\mathbf{u} \simeq \sum_{i=1}^{n_{ddl}} U_i \mathbf{e}_i \quad , \quad (\text{II.69})$$

où  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n_{ddl}}$  sont les fonctions polynômiales d'interpolation des éléments finis qui engendrent l'espace vectoriel  $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ , et où  $U_1, \dots, U_{n_{ddl}}$  sont les degrés de liberté (DDLs) du système mécanique.

La discrétisation de l'équation (I.47) donne le modèle matriciel élément fini moyen de la structure. La symétrie cyclique de la structure n'est pas exploitée dans ce paragraphe. L'équation matricielle de la dynamique s'écrit, pour  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ ,

$$[\underline{\mathbf{A}}(\omega)] \underline{\mathbf{u}}(\omega) = \underline{\mathbf{F}}(\omega) \quad . \quad (\text{II.70})$$

Le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}(\omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_{ddl}}$  est le vecteur des DDLs de la structure. Le vecteur  $\underline{\mathbf{F}}(\omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_{ddl}}$  est le vecteur des chargements externes, résultant de la discrétisation élément fini de la forme antilinéaire d'excitation, définie par l'équation (I.43). La matrice  $[\underline{\mathbf{A}}(\omega)]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n_{ddl}}(\mathbb{C})$  est la matrice de rigidité dynamique définie par

$$[\underline{\mathbf{A}}(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}] + [\underline{\mathbf{D}}]) + [\underline{\mathbf{K}}] \quad , \quad (\text{II.71})$$

où les matrices  $[\underline{\mathbf{M}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{C}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}]$  sont la matrice de masse à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n_{ddl}}^+(\mathbb{R})$ , la matrice de couplage gyroscopique à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n_{ddl}}^{AS}(\mathbb{R})$ , la matrice de dissipation à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n_{ddl}}^+(\mathbb{R})$ , la matrice de rigidité globale supposée à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n_{ddl}}^+(\mathbb{R})$ . Ces matrices sont issues de la discrétisation élément fini des formes sesquilinéaires de masse, de couplage gyroscopique, de dissipation et de rigidité globale définies par les équations (I.16), (I.20), (I.24) et (I.40).

## 5.2 Propriétés des matrices de la structure à symétrie cyclique

Dans ce paragraphe, on exploite la symétrie cyclique de la structure pour décrire les propriétés du modèle matriciel élément fini moyen.

### 5.2.1 Structure des matrices du modèle matriciel élément fini moyen

Le maillage de la structure complète est supposé identique et compatible d'un secteur à un autre de telle manière qu'il puisse être généré à partir du maillage d'un seul secteur. Par conséquent, chaque matrice du modèle matriciel élément fini moyen de la structure se découpe naturellement en  $N \times N$  blocs matriciels de dimension  $(\bar{n} \times \bar{n})$  avec  $\bar{n} = n_{ddl}/N$ . Les vecteurs  $\underline{\mathbf{u}}$  et  $\underline{\mathbf{F}}$  s'écrivent

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^0 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{u}}^{N-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}^0 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}^{N-1} \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{II.72})$$

où  $\underline{\mathbf{u}}^m$  et  $\underline{\mathbf{F}}^m$ ,  $m \in \{0, \dots, N-1\}$  sont les vecteurs des DDLs et des chargements externes à valeur dans  $\mathbb{C}^{\bar{n}}$  relatifs au secteur  $m$  et exprimés dans le repère local tournant  $\mathcal{R}_{\ell_m}$ . On entend par DDLs relatifs au secteur  $\Omega_m$  les DDLs internes et de frontière du domaine  $\Omega_m$  à l'exception des DDLs situés sur la frontière  $S_m^+$  (voir figure II.3).

La matrice élément fini  $[\underline{\mathbf{E}}]$ , où  $[\underline{\mathbf{E}}]$  représente la matrice  $[\underline{\mathbf{M}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{C}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}]$  ou  $[\underline{\mathbf{K}}]$ , s'écrit

$$[\underline{\mathbf{E}}] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{E}}]^{00} & \dots & [\underline{\mathbf{E}}]^{0(N-1)} \\ \vdots & \dots \vdots \dots & \vdots \\ [\underline{\mathbf{E}}]^{(N-1)0} & \dots & [\underline{\mathbf{E}}]^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{II.73})$$

où  $[\underline{E}]_{ij}^{mm'}$ , avec  $\{i, j\}$  dans  $\{1, \dots, \bar{n}\}^2$  et avec  $\{m, m'\}$  dans  $\{0, \dots, N-1\}^2$ , est l'élément de la matrice  $[\underline{E}]$  situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice bloc  $[\underline{E}]^{mm'}$ . Exprimée dans les repères locaux tournants  $\mathcal{R}_{\ell_m}$  relatifs au secteur  $\Omega_m$ , la matrice  $[\underline{E}]$  possède une structure de matrice circulante par blocs [29]. Puisque chaque secteur  $\Omega_m$  est adjacent au secteur  $\Omega_{m-1}$  et au secteur  $\Omega_{m+1}$ , chaque bloc  $[\underline{E}]^{mm'}$  s'écrit

$$[\underline{E}]^{mm'} = [\underline{E}_A] \delta_{m,m'} + [\underline{E}_B] \delta_{[m+1]_N, m'} + [\underline{E}_C] \delta_{[m-1]_N, m'} \quad , \quad (\text{II.74})$$

où  $[m+1]_N$  est le reste de la division de  $m+1$  par  $N$ . Dans l'équation (II.74), le bloc  $[\underline{E}_A]$  représente le bloc  $[\underline{M}_A]$ ,  $[\underline{C}_A]$ ,  $[\underline{D}_A]$  ou  $[\underline{K}_A]$ , le bloc  $[\underline{E}_B]$  représente le bloc  $[\underline{M}_B]$ ,  $[\underline{C}_B]$ ,  $[\underline{D}_B]$  ou  $[\underline{K}_B]$ , le bloc  $[\underline{E}_C]$  représente le bloc  $[\underline{M}_C]$ ,  $[\underline{C}_C]$ ,  $[\underline{D}_C]$  ou  $[\underline{K}_C]$ . Les blocs  $[\underline{E}_A]$ ,  $[\underline{E}_B]$  et  $[\underline{E}_C]$  sont trois blocs matriciels de dimension  $(\bar{n} \times \bar{n})$  dont les expressions seront données par la suite.

On a donc

$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} [\underline{E}_A] & [\underline{E}_B] & [0] & \dots & [0] & [\underline{E}_C] \\ [\underline{E}_C] & [\underline{E}_A] & [\underline{E}_B] & \ddots & & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & [\underline{E}_B] \\ [\underline{E}_B] & [0] & \dots & [0] & [\underline{E}_C] & [\underline{E}_A] \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{II.75})$$

### 5.2.2 Expression des blocs matriciels des matrices élément fini de la structure

Soient  $[\underline{M}_0]$ ,  $[\underline{D}_0]$  et  $[\underline{K}_0]$  les matrices de masse, de dissipation et de raideur globale, issues de la discrétisation élément fini du secteur générateur de la structure à symétrie cyclique. Les matrices sont décomposées en  $3 \times 3$  blocs, relatifs aux  $\bar{n}_m$  DDLs situés sur la frontière  $S_0^-$ , relatifs aux  $\bar{n}_i$  DDLs internes du domaine  $\Omega_0$  et DDLs de la frontière  $\Gamma_0 \cup \gamma_0$  et relatifs aux  $\bar{n}_p = \bar{n}_m$  DDLs situés sur la frontière  $S_0^+$ . Soit  $[\underline{E}_0]$ , représentant la matrice  $[\underline{M}_0]$ ,  $[\underline{D}_0]$  ou  $[\underline{K}_0]$ . On obtient alors la décomposition bloc suivante

$$[\underline{E}_0] = \begin{bmatrix} [\underline{E}_{mm}] & [\underline{E}_{mi}] & [0] \\ [\underline{E}_{mi}]^T & [\underline{E}_{ii}] & [\underline{E}_{ip}] \\ [0] & [\underline{E}_{ip}]^T & [\underline{E}_{pp}] \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{II.76})$$

La matrice  $[\underline{E}]$  du modèle matriciel élément fini moyen est obtenue en assemblant les matrices issues de la discrétisation élément fini de chaque secteur de la structure à symétrie cyclique. Les blocs matriciels  $[\underline{E}_A]$ ,  $[\underline{E}_B]$ ,  $[\underline{E}_C]$  de la matrice  $[\underline{E}]$ , définie par l'équation (II.75), s'écrivent :

$$[\underline{E}_A] = \begin{bmatrix} [\underline{E}_{mm}] + [P]^T [\underline{E}_{pp}] [P] & [\underline{E}_{mi}] \\ [\underline{E}_{mi}]^T & [\underline{E}_{ii}] \end{bmatrix}, \quad [\underline{E}_B] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [\underline{E}_{ip}] [P] & [0] \end{bmatrix}, \quad [\underline{E}_C] = [\underline{E}_B]^T \quad , \quad (\text{II.77})$$

où  $[P]$  est la matrice  $(\bar{n}_m \times \bar{n}_m)$  définie par

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ [0] & \cdots & [0] & [P_1] \end{bmatrix} . \quad (\text{II.78})$$

Soit  $[\underline{C}_0]$ , la matrice de couplage gyroscopique issue de la discrétisation élément fini du secteur générateur de la structure à symétrie cyclique. En tenant compte de la propriété d'antisymétrie (I.23), on obtient la décomposition blocs suivante

$$[\underline{C}_0] = \begin{bmatrix} [0] & [\underline{C}_{mi}] & [0] \\ -[\underline{C}_{mi}]^T & [0] & [\underline{C}_{ip}] \\ [0] & -[\underline{C}_{ip}]^T & [0] \end{bmatrix} . \quad (\text{II.79})$$

La matrice  $[\underline{C}]$  du modèle matriciel élément fini moyen est obtenue en assemblant les matrices issues de la discrétisation élément fini de chaque secteur de la structure à symétrie cyclique. Les blocs matriciels  $[\underline{C}_A]$ ,  $[\underline{C}_B]$ ,  $[\underline{C}_C]$  de la matrice  $[\underline{C}]$ , définie par l'équation (II.75), s'écrivent :

$$[\underline{C}_A] = \begin{bmatrix} [0] & [\underline{C}_{mi}] \\ -[\underline{C}_{mi}]^T & [0] \end{bmatrix} , \quad [\underline{C}_B] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [\underline{C}_{ip}] [P] & [0] \end{bmatrix} , \quad [\underline{C}_C] = -[\underline{C}_B]^T . \quad (\text{II.80})$$

### 5.2.3 Discrétisation élément fini de la transformée de Fourier discrète

L'équation matricielle donnant la discrétisation de la transformée de Fourier discrète (II.17) du champ de déplacement s'écrit

$$\mathbf{u} = [W] \hat{\mathbf{u}} , \quad \hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}_0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N-1}]^T , \quad (\text{II.81})$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_n$ , avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , est le vecteur des composantes complexes des harmoniques d'ordre  $n$ , et où  $[W]$  est la matrice  $(n_{ddl} \times n_{ddl})$  définie par

$$[W] = \begin{bmatrix} \bar{w}_{0,0}[I_{\bar{n}}] & \bar{w}_{0,1}[I_{\bar{n}}] & \cdots & \bar{w}_{0,N-1}[I_{\bar{n}}] \\ \bar{w}_{1,0}[I_{\bar{n}}] & \bar{w}_{1,1}[I_{\bar{n}}] & \cdots & \bar{w}_{1,N-1}[I_{\bar{n}}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{w}_{N-1,0}[I_{\bar{n}}] & \bar{w}_{N-1,1}[I_{\bar{n}}] & \cdots & \bar{w}_{N-1,N-1}[I_{\bar{n}}] \end{bmatrix} . \quad (\text{II.82})$$

La matrice  $[W]$  est une matrice inversible, telle que

$$\hat{\mathbf{u}} = [W]^{-1} \mathbf{u} , \quad (\text{II.83})$$

avec

$$[W]^{-1} = \frac{1}{N}[W]^* \quad , \quad (\text{II.84})$$

où  $[W]^*$  désigne la matrice transconjugée de  $[W]$ .

### 5.2.4 Expression des blocs matriciels

Soient  $[\mathbb{M}]$ ,  $[\mathbb{C}]$ ,  $[\mathbb{D}]$  et  $[\mathbb{K}]$  les matrices définies par

$$[\mathbb{M}] = [W]^{-1} [\underline{M}] [W] \quad , \quad [\mathbb{C}] = [W]^{-1} [\underline{C}] [W] \quad , \quad (\text{II.85})$$

$$[\mathbb{D}] = [W]^{-1} [\underline{D}] [W] \quad , \quad [\mathbb{K}] = [W]^{-1} [\underline{K}] [W] \quad . \quad (\text{II.86})$$

En utilisant l'équation (II.75), la matrice  $[\mathbb{E}]$ , où  $[\mathbb{E}]$  représente  $[\mathbb{M}]$ ,  $[\mathbb{C}]$ ,  $[\mathbb{D}]$  ou  $[\mathbb{K}]$ , se découpe en  $N \times N$  blocs matriciels de dimension  $(\bar{n} \times \bar{n})$  s'écrivant :

$$[\mathbb{E}]^{nm'} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N-1} \frac{1}{N} w_{n,m} \overline{w_{n,m'}} \left( [\underline{E}_A] \delta_{mm'} + [\underline{E}_B] \delta_{[m+1]_N, m'} + [\underline{E}_C] \delta_{[m-1]_N, m'} \right) \quad , \quad (\text{II.87})$$

où  $[m+1]_N$  est le reste de la division entière de  $m+1$  par  $N$ . En utilisant les propriétés (A.13) à (A.16) et le produit scalaire défini par (A.11), on obtient

$$[\mathbb{E}]^{nn'} = (w_n | w_{n'}) \left( [\underline{E}_A] + [\underline{E}_B] \overline{w_{n,1}} + [\underline{E}_C] w_{n,1} \right) \quad . \quad (\text{II.88})$$

Par conséquent, la matrice  $[\mathbb{E}]$  est une matrice diagonale par blocs. En utilisant l'expression (II.77), la matrice  $[\mathbb{E}]$ , désignant  $[\mathbb{M}]$ ,  $[\mathbb{D}]$  ou  $[\mathbb{K}]$  se réécrit

$$[\mathbb{E}]^{nn} = \begin{bmatrix} [\underline{E}_{mm}] + [P]^T [\underline{E}_{pp}] [P] & [\underline{E}_{mi}] + [P]^T [\underline{E}_{ip}]^T w_{n,1} \\ [\underline{E}_{mi}]^T + [\underline{E}_{ip}] [P] \overline{w_{n,1}} & [\underline{E}_{ii}] \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{II.89})$$

En utilisant l'expression (II.80), la matrice  $[\mathbb{C}]$  se réécrit

$$[\mathbb{C}]^{nn} = \begin{bmatrix} [0] & [\underline{C}_{mi}] - [P]^T [\underline{C}_{ip}]^T w_{n,1} \\ -[\underline{C}_{mi}]^T + [\underline{C}_{ip}] [P] \overline{w_{n,1}} & [0] \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{II.90})$$

## 5.3 Stratégie de résolution du problème d'élastodynamique pour la structure à symétrie cyclique

Ce paragraphe correspond à la discrétisation élément fini du problème d'élastodynamique défini dans le paragraphe 4.1.

En effectuant le changement de base défini par l'équation (II.81), et en prémultipliant l'équation de la dynamique (II.70) par la matrice  $[W]^{-1}$ , on obtient

$$[\underline{A}(\omega)] \hat{\underline{u}}(\omega) = \hat{\underline{F}}(\omega) \quad , \quad (\text{II.91})$$

avec  $\hat{\underline{F}}(\omega)$  le vecteur des composantes complexes harmoniques des forces, et  $[\underline{A}(\omega)]$  la matrice de rigidité dynamique exprimée dans la base des composantes complexes harmoniques tel que

$$\hat{\underline{F}} = [W]^{-1} \underline{F} \quad , \quad (\text{II.92})$$

$$[\underline{A}(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}] + i\omega ([\underline{D}] + [\underline{C}]) + [\underline{K}] \quad . \quad (\text{II.93})$$

Dans l'équation (II.92), les matrices  $[\underline{M}]$ ,  $[\underline{C}]$ ,  $[\underline{D}]$  et  $[\underline{K}]$  sont les matrices diagonales blocs, dont les blocs diagonaux sont données par les équations (II.89) et (II.90).

Le problème d'élastodynamique défini par l'équation (II.70) et de dimension  $(n_{ddl} \times n_{ddl})$ , est remplacé par  $N$  sous-problèmes de dimension  $(\bar{n} \times \bar{n})$ , notés  $\mathbb{P}_n$ , avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , et s'écrivant :

pour  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ , trouver  $\hat{\underline{u}}_n$  dans  $\mathbb{C}^{\bar{n}}$  tel que

$$[\underline{A}(\omega)]^{nn} \hat{\underline{u}}_n(\omega) = \hat{\underline{F}}_n(\omega) \quad . \quad (\text{II.94})$$

La solution physique du problème d'élastodynamique est reconstruite par l'équation (II.81).

Il est à noter que les problème  $\mathbb{P}_n$  correspondent à la discrétisation élément fini des problèmes  $\mathcal{P}_n$  définis par l'équation (II.50).

## 5.4 Stratégie de résolution du problème généralisé aux valeurs propres pour la structure à symétrie cyclique

Ce paragraphe correspond à la discrétisation élément fini du problème généralisé aux valeurs propres défini dans le paragraphe 4.2.

En négligeant les forces de couplage gyroscopiques  $i\omega [\underline{C}] \underline{u}(\omega)$ , le problème généralisé aux valeurs propres associé au système mécanique conservatif et homogène s'écrit :

trouver  $(\lambda, \underline{\Phi})$  avec  $\underline{\Phi}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{ddl}}$  tel que

$$\left( [\underline{K}] - \lambda [\underline{M}] \right) \underline{\Phi} = 0 \quad . \quad (\text{II.95})$$

Il est à noter que les matrices  $[\underline{M}]$  et  $[\underline{K}]$  étant symétriques définies positives, on a

$$\lambda > 0 \quad . \quad (\text{II.96})$$

## CHAPITRE II. DYNAMIQUE DES STRUCTURES TOURNANTES À SYMÉTRIE CYCLIQUE

Les valeurs propres positives  $\underline{\lambda}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , sont ordonnées par valeurs croissantes indicées en  $\alpha$ . Les vecteurs propres associés vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$\underline{\Phi}_\alpha^T [\underline{M}] \underline{\Phi}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \underline{\Phi}_\alpha^T [\underline{K}] \underline{\Phi}_\beta = \underline{\lambda}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{II.97})$$

Le problème aux valeurs propres défini par l'équation (II.95) et de dimension ( $n_{ddl} \times n_{ddl}$ ) est remplacé par  $N$  sous-problèmes de dimension ( $\bar{n} \times \bar{n}$ ) notés  $\mathbb{Q}_n$  avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , et s'écrivant :

trouver  $(\underline{\lambda}_n, \hat{\underline{\Phi}}_n)$  avec  $\hat{\underline{\Phi}}_n$  dans  $\mathbb{C}^{\bar{n}}$ , tel que

$$\left( [\underline{K}]^{nn} - \underline{\lambda}_n [\underline{M}]^{nn} \right) \hat{\underline{\Phi}}_n = 0 \quad . \quad (\text{II.98})$$

Pour  $n$  fixé, les valeurs propres  $\underline{\lambda}_{n,\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$  associées aux vecteurs propres  $\hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha}$  sont ordonnées par valeurs croissantes indicées en  $\alpha$ . Les vecteurs propres  $\hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha}$  associés aux valeurs propres  $\underline{\lambda}_{n,\alpha}$  vérifient les propriétés

$$\hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha}^* [\underline{M}]^{nn} \hat{\underline{\Phi}}_{n,\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha}^* [\underline{K}]^{nn} \hat{\underline{\Phi}}_{n,\beta} = \underline{\lambda}_{n,\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{II.99})$$

Il est à noter que les problèmes  $\mathbb{Q}_n$  correspondent à la discrétisation élément fini des problèmes  $\mathcal{Q}_n$  définis par l'équation (II.60). La résolution des problèmes  $\mathbb{Q}_n$  et la restitution des modes s'effectue de manière similaire à la stratégie proposée dans les paragraphes 4.2.2 et 4.2.3.

En particulier la résolution numérique du problème aux valeurs propres nécessite de résoudre

- les problèmes  $\mathbb{Q}_n$ , avec  $n$  dans  $\mathcal{N}_R$ , qui font intervenir des matrices  $[\underline{M}]^{nn}$  et  $[\underline{K}]^{nn}$  réelles de dimension  $\bar{n} \times \bar{n}$ . Ces problèmes sont calculés directement.
- Les problèmes  $\mathbb{Q}_n$ , avec  $n$  dans  $\mathcal{N}_C$ , qui font intervenir des matrices  $[\underline{M}]^{nn}$  et  $[\underline{K}]^{nn}$  complexes de dimension  $\bar{n} \times \bar{n}$ . Pour le calcul numérique, ces problèmes sont dédoublés en décomposant l'inconnue complexe en partie réelle et en partie imaginaire.

Soit  $n$  dans  $\mathcal{N}_R$ . On note  $\underline{\Phi}_{n,\alpha}^1 = (\underline{\Phi}_{n,\alpha}^{0,1}, \dots, \underline{\Phi}_{n,\alpha}^{N-1,1})$  le vecteur propre physique associé à la valeur propre  $\underline{\lambda}_{n,\alpha}$  de multiplicité 1. On a alors d'après l'équation (II.65)

$$\underline{\Phi}_{n,\alpha}^{m,1} = \overline{w_{n,m}} \hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha} \quad . \quad (\text{II.100})$$

Soit  $n$  dans  $\mathcal{N}_C$ . On note  $\underline{\Phi}_{n,\alpha}^1 = (\underline{\Phi}_{n,\alpha}^{0,1}, \dots, \underline{\Phi}_{n,\alpha}^{N-1,1})$  et  $\underline{\Phi}_{n,\alpha}^2 = (\underline{\Phi}_{n,\alpha}^{0,2}, \dots, \underline{\Phi}_{n,\alpha}^{N-1,2})$  les vecteurs propres physiques associés à la valeur propre  $\underline{\lambda}_{n,\alpha}$  de multiplicité 2. On a alors, d'après les équations (II.66) et (II.67)

$$\underline{\Phi}_{n,\alpha}^{m,1} = \sqrt{2} \Re \{ \overline{w_{n,m}} \hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha} \} \quad , \quad (\text{II.101})$$

$$\underline{\Phi}_{n,\alpha}^{m,2} = \sqrt{2} \Im \{ \overline{w_{n,m}} \hat{\underline{\Phi}}_{n,\alpha} \} \quad . \quad (\text{II.102})$$



# Chapitre III

## Construction du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée par deux méthodes utilisant la sous-structuration dynamique

### 1. Introduction

Dans cette recherche, nous nous intéressons au désaccordage dynamique des roues aubagées. La structure étudiée est une roue aubagée constituée de  $N + 1$  sous-domaines (1 disque et  $N$  aubes). Nous rappelons que cette recherche concerne la modélisation probabiliste non paramétrique du désaccordage des roues aubagées. Nous supposons que le disque est une sous-structure à symétrie cyclique et nous considérons les aubes comme des sous-structures en présence d'incertitudes aléatoires. Les incertitudes sont supposées statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre. Comme le modèle probabiliste non paramétrique est implémenté à partir de matrices généralisées, la construction d'un modèle matriciel réduit moyen pour chaque aube est donc requise afin de modéliser les incertitudes par l'approche probabiliste non paramétrique. Ce modèle matriciel réduit moyen est construit par des techniques de sous-structuration dynamique.

Les techniques de sous-structuration dynamique ont été initialement introduites afin d'effectuer l'analyse dynamique de structures complexes. La structure complexe est subdivisée en un ensemble de sous-structures dont le comportement dynamique est projeté sur des vecteurs de base. Le choix des vecteurs de base et les procédures d'assemblage des sous-structures définissent les nombreuses techniques de sous-structuration, (voir par exemple [52, 27, 6, 66, 48, 83, 53, 24, 58, 25, 38, 59, 26, 75, 76, 102]). Ces techniques ont été plus particulièrement utilisées pour modéliser le comportement dynamique des structures à symétrie cyclique [54, 102]. Dans le cas de roue aubagée désaccordées, la symétrie de la structure n'est plus exploitable et la structure complète est modélisée. Des modèles réduits adaptés à ce type de problématique ont été construits par sous-structuration [19, 110, 7, 8, 85, 86] afin d'effectuer une analyse probabiliste paramétrique du désaccordage.

Ce chapitre propose deux méthodes permettant d'obtenir un modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée compatible avec la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes.

(1) La première méthode consiste à construire le modèle matriciel réduit moyen de chaque aube par la méthode de Craig et Bampton [27, 76]. Cette méthode consiste à construire une base de projection en utilisant un nombre fini de vecteurs propres de l'aube à interface de couplage fixés complétés des relèvements statiques liés à cette interface de couplage. Les modèles matriciels réduits moyen de chaque aube sont ensuite assemblés avec le modèle matriciel élément fini moyen du disque. On obtient ainsi un modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée dont les inconnues sont les coordonnées généralisées

### CHAPITRE III. CONSTRUCTION DU MODÈLE MATRICIEL RÉDUIT MOYEN

des aubes, les DDLs internes du disque et les DDLs de l'interface de couplage disque-aubes.

(2) La seconde méthode consiste à construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée par la méthode de Benfield et Hruda [6]. Cette méthode constitue une réduction supplémentaire du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée obtenu avec la première méthode. Considérant le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée dont les inconnues sont les coordonnées généralisées des aubes, les DDLs internes du disque et les DDLs de l'interface de couplage disque-aubes, on extrait alors le sous-système relatif aux DDLs internes du disque et aux DDLs de l'interface de couplage disque-aubes. Le problème généralisé aux valeurs propres de ce sous-système est ensuite résolu. Comme le sous-système est à symétrie cyclique, le problème généralisé aux valeurs propres est résolu par la méthodologie présentée au paragraphe 4.2 du chapitre II. Les DDLs internes du disque et les DDLs de l'interface de couplage disque-aubes sont alors projetés sur la base modale tronquée précédemment calculée. On obtient un modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée dont les inconnues sont les coordonnées généralisées des aubes et les coordonnées réduites du disque.

La première méthode permet d'implémenter le modèle probabiliste non paramétrique pour modéliser le désaccordage des roues aubagées. Cette méthode est adaptée aux modèles éléments finis possédant un faible nombre de degrés de liberté. Elle sera utilisée dans les chapitres VII et VIII, qui concernent un exemple numérique simple. Toutefois, le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée a pour inconnues les DDLs physiques du disque. Cette méthode n'est donc pas appropriée pour les modèles éléments finis comportant un grand nombre de degrés de liberté, car elle s'avère trop coûteuse en terme de calcul numérique.

La seconde méthode est une méthode permettant de modéliser le désaccordage par la modélisation probabiliste non paramétrique des gros modèles éléments finis de roue aubagée. Il est à noter qu'une telle méthode est reconnue comme efficace [85] vis à vis de la convergence des paramètres de réduction du modèle. Cette méthode sera utilisée pour construire le modèle matriciel réduit moyen du modèle industriel de roue aubagée considéré au chapitre IX.

On introduit au paragraphe 2 la structure de roue aubagée qui est décomposée en  $N$  sous-structures aubes et en une sous-structure disque. Le paragraphe 3 décrit le modèle matriciel élément fini moyen de chaque sous-structure. Dans le paragraphe 4, on présente la méthode de Craig et Bampton pour chaque aube permettant de construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée par la première méthode. Dans le paragraphe 5, on expose la seconde méthode de construction de modèle réduit moyen de la roue aubagée, basée sur la technique de Benfield et Hruda. Enfin, le paragraphe 6 synthétise les résultats des 2 méthodes dans l'hypothèse où les forces de couplage gyroscopique sont négligées.

## 2. Description des sous-structures

La structure étudiée est une roue aubagée. Le domaine  $\Omega$  occupé par la structure dans sa configuration de référence tournante est décomposé en un sous-domaine  $\Omega^d$  représentant le disque, et en  $N$  sous-domaines  $\Omega^j$ , pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , représentant les  $N$  aubes (voir Figure III.1 pour  $N = 3$ ).

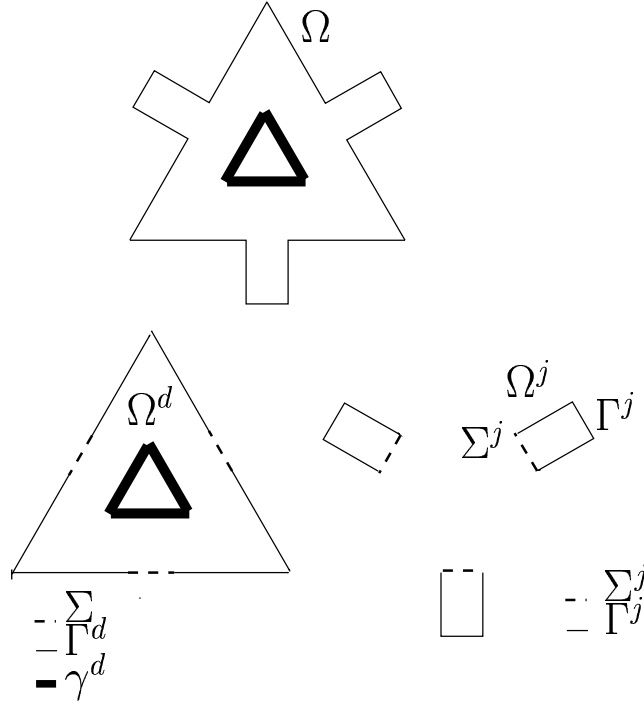
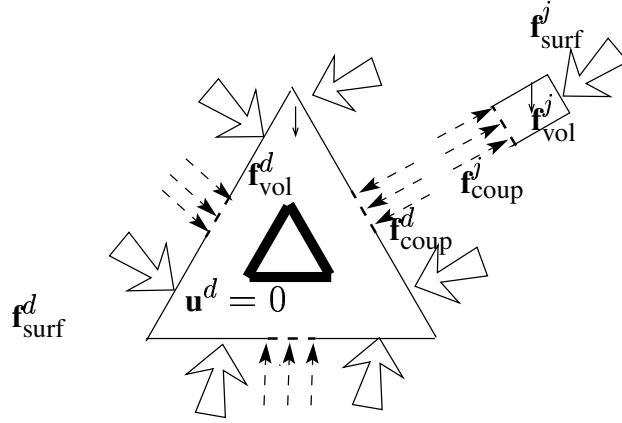


Figure III.1 – Décomposition de la structure en sous-structures

On note  $\mathbf{u}^d, \mathbf{f}_{\text{vol}}^d, \mathbf{f}_{\text{surf}}^d$  (ou  $\mathbf{u}^j, \mathbf{f}_{\text{vol}}^j, \mathbf{f}_{\text{surf}}^j$ ), les restrictions des champs  $\mathbf{u}, \mathbf{f}_{\text{vol}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{surf}}$  au domaine  $\Omega^d$  (ou au domaine  $\Omega^j$ ), et exprimés dans les repères locaux tournants associés. On donne une description détaillée des champs de forces extérieurs et des conditions aux limites pour chaque sous-domaine sur la Figure III.2.

Le domaine  $\Omega^d$  est soumis au champ de forces volumique  $\mathbf{f}_{\text{vol}}^d$ . Le bord  $\partial \Omega^d$  du domaine  $\Omega^d$  est tel que  $\partial \Omega^d = \gamma^d \cup \Gamma^d \cup \Sigma$ , avec  $\gamma^d$  la partie de bord encastree où  $\mathbf{u}^d = 0$ , avec  $\Gamma^d$  la partie de bord sur laquelle est appliquée le champ de force surfacique  $\mathbf{f}_{\text{surf}}^d$ , et avec  $\Sigma$ , l'interface de couplage disque-aubes, soumise au champ de forces surfacique de couplage  $\mathbf{f}_{\text{coup}}^d$ . Pour  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , le domaine  $\Omega^j$  est soumis au champ de forces volumique  $\mathbf{f}_{\text{vol}}^j$ . Le bord  $\partial \Omega^j$  du domaine  $\Omega^j$  est tel que  $\partial \Omega^j = \Gamma^j \cup \Sigma$ , avec  $\Gamma^j$  la partie de bord sur laquelle est appliquée le champ de force surfacique  $\mathbf{f}_{\text{surf}}^j$ , et avec  $\Sigma^j$ , l'interface de couplage aube  $j$  - disque, soumise au champ de forces surfacique de couplage  $\mathbf{f}_{\text{coup}}^j$ . On a la relation  $\Sigma = \bigcup_{j=0}^{N-1} \Sigma^j$ .



**Figure III.2** – Description des champs de forces extérieurs et des déplacements imposés appliqués à chaque sous-structure

### 3. Définition du modèle matriciel élément fini moyen des sous-structures

On discrétise chaque sous-structure par la méthode des éléments finis. On suppose les maillages de chaque sous-structure compatibles sur l'interface de couplage.

#### 3.1 Modèle matriciel élément fini moyen de l'aube $j$

Soit  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N - 1\}$ . L'équation matricielle de la dynamique pour l'aube  $j$  s'écrit, pour  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ ,

$$[\underline{A}^j(\omega)] \underline{\mathbf{u}}^j(\omega) = \underline{\mathbf{F}}^j(\omega) \quad , \quad (\text{III.1})$$

où  $\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)$  et  $\underline{\mathbf{F}}^j(\omega)$  sont les vecteurs à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n^j}$  constitués respectivement des  $n^j$  DDLs et des forces nodales issues de la discrétisation élément fini des chargements extérieurs  $\mathbf{f}_{\text{vol}}^j$ ,  $\mathbf{f}_{\text{surf}}^j$  et  $\mathbf{f}_{\text{coup}}^j$ . La matrice de rigidité dynamique  $[\underline{A}^j(\omega)]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^j}(\mathbb{C})$  s'écrit

$$[\underline{A}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}^j] + i\omega ([\underline{C}^j] + [\underline{D}^j]) + [\underline{K}^j] \quad , \quad (\text{III.2})$$

où les matrices  $[\underline{M}^j]$ ,  $[\underline{C}^j]$ ,  $[\underline{D}^j]$  et  $[\underline{K}^j]$  sont respectivement la matrice de masse à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^j}^+(\mathbb{R})$ , la matrice de couplage gyroscopique à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^j}^{AS}(\mathbb{R})$ , les matrices de dissipation et de rigidité à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^j}^{+0}(\mathbb{R})$  pour l'aube  $j$  à interface de couplage libre.

Les DDLs de chaque sous-structure sont partitionnés en  $n_i^j$  DDLs internes et en  $n_{\Sigma}^j = n^j - n_i^j$  DDLs

d'interface tel que

$$\underline{\mathbf{u}}^j = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^j \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{F}}^j = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^j \\ \underline{\mathbf{F}}_\Sigma^j + \underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^j \end{bmatrix}, \quad (\text{III.3})$$

où  $\underline{\mathbf{u}}_i^j$  est le vecteur des  $n_i^j$  DDLs internes et où  $\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j$  est le vecteur des  $n_\Sigma^j$  DDLs d'interface de couplage. Les vecteurs forces  $\underline{\mathbf{F}}_i^j$  et  $\underline{\mathbf{F}}_\Sigma^j$  sont issus de la discrétisation éléments finis des chargements extérieurs appliqués à l'aube  $j$ . Le vecteur force  $\underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^j$  résulte de la discrétisation éléments finis des forces de couplage agissant sur l'interface de couplage de l'aube  $j$ . La décomposition par bloc issue de l'équation (III.3) permet d'écrire les matrices  $[\underline{\mathbf{M}}^j]$ ,  $[\underline{\mathbf{C}}^j]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}^j]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}^j]$

$$[\underline{\mathbf{M}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^j] & [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j] \\ [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j]^T & [\underline{\mathbf{M}}_{\Sigma\Sigma}^j] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{C}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{C}}_{ii}^j] & [\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j] \\ -[\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j]^T & [\underline{\mathbf{C}}_{\Sigma\Sigma}^j] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.4})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^j] & [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j] \\ [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j]^T & [\underline{\mathbf{D}}_{\Sigma\Sigma}^j] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{K}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^j] & [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j] \\ [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j]^T & [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma\Sigma}^j] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5})$$

On obtient alors la décomposition par blocs de la matrice  $[\underline{\mathbf{A}}^j(\omega)]$  avec

$$[\underline{\mathbf{A}}_{ii}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^j] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}_{ii}^j] + [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^j]) + [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^j] \quad (\text{III.6})$$

$$[\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j] + [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j]) + [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j] \quad (\text{III.7})$$

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma i}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j]^T + i\omega (-[\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j]^T + [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j]^T) + [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j]^T \quad (\text{III.8})$$

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{\Sigma\Sigma}^j] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}_{\Sigma\Sigma}^j] + [\underline{\mathbf{D}}_{\Sigma\Sigma}^j]) + [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma\Sigma}^j] \quad (\text{III.9})$$

### 3.2 Modèle matriciel élément fini moyen du disque

L'équation matricielle de la dynamique pour le disque s'écrit, pour  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ ,

$$[\underline{\mathbf{A}}^d(\omega)] \underline{\mathbf{u}}^d(\omega) = \underline{\mathbf{F}}^d(\omega), \quad (\text{III.10})$$

où  $\underline{\mathbf{u}}^d(\omega)$  et  $\underline{\mathbf{F}}^d(\omega)$  sont les vecteurs à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n^d}$  constitués respectivement des  $n^d$  DDLs et des forces nodales issues de la discrétisation élément fini des chargements extérieurs  $\mathbf{f}_{\text{vol}}^d$ ,  $\mathbf{f}_{\text{surf}}^d$  et  $\mathbf{f}_{\text{coup}}^d$ . La matrice de rigidité dynamique  $[\underline{\mathbf{A}}^d(\omega)]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^d}(\mathbb{C})$  s'écrit

$$[\underline{\mathbf{A}}^d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}^d] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}^d] + [\underline{\mathbf{D}}^d]) + [\underline{\mathbf{K}}^d], \quad (\text{III.11})$$

où les matrices  $[\underline{\mathbf{M}}^d]$ ,  $[\underline{\mathbf{C}}^d]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}^d]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}^d]$  sont respectivement la matrice de masse à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^d}^+(\mathbb{R})$ , la matrice de couplage gyroscopique à valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^d}^{AS}(\mathbb{R})$ , les matrices de dissipation et de rigidité à

valeurs dans  $\mathbb{M}_{n^d}^+(\mathbb{R})$  pour le disque à interface de couplage libre.

Les DDLs de chaque sous-structure sont partitionnés en  $n_i^d$  DDLs internes et en  $n_\Sigma^d = n^d - n_i^d$  DDLs d'interface tel que

$$\underline{\mathbf{u}}^d = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^d \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{F}}^d = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^d \\ \underline{\mathbf{F}}_\Sigma^d + \underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^d \end{bmatrix}, \quad (\text{III.12})$$

où  $\underline{\mathbf{u}}_i^d$  est le vecteur des  $n_i^d$  DDLs internes du disque et où  $\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^d$  est le vecteur des  $n_\Sigma^d$  DDLs d'interface de couplage disque-aubes. Les vecteurs forces  $\underline{\mathbf{F}}_i^d$  et  $\underline{\mathbf{F}}_\Sigma^d$  sont issus de la discrétisation éléments finis des chargements extérieurs appliqués au disque. Le vecteur force  $\underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^d$  résulte de la discrétisation éléments finis des forces de couplage agissant sur l'interface de couplage du disque. La décomposition par bloc issue de l'équation (III.3) permet d'écrire les matrices  $[\underline{\mathbf{M}}^d]$ ,  $[\underline{\mathbf{C}}^d]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}^d]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}^d]$

$$[\underline{\mathbf{M}}^d] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^d] & [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^d] \\ [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^d]^T & [\underline{\mathbf{M}}_{\Sigma\Sigma}^d] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{C}}^d] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{C}}_{ii}^d] & [\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^d] \\ -[\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^d]^T & [\underline{\mathbf{C}}_{\Sigma\Sigma}^d] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.13})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}^d] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^d] & [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^d] \\ [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^d]^T & [\underline{\mathbf{D}}_{\Sigma\Sigma}^d] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{K}}^d] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^d] & [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^d] \\ [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^d]^T & [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma\Sigma}^d] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.14})$$

On obtient alors la décomposition par blocs de la matrice  $[\underline{\mathbf{A}}^d(\omega)]$  avec

$$[\underline{\mathbf{A}}_{ii}^d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^d] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}_{ii}^d] + [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^d]) + [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^d] \quad (\text{III.15})$$

$$[\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^d] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^d] + [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^d]) + [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^d] \quad (\text{III.16})$$

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma i}^d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^d]^T + i\omega (-[\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^d]^T + [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^d]^T) + [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^d]^T \quad (\text{III.17})$$

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{\Sigma\Sigma}^d] + i\omega ([\underline{\mathbf{C}}_{\Sigma\Sigma}^d] + [\underline{\mathbf{D}}_{\Sigma\Sigma}^d]) + [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma\Sigma}^d] \quad (\text{III.18})$$

## 4. Première méthode pour construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée

Le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée est ici obtenu (1) en construisant un modèle matriciel réduit moyen pour chaque aube par la méthode de Craig et Bampton, (2) en assemblant les modèles matriciels réduits moyens de chaque aube avec le modèle matriciel élément fini moyen du disque. On obtient ainsi un modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée, dont les inconnues sont les coordonnées généralisées des aubes, les DDLs physiques de l'interface de couplage disque-aubes et les DDLs physiques internes de disque.

## 4.1 Construction du modèle matriciel réduit moyen pour l'aube $j$

On rappelle que la méthode de sous-structuration dynamique de Craig et Bampton [27, 76], appliquée à l'aube  $j$ , consiste à décomposer l'espace  $\mathcal{C}(\Omega^j)$  du champ de déplacement admissible pour l'aube  $j$  à interface de couplage libre, comme la somme directe de deux sous-espaces notés  $\mathcal{C}_0(\Omega^j)$  et  $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Omega^j)$  tels que

$$\mathcal{C}(\Omega^j) = \mathcal{C}_0(\Omega^j) \oplus \mathcal{C}_{\text{rel}}(\Omega^j) \quad , \quad (\text{III.19})$$

où l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_0(\Omega^j)$  est l'espace du champ de déplacement admissible pour l'aube  $j$  à interface de couplage  $\Sigma^j$  fixe, et où l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Omega^j)$  est l'espace des champs de relèvements statiques admissibles de l'interface de couplage  $\Sigma^j$ .

On se place désormais dans le cadre de la méthode des éléments finis. La méthode de Craig et Bampton nécessite de résoudre le problème généralisé aux valeurs propres de l'aube à interface de couplage  $\Sigma^j$  fixe, et de construire la matrice des relèvements statiques associés à cette interface de couplage.

### 4.1.1 Construction de la base de projection

Soit  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Le problème généralisé aux valeurs propres pour l'aube  $j$  à interface de couplage fixe, s'écrit

$$([\underline{K}_{ii}^j] - \underline{\lambda}_\alpha^j [\underline{M}_{ii}^j]) \underline{\varphi}_\alpha^j = 0 \quad . \quad (\text{III.20})$$

Les valeurs propres  $\underline{\lambda}_\alpha^j$  sont telles que  $0 < \underline{\lambda}_1^j \leq \underline{\lambda}_2^j \leq \dots$ ; les vecteurs propres  $\underline{\varphi}_\alpha^j$  associés vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$[\underline{M}^j]_{\alpha\beta} = \underline{\varphi}_\alpha^{jT} [\underline{M}_{ii}^j] \underline{\varphi}_\beta^j = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{III.21})$$

$$[\underline{K}^j]_{\alpha\beta} = \underline{\varphi}_\alpha^{jT} [\underline{K}_{ii}^j] \underline{\varphi}_\beta^j = \underline{\lambda}_\alpha^j \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{III.22})$$

Soit  $N^j \ll n_i^j$ . Les vecteurs propres associés aux  $N^j$  plus petites valeurs propres  $\underline{\lambda}_\alpha^j$ , avec  $\alpha$  dans  $\{1, \dots, N^j\}$ , constituent les colonnes de la matrice  $[\underline{\Phi}^j]$  de dimension  $n_i^j \times N^j$ .

Le problème élastostatique pour l'aube  $j$ , soumis à des déplacements imposés  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j$  sur son interface de couplage  $\Sigma^j$  s'écrit

$$\begin{bmatrix} [\underline{K}_{ii}^j] & [\underline{K}_{i\Sigma}^j] \\ [\underline{K}_{i\Sigma}^j]^T & [\underline{K}_{\Sigma\Sigma}^j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^j \\ \underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{R}}_{\text{imp}}^j \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.23})$$

où  $\underline{\mathbf{R}}_{\text{imp}}^j$  est la force de réaction due au déplacement imposé  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j$ . On déduit de l'équation (III.23) les relations

$$\underline{\mathbf{u}}_i^j = [\underline{S}^j] \underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j \quad , \quad [\underline{S}^j] = -[\underline{K}_{ii}^j]^{-1} [\underline{K}_{i\Sigma}^j] \text{ de dimension } (n_i^j \times n_\Sigma^j) \quad , \quad (\text{III.24})$$

$$\underline{\mathbf{R}}_{\text{imp}}^j = [\underline{K}_{\Sigma}^j] \underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j \quad , \quad [\underline{K}_{\Sigma}^j] = [\underline{K}_{\Sigma\Sigma}^j] - [\underline{K}_{i\Sigma}^j]^T [\underline{K}_{ii}^j]^{-1} [\underline{K}_{i\Sigma}^j] \text{ de dimension } (n_\Sigma^j \times n_\Sigma^j) \quad (\text{III.25})$$

En utilisant l'équation (III.24), on obtient la relation

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^j \\ \underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{S}^j] \\ [I_{n_\Sigma^j}] \end{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{\text{imp}}^j \quad , \quad (\text{III.26})$$

où la matrice  $[I_{n_\Sigma^j}]$  est la matrice identité de dimension  $(n_\Sigma^j \times n_\Sigma^j)$ .

La décomposition de Craig et Bampton pour  $N^j$  modes à interface de couplage fixe s'écrit

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^j \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j \end{bmatrix} = [\underline{H}^j] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^j \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.27})$$

avec

$$[\underline{H}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}^j] & [\underline{S}^j] \\ [0] & [I_{n_\Sigma^j}] \end{bmatrix} \text{ de dimension } (n^j \times m^j) \quad , \quad (\text{III.28})$$

où  $m^j = N^j + n_\Sigma^j$  et où  $\underline{\mathbf{q}}^j = (q_1^j, \dots, q_{N^j}^j)$  est le vecteur des coordonnées généralisées de l'aube  $j$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{N^j}$ .

#### 4.1.2 Equation matricielle réduite moyenne pour l'aube $j$

En multipliant à gauche l'équation (III.1) par  $[\underline{H}^j]^T$  et en utilisant la relation (III.27), on obtient

$$[\underline{A}_{\text{red}}^j(\omega)] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^j(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}^j(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}_\Sigma^j(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^j(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.29})$$

où  $[\underline{A}_{\text{red}}^j(\omega)]$  est la matrice réduite de rigidité dynamique de l'aube  $j$  définie par

$$[\underline{A}_{\text{red}}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_{\text{red}}^j] + i\omega([\underline{C}_{\text{red}}^j] + [\underline{D}_{\text{red}}^j]) + [\underline{K}_{\text{red}}^j] \quad , \quad (\text{III.30})$$

et où

$$\underline{\mathcal{F}}^j(\omega) = [\underline{\Phi}^j]^T \underline{\mathbf{F}}_i^j(\omega) \quad , \quad (\text{III.31})$$

$$\underline{\mathcal{F}}_\Sigma^j(\omega) = [\underline{S}^j]^T \underline{\mathbf{F}}_i^j(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_\Sigma^j(\omega) \quad . \quad (\text{III.32})$$

Les matrices  $[\underline{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{C}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\underline{K}_{\text{red}}^j]$  sont les matrices réduites de masse, de couplage gyroscopique, de dissipation et de rigidité à valeurs dans  $\mathbb{M}_{m^j}^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{M}_{m^j}^{AS}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{M}_{m^j}^{+0}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{M}_{m^j}^{+0}(\mathbb{R})$  de l'aube  $j$  telles que

$$[\underline{M}_{\text{red}}^j] = [\underline{H}^j]^T [\underline{M}^j] [\underline{H}^j] \quad , \quad (\text{III.33})$$

$$[\underline{C}_{\text{red}}^j] = [\underline{H}^j]^T [\underline{C}^j] [\underline{H}^j] \quad , \quad (\text{III.34})$$

$$[\underline{D}_{\text{red}}^j] = [\underline{H}^j]^T [\underline{D}^j] [\underline{H}^j] \quad , \quad (\text{III.35})$$

$$[\underline{K}_{\text{red}}^j] = [\underline{H}^j]^T [\underline{K}^j] [\underline{H}^j] \quad . \quad (\text{III.36})$$



### 4.1.3 Expression des blocs des matrices réduites

La décomposition par blocs par rapport au vecteur des coordonnées généralisées  $\underline{\mathbf{q}}^j$  et par rapport au vecteur des degrés de liberté sur l'interface de couplage  $\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j$  permet d'écrire

$$[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{M}}^j] & [\underline{\mathbf{M}}_c^j] \\ [\underline{\mathbf{M}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{M}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{C}}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{C}}^j] & [\underline{\mathbf{C}}_c^j] \\ -[\underline{\mathbf{C}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{C}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.37})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{D}}^j] & [\underline{\mathbf{D}}_c^j] \\ [\underline{\mathbf{D}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{D}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{K}}^j] & [\underline{\mathbf{K}}_c^j] \\ [\underline{\mathbf{K}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{K}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}. \quad (\text{III.38})$$

avec

$$[\underline{\mathbf{M}}^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^j] [\underline{\Phi}^j], \quad (\text{III.39})$$

$$[\underline{\mathbf{C}}^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{C}}_{ii}^j] [\underline{\Phi}^j], \quad (\text{III.40})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^j] [\underline{\Phi}^j], \quad (\text{III.41})$$

$$[\underline{\mathbf{K}}^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^j] [\underline{\Phi}^j], \quad (\text{III.42})$$

$$[\underline{\mathbf{M}}_c^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^j] [\underline{\mathbf{S}}^j] + [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j], \quad (\text{III.43})$$

$$[\underline{\mathbf{C}}_c^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{C}}_{ii}^j] [\underline{\mathbf{S}}^j] + [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j], \quad (\text{III.44})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_c^j] = [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^j] [\underline{\mathbf{S}}^j] + [\underline{\Phi}^j]^T [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j], \quad (\text{III.45})$$

$$[\underline{\mathbf{K}}_c^j] = [\mathbf{0}], \quad (\text{III.46})$$

$$[\underline{\mathbf{M}}_\Sigma^j] = [\underline{\mathbf{S}}^j]^T [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^j] [\underline{\mathbf{S}}^j] + ([\underline{\mathbf{S}}^j]^T [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j] + [\underline{\mathbf{M}}_{i\Sigma}^j]^T [\underline{\mathbf{S}}^j]) + [\underline{\mathbf{M}}_{\Sigma\Sigma}^j], \quad (\text{III.47})$$

$$[\underline{\mathbf{C}}_\Sigma^j] = [\underline{\mathbf{S}}^j]^T [\underline{\mathbf{C}}_{ii}^j] [\underline{\mathbf{S}}^j] + ([\underline{\mathbf{S}}^j]^T [\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j] - [\underline{\mathbf{C}}_{i\Sigma}^j]^T [\underline{\mathbf{S}}^j]) + [\underline{\mathbf{C}}_{\Sigma\Sigma}^j], \quad (\text{III.48})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_\Sigma^j] = [\underline{\mathbf{S}}^j]^T [\underline{\mathbf{D}}_{ii}^j] [\underline{\mathbf{S}}^j] + ([\underline{\mathbf{S}}^j]^T [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j] + [\underline{\mathbf{D}}_{i\Sigma}^j]^T [\underline{\mathbf{S}}^j]) + [\underline{\mathbf{D}}_{\Sigma\Sigma}^j], \quad (\text{III.49})$$

$$[\underline{\mathbf{K}}_\Sigma^j] = [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma\Sigma}^j] - [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j]^T [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^j]^{-1} [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j]. \quad (\text{III.50})$$

En utilisant l'équation (III.30) et la décomposition bloc définie par les équations (III.37) et (III.38), la matrice de rigidité dynamique  $[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}^j(\omega)]$  s'écrit

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}^j(\omega)] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{A}}^j(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_c^j(\omega)] \\ [\underline{\mathbf{A}}_c^j(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_\Sigma^j(\omega)] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.51})$$

avec

$$[\underline{A}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}^j] + i\omega ([\underline{C}^j] + [\underline{D}^j]) + [\underline{K}] \quad , \quad (\text{III.52})$$

$$[\underline{A}_c^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_c^j] + i\omega ([\underline{C}_c^j] + [\underline{D}_c^j]) + [\underline{K}_c^j] \quad , \quad (\text{III.53})$$

$$[\underline{A}_d^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_c^j]^T + i\omega (-[\underline{C}_c^j]^T + [\underline{D}_c^j]^T) + [\underline{K}_c^j]^T \quad , \quad (\text{III.54})$$

$$[\underline{A}_\Sigma^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_\Sigma^j] + i\omega ([\underline{C}_\Sigma^j] + [\underline{D}_\Sigma^j]) \quad . \quad (\text{III.55})$$

## 4.2 Construction du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée

Comme les aubes sont des sous-structures identiques, leur maillage est identique. On pose, pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$

$$n^a = n^j, n_i^a = n_i^j, n_\Sigma^a = n_\Sigma^j, m^a = m^j, n^a = N^j \quad . \quad (\text{III.56})$$

En particulier, on pose  $n_\Sigma = n_\Sigma^d = N n_\Sigma^a$ .

De plus, l'aubage constitue une sous-structure à géométrie cyclique ; les matrices élément fini de chaque aube sont identiques car les déplacements sont exprimés dans les repères locaux tournants qui leurs sont associés.

L'assemblage des sous-structures s'effectue en tenant compte des conditions de couplage sur l'interface. L'équilibre des forces internes de couplage et la continuité des déplacements sur l'interface de couplage  $\Sigma$  s'écrit

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^d(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^a(\omega) = 0 \quad , \quad (\text{III.57})$$

$$\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^a(\omega) = \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^d(\omega) = \underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega) \quad , \quad (\text{III.58})$$

avec  $\underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^a = (\underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^0, \dots, \underline{\mathbf{F}}_{\text{coup}}^{N-1})$  et  $\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^a = (\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^0, \dots, \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^{N-1})$ . En utilisant les équations (III.27), (III.28) et (III.58), le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée s'écrit

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{n_i^d}] & 0 & 0 \\ 0 & [I_{n_\Sigma}] & 0 \\ 0 & [\underline{S}^a] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.59})$$

où  $\underline{\mathbf{u}}_i^a = (\underline{\mathbf{u}}_i^0, \dots, \underline{\mathbf{u}}_i^{N-1})$  et  $\underline{\mathbf{q}}^a = (\underline{\mathbf{q}}^0, \dots, \underline{\mathbf{q}}^{N-1})$  sont les vecteurs des  $N \times n_i^a$  DDLs internes de l'aubage et des  $N \times n^a$  coordonnées généralisées de l'aubage. Dans l'équation (III.59), les matrices  $[\underline{S}^a]$

et  $[\underline{\Phi}^a]$  sont définies par

$$[\underline{S}^a] = \begin{bmatrix} [\underline{S}^0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [\underline{S}^1] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [\underline{S}^{N-1}] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\Phi}^a] = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}^0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [\underline{\Phi}^1] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [\underline{\Phi}^{N-1}] \end{bmatrix}, \quad (\text{III.60})$$

où  $[\underline{S}^a]^{jk}$  et  $[\underline{\Phi}^a]^{jk}$  sont les matrices bloc  $jk$  définies par

$$[\underline{S}^a]^{jk} = [\underline{S}^j] \delta_{jk}, \quad [\underline{\Phi}^a]^{jk} = [\underline{\Phi}^j] \delta_{jk}. \quad (\text{III.61})$$

Le vecteur du second membre de l'équation (III.59) est solution de l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} [\underline{A}_{ii}^d(\omega)] & [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)] & [0] \\ [\underline{A}_{\Sigma i}^d(\omega)] & [\underline{A}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] + [\underline{A}_{\Sigma}^a(\omega)] & [\underline{A}_d^a(\omega)] \\ [0] & [\underline{A}_c^a(\omega)] & [\underline{A}^a(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\Sigma}^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{F}}_{\Sigma}^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^a(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.62})$$

où les vecteurs  $\underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^a$  et  $\underline{\mathcal{F}}^a$  sont tels que  $\underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^a = (\underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^0, \dots, \underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^{N-1})$  et  $\underline{\mathcal{F}}^a = (\underline{\mathcal{F}}^0, \dots, \underline{\mathcal{F}}^{N-1})$ . Les matrices  $[\underline{A}_d^a(\omega)]$ ,  $[\underline{A}_{\Sigma}^a(\omega)]$ ,  $[\underline{A}_c^a(\omega)]$  et  $[\underline{A}^a(\omega)]$  sont telles que

$$[\underline{A}_d^a(\omega)]^{jk} = [\underline{A}_d^j(\omega)] \delta_{jk}, \quad [\underline{A}_{\Sigma}^a(\omega)]^{jk} = [\underline{A}_{\Sigma}^j(\omega)] \delta_{jk}, \quad (\text{III.63})$$

$$[\underline{A}_c^a(\omega)]^{jk} = [\underline{A}_c^j(\omega)] \delta_{jk}, \quad [\underline{A}^a(\omega)]^{jk} = [\underline{A}^j(\omega)] \delta_{jk}. \quad (\text{III.64})$$

Le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée ainsi construit est approprié pour modéliser les incertitudes de désaccordage par l'approche probabiliste non paramétrique. Il est particulièrement adapté aux modèles éléments finis de roues aubagées possédant un petit nombre de degrés de liberté, car le vecteur des coordonnées réduites comporte les DDLs physiques du disque. Ce modèle sera utilisé aux chapitres VII et VIII, traitant un exemple numérique simple.

## 5. Deuxième méthode pour construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée

Dans ce paragraphe, le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée est obtenu par la méthode de Benfield et Hruda. Sa construction nécessite (1) de construire le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée défini par les équations (III.59) et (III.62), (2) d'extraire le sous-système associé aux DDLs internes du disque et aux DDLs de l'interface de couplage disque-aubes, (3) de résoudre le problème généralisé aux valeurs propres associé à ce sous-système à symétrie cyclique, par la méthodologie explicitée dans le paragraphe 4.2 du chapitre II, (4) de projeter les DDLs internes du disque et les DDLs de

l'interface de couplage disque-aubes sur la base modale précédemment calculée. On obtient un modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée dont les inconnues sont les coordonnées généralisées de l'aube et les coordonnées réduites du disque.

## 5.1 Extraction du sous-système associé aux DDLs physiques du disque

On extrait la sous-matrice  $[\underline{A}^{d,c}(\omega)]$ , associée aux DDLs internes du disque et aux DDLs de l'interface de couplage disque-aube, de la matrice réduite de rigidité dynamique décrite dans l'équation (III.62). La matrice  $[\underline{A}^{d,c}(\omega)]$  s'écrit

$$[\underline{A}^{d,c}(\omega)] = \begin{bmatrix} [\underline{A}_{ii}^d(\omega)] & [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)] \\ [\underline{A}_{\Sigma i}^d(\omega)] & [\underline{A}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] + [\underline{A}_{\Sigma}^a(\omega)] \end{bmatrix} . \quad (\text{III.65})$$

## 5.2 Problème généralisé aux valeurs propres

Le problème généralisé aux valeurs propres, s'écrit, lorsque les forces de couplage gyroscopiques sont négligées,

trouver  $(\lambda_\alpha^{d,c}, \underline{\varphi}_\alpha^{d,c})$  avec  $\underline{\varphi}_\alpha^{d,c}$  dans  $\mathbb{R}^{n^d}$  tel que

$$([\underline{K}^{d,c}] - \lambda_\alpha^{d,c} [\underline{M}^{d,c}]) \underline{\varphi}_\alpha^{d,c} = 0 \quad , \quad (\text{III.66})$$

où les matrices de masse  $[\underline{M}^{d,c}]$  et de rigidité  $[\underline{K}^{d,c}]$  sont définies par

$$[\underline{M}^{d,c}] = \begin{bmatrix} [\underline{M}_{ii}^d] & [\underline{M}_{i\Sigma}^d] \\ [\underline{M}_{i\Sigma}^d]^T & [\underline{M}_{\Sigma\Sigma}^d] + [\underline{M}_{\Sigma}^a] \end{bmatrix} , \quad [\underline{K}^{d,c}] = \begin{bmatrix} [\underline{K}_{ii}^d] & [\underline{K}_{i\Sigma}^d] \\ [\underline{K}_{i\Sigma}^d]^T & [\underline{K}_{\Sigma\Sigma}^d] + [\underline{K}_{\Sigma}^a] \end{bmatrix} , \quad (\text{III.67})$$

avec  $[\underline{M}_{\Sigma}^a]^{jk} = [\underline{M}_{\Sigma}^j] \delta_{jk}$  et  $[\underline{K}_{\Sigma}^a]^{jk} = [\underline{K}_{\Sigma}^j] \delta_{jk}$ , où  $[\underline{M}_{\Sigma}^j]$  et  $[\underline{K}_{\Sigma}^j]$  sont définies par les équations (III.47) et (III.50). Il est à noter que le sous-système considéré est à géométrie cyclique. Par conséquent, le problème généralisé aux valeurs propres est résolu par la méthodologie explicitée dans le paragraphe 4.2 du chapitre II. Soit  $N^d = N n^d \ll n^d$ . Les  $N^d$  vecteurs propres correspondent aux  $n^d$  plus petites valeurs propres obtenues en résolvant chaque sous-problème  $\mathcal{Q}_n$ , avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , défini par l'équation (II.98). Les valeurs propres sont telles que  $0 < \lambda_1^{d,c} \leq \lambda_2^{d,c} \leq \dots$ . Les vecteurs propres associés  $\underline{\varphi}_\alpha^{d,c}$  vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$[\underline{M}^d]_{\alpha\beta} = \underline{\varphi}_\alpha^{d,cT} [\underline{M}^{d,c}] \underline{\varphi}_\beta^{d,c} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{III.68})$$

$$[\underline{K}^d]_{\alpha\beta} = \underline{\varphi}_\alpha^{d,cT} [\underline{K}^{d,c}] \underline{\varphi}_\beta^{d,c} = \lambda_\alpha^{d,c} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{III.69})$$

et constituent les colonnes de la matrice modale  $[\underline{\Phi}^{d,c}]$  de dimension  $n^d \times N^d$ . Soient  $[\underline{\Phi}_i^{d,c}]$  et  $[\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}]$  les matrices issues la décomposition bloc de la matrice  $[\underline{\Phi}^{d,c}]$  selon les DDLs internes du disque et selon les

DDLs d'interface de couplage disque-aubes. On a la relation

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^d(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_i^{d,c}] \\ [\Phi_\Sigma^{d,c}] \end{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^d(\omega) \quad . \quad (\text{III.70})$$

### 5.3 Construction du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée

#### 5.3.1 Equation matricielle réduite de la dynamique

Les DDLs du disque sont ensuite projetés sur la base modale solution de l'équation (III.66). En utilisant les équations (III.62) et (III.70), l'équation matricielle réduite de la dynamique s'écrit

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}(\omega)] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_\Sigma^d(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.71})$$

où le vecteur force généralisé  $\underline{\mathcal{F}}^a(\omega)$  est défini par l'équation (III.31) et où les vecteurs  $\underline{\mathcal{F}}^d(\omega)$  et  $\underline{\mathcal{F}}_\Sigma^d(\omega)$  sont définis par

$$\underline{\mathcal{F}}^d(\omega) = [\Phi_\Sigma^{d,c}]^T [\underline{\mathcal{S}}^a]^T \underline{\mathbf{F}}_i^a(\omega) + [\Phi_i^{d,c}]^T \underline{\mathbf{F}}_i^d(\omega) \quad , \quad (\text{III.72})$$

$$\underline{\mathcal{F}}_\Sigma^d(\omega) = [\Phi_\Sigma^{d,c}]^T (\underline{\mathbf{F}}_\Sigma^d(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_\Sigma^a(\omega)) \quad . \quad (\text{III.73})$$

La matrice  $[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}(\omega)]$  est la matrice réduite de rigidité dynamique de la structure est définie par

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}] + i\omega([\underline{\mathbf{C}}_{\text{red}}] + [\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}]) + [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}] \quad , \quad (\text{III.74})$$

où les matrices  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{C}}_{\text{red}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}]$  sont les matrices réduites de masse, de couplage gyroscopique, de dissipation et de rigidité à valeurs dans  $\mathbb{M}_{N(n^d+n^a)}^+(\mathbb{R})$ , dans  $\mathbb{M}_{N(n^d+n^a)}^{AS}(\mathbb{R})$ , dans  $\mathbb{M}_{N(n^d+n^a)}^+(\mathbb{R})$  et dans  $\mathbb{M}_{N(n^d+n^a)}^+(\mathbb{R})$ .

#### 5.3.2 Expressions des blocs des matrices réduites

La décomposition par blocs relative aux composantes du vecteur des coordonnées généralisées  $\underline{\mathbf{q}}^a$  et  $\underline{\mathbf{q}}^d$  permet d'écrire

$$[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{M}}^d] & [\underline{\mathcal{M}}_c] \\ [\underline{\mathcal{M}}_c]^T & [\underline{\mathcal{M}}^a] \end{bmatrix} \quad , \quad [\underline{\mathbf{C}}_{\text{red}}] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{C}}^d] & [\underline{\mathcal{C}}_c] \\ -[\underline{\mathcal{C}}_c]^T & [\underline{\mathcal{C}}^a] \end{bmatrix} \quad (\text{III.75})$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{D}}^d] & [\underline{\mathcal{D}}_c] \\ [\underline{\mathcal{D}}_c]^T & [\underline{\mathcal{D}}^a] \end{bmatrix} \quad , \quad [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{K}}^d] & [\underline{\mathcal{K}}_c] \\ [\underline{\mathcal{K}}_c]^T & [\underline{\mathcal{K}}^a] \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{III.76})$$

### CHAPITRE III. CONSTRUCTION DU MODÈLE MATRICIEL RÉDUIT MOYEN

Les blocs matriciels  $[\underline{\mathcal{M}}^a]$ ,  $[\underline{\mathcal{C}}^a]$ ,  $[\underline{\mathcal{D}}^a]$  et  $[\underline{\mathcal{K}}^a]$  sont définis par les équations (III.39), (III.41), (III.40) et (III.42), et les blocs  $[\underline{\mathcal{M}}^d]$ ,  $[\underline{\mathcal{C}}^d]$ ,  $[\underline{\mathcal{D}}^d]$ ,  $[\underline{\mathcal{K}}^d]$ ,  $[\underline{M}_c]$ ,  $[\underline{C}_c]$ ,  $[\underline{D}_c]$ ,  $[\underline{K}_c]$  sont tels que,

$$[\underline{\mathcal{M}}^d] = [\underline{\Phi}^{d,c}]^T [\underline{M}^{d,c}] [\underline{\Phi}^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.77})$$

$$[\underline{\mathcal{C}}^d] = [\underline{\Phi}^{d,c}]^T [\underline{C}^{d,c}] [\underline{\Phi}^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.78})$$

$$[\underline{\mathcal{D}}^d] = [\underline{\Phi}^{d,c}]^T [\underline{D}^{d,c}] [\underline{\Phi}^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.79})$$

$$[\underline{\mathcal{K}}^d] = [\underline{\Phi}^{d,c}]^T [\underline{K}^{d,c}] [\underline{\Phi}^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.80})$$

$$[\underline{M}_c] = [\underline{M}_c^a] [\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.81})$$

$$[\underline{C}_c] = [\underline{C}_c^a] [\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.82})$$

$$[\underline{D}_c] = [\underline{D}_c^a] [\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] \quad , \quad (\text{III.83})$$

$$[\underline{K}_c] = [0] \quad . \quad (\text{III.84})$$

Dans le cas général, les blocs matriciels  $[\underline{\mathcal{M}}^d]$ ,  $[\underline{\mathcal{K}}^d]$ ,  $[\underline{M}_c^a]$  et  $[\underline{K}_c^a]$  sont diagonaux compte tenu des propriétés d'orthogonalité (III.68), (III.69), (III.21) et (III.22). Toutefois, les blocs matriciels  $[\underline{\mathcal{D}}^d]$  et  $[\underline{\mathcal{D}}^a]$ ,  $([\underline{\mathcal{C}}^d]$  et  $[\underline{\mathcal{C}}^a])$  sont des matrices symétriques (antisymétriques) pleines.

#### 5.3.3 Modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée

En résumé, le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée s'écrit

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{A}}^d(\omega)] & [\underline{A}_c(\omega)] \\ [\underline{A}_d(\omega)] & [\underline{\mathcal{A}}^a(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_\Sigma^d(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.85})$$

où le bloc matriciel  $[\underline{\mathcal{A}}^a(\omega)]$  est défini par l'équation (III.64) et où les blocs matriciels  $[\underline{\mathcal{A}}^d(\omega)]$ ,  $[\underline{A}_c(\omega)]$  et  $[\underline{A}_d(\omega)]$  s'écrivent

$$[\underline{\mathcal{A}}^d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathcal{M}}^d] + i\omega ([\underline{\mathcal{C}}^d] + [\underline{\mathcal{D}}^d]) + [\underline{\mathcal{K}}] \quad , \quad (\text{III.86})$$

$$[\underline{A}_c(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_c] + i\omega ([\underline{C}_c] + [\underline{D}_c]) \quad , \quad (\text{III.87})$$

$$[\underline{A}_d(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_c]^T + i\omega (-[\underline{C}_c]^T + [\underline{D}_c]^T) \quad , \quad (\text{III.88})$$

Le vecteur des DDLs physique de la roue aubagée est reconstitué d'après les équations (III.59) et (III.70) par

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{H}] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad [\underline{H}] = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}_i^{d,c}] & [0] \\ [\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] & [0] \\ [\underline{S}^a][\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.89})$$

où  $[\underline{S}^a]$  et  $[\underline{\Phi}^a]$  sont les matrices définies par l'équation (III.60). Le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée ainsi construit est approprié pour modéliser les incertitudes de désaccordage par l'approche probabiliste non paramétrique. Il est particulièrement adapté aux modèles éléments finis de roues aubagées possédant un grand nombre de degrés de liberté, car le vecteur des coordonnées réduites ne comporte aucun DDLs physiques de la roue aubagée. Ce modèle sera utilisé au chapitre IX, traitant un modèle élément fini industriel de roue aubagée.

## 6. Modèles matriciels réduits moyen de la roue aubagée lorsque les forces de couplage gyroscopiques sont négligées

Dans cette recherche, nous ne prendrons pas en compte les effets du couplage gyroscopique. Il est à noter que cette approximation n'est plus valable lorsque l'on étudie la dynamique d'ensemble des rotors [61, 62].

Les matrices de rigidité dynamique de chaque sous-structure sont donc symétriques et l'on a

$$[\underline{A}_{\Sigma i}^d(\omega)] = [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T, \quad [\underline{A}_{\Sigma i}^a(\omega)] = [\underline{A}_{i\Sigma}^a(\omega)]^T, \quad (\text{III.90})$$

$$[\underline{A}_d^a(\omega)] = [\underline{A}_c^a(\omega)]^T, \quad [\underline{A}_d(\omega)] = [\underline{A}_c(\omega)]^T, \quad (\text{III.91})$$

### 6.1 Modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée obtenu par la méthode de Craig et Bampton

L'équation matricielle réduite de la dynamique s'écrit

$$\begin{bmatrix} [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)] & [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)] & [0] \\ [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{A}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] + [\underline{A}_{\Sigma}^a(\omega)] & [\underline{A}_c^a(\omega)]^T \\ [0] & [\underline{A}_c^a(\omega)] & [\underline{A}^a(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\Sigma}(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{F}}_{\Sigma}^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^a(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.92})$$

et la relation permettant d'exprimer les DDLs physiques de la roue aubagée en fonction des coordonnées réduites du modèle matriciel réduit moyen s'écrit

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\Sigma}(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{n_i^d}] & 0 & 0 \\ 0 & [I_{n_{\Sigma}}] & 0 \\ 0 & [\underline{S}^a] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\Sigma}(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.93})$$

## 6.2 Modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée obtenu par la méthode de Benfield et Hruda

L'équation matricielle réduite de la dynamique s'écrit

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{A}}^d(\omega)] & [\underline{\mathcal{A}}_c(\omega)] \\ [\underline{\mathcal{A}}_c(\omega)]^T & [\underline{\mathcal{A}}^a(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_{\Sigma}^d(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.94})$$

et la relation permettant d'exprimer les DDLs physiques de la roue aubagée en fonction des coordonnées réduites du modèle matriciel réduit moyen s'écrit

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\Sigma}(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_i^{d,c}] & [0] \\ [\Phi_{\Sigma}^{d,c}] & [0] \\ [\underline{\mathcal{S}}^a][\Phi_{\Sigma}^{d,c}] & [\Phi^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.95})$$



# Chapitre IV

## Modélisation non paramétrique des incertitudes aléatoires pour le désaccordage des roues aubagées

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons une structure de roue aubagée en présence d'incertitudes aléatoires de désaccordage. L'approche probabiliste non paramétrique est utilisée pour modéliser le désaccordage de la roue aubagée. A la différence des approches probabilistes paramétriques, la modélisation probabiliste non paramétrique tient compte des incertitudes de données et des incertitudes de modélisation. Elle consiste à introduire directement l'aléa à partir des matrices généralisées d'un modèle matriciel réduit moyen. Cette approche s'appuie sur l'utilisation d'un modèle probabiliste pour un ensemble de matrices aléatoires symétriques définies positives dont la distribution de probabilité est construite à partir du principe du maximum d'entropie [88, 56, 57] et de la seule information utilisable.

Il est à noter que les champs d'application de cette approche sont très larges puisque la théorie probabiliste non paramétrique peut être appliquée aux problèmes de réponses forcées linéaires sur une bande d'analyse fréquentielle du domaine basses fréquences [93, 99] ou moyennes fréquences [97] et aux problèmes de réponses transitoires linéaires [94] et non linéaires [95, 32] de structures en présence d'incertitudes. De plus, la robustesse d'une telle approche a été validée théoriquement [96, 98], et expérimentalement dans le cas de structures complexes en présence d'incertitudes non homogènes [21, 33, 34, 22].

Concernant la problématique du désaccordage des roues aubagées, les forces de couplage gyroscopique sont négligées. Les incertitudes aléatoires de désaccordage ne concernent que les aubes. Le niveau d'incertitudes est homogène sur l'aubage, et les incertitudes sont statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre. Il faut donc implémenter l'approche non paramétrique sur chaque aube. Comme une telle approche probabiliste nécessite de construire un modèle matriciel réduit moyen pour chaque sous-structure en présence d'incertitudes, l'utilisation de la sous-structuration dynamique pour construire le modèle matriciel réduit moyen de chaque aube, décrit par les équations (III.27) à (III.29), est parfaitement justifiée. Le modèle probabiliste est alors implémenté directement à partir des matrices issues de ce modèle matriciel réduit moyen. Il s'agit d'un modèle probabiliste pour les matrices symétriques définies positives, construit à partir du principe du maximum de l'entropie avec l'information disponible concernant le modèle matriciel réduit moyen de la sous-structure. Il est à noter que les modèles matriciels réduits moyens de la roue aubagée, proposés au chapitre III, sont compatibles avec l'approche probabiliste non paramétrique. Selon les cas d'études envisagés, ils sont utilisés pour implémenter le modèle probabiliste des matrices aléatoires soit sur la totalité des matrices réduites de chaque aube, soit sur leur partie dynamique. Dans un souci de clarté de présentation, on limitera la construction du modèle probabiliste au

#### *CHAPITRE IV. MODÉLISATION NON PARAMÉTRIQUE DU DÉSACCORDAGE DES AUBES*

cas d'incertitudes affectant la totalité des matrices du modèle matriciel réduit moyen de chaque aube. L'extension au cas d'incertitudes affectant la partie dynamique des matrices du modèle matriciel réduit moyen de chaque aube ne pose aucune difficulté.

Le paragraphe 2 concerne la construction du modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes pour chaque aube. Les équations aléatoires pour chaque aube sont présentées. La normalisation des matrices aléatoires est introduite et les propriétés des matrices aléatoires sont décrites. Dans le paragraphe 3, les principaux résultats concernant le modèle probabiliste pour les matrices aléatoires réelles symétriques définies positives sont rappelés [93, 94]. Enfin, le paragraphe 4 présente plusieurs modèles matriciels aléatoires pour la roue aubagée désaccordée, obtenus par la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes.

## 2. Construction du modèle probabiliste non paramétrique pour chaque sous-structure aube

### 2.1 Equations aléatoires pour chaque aube

Soit  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N - 1\}$ . On considère l'aube  $j$  de domaine  $\Omega^j$  en présence d'incertitudes aléatoires. Soit  $\mathbf{U}^j$  le vecteur aléatoire à valeur dans  $\mathbb{C}^{n^a}$  et constitué des  $n^a$  DDLs de l'aube. Le vecteur  $\mathbf{U}^j$  s'écrit :

$$\mathbf{U}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^j \\ \mathbf{U}_\Sigma^j \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mathbf{U}_i^j$  est le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_i^a}$  constitué des  $n_i^a$  DDLs internes de l'aube et où  $\mathbf{U}_\Sigma^j$  est le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_\Sigma^a}$  constitué des  $n_\Sigma^a$  DDLs d'interface de l'aube. Le vecteur aléatoire  $\mathbf{Q}^j$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{N^j}$  des coordonnées généralisées est introduit tel que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^j \\ \mathbf{U}_\Sigma^j \end{bmatrix} = [\underline{H}^j] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^j \\ \mathbf{U}_\Sigma^j \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.2})$$

où  $[\underline{H}^j]$  est la matrice de passage définie par l'équation (III.28). Les vecteurs  $\mathbf{Q}^j$  et  $\mathbf{U}_\Sigma^j$  vérifient l'équation aléatoire

$$[\mathbf{A}_{\text{red}}^j(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^j(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma^j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}^j(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}_\Sigma^j(\omega) + \mathbf{F}_{\text{coup}}^j(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.3})$$

où les vecteurs  $\underline{\mathcal{F}}^j$  et  $\underline{\mathcal{F}}_\Sigma^j$  sont les vecteurs définis par les équations (III.31) et (III.32). Le vecteur  $\mathbf{F}_{\text{coup}}^j$  est le vecteur aléatoire des forces de couplage sur l'interface de couplage  $\Sigma^j$ . La matrice aléatoire réduite de rigidité dynamique  $[\mathbf{A}_{\text{red}}(\omega)]$  est telle que

$$[\mathbf{A}_{\text{red}}^j(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}_{\text{red}}^j] + i\omega [\mathbf{D}_{\text{red}}^j] + [\mathbf{K}_{\text{red}}^j], \quad (\text{IV.4})$$

où  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  sont les matrices aléatoires de masse, de dissipation et de rigidité de l'aube  $j$ . Le modèle probabiliste non paramétrique est construit de telle sorte que les matrices aléatoires possèdent les propriétés suivantes

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]\} = [\underline{M}_{\text{red}}^j], \quad (\text{IV.5})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]\} = [\underline{D}_{\text{red}}^j], \quad (\text{IV.6})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]\} = [\underline{K}_{\text{red}}^j], \quad (\text{IV.7})$$

où  $\mathcal{E}$  est l'espérance mathématique.

De plus, comme aucune condition limite n'est appliquée pour l'aube à interface de couplage libre, le respect de la signature des matrices aléatoires par rapport à celle des matrices déterministes impose :

$$[\mathbf{M}_{\text{red}}^j] \text{ est à valeurs dans } \mathbb{M}_{m^a}^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{IV.8})$$

$$[\mathbf{D}_{\text{red}}^j] \text{ est à valeurs dans } \mathbb{M}_{m^a}^{+,0}(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{IV.9})$$

$$[\mathbf{K}_{\text{red}}^j] \text{ est à valeurs dans } \mathbb{M}_{m^a}^{+,0}(\mathbb{R}) \quad . \quad (\text{IV.10})$$

## 2.2 Normalisation des matrices aléatoires réduites

La normalisation des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  est construite de manière à ce que la valeur moyenne de chaque matrice aléatoire normalisée soit la matrice identité. Une telle construction requiert la factorisation des matrices  $[\underline{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{D}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{K}_{\text{red}}^j]$ . Puisque  $[\underline{M}_{\text{red}}^j]$  est une matrice de  $\mathbb{M}_{m^a}^+(\mathbb{R})$ , sa factorisation de Cholesky s'écrit :

$$[\underline{M}_{\text{red}}^j] = [\underline{L}_M^j]^T [\underline{L}_M^j] \quad , \quad (\text{IV.11})$$

où  $[\underline{L}_M^j]$  est une matrice de  $\mathbb{M}_{m^a}(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure.

Puisque  $[\underline{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\underline{K}_{\text{red}}^j]$  sont des matrices de  $\mathbb{M}_{m^a}^{+,0}(\mathbb{R})$  de même noyau, la factorisation est obtenue en résolvant le problème spectral de chaque matrice et s'écrit :

$$[\underline{D}_{\text{red}}^j] = [\underline{L}_D^j]^T [\underline{L}_D^j] \quad , \quad (\text{IV.12})$$

$$[\underline{K}_{\text{red}}^j] = [\underline{L}_K^j]^T [\underline{L}_K^j] \quad , \quad (\text{IV.13})$$

où  $[\underline{L}_D^j]$  et  $[\underline{L}_K^j]$  sont des matrices de  $\mathbb{M}_{\tilde{m}^a, m^a}(\mathbb{R})$ , où  $\tilde{m}^a$  est le rang des matrices  $[\underline{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\underline{K}_{\text{red}}^j]$ .

Les matrices aléatoires de masse, de dissipation et de rigidité s'écrivent alors

$$[\mathbf{M}_{\text{red}}^j] = [\underline{L}_M^j]^T [\mathbf{G}_M^j] [\underline{L}_M^j] \quad , \quad (\text{IV.14})$$

$$[\mathbf{D}_{\text{red}}^j] = [\underline{L}_D^j]^T [\mathbf{G}_D^j] [\underline{L}_D^j] \quad , \quad (\text{IV.15})$$

$$[\mathbf{K}_{\text{red}}^j] = [\underline{L}_K^j]^T [\mathbf{G}_K^j] [\underline{L}_K^j] \quad , \quad (\text{IV.16})$$

où  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$  et  $[\mathbf{G}_K^j]$  sont des matrices aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{M}_{m^a}^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{M}_{\tilde{m}^a}^+(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{M}_{\tilde{m}^a}^+(\mathbb{R})$  dont la valeur moyenne est égale à la matrice identité.

Comme les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  possèdent des blocs relatifs à des quantités de nature différente (DDLs physiques d'interface, coordonnées généralisées), le modèle probabiliste non paramétrique introduit des matrices aléatoires normalisées.

### 2.3 Information utilisable pour les matrices aléatoires normalisées

Le modèle probabiliste des matrices aléatoires normalisées est construit à partir de l'information utilisable définie par :

1. Les matrices  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$  et  $[\mathbf{G}_K^j]$  sont des matrices aléatoires à valeurs dans l'espace des matrices symétriques définies positives

$$[\mathbf{G}_M^j] \in \mathbb{M}_{m^a}^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{IV.17})$$

$$[\mathbf{G}_D^j] \in \mathbb{M}_{\tilde{m}^a}^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{IV.18})$$

$$[\mathbf{G}_K^j] \in \mathbb{M}_{\tilde{m}^a}^+(\mathbb{R}) \quad . \quad (\text{IV.19})$$

2. D'après les équations (IV.5) à (IV.7) et (IV.11) à (IV.16), les valeurs moyennes des matrices aléatoires  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$  et  $[\mathbf{G}_K^j]$  sont telles que

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}_M^j]\} = [I_{m^a}] \quad , \quad (\text{IV.20})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}_D^j]\} = [I_{\tilde{m}^a}] \quad , \quad (\text{IV.21})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}_K^j]\} = [I_{\tilde{m}^a}] \quad , \quad (\text{IV.22})$$

3. Comme les matrices aléatoires  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$  et  $[\mathbf{G}_K^j]$  sont définies positives, elles sont donc inversibles presque sûrement. Toutefois, cela n'implique pas l'existence des moment d'ordre 2 de leurs inverses. Les contraintes suivantes sont alors introduites

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_M^j]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (\text{IV.23})$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_D^j]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (\text{IV.24})$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_K^j]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad . \quad (\text{IV.25})$$

avec  $\|[A]\|_F = (\text{tr}([A][A]^T))^{1/2}$ . Cette troisième contrainte est indispensable pour que la solution du problème de dynamique aléatoire de la structure soit du second ordre [94].

Les paramètres de dispersion  $\delta_M^j$ ,  $\delta_D^j$  et  $\delta_K^j$  permettant de contrôler le niveau de dispersion des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$ , sont introduits et définis par

$$\delta_M^j = \left\{ \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_M^j] - [\underline{\mathbf{G}}_M^j]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_M^j]\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad , \quad (\text{IV.26})$$

$$\delta_D^j = \left\{ \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_D^j] - [\underline{\mathbf{G}}_D^j]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_D^j]\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad , \quad (\text{IV.27})$$

$$\delta_K^j = \left\{ \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_K^j] - [\underline{\mathbf{G}}_K^j]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_K^j]\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad , \quad (\text{IV.28})$$

et sont indépendants de la dimension de la matrice aléatoire. Le modèle probabiliste de ces matrices aléatoires est alors construit par le principe du maximum d'entropie en utilisant les contraintes définissant l'information utilisable.

### 3. Construction du modèle probabiliste pour les matrices aléatoires normalisées

Les principaux résultats concernant le modèle probabiliste pour les matrices aléatoires réelles symétriques définies positives, construit dans [93, 94] à partir du principe du maximum d'entropie et de la seule information utilisable, sont résumés dans ce paragraphe. Soit  $[\mathbf{G}]$  la matrice aléatoire réelle symétrique définie positive représentant  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$  ou  $[\mathbf{G}_K^j]$ , de dimension  $(n \times n)$  où  $n$  représente  $m^a$ ,  $\tilde{m}^a$  ou  $\tilde{m}^a$  et de paramètre de dispersion  $\delta$  représentant  $\delta_M^j$ ,  $\delta_D^j$  ou  $\delta_K^j$ . La distribution de probabilité de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  est notée

$$P_{[\mathbf{G}]} = p_{[\mathbf{G}]}([G]) \tilde{d}G \quad , \quad (\text{IV.29})$$

où  $p_{[\mathbf{G}]}([G])$  est la fonction de densité de probabilité définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \\ [G] &\mapsto p_{[\mathbf{G}]}([G]) \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

définie par rapport à la mesure  $\tilde{d}G$  sur  $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$  telle que

$$\tilde{d}G = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d[G]_{ij} \quad . \quad (\text{IV.31})$$

Les équations (IV.17-IV.25) constituant l'information utilisable se réécrivent pour  $[\mathbf{G}]$

$$[\mathbf{G}] \text{ est à valeurs dans } \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{IV.32})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}]\} = [\underline{G}] = [I_n] \quad , \quad (\text{IV.33})$$

$$\mathcal{E}\{||[\mathbf{G}]^{-1}||_F^2\} < \infty \quad . \quad (\text{IV.34})$$

#### 3.1 Définition du principe du maximum d'entropie

L'entropie de Shannon [88] est une mesure quantitative de l'incertitude associée à la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire. Le principe du maximum d'entropie établi par Jaynes [56, 57] permet de déterminer la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire pour laquelle un certain nombre de contraintes décrivant l'information utilisable sont imposées [60, 93]. Parmi toutes les distributions de probabilités qui satisfont ces contraintes, on choisit la densité de probabilité dont l'entropie de Shannon est la plus importante.

### 3.2 Modèle probabiliste de la matrice aléatoire $[G]$

Dans le cadre d'une matrice aléatoire  $[G]$  à valeurs dans  $M_n^+(\mathbb{R})$ , l'entropie de Shannon associée à la fonction de densité de probabilité  $p_{[G]}([G])$  est définie par

$$\mathcal{S}(P_{[G]}) = - \int_{M_n^+(\mathbb{R})} p_{[G]}([G]) \ln(p_{[G]}([G])) \tilde{d}G \quad . \quad (\text{IV.35})$$

Les contraintes satisfaites par la densité de probabilité  $p_{[G]}([G])$  sont successivement décrites afin de construire le modèle probabiliste de la matrice aléatoire  $[G]$ .

La fonction de densité de probabilité vérifie la condition de normalisation

$$\int_{M_n^+(\mathbb{R})} p_{[G]}([G]) \tilde{d}G = 1 \quad , \quad (\text{IV.36})$$

D'après l'équation (IV.33), la fonction de densité de probabilité est telle que

$$\int_{M_n^+(\mathbb{R})} [G] p_{[G]}([G]) \tilde{d}G = [I_n] \quad , \quad (\text{IV.37})$$

Il peut être montré que si la fonction de densité de probabilité est telle que

$$\int_{M_n^+(\mathbb{R})} \ln(\det[G]) p_{[G]}([G]) \tilde{d}G = \nu \quad , \quad |\nu| < \infty \quad , \quad (\text{IV.38})$$

alors la contrainte définie par l'équation (IV.34) est satisfaite.

Soit alors  $\mathcal{G}$  l'espace des fonctions  $[G] \mapsto p_{[G]}([G])$  définies sur  $M_n^+(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et satisfaisant les équations (IV.36-IV.38). Le principe du maximum d'entropie appliqué à la fonction de densité de probabilité  $p_{[G]}([G])$  de la matrice aléatoire  $[G]$  à valeurs dans  $M_n^+(\mathbb{R})$  et tel que les équations (IV.36-IV.38) soient satisfaites s'écrit

$$\text{Trouver } p_{[G]}([G]) \text{ dans } \mathcal{G} \text{ tel que } \mathcal{S}(P_{[G]}) = \sup_{p_{[X]}([X]) \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(P_{[X]}) \quad . \quad (\text{IV.39})$$

### 3.3 Expression de la densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes défini par l'équation (IV.39). Il est alors montré [93, 94] que la fonction de densité de probabilité  $p_{[\mathbf{G}]}([G])$  par rapport à l'élément de volume  $\tilde{d}G$  défini par l'équation (IV.31) s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G]) \times C_G \times (\det([G]))^{(n+1)\frac{(1-\delta^2)}{2\delta^2}} \times e^{-\frac{(n+1)}{2\delta^2}\text{tr}([G])} \quad , \quad (\text{IV.40})$$

où  $\det$  est le déterminant,  $\text{tr}$  la trace. La fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G])$  est égale à 1 si  $[G]$  est dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  et est égale à 0 sinon. La constante  $C_G$  est la constante positive de normalisation telle que

$$C_G = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{n(n+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad , \quad (\text{IV.41})$$

avec  $\Gamma(z)$  la fonction gamma définie pour tout  $z > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad . \quad (\text{IV.42})$$

L'équation (IV.40) montre que les éléments de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  sont des variables aléatoires dépendantes. Cette équation montre également que la fonction de densité de probabilité de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  de dimension  $n$  est paramétrée par un unique scalaire, le paramètre de dispersion  $\delta$ .

### 3.4 Propriétés de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$

Il peut être montré [94] que le paramètre de dispersion  $\delta$  défini par

$$\delta = \left\{ \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}] - [\underline{G}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}]\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad , \quad (\text{IV.43})$$

doit être choisi tel que

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}} \quad , \quad (\text{IV.44})$$

et est indépendant de la dimension  $n$ .

Par ailleurs, le tenseur de covariance  $C_{jk,j'k'}^G = \mathcal{E}\{([\mathbf{G}]_{jk} - [\underline{G}]_{jk})([\mathbf{G}]_{j'k'} - [\underline{G}]_{j'k'})\}$  s'écrit

$$C_{jk,j'k'}^G = \frac{\delta^2}{n+1} \{ \delta_{j'k} \delta_{jk'} + \delta_{jj'} \delta_{kk'} \} \quad . \quad (\text{IV.45})$$



La variance de la variable aléatoire  $[\mathbf{G}]_{jk}$  est alors donnée par

$$V_{jk}^G = \frac{\delta^2}{n+1}(1 + \delta_{jk}) \quad . \quad (\text{IV.46})$$

### 3.5 Représentation algébrique de la matrices aléatoire $[\mathbf{G}]$

La représentation algébrique suivante de la matrice aléatoire réelle symétrique définie positive  $[\mathbf{G}]$  permet de définir une procédure de simulation numérique de Monte Carlo. La matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  [94] s'écrit

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}_G]^T [\mathbf{L}_G] \quad , \quad (\text{IV.47})$$

où  $[\mathbf{L}_G]$  est la matrice aléatoire à valeurs dans l'espace des matrices  $(n \times n)$  réelles triangulaires supérieures construite par une factorisation de Cholesky et telle que

- (1) les variables aléatoires  $\{[\mathbf{L}_G]_{jj'}, j \leq j'\}$  sont indépendantes ;
- (2) pour  $j < j'$ , la variable aléatoire  $[\mathbf{L}_G]_{jj'}$  à valeur réelle s'écrit

$$[\mathbf{L}_G]_{jj'} = \sigma_n U_{jj'} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \delta(n+1)^{-1/2} \quad , \quad (\text{IV.48})$$

où  $U_{jj'}$  est une variable aléatoire Gaussienne à valeur réelle centrée et de variance unité ;

- (3) pour  $j = j'$ , la variable aléatoire  $[\mathbf{L}_G]_{jj}$  à valeur réelle positive s'écrit

$$[\mathbf{L}_G]_{jj} = \sigma_n \sqrt{2V_j} \quad , \quad (\text{IV.49})$$

où  $\sigma_n$  est défini par l'équation (IV.48) et où  $V_j$  est une variable aléatoire Gamma à valeur positive dont la fonction de densité de probabilité  $p_{V_j}(v)$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dv$  sur  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma(\alpha_{n,j})} v^{\alpha_{n,j}-1} e^{-v} \quad , \quad \alpha_{n,j} = \frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2} \quad . \quad (\text{IV.50})$$

La représentation algébrique peut être réécrite en fonction d'un germe Gaussien. En effet, la variable aléatoire  $V_j$  peut s'écrire comme une fonction d'une variable aléatoire Gaussienne centrée et de variance unité et notée  $U_{jj}$

$$V_j = \mathcal{G}_{\alpha_{n,j}}^{-1} \circ \mathcal{N}_{0,1}(U_{jj}) \quad , \quad (\text{IV.51})$$

où  $\mathcal{G}_{\alpha_{n,j}}$  est la fonction de répartition de la loi Gamma de paramètre  $\alpha_{n,j}$  et où  $\mathcal{N}_{0,1}$  est la fonction de répartition de la loi Gaussienne centrée de variance unité. Soit alors  $\mathbf{X}$  le vecteur aléatoire à valeurs dans

$\mathbb{R}^\nu$  défini par  $\mathbf{X} = \{U_{jj'}\}_{1 \leq j \leq j' \leq n}$  avec  $\nu = n(n+1)/2$ . La matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  s'écrit comme une fonction de la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  tel que

$$[\mathbf{G}] = [g(\mathbf{X})] \quad , \quad (\text{IV.52})$$

où les composantes  $[g(\mathbf{X})]_{kl}$  sont telles que

$$[g(\mathbf{X})]_{kl} = \sum_{j \leq k; j \leq l} l_{jk}(\mathbf{X}) l_{jl}(\mathbf{X}) \quad , \quad (\text{IV.53})$$

où  $l_{jk}(\mathbf{X})$  est définie pour  $j \leq k$  par

$$l_{jk}(\mathbf{X}) = \sigma_n (U_{jk} (1 - \delta_{jk}) + \sqrt{2 \mathcal{G}_{\alpha_n, j}^{-1} \circ \mathcal{N}_{0,1}(U_{jk})} \delta_{jk}) \quad . \quad (\text{IV.54})$$

### 3.6 Cas d'un ensemble de matrices aléatoires

Soient  $[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]$ ,  $\nu$  matrices aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ . L'information utilisable pour chacune de ces matrices est définie par les équations (IV.32) à (IV.34). En appliquant le principe du maximum d'entropie sur l'ensemble de ces matrices, on peut montrer [93] que la distribution conjointe des matrices aléatoires

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]\} &\mapsto p_{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]}([\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]) \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

définie par rapport à la mesure  $\tilde{d}G_1 \times \dots \times \tilde{d}G_\nu$  sur  $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$  s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]}([\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]) = \prod_{j=1}^{\nu} p_{[\mathbf{G}^j]}([\mathbf{G}^j]) \quad , \quad (\text{IV.56})$$

ce qui signifie que les matrices  $[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]$  sont des variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble.

## 4. Modèles matriciels réduits aléatoires de la roue aubagée obtenus par le modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes de désaccordage.

### 4.1 Implémentation du modèle probabiliste non paramétrique

Concernant la problématique du désaccordage, l'implémentation de l'approche probabiliste non paramétrique s'effectue à partir du modèle matriciel réduit moyen de chaque aube. D'après le paragraphe 3.6, les matrices aléatoires normalisées  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$  et  $[\mathbf{G}_K^j]$ , pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , dont l'information utilisable est définie par les équations (IV.17) à (IV.25), sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes dans leur ensemble. Ces matrices aléatoires sont construites en utilisant les résultats développés dans le paragraphe 3. Les paramètres de dispersion  $\delta_M^j$ ,  $\delta_D^j$ ,  $\delta_K^j$  des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$ , définis par les expressions (IV.26) à (IV.28), sont choisis de manière à vérifier la condition (IV.44). Deux cas sont envisagés pour implémenter le modèle probabiliste non paramétrique à partir des matrices issues du modèle matriciel réduit moyen de chaque aube. En effet, celui-ci peut être implémenté soit

(1) sur la totalité des degrés de liberté associés aux matrices  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j]$ . Dans ce cas, en utilisant la décomposition bloc des équations (III.37) et (III.38), les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  s'écrivent :

$$[\mathbf{M}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{M}^j] & [\mathbf{M}_c^j] \\ [\mathbf{M}_c^j]^T & [\mathbf{M}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{D}^j] & [\mathbf{D}_c^j] \\ [\mathbf{D}_c^j]^T & [\mathbf{D}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}^j] & [\mathbf{K}_c^j] \\ [\mathbf{K}_c^j]^T & [\mathbf{K}_\Sigma^j] \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.57})$$

Les blocs matriciels  $[\mathcal{A}^j(\omega)]$ ,  $[\mathbf{A}_c^j(\omega)]$  et  $[\mathbf{A}_\Sigma^j(\omega)]$  sont alors définis par

$$[\mathcal{A}^j(\omega)] = -\omega^2 [\mathcal{M}^j] + i\omega [\mathcal{D}^j] + [\mathcal{K}^j], \quad (\text{IV.58})$$

$$[\mathbf{A}_c^j(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}_c^j] + i\omega [\mathbf{D}_c^j] + [\mathbf{K}_c^j], \quad (\text{IV.59})$$

$$[\mathbf{A}_\Sigma^j(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}_\Sigma^j] + i\omega [\mathbf{D}_\Sigma^j] + [\mathbf{K}_\Sigma^j]. \quad (\text{IV.60})$$

(2) sur la partie dynamique des matrices  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j]$ . Dans ce cas, seuls les blocs matriciels relatifs aux matrices généralisées de l'aube à interface de couplage fixe sont aléatoires. Dans un souci de clarté dans la présentation, les matrices aléatoires correspondantes sont notées  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$ , et s'écrivent :

$$[\mathbf{M}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{M}^j] & [\underline{\mathbf{M}}_c^j] \\ [\underline{\mathbf{M}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{M}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{D}^j] & [\underline{\mathbf{D}}_c^j] \\ [\underline{\mathbf{D}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{D}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}^j] & [\underline{\mathbf{K}}_c^j] \\ [\underline{\mathbf{K}}_c^j]^T & [\underline{\mathbf{K}}_\Sigma^j] \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.61})$$

La démarche pour construire les matrices aléatoires  $[\mathcal{M}^j]$ ,  $[\mathcal{D}^j]$  et  $[\mathcal{K}^j]$  est identique à celle des paragraphes 2.2 et 2.3 de ce chapitre et n'est pas présentée dans cette recherche.

## 4.2 Equations aléatoires de la roue aubagée

L'équilibre des forces aléatoires de couplage sur l'interface de couplage  $\Sigma$  s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{coup}}^a + \mathbf{F}_{\text{coup}}^d = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{IV.62})$$

avec  $\mathbf{F}_{\text{coup}}^a = (\mathbf{F}_{\text{coup}}^0, \dots, \mathbf{F}_{\text{coup}}^{N-1})$ .

La continuité des déplacements aléatoires sur l'interface de couplage  $\Sigma$  s'écrit

$$\mathbf{U}_{\Sigma}^a = \mathbf{U}_{\Sigma}^d = \mathbf{U}_{\Sigma} \quad , \quad (\text{IV.63})$$

où  $\mathbf{U}_{\Sigma}^a = (\mathbf{U}_{\Sigma}^0, \dots, \mathbf{U}_{\Sigma}^{N-1})$  et où  $\mathbf{U}_{\Sigma}^d$  est le vecteur aléatoire des  $\mathbb{C}^{n_{\Sigma}}$  DDLs du disque. En utilisant les modèles matriciels réduits moyens de la roue aubagée, présentés au paragraphe 6 du chapitre III, on propose trois modèles matriciels réduits aléatoires.

### 4.2.1 Premier modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée

#### Étapes de construction

On résume les étapes de construction de ce modèle matriciel réduit aléatoire.

##### Étape 1

On construit le modèle matriciel réduit moyen pour l'aube 0. On déduit le modèle matriciel réduit moyen de chaque aube car les aubes de la roue aubagée à symétrie cyclique sont identiques.

##### Étape 2

On construit le modèle matriciel réduit aléatoire pour chaque aube. Pour cela, les incertitudes aléatoires sont implémentées sur la totalité des DDLs des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  (voir équation (IV.57)).

##### Étape 3

On assemble les matrices du modèle matriciel réduit aléatoire de chaque aube avec les matrices élément fini du disque à interface de couplage libre en utilisant les conditions (IV.62) et (IV.63). Le modèle matriciel aléatoire de la roue aubagée ainsi obtenu s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^d(\omega) \\ \mathbf{U}_{\Sigma}(\omega) \\ \mathbf{U}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{n_i^d}] & 0 & 0 \\ 0 & [I_{n_{\Sigma}}] & 0 \\ 0 & [\underline{S}^a] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^d(\omega) \\ \mathbf{U}_{\Sigma}(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{IV.64})$$

où  $\mathbf{U}_i^d$  est le vecteur aléatoire des  $n_i^d$  degrés de libertés du disque et où  $\mathbf{Q}^a = (\mathbf{Q}^0, \dots, \mathbf{Q}^{N-1})$ . On a alors :

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{A}}_{ii}^d(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)] & [0] \\ [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] + [\mathbf{A}_{\Sigma}^a(\omega)] & [\mathbf{A}_c^a(\omega)]^T \\ [0] & [\mathbf{A}_c^a(\omega)] & [\mathcal{A}^a(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^d(\omega) \\ \mathbf{U}_{\Sigma}(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^d(\omega) \\ \mathbf{F}_{\Sigma}^d(\omega) + \mathcal{F}_{\Sigma}^a(\omega) \\ \mathcal{F}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.65})$$

où les blocs matriciels  $[\mathcal{A}^a(\omega)]$ ,  $[\mathbf{A}_c^a(\omega)]$  et  $[\mathbf{A}_{\Sigma}^a(\omega)]$  sont définis par  $[\mathcal{A}^a(\omega)]^{jk} = [\mathcal{A}^j(\omega)] \delta_{jk}$ ,  $[\mathbf{A}_c^a(\omega)]^{jk} = [\mathbf{A}_c^j(\omega)] \delta_{jk}$ ,  $[\mathbf{A}_{\Sigma}^a(\omega)]^{jk} = [\mathbf{A}_{\Sigma}^j(\omega)] \delta_{jk}$ .

#### Etape 4

Pour améliorer les temps de calculs, on construit un modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée par projection modale. Notant  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}]$  les matrices de masse et de raideur issues du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée donné par les équations (III.92) et (III.93), on considère le problème généralisé aux valeurs propres

$$\left( [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}] - \lambda_{\alpha} [\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}] \right) \Psi_{\alpha} = 0, \quad (\text{IV.66})$$

et les vecteurs propres vérifient les propriétés d'orthogonalité

$$\Psi_{\beta}^T [\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}] \Psi_{\alpha} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \Psi_{\beta}^T [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}] \Psi_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.67})$$

Les vecteurs propres associés aux  $n$  plus petites valeurs propres  $\lambda_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$  sont collectées dans la matrice modale  $[\underline{\Psi}]$  de dimension  $((N n^a + n^d) \times n)$ . Il est à noter que les matrices  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}]$  sont circulantes par blocs à une permutation indicelle des DDLs près. Par conséquent, le solveur cyclique pour le problème généralisé aux valeurs propres explicité dans le paragraphe 5.4 du chapitre II est utilisé.

#### Modèle matriciel réduit aléatoire

Le modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^d(\omega) \\ \mathbf{U}_{\Sigma}(\omega) \\ \mathbf{U}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{n_i^d}] & 0 & 0 \\ 0 & [I_{n_{\Sigma}}] & 0 \\ 0 & [\underline{\mathcal{L}}^a] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} [\underline{\Psi}] \mathbf{Q}(\omega), \quad (\text{IV.68})$$

où  $\mathbf{Q}(\omega)$  est le vecteur des coordonnées généralisées à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ , solution de l'équation matricielle aléatoire de la dynamique

$$[\underline{\Psi}]^T \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{A}}_{ii}^d(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)] & [0] \\ [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] + [\mathbf{A}_{\Sigma}^a(\omega)] & [\mathbf{A}_c^a(\omega)]^T \\ [0] & [\mathbf{A}_c^a(\omega)] & [\mathcal{A}^a(\omega)] \end{bmatrix} [\underline{\Psi}] \mathbf{Q}(\omega) = [\underline{\Psi}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^d(\omega) \\ \mathbf{F}_{\Sigma}^d(\omega) + \mathcal{F}_{\Sigma}^a(\omega) \\ \mathcal{F}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.69})$$

Ce modèle matriciel réduit aléatoire sera utilisé pour l'exemple numérique présenté aux chapitres VII et VIII.

#### 4.2.2 Deuxième modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée

##### Etapas de construction

Le principe de construction de ce modèle matriciel réduit aléatoire est identique au précédent. L'étape 2 concernant l'implémentation du modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes de désaccordage est remplacé par l'étape 2'.

##### Etape 2'

Cette étape consiste à implémenter les incertitudes aléatoires sur la partie dynamique des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\mathbf{D}_{\text{red}}^j]$  et  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  (voir équation (IV.61)).

##### Modèle matriciel réduit aléatoire

Le modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^d(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma(\omega) \\ \mathbf{U}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{n_i^d}] & 0 & 0 \\ 0 & [I_{n_\Sigma}] & 0 \\ 0 & [\underline{S}^a] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} [\underline{\Psi}] \mathbf{Q}(\omega) \quad . \quad (\text{IV.70})$$

où le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées  $\mathbf{Q}(\omega)$  est solution de l'équation matricielle aléatoire de la dynamique

$$[\underline{\Psi}]^T \begin{bmatrix} [\underline{A}_{i_i}^d(\omega)] & [\underline{A}_{i_\Sigma}^d(\omega)] & [0] \\ [\underline{A}_{i_\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{A}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] + [\underline{A}_{\Sigma}^a(\omega)] & [\underline{A}_c^a(\omega)]^T \\ [0] & [\underline{A}_c^a(\omega)] & [\underline{A}^a(\omega)] \end{bmatrix} [\underline{\Psi}] \mathbf{Q}(\omega) = [\underline{\Psi}]^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^d(\omega) \\ \underline{\mathbf{F}}_\Sigma^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_\Sigma^a(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.71})$$

Les résultats comparant ce modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée avec le modèle précédent, pour un exemple numérique simple, seront présentés dans l'annexe C.

#### 4.2.3 Troisième modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée

##### Etapas de construction

La construction de ce modèle matriciel réduit aléatoire utilise les étapes 1, 2' et 3. L'étape 4 est remplacée par l'étape 4'.

##### Etape 4'

Cette étape nécessite le calcul de la matrice modale de disque  $[\underline{\Phi}^{d,c}]$  de dimension  $(n^d \times Nn^d)$ , solution

du problème généralisé aux valeurs propres (III.66), et dont le calcul est effectué en utilisant le solveur cyclique présenté au paragraphe 5.4 du chapitre II. Le vecteur aléatoire des DDLs du disque est ensuite projeté sur cette base modale.

### Modèle matriciel réduit aléatoire

On obtient un modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée de dimension  $(N(n^a + n^d) \times N(n^a + n^d))$ , dont les inconnues sont les coordonnées réduites aléatoires  $\mathbf{Q}^d$  du disque et les coordonnées généralisées aléatoires  $\mathbf{Q}^a$  des aubes. Ce modèle matriciel réduit aléatoire s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^d(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma(\omega) \\ \mathbf{U}_i^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}_i^{d,c}] & [0] \\ [\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] & [0] \\ [\underline{S}^a][\underline{\Phi}_\Sigma^{d,c}] & [\underline{\Phi}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^d(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.72})$$

où les vecteurs aléatoires  $\mathbf{Q}^d(\omega)$  et  $\mathbf{Q}^a(\omega)$  sont solutions de l'équation matricielle aléatoire de la dynamique

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{A}}^d(\omega)] & [\underline{\mathcal{A}}_c(\omega)] \\ [\underline{\mathcal{A}}_c(\omega)]^T & [\underline{\mathcal{A}}^a(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^d(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}^d(\omega) + \underline{\mathcal{F}}_\Sigma^d(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}^a(\omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.73})$$

Ce modèle matriciel réduit aléatoire sera utilisé pour le modèle complexe de la roue aubagée présenté au chapitre IX.





# Chapitre V

## Méthodologie de résolution des équations aléatoires pour l'analyse du désaccordage des roues aubagées

### 1. Introduction

L'objectif de ce chapitre concerne la résolution du système d'équations aléatoires présenté au chapitre IV pour analyser la réponse forcée désaccordée de la roue aubagée.

Le paragraphe 2 est consacré au choix des observations aléatoires. Celles-ci doivent pouvoir rendre compte du phénomène de localisation des déformées dynamiques et du phénomène d'amplification généralement observé sur la réponse forcée de quelques aubes de roues aubagées. Les observations choisies sont des facteurs énergétiques aléatoires d'amplification parce qu'ils permettent de quantifier et comparer les conséquences du désaccordage indépendamment du design de la roue aubagée étudiée. Le paragraphe 3 présente le système d'équations aléatoires. Dans le paragraphe 4, une analyse de convergence du système stochastique vis à vis des paramètres de réduction modale et vis à vis du nombre de simulation de Monte Carlo est proposée. Le paragraphe 5 présente la construction des estimateurs des grandeurs probabilistes étudiées.

## 2. Définition des observations aléatoires

### 2.1 Quantités énergétiques déterministes

Soit  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N - 1\}$ . Les facteurs énergétiques d'amplification dynamique sont successivement définis par rapport à l'énergie du signal ou par rapport à l'énergie élastique de l'aube  $j$ . L'espace des déformées de corps rigides noté  $\mathfrak{R}$  est défini par

$$\mathfrak{R} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n^\alpha}, [\underline{K}^j] \mathbf{u} = 0 \} \quad , \quad (\text{V.1})$$

où  $[\underline{K}^j]$  est la matrice de raideur du modèle élément fini moyen de l'aube  $j$  à interface de couplage libre. L'espace des déformées élastiques  $\mathfrak{E}$  est alors introduit tel que

$$\mathfrak{E} = \mathbb{C}^{n^\alpha} \setminus \mathfrak{R} \quad . \quad (\text{V.2})$$

#### 2.1.1 Définition de l'énergie du signal pour l'aube $j$

L'espace  $\mathfrak{E}$  est muni du produit scalaire hermitien  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathfrak{E}}$ , dont la norme associée s'écrit

$$\|\mathbf{u}\|_{\text{sig}} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathfrak{E}}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n^\alpha} |u_k|^2} \quad . \quad (\text{V.3})$$

L'énergie du signal de l'aube  $j$ , à une fréquence angulaire  $\omega$  fixée de  $\mathbb{B}$ , est notée  $e_{\text{sig}}^j(\omega)$  et s'écrit

$$e_{\text{sig}}^j(\omega) = \frac{1}{2} \langle \underline{\mathbf{u}}^j(\omega), \underline{\mathbf{u}}^j(\omega) \rangle_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{sig}}^2 \quad . \quad (\text{V.4})$$

#### 2.1.2 Définition de l'énergie élastique pour l'aube $j$

L'espace  $\mathfrak{E}$  est muni du produit scalaire hermitien

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \langle [\underline{K}^j] \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathfrak{E}} \quad , \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

dont la norme associée s'écrit  $\|\mathbf{u}\|_{\text{elas}} = \sqrt{\langle [\underline{K}^j] \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathfrak{E}}}$ .

L'énergie élastique de l'aube  $j$  à une fréquence angulaire  $\omega$  fixée de  $\mathbb{B}$  est notée  $e_{\text{elas}}^j(\omega)$  et s'écrit

$$e_{\text{elas}}^j(\omega) = \frac{1}{2} \langle [\underline{K}^j] \underline{\mathbf{u}}^j(\omega), \underline{\mathbf{u}}^j(\omega) \rangle_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{elas}}^2 \quad . \quad (\text{V.6})$$

### 2.1.3 Définition de l'énergie de référence pour le modèle matriciel moyen de la roue aubagée

#### Amplitude de réponse forcée sur les aubes pour une excitation cyclique

La réponse forcée  $\underline{\mathbf{u}}(\omega)$  est la solution de référence du système moyen (roue aubagée accordée). Elle est calculée en utilisant le solveur cyclique pour le problème d'élastodynamique des structures à symétrie cyclique présenté au paragraphe 5.3 du chapitre II. Avec l'hypothèse des champs de forces surfaciques et volumiques, donnée par les équations (II.39) et (II.40), on définit le vecteur des forces d'excitations par

$$\underline{\mathbf{F}}(\omega) = \mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega) \underline{\mathbf{g}} \quad , \quad (\text{V.7})$$

où  $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega)$  est la fonction indicatrice de  $\omega$  sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$  telle que  $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega) = 1$  si  $\omega$  dans  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega) = 0$  sinon. Soient  $ddl_{exc,0}, \dots, ddl_{exc,N-1}$  les DDLs excités de la structure dont la répartition spatiale est à géométrie cyclique.

Le vecteur  $\underline{\mathbf{g}} = (g_1, \dots, g_{n_{ddl}})$  est tel que

$$g_k = 0, \text{ pour tout } k \text{ différent de } ddl_{exc,0}, \dots, ddl_{exc,N-1} \quad , \quad (\text{V.8})$$

$$g_{ddl_{exc,j}} = e^{\frac{2i\pi nj}{N}}, \text{ pour tout } j \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \quad , \quad (\text{V.9})$$

avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Il est à noter que le choix de  $n$  conditionne le type de modes excités. Ainsi, seuls les modes de la roue aubagée possédant  $n$  diamètres nodaux seront excités.

En appliquant l'équation (II.92) au vecteur des forces d'excitations défini ci-dessus, on obtient, pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, \bar{n}\}$ , avec  $\bar{n} = n_{ddl}/N$ ,

$$[\widehat{\underline{\mathbf{F}}}_n(\omega)]_j = \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\omega)} \delta_{j,ddl_{exc,0}} \quad . \quad (\text{V.10})$$

et l'on a

$$\widehat{\underline{\mathbf{F}}}_{n'}(\omega) = \widehat{\underline{\mathbf{F}}}_n(\omega) \delta_{nn'} \quad , \quad \text{pour tout } n' \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \quad , \quad (\text{V.11})$$

On déduit des équations (II.81) et (II.94) que la réponse forcée du modèle moyen de la roue aubagée diffère d'une aube à l'autre d'un déphasage constant près. Par conséquent, on a

$$\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{sig}} = \|\underline{\mathbf{u}}^k(\omega)\|_{\text{sig}} \quad , \quad \forall j \neq k \quad , \quad j \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \quad , \quad (\text{V.12})$$

$$\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{elas}} = \|\underline{\mathbf{u}}^k(\omega)\|_{\text{elas}} \quad , \quad \forall j \neq k \quad , \quad j \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \quad . \quad (\text{V.13})$$

## Energie de référence

Les quantités énergétiques  $\underline{e}_{\text{sig}, \infty}$  et  $\underline{e}_{\text{elas}, \infty}$  sont alors introduites telles que

$$\underline{e}_{\text{sig}, \infty} = \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{\text{sig}}^2, \quad \|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{\text{sig}} = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{sig}}, \quad (\text{V.14})$$

$$\underline{e}_{\text{elas}, \infty} = \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{\text{elas}}^2, \quad \|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{\text{elas}} = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{elas}}. \quad (\text{V.15})$$

Ces quantités définissent l'énergie maximale sur l'ensemble des aubes et sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ . Elles constituent les énergies de références par rapport auxquelles les facteurs aléatoires d'amplification dynamique sont définis.

## 2.2 Quantités énergétiques aléatoires

### 2.2.1 Energie du signal aléatoire pour l'aube $j$ .

L'énergie du signal aléatoire pour l'aube  $j$  à une fréquence angulaire  $\omega$  fixée de  $\mathbb{B}$  s'écrit

$$E_{\text{sig}}^j(\omega) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{U}^j(\omega), \mathbf{U}^j(\omega) \rangle_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{U}^j(\omega)\|_{\text{sig}}^2. \quad (\text{V.16})$$

### 2.2.2 Energie élastique aléatoire pour l'aube $j$ .

L'énergie élastique aléatoire pour l'aube  $j$  à une fréquence angulaire  $\omega$  fixée de  $\mathbb{B}$  s'écrit

$$E_{\text{elas}}^j(\omega) = \frac{1}{2} \langle [\underline{\mathbf{K}}^j] \mathbf{U}^j(\omega), \mathbf{U}^j(\omega) \rangle_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{U}^j(\omega)\|_{\text{elas}}^2. \quad (\text{V.17})$$

En utilisant les équations (III.27), (III.28) et (III.36), l'énergie élastique aléatoire  $E_{\text{elas}}^j(\omega)$  se réécrit en fonction des coordonnées réduites  $(\mathbf{Q}^j, \mathbf{U}_{\Sigma}^j)$ ,

$$E_{\text{elas}}^j(\omega) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{Q}^j(\omega)^* [\underline{\mathbf{K}}^j] \mathbf{Q}^j(\omega) + \mathbf{U}_{\Sigma}^j(\omega)^* [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma}^j] \mathbf{U}_{\Sigma}^j(\omega) \right), \quad (\text{V.18})$$

où  $[\underline{\mathbf{K}}^j]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma}^j]$  sont les blocs matriciels définis dans l'équation (III.38) et où  $\mathbf{Q}^j(\omega)^*$  et  $\mathbf{U}_{\Sigma}^j(\omega)^*$  sont les transconjugués des vecteurs  $\mathbf{Q}^j(\omega)$  et  $\mathbf{U}_{\Sigma}^j(\omega)$ .

En utilisant l'équation (V.18) avec la relation (IV.72), l'énergie élastique aléatoire  $E_{\text{elas}}^j(\omega)$  se réécrit en fonction des coordonnées réduites  $(\mathbf{Q}^j, \mathbf{Q}^d)$ ,

$$E_{\text{elas}}^j(\omega) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{Q}^j(\omega)^* [\underline{\mathbf{K}}^j] \mathbf{Q}^j(\omega) + \mathbf{Q}^d(\omega)^* [\underline{\Phi}_{\Sigma^j}^{d,c}]^T [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma}^j] [\underline{\Phi}_{\Sigma^j}^{d,c}] \mathbf{Q}^d(\omega) \right), \quad (\text{V.19})$$

où  $[\underline{\Phi}_{\Sigma^j}^{d,c}]$  est la restriction de la matrice modale  $[\underline{\Phi}^{d,c}]$  selon les DDLs sur l'interface de couplage  $\Sigma^j$ .

## 2.3 Définition des facteurs aléatoires d'amplification dynamique

### 2.3.1 Facteurs aléatoires d'amplification dynamique définis par rapport à l'énergie du signal

Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , le facteur aléatoire d'amplification dynamique de l'aube  $j$  est défini par

$$B_{\text{sig}}^j(\omega) = \sqrt{\frac{E_{\text{sig}}^j(\omega)}{\underline{\mathcal{E}}_{\text{sig},\infty}}} , \quad (\text{V.20})$$

où  $\underline{\mathcal{E}}_{\text{sig},\infty}$  et  $E_{\text{sig}}^j(\omega)$  sont définis par les équations (V.14) et (V.16).

Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , le facteur aléatoire d'amplification dynamique sur l'ensemble des aubes est défini par

$$B_{\text{sig}}(\omega) = \sqrt{\frac{E_{\text{sig}}(\omega)}{\underline{\mathcal{E}}_{\text{sig},\infty}}} , \quad E_{\text{sig}}(\omega) = \sup_j E_{\text{sig}}^j(\omega) . \quad (\text{V.21})$$

Le facteur aléatoire d'amplification dynamique sur l'ensemble des aubes et sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$  est alors défini par

$$B_{\text{sig},\infty} = \sqrt{\frac{E_{\text{sig},\infty}}{\underline{\mathcal{E}}_{\text{sig},\infty}}} , \quad E_{\text{sig},\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} E_{\text{sig}}(\omega) . \quad (\text{V.22})$$

### 2.3.2 Facteurs aléatoires d'amplification dynamique définis par rapport à l'énergie élastique

Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , le facteur aléatoire d'amplification dynamique de l'aube  $j$  est défini par

$$B_{\text{elas}}^j(\omega) = \sqrt{\frac{E_{\text{elas}}^j(\omega)}{\underline{\mathcal{E}}_{\text{elas},\infty}}} , \quad (\text{V.23})$$

où  $\underline{\mathcal{E}}_{\text{elas},\infty}$  et  $E_{\text{elas}}^j(\omega)$  sont définis par les équations (V.15) et (V.17).

Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , le facteur aléatoire d'amplification dynamique sur l'ensemble des aubes est défini par

$$B_{\text{elas}}(\omega) = \sqrt{\frac{E_{\text{elas}}(\omega)}{\underline{\mathcal{E}}_{\text{elas},\infty}}} , \quad E_{\text{elas}}(\omega) = \sup_j E_{\text{elas}}^j(\omega) . \quad (\text{V.24})$$

Le facteur aléatoire d'amplification dynamique sur l'ensemble des aubes et sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$  est alors défini par

$$B_{\text{elas},\infty} = \sqrt{\frac{E_{\text{elas},\infty}}{\underline{\mathcal{E}}_{\text{elas},\infty}}} , \quad E_{\text{elas},\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} E_{\text{elas}}(\omega) . \quad (\text{V.25})$$

L'équation (V.17) montre que l'énergie aléatoire  $E_{\text{elas}}^j(\omega)$  est définie par rapport à la matrice de raideur du modèle élément fini moyen de l'aube  $j$ . Ainsi les numérateurs et dénominateurs des facteurs d'amplification  $B_{\text{elas}}^j(\omega)$ ,  $B_{\text{elas}}(\omega)$  et  $B_{\text{elas},\infty}$  sont issus de la même norme.

### 3. Résolution numérique du problème direct pour l'analyse du désaccordage

#### 3.1 Définition du système d'équations aléatoires

La représentation algébrique des matrices aléatoires normalisées décrite dans la section 3.5 du chapitre IV est appliquée aux matrices aléatoires  $[\mathbf{G}_M^j]$ ,  $[\mathbf{G}_D^j]$ ,  $[\mathbf{G}_K^j]$ , pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Soient  $\mathbf{X}_M^j$ ,  $\mathbf{X}_D^j$  et  $\mathbf{X}_K^j$  les vecteurs aléatoires de  $\mathbb{R}^{\nu^a}$ ,  $\mathbb{R}^{\tilde{\nu}^a}$  et  $\mathbb{R}^{\tilde{\nu}^a}$ , avec  $\nu^a = m^a(m^a+1)/2$  et  $\tilde{\nu}^a = \tilde{m}^a(\tilde{m}^a+1)/2$ , dont les composantes sont des variables aléatoires Gaussiennes centrées, de variance unité, indépendantes dans leur ensemble, et tels que

$$[\mathbf{G}_M^j] = [g(\mathbf{X}_M^j)] \quad , \quad [\mathbf{G}_D^j] = [g(\mathbf{X}_D^j)] \quad , \quad [\mathbf{G}_K^j] = [g(\mathbf{X}_K^j)] \quad . \quad (\text{V.26})$$

Soit  $\mathbb{X}$  le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^{\nu}$ ,  $\nu = \sum_{j=0}^{N-1} \nu^a + 2\tilde{\nu}^a$  défini par

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{X}_M^0, \dots, \mathbf{X}_M^{N-1}, \mathbf{X}_D^0, \dots, \mathbf{X}_D^{N-1}, \mathbf{X}_K^0, \dots, \mathbf{X}_K^{N-1}\} \quad . \quad (\text{V.27})$$

On choisit de représenter les variables aléatoires  $B_{\text{sig}}^j(\omega)$ ,  $B_{\text{sig}}(\omega)$ ,  $B_{\text{elas}}^j(\omega)$ ,  $B_{\text{elas}}(\omega)$  définies pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$  et les variables aléatoires  $B_{\text{sig},\infty}$ ,  $B_{\text{elas},\infty}$  par la variable aléatoire  $B(\mathbb{X})$ .

Les équations aléatoires permettant le calcul du facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B(\mathbb{X})$  s'écrivent de manière générale sous la forme

$$[\mathbb{A}_{\text{red}}(\mathbb{X}; \omega)] \mathbb{U}_{\text{red}}(\mathbb{X}, \omega) = \underline{\mathbb{F}}_{\text{red}}(\omega) \quad , \quad (\text{V.28})$$

$$\mathbb{U}(\mathbb{X}; \omega) = [\underline{\mathbb{H}}] \mathbb{U}_{\text{red}}(\mathbb{X}; \omega) \quad , \quad (\text{V.29})$$

$$\mathbb{B}(\mathbb{X}) = \underline{f}_b(\mathbb{U}(\mathbb{X}; \omega)) \quad , \quad (\text{V.30})$$

où les équations (V.28), (V.29) représentent indifféremment les équations (IV.68), (IV.69) ou (IV.70), (IV.71) ou (IV.72), (IV.73). Dans l'équation (V.30), l'application déterministe  $\underline{f}_b$  est construite à partir des relations (V.14), (V.16) et (V.20) (ou (V.21), (V.22)) ou des relations (V.15), (V.17) et (V.23) (ou (V.24), (V.25)). Il est à noter que la matrice aléatoire  $[\mathbb{A}_{\text{red}}(\mathbb{X}; \omega)]$  est inversible presque sûrement et admet une unique solution  $\mathbb{U}_{\text{red}}(\mathbb{X}, \omega)$ .

### 3.2 Résolution numérique des équations aléatoires

Les équations aléatoires (V.28) à (V.30) sont résolues numériquement par la simulation numérique de Monte Carlo [84].

Soient  $\theta_1, \dots, \theta_{n_s}, n_s$  réalisations obtenues par la simulation numérique de Monte-Carlo. Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , une réalisation  $\theta_k$  du facteur d'amplification dynamique aléatoire  $B$  est notée  $B(\mathbb{X}(\theta_k))$  et est obtenue par la relation

$$B(\mathbb{X}(\theta_k)) = \underline{f}_b \left( [\mathbb{H}] [A_{\text{red}}(\mathbb{X}(\theta_k); \omega)]^{-1} \underline{\mathbb{E}}_{\text{red}}(\omega) \right) \quad . \quad (\text{V.31})$$

## 4. Analyse de convergence du système stochastique

L'analyse probabiliste de la réponse forcée consiste à estimer la fonction de densité de probabilité  $b \mapsto p_B(b)$  de la variable aléatoire  $B$  ainsi que la probabilité  $\mathcal{P}(B > b)$  où  $b$  est un niveau d'amplification de réponse forcée donné. Soit  $\mathbf{n}_{\text{red}}$  l'ensemble des paramètres contrôlant la dimension du modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée. En particulier, on a  $\mathbf{n}_{\text{red}} = \{\mathfrak{n}^a, \mathfrak{n}\}$  pour les modèles matriciels réduits aléatoires construits aux paragraphes 4.2.1 et 4.2.2 du chapitre IV et on a  $\mathbf{n}_{\text{red}} = \{\mathfrak{n}^a, \mathfrak{n}^d\}$  pour le modèle matriciel réduit aléatoire construit au paragraphe 4.2.3 du chapitre IV. L'étude de convergence du modèle aléatoire est limitée à la convergence en moyenne d'ordre deux du facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B$  car cela implique la convergence en probabilité et la convergence en loi [92]. La fonction  $\mathbf{n}_{\text{red}} \mapsto |||B|||$  est introduite telle que

$$|||B|||^2 = \mathcal{E}\{B^2\} \quad . \quad (\text{V.32})$$

L'estimateur de la norme  $|||B|||$  noté  $\text{Conv}(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  est défini par

$$\text{Conv}^2(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}}) = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} B^2(\mathbb{X}(\theta_k)) \quad , \quad (\text{V.33})$$

où  $B(\mathbb{X}(\theta_1)), \dots, B(\mathbb{X}(\theta_{n_s}))$  sont  $n_s$  réalisations de la variable aléatoire  $B$  obtenues par la simulation numérique de Monte Carlo. L'étude de la fonction  $(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}}) \mapsto \text{Conv}(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  permet de déterminer la valeur optimale du paramètre  $\mathbf{n}_{\text{red}}$  contrôlant la dimension du modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée et le nombre  $n_s$  de simulations nécessaires pour observer la convergence en moyenne d'ordre deux de la variable aléatoire  $B$ .

## 5. Traitements statistiques

### 5.1 Estimation de la probabilité

Pour  $b$  fixé, la probabilité  $\mathcal{P}(B > b)$  est estimée par l'estimateur sans biais  $\widehat{G}_B(b)$  défini par

$$\widehat{G}_B(b) = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} H_0(B(\theta_k) - b) \quad , \quad (\text{V.34})$$

où  $H_0$  est la fonction définie par  $H_0(x) = 1$  si  $x > 0$  et  $H_0(x) = 0$  sinon.

### 5.2 Estimation des régions de confiance par la méthode des quantiles

Soit  $F_B(b)$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $B$ . Pour  $0 < \alpha < 1$ , la fonction quantile  $Q_B(\alpha)$  de la variable aléatoire  $B$  est définie par

$$Q_B(\alpha) = \inf_b F_B(b) \geq \alpha \quad , \quad (\text{V.35})$$

Soient  $B(\theta_1), \dots, B(\theta_{n_s})$ ,  $n_s$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $B$ . Soient  $\widetilde{B}(\theta_1) < \dots < \widetilde{B}(\theta_{n_s})$  la statistique ordonnée associée aux réalisations  $B(\theta_1), \dots, B(\theta_{n_s})$ . Un estimateur sans biais de la fonction de répartition  $F_B(b)$  est défini par

$$\widehat{F}_B(b) = 1 - \widehat{G}_B(b) \quad , \quad (\text{V.36})$$

où  $\widehat{G}_B(b)$  est défini par l'équation (V.34). Soit  $\alpha$  fixé dans  $[0, 1]$  et soient  $B_{\alpha+}$  et  $B_{\alpha-}$  les estimateurs du  $\alpha$ -quantile et du  $1 - \alpha$  quantile relatif à la variable aléatoire  $B$ . En utilisant les équations (V.34), (V.35) et (V.36), on obtient

$$B_{\alpha+} = \widetilde{B}(\theta_a) \quad , \quad a = \text{fix}(n_s \alpha) \quad , \quad (\text{V.37})$$

$$B_{\alpha-} = \widetilde{B}(\theta_b) \quad , \quad b = \text{fix}(n_s (1 - \alpha)) \quad , \quad (\text{V.38})$$

où  $\text{fix}(n)$  est la partie entière de l'entier  $n$ . L'intervalle  $[B_{\alpha-}, B_{\alpha+}]$  représente la région de confiance pour un niveau de probabilité  $\alpha$  de la variable aléatoire  $B$ .



# Chapitre VI

## Méthodologie du problème inverse de caractérisation des tolérances de l'aube

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, on suppose que les incertitudes de désaccordage de la roue aubagée sont dues aux incertitudes sur la géométrie des aubes.

On cherche à construire une méthodologie permettant de résoudre le problème inverse sur les tolérances d'usinage des aubes. Ce problème inverse consiste à spécifier les tolérances géométriques des aubes étant donné un niveau de probabilité sur le facteur d'amplification dynamique de la réponse forcée des aubes.

Dans le contexte du tolérancement géométrique des aubes, l'utilisation de méthodes probabilistes paramétriques nécessiterait de modéliser les incertitudes de désaccordage par des champs stochastiques, dont la description probabiliste, conditionnée par la connaissance complète du système de lois marginales, devrait être identifiée expérimentalement. Comme la connaissance de ces données n'est pas accessible au niveau expérimental, compte-tenu de la problématique étudiée, le modèle probabiliste non paramétrique est le plus pertinent pour modéliser le désaccordage induit par les tolérances géométriques des aubes.

Comme le désaccordage est modélisé par l'approche probabiliste non paramétrique, il s'agit tout d'abord de quantifier les paramètres d'entrée du modèle probabiliste non paramétrique par rapport aux tolérances. Dans l'équation (IV.40), la distribution de probabilité d'une matrice aléatoire  $[G]$  modélisée par le modèle probabiliste non paramétrique est paramétrée par le paramètre de dispersion  $\delta$ . Il faut donc construire une relation permettant d'identifier les paramètres de dispersion de masse et de raideur de chaque aube en fonction des tolérances sur chaque aube. Pour cela, un modèle probabiliste de la géométrie de l'aube est construit *a priori*. L'objectif unique de ce modèle probabiliste de géométrie est d'estimer la valeur des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. On précise que le modèle probabiliste de la géométrie de l'aube n'est pas utilisé dans l'analyse du désaccordage. Il est utilisé pour définir des indicateurs de dispersion en fonction des tolérances de l'aube. De même, des indicateurs de dispersion sont construits à partir du modèle probabiliste non paramétrique de l'aube. Ceux-ci s'expriment analytiquement en fonction des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. Le critère d'identification consiste à égaliser les indicateurs de dispersion issus des deux modélisations probabilistes. On construit ainsi la relation donnant les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique en fonction des tolérances. Puis, le modèle probabiliste non paramétrique est utilisé avec les valeurs des paramètres de dispersion identifiées afin d'analyser le facteur d'amplification de la réponse forcée de la roue aubagée. On réitère alors la méthode pour différentes tolérances. En se fixant un niveau de probabilité du facteur d'amplification dynamique des aubes, on est alors capable de caractériser les tolérances optimales de l'aube.

## CHAPITRE VI. PROBLÈME INVERSE

Dans le paragraphe 2, on explique le contexte probabiliste du tolérancement d'un point de vue technologique. Le paragraphe 3 présente la construction *a priori* du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube. Le paragraphe 4 est dédié à la procédure d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. Le paragraphe 5 résume la stratégie générale de résolution du problème inverse. Enfin, le paragraphe 6 propose une méthode pour vérifier *a posteriori* la pertinence du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube construit *a priori* pour résoudre le problème inverse sur les tolérances géométriques de l'aube.

Comme le raisonnement est identique pour chaque aube, on restreint l'analyse à une seule aube. Dans tout ce chapitre, on omet l'exposant indiciel  $j$  dans les notations mathématiques.

## 2. Contexte probabiliste du tolérancement

On introduit quelques notions sur le tolérancement [12]. L'*aube nominale* est définie comme l'aube conçue par le constructeur. Elle est utilisée pour définir des tolérances sur certains paramètres géométriques, appelés *paramètres tolérancés*. L'ensemble des tolérances permet alors de définir la marge de fluctuation admissible de la géométrie de l'aube, permettant d'assurer un fonctionnement correct de la roue aubagée.

Pendant le processus de fabrication des aubes, des imperfections sur les *aubes manufacturées* sont inévitables, dues par exemple à la régularité de l'outil de coupe pendant l'usinage de l'aube ou aux finitions des surfaces. Ainsi, toutes les aubes manufacturées d'une roue aubagée sont différentes les unes des autres et sont différentes de l'aube nominale. Par conséquent, la problématique de tolérancement s'inscrit dans un contexte probabiliste.

## 3. Construction du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube

Dans ce paragraphe, on construit un modèle probabiliste de la géométrie de l'aube qui sera utilisé pour identifier les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique.

Les problèmes d'identification nécessitent généralement des données expérimentales. Dans le contexte de la recherche, on ne dispose pas de données expérimentales sur les aubes manufacturées. L'alternative proposée est d'obtenir numériquement une base de donnée expérimentale des aubes manufacturées en construisant un modèle probabiliste sur la position des nœuds du maillage élément fini de l'aube nominale. Pour cela, on définit le maillage de l'aube nominale comme le maillage relatif au modèle matriciel élément fini moyen de l'aube. On suppose connaître les paramètres tolérancés définis par le constructeur pendant la phase de conception des aubes. On dispose donc des données nécessaires pour construire le modèle probabiliste de la géométrie de l'aube.

Soit  $\underline{\tau}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{n_\tau}$  définissant un jeu donné de tolérances. Soit  $\underline{\mathbf{x}}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{n_a}$  définissant la position des nœuds du maillage de l'aube nominale. Soit alors  $\mathbf{x}_\tau$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{n_a}$  définissant la position des nœuds du maillage d'une aube manufacturée. Dans le contexte probabiliste du tolérancement, le vecteur  $\mathbf{x}_\tau$  est modélisé par le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_\tau$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_a}$  et s'écrit

$$\mathbf{X}_\tau = \underline{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{X}_\tau \quad , \quad (\text{VI.1})$$

où  $\Delta\mathbf{X}_\tau$  est le vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^{n_a}$  dont la fonction de densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue  $d\Delta\mathbf{x}_\tau = d\Delta x_{\tau,1} \dots d\Delta x_{\tau,n_a}$  sur  $\mathbb{R}^{n_a}$  est notée  $p_{\Delta\mathbf{X}_\tau}(\Delta\mathbf{x}_\tau)$ .

Il est à noter que l'objectif de ce chapitre n'est pas de construire un modèle probabiliste exact de la

géométrie de l'aube. On ne dispose d'ailleurs pas de l'information nécessaire pour le faire. Le modèle probabiliste de la géométrie de l'aube est construit *a priori* tout en respectant certaines conditions conduisant à des géométries représentatives des aubes manufacturées. Tout d'abord, le modèle probabiliste de géométrie doit être paramétré par les paramètres tolérancés. De plus, le modèle probabiliste de géométrie doit respecter les limites admissibles imposées par les tolérances. Enfin, le modèle probabiliste de géométrie doit garantir une certaine régularité sur la forme géométrique de l'aube.

Une construction détaillée du modèle probabiliste de la géométrie d'aube sera présentée dans les chapitres VIII et IX concernant la validation de cette méthodologie sur un exemple numérique simple et sur un modèle industriel de roue aubagée.

## 4. Construction numérique de la procédure d'identification pour les paramètres de dispersion $\delta_M$ et $\delta_K$

Dans ce paragraphe, on présente en détails la procédure d'identification des paramètres de dispersion dans le cas où le modèle probabiliste non paramétrique est implémenté sur le bloc matriciel associé à la partie dynamique du modèle réduit moyen de l'aube (voir équation (IV.61)).

### 4.1 Définition des indicateurs de dispersion $W_M^{\text{para}}$ et $W_K^{\text{para}}$ du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube

La méthode des éléments finis est appliquée au maillage aléatoire de l'aube défini par l'équation (VI.1). Soient  $[M^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)]$  et  $[K^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)]$  les matrices aléatoires de masse et de rigidité de l'aube à interface de couplage fixe à valeur dans  $\mathbb{M}_{n_i}^+(\mathbb{R})$ . Les indicateurs de dispersion du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube sont définis par

$$W_M^{\text{para}} = \mathcal{E}\{\underline{f}_M(\mathbf{X}_\tau)^2\} \quad , \quad \underline{f}_M(\mathbf{X}) = \|[M^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)] - [\underline{M}]\|_F \quad , \quad (\text{VI.2})$$

$$W_K^{\text{para}} = \mathcal{E}\{\underline{f}_K(\mathbf{X}_\tau)^2\} \quad , \quad \underline{f}_K(\mathbf{X}) = \|[K^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)] - [\underline{K}]\|_F \quad . \quad (\text{VI.3})$$

Dans les équations (VI.2) et (VI.3), les matrices aléatoires  $[M^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)]$  et  $[K^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)]$  sont définies par

$$[M^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)] = [\underline{\Phi}]^T [M^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)] [\underline{\Phi}] \quad , \quad (\text{VI.4})$$

$$[K^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)] = [\underline{\Phi}]^T [K^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)] [\underline{\Phi}] \quad . \quad (\text{VI.5})$$

## 4.2 Définition des indicateurs de dispersion $W_M$ et $W_K$ du modèle probabiliste non paramétrique

De la même manière, on définit les indicateurs de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique par

$$W_M = \mathcal{E}\{\|[\mathcal{M}] - [\underline{\mathcal{M}}]\|_F^2\} \quad , \quad (\text{VI.6})$$

$$W_K = \mathcal{E}\{\|[\mathcal{K}] - [\underline{\mathcal{K}}]\|_F^2\} \quad . \quad (\text{VI.7})$$

## 4.3 Expression de l'indicateur de dispersion $W$ d'une matrice aléatoire construite par le modèle probabiliste non paramétrique

On se place maintenant dans un cadre plus général. Soit  $[\underline{B}]$ , une matrice  $[\underline{B}]$  de  $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$  ou de  $\mathbb{M}_m^{+0}(\mathbb{R})$  et une matrice aléatoire  $[\mathbf{B}]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$  ou  $\mathbb{M}_m^{+0}(\mathbb{R})$  dont la distribution de probabilité est issue de l'approche probabiliste non paramétrique. On note  $n = \text{rg}[\underline{B}]$  le rang de la matrice  $[\underline{B}]$ . En particulier,  $n = m$  si  $[\underline{B}]$  est une matrice de  $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ . D'après le paragraphe 2.2 du chapitre IV, on a

$$[\underline{B}] = [\underline{L}]^T [\underline{L}] \quad , \quad [\underline{L}] \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{VI.8})$$

$$[\mathbf{B}] = [\underline{L}]^T [\mathbf{G}] [\underline{L}] \quad , \quad [\mathbf{G}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad . \quad (\text{VI.9})$$

Soit  $W$  l'indicateur de dispersion défini par

$$W = \mathcal{E}\{\|[\mathbf{B}] - [\underline{B}]\|_F^2\} \quad , \quad (\text{VI.10})$$

et soit  $\delta$  le paramètre de dispersion défini par

$$\delta = \left( \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}] - [\underline{G}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}]\|_F^2} \right)^{1/2} \quad . \quad (\text{VI.11})$$

On cherche à exprimer analytiquement  $W$  en fonction de  $\delta$ . On a

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{E}\{\|[\underline{L}]^T ([\mathbf{G}] - [\underline{G}]) [\underline{L}]\|_F^2\} \quad , \\ &= \mathcal{E}\left\{ \sum_{i,j,k,i',j',k'} [\underline{L}]_{ij}^T ([\mathbf{G}]_{jk} - [\underline{G}]_{jk}) [\underline{L}]_{ki'} [\underline{L}]_{i'j'}^T ([\mathbf{G}]_{j'k}^T - [\underline{G}]_{j'k'}^T) [\underline{L}]_{k'i} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

En utilisant la linéarité de l'espérance mathématique, et la propriété de symétrie de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$ , on obtient

$$W = \sum_{i,j,k,i',j',k'} [\underline{L}]_{ij}^T [\underline{L}]_{ki'} [\underline{L}]_{i'j'}^T [\underline{L}]_{k'i} C_{jk,j'k'}^G \quad , \quad (\text{VI.13})$$

où  $C_{jk,j'k'}^G$  est le tenseur de covariance de la matrice aléatoire  $[G]$  défini par l'équation (IV.45). On obtient alors

$$W = \frac{\delta^2}{n+1} \left[ \left( \sum_{i,j} [L]_{ij}^T [L]_{ji} \right) \left( \sum_{i',j'} [L]_{i'j'}^T [L]_{j'i'} \right) + \sum_{i,i'} \left( \sum_j [L]_{ij}^T [L]_{i'j}^T + \sum_k [L]_{ki'} [L]_{ki} \right) \right]. \quad (\text{VI.14})$$

En remplaçant l'équation (VI.8) dans l'équation (VI.14), on en déduit

$$W = \left( \text{tr}([B]^2) + \text{tr}([B])^2 \right) \frac{\delta^2}{\text{rg}[B] + 1}. \quad (\text{VI.15})$$

#### 4.4 Expression analytique des indicateurs de dispersion $W_M$ et $W_K$ en fonction des paramètres de dispersion $\delta_M$ et $\delta_K$

On déduit de l'équation (VI.15) que les indicateurs de dispersion  $W_M$  et  $W_K$  s'écrivent

$$W_M = \frac{\delta_M^2}{\underline{\alpha}_M^2}, \quad \underline{\alpha}_M = \sqrt{\frac{n^a + 1}{\text{tr}([M]^2) + \text{tr}([M])^2}}, \quad (\text{VI.16})$$

$$W_K = \frac{\delta_K^2}{\underline{\alpha}_K^2}, \quad \underline{\alpha}_K = \sqrt{\frac{n^a + 1}{\text{tr}([K]^2) + \text{tr}([K])^2}}, \quad (\text{VI.17})$$

#### 4.5 Critère d'identification des paramètres de dispersion

Le critère d'identification des paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  consiste à égaliser les indicateurs de dispersion  $W_M^{\text{para}}$  et  $W_K^{\text{para}}$  issus du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube avec les indicateurs de dispersion  $W_M$  et  $W_K$  issus de l'approche probabiliste non paramétrique. On a donc

$$W_M = W_M^{\text{para}}, \quad (\text{VI.18})$$

$$W_K = W_K^{\text{para}}, \quad (\text{VI.19})$$

En utilisant les expressions (VI.2), (VI.3), (VI.16) et (VI.17), on en déduit

$$\delta_M(\underline{\tau}) = \underline{\alpha}_M \sqrt{\mathcal{E}\{f_{\underline{M}}(\mathbf{X}_\tau)^2\}}, \quad (\text{VI.20})$$

$$\delta_K(\underline{\tau}) = \underline{\alpha}_K \sqrt{\mathcal{E}\{f_{\underline{K}}(\mathbf{X}_\tau)^2\}}, \quad (\text{VI.21})$$

#### 4.6 Remarques sur la définition des indicateurs de dispersion

La modélisation probabiliste non paramétrique impose de définir les indicateurs de dispersion à partir des matrices réduites sur la base modale relative au modèle matriciel élément fini moyen de l'aube à interface

de couplage fixe. Comme le critère d'identification est obtenu en égalisant les indicateurs de dispersion issus de deux modèles probabilistes différents, il est nécessaire de définir les indicateurs de dispersion dans une base commune de réduction, c'est à dire la base des modes propres du modèle matriciel moyen de l'aube à interface de couplage fixe.

La définition des tolérances est spécifique à la géométrie de l'aube. Les indicateurs de dispersion doivent donc contenir l'information concernant le design de l'aube. Comme le modèle nominal de l'aube est défini comme le modèle matriciel élément fini moyen de l'aube, la base modale de réduction commune aux indicateurs de dispersion contient implicitement l'information sur la géométrie nominale de l'aube.

La problématique de tolérancement ne fournit aucune hypothèse sur les valeurs moyennes de la matrice de masse  $[M^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)]$  et de la matrice de raideur  $[K^{\text{para}}(\mathbf{X}_\tau)]$ . En particulier, leur valeur moyenne n'est pas égale aux matrices  $[\underline{M}]$  et  $[\underline{K}]$  issues du modèle matriciel élément fini moyen de l'aube. En effet, la problématique de tolérancement fournit seulement le support des paramètres tolérancés. Il n'y a aucune raison physique pour que la valeur moyenne d'un ensemble d'aubes manufacturées corresponde à l'aube nominale. Ceci est par ailleurs justifié par le fait que les matrices éléments finis de masse et de raideur ne sont pas des fonctions linéaires des paramètres géométriques. Le biais introduit entre les valeurs nominales des matrices et leurs valeurs moyennes est pris en compte dans la définition des indicateurs de dispersion. En effet, la dispersion des matrices aléatoires est définie par rapport aux valeurs nominales des matrices.

## 5. Stratégie générale de résolution du problème inverse

Dans un premier temps, on construit le modèle matriciel élément fini moyen de l'aube. On rappelle que ce modèle correspond au modèle élément fini de l'aube nominale. On en déduit le modèle matriciel réduit moyen de l'aube présenté dans le Chapitre III de ce manuscrit de thèse.

Dans un second temps, on s'intéresse au problème d'identification des paramètres de dispersion. Pour un jeu donné  $\underline{\tau}$  de tolérances, on définit tout d'abord le modèle probabiliste de la géométrie de l'aube. Une simulation numérique de Monte Carlo est mise en œuvre. Soient  $\theta_1, \dots, \theta_{n_t}, n_t$  réalisations. Pour chaque réalisation  $\theta_i$  avec  $i$  dans  $\{1, \dots, n_t\}$ , on construit une réalisation  $X_\tau(\theta_i)$  du maillage aléatoire de l'aube. En utilisant la méthode des éléments finis, on obtient les réalisations  $[M^{\text{para}}(X_\tau(\theta_i))]$  et  $[K^{\text{para}}(X_\tau(\theta_i))]$  des matrices aléatoires de masse et de raideur de l'aube à interface de couplage fixe. Les réalisations  $\underline{f}_M(X_\tau(\theta_i))$  et  $\underline{f}_K(X_\tau(\theta_i))$  s'écrivent d'après les équations (VI.2) à (VI.5)

$$\underline{f}_M(X(\theta_i)) = \|[\underline{\Phi}]^T [M^{\text{para}}(X(\theta_i))] [\underline{\Phi}] - [\underline{M}]\|_F \quad , \quad (\text{VI.22})$$

$$\underline{f}_K(X(\theta_i)) = \|[\underline{\Phi}]^T [K^{\text{para}}(X(\theta_i))] [\underline{\Phi}] - [\underline{K}]\|_F \quad . \quad (\text{VI.23})$$

Enfin, les estimateurs  $\hat{\delta}_M$  et  $\hat{\delta}_K$  des paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  sont définis par

$$\hat{\delta}_M(\underline{\tau}) = \alpha_M \sqrt{\frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} f_M(X_\tau(\theta_i))^2} \quad , \quad (\text{VI.24})$$

$$\hat{\delta}_K(\underline{\tau}) = \alpha_K \sqrt{\frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} f_K(X_\tau(\theta_i))^2} \quad , \quad (\text{VI.25})$$

En effectuant une analyse paramétrique sur le jeu de tolérances  $\underline{\tau}$ , il est donc possible de construire numériquement la relation donnant les paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  en fonction de  $\underline{\tau}$ .

Dans un troisième temps, on met en œuvre une seconde simulation numérique de Monte Carlo afin d'analyser la réponse forcée désaccordée de la roue aubagée. Le modèle probabiliste non paramétrique est introduit sur le modèle moyen réduit moyen de chaque aube décrit par les équations (III.37) et (III.38). Les matrices généralisées de masse, de dissipation et de rigidité sont remplacées par des matrices aléatoires dont la dispersion est contrôlée par les paramètres de dispersion  $\delta_M^j, \delta_D^j, \delta_K^j$ . Pour un niveau d'incertitudes homogène sur l'ensemble des aubes, ces paramètres sont tels que  $\delta_M^j = \delta_M, \delta_K^j = \delta_K$ , pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Par ailleurs, il est à noter que les incertitudes de géométrie de l'aube ne sont pas de nature dissipative. On peut donc introduire indépendamment le paramètre de dispersion tel que  $\delta_D^j = \delta_D$ , pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ . Le modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée est alors construit (voir paragraphe 4.2 du chapitre IV). On met alors en œuvre la méthodologie de résolution des équation aléatoires présentée au chapitre V pour chaque  $\omega$  de la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ . Notons  $B_\infty$  le facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B_{\text{sig},\infty}$  ou  $B_{\text{elas},\infty}$ , définis aux équations (V.22) et (V.25). Lorsque les  $n_s$  réalisations  $B_\infty(\theta_1), \dots, B_\infty(\theta_{n_s})$  sont calculées, on estime la probabilité  $\mathcal{P}(B_\infty > b_c)$ , où  $b_c$  est un niveau d'amplification de réponse forcée donné. On construit ainsi numériquement la relation donnant les niveaux de probabilités du facteur d'amplification dynamique en fonction des paramètres de dispersion.

Le schéma de la figure VI.1 résume les trois étapes précédemment décrites.

Le problème inverse sur les tolérances est résolu en combinant les résultats numériques des deux précédentes étapes. On peut alors exprimer la probabilité  $\mathcal{P}(B_\infty > b_c)$  comme une fonction des tolérances  $\underline{\tau}$ . Il est donc possible de déterminer les valeurs des tolérances de l'aube. Pour cela, on définit le critère  $\mathcal{C}_Q$  de la roue aubagée par

$$\mathcal{C}_Q = (b_c, p_c) \quad , \quad (\text{VI.26})$$

où  $b_c$  est un niveau critique du facteur d'amplification dynamique de la réponse forcée et où  $p_c$  est un niveau de probabilité donné. En se donnant  $\mathcal{C}_Q$ , on détermine graphiquement les tolérances optimales de l'aube pour que l'on ait  $\mathcal{P}(B_\infty > b_c) < p_c$ .





## 6. Analyse de sensibilité relative au modèle probabiliste de la géométrie d'aube

Dans ce paragraphe, on analyse *a posteriori* la pertinence du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube vis à vis de l'identification des paramètres de dispersion. Tout d'abord, on étudie la sensibilité des paramètres de dispersion à une perturbation aléatoire du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube. Puis, on explicite la stratégie numérique utilisée. Enfin, on analyse l'impact de la variabilité des paramètres de dispersion sur la réponse forcée aléatoire de la roue aubagée.

### 6.1 Sensibilité des paramètres de dispersion à une perturbation aléatoire de géométrie

On se donne un jeu de tolérances  $\underline{\tau}$  sur l'aube. On suppose que le modèle probabiliste de la géométrie d'aube est entièrement défini. Pour une meilleure lisibilité, on omet l'indice  $\tau$  dans les notations.

#### 6.1.1 Position du problème

On rappelle que les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique s'écrivent d'après les équations (VI.1), (VI.20) et (VI.21)

$$\delta_M(\underline{\tau}) = \underline{\alpha}_M \sqrt{\mathcal{E}\{f_{\underline{M}}(\underline{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{X})^2\}} \quad , \quad (\text{VI.27})$$

$$\delta_K(\underline{\tau}) = \underline{\alpha}_K \sqrt{\mathcal{E}\{f_{\underline{K}}(\underline{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{X})^2\}} \quad , \quad (\text{VI.28})$$

On souhaite quantifier la sensibilité des paramètres de dispersion à une perturbation aléatoire de la géométrie de l'aube. Celle-ci est modélisée par le vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n^a})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n^a}$ , où les variables aléatoires  $\epsilon_j$ , avec  $j$  dans  $\{1, \dots, n^a\}$  sont indépendantes dans leur ensemble, sont indépendantes de  $\Delta\mathbf{X}$ , et dont la distribution de probabilité est centrée et uniforme sur l'intervalle  $[-e_0, e_0]$ ,  $0 < e_0 < 0.1$ . Soient alors  $\tilde{\delta}_M(e_0)$  et  $\tilde{\delta}_K(e_0)$  les paramètres de dispersion définis par

$$\tilde{\delta}_M(e_0) = \underline{\alpha}_M \sqrt{\mathcal{E}\{f_{\underline{M}}(\underline{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\epsilon}))^2\}} \quad , \quad (\text{VI.29})$$

$$\tilde{\delta}_K(e_0) = \underline{\alpha}_K \sqrt{\mathcal{E}\{f_{\underline{K}}(\underline{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\epsilon}))^2\}} \quad . \quad (\text{VI.30})$$

Dans les équations (VI.29) et (VI.30), on note  $\Delta\mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\epsilon})$  le vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^{n^a}$  dont la composante  $j$  est définie par

$$\{\Delta\mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\epsilon})\}_j = \Delta X_j (1 + \epsilon_j) \quad , \quad (\text{VI.31})$$

On souhaite calculer les quantités  $\text{sensi}_M$  et  $\text{sensi}_K$  définies par

$$\text{sensi}_M(e_0) = \frac{\tilde{\delta}_M^2(e_0) - \delta_M^2}{\sigma_{e_0}^2} , \quad (\text{VI.32})$$

$$\text{sensi}_K(e_0) = \frac{\tilde{\delta}_K^2(e_0) - \delta_K^2}{\sigma_{e_0}^2} , \quad (\text{VI.33})$$

où  $\sigma_{e_0}$  est l'écart type des variables aléatoires  $\varepsilon_j$ .

### 6.1.2 Développement de Taylor à l'ordre deux de $\tilde{\delta}_M^2(e_0)$ et $\tilde{\delta}_K^2(e_0)$

Comme  $\Delta \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  est une perturbation de  $\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X}$ , une approximation analytique des fonctions  $\text{sensi}_M(e_0)$  et  $\text{sensi}_K(e_0)$  peut être obtenue en effectuant le développement de Taylor à l'ordre deux des fonctions  $\underline{f}_M(\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\varepsilon}))^2$  et  $\underline{f}_K(\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\varepsilon}))^2$  autour du point  $\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X}$  (correspondant au modèle probabiliste de la géométrie de l'aube). On a donc

$$\begin{aligned} \underline{f}_M^2(\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\varepsilon})) &\simeq \underline{f}_M^2(\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X}) + 2 \sum_{j=1}^{n^a} \left\{ \underline{f}_M(\mathbf{y}) \frac{\partial \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}+\Delta \mathbf{X}} \varepsilon_j \Delta X_j + \\ &+ \sum_{j=1}^{n^a} \sum_{k=1}^{n^a} \left\{ \underline{f}_M(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_k} \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}+\Delta \mathbf{X}} \Delta X_j \Delta X_k \varepsilon_j \varepsilon_k , \end{aligned} \quad (\text{VI.34})$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_K^2(\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\varepsilon})) &\simeq \underline{f}_K^2(\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X}) + 2 \sum_{j=1}^{n^a} \left\{ \underline{f}_K(\mathbf{y}) \frac{\partial \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}+\Delta \mathbf{X}} \varepsilon_j \Delta X_j + \\ &+ \sum_{j=1}^{n^a} \sum_{k=1}^{n^a} \left\{ \underline{f}_K(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_k} \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}+\Delta \mathbf{X}} \Delta X_j \Delta X_k \varepsilon_j \varepsilon_k . \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

En utilisant les propriétés d'indépendance des variables aléatoires  $\varepsilon_j, j \in \{1, \dots, n^a\}$  dans leur ensemble et des variables aléatoires  $\varepsilon_j$  avec le vecteur aléatoire  $\Delta \mathbf{X}$ , on obtient

$$\tilde{\delta}_M^2(e_0) \simeq \delta_M^2 + \alpha_M^2 \sigma_{e_0}^2 \sum_{j=1}^{n^a} \mathcal{E} \left\{ \left\{ \underline{f}_M(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_j^2} + \left( \frac{\partial \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}+\Delta \mathbf{X}} \Delta X_j^2 \right\} \quad (\text{VI.36})$$

$$\tilde{\delta}_K^2(e_0) \simeq \delta_K^2 + \alpha_K^2 \sigma_{e_0}^2 \sum_{j=1}^{n^a} \mathcal{E} \left\{ \left\{ \underline{f}_K(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_j^2} + \left( \frac{\partial \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}+\Delta \mathbf{X}} \Delta X_j^2 \right\} . \quad (\text{VI.37})$$

### 6.1.3 Introduction d'hypothèses simplificatrices

On s'aperçoit que les expressions (VI.36) et (VI.37) comportent des dérivées partielles des fonctions  $\underline{f}_M$  et  $\underline{f}_K$  exprimées au point  $\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X}$ . Par conséquent, la simulation numérique de Monte Carlo est

## CHAPITRE VI. PROBLÈME INVERSE

également effectuée sur les dérivées partielles. Soit  $n_{\text{sim}}$  le nombre de réalisations nécessaires. Il faut donc estimer  $n_{\text{sim}} n^a$  dérivées partielles du premier ordre et  $n_{\text{sim}} n^a$  dérivées partielles du second ordre. Toutefois, les modèles éléments finis des aubes utilisés dans l'industrie aéronautique contiennent des dizaines de milliers de DDLs (voir Chapitre IX). Ce calcul s'avère donc extrêmement difficile à mettre en œuvre.

D'autre part, on cherche seulement à obtenir une estimation de la sensibilité des paramètres de dispersion. On propose donc de simplifier l'approche pour estimer les fonctions  $\text{sensi}_M$  et  $\text{sensi}_K$ . La simplification est motivée par les remarques suivantes :

D'après l'équation (VI.1), le vecteur aléatoire  $\Delta \mathbf{X}$  est une perturbation aléatoire du vecteur  $\underline{\mathbf{x}}$ . On a donc

$$\frac{\mathcal{E}\{|\Delta \mathbf{X}|^2\}}{|\underline{\mathbf{x}}|^2} \ll 1 \quad . \quad (\text{VI.38})$$

Le vecteur aléatoire  $\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$  est une perturbation de  $\Delta \mathbf{X}$ . On a donc

$$\frac{\mathcal{E}\{|\Delta \mathbf{X}|^2\} \mathcal{E}\{|\boldsymbol{\epsilon}|^2\}}{|\underline{\mathbf{x}}|^2} \ll 1 \quad . \quad (\text{VI.39})$$

Par conséquent, on a encore

$$\frac{\mathcal{E}\{|\Delta \mathbf{X}|^2\} (1 + \mathcal{E}\{|\boldsymbol{\epsilon}|^2\})}{|\underline{\mathbf{x}}|^2} \ll 1 \quad , \quad (\text{VI.40})$$

c'est à dire

$$\Delta \mathbf{X} \cdot (1 + \boldsymbol{\epsilon}) \ll \underline{\mathbf{x}} \quad \text{presque sûrement} \quad . \quad (\text{VI.41})$$

L'idée simplificatrice consiste à effectuer le développement de Taylor autour du point  $\underline{\mathbf{x}}$ , et d'estimer la sensibilité du paramètre de dispersion  $\delta$  au voisinage de 0. En remarquant que les fonctions  $f_{\underline{M}}(\underline{\mathbf{x}})$  et  $f_{\underline{K}}(\underline{\mathbf{x}})$  sont nulles, puisque le modèle nominal de l'aube est défini comme le modèle moyen de l'aube, on obtient les relations suivantes

$$\tilde{\delta}_M^2(e_0) \simeq \delta_M^2 + \underline{\alpha}_M^2 \sigma_{e_0}^2 \underline{D}_M^2 \quad , \quad \underline{D}_M^2 = \sum_{j=1}^{n^a} \left( \frac{\partial f_{\underline{M}}(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right)^2 \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}} \mathcal{E}\{\Delta X_j^2\} \quad , \quad (\text{VI.42})$$

$$\tilde{\delta}_K^2(e_0) \simeq \delta_K^2 + \underline{\alpha}_K^2 \sigma_{e_0}^2 \underline{D}_K^2 \quad , \quad \underline{D}_K^2 = \sum_{j=1}^{n^a} \left( \frac{\partial f_{\underline{K}}(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right)^2 \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}} \mathcal{E}\{\Delta X_j^2\} \quad . \quad (\text{VI.43})$$

### 6.1.4 Expression des fonctions $\text{sensi}_M$ et $\text{sensi}_K$

On obtient les expressions suivantes

$$\text{sensi}_M = \underline{\alpha}_M^2 \underline{D}_M^2 \quad , \quad (\text{VI.44})$$

$$\text{sensi}_K = \underline{\alpha}_K^2 \underline{D}_K^2 \quad . \quad (\text{VI.45})$$

Il est à noter que ces expressions sont valables uniquement pour des valeurs de tolérances conduisant à des paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  proches de 0.

## 6.2 Mise en œuvre numérique du calcul des gradients

Le calcul des paramètres de dispersion  $\tilde{\delta}_M(e_0)$  et  $\tilde{\delta}_K(e_0)$  nécessite de connaître les quantités  $\underline{D}_M^2$  et  $\underline{D}_K^2$  dont les expressions sont données par les équations (VI.42) et (VI.43). Il faut donc estimer toutes les dérivées partielles au premier ordre des fonctions  $\underline{f}_M$  et  $\underline{f}_K$  au point  $\underline{\mathbf{x}}$ .

### 6.2.1 Discrétisation des dérivées partielles

L'expression des dérivées partielles au premier ordre des fonctions  $\underline{f}_M$  et  $\underline{f}_K$  au point  $\underline{\mathbf{x}}$  s'écrit par la méthode des différences finies centrées

$$\frac{\partial \underline{f}_M(\underline{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \simeq \frac{\underline{f}_M(\underline{\mathbf{x}} + \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2) - \underline{f}_M(\underline{\mathbf{x}} - \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)}{\eta} , \quad (\text{VI.46})$$

$$\frac{\partial \underline{f}_K(\underline{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \simeq \frac{\underline{f}_K(\underline{\mathbf{x}} + \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2) - \underline{f}_K(\underline{\mathbf{x}} - \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)}{\eta} , \quad (\text{VI.47})$$

où  $\Delta\boldsymbol{\eta}_j$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^{n^a}$  dont les composantes sont définies par  $(\Delta\boldsymbol{\eta}_j)_k = \eta \delta_{jk}$  avec  $\eta$  un scalaire réel positif définissant le pas du schéma aux différences finies.

### 6.2.2 Calcul numérique des dérivées partielles

Soit  $j$  fixé dans  $\{1, \dots, n^a\}$ . Les matrices de masse  $[M^{\text{para}}(\underline{\mathbf{x}} \pm \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)]$  et de raideur  $[K^{\text{para}}(\underline{\mathbf{x}} \pm \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)]$  sont construites. Après avoir réduit ces matrices sur la base modale de projection  $[\Phi]$ , les fonctions  $\underline{f}_M(\underline{\mathbf{x}} \pm \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)$  et  $\underline{f}_K(\underline{\mathbf{x}} \pm \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)$  sont calculées et les dérivées partielles sont estimées par les équations (VI.46) et (VI.47).

Toutefois, ce calcul s'avère difficile à mettre en œuvre pour des systèmes comportant de nombreux degrés de liberté. L'alternative suivante est proposée. Soit  $j$  fixé dans  $\{1, \dots, n^a\}$ . Soit  $\mathcal{J}_{\text{el},j}$ , l'ensemble des éléments contenant le DDL  $j$  et soit  $\mathcal{J}_j$  l'ensemble des DDLs relatifs aux éléments de  $\mathcal{J}_{\text{el},j}$ .

On a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \{[M^{\text{para}}(\underline{\mathbf{x}} \pm \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)] - [M^{\text{para}}(\underline{\mathbf{x}})]\}_{pq} &\neq 0 \text{ si } (p, q) \in \mathcal{J}_j \times \mathcal{J}_j \quad , \\ &= 0 \text{ sinon} \quad , \end{aligned} \quad (\text{VI.48})$$

$$\begin{aligned} \{[K^{\text{para}}(\underline{\mathbf{x}} \pm \Delta\boldsymbol{\eta}_j/2)] - [K^{\text{para}}(\underline{\mathbf{x}})]\}_{pq} &\neq 0 \text{ si } (p, q) \in \mathcal{J}_j \times \mathcal{J}_j \quad , \\ &= 0 \text{ sinon} \quad . \end{aligned} \quad (\text{VI.49})$$

Soient  $\underline{\mathbf{x}}|_{\mathcal{J}_j}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\eta}_j|_{\mathcal{J}_j}$  les restrictions des vecteurs  $\underline{\mathbf{x}}$  et  $\Delta\boldsymbol{\eta}_j$  aux DDLs de  $\mathcal{J}_j$ . Soient  $[m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},+}]$ ,  $[m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}]$ ,  $[m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},-}]$ ,  $[k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},+}]$ ,  $[k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}]$ ,  $[k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},-}]$  les matrices de masse et de raideur générées à partir de la restriction

du maillage aux DDLs de  $\mathcal{J}_j$  et définis par

$$[m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},+}] = [M^{\text{para}}(\{\mathbf{x} + \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}\}_{\mathcal{J}_j})] \quad , \quad [k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},+}] = [K^{\text{para}}(\{\mathbf{x} + \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}\}_{\mathcal{J}_j})] \quad , \quad (\text{VI.50})$$

$$[m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}] = [M^{\text{para}}(\mathbf{x}|_{\mathcal{J}_j})] \quad , \quad [k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}] = [K^{\text{para}}(\mathbf{x}|_{\mathcal{J}_j})] \quad , \quad (\text{VI.51})$$

$$[m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},-}] = [M^{\text{para}}(\{\mathbf{x} - \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}\}_{\mathcal{J}_j})] \quad , \quad [k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},-}] = [K^{\text{para}}(\{\mathbf{x} - \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}\}_{\mathcal{J}_j})] \quad . \quad (\text{VI.52})$$

Soit  $[\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]$  la matrice modale définie comme la restriction de la matrice  $[\underline{\Phi}]$  aux DDLs de  $\mathcal{J}_j$ . En utilisant les propriétés (VI.48) et (VI.49), on en déduit

$$\underline{f}_M(\mathbf{x} + \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}) = \|[\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]^T ([m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},+}] - [m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}]) [\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]\|_F \quad , \quad (\text{VI.53})$$

$$\underline{f}_M(\mathbf{x} - \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}) = \|[\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]^T ([m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},-}] - [m_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}]) [\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]\|_F \quad , \quad (\text{VI.54})$$

$$\underline{f}_K(\mathbf{x} + \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}) = \|[\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]^T ([k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},+}] - [k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}]) [\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]\|_F \quad , \quad (\text{VI.55})$$

$$\underline{f}_K(\mathbf{x} - \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}_j}{2}) = \|[\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]^T ([k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},-}] - [k_{\mathcal{J}_j}^{\text{para},0}]) [\underline{\Phi}_{\mathcal{J}_j}]\|_F \quad . \quad (\text{VI.56})$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial \underline{f}_M(\mathbf{x})}{\partial x_j}$  et  $\frac{\partial \underline{f}_K(\mathbf{x})}{\partial x_j}$  sont alors évaluées par les équations (VI.46) et (VI.47).

### 6.3 Conséquences sur l'analyse du désaccordage de la roue aubagée

On rappelle que le facteur aléatoire d'amplification dynamique des aubes de la roue aubagée est très sensible aux incertitudes de désaccordage. Le désaccordage est modélisé par le modèle probabiliste non paramétrique et le niveau des incertitudes est contrôlé par les paramètres de dispersion. Il s'agit donc de quantifier la sensibilité du facteur d'amplification sur les aubes par rapport à la fluctuation des paramètres de dispersion induite par la perturbation aléatoire du modèle probabiliste de géométrie de l'aube. Dans le cas où cette sensibilité s'avère négligeable, la pertinence du modèle probabiliste construit *a priori* est montrée.

# Chapitre VII

## Etude comparative des approches probabilistes sur un exemple numérique simple

Dans les chapitres VII et VIII, pour simplifier l'analyse, on considère la vitesse de rotation de la roue aubagée nulle. On ne modélise donc ni les opérateurs de rigidité  $\underline{\mathbf{K}}_g$  et  $\underline{\mathbf{K}}_c$ , ni l'opérateur de couplage gyroscopique  $\underline{\mathbf{C}}$ . Il est à noter que la prise en compte d'une vitesse de rotation constante induirait des caractéristiques modales différentes (en particulier une translation du spectre des fréquences propres de la structure) mais ne modifierait aucunement la méthodologie d'analyse du désaccordage.

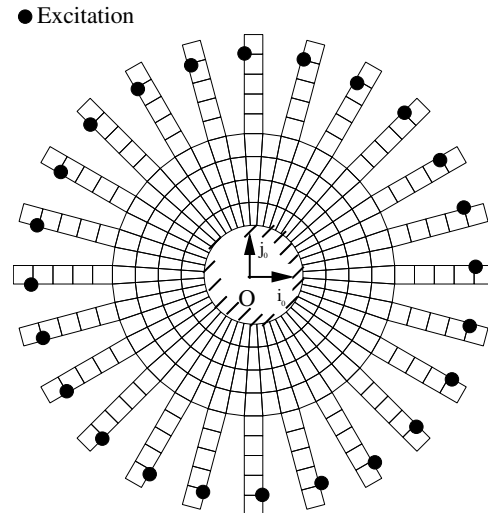
### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthodologie probabiliste directe d'analyse du désaccordage sur un exemple numérique simple. Les fonctions de densité de probabilité du facteur aléatoire d'amplification dynamique des aubes sont analysées. Le paragraphe 2 décrit le modèle de la roue aubagée. Les principales caractéristiques de ce modèle sont mises en évidence et les paramètres numériques d'étude sont définis. Dans le paragraphe 3, on modélise le désaccordage de la roue aubagée par la méthodologie probabiliste non paramétrique décrite au paragraphe 4.2.1 du chapitre IV. On met en évidence les phénomènes d'amplification dynamique et de localisation spatiale induit par le désaccordage de la roue aubagée. Le paragraphe 4 présente une approche comparative permettant de positionner l'approche probabiliste non paramétrique au travers de l'étude de la sensibilité du facteur aléatoire d'amplification dynamique aux incertitudes aléatoires sur les déformées modales des aubes.

## 2. Description du modèle matriciel moyen

### 2.1 Définition du modèle matriciel élément fini moyen

L'exemple numérique considéré est un modèle élément fini simple de roue aubagée. Ce modèle élément fini, dont le maillage est présenté à la figure VII.1, permet de mettre en œuvre les méthodologies probabilistes construites dans ce travail de recherche.



**Figure VII.1** – Maillage élément fini de l'exemple numérique simple - localisation de l'excitation •.

Le modèle mécanique moyen est une roue aubagée plane située dans le plan  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0)$  du repère global cartésien défini par  $\mathcal{R}_0 = (O, \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k})$ . On étudie les vibrations de flexion de la roue aubagée. Comme la vitesse de rotation de la structure est nulle, le repère global  $\mathcal{R}_0$  et le repère local  $\mathcal{R}_1$  sont confondus (voir chapitre I). La roue aubagée est fixée sur son bord interne.

Le modèle moyen de la roue aubagée est constitué d'un disque et de 24 aubes. Le disque est une couronne de rayon interne  $r_i = 0.035 m$ , de rayon externe  $r_e = 0.1 m$  et d'épaisseur  $e = 0.001 m$ . Le matériau est supposé homogène et isotrope, de densité volumique de masse  $\rho_d = 7860 kg.m^{-3}$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et de module d'Young élastique  $E_d = 1.89 \cdot 10^{11} N.m^{-2}$ . L'aube est de longueur  $L = 0.07 m$ , de largeur  $l = 0.0085 m$  d'épaisseur linéairement décroissante de  $0.005 m$  à  $0.001 m$  de la base de l'aube vers le bout d'aube. Le matériau est supposé homogène et isotrope, de densité volumique de masse  $\rho_a = 7860 kg.m^{-3}$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et de module d'Young élastique  $E_a = 2 \cdot 10^{11} N.m^{-2}$ . L'amortissement est modélisé par un modèle d'amortissement structural de facteur de perte  $\eta = 0.0004$ . La théorie des plaques minces de Kirchoff-Love est utilisée. Le modèle élément fini est constitué d'éléments de plaque quadrangulaires à 4 nœuds. 48 divisions angulaires et 4 divisions radiales sont régulièrement distribuées sur le disque. L'ensemble des données numériques concernant le maillage de la structure est résumé dans la table VII.1.



Sous-Structure	Eléments	Nœuds	DDLs
aube	5	12	36
disque	192	240	576
secteur	13	25	66
roue aubagée	312	480	1296

Table VII.1 – Données numériques du maillage éléments finis

## 2.2 Choix de la bande d'analyse fréquentielle et du vecteur des forces d'excitation

On suppose le vecteur des forces d'excitation cyclique. Pour plus de clarté, on analyse les harmoniques d'ordre  $n$  individuellement. Le vecteur force d'excitation défini par les équations (V.7) à (V.9) permet d'exciter l'harmonique d'ordre  $n$ . La réponse forcée de la roue aubagée ainsi obtenue ne contient que la composante complexe harmonique d'ordre  $n$ . En revanche, lorsque le désaccordage est introduit, la notion de symétrie cyclique et d'harmonique disparaît et tous les modes de la structure sont excités. Par conséquent, les bandes fréquentielles pour lesquelles la densité modale de la structure accordée est très importante représentent des bandes de fréquences dangereuses pour les effets liés au désaccordage. La figure VII.2 représente le graphe des fréquences propres de la structure accordée en fonction du nombre de diamètres nodaux caractérisant les déformées modales qui leur sont associées.

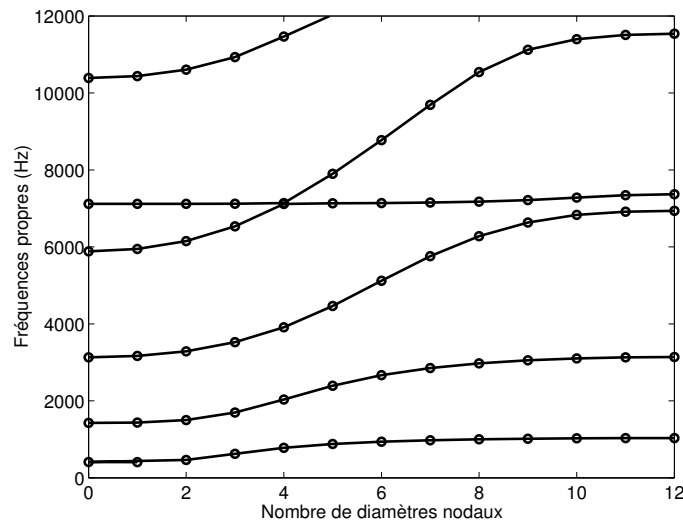
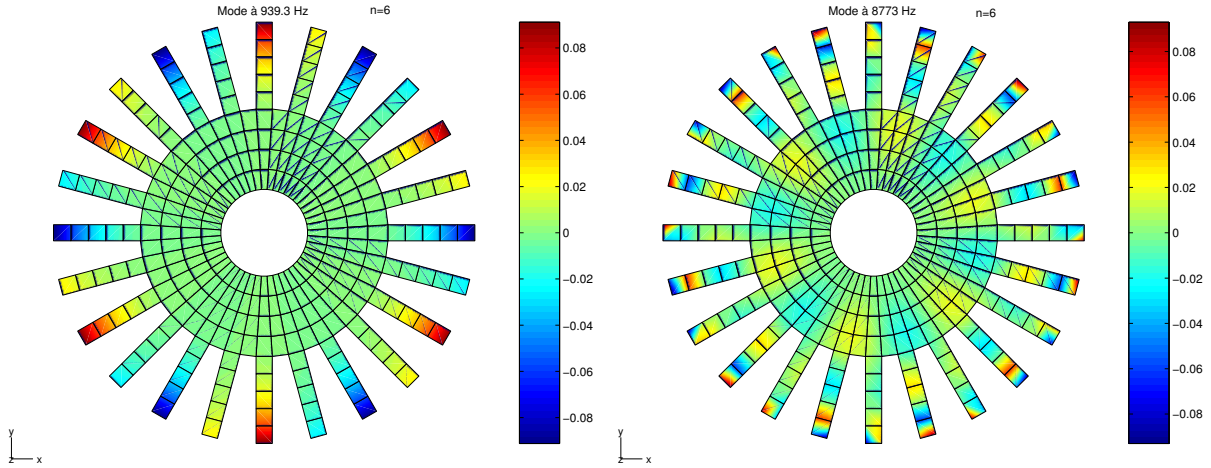


Figure VII.2 – Fréquences propres (Hz) de la roue aubagée accordée en fonction du nombre de diamètres nodaux

Ce graphe permet de mettre en évidence deux grandes familles de modes. Les familles de modes dont les fréquences propres dépendent peu du nombre de diamètres nodaux correspondent à des modes de vibration dont le mouvement est régi par les aubes. Au contraire, les familles de modes dont les fréquences augmentent avec le nombre de diamètres nodaux correspondent à des modes d'ensemble de la structure. La figure VII.3 illustre ces deux familles de modes.



**Figure VII.3** – Exemple de modes propres de la roue aubagée accordée : mode d'aube - mode d'ensemble

La bande d'analyse fréquentielle choisie est  $\mathbb{B} = [7040; 7200] Hz$ . Dans cette bande, la densité modale est très importante. En particulier, un *veering* est observé pour l'harmonique d'ordre  $n = 4$ . Les *veering* [74] correspondent à des familles de modes dont les fréquences se rapprochent fortement, avant de se repousser pour s'éloigner. Ce *veering* est caractérisé par la présence de deux fréquences propres doubles  $\nu_1 = 7115 Hz$  et  $\nu_2 = 7137 Hz$  issues de deux familles distinctes de modes, relatives à la même harmonique  $n = 4$  et dont les valeurs des fréquences sont très proches. Il est à noter que le *critère de veering*, consistant à exciter les modes de la structure accordée dont les fréquences propres se situent dans une zone de *veering*, sont des cas particuliers favorables aux phénomènes de localisation spatiale et d'amplification dynamique [80, 9]. Dans le cas présent, l'utilisation de ce *critère de veering* est entièrement justifié. On montrera en effet dans ce chapitre que le critère de Whitehead [106], donnant la borne supérieure du facteur d'amplification dynamique sous des hypothèses particulières, est presque atteint.

Soient  $ddl_{exc,0}, \dots, ddl_{exc,N-1}$  les DDLs d'excitations et représentés par le symbole  $\bullet$  sur la figure VII.1. Le vecteur des forces d'excitation s'écrit

$$\underline{\mathbf{F}}(\omega) = \mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega) \underline{\mathbf{g}} \quad , \quad (\text{VII.1})$$

où  $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega)$  définit la fonction indicatrice de  $\omega$  sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B} = [7040, 7200] Hz$ .

Le vecteur  $\underline{\mathbf{g}} = (g_1, \dots, g_{nddl})$  est tel que

$$\begin{aligned} g_k &= 0 & , \text{ pour tout } k \text{ différent de } (ddl_{exc,0}, \dots, ddl_{exc,N-1}) \\ g_{ddl_{exc,j}} &= e^{\frac{2i\pi nj}{N}} & , \text{ pour tout } j \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \quad , \end{aligned}$$

avec  $N = 24$ , le nombre d'aubes de la structure,  $n = 4$ , l'ordre de l'harmonique excitée. Il est à noter que les DDLs d'excitations  $ddl_{exc,0}, \dots, ddl_{exc,N-1}$  sont situés en bout d'aubes de manière à exciter tous les modes de la roue aubagée désaccordée.

### 2.3 Choix de l'observation pour la roue aubagée accordée

Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , on s'intéresse au facteur d'amplification dynamique de l'aube  $j$  défini par rapport à l'énergie du signal de chaque aube. Cette observation notée  $\underline{b}_{sig}^j(\omega)$  correspond à la valeur nominale de l'observation aléatoire définie par l'équation (V.20) et s'écrit

$$\underline{b}_{sig}^j(\omega) = \frac{\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{sig}}{\|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{sig}} \quad , \quad (\text{VII.2})$$

où  $\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{sig}$  et  $\|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{sig}$  sont définies par les équations (V.4) et (V.14). D'après l'équation (V.12), on pose  $\underline{b}_{sig}(\omega) = \underline{b}_{sig}^j(\omega)$ .

### 2.4 Choix des paramètres numériques pour le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée

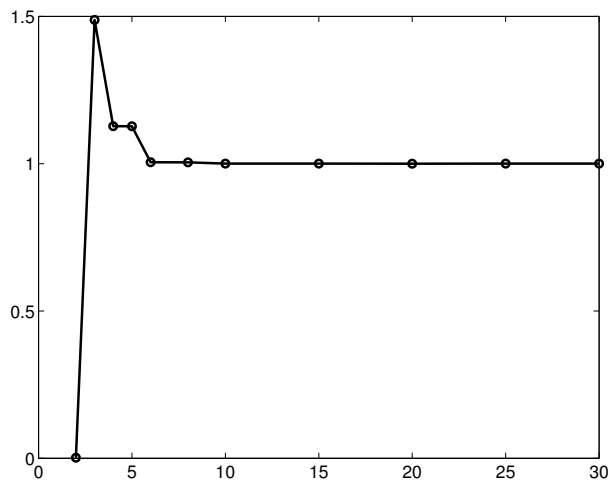
Le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée utilisé est celui présenté dans le paragraphe 4 du Chapitre III. On rappelle que cette stratégie consiste à utiliser la méthode de Craig et Bampton pour chaque aube et à assembler les matrices réduites de chaque aube avec les matrices élément fini du disque. Dans un premier temps, l'observation  $\underline{b}_{sig}(\omega)$  est calculée à partir du modèle matriciel élément fini moyen de la structure par le solveur cyclique présenté au paragraphe 5.3 du chapitre II. Ce calcul constitue la solution de référence.

Le calcul de l'observation  $\underline{b}(\omega)$  par la méthode de sous-structuration dynamique nécessite de résoudre les équations (III.92) et (III.93). Une étude de convergence du modèle matriciel réduit moyen est effectuée en fonction du nombre  $n^a$  de modes propres de chaque aube à interface de couplage fixe.

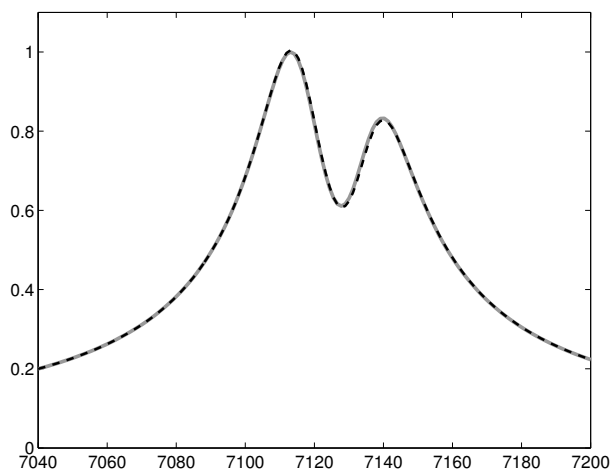
La figure VII.4 représente le graphe  $n^a \mapsto \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \underline{b}_{sig}(\omega)$  et permet de déduire qu'une bonne convergence est obtenue pour  $n^a = 6$ .

Soit  $\nu = \omega / (2\pi)$  la fréquence circulaire associée à la fréquence angulaire  $\omega$ . La figure VII.5 montre le graphe  $\nu \mapsto \underline{b}_{sig}(\nu)$  (trait noir interrompu) obtenu par sous-structuration dynamique et le graphe  $\nu \mapsto \underline{b}_{sig}(\nu)$  (trait gris continu) de la solution de référence. Les deux pics de résonances observés correspondent aux deux fréquences propres doubles  $\nu_1 = 7115 \text{ Hz}$  et  $\nu_2 = 7137 \text{ Hz}$  relatives au veering observé pour l'harmonique d'ordre  $n = 4$  sur la figure VII.2. Ce graphe confirme que  $n^a = 6$

modes d'aubes permettent de représenter correctement la solution de référence dans la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ .



**Figure VII.4** – Etude de la convergence du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée : graphe de la fonction  $n^a \mapsto \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \underline{b}_{sig}(\omega)$



**Figure VII.5** – Graphes des observations  $\nu \mapsto \underline{b}_{sig}(\nu)$  (trait noir interrompu) obtenue par sous-structuration avec le graphe  $\nu \mapsto \underline{b}_{sig}(\nu)$  (trait gris continu) de la solution de référence pour la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B} = [7040, 7200]Hz$ .

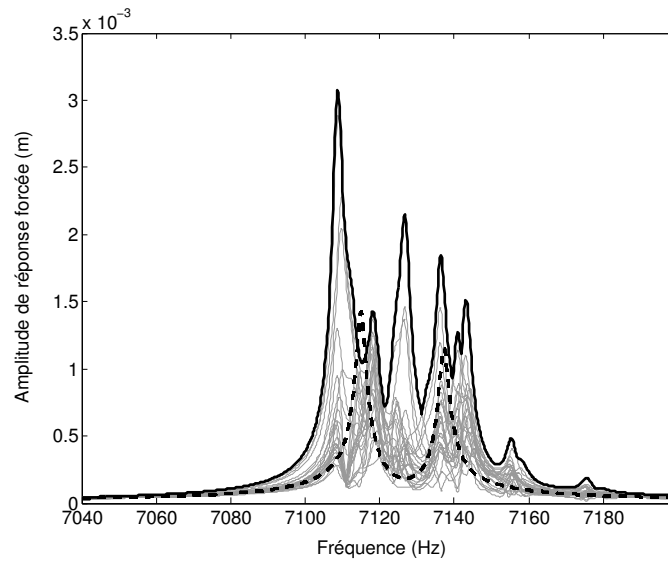
### 3. Etude des phénomènes physiques liés au désaccordage

Dans ce paragraphe, on exhibe numériquement les phénomènes d'amplification et de localisation spatiale obtenus par la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes de désaccordage. Le modèle probabiliste non paramétrique est implémenté sur chaque aube avec  $n^a = 30$ . Le niveau d'incertitudes est considéré homogène sur l'ensemble des aubes. Comme les incertitudes aléatoires de désaccordage sont statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre, les valeurs des paramètres de dispersion de raideur  $\delta_K^j$ , de dissipation  $\delta_D^j$  et de masse  $\delta_M^j$  sont telles que, pour tout  $j, k$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$

$$\delta_M^j = \delta_M^k = \delta_M, \quad \delta_D^j = \delta_D^k = \delta_D, \quad \delta_K^j = \delta_K^k = \delta_K, \quad \text{pour tout } j \neq k \quad . \quad (\text{VII.3})$$

Les valeurs suivantes des paramètres de dispersion sont considérées

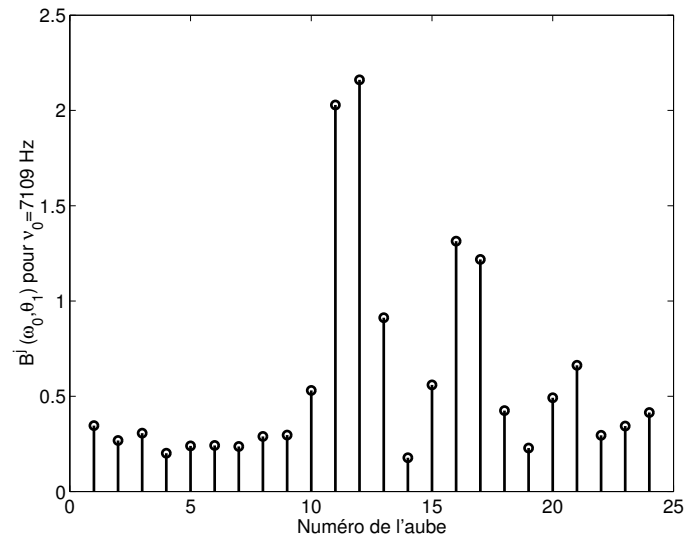
$$\delta_M = 0, \quad \delta_D = 0, \quad \delta_K = 0.01, \quad (\text{VII.4})$$



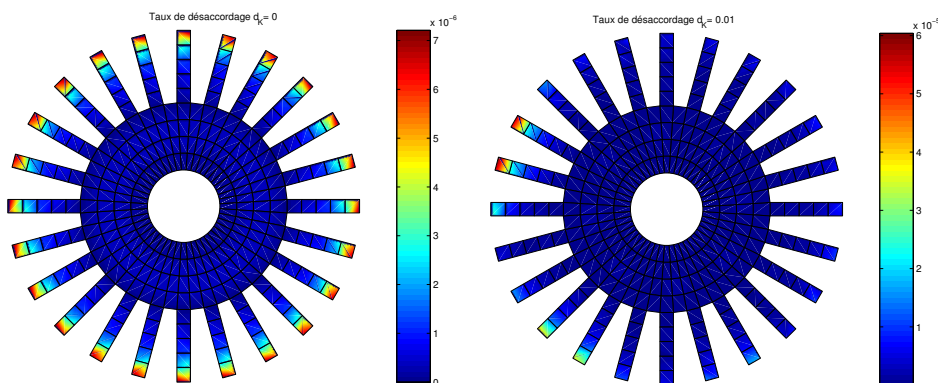
**Figure VII.6** – (1) Réponse forcée en déplacement (m) du système accordé en fonction de la fréquence d'excitation; graphe de  $\nu \mapsto \|\underline{\mathbf{u}}^j(\nu)\|_{\text{sig}}$  (trait noir pointillé). (2) Réalisation de la réponse forcée aléatoire en déplacement (m) en fonction de la fréquence d'excitation; graphes de  $\nu \mapsto \max_{j \in \{0, \dots, N-1\}} \|\mathbf{U}^j(\nu; \theta)\|_{\text{sig}}$  (trait noir continu épais) et de  $\nu \mapsto \|\mathbf{U}^j(\nu; \theta)\|_{\text{sig}}$  pour  $j \in \{0, \dots, N-1\}$  (traits gris continu fin)

La figure VII.6 montre le graphe d'une réalisation  $\theta$  des réponses aléatoires des 24 aubes en fonction de la fréquence. Le trait interrompu noir montre le graphe  $\nu \mapsto \|\underline{\mathbf{u}}^j(\nu)\|_{\text{sig}}$  de la réponse forcée accordée pour chaque aube. Les traits minces noirs montrent les fonctions  $\nu \mapsto \|\mathbf{U}^j(\nu; \theta)\|_{\text{sig}}$  et représentent

une réalisation  $\theta$  de la réponse forcée aléatoire de chaque aube. L'enveloppe supérieure de ces réponses forcées aléatoires  $\nu \mapsto \max_{j \in \{0, \dots, N-1\}} \|\mathbf{U}^j(\nu; \theta)\|_{\text{sig}}$  est représentée par le trait noir continu épais. Ce graphe montre que l'amplitude de la réponse forcée de chaque aube est différente lorsque la symétrie cyclique est brisée. Le phénomène d'amplification dynamique est observé. Il est maximal pour la fréquence  $\nu_0 = 7109 \text{ Hz}$ . On remarque que cette fréquence ne coïncide pas avec la fréquence de résonance du système accordé. Cela souligne l'importance d'étudier le désaccordage dans une bande d'analyse fréquentielle.



**Figure VII.7** – Réalisation du facteur d'amplification dynamique aléatoire  $B^j(\omega_0; \theta_1)$  pour toutes les aubes  $j$ .



**Figure VII.8** – Répartition spatiale de l'amplitude de réponse forcée de la roue aubagée : Cas accordé - Cas désaccordé pour  $\delta_K = 0.01, \delta_D = 0, \delta_M = 0$ .

La figure VII.7 montre la réalisation  $B_{\text{sig}}^j(\theta; \omega_0)$  du facteur aléatoire d'amplification dynamique de l'aube  $j$ , défini par l'équation (V.20) pour la fréquence  $\nu_0 = 7109 \text{ Hz}$  en fonction de l'aube  $j$ . Il est à noter que dans le cas de la structure accordée, l'observation serait identique sur chaque aube et l'amplification observée serait de 1. Dans le cas de la roue aubagée désaccordée, le phénomène d'amplification est mis

en évidence et le phénomène de localisation spatiale est observé sur les aubes 11 et 12.

La figure VII.8 montre la répartition spatiale de l'amplitude de la réponse forcée de la roue aubagée pour le système mécanique accordé (figure de gauche) et pour une réalisation du système mécanique désaccordé (figure de droite).

## 4. Etude comparative des résultats obtenus par différentes approches probabilistes

Dans ce paragraphe, on souhaite positionner l'approche probabiliste non paramétrique par rapport à l'approche probabiliste paramétrique couramment utilisée pour modéliser les incertitudes de désaccordage. Soit  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N - 1\}$ .

### 4.1 Critère pour positionner l'approche probabiliste non paramétrique

#### 4.1.1 Description du modèle probabiliste paramétrique usuel

Dans l'approche probabiliste paramétrique usuelle (voir par exemple [19, 91, 69]), un seul paramètre incertain est considéré : le module d'Young élastique de chaque aube. Par conséquent, la matrice de raideur élastique est modélisée par une variable aléatoire à valeur scalaire. Soit  $[\mathbf{K}^{j,\text{para}}]$  la matrice aléatoire élément fini de raideur élastique de l'aube  $j$ , obtenue par une telle approche probabiliste. Le modèle probabiliste de la matrice aléatoire  $[\mathbf{K}^{j,\text{para}}]$  est défini par

$$[\mathbf{K}^{j,\text{para}}] = (1 + \Lambda_K^j) [\underline{K}^j] \quad , \quad (\text{VII.5})$$

où  $[\underline{K}^j]$  est la matrice de raideur élastique issue du modèle matriciel élément fini moyen de l'aube  $j$ . La variable aléatoire  $\Lambda_K^j$  est à valeur réelle, centrée, et de distribution uniforme. L'écart type  $\sigma_K^j$  est tel que  $1 + \Lambda_K^j$  est positive presque sûrement. Ainsi, la matrice aléatoire  $[\mathbf{K}^{j,\text{para}}]$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n^a}^{+0}(\mathbb{R})$ . On a aussi

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{K}^{j,\text{para}}]\} = [\underline{K}^j] \quad . \quad (\text{VII.6})$$

#### 4.1.2 Définition du désaccordage fréquentiel

Soit  $(\lambda_\alpha^j, \underline{\varphi}_\alpha^j)$  un couple solution du problème généralisé aux valeurs propres du modèle matriciel élément fini moyen de l'aube  $j$

$$[\underline{K}^j] \underline{\varphi}_\alpha^j = \lambda_\alpha^j [\underline{M}^j] \underline{\varphi}_\alpha^j \quad , \quad (\text{VII.7})$$

et soit  $(\Lambda_\alpha^j, \varphi_\alpha^j)$  un couple solution du problème généralisé aux valeurs propres défini par

$$[\mathbf{K}^{j,\text{para}}] \varphi_\alpha^j = \Lambda_\alpha^j [\underline{M}^j] \varphi_\alpha^j \quad . \quad (\text{VII.8})$$

En utilisant les équations (VII.5), (VII.7) et (VII.8), on identifie

$$\varphi_\alpha^j = \underline{\varphi}_\alpha^j \quad , \quad (\text{VII.9})$$

$$\Lambda_\alpha^j = \underline{\Lambda}_\alpha^j (1 + \Lambda_K^j) \quad . \quad (\text{VII.10})$$

L'équation (VII.9) montre que les déformées modales de l'aube en présence d'incertitudes aléatoires ne sont pas sensibles au modèle probabiliste paramétrique introduit. Elles sont égales aux déformées modales issues du modèle matriciel élément fini moyen de l'aube. L'équation (VII.10) montre que les valeurs propres aléatoires  $\{\Lambda_1^j, \dots, \Lambda_{n_a}^j\}$  sont des variables aléatoires dépendantes. On conclut que la modélisation probabiliste paramétrique usuelle modélise le désaccordage en fréquences propres mais exclut le désaccordage en modes.

#### 4.1.3 Méthodologie de comparaison des approches probabilistes

La comparaison des approches probabilistes est limitée aux incertitudes sur la raideur élastique de chaque aube. Par conséquent, les paramètres de dispersion de masse et de dissipation sont tels que  $\delta_M^j = \delta_D^j = 0$ . On définit l'indicateur de dispersion  $W_K^{j,\text{para}}$  par

$$W_K^{j,\text{para}} = \mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j,\text{para}}] - [\underline{K}_{\text{red}}^j]\|_F^2\} \quad , \quad (\text{VII.11})$$

où  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j,\text{para}}]$  est la matrice aléatoire réduite de raideur de l'aube  $j$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_{m_a}^{+0}(\mathbb{R})$  définie par

$$[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j,\text{para}}] = [\underline{H}^j]^T [\mathbf{K}^{j,\text{para}}] [\underline{H}^j] \quad , \quad (\text{VII.12})$$

où  $[\underline{H}^j]$  est la matrice de passage définie par l'équation (III.28). En utilisant l'équation (VII.5) et en tenant compte des propriétés de symétrie de la matrice  $[\underline{K}_{\text{red}}^j]$ , on obtient

$$W_K^{j,\text{para}} = \sigma_K^j \text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j]^2) \quad . \quad (\text{VII.13})$$

De la même manière, on définit l'indicateur de dispersion  $W_K^j$  relatif au modèle probabiliste non paramétrique par

$$W_K^j = \mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{\text{red}}^j] - [\underline{K}_{\text{red}}^j]\|_F^2\} \quad , \quad (\text{VII.14})$$

En utilisant l'expression (VI.15), on obtient

$$W_K^j = \frac{(\delta_K^j)^2}{\sqrt{\tilde{m}^a} + 1} \left( \text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j]^2) + \text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j])^2 \right) \quad , \quad (\text{VII.15})$$



où  $\tilde{m}^a$  est le rang de la matrice  $[\underline{K}_{\text{red}}^j]$ .

Les deux approches probabilistes sont comparées en égalisant les indicateurs de dispersion  $W_K^j$  et  $W_K^{j,\text{para}}$ . Se fixant le paramètre de dispersion  $\delta_K^j$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  issu de la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes, on calcule l'écart type  $\sigma_K^j$  de la variable aléatoire  $\Lambda_K^j$  pour que

$$W_K^j = W_K^{j,\text{para}} \quad . \quad (\text{VII.16})$$

En utilisant les équations (VII.13) et (VII.15), on déduit que la valeur de l'écart type  $\sigma_K^j$  est

$$\sigma_K^j = \frac{\delta_K^j}{\sqrt{\tilde{m}^a + 1}} \left( 1 + \frac{\text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j])^2}{\text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j]^2)} \right) \quad . \quad (\text{VII.17})$$

## 4.2 Analyse des résultats sur le facteur d'amplification dynamique des aubes à une fréquence donnée

On effectue une analyse numérique permettant de positionner le modèle probabiliste non paramétrique par rapport au modèle probabiliste paramétrique usuel. Les observations aléatoires issues de l'approche probabiliste paramétrique usuelle sont différenciées des observations aléatoires de celles issues de l'approche probabiliste non paramétrique par l'exposant indiciel "para".

### 4.2.1 Choix des paramètres numériques

Le modèle matriciel réduit aléatoire pour la roue aubagée est celui décrit dans le paragraphe 4.2.1 du chapitre V. On s'intéresse aux observations  $B_{\text{sig}}(\omega)$  et  $B_{\text{sig}}^{\text{para}}(\omega)$ , définies d'après l'équation (V.21), qu'on notera  $B(\omega)$  et  $B^{\text{para}}(\omega)$ . Les paramètres numériques, contrôlant la taille du modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée sont  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (n^a = 8; n = 120)$ , où  $n^a$  est le nombre de modes propres de chaque aube à interface de couplage fixe, et où  $n = 120$  est le nombre de modes propres du modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée.

Pour  $\omega$  fixé dans  $\mathbb{B}$ , les valeurs extrêmes d'échantillon sont notées  $B_{\text{min}}(\omega)$  et  $B_{\text{max}}(\omega)$ , et sont définies par

$$B_{\text{min}}(\omega) = \inf_{k \in \{1, \dots, n_s\}} B(\omega; \theta_k) \quad , \quad (\text{VII.18})$$

$$B_{\text{max}}(\omega) = \sup_{k \in \{1, \dots, n_s\}} B(\omega; \theta_k) \quad , \quad (\text{VII.19})$$

où  $B(\omega; \theta_k)$  est la réalisation  $\theta_k$  de  $B(\omega)$ . Soit  $\alpha$ , un niveau de probabilité. Les quantiles  $B_{\alpha+}(\omega)$ ,  $B_{\alpha-}(\omega)$  sont estimés par les équations (V.37) à (V.38).

### Niveau des incertitudes aléatoires de désaccordage

Se donnant pour paramètre de dispersion  $\delta_K^j = 0.01$ , la valeur de l'écart type  $\sigma_K^j$  identifiée à partir de l'équation (VII.17) est  $\sigma_K^j = 0.0056$ . On rappelle que le niveau d'incertitude est supposé homogène sur les aubes avec des incertitudes statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre. On pose  $\delta_M = \delta_M^j$ ,  $\delta_D = \delta_D^j$ ,  $\delta_K = \delta_K^j$  et  $\sigma_K = \sigma_K^j$ . On effectue une simulation numérique de Monte Carlo pour  $n_s = 4000$  réalisations avec

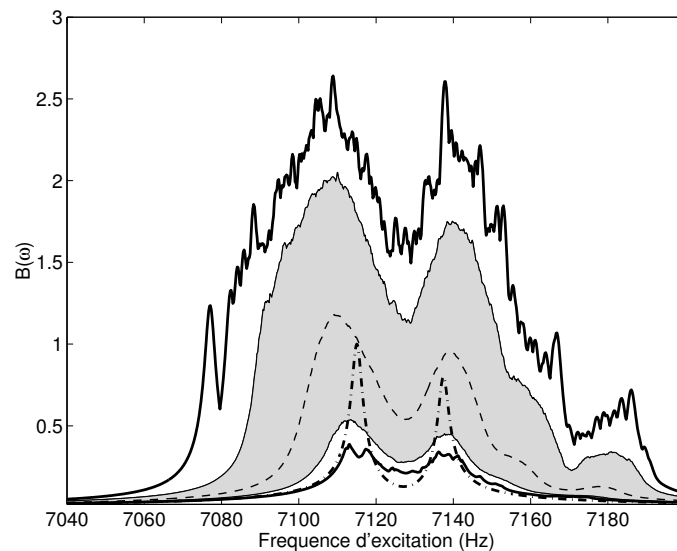
$$\begin{aligned} \delta_M = 0 \quad , \quad \delta_D = 0 \quad , \quad \delta_K = 0.01 \quad (\text{approche non paramétrique}) \quad , \\ \sigma_K = 0.0056 \quad (\text{approche paramétrique}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{VII.20})$$

### Fréquence d'excitation

#### Modélisation probabiliste non paramétrique

La figure VII.9 représente les graphes de la région de confiance du facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B(\omega)$ , obtenue pour un niveau de probabilité  $\alpha = 0.99$ . La région de confiance correspond à la zone grisée dont l'enveloppe est délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . La valeur moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  est représentée par le trait interrompu fin. Les graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  correspondent aux traits continus épais inférieur et supérieur. Enfin le trait mixte épais représente  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$ .

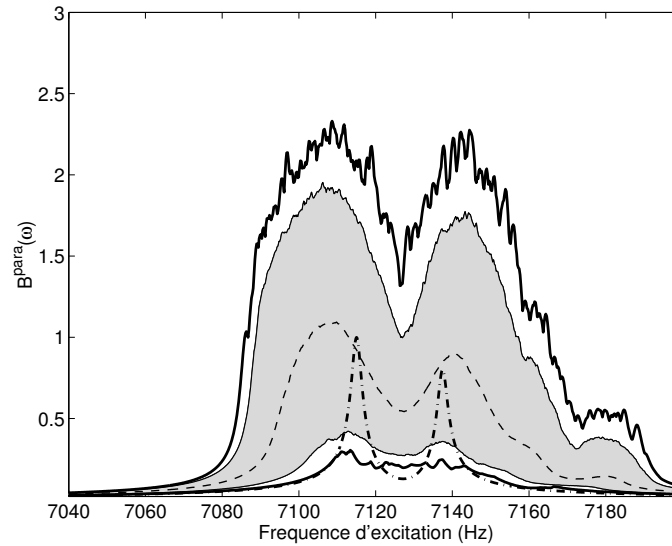
La fréquence pour laquelle les valeurs extrêmes d'échantillons sont maximales est  $\nu_0 = \omega_0/(2\pi) = 7108 \text{ Hz}$ .



**Figure VII.9** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) relatif à la structure accordée.

Modélisation probabiliste paramétrique

La figure VII.10 représente les graphes similaires obtenus par l'approche probabiliste paramétrique. En particulier, la fréquence pour laquelle les valeurs extrêmes d'échantillons sont maximales est  $\nu_0^{\text{para}} = \omega_0^{\text{para}} / (2\pi) = 7108.2 \text{ Hz}$ .

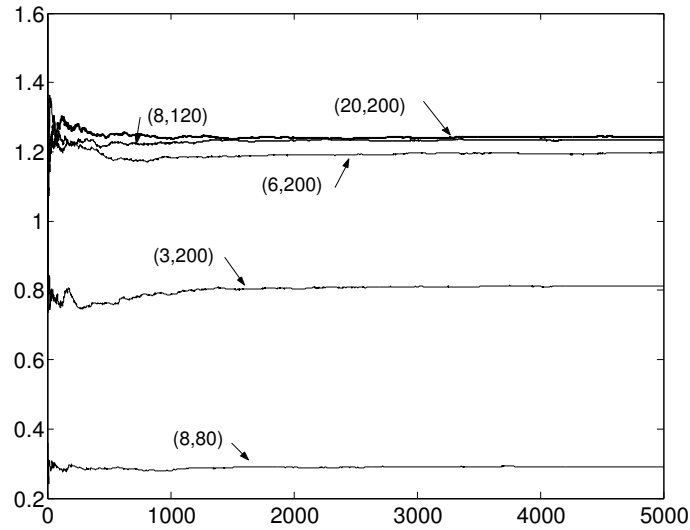


**Figure VII.10** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha-}^{\text{para}}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha+}^{\text{para}}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B^{\text{para}}(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}^{\text{para}}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}^{\text{para}}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) relatif à la structure accordée.

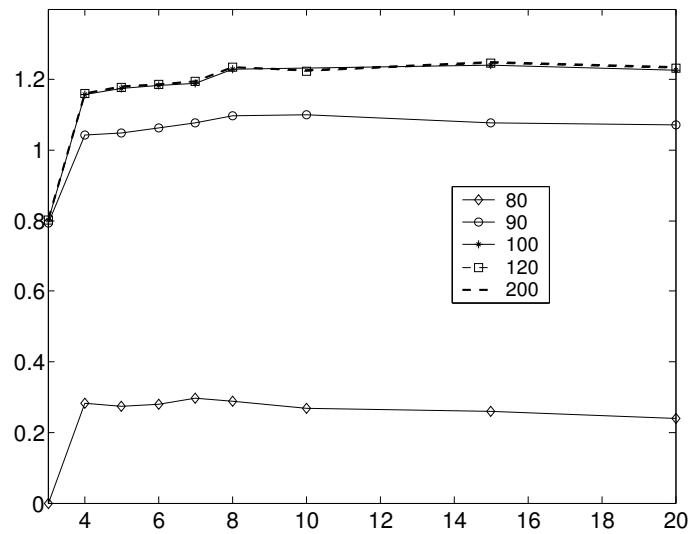
On choisit de s'intéresser aux variables aléatoires  $B(\omega_0)$  et  $B^{\text{para}}(\omega_0^{\text{para}})$  notées  $B_0$  et  $B_0^{\text{para}}$ . On souhaite estimer avec précision la queue des fonctions de densités de probabilité  $b \mapsto p_{B_0}(b)$  et  $b \mapsto p_{B_0^{\text{para}}}(b)$ .

Analyse de convergence

Une analyse de convergence est effectuée *a posteriori* afin de vérifier que les valeurs des paramètres numériques  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a = 8; \mathfrak{n} = 120)$  et  $n_s = 4000$  sont pertinents. Les figures VII.11 à VII.13 concernent la convergence des variables aléatoires  $B_0$  et  $B_0^{\text{para}}$  en moyenne d'ordre deux (voir paragraphe 4 du chapitre V), par rapport à  $\mathbf{n}_{\text{red}}$ , contrôlant la dimension du modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée et par rapport au nombre  $n_s$  de réalisations utilisées dans la simulation numérique de Monte Carlo. La figure VII.11 montre le graphe  $n_s \mapsto \text{Conv}(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour différentes valeurs de  $\mathbf{n}_{\text{red}}$  et permet de conclure qu'une bonne convergence vis à vis du nombre de simulations est obtenue pour  $n_s = 1500$ . La figure VII.12 montre le graphe  $\mathfrak{n}^a \mapsto \text{Conv}(n_s = 1500, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour différentes valeurs de  $\mathfrak{n}$  :  $\mathfrak{n} = 80$  (trait inférieur),  $\mathfrak{n} = 90$  (trait du milieu),  $\mathfrak{n} \geq 100$  (traits supérieurs). Il est déduit que les valeurs numériques  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a = 8; \mathfrak{n} = 120)$  permettent d'obtenir une bonne approximation.

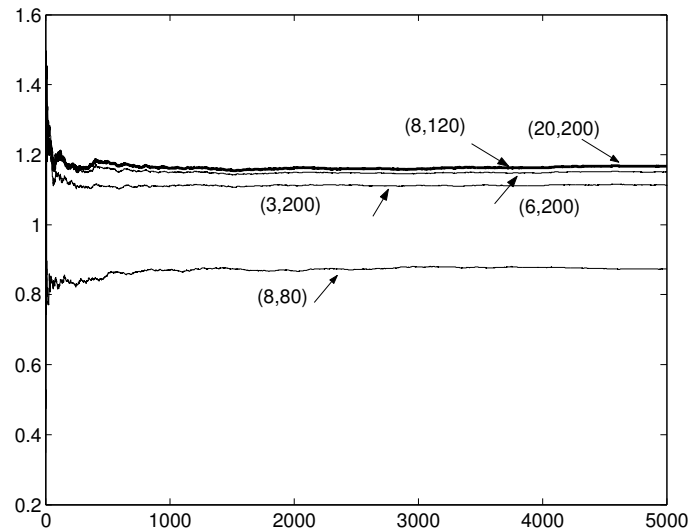


**Figure VII.11** – Analyse de convergence du modèle probabiliste non paramétrique : graphes des fonctions  $n_s \mapsto \text{Conv}(n_s, \mathbf{n}_{red})$  pour différentes valeurs de  $\mathbf{n}_{red}$ .



**Figure VII.12** – Analyse de convergence du modèle probabiliste non paramétrique : graphes des fonctions  $n^a \mapsto \text{Conv}(n_s = 1500, \mathbf{n}_{red})$  pour différentes valeurs de  $n$  :  $n = 80$  (trait inférieur),  $n = 90$  (trait du milieu),  $n \geq 100$  (traits supérieurs).

La figure VII.13 montre le graphe  $n_s \mapsto \text{Conv}^{\text{para}}(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour différentes valeurs de  $\mathbf{n}_{\text{red}}$  pour le modèle probabiliste paramétrique. On en déduit qu'une bonne convergence est obtenue pour  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a = 8, \mathfrak{n} = 120)$ . Par ailleurs, en comparant les figures VII.11 et VII.13, on observe que la convergence vis à vis des paramètres de réduction modale est plus rapide pour la modélisation probabiliste paramétrique.

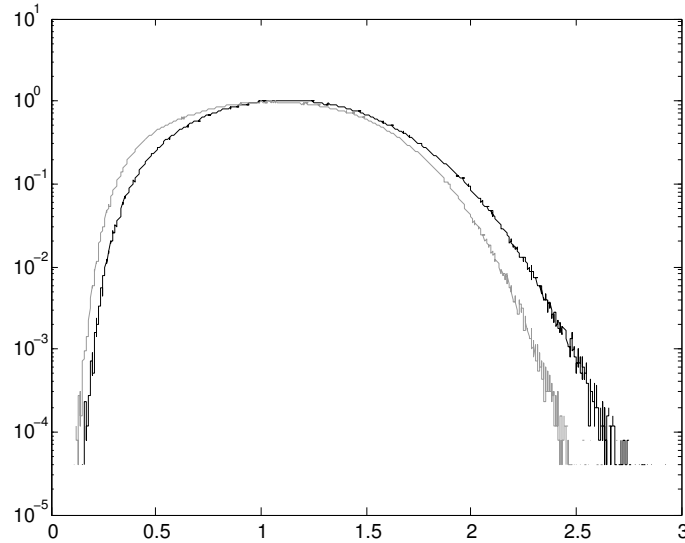


**Figure VII.13** – Analyse de convergence du modèle probabiliste paramétrique : graphes des fonctions  $n_s \mapsto \text{Conv}^{\text{para}}(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour différentes valeurs de  $\mathbf{n}_{\text{red}}$ .

#### 4.2.2 Présentation des résultats numériques et interprétation

Comme on souhaite estimer avec précision les faibles niveaux de probabilité des variables aléatoires  $B_0$  et  $B_0^{\text{para}}$ , une simulation numérique de Monte Carlo est effectuée pour  $n_s = 8\,500\,000$  réalisations. La figure VII.14 montre une estimation des densités de probabilité  $b \mapsto p_{B_0}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_0^{\text{para}}}(b)$  (trait gris).

Il est observé que le support de la fonction de densité de probabilité  $p_{B_0}(b)$  admet une borne supérieure. Une estimation de cette borne supérieure est donnée par la statistique de la valeur maximale d'échantillons notée  $B_{0,\text{max}}$  et telle que  $B_{0,\text{max}} = 2.93$ . De même, on a  $B_{0,\text{max}}^{\text{para}} = 2.66$ . Soit  $B_{\text{max}}^{\text{WHI}} = \frac{1+\sqrt{N}}{2}$ , avec  $N$  le nombre d'aubes de la roue aubagée, la valeur maximale du facteur d'amplification dynamique obtenue théoriquement par Whitehead [106, 107]. Cette borne supérieure a été obtenue sous certaines hypothèses sur un modèle mécanique constitué d'oscillateurs linéaires couplés avec 1 DDL par aube par la modélisation paramétrique usuelle. Dans le cas de la modélisation probabiliste non paramétrique, la valeur numérique obtenue pour  $B_{0,\text{max}}$  est comparable à la borne théorique  $B_{\text{max}}^{\text{WHI}} = 2.95$ . Il est à noter que des recherches récentes, proposant une modélisation du désaccordage conduisant à des fréquences propres aléatoires d'aubes indépendantes dans leur ensemble, ont montré l'existence de réalisations pour lesquelles cette borne maximale théorique est dépassée [109].



**Figure VII.14** – Fonction de densité de probabilité du facteur d’amplification dynamique aléatoire  $B_0$  et  $B_0^{para}$  en échelle semi-logarithmique : graphes des fonctions  $b \mapsto p_{B_0}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_0^{para}}(b)$  (trait gris).

Les graphes montrent également que les modèles probabilistes non paramétrique et paramétrique ne prédisent pas le même niveau d’amplification. Le support de la fonction de densité de probabilité  $p_{B_0}(b)$  est plus large que celui de  $p_{B_0^{para}}(b)$ . Il est de plus translaté vers des niveaux d’amplification de réponse forcée plus importants. Pour les conditions numériques présentées, le modèle probabiliste non paramétrique prédit de plus larges amplifications dynamiques que celles obtenues par le modèle probabiliste paramétrique usuel.

### 4.3 Analyse des résultats sur le facteur d’amplification dynamique des aubes sur une bande d’analyse fréquentielle

On s’intéresse aux observations  $B_{sig,\infty}$  et  $B_{sig,\infty}^{para}$ , définies d’après l’équation (V.22) dans la bande d’analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ , qu’on notera  $B_\infty$  et  $B_\infty^{para}$ .

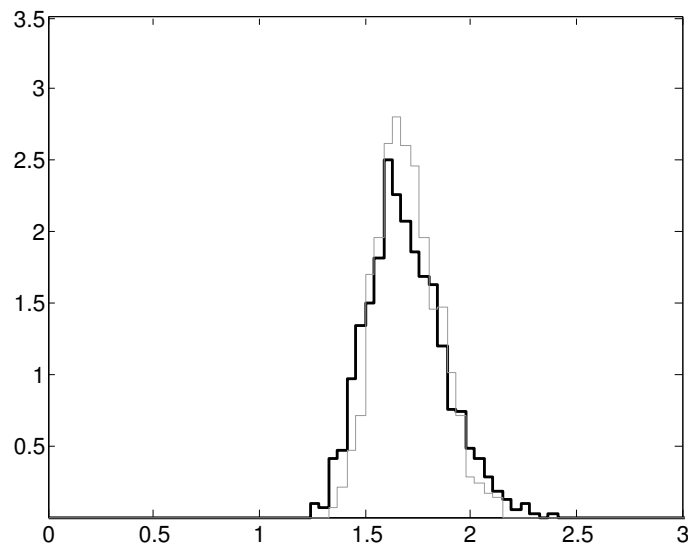
#### 4.3.1 Etude numérique de l’influence du niveau d’incertitudes de désaccordage

Une étude paramétrique est effectuée en fonction du niveau d’incertitudes de désaccordage pour chaque modèle probabiliste. Dans ce paragraphe, les fonctions de densité de probabilité et les fonctions de répartition sont étudiées pour cinq cas différents concernant les incertitudes de raideur. Le tableau suivant résume les différents cas étudiés :

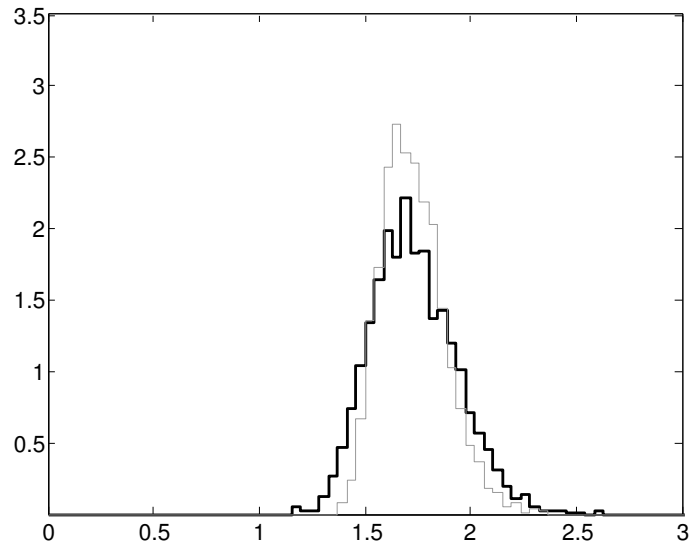
	Approche non paramétrique $\delta_K$	Approche paramétrique $\sigma_K$
Cas 1	0.005	0.0028
Cas 2	0.01	0.0056
Cas 3	0.02	0.0112
Cas 4	0.03	0.0168
Cas 5	0.04	0.0224

**Table VII.2** – Niveau d’incertitudes de désaccordage pour les approches probabilistes non paramétrique et paramétrique

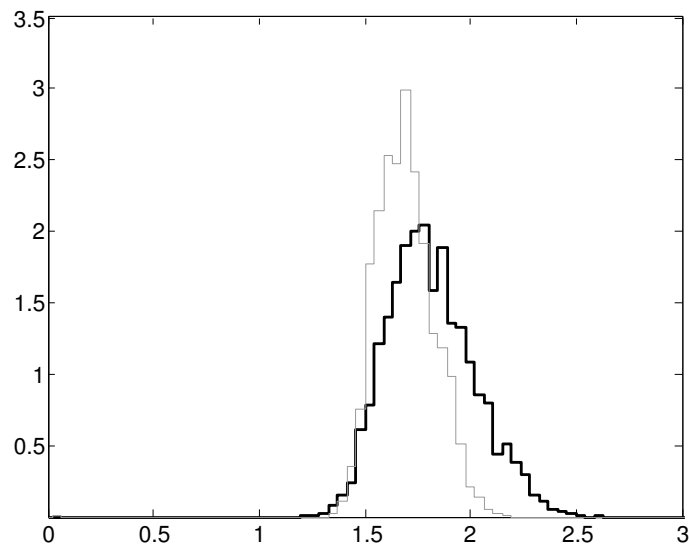
Les figures VII.15 à VII.19 montrent les graphes des fonctions de densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_\infty^{\text{para}}}(b)$  (trait gris) obtenues pour  $n_s = 1500$  réalisations. Les résultats obtenus par les deux approches probabilistes sont différents. En effet, les figures VII.17 à VII.19 indiquent nettement, pour des niveaux de désaccordage  $\delta_K > 0.01$ , que les maxima des fonctions de densité de probabilité  $p_{B_\infty}(b)$  et  $p_{B_\infty^{\text{para}}}(b)$  ne se produisent pas pour la même valeur de  $b$ . Les fonctions de densité de probabilité  $p_{B_\infty}(b)$  sont translatées par rapport aux fonctions  $p_{B_\infty^{\text{para}}}(b)$  vers des facteurs d’amplification dynamique plus importants. De plus, bien que le niveau de dispersion des incertitudes aléatoires de désaccordage introduit soit le même pour chacune des deux approches probabilistes utilisées, l’ensemble des figures VII.15 à VII.19 montre que la dispersion de la variable aléatoire  $B_\infty$  est plus forte que celle de la variable aléatoire  $B_\infty^{\text{para}}$ . Par conséquent, le modèle probabiliste non paramétrique prédit des valeurs extrêmes d’échantillon du facteur d’amplification dynamique beaucoup plus fortes.



**Figure VII.15** – Fonction de densité de probabilité du facteur d’amplification dynamique aléatoire  $B_\infty$  et  $B_\infty^{\text{para}}$  pour  $\delta_K = 0.005$  et  $\sigma_K = 2.8 \cdot 10^{-3}$  : graphes des fonctions  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_\infty^{\text{para}}}(b)$  (trait gris).

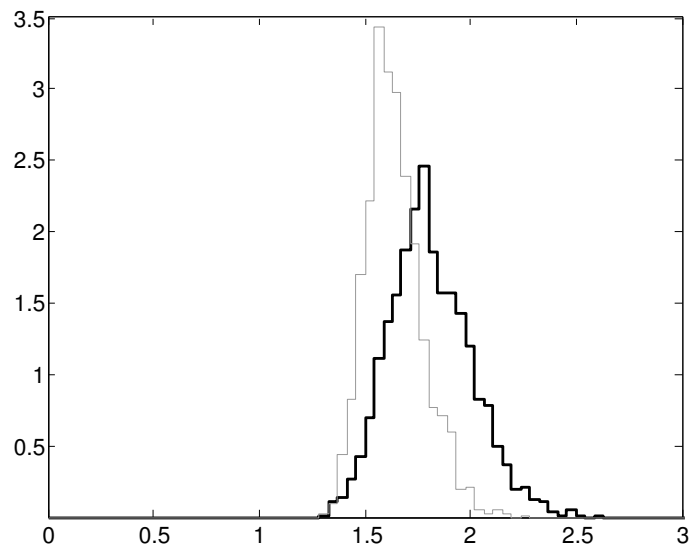


**Figure VII.16** – Fonction de densité de probabilité du facteur d’amplification dynamique aléatoire  $B_\infty$  et  $B_\infty^{para}$  pour  $\delta_K = 0.01$  et  $\sigma_K = 5.6 \cdot 10^{-3}$  : graphes des fonctions  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_\infty^{para}}(b)$  (trait gris).

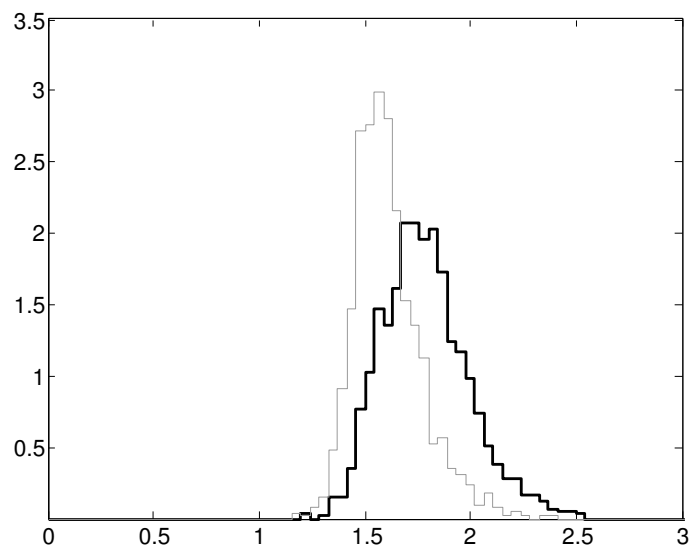


**Figure VII.17** – Fonction de densité de probabilité du facteur d’amplification dynamique aléatoire  $B_\infty$  et  $B_\infty^{para}$  pour  $\delta_K = 0.02$  et  $\sigma_K = 1.12 \cdot 10^{-2}$  : graphes des fonctions  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_\infty^{para}}(b)$  (trait gris).



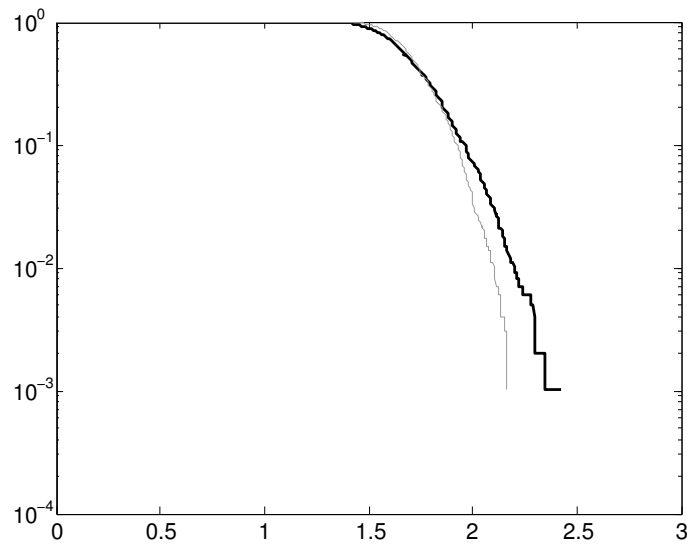


**Figure VII.18** – Fonction de densité de probabilité du facteur d’amplification dynamique aléatoire  $B_\infty$  et  $B_\infty^{para}$  pour  $\delta_K = 0.03$  et  $\sigma_K = 1.68 \cdot 10^{-2}$  : graphes des fonctions  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_\infty^{para}}(b)$  (trait gris).

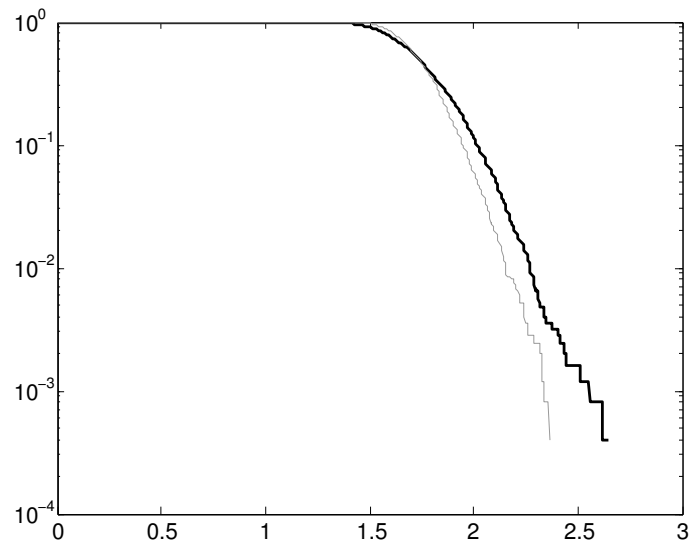


**Figure VII.19** – Fonction de densité de probabilité du facteur d’amplification dynamique aléatoire  $B_\infty$  et  $B_\infty^{para}$  pour  $\delta_K = 0.04$  et  $\sigma_K = 2.24 \cdot 10^{-2}$  : graphes des fonctions  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  (trait noir) et  $b \mapsto p_{B_\infty^{para}}(b)$  (trait gris).

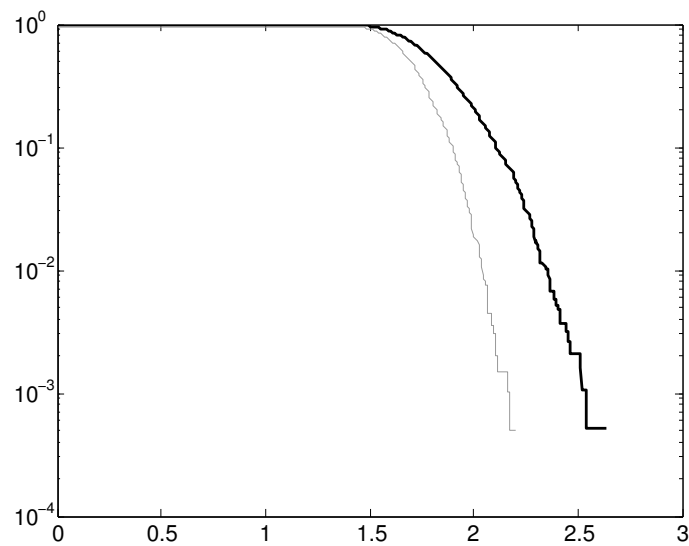
Les figures VII.20 à VII.24 montrent les graphes des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  (trait noir) et  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > b)$  (trait gris) en représentation semi-logarithmique afin de visualiser les valeurs extrêmes des réalisations du facteur d'amplification dynamique correspondant à un faible niveau de probabilité. Les niveaux de probabilité supérieurs à  $p = 0.01$  sont représentés avec précision. Ces graphes permettent de confirmer que pour un niveau de probabilité fixé suffisamment faible, l'approche probabiliste non paramétrique prédit de plus larges amplifications que celles obtenues par la modélisation probabiliste paramétrique usuelle. En comparant les figures VII.21 et VII.22, on remarque que les facteurs d'amplification obtenus par les deux approches probabilistes n'évoluent pas de la même manière en fonction du niveau d'incertitudes introduit.



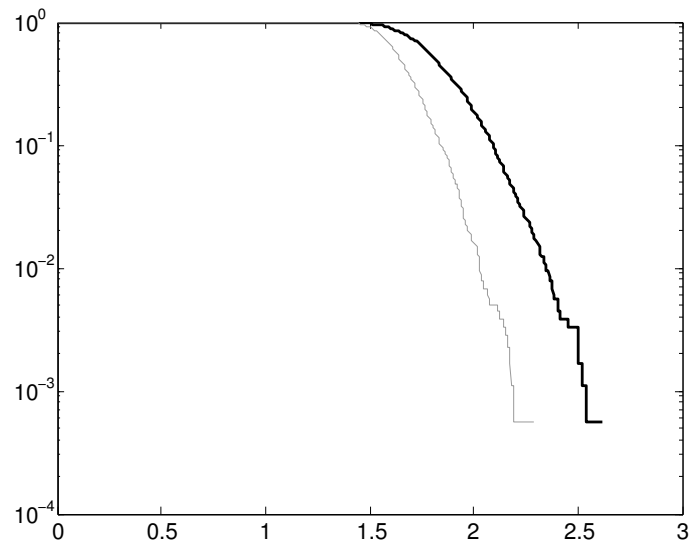
**Figure VII.20** – Graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  (trait noir) et  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > b)$  (trait gris continu) en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_K = 0.005$  et  $\sigma_K = 2.8 \cdot 10^{-3}$ .



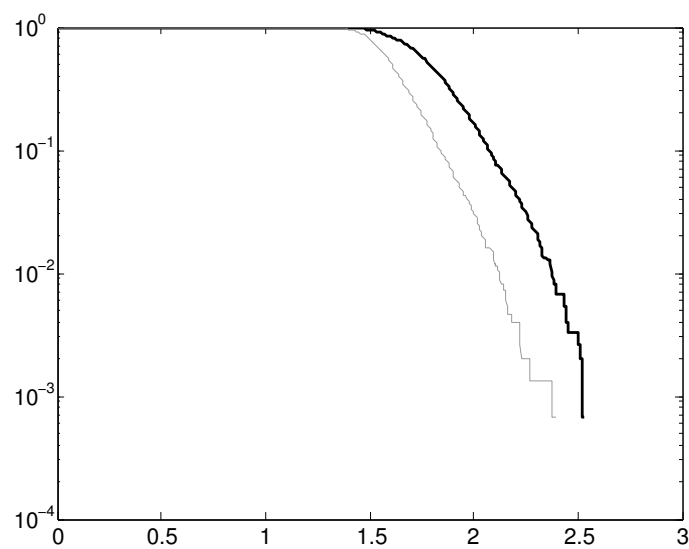
**Figure VII.21** – Graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  (trait noir) et  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{para} > b)$  (trait gris) en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_K = 0.01$  et  $\sigma_K = 5.6 \cdot 10^{-3}$ .



**Figure VII.22** – Graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  (trait noir) et  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{para} > b)$  (trait gris) en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_K = 0.02$  et  $\sigma_K = 1.12 \cdot 10^{-2}$ .

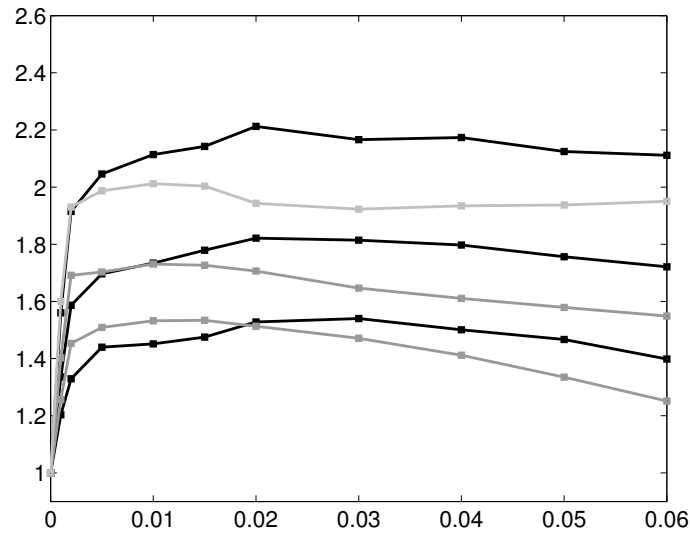


**Figure VII.23** – Graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  (trait noir) et  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{para} > b)$  (trait gris) en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_K = 0.03$  et  $\sigma_K = 1.68 \cdot 10^{-2}$ .



**Figure VII.24** – Graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  (trait noir) et  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{para} > b)$  (trait gris) en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_K = 0.04$  et  $\sigma_K = 2.24 \cdot 10^{-2}$ .

Soit  $\alpha = 0.95$  un niveau de probabilité fixé. On s'intéresse plus particulièrement à l'étude paramétrique de la région de confiance du facteur d'amplification dynamique  $B_\infty$  en fonction du niveau de désaccordage. En utilisant les équations (V.37) à (V.38), les estimateurs du  $\alpha$ -quantile  $B_{\infty,\alpha+}$ , de la médiane  $B_{\infty,m}$  et du  $(1 - \alpha)$ -quantile  $B_{\infty,\alpha-}$  relatifs à la variable aléatoire  $B_\infty$  sont calculés. La figure VII.25 montre les graphes de ces estimateurs en fonction du paramètre de dispersion  $\delta_K$ . Les traits noirs épais correspondent aux fonctions  $\delta_K \mapsto B_{\infty,\alpha-}$  (courbe inférieure),  $\delta_K \mapsto B_{\infty,1/2}$  (courbe du milieu)  $\delta_K \mapsto B_{\infty,\alpha+}$  (courbe supérieure). Les traits gris correspondent aux fonctions  $\delta_K \mapsto B_{\infty,\alpha-}^{\text{para}}$ ,  $\delta_K \mapsto B_{\infty,1/2}^{\text{para}}$  et  $\delta_K \mapsto B_{\infty,\alpha+}^{\text{para}}$ . Chacune de ces courbes possèdent un maximum local qui se produit pour un faible niveau de désaccordage. Toutefois, ces maximums ne sont pas obtenus pour le même niveau de désaccordage selon l'approche probabiliste utilisée.



**Figure VII.25** – Influence du niveau d'incertitude de désaccordage : graphes de  $\delta_K \mapsto Q_{B_\infty}(p)$  (trait noir) et de  $\delta_K \mapsto Q_{B_\infty^{\text{para}}}(p)$  (trait gris). Les courbes inférieures, du milieu et supérieures correspondent à  $p = 1 - \alpha$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $p = \alpha$ .

4.3.2 Etude numérique de l'influence du taux de dissipation de la structure

Une étude paramétrique est effectuée en fonction du taux de dissipation représenté par le facteur de perte  $\eta$  pour un niveau de désaccordage en raideur fixé. La plage de variation concernant le facteur de perte de la structure est  $[10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-2}]$ . Les quantités probabilistes estimées sont la moyenne et l'écart type du facteur d'amplification dynamique  $B_\infty$  et leurs estimateurs sont notés  $m_{B_\infty}$  et  $\sigma_{B_\infty}$ . La figure VII.26 montre les graphes  $\eta \mapsto m_{B_\infty}$  (trait noir) et  $\eta \mapsto m_{B_\infty^{\text{para}}}$  (trait gris) pour  $\delta_K = 0.02$ . La figure VII.27 montre les graphes  $\eta \mapsto \sigma_{B_\infty}$  (trait noir) et  $\eta \mapsto \sigma_{B_\infty^{\text{para}}}$  (trait gris) pour  $\delta_K = 0.02$ .

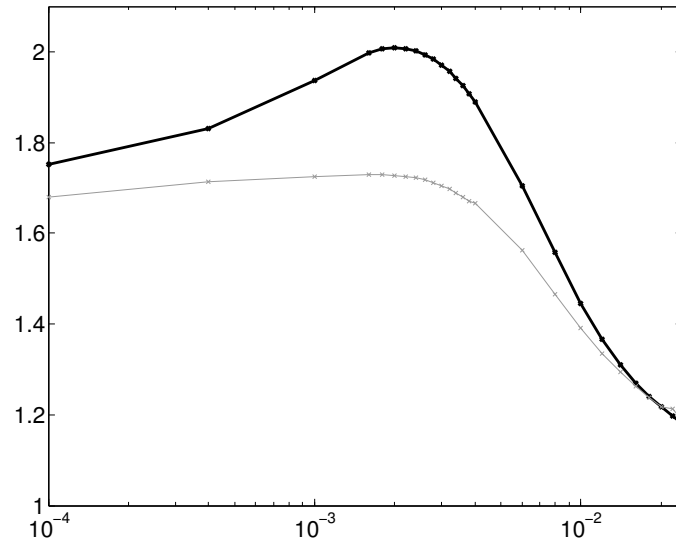
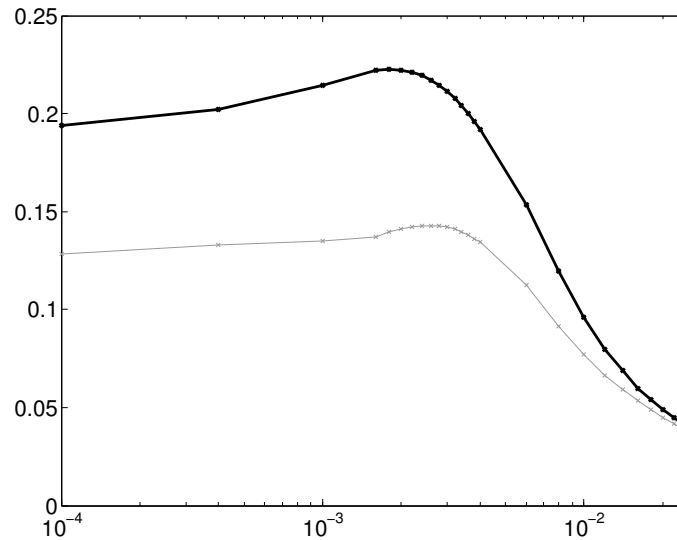


Figure VII.26 – Influence du facteur de perte pour  $\delta_K = 0.02$ . Graphes des fonctions  $\eta \mapsto m_{B_\infty}$  (trait noir) et  $\eta \mapsto m_{B_\infty^{\text{para}}}$  (trait gris)



**Figure VII.27** – Influence du facteur de perte pour  $\delta_K = 0.02$ . Graphes des fonctions  $\eta \mapsto \sigma_{B_\infty}$  (trait noir) et  $\eta \mapsto \sigma_{B_\infty}^{para}$  (trait gris)

### 4.3.3 Conclusions de l'étude comparative entre les des deux approches probabilistes

La modélisation probabiliste paramétrique usuelle ne permet de prendre en compte que les incertitudes de données concernant le module d'Young de chaque aube. La modélisation probabiliste non paramétrique inclut à la fois les incertitudes de données et les incertitudes de modélisation. Etant donné que les origines du désaccordage sont multiples, l'approche probabiliste non paramétrique permet de modéliser plus efficacement les incertitudes aléatoires induites par le désaccordage des aubes. D'après les équations (VII.9) et (VII.10), la modélisation probabiliste usuelle ne prend en compte que les incertitudes sur les fréquences propres de chaque aube. L'approche probabiliste non paramétrique s'avère plus complète car elle modélise toutes les sources d'incertitudes. En particulier, le désaccordage des fréquences propres et des déformées modales qui leur sont associées sont pris en compte de manière cohérente. En effet, les fréquences propres aléatoires et les déformées modales associées sont des variables aléatoires dépendantes résultant d'un unique modèle probabiliste. L'influence du désaccordage en modes est par conséquent étudiée au travers des différents résultats numériques. Les différences obtenues montrent notamment que la prise en compte du désaccordage des déformées modales dans la modélisation probabiliste prédit de plus forts niveaux d'amplification dynamique. Ces résultats vont dans le même sens que ceux obtenus par Mignolet *et al* dans le cadre d'une identification expérimentale utilisant le principe du maximum de vraisemblance et incluant ou non les déformées modales aléatoires [72, 82].





# Chapitre VIII

## Validation du problème inverse sur un exemple simple

### 1. Introduction

L'objet de ce chapitre est de tester la méthodologie inverse présentée au chapitre VI sur l'exemple numérique simple présenté au chapitre VII.

Le paragraphe 2 présente la construction *a priori* du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube, utilisé au paragraphe 3 pour identifier les paramètres de dispersion des matrices aléatoires de masse et de rigidité. Dans le paragraphe 4, on étudie la variabilité du facteur aléatoire d'amplification dynamique aux paramètres de dispersion. Les résultats de ce paragraphe et du paragraphe 3 sont utilisés pour déterminer les tolérances de l'aube correspondant à un niveau de probabilité donné du facteur aléatoire d'amplification dynamique. Les résultats obtenus montrent la faisabilité de la méthodologie proposée.

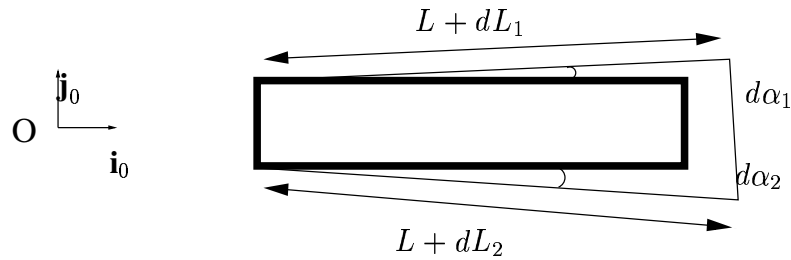
Dans les paragraphes 2 et 3, traitant de l'identification des paramètres de dispersion par rapport aux tolérances des aubes, on restreint l'analyse à une seule aube et on omet l'exposant indiciel  $j$  dans les notations mathématiques.

## 2. Construction du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube

### 2.1 Définition des paramètres tolérancés de l'aube

Le modèle matriciel éléments finis de l'aube nominale est défini comme étant le modèle matriciel élément fini moyen de l'aube. On utilise ce modèle pour définir les paramètres tolérancés. On rappelle que les éléments finis utilisés sont des éléments finis de plaque mince (théorie des plaques de Kirchoff-Love) à 4 nœuds. La figure VIII.1 donne une schématisation du plan moyen de l'aube nominale de forme rectangulaire (trait noir continu épais) utilisé pour définir le plan moyen d'une aube manufacturée de forme quadrangulaire (trait noir continu fin).

On suppose que les sommets supérieur et inférieur de la base de l'aube ne sont pas affectés par les tolérances. Des tolérances sont définies sur le sommet supérieur (ou inférieur) de l'extrémité de l'aube. La position du sommet supérieur (ou inférieur) de l'extrémité de l'aube est contrôlée par le paramètre de longueur  $dL_1$  (ou  $dL_2$ ) et par le paramètre angulaire  $d\alpha_1$  (ou  $d\alpha_2$ ). Ces sommets définissent un quadrilatère représentant le plan moyen d'une aube manufacturée. De plus, une tolérance sur l'épaisseur de la plaque est ajoutée en introduisant le paramètre d'épaisseur  $de$  défini à l'extrémité de l'aube.



**Figure VIII.1** – Description des paramètres géométriques des tolérances de l'aube : (1) plan moyen de l'aube nominale (trait noir continu épais) - (2) plan moyen de l'aube manufacturée (trait noir continu fin).

Les paramètres  $dL_1$ ,  $dL_2$ ,  $d\alpha_1$ ,  $d\alpha_2$  et  $de$  paramétrant les tolérances sont tels que

$$dL_1 \in [-dL_{1,m}, dL_{1,M}] \quad , \quad dL_2 \in [-dL_{2,m}, dL_{2,M}] \quad , \quad (\text{VIII.1})$$

$$d\alpha_1 \in [-d\alpha_{1,m}, d\alpha_{1,M}] \quad , \quad d\alpha_2 \in [-d\alpha_{2,m}, d\alpha_{2,M}] \quad , \quad (\text{VIII.2})$$

$$de \in [-de_m, de_M] \quad , \quad (\text{VIII.3})$$

où  $dL_{1,m}$ ,  $dL_{1,M}$ ,  $dL_{2,m}$ ,  $dL_{2,M}$ ,  $d\alpha_{1,m}$ ,  $d\alpha_{1,M}$ ,  $d\alpha_{2,m}$ ,  $d\alpha_{2,M}$ ,  $de_m$  et  $de_M$  sont des réels positifs, caractérisant les tolérances de l'aube.

## 2.2 Modèle probabiliste sur la position des nœuds du maillage

### 2.2.1 Loi des variables aléatoires modélisant les tolérances

Le principe d'indépendance [12] est appliqué aux tolérances. Ce principe impose que les contraintes définies par les équations (VIII.1) à (VIII.3) sont réalisées indépendamment les unes des autres. Par conséquent, en se plaçant dans le contexte probabiliste du tolérancement des aubes, les paramètres tolérancés  $dL_1$ ,  $dL_2$ ,  $d\alpha_1$ ,  $d\alpha_2$  et  $de$  sont modélisés par les variables aléatoires  $\Delta L_1$ ,  $\Delta L_2$ ,  $\Delta\alpha_1$ ,  $\Delta\alpha_2$  et  $\Delta e$  indépendantes dans leur ensemble. On note  $p_{\Delta L_1}(dL_1)$ ,  $p_{\Delta L_2}(dL_2)$ ,  $p_{\Delta\alpha_1}(d\alpha_1)$ ,  $p_{\Delta\alpha_2}(d\alpha_2)$ ,  $p_{\Delta e}(de)$  leur fonction de densité de probabilité. En appliquant le principe du maximum d'entropie avec les contraintes définies par les équations (VIII.1) à (VIII.3), on déduit que ces variables aléatoires sont de loi uniforme avec

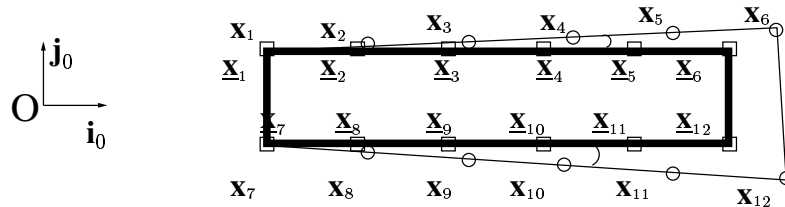
$$\{\text{Supp } p_{\Delta L_1}(dL_1)\} = [-dL_{1,m}, dL_{1,M}] \quad , \quad \{\text{Supp } p_{\Delta L_2}(dL_2)\} = [-dL_{2,m}, dL_{2,M}] \quad , \quad (\text{VIII.4})$$

$$\{\text{Supp } p_{\Delta\alpha_1}(d\alpha_1)\} = [-d\alpha_{1,m}, d\alpha_{1,M}] \quad , \quad \{\text{Supp } p_{\Delta\alpha_2}(d\alpha_2)\} = [-d\alpha_{2,m}, d\alpha_{2,M}] \quad , \quad (\text{VIII.5})$$

$$\{\text{Supp } p_{\Delta e}(de)\} = [-de_m, de_M] \quad . \quad (\text{VIII.6})$$

### 2.2.2 Définition de la géométrie aléatoire de l'aube

La figure VIII.2 représente les nœuds du maillage de l'aube nominale (trait noir continu épais) et les nœuds du maillage d'une aube manufacturée (trait noir continu fin). Ce maillage est constitué de 5 éléments et de 12 nœuds. On se place dans le plan  $(O, \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0)$  du repère  $\mathcal{R}_0$  défini au chapitre I.



**Figure VIII.2** – Définition du maillage : (1) maillage de l'aube nominale - (2) maillage de l'aube manufacturée.

Soit  $\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{x}}_1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_{12})$ , le vecteur de  $\mathbb{R}^{24}$  définissant la position des nœuds du maillage de l'aube nominale. On note  $\underline{\mathbf{x}}_i = (\underline{\mathbf{x}}_{i,1}, \underline{\mathbf{x}}_{i,2})$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  des coordonnées du nœud  $i$  de l'aube. On définit de même le vecteur  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^{24}$  définissant la position des nœuds de l'aube manufacturée. Les nœuds  $i$ , avec  $i$  dans  $\{1, \dots, 6\}$  (ou  $i$ , avec  $i$  dans  $\{7, \dots, 12\}$ ) sont situés sur le bord supérieur (ou inférieur) de l'aube. On modélise le vecteur  $\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}$  par le vecteur aléatoire  $\Delta \mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{24}$ . Au premier ordre, on a

$$\Delta X_{i,1} = \frac{i-1}{5} \Delta L_1, \forall i \in \{1, \dots, 6\} \quad , \quad \Delta X_{i,1} = \frac{i-7}{5} \Delta L_2, \forall i \in \{7, \dots, 12\} \quad (\text{VIII.7})$$

$$\Delta X_{i,2} = \frac{i-1}{5} L \Delta \alpha_1, \forall i \in \{1, \dots, 6\} \quad , \quad \Delta X_{i,2} = \frac{i-7}{5} L \Delta \alpha_2, \forall i \in \{7, \dots, 12\} \quad (\text{VIII.8})$$

Soient  $el_1, el_2, el_3, el_4$  et  $el_5$ , les 5 éléments finis de plaque constituant l'aube numérotés de la base vers le bout de l'aube. On attribue à chaque élément de plaque  $el_j$  une fluctuation d'épaisseur aléatoire notée  $E_j$  et telle que

$$E_j = \frac{j \Delta e}{5} \quad . \quad (\text{VIII.9})$$

### 3. Identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique

Ce paragraphe a pour objectif de mettre en œuvre la stratégie d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique présentée au chapitre VI. Dans le chapitre VII, le problème direct étudié utilise les équations aléatoires (IV.64) et (IV.65), tel que les incertitudes aléatoires affectent la totalité des DDLs associés aux matrices réduites de chaque aube (voir équation (IV.57)). En conséquence, la procédure d'identification des paramètres de dispersion est effectuée sur la totalité des DDLs de chaque aube.

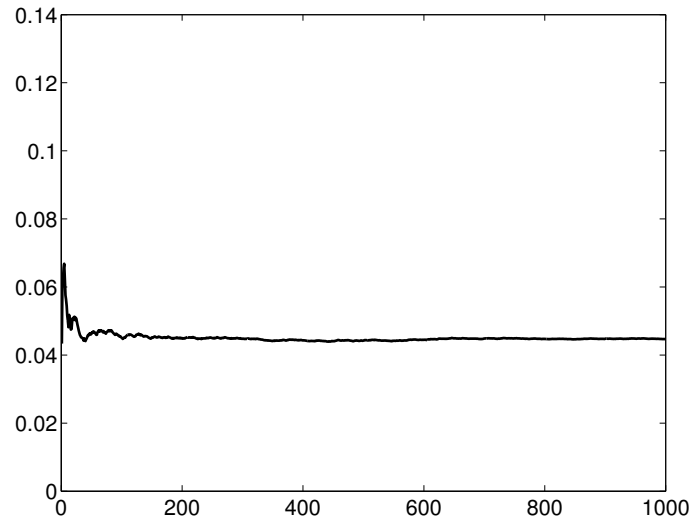
On choisit d'étudier le cas où les tolérances sont caractérisées par le paramètre scalaire  $\underline{\tau} > 0$  défini par

$$\underline{\tau} = dL_{i,m} = dL_{i,M} = L d\alpha_{i,m} = L d\alpha_{i,M} = de_m = de_M \quad , \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad . \quad (\text{VIII.10})$$

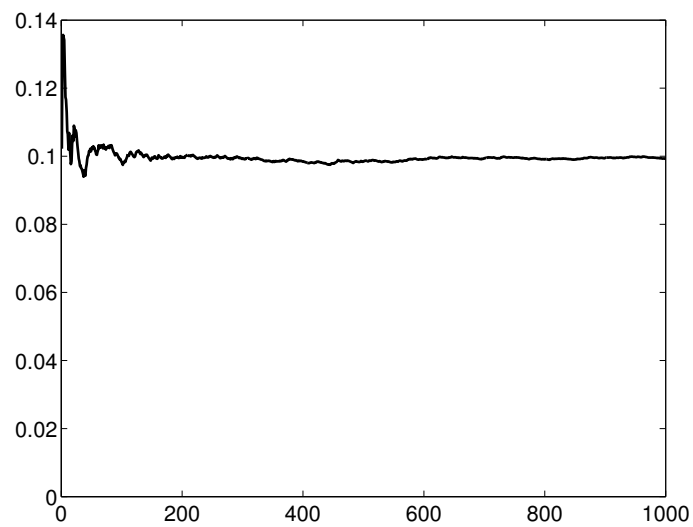
Il est à noter que les variables aléatoires  $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2$  et  $\Delta e$  sont des variables aléatoires uniformes centrées.

#### 3.1 Etude de convergence

On rappelle que l'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique est effectuée par une simulation numérique de Monte Carlo, utilisant le modèle probabiliste de la géométrie de l'aube. On cherche donc à déterminer le nombre  $n_s$  de réalisations nécessaires pour observer la convergence des estimateurs  $\hat{\delta}_M$  et  $\hat{\delta}_K$  des paramètres de dispersion de masse et de raideur. Pour  $\underline{\tau} = 100 \mu m$ , la figure VIII.3 représente le graphe  $n_s \mapsto \hat{\delta}_M$  et la figure VIII.4 représente le graphe  $n_s \mapsto \hat{\delta}_K$ . Une bonne convergence est obtenue pour  $n_s = 200$ . Dans la suite, on note  $\delta_M$  et  $\delta_K$  les valeurs convergées des estimateurs  $\hat{\delta}_M$  et  $\hat{\delta}_K$ .



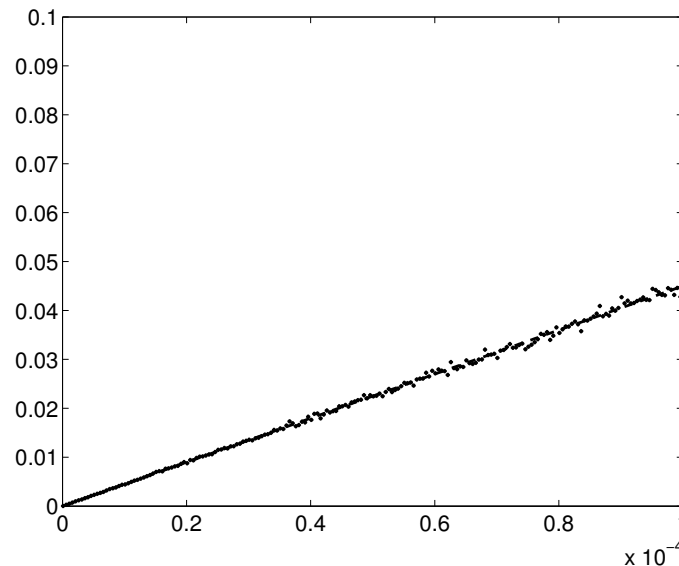
**Figure VIII.3** – Convergence de l'estimateur du paramètre de dispersion de masse : graphe de la fonction  $n_s \mapsto \hat{\delta}_M$



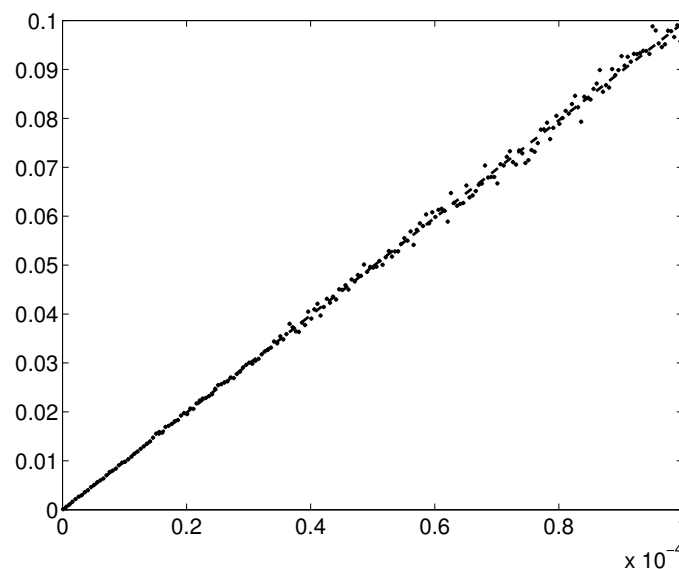
**Figure VIII.4** – Convergence de l'estimateur du paramètre de dispersion de raideur : graphe de la fonction  $n_s \mapsto \hat{\delta}_K$ .

### 3.2 Résultats numériques concernant l'identification des paramètres de dispersion

Dans ce paragraphe, on effectue une étude paramétrique des paramètres de dispersion en fonction de la tolérance  $\underline{\tau}$ . Les figures VIII.5 et VIII.6 montrent les graphes  $\underline{\tau} \mapsto \delta_M$  et  $\underline{\tau} \mapsto \delta_K$ .



**Figure VIII.5** – Identification du paramètre de dispersion de masse : graphe de la fonction  $\underline{\tau} \mapsto \delta_M$  pour  $\underline{\tau} \in [0, 100] \mu m$  obtenu par simulation numérique de Monte Carlo (symbole  $\cdot$ ) et par interpolation linéaire (trait noir continu)



**Figure VIII.6** – Identification du paramètre de dispersion de raideur : graphe de la fonction  $\underline{\tau} \mapsto \delta_K$  pour  $\underline{\tau} \in [0, 100] \mu m$  obtenu par simulation numérique de Monte Carlo (symbole  $\cdot$ ) et par interpolation linéaire (trait noir continu)

On constate sur les figures VIII.5 et VIII.6 que la procédure d'identification conduit à des paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  proportionnels aux tolérances. On observe, pour une tolérance donnée, que le paramètre de dispersion  $\delta_M$  est plus petit que le paramètre de dispersion  $\delta_K$ . La perturbation aléatoire de la géométrie d'aube génère davantage d'incertitudes sur la raideur que sur la masse.

## 4. Résultats numériques concernant le problème inverse sur les tolérances géométriques de l'aube

### 4.1 Données pour l'analyse probabiliste non paramétrique du désaccordage

Dans ce paragraphe, on effectue une analyse probabiliste non paramétrique du désaccordage.

Les données du modèle moyen de la roue aubagée sont identiques à celle du paragraphe 2 du chapitre VII, à l'exception que le facteur de perte  $\eta$ , résultant du modèle d'amortissement, est égal à  $\eta = 0.003$ . La bande d'analyse fréquentielle étudiée est  $\mathbb{B} = [6700, 7800] Hz$ . Les observations choisies sont les facteurs aléatoires d'amplification dynamique  $B_{\text{elas}}(\omega)$  et  $B_{\text{elas},\infty}$ , définis par les équations (V.24) et (V.25), qu'on notera  $B(\omega)$  et  $B_\infty$ .

On considère le cas d'incertitudes homogènes sur chaque aube et on pose, pour tout  $j$  dans  $\{0, \dots, N - 1\}$ ,

$$\delta_M = \delta_M^j, \quad \delta_D = \delta_D^j, \quad \delta_K = \delta_K^j. \quad (\text{VIII.11})$$

Les figures VIII.5 et VIII.6 montrent que l'identification des paramètres de dispersion conduit à des incertitudes sur la masse et sur la raideur de l'aube corrélées. Pour le cas considéré, on supposera que le processus de fabrication de la roue aubagée nécessite d'assembler les aubes au disque, puis d'effectuer un équilibrage dynamique de la roue aubagée. On supposera en outre que cet équilibrage dynamique, consistant à confondre l'axe d'inertie de la roue avec son axe de rotation, est effectué en ajoutant ou en retirant de la matière sur le disque. On négligera ces modifications sur le disque et on supposera que l'équilibrage dynamique de la roue aubagée permet de négliger le niveau d'incertitude de la masse. On attribuera ainsi la valeur nulle au paramètre de dispersion  $\delta_M$ . On souligne que cette approximation ne change rien à la méthodologie, et constitue uniquement une simplification de sa mise en œuvre, l'objectif de ce chapitre étant de présenter un cas test-simple validant cette méthodologie inverse.

De plus, la problématique de tolérancement des aubes n'affecte pas la dissipation du système mécanique. On a donc  $\delta_D = 0$ .

Le tableau suivant résume les différentes valeurs des paramètres de dispersion pour lesquels le problème direct est présenté.

	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4	cas 5	cas 6	cas 7	cas 8	cas 9	cas 10	cas 11	cas 12
$\delta_M$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\delta_D$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\delta_K$	0.002	0.004	0.006	0.01	0.015	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.1

**Table VIII.1** – Description des différents cas de désaccordage présentés

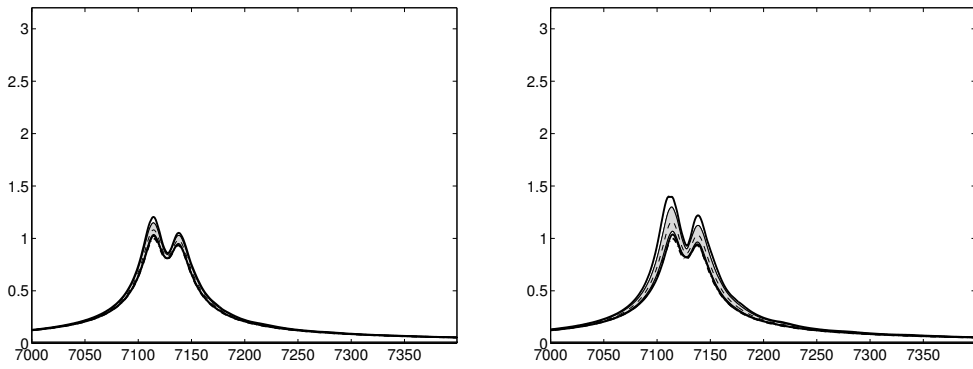
## 4.2 Analyse de l'observation aléatoire $B(\omega)$

Les figures VIII.7 à VIII.12 présentent la région de confiance de l'observation aléatoire  $B(\omega)$ , pour un niveau de probabilité  $\alpha = 0.99$  pour chacun des cas. La région de confiance correspond à la région grisée dont les enveloppes inférieure et supérieure sont les quantiles exprimés pour les niveaux de probabilité  $\alpha = 0.01$  et  $\alpha = 0.99$  (voir paragraphe 5.2 du chapitre V). Le trait mixte correspond à la réponse forcée normalisée du modèle moyen. Les enveloppes inférieure et supérieure sont les valeurs extrêmes d'échantillon, et le trait interrompu est la valeur moyenne de la variable aléatoire.

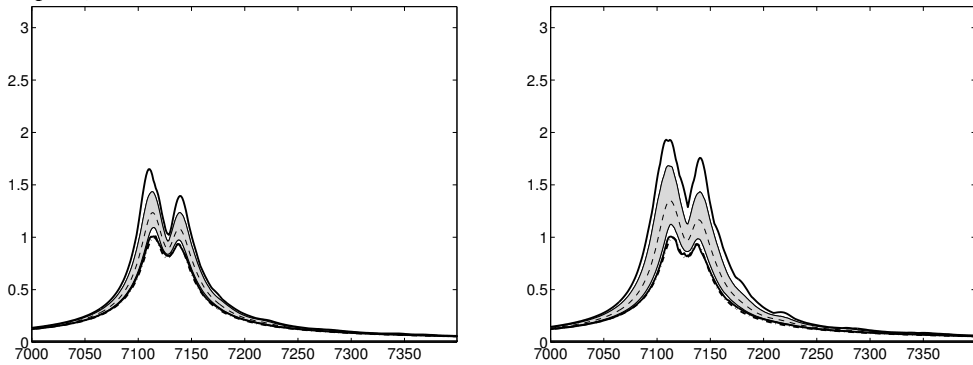
Les figures VIII.7 à VIII.12 montrent des résultats très différents. Les régions de confiance sont donc très sensibles au niveau d'incertitudes introduit. Pour des niveaux d'incertitudes tels que  $\delta_K < 0.02$ , les figures VIII.7 à VIII.9 montrent que la région de confiance suit les deux résonances de la réponse forcée de la roue aubagée accordée. La région de confiance possède donc deux pics distincts. Lorsque le niveau d'incertitudes augmente, la région de confiance s'élargit en s'étalant sur la bande d'analyse fréquentielle. On constate sur les figures VIII.10 et VIII.11 un recouvrement progressif des deux pics, pour ne distinguer, sur la figure VIII.12 qu'un seul pic.

Par ailleurs, on remarque que le maximum des valeurs maximales d'échantillon croît avec le niveau d'incertitudes pour atteindre des facteurs d'amplification supérieurs à 2.5. On observe sur les figures VIII.10 et VIII.11 que ce maximum atteint un seuil limite. Ce phénomène s'accompagne d'un étalement progressif de la région de confiance tendant à devenir une bande.

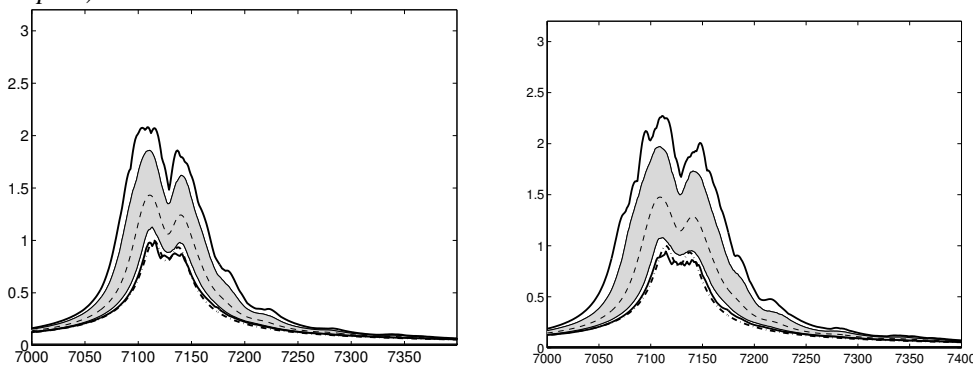




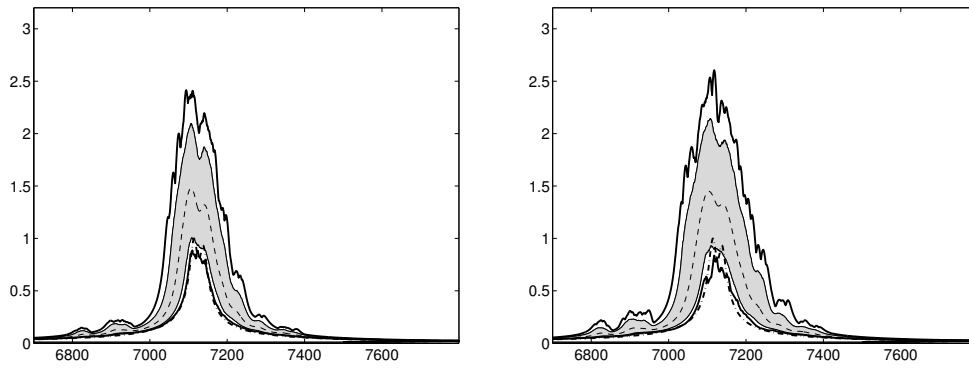
**Figure VIII.7** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 1 - Cas 2.



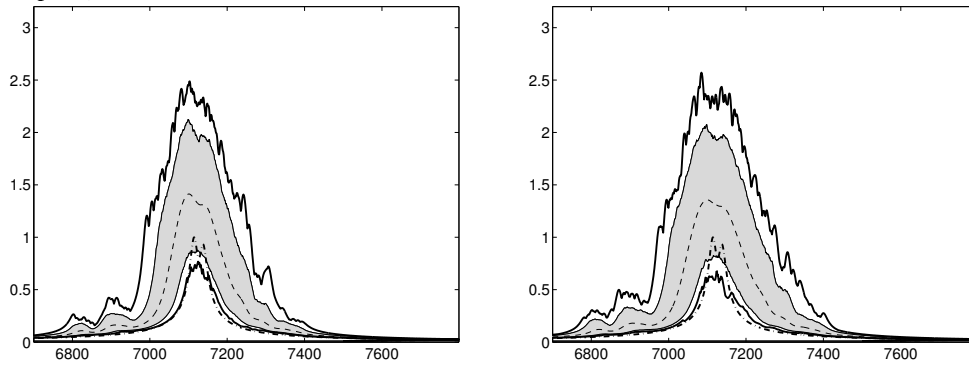
**Figure VIII.8** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 3 - Cas 4.



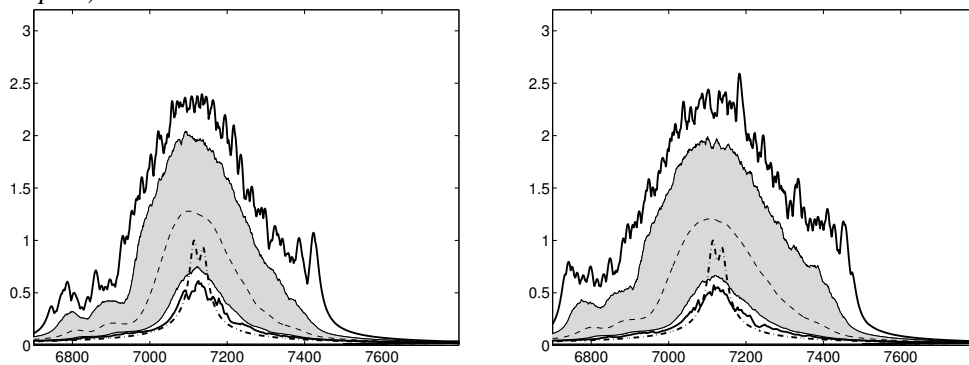
**Figure VIII.9** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 5 - Cas 6.



**Figure VIII.10** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 7 - Cas 8.



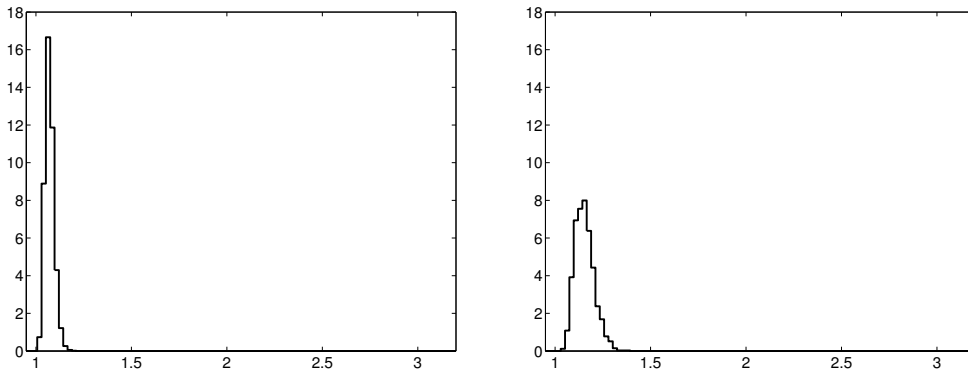
**Figure VIII.11** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 9 - Cas 10.



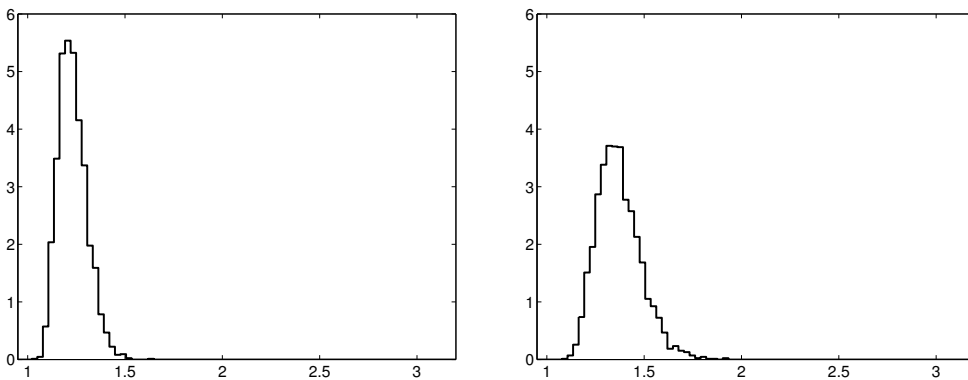
**Figure VIII.12** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 11 - Cas 12.

### 4.3 Analyse de l'observation aléatoire $B_\infty$

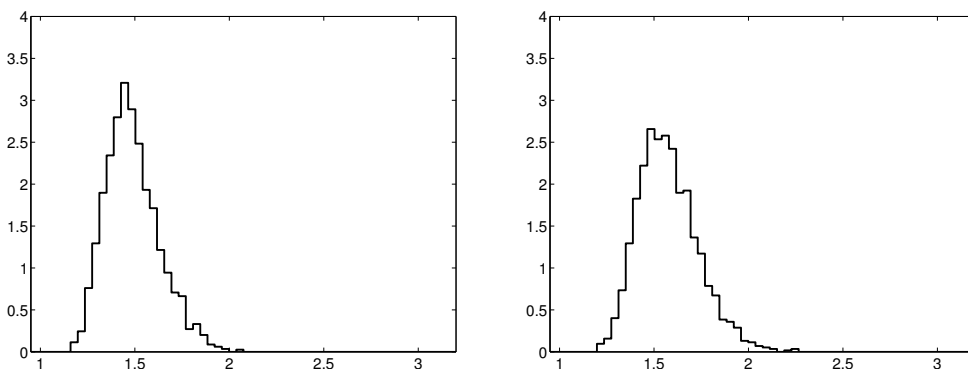
Les figures VIII.13 à VIII.18 représentent les graphes  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  pour chacun des cas étudiés. Les figures VIII.19 à VIII.24 représentent les graphes  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour chacun des cas étudiés.



**Figure VIII.13** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  Cas 1 - Cas 2.



**Figure VIII.14** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  Cas 3 - Cas 4.

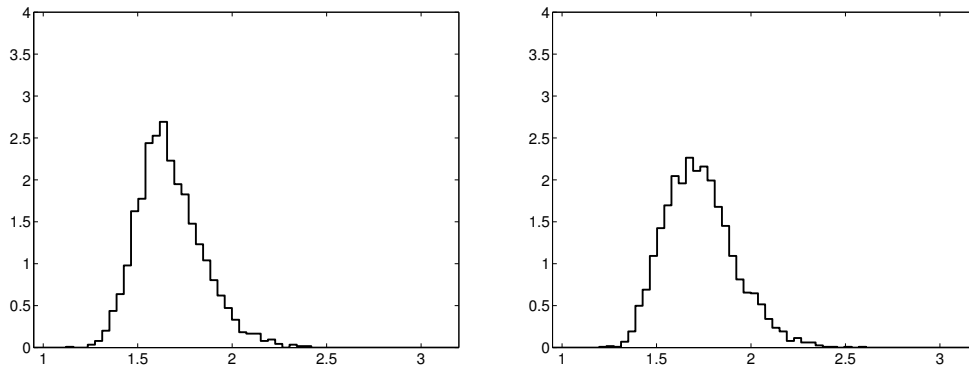


**Figure VIII.15** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  Cas 5 - Cas 6.

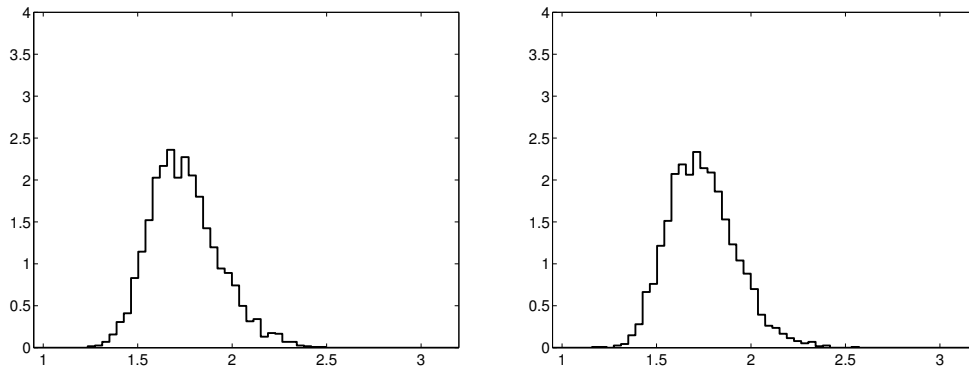
Il est à noter que, dans le cas d'une modélisation probabiliste paramétrique usuelle des incertitudes de désaccordage, les fonctions de densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}^{\text{para}}(b)$  s'identifient avec une loi de Weibull [67, 68]. Dans le cas présent, ce type d'identification pourrait être effectué.

#### 4.4 Spécification des tolérances

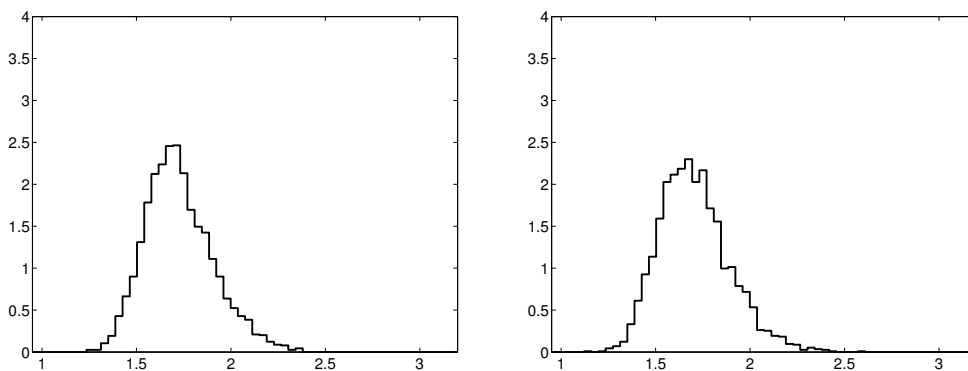
On cherche à déterminer les tolérances optimales pour un niveau de probabilité fixé du facteur d'amplification dynamique  $B_\infty$ . La figure VIII.25 montre le graphe de  $\delta_K \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour  $b = 1.2$  (trait noir continu),  $b = 1.3$  (trait gris continu),  $b = 1.4$  (trait noir mixte),  $b = 1.5$  (trait gris mixte),  $b = 1.6$  (trait noir pointillé),  $b = 1.7$  (trait gris pointillé) et  $b = 1.8$  (trait noir interrompu). Le critère de qualité de la structure défini dans le paragraphe 5 du Chapitre VI est utilisé pour spécifier les tolérances de l'aube. Soit  $\mathcal{C}_Q = (b_c, p_c)$  un jeu de paramètres donné définissant la qualité de la structure. On cherche à trouver les tolérances  $\underline{\tau}$  tel que  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c) < b_c$ . Le domaine de valeurs du paramètre de dispersion  $\delta_K$  satisfaisant ce critère de qualité peut être directement lu à partir de la figure VIII.25. Les valeurs des tolérances sont directement déduites de la figure VIII.6. On remarque sur la figure VIII.25 que la fonction  $\delta_K \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b_c)$  admet un maximum. La présence de ce maximum global montre qu'il peut exister un intervalle interdit de valeurs des tolérances noté  $[\underline{\tau}_{\min}, \underline{\tau}_{\max}]$ . Si les tolérances sont telles que  $\underline{\tau} < \underline{\tau}_{\min}$ , on en déduit que la fabrication de l'aube nécessite une très haute précision pour satisfaire le critère de qualité. Au contraire, si  $\underline{\tau} > \underline{\tau}_{\max}$ , le critère de qualité est également vérifié. Pour certains cas, il existe donc deux façons de spécifier les tolérances : une façon nécessite une haute précision dans le processus de fabrication, l'autre façon correspond au désaccordage intentionnel [20]. On montre ainsi que les aubes d'une roue aubagée, intentionnellement désaccordées en spécifiant les tolérances telles que  $\underline{\tau} > \underline{\tau}_{\max}$ , ou bien fabriquées avec des exigences très strictes telles que  $\underline{\tau} < \underline{\tau}_{\min}$ , conduisent au même résultat sur le facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B_\infty$ .



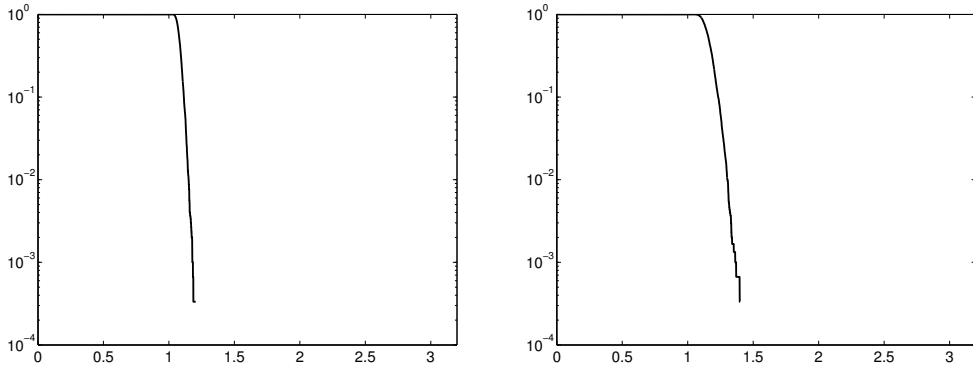
**Figure VIII.16** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  Cas 7 - Cas 8.



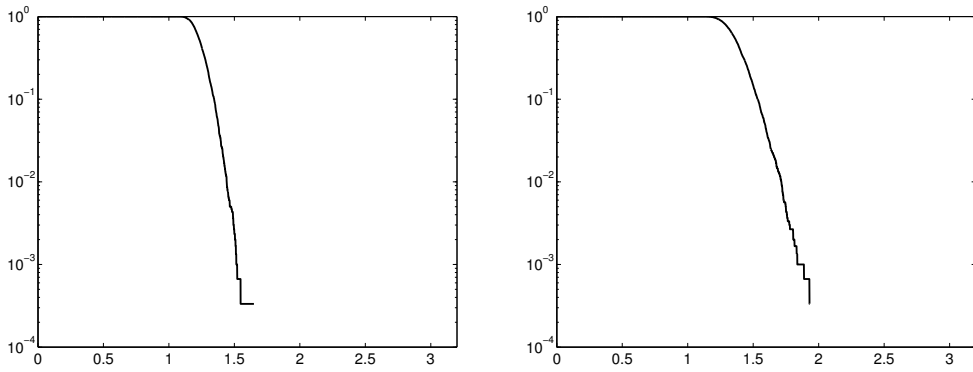
**Figure VIII.17** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  Cas 9 - Cas 10.



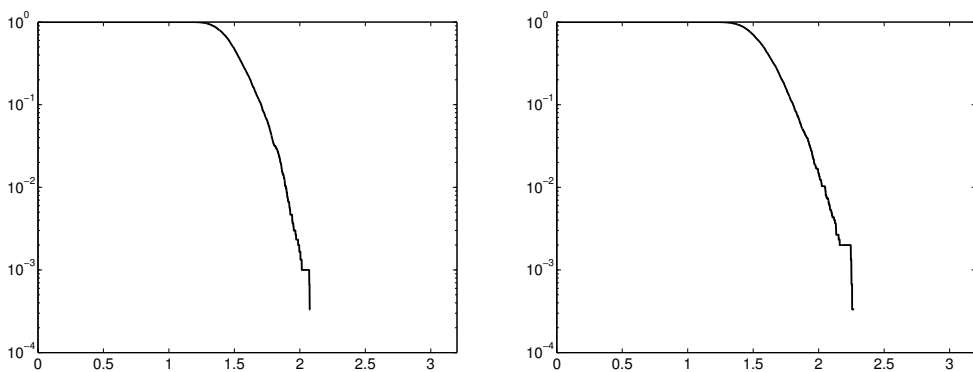
**Figure VIII.18** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  Cas 11 - Cas 12.



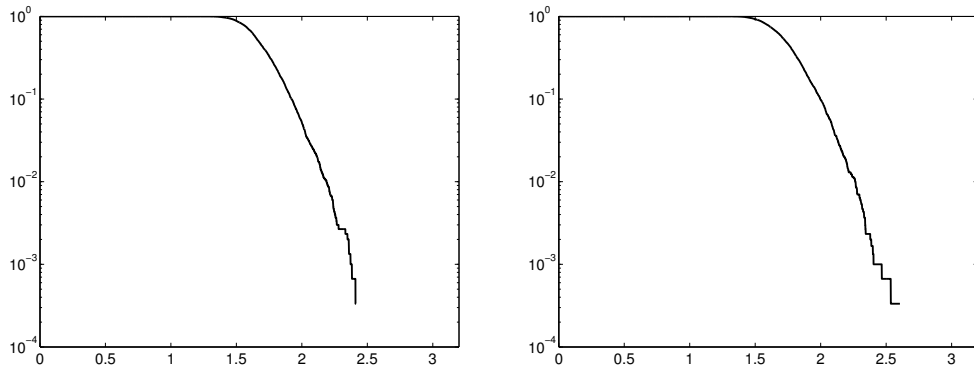
**Figure VIII.19** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique Cas 1 - Cas 2.



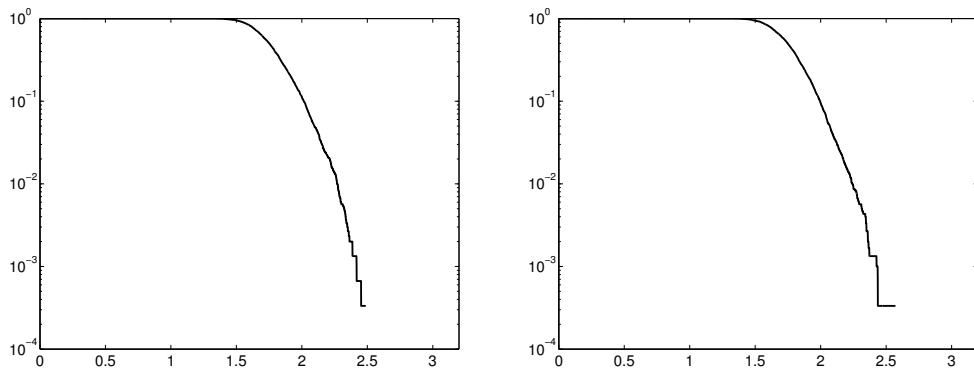
**Figure VIII.20** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique Cas 3 - Cas 4.



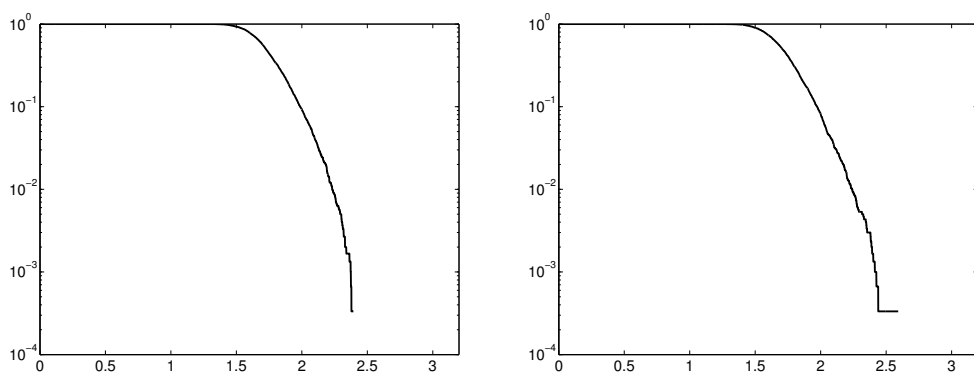
**Figure VIII.21** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique Cas 5 - Cas 6.



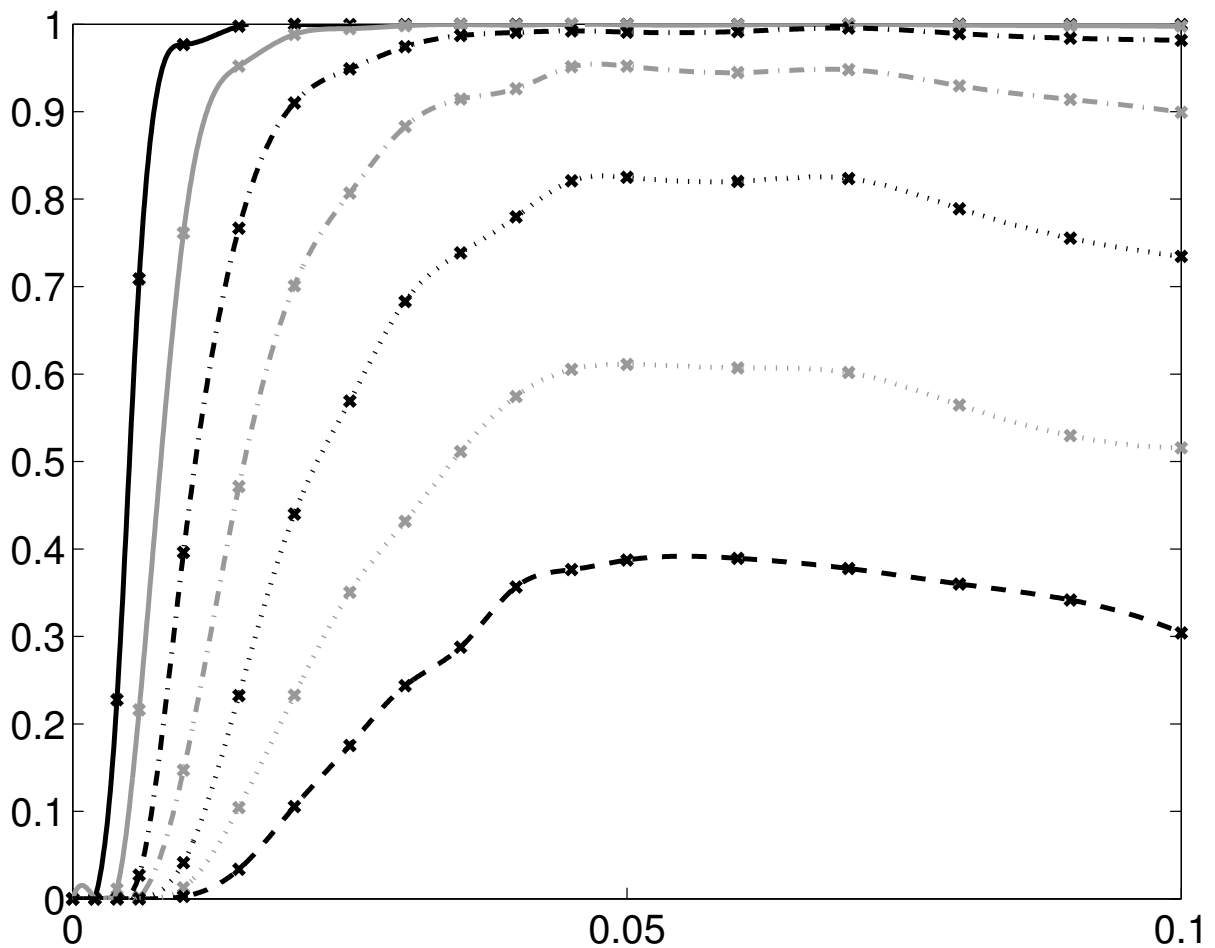
**Figure VIII.22** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique Cas 7 - Cas 8.



**Figure VIII.23** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique Cas 9 - Cas 10.



**Figure VIII.24** – Sensibilité de  $\delta_K$  sur la réponse désaccordée de la structure : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique Cas 11 - Cas 12.



**Figure VIII.25** – Spécification des tolérances : graphe de la fonction  $\tau \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour  $b = 1.2$  (trait noir continu),  $b = 1.3$  (trait gris continu),  $b = 1.4$  (trait noir mixte),  $b = 1.5$  (trait gris mixte),  $b = 1.6$  (trait noir pointillé),  $b = 1.7$  (trait gris pointillé),  $b = 1.8$  (trait noir interrompu).



# Chapitre IX

## Validation du problème inverse sur une structure complexe

Dans ce chapitre, on considère un modèle élément fini complexe de roue aubagée. Ce modèle est un modèle industriel fourni par SNECMA MOTEURS. On considère que la vitesse de rotation de la structure est constante et non nulle. On ne modélise pas l'opérateur de couplage gyroscopique  $\underline{C}$ .

La méthodologie du problème inverse de détermination des tolérances des aubes est appliquée sur le modèle complexe de roue aubagée.

### 1. Introduction

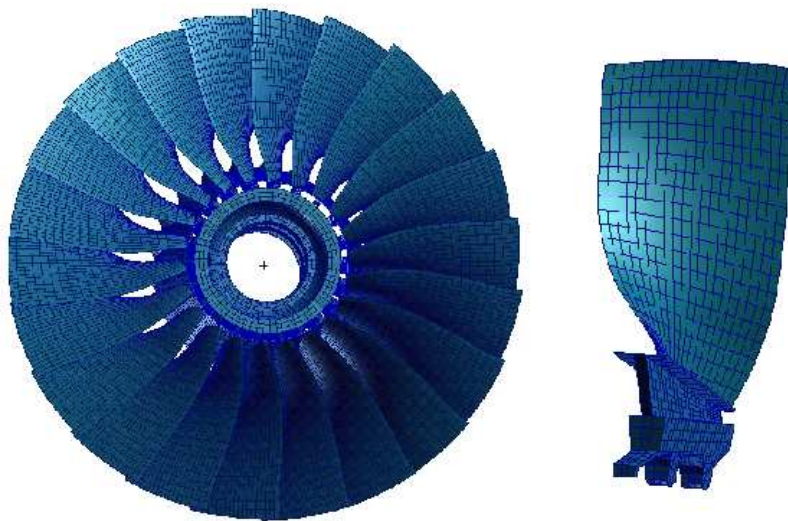
Dans le paragraphe 2, on présente le modèle moyen de la structure. Le paragraphe 3 est consacré à la construction du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube, utilisé pour identifier les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. Les résultats numériques concernant la définition des tolérances sont présentés et analysés au paragraphe 4. Enfin, on présente au paragraphe 5 une analyse de sensibilité des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique par rapport à une perturbation aléatoire du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube.

## 2. Description du modèle moyen de la roue aubagée

### 2.1 Définition du modèle élément fini moyen

La structure considérée est un modèle tridimensionnel de roue aubagée modélisant le fan d'un moteur aéronautique. La roue aubagée accordée est constituée de  $N = 22$  secteurs identiques. Le matériau est supposé homogène isotrope et correspond à du titane, de masse volumique  $\rho = 4400 \text{ kg.m}^{-3}$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et de module d'Young élastique  $E = 1.25 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ . L'amortissement est modélisé par un modèle d'amortissement structural de facteur de perte  $\eta = 0.002$ . La structure est mise en rotation avec une vitesse constante  $\Psi = 4500$  tours/min et génère un mouvement de corps rigide sur le bord interne de la roue aubagée. Comme l'analyse dynamique s'effectue dans le repère tournant de la structure, ce mouvement de rotation de corps rigide se traduit par une condition aux limites de Dirichlet d'encastrement sur le bord interne de la roue aubagée.

Les maillages de la roue aubagée et d'un secteur de la roue aubagée sont présentés à la figure IX.1. Ce modèle élément fini moyen est constitué d'éléments finis tridimensionnels hexaédriques à 20 nœuds et pentaédriques à 13 nœuds.



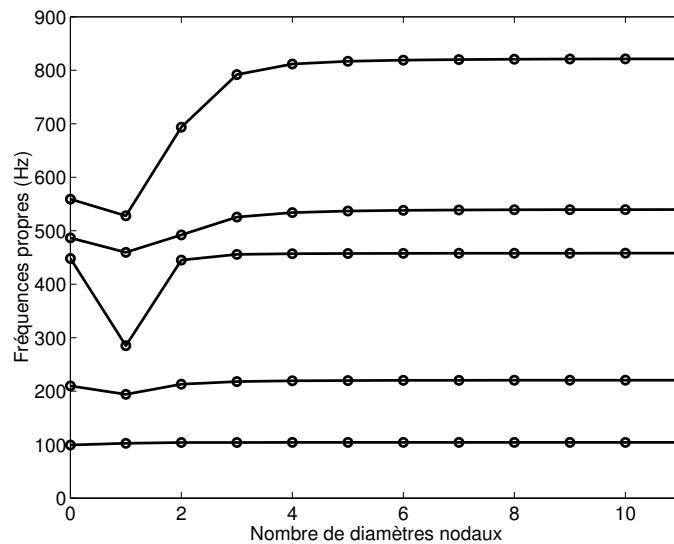
**Figure IX.1** – Maillage élément fini de la structure complexe : roue aubagée entière - secteur générateur.

Les données numériques concernant le maillage de la structure sont résumées dans le tableau IX.1 :

Sous-Structure	Eléments	Nœuds	DDLs
aube encastree à l'interface de couplage	942	5510	16116
interface de couplage aube-disque	0	138	414
secteur de disque encastree à l'interface de couplage	504	2761	7797
secteur de roue aubagée	1446	8133	24327
roue aubagée entiere	31812	168586	504174

**Table IX.1** – Données numériques du maillage éléments finis.

Dans cette étude numérique, le vecteur des forces extérieures correspond à une excitation cyclique et est donné par les équations (V.10) et (V.11) avec  $N = 22$  et  $n = 3$ . Un tel vecteur des forces extérieures excite les modes de la roue aubagée à  $n = 3$  diamètres nodaux. La bande d'analyse fréquentielle choisie est  $\mathbb{B} = [495, 555] \text{ Hz}$ . La figure IX.2 montre le graphe des fréquences propres de la structure accordée en fonction du nombre de diamètres nodaux caractérisant les modes propres associés.



**Figure IX.2** – Fréquences propres (Hz) de la roue aubagée accordée en fonction du nombre de diamètres nodaux.

Pour  $\omega$  fixé de  $\mathbb{B}$ , on s'intéresse au facteur d'amplification dynamique de l'aube  $j$  défini par rapport à l'énergie élastique de chaque aube. Cette observation notée  $\underline{b}_{\text{elas}}^j(\omega)$  correspond à la valeur nominale de l'observation aléatoire définie par l'équation (V.23) et s'écrit

$$\underline{b}_{\text{elas}}^j(\omega) = \frac{\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{elas}}}{\|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{\text{elas}}}, \quad (\text{IX.1})$$

où  $\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|_{\text{elas}}$  et  $\|\underline{\mathbf{u}}^j\|_{\text{elas}}$  sont données par les équations (V.6) et (V.15). D'après l'équation (V.12), on pose  $\underline{b}_{\text{elas}}(\omega) = \underline{b}_{\text{elas}}^j(\omega)$ .

Soit  $\nu = \omega/(2\pi)$ , la fréquence circulaire associée à la fréquence angulaire  $\omega$ . La figure IX.3 représente le graphe  $\nu \mapsto \underline{b}_{\text{elas}}(\nu)$  de la solution de référence calculée en utilisant le solveur du paragraphe 5.3 du chapitre II.

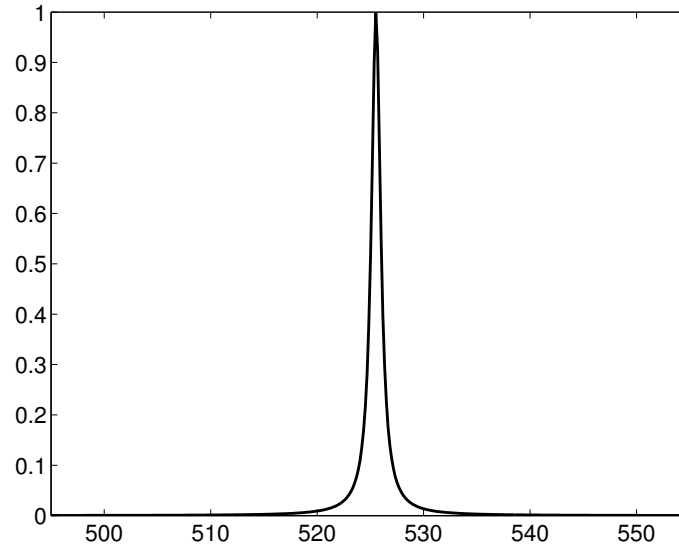
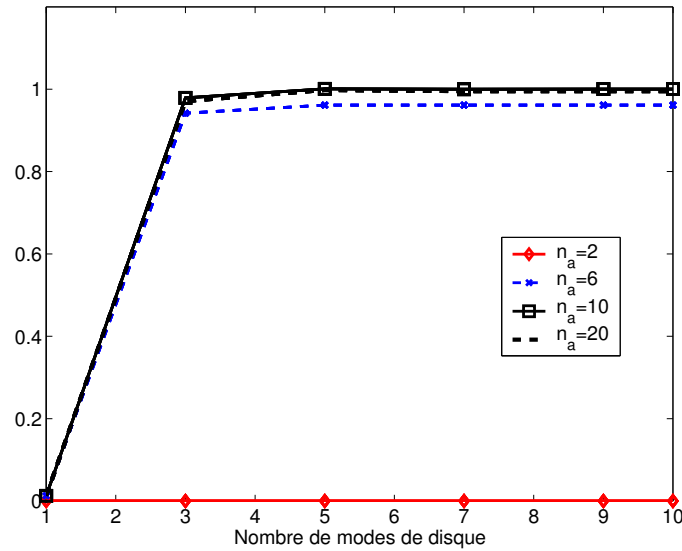


Figure IX.3 – Solution de référence : graphe de l’observation  $\nu \mapsto \underline{b}_{\text{elas}}(\nu)$

## 2.2 Modèle réduit moyen

Le modèle matriciel réduit moyen de la roue aubagée utilisé est celui présenté dans le paragraphe 5 du Chapitre III. On rappelle que cette stratégie consiste à utiliser la méthode de Craig et Bampton pour chaque aube, à assembler les matrices réduites de chaque aube avec les matrices élément fini du disque, à extraire le sous-système relatif aux DDLs physique du disque afin de calculer le problème généralisé aux valeurs propres associé à ce sous-système, et à projeter le vecteur des DDLs du disque sur la base modale précédemment calculée.

Le calcul de l’observation  $\underline{b}_{\text{elas}}(\omega)$  par la méthode de sous-structuration dynamique nécessite de résoudre les équations (III.94) et (III.95). Une étude de convergence du modèle matriciel réduit moyen est effectuée en fonction du nombre  $\mathfrak{n}^a$  de modes propres de chaque aube à interface de couplage fixe et en fonction du nombre  $\mathfrak{n}^d$  de modes propres du disque relatifs à chaque composante complexe harmonique de la structure. La figure IX.3 représente le graphe  $\mathfrak{n}^d \mapsto \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \underline{b}_{\text{elas}}(\omega)$  pour différentes valeurs de  $\mathfrak{n}^a$  et permet de déduire qu’une bonne convergence est obtenue pour  $\mathfrak{n}^a = 10$  et  $\mathfrak{n}^d = 5$ .



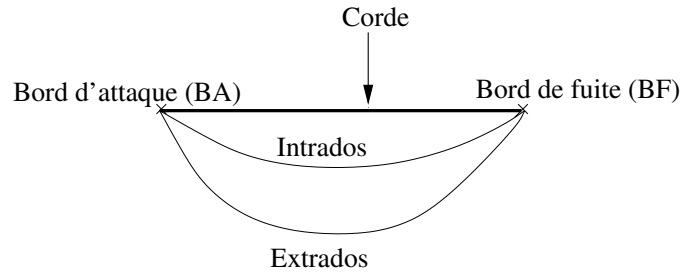
**Figure IX.4** – Etude de la convergence du modèle matriciel réduit moyen de la structure : graphe de la fonction  $n^d \mapsto \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \underline{b}_{elas}(\omega)$  pour différentes valeurs de  $n^a$ .

### 3. Identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique pour la problématique de tolérancement sur l’aube

#### 3.1 Modèle probabiliste de la géométrie de l’aube

##### 3.1.1 Description géométrique de l’aube nominale

La géométrie de l’aube est caractérisée par un ensemble de profils d’aube définis à différentes hauteurs par rapport à la base de l’aube. Un profil d’aube est une section de l’aube par un plan parallèle à sa base. Le contour géométrique défini par un profil d’aube donné se décrit de la manière suivante : le bord d’attaque correspond au bord antérieur de l’aube, le bord de fuite correspond à son bord postérieur. L’extrados est la surface supérieure de l’aube et l’intrados sa surface inférieure. Une caractéristique essentielle d’un profil est la corde de l’aube définie par le segment joignant le bord d’attaque au bord de fuite. Un schéma descriptif d’un profil d’aube est présenté à la figure IX.5.



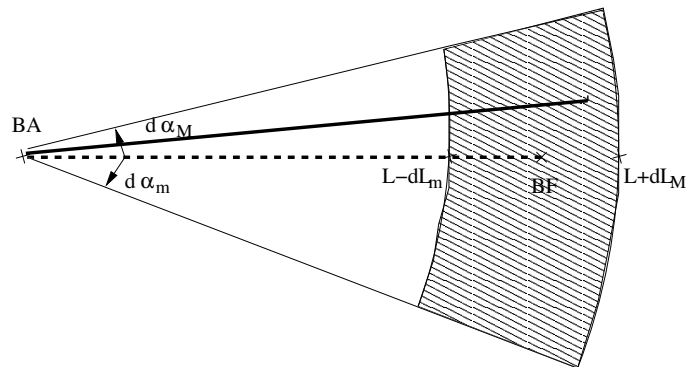
**Figure IX.5** – Description d'un profil d'aube.

### 3.1.2 Définition des paramètres tolérancés

On définit les paramètres des tolérances à partir de la géométrie de l'aube nominale. Pour un profil donné, les tolérances sont paramétrées sur la corde du profil. On choisit d'étudier les tolérances sur la longueur et sur la position de la corde. Le bord d'attaque du profil est supposé fixé. La position du bord de fuite dans le plan du profil est contrôlée par un paramètre de longueur  $dL$  et par un paramètre angulaire  $d\alpha$ . Les paramètres  $dL$  et  $d\alpha$  contrôlent les fluctuations de longueur et de torsion de corde telles que

$$dL \in [-dL_m, dL_M] \quad , \quad d\alpha \in [-d\alpha_m, d\alpha_M] \quad , \quad (\text{IX.2})$$

où  $dL_m$ ,  $dL_M$ ,  $d\alpha_m$  et  $d\alpha_M$  sont les réels positifs caractérisant les tolérances de l'aube. Une schématisation du profil décrivant les paramètres géométriques des tolérances pour un profil d'aube est donné à la figure IX.6.



**Figure IX.6** – Description des paramètres géométriques des tolérances pour un profil d'aube donné. Corde du profil nominal (trait pointillé) - corde du profil manufacturé (trait continu) - localisation du bord de fuite du profil de l'aube manufacturée (zone grisée).

### 3.1.3 Construction du modèle probabiliste sur la géométrie de l'aube

Le maillage de l'aube nominale est donné par la figure IX.7. La disposition des nœuds du maillage correspond à un ensemble de profils discrétisés.

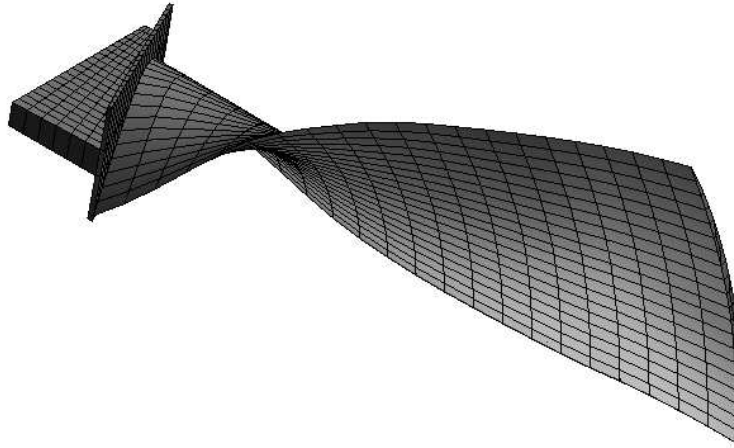


Figure IX.7 – Maillage de l'aube nominale.

#### Définition des tolérances sur les nœuds du maillage

On s'intéresse au profil situé à l'extrémité libre de l'aube nominale. On se place dans le repère tournant  $\mathcal{R}_1$  (voir chapitre I). On note  $\underline{\mathbf{x}}_{BF}$  et  $\mathbf{x}_{BF}$  les coordonnées du nœud relatif au bord de fuite pour l'aube nominale et pour l'aube manufacturée. Les valeurs de  $dL_m$ ,  $dL_M$ ,  $d\alpha_m$  et  $d\alpha_M$  sont supposées fixées. On a

$$\mathbf{x}_{BF} \in [\underline{\mathbf{x}}_{BF} - 2 \underline{\mathbf{T}}_m, \underline{\mathbf{x}}_{BF} + 2 \underline{\mathbf{T}}_M] \quad , \quad (\text{IX.3})$$

où  $\underline{\mathbf{T}}_m = (\underline{T}_{m_1}, \underline{T}_{m_2}, \underline{T}_{m_3})$  et  $\underline{\mathbf{T}}_M = (\underline{T}_{M_1}, \underline{T}_{M_2}, \underline{T}_{M_3})$  sont déduites des bornes  $dL_m$ ,  $d\alpha_m$ ,  $dL_M$  et  $d\alpha_M$ .

On cherche à construire une transformation simple permettant d'obtenir un maillage représentatif d'une aube manufacturée à partir du maillage de l'aube nominale et des données sur les tolérances. Il est à noter que le jacobien de la transformation géométrique recherchée n'est pas singulier de manière à ce que les éléments finis associés au maillage de l'aube manufacturée possèdent une distortion acceptable par rapport à ceux associés au maillage nominal de l'aube.

Soit  $\mathcal{I} = \{1, \dots, \nu\}$ , l'ensemble des indices des  $\nu$  nœuds de l'aube pour lesquels une tolérance est définie. Soit  $\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{x}}_1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_\nu)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{3\nu}$  définissant la position des nœuds du maillage de l'aube nominale dans le repère  $\mathcal{R}_1$ . On définit de la même manière le vecteur  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\nu)$  de  $\mathbb{R}^{3\nu}$  définissant la position des nœuds du maillage de l'aube manufacturée dans le repère  $\mathcal{R}_1$ .

### Modèle probabiliste sur la position des nœuds du maillage de l'aube

Dans le contexte probabiliste du tolérancement, le vecteur  $\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}$  est modélisé par le vecteur aléatoire  $\Delta\mathbf{X} = (\Delta\mathbf{X}_1, \dots, \Delta\mathbf{X}_\nu)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{3\nu}$  tel que

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{\alpha=1}^r \xi_\alpha \underline{\mathbf{b}}_\alpha, \quad (\text{IX.4})$$

où les vecteurs  $\underline{\mathbf{b}}_\alpha$ , avec  $\alpha$  dans  $\{1, \dots, r\}$ , sont  $r$  vecteurs de base déterministes de  $\mathbb{R}^{3\nu}$  et où les variables aléatoires  $\xi_\alpha$  avec  $\alpha$  dans  $\{1, \dots, r\}$ , sont  $r$  variables aléatoires indépendantes à valeur réelles.

### Choix des paramètres du modèle probabiliste

Pour définir le modèle probabiliste, on considère que les tolérances de l'aubes n'affectent pas l'interface de couplage aube-disque. Par conséquent, le modèle probabiliste est défini sur les nœuds internes de l'aube de manière à ce que  $3\nu = n_i^a$ . Pour des raisons pratiques, les vecteurs de base  $\underline{\mathbf{b}}_\alpha$  choisis pour générer la géométrie aléatoire sont  $r = 4$  modes propres du modèle matriciel élément fini de l'aube nominale à interface de couplage fixe. Pour tout  $\alpha$  dans  $\{1, \dots, r\}$ , la distribution de probabilité des variables aléatoires  $\xi_\alpha$  est choisie uniforme de support  $[-m, M]$ . Les bornes  $m$  et  $M$  sont calculées de manière à ce que, pour tout  $i$  de  $\mathcal{I}$ , le support de la distribution de probabilité de la variable aléatoire  $\Delta\mathbf{X}_i$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , soit inclus dans  $[-\mathbf{T}_m, \mathbf{T}_M]$ .

## 3.2 Identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique

Dans ce paragraphe, on identifie les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique par rapport au modèle probabiliste de la géométrie de l'aube. L'identification est effectuée par simulation numérique de Monte-Carlo et nécessite de générer pour chaque réalisation les matrices élément fini de masse et de raideur de l'aube. Pour diminuer le coût numérique, on souhaite réduire le nombre de réalisations à convergence égale des estimateurs statistiques. On met en œuvre une méthode d'hétérodynage pour réaliser les tirages des variables aléatoires génériques (les variables aléatoires  $\xi_\alpha$ ). On présente ensuite les résultats concernant l'identification des paramètres de dispersion.



### 3.2.1 Influence de l'hétérodynage des variables aléatoires sur la procédure d'identification

On étudie l'influence de l'hétérodynage des variables aléatoires  $\xi_\alpha$  sur les estimateurs des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. Un rappel sur l'hétérodynage des variables aléatoires est effectué dans l'Annexe B.

Le cas numérique présenté est le suivant :

Les valeurs des tolérances considérées sont telles que

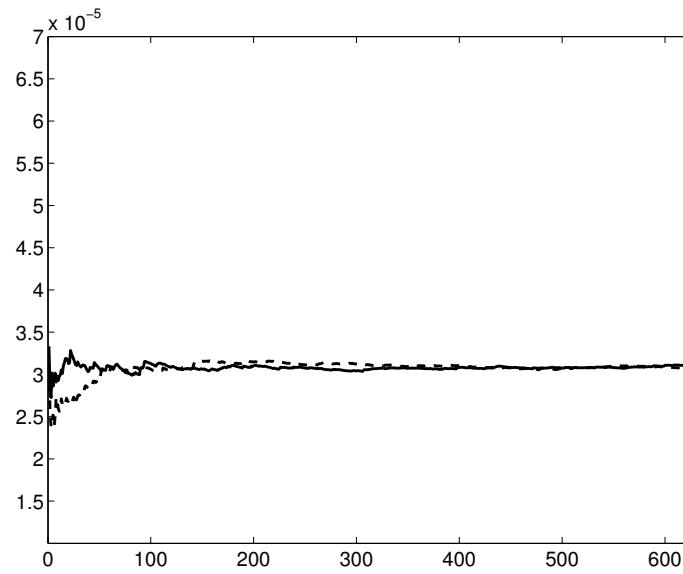
$$dL_m = -0.55 \text{ mm} \quad , \quad dL_M = 0.75 \text{ mm} \quad , \quad d\alpha_m = -0.55^\circ \quad , \quad d\alpha_M = 0.55^\circ .$$

On note  $\hat{\delta}_M^{SH}, \hat{\delta}_K^{SH}$  les estimateurs des paramètres de dispersion de masse et de raideur du modèle probabiliste non paramétrique obtenus sans hétérodynage des variables aléatoires. On note  $\hat{\delta}_M^{AH}, \hat{\delta}_K^{AH}$  les estimateurs des paramètres de dispersion obtenus avec hétérodynage des variables aléatoires.

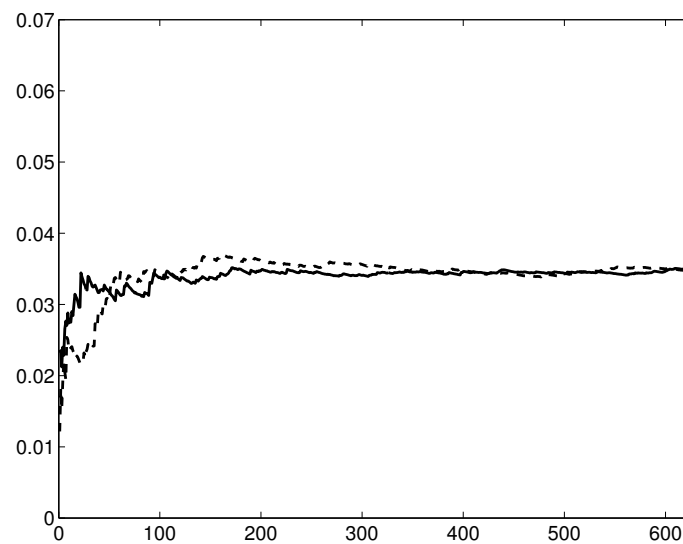
Une étude de convergence des estimateurs des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique est effectuée en fonction du nombre  $n_s$  de réalisations. La figure IX.8 montre le graphe des fonctions  $n_s \mapsto \hat{\delta}_M^{SH}$  (trait interrompu) et  $n_s \mapsto \hat{\delta}_M^{AH}$  (trait continu). La figure IX.9 montre le graphe des fonctions  $n_s \mapsto \hat{\delta}_K^{SH}$  (trait interrompu) et  $n_s \mapsto \hat{\delta}_K^{AH}$  (trait continu).

La figure IX.8 montre qu'une bonne convergence est obtenue avec  $n_s = 180$  pour  $\hat{\delta}_M^{SH}$  et pour  $\hat{\delta}_M^{AH}$ . De même, la figure IX.9 montre qu'une bonne convergence est obtenue avec  $n_s = 350$  pour  $\hat{\delta}_K^{SH}$  et avec  $n_s = 200$  pour  $\hat{\delta}_K^{AH}$ . On conclut que l'hétérodynage des variables aléatoires accélère la convergence vis à vis du nombre de simulations de Monte Carlo.

Dans la suite de ce chapitre, les variables aléatoires seront hétérodynées pour l'identification des paramètres de dispersion.



**Figure IX.8** – Influence de l'hétérodynage : convergence de l'estimateur du paramètre de dispersion de masse. Graphe des fonctions  $n_s \mapsto \hat{\delta}_M^{SH}$  (trait interrompu) et  $n_s \mapsto \hat{\delta}_M^{AH}$  (trait continu)



**Figure IX.9** – Influence de l'hétérodynage : convergence de l'estimateur du paramètre de dispersion de masse. Graphe des fonctions  $n_s \mapsto \hat{\delta}_K^{SH}$  (trait interrompu) et  $n_s \mapsto \hat{\delta}_K^{AH}$  (trait continu)

### 3.2.2 Résultats numériques concernant l'identification des paramètres de dispersion

Dans ce paragraphe, on présente les résultats concernant l'identification des paramètres de dispersion. On caractérise la variabilité des paramètres de dispersion par rapport aux tolérances.

Dans un premier temps, les tolérances sur la longueur de corde sont fixées. On étudie alors les paramètres de dispersion de masse et de raideur comme une fonction des tolérances angulaires. Dans un second temps, on réalise une étude du même type en fixant les tolérances angulaires et en faisant varier les tolérances sur la longueur de corde de l'aube.

Les figures IX.10 à IX.13 caractérisent la variabilité des paramètres de dispersion en fonction des tolérances. L'obtention de ces graphes nécessite pour chaque jeu de tolérances étudié (1) d'utiliser le modèle probabiliste défini au paragraphe 3.1.3) pour générer les matrices élément fini aléatoires de l'aube ; (2) de construire les estimateurs  $\hat{\delta}_M^{AH}$  et  $\hat{\delta}_K^{AH}$  des paramètres de dispersion. On note  $\delta_M$  et  $\delta_K$  les valeurs convergées de ces estimateurs.

#### Présentation des résultats

Considérons le cas numérique où les tolérances sont définies par

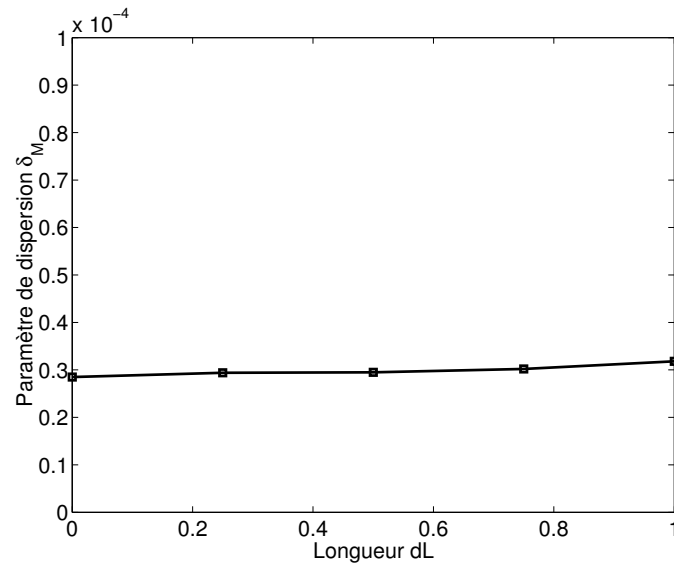
$$d\alpha_m = -0.55^\circ, d\alpha_M = 0.55^\circ, \quad (IX.5)$$

On effectue une étude paramétrique des paramètres de dispersion en fonction de la tolérance sur la longueur  $dL$  définie par  $dL = -dL_m = dL_M$ . Les figures IX.10 et IX.11 montrent les graphes  $dL \mapsto \delta_M$  et  $dL \mapsto \delta_K$ .

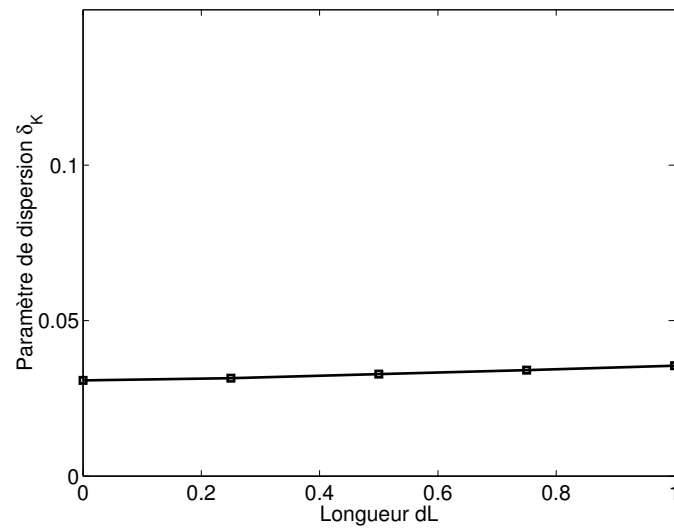
Considérons le cas où les valeurs numériques des tolérances sont définies par :

$$dL_m = -0.55 \text{ mm}, dL_M = 0.75 \text{ mm}, \quad (IX.6)$$

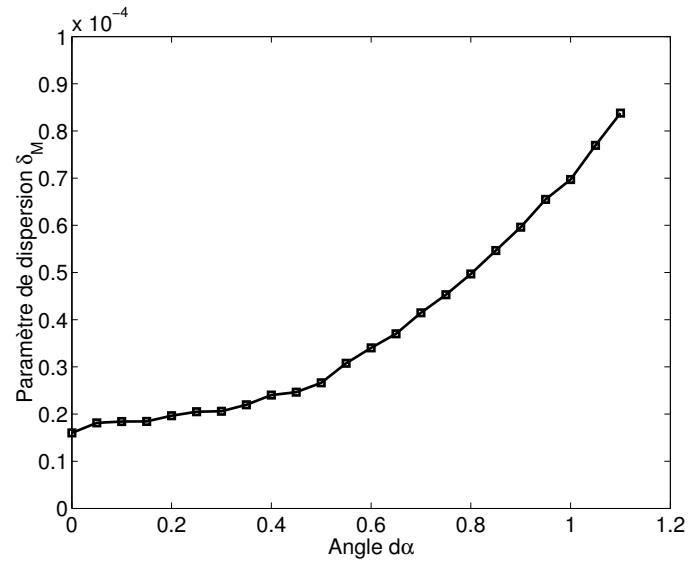
On effectue une étude paramétrique des paramètres de dispersion en fonction de la tolérance angulaire  $d\alpha$  définie par  $d\alpha = -d\alpha_m = d\alpha_M$ . Les figures IX.12 et IX.13 montrent les graphes  $d\alpha \mapsto \delta_M$  et  $d\alpha \mapsto \delta_K$ .



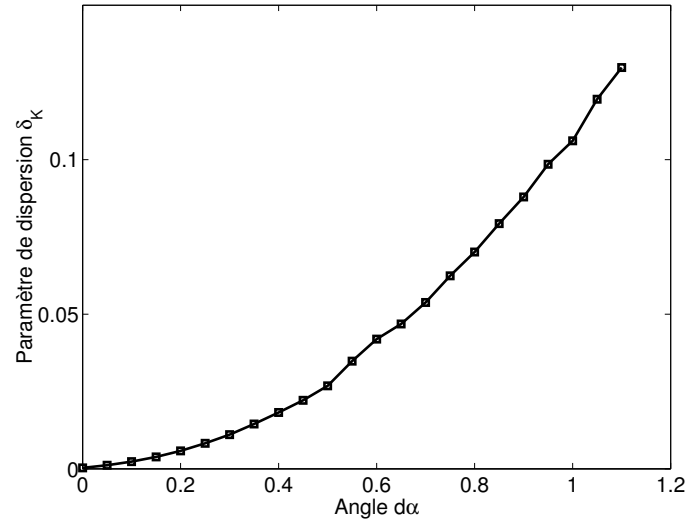
**Figure IX.10** – Identification du paramètre de dispersion de masse : Graphe des fonctions  $dL \mapsto \delta_M$  pour  $dL \in [0, 1 \text{ mm}]$



**Figure IX.11** – Identification du paramètre de dispersion de raideur : Graphe des fonctions  $dL \mapsto \delta_K$  pour  $dL \in [0, 1 \text{ mm}]$



**Figure IX.12** – Identification du paramètre de dispersion de masse : Graphe des fonctions  $d\alpha \mapsto \delta_M$  pour  $d\alpha \in [0, 1.1^\circ]$



**Figure IX.13** – Identification du paramètre de dispersion de raideur : Graphe des fonctions  $d\alpha \mapsto \delta_K$  pour  $d\alpha \in [0, 1.1^\circ]$

### Analyse des résultats

Les figures IX.10 et IX.11 montrent que la variabilité des paramètres de dispersion par rapport aux tolérances sur la longueur de corde est faible. Par contre, les figures IX.12 et IX.13 montrent que la variabilité des paramètres de dispersion par rapport aux tolérances angulaire  $d\alpha$  est beaucoup plus forte. La forme des courbes des paramètres de dispersion de masse et de raideur en fonction de l'angle  $d\alpha$  est similaire et les paramètres de dispersion sont des fonctions quadratiques des tolérances angulaires de l'aube. Pour les deux cas présentés, on observe que la valeur numérique du paramètre de dispersion sur la masse est beaucoup plus faible (d'un facteur  $10^3$ ) que celle du paramètre de dispersion sur la raideur. Par conséquent, les incertitudes générées par les tolérances affectent principalement la raideur de l'aube.

## 4. Résultats numériques concernant le problème inverse sur les tolérances géométriques de l'aube

La problématique de tolérancement des aubes nécessite de considérer les incertitudes de la géométrie de l'aube. Comme ces incertitudes sont de nature conservative, la procédure d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique ne concerne que les paramètres de dispersion de masse et de raideur de chaque aube. L'analyse de la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée est effectuée en attribuant la valeur nulle au paramètre de dispersion de dissipation de chaque aube.

Dans l'annexe D, l'influence d'une incertitude additionnelle de dissipation sur le désaccordage dynamique de la structure industrielle est analysée.

### 4.1 Analyse de convergence stochastique du modèle réduit aléatoire de la roue aubagée

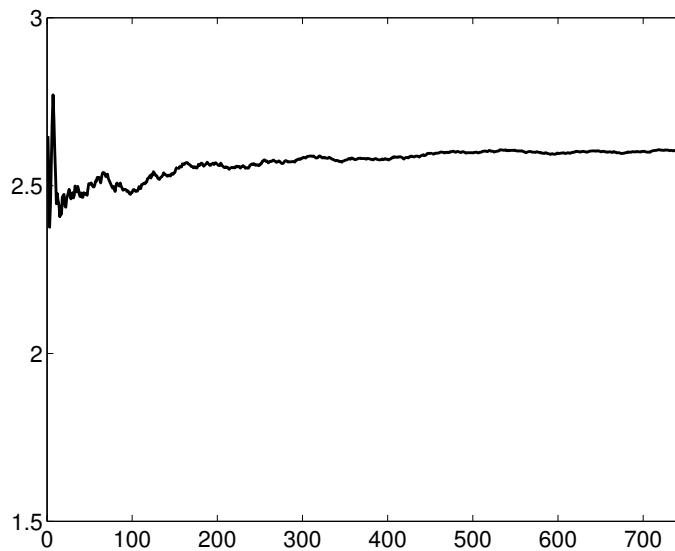
Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème direct. Celui-ci consiste à analyser la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée pour des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique donnés. Le modèle matriciel réduit aléatoire de la roue aubagée considéré est celui donné par les équations (IV.72) et (IV.73). On rappelle que les incertitudes aléatoires de désaccordage concernent uniquement la partie dynamique des matrices aléatoires de chaque aube (voir équation (IV.61)). La réponse forcée aléatoire est étudiée dans la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B} = [495, 555] \text{ Hz}$ . On étudie les observations aléatoires  $B_{\text{elas}}(\omega)$  et  $B_{\text{elas},\infty}$ , définies par les équations (V.24) et (V.25), qu'on notera  $B(\omega)$  et  $B_\infty$ . Les incertitudes aléatoires de désaccordage sont statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre, avec un niveau d'incertitudes homogène. On pose

$$\delta_M = \delta_M^j, \quad \delta_D = \delta_D^j, \quad \delta_K = \delta_K^j, \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (\text{IX.7})$$

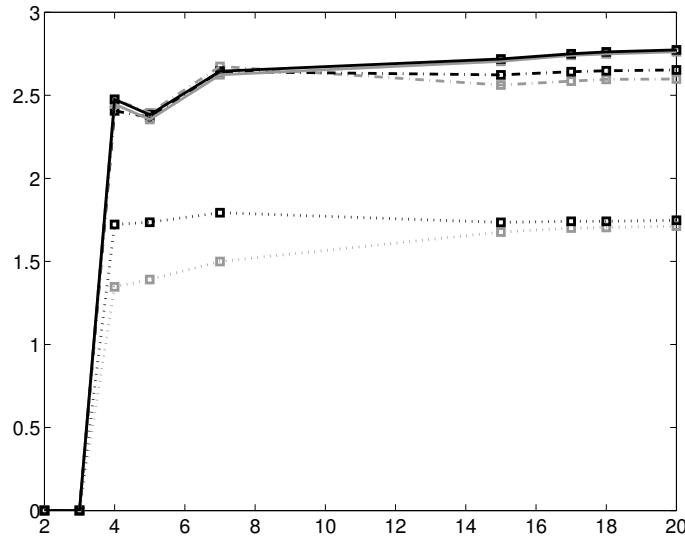
Une étude de convergence stochastique du facteur aléatoire d'amplification dynamique sur l'ensemble des aubes et sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$  est effectuée pour les valeurs des paramètres de dispersion

$$\delta_M = 0 \quad , \quad \delta_D = 0 \quad , \quad \delta_K = 0.05 \quad . \quad (\text{IX.8})$$

Cette étude permet de fixer les paramètres numériques  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a, \mathfrak{n}^d)$  contrôlant la dimension du modèle réduit aléatoire et permet de déterminer le nombre  $n_s$  de réalisations de la simulation numérique de Monte Carlo. La figure IX.14 représente le graphe  $n_s \mapsto \text{Conv}^2(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a = 20, \mathfrak{n}^d = 10)$ . Une bonne convergence vis à vis du nombre de simulations est obtenue pour  $n_s = 500$  réalisations. Pour  $n_s = 500$ , la figure IX.15 montre le graphe  $\mathfrak{n}^a \mapsto \text{Conv}^2(n_s = 500, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour  $\mathfrak{n}^d \geq 7$  (traits continus),  $\mathfrak{n}^d = 5$  (trait noir mixte),  $\mathfrak{n}^d = 4$  (trait gris mixte),  $\mathfrak{n}^d = 3$  (trait noir pointillé),  $\mathfrak{n}^d = 2$  (trait gris pointillé). On déduit de ce graphe que les valeurs optimales des paramètres  $\mathfrak{n}^a$  et  $\mathfrak{n}^d$  permettant d'analyser avec précision la réponse forcée désaccordée dans la bande d'analyse  $\mathbb{B}$  sont  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a = 7, \mathfrak{n}^d = 7)$ . Il est à noter que la taille du modèle réduit aléatoire ainsi obtenu est environ 1500 fois plus petite que le modèle élément fini de la roue aubagée.



**Figure IX.14** – Analyse de convergence du modèle réduit aléatoire de la structure : graphe de la fonction  $n_s \mapsto \text{Conv}^2(n_s, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (\mathfrak{n}^a = 20, \mathfrak{n}^d = 10)$ .



**Figure IX.15** – Analyse de convergence du modèle réduit aléatoire de la structure : graphes des fonctions  $n^a \mapsto \text{Conv}^2(n_s = 500, \mathbf{n}_{\text{red}})$  pour  $n^d \geq 7$  (traits continus),  $n^d = 5$  (trait noir mixte),  $n^d = 4$  (trait gris mixte),  $n^d = 3$  (trait noir pointillé),  $n^d = 2$  (trait gris pointillé).

Dans la suite, les valeurs de  $\mathbf{n}_{\text{red}}$  sont fixées par  $\mathbf{n}_{\text{red}} = (n^a = 20, n^d = 10)$ . Comme on est intéressé par estimer les fonctions de densité de probabilité  $p_{B_\infty}(b)$  de l'observation aléatoire  $B_\infty$ , les simulations numériques de Monte Carlo seront effectuées avec  $n_s = 1500$  réalisations.

## 4.2 Cas de désaccordage induit par les tolérances sur la longueur de corde des aubes

### 4.2.1 Cas de tolérances angulaires nulles

Considérons le cas où les tolérances géométriques sont définies sur la longueur de corde de chaque aube. Il n'existe donc aucune incertitude sur la position angulaire de la corde. Ces tolérances sont telles que,

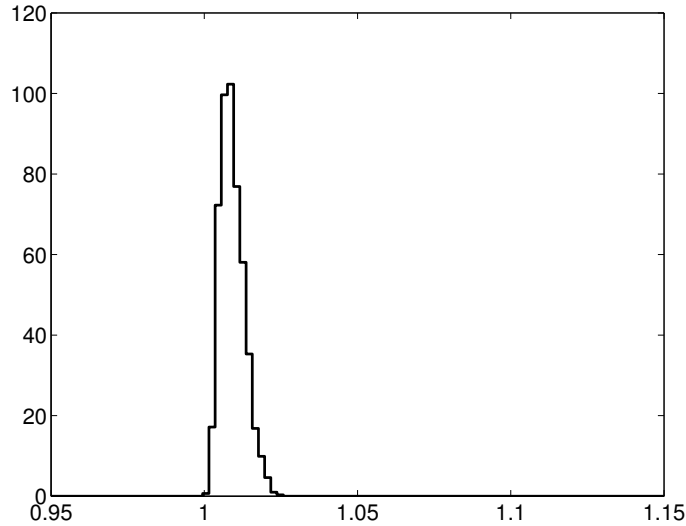
$$dL_m = -0.55 \text{ mm} \quad , \quad dL_M = 0.75 \text{ mm} \quad , \quad d\alpha_m = 0^\circ \quad , \quad d\alpha_M = 0^\circ \quad . \quad (\text{IX.9})$$

En utilisant les graphes des figures IX.12 et IX.13 issus de la procédure d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique, on attribue, pour l'analyse du problème direct, les valeurs des paramètres de dispersion

$$\delta_M = 1.6 \cdot 10^{-5} \quad , \quad \delta_D = 0 \quad , \quad \delta_K = 3.1 \cdot 10^{-4} \quad . \quad (\text{IX.10})$$

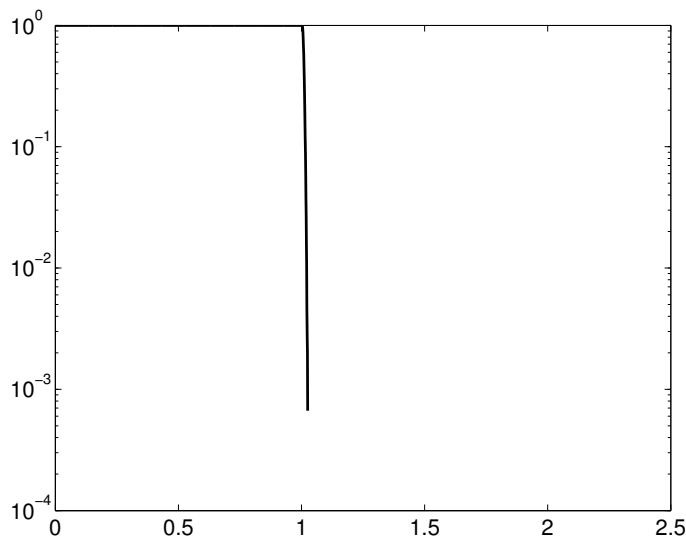
La figure IX.16 montre le graphe de la fonction de densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$ . La figure IX.17 montre le graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique.





**Figure IX.16** – Influence des tolérances sur la longueur de corde : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  pour  $\delta_M = 1.6 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_D = 0$ ,  $\delta_K = 3.1 \cdot 10^{-4}$ .

Le facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B_\infty$  a une très faible dispersion. Les valeurs des réalisations sont comprises entre 1 et 1.03. En comparant le cas présenté avec le cas de la roue aubagée accordée, correspondant à des tolérances nulles, on conclut que l'observation aléatoire  $B_\infty$  est peu sensible à la variabilité de la longueur de corde de chaque aube.



**Figure IX.17** – Influence des tolérances sur la longueur de corde : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_M = 1.6 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_D = 0$ ,  $\delta_K = 3.1 \cdot 10^{-4}$ .

### 4.2.2 Cas de tolérances angulaires non nulles

On considère le cas où des tolérances géométriques angulaires sont définies. On souhaite analyser la réponse forcée désaccordée en fonction de la variabilité des tolérances sur la longueur de corde. Les tolérances sont telles que

$$d\alpha_m = -0.55^\circ, d\alpha_M = 0.55^\circ, dL_m = 0 \text{ mm}, dL_M = 0 \text{ mm} \quad \text{Cas 1} \quad , \quad (\text{IX.11})$$

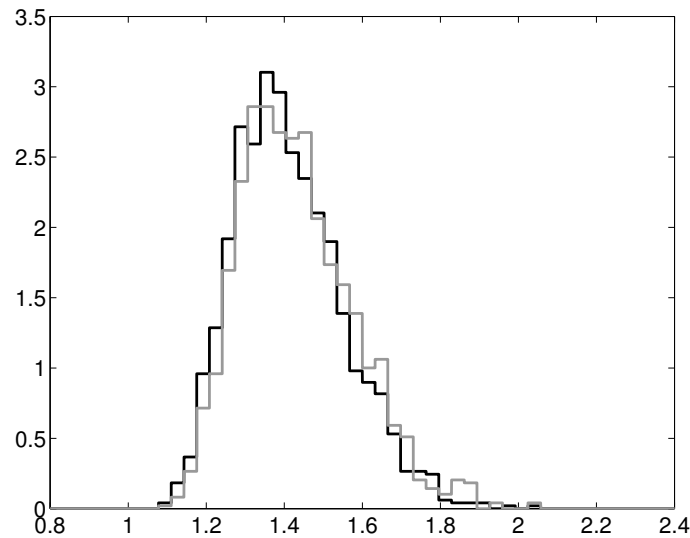
$$d\alpha_m = -0.55^\circ, d\alpha_M = 0.55^\circ, dL_m = -1 \text{ mm}, dL_M = 1 \text{ mm} \quad \text{Cas 2} \quad . \quad (\text{IX.12})$$

En utilisant les graphes des figures IX.10 et IX.11 issus de la procédure d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique, on attribue pour l'analyse du problème direct les valeurs des paramètres de dispersion

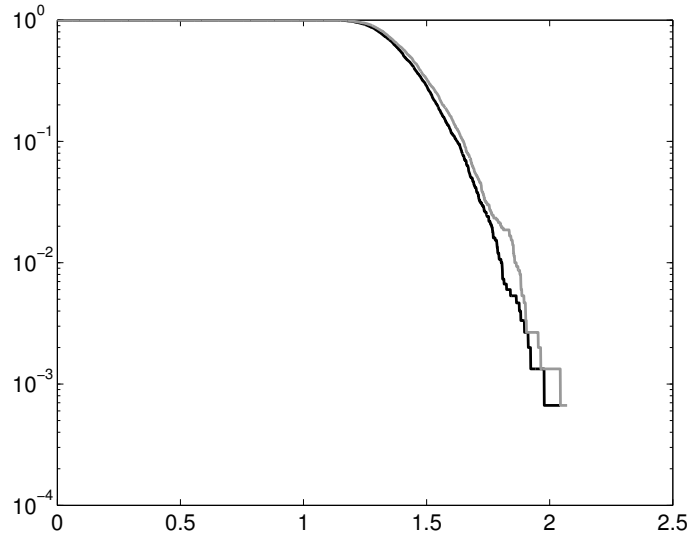
$$\delta_M = 2.84 \cdot 10^{-5} \quad , \quad \delta_D = 0 \quad , \quad \delta_K = 0.031 \quad , \quad (\text{IX.13})$$

$$\delta_M = 3.18 \cdot 10^{-5} \quad , \quad \delta_D = 0 \quad , \quad \delta_K = 0.0345 \quad . \quad (\text{IX.14})$$

La figure IX.18 montre le graphe de la fonction de densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  pour le cas 1 (trait noir continu) et pour le cas 2 (trait gris continu). La figure IX.19 montre le graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour le cas 1 (trait noir continu) et pour le cas 2 (trait gris continu).



**Figure IX.18** – Influence des tolérances sur la longueur de corde : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  pour  $\delta_M = 2.84 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_D = 0$ ,  $\delta_K = 0.031$  (trait noir continu) et pour  $\delta_M = 3.18 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_D = 0$ ,  $\delta_K = 0.0345$  (trait gris continu)



**Figure IX.19** – Influence des tolérances sur la longueur de corde : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_M = 2.84 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_D = 0$ ,  $\delta_K = 0.031$  (trait noir continu) et pour  $\delta_M = 3.18 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_D = 0$ ,  $\delta_K = 0.0345$  (trait gris continu).

Les figures IX.18 et IX.19 montrent que la réponse forcée désaccordée diffère fortement de la réponse forcée accordée. La dispersion du facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B_\infty$  est très forte et l'on constate l'existence de configurations géométriques pour lesquelles le facteur d'amplification dynamique est supérieur à 1.8. En comparant les densités de probabilité entre elles, la figure IX.18 montre que la différence observée n'est pas significative. La présence de tolérances sur la longueur de corde de l'aube affecte peu la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée. Ces résultats laissent penser que le facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B_\infty$  est beaucoup plus sensible aux tolérances angulaires qu'aux tolérances sur la longueur de corde de chaque aube.

Dans la suite, on examine l'influence des tolérances angulaires sur la réponse forcée désaccordée.

### 4.3 Cas de désaccordage induit par les tolérances angulaires sur la corde des aubes

#### 4.3.1 Définition des niveaux d'incertitudes

Le cas considéré correspond aux tolérances suivantes

$$dL_m = -0.55 \text{ mm} \quad , \quad dL_M = 0.75 \text{ mm} \quad , \quad d\alpha = -d\alpha_m = d\alpha_M \quad . \quad (\text{IX.15})$$

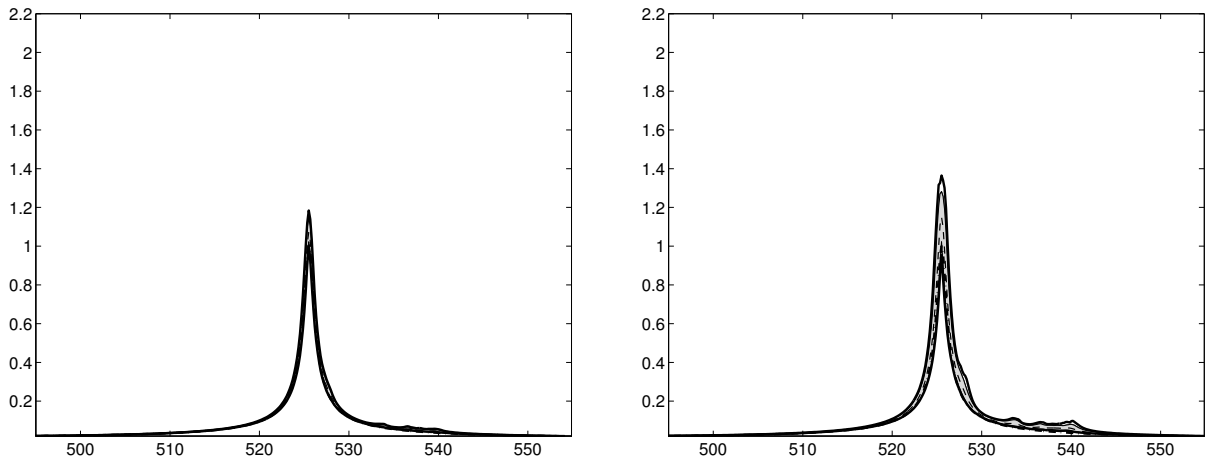
Une analyse du désaccordage est effectuée en fonction du paramètre angulaire  $d\alpha$  sur  $[0^\circ, 1.1^\circ]$ . Les valeurs numériques des paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  du modèle probabiliste non paramétrique sont identifiés à partir des tolérances et sont déduites des figures IX.12 et IX.13. Les cas présentés sont résumés dans le tableau IX.2

	$dL_m$ (mm)	$dL_M$ (mm)	$d\alpha$ (°)	$\delta_M$	$\delta_D$	$\delta_K$
cas 1	-0.55	0.75	0.1	$1.84 \cdot 10^{-5}$	0	$2.31 \cdot 10^{-3}$
cas 2	-0.55	0.75	0.2	$1.96 \cdot 10^{-5}$	0	$5.81 \cdot 10^{-3}$
cas 3	-0.55	0.75	0.3	$2.06 \cdot 10^{-5}$	0	$1.10 \cdot 10^{-2}$
cas 4	-0.55	0.75	0.4	$2.40 \cdot 10^{-5}$	0	$1.82 \cdot 10^{-2}$
cas 5	-0.55	0.75	0.5	$2.66 \cdot 10^{-5}$	0	$2.68 \cdot 10^{-2}$
cas 6	-0.55	0.75	0.7	$4.14 \cdot 10^{-5}$	0	$5.38 \cdot 10^{-2}$
cas 7	-0.55	0.75	0.9	$6.54 \cdot 10^{-5}$	0	$9.85 \cdot 10^{-2}$
cas 8	-0.55	0.75	1.1	$8.37 \cdot 10^{-5}$	0	$1.20 \cdot 10^{-1}$

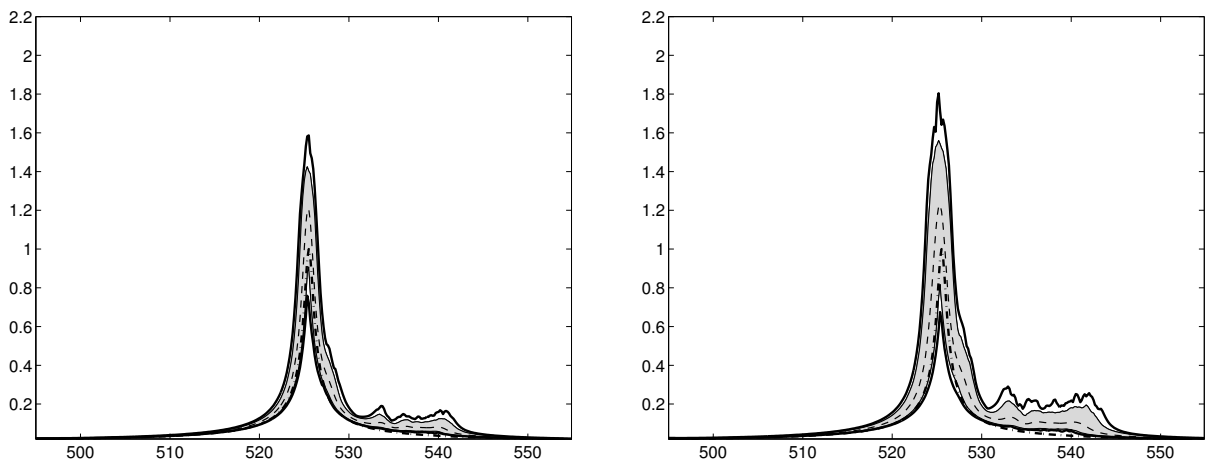
**Table IX.2** – Description des différents cas de désaccordage présentés

### 4.3.2 Analyse de l'observation aléatoire $B(\omega)$

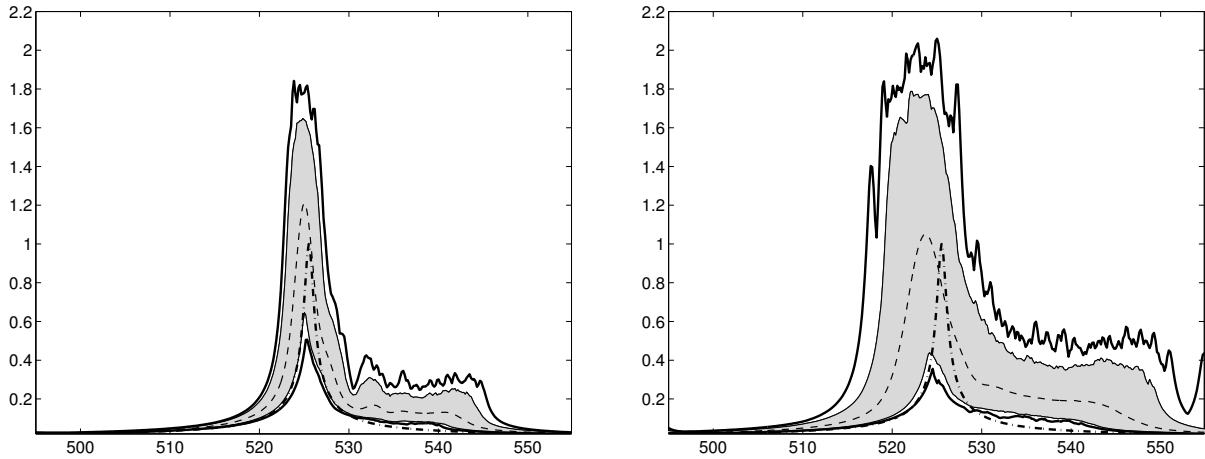
Dans un premier temps, on s'intéresse à l'observation  $B(\omega)$ . Une étude similaire à celle présentée dans le paragraphe 3.2 du chapitre VII est effectuée. Les figures IX.20 à IX.23 représentent les graphes relatifs à la région de confiance de  $B(\omega)$  obtenue pour un niveau de probabilité  $\alpha = 0.99$ . On note  $\nu = \omega/(2\pi)$  la fréquence circulaire associée à la fréquence angulaire  $\omega$ .



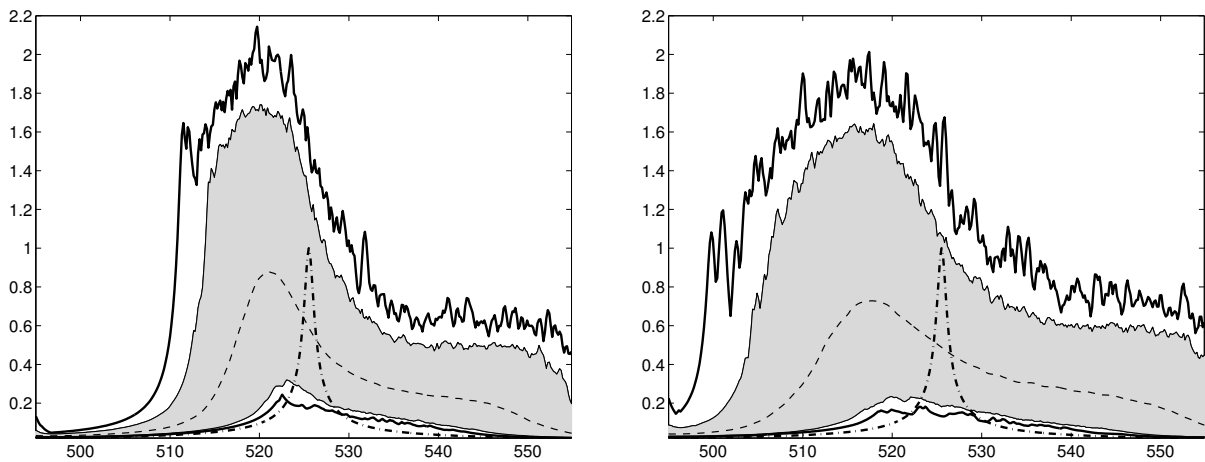
**Figure IX.20** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  :région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 1 - Cas 2.



**Figure IX.21** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  :région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{\min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 3 - Cas 4.



**Figure IX.22** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 5 - Cas 6.



**Figure IX.23** – (1) Graphes de la région de confiance pour  $\alpha = 0.99$  : région grisée délimitée par  $\nu \mapsto B_{\alpha_-}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{\alpha_+}(\nu)$ . Graphe de la moyenne  $\nu \mapsto \mathcal{E}\{B(\nu)\}$  (trait interrompu fin). (2) Graphes des valeurs extrêmes d'échantillon  $\nu \mapsto B_{min}(\nu)$  et  $\nu \mapsto B_{max}(\nu)$  (traits épais). (3) Graphe  $\nu \mapsto \underline{b}(\nu)$  (trait mixte épais) Cas 7 - Cas 8.

Les graphes des figures IX.20 à IX.23 sont très différents, bien que le domaine de confiance englobe la réponse forcée du modèle moyen de la structure. La réponse forcée de la roue aubagée désaccordée est donc très sensible au niveau d'incertitudes induit par les tolérances angulaires.

Pour de faibles niveaux d'incertitudes, on constate sur les figures IX.20 et IX.21 que le domaine de confiance de  $B(\nu)$  suit la forme du facteur d'amplification  $\underline{b}(\nu)$ . La dispersion du facteur aléatoire d'amplification  $B(\nu)$  s'accroît autour de la fréquence de résonance de la réponse forcée du modèle moyen.

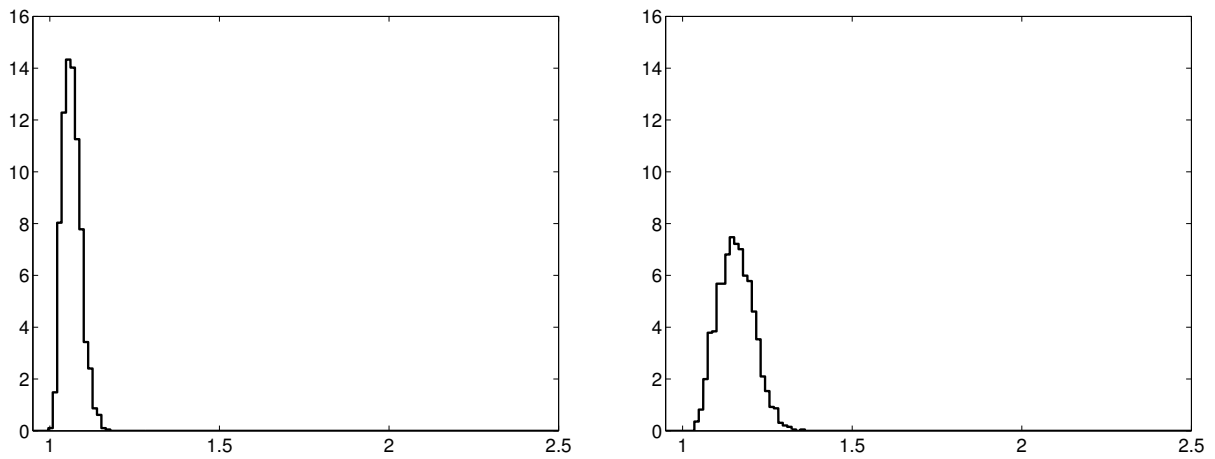
En analysant  $\max_{\nu \in \mathbb{B}} \mathcal{E}\{B(\nu)\}$ , définissant le maximum du facteur d'amplification dynamique moyen sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ , on constate sur les figures IX.20 et IX.21 que ce maximum s'accroît pour des niveaux d'incertitudes correspondant à des tolérances angulaires  $d\alpha \leq 0.4$  et qu'il décroît ensuite vers des amplifications inférieures à 1. Par contre, les figures IX.20 et IX.23 montrent que la dispersion associée à ce maximum s'accroît fortement avec  $d\alpha$  et se stabilise.

De plus, les figures IX.22 et IX.23 montrent que la fréquence pour laquelle le facteur aléatoire d'amplification dynamique est maximum s'éloigne de la fréquence de résonance de la réponse forcée du modèle moyen lorsque le niveau d'incertitudes croît. Par ailleurs, on constate que pour de tels niveaux d'incertitudes, la région de confiance ne suit plus la réponse forcée du modèle moyen mais s'étale progressivement sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ . Pour de forts niveaux d'incertitudes, le domaine de confiance est une bande. Les réalisations du facteur aléatoire d'amplification dynamique ont un maximum qui se produit sur l'ensemble de la bande d'analyse fréquentielle.

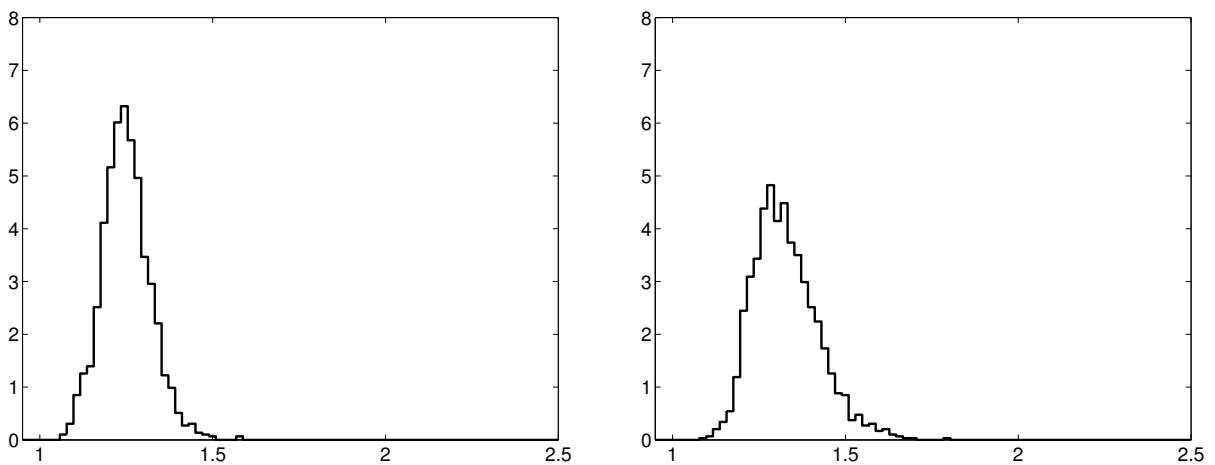
### 4.3.3 Analyse de l'observation aléatoire $B_\infty$

Les figures IX.24 à IX.27 représentent les graphes  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  pour chacun des cas étudiés. Les figures IX.28 à IX.31 représentent les graphes  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour chacun des cas étudiés.

On voit sur les figures IX.24 à IX.27 que toutes les configurations de géométrie aléatoire donnent des réalisations du facteur d'amplification dynamique supérieures à 1. En regardant les queues de distribution des figures IX.26 à IX.27 et IX.29 à IX.31, on constate que certaines configuration de géométrie des aubes donnent des facteurs d'amplification dynamique supérieurs à 1.8. De plus, en comparant les figures IX.26 à IX.27, on constate que la probabilité d'occurrence de niveaux d'amplifications supérieurs à 1.7 augmente puis diminue lorsque le niveau d'incertitudes de désaccordage croît. Par conséquent, on en déduit que des valeurs différentes de niveau d'incertitudes conduisent à une même probabilité de l'observation aléatoire  $B_\infty$ .

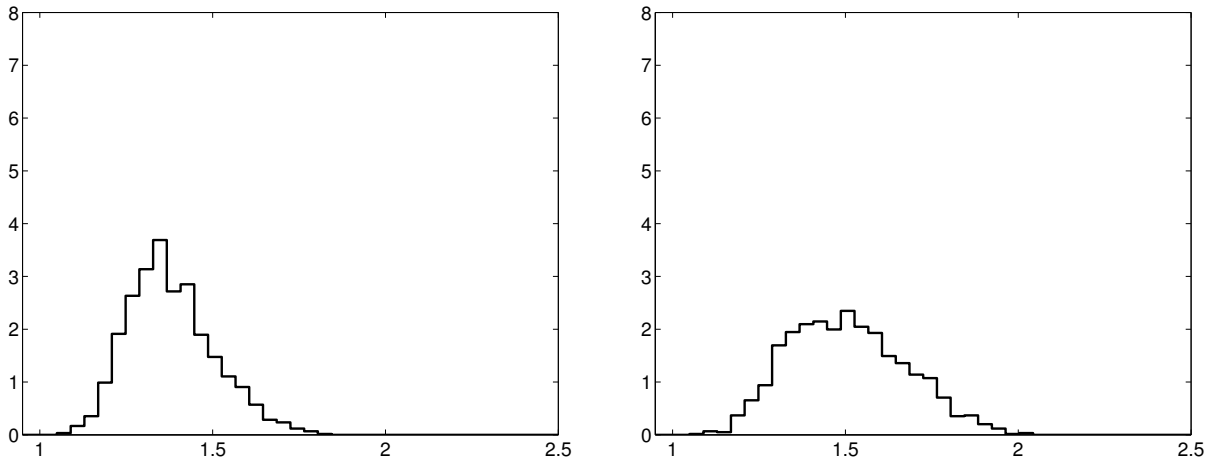


**Figure IX.24** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  : Cas 1 - Cas 2.

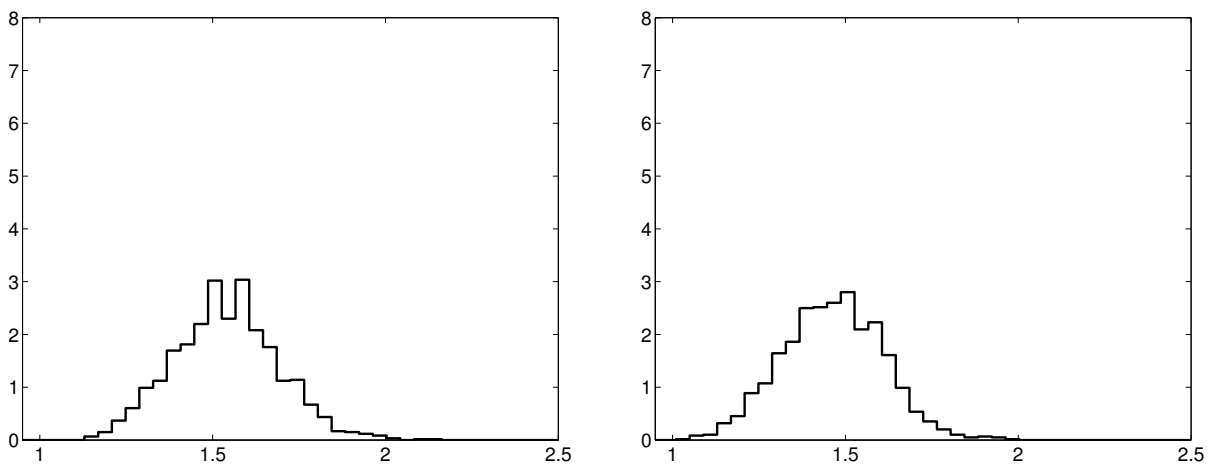


**Figure IX.25** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  : Cas 3 - Cas 4.

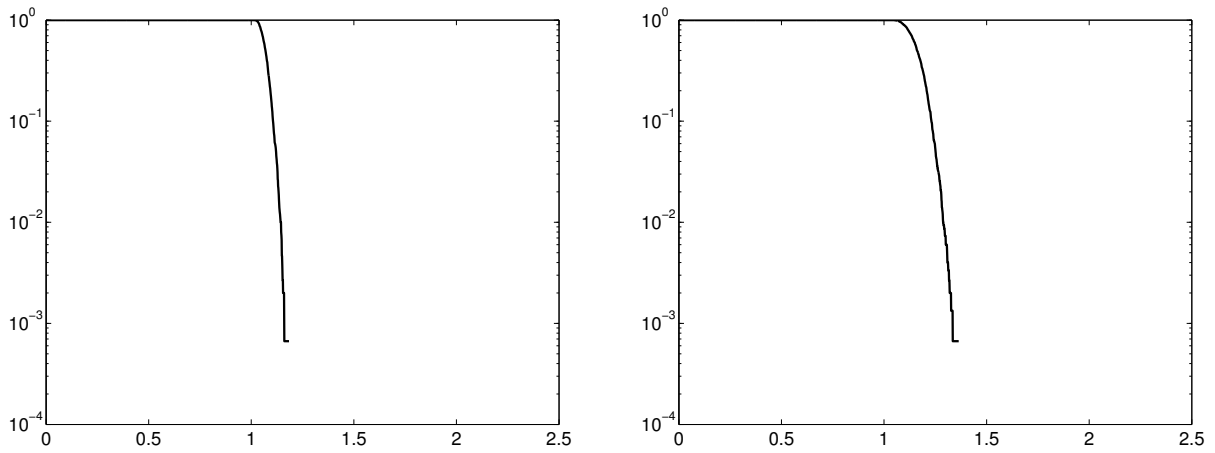




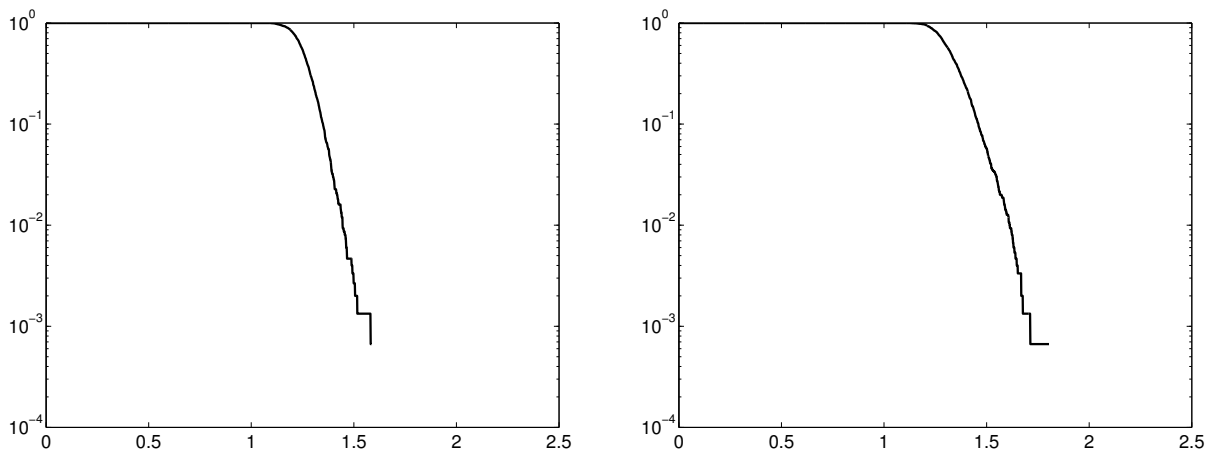
**Figure IX.26** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  : Cas 5 - Cas 6.



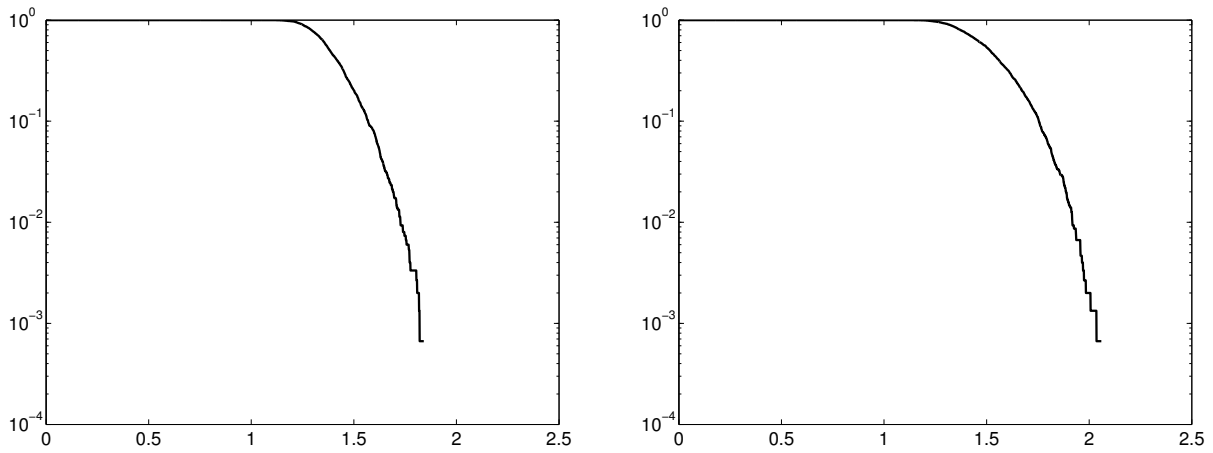
**Figure IX.27** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la densité de probabilité  $b \mapsto p_{B_\infty}(b)$  : Cas 7 - Cas 8.



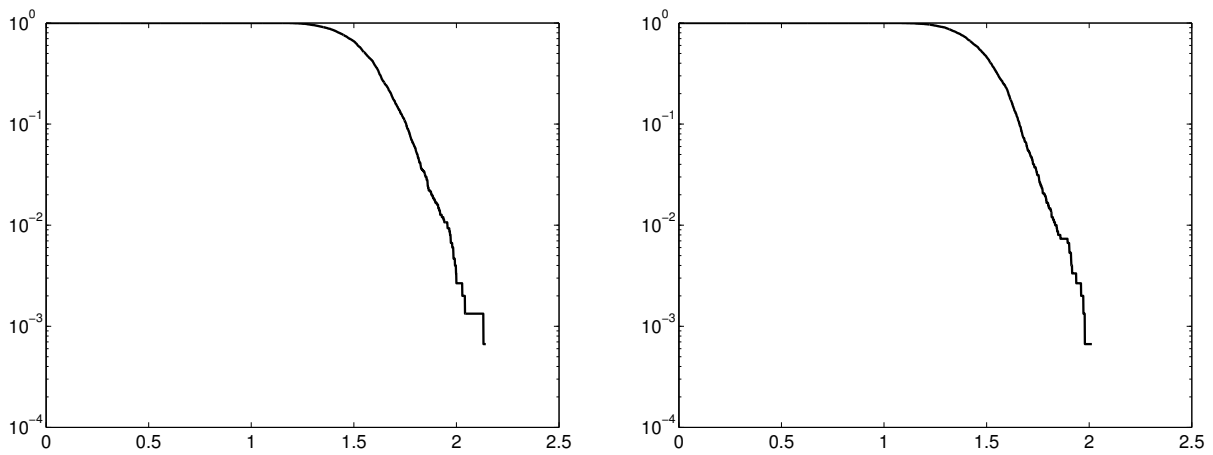
**Figure IX.28** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique : Cas 1 - Cas 2.



**Figure IX.29** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique : Cas 3 - Cas 4.



**Figure IX.30** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique : Cas 5 - Cas 6.



**Figure IX.31** – Influence des tolérances angulaires : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique : Cas 7 - Cas 8.

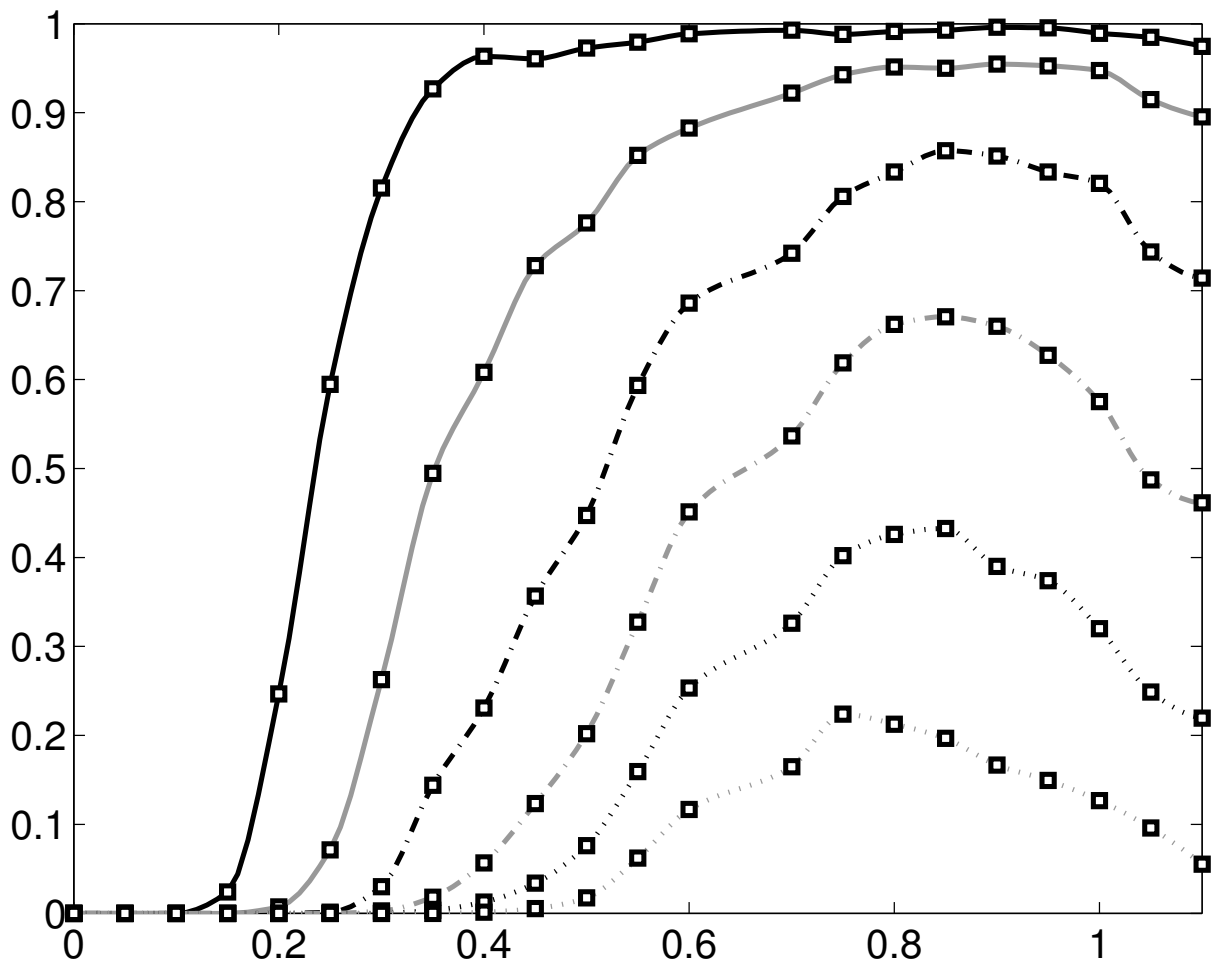
#### 4.4 Spécification des tolérances

En combinant les résultats des deux paragraphes précédents, on conclut que la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée est beaucoup plus sensible aux tolérances angulaires sur la corde de chaque aube qu'aux tolérances sur la longueur de corde de chaque aube. On fixe donc les tolérances  $dL_m = -0.55 \text{ mm}$  et  $dL_M = 0.75 \text{ mm}$  dont l'ordre de grandeur correspond aux tolérances utilisées pour la construction du modèle. L'objectif est de déterminer les tolérances optimales pour un niveau de probabilité fixé du facteur d'amplification dynamique  $B_\infty$ .

Pour cela, on utilise les graphes des figures IX.12 et IX.13 donnant les valeurs des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique en fonction des tolérances angulaires. Pour chaque jeu de tolérances, on peut donc effectuer une analyse du désaccordage de la structure par la modélisation probabiliste non paramétrique. On est donc capable de construire numériquement le graphe donnant les probabilités d'occurrence de l'observation aléatoire  $B_\infty$  en fonction des tolérances angulaires. La figure IX.32 montre le graphe de  $d\alpha \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour  $b = 1.2$  (trait noir continu),  $b = 1.3$  (trait gris continu),  $b = 1.4$  (trait noir mixte),  $b = 1.5$  (trait gris mixte),  $b = 1.6$  (trait noir pointillé),  $b = 1.7$  (trait gris pointillé).

L'allure des graphes est similaire aux graphes de la figure VIII.25 obtenu au chapitre VIII pour l'exemple numérique simple. On observe que ces graphes possèdent un maximum.

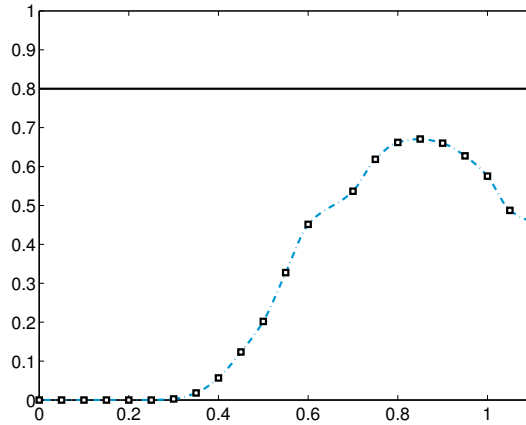
Le critère de qualité de la structure défini dans le paragraphe 5 du Chapitre VI est utilisé pour spécifier les tolérances de l'aube. Soit  $\mathcal{C}_Q = (b_c, p_c)$  un jeu de paramètres donné définissant la qualité de la structure. On cherche à trouver les tolérances  $d\alpha$  tel que  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c) < b_c$ .



**Figure IX.32** – Spécification des tolérances : graphe de la fonction  $\alpha \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour  $b = 1.2$  (trait noir continu),  $b = 1.3$  (trait gris continu),  $b = 1.4$  (trait noir mixte),  $b = 1.5$  (trait gris mixte),  $b = 1.6$  (trait noir pointillé),  $b = 1.7$  (trait gris pointillé).

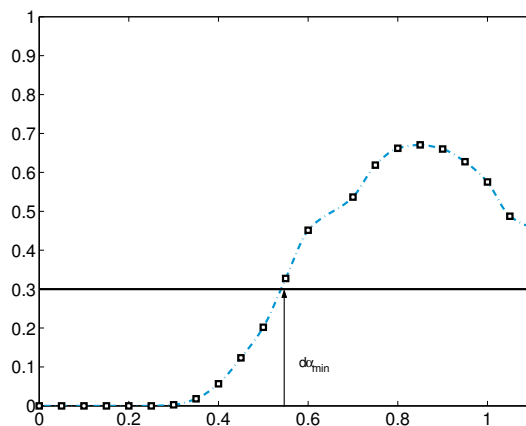
Trois cas illustrés par les figures IX.33 à IX.35 sont à considérer :

(1) Si la droite d'équation  $y = p_c$  ne possède pas de point d'intersection avec la courbe représentant  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c)$  en fonction de  $d\alpha$ , alors le critère de qualité est toujours respecté.



**Figure IX.33** – Spécification des tolérances ( $b_c = 1.5, p_c = 0.8$ )- cas 1.

(2) Si la droite d'équation  $y = p_c$  possède un point d'intersection avec la courbe représentant  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c)$  en fonction de  $d\alpha$ , on lit sur la figure IX.33 que la région de confiance définie par  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c) < b_c$  correspond à une tolérance  $d\alpha$  telle que  $d\alpha \leq d\alpha_{\min}$ .



**Figure IX.34** – Spécification des tolérances pour ( $b_c = 1.5, p_c = 0.3$ )- cas 2.

(3) Si la droite d'équation  $y = p_c$  possède deux points d'intersection avec la courbe représentant  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c)$  en fonction de  $d\alpha$ , on lit sur la figure IX.34 que la région de confiance définie par  $\mathcal{P}(B_\infty > p_c) < b_c$  correspond à une tolérance  $d\alpha$  telle que  $d\alpha \leq d\alpha_{\min}$  et  $d\alpha \geq d\alpha_{\max}$ . On constate que l'intervalle  $]d\alpha_{\min}, d\alpha_{\max}[$  correspond à une plage de valeurs interdites par les tolérances. Dans ce cas, il existe deux manières de spécifier les tolérances. La spécification  $d\alpha \leq d\alpha_{\min}$  nécessite de définir des tolérances très faibles et requiert une forte précision dans le procédé de fabrication des aubes. Au contraire, la spécification  $d\alpha \geq d\alpha_{\max}$  permet de définir des tolérances plus grossières et impose des contraintes moins importantes sur la fabrication des aubes.

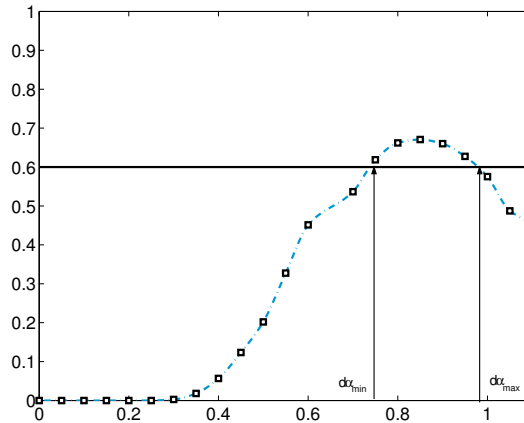


Figure IX.35 – Spécification des tolérances ( $b_c = 1.5, p_c = 0.6$ )- cas 3.

## 5. Analyse de sensibilité par rapport au modèle probabiliste de la géométrie de l'aube

Dans ce paragraphe, on étudie *a posteriori* la pertinence du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube par rapport à l'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. La méthodologie décrite au paragraphe 6 du chapitre VI est mise en œuvre.

Le modèle probabiliste de la géométrie de l'aube construit au paragraphe 3.1 de ce chapitre est perturbé aléatoirement. On cherche à quantifier l'erreur induite par cette perturbation aléatoire de géométrie sur les paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique. On souhaite donc donner une estimation des fonctions  $\text{sensi}_M$  et  $\text{sensi}_K$  définies par les équations (VI.32) et (VI.33).

On considère le cas où les tolérances sont données par

$$dL_m = -0.55 \text{ mm} \quad , \quad dL_M = 0.55 \text{ mm} \quad , \quad d\alpha = -d\alpha_m = d\alpha_M < 0.1^\circ \quad . \quad (\text{IX.16})$$

Les figures IX.12 et IX.13 conduisent aux valeurs des paramètres de dispersion  $\delta_M < 1.84 \cdot 10^{-5}$  et  $\delta_K < 2.31 \cdot 10^{-3}$ . Le modèle de géométrie aléatoire perturbé de l'aube reste une perturbation aléatoire

très faible du modèle de géométrie nominale de l'aube. Par conséquent, on utilise les expressions approchées (VI.44) et (VI.45) des fonctions de sensibilité  $\text{sensi}_M$  et  $\text{sensi}_K$  telles que

$$\text{sensi}_M = \underline{\alpha}_M^2 \underline{D}_M^2 \quad , \quad \text{sensi}_K = \underline{\alpha}_K^2 \underline{D}_K^2 \quad , \quad (\text{IX.17})$$

où  $\underline{\alpha}_M$  et  $\underline{\alpha}_K$  sont définies par les équations (VI.16) et (VI.17). En utilisant l'équation (IX.4), les quantités  $\underline{D}_M^2$  et  $\underline{D}_K^2$  définies par les équations (VI.42) et (VI.43) s'écrivent

$$D_M^2 = \mathcal{E}\{\xi^2\} \sum_{j=1}^{n^\alpha} \left( \frac{\partial \underline{f}_M(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right)^2 \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}} \left( \sum_{\alpha=1}^4 b_{\alpha j}^2 \right) \quad , \quad (\text{IX.18})$$

$$D_K^2 = \mathcal{E}\{\xi^2\} \sum_{j=1}^{n^\alpha} \left( \frac{\partial \underline{f}_K(\mathbf{y})}{\partial x_j} \right)^2 \Big|_{\mathbf{y}=\underline{\mathbf{x}}} \left( \sum_{\alpha=1}^4 b_{\alpha j}^2 \right) \quad , \quad (\text{IX.19})$$

où  $\mathcal{E}\{\xi^2\} = \mathcal{E}\{\xi_\alpha^2\}$  car les variables aléatoires  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, 4\}$  sont indépendantes et de même distribution. Les dérivées partielles des fonctions  $\underline{f}_M$  et  $\underline{f}_K$  définies par les équations (VI.2) et (VI.3) sont calculées au point  $\underline{\mathbf{x}}$  (correspondant à la géométrie nominale de l'aube) par la méthode des différences finies centrées. Sachant que la distance moyenne entre 2 nœuds du maillage est de 8 mm environ, le pas  $\eta$  du schéma numérique est choisi tel que  $\eta = 0.02 \text{ mm}$ .

La figure IX.36 montre le graphe  $d\alpha \mapsto \text{sensi}_M$  et la figure IX.37 montre le graphe  $d\alpha \mapsto \text{sensi}_K$ . On observe sur ces graphes que

$$\text{sensi}_M < 1 \quad , \quad \text{sensi}_K < 1 \quad . \quad (\text{IX.20})$$

On en déduit que les paramètres de dispersion sont peu sensibles à une perturbation aléatoire du modèle probabiliste de géométrie aléatoire utilisé.

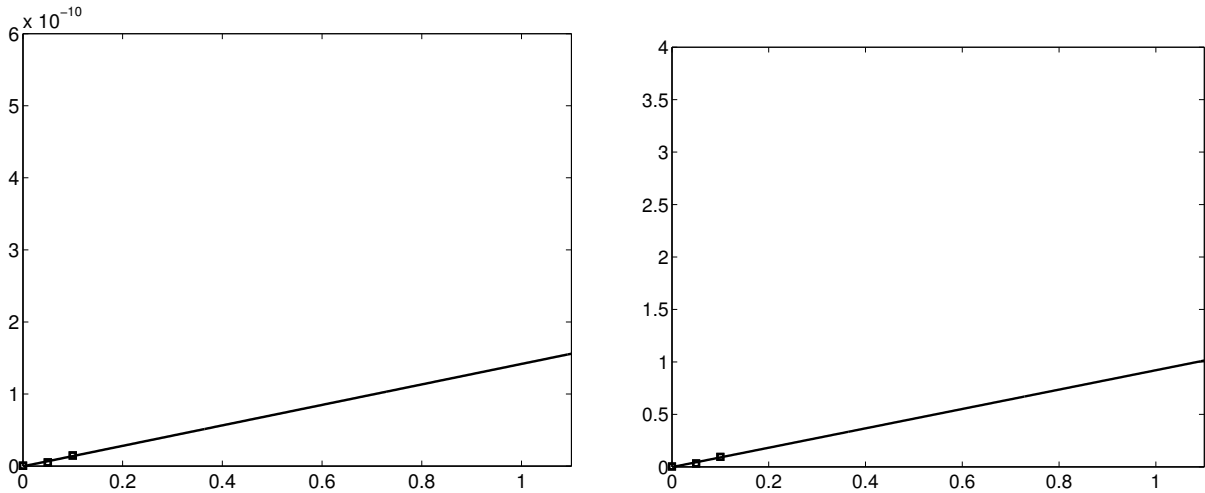
Il est à noter que le calcul exact des fonctions  $\text{sensi}_M$  et  $\text{sensi}_K$  consiste à estimer les paramètres de dispersion  $\tilde{\delta}_M$  et  $\tilde{\delta}_K$  en utilisant les équations (VI.36) et (VI.37). Ces équations nécessitent de calculer les dérivées partielles d'ordre un et d'ordre deux des fonctions  $\underline{f}_M$  et  $\underline{f}_K$  au point  $\underline{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{X}$  (correspondant à la géométrie aléatoire de l'aube). Ces dérivées partielles sont donc fonction du vecteur aléatoire  $\Delta \mathbf{X}$  et sont par conséquent elles-mêmes des variables aléatoires. Dans ce contexte probabiliste, il faut construire les réalisations de chaque dérivée partielle par la simulation numérique de Monte Carlo afin d'estimer les moments des équations (VI.36) et (VI.37). Compte-tenu de la taille du modèle élément fini de l'aube (environ 16116 DDLs), la mise en œuvre d'un tel calcul n'est pas possible.



On suppose que la linéarité de la sensibilité par rapport à des tolérances telles que  $d\alpha < 0.1^\circ$  est valable pour  $d\alpha \in [0, 1.1^\circ]$ . Ceci correspond à des paramètres de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  tels que  $\delta_M < 8.37 \cdot 10^{-5}$  et  $\delta_K < 0.12$ . En effectuant cette hypothèse, on déduit de la figure IX.36 que

$$\text{sensi}_M < 1 \quad , \quad \text{sensi}_K < 1 \quad , \quad (IX.21)$$

et que les paramètres de dispersion sont peu sensibles à une perturbation aléatoire du modèle probabiliste de géométrie utilisé.



**Figure IX.36** – Sensibilité des paramètres de dispersion vis à vis du modèle probabiliste de géométrie : graphe de la fonction  $d\alpha \mapsto \text{sensi}_M$  - graphe de la fonction  $d\alpha \mapsto \text{sensi}_K$  pour  $d\alpha < 0.1$

Enfin, on analyse l'impact de la sensibilité des paramètres de dispersion sur le facteur d'amplification dynamique. On considère par exemple le cas où  $d\alpha = 0.7^\circ$ . Pour ce cas, il existe des configurations qui conduisent à un facteur d'amplification de réponse forcée proche de 2 (voir figure IX.22). Les paramètres de dispersion du modèle non paramétriques identifiés à partir des figures IX.12 et IX.13 sont tels que

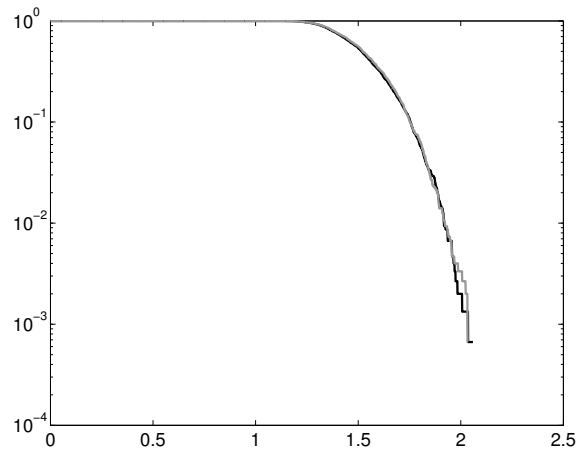
$$\delta_M = 4.14 \cdot 10^{-4} \quad , \quad \delta_K = 0.0538 \quad .$$

En considérant que la perturbation aléatoire de géométrie est telle que  $\sigma_{e_0} = 0.005$ , on déduit de la figure IX.36 que

$$\tilde{\delta}_M = 4.14 \cdot 10^{-4} \quad , \quad \tilde{\delta}_K = 0.054 \quad .$$

## CHAPITRE IX. VALIDATION DU PROBLÈME INVERSE SUR UNE STRUCTURE COMPLEXE

La figure IX.37 montre le graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour  $\delta_M = 4.14 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_K = 0.0538$  (trait noir continu) et pour  $\delta_M = 4.14 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_K = 0.054$  (trait gris continu). On observe que les deux graphes sont quasiment confondus. On conclut que la sensibilité des paramètres de dispersion à une perturbation aléatoire du modèle probabiliste de géométrie de l'aube n'affecte pas l'analyse de la réponse forcée de la structure désaccordée.



**Figure IX.37** – Analyse de sensibilité : graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour  $\delta_M = 4.14 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_K = 0.0538$  (trait noir continu) et pour  $\delta_M = 4.14 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_K = 0.054$  (trait gris continu).

# Conclusions

La thématique du désaccordage des structures tournantes à géométrie cyclique est une problématique complexe, fréquemment rencontrée dans le secteur aéronautique.

## Les apports

Au travers du travail présenté dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés plus particulièrement sur la modélisation probabiliste des incertitudes, conduisant au désaccordage des roues aubagées.

Concernant la théorie développée dans ce travail de recherche, nous avons tout d'abord proposé d'utiliser une approche probabiliste non paramétrique des incertitudes pour le désaccordage des aubes, permettant de prendre en compte les incertitudes de données et de modélisation. Cette approche est donc capable de représenter de manière cohérente les incertitudes sur les valeurs propres des aubes et sur les vecteurs propres associés, de façon à obtenir un désaccordage fréquentiel et un désaccordage en modes statistiquement dépendant.

Par ailleurs, nous avons présenté une approche probabiliste directe, basée sur la stratégie de construction d'un modèle matriciel aléatoire de la roue aubagée. Cette méthodologie s'avère être un outil prédictif efficace pour prévoir les probabilités d'occurrence du facteur aléatoire d'amplification dynamique.

Enfin, nous avons construit une méthodologie probabiliste inverse, basée sur l'utilisation du modèle probabiliste non paramétrique, et consistant à déterminer les tolérances des aubes pour une probabilité donnée sur le facteur aléatoire d'amplification dynamique.

Les méthodologies directe et inverse ont été appliquées sur deux modèles numériques de roue aubagée. Un exemple numérique simple a tout d'abord été considéré, afin de tester la faisabilité et la pertinence de ces méthodes. Nous avons ensuite validé ces approches sur un modèle industriel de roue aubagée. Nous avons montré que la complexité de la structure ne constitue pas un obstacle à la mise en œuvre numérique des méthodologies directe et inverse proposées grâce à l'utilisation de modèles réduits efficaces.

Au travers d'une approche comparative, différenciant par le modèle probabiliste introduit, nous avons étudié l'impact sur la réponse forcée aléatoire de la prise en compte des incertitudes de modélisation. Les résultats obtenus diffèrent des prédictions traditionnellement issues de modèles probabilistes paramétriques ne représentant que le désaccordage fréquentiel. Nous avons montré que le facteur aléatoire d'amplification dynamique est sensible aux incertitudes sur les déformées modales des aubes. Les résultats prédisent des niveaux d'amplification de la réponse forcée des aubes plus importants avec la méthodologie probabiliste proposée.

En ce qui concerne l'approche inverse, nous avons constaté que les paramètres de dispersion identifiés, sont des fonctions monotones croissantes des tolérances de l'aube. Par ailleurs, l'étude de la variabilité du facteur aléatoire d'amplification dynamique en fonction du niveau d'incertitudes introduit a révélé que la probabilité d'occurrence du facteur d'amplification dynamique n'est pas une fonction monotone

## CONCLUSIONS

croissante mais possède un maximum. Par conséquent, la relation construite entre le facteur d'amplification dynamique et les tolérances n'est pas bijective. Pour certains cas, il existe deux plages distinctes de tolérances respectant le critère de qualité spécifié par le constructeur. La partie croissante de la courbe concerne la précision de fabrication requise et permet de déterminer les tolérances maximales respectant ce critère de qualité. La partie décroissante de la courbe concerne le désaccordage intentionnel de la roue aubagée et montre que des tolérances beaucoup plus grossières permettent d'obtenir le même résultat. Nous avons également montré la pertinence de la méthodologie inverse proposée. En effet, nous avons montré, pour un modèle probabiliste de la géométrie de l'aube donné, que l'erreur induite lors de l'identification du paramètre de dispersion par une perturbation aléatoire de ce modèle de géométrie est très faible. Par ailleurs, les résultats obtenus montrent que le facteur aléatoire d'amplification dynamique (obtenu par la modélisation probabiliste non paramétrique) par rapport aux paramètres de dispersion, est plus faible que la sensibilité du paramètre de dispersion (obtenu par la procédure d'identification) à une perturbation aléatoire du modèle probabiliste de la géométrie de l'aube.

## Les perspectives

Dans ce travail de recherche, nous avons développé des méthodologies d'analyse permettant d'étudier le désaccordage des structures tournantes à géométrie cyclique. Il est à noter que malgré la complexité théorique des méthodologies proposées, la mise en œuvre numérique de ces méthodologies sur des structures complexes ne présente aucune difficulté majeure.

Une perspective de recherche consisterait à complexifier l'outil proposé en tenant compte des incertitudes aléatoires sur les non-linéarités de contact entre les aubes ou sur la jonction aube-disque, induites par les mécanismes de dissipation par friction. Ceci pourrait être modélisé en développant des méthodologies probabilistes mixtes paramétrique et non paramétrique.

Une autre perspective de recherche serait d'étendre l'analyse au cas d'aubes constituées de matériaux composites aléatoires dont les incertitudes seraient modélisées au niveau de leur microstructure par une approche probabiliste non paramétrique.

Enfin, au niveau de la conception robuste des roues aubagées, il serait intéressant de trouver les zones de design de l'aube qui soient peu sensibles aux incertitudes.

# Bibliographie

- [1] ANDERSON, P. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review* 109, 5 (1958), pp. 1492–1505.
- [2] ARNOLD, V. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [3] BASU, P., AND GRIFFIN, J. The effect of limiting aerodynamic and structural coupling in models of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 108, 2 (1986), pp. 132–139.
- [4] BATHE, K.-J., AND WILSON, E. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice Hall, New York, 1976.
- [5] BENDIKSEN, O. Localization phenomena in structural dynamics. *Chaos, Solitons and Fractals* 11, 10 (2000), pp. 1621–1660.
- [6] BENFIELD, W., AND HRUDA, R. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal* 9, 7 (1971), pp. 1255–1261.
- [7] BLADH, R., AND CASTANIER, M. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks-part 1 : Theoretical models. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 1 (2001), pp. 89–99.
- [8] BLADH, R., CASTANIER, M., AND PIERRE, C. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks-part 2 : Application. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 1 (2001), pp. 100–108.
- [9] BLADH, R., PIERRE, C., CASTANIER, M., AND KRUSE, M. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124, 2 (2002), pp. 311–324.
- [10] BOSSAVIT, A. L’exploitation de la symétrie en calcul des structures. *Annales des Ponts et Chaussées* 40, 4 (1986), pp. 29–39.
- [11] BOSSAVIT, A. Boundary value problems with symmetry and their approximation by finite elements. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 53, 5 (1993), pp. 1352–1380.
- [12] BOULANGER, J. *Tolérances et écarts dimensionnels, géométriques et d’états de surface*. Traité Génie Mécanique des Techniques de l’Ingénieur B 7010, 1991.
- [13] CAPIEZ-LERNOUT, E., AND SOIZE, C. Désaccordage induit par les incertitudes aléatoires de géométrie des structures cycliques. In *Actes du sixième colloque national en calcul des structures, Giens, France* (Mai 2003), pp. 219–226.
- [14] CAPIEZ-LERNOUT, E., AND SOIZE, C. Modèle probabiliste des incertitudes en dynamique des structures pour le désaccordage des roues aubagées. *Mécanique et Industries* 4, 5 (2003), pp. 585–594.

## BIBLIOGRAPHIE

- [15] CAPIEZ-LERNOUT, E., AND SOIZE, C. Specifying manufacturing tolerances for a given amplification factor : a nonparametric probabilistic methodology. In *American Society of Mechanical Engineers, International Gas Turbine Institute, Turbo Expo (Publication) IGTI* (2003), vol. 4, pp. 183–194.
- [16] CAPIEZ-LERNOUT, E., AND SOIZE, C. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed-disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 126, 3 (2004), pp. 610–618.
- [17] CAPIEZ-LERNOUT, E., SOIZE, C., LOMBARD, J.-P., DUPONT, C., AND SEINTURIER, E. Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. In *ASME Paper GT-2004-53356, Proceedings of ASME Turbo Expo Land Sea and Air, Vienna, Austria* (June 2004).
- [18] CAPIEZ-LERNOUT, E., SOIZE, C., LOMBARD, J.-P., DUPONT, C., AND SEINTURIER, E. Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, (In press)* 127, 2 (2005).
- [19] CASTANIER, M., OTTARSON, G., AND PIERRE, C. Reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 119, 3 (1997), pp. 439–447.
- [20] CASTANIER, M., AND PIERRE, C. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA Journal* 40, 10 (2002), pp. 2077–2086.
- [21] CHEBLI, H. *Modélisation des incertitudes aléatoires non homogènes en dynamique des structures pour le domaine des basses fréquences*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2002.
- [22] CHEBLI, H., AND SOIZE, C. Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of nonhomogeneous uncertainties for dynamical systems. *Journal of the Acoustical Society of America* 115, 2 (2004), pp. 697–705.
- [23] COHEN-TANNOUJJI, C., DIU, B., AND LALOE, F. *Mécanique quantique*. Hermann Paris, 1973.
- [24] CRAIG, R. *Structural Dynamics - An introduction to computer methods*. John Wiley & Sons, 1981.
- [25] CRAIG, R. A review of time-domain frequency and frequency-domain component-mode-synthesis methods. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 2, 2 (1987), pp. 59–72.
- [26] CRAIG, R. Substructure methods in vibration. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 117 (1995), pp. 207–213.
- [27] CRAIG, R., AND BAMPTON, M. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal* 6, 7 (1968), pp. 1313–1319.
- [28] DAUTRAY, R., AND LIONS, J.-L. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [29] DAVIS, P. *Circulant matrices*. John Wiley & Sons, 1979.
- [30] DESCELIERS, C. *Dynamique non linéaire en déplacements finis des structures tridimensionnelles viscoélastiques en rotation*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2001.

## BIBLIOGRAPHIE

- [31] DESCELIERS, C., AND SOIZE, C. Nonlinear viscoelastodynamic equations of three-dimensional rotating structures in finite displacement and finite element discretization. *International Journal of Nonlinear Mechanics* 39 (2004), pp. 343–368.
- [32] DESCELIERS, C., SOIZE, C., AND CAMBIER, S. Non-parametric-parametric model for random uncertainties in non-linear structural dynamics : Application to earthquake engineering. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 33, 3 (2004), pp. 315–327.
- [33] DUCHEREAU, J. *Modélisation non paramétrique des incertitudes en dynamique transitoire des systèmes complexes avec incertitudes non homogènes*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2003.
- [34] DUCHEREAU, J., AND SOIZE, C. Transient dynamics induced by shocks in stochastic structures. In *9th International Conference on Applications of Statistics and Probabilities in Civil Engineering, ICASP9, Berkeley, San Francisco, der Kiureghian, Madanat and Pestana (eds), Millpress, Rotterdam* (2003), vol. 1, pp. 267–273.
- [35] DYE, R., AND HENRY, T. Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *ASME Journal of Engineering for Power* 91, 3 (1969), pp. 182–187.
- [36] EWINS, D. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration* 9, 1 (1969), pp. 65–69.
- [37] EWINS, D. Vibration characteristics of bladed disk assemblies. *Journal of Mechanical Engineering Science* 15, 3 (1973), pp. 165–186.
- [38] FARHAT, C., AND GERADIN, M. On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures. *Computers & Structures* 51, 5 (1994), pp. 459–473.
- [39] FÄSSLER, A. *Application of group theory to the method of finite elements for solving boundary value problems*. Thèse de doctorat, Diss. 5696, Eidgenössigen Technischen Hochschule Zürich, 1976.
- [40] FEINER, D., AND GRIFFIN, J. A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *ASME Journal of Turbomachinery* 124, 4 (2002), pp. 597–605.
- [41] FEINER, D., AND GRIFFIN, J. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model - part i theory. *ASME Journal of Turbomachinery* 126, 1 (2004), pp. 150–158.
- [42] FEINER, D., AND GRIFFIN, J. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model - part ii applications. *ASME Journal of Turbomachinery* 126, 1 (2004), pp. 159–165.
- [43] GHANEM, R., AND SPANOS, P. Polynomial chaos on stochastic finite elements. *ASME Journal of Applied Mechanics* 57, 1 (1990), pp. 197–202.
- [44] GRIFFIN, J., AND HOOSAC, T. Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 106, 2 (1984), pp. 204–210.
- [45] HEALEY, T. A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67 (1988), pp. 257–295.

## BIBLIOGRAPHIE

- [46] HEALEY, T., AND TREACY, J. Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31 (1991), pp. 265–286.
- [47] HENRY, R. Calcul des fréquences et modes propres des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique Appliquée* 4, 1 (1980), pp. 61–82.
- [48] HINTZ, R. Analytical methods in component mode synthesis. *AIAA Journal* 13, 8 (1975), pp. 1007–1016.
- [49] HLADIK, J. *La théorie des groupes en physique et en chimie quantique*. Masson, Paris, 1995.
- [50] HODGES, C. Confinement of vibration by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration* 82 (1982), pp. 411–424.
- [51] HODGES, C., AND WOODHOUSE, J. Confinement of vibration by one-dimensional disorder, i : theory of ensemble averaging and ii : a numerical experiment on different ensemble averages. *Journal of Sound and Vibration* 130, 2 (1989), pp. 237–268.
- [52] HURTY, W. Dynamical analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal* 3, 4 (1965), pp. 678–685.
- [53] IMBERT, J.-F. *Analyse des Structures par Eléments finis*. Cépaduès éditions, Sup'Aéro, Toulouse, 1979.
- [54] IRWANTO, B., HARDTKE, H., PAWANDENAT, D., AND SCHMIDT, R. On substructuring technique : Application of lagrange multiplier method on cyclic structures. *Journal of Sound and Vibration* 247, 5 (2001), pp. 939–945.
- [55] JACQUET-RICHARDET, G., FERRARIS, G., AND RIEUTORD, P. Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies : a global cyclic symmetry approach. *Journal of Sound and Vibration* 191, 5 (1996), pp. 901–915.
- [56] JAYNES, E. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review* 106, 4 (1957), pp. 620–630.
- [57] JAYNES, E. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review* 108, 2 (1957), pp. 171–190.
- [58] JEZEQUEL, L. A hybrid method of modal synthesis using vibration tests. *Journal of Sound and Vibration* 100, 2 (1985), pp. 191–210.
- [59] JEZEQUEL, L., AND SEITO, H. Component mode sythesis methods based on hybrid models, part i theory of hybrid models and modal truncation methods. *ASME Journal of Applied Mechanics* 61, 1 (1994), pp. 100–108.
- [60] KAPUR, J. *Maximum-entropy models in science and engineering*. John Wiley & Sons, 1989.
- [61] LALANNE, M., AND FERRARIS, G. *Dynamique des rotors en flexion*. Traité Génie Mécanique des Techniques de l'Ingénieur B5110, 1996.
- [62] LALANNE, M., AND FERRARIS, G. *Rotordynamics prediction in engineering*. John Wiley, 1998.



## BIBLIOGRAPHIE

- [63] LIN, C.-C., AND MIGNOLET, M. Effects of damping and mistuning on the forced vibration response of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration* 193, 2 (1996), pp. 525–543.
- [64] LIN, C.-C., AND MIGNOLET, M. An adaptative perturbation scheme for the analysis of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 119, 1 (1997), pp. 153–160.
- [65] LUDWIG, W., AND FALTER, C. *Symmetries in physics : group theory applied to physical problems*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [66] MAC NEAL, R. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures* 1, 4 (1971), pp. 581–601.
- [67] MIGNOLET, M., HU, W., AND JADIC, I. On the forced response of harmonically and partially mistuned bladed disks. part 1 : harmonic mistuning. *International Journal of Rotating Machinery* 6, 1 (2000), pp. 29–41.
- [68] MIGNOLET, M., HU, W., AND JADIC, I. On the forced response of harmonically and partially mistuned bladed disks. part 2 : partial mistuning and applications. *International Journal of Rotating Machinery* 6, 1 (2000), pp. 43–56.
- [69] MIGNOLET, M., AND LIN, C.-C. The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks. *ASME Journal of Turbomachinery* 115, 3 (1993), pp. 771–780.
- [70] MIGNOLET, M., AND LIN, C.-C. Identification of structural parameters in mistuned bladed disks. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 119, 3 (1997), pp. 428–438.
- [71] MIGNOLET, M., LIN, C.-C., AND LABORDE, B. A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 2 (2001), pp. 388–394.
- [72] MIGNOLET, M., RIVAS-GUERRA, A., AND DELOR, J. Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data -part 1. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 2 (2001), pp. 395–403.
- [73] MOHAN, S., AND PRATAP, R. A group theoretic approach to the linear free vibration analysis of shells with dihedral symmetry. *Journal of Sound and Vibration* 252, 2 (2002), pp. 317–341.
- [74] MORAND, H.-P., AND OHAYON, R. *Fluid-structure interaction : applied numerical methods*. John Wiley & Son Ltd, 1995.
- [75] OHAYON, R., SAMPAIO, R., AND SOIZE, C. Dynamic substructuring of damped structures using the singular value decomposition. *ASME Journal of Applied Mechanics* 64, 2 (1997), pp. 292–298.
- [76] OHAYON, R., AND SOIZE, C. *Structural acoustics and vibration*. Academic press, 1998.
- [77] OTTARSON, G., AND PIERRE, C. On the effects of interblade coupling on the statistics of maximum forced response amplitudes in mistuned bladed disks. In *Proceedings 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Material Conference, New Orleans, Louisiana, April 1995* (1995), AIAA, pp. 3070–3078.

## BIBLIOGRAPHIE

- [78] PETROV, E., SANLITURK, K., AND EWINS, D. A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124, 3 (2002), pp. 586–597.
- [79] PICHOT, F., THOUVEREZ, F., JEZEQUEL, L., AND SEINTURIER, E. Mistuning parameters identification of a bladed disk. *Key Engineering Materials* 204-205 (2001), pp. 123–132.
- [80] PIERRE, C. Weak and strong localization in disordered structures : a statistical investigation. *Journal of Sound and Vibration* 139, 1 (1990), pp. 111–132.
- [81] PIERRE, C., AND DOWELL, E. Localization of vibrations by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration* 114, 3 (1987), pp. 549–564.
- [82] RIVAS-GUERRA, A., MIGNOLET, M., AND DELOR, J. Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data-part 2. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 2 (2001), pp. 404–411.
- [83] RUBIN, S. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal* 13, 8 (1975), pp. 995–1006.
- [84] RUBINSTEIN, R. *Simulation and the Monte Carlo Methods*. Chapman and Hall, 1964.
- [85] SEINTURIER, E., DUPONT, C., BERTHILLIER, M., AND DUMAS, M. A new aeroelastic model for mistuned bladed disks. In *AIAA paper 2002-1533 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2002).
- [86] SEINTURIER, E., LOMBARD, J.-P., BERTHILLIER, M., AND SGARZI, O. Turbine mistuned forced response prediction comparison with experimental results. In *American Society of Mechanical Engineers, International Gas Turbine Institute, Turbo Expo (Publication) IGTI* (2002), vol. 4, pp. 943–952.
- [87] SERRE, J. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [88] SHANNON, C. A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal* (1948), pp. 379–423 and 623–659.
- [89] SINHA, A. Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly. *AIAA Journal* 24, 11 (1986), pp. 1797–1801.
- [90] SINHA, A. Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos. In *American Society of Mechanical Engineers, International Gas Turbine Institute, Turbo Expo (Publication) IGTI* (June 2003), vol. 4, pp. 287–297.
- [91] SINHA, A., AND CHEN, S. Probabilistic analysis of forced response of a bladed disk assembly with various mistuning distributions. In *Proceedings of the 29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* (WilliamsBourg, 1988), AIAA, pp. 1487–1494.
- [92] SOIZE, C. *Méthodes mathématiques en analyse du signal*. Masson, 1993.
- [93] SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics* 15, 3 (2000), pp. 277–294.
- [94] SOIZE, C. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America* 109, 5 (2001), pp. 1979–1996.

## BIBLIOGRAPHIE

- [95] SOIZE, C. Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties. *E-journal from Resonance Publication (<http://www.resonancepub.com>)* 1, 1 (2001), pp. 1–38.
- [96] SOIZE, C. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration* 263 (2003), pp. 893–916.
- [97] SOIZE, C. Uncertain dynamical systems in the medium-frequency range. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 129, 9 (2003), pp. 1017–1027.
- [98] SOIZE, C. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics.(accepted for publication). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2004).
- [99] SOIZE, C., AND CHEBLI, H. Random uncertainties model in dynamic substructuring using a non-parametric probabilistic model. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 129, 4 (2003), pp. 449–457.
- [100] SRINIVASAN, A. The 1997 igti scholar papaer. flutter and resonant vibration charcteristics of engine blades. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 119, 4 (1997), pp. 742–775.
- [101] THOMAS, D. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14, 1 (1979), pp. 81–102.
- [102] TRAN, D.-M. Component mode synthesis methods using interface modes. applications to structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures* (2001), pp. 209–222.
- [103] VALID, R., AND OHAYON, R. Static and dynamic analysis of cyclically symmetric structures. *La recherche aérospatiale (english version)* 4 (1985), pp. 41–53.
- [104] WEI, S., AND PIERRE, C. Localization phenomena in mistuned assemblies for cyclic symmetry - part 2 : forced vibrations. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 110, 4 (1988), pp. 439–449.
- [105] WEYL, H. *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, New York, 1950.
- [106] WHITEHEAD, D. Effects of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science* 8, 1 (1966), pp. 15–21.
- [107] WHITEHEAD, D. The maximum factor by which forced vibration of blades can increase due to mistuning. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 120, 1 (1998), pp. 115–119.
- [108] WILLIAMS, F., KENNEDY, D., WU, G., AND ZHOU, J. Exact computation of natural frequencies of repetitive structures. *Structural Engineering and Mechanics* 4, 5 (1996), pp. 553–568.
- [109] XIAO, B., RIVAS-GUERRA, A., AND MIGNOLET, M. Maximum amplification of blade response due to mistuning in multi-degree-of-freedom blade models. In *ASME Paper GT-2004-54030, Proceedings of ASME Turbo Expo Land Sea and Air, Vienna, Austria* (June 2004).
- [110] YANG, M.-T., AND GRIFFIN, J. A reduced order approach for the vibration of mistuned bladed disk assemblies. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 119, 1 (1997), pp. 161–167.

## *BIBLIOGRAPHIE*

- [111] YANG, M.-T., AND GRIFFIN, J. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 3 (2001), pp. 893–900.
- [112] ZIENCKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The Finite Element Method (4<sup>th</sup> edition)*. McGraw-Hill, 1989.

# Annexe A

## Théorie des représentations linéaires pour le groupe cyclique d'ordre $N$

La théorie des représentations linéaires (voir par exemple [87, 65, 49]) est couramment utilisée pour étudier des problèmes physiques possédant des symétries. Les résultats fondamentaux de la théorie des représentations linéaires sont donnés dans le cadre de la symétrie cyclique d'ordre  $N$ .

### 1. Définition de la représentation linéaire

Soit  $C^N = \{1, r, r^2, \dots, r^{N-1}\}$  le groupe de rotation cyclique dans  $\mathbb{R}^3$  d'ordre  $N$  fini qui laisse l'axe de rotation  $(0, \mathbf{k})$  invariant et qui conserve les distances et les angles. On a les propriétés suivantes

$$r^m \in C^N, \text{ pour tout } m \text{ dans } \mathbb{Z}, \quad (\text{A.1})$$

$$r^m r^{m'} = r^{m+m'}, \text{ pour tout } \{m, m'\} \text{ dans } \mathbb{Z}^2, \quad (\text{A.2})$$

$$r^m = r^{m'} \text{ si et seulement si } [m']_N = m, \text{ pour tout } \{m, m'\} \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \times \mathbb{Z} \quad (\text{A.3})$$

où  $[m']_N$  est le reste de la division entière de  $m'$  par  $N$ .

Soit  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  l'espace vectoriel défini comme la restriction de l'espace admissible  $\mathcal{C}(\Omega)$  au secteur générateur  $\Omega_0$ . On définit alors le champ  $\mathbf{v}^m(\mathbf{x}_0)$  de  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  par la relation

$$\mathbf{v}^m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m), \mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0, \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0. \quad (\text{A.4})$$

Soit  $r^m \mapsto \gamma(r^m)$  l'application définie de  $C^N$  à valeurs dans l'espace des isomorphismes de  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  et telle que

$$\gamma(r^m r^{m'}) = \gamma(r^m) \cdot \gamma(r^{m'}), \quad \text{pour tout } \{m, m'\} \text{ dans } \{0, \dots, N-1\}^2. \quad (\text{A.5})$$

On définit la représentation linéaire  $\gamma$  de  $C^N$  dans l'espace de représentation  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  par

$$\gamma(r^m) \mathbf{v}^m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0, \quad \text{pour tout } m \text{ dans } \{0, \dots, N-1\}. \quad (\text{A.6})$$

Comme  $C^N$  est un groupe d'ordre fini  $N$ , on peut montrer que la représentation linéaire  $\gamma$  est une représentation unitaire c'est à dire

$$\gamma(r^m)^* = \gamma^{-1}(r^m) \quad , \quad \text{pour tout } m \text{ dans } \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{A.7})$$

où  $\gamma^*$  désigne l'adjoint.

## 2. Décomposition de la représentation linéaire

### 2.1 Représentations irréductibles

Soit  $g$  une représentation linéaire du groupe cyclique  $C^N$  dans l'espace de représentation  $\mathcal{C}(\Omega_0)$ . La représentation linéaire  $g$  est une *représentation irréductible* s'il n'existe pas de sous-espace  $W$  non trivial de  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  stable par  $C^N$ .

En utilisant la commutativité du groupe cyclique  $C^N$ , on peut montrer que,

$$\mathcal{C}(\Omega_0) = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \widehat{W}_n \quad , \quad (\text{A.8})$$

où les espaces  $\widehat{W}_0, \dots, \widehat{W}_{N-1}$  sont des sous-espaces de  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  de même dimension dont les caractéristiques seront définies au paragraphe suivant. La représentation linéaire  $\gamma$  du groupe cyclique  $C^N$  dans l'espace de représentation  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  s'écrit comme la somme directe de  $N$  représentations irréductibles notées  $\gamma_0, \dots, \gamma_{N-1}$  et de degré (multiplicité)  $d_0 = \dots = d_{N-1} = 1$  dans les espaces de représentation  $\widehat{W}_0, \dots, \widehat{W}_{N-1}$ .

### 2.2 Caractères des représentations irréductibles

Le caractère  $w_n$  de la représentation irréductible  $\gamma_n$  est défini par la fonction définie sur  $C^N$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$w_n(r^m) = \text{tr}(\gamma_n(r^m)) \quad , \quad r^m \text{ dans } C^N \quad . \quad (\text{A.9})$$

L'ensemble des fonctions définies sur  $C^N$  et à valeur dans  $\mathbb{C}$  définit un espace vectoriel noté  $\mathbb{C}[C^N]$ . Soit  $(w_m|w_n)$  la quantité définie par

$$(w_m|w_n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w_m(r^m) \overline{w_n(r^m)} \quad . \quad (\text{A.10})$$

## ANNEXE A. THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

En utilisant le Lemme de Schur [87], on peut montrer que  $(w_n|w_{n'})$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{C}[C^N]$  et l'on a

$$(w_n|w_{n'}) = \delta_{nn'} \quad . \quad (\text{A.11})$$

L'image de  $C^N$  par l'ensemble des applications  $w_n$ , avec  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$  définit la table des caractères du groupe  $C^N$ . En utilisant la relation d'orthogonalité (A.11), on peut montrer que

$$w_n(r^m) = \exp \frac{2i\pi nm}{N} \quad , \quad \text{pour tout } \{n, m\} \text{ dans } \{0, \dots, N-1\}^2. \quad (\text{A.12})$$

Pour une meilleure lisibilité, le caractère  $w_n(r^m)$  sera noté  $w_{n,m}$ . Les caractères de  $C^N$  obéissent en particulier aux propriétés suivantes :

$$w_{n,m} = w_{m,n} \quad , \quad (\text{A.13})$$

$$w_{n,m+m'} = w_{n,m} w_{n,m'} \quad , \quad (\text{A.14})$$

$$\overline{w_{n,m}} = w_{n,-m} \quad , \quad (\text{A.15})$$

$$w_{n,m+N} = w_{n,m} \quad . \quad (\text{A.16})$$

### 3. Projecteurs

Soit  $\pi_n$  l'application linéaire définie par

$$\pi_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w_{n,m} \gamma(r^m)^* \quad . \quad (\text{A.17})$$

En utilisant les équations (A.5), (A.7), (A.14) à (A.16) et (A.11) on montre

$$\begin{aligned} \pi_n \pi_{n'} &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N-1} w_{n,m} \gamma(r^m)^* w_{n',m'} \gamma(r^{m'})^* \quad , \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m'=0}^{N-1} w_{n,m} \overline{w_{n',m}} \sum_{m'=0}^{N-1} w_{n',m+m'} \gamma(r^{(m+m')})^* \quad , \\ &= \delta_{nn'} \pi_n \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

On définit les espaces admissibles  $\widehat{W}_n$  comme l'image de l'espace  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  par les applications  $\pi_n$ . L'équation (A.18) montre que, pour  $n$  fixé dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , l'application linéaire  $\pi_n$  est la projection orthogonale de  $\mathcal{C}(\Omega_0)$  sur  $\widehat{W}_n$  parallèlement à l'espace  $\bigoplus_{n' \neq n} \widehat{W}_{n'}$  ce qui est cohérent avec l'équation (A.8).

Soit un champ  $\mathbf{u}^0$  de  $\mathcal{C}(\Omega_0)$ . On a d'après l'équation (A.8), pour tout  $\mathbf{x}_0$  de  $\Omega_0$

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}_0) = \sum_{n'=0}^{N-1} \widehat{\mathbf{u}}_{n'}(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \pi_n \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_0) = \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \quad , \quad (\text{A.19})$$

où le champ  $\widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0)$  appartient à l'espace  $\widehat{W}_n$

## 4. Transformée de Fourier discrète

Soit  $\mathbf{x}_m$  défini par  $\mathbf{x}_m = r^m \mathbf{x}_0$  pour tout  $\mathbf{x}_0$  de  $\Omega_0$ . En utilisant les équations (A.4), (A.5), (A.6) et (A.18), et les propriétés des caractères (A.11), (A.14) à (A.16), on obtient la transformée de Fourier discrète [92, 76]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^m(\mathbf{x}_m) &= \gamma(r^m)^* \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \quad , \\ &= \frac{1}{N} \gamma(r^m)^* \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N-1} w_{n,m'} \gamma(r^{m'})^* \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_0) \quad , \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \sum_{m'=0}^{N-1} w_{n,m+m'} \gamma(r^{-(m+m')}) \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_0) \quad , \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w_{n,m}} \widehat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}_0) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$



# Annexe B

## Hétérodynage des variables aléatoires

Cette annexe rappelle la méthode d'hétérodynage des variables aléatoires utilisée pour réduire le nombre de simulations numériques de Monte-Carlo. La méthode est présentée pour des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme.

### 1. Simulation des variables aléatoires sans hétérodynage

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r)$  le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$  dont les composantes  $X_\alpha$ , avec  $\alpha$  dans  $\{1, \dots, r\}$  sont des variables aléatoires indépendantes de distribution uniforme de support  $[a, b]$ .

Soient  $\theta_1, \dots, \theta_{n_s}, n_s$  réalisations obtenues par la simulation numérique de Monte-Carlo. Chaque réalisation  $X(\theta_i)$ , avec  $i$  dans  $\{1, \dots, n_s\}$  est un élément de l'hypercube  $\mathcal{H}$  défini par

$$\mathcal{H} = [a, b]^r \quad , \quad (\text{B.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels donnés tels que  $a < b$ .

### 2. Simulation des variables aléatoires hétérodynées

On partitionne l'intervalle  $[a, b]$  en  $p$  intervalles réguliers de longueur  $D = (b - a)/p$ .

Soit  $f$  une application bijective définie sur  $\{1, \dots, p\}^r$  et à valeurs dans  $\{1, \dots, p^r\}$ . Soit  $(j_1, \dots, j_r)$  le  $r$ -uplet à valeurs dans  $\{1, \dots, p\}$ . On note  $k$  l'image de  $f$  par  $(j_1, \dots, j_r)$  et on définit l'hypercube  $\mathcal{H}_k$  par

$$\mathcal{H}_k = \prod_{\alpha=1}^r [a + D(j_\alpha - 1), a + D j_\alpha] \quad . \quad (\text{B.2})$$

L'hypercube  $\mathcal{H}$  se décompose en  $p^r$  hypercubes de même dimension tel que

$$\mathcal{H} = \cup_{k=1}^{p^r} \mathcal{H}_k \quad . \quad (\text{B.3})$$

Soit  $\mathbf{Y}_k = (Y_{k,1}, \dots, Y_{k,r})$  le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{H}_k$  dont les composantes  $Y_{k,\alpha}, \alpha \in \{1, \dots, r\}$  sont des variables aléatoires uniformes de support  $[a + D(j_\alpha - 1), a + D j_\alpha]$ . Soient  $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{n_t}$   $n_t$  réalisations obtenues par la simulation numérique de Monte Carlo.

## ANNEXE B. HÉTÉRODYNAGE DES VARIABLES ALÉATOIRES

Les réalisations  $Y_k(\tilde{\theta}_l)$ ,  $\forall(k, l) \in \{1, \dots, p^r\} \times \{1, \dots, n_t\}$  sont  $n_t$  éléments de chaque hypercube  $\mathcal{H}_k$ . En posant  $n_s = n_t p^r$ , on obtient  $n_s$  éléments de  $\mathcal{H}$ . On pose alors

$$X(\theta_i) = Y_k(\tilde{\theta}_l) \quad , \quad i = \text{perm}(kl) \quad , \quad (\text{B.4})$$

où perm est une permutation arbitraire de  $\{1, \dots, n_s\}$ .

L'hétérodynage des variables aléatoires permet d'obtenir une répartition régulière des réalisations des variables aléatoires dans l'hypercube  $\mathcal{H}$ . Il est à noter que cette méthode nécessite de simuler au préalable toutes les réalisations des variables aléatoires. Comme le nombre de réalisations requis est une puissance du nombre de variables aléatoires, on voit que la procédure d'hétérodynage est aisée à mettre en œuvre dans la mesure où le nombre de variables aléatoire est faible. Par contre, lorsque le nombre de variables aléatoires est important, l'utilisation de la procédure d'hétérodynage n'est plus réaliste.

## Annexe C

# Influence des stratégies d'implémentation du modèle probabiliste non paramétrique sur la réponse forcée désaccordée

Dans cette annexe, on s'intéresse à la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes de désaccordage pour l'exemple simple de roue aubagée décrit au chapitre VII. On compare la réponse forcée de la structure désaccordée obtenue par l'approche donnant le système matriciel d'équations (IV.68), (IV.69) avec celle définie par les équations (IV.70), (IV.71).

La première approche consiste à implémenter le modèle probabiliste non paramétrique sur la totalité des matrices de masse, de dissipation et de raideur issues du modèle matriciel réduit moyen de chaque aube. On rappelle que les matrices aléatoires données par l'équation (IV.57) sont telles que

$$[\mathbf{M}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{M}^j] & [\mathbf{M}_c^j] \\ [\mathbf{M}_c^j]^T & [\mathbf{M}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, [\mathbf{D}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{D}^j] & [\mathbf{D}_c^j] \\ [\mathbf{D}_c^j]^T & [\mathbf{D}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, [\mathbf{K}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}^j] & [\mathbf{K}_c^j] \\ [\mathbf{K}_c^j]^T & [\mathbf{K}_\Sigma^j] \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Dans la seconde approche, les incertitudes aléatoires ne sont implémentées que sur la partie dynamique des matrices de masse, de dissipation et de raideur du modèle moyen réduit de chaque aube. On rappelle que les matrices aléatoires données par l'équation (IV.61) s'écrivent

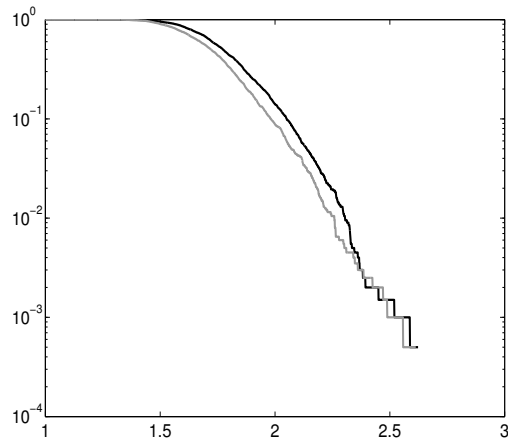
$$[\mathbf{M}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{M}}^j] & [\underline{M}_c^j] \\ [\underline{M}_c^j]^T & [\underline{M}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, [\mathbf{D}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{D}}^j] & [\underline{D}_c^j] \\ [\underline{D}_c^j]^T & [\underline{D}_\Sigma^j] \end{bmatrix}, [\mathbf{K}_{\text{red}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathcal{K}}^j] & [\underline{K}_c^j] \\ [\underline{K}_c^j]^T & [\underline{K}_\Sigma^j] \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Les réponses forcées de la roue aubagée désaccordée obtenues par ces deux approches sont comparées pour les cas suivants de désaccordage

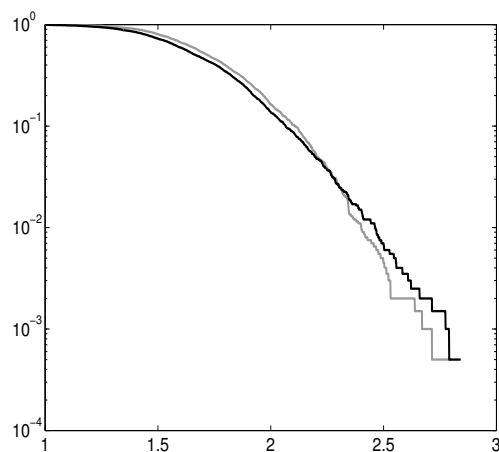
$$\text{cas 1} \quad \delta_M = 0 \quad , \quad \delta_D = 0.05 \quad , \quad \delta_K = 0.01 \quad , \quad (\text{C.3})$$

$$\text{cas 2} \quad \delta_M = 0 \quad , \quad \delta_D = 0.05 \quad , \quad \delta_K = 0.08 \quad . \quad (\text{C.4})$$

La figure C.1 (ou C.2) analyse la réponse forcée de la structure désaccordée pour le cas 1 (ou cas 2). Le facteur d'amplification dynamique aléatoire considéré est  $B_{\text{sig},\infty}$  défini par l'équation (IV.58) et noté  $B_\infty$ . Le trait noir continu représente la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique obtenu en construisant les matrices aléatoires de chaque aube par l'équation (C.1). Le trait gris continu représente la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation logarithmique obtenu en construisant les matrices aléatoires de chaque aube par l'équation (C.2).



**Figure C.1** – Cas 1 de désaccordage : graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique : incertitudes sur la totalité des matrices (trait noir continu) - incertitudes sur la partie dynamique des matrices (trait gris continu)



**Figure C.2** – Cas 2 de désaccordage : graphe des fonctions  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique : incertitudes sur la totalité des matrices (trait noir continu) - incertitudes sur la partie dynamique des matrices (trait gris continu)

On observe de faibles écarts sur les niveaux de probabilité du facteur d'amplification dynamique  $B_\infty$  obtenus par ces deux approches. Pour les cas présentés, la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée s'avère donc moins sensible à la partie statique des incertitudes (affectant les DDLs de jonction aubédisque) qu'à la partie dynamique des incertitudes. Pour l'exemple étudié, le choix de la modélisation probabiliste non paramétrique affecte peu les résultats numériques concernant le facteur aléatoire d'amplification dynamique

## Annexe D

# Influence des incertitudes de dissipation sur le désaccordage dynamique du modèle industriel de roue aubagée

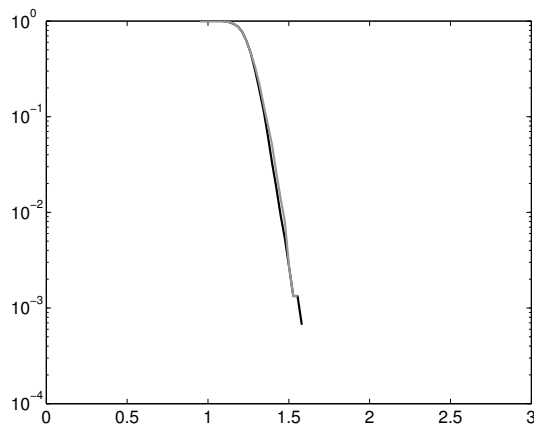
Cette annexe constitue un complément du paragraphe 4.3 du chapitre IX pour lequel une incertitude additionnelle de dissipation est considérée sur chaque aube. On rappelle qu'on étudie le désaccordage induit par les tolérances angulaires de chaque aube. Les incertitudes sur la géométrie sont d'origine conservative. Par conséquent, la procédure d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique ne concerne que les paramètres de dispersion de masse et de raideur de l'aube. On analyse la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée lorsqu'on ajoute aux incertitudes induites par les tolérances de chaque aube une incertitude non nulle sur la dissipation de chaque aube. Le problème direct est alors résolu pour les cas suivants :

	$dL_m$ (mm)	$dL_M$ (mm)	$d\alpha$ (°)	$\delta_M$	$\delta_D$	$\delta_K$
cas 1	-0.55	0.75	0.3	$2.06 \cdot 10^{-4}$	0	$1.10 \cdot 10^{-2}$
cas 1'	-0.55	0.75	0.3	$2.06 \cdot 10^{-4}$	0.2	$1.10 \cdot 10^{-2}$
cas 2	-0.55	0.75	0.45	$2.46 \cdot 10^{-4}$	0	$2.22 \cdot 10^{-2}$
cas 2'	-0.55	0.75	0.45	$2.46 \cdot 10^{-4}$	0.2	$2.22 \cdot 10^{-2}$
cas 3	-0.55	0.75	0.6	$3.42 \cdot 10^{-4}$	0	$4.2 \cdot 10^{-2}$
cas 3'	-0.55	0.75	0.6	$3.42 \cdot 10^{-4}$	0.2	$4.2 \cdot 10^{-2}$

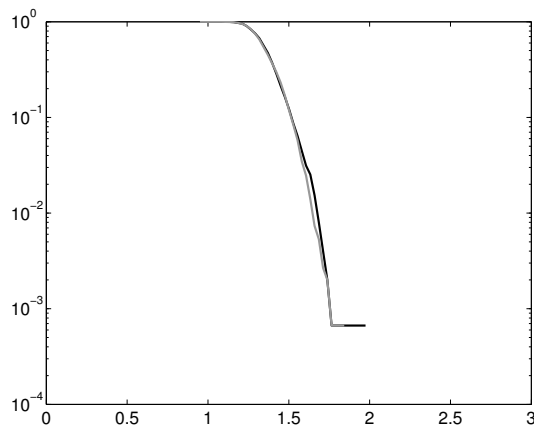
**Table D.1** – Description des différents cas de désaccordage présentés

La figure D.1 (ou D.2 et D.3) représente le graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  en représentation semi-logarithmique pour le cas 1 (ou cas 2 et cas 3) (trait noir continu) et pour le cas 1' (ou cas 2' et cas 3') (trait gris continu).

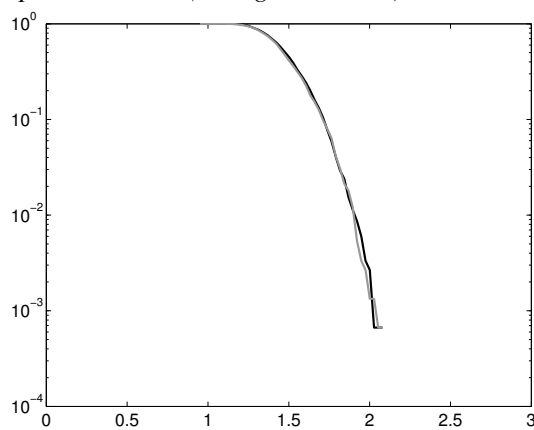
On observe que la présence d'incertitudes sur la dissipation modifie peu les probabilités d'occurrence du facteur aléatoire d'amplification dynamique  $B_\infty$ .



**Figure D.1** – Influence des incertitudes sur la dissipation : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour le cas 1 (trait noir continu) et pour le cas 1' (trait gris continu).



**Figure D.2** – Influence des incertitudes sur la dissipation : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour le cas 2 (trait noir continu) et pour le cas 2' (trait gris continu).



**Figure D.3** – Influence des incertitudes sur la dissipation : graphe de la fonction  $b \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b)$  pour le cas 3 (trait noir continu) et pour le cas 3' (trait gris continu).

**Résumé :** L'objet de ce travail de recherche est de proposer de nouvelles méthodologies probabilistes pour l'analyse dynamique basses fréquences du désaccordage des structures tournantes à symétrie cyclique. La classe de structure étudiée est la roue aubagée. Tout d'abord, un modèle probabiliste non paramétrique récent est utilisé pour construire une approche probabiliste directe, permettant d'analyser l'amplification dynamique de la réponse forcée des aubes, induite par le désaccordage. En particulier, une telle approche permet de modéliser de manière cohérente le désaccordage en fréquences des aubes et le désaccordage en modes des aubes. Ensuite, une approche probabiliste inverse, reposant sur une méthode d'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique, est construite afin de déterminer les tolérances des aubes, conduisant à une probabilité donnée du facteur d'amplification dynamique de la réponse forcée. Enfin, ces méthodologies sont mises en œuvre numériquement sur un exemple numérique simple et sur un modèle complexe de roue aubagée. Les réponses forcées désaccordées obtenues par le modèle probabiliste non paramétrique et par le modèle probabiliste paramétrique classiquement utilisé pour la problématique du désaccordage sont comparées. Par ailleurs, la méthodologie du problème inverse permet d'optimiser les tolérances de l'aube pour réduire l'amplification de la réponse forcée. L'analyse des résultats valide la pertinence des méthodologies proposées.

---

**Title :** Structural dynamics of rotating structures with cyclic symmetry in presence of random uncertainties. Application to mistuned bladed disks.

**Abstract :** The objective of this research is to propose new probabilistic methodologies for the dynamic analysis of the mistuning of rotating structures with cyclic symmetry in the low frequency range. The structure under consideration is a bladed disk. Firstly, a recent nonparametric probabilistic model is used for constructing a direct probabilistic approach, allowing the dynamic amplification of the forced response on blades induced by mistuning to be analyzed. Particularly, such a probabilistic approach allows the blade-eigenfrequencies mistuning and the blade-modal-shape mistuning to be modeled with coherence. Secondly, an inverse probabilistic approach, based on an identification method of the dispersion parameters controlling the nonparametric probability model, is constructed in order to define the blade tolerances yielding a given probability level of the dynamic amplification of the forced response. Finally, both methodologies are numerically applied on a simple case and on a complex structure. The mistuned forced response obtained with the nonparametric probabilistic model and with the parametric probabilistic approach traditionally used in the mistuning context are compared. In addition, the inverse probabilistic approach allows the blade tolerances to be optimized in order to reduce the amplifications of the forced response. The analysis of these results validate the relevance of the proposed methodologies.

---

**Discipline :** Mécanique

**Mots-Clefs :** dynamique des structures, symétrie cyclique, sous-structuration dynamique, désaccordage des roues aubagées, tolérances géométriques, incertitudes aléatoires, modèle probabiliste non paramétrique, problème inverse.

**Laboratoire :** Laboratoire de Mécanique (LaM), Université de Marne-La-Vallée, 5 Boulevard Descartes, 77454 Marne-La-Vallée Cedex 04