



HAL
open science

Méthodes numériques temps-échelle et temps-fréquence pour le traitement du signal et des images

Philippe Carré

► **To cite this version:**

Philippe Carré. Méthodes numériques temps-échelle et temps-fréquence pour le traitement du signal et des images. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Poitiers, 2000. Français. NNT: . tel-00009451

HAL Id: tel-00009451

<https://theses.hal.science/tel-00009451>

Submitted on 13 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE de POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National – Arrêté du 30 Mars 1992)

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : « Traitement du signal et des images »

Présentée par :

Philippe CARRÉ

Méthodes numériques temps-échelle et temps-fréquence pour le traitement du signal et des images

Directeur de thèse :

Christine FERNANDEZ-MALOIGNE

Soutenue le 6 Janvier 2000

Devant la Commission d'Examen

JURY

Rapporteurs :

M. BARLAUD, Professeur à l'université de Nice.

P. DUVAUT, Professeur à l'université de Cergy-Pontoise.

Examineurs :

P.O. AMBLARD, Chargé de Recherches CNRS à l'INPG de Grenoble.

B. DUBUISSON, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne.

M. LEARD, Professeur à l'Université de Poitiers.

N. RICHARD, Maître de Conférences à l'Université de Poitiers.

C. FERNANDEZ-MALOIGNE, Professeur à l'Université de Poitiers.



Table des matières

Notations	vi
Introduction	1
1 Ondettes non-décimées et méthodes itératives pour le débruitage	6
1.1 Introduction	6
1.2 Débruitage par transformée en ondelettes	7
1.2.1 La transformée en ondelettes	7
1.2.2 Débruitage par décomposition décimée	11
1.2.2.1 Bruit blanc	11
1.2.2.2 Bruit corrélé	12
1.2.3 Débruitage par décomposition non-décimée	12
1.2.3.1 Décomposition et seuillage	12
1.2.3.2 Transformation inverse	13
1.2.4 Extension du débruitage à la dimension 2	14
1.3 Débruitage de multiples copies d'un signal	14
1.3.1 Principe de l'algorithme <i>ITE_DIF</i>	14
1.3.1.1 Concept	14
1.3.1.2 Etude de l'algorithme	15
1.3.2 Définition des différents seuils de l'algorithme <i>ITE_DIF</i>	18
1.3.2.1 Définition du seuil $\lambda^{s^{(1)}}$	18
1.3.2.2 Définition du seuil λ^R	19
1.3.2.3 Choix de la méthode de seuillage	20
1.3.3 Une variante : l'algorithme <i>MEAN_ERR</i>	20
1.3.3.1 Principe	20
1.3.3.2 Choix des seuils	22
1.3.4 Extension à la dimension 2 des algorithmes <i>ITE_DIF</i> et <i>MEAN_ERR</i>	23
1.4 Résultats des algorithmes itératifs sur des signaux et des images de tests	23
1.4.1 Résultats sur des signaux	23
1.4.2 Résultats sur des images de la base du GDR ISIS	26
1.4.3 Applications à des images cérébrales fonctionnelles par résonance magnétique (IRMf)	29
1.5 Conclusion	32

2	Décomposition en maxima d'ondelettes : débruitage et segmentation	33
2.1	Introduction	33
2.2	Représentation en maxima d'ondelettes	33
2.2.1	Principe	33
2.2.2	Définition des fonctions analysantes	34
2.2.3	Maxima d'ondelettes	36
2.2.4	Reconstruction du signal à partir des maxima d'ondelettes	36
2.2.5	Extension à l'image	37
2.2.6	Propagation des maxima	39
2.3	Segmentation de signaux 1D par maxima d'ondelettes	40
2.3.1	Recalage des maxima	41
2.3.2	Algorithme de chaînage	42
2.3.2.1	Méthodologie commune	43
2.3.2.2	Θ_1 : Choix par l'amplitude	44
2.3.2.3	Θ_2 : Choix amplitude/position	45
2.3.2.4	Confrontation des deux votes	46
2.3.2.5	Seuillage et post-traitement	48
2.3.2.6	Remarque : l'algorithme de segmentation, une méthode pour débruiter	49
2.3.3	Applications	50
2.3.3.1	Signaux de radiocommunications	50
2.3.3.1.1	Présentation	50
2.3.3.1.2	Résultat	52
2.3.3.2	Signaux électroencéphalogramme (EEG)	54
2.3.3.2.1	Présentation	54
2.3.3.2.2	Résultats	56
2.3.3.2.2.1	Signal de mouvements des lèvres (signal MDLP)	56
2.3.3.2.2.2	Signal audio	58
2.3.3.3	Quelques commentaires	60
2.4	Débruitage d'images par maxima d'ondelettes	60
2.4.1	Dérivée première discrétisée	61
2.4.2	Pertinence des postulats	63
2.4.2.1	Calcul de la loi de dispersion de l'angle du gradient monoéchelle	63
2.4.2.2	Illustrations des postulats	64
2.4.3	Utilisation de l'information angle en multiéchelles	68
2.4.3.1	Extension de la dispersion angulaire aux multiéchelles	68
2.4.3.2	Définition de nouveaux filtres	69
2.4.3.3	Définition des opérateurs de projection Q_0 et Q_0^{-1}	70
2.4.3.4	Algorithme <i>ANGLE_ITE</i>	73
2.4.4	Développement numérique	73
2.4.4.1	"Simulation" sur chacune des échelles	74
2.4.4.2	"Simulation" à travers les échelles	74
2.4.5	Applications	75

2.4.5.1	Images tests	75
2.4.5.2	Images d'angiographie	80
2.5	Conclusion	81
3	Quelques algorithmes sur les ondelettes de Malvar	83
3.1	Introduction	83
3.2	Rappel sur les ondelettes de Malvar	84
3.2.1	Fenêtrage	84
3.2.2	Bases trigonométriques locales	86
3.2.3	Opérateur de repliement	86
3.2.4	Base orthonormée fenêtrée	87
3.2.5	Divisions successives et meilleure base	89
3.2.6	Extension à la dimension 2 des ondelettes de Malvar	91
3.3	Une décomposition optimale et non-uniforme	93
3.3.1	Partition non-uniforme d'un axe $[0, N - 1]$	93
3.3.2	Base φ fenêtrée non-uniforme	98
3.3.3	Meilleure base et meilleure translation	100
3.3.4	Complexité et extension 2D	102
3.3.5	Exemples et discussion	105
3.4	Recherche de partitions stationnaires par une mesure de distance spectrale	108
3.4.1	Arbre binaire des distances spectrales	108
3.4.1.1	Estimation du spectre	108
3.4.1.2	Calcul de l'arbre des distances	110
3.4.2	Choix de la meilleure partition	111
3.4.2.1	Algorithme d'élagage	111
3.4.2.2	Cas symétrique	112
3.4.2.3	Post-traitement	115
3.4.3	Applications 1D	116
3.4.3.1	Signaux de tests	116
3.4.3.2	Phonétique anglaise	117
3.4.3.2.1	Débruitage	118
3.4.3.2.2	Extraction de ou des accents de mots	120
3.4.3.3	Application à l'EEG	123
3.4.4	Extension à la dimension 2 de l'arbre des distances	126
3.4.4.1	Décomposition anisotropique en ondelettes de Malvar 2D	126
3.4.4.1.1	Algorithme de décomposition	126
3.4.4.1.2	Organisation des distances	127
3.4.4.2	Mesure de distances spectrales	129
3.4.4.3	Choix de la meilleure partition	133
3.4.4.3.1	Cas symétrique	133
3.4.4.3.2	Algorithme d'élagage	134
3.4.4.3.3	Post-traitement	135
3.4.4.4	Résultats 2D	137

3.5	Conclusion	139
4	Construction d'une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer	140
4.1	Introduction	140
4.2	Les ondelettes de Meyer	140
4.2.1	Théorie continue	140
4.2.2	Réalisation numérique	144
4.2.2.1	Restriction aux fréquences positives	144
4.2.2.2	Calcul des corrélations avec la fonction d'ondelette	144
4.2.2.3	Calcul des corrélations avec la fonction d'échelle	148
4.2.3	Propriétés de la décomposition discrète en ondelettes de Meyer	150
4.2.3.1	Décroissance de la fonction d'ondelette	151
4.2.3.2	Localisation temporelle	151
4.2.3.3	Séparation fréquentielle	152
4.3	Les paquets d'ondelettes de Meyer pour le signal	153
4.3.1	Rappel sur les paquets d'ondelettes 1D	153
4.3.2	Réalisation de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer	154
4.3.2.1	Calcul des coefficients de paquets d'ondelettes associés à $\widehat{\psi}_{2^j}^{l+1}$ avec $j > 0$	156
4.3.2.1.1	Définition de l'intervalle	156
4.3.2.1.2	Définition du recouvrement	156
4.3.2.1.3	Définition des polarités et transformées	157
4.3.2.2	Calcul des coefficients de paquets d'ondelettes associés à $\widehat{\psi}_{2^{j+1}}^{l+1}$	157
4.3.2.3	Calcul des coefficients de paquets d'ondelettes associés à $\widehat{\psi}_0^{l+1}$	158
4.3.2.4	Algorithme et reconstruction	158
4.3.3	Propriétés de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer	160
4.3.3.1	Résolution temporelle	160
4.3.3.2	Séparation fréquentielle	161
4.4	Algorithme de "séparation" 1D	162
4.4.1	Hypothèses et principes	162
4.4.2	Enveloppe et mesure d'intersection	163
4.4.2.1	Evaluation de la distribution de l'énergie en fonction du temps : fonction ET	163
4.4.2.2	Fonction de coût : $\Phi(\cdot)$	164
4.4.3	Choix de la meilleure représentation	165
4.4.4	Applications	167
4.4.4.1	Signaux de test	167
4.4.4.2	Phonétique anglaise	171
4.4.4.3	Application à l'EEG	174
4.5	Extension à l'image des décompositions de Meyer	176
4.5.1	Ondelettes de Meyer 2D	176
4.5.2	Rappel sur les paquets d'ondelettes 2D	178
4.5.3	Applications des paquets d'ondelettes de Meyer 2D	179

4.5.4	Algorithme de séparation 2D	180
4.5.4.1	Evaluation de la distribution de l'énergie dans le domaine spatial 2D : fonction ET^2	181
4.5.4.2	Fonction de coût 2D : $\Phi^2(\cdot)$	182
4.5.4.3	Choix de la meilleure représentation 2D	182
4.5.4.4	Illustration	183
4.6	Classification non supervisée: vers la segmentation de texture	184
4.6.1	Méthode de classification : nuées dynamiques	184
4.6.2	Constitution de l'ensemble Ω	185
4.6.3	Applications	187
4.7	Conclusion	193
5	Vers le tout non-uniforme	194
5.1	Introduction	194
5.2	Décomposition non-uniforme en paquets d'ondelettes de Meyer	194
5.2.1	Principe général	194
5.2.2	Paquets d'ondelettes de Meyer à recouvrement constant	195
5.2.3	Algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme	198
5.2.4	Applications de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme	200
5.3	Arbre-double non uniforme	204
5.3.1	La décomposition "double tree"	204
5.3.1.1	Principe	204
5.3.1.2	Vers le tout non-uniforme	207
5.3.1.3	Quelques applications	208
5.3.2	Evolution future des algorithmes non-uniformes	211
5.3.2.1	balanced double tree	211
5.3.2.2	Une décomposition 2D non-uniforme	216
5.4	Conclusion	218
	Conclusion	219
	Bibliographie	226
	Annexes	233

Notations

Nous indiquons quelques notations les plus utilisées durant ce mémoire.

Définitions générales

- Signaux continus 1D : $f(x)$ ou $s(x) \in L^2(\mathbb{R})$
- Signaux continus 2D : $f(x, y)$ ou $s(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$
- Signaux discrets 1D : $f[n]$ ou $s[n] \in l^2(\mathbb{Z})$
- Signaux discrets 2D : $f[n, m]$ ou $s[n, m] \in l^2(\mathbb{Z}^2)$
- Signaux discrets 1D de longueur finie : $f[n]$ ou $s[n] \in l^2[0, N - 1]$ avec N nombre de points
- Signaux discrets 2D de longueur finie : $f[n, m]$ ou $s[n, m] \in l^2[0, N - 1] \times [0, M - 1]$ avec N, M taille de l'image
- fonction de seuillage : T_λ avec λ un seuil
- TR opérateur de translation
- x, n, t et m dénotent le temps ou l'espace, ξ dénote la fréquence

Transformée en ondelettes

- Fonction d'échelle : ϕ avec h filtre passe-bas associé ou H dans le domaine fréquentiel
- Fonction d'ondelette : ψ avec g filtre passe-haut associé ou G dans le domaine fréquentiel
- $h^{(l)}$ et $g^{(l)}$: versions dilatées des filtres h et g
- Indice : l échelle, k numéro du coefficient, j numéro de la projection, s numéro de la translation
- V_l espace passe-bas, W_l espace passe haut à l'échelle l
- \vec{W} : la transformée en ondelettes discrète décimée dans $l^2(\mathbb{Z})$, \vec{W}^{-1} opération adjointe
- \widetilde{W} : la transformée en ondelettes continue dans $L^2(\mathbb{R})$, \widetilde{W}^{-1} opération adjointe

Coefficients des transformées

- Transformée en ondelettes continue : $c_{l,k}^o$ $k^{\text{ème}}$ coefficient "passe-bas" et $d_{l,k}^o$ $k^{\text{ème}}$ coefficient d'ondelettes à l'échelle l

-
- Transformée en ondelettes discrète : $c_{l,k}$ $k^{\text{ème}}$ coefficients "passe-bas" et $d_{l,k}$ $k^{\text{ème}}$ coefficient d'ondelettes discret décimé à l'échelle l . c_l ou d_l correspond à l'ensemble de la projection du signal à l'échelle l : $c_l = \{c_{l,k}\}_{k=0..N/2^l-1}$
 - Transformée en ondelettes discrète non-décimée : $e_{l,k}$ $k^{\text{ème}}$ coefficients "passe-bas" et $w_{l,k}$ $k^{\text{ème}}$ coefficient d'ondelettes discret non-décimé à l'échelle l
 - Transformée en paquets d'ondelettes discrète : $d_{j,k}^l$ $k^{\text{ème}}$ coefficient de paquets ondelettes discret décimé de la projection j à l'échelle l .

Fenêtrage régulier

- I_j : un intervalle quelconque de $l^2(Z)$ défini par $I_j = [a_j, a_{j+1} - 1]$ et lg_j sa taille
- $r(t)$: fonction de coupure; α : taille de recouvrement, $w_j(t)$: fenêtre régulière
- U_{a_j} : opérateur repliement autour du point a_j , $U_{a_j}^*$ son adjoint
- $T_{[a_j, a_{j+1}-1]}$ ou T_{I_j} : opérateur de restriction régulière de fonction f sur l'intervalle $I_j = [a_j, a_{j+1} - 1]$, et $T_{I_j}^*$ son adjoint

Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein de l'équipe Signal-Image-Communications de l'Université de Poitiers appartenant à l'Institut de Recherche en Communications Optique et Micro-ondes de Limoges. Ils ont été développés sous la direction de C. Fernandez-Maloigne, Professeur à l'Université de Poitiers.

Durant les cinquante dernières années, le traitement du signal numérique a subi un développement important grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) [43]. Toutefois, la transformée de Fourier cache l'information sur le temps car les éléments de l'analyse sont les fonctions sinus et cosinus, qui ne sont pas bornées temporellement. De ce fait, une caractéristique locale du signal, comme une discontinuité, devient une caractéristique globale de la transformée. D. Gabor [45] est le premier à avoir proposé une solution permettant d'analyser le signal à la fois en temps et en fréquence. Son idée consiste à découper un signal en plusieurs intervalles, puis à calculer une transformée de Fourier sur chacun d'eux. Cette technique est appelée la transformée de Fourier à fenêtres. Cependant le choix d'une fenêtre de taille fixe implique de sérieux compromis. Quand la fenêtre est étroite, on localise les changements soudains mais on devient aveugle aux basses fréquences. Quand la fenêtre est large, on ne peut pas préciser l'instant où se produit la discontinuité. C'est pourquoi J. Morlet, un géophysicien travaillant pour Elf-Aquitaine, a choisi une autre approche. Au lieu de garder fixe la taille de la fenêtre et de faire varier le nombre d'oscillations à l'intérieur de cette fenêtre, il proposa de faire l'inverse. Il pouvait ainsi localiser les hautes fréquences, avec les petites fenêtres, et étudier les basses fréquences, avec les fenêtres plus larges. Ces travaux ont constitué les racines de la théorie des ondelettes. Mais il n'existait pas encore d'algorithme numérique rapide de transformation orthogonale en ondelettes. Il fallut attendre les articles de S. Mallat en 1989 [67].

S. Mallat a démontré, en collaboration avec Y. Meyer [73], que des techniques qui n'avaient a priori rien en commun, les ondelettes, les algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson [9], les bancs de filtres et les filtres miroirs en quadrature, étaient toutes équivalentes : décomposer un signal en ondelettes revient à appliquer une succession de filtres. De ce fait, il a proposé un algorithme numérique rapide de décomposition en ondelettes ayant une complexité moindre que celle de la FFT. Toutefois Mallat utilisait des versions tronquées d'ondelettes infinies. Une nouvelle sorte d'ondelettes orthogonales à support temporel compact permettant d'éviter les erreurs dues à la troncature était alors proposée par I. Daubechies [35]. Ces ondelettes sont calculées selon des méthodes informatiques pour le traitement numérique du signal : l'association entre l'algorithme rapide de Mallat et les ondelettes orthogonales de Daubechies ouvre la voie au traitement numérique des signaux par décomposition en ondelettes.

Au début de cette décennie, la transformée numérique en ondelettes va se développer et évoluer sous différentes formes, chacune de ces modifications, essayant soit de réduire une contrainte

(comme le non-décimé [86]), soit de généraliser la décomposition pour construire une base s'adaptant mieux au signal (comme les paquets d'ondelettes ou les ondelettes de Malvar [32] [73]). Toutes ces approches novatrices sont élaborées, en général, avec un souci de formulation algorithmique. C'est pourquoi les domaines d'applications de la transformée en ondelettes sont ceux qui définissent le traitement moderne du signal : la compression [4] [94], le débruitage [36], la segmentation [58], l'analyse automatique [59] [96] ...

Mais ce domaine de recherche est encore "jeune" et ces techniques, basées sur les ondelettes, définissent un cadre général théorique mais possèdent certaines contraintes dans leur formulation algorithmique. L'objectif de notre travail a été d'étudier les propriétés mais aussi les limites de ces différents algorithmes, afin de modifier certains aspects des méthodologies pour permettre à la décomposition d'être plus robuste ou plus adaptative. Nous proposons dans ce mémoire différentes méthodes qui tentent d'extraire d'une façon optimale l'information, en séparant les différents éléments constituant un signal 1D ou 2D.

Pour cela, nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux propriétés de la décomposition en ondelettes.

Un microscope mathématique

La première propriété de la transformée en ondelettes est sa capacité à se comporter comme un microscope mathématique. L'analyse permet en effet d'étudier un signal à différentes résolutions ou échelles. C'est donc tout naturellement que les ondelettes sont apparues comme une solution dans les problèmes de la restauration de données. Nous étudions, dans notre premier chapitre, différentes méthodes basées sur la décomposition en ondelettes discrète permettant de débruiter un signal ou une image. Nous nous appuyons pour cela sur les travaux de D. Donoho et I. Johnstone [38] [37] [39] qui ont montré qu'une base d'ondelettes permet d'extraire au mieux les signaux du bruit blanc. Nous rappelons tout d'abord dans ce chapitre les propriétés de la décomposition en ondelettes non-décimée, et nous introduisons un algorithme non-décimé de débruitage proposé durant notre DEA [13]. Dans certains cas, le niveau de bruit est trop important et l'information reconstruite à partir d'une seule occurrence du signal est encore très dégradée. Il faut alors avoir recours à une séquence d'acquisition pour pouvoir extraire l'information noyée dans le bruit. Nous proposons dans ce chapitre 1 une méthode itérative, basée sur la décomposition en ondelettes non-décimée, qui va sélectionner, étape par étape, les coefficients significatifs sur les différentes réalisations. Nous appliquerons cette méthode (dans le cadre médical) à des images cérébrales de résonance magnétique fonctionnelle (IRMf) afin de détecter les zones d'activation du cerveau.

Puisque la décomposition en ondelettes peut se focaliser sur des structures locales du signal, elle peut alors caractériser la régularité locale du signal. Nous examinons dans notre deuxième chapitre, une méthode, proposée par Mallat *et al.* [69], qui permet d'étudier la dérivée d'un signal à différentes échelles : les maxima d'ondelettes. Mallat [54] a montré que l'évolution à travers les échelles des maxima associés à une discontinuité permet de la définir. Par exemple, les maxima dus au bruit vont disparaître très vite lorsque le nombre d'échelles augmente. A l'inverse, une rupture importante dans le signal crée une ligne de maxima présente à toutes les échelles. Dans le domaine de l'image, ces maxima vont correspondre aux contours, caractéristiques fondamentales pour l'étude d'une image. Après un rappel de l'algorithme et de ses propriétés, nous modifions le banc de filtres associé au gradient multiéchelles afin d'éliminer les phénomènes de déphasage et de

corrélations inhérents à sa formulation originale. Ensuite, puisque cette représentation nous permet de caractériser les discontinuités d'un signal, nous proposons un algorithme de segmentation 1D reposant sur une méthode simple et robuste de chaînage des maxima à travers les échelles. Cet algorithme est appliqué à des signaux de radiocommunications ou de mouvements des lèvres. Enfin, nous montrons dans ce chapitre 2 que l'angle des dérivées 2D peut être un paramètre très utile associé à une décomposition multiéchelles : il permet notamment de sélectionner les maxima correspondant à de l'information et de rejeter ceux associés au bruit. A partir de ce principe, nous proposons un nouvel algorithme de débruitage pour l'image, que nous illustrerons sur des images d'angiographie coronariennes.

Une décomposition atomique Temps-Fréquence

Depuis un certain nombre d'années, de nombreux chercheurs se sont penchés sur le problème de la représentation mixte du signal, en une série double de signaux élémentaires dont chacun occupe un certain domaine dans le plan temps-fréquence. Le plan temps-fréquence permet de faire apparaître à la fois l'information sur le temps et sur la fréquence. Une ondelette constitue un atome temps-fréquence occupant une place bien précise dans le plan temps-fréquence. On va pouvoir alors associer à l'analyse par ondelettes une représentation temps-fréquence "orthogonale" et "reconstructible". Depuis les années 90, sous l'impulsion notamment de Y. Meyer et R. Coifman [32] [73], sont apparues de nouvelles méthodes de décomposition permettant d'obtenir une partition adaptative du plan temps-fréquence.

Dans le troisième chapitre, nous étudions les ondelettes de Malvar définies par Coifman et Meyer [73]. Bien que cette technique porte le nom d'ondelettes, elle se rapproche plus de la transformée de Fourier à fenêtres. Du fait de sa définition, elle s'applique aux signaux stationnaires par partie ou considérés comme tels (par exemple la parole). Après un rappel de l'algorithme rapide de décomposition dyadique associé, nous élargissons durant ce chapitre l'algorithme de partition 1D afin qu'il analyse tous les découpages possibles de l'axe temporel avec des tailles de fenêtres variables. Puisque le nombre de combinaisons peut devenir important, nous donnons une formulation qui a une complexité algorithmique optimale. Ensuite, le choix du meilleur découpage se fait à l'aide d'un critère. Cependant, la majorité des fonctions de coûts proposées dans la littérature, comme l'entropie, ne sont qu'une mesure de la dispersion des coefficients pour chaque intervalle temporel. Nous proposons dans la suite du chapitre 3 un critère qui décide, à partir d'une mesure de ressemblance fréquentielle entre deux intervalles, si la division par deux d'un intervalle temporel est judicieuse. Cette nouvelle fonction nous permet d'obtenir un découpage global du signal en zone stationnaire. Nous utiliserons cet algorithme, par exemple, pour l'étude de signaux audio. L'extension à la dimension 2 de ce critère nous permet d'introduire, à la fin du chapitre 3, un algorithme rapide de décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique, c'est-à-dire ne découpant pas forcément l'image avec des carrés mais aussi avec des rectangles. Cette méthode offre un pré-découpage de l'image étudiée.

Bien que la décomposition de Malvar donne des résultats satisfaisants dans un grand nombre de cas, elle est mise en échec sur des signaux présentant par exemple des discontinuités. Nous étudions dans le quatrième chapitre une seconde approche qui est une technique duale de celle fournie par les ondelettes de Malvar : les paquets d'ondelettes [96]. Avec cette seconde décomposition, on opère un découpage adaptatif de l'axe fréquentiel. Cette technique convient aux signaux présentant des parties non stationnaires et des fréquences bien déterminées. Toutefois, l'algorithme numérique

repose sur une extension du principe du banc de filtres et utilise des filtres à support fréquentiel infini. Ceci dégrade la résolution fréquentielle des paquets d'ondelettes et entraîne une dispersion de l'énergie des composants du signal analysé entre différentes bandes de fréquences. Nous proposons dans ce chapitre 4, à partir des travaux de Kolaczyk [57], de définir une nouvelle représentation numérique : les paquets d'ondelettes de Meyer. Les ondelettes de Meyer constituent une base de fonctions associées à des filtres de support fréquentiel fini, et nous obtenons une meilleure résolution fréquentielle. Ensuite, puisque nous avons proposé une décomposition séparant au mieux les différents éléments fréquents du signal, il nous a semblé opportun de définir une nouvelle mesure, quantifiant la pertinence d'une coupure fréquentielle par une comparaison entre les deux fenêtres fréquentielles de la distribution temporelle des coefficients. La représentation ainsi sélectionnée, permet d'étudier globalement les caractéristiques d'un signal, comme nous le verrons sur des signaux électroencéphalogramme ou audio. L'extension, à la fin du chapitre 4, à la dimension 2 de cette sélection, va nous permettre d'extraire une base de représentation optimale pour des problèmes de segmentation de textures, que nous illustrerons sur des images de la base du GDR ISIS.

Le découpage fréquentiel associé à la décomposition en paquets d'ondelettes est rigide car il n'étudie que les partitions fréquentielles dyadiques. C'est pourquoi nous proposons au début du cinquième chapitre, une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme. Cette décomposition est plus souple dans la définition du découpage fréquentiel et s'adapte mieux à l'information présente dans le signal, comme nous le verrons sur les signaux EEG dans ce chapitre 5.

On peut rester insatisfait des solutions proposées par ces deux décompositions. En effet, avec les ondelettes de Malvar, nous avons une partition adaptative de l'axe temporel, mais le découpage fréquentiel est déterminé par la taille de l'intervalle étudié. Avec les paquets d'ondelettes, nous avons un découpage fréquentiel adaptatif mais qui s'applique à la totalité du signal.

C'est pourquoi, récemment, est apparue une nouvelle famille combinant à la fois l'approche de Malvar et celle des paquets d'ondelettes. Nous étudions dans le cinquième chapitre cette nouvelle décomposition, proposée par Vetterli *et al.* [51], qui recherche conjointement un découpage adaptatif des axes temporel et fréquentiel. Elle se nomme "double tree". Nous avons ainsi une base qui s'adapte à la fois en temps et en fréquence. Mais comme précédemment, l'algorithme initial proposé par Vetterli possède les contraintes de découpages temporel et fréquentiel forcément dyadiques. En combinant nos deux méthodes de découpage temporel et fréquentiel non-uniforme, nous construisons une nouvelle décomposition qui est totalement non-uniforme. Ainsi, au terme de ce mémoire, nous proposons un algorithme numérique qui sélectionne un pavage du plan temps-fréquence optimal suivant une fonction de coût, et qui a pour seule contrainte que les cotés des rectangles de pavage soient égaux à une puissance de deux. Cette méthode n'est proposée que pour le cas monodimensionnel, mais nous discuterons à la fin du chapitre 5 des solutions possibles pour l'image.

Organisation du mémoire

Ce mémoire s'organise donc en cinq chapitres.

Le premier chapitre étudie les problèmes de restauration de données par décomposition en ondelettes. Après un rappel des méthodes de débruitage introduites par Donoho *et al.*, nous proposons deux différentes approches :

- Un algorithme de débruitage basée sur la décomposition non-décimée.
- Une méthode itérative basée sur la transformée en ondelettes non-décimée.

Le second chapitre étudie les maxima d'ondelettes. Après un rappel sur cette représentation discrète et ses propriétés, notre apport se décline suivant trois axes :

- La modification du schéma de décomposition.
- Une méthode de chaînage robuste des maxima 1D.
- Un nouvel algorithme de débruitage d'images basé sur l'étude des angles des maxima 2D.

Le troisième chapitre aborde la décomposition en ondelettes de Malvar. Après un rappel sur les décompositions fenêtrées, nous introduisons trois nouvelles approches :

- Un algorithme de découpage non-dyadique.
- Un nouveau critère de sélection de la meilleure base.
- Une décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D et une sélection de la meilleure base suivant une distance spectrale.

Le quatrième chapitre étudie la représentation en paquets d'ondelettes de Meyer. Après un rappel sur la décomposition en ondelettes de Meyer et les paquets d'ondelettes, nous proposons :

- Un algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer.
- La définition d'une nouvelle fonction de coût.

Le cinquième chapitre étudie plusieurs décompositions non-uniformes. Nous définissons pour cela deux nouvelles méthodes de projection :

- Une décomposition en paquets d'ondelettes non-uniforme .
- Une décomposition "Double tree" non-uniforme à la fois sur l'axe temporel et fréquentiel.

Enfin nous concluons sur ce travail en énonçant quelques perspectives tant sur le plan algorithmique que pratique.

Chapitre 1

Ondelettes non-décimées et méthodes itératives pour le débruitage

1.1 Introduction

L'obtention d'information à partir de mesures corrompues par un bruit reste un problème ouvert, que ce soit en traitement du signal ou en traitement de l'image. Depuis quelques années, les ondelettes sont apparues comme un nouvel outil de débruitage notamment sous l'influence des travaux de Donoho et Johnstone [36], [37], [56]. La majorité de ces algorithmes utilise une décomposition discrète décimée, proposée par Mallat [67]. Cette décomposition a la particularité d'être orthogonale et de concentrer l'information en quelques grands coefficients. Toutefois, la redondance d'information peut être un avantage pour le débruitage. C'est pourquoi, récemment, des méthodes récentes utilisant des transformations non-décimées sont apparues. Certaines de ces méthodes utilisent des projections non-orthogonales et appliquent des traitements spécifiques [8], [87]. D'autres, introduites notamment par Coifman et Donoho [29], généralisent les algorithmes "décimés" de débruitage par l'application sur chacune des phases du signal de ces méthodes décimées [61], [60], [77], [21]. Nous étudions, dans la première partie de ce chapitre, un algorithme de débruitage non-décimé qui propose d'adapter les seuils proposés par Donoho *et al.* aux décompositions redondantes tout en limitant la complexité de l'algorithme [21].

La seconde partie de ce chapitre concerne des mesures très bruitées dont on possède plusieurs acquisitions (ou réalisations). En général, pour ce type de problème, le débruitage consiste en une étude statistique de l'évolution des mesures, pour extraire l'information selon la vérification ou non d'hypothèses. Toutefois, ceci oblige à posséder, pour être significatif et robuste, un grand nombre de réalisations. Nous proposons une nouvelle approche utilisant la séquence d'une façon itérative. Après débruitage du premier élément de la séquence, nous étudions la différence entre l'élément traité et les acquisitions suivantes. Cette différence, ou résidu, est projetée sur une base d'ondelettes afin de sélectionner, au sens d'un seuil que l'on définira, les oscillations ne résultant pas du bruit. Cette technique permet, après un faible nombre d'itérations, de supprimer une majorité d'éléments "incohérents" que l'on peut assimiler à du bruit. Elle s'insère dans le cadre des méthodes itératives proposées par Coifman et Wickerhauser [33], [34], [30] ou Bijaoui et Al. [87].

Ainsi, ce chapitre permet d'introduire la théorie des ondelettes et plus particulièrement les al-

algorithmes numériques de décomposition-reconstruction associés. Nous faisons tout d'abord un bref rappel sur la théorie des ondelettes et des techniques de débruitage décimées associées. Nous introduisons ensuite un algorithme de débruitage non-décimé permettant d'améliorer les résultats en terme de qualité de reconstruction.

Enfin, nous proposons deux algorithmes non-décimés permettant d'utiliser itérativement une séquence d'acquisitions. Pour chacune de ces techniques, des résultats sur des signaux de tests et des signaux réels sont présentés.

1.2 Débruitage par transformée en ondelettes

1.2.1 La transformée en ondelettes

La transformée discrète en ondelettes (DWT) est fondée sur l'analyse multirésolution [72] et rejoint la théorie des bancs de filtres [67]. Une fonction $f(x) \in L^2(\mathfrak{R})$ est projetée, à chaque étape l , sur un sous-espace V_l . L'espace V_l est généré par une fonction d'échelle $\phi(x)$, avec un processus de translation entière et de dilatation dyadique selon $\phi_{l,k}(x) = 2^{-l/2}\phi\left(\frac{x}{2^l} - k\right)$. Cette projection est définie par le produit scalaire, noté c_l° , de $f(x)$ avec $\phi_{l,k}(x)$:

$$c_{l,k}^\circ = \langle f, \phi_{l,k} \rangle,$$

k facteur de translation et l facteur de dilatation.

La fonction d'échelle $\phi(x)$ satisfait

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \partial x = 1. \quad (1.1)$$

$\phi(x)$ a la propriété bi-échelles suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n h[n] \phi(x - n) \quad (1.2)$$

La séquence $\{h[n], n \in \mathbb{Z}\}$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas. Lorsque l'indice d'échelles croît, le signal est lissé et de l'information est perdue. Elle peut être restaurée en utilisant le sous-espace complémentaire de V_{l+1} dans V_l , noté W_{l+1} et vérifiant $V_l = V_{l+1} \oplus W_{l+1}$.

L'espace W_l est généré par une fonction d'ondelette $\psi(x)$, avec un processus de translation entière et de dilatation dyadique selon $\psi_{l,k}(x) = 2^{-l/2}\psi\left(\frac{x}{2^l} - k\right)$. La projection de $f(x)$ sur W_l est définie par le produit scalaire d_l° suivant :

$$d_{l,k}^\circ = \langle f, \psi_{l,k} \rangle \quad (1.3)$$

La fonction d'ondelette $\psi(x)$ satisfait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \partial x = 0.$$

De même que la fonction d'échelle, la fonction d'ondelette vérifie la propriété bi-échelles :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n g[n] \psi(x - n) \quad (1.4)$$

La séquence $\{g[n], n \in Z\}$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut. Si l'on se place dans le cadre discret $l^2(Z)$, alors l'analyse se résume à :

$$\begin{aligned} c_{l,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h[n-2k] c_{l-1,n} \\ d_{l,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g[n-2k] c_{l-1,n} \end{aligned} \tag{1.5}$$

avec $(d_l)_{k \in Z}$ les coefficients d'ondelettes décimés de la $l^{ème}$ échelle, $(c_l)_{k \in Z}$ approximation passe-bas décimée du signal à la $l^{ème}$ échelle et $c_0 = f$.

La reconstruction dans $l^2(Z)$ est effectuée par l'opération suivante (pour les ondelettes orthogonales) :

$$c_{l,k} = \sqrt{2} \sum_n h[k-2n] c_{l+1,n} + \sqrt{2} \sum_n g[k-2n] d_{l+1,n} \tag{1.6}$$

Notons qu'il existe des ondelettes biorthogonales pour lesquelles les fonctions d'analyse et de reconstruction sont différentes [26]. Les différentes propriétés que nous indiquons dans la suite de ce chapitre peuvent s'étendre à ces familles d'ondelettes particulières [36].

L'analyse multirésolution de Mallat est liée aux algorithmes pyramidaux, proposés à l'origine en traitement de l'image par Burt et Adelson en 1982 [9]. Les séquences $\{h[n], n \in Z\}$ et $\{g[n], n \in Z\}$ sont des filtres miroirs en quadrature, c'est à dire qu'ils vérifient les conditions suivantes (dans le cas réel orthogonal) :

$$|H(w)|^2 + |G(w)|^2 = 1 \tag{1.7}$$

$$H(w)H(w + \frac{1}{2}) + G(w)G(w + \frac{1}{2}) = 0 \tag{1.8}$$

Nous indiquons sur la figure 1.1 l'algorithme de décomposition-reconstruction en ondelettes décimé basé sur un banc de filtres.

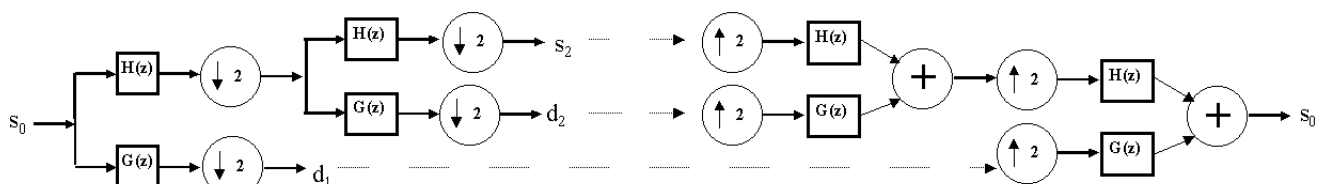


FIG. 1.1 – Algorithme de décomposition-reconstruction en ondelettes décimé

Par la suite, nous noterons P_- et Q_- , les opérateurs de décomposition décimés de V_l sur, respectivement, V_{l+1} et W_{l+1} . Pour la reconstruction, les opérateurs décimés de reconstruction de V_{l+1} et W_{l+1} sur V_l seront notés P_-^{-1} et Q_-^{-1} .

Toutefois le schéma de décomposition de Mallat n'est pas invariant par translations entières. De plus, après décimation, certaines composantes du signal, auxquelles devraient correspondre de grands coefficients, peuvent être invisibles, car pour une translation donnée, leur énergie va se disperser sur un certain nombre de petits coefficients. Une façon d'obtenir un système invariant par translation dans le temps qui limite ce type de problème est d'éviter la décimation [77], [80], [8].

Afin de prendre en compte la dilatation des fonctions d'ondelette et d'échelle, les filtres associés doivent alors être dilatés entre chaque échelle. Concrètement, la dilatation des filtres se caractérise par une insertion de zéros entre les coefficients des filtres. Si H et G sont les filtres passe-bas et passe-haut permettant de calculer l'échelle $l + 1$ à partir de l'échelle l , alors l'analyse non-décimée se définit par [8], [85], [80] :

$$\begin{aligned} e_{l,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h^{(l)} [n - 2k] e_{l-1,n} \\ w_{l,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g^{(l)} [n - 2k] e_{l-1,n} \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec $H^{(l)} [z] = H [z^{2^{l-1}}]$, $G^{(l)} [z] = G [z^{2^{l-1}}]$, $(w_{l,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ les coefficients d'ondelettes non-décimés de la $l^{\text{ème}}$ échelle, $(e_{l,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ approximation passe-bas non-décimée du signal à la $l^{\text{ème}}$ échelle, et $e_0 = f$.

La reconstruction dans le cas non-décimé se définit par [8], [85], [80] :

$$e_{l,k} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} \sum_n h^{(l+1)} [k - 2n] e_{l+1,n} + \sqrt{2} \sum_n g^{(l+1)} [k - 2n] w_{l+1,n} \right] \quad (1.10)$$

Le coefficient de normalisation $1/2$ introduit dans l'équation (1.10) est la conséquence de la redondance d'information.

Cet algorithme est appelé algorithme à trous [53]. Sa relation avec l'algorithme de Mallat a été mise en évidence plus tard par Shensa [85]. Nous indiquons sur la figure 1.2 l'algorithme de décomposition-reconstruction en ondelettes non-décimé.

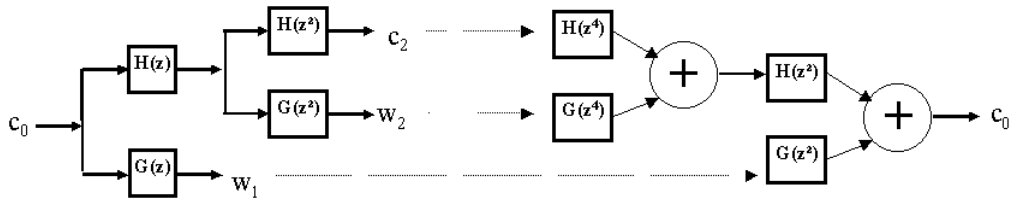


FIG. 1.2 – Algorithme de décomposition-reconstruction en ondelettes non-décimé

En raison de la non-décimation, chaque échelle est caractérisée par N points. Pour l'échelle l , ces N points correspondent aux 2^l différentes décompositions décimées de toutes les rotations circulaires du signal [80]. Ces décompositions, chacune comprenant $N/2^l$ points pour une échelle l , sont entrelacées. Par la suite nous noterons P_u et Q_u , les opérateurs de décomposition non décimés de V_l sur, respectivement, V_{l+1} et W_{l+1} . Pour la reconstruction, les opérateurs non décimés de V_{l+1} et W_{l+1} sur V_l seront notés P_u^{-1} et Q_u^{-1} .

L'algorithme à trous possède plusieurs qualités :

- *Un choix plus simple des filtres.* L'algorithme à trous impose moins de contraintes sur les filtres pour une reconstruction parfaite. En effet, dans le cas décimé, les filtres associés aux fonctions d'ondelette et d'échelle doivent, pour une reconstruction parfaite, vérifier les deux conditions (1.7) et (1.8). L'équation (1.7) correspond à la restauration correcte des données d'une échelle à l'autre, tandis que la seconde (équation (1.8)) provient de la compensation des effets de recouvrement spectral introduit par la décimation [8]. Comme il n'y a pas de décimation dans l'algorithme à trous, la seconde relation devient inutile donnant ainsi un degré de liberté

supplémentaire dans le choix des filtres¹ [8]. Cette liberté sera utilisée, par exemple, par Mallat pour définir une projection particulière que nous étudierons dans le chapitre suivant : les maxima d'ondelettes.

- *Une connaissance de tous les coefficients d'ondelettes.* Les coefficients supprimés lors de la décimation ne sont pas nécessaires pour une reconstruction parfaite, mais peuvent contenir de l'information utile pour l'analyse du signal. En effet, la connaissance de tous les coefficients permet, par exemple, de mieux "suivre" une discontinuité à travers les échelles (par exemple à l'aide des techniques de maxima d'ondelettes [70]).
- *Entrelacement de toutes les décompositions orthogonales.* La représentation obtenue n'est pas orthogonale, du fait de la redondance d'information. Toutefois, si les filtres utilisés sont des filtres miroirs en quadrature, alors l'algorithme à trous possède la propriété de conserver, entrelacées, toutes les décompositions orthogonales. L'espace initial V_0 peut être décomposé de deux façons par l'algorithme décimé : $V_0 = V_1 \oplus W_1 = V'_1 \oplus W'_1$. La première correspond à la décomposition décimée du signal, alors que la seconde s'obtient par décomposition décimée de la translation d'un pas du signal. Les coefficients d'ondelettes issus de la première itération de l'algorithme à trous vont correspondre à ces deux représentations respectivement aux noeuds d'indice pair et impair [8]. Ce raisonnement s'étend à toutes les échelles. Donc, si les filtres H et G utilisés vérifient les deux équations (1.7) et (1.8), alors l'application de l'algorithme à trous est équivalente au calcul des décompositions des différentes phases du signal par une transformée orthogonale décimée [85], [80].

Cependant l'algorithme à trous présente un défaut : l'accroissement de la complexité du schéma de décomposition-reconstruction (conséquence de la non décimation). La complexité augmente de $O(N)$ pour la décomposition décimée à $O(N \log_2 N)$ pour la décomposition non décimée avec l'algorithme à trous. Mais cette complexité reste raisonnable puisqu'elle égale celles d'algorithmes couramment utilisés comme les paquets d'ondelettes [77]. Le problème se situe plutôt dans une demande de capacité de stockage plus importante. En effet, alors que pour la décomposition décimée il ne faut que N blocs mémoire, une décomposition non décimée complète en demande $N(1 + \log_2 N)$.

Notons enfin que nous pouvons étendre les définitions précédentes à la dimension 2 et plus, en utilisant le produit tensoriel. Par exemple dans le cas 2D, la fonction d'échelle se définit par :

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y).$$

Le complément W_l de V_l dans V_{l-1} est généré d'une façon similaire par la translation et dilatation de trois fonctions :

$$\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y), \psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y), \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y).$$

Avec l'utilisation de variables séparées, l'algorithme de décomposition 2D est simple et rapide, son schéma est présenté sur la figure 1.3.

Comme pour la dimension 1, cet algorithme de décomposition peut s'étendre aux décompositions non-décimées par l'utilisation d'un banc de filtres à trous.

1. Gardons toutefois en mémoire que si les filtres choisis ne vérifient plus les deux conditions (1.7) et (1.8), alors la décomposition non-décimée ne correspond plus à l'entrelacement de décompositions orthogonales.

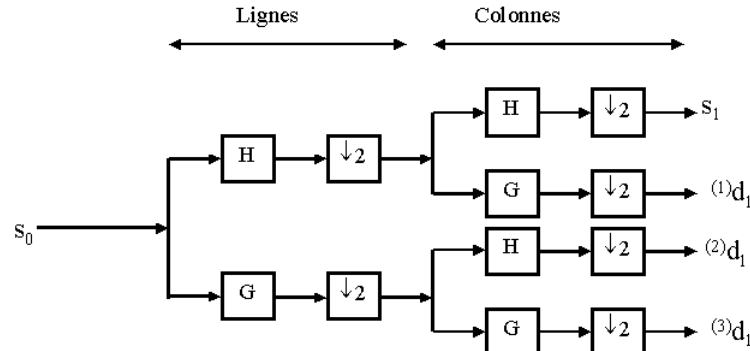


FIG. 1.3 – Algorithme de décomposition en ondelettes décimé 2D

1.2.2 Débruitage par décomposition décimée

Dans la littérature, la majorité des méthodes de débruitage n'aborde que le cas du bruit blanc gaussien, plus simple à traiter, bien que, en situation de données réelles, il ne soit pas spécialement facile d'estimer le niveau de bruit σ . Les propriétés statistiques des coefficients d'ondelettes de processus stationnaires restent un large sujet de recherche (par exemple [79]).

1.2.2.1 Bruit blanc

Dans le cas du bruit gaussien additif, le problème consiste à déterminer une fonction réelle notée f , à partir de mesures s_n connues telles que :

$$s_n = f[x_n] + \sigma b_n, \text{ avec } n = 0 \dots N - 1 \text{ et } b_n \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1) \text{ et } \sigma > 0. \quad (1.11)$$

Avec une transformée discrète orthogonale en ondelettes, le bruit blanc se décompose en une série de coefficients aléatoires normaux centrés et décorrélés. En conséquence, la transformée en ondelettes discrète des mesures définies dans l'équation (1.11) peut s'écrire :

$$\vec{W}s_n = \vec{W}f[x_n] + \sigma d_n^b, \text{ avec } d_n^b \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1). \quad (1.12)$$

\vec{W} symbolise la transformée en ondelettes discrète décimée dans $l^2(Z)$ et d_n^b la transformée du bruit.

Afin de reconstruire la fonction f à partir des mesures s_n , tous les coefficients de la décomposition $\vec{W}s_n$ sont rétrécis par un seuillage dépendant de la contribution du bruit. Donoho et Johnstone ont proposé deux types de fonctions de seuillage (notée T_λ avec λ un seuil) [37] :

– "Soft thresholding" défini par :

$$T_\lambda^{Soft}(d_{l,k}) = \text{sgn}(d_{l,k}) (|d_{l,k}| - \lambda)_+ \text{ avec } \alpha_+ = \sup(\alpha, 0) \quad (1.13)$$

– "Hard thresholding" défini par :

$$T_\lambda^{Hard}(d_{l,k}) = d_{l,k} \cdot 1_{[|d_{l,k}| \geq \lambda]} \text{ avec } 1_A \text{ indicatrice de } A \quad (1.14)$$

Un certain nombre de méthodes, permettant d'estimer le seuil λ , sont décrites dans la littérature [76] [8]. La première d'entre-elles nommée "VisuShrink", ou seuil universel, a été proposée par Donoho et Johnstone [37] avec λ défini par

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(N)}, \quad (1.15)$$

avec $\sigma = MAD/0.6745$ et N le nombre de mesures.

MAD est la valeur médiane absolue des coefficients de l'échelle la plus fine. Le facteur 0.6745 est choisi après une calibration avec une distribution gaussienne. La dispersion du bruit est mesurée sur la première échelle car elle est majoritairement constituée de coefficients dus au bruit.

En résumé, pour débruiter un signal à partir de mesures connues, par décomposition décimée, on utilise l'algorithme de Mallat pour obtenir les coefficients d'ondelettes, on rétrécit ces coefficients par seuillage et on reconstruit.

1.2.2.2 Bruit corrélé

Johnstone et Silverman se sont penchés sur le cas du bruit corrélé additif [56], permettant la formalisation de principes élaborés empiriquement. Les principales propriétés d'une décomposition en ondelettes d'un bruit stationnaire corrélé sont les suivantes [56] :

- La corrélation des coefficients sur chaque échelle décroît très vite, au fur et à mesure que l'on tend vers les échelles grossières. Les ondelettes ont la propriété de diagonaliser, ou "presque", un grand nombre d'opérateurs [72],[56].
- La corrélation entre deux échelles différentes est très faible, ou nulle. L'utilisation de filtres passe-bande durant le calcul des coefficients en est l'explication.

La Log-variance du bruit décroît presque linéairement avec les échelles, et, sur chacune d'elles, les coefficients correspondant au bruit suivent approximativement une distribution gaussienne [56].

De ces différentes constatations, Johnstone et Silverman proposent une nouvelle méthode de débruitage utilisant un seuillage dépendant du niveau ("level-dependent thresholding") :

$$\lambda_l = \sigma_l \sqrt{2 \log\left(\frac{N}{2^l}\right)}, \text{ avec } \sigma_l = MAD/0.6745 \text{ et } l \text{ l'échelle} \quad (1.16)$$

1.2.3 Débruitage par décomposition non-décimée

Ces dernières années un certain nombre d'algorithmes de débruitage utilisant la décomposition en ondelettes non-décimée a été proposé. L'approche novatrice se trouve dans l'article de Coifman et Donoho avec l'algorithme *TI_denoising* [29]. Les résultats en terme de qualité de reconstruction sont nettement supérieurs à ceux utilisant une décomposition décimée. Nous rappelons dans ce paragraphe le principe du débruitage non-décimé [21].

1.2.3.1 Décomposition et seuillage

Proposition 1 [77] *Soit w_l les coefficients d'ondelettes non-décimés à l'échelle l alors ils peuvent s'écrire*

$$w_l = \bigcup_{j=0..2^l-1}^{\Rightarrow} d_{(j)}^l$$

$\overline{\cup}$ est une union entre des vecteurs avec entrelacement des coefficients et $d_{(j)}^l$ les coefficients décimés à l'échelle l de la $j^{\text{ème}}$ translation définis par

$$d_{(j)}^l = Q_- (P_-)^{l-1} (TR_j (c_0))$$

avec $Q_- (P_-)^{l-1} [f] = Q_- \circ P_- \circ \dots \circ P_- [f]$ et TR_j opérateur de translation.

D'après la proposition précédente, nous constatons que chacun des sous-ensembles $\{d_{(j)}^1 \mid d_{(j)}^2 \dots \mid d_{(j)}^L\}$, correspond à une transformée orthogonale et peut être étudié indépendamment les uns des autres. Donc, à une échelle l fixée, le seuil proposé par Johnstone pour le bruit corrélé est appliqué sur chaque sous-ensemble $d_{(j)}^l$ avec un seuil λ_j^l égal à [21]:

$$\lambda_j^l = \sqrt{2 \log(N/2^l)} \times MAD(d_{(j)}^l) / 0.6745 \quad (1.17)$$

Nous pouvons de la même manière utiliser le seuil défini dans le cadre du bruit blanc.

La valeur estimée du niveau de bruit reste approximativement constante pour les différents sous-ensembles d'une même échelle du fait de la redondance d'information. Pour un nombre limité et raisonnable d'échelles de décomposition, les différents sous-ensembles vérifient :

$$MAD(w_l) \simeq MAD(d_{(0)}^l) \simeq \dots \simeq MAD(d_{(2^l-1)}^l) \quad (1.18)$$

Nous pouvons définir un seuil simple à estimer et prenant en compte la redondance d'information pour chaque échelle l [21]:

$$\lambda_l = \sqrt{2 \log(N/2^l)} * MAD(w_l) / 0.6745 \quad (1.19)$$

Ce seuil a été introduit durant notre DEA [13].

1.2.3.2 Transformation inverse

Proposition 2 [21] Soit \tilde{f} une fonction obtenue après transformation inverse à partir de L échelles de coefficients d'ondelettes non-décimés et seuillés, et si nous notons \tilde{f}_b la fonction résultant d'un débruitage avec l'algorithme décimé de Johnstone appliqué sur la fonction translatée $TR_b(f)$, alors la fonction \tilde{f} est telle que :

$$\tilde{f} = \frac{1}{2^L} [\tilde{f}_0 \dots + \tilde{f}_{2^L-1}]$$

Nous rappelons en annexe la démonstration de cette proposition finalisée dont le résultat nous a été suggéré par l'algorithme *Translation-Invariant* de Coifman et Donoho [29] dans le cas du bruit blanc. Cette proposition montre que l'application d'un seuillage sur une décomposition en ondelettes non-décimée est égale à la moyenne de toutes les translations circulaires débruitées par un algorithme décimé.

La moyenne réduit les artefacts qui apparaissent lors du seuillage de la traditionnelle décomposition orthogonale. De plus, du fait de la redondance d'information, l'algorithme non-décimé peut utiliser le seuillage "Hard" (équation 1.14) qui optimise la reconstruction en terme d'erreur l^2 [29].

La méthode de débruitage présentée ci-dessus se nomme *uwt_mean* [21]. Elle sera utilisée dans les chapitres suivants pour des problèmes d'estimation de spectres ou de restauration de données audio.

1.2.4 Extension du débruitage à la dimension 2

Les méthodes de débruitage peuvent, avec des modifications mineures, s'étendre à la dimension 2 en utilisant le schéma pyramidal de décomposition.

Le problème de l'estimation du seuil est un peu plus complexe que dans le cas 1D, car chaque échelle est caractérisée par trois plans d'ondelettes. Le niveau de bruit est estimé soit sur le plan haute fréquence (correspondant à l'ondelette $\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$) soit sur chacun des plans d'ondelettes.

Pour l'estimation du seuil dans le cas non-décimé, l'extension du seuil défini par l'équation (1.19) au cas 2D, correspond à

$$\lambda_l^a = \sigma_l^a \sqrt{2 \ln \left(\frac{N}{2^l} \cdot \frac{M}{2^l} \right)} \text{ avec } \sigma_l^a = MAD(|w_l^a|) / 0.6845 \text{ et } a = 1, 2, 3 \text{ correspondant au 3 plans} \quad (1.20)$$

1.3 Débruitage de multiples copies d'un signal

L'application d'une opération de débruitage sur une seule occurrence d'un signal ou d'une image n'est pas suffisante lorsque le niveau de bruit est trop important. Différentes méthodes proposées dans la littérature, notamment dans le domaine médical [11] [84] [91] [52], utilisent une séquence d'acquisition. Toutes ces méthodes se caractérisent par une étude statistique de l'évolution des coefficients, ce qui oblige à posséder un grand nombre de réalisations.

Une façon simple de généraliser l'algorithme de débruitage par ondelettes à une séquence serait de l'utiliser avec des moyennes, en calculant, par exemple, la moyenne des différents signaux débruités. Calculer une moyenne peut être intéressant lorsque le bruit est gaussien, mais après un premier traitement par les ondelettes, l'amélioration n'est pas significative, les expérimentations l'ont confirmé.

Nous proposons une méthode permettant de prendre en considération la répétition des occurrences, mais sur une séquence d'acquisitions limitée. Notre algorithme utilise de façon itérative la séquence, en essayant de reconstruire le signal original. Il peut s'inscrire dans le cadre des algorithmes proposés, tout d'abord, par Starck et Bijaoui [87] [88], puis par Coifman et Wickerhauser [30] [33] [34]. Ces algorithmes construisent une estimation d'un signal, dont on possède une seule occurrence, par sélection successive des coefficients d'ondelettes.

Dans cette méthode itérative, une version non-décimée de la transformée en ondelettes est utilisée. Nous proposons une première formulation de notre algorithme, puis une évolution apportant plus de robustesse et prenant en compte le cas d'un signal qui fluctue selon les réalisations.

1.3.1 Principe de l'algorithme *ITE_DIF*

1.3.1.1 Concept

Soit une séquence de M signaux $\{s^{(1)}, s^{(2)} \dots s^{(M)}\}$ identiques en terme d'information. Chacun de ces signaux est altéré par un bruit stationnaire additif tel que :

$$s^{(m)} = f + b^{(m)} \quad (1.21)$$

avec $b^{(m)}$ symbolisant la $m^{\text{ème}}$ réalisation du bruit,
et f le signal que l'on cherche à estimer.

Soit $\tilde{s}^{(1)}$ le signal résultant du débruitage par seuillage et reconstruction de la transformée en ondelettes non-décimée de $s^{(1)}$, premier signal de la séquence, donc

$$\tilde{s}^{(1)} = (\overrightarrow{W}^{-1}) \left(T_{\lambda^{s^{(1)}}} \left(\overrightarrow{W} s^{(1)} \right) \right) \quad (1.22)$$

avec $T_{\lambda^{s^{(1)}}}$ fonction de seuillage et $\lambda^{s^{(1)}}$ un seuil qui reste à définir.

Soit $R^{(1)}$, le résidu calculé par différence entre la seconde occurrence du signal et l'estimation $\tilde{s}^{(1)}$:

$$R^{(1)} = s^{(2)} - \tilde{s}^{(1)} \quad (1.23)$$

Si le débruitage est satisfaisant, c'est-à-dire si $\tilde{s}^{(1)} \simeq f$, alors $R^{(1)}$ ne contient plus que des éléments incohérents que l'on peut assimiler à du bruit et sa décomposition en ondelettes n'est constituée que de coefficients non significatifs au sens d'un seuillage. On retrouve ici la notion de coefficients cohérents ou significatifs introduite dans [87] [30].

A partir de cette remarque, et afin d'utiliser d'une façon itérative l'algorithme de seuillage, nous introduisons la contrainte suivante :

- **Contrainte** : il faut que la décomposition en ondelettes discrète $\overrightarrow{W} R^{(1)}$ du résidu $R^{(1)}$ ne contienne que des coefficients non-significatifs, sinon ces coefficients doivent être ajoutés à l'estimation du signal $\tilde{s}^{(1)}$, donc

$$\tilde{s}^{(2)} \leftarrow \tilde{s}^{(1)} + \overrightarrow{W}^{-1} \left(T_{\lambda^R} \left(\overrightarrow{W} R^{(1)} \right) \right) \quad (1.24)$$

avec T_{λ^R} fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes du résidu,
et λ^R limite entre coefficients significatifs et non-significatifs.

On généralise la définition du résidu en notant $R^{(m)}$ le résidu entre la $(m+1)^{\text{ème}}$ occurrence du signal et l'estimation de f au pas m . Les expressions (1.23) et (1.24) sont appliquées itérativement sur tous les éléments de la séquence. On construit ainsi "pas à pas" une approximation de f par :

$$\begin{aligned} R^{(m)} &= s^{(m+1)} - \tilde{s}^{(m)} \\ \tilde{s}^{(m+1)} &\leftarrow \tilde{s}^{(m)} + \overrightarrow{W}^{-1} \left(T_{\lambda^R} \left(\overrightarrow{W} R^{(m)} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le seuillage T_{λ^R} , défini ultérieurement, a pour fonction de sélectionner, à chaque itération, l'information cohérente encore présente dans le résidu $R^{(m)}$, afin qu'elle soit ajoutée à l'estimation obtenue à l'itération précédente.

1.3.1.2 Etude de l'algorithme

Nous allons étudier le comportement de l'algorithme directement sur les échelles d'ondelettes afin d'introduire les différents seuils. Pour cela, il nous faut expliciter les différentes projections.

Expression des coefficients d'ondelettes de $\tilde{s}^{(m)}$

Soit w_l^f les coefficients à l'échelle l du signal que l'on cherche à estimer, et $\tilde{w}_l^{(m)}$, les coefficients correspondant à la décomposition de l'estimation $\tilde{s}^{(m)}$. Les coefficients $\tilde{w}_l^{(m)}$ sont tels que :

$$\tilde{w}_l^{(m)} = w_l^f + C_l^{(m)}, C_l^{(m)} \in \mathbb{R}^n \quad (1.26)$$

Le vecteur $C_l^{(m)}$ symbolise les erreurs d'estimation à l'échelle l .

Expressions des coefficients d'ondelettes de $s^{(m)}$

Soit $\vec{W}s^{(m)}$ la transformée en ondelettes de $s^{(m)}$, alors, à partir de l'équation (1.21), pour une échelle l donnée, les coefficients de $\vec{W}s^{(m)}$ s'expriment selon

$$w_l^{s^{(m)}} = w_l^f + w_l^{B^{(m)}} \quad (1.27)$$

Expression des coefficients d'ondelettes de $R^{(m)}$.

Soit $\vec{W}R^{(m)}$ la transformée en ondelettes du résidu $R^{(m)}$, d'après l'équation (1.25), pour une échelle l donnée, les coefficients d'ondelettes de $\vec{W}R^{(m)}$ s'écrivent :

$$w_l^{R^{(m)}} = w_l^{s^{(m+1)}} - w_l^{s^{(m)}} \quad (1.28)$$

A partir des équations (1.27) et (1.26), l'équation (1.28) s'écrit :

$$w_l^{R^{(m)}} = (w_l^f + w_l^{B^{(m+1)}}) - (w_l^f + C_l^{(m)}) = w_l^{B^{(m+1)}} - C_l^{(m)} \quad (1.29)$$

Remarque : $C_l^{(m)}$ est un vecteur et certaines de ses composantes $C_{l,k}^{(m)}$ sont presque nulles, indiquant que le coefficient $\tilde{w}_{l,k}^{(m)}$ correspondant est correctement reconstruit : dans ce cas $w_{l,k}^{R^{(m)}} \simeq w_{l,k}^{B^{(m+1)}}$.

A partir de l'équation (1.29), nous pouvons expliciter comment reconstruire pas à pas l'information recherchée, à l'aide de l'algorithme *ITE_DIF*.

Une itération de l'algorithme pour un coefficient à l'échelle l est définie par :

$$\tilde{w}_{l,k}^{(m+1)} \leftarrow \tilde{w}_{l,k}^{(m)} + T_{\lambda R} \left(w_{l,k}^{R^{(m)}} \right)$$

Si l'erreur faite sur le coefficient reconstruit $\tilde{w}_{l,k}^{(m)}$ est importante, alors $C_{l,k}^{(m)}$ est considéré comme significatif et conservé lors du seuillage. Donc, d'après (1.26) et (1.29) :

$$\tilde{w}_{l,k}^{(m+1)} = w_{l,k}^f + C_{l,k}^{(m)} + T_{\lambda R} \left(w_{l,k}^{B^{(m+1)}} - C_{l,k}^{(m)} \right) = w_{l,k}^f + C_{l,k}^{(m+1)} \quad (1.30)$$

avec $C_{l,k}^{(m+1)} \ll C_{l,k}^{(m)}$ si $C_{l,k}^{(m)}$ était significatif.

Comme nous l'avons vu, les coefficients d'ondelettes correspondant au bruit suivent rigoureusement, ou approximativement, une distribution gaussienne sur chaque échelle. Ce principe est étendu en proposant que la distribution des coefficients $w_{l,k}^{B^{(m)}}$, sur une séquence d'acquisition, peut s'approximer par une distribution gaussienne telle que

$$w_{l,k}^{B^{(m)}} \xrightarrow{i.i.d.} N(0, \sigma_l), \text{ pour } m = 1..M \text{ et } \forall l \in [1..L] \quad (1.31)$$

Ceci s'explique simplement par l'hypothèse faite sur le bruit, à savoir qu'il est stationnaire. Donc chaque réalisation de $B^{(m)}$ dépend de la même distribution pour tout m .

Dans ce cas, $w_{l,k}^{R(m)}$ suit une distribution gaussienne sur la séquence telle que, d'après l'équation (1.29) :

$$w_{l,k}^{R(m)} \xrightarrow{i.i.d.} N\left(-C_{l,k}^{(m)}, \sigma_l\right), \text{ pour } m = 1..M \text{ et } \forall l \in [1..L] \quad (1.32)$$

La valeur de la moyenne $-C_{l,k}^{(m)}$ de la distribution va fluctuer sur la séquence selon la qualité du seuillage jusqu'à tendre, si l'algorithme converge, vers une valeur non significative indiquant ainsi que le coefficient est correctement estimé. La décroissance de $C_{l,k}^{(m)}$ vers une valeur non significative est plus ou moins lente selon les caractéristiques du signal et du bruit. Si nous reprenons la méthodologie introduite par Coifman dans [30] [33] [34], la convergence de $C_{l,k}^{(m)}$ vers un coefficient "incohérent" peut être évaluée par un critère entropique. En effet, l'entropie mesure la dispersion des valeurs et va être maximale pour un signal incohérent (que nous assimilerons à du bruit). En calculant l'entropie des résidus, on estime la "quantité" d'information restant dans les différents résidus $R^{(m)}$ à chaque itération. Cela permet d'évaluer le nombre d'occurrences minimum, M , nécessaire à l'extraction de l'information cohérente. Nous illustrons ceci sur un signal synthétique composé de différents atomes Temps-Fréquence (TF)² (figure 1.4a). Nous le dégradons par un bruit blanc gaussien avec un rapport signal sur bruit de 2 (figure 1.4b).

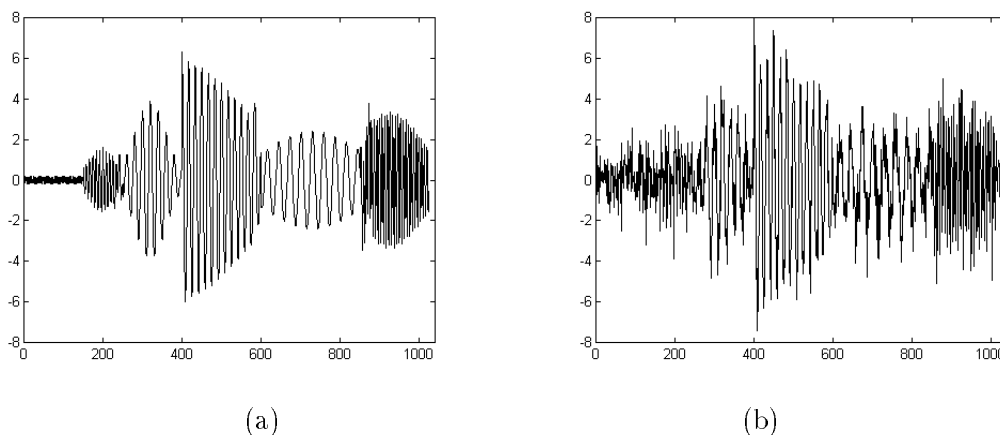


FIG. 1.4 – (a) Signal synthétique original (b) Une des occurrences du signal bruité (SNR = 2)

La mesure de l'entropie du résidu pour chaque itération de notre algorithme est illustrée sur la figure 1.5a (le seuil λ^R utilisé est explicité dans le paragraphe suivant). A titre indicatif, nous avons indiqué les entropies de chaque réalisation du bruit $B^{(m)}$, ainsi celle du résidu calculé après débruitage de chaque occurrence $s^{(m)}$ par *VisuShrink*, méthode proposée par Donoho. On constate qu'après un faible nombre d'itérations ($m \simeq 6$) l'entropie du résidu $R^{(m)}$ se stabilise autour d'une constante indiquant que l'algorithme a convergé. De plus, on remarque que l'entropie du résidu tend vers celle du bruit $B^{(m)}$. Ceci signifie que le résidu n'est plus constitué que d'éléments incohérents et qu'il peut être presque entièrement assimilé à du bruit. A l'inverse, la faible valeur de l'entropie associée au débruitage par *VisuShrink* montre qu'un certain nombre de composants cohérents sont supprimés du signal reconstruit. La représentation sur la figure 1.5b des valeurs RMS du signal

2. Nous appelons atome TF, une composante constituée d'un signal monochromatique (donc associé à une fréquence particulière) multiplié par une enveloppe fixée (donc une composante de durée limitée). Un atome TF est caractérisé par trois grandeurs : sa fréquence fondamentale, son intervalle temporel de définition et son enveloppe.

approximé à chaque itération corrobore les constatations précédentes. L'erreur de reconstruction se stabilise après un certain nombre d'itérations.

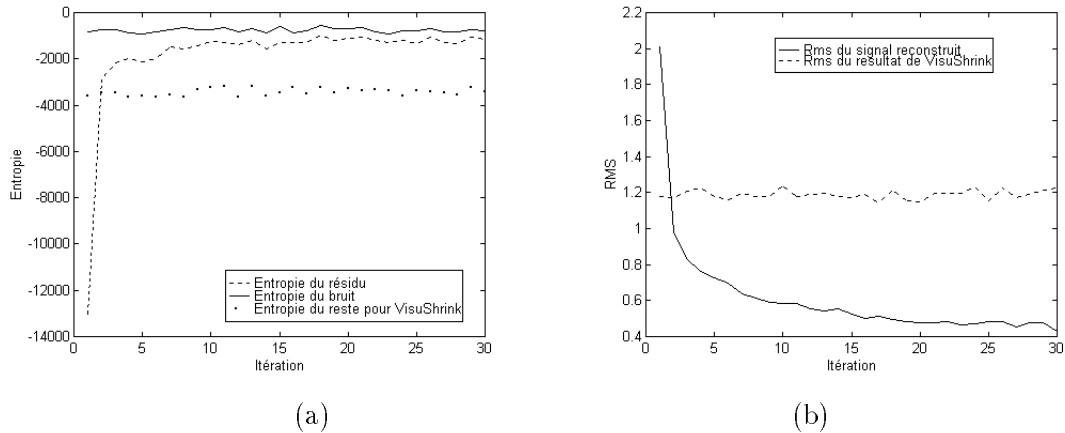


FIG. 1.5 – Étude du comportement de l'algorithme itératif sur un signal synthétique bruité (a) Entropie du résidu (b) Mesure RMS du signal approximé à chaque itération

Nous indiquons sur la figure 1.6 le signal reconstruit par notre algorithme après 10 itérations.

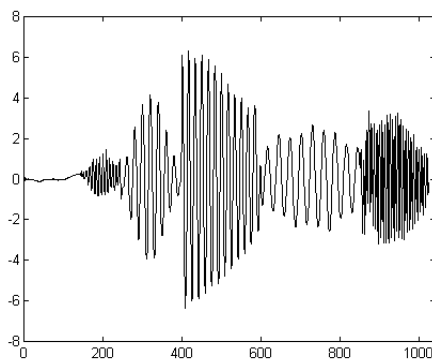


FIG. 1.6 – Signal reconstruit par notre algorithme après 10 itérations

1.3.2 Définition des différents seuils de l'algorithme ITE_DIF

1.3.2.1 Définition du seuil $\lambda^{s(1)}$

L'algorithme doit être initialisé par un signal ne contenant plus aucun bruit significatif, sinon celui-ci serait considéré comme une structure cohérente du signal dans la suite du traitement. De ce fait, la première estimation $\tilde{s}^{(1)}$, introduite dans l'équation (1.22), initialisant l'algorithme doit correspondre à une version très lissée du signal. Elle peut être définie de la façon suivante :

$$\tilde{w}_{l,k}^{(1)} = T_{\lambda^{s(1)}} \left(w_{l,k}^{s(1)} \right) = 0 \text{ pour } l = 1 \dots L, \text{ et } \tilde{e}_{L,k}^{(1)} = e_{L,k}^{s(1)} \quad (1.33)$$

Concrètement, toutes les échelles d'ondelettes sont mises à 0, puis la reconstruction s'effectue à partir de la trame non-seuillée ce qui revient à appliquer un filtre passe-bas. Si le nombre d'échelles de décomposition L est correctement choisi, le signal reconstruit après ce premier seuillage ne contient presque plus de bruit. La sélection du nombre d'échelles nécessaires peut se fixer d'une

façon empirique ou en utilisant un critère. On peut, par exemple, calculer l'erreur de reconstruction entre les différentes occurrences du signal en faisant varier le nombre d'échelles mises à 0, puis sélectionner le point d'inflexion de la courbe ainsi obtenue. Pour l'exemple synthétique précédent on trouve $L \simeq 5$ (cf. figure 1.7). L'entropie des signaux approximatés peut aussi constituer un critère de sélection.

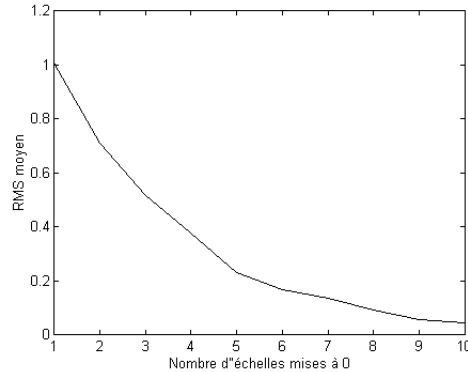


FIG. 1.7 – Recherche par un critère RMS du nombre d'échelles nécessaires pour le seuillage initial

Le seuillage introduit par l'équation (1.33) peut être substitué par une sélection des x plus grands coefficients de la décomposition en L échelles de $s^{(1)}$ (technique de seuillage proposée par Coifman [30]). Cela permet, non plus d'avoir une version lissée du signal, mais une approximation construite à partir des composantes les plus importantes.

1.3.2.2 Définition du seuil λ^R

Le but étant d'extraire du résidu quelques coefficients noyés dans le bruit, le seuil du résidu λ^R ne peut pas être défini par l'équation (1.19) (pour un bruit gaussien) car l'amplitude du bruit estimée par $MAD(w^{R(m)})/0.6745$ est trop faible.

Si l'on suppose que le bruit est stationnaire sur les différentes occurrences du signal, alors la dispersion des bruits présents sur les échelles d'ondelettes issues, respectivement, de la décomposition du résidu et des signaux originaux, est identique. C'est-à-dire que si

$$w_{l,k}^{R(m)} = C_{l,k}^{(m)} + \sigma_R N(0, 1)$$

et

$$w_{l,k}^{s(m)} = w_{l,k}^f + \sigma_B N(0, 1)$$

alors

$$\sigma_R = \sigma_B \tag{1.34}$$

Afin d'évaluer le niveau du bruit présent dans la décomposition du résidu (pour le cas gaussien), la valeur médiane absolue est calculée sur la première échelle des décompositions des différentes réalisations. Le seuil du résidu est donc défini par :

$$\lambda^R = \sqrt{2 \log(N/2^l)} * MAD([w_1^{s(1)} | \dots | w_1^{s(M)}]) / 0.6745 \tag{1.35}$$

Le cas corrélé se déduit du raisonnement précédent. Pour chaque échelle, la distribution du bruit suit approximativement une fonction gaussienne. Si le bruit est stationnaire sur les différentes

occurrences du signal, alors l'amplitude du bruit sera identique pour la décomposition du résidu et des signaux originaux, **à une échelle fixée**. Le seuil se calcule à partir de l'amplitude du bruit estimée pour chaque échelle, sur les échelles correspondantes dans les décompositions des différentes réalisations :

$$\lambda_l^R = \sqrt{2 \log(N/2^l)} * MAD([w_l^{s(1)} | \dots | w_l^{s(M)}]) / 0.6745 \quad (1.36)$$

1.3.2.3 Choix de la méthode de seuillage

Une étude de Bruce et Gao [47] montre que le "hard-thresholding" a une plus grande variance (à cause du caractère discontinu de la fonction de seuillage) alors que le "soft-thresholding" possède un plus grand biais (du fait de la diminution des grands coefficients vers 0). Dans le cadre de l'algorithme *ITE_DIF*, une variance trop grande est gênante, car elle fait fluctuer d'une façon importante la valeur $C_{l,k}^{(m)}$ au cours des différentes itérations, et provoque l'apparition d'oscillations parasites dans le signal reconstruit. L'utilisation d'une version non-décimée de la transformée en ondelettes, qui réduit cette variance, n'est pas suffisante. En revanche, le biais a moins d'importance car il va être atténué par la réévaluation du résidu et l'extraction des coefficients significatifs à chaque itération. C'est pourquoi, dans le cadre de l'algorithme *ITE_DIF*, nous utiliserons un seuillage du type "soft-thresholding".

1.3.3 Une variante : l'algorithme *MEAN_ERR*

On peut émettre plusieurs réserves sur l'algorithme *ITE_DIF* :

- Nous avons fait l'hypothèse que le coefficient d'ondelette du signal à estimer $w_{l,k}^S$ est constant sur les différentes acquisitions de la séquence. Ceci n'est pas vrai dans toutes les applications. L'information peut parfois légèrement fluctuer au cours du temps.
- L'ordre de présentation des signaux dans l'algorithme *ITE_DIF* est prépondérant. Si l'on permute des signaux dans la séquence, les résultats sont visuellement proches mais pas identiques.
- Lorsqu'un coefficient est considéré comme significatif lors du seuillage d'un des résidus, il est ajouté à l'estimation sans limitation aucune. Et ce même si ce coefficient n'a été détecté significatif qu'une seule fois sur la séquence.

Afin de remédier à ces problèmes, nous proposons une évolution de l'algorithme *ITE_DIF*, que nous appellerons *MEAN_ERR* [20].

1.3.3.1 Principe

Par rapport à l'algorithme *ITE_DIF*, nous ajoutons la contrainte suivante :

Sachant que $w_{l,k}^f$ n'est pas constant dans le temps, nous voulons obtenir, après traitement itératif sur la séquence, un coefficient reconstruit $w_{l,k}^*$ tel que :

$$w_{l,k}^* = \bar{w}_{l,k}^f \text{ avec } \bar{w}_{l,k}^f = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M w_{l,k}^{f(m)} \quad (1.37)$$

Concrètement, nous voulons obtenir la valeur moyenne dans le temps des coefficients réels du signal. L'équation (1.37) peut s'écrire :

$$\bar{w}_{l,k}^S = \frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M [w_{l,k}^{f(m)} - \tilde{w}_{l,k}] \right) + \tilde{w}_{l,k} \text{ pour tout } \tilde{w}_{l,k} \quad (1.38)$$

Si les variables $\tilde{w}_{l,k}$ correspondent aux coefficients issus du premier seuillage tels qu'ils sont définis par l'équation (1.22), l'algorithme *MEAN_ERR* découle alors d'une simple modification de *ITE_DIFF* permettant de prendre en compte la contrainte (1.37).

Afin d'initialiser l'algorithme, nous calculons une version lissée du signal à partir d'une des réalisations de la séquence en mettant à 0 toutes les échelles d'ondelettes et en ne conservant que la trame. Sachant que le signal fluctue sur la séquence, il faut que ce premier seuillage $h_{\lambda_{init}}$ soit tel que :

$$T_{\lambda_{init}}(\vec{W}s^{(1)}) \simeq T_{\lambda_{init}}(\vec{W}s^{(2)}) \dots \simeq T_{\lambda_{init}}(\vec{W}s^{(M)}) \quad (1.39)$$

Pour un certain nombre de signaux "raisonnables", on peut trouver une fonction $T_{\lambda_{init}}$, qui vérifie l'équation (1.39). Le nombre L d'échelles mises à 0 dépend de la nature du bruit et de l'importance de la "non-stationnarité" du signal. L'échelle correspondant à l'égalité (1.39) peut être évaluée empiriquement ou à l'aide d'un critère comme celui indiqué pour l'algorithme *ITE_DIFF*.

Nous définissons le résidu $R^{(m)}$ par,

$$R^{(m)} = s^{(m)} - \tilde{s} \text{ avec } \tilde{s} = \vec{W}^{-1} T_{\lambda_{init}}(\vec{W}s^{(1)}) \quad (1.40)$$

Les coefficients d'ondelettes du résidu s'écrivent :

$$w_{l,k}^{R^{(m)}} = w_{l,k}^{f(m)} + w_{l,k}^{B(m)} - \tilde{w}_{l,k} \quad (1.41)$$

Si l'on peut déterminer un seuillage T_{λ_R} tel que

$$T_{\lambda_R}(w_{l,k}^{R^{(m)}}) = w_{l,k}^{f(m)} - \tilde{w}_{l,k} + C_{l,k}^{(m)} \quad (1.42)$$

avec $C_{l,k}^{(m)}$ erreur de seuillage la plus faible possible

alors, à partir des équations (1.38) et (1.42), la valeur moyenne des coefficients peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \bar{w}_{l,k}^f &= \frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M [w_{l,k}^{f(m)} - \tilde{w}_{l,k}] \right) + \tilde{w}_{l,k} \\ &= \frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M T_{\lambda_R}(w_{l,k}^{R^{(m)}}) \right) + \tilde{w}_{l,k} - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_{l,k}^{(m)} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Nous déduisons de l'équation (1.43) que

$$\underbrace{\frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M T_{\lambda_R}(w_{l,k}^{R^{(m)}}) \right)}_{\text{moyenne des résidus seuillés}} + \underbrace{\tilde{w}_{l,k}}_{\text{signal lissé}} = \underbrace{\bar{w}_{l,k}^f}_{\text{valeur recherchée}} + \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_{l,k}^{(m)}}_{\text{biais dû au bruit}}$$

L'expression précédente indique que pour évaluer la valeur moyenne des coefficients du signal (coefficients $\bar{w}_{l,k}^f$) en tenant compte du bruit, il faut ajouter au signal lissé, issu du premier seuillage

(coefficients $\tilde{w}_{l,k}$), la moyenne des résidus seuillés. Il existe toutefois un biais dû au bruit dans la valeur estimée. Mais du fait du seuillage itératif des résidus, si l'algorithme converge, le biais $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_{l,k}^{(m)}$ va tendre vers une valeur peu significative lorsque le nombre d'occurrences M augmente. La décroissance de ce terme vers une valeur non significative est plus ou moins lente selon les caractéristiques du signal et du bruit. Afin d'illustrer cette décroissance du biais, nous affichons l'erreur moyenne absolue entre le signal reconstruit défini et le signal original non bruité pour un nombre M d'itérations variable. Le signal reconstruit f^r sera défini par

$$f^r = \tilde{s} + \frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M \vec{W}^{-1} T_{\lambda R} (\vec{W} R^{(m)}) \right)$$

La courbe 1.8 correspond au calcul de cette erreur pour l'exemple synthétique introduit précédemment. Notons que dans cet exemple l'information ne fluctue pas au cours des différentes occurrences du signal. On constate qu'après un certain nombre d'itérations l'erreur moyenne se stabilise, indiquant que l'algorithme a convergé. Le nombre d'itérations nécessaire peut être évalué de la même façon que pour *ITE_DIFF* en utilisant le critère d'entropie.

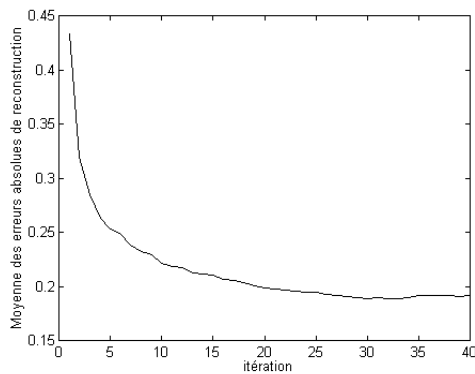


FIG. 1.8 – Mesure de l'erreur moyenne absolue de reconstruction en fonction du nombre d'itérations pour l'algorithme *MEAN_ERR*

Nous illustrons sur la figure 1.9 le signal reconstruit après 10 itérations.

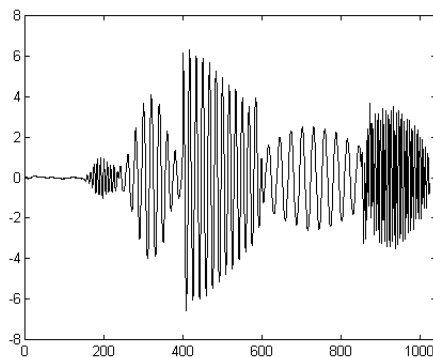


FIG. 1.9 – Signal reconstruit après 10 itérations par *MEAN_ERR*

1.3.3.2 Choix des seuils

Les définitions des deux seuils (seuil initial et seuil du résidu) sont identiques à celles proposées dans le cadre de l'algorithme *ITE_DIF*, avec un seuil initial défini par l'équation (1.33) et un seuil

du résidu défini soit par l'équation (1.35) pour le bruit gaussien, soit par l'équation (1.36) pour le bruit corrélé.

A l'inverse de l'algorithme *ITE_DIF*, un biais dans le seuillage du résidu est plus gênant pour l'algorithme *MEAN_ERR* car l'erreur n'est pas réévaluée à chaque itération (ce qui permettait ainsi de réduire ce biais). En revanche, la moyenne des erreurs seuillées va réduire la variance due au seuillage. Pour ces raisons, nous utiliserons un seuillage du type "Hard-Thresholding" pour l'algorithme *MEAN_ERR*, qui, nous le rappelons, optimise l'erreur de reconstruction.

1.3.4 Extension à la dimension 2 des algorithmes *ITE_DIF* et *MEAN_ERR*

Suivant le même principe que pour l'algorithme de débruitage non-décimé, nous pouvons généraliser facilement les deux algorithmes proposés précédemment aux dimensions supérieures et notamment aux images.

Le seuillage initial 2D, correspondant respectivement à $T_{\lambda_{I(1)}}$ et $T_{\lambda_{init}}$, est une généralisation de l'équation (1.33) :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^a_l &= T_{\lambda_{I(1)}} \left(w_l^a \left(s^{(1)} \right) \right) = 0 \\ \text{pour } l &= 1 \dots L, a = 1..3 \text{ et } \tilde{\epsilon}_L = \epsilon_L^{s^{(1)}} \end{aligned} \quad (1.44)$$

L'indice a indiquant la présence de 3 images caractérisant une échelle.

Lors du seuillage de l'erreur, nous définissons trois seuils différents selon la direction du plan d'ondelettes étudié. De ce fait, la généralisation du seuil du résidu, correspond, pour le cas général du bruit corrélé, à

$$\begin{aligned} \lambda_{l,a}^R &= \sqrt{2 \log(N^2/2^{2l})} * MAD \left(\left[w_l^a \left(s^{(1)} \right) \right] \dots \left[w_l^a \left(s^{(M)} \right) \right] \right) / 0.6745 \\ &\text{pour } a = 1..3 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le type de seuillage est défini comme pour la dimension 1 :

- un seuillage "Hard-Tresholding" pour l'algorithme *MEAN_ERR*,
- un seuillage "Soft-Tresholding" pour l'algorithme *ITE_DIFF*.

1.4 Résultats des algorithmes itératifs sur des signaux et des images de tests

Ces algorithmes ont été développés en langage C pour des bruits blancs ou corrélés.

1.4.1 Résultats sur des signaux

Afin d'illustrer les deux algorithmes, nous avons choisi d'utiliser le signal *HeaviSine* construit par Donoho [90]. Ce signal présente la particularité d'être lisse et de posséder une discontinuité sous la forme d'un pic. Nous "noyons" cette discontinuité dans le bruit. Nos algorithmes doivent alors supprimer le bruit tout en conservant le décrochement correspondant à la discontinuité. Ce

signal peut sembler très éloigné des signaux réels que l'on rencontre, mais il permet d'étudier avec attention la qualité de la reconstruction d'une discontinuité noyée dans du bruit.

Pour ce test, nous avons fabriqué à partir du signal original une séquence de 5 signaux bruités par 5 vecteurs aléatoires suivant une distribution gaussienne. Le signal est composé de 1024 points. Nous décomposons chaque occurrence sur 6 échelles avec les ondelettes Symmlet. La figure 1.10 présente le signal *HeaviSine* original ainsi que l'une des réalisations de la séquence. Dans cette réalisation, comme dans toutes les autres, la discontinuité disparaît dans le bruit.

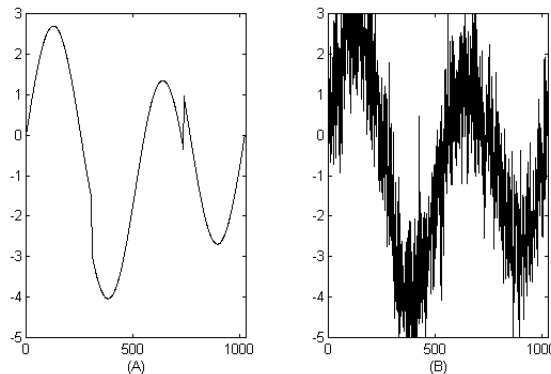


FIG. 1.10 – Création d'une séquence de signaux bruités ($SNR = 2$): (a) Signal original (b) Un des éléments de la séquence

Lorsque le niveau de bruit est trop important, la méthode *VisuShrink* ne peut pas extraire la discontinuité du bruit. Après reconstruction, la discontinuité disparaît avec le bruit (figure 1.11a). Son extension par une moyenne n'apporte aucune amélioration (figure 1.11b). Les méthodes non-décimées, telle que *uwt_mean* ou *TI_denoising*, échouent elles aussi.

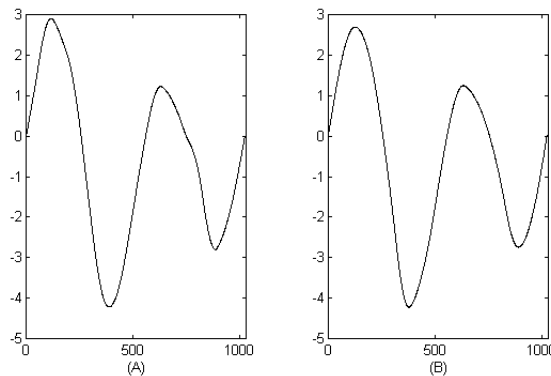


FIG. 1.11 – Débruitage d'une séquence bruitée ($SNR=2$) par la méthode de Donoho: (A) Résultat de *VisuShrink* sur un élément de la séquence (B) Moyenne des résultats de *VisuShrink* sur la séquence

Nous appliquons alors sur la séquence les algorithmes *ITE_DIFF* et *MEAN_ERR*.

Il est visible sur la figure 1.12 que le seuillage "Hard" utilisé pour l'algorithme *ITE_DIFF* n'est pas adapté. En effet, le signal reconstruit présente de nombreuses oscillations parasites. En revanche, si l'on utilise un seuillage "Soft", le signal est lissé tout en conservant la discontinuité. Bien sûr, cette discontinuité n'est pas parfaitement reconstruite, mais étant donné le niveau de bruit, et le faible nombre d'échantillons, le résultat est satisfaisant et utilisable dans un algorithme de détection.

L'algorithme *MEAN_ERR* est appliqué sur cette même séquence (figure 1.13). L'influence de

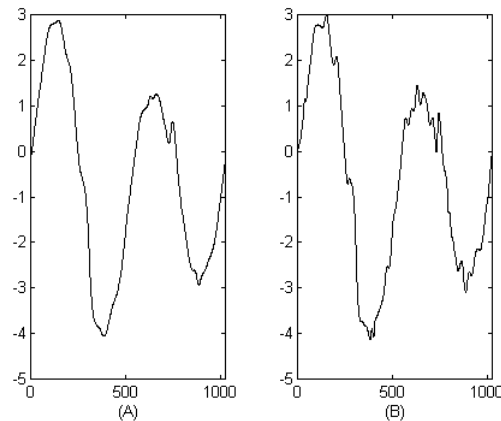


FIG. 1.12 – Débruitage par *ITE_DIFF* de la séquence ($SNR=2$): (a) Résultat pour le seuillage *SoftThresholding* (b) Résultat pour le seuillage *HardThresholding*

la moyenne, couplée au biais du seuillage, est visible sur le résultat du seuillage "Soft". En effet, la discontinuité a presque totalement disparu. En revanche, le calcul de la moyenne des résidus seuillés réduit la variance du seuillage "Hard" et permet de reconstruire un signal lisse présentant la discontinuité attendue. Visuellement, les résultats de *MEAN_ERR-Hard* et *ITE_DIFF-Soft* sont quasiment identiques.

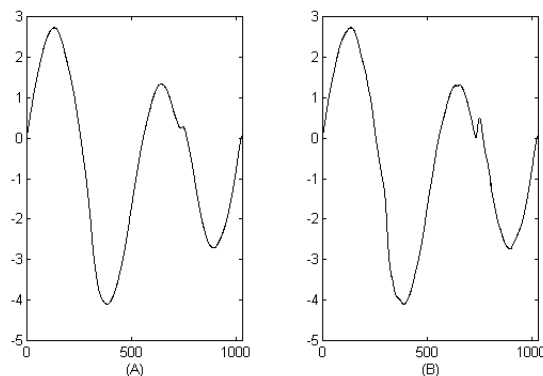


FIG. 1.13 – Débruitage par *MEAN_ERR* de la séquence ($SNR=2$): (a) Résultat pour le seuillage *SoftThresholding* (b) Résultat pour le seuillage *HardThresholding*

La généralisation de *MEAN_ERR* et *ITE_DIFF* au bruit corrélé donne des résultats équivalents. Le signal de test est bruité par un bruit défini par un modèle autorégressif. Nous pouvons voir sur la figure 1.14 que pour *MEAN_ERR-Hard* et *ITE_DIFF-Soft* le signal est correctement débruité, et que la discontinuité est reconstruite.

Les résultats quantitatifs des divers algorithmes appliqués sur les signaux synthétiques de référence construits par Donoho³ [90] sont présentés sous forme d'un tableau (tableau 1.1) indiquant la moyenne des mesures RMS calculée sur 30 séquences de test. Les algorithmes *ITE_DIFF* et *MEAN_ERR* (associés à leur méthode de seuillage optimale) correspondent, en général, aux meilleurs résultats. Toutefois ce tableau marque les limites d'une simple évaluation, par calcul d'erreur l^2 , des performances d'un algorithme. En effet, on remarque que pour certains signaux,

3. Nous avons utilisé ces signaux pour quantifier la qualité des algorithmes de débruitage car ils sont accessibles à tous sur le net et permettent donc des "confrontations".

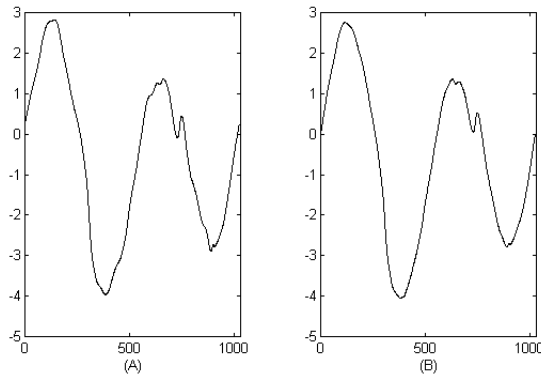


FIG. 1.14 – Débruitage par *MEAN_ERR* et *ITE_DIFF* de la séquence corrompu par un bruit corrélé ($SNR = 2$): (a) Résultat pour le seuillage *SoftTresholding* avec *ITE_DIFF* (b) Résultat pour le seuillage *HardTresholding* avec *MEAN_ERR*

ITE_DIFF a une erreur de reconstruction plus importante que d'autres algorithmes qui permettent, soit d'obtenir des signaux très lisses, soit de diminuer légèrement le bruit tout en conservant les structures du signal. Mais en terme d'extraction d'information utile, le résultat est mauvais car, soit les discontinuités sont supprimées (comme pour l'exemple *HeaviSine* présenté graphiquement auparavant), soit le résultat contient encore beaucoup trop de bruit.

Une étude visuelle reste souvent l'outil le plus approprié car elle permet de mieux juger de la qualité de l'estimation de l'information. Le tableau suivant permet quand même d'indiquer certaines tendances, notamment lorsque deux algorithmes utilisent des méthodologies similaires (le tableau met ainsi en évidence la légère supériorité de notre algorithme non-décimé *uwt_mean* sur celui de Coifman et Donoho *TI_denoising* [13]).

	HeaviSine	Doppler	Blocks
Bruit	1	1	1
Moyenne	0.447	0.448	0.444
<i>VisuShrink-Soft</i>	0.186	0.482	0.709
<i>TI_denoising-hard</i>	0.210	0.275	0.445
<i>uwt_mean-Hard</i>	0.188	0.265	0.404
<i>ITE-DIFF</i>	0.227	0.274	0.430
<i>MEAN-DIFF</i>	0.121	0.186	0.318

TAB. 1.1 – Débruitage par ondelettes de *Symmlet* ($SNR=2$ $L=6$ $N=1024$): Mesure *RMS*

1.4.2 Résultats sur des images de la base du GDR ISIS

Nous avons testé tout d'abord nos algorithmes sur trois images extraites de la base du GDR ISIS : Léna, Bureau et chaise. Nous construisons pour chacune de ces images des séquences de 5 images bruitées, avec un rapport signal sur bruit très faible ($SNR=0.5$). Nous pouvons voir sur la figure 1.15a que l'image Léna est inutilisable avec un tel niveau de bruit. L'application d'une moyenne sur la séquence permet d'obtenir une image plus nette mais encore très bruitée (figure 1.15b).

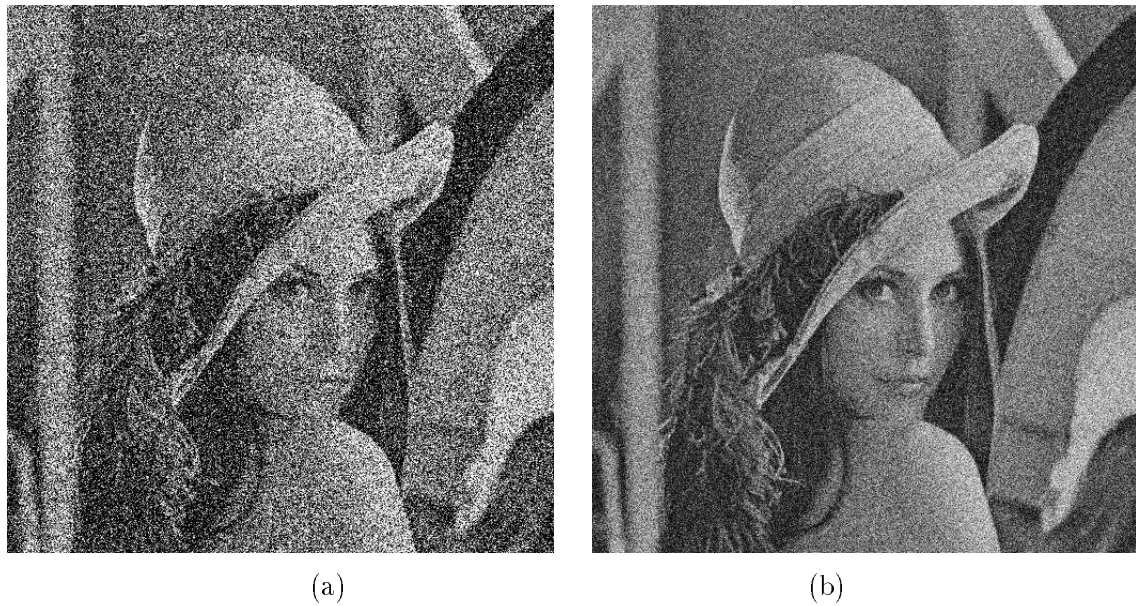


FIG. 1.15 – (a) Image Léna bruitée $SNR = 0.5$ (b) Débruitage par une moyenne sur la séquence

La figure 1.16 atteste que le débruitage à partir d'une seule réalisation n'est pas suffisant pour reconstruire tous les détails des images, entraînant la disparition de certains éléments du visage. Notons que le résultat de *VisuShrink* est plus grossier que *uwt_mean*.

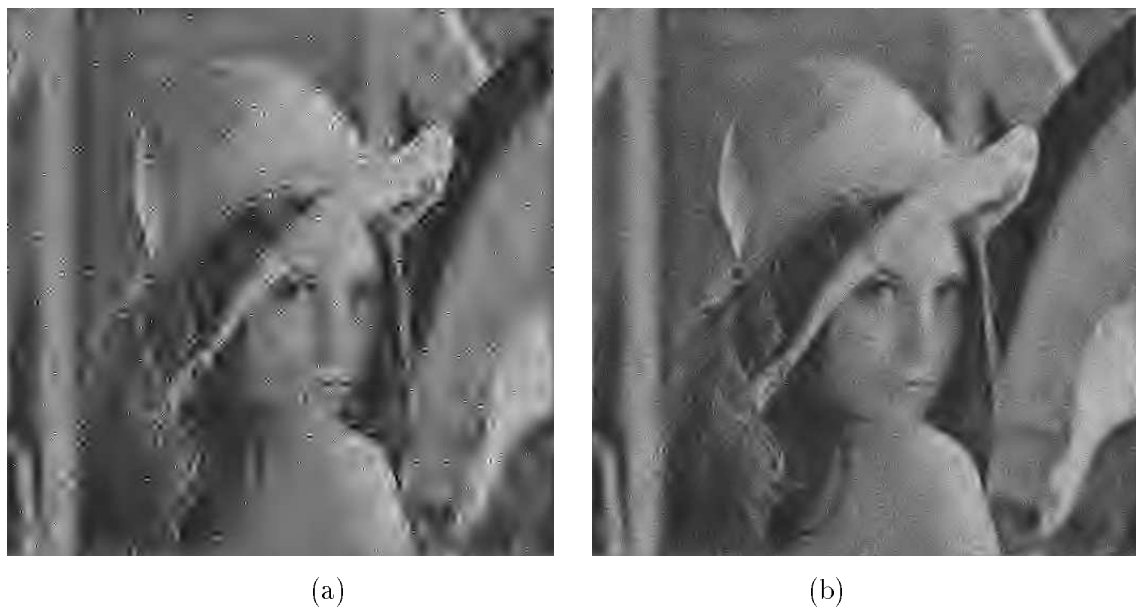


FIG. 1.16 – Débruitage de l'image Léna : (a) Résultat *VisuShrink* (b) Résultat *uwt_mean*

Les résultats des algorithmes *ITE_DIFF-Soft* et *MEAN_ERR-Hard* sont globalement identiques et reconstruisent une image nette, si l'on considère le niveau de dégradation de l'image de départ, et qui semble sans bruit (figure 1.17). Seuls ces deux algorithmes ont extrait l'information du bruit. Toutefois il existe une légère différence entre les deux algorithmes itératifs en la faveur de *MEAN_ERR*, sur la netteté de l'image reconstruite, ce qui s'explique par l'utilisation d'un seuillage "Hard".



FIG. 1.17 – Débruitage de l'image Léna : (a) Résultat *ITE_DIFF* (b) Résultat *MEAN_ERR*

La figure 1.18a présente une des occurrences de la séquence fabriquée à partir de l'image Bureau. Si l'on étudie le résultat de *uwt_mean* (figure 1.18b), on constate qu'un certain nombre de détails comme les contours de l'écran sont dégradés, et que des éléments parasites apparaissent sur les fenêtres ou les montants des fenêtres (le résultat de *VisuShrink* n'est pas présenté car il est inférieur).

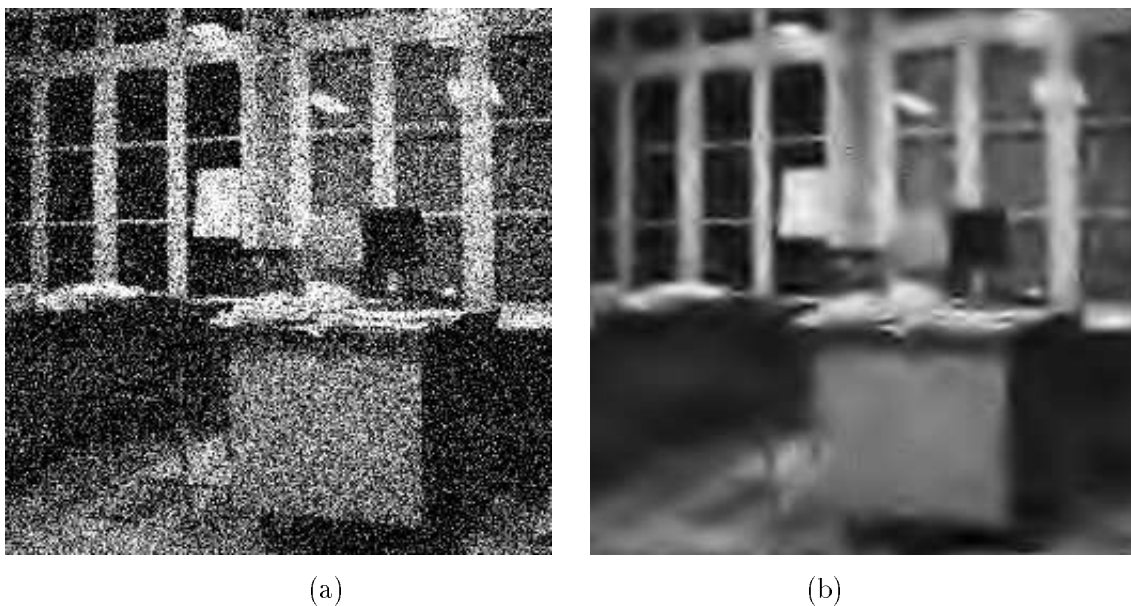


FIG. 1.18 – Image Bureau : (a) Bruitée ($SNR = 0.5$) (b) débruitée par *uwt_mean*

Les résultats de *ITE_DIFF-Soft* et *MEAN_ERR-Hard* sont meilleurs (figure 1.19). Les détails sont mieux extraits du bruit ce qui se traduit par une image plus nette sans éléments parasites, avec, encore une fois, un léger avantage pour l'algorithme *MEAN_ERR-Hard*.

Le tableau 1.2 présente un résumé des différentes moyennes sur 10 tests des mesures d'erreurs de reconstruction des algorithmes. Ces mesures confirment l'impression visuelle : les algorithmes

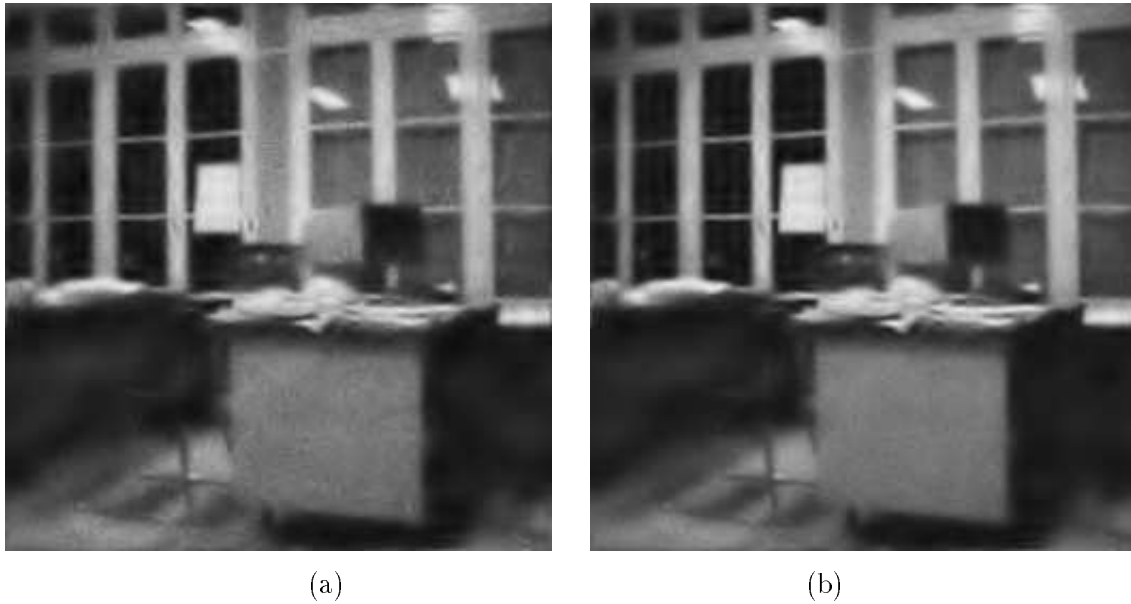


FIG. 1.19 – Débruitage de l'image Bureau: (a) Résultat *ITE_DIFF* (b) Résultat *MEAN_ERR*

itératifs ont les meilleurs résultats.

	Chaise	Lena	Bureau
Bruit	60.45	76.26	56.46
Moyenne	27.43	35.70	21.8
<i>VisuShrink-Hard</i>	15.31	28.16	28.2
<i>uwt_mean-Hard</i>	12.04	24.18	24.2
<i>ITE-DIFF</i>	11.36	19.73	21.40
<i>MEAN-ERR</i>	10.21	18.07	20.0

TAB. 1.2 – Débruitage par ondelettes de *Symmlet* $SNR=2$ (Image *Lena* $N=512$ $L=5$) (Image *Objet* et *Bureau* $N=256$ $L=4$): Mesure *RMS*

1.4.3 Applications à des images cérébrales fonctionnelles par résonance magnétique (IRMf)

Depuis quelques années de nombreuses études sont publiées sur l'identification des zones fonctionnelles du cerveau. Ce domaine a profité de l'essor de nouvelles techniques d'imagerie neurologique, notamment l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf) qui permet d'étudier l'évolution de l'activité cérébrale dans le temps. Cette technique non invasive fournit des images tridimensionnelles, en exploitant les propriétés magnétiques de certains noyaux atomiques. Plus précisément, l'IRM utilise le phénomène de résonance magnétique nucléaire (RMN). En imagerie cérébrale, on applique la résonance magnétique à l'hémoglobine, dont les propriétés magnétiques diffèrent légèrement selon que cette molécule est liée ou non à l'oxygène. Lorsqu'il y a activation d'une zone du cerveau, il y a un apport d'oxygène dans le sang et donc augmentation d'oxyhémoglobine. On accède donc à l'activité cérébrale en réalisant des images où est visualisé le contraste entre

les régions riches en oxyhémoglobine (flux sanguin accru) et les régions au flux sanguin "normal". Une étude de l'activité fonctionnelle du cerveau se décompose en trois parties :

- stimulation du cerveau,
- "photographie" de l'activité physiologique du cerveau,
- analyse des images afin de déterminer les zones d'activité du cerveau par rapport à une image de référence au repos.

Les données analysées dans ce paragraphe correspondent à une séquence temporelle d'images alternant une activation du cerveau (provoquée par un mouvement des doigts) et une phase de repos. Les images correspondant à la phase de repos représentent la base de référence, et toutes variations importantes par rapport à cette "ligne de base" seront considérées comme des zones activées.

Cependant les images IRMf se caractérisent par un rapport signal sur bruit très faible, et il est très difficile d'extraire correctement les zones activées. D'autant plus que les images traitées ont été acquises avec un appareil fonctionnant avec un faible champ de 0,5 Tesla, ce qui entraîne un niveau de bruit important. Durant notre DEA [13], nous avons étudié un certain nombre de méthodes de débruitage par ondelettes permettant d'extraire les zones activées, notamment une version "non finalisée" des algorithmes itératifs exposés dans ce chapitre. Nous présentons sur la figure 1.20 une image IRMf originale (images acquises au CIMA, Centre d'imagerie Médical Avancé de Compiègne), le résultat du débruitage non-décimé et le résultat de *MEAN_ERR* appliqué sur les images ne correspondant pas à une activation. Nous ne présentons pas le résultat du débruitage décimé car le résultat est nettement inférieur à *uwt_mean* [13], et seul le résultat de *MEAN_ERR* est illustré pour les algorithmes itératifs : il est en effet le mieux adapté puisque le signal fluctue au cours des acquisitions du fait de l'activité biologique. Les algorithmes sont appliqués avec une décomposition en 5 échelles avec les ondelettes Symmlet et un modèle de bruit corrélé (estimation du niveau de bruit à chaque échelle). Etant donné la problématique, Ces images, présentées sur la figure 1.20, ne sont pas les plus significatives pour juger de la qualité du débruitage. Mais nous pouvons déjà remarquer, à partir du fond de l'image, que pour les deux méthodes le bruit est correctement supprimé. Toutefois, si l'on étudie en détail la partie inférieure du cerveau, l'algorithme non-décimé a tendance à faire disparaître certains détails par rapport à la méthode itérative.

Afin de comparer correctement le résultat de ces algorithmes, nous estimons les zones d'activation en faisant une simple différence entre les images débruitées correspondant à des activations, et celles correspondant à des périodes de repos. Les résultats sont présentés sur la figure 1.21. On constate, tout d'abord, que la détection des zones activées à partir des images originales est impossible : seules les zones correspondant à l'os du crâne apparaissent, à cause des mouvements du patient. La méthode non-décimée n'apporte que peu d'améliorations. Simplement le fond de l'image "différence" est plus net. Le résultat de l'algorithme itératif est lui satisfaisant si l'on prend en compte le faible niveau du champ magnétique de l'appareil de mesure. Les deux zones d'activation, indiquées sur la figure par deux flèches, sont mises en évidence. Puisque le traitement se fait sur toute la séquence, il est logique que le mouvement du patient apparaisse d'une façon plus importante, mais il reste, en énergie, inférieur dans l'image de différence à l'activation cérébrale.

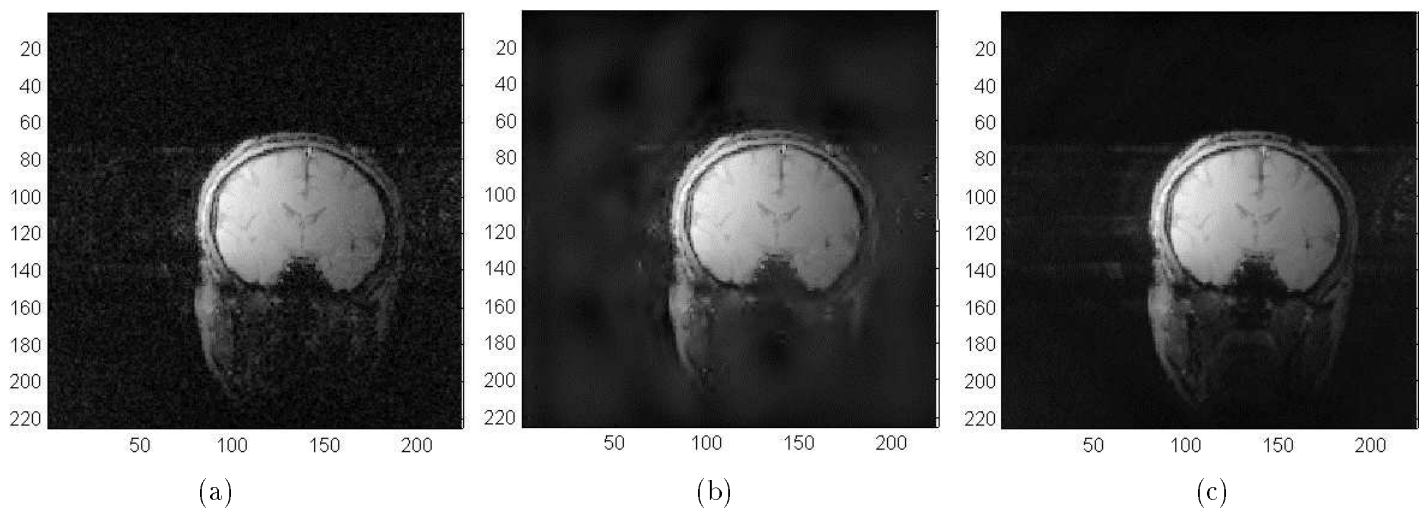


FIG. 1.20 – Débruitage d'une image IRMf: (a) Image originale (b) Débruitée par *uwt_mean* (c) Débruitée par *MEAN_ERR*

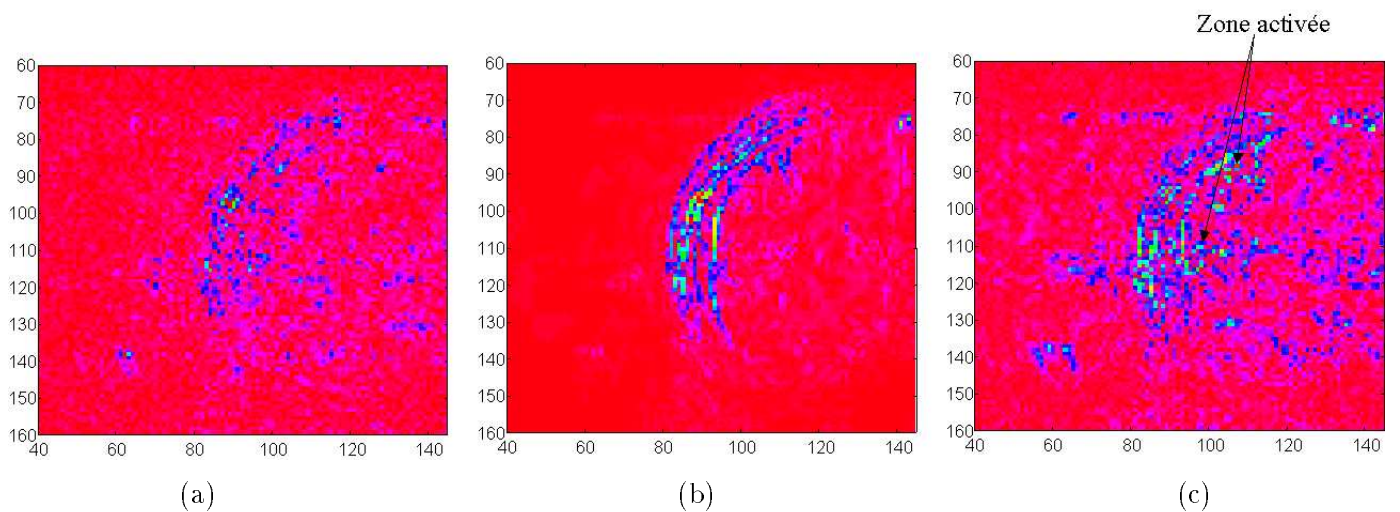


FIG. 1.21 – Détection des zones d'activation à partir de: (a) Image originale (b) Débruitée par *uwt_mean* (c) Débruitée par *MEAN_ERR*

Cette simple illustration montre la potentialité des algorithmes itératifs dans des problèmes complexes. Nous avons comme perspective de tester ces méthodes avec des appareils de mesures plus performants ayant un champ de 1.5 Tesla, en collaboration avec le service de radiologie (P. Vaudermarcq) du CHU de Poitiers.

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de faire un bref rappel sur la décomposition en ondelettes, telle qu'elle est généralement utilisée dans la littérature, ainsi que son extension non-décimée qui, présentant moins de contraintes sur les filtres, autorise de nouvelles représentations, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Le rappel des techniques de débruitage proposées dans la littérature a permis de mettre en évidence certaines propriétés de la décomposition en ondelettes. Nous avons formalisé la technique que nous avons proposée en DEA appelée *uwt_mean*. Elle utilise une décomposition en ondelettes non-décimée avec des filtres miroirs en quadrature, et un seuillage adapté à ce type de décomposition. Grâce à une moyenne sur les phases, cette méthode est plus performante que les algorithmes conçus dans le cadre d'une décomposition décimée. Elle s'inscrit dans le cadre introduit par Coifman et Donoho avec l'algorithme *TI_denoising* pour le bruit blanc, mais avec une généralisation au bruit corrélé et à la dimension 2. *uwt_mean* s'intégrera par la suite dans diverses problématiques (par exemple l'estimation du spectre dans le chapitre 3) pour lesquelles nous avons besoin d'estimer des données 1D et 2D corrompues par un bruit additif.

Nous avons ensuite introduit deux méthodes itératives permettant de traiter différentes copies d'un signal. En effet, lorsque le niveau de bruit est trop important, le traitement d'une seule acquisition n'est pas suffisant et plusieurs réalisations sont nécessaires. Ces deux méthodes utilisent itérativement une décomposition en ondelettes non-décimée de la différence entre la fonction reconstruite et les acquisitions suivantes. Ces méthodes permettent, pour un nombre limité de tirages, d'extraire de l'information noyée dans du bruit. De plus, une de ces méthodes permet de prendre en compte les fluctuations de l'information au cours des différentes réalisations. Nous avons mentionné et illustré un critère permettant d'évaluer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution stable.

Ces algorithmes ont été testés avec succès à des problèmes concrets comme le débruitage d'IRMf ou de signaux biomédicaux [21].

Du fait de leurs formulations générales, tous les algorithmes présentés dans ce chapitre peuvent évoluer facilement en prenant en compte les progrès issus du monde des ondelettes en intégrant, par exemple, de nouvelles fonctions de seuillage, une décomposition en paquets d'ondelettes non-décimée ou d'autres techniques à venir.

Nous allons étudier dans le chapitre suivant une représentation particulière utilisant les propriétés des décompositions non-décimées : les maxima d'ondelettes.

Chapitre 2

Décomposition en maxima d'ondelettes : débruitage et segmentation

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit le schéma général d'analyse en ondelettes discrètes. Nous allons étudier, dans ce chapitre, une représentation particulière proposée récemment par Mallat et Zhong appelée "représentation en maxima d'ondelettes" [70]. Cette décomposition basée sur l'algorithme de décomposition en ondelettes non-décimée (paragraphe 1.2.1) permet l'étude des dérivées d'une fonction discrète à différentes échelles. Dans un premier temps, nous rappelons le principe de l'algorithme de projection en maxima d'ondelettes, les propriétés de propagation de ces maxima à travers les échelles, ainsi que l'algorithme de reconstruction.

Ensuite, nous présentons une méthode de segmentation de signaux basée sur le chaînage des maxima à travers les échelles. Nous évaluons les résultats de cet algorithme sur des signaux de radiocommunication, ainsi que sur des signaux d'enregistrement audio et de mouvements de lèvres, signaux annexes à l'enregistrement encéphalographique (EEG).

Enfin, nous proposons un algorithme de débruitage d'images basé sur le postulat de la stabilité de l'angle de la dérivée multiéchelles pour les maxima associés à un contour significatif. Cette méthode sera appliquée sur des images de test ainsi que sur des images d'angiographie coronarienne.

2.2 Représentation en maxima d'ondelettes

2.2.1 Principe

On peut construire une ondelette définie comme la $p^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction. En particulier, si la fonction d'ondelette est la dérivée première de la fonction de lissage, les extrema locaux de la transformée en ondelettes correspondent aux discontinuités du signal à différentes échelles. De même, si l'ondelette est définie comme la dérivée seconde de la fonction de lissage, ce sont les passages par 0 qui correspondent aux discontinuités.

Soit une fonction d'échelle $\phi(x)$ qui satisfait les propriétés indiquées dans le paragraphe 1.2.1 que nous rappelons

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \partial x = 1.$$

En imposant que $\phi(x)$ soit différentiable, on introduit la fonction d'ondelette $\psi^1(x)$ comme la dérivée première de $\phi(x)$

$$\psi^1(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}$$

Nous rappelons que la fonction ψ_1 est considérée comme une ondelette si $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^1(x) \partial x = 0$.

D'après l'équation (1.3) du chapitre 1, pour toutes fonctions $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée en ondelettes, à l'échelle s , a comme composante

$$d_s^{\circ 1}(x) = f(x) * \psi_s^1(x)$$

De la linéarité de la convolution et de la dérivation, on vérifie que

$$d_s^{\circ 1}(x) = s \frac{\partial}{\partial x} (\phi_s * f)(x) \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) indique que la transformée en ondelettes du signal à l'échelle s est équivalente à la dérivée de la fonction $f(x)$ lissée par $\phi_s(x)$. Un maximum dans la transformée en ondelettes correspond à un point d'inflexion de la courbe $\phi_s * f$.

Afin de réduire la redondance d'information, l'échelle s varie seulement dans une séquence dyadique $\left[2^l\right]_{l \in \mathbb{Z}}$.

On retrouve les techniques développées dans le cadre de la vision informatique. Par exemple, Canny [10] propose l'utilisation de la dérivée première d'une gaussienne, l'écart type de la gaussienne jouant le rôle de paramètre d'échelle.

Mallat et Zhong [70] montrent que les minima locaux, et donc certains des passages par zéro de la dérivée seconde, ne correspondent pas à d'importantes variations du signal, mais à un point d'inflexion de la fonction. En revanche, les maxima locaux sont associés aux discontinuités du signal observées à différentes échelles. Notre étude va donc se concentrer sur la dérivée première.

2.2.2 Définition des fonctions analysantes

Il est clair, d'après la section précédente, que pour avoir une représentation multiéchelles des dérivées à partir des maxima d'ondelettes, l'ondelette doit être la dérivée première de la fonction d'échelle. Afin d'avoir une représentation invariante par translation, la transformée se calcule avec un banc de filtres non-décimé. Nous avons abordé dans le chapitre 1 la décomposition en ondelettes non-décimée, nous rappelons ici ses éléments principaux. Aux deux fonctions ϕ et ψ sont associés deux filtres : un filtre passe-bas H et un filtre passe-haut G . Lors d'une décomposition non-décimée les filtres associés doivent être dilatés entre chaque échelle. La transformée en ondelettes discrètes d'un signal $f(x) \in l^2(\mathbb{Z})$ à l'échelle l est calculée par la convolution avec les filtres $h^{(l)}$ et $g^{(l)}$ suivant l'équation (1.9) du chapitre 1. Pour obtenir une reconstruction parfaite, il est nécessaire et suffisant de définir un groupe de filtres de synthèse Q et P qui vérifie la condition de reconstruction parfaite [101]. Nous avons introduit cette propriété de la transformée non-décimée dans l'équation (1.7) pour le cas particulier où les filtres de décomposition et reconstruction étaient identiques)

$$H(w)P(w) + G(w)Q(w) = 1. \quad (2.2)$$

Dans ce cas la transformée inverse se calcule de la façon suivante

$$e_{l,k} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} \sum_n p^{(l+1)} [k - 2n] e_{l+1,n} + \sqrt{2} \sum_n q^{(l+1)} [k - 2n] w_{l+1,n} \right].$$

L'implémentation numérique de la décomposition et de la reconstruction se fait par un banc de filtres octave bande non-décimé [70].

Mallat et Zhong [101] ont fabriqué une famille d'ondelettes qui possède les propriétés désirées pour une représentation multiéchelles des bords. Ces fonctions d'ondelettes et d'échelles sont des éléments de la famille des splines :

$$\hat{\phi}(w) = \left(\frac{\sin(w/2)}{w/2} \right)^n \quad \text{et} \quad \hat{\psi}(w) = i(w/2) \left(\frac{\sin(w/2)}{w/2} \right)^n. \quad (2.3)$$

Afin d'évaluer la "qualité" d'une représentation générée par une fonction d'ondelettes, Daubechies a introduit la notion de "frame ratio" [35]. Suivant le choix de ψ , une transformée en ondelettes peut être une représentation complète et numériquement stable, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes, $A > 0$, $B < 0$ telles que, pour tout $f \in L^2(R)$,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \|\psi_l * f\|^2 \leq B \|f\|^2.$$

Si les fonctions ψ_l choisies vérifient cette condition, alors la famille d'ondelettes constitue une "frame" dans L^2 , avec B/A le "frame ratio"[35]. Plus B/A est proche de 1, et plus la représentation est stable. Quand B/A est égal à 1, nous avons une décomposition orthogonale.

Nous pouvons, à partir de ce paramètre B/A "évaluer" les fonctions définies par l'équation (2.3). Si $n = 2$, ψ est une ondelette de Haar correspondant à un frame ratio égal à 1 (i.e. décomposition orthogonale), mais ψ est discontinue. Plus l'ordre n est grand, plus les fonctions d'échelles et d'ondelettes sont régulières mais avec un support temporel qui s'élargit et un frame ratio qui s'écarte de 1. Dans la majorité des applications utilisant les maxima d'ondelettes ([66], [101], [23]) on préfère utiliser une spline quadratique ($n = 4$), qui correspond aux filtres suivants :

$$\begin{aligned} H(w) &= \cos(w/2)^3 \exp(iw/2), \\ G(w) &= i \sin(w/2) \exp(iw/2), \\ P(w) &= H^*(w), \\ Q(w) &= \frac{1 - P(w)H(w)}{G(w)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans ce cas, le frame ratio est égal à 3. Ces fonctions sont présentées sur la figure 2.1. Elles correspondent à un compromis entre la régularité des fonctions analysantes et une représentation peu redondante.

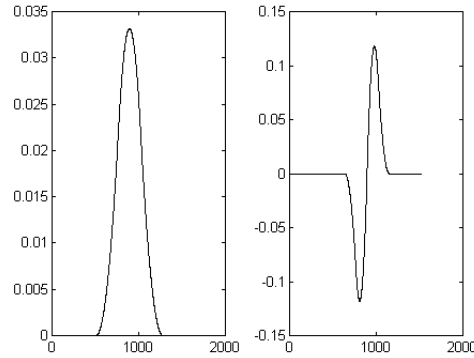


FIG. 2.1 – Fonctions d'échelle et d'ondelette de la famille des splines ($n = 4$)

2.2.3 Maxima d'ondelettes

A partir des fonctions analysantes définies ci-dessus, une représentation en maxima d'ondelettes est construite. Pour une décomposition en ondelettes sur L échelles, Mallat et Zhong [70] définissent cette représentation par l'ensemble :

$$\{e_L, [A_l]_{1 \leq l \leq L}\} \text{ avec } A_l = \{(x_j, w_{l,x_j}^1) \text{ pour } \forall x_j \text{ tel que } |w_{l,x_j}^1| \text{ soit un maximum local}\}.$$

Concrètement, la représentation en maxima d'ondelettes contient les positions et les valeurs des coefficients w_l^1 à chaque échelle lorsque $|w_{l,k}^1|$ atteint un maximum local, plus la dernière trame.

La figure 2.2 offre un exemple de représentation d'un signal par maxima d'ondelettes. Le signal de test, que nous appellerons par la suite signal *Mallat*, est celui utilisé dans les articles de Mallat *et al.*

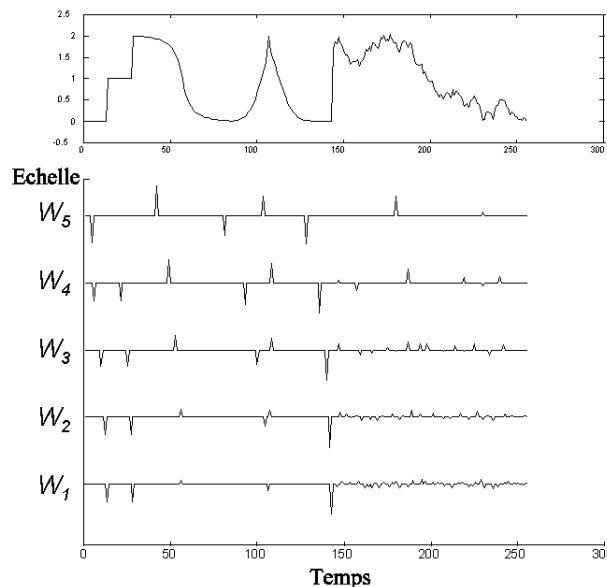


FIG. 2.2 – Signal de test et sa représentation en maxima d'ondelettes

2.2.4 Reconstruction du signal à partir des maxima d'ondelettes

David Marr a proposé la conjecture suivante : *un signal est complètement caractérisé par la représentation multiéchelles de ses bords*. Un signal peut être reconstruit à partir de sa représentation

en coefficients d'ondelettes par transformation inverse. La question est de savoir comment reconstruire le signal simplement à partir des maxima d'ondelettes, ou bords multiéchelles. Ce problème se caractérise par trois interrogations :

- Existence de la solution?
- Unicité de la solution?
- Stabilité de l'algorithme de reconstruction?

Pour des données expérimentales, Mallat et Zhong ont proposé une conjecture répondant par l'affirmatif à ces trois questions dans le cadre des maxima d'ondelettes. Par la suite, un certain nombre de contre-exemples ont été construits par Meyer ne vérifiant pas l'unicité de la solution [74]. Mais, comme il l'indique lui-même, ces contre-exemples sont définis mathématiquement, et pour des données réelles numériques, la représentation par maxima d'ondelettes est stable.

Divers algorithmes de reconstruction à partir des maxima d'ondelettes sont proposés dans la littérature [12], [65]. Nous utiliserons l'algorithme de Mallat et Zhong [70] qui a la propriété d'être numériquement stable et de reconstruire un signal proche de l'original. Cet algorithme est celui généralement utilisé dans des applications utilisant les maxima d'ondelettes. Nous en présentons brièvement le principe.

Pour reconstruire le signal, deux sous-espaces sont définis :

1. L'espace Γ est composé des fonctions $\{f_l[x]\}_{l \in Z}$ qui ont des maxima identiques à $[A_l]_{l \in Z}$.
2. L'espace V est composé des fonctions $\{f_l[x]\}_{l \in Z}$ élément de l'espace des décompositions en ondelettes, c'est-à-dire que $\{f_l[x]\}_{l \in Z} = \vec{W} \circ \vec{W}^{-1} \{f_l[x]\}_{l \in Z}$.

La solution de la reconstruction va être l'intersection de ces deux espaces $\Gamma \cap V$. Afin de calculer cette intersection, Mallat et Zhong ont proposé un algorithme utilisant des projections alternées, développé à l'origine par Youla et Webb [99]. On note P_Γ l'opérateur de projection orthogonale sur Γ et P_V l'opérateur de projection orthogonale sur V . La réalisation de P_V est très simple, car elle est définie par $P_V = \vec{W} \circ \vec{W}^{-1}$. C'est une reconstruction suivie d'une transformée en ondelettes. P_Γ est définie avec plus de difficulté car Γ n'est pas convexe. Mallat et Zhong proposent une approximation de cet opérateur que nous ne développerons pas dans ce mémoire, nous renvoyons à l'article de référence [70].

La reconstruction du signal à partir des maxima d'ondelettes est alors obtenue par l'utilisation de P_V et de P_Γ alternativement : $f \approx \dots \circ P_V \circ P_\Gamma \circ P_V \circ P_\Gamma [A_l]_{l \in Z}$.

2.2.5 Extension à l'image

Nous pouvons étendre au 2D la notion de gradient multiéchelles et de représentation en maxima d'ondelettes, présentée ci-dessus [70].

Ainsi, pour une image, on introduit deux fonctions d'ondelettes $\psi^1(x, y)$ et $\psi^2(x, y)$ comme les dérivées premières partielles de $\phi(x, y)$:

$$\psi^1(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \text{ et } \psi^2(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}.$$

Pour toutes fonctions $f(x, y) \in L^2(R^2)$, la transformée en ondelettes, à l'échelle s , a deux composantes :

$$d_s^{\circ 1}(x, y) = f * \psi_s^1(x, y) \text{ et } d_s^{\circ 2}(x, y) = f * \psi_s^2(x, y).$$

De la linéarité de la convolution et de la dérivation, on vérifie que

$$\begin{bmatrix} d_s^{\circ 1}(x, y) \\ d_s^{\circ 2}(x, y) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_s * f)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\phi_s * f)(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) indique que la transformée en ondelettes de l'image, à l'échelle s , est équivalente au gradient de la fonction $f(x, y)$ lissée par la fonction $\phi_s(x, y)$. Comme dans le cas du gradient monoéchelle, un maximum dans la transformée en ondelettes correspond à un point d'inflexion de la courbe $\phi_s * f$.

La transformée en ondelettes ainsi définie se calcule, comme en 1D, avec un banc de filtres non-décimé 2D. La transformée en ondelettes discrètes d'une image $f[x, y] \in l^2(Z^2)$ à l'échelle 2^l est calculée par la convolution avec les filtres h^l et g^l de la façon suivante :

$$\begin{cases} e_{l+1} = (h^l, h^l) * e_l \\ w_{l+1}^1 = (g^l, 1) * e_l \\ w_{l+1}^2 = (1, g^l) * e_l \end{cases}$$

avec w_{l+1}^1 dérivée selon x et w_{l+1}^2 dérivée selon y ,
et (h_1, h_2) filtrage par h_1 selon x et par h_2 selon y .

Pour obtenir une reconstruction parfaite, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un groupe de filtres de synthèse Q , P et Z qui vérifie la condition de reconstruction parfaite [101] :

$$H(w_x)H(w_y)P(w_x)P(w_y) + G(w_x)Z(w_y)Q(w_x) + G(w_y)Z(w_x)Q(w_y) = 1.$$

Dans ce cas, la transformée inverse se calcule de la façon suivante :

$$e_{l-1} = (p^l, p^l) * e_l + (q^l, z^l) * w_l^1 + (z^l, q^l) * w_l^2.$$

Afin de définir la notion de maximum local en dimension 2, nous effectuons un changement de repère par :

$$\rho_l = \|\nabla_l g\| = \sqrt{(w_l^1)^2 + (w_l^2)^2}$$

et,

$$\theta_l = \arg(\nabla_l g) = \arctan\left(\frac{w_l^2}{w_l^1}\right)$$

En reprenant le formalisme de Canny [10], les maxima, ou bords, à l'échelle l , vont être les points maxima locaux de la norme ρ_l dans la direction θ_l . L'ensemble ainsi défini est noté A_j et va constituer la représentation en maxima d'ondelettes d'une image [101].

Suivant le même principe que pour un signal, Mallat et Zhong ont proposé un algorithme itératif de reconstruction d'une image à partir des maxima [70].

Les fonctions d'ondelettes et d'échelles utilisées pour la décomposition multiéchelles 2D sont aussi éléments de la famille des splines [101]. Les filtres associés à ces fonctions d'ondelettes et d'échelles sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 H(w) &= \cos(w/2)^3 \exp(iw/2), \\
 G(w) &= i \sin(w/2) \exp(iw/2), \\
 P(w) &= \overline{H}(w), \\
 Q(w) &= \frac{1 - P(w)H(w)}{G(w)}, \\
 Z(w) &= \frac{1 + P(w)H(w)}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.6 Propagation des maxima

Les maxima vont suivre une évolution à travers les échelles qui est régie par certaines règles et qui permet de mesurer localement la régularité d'une fonction. Nous rappelons les propriétés de propagation des maxima à travers les échelles. Au préalable, nous indiquons la définition de la régularité de Lipschitz.

Définition 1 Soit $\alpha \in [0, 1]$, une fonction $g(x)$ est uniformément Lipschitz α sur un intervalle $[a, b]$ si et seulement si il existe une constante K telle que pour tout $x_0, x_1 \in [a, b]$

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leq K |x_0 - x_1|^\alpha$$

La valeur de Lipschitz mesure la différentiabilité et la régularité d'une fonction dans un voisinage proche. Plus α est grand, plus la fonction est régulière. Mallat a montré comment la régularité de Lipschitz peut être mesurée par l'évolution de la valeur absolue des coefficients d'ondelettes à travers les échelles [69].

Théorème 1 Une fonction $f(x) \in L^2(\mathfrak{R})$ est uniformément α Lipschitz sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, la transformée en ondelettes vérifie :

$$|c_s^{\alpha 1}(x)| \leq K s^\alpha \tag{2.7}$$

Dans un premier temps, nous remarquons que le théorème précédent indique que l'évolution des maxima va nous permettre de détecter des singularités. Mallat et Hwang l'ont exprimé à travers le théorème suivant qui prouve que si la transformée en ondelettes de f n'a pas de maxima aux fines échelles, alors f est localement régulière.

Théorème 2 On suppose que $\psi \in C^n$ avec un support compact, et $\psi = (-1)^n \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x)$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx \neq 0$. Soit $f \in L^1[a, b]$. Si il existe $s_0 > 0$ tel que $|c_s^{\alpha 1}(x)|$ n'a pas de maximum pour $x \in [a, b]$ et $s < s_0$, alors f est uniformément Lipschitz n sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Cela implique que f peut être singulière à un point v si et seulement si il existe une séquence de maxima d'ondelettes $(x_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers v aux fines échelles :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = v \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$$

Nous utiliserons cette propriété pour la segmentation de signaux.

D'autre part, on remarque que la connaissance des constantes K et α , nous permet à partir de l'équation (2.7), d'estimer la régularité Lipschitz d'une singularité, et implicitement l'amplitude de la transformée en ondelettes à chaque échelle pour les différentes singularités. En utilisant la transformée en ondelettes sur une grille dyadique et la représentation par maxima, l'équation (2.7) s'écrit, pour les différentes singularités x_n [23],

$$w_{l, x_n^l} = K_n (2^l)^{\alpha_n}, l = 1 \dots L, \quad (2.8)$$

où $\{w_{l, k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est la transformée en ondelettes du signal f à l'échelle l , x_n^l est la position du maximum local à l'échelle l correspondant à la n ième singularité, α_n est la régularité de Lipschitz de la fonction f en ce point singulier et K_n est une constante non-nulle.

Ces résultats se généralisent à la dimension deux, en étudiant la norme des dérivées partielles. Sur une grille dyadique, la relation est la suivante pour les différentes singularités de position (x_n, y_n) :

$$\rho_l[x_n^l, y_n^l] = K_n (2^l)^{\alpha_n}, l = 1 \dots L \quad (2.9)$$

2.3 Segmentation de signaux 1D par maxima d'ondelettes

Le débruitage a constitué l'un des premiers domaines d'applications des maxima d'ondelettes. Dans ce cadre, on tente de ne conserver que les coefficients qui correspondent à l'information, et d'éliminer ceux créés par le bruit. Du fait des propriétés de propagation des maxima, c'est tout naturellement que récemment, quelques algorithmes de débruitage basés sur la représentation en maxima sont apparus dans la littérature. Il existe principalement deux méthodes, qui utilisent des modes opératoires très proches.

Le premier algorithme proposé fut celui de Mallat et Hwang [69], qui étudie l'évolution des maxima d'ondelettes à travers les échelles. L'algorithme de Mallat repose sur le principe que tout maximum lié au bruit ne va pas diffuser dans toutes les échelles. En revanche, les principales discontinuités sont encore présentes à des échelles grossières. Mallat et Hwang suggèrent donc de suivre l'évolution des maxima dans les échelles et de supprimer ceux qui ne se diffusent pas au-delà d'une échelle "seuil".

Le second algorithme de débruitage a été proposé par Lu [66] et ne diffère de celui de Mallat que par la méthodologie d'association des maxima d'ondelettes à travers les échelles.

En revanche, à notre connaissance, aucun algorithme de segmentation de signaux basé sur les maxima d'ondelettes, utilisant des échelles dyadiques et le principe de diffusion des maxima, n'a été proposé dans la littérature. Or, lorsqu'un algorithme de débruitage sélectionne les maxima qui se propagent aux échelles les plus grossières, il extrait les principales discontinuités, ainsi que leurs coordonnées. Aussi le principe proposé dans le cadre d'applications de débruitage peut être utilisé pour des problématiques de segmentation.

Toutefois, l'un des points faibles des méthodes basées sur le gradient multiéchelles reste la procédure de chaînage des maxima à travers les échelles, car la décomposition est dyadique et la représentation associée n'est pas dense. Nous nous proposons de définir une méthode de chaînage robuste qui nous permettra d'extraire les principales discontinuités, et de ce fait, de segmenter un signal.

2.3.1 Recalage des maxima

Les filtres proposés par Mallat *et al* pour calculer la décomposition en gradient multiéchelles (équation (2.4)) ont une phase linéaire. Ils ne vont donc pas translater le signal. Toutefois, ils possèdent un nombre pair de coefficients : lors du calcul numérique de la convolution entre le signal et l'un des filtres, le résultat de l'opération $\sum_k s[k]h[n-k]$ ne peut pas être stocké à une position centrale, et cela provoque un décalage. Cette particularité n'est pas remarquable lors du calcul des premières échelles, car les filtres sont de tailles raisonnables. En revanche, pour les échelles plus grossières, les filtres sont dilatés et le décalage vers la gauche (suivant la définition (2.4)) devient très important. Nous allons, à partir d'un exemple (une fonction gaussienne), proposer une simple modification des filtres, afin d'obtenir une représentation dyadique qui présente un comportement similaire à la transformée continue. Un signal suivant une fonction gaussienne a deux points d'inflexion ayant un signe opposé et une position symétrique par rapport au centre.

Nous calculons la transformée en ondelettes continue de ce signal. Pour cela, nous utilisons une ondelette définie comme la dérivée seconde d'une gaussienne (connue sous le nom de "chapeau mexicain"). Les points d'inflexion correspondent aux changements de signe dans la décomposition. Cette décomposition est illustrée sur la figure 2.3a. La figure 2.3b indique les signes des coefficients et met en évidence le comportement des deux points d'inflexion à travers les échelles. Ils suivent les frontières entre la zone noire (coefficients de signe négatif) et la zone blanche (coefficients de signe positif). Ces deux points caractéristiques restent à une position constante pour les échelles fines, puis ils s'écartent du centre symétriquement.

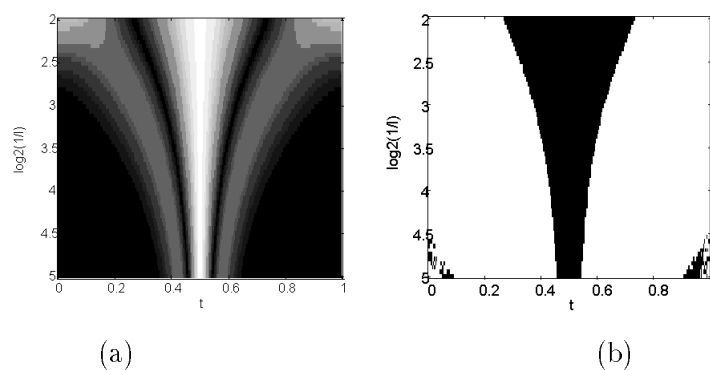


FIG. 2.3 – Décomposition en ondelettes continue avec l'ondelette "chapeau mexicain": (a) Scalogramme (b) Signe des coefficients

Nous désirons que la transformée dyadique s'apparente à une discrétisation de la représentation continue. Si nous reprenons la définition des filtres dans le cadre de la décomposition en maxima d'ondelettes, nous remarquons que les deux filtres sont définis suivant le même formalisme : le résultat du produit de convolution est placé à gauche du centre du filtre. Cette particularité est logique

puisque les filtres sont liés entre eux par la relation (2.2) mais elle va introduire un décalage dans la position des maxima. Nous présentons sur la figure 2.4, la décomposition en maxima d'ondelettes du signal *Gauss*, ainsi que les différentes versions intermédiaires du signal lissé. Nous remarquons que les maxima se décalent vers la gauche au fur et à mesure que l'indice d'échelle augmente. Si nous comparons ce comportement à la représentation continue, nous constatons que cette translation des points d'inflexion n'est pas une conséquence de la forme du signal, mais bien des filtres. Ceci se confirme avec l'étude de la version lissée du signal à différentes échelles (figure 2.4b) : le maximum de la courbe se décale lui aussi vers la gauche.

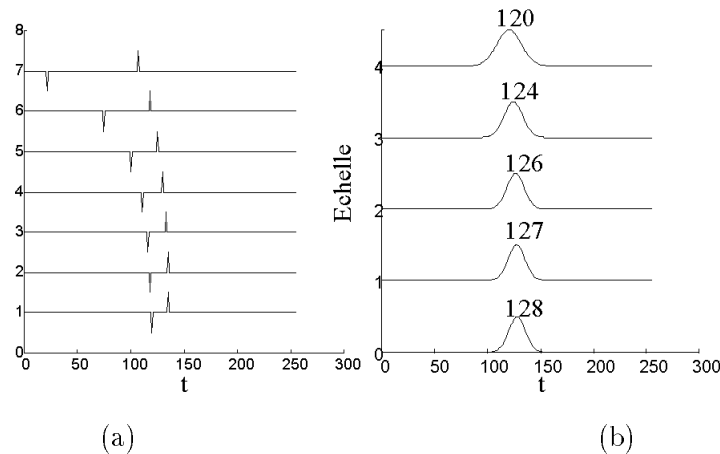


FIG. 2.4 – *Décomposition en gradient multiéchelles du signal Gauss : (a) Représentation en maxima d'ondelettes (b) Version lissée à différentes échelles (le nombre indique la position du maximum de la courbe)*

Les deux filtres d'analyse ont un comportement identique : ils décalent le signal vers la gauche. Cette caractéristique peut être prise en compte lors de l'algorithme de chaînage, mais afin d'obtenir une représentation qui soit la version discrétisée de la transformée continue, nous proposons de modifier la définition d'un des deux filtres d'analyse, pour que leurs actions se compensent. Par exemple, le filtre dérivateur G est transformé par :

$$\begin{aligned} G(w) &= i \sin(w/2) \exp(-iw/2), \\ G[z] &= \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans ce cas, la représentation en maxima d'ondelettes du signal *Gauss* approxime correctement la transformée continue, comme nous pouvons le vérifier sur la figure 2.5.

Nous utiliserons donc le filtre dérivateur tel qu'il est défini par l'équation (2.10). Toutefois, nous constatons que les positions des maxima correspondant à un même point d'inflexion subissent encore une translation due à la forme de la courbe. Il nous faut donc définir un algorithme de chaînage permettant de construire les lignes de maxima à travers les échelles.

2.3.2 Algorithme de chaînage

La diffusion des maxima à travers les échelles a été abondamment étudiée dans le cas de l'espace temps-échelle gaussien. Cet espace peut s'apparenter à une transformation en ondelettes continue

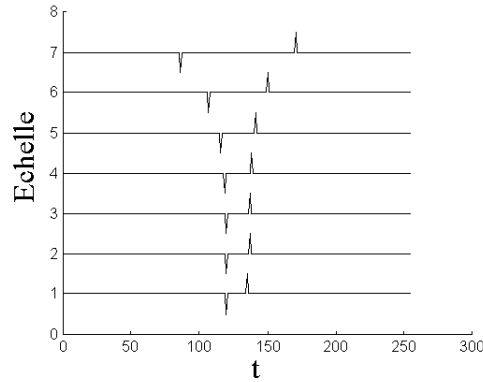


FIG. 2.5 – Décomposition en gradient multiéchelles du signal Gauss avec le filtre dérivateur modifié

avec pour ondelette la dérivée première d'une gaussienne. Avec la décomposition dyadique se pose le problème de l'étiquetage des maxima : comment savoir si deux maxima pris à deux échelles différentes correspondent à la même discontinuité? Pour une transformée continue la redondance d'information permet un suivi simple des maxima. Dans le cas dyadique, le problème est plus complexe. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la position des maxima correspondant à une même discontinuité peut se modifier d'une façon importante.

Afin d'associer à travers les échelles, les maxima qui correspondent aux mêmes discontinuités, nous proposons deux méthodes différentes qui seront appliquées en parallèle afin d'augmenter la robustesse du résultat.

Pour simplifier les équations, nous définissons M_j^l le $j^{\text{ème}}$ maximum présent à l'échelle l .

$$M_j^l = (x_j, w_{l,x_j}^1) \text{ tel que } (x_j, w_{l,x_j}^1) \in A_l.$$

Nous notons

$$\begin{cases} \text{pos}(M_j^l) = x_j, \\ \text{ampl}(M_j^l) = w_{l,x_j}^1, \\ \text{sign}(M_j^l) = \text{sign}(w_{l,x_j}^1), \end{cases}$$

et nous définissons les opérations père(M_j^l) et fils(M_j^l) qui permettent, respectivement, de symboliser les maxima père et fils de M_j^l .

2.3.2.1 Méthodologie commune

Nous utilisons une stratégie "coarse to fine" : l'algorithme de chaînage débute à l'échelle la plus grossière, et pour chacun des maxima, nous recherchons sur l'échelle inférieure le maximum fils qui correspond à la même discontinuité. Cette procédure est répétée sur les différentes échelles, permettant ainsi, de proche en proche, de construire les lignes de maxima.

Toutefois, le nombre de candidats, présents sur l'échelle inférieure, et pouvant être associés, peut être important. D'autant plus que le nombre de maxima diminue lorsque l'échelle augmente. Il faut donc définir un critère mesurant le degré de similarité entre deux maxima pour deux échelles successives. Nous noterons Θ cette mesure de correspondance entre deux maxima à deux échelles successives. Le maximum étiqueté comme "fils" est celui qui maximise la mesure Θ . Formellement,

$$\text{fils}(M_j^l) = \max_{j'=1..card(A_{l-1})} \Theta(M_j^l, M_{j'}^{l-1}),$$

avec $card(A_{l-1})$ cardinal de l'ensemble A_{l-1} .

Quelques restrictions sont à apporter sur la relation précédente. Tout d'abord, la recherche du meilleur fils ne va pas s'effectuer sur la totalité des maxima de l'échelle $l - 1$, car la modification de la position entre deux échelles successives est bornée. Un support temporel d'étude est donc défini, de taille proportionnelle à l'échelle étudiée, et positionné selon la coordonnée du père. Cet intervalle est noté $B_{M_j^l}$.

Ensuite, comme le suggère Mallat [69], deux maxima ne sont liés que s'ils présentent un signe identique (ils doivent correspondre à un sens de pente identique).

A partir de ces deux précisions, nous définissons un ensemble de maxima, appartenant à l'échelle inférieure, qui sont susceptibles d'être associés au maximum étudié. Cet ensemble est noté $\text{candidat}_{M_j^l}$:

$$\text{candidat}_{M_j^l} = \left\{ \begin{array}{l} M_{j'}^{l-1} \text{ pour } j' = 1..card(A_{l-1}) \text{ tel que} \\ \text{sign}(M_{j'}^{l-1}) = \text{sign}(M_j^l) \text{ et } \text{pos}(M_{j'}^{l-1}) \in B_{M_j^l} \end{array} \right\}.$$

Nous cherchons à construire à travers les échelles, les lignes de maxima qui correspondent aux mêmes discontinuités, donc, à un maximum, ne doit être associé au plus qu'un seul autre maximum. Il en résulte qu'à chaque fois qu'un maximum est retenu comme "fils", il est retiré de la liste des maxima susceptibles d'être élément d'une ligne. L'ordre d'étude des pères de l'échelle l va alors être prépondérant sur les lignes ainsi construites. C'est pourquoi, les maxima sont étudiés selon un ordre décroissant fixé par leur norme.

En résumé, l'algorithme de chaînage va se décliner de la façon suivante :

Pour l variant de $L - 2$,

Tri par ordre décroissant de A_l

Pour j variant de 1 à $card(A_l)$

$$\mathbf{fils}(M_j^l) = \max_{\left(\text{candidat}_{M_j^l} \right)} \Theta \left(M_j^l, M_{j'}^{l-1} \right)$$

Marquer $\mathbf{fils}(M_j^l)$ afin qu'il ne puisse plus être sélectionné

Nous allons maintenant étudier les deux mesures Θ que nous proposons.

2.3.2.2 Θ_1 : Choix par l'amplitude

Dans cette méthode, nous sélectionnons parmi les candidats, le maximum qui possède la norme la plus grande. La mesure Θ_1 est définie par

$$\Theta_1 \left(M_j^l, M_{j'}^{l-1} \right) = \left| \text{ampl}(M_{j'}^{l-1}) \right|.$$

Le succès de cette mesure nécessite tout d'abord une étude des maxima à l'échelle l selon un ordre décroissant fixé par leur norme. Ceci afin que les plus grands maxima de l'échelle l soient chaînés avec les plus grands de l'échelle inférieure. C'est ce que nous proposons dans la méthodologie commune.

Ensuite, il faut que le support $B_{M_j^l}$ soit correctement défini. Nous pouvons calculer la zone d'influence des filtres afin de déterminer $B_{M_j^l}$. La zone d'influence des filtres est le support temporel de l'opérateur permettant de "passer" de l'échelle $l - 1$ à l'échelle l . Cette zone est définie par le support temporel de $(g * h * q)$ (g , h et q étant les filtres définis pour l'analyse et la reconstruction du

gradient multiéchelles). Notons que Lu [64] utilise l'opérateur $(g * h * q)$ afin de chaîner les maxima. Toutefois, étant donné que la mesure de similarité ne prend pas en compte la position des différents fils, le support $B_{M_j^l}$ doit être affiné selon certaines contraintes. Pour cela, nous posons l'hypothèse suivante :

Proposition 3 *Soit $\text{fils}^T(M_j^l)$ le maximum de l'échelle $l-1$ correspondant à la même discontinuité que le maximum étudié M_j^l (nous notons fils^T avec T pour théorique car nous ne connaissons pas par avance ce maximum). Autour de chaque maximum, il existe une zone où $\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{l-1} * f)$ est de signe constant. Nous notons $\text{grad}_{M_{j_j}^s}$ cette zone correspondant au maximum $M_{j_j}^s$. Alors nous posons l'hypothèse que*

$$\text{pos}(M_j^l) \in \text{grad}_{\text{fils}^T(M_j^l)}.$$

Bien évidemment, cette hypothèse suppose l'utilisation de filtres qui ne provoquent pas de translation. Ensuite, étant donné qu'un changement de signe de la dérivée correspond à la modification du sens de la pente de la courbe, il semble raisonnable de supposer que la position d'un maximum de la fonction $\frac{\partial f * \phi_l}{\partial x}$ est incluse dans la zone de même signe entourant le maximum de la fonction $\frac{\partial f * \phi_{l-1}}{\partial x}$ correspondant au même point d'inflexion (la translation n'est due qu'à la forme de la courbe).

Puisque nous utilisons une représentation en maxima d'ondelettes, nous allons délimiter la zone $B_{M_j^l}$ selon les changements de signe des maxima à l'échelle $l-1$. Formellement $B_{M_j^l}$ est défini par

$$\begin{aligned} B_{M_j^l} &=]x_{deb}, x_{fin}[, \\ \text{avec } x_{deb} &= \max_{j''} \left(\text{pos}(M_{j''}^{l-1}) / \begin{cases} \text{sign}(M_{j''}^{l-1}) \neq \text{sign}(M_j^l) \\ \text{pos}(M_{j''}^{l-1}) < \text{pos}(M_j^l) \end{cases} \right), \\ \text{et } x_{fin} &= \min_{j''} \left(\text{pos}(M_{j''}^{l-1}) / \begin{cases} \text{sign}(M_{j''}^{l-1}) \neq \text{sign}(M_j^l) \\ \text{pos}(M_{j''}^{l-1}) > \text{pos}(M_j^l) \end{cases} \right). \end{aligned}$$

2.3.2.3 Θ_2 : Choix amplitude/position

Nous proposons dans cette méthode une mesure de similarité qui prenne en compte à la fois l'amplitude et la position du maximum candidat. Nous estimons que la translation entre deux échelles successives est minime. Nous définissons donc une fonction de pondération Δ_l qui désavantage les maxima qui sont les plus éloignés de la position du père. La fonction Δ_l est indiquée par une variable l car la définition de cette fonction dépend de l'échelle étudiée. En effet, la translation entre deux échelles successives va augmenter lorsque l'on tend vers les échelles grossières. Il faut donc que la pondération diminue lorsque l'indice d'échelle augmente.

La mesure de similarité va être définie par :

$$\Theta_2(M_j^l, M_{j'}^{l-1}) = |\text{ampl}(M_{j'}^{l-1})| * \Delta_l(\text{pos}(M_{j'}^{l-1}) - \text{pos}(M_j^l)).$$

La fonction Δ_l doit vérifier les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_l(x) \geq 0 \text{ pour } \forall x, \\ \Delta_l(\cdot) \text{ est paire et maximum pour } x = 0, \\ \Delta_l(\cdot) \text{ est décroissante sur } [0, +\infty[. \end{array} \right.$$

Une telle fonction permet de privilégier les maxima qui sont proches de la position du père.

Dans l'algorithme de décomposition discret, le passage de la fonction $f * \zeta_{2^{l-1}}$ vers $f * \zeta_{2^l}$ s'effectue à travers l'application d'un filtre passe-bas (associé à une fonction spline) [70]. Ainsi, deux maxima, à deux échelles successives, correspondent aux points d'inflexion de deux courbes, dont l'une est la version lissée par une spline de l'autre. Nous proposons alors que la fonction Δ_l soit une fonction gaussienne (spline d'ordre infini) centrée en 0, et avec une variance σ_l^2 qui augmente lorsque l'on tend vers les échelles grossières, puisque la fonction d'échelle est dilatée. Ceci permet aussi de prendre en compte la translation plus importante dans les échelles grossières. Concrètement, la variance σ_1^2 à la première échelle est définie en fonction du support des filtres, et ensuite elle croît d'un facteur multiplicatif égal à 2 (dilatation dyadique).

2.3.2.4 Confrontation des deux votes

Nous avons défini deux mesures de similarité qui, dans la grande majorité des cas (environ 90% des cas), sélectionnent le même fils, pour un maximum donné. Néanmoins, dans certains cas, les fils sélectionnés ne sont pas identiques. Dans ce cas, une méthode permettant de faire un choix entre les deux votes doit être appliquée. Cette confrontation va reposer sur les caractéristiques d'évolution des maxima dans le plan temps-échelle. Ces propriétés sont indiquées pour une décomposition discrète dans les mémoires de thèse de Lu [64] et de Zhong [101]. Comme nous l'illustrons sur la figure 2.6, les maxima vont se diffuser à travers les échelles selon une direction régulière. Il peut arriver que pour certaines discontinuités, cette propriété ne soit pas vérifiée lors de la décomposition discrète, mais globalement, elle modélise correctement la diffusion des maxima discrets.

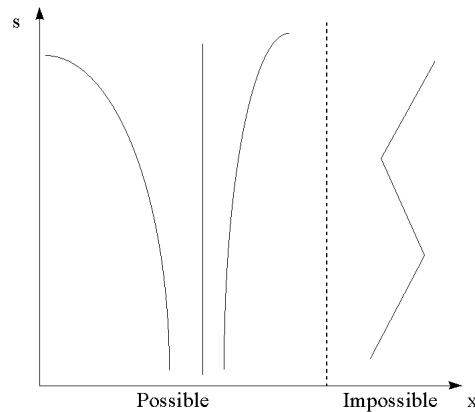


FIG. 2.6 – Evolution possible et impossible des maxima à travers les échelles

Ainsi lors de la confrontation des deux votes, le maximum retenu va être celui qui respecte le mieux la propriété de diffusion, c'est-à-dire qui forme avec le maximum père une ligne dont la direction est en accord avec l'évolution de la chaîne aux échelles plus grossières. Si nous notons $\widehat{M}_{j'}^{l-1}$ et $\widehat{M}_{j''}^{l-1}$ les deux fils sélectionnés par les mesures Θ_1 et Θ_2 pour un maximum M_j^l , alors le maximum chaîné avec M_j^l vérifie :

$$\text{fils}(M_j^l) = \begin{cases} \widehat{M}_d^{l-1} \text{ tel que } \text{sign}(D_{\text{père}}) = \text{sign}(D_d), & \text{si } \text{sign}(D_{j''}) \neq \text{sign}(D_{j'}) \\ \min_{d=j', j''} \left| \left| \frac{D_{\text{père}}}{\alpha_l} \right| - |D_d| \right|, & \text{sinon} \end{cases},$$

avec $D_d = \text{pos}(M_d^{l-1}) - \text{pos}(M_j^l)$ et $D_{\text{père}} = \text{pos}(M_j^l) - \text{pos}(\text{père}(M_j^l))$.

Nous illustrons sur la figure 2.7 les différentes possibilités ainsi que les fils sélectionnés selon la relation précédente. La première condition permet d'écarter un maximum qui provoque un changement de direction de la ligne de maxima (figure 2.7a). La seconde condition correspond au cas où les deux maxima sont placés du même côté par rapport au père. Nous sélectionnons alors celui qui s'inscrit le mieux dans la continuité de la ligne (figure 2.7b).

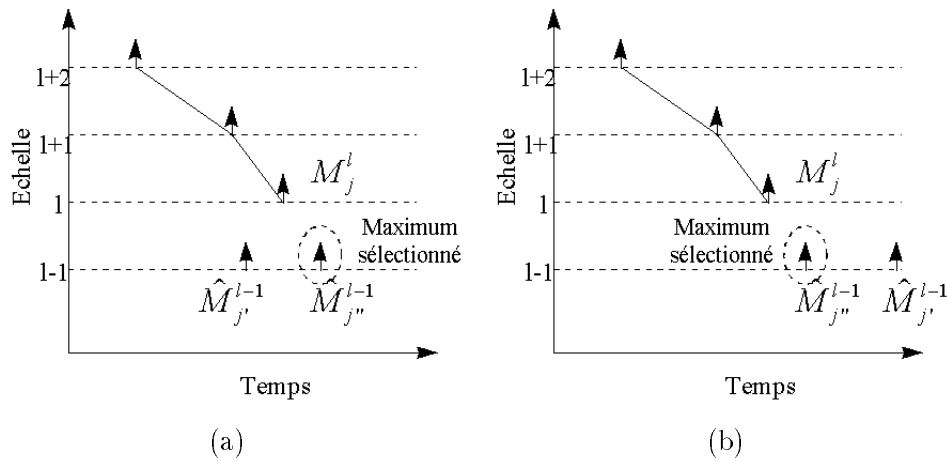


FIG. 2.7 – Confrontation des deux votes; deux cas de figure : (a) les deux fils sont placés de part et d'autre du père (b) les deux fils sont du même côté du père

Nous constatons qu'un facteur α_l est introduit dans la deuxième condition. Ce facteur permet de pondérer la distance mesurée entre le maximum M_j^l et son père, et ainsi de prendre en compte l'augmentation de la translation de la position des maxima lorsque l'on tend vers les échelles grossières. Il faut que ce facteur soit supérieur à 1. Nous prendrons ce facteur égal à la dilatation du filtre, c'est-à-dire égal à 2.

Nous avons proposé une méthodologie permettant de chaîner les maxima qui correspondent à la même discontinuité. Nous appliquons notre algorithme sur le signal de test *Mallat*. Les lignes construites par notre algorithme sont présentées sur la figure 2.8. A titre de comparaison, la figure 2.9 illustre les lignes de maxima extraits de la transformée en ondelettes continue (d'après [68]). On constate que les chaînes créées par notre algorithme approximent correctement celles calculées dans le cadre continu.

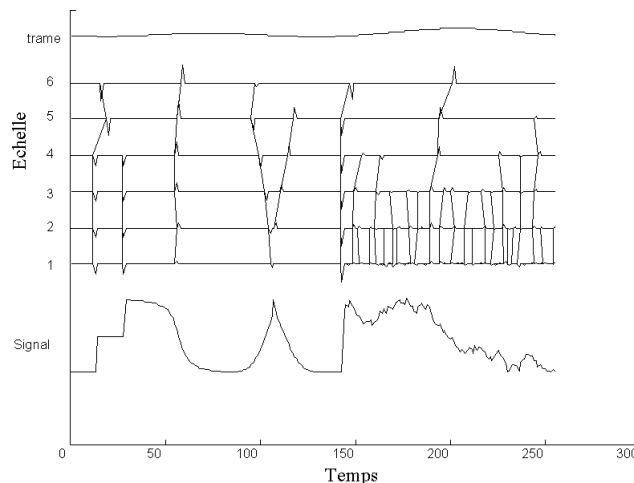


FIG. 2.8 – Lignes de maxima extraites de la décomposition discrète

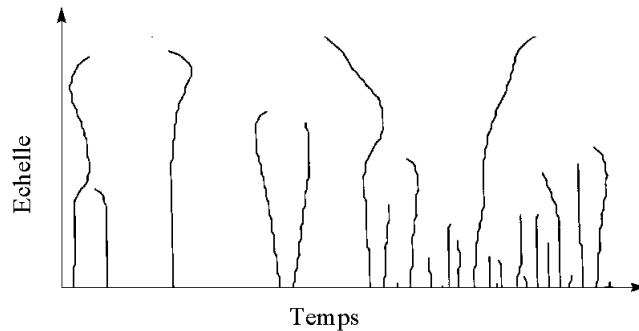


FIG. 2.9 – Lignes de maxima extraites de la décomposition en ondelettes continue (extrait du livre de S. Mallat [68])

Nous allons maintenant proposer une méthode, basée sur un seuillage des chaînes, nous permettant de sélectionner les lignes de maxima qui correspondent aux plus importantes discontinuités du signal.

2.3.2.5 Seuillage et post-traitement

Selon le principe de propagation, l'évolution de l'amplitude des maxima est régie par l'indice de régularité de Lipschitz. Aussi, seules les lignes correspondant à d'importantes discontinuités vont se propager aux échelles les plus grossières. C'est pourquoi, afin de segmenter le signal, nous ne conservons que les chaînes qui se propagent jusqu'à une échelle L (fixée par l'application). Les autres sont supprimées, ainsi que les maxima associés. Ensuite, afin d'extraire les coordonnées des points de partition, il suffit d'appliquer la relation déjà exposée $\lim_{l \rightarrow 0} \text{pos}(M_j^l) = x_j$, c'est-à-dire de collecter les coordonnées des maxima encore présents à l'échelle la plus fine.

Il arrive quelquefois que certaines chaînes ne se prolongent pas dans les échelles les plus fines. Ceci est en contradiction avec le principe de diffusion des maxima, à savoir que chaque maximum doit avoir un fils sur l'échelle inférieure qui correspond à la même discontinuité [68]. Nous considérons ce cas comme une erreur de l'algorithme de chaînage. Un post-traitement est donc appliqué afin de corriger ces erreurs.

En partant du principe que tout maximum présent à une échelle l_1 se prolonge dans les échelles l plus fines (tout l tel que $l < l_1$), nous considérons que, si une chaîne s'interrompt à l'échelle $l_2 + 1$ (avec $1 < l_2 < l_1$) c'est que le maximum, élément de l'échelle l_2 , qui devait être associé à la ligne interrompue a été par erreur rattaché à une autre chaîne.

Seules les chaînes correspondant à d'importantes discontinuités sont conservées après le seuillage. En général, ces lignes principales présentent peu d'erreur de chaînage (car les maxima associés ont une amplitude importante). Nous allons donc rechercher les fils potentiels permettant de prolonger les lignes interrompues parmi les maxima éliminés lors du seuillage. Nous appliquons alors la procédure de chaînage à partir de chaque maximum terminal qui n'est pas élément de l'échelle la plus fine, et nous prenons comme ensemble de maxima "candidats", ceux qui sont supprimés lors du seuillage.

Une fois le seuillage et le post-traitement effectués, les points de segmentation sont définis comme les coordonnées des maxima sur l'échelle la plus fine qui sont associés à des chaînes. Si nous appliquons ce seuillage et ce post-traitement sur le signal d'exemple *Mallat*, nous constatons, à partir de la figure 2.10, que toutes les discontinuités et singularités importantes sont détectées. Nous allons

donc utiliser cet algorithme pour la segmentation de signaux réels.

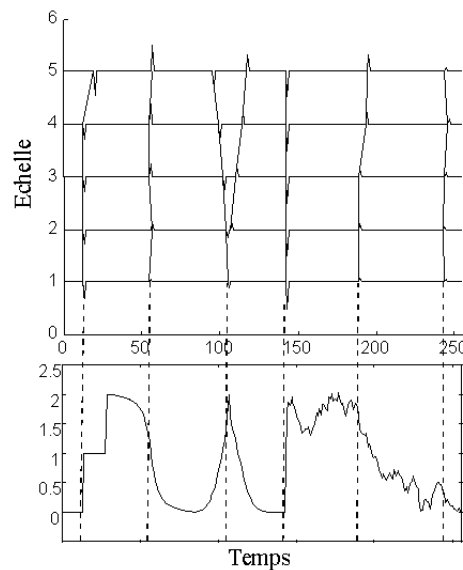


FIG. 2.10 – Lignes de maxima sélectionnées et points de coupure associés pour le signal Mallat

2.3.2.6 Remarque: l'algorithme de segmentation, une méthode pour débruiter

Comme nous l'avons dit lors de l'introduction, les méthodes basées sur les maxima d'ondelettes ont eu comme première application le débruitage. Il est donc naturel d'imaginer que notre algorithme de chaînage, conçu pour extraire les principales discontinuités, puisse être utilisé dans des problèmes de restauration de données. Nous ne présenterons qu'un seul exemple synthétique à titre d'illustration. Nous reprenons le signal construit par Mallat que nous avons présenté sur la figure 2.8. Nous construisons une version bruitée de ce signal en additionnant un bruit blanc gaussien (le rapport signal sur bruit est de 6) (figure 2.11a). Lorsque l'on calcule les maxima correspondant à cette version bruitée, un certain nombre de points d'inflexion "parasites" apparaît. L'algorithme de débruitage va donc consister à :

- chaîner les différents maxima (figure 2.11a),
- supprimer les maxima qui ne se propagent pas aux échelles supérieures (figure 2.11b),
- reconstruire à partir des maxima sélectionnés.

Nous pouvons voir sur la figure 2.11b que le signal est correctement débruité. Les principales erreurs de reconstruction se situent sur la fin du signal, où de nombreuses petites oscillations ont disparu. A chacune d'elles correspondait une ligne de maxima qui ne dépassait pas la troisième échelle, elles ont donc été supprimées. L'autre type d'erreur est dû à la modification par le bruit de l'amplitude et de la position des maxima sélectionnés. Mais globalement, nous pouvons conclure sur une certaine potentialité de cette méthode de débruitage. Une étude plus approfondie serait bien évidemment nécessaire pour valider l'algorithme.

Nous allons maintenant appliquer notre algorithme de segmentation sur des signaux réels : des signaux de radiocommunication et des enregistrements impliqués dans l'étude d'un électroencéphalogramme.

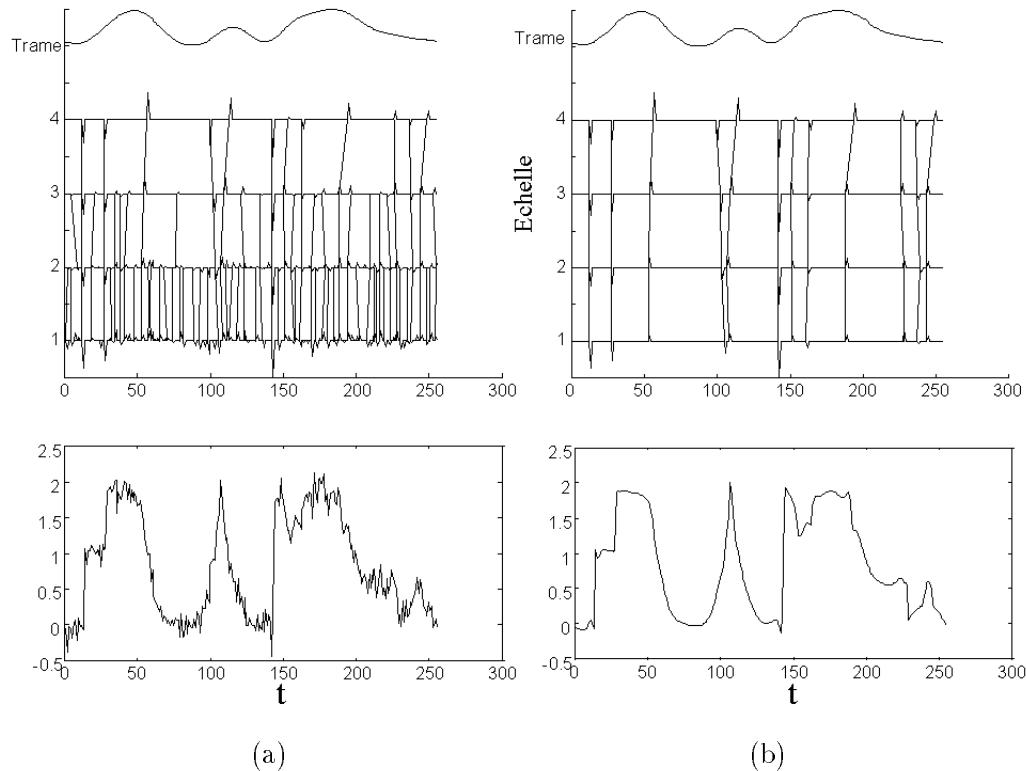


FIG. 2.11 – Débruitage du signal "Mallat": (a) Signal bruité et maxima chaînés correspondant (b) signal débruité et maxima chaînés correspondant

2.3.3 Applications

2.3.3.1 Signaux de radiocommunications

2.3.3.1.1 Présentation Cette étude est réalisée par la composante "Radiocommunications" du laboratoire Ircom-Sic, avec laquelle nous avons collaboré [82] [83].

Ces dernières années ont vu un développement rapide et considérable du marché et des systèmes de radiocommunication avec les mobiles. Le nombre d'utilisateurs sans cesse croissant a rendu urgent la nécessité d'assurer une couverture radioélectrique de très bonne qualité. Pour cela, il a fallu mettre au point des modèles capables de prédire avec précision la zone de couverture radioélectrique des différentes stations de base ou émetteurs placés en des points stratégiques [63] lors du déploiement d'un réseau (figure 2.12).

La zone de couverture radioélectrique d'un émetteur est définie comme la zone géographique où les signaux radioélectriques reçus de l'émetteur sont au-dessus d'un seuil lié à une qualité de communication acceptable.

Actuellement, la prédiction de chacune de ces zones est réalisée en appliquant sur le site géographique étudié un modèle de propagation des ondes électromagnétiques selon un pas constant, par exemple 2m en site urbain. Néanmoins, cette méthode conduit à un temps de calcul très important voire prohibitif dans certains contextes [62].

L'objectif du travail de la composante "Radiocommunication" est de contribuer à optimiser le temps de calcul nécessaire à la prédiction d'une zone de couverture par application d'un modèle de propagation en un nombre minimum de points.

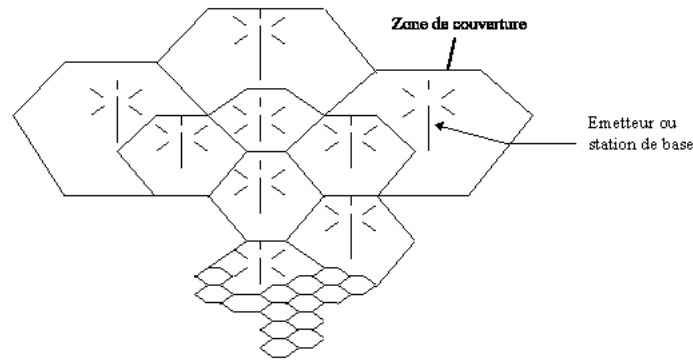


FIG. 2.12 – Réseaux cellulaires

A cet effet, on fait l'hypothèse que la zone géographique étudiée est une partition spatiale composée de différents éléments, où les variations des signaux reçus sont homogènes dans chacun deux. Ces variations sont dues à des combinaisons particulières de phénomènes électromagnétiques élémentaires tels que la diffraction, la réflexion et également la propagation en espace libre.

Il est donc considéré que, du fait des différentes combinaisons possibles de phénomènes, le signal présente des variations homogènes dans chaque élément de la partition spatiale [92] comme le montre la figure 2.13.

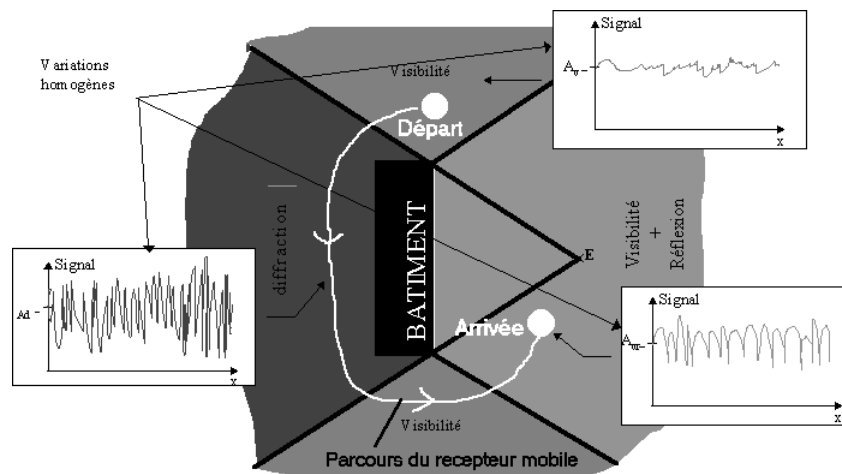


FIG. 2.13 – Partition spatiale et schématisation des signaux associés à chaque élément

L'objectif est de mettre en oeuvre un outil d'analyse spatiale permettant de découper l'environnement géographique en zones élémentaires. La partition obtenue doit se caractériser par des frontières d'éléments qui correspondent à des variations significatives du signal reçu sur ce parcours [81] comme le montre la figure 2.14.

D'un point de vue électromagnétique, cela revient à déterminer les combinaisons de phénomènes qui induisent les variations significatives du signal. La difficulté consiste à définir le degré de complexité des combinaisons de phénomènes à considérer, à savoir quel est le nombre maximum de diffraction et réflexion successives, subies par les ondes, qui a des répercussions sur le signal reçu. Considérer des combinaisons trop complexes, reviendrait à déterminer une partition constituée d'un grand nombre d'éléments non significatifs pour le signal reçu.

Après obtention de la partition optimale, la réduction en temps de calcul pour la prédiction

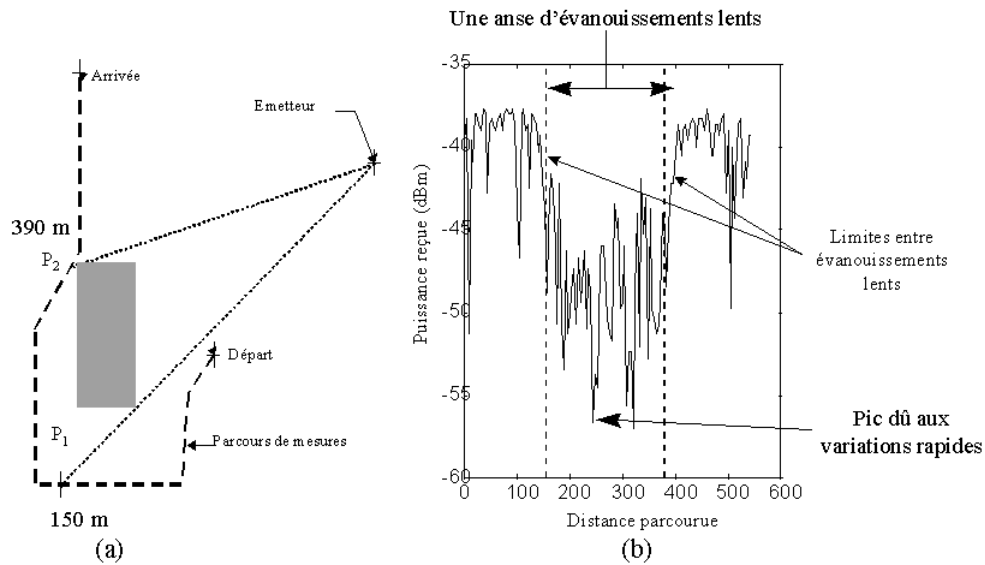


FIG. 2.14 – (a) Vue de dessus du site de mesure - (b) Signal reçu sur le parcours

de zone de couverture est donc réalisée, en appliquant un modèle de propagation sur seulement quelques points de chaque élément, et en extrapolant le résultat à l'élément tout entier.

L'outil d'analyse spatiale étant le coeur de l'optimisation, il est fondamental de calibrer correctement ses paramètres d'entrée que sont le nombre et la nature des phénomènes physiques susceptibles de fournir la partition optimale. Cette calibration dépend des configurations géographiques et nécessite donc une phase d'apprentissage liée à l'étude d'un grand nombre de signaux mesurés.

Il a été montré que les éléments de la partition sont en étroite corrélation avec les variations lentes des signaux obtenus sur des parcours de mesures sur le site étudié [93].

Ainsi, l'idée est de faire correspondre les éléments fournis par l'analyse spatiale à des variations lentes de signaux mesurés. En réalisant cette étude sur un grand nombre de signaux, on obtient le nombre et la nature des phénomènes physiques différents. La comparaison nécessite que l'on puisse détecter les variations lentes ou segments significatifs des signaux mesurés. Cette détection est réalisée grâce à l'algorithme de chaînage basé sur les maxima d'ondelettes présenté dans le paragraphe précédent

2.3.3.1.2 Résultat Nous rappelons que l'objectif de cette étude est d'optimiser le temps de calcul nécessaire à la prédiction d'une zone de couverture, par application d'un modèle de propagation selon un pas optimal. Pour cela, on fait l'hypothèse que l'environnement étudié est une partition composée de différents éléments où les variations des signaux reçus sont caractéristiques de l'élément. Cette hypothèse permet d'appliquer un modèle sur quelques points seulement dans chaque élément, et d'extrapoler le résultat à l'élément tout entier [81].

Soit un parcours de mesures effectué autour d'un bâtiment sur le site de la figure 2.15, l'émetteur E étant matérialisé par une croix. Cette figure représente la vue de dessus de l'environnement constitué de végétation et de bâtiments. Cette vue est obtenue par traitement des fichiers de l'Institut Géographique National (I.G.N.) caractérisant les variations du sol et du sursol. Le signal présenté en bas de la figure 2.16 représente le signal reçu obtenu sur le parcours de mesures. On constate que ce signal est la superposition de variations lentes et rapides caractérisant les différents mécanismes

de propagation des ondes. Les variations lentes induisent les différents éléments de la partition mentionnée précédemment. Concernant les variations rapides, elles ont une dynamique qui change selon l'intervalle considéré. Ainsi, il est essentiel d'identifier précisément chaque segment du signal pour remonter à la partition de l'environnement. Cette détection est réalisée grâce à notre algorithme de segmentation utilisant les maxima d'ondelettes.

Notre méthode est appliquée sur le signal issu de l'émetteur E. Nous constatons sur la figure 2.16, que seules deux discontinuités se propagent aux échelles les plus grossières. Celles-ci correspondent aux points de segmentation recherchés. Après chaînage, nous déduisons, sur l'échelle la plus fine, les abscisses de ces deux discontinuités. Elles sont respectivement égales à 65 m et 117 m. Si l'on compare ces deux abscisses, aux deux points P1 et P2 définissant les limites sur le parcours entre les zones en visibilité de l'émetteur et la zone d'ombre du bâtiment liée au phénomène de diffraction (figure 2.15), nous retrouvons les coordonnées réelles de ces deux points. Cet exemple illustre la potentialité de notre algorithme de segmentation, basé sur les maxima, pour la détection des différents phénomènes électromagnétiques subis par une onde à partir d'un signal mesuré. Ce principe est à la base de la prédiction optimisée d'une zone de couverture d'un émetteur.

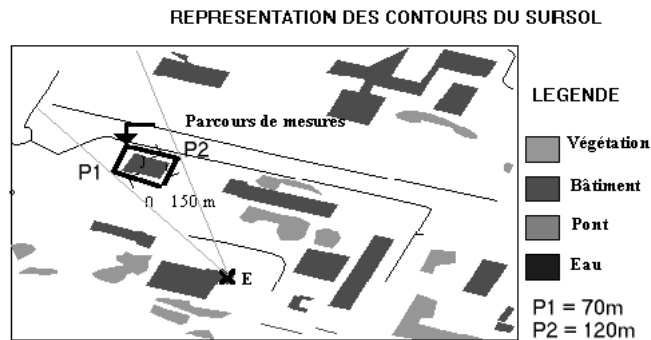


FIG. 2.15 – *Vue de dessus du site de mesures*

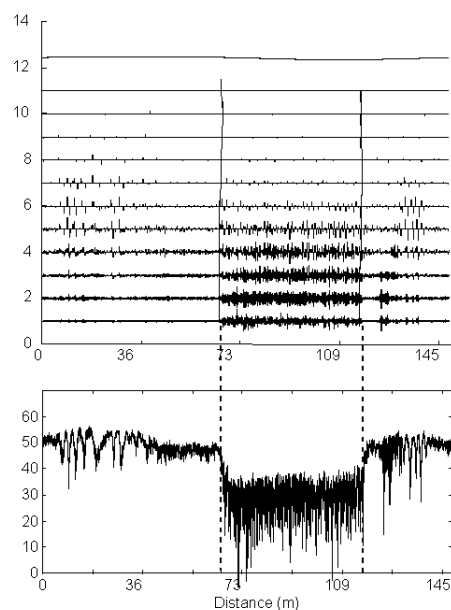


FIG. 2.16 – *Chaînage des maxima et identification des points de segmentation*

Nous présentons sur la figure 2.17, un autre exemple de segmentation à partir d'un signal plus complexe résultant d'un parcours dans une zone urbaine dense. Nous pouvons constater visuellement que les différents éléments, correspondant chacun d'eux à une combinaison particulière de réflexions et de diffractions, sont correctement extraits.

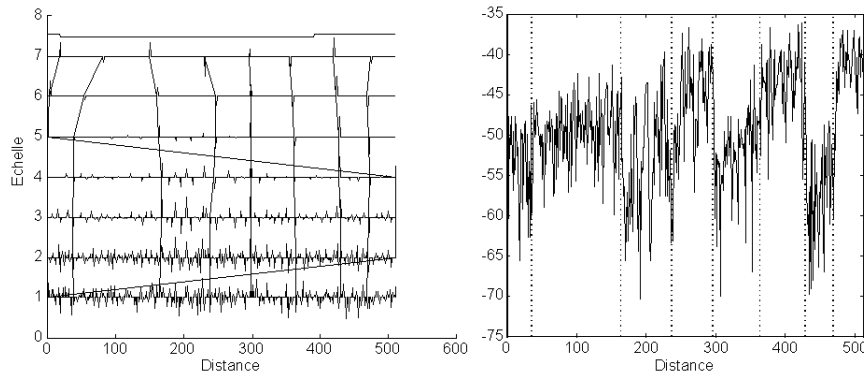


FIG. 2.17 – *Chaînage des maxima et identification des points de segmentation*

En répétant ce processus de segmentation sur un grand nombre de signaux et en cherchant à déterminer les phénomènes physiques liés à chaque élément, une partition de l'environnement est obtenue

2.3.3.2 Signaux électroencéphalogramme (EEG)

2.3.3.2.1 Présentation Une des méthodes modernes pour étudier l'activité d'une zone corticale du cerveau est d'analyser le signal électroencéphalogramme (EEG), qui indique pour certaines tâches précises, le comportement électrique des circuits neuronaux.

Les spécialistes séparent les bandes spectrales de l'EEG selon le découpage suivant : [6-8] Hz, [8-12] Hz et [12-14] Hz. Il a été montré que pour une tâche de cognition verbale, l'énergie du signal EEG est centrée sur la bande [8-12] Hz. En revanche, pour une tâche spatiale ou visuelle, la bande [6-8] Hz concentre plus d'énergie. Dans chaque cas, la diminution, au cours du temps, de l'énergie spectrale du signal EEG est corrélée avec une augmentation de l'activité corticale de la zone analysée. Cette diminution de l'énergie provient de la désynchronisation des circuits neuronaux corticaux. Ce phénomène s'appelle *Event Related Desynchronization* (ERD). L'étude de l'ERD trouve de nombreuses applications médicales notamment dans le suivi des patients souffrant de la maladie de Parkinson.

L'application des méthodes numériques temps-échelle et temps-fréquence sur des signaux EEG s'inscrit dans un projet visant à la compréhension des mécanismes neurofonctionnels impliqués dans la cognition. Ce projet réunit des équipes de recherche du CHU de Poitiers et le laboratoire Ircm-SIC.

Le protocole est basé sur une série de questions (telles que "quel est le poids d'une orange?", "Quelle est la longueur d'une bicyclette?" ...) auxquelles le patient doit répondre. Normalement, ce type de sollicitation intellectuelle est supposé activer le lobe pariétal, siège d'un traitement plurimodal des informations entrantes, puis le lobe frontal pour assurer le traitement cognitif d'évaluation, et enfin, en cas de verbalisation de la réponse, les régions motrices centrales.

Concrètement, les questions sont posées toutes les 30 secondes, la durée de chaque question ne

dépassant pas 4 secondes. L'enregistrement de l'EEG est effectué avec 25 électrodes. La fréquence d'acquisition est de 250 Hz ce qui est nettement supérieur au domaine fréquentiel que l'on désire analyser. Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur deux enregistrements : la voie 9 (appelée par les médecins F4) et la voie 17 (appelée P3). Les positions de ces électrodes sur la tête du patient sont indiquées sur la figure 2.18.

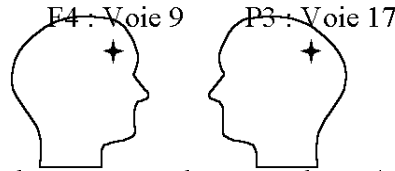


FIG. 2.18 – Position des électrodes correspondant aux deux signaux EEG étudiés (voie 9 et 17)

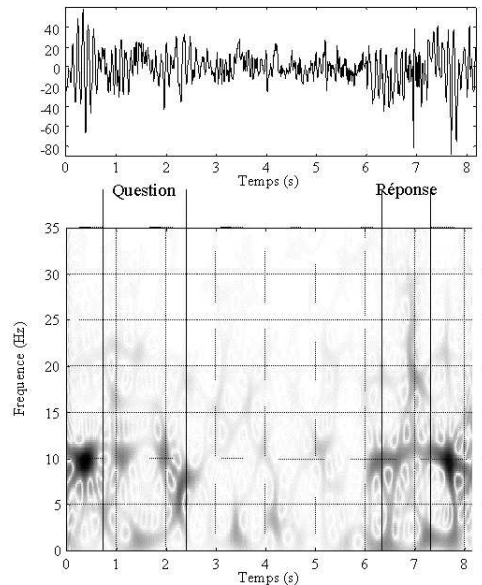


FIG. 2.19 – Signal EEG et sa représentation TF calculée à partir de la transformée pseudo-Wigner-Ville lissée

Nous présentons sur la figure 2.19 le signal EEG issu de la voie 17 durant une activité "question-réponse" (que nous appellerons zone QR). Afin d'indiquer globalement l'évolution au cours du temps de l'énergie du signal EEG dans les différentes bandes de fréquence, nous calculons une transformée Pseudo-Wigner-Ville lissée qui est définie par [44] :

$$SPW_f(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} g(s-t) f(s+\tau/2) f^*(s-\tau/2) ds \exp(-j2\pi\xi\tau) d\tau$$

avec g fonction de lissage temporel et h fonction de lissage fréquentiel.

Nous n'étudierons pas plus précisément dans ce mémoire la théorie de la transformée de Wigner-Ville mais nous nous référons au livre de P. Flandrin [44]. Simplement, la transformée de Wigner-Ville permet de calculer une distribution TF précise à partir d'un signal donné, mais ce n'est pas une représentation atomique. Le lissage selon le temps et la fréquence permet d'éliminer les termes d'interférence. Nous pouvons voir sur la figure 2.19 que l'énergie du signal EEG fluctue d'une façon importante autour des périodes de questions, réflexions, et réponses. A partir des algorithmes numériques que nous proposons dans ce mémoire, nous mettrons en évidence ces phénomènes de désynchronisation afin de pouvoir par la suite les classifier.

Mais comme nous le notons sur la figure 2.19, il existe deux paramètres à connaître précisément pour étudier d'une façon satisfaisante le signal EEG : les coordonnées de l'intervalle temporel correspondant à la question, et les coordonnées de l'intervalle temporel au cours duquel le sujet répond. Afin de les détecter, deux signaux sont enregistrés en parallèle avec l'EEG :

- un enregistrement audio des questions qui permet de repérer les instants de début et de fin des questions,
- un enregistrement des mouvements de lèvres du patient qui permet de repérer les instants de début et de fin de réponses.

Jusqu'à maintenant, la méthodologie appliquée pour détecter ces coordonnées caractéristiques consistait en une "étude visuelle" sur un écran d'ordinateur de ces deux signaux par le médecin et une mesure "manuelle". Nous proposons d'utiliser l'algorithme de segmentation basé sur les maxima d'ondelettes pour extraire **automatiquement** (et donc d'une façon robuste) les débuts et fins de zones QR.

2.3.3.2.2 Résultats Les signaux correspondant à l'enregistrement des lèvres du patient (nous appellerons ce signal MDLP) et à l'enregistrement audio de la question ont des comportements plus complexes que les signaux de radiocommunication : ils présentent d'importantes discontinuités dans les zones que l'on cherche à extraire. C'est pourquoi, nous avons dû ajouter un traitement supplémentaire à l'algorithme de chaînage des maxima afin d'extraire les points caractéristiques suivants :

- Début de la question (signal audio).
- Fin de la question (signal audio).
- Début de la réponse (signal MDLP).
- Fin de la réponse (signal MDLP).

Nous présentons en détail cette méthode sur le signal MDLP. L'algorithme appliqué sur le signal audio est quasiment identique et sera étudié brièvement.

2.3.3.2.2.1 Signal de mouvements des lèvres (signal MDLP) Nous présentons sur la figure 2.20a le signal MDLP lors de la verbalisation de 4 réponses. Nous remarquons tout d'abord la présence d'un offset évoluant au cours du temps. Ce phénomène peut être gênant lors du calcul du gradient multiéchelles. Afin de le supprimer, un filtrage passe-haut, avec une fréquence de coupure proche de 0, est appliqué. Le résultat est présenté sur la figure 2.20b.

Ensuite, nous appliquons l'algorithme de chaînage tel que nous l'avons défini :

- Calcul du gradient et extraction des maxima (figure 2.21a),
- Chaînage des maxima (figure 2.21b),
- Seuillage et post-traitement (figure 2.21c).

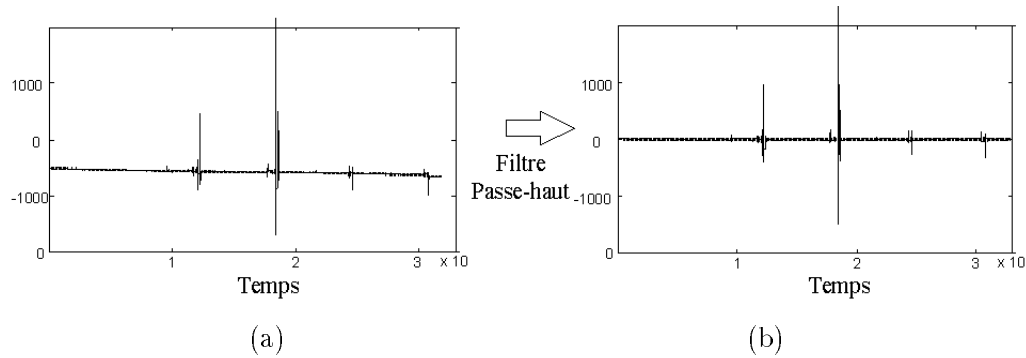


FIG. 2.20 – Enregistrement du mouvement des lèvres lors de la verbalisation de 4 réponses: (a) signal original (b) signal après un filtrage passe-haut ($fc=0.01$)

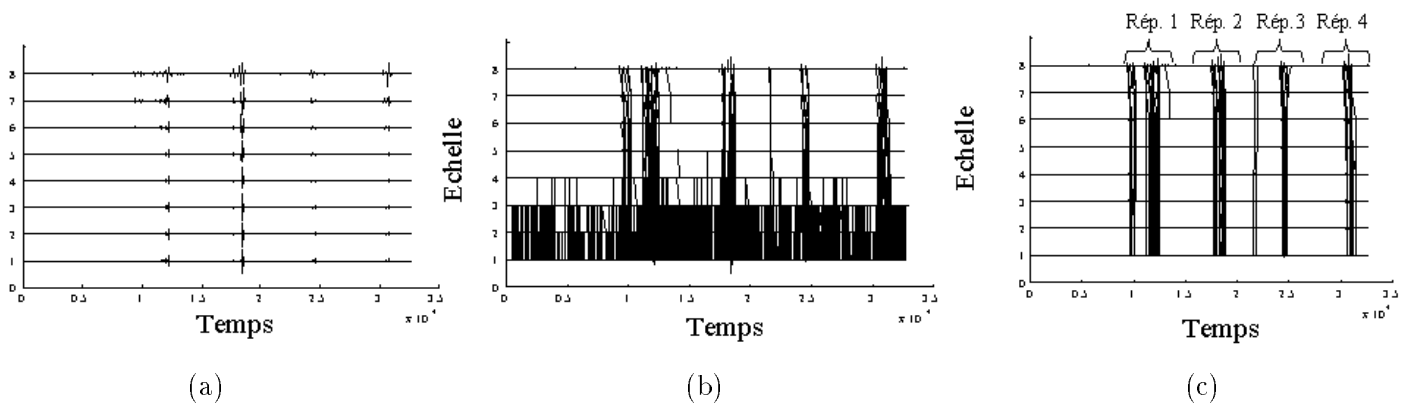


FIG. 2.21 – Application de l'algorithme de chaînage sur le signal de mouvements des lèvres lors de la verbalisation de 4 réponses (indiquées sur la troisième figure): (a) représentation en maxima (b) chaînage (c) seuillage et post-traitement

Après le post-traitement, nous constatons qu'il n'existe pas deux lignes de maxima correspondant au début et à la fin des réponses mais qu'une multitude de maxima sont conservés dans les zones de verbalisation des réponses. Il nous faut alors, à partir de cet ensemble de chaînes, extraire les points correspondant au début et à la fin de la réponse.

Pour cela, nous ne gardons que les maxima encore présents sur la première échelle, après seuillage et post-traitement (nous illustrons ceci sur la figure 2.22 pour la troisième réponse). Puis, nous sélectionnons le plus grand maximum de chaque verbalisation : il correspond à la zone centrale de la réponse (le mouvement des lèvres est le plus significatif lorsque le sujet parle). Enfin, nous prenons comme limite les deux maxima "extrêmes" à droite et à gauche de notre maximum "central" et qui sont de même signe (comme nous l'indiquons sur la figure 2.22). Ce sont ces deux maxima extrêmes qui vont nous indiquer les coordonnées du début et de la fin de la réponse. Les autres maxima situés en dehors de cette zone sont la conséquence du "frémissement" des lèvres présent lors de la formulation d'une réponse. Ils ne sont pas pris en compte dans la détection du début et de la fin de la réponse.

Nous présentons sur la figure 2.23 la segmentation ainsi calculée sur le signal MDLP pour 4 verbalisations.

Nous pouvons donc extraire, à partir de notre segmentation, les coordonnées temporelles des

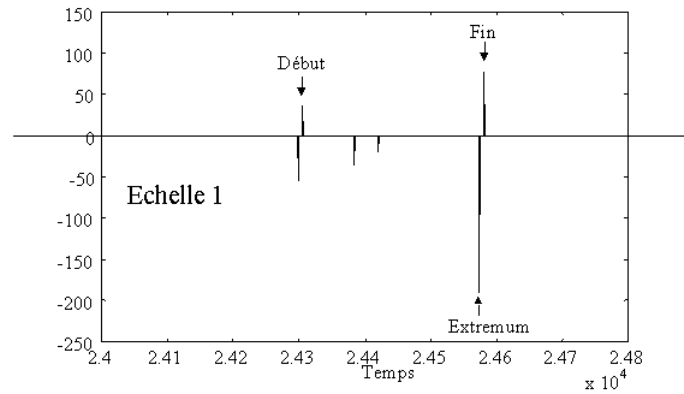


FIG. 2.22 – Extraction des points de début et de fin de réponse à partir de la première échelle de maxima (illustration sur la troisième réponse).

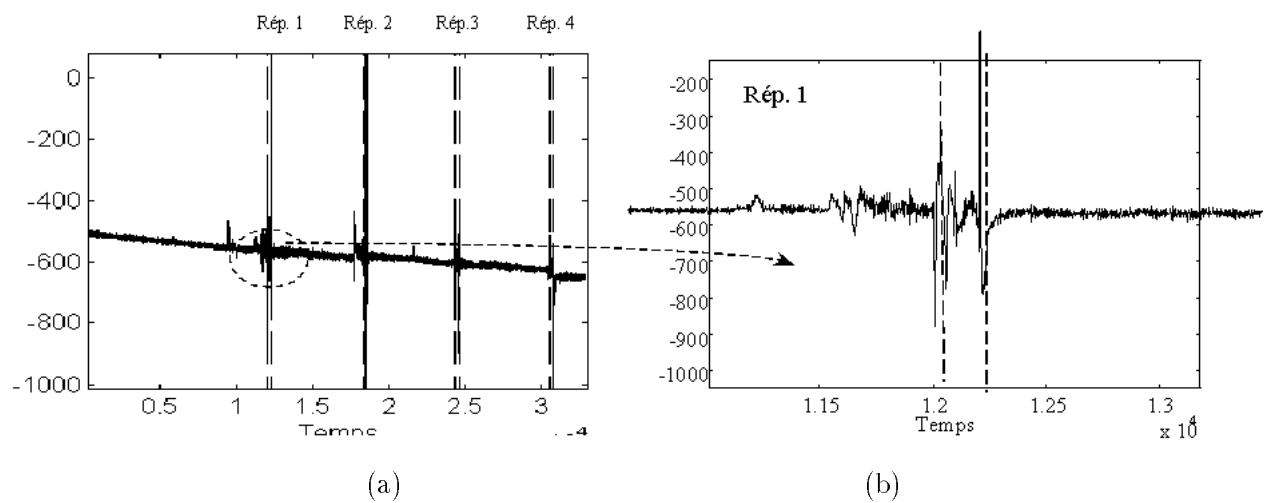


FIG. 2.23 – Segmentation du signal de mouvement des lèvres : (a) Signal contenant 4 verbalisations (b) zoom sur la première zone de réponse

débuts et fins de réponse. A titre de comparaison, nous avons indiqué dans le tableau 2.1 les coordonnées calculées automatiquement, ainsi que celles mesurées par le médecin sur les 4 premières réponses. Nous constatons que notre méthode automatique fournit des résultats sensiblement identiques à ceux du médecin. L'écart le plus important dans la localisation se situe sur la quatrième réponse avec une différence supérieure à 2 secondes. Mais après vérification visuelle sur le signal MDLP, il s'est avéré que la mesure faite par le médecin était erronée. Ce qui met bien en évidence l'importance d'une méthode automatique.

2.3.3.2.2 Signal audio Ces signaux correspondent à l'enregistrement audio de la question. Ils présentent des caractéristiques similaires aux signaux MDLP. L'extraction des coordonnées de début et fin de questions suit une méthodologie identique à la précédente :

- Calcul du gradient et extraction des maxima (figure 2.24a),
- Chaînage des maxima (figure 2.24b),
- Seuillage et post-traitement (figure 2.24c).

Médecin (s)	48.6880	49.3480	73.5480	74.5280	97.9680	98.8800	124.1280	124.6
Automatique (s)	48.1360	48.8240	73.1920	73.6720	97.2160	98.3200	121.8320	122.94

TAB. 2.1 – *Coordonnées temporelles (en secondes) des débuts et fins de réponses pour 4 verbalisations : mesures effectuées par le médecin et par notre algorithme*

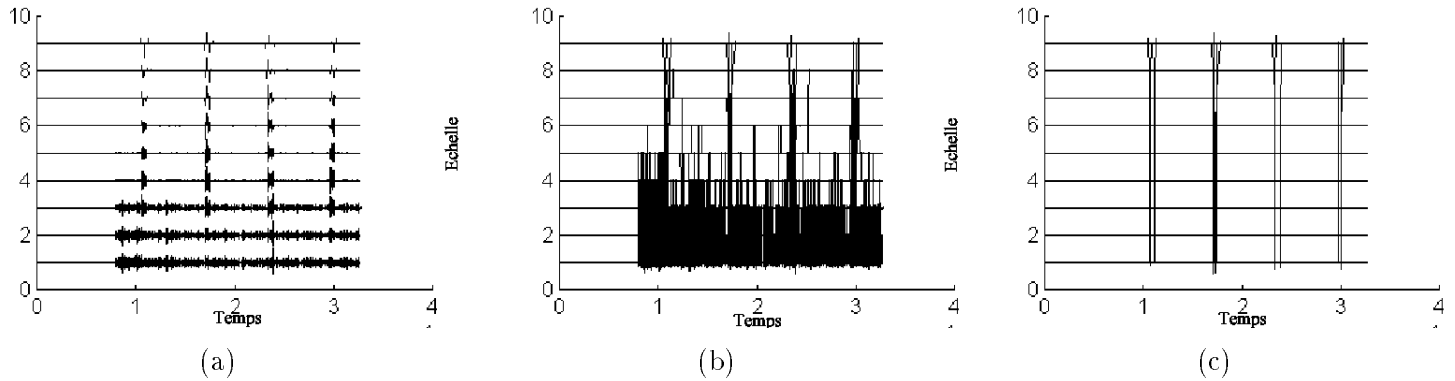


FIG. 2.24 – *Application de l'algorithme de chaînage sur le signal audio associé à 4 questions : (a) représentation en maxima (b) chaînage (c) seuillage et post-traitement*

Comme pour le signal MDLP, un ensemble de lignes de maxima apparaît après post-traitement dans les zones de questions. Il faut extraire les lignes correspondant aux débuts et fins de questions. Pour cela, nous ne considérons plus que les maxima encore présents sur la première échelle (comme nous l'illustrons sur la figure 2.25a pour la troisième question). A la différence du signal MDLP, le signal audio ne présente pas de maxima "parasites" dans les zones de questions après post-traitement, car le signal n'a pas d'importantes discontinuités dans ces zones. Les discontinuités parasites ne sont que la conséquence du bruit, et donc éliminées lors de la procédure de chaînage-seuillage. Les débuts et fins de questions vont être alors les deux maxima qui entourent le maximum ayant l'amplitude la plus importante dans une zone de réponse (comme nous l'illustrons sur la figure 2.25a pour la troisième question). Nous indiquons sur la figure 2.25b la segmentation sélectionnée à partir de cette méthode sur le signal audio correspondant à 4 questions. Nous pouvons alors extraire, à partir de notre segmentation, les coordonnées temporelles des débuts et fins de questions. A titre de comparaison, nous avons indiqué dans le tableau 2.2 les coordonnées calculées automatiquement, ainsi que celles mesurées par le médecin sur les 4 premières questions. Nous constatons que les deux méthodes fournissent des résultats sensiblement identiques. L'écart le plus important est environ d'une seconde.

Médecin (s)	42.4600	44.3080	68.0000	69.6680	93.0880	95.4200	118.4800	120.300
Automatique (s)	42.6600	43.0240	68.3880	69.6840	93.2520	95.4280	119.2120	120.256

TAB. 2.2 – *Coordonnées temporelles (en secondes) des débuts et fins de questions pour 4 formulations : mesures effectuées par le médecin et par notre algorithme.*

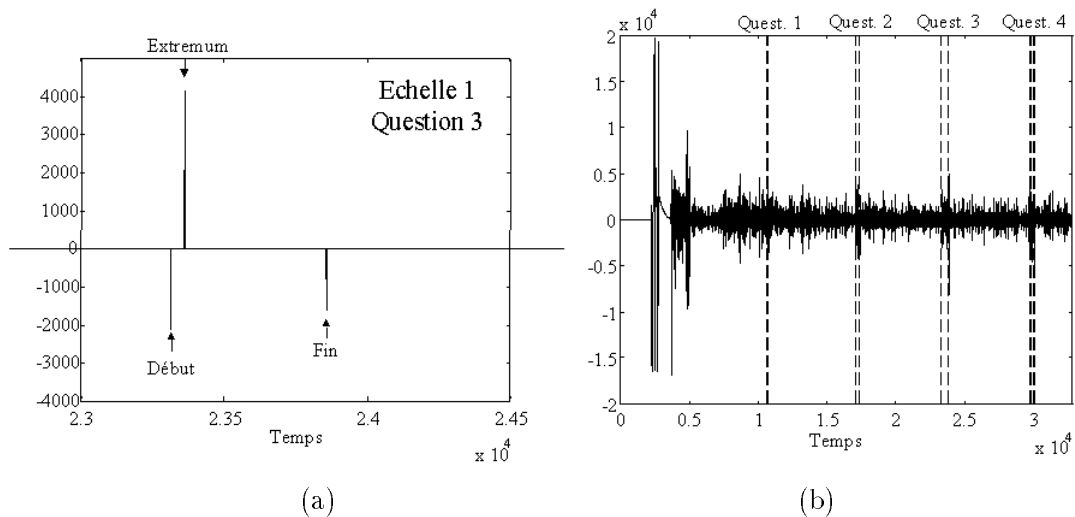


FIG. 2.25 – Segmentation du signal audio correspondant à 4 questions : (a) Maxima sur la première échelle (b) signal segmenté

2.3.3.3 Quelques commentaires

Ces deux exemples (signaux de radiocommunication et signaux annexes à l'EEG) ont permis de valider notre algorithme de segmentation basé sur les maxima d'ondelettes. Nous avons vu qu'il permet d'extraire les coordonnées des principales discontinuités et donc d'isoler les ruptures du signal. En revanche, nous avons vu qu'il faut quelquefois introduire certaines données empiriques (par exemple la méthode de sélection proposée dans le cadre des signaux MDLP).

Sachant que la segmentation proposée s'appuie sur les coefficients d'ondelettes de l'échelle la plus grossière, les variations du signal ainsi détectées correspondent toujours à des changements de comportement dans les basses fréquences (ou présent à toutes les fréquences). Si l'on veut diviser le signal selon ses variations dans tout le domaine fréquentiel, il faut utiliser une autre méthode, comme celle basée sur les ondelettes de Malvar que nous proposons dans le chapitre 3.

Nous allons maintenant étudier la potentialité des maxima d'ondelettes en dimension 2. La caractéristique "contour" est un paramètre important dans le domaine du traitement d'images, et son extension aux multiéchelles, dans le cadre des ondelettes, ouvre de nouvelles perspectives. En réutilisant le principe d'étude de la propagation des maxima d'ondelettes à travers les échelles, nous allons introduire un nouvel algorithme de débruitage pour les images.

2.4 Débruitage d'images par maxima d'ondelettes

La proposition par Mallat [70] d'une décomposition en bords multiéchelles à partir de la théorie des ondelettes permet la réunion de deux problématiques du traitement d'images :

- l'analyse et la segmentation d'images avec une approche contour,
- la restauration d'images.

En effet, les maxima d'ondelettes constituent une représentation en bords multiéchelles, que l'on peut donc traiter avec les techniques "classiques" d'étude de contour, mais qui a la propriété d'être

inversible "empiriquement", permettant ainsi la conception d'outils de débruitage. Depuis l'article de Mallat, quelques algorithmes de débruitage ou d'analyse d'images sont apparus dans la littérature, basés sur la représentation en maxima [69], [66], [11]. Toutefois ces méthodes ont un point commun : elles privilégient l'information "norme du gradient" à l'information "angle du gradient". Or Gregson a montré que, dans le cadre du gradient monoéchelle, l'angle peut être aussi un paramètre pertinent [48]. Nous nous proposons dans cette section d'étendre les propriétés de l'angle du gradient au cas multiéchelles, et de montrer que l'utilisation du paramètre angle associé à une décomposition en maxima d'ondelettes permet de définir un algorithme de débruitage.

Après un rappel dans le cadre monoéchelle des propriétés de l'angle du gradient, nous poserons deux postulats permettant d'utiliser l'angle comme paramètre discriminatoire entre l'information et le bruit. Ensuite nous étendrons toutes les propriétés de l'angle au cas multiéchelles. Pour cela, nous définirons un nouveau mode de calcul de la décomposition en gradient multiéchelles. Enfin, nous définirons et étudierons différentes versions de notre algorithme de débruitage, illustrées par des images de test issues de la base du *GDR CNRS ISIS*. Finalement, une application de notre méthode sur des images d'angiographie sera présentée.

2.4.1 Dérivée première discrétisée

Dans cette partie, nous étudions le comportement d'un gradient monoéchelle, tel qu'il est utilisé depuis de nombreuses années dans le traitement d'images, appliqué sur une image dégradée par un bruit blanc additif.

Le gradient calcule la dérivée première d'une fonction $f(x, y)$ et se définit par :

$$\nabla f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) (x, y). \quad (2.11)$$

Lors d'une implémentation numérique $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'approxime par simple différence,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \approx \frac{f[x + h_1, y] - f[x - h_2, y]}{|h_1| + |h_2|}, \quad (2.12)$$

avec $h_1 = h$ et $h_2 = 0$, ou par symétrie autour du point étudié avec $h_1 = h_2 = h$ [25].

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ se calcule de la même façon.

La littérature propose des opérateurs plus complexes (comme le masque *Sobel* [25]) qui approximent le gradient par un ensemble de différences, précédé d'un pré-traitement, qui peut être par exemple une moyenne. Nous n'étudions par la suite que le cas du gradient approximé par différence, tel qu'il est défini dans l'équation (2.12), car lui seul s'étend aux décompositions multiéchelles.

Les algorithmes présentés dans la suite de ce rapport s'appliquent sur des images dégradées par un bruit additif, non-corrélé et suivant une distribution gaussienne, telles que :

$$f(x, y) = s(x, y) + \sigma b(x, y), \quad (2.13)$$

avec $f(x, y)$ mesures bruitées, $b(x, y)$ réalisation d'un bruit blanc gaussien au point (x, y) et $s(x, y)$ l'information que l'on cherche à estimer.

Après dérivation, l'équation (2.13) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0)$$

La dérivée en fonction de y suit le même modèle.

Soit le vecteur aléatoire Z_{∇} défini comme l'approximation numérique du gradient des mesures bruitées. Puisque $b(x, y)$ suit une distribution conjointement gaussienne, alors, à partir de l'équation (2.12), Z_{∇} suit lui-aussi une loi de densité qui est une distribution conjointement gaussienne. Nous pouvons en calculer les différents paramètres. Nous notons ∇_X et ∇_Y les deux variables aléatoires correspondant à la dérivée approximée discrète de $f(x, y)$ selon respectivement x et y . Afin d'alléger les équations nous posons dans l'équation (2.12) la contrainte que $|h_1| + |h_2| = 1$.

Nous indiquons en annexe le calcul des différents paramètres de la distribution gaussienne, à savoir $E(\nabla_x)$, $E(\nabla_y)$, $E(\nabla_x^2)$, $E(\nabla_y^2)$ et $E(\nabla_x \nabla_y)$. A partir de ces calculs, on déduit que Z_{∇} suit une loi de densité telle que :

$$Z_{\nabla} \xrightarrow{i.i.d.} N \left(\begin{pmatrix} m_{\nabla_x} \\ m_{\nabla_y} \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & \delta_{[h_1=0]} + \delta_{[h_2=0]} \\ \delta_{[h_1=0]} + \delta_{[h_2=0]} & 2 \end{bmatrix} \right). \quad (2.14)$$

avec $m_{\nabla_x} = s[x + h_1, y] - s[x - h_2, y]$ et $m_{\nabla_y} = s[x, y + h_1] - s[x, y - h_2]$ l'information déterministe recherchée.

On constate que l'application d'un filtre défini par $h_1 = h$ et $h_2 = 0$ introduit de la corrélation entre les deux dérivées partielles ($1_{[h_1=0]} + 1_{[h_2=0]} \neq 0$). Pour cette raison, lors du calcul du gradient, nous utiliserons le filtre antisymétrique défini par $h_1 = h_2 = h$, qui permet d'obtenir une matrice de corrélation diagonale.

En effectuant un changement de base dans le repère polaire, nous définissons l'angle et la norme du gradient par :

$$\rho = \|\nabla f\| = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2} \quad (2.15)$$

et,

$$\theta = \arg(\nabla f) = \arctan \left(\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x} \right) \quad (2.16)$$

Selon le critère de Canny [10], un bord dans une image présente une valeur de ρ maximale dans la direction θ . La majorité des méthodes qui utilisent le gradient comme opérateur de détection des bords, s'appuie sur l'information norme. Toutefois cette valeur est très sensible au bruit et entraîne l'apparition de points parasites ou la suppression de petits contours peu épais. Cette sensibilité est explicite si l'on calcule la variance de la norme du gradient (en présence d'un bruit tel qu'il est défini par l'équation (2.13)) :

$$\begin{aligned} E(\rho^2) &= E\left((\partial b / \partial x)^2 + (\partial b / \partial y)^2\right) \\ &= 4\sigma^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

La variance de la norme du gradient est proportionnelle à la variance du bruit d'un facteur supérieur à 1. En général, lors de l'extraction des bords, la norme est comparée à un seuil marquant la frontière entre les variations "déterministes" de la fonction $s(x, y)$ et celles du bruit. Etant donné

la relation (2.17), il est évident que plus la variance du bruit est importante, plus le nombre d'erreurs de classification est grand. C'est pourquoi les masques utilisés dans l'étude des bords, effectuent, en général, une moyenne avant de calculer le gradient (le masque Sobel par exemple).

En résumé, que ce soit en approche monoéchelle ou multiéchelles, l'information prépondérante pour la majorité des techniques de sélection de contours est la norme. Pourtant, il nous semble que l'angle du gradient peut lui aussi discriminer le bruit, avec une robustesse supérieure et une utilisation plus aisée lors de la généralisation à des séquences d'images ou à des décompositions multiéchelles.

L'algorithme, que nous proposons dans la suite de ce chapitre, étudie l'évolution de l'angle du vecteur aléatoire Z_{∇} au cours de ces différentes réalisations, et discrimine l'information selon l'un ou l'autre des deux postulats suivants :

1. Les angles des variations dues au bruit sont instables.
2. Les angles des variations du signal détériorés par le bruit sont stables.

Soit θ^i l'angle de la $i^{\text{ème}}$ réalisation, alors nous considérons qu'un angle θ est stable sur ses différentes réalisations en un point $[x_0, y_0]$ si $|\theta^i[x_0, y_0] - \theta^j[x_0, y_0]| < \varepsilon$, $\varepsilon \in]0, \pi[$, pour $\forall i, j \in [1..M]$, avec M nombres de réalisations. ε est choisi suffisamment petit pour supprimer le bruit et suffisamment grand pour prendre en compte l'altération du signal.

Dans la suite de cette section, nous nous proposons d'étudier le comportement de l'angle du gradient en présence de bruit, ceci afin de discuter les deux postulats précédents.

2.4.2 Pertinence des postulats

Afin d'étudier la dispersion de l'angle du gradient monoéchelle, nous rappelons l'expression de la densité de probabilité du vecteur aléatoire Z_{∇} dans le repère polaire. Nous ne présenterons que brièvement les calculs à titre indicatif. Une méthode de calcul de la densité de probabilité du vecteur aléatoire Z_{∇} sensiblement identique est présentée dans l'article de Gregson [48].

2.4.2.1 Calcul de la loi de dispersion de l'angle du gradient monoéchelle

A partir de l'équation (2.14), nous savons que la densité conjointe de $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ suit une loi conjointement gaussienne :

$$\tilde{f}_{\nabla_x, \nabla_y}(\nabla_x, \nabla_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\nabla}^2} e^{-\frac{(\nabla_x - m_{\nabla_x})^2 + (\nabla_y - m_{\nabla_y})^2}{2\sigma_{\nabla}^2}}$$

avec $\sigma_{\nabla}^2 = E((\partial f/\partial x)^2) = E((\partial f/\partial y)^2) = 2\sigma^2$

En effectuant le changement de variable $\nabla_x = \rho \cos(\theta)$ et $\nabla_y = \rho \sin(\theta)$,

$$\tilde{f}_{\Theta, R}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi\sigma_{\nabla}^2} e^{-\frac{(\rho \cos(\theta) - m_{\nabla_x})^2 + (\rho \sin(\theta) - m_{\nabla_y})^2}{2\sigma_{\nabla}^2}}$$

Afin d'obtenir la fonction de densité de θ , il faut intégrer la fonction précédente par rapport à ρ

$$\tilde{f}_\Theta(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{2\pi\sigma_\nabla^2} e^{-\frac{(\rho \cos(\theta) - m_{\nabla_x})^2 + (\rho \sin(\theta) - m_{\nabla_y})^2}{2\sigma_\nabla^2}} d\rho$$

On peut remarquer que les constantes m_{∇_x} et m_{∇_y} peuvent elles aussi s'exprimer dans le repère polaire, nous notons

$$m_\theta = \arctan\left(\frac{m_{\nabla_y}}{m_{\nabla_x}}\right)$$

et,

$$m_\rho = \sqrt{m_{\nabla_x}^2 + m_{\nabla_y}^2}$$

Après substitution et arrangements, la densité $\tilde{f}_\Theta(\theta)$ s'écrit :

$$\tilde{f}_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\nabla^2} e^{-\frac{m_\rho^2 \sin^2(\theta - m_\theta)}{2\sigma_\nabla^2}} \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{(\rho - m_\rho \cos(\theta - m_\theta))^2}{2\sigma_\nabla^2}} d\rho$$

Nous effectuons le changement de variable suivant $\rho' = \frac{\rho - m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\Theta(\theta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_\nabla^2} e^{-\frac{m_\rho^2 \sin^2(\theta - m_\theta)}{2\sigma_\nabla^2}} \left[m_\rho \cos(\theta - m_\theta) \int_{-\frac{m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}}^{+\infty} e^{-\frac{\rho'^2}{2}} \sigma_\nabla d\rho' \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}}^{+\infty} \sigma_\nabla \rho' e^{-\frac{\rho'^2}{2}} \sigma_\nabla d\rho' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{m_\rho^2 \sin^2(\theta - m_\theta)}{2\sigma_\nabla^2}} \left[\left| -e^{-\frac{\rho'^2}{2}} \right|_{-\frac{m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}}^{+\infty} + \frac{m_\rho}{\sigma_\nabla} \cos(\theta - m_\theta) \int_{-\frac{m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}}^{+\infty} e^{-\frac{\rho'^2}{2}} d\rho' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\nabla} e^{-\frac{m_\rho^2}{2\sigma_\nabla^2}} + \frac{m_\rho}{\sigma_\nabla} \cos(\theta - m_\theta) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{m_\rho^2 \sin^2(\theta - m_\theta)}{2\sigma_\nabla^2}} \int_{-\frac{m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}}^{+\infty} e^{-\frac{\rho'^2}{2}} d\rho' \end{aligned}$$

Nous notons $\Phi(x)$, la fonction ERF définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

La fonction de densité $\tilde{f}_\Theta(\theta)$ s'écrit finalement [48]

$$\tilde{f}_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\nabla} e^{-\frac{m_\rho^2}{2\sigma_\nabla^2}} + \frac{m_\rho}{\sigma_\nabla} \cos(\theta - m_\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_\rho^2 \sin^2(\theta - m_\theta)}{2\sigma_\nabla^2}} \Phi\left(\frac{m_\rho \cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}\right) \quad (2.18)$$

2.4.2.2 Illustrations des postulats

A partir de l'équation (2.18), Gregson propose des méthodes de détection de contours, qui, selon ses illustrations, sont plus performantes que les techniques classiques basées sur la norme. Nous allons montrer à partir de simulations, la pertinence des deux postulats formulés précédemment afin de prouver que l'angle peut être utilisé pour déterminer si un maximum est dû, ou non, à du bruit.

Soit E_i l'évènement $\left\{ \bigcap_{j=1}^i [|\theta^j[x_0, y_0] - \theta^j[x_0, y_0]| < \varepsilon] \right\}$, la probabilité P_S de classer la variation au point $[x_0, y_0]$ comme angle stable sur N réalisations est égale à :

$$P_S = P(E_1 \cap E_2 \dots \cap E_N)$$

Il est difficile d'exprimer sous forme analytique la probabilité P_S à partir de l'équation (2.18). Nous estimons la fonction de répartition de l'évènement $(E_1 \cap E_2 \dots \cap E_N)$ par une méthode numérique avec le mode opératoire suivant : nous simulons un grand nombre de tirages indépendants de la variable aléatoire Θ , puis nous posons, pour N et ε fixés :

$$\gamma_{N,\varepsilon}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } (E_1 \cap E_2 \dots \cap E_N) \text{ vrai} \\ 0 & \text{si } (E_1 \cap E_2 \dots \cap E_N) \text{ faux} \end{cases}$$

De la loi forte des grands nombres il résulte que $\sum_{i=1}^m \gamma_{N,\varepsilon}^i / m$ vaudra approximativement $P(E_1 \dots \cap E_N)$ pour autant que m soit grand.

La figure 2.26 illustre le comportement de la probabilité de stabilité d'angle pour $\varepsilon = \pi/2$. Nous voyons que plus le rapport m_ρ / σ_∇ est grand plus la probabilité d'avoir un angle stable est grande et proche de 1. Mais à l'inverse cette probabilité décroît lorsque le nombre N d'acquisitions augmente.

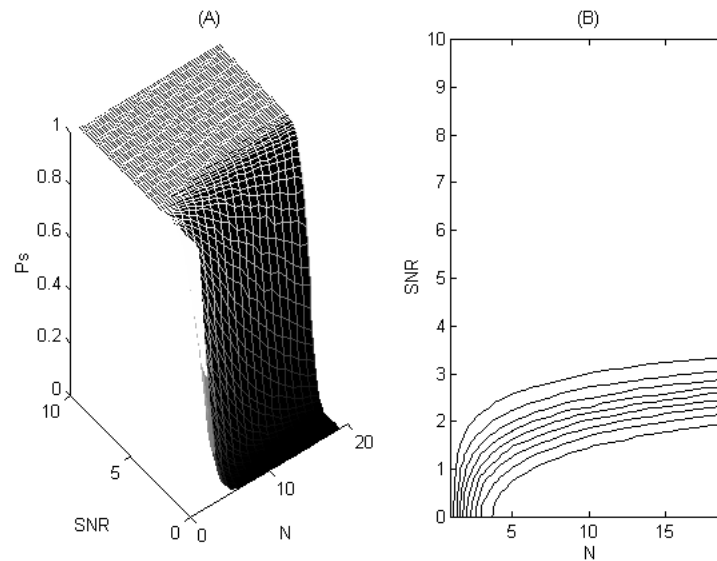


FIG. 2.26 – Evolution de la probabilité de stabilité d'angle en fonction du nombre N de réalisations et du rapport SNR défini par m_ρ / σ_∇ : (a) Etude en 3D (b) Projections des courbes de niveau

Proposition 4 *Les angles des variations dues au bruit sont instables.*

On voit apparaître dans l'expression de $\tilde{f}_\Theta(\theta)$, le rapport m_ρ / σ_∇ , qui mesure l'importance de la variation déterministe m_ρ au point considéré, par rapport à σ_∇ qui symbolise le niveau des fluctuations dues au bruit. On vérifie aisément que si (m_ρ / σ_∇) tend vers 0, alors la densité tend vers une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Cette première remarque est très importante : lorsque la variation de la fonction $f[x, y]$ est due au bruit (donc m_ρ est nulle ou quasiment nulle) cela implique que la distribution de l'angle du gradient en ce point suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

La probabilité d'erreur de décision P_e^B (pour le bruit) est égale à la probabilité de classer la variation due au bruit comme angle stable, c'est-à-dire que $P_e^B = P_S$. D'après la remarque précédente, il apparaît que la probabilité P_e tend très vite vers 0 quand le nombre d'acquisitions N augmente, et ceci quelque soit ε , pris, bien sûr, dans un intervalle raisonnable.

Le tableau 2.3 présente les résultats de l'estimation de P_e pour N variant et $\varepsilon = \pi/2$. Même pour un faible nombre de réalisations, l'angle du bruit est détecté instable. On peut considérer que la probabilité d'erreur est négligeable.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_e^B	1	0,501	0,188	0,059	0,020	0.007	0.002	0.001	0	0

TAB. 2.3 – Estimation de la probabilité d'erreur de classification du bruit

La figure 2.27 illustre les chiffres indiqués dans le tableau 2.3. Nous concluons que l'information angle nous permet d'éliminer les coefficients dus au bruit.

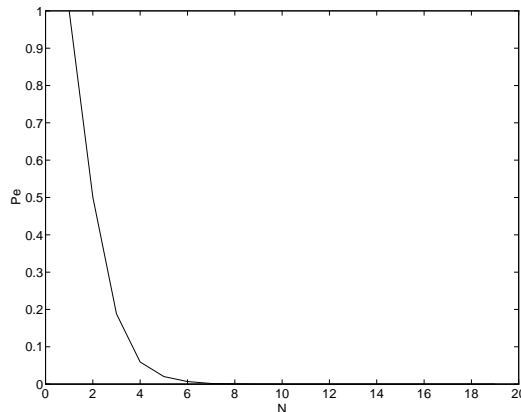


FIG. 2.27 – Evolution de la probabilité d'erreur de classification du bruit en fonction du nombre N d'acquisitions $N \in [1, 20]$ et $\varepsilon = \pi/2$

Proposition 5 *Les angles des variations du signal détériorées par le bruit sont stables.*

En présence d'information, la probabilité d'erreur de décision est égale à la probabilité d'accepter, pour la variation étudiée, l'hypothèse "angle instable", c'est-à-dire que $P_e^I = 1 - P_S$. Comme précédemment, l'expression analytique de la probabilité P_e^I en fonction de m_ρ et de σ_∇ est complexe. Toutefois, Gregson [48] formule quelques remarques qui nous permettent de proposer des éléments de réponses. Si l'on étudie la fonction de densité $\tilde{f}_\Theta(\theta)$ on remarque que lorsque le rapport (m_ρ/σ_∇) augmente, le premier terme $(1/2\pi\sigma_\nabla)e^{-m_\rho^2/2\sigma_\nabla^2}$ tend vers 0, et le second terme de $\tilde{f}_\Theta(\theta)$ tend lui aussi vers 0 si $(\theta - m_\theta)$ croît, c'est-à-dire si l'angle s'éloigne de sa moyenne. On en déduit que plus le rapport (m_ρ/σ_∇) est important, plus la variance de l'angle tend vers 0.

D'après ces remarques, il est évident que la pertinence du second postulat dépend de la valeur du vecteur $\left[\frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial y} \right]$ ou plus précisément de sa norme m_ρ par rapport au bruit. Quand ce rapport est important, l'angle du gradient va être stable avec une probabilité proche de 1, et de ce fait le postulat est vérifié.

Nous étudions plus attentivement le cas où le rapport signal sur bruit n'est pas excellent. Afin de faire une comparaison avec un seuillage sur l'amplitude du gradient, nous approximations la problématique en considérant que toutes les réalisations sont comprises dans un cercle de rayon $3\sigma_{\nabla}$ (ceci est vrai avec une probabilité de 98.8%) et ayant pour centre $\left[\frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial y} \right]$. Il existe deux droites passant par l'origine et qui sont tangentes au cercle $\{3\sigma_{\nabla}\}$ en deux points notés T_1 et T_2 . Ces notations sont illustrées sur la figure 2.28.

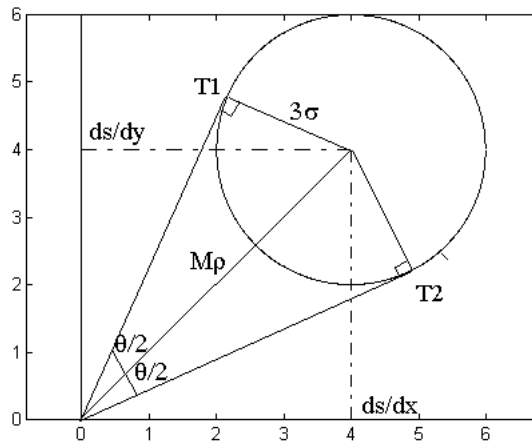


FIG. 2.28 – Approximation géométrique de la distribution de l'angle θ

On constate graphiquement que la différence maximale d'angles correspond à deux réalisations sur les deux points T_1 et T_2 . Nous pouvons écrire que pour $m_{\rho} \in \left[\frac{3\sigma_{\nabla}}{\sin(\varepsilon/2)}, +\infty \right]$, la probabilité d'erreur de décision est négligeable, car les deux tangentes ont un angle égal, à ε .

A titre de comparaison, nous calculons, en posant les mêmes approximations, pour quelles valeurs de m_{ρ} , la probabilité d'erreur de décision, associée à un seuillage sur l'amplitude du gradient, est nulle. Pour cela, nous devons poser une hypothèse forte : σ_{∇} est connu. Dans ce cas, la probabilité d'erreur est presque nulle pour $m_{\rho} \in [6\sigma_{\nabla}, +\infty[$.

A partir de ces deux intervalles calculés, nous déduisons que pour $\varepsilon \geq \pi/3$, le seuillage angulaire a une probabilité d'erreur nulle pour des valeurs de m_{ρ} plus faibles (donc un rapport signal sur bruit plus faible) que dans le cadre d'un seuillage sur l'amplitude. Or, nous avons vu que pour un ε grand (par exemple $\varepsilon = \pi/2$), l'angle discrimine très bien le bruit. Nous en concluons la supériorité de la discrimination par l'angle sur la norme. Les expérimentations numériques menées par Gregson indiquent des conclusions similaires [48].

La table 2.4 présente la probabilité d'erreur de détection P_e^I pour N , $r = m_{\rho}/\sigma_{\nabla}$ variant et $\varepsilon = \pi/2$. On voit bien que pour de très faibles valeurs de m_{ρ} , la probabilité d'erreur est importante. Toutefois, P_e^I diminue très vite quand le rapport augmente (voir figure 2.26) : elle est quasiment nulle pour des rapports où le volume correspondant à l'intersection entre les deux gaussiennes (distribution du bruit et du signal) reste important.

Nous illustrons dans la figure 2.29, pour quatre rapports m_{ρ}/σ_{∇} , les probabilités indiquées dans le tableau précédent.

A partir de ces différentes constatations, nous concluons que l'angle est un paramètre discriminatoire efficace dans le cas d'une dérivée d'une image bruitée.

Pourtant l'utilisation du gradient monoéchelle reste limitée. Il permet de détecter les bords mais

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r=1$	0	0.311	0.539	0.711	0.807	0.887	0.927	0.955	0.973	0.983
$r=2$	0	0.061	0.146	0.228	0.294	0.367	0.453	0.506	0.569	0.625
$r=3$	0	0.006	0.013	0.019	0.030	0.043	0.059	0.069	0.093	0.102
$r=4$	0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.004	0.004
$r=5$	0	0	0	0	0	0	0	0.000	0.000	0.000

TAB. 2.4 – Estimation de la probabilité d'erreur de détection du signal utile pour un nombre N de réalisations et de rapport SNR variant.

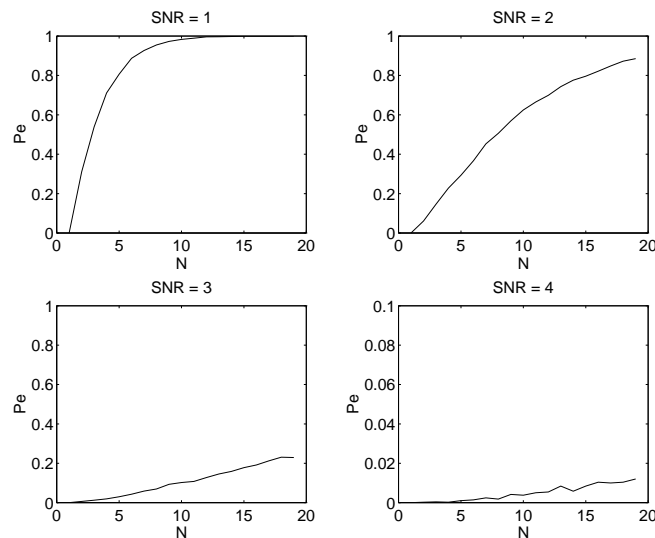


FIG. 2.29 – Evolution de la probabilité d'erreur de classification du signal en fonction du nombre N d'acquisitions pour quatre rapport SNR (m_ρ/σ_∇) différents

il ne possède pas la caractéristique d'être inversible, ce qui, une fois les bords parasites supprimés, permettrait la conception d'algorithme de débruitage. De plus, les filtres définis par l'équation (2.12) pour le calcul du gradient n'extraient qu'une certaine bande de fréquence de l'image. L'étude résultante n'est donc pas suffisante.

Pour ces raisons, depuis une dizaine d'années, de nouvelles décompositions multiéchelles apparaissent dans la littérature, permettant une étude à différentes échelles du gradient. Les premières représentations ont utilisé des noyaux Gaussien plus ou moins dilatés [6]. Avec l'avènement des ondelettes, Mallat et Hwang ont proposé un algorithme de débruitage en utilisant l'évolution de la norme du gradient à travers les échelles [69]. Dans la section suivante, nous généralisons les résultats sur les méthodes angulaires aux décompositions multiéchelles telles qu'elles sont définies par Mallat.

2.4.3 Utilisation de l'information angle en multiéchelles

2.4.3.1 Extension de la dispersion angulaire aux multiéchelles

Dans le paragraphe précédent, nous avons rappelé les propriétés de l'angle du gradient. Toutefois ces caractéristiques n'ont été établies que pour le cas "classique" monoéchelle, qui représente la

première échelle de la décomposition en maxima. Afin de pouvoir utiliser l'angle dans un algorithme de débruitage basé sur les maxima d'ondelettes, il nous faut étudier le comportement de l'information angle dans une représentation multiéchelles.

La dispersion angulaire établie par l'équation (2.18) suppose une conservation de la nature du bruit (gaussien et indépendant) lors du calcul du gradient. Afin de généraliser les équations établies dans le cas monoéchelle au cas multiéchelles, il nous faut préciser les propriétés de la transformée en ondelettes d'un bruit blanc. D'après Mallat [69], si $b(x, y)$ est un bruit blanc gaussien alors $\vec{W}_s b(x, y)$ est lui aussi un bruit blanc gaussien. Les différentes propriétés des maxima de la décomposition d'un bruit blanc gaussien sont étudiées par Mallat [69] et s'inspirent des travaux de Papaoulis [78]. Puisque le gradient multiéchelles repose sur une transformée en ondelettes, les coefficients du gradient vont suivre à chaque échelle une loi conjointement gaussienne. On en déduit que l'angle du gradient multiéchelles θ_l , à l'échelle l , suit la même loi que dans le cas monoéchelle (mais indiquée par l'échelle), à savoir

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\Theta_l}(\theta_l) &= \frac{1}{2\pi\sigma_{\nabla_l}} e^{-\frac{m_{\rho_l}^2}{2\sigma_{\nabla_l}^2}} + \frac{m_{\rho_l}}{\sigma_{\nabla_l}} \cos(\theta_l - m_{\theta_l}) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_{\rho_l}^2 \sin^2(\theta_l - m_{\theta_l})}{2\sigma_{\nabla_l}^2}} \Phi\left(\frac{m_{\rho_l} \cos(\theta_l - m_{\theta_l})}{\sigma_{\nabla_l}}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Alors, toutes les propriétés de discrimination de l'angle du gradient par rapport au bruit, établies dans le cadre monoéchelle (notamment les deux postulats), peuvent s'étendre aux multiéchelles.

Toutefois, deux points liés à la discrétisation de la décomposition sont à préciser. Premièrement, la conservation des caractéristiques du bruit lors d'une décomposition en ondelettes est établie pour le cas continu ou discret orthogonal. Les filtres définis par l'équation (2.4) correspondent eux à une décomposition qui n'est pas orthogonale. Nous avons vu que cette décomposition s'inscrit dans la classe des décompositions en frames, et donc le bruit gaussien ne reste pas rigoureusement un bruit gaussien dans les échelles. Toutefois l'idée que, même avec une décomposition en frame, le bruit gaussien reste un bruit gaussien ne constitue pas une approximation aberrante, et est appliquée dans toutes les applications utilisant le gradient multiéchelles (par exemple [69]).

Le second point concerne les filtres utilisés. Les équations établies dans le cadre du gradient monoéchelle supposent l'utilisation d'un filtre qui n'entraîne pas de corrélation entre $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$. Or le filtre $G(w)$ défini par Mallat (équation 2.4) ne vérifie pas cette condition. La modification que nous avons apportée sur les filtres afin d'éviter la translation des maxima entre les échelles ne résout pas ce problème. Nous devons donc modifier la définition des filtres afin de pouvoir utiliser le modèle de l'équation (2.19).

2.4.3.2 Définition de nouveaux filtres

Nous modifions le filtre dérivateur $G(w)$ afin d'utiliser le modèle défini par l'équation (2.12) avec $h_2 = h_1 = h$, qui lui n'entraîne pas de corrélation entre les deux dérivés partielles.

Soit $G'(w)$ le filtre dérivateur défini anti-symétrique autour du point étudié. $G'(w)$ est tel que

$$G'(w) = i \sin(w).$$

Nous pouvons établir la relation entre $G'(w)$ et $G(w)$, le filtre dérivateur de Mallat :

$$G'(w) = [(G(w)) \uparrow 2] \exp(-iw).$$

$G'(w)$ correspond à l'interpolation du filtre $G(w)$ suivi d'un retardateur. Donc, si l'on veut obtenir une décomposition en ondelettes à reconstruction parfaite, les autres filtres doivent eux aussi être modifiés suivant la même transformation. Mais afin de limiter l'effet de translation des maxima entre les échelles, le filtre passe-bas est simplement dilaté, mais non retardé. Nous utilisons donc les filtres suivants :

$$\begin{aligned} H'(w) &= \cos(w)^3 e^{iw} \\ G'(w) &= i \sin(w) \\ P'(w) &= \overline{H'}(w) \\ Q'(w) &= \frac{1 - P'(w)H'(w)}{G'(w)} \\ Z'(w) &= \frac{1 + P'(w)H'(w)}{2} \end{aligned} \tag{2.20}$$

La décomposition-reconstruction ainsi établie correspond à un gradient multiéchelles sans corrélation entre les plans des dérivés partielles.

Pourtant, si l'on étudie avec attention le filtre $G'(w)$ que l'on vient de définir, on constate que le filtrage d'un signal $f[x]$ par notre filtre $G'(w)$ est équivalent à l'application simultanée de deux filtres :

1. filtrage du signal $f[x]$, décimé un point sur deux, par le filtre $G(w)$
2. filtrage du signal $f[x]$, translaté de un point et décimé un point sur deux, par le filtre $G(w)$.

Si la fonction $f[x]$ possède des fréquences proches de la fréquence limite fixée par le théorème d'échantillonnage de Shannon, la décimation d'un point sur deux, sans réduire la bande de fréquence, avant filtrage, provoque un repliement du spectre. Concrètement, ce non respect de la condition de Shannon crée des maxima parasites à toutes les échelles, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.30a. Nous devons donc, avant de décomposer le signal, appliquer un filtrage passe-bas, afin de réduire la bande de fréquence. Ce préfiltrage a pour conséquence de limiter les bords parasites, comme nous le voyons sur la figure 2.30b à l'échelle 3. Afin de rester homogène avec le reste de la décomposition, nous utilisons, comme filtre passe-bas, le filtre $H(w)$, tel qu'il est défini par Mallat.

Toutefois ce préfiltrage doit être inversible, c'est pourquoi nous définissons une projection, notée Q_0 , de type "passe-haut", qui crée l'espace complémentaire à celui généré par le filtrage passe-bas. La définition de l'opérateur Q_0 , ainsi que celle de son adjoint notée Q_0^{-1} , sont précisées dans le paragraphe suivant. La décomposition multiéchelles ainsi définie est résumée sur la figure 2.31.

2.4.3.3 Définition des opérateurs de projection Q_0 et Q_0^{-1}

Nous allons étudier la projection Q_0 permettant de calculer la première échelle de décomposition complémentaire à l'espace défini par le filtrage "antirepliement" passe-bas.

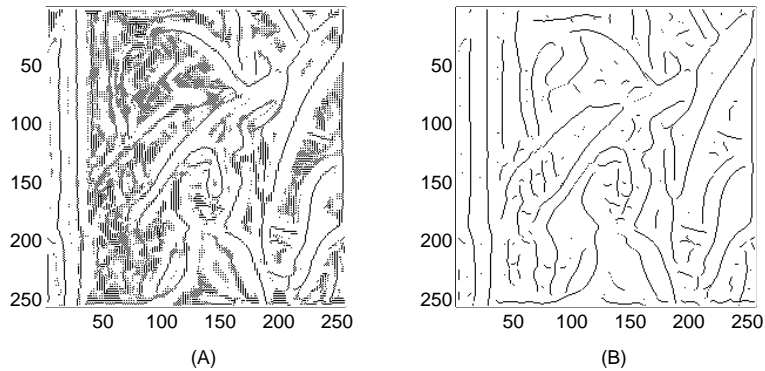


FIG. 2.30 – Détection des maxima à l'échelle 3 sur l'image Lena non bruitée : (a) Décomposition sans préfiltrage (b) Décomposition avec préfiltrage réduisant de la bande de fréquence

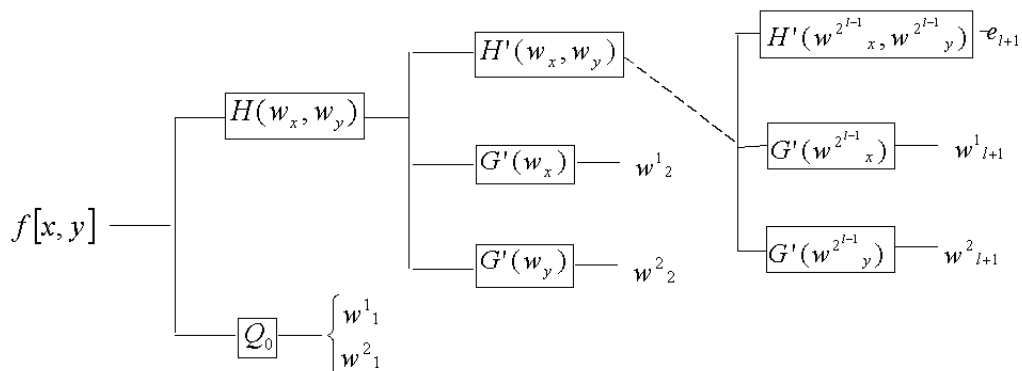


FIG. 2.31 – Implémentation de l'algorithme de décomposition respectant la non corrélation des dérivées partielles.

La première méthode que nous proposons consiste simplement à filtrer l'image par le passe-haut $G(w)$ défini par Mallat. Toutefois, la corrélation résultante réduit le pouvoir discriminatoire de la phase du gradient sur le bruit. Brièvement, on constate que si x ($x \sim N(0, \sigma)$) présente une réalisation éloignée de sa moyenne, les variables aléatoires $y - x$ et $z - x$ ($z \sim N(0, \sigma), y \sim N(0, \sigma)$) seront de même signe avec une probabilité importante. L'angle du gradient va avoir tendance à se disperser, non entre $[0, 2\pi]$, mais dans l'intervalle $[0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ ce qui explique une plus faible discrimination du bruit.

C'est pourquoi nous proposons une seconde méthode qui consiste à extrapoler les maxima de la première échelle en fonction des échelles suivantes. Cette méthode s'inspire des travaux de Chang et Vetterli [23] [24]. Chaque singularité (qui correspond à un bord en image) produit des extrema qui se propagent à travers les échelles selon un processus caractérisé par l'indice local de régularité de Lipschitz. Si nous déterminons la régularité de Lipschitz d'un point particulier, alors nous pouvons

estimer la valeur des extrema correspondant à ce point à toutes les échelles. Pour cela, nous utilisons la relation (2.9) présentée dans le paragraphe 2.2.6 que nous rappelons,

$$\rho_l f[x_n^l, y_n^l] = K_n (2^l)^{\alpha_n}, l = 1 \dots L.$$

Dans notre décomposition, les valeurs des coefficients d'ondelettes sont connues pour chacune des échelles supérieure à 1, nous pouvons donc estimer α et K à partir de l'équation (2.9) en chacune des discontinuités de l'image.

Pour cela, nous devons associer, à travers les échelles, les maxima qui correspondent à la même singularité. Divers algorithmes de chaînage 2D existent dans la littérature [23], [69], [66]. L'algorithme que nous proposons associe deux maxima présents à deux échelles successives selon trois paramètres : les écarts en position, angle et norme. Parmi les différents candidats à l'association, seront sélectionnés les deux maxima qui minimisent l'écart sur ces trois paramètres. Afin de limiter les erreurs dues à la discrétisation du signal, nous appliquons la limite proposée par Chang [23], à savoir que si deux maxima liés ont des amplitudes qui diffèrent d'un rapport supérieur à 2^2 , ou inférieur à 2^{-2} alors nous considérons que nous avons fait une erreur et la liaison est annulée.

Une fois l'arbre de diffusion des maxima construit de l'échelle 2 jusqu'à l'échelle L , nous pouvons estimer la valeur de K_n et α_n pour chaque point singulier $[x_n, y_n]$, selon la procédure suivante, proposée par Chang [23] :

$$\alpha_n^{(1)} = \log_2 \left(\frac{\rho_3 f[x_n^3, y_n^3]}{\rho_2 f[x_n^2, y_n^2]} \right), \alpha_n^{(2)} = \log_2 \left(\frac{\rho_3 f[x_n^4, y_n^4]}{\rho_2 f[x_n^3, y_n^3]} \right)$$

puis,

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}} \alpha_n^{(1)}$$

Si le maximum ne se propage pas au-delà de l'échelle 3, nous posons $\alpha_n = \alpha_n^{(1)}$. Une fois l'indice de régularité estimé, nous calculons la constante K_n par :

$$K_n = \frac{\rho_2 f[x_n^2, y_n^2]}{2^{\alpha_n}}$$

Lorsque les deux caractéristiques sont déterminées, nous pouvons extrapoler la valeur, sur la première échelle, du coefficient correspondant au point singulier étudié, selon l'expression suivante :

$$\rho_1 f[x_n^1, y_n^1] = K_n$$

Pour l'estimation de l'angle, nous posons l'hypothèse que la variation d'angle entre deux maxima sur deux échelles successives, et qui correspondent au même point singulier, est négligeable. Nous posons donc :

$$\theta_1 f[x_n^1, y_n^1] = \theta_2 g[x_n^2, y_n^2]$$

Enfin, chacune des valeurs ainsi estimée est confrontée à un intervalle de confiance afin de limiter les erreurs qui peuvent apparaître lors du chaînage des maxima : si l'indice de régularité est tel que $|\alpha_n| > 2$ alors il est ramené dans un intervalle plus raisonnable par $\alpha_n = \text{sign}(\alpha_n) * 2$.

Cette méthode permet ainsi d'estimer les valeurs de la première échelle de la décomposition d'une façon plus esthétique, mais nécessite un algorithme plus complexe que la première méthode.

Pour ces deux méthodes, nous définissons l'opérateur Q_0^{-1} par un filtrage des deux plans d'ondelettes avec les filtres $\overline{G}(w_x)Z(w_y)$ et $\overline{G}(w_y)Z(w_x)$ proposé par Mallat.

2.4.3.4 Algorithme *ANGLE_ITE*.

A partir de l'opérateur Q_0 et des filtres définis par l'équation (2.20), nous avons construit une décomposition en gradient multiéchelles "inversible" pour laquelle la caractéristique "angle du gradient" permet de discriminer le bruit de l'information. A partir de cette décomposition, nous concevons un algorithme que nous appelons *ANGLE_ITE*, qui permet de débruiter une image à partir de ses N réalisations [19].

La première idée serait de conserver, dans le gradient multiéchelles, tous les coefficients qui ont un angle stable sur leurs différentes réalisations, de supprimer les autres, puis de faire une transformation inverse. Mais cette méthode ne va pas donner un résultat satisfaisant. A chaque bord de l'image, correspondent des coefficients qui ont une amplitude variant de 0 à un maximum. Seuls ceux qui ont une amplitude suffisamment grande auront un angle stable, lorsque l'image est bruitée, et seront conservés. Si l'on fait une transformation inverse à partir des coefficients conservés, on ne reconstruit pas correctement l'image.

Afin de remédier à ce problème, nous allons utiliser la représentation par maxima d'ondelettes :

- la plupart des maxima ont une amplitude importante et donc un angle stable,
- ils permettent une reconstruction empirique exacte.

De plus, l'utilisation des maxima nous permet d'utiliser l'opérateur Q_0 défini à partir de l'estimation de l'exposant de régularité de Lipschitz.

Concrètement, l'algorithme *ANGLE_ITE* sélectionne sur le gradient multiéchelles d'une image les maxima qui ont un angle stable sur ses différentes réalisations et supprime les autres qui résultent du bruit. Nous extrapolons la première échelle. Enfin nous reconstruisons l'image débruitée avec l'algorithme itératif de Mallat-Zhong.

2.4.4 Développement numérique

Nous appliquons l'algorithme *ANGLE_ITE* à des images bruitées par un bruit blanc gaussien additif. Toutefois, l'algorithme nécessite différentes réalisations de l'information bruitée pour effectuer la discrimination (le nombre de réalisations et le nombre d'échelles de décomposition nécessaire pour une discrimination correcte sont variables selon l'information recherchée et le niveau de bruit). Une première version de *ANGLE_ITE* utilise une séquence d'acquisitions comprenant plusieurs occurrences de la même image [14]. Il étudie le comportement de chaque maximum à chaque échelle et supprime ceux qui ne sont pas stables sur les décompositions des différentes réalisations. Ensuite l'image est reconstruite à partir des maxima sélectionnés. Même pour un faible nombre de réalisations, cette première version de l'algorithme obtient des résultats, en terme d'amélioration d'images, très intéressants, et ceci pour des rapports signal sur bruit très faibles [14]. Cette version s'inscrit dans le même cadre que les algorithmes itératifs présentés dans le premier chapitre.

Nous nous intéressons ici au cas où l'on a une seule image bruitée, et non plusieurs réalisations permettant d'effectuer la discrimination. Nous devons donc les "simuler". Pour cela, nous proposons deux méthodes.

2.4.4.1 "Simulation" sur chacune des échelles

Cette première méthode étudie les échelles les unes après les autres. Nous substituons aux différentes acquisitions, nécessaires pour la discrimination, les réalisations temporelles dans un proche voisinage.

Pour chaque maximum, nous sélectionnons tous les points distants de ce maximum d'une distance inférieure à D et élément de la même échelle. Ces points vont constituer notre ensemble de décision. Si le nombre de ces points vérifiant la condition de stabilité, par rapport au maximum étudié (différence d'angle inférieur à ϵ), est supérieur à N , l'hypothèse "angle stable" est acceptée et le maximum étudié est conservé; sinon il est supprimé. Formellement ce seuillage s'écrit :

$$T(M_{x,y}^l) = \begin{cases} M_{x,y}^l & \text{si } \sum_{[x_j,y_j] \in \Omega} \delta_{|\theta^l[x_j,y_j] - \theta^l[x,y]|} > N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec Ω ensemble des points positionnés à une distance inférieure à D du maximum $M_{x,y}^l$, le tout à l'échelle l .

Cette discrimination se justifie par le fait que le maximum de la dérivée se situe à l'instant de plus forte pente du contour. Si ce contour vérifie certaines propriétés de régularité (i.e. s'il n'est pas dû au bruit), les points encadrant ce maximum suivent une direction de pente quasiment identique.

Les paramètres ϵ , N et D sont laissés à l'appréciation de l'utilisateur et dépendent du rapport signal sur bruit ainsi que du résultat escompté. Dans le cas d'une image avec un faible rapport signal sur bruit, si l'on fixe les différents paramètres à un niveau très restrictif, l'image résultat conservera les structures principales, le bruit sera supprimé mais certains détails auront disparu. A l'inverse, avec des paramètres moins restrictifs, tous les détails seront conservés mais quelques points parasites persisteront. Enfin, il faut noter que ces différents paramètres peuvent évoluer selon l'échelle étudiée. Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons un réglage des paramètres pour quatre échelles de décomposition, qui s'est avéré robuste durant nos expérimentations numériques :

$$\epsilon = [\pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/5], N = [5, 5, 5, 5], D = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}]. \quad (2.21)$$

2.4.4.2 "Simulation" à travers les échelles

Cette seconde méthode s'inspire de celles appliquées dans le cadre de l'étude de la norme du gradient. On substitue les différentes acquisitions par l'étude du comportement de l'angle du maximum à travers les échelles. Comme précédemment, nous sélectionnons les points distants du maximum étudié d'une distance inférieure à D , mais à l'échelle supérieure. Nous reprenons le même critère de sélection que précédemment, à la différence près que l'étude se fait entre deux échelles :

$$T(M_{x,y}^l) = \begin{cases} M_{x,y}^l & \text{si } \sum_{[x_j,y_j] \in \Omega} \delta_{|\theta^{l+1}[x_j,y_j] - \theta^l[x,y]|} > N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec Ω ensemble des points positionnés à une distance inférieure à D du maximum $M_{x,y}^l$ à l'échelle $l + 1$.

Si le maximum étudié est associé à de l'information, alors la dérivée calculée dans un environnement proche, à l'échelle suivante, qui correspond à une dérivée plus "grossière", va avoir la même orientation. C'est pourquoi nous utilisons les angles de l'échelle suivante comme ensemble de décision.

Si l'on étudie les caractéristiques propres à ces deux méthodes, nous remarquons qu'elles peuvent être complémentaires : les maxima considérés comme stables par les deux méthodes auront une probabilité plus grande de correspondre à de l'information. L'utilisation simultanée de ces deux méthodes permet d'éliminer davantage de bruit. Ainsi en appliquant une discrimination sur l'échelle puis à travers les échelles (ou inversement, le résultat étant identique) nous pouvons utiliser des paramètres ϵ , N et D moins restrictifs et donc conserver plus d'information tout en éliminant autant de bruit.

A partir de ces remarques, nous définissons la version finale de l'algorithme *ANGLE_ITE* de la manière suivante :

- Décomposition de l'image bruitée en L niveaux
- Discrimination des maxima par l'étude de l'angle sur chaque échelle
- Discrimination des maxima par l'étude de l'angle en inter-échelle
- Reconstruction de l'image par l'algorithme itératif de Mallat-Zhong

2.4.5 Applications

2.4.5.1 Images tests

Nous avons appliqué l'algorithme *ANGLE_ITE*, tel qu'il est défini ci-dessus, à trois images de tests de la base du *GDR CNRS ISIS* que nous présentons sur la figure 2.32.

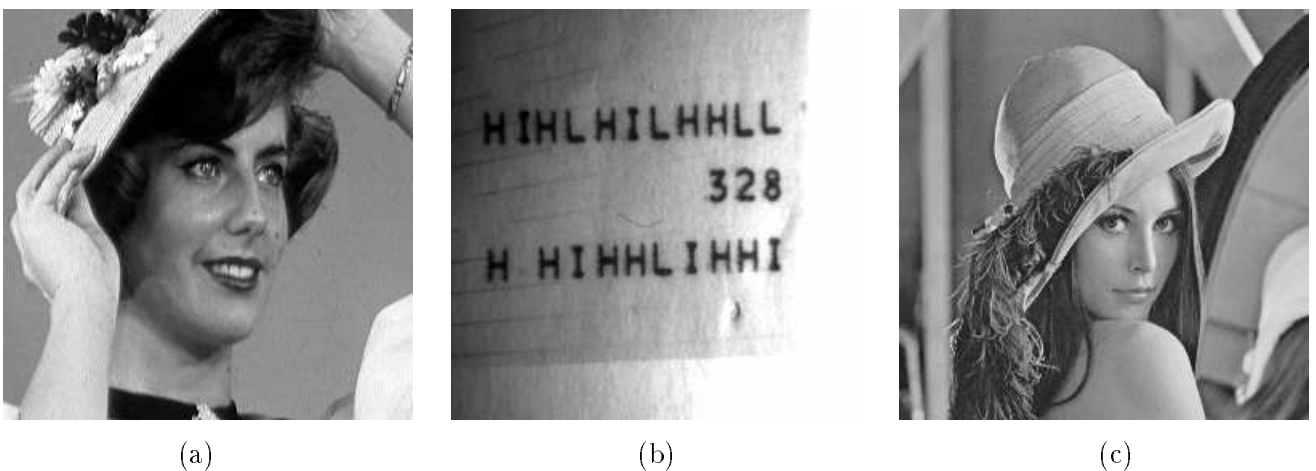


FIG. 2.32 – Image originale : (a) Visage de femme (b) Lettres (c) Lena

Nous bruitons ces images avec des rapports signal sur bruit de différents niveaux. Les images bruitées et débruitées par *ANGLE_ITE* sont présentées sur les figures 2.33, 2.34 et 2.35. Pour chacune de ces images, les paramètres ϵ , N et D sont fixés aux valeurs définies par l'équation (2.21).



FIG. 2.33 – Visage de femme : (a) Image bruitée ($SNR = 2$) (b) Image débruitée

La première image (figure 2.33), un visage de femme, nous permet d'étudier le comportement de l'algorithme *Angle_ITE* sur une image "classique" dégradée avec un niveau de bruit qui ne noie pas complètement l'information, mais l'altère. Cette image présente des zones très marquées, comme les cheveux ou le chapeau, et d'autres plus fines, comme les pupilles ou le nez qui est peu contrasté par rapport au reste du visage. On constate que toutes les caractéristiques énoncées ci-dessus, ainsi que les autres présentes dans l'image, sont correctement reconstruites, indiquant ainsi que les contours associés ont été bien détectés lors de la discrimination des maxima. De plus, l'utilisation d'une base de décomposition localisée en temps, permet un débruitage sans l'apparition d'un effet de flou, comme cela se produit dans un certain nombre de filtrages. Globalement, nous obtenons une image résultat qui peut être utilisée dans un traitement comme, par exemple, la détection de zones homogènes ou caractéristiques.

En revanche, on note la présence de taches parasites dans l'image reconstruite. Ces taches sont consécutives à la sélection d'un maximum parasite, en général isolé dans des zones homogènes. Afin d'éliminer ce phénomène, une contrainte supplémentaire dans la sélection est nécessaire. On ajoutera, par exemple, une contrainte de continuité. C'est-à-dire que si un maximum fait partie d'un contour, il doit être élément d'une zone continue spatialement pour laquelle les angles, à travers les échelles, sont stables. Cette contrainte n'a pas été présentée dans ce mémoire car elle n'est pas encore pleinement finalisée, mais ses premiers résultats semblent encourageants.

Le deuxième exemple (figure 2.34) illustre l'application de l'algorithme *Angle_ITE* sur une image où l'information est ponctuelle et fortement dégradée par le bruit (puisque le rapport signal sur bruit est de 1). Le résultat désiré après filtrage, serait une image où le bruit est en grande partie annulé et les contours, ainsi que la forme des caractères resteraient inchangés, ceci permettant leur détection et leur reconnaissance. Une difficulté s'ajoute à l'image bruitée : l'illumination n'est pas constante sur toute l'image, ce qui élimine tout traitement global.

A titre de comparaison, nous avons indiqué le résultat du débruitage effectué par seuillage des coefficients d'ondelettes tel que nous l'avons présenté dans le premier chapitre (figure 2.34.c). Le résultat est obtenu avec une décomposition par les ondelettes de Daubechies D4 en utilisant un seuillage "hard"¹. Nous pouvons voir sur l'image résultat que le bruit est supprimé du fond de

1. Nous utilisons un seuillage hard qui est une alternative au seuillage soft car il est non biaisé et présente de

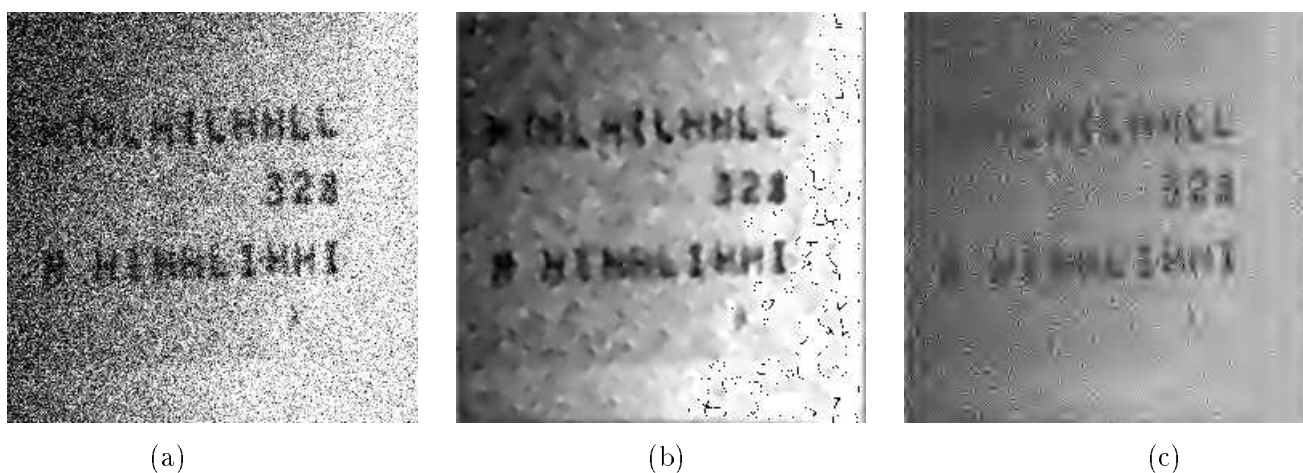


FIG. 2.34 – Exemple d'application : (a) Image bruitée ($SNR = 1$) (b) Image débruitée par *Angle_ITE* (c) Image débruitée par seuillage de la transformée en ondelettes

l'image. En revanche, la forme des lettres n'est pas préservée. Par exemple, le nombre "8" devient "3" après débruitage. De plus, certaines lettres de la région sombre sont presque supprimées. Ceci provient de l'utilisation d'un seuil constant à chaque échelle. Notons que les approches récentes basées sur des décompositions non décimées présentées dans le premier chapitre, ne peuvent pas plus extraire l'information du bruit.

On voit sur l'image résultat que l'algorithme *Angle_ITE* respecte les conditions : le bruit est réduit et les caractères sont tous détectables et conservent globalement leur forme. On remarque toutefois que les contours ont tendance à "baver". En effet avec un niveau de bruit important, les maxima détectés lors de la discrimination ne sont pas forcément ceux qui correspondent aux points d'inflexion du contour non bruité, mais aux proches voisins, ce qui provoque ce phénomène d'auréole autour des caractères.

Les caractères présents dans la zone sombre sont moins bien reconstruits car ils ont un faible contraste avec le fond de l'image. Ils sont néanmoins extraits du bruit et reconnaissables, ce qui prouve une fois de plus l'intérêt d'utiliser une base localisée dans le temps associé à un traitement local.

On constate que les taches parasites sont plus nombreuses que dans le premier exemple et ceci pour deux raisons :

- le niveau de bruit est plus important,
- l'image est essentiellement constituée d'une zone à comportement stationnaire, entrecoupée d'information.

Enfin on voit apparaître un certain nombre de points noirs parasites sur la bordure droite de l'image : cette zone, dans l'image originale, est constante strictement et saturée (tous les pixels sont égaux à 255). Ainsi lorsque l'on reconstruit l'image, certains pixels ont une valeur dépassant 255, donc avec le codage sur 8 bits, ils prennent une valeur proche de 0.

Toutefois, on constate que l'utilisation d'une décomposition par maxima multiéchelles associée à une discrimination sur l'information angle est bien adaptée à ce type de problème, et l'image ainsi

meilleurs résultats en 2D.

débruitée permet d'effectuer ensuite une reconnaissance de caractères. Cette image est l'exemple type d'application où l'algorithme *Angle_ITE* est bien adapté : les contours sont les information prépondérantes, elle ne peut pas être traitée globalement, et le niveau de bruit rend difficile le traitement en monoéchelle ou par la norme du gradient.



FIG. 2.35 – *Lena*: (a) Image bruitée ($SNR = 0.5$) (b) Image débruitée

Le dernier exemple nous permet d'étudier le comportement de l'algorithme *Angle_ITE* en présence d'un bruit très important. Nous avons dégradé *Lena* avec un rapport signal sur bruit de 0.5, l'énergie du bruit est donc deux fois plus importante que celle du signal. Nous sommes dans le cas où l'information est noyée dans le bruit (nous avons traité cette même image dans le chapitre 1).

Pourtant, on constate sur l'image résultat que des détails fins, comme la bouche, sont correctement extraits et reconstruits. Ils sont détectables, alors que dans l'image bruitée, ils disparaissent dans le bruit. Ceci montre, une fois de plus, l'efficacité de l'information angle qui va faiblement osciller au voisinage d'un point d'inflexion, même en présence d'un fort bruit.

On remarque que l'aspect des cheveux est fort bien conservé dans l'image débruitée, ce qui surprend car cette zone de l'image peut s'assimiler à une texture. Or, l'algorithme *Angle_ITE* repose sur une information contour, il est donc inadapté au débruitage de textures. Cependant, les cheveux de *Lena* présentent des discontinuités importantes (correspondant à des mèches), ce qui permet à l'algorithme de débruitage de conserver son aspect à la chevelure. Il ne faut pas en conclure que *Angle_ITE* peut débruiter les textures, mais il ne faut pas, non plus, le condamner pour toutes les textures.

Enfin, il est certain que le nombre de taches parasites est important, étant donné le niveau de bruit. Toutefois ces taches ont, en général, peu de contraste, et donc altèrent peu une détection des éléments constitutifs de l'image.

Si l'on compare ce résultat avec ceux des méthodes itératives et non-décimées du chapitre 1 (figures 1.16 et 1.17) nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Les algorithmes itératifs obtiennent les meilleurs résultats, mais ils nécessitent plusieurs réalisations,
- Le résultat de *uwt_mean* est plus lisse, mais justement un certain nombre de détails a disparu (comme pour l'image lettres).

La table 2.5 indique les valeurs RMS des images bruitées puis débruitées pour chacun de ces exemples. Pour les trois exemples, nous constatons une réduction sensible de la mesure RMS, ce qui confirme l'amélioration de la qualité visuelle des images débruitées.

	Bruitee	Debruitee
chapeau	34	12
lettres	70	17
lena	96	19

TAB. 2.5 – *Débruitage par Angle-ITE: Mesure RMS*

Nous avons illustré notre algorithme sur des images très bruitées et il est donc certain que les images après traitement sont encore dégradées. Toutefois, pour ces niveaux de bruit très élevés, les méthodes de filtrage classique, ainsi que celles utilisant un seuillage de la décomposition en ondelettes détruisent, en général, une grande quantité de l'information. Aucun résultat, pour les techniques se basant sur l'information norme, n'a été présenté car ces méthodes sont difficiles à appliquer sur des images très bruitées, comme celles présentées dans ce chapitre. On trouve, dans la littérature, trois approches de débruitage à partir de la norme du gradient multiéchelles, et qui sont souvent utilisées d'une façon complémentaire dans un même algorithme :

- Seuillage des maxima en fonction de leur norme : mais il est difficile de définir un seuil sur la norme séparant l'information du bruit quand le SNR est faible, et, de plus, nous avons montré que ce seuillage est peu robuste.
- Chaînage des contours puis seuillage en fonction de la longueur du contour : le chaînage des contours associés à l'information n'est pas réalisable facilement pour les exemples présentés car les contours sont discontinus et ont de nombreux embranchements parasites quand le niveau de bruit est élevé (i.e. "explosion" de la complexité algorithmique).
- Etude à travers les échelles de l'évolution de la norme d'un maximum ou d'un contour : l'étude à travers les échelles est quasiment impossible étant donné le nombre de maxima parasites quand le niveau de bruit est élevé, ou nécessite un pré-seuillage, ce qui nous renvoie au premier point.

Pour chacune de ses variantes, le débruitage par l'utilisation de la norme nécessite un traitement peu robuste face à un SNR faible. L'algorithme *Angle_ITE* est plus exploitable car il utilise des zones de stabilité d'angle et non des points isolés. Il n'emploie l'information "maximum local" que pour la reconstruction et l'extrapolation de la première échelle, c'est-à-dire lorsque la sélection est déjà effectuée. De plus, l'utilisation de l'angle nécessite beaucoup moins de connaissances a priori sur l'image, si ce n'est le réglage des paramètres ε , N et D qui peuvent être fixés aux valeurs indiquées précédemment, pour un grand nombre d'images et de niveaux de bruit. De plus, des variations "raisonnables" de ces paramètres ont des effets peu significatifs sur l'image résultat, prouvant ainsi leur robustesse.

Enfin, nous avons rappelé que l'information angle est plus robuste statistiquement que la norme.

Pour toutes ces raisons, nous concluons à la validité de l'algorithme *Angle_ITE* et plus particulièrement dans le cas d'images très dégradées.

2.4.5.2 Images d'angiographie

L'angiographie est une technique radiographique qui permet de visualiser les vaisseaux (sténose, dilatation, aspect irrégulier) mais aussi les tumeurs qui sont souvent hyper vascularisées.

L'information prépondérante dans une image d'angiographie correspond donc aux contours des vaisseaux. C'est pourquoi une approche par maxima d'ondelettes nous semble tout à fait adaptée tant pour des applications de débruitage que de segmentation.

Nous présentons sur la figure 2.36 une image d'angiographie, ainsi que le résultat du débruitage effectué par l'algorithme *Angle_ITE* avec une décomposition en 4 échelles et des paramètres ε , N et D fixés aux valeurs définies par l'équation (2.21). Nous ne pouvons pas "mesurer" la qualité du débruitage. En revanche, nous constatons sur l'image résultat que le bruit présent sous forme de points parasites a été supprimé, alors que la structure des vaisseaux n'a pas été modifiée, et même "renforcée".

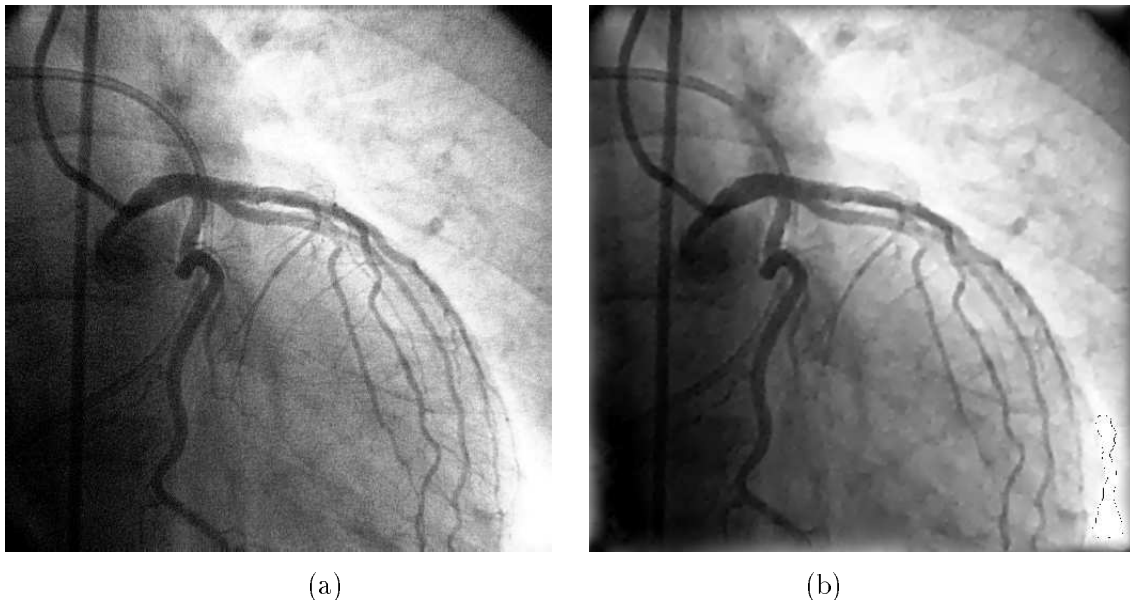


FIG. 2.36 – Image d'angiographie : (a) Image originale (b) Image débruitée par l'information angle multiéchelles

Puisque l'information recherchée dans ce type d'image est le contour des vaisseaux, nous affichons sur les figures 2.37 et 2.38 les contours de l'image bruitée, ainsi que ceux sélectionnés par notre algorithme, respectivement aux échelles 2 et 3.

On constate que les contours des vaisseaux sont difficilement détectables sur l'image originale. De nombreuses lignes parasites sont présentes un peu partout dans l'image rendant une approche immédiate d'extraction des vaisseaux quasiment impossible. Après sélection des maxima à angle stable, un grand nombre de maxima parasites a été supprimé. Il est certain que quelques contours de vaisseaux ont été interrompus, mais globalement, on peut estimer que l'image de contours "débruitée" constitue une base très intéressante pour un algorithme de segmentation des vaisseaux qui utiliserait une approche contour multiéchelles.

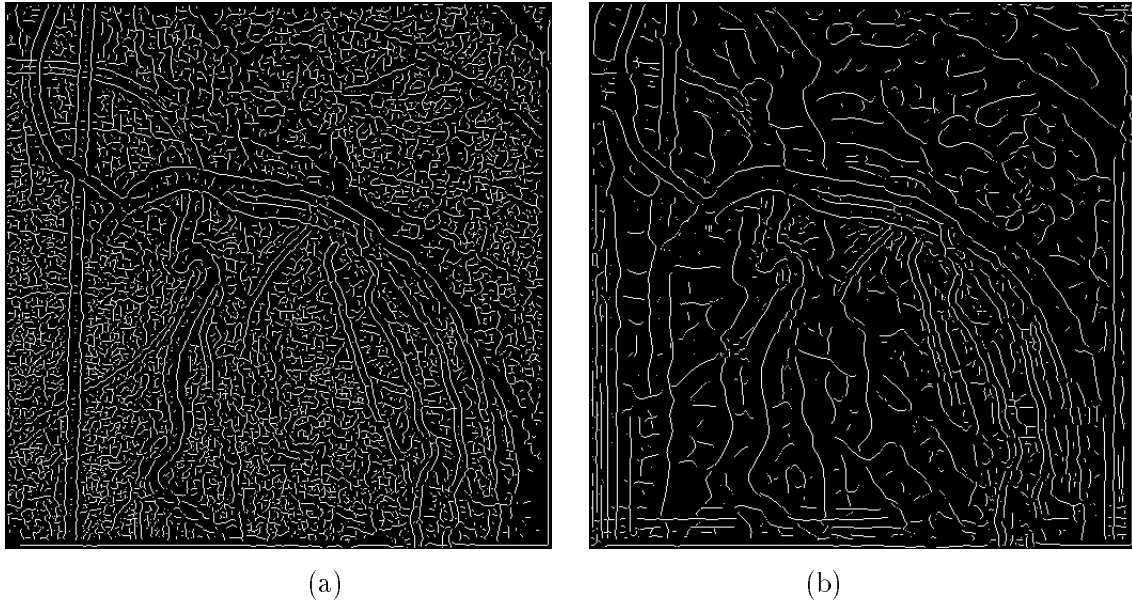


FIG. 2.37 – Image d'angiographie (échelle 2): (a) Image originale (b) Image débruitée par l'information angle multiéchelles

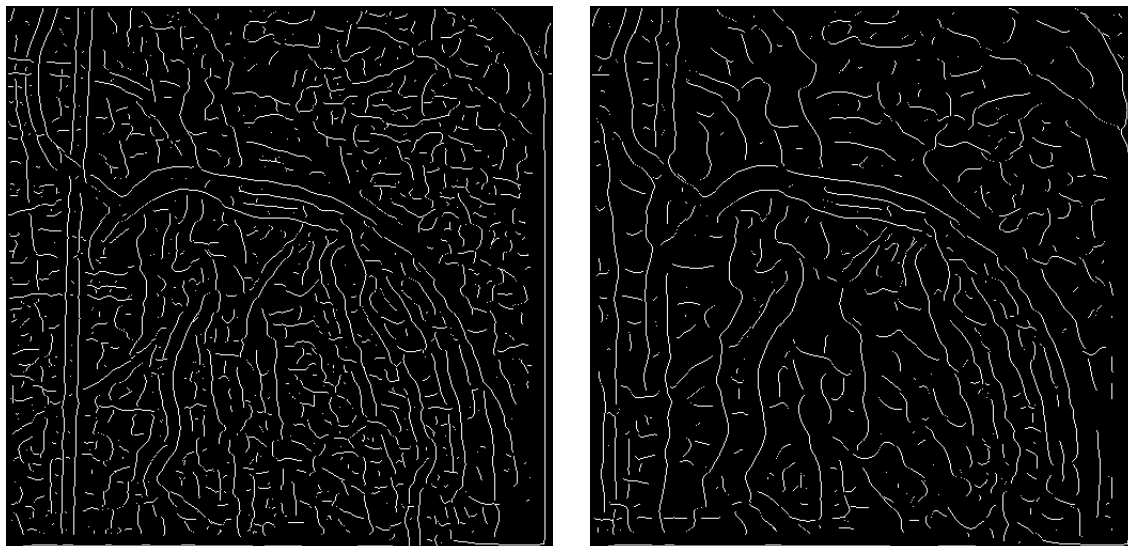
2.5 Conclusion

Nous avons étudié durant ce second chapitre les décompositions en maxima d'ondelettes qui permettent d'analyser localement la régularité d'une fonction. En utilisant la décomposition en ondelettes non-décimée introduite dans le premier chapitre, Mallat a proposé une représentation discrète riche en applications.

Dans un premier temps, nous avons proposé un algorithme de segmentation 1D qui s'appuie sur les propriétés de propagation de ces maxima d'ondelettes. La méthode décrite repose sur deux procédures de chaînage, ce qui permet d'introduire une certaine robustesse. Cet algorithme a été appliqué avec succès sur des signaux de radiocommunication permettant ainsi de séparer différentes zones selon le trajet que le signal a effectué. Dans ce cas, notre algorithme constitue un pré-traitement qui permet ensuite de faire des modélisations sur des zones homogènes. Ensuite, la segmentation par maxima a été utilisée sur les signaux annexes de l'EEG. Nous avons dû introduire des "a priori" propres à ces signaux afin de définir une méthodologie qui permette d'extraire les coordonnées temporelles des questions et des réponses. Les données extraites par notre méthode vont être utilisées pour analyser les représentations TF associées au signal EEG que nous calculerons à partir des algorithmes introduits dans les chapitres suivants.

Dans un second temps, en s'appuyant sur le postulat que l'information, même bruitée, conserve un angle de gradient stable, alors que l'angle du bruit fluctue, nous avons défini une technique de discrimination dans l'image gradient plus robuste que l'utilisation de la norme. L'extension au gradient multiéchelles nous a permis de concevoir un algorithme de débruitage qui étudie plusieurs bandes de fréquence à travers l'information contour. L'application de cet algorithme sur des images très bruitées a montré l'efficacité de notre méthode (par exemple sur les images d'angiographie).

Ce chapitre ne constitue qu'une infime partie des méthodes que l'on peut créer à partir de la représentation en maxima d'ondelettes. Par exemple, nous pensons étendre différents algorithmes



(a)

(b)

FIG. 2.38 – Image d'angiographie (échelle 3): (a) Image originale (b) Image débruitée par l'information angle multiéchelles

de segmentation basés sur le gradient monoéchelle, que l'on trouve dans la littérature, à la décomposition multiéchelles et les généraliser pour des images couleurs.

Toutefois, comme nous l'avons déjà précisé, un algorithme de segmentation 1D basé sur les maxima d'ondelettes ne va étudier que les ruptures basses fréquences. Nous allons donc quitter le domaine de l'analyse des courbes par représentation temps-échelles pour utiliser les décompositions en ondelettes de Malvar qui correspondent à une transformée de Fourier à fenêtres adaptatives. Cette nouvelle représentation va nous permettre de définir des méthodes de partition qui étudient les fluctuations d'un signal sur toute sa bande de fréquence, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Quelques algorithmes sur les ondelettes de Malvar

3.1 Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre une famille particulière d'ondelettes appelée *ondelettes de Malvar* ou *transformée trigonométrique locale*. Cette transformée, introduite par Coifman et Meyer [31] à partir des textes de Malvar [71], consiste à appliquer une partition temporelle adaptée du signal, grâce à des fenêtres régulières, puis à effectuer une analyse de Fourier sur chacun des segments. On remarque que ce processus est inverse de celui utilisé lors d'une décomposition "classique" en ondelettes qui effectue tout d'abord un filtrage adapté du signal, puis une analyse temporelle.

Les ondelettes de Malvar s'inscrivent dans le cadre général de l'analyse de Fourier à court terme, donc des techniques temps-fréquence, et non temps-échelle. Grâce aux ondelettes de Malvar, une collection de décompositions trigonométriques locales est construite et la meilleure d'entre elles, au sens d'un critère, peut être sélectionnée à l'aide de l'algorithme *Best-Basis* proposé par Coifman et Wickerhauser [32]. Nous obtenons ainsi une analyse de Fourier à court terme orthogonale, restructurable, avec des fenêtres de tailles et de régularités variables.

Durant ces dernières années, les principaux champs d'applications de cette décomposition ont été la compression¹ [97] [89] [55], la segmentation [95], [2], [3] [97] et plus récemment l'estimation de la covariance de processus localement stationnaires [41],[40].

Nous proposons dans ce chapitre plusieurs évolutions tant sur le plan de l'algorithme de décomposition que sur le choix de la meilleure base. Le but recherché est de définir, pour la classe des signaux stationnaires par partie, une analyse trigonométrique locale pour laquelle les fenêtres ont une taille et une position adaptées au signal.

Dans un premier temps, nous faisons un rappel sur la décomposition en ondelettes de Malvar telle qu'elle est définie dans [31], [5] et [96]. Puis nous proposons une variante de l'algorithme de décomposition monodimensionnel, qui a la propriété d'être non uniforme et optimale relativement à une fonction de coût. Cette décomposition s'appuie sur un algorithme de partition d'un axe qui permet d'obtenir une segmentation non-uniforme avec une complexité minimale. Nous la proposons

1. On notera que le principe de segmentation temporelle puis d'analyse par base trigonométrique locale est présent dans la méthode de compression JPEG.

dans un cadre général afin de l'appliquer pour construire différentes bases non uniformes (ceci fera l'objet du chapitre 5). Nous apportons quelques précisions sur son extension à la dimension 2. Enfin, nous proposons une nouvelle méthode de sélection de la meilleure partition temporelle du signal. Cette approche, similaire dans le principe à celle de Adak [1], adapte la partition du signal en fonction des changements locaux du spectre. Une version 2D anisotropique est étudiée.

Dans ce chapitre et les suivants, nous proposons différentes méthodes tentant de représenter au mieux l'information contenue dans un signal. Or ces différentes décompositions s'inscrivent dans le cadre des représentations temps-fréquence, c'est-à-dire qu'elles permettent une représentation de l'évolution de l'information à la fois en fonction du temps mais aussi des fréquences. Donc, pour valider ou illustrer les méthodes appliquées sur des exemples, nous devons présenter l'image TF associée à notre décomposition discrète. Pour construire cette image TF, nous allons utiliser les boîtes d'Heisenberg. Nous rappelons en annexe le principe des boîtes d'Heisenberg.

Pour chaque nouvelle décomposition introduite dans notre mémoire, nous indiquerons les boîtes d'Heisenberg associées aux éléments de base, ce qui nous permettra de calculer les différentes représentations TF, comme nous l'expliquons en annexe, et ainsi d'analyser et de comparer les résultats obtenus.

3.2 Rappel sur les ondelettes de Malvar

3.2.1 Fenêtrage

Nous présentons dans ce paragraphe la version discrète de la décomposition en ondelettes de Malvar, nous nous plaçons dans l'espace $l^2(Z)$. On se propose d'analyser un signal échantillonné sur Z . L'analyse que nous effectuerons est du type temps-fréquence. Elle consiste à effectuer tout d'abord une segmentation appropriée, puis une analyse de Fourier locale.

Soit la partition arbitraire de Z en intervalles adjacents vérifiant

$$\bigcup_j I_j = Z \text{ et } I_j \cap I_{j'} = \emptyset \text{ pour } \forall j \neq j', \quad (3.1)$$

avec $I_j = [a_j, a_{j+1} - 1]$, $j \in Z$, et $a_j \rightarrow \pm\infty$ quand $j \rightarrow \pm\infty$. On note $l_j = a_{j+1} - a_j$ la taille de l'intervalle I_j .

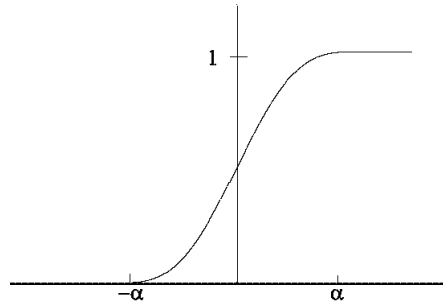
Le signal n'est pas segmenté brutalement par des fonctions indicatrices définies sur $[a_j, a_{j+1} - 1]$. On préfère, pour éviter les effets de bord, utiliser des fenêtres de segmentation w_j qui soient régulières. Autour de chaque point de coupure a_j , nous définissons une zone de recouvrement, nécessaire pour construire des fenêtres régulières. Cette zone de recouvrement, notée α_j , correspond à une suite vérifiant $\alpha_j > 0$ et $l_j > \alpha_j + \alpha_{j+1}$. Afin de construire la fenêtre w_j , nous introduisons une fonction de coupure, ou rampe, $r(t)$ vérifiant les conditions suivantes [5] :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et,

$$r^2(t) + r^2(-t) = 1, \forall t \in Z. \quad (3.2)$$

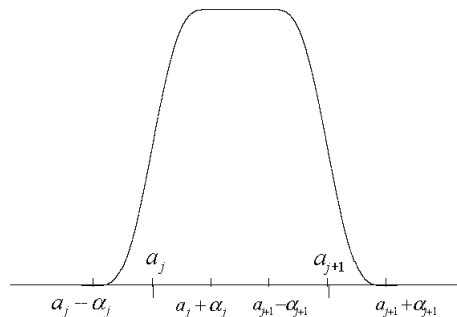
Nous représentons sur la figure 3.1 un exemple de fonction $r(t)$ vérifiant ces conditions.

FIG. 3.1 – Une fonction "rampe" $r(t/\alpha)$

A partir de la fonction de coupure $r(t)$, les fenêtres $w_j[t]$, de support $[a_j - \alpha_j, a_{j+1} + \alpha_{j+1}]$, sont définies par [96]

$$w_j[t] = \begin{cases} r\left(\frac{t-a_j}{\alpha_j}\right) & \text{si } t \in [a_j - \alpha_j, a_j + \alpha_j] \\ 1 & \text{si } t \in [a_j + \alpha_j, a_{j+1} - \alpha_{j+1}] \\ r\left(\frac{a_{j+1}-t}{\alpha_{j+1}}\right) & \text{si } t \in [a_{j+1} - \alpha_{j+1}, a_{j+1} + \alpha_{j+1}] \\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, a_j - \alpha_j] \cup [a_{j+1} + \alpha_{j+1}, +\infty[\end{cases}$$

Nous présentons sur la figure 3.2 un exemple de fenêtre $w_j[t]$. On remarque que la fonction de coupure $r(t)$ et le paramètre α_j vont régler la surface de recouvrement entre deux fenêtres successives, et donc contrôler la régularité de la fenêtre. On va pouvoir ainsi construire une multitude de fenêtres plus ou moins régulières. On peut trouver dans la littérature un certain nombre d'exemples de fonctions de coupure $r(t)$ (par exemple dans le livre de Wickerhauser [96]).

FIG. 3.2 – Une fonction de fenêtrage w_j

Le fenêtrage par $w_j[t]$ de la fonction f sur l'intervalle I_j va s'exprimer directement en terme de la fonction de la coupure. Soit une fonction rampe $r(t)$ et une fonction $f \in l^2(Z)$, alors la projection de f sur un intervalle $I_j = [a_j - \alpha, a_{j+1} + \alpha]$ est définie par [5] (dans le cas d'une fenêtre à recouvrement constant $\alpha_j = \alpha = cst$)

$$(T_{I_j} f) = r^2\left(\frac{t}{\alpha}\right) f[t] \pm r\left(\frac{t-a_j}{\alpha}\right) r\left(\frac{a_j-t}{\alpha}\right) f[2a_j-t] \pm r\left(\frac{t-a_{j+1}}{\alpha}\right) r\left(\frac{a_{j+1}-t}{\alpha}\right) f[2a_{j+1}-t]. \quad (3.3)$$

On constate que quatre projections sont décrites dans l'équation (3.3) selon le signe "±" choisi. Ces choix de signes dépendent de la polarité de la fonction analysante utilisée dans chaque intervalle (par exemple, paire au début de l'intervalle, et impaire à la fin). Ils se nomment "polarité de la projection T_{I_j} ", ou "polarité de I_j " et se notent (\pm, \pm) [5]. La polarité de la projection est importante

lorsque l'on désire combiner les projections de deux intervalles adjacents. En particulier, si les intervalles I_j et I_{j+1} sont de polarités opposées en a_{j+1} alors (de l'équation (3.2)) [5]

$$T_{I_j} + T_{I_{j+1}} = T_{I_j \cup I_{j+1}} \text{ et } T_{I_j} T_{I_{j+1}} = T_{I_{j+1}} T_{I_j} = 0.$$

Nous reviendrons ultérieurement sur ce principe de polarité et de décomposition orthogonale.

3.2.2 Bases trigonométriques locales

Soit Trig, une fonction trigonométrique qui forme une base orthonormée de $l^2 [0, \lg_j - 1]$. Trig correspond à l'une des fonctions sinus/cosinus répertoriées par Rao et Yip comme, par exemple, la transformée en cosinus discrète de type I (notée DCT-I) (nous indiquons entre parenthèses les polarités aux deux extrémités de l'intervalle) [5] :

$$\begin{aligned} (DST - I) (-, -) &\implies \text{Trig}_k [t] = \sqrt{\frac{2}{\lg_j}} \sin \left[k \frac{\pi}{\lg_j} t \right] \\ (DST - IV) (-, +) &\implies \text{Trig}_k [t] = \sqrt{\frac{2}{\lg_j}} \sin \left[\frac{\pi}{\lg_j} \left(k + \frac{1}{2} \right) t \right] \\ (DCT - I) (+, +) &\implies \text{Trig}_k [t] = \sqrt{\frac{2}{\lg_j}} \cos \left[k \frac{\pi}{\lg_j} t \right] \\ (DCT - IV) (+, -) &\implies \text{Trig}_k [t] = \sqrt{\frac{2}{\lg_j}} \cos \left[\frac{\pi}{\lg_j} \left(k + \frac{1}{2} \right) t \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3 *La famille $\{\text{Trig}_k\}_{0 \leq k < \lg_j}$ est une famille orthonormée de $l^2 [0, \lg_j - 1]$*

Les transformées en cosinus et sinus discrètes se calculent à partir de l'algorithme FFT et possèdent donc une complexité algorithmique de $\theta(N \log_2 N)$. Ce sont ces transformées trigonométriques qui vont constituer les éléments de base de la décomposition en ondelettes de Malvar. Les ondelettes de Malvar sont construites à partir de la fenêtre $w_j [t]$ et de l'une des quatre bases de sinus ou de cosinus, introduites ci-dessus, par

$$\psi_{j,k} [t] = \{w_j [t] \text{Trig}_k [t - a_j]\}, \quad 0 \leq k \leq \lg_j - 1.$$

3.2.3 Opérateur de repliement

En pratique, la décomposition d'une fonction f dans une des bases définies par les équations (3.4) ne se calcule pas par l'évaluation de la corrélation entre la fonction étudiée et les éléments de base. La fonction f , bornée sur $[a_j - \alpha, a_{j+1} + \alpha]$, est transformée en une fonction régulière, restreinte à l'intervalle $[a_j, a_{j+1} - 1]$, puis projetée dans une base formée de fonctions cosinus ou sinus. Afin de calculer la restriction de f à $[a_j, a_{j+1} - 1]$, la zone de la fenêtre correspondant au recouvrement est repliée sur l'intervalle, autour des points de coupure, grâce à un opérateur de repliement noté U .

Les opérateurs de repliement U_{a_j} et adjoint $U_{a_j}^*$ sont définis par [96]

$$U_{a_j} f [t] = \begin{cases} r \left(\frac{a_j - t}{\alpha} \right) f [t] - r \left(\frac{t - a_j}{\alpha} \right) f [2a_j - t], & \text{si } a_j - \alpha < t < a_j \\ r \left(\frac{t - a_j}{\alpha} \right) f [t] + r \left(\frac{a_j - t}{\alpha} \right) f [2a_j - t], & \text{si } a_j < t < a_j + \alpha \\ f [t] & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

et,

$$U_{a_j}^* f[t] = \begin{cases} r \left(\frac{a_j - t}{\alpha} \right) f[t] + r \left(\frac{t - a_j}{\alpha} \right) f[2a_j - t], & \text{si } a_j - \alpha < t < a_j \\ r \left(\frac{t - a_j}{\alpha} \right) f[t] - r \left(\frac{a_j - t}{\alpha} \right) f[2a_j - t], & \text{si } a_j < t < a_j + \alpha \\ f[t] & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

On observe que $U_{a_j}^* U_{a_j} f[t] = U_{a_j} U_{a_j}^* f[t] = f[t]$ pour tout t . Nous illustrons sur la figure 3.3 les résultats des opérateurs U_{a_j} et $U_{a_j}^*$ dans le cas simple d'une fonction constante $f \equiv 1$. Notons que les définitions des opérateurs de repliement présentées dans les équations (3.5) et (3.6) correspondent à des polarités particulières, mais que d'autres opérateurs peuvent être définis en effectuant le changement ($+ \leftrightarrow -$) dans les deux équations.

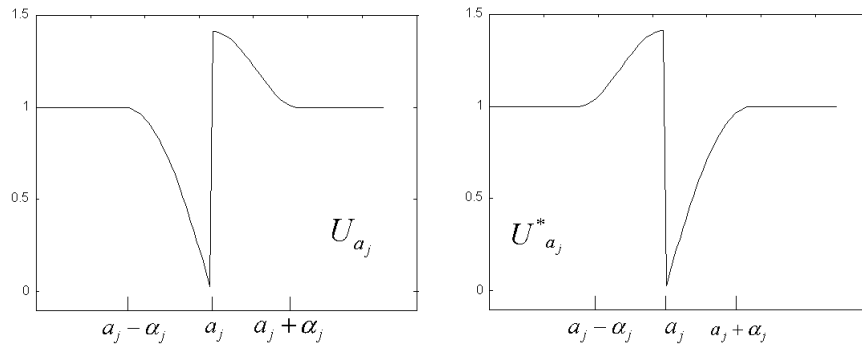


FIG. 3.3 – Applications des opérateurs de repliement U et adjoint U^* sur une fonction constante

Soit 1_{I_j} l'opérateur de restriction défini par

$$1_{I_j} f[t] = \begin{cases} f[t] & \text{si } t \in [a_j, a_{j+1} - 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors, des définitions précédentes, on construit une transformée orthogonale qui restreint une fonction f sur un intervalle tout en préservant la régularité. L'opérateur de restriction régulière T_{I_j} est défini par

$$T_{I_j} f = 1_{I_j} U_{a_j} U_{a_{j+1}} f, \quad (3.7)$$

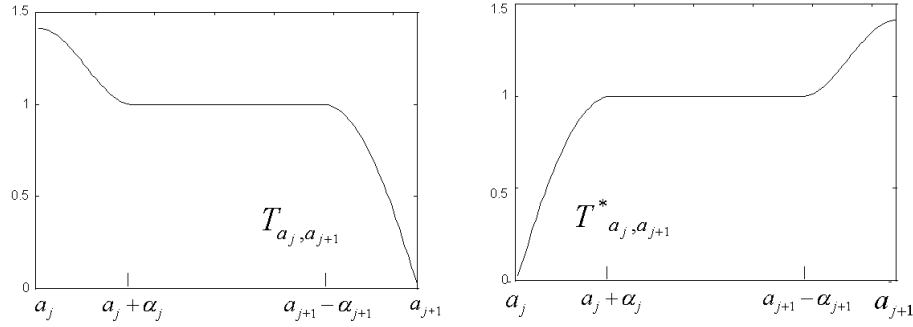
et son adjoint

$$T_{I_j}^* f = U_{a_j}^* U_{a_{j+1}}^* 1_{I_j} f. \quad (3.8)$$

La projection est orthogonale si l'opérateur de restriction a des polarités opposées aux deux points extrêmes a_j et a_{j+1} , ce qui est le cas si U_{a_j} est défini, par exemple, par l'équation (3.5). On peut visualiser sur la figure 3.4 les résultats des opérateurs T_{I_j} et $T_{I_j}^*$ sur une fonction constante.

3.2.4 Base orthonormée fenêtrée

Une base fenêtrée orthonormée de $l^2(Z)$ est définie dans le cas général à partir d'une base périodique orthonormée $\{\varphi_k\}_{0 \leq k < N}$ de $l^2[0, N - 1]$. $\{\varphi_k\}_{0 \leq k < N}$ est étendu sur Z avec une symétrie autour de $-\frac{1}{2}$ et une antisymétrie autour de $N - \frac{1}{2}$ par [68]


 FIG. 3.4 – Applications des opérateurs de restriction T_{I_j} et adjoint $T_{I_j}^*$ sur une fonction constante

$$\tilde{\varphi}_k [t] = \begin{cases} \varphi_k [t] & \text{si } t \in [0, N - 1] \\ \varphi_k [-1 - t] & \text{si } t \in [-N, -1] \\ -\varphi_k [2a - 1 - t] & \text{si } t \in [a, 2N - 1] \\ -\varphi_k [2a + t] & \text{si } t \in [-2N, -N - 1] \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 4 La famille $\left\{ \psi_{j,k} [t] \triangleq T_{I_j}^* \tilde{\varphi}_k [t - a_j] \right\}_{0 \leq k < l_{g_j}, j \in \mathbb{Z}}$ est une base orthogonale fenêtrée de $l^2(Z)$ [68].

Ceci provient du fait que les fonctions $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ respectent les polarités de l'opérateur de restriction $T_{I_j}^* : (+, -)$.

Nous avons vu que les ondelettes de Malvar sont construites à partir de la fenêtre $w_j [t]$ et de l'une des quatre bases de sinus ou de cosinus introduites dans (3.4). Puisque la fonction $\cos \left[\frac{\pi}{l_{g_j}} (k + \frac{1}{2}) t \right]$ a une extension naturelle symétrique autour de $-\frac{1}{2}$ et antisymétrique autour de $N - \frac{1}{2}$ alors d'après le théorème précédent nous pouvons construire une base d'ondelettes de Malvar à partir de la transformée DCT-IV qui soit telle que² :

Théorème 5 La suite $\left\{ \psi_{j,k} [t] = T_{I_j}^* \sqrt{\frac{2}{l_{g_j}}} \cos \left[\frac{\pi}{l_{g_j}} (k + \frac{1}{2}) (t - a_j) \right] \right\}_{0 \leq k \leq l_{g_j} - 1, j \in \mathbb{Z}}$, est une base orthonormée de $l^2(Z)$ [31].

Une seconde forme d'ondelettes de Malvar correspond à l'application alternée de sinus et de cosinus par l'intermédiaire des transformées DST-I et DCT-I, suivant que j est pair ou impair.

Les coefficients d'ondelette $d_{j,k}$ dans la base de Malvar s'obtiennent alors par l'expression de $T_{I_j} f$ dans la base formée par les fonctions cosinus ou sinus [96] :

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle f, T_{I_j}^* \text{Trig}_k [t - a_j] \rangle = \langle T_{I_j} f, \text{Trig}_k [t - a_j] \rangle. \quad (3.10)$$

En résumé, la décomposition en ondelettes de Malvar se calcule de la façon suivante :

1. calcul de $T_{I_j} f$ en utilisant l'opérateur de repliement U_{a_j} ,

2. Remarque : la polarité de l'opérateur $T_{I_j}^*$ dépend du choix de la fonction $\tilde{\varphi}$. Dans l'équation (3.9), nous avons présenté une définition de la fonction $\tilde{\varphi}$ symétrique autour de $-\frac{1}{2}$ et antisymétrique autour de $N - \frac{1}{2}$, mais nous pouvons utiliser une fonction ayant une polarité inverse, comme la transformée DST_IV, et dans ce cas on peut définir une base orthonormale en utilisant l'opérateur T_{I_j} à la place de $T_{I_j}^*$ dans le théorème 4.

2. projection de $T_{I_j} f$ dans une des bases trigonométriques Trig_k à l'aide d'un algorithme basé sur la FFT.

À l'inverse, la reconstruction de f à partir de $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ est effectuée par :

1. calcul de $T_{I_j} f$ à partir des coefficients $d_{j,k}$ par transformée trigonométrique inverse,
2. calcul de la projection $T_{I_j}^* T_{I_j} f$ en utilisant l'opérateur de repliement adjoint $U_{a_j}^*$,
3. addition des différents $T_{I_j}^* T_{I_j} f$ afin de reconstruire le signal par $f = \sum_j T_{I_j}^* T_{I_j} f$

Dans le cadre des ondelettes de Malvar, la région TF correspondant à la concentration maximale d'énergie de l'atome $\psi_{j,k}$ est approximée par le bloc d'Heisenberg suivant

$$[a_j, a_{j+1} - 1] \times \left[(k + 0.5) \frac{0.5}{\lg_j} - \frac{0.5}{2 \lg_j}, (k + 0.5) \frac{0.5}{\lg_j} + \frac{0.5}{2 \lg_j} \right]$$

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de ce chapitre, cette définition nous permet d'illustrer chaque décomposition discrète en ondelettes de Malvar d'un signal par une image TF. Notons que cette définition est générale (intervalle $[a_j, a_{j+1} - 1]$) et peut donc être utilisée pour une décomposition dyadique ou non-uniforme.

3.2.5 Divisions successives et meilleure base

Il est possible de calculer plusieurs transformées trigonométriques locales par divisions successives des intervalles. On suppose que l'on commence par une partition du signal en un seul segment noté I_0^0 tel que $I_0^0 = [0, N - 1]$. Notons que nous ajoutons un indice au symbole I afin de faire apparaître l'échelle. Nous pouvons raffiner la partition en coupant le ou les segments par leur milieu. À l'échelle l , les intervalles ont alors une taille égale à $N2^{-l}$ et sont définis par

$$I_j^l = N \left[2^{-l} j, 2^{-l} (j + 1) - 1 \right] \text{ avec } \bigcup_j I_j^l = [0, N - 1] \text{ et } I_j^l \cap I_{j'}^l = \emptyset \text{ pour } \forall j \neq j'.$$

Nous notons S_l la partition de f avec des intervalles de taille 2^{-l} telle que

$$S_l = \left\{ T_{I_0^l} f, T_{I_1^l} f, \dots, T_{I_{2^l-1}^l} f \right\},$$

avec $T_{I_j^l} f$ la restriction de la fonction f à l'intervalle I_j^l .

La généalogie du raffinement de la partition s'exprime dans l'équation $I_j^l = I_{2_j^{l+1}}^{l+1} \cup I_{2_{j+1}^{l+1}}^{l+1}$. Après séparation de l'intervalle I_j^l en deux fils $I_{2_j^{l+1}}^{l+1}$ et $I_{2_{j+1}^{l+1}}^{l+1}$, nous appliquons l'opérateur de repliement au point médian $\left(2^{-l} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) N$. Nous effectuons cette opération pour $l = 1..L$ et $j = 0..2^l - 1$. L symbolise le nombre d'échelles de décomposition.

Deux types de repliement sont possibles durant le calcul récursif des échelles :

- le premier consiste à utiliser une zone d'influence constante pour toutes les échelles, c'est-à-dire fixer $\alpha_l = cst$,
- le second va faire varier la zone d'influence en fonction de l'échelle, ou plus précisément de la taille des intervalles.

Pour plus de détails, nous renvoyons au livre de Wickerhauser [96].

De proche en proche, nous construisons une collection de partitions du signal que l'on peut organiser en arbre (figure 3.5). Nous résumons la procédure permettant de calculer une échelle l à partir de l'échelle $l - 1$ par

$$S_l = \left(U_{N2^{-l}} \circ U_{\frac{3N}{2^{-l}}} \circ \dots \circ U_{N\frac{2^{l-1}+1}{2^l}} \right) S_{l-1}, \quad (3.11)$$

avec $U_{2^{-l}}$ repliement de la fonction autour du point 2^{-l} .

Par la suite, afin de simplifier les équations, nous remplacerons $\left(U_{N2^{-l}} \circ U_{N\frac{3}{2^{-l}}} \circ \dots \circ U_{N\frac{2^{l-1}+1}{2^l}} \right)$ par ${}^{(l-1)}U$. L'équation (3.11) s'écrit alors

$$S_l = {}^{(l-1)}U S_{l-1}. \quad (3.12)$$

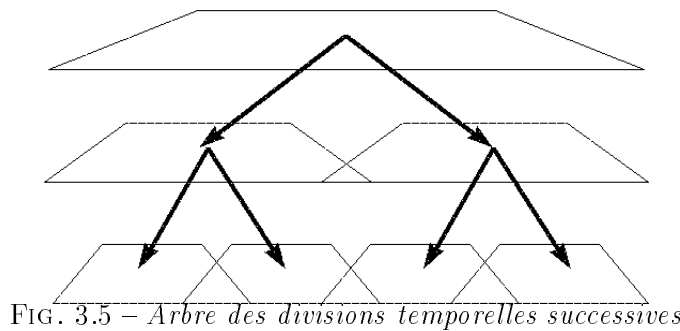


FIG. 3.5 – Arbre des divisions temporelles successives

De la même façon, on peut exprimer la partition à l'échelle $l - 1$ à partir de la partition à l'échelle l par

$$\begin{aligned} S_{l-1} &= \left(U_{N2^{-l}}^* \circ U_{N\frac{3}{2^l}}^* \circ \dots \circ U_{N\frac{2^{l-1}+1}{2^l}}^* \right) S_l \\ &= {}^{(l-1)}U^* S_l. \end{aligned}$$

Si l'on applique sur chacun des intervalles construits à partir de l'équation (3.12), l'une des décompositions trigonométriques introduites dans l'équation (3.4) et correspondant aux polarités choisies pour $T_{I_j^l}$, nous obtenons une collection de bases trigonométriques locales $\{\psi_{j,k}^l\}_{0 \leq l < L, 0 \leq j < 2^l, 0 \leq k < N2^{-l}}$ définie par

$$\psi_{j,k}^l [t] = T_{I_j^l}^* \text{trig}_k [t - 2^{-l}jN]$$

D'après le théorème 4, puisque les restrictions et les fonctions analysantes sont de mêmes polarités, les bases ainsi construites sont orthogonales. Plus précisément, si on note W_j^l le sous-espace fermé de $l^2 [0, N - 1]$ généré par la base orthonormée $\{\psi_{j,k}^l\}_{0 \leq k < N2^{-l}}$, si on appelle *arbre binaire admissible* l'ensemble des sous-arbres pour lesquels chaque noeud a 0 ou 2 fils et soit A l'ensemble des indices $\{j_\gamma, l_\gamma\}_\gamma$ correspondant à un arbre admissible alors du théorème 4 $l^2 [0, N - 1] = W_0^0 = \bigoplus_{(j,l) \in A} W_j^l$.

Puisque nous avons une collection de bases, il faut sélectionner la base qui est optimale pour la représentation du signal. Pour cela, on définit une fonction de coût ε qui évalue la qualité d'une décomposition. ε associe au vecteur des coefficients d'ondelettes, une valeur réelle quantifiant le coût d'information. On pose généralement que ε vérifie la condition d'additivité suivante :

Définition 2 Une fonction de coût ε d'une séquence $\{x_k\}$ vers R est appelée fonction de coût additive si $\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(\{x_k\}) = \sum_k \varepsilon(x_k)$ [32].

Si nous notons Ba la collection de bases, nous sélectionnons alors une base $B \in Ba$ qui est minimale au sens de la fonction de coût ε .

Définition 3 *La meilleure base relative à ε pour un vecteur f dans une collection de bases Ba est telle que $\varepsilon(B^*f)$ est minimum, avec $B^* \in Ba$ [32].*

La méthode la plus intuitive pour déterminer la meilleure base serait de mesurer le coût de toutes les bases, puis de sélectionner celle qui correspond au minimum. Toutefois, la complexité algorithmique de cette procédure va croître d'une manière importante, lorsque le nombre d'échelles augmente. Dans le cadre des ondelettes de Malvar, comme pour les paquets d'ondelettes, nous déterminons la meilleure base avec un algorithme de complexité n en utilisant la généalogie du raffinement ($I_j^l = I_{2j}^{l+1} \cup I_{2j+1}^{l+1}$) [32]. Nous évaluons tout d'abord le coût de chaque projection de f sur les différents intervalles. Puis le coût de chaque couple d'intervalles adjacents, formant un bloc dyadique, est comparé au coût de l'intervalle résultant de leur union (le noeud père dans l'arbre binaire). Nous sélectionnons alors le ou les noeuds correspondant au minimum. De proche en proche, cette méthode permet de choisir la meilleure base relative à la fonction de coût.

Concrètement, l'algorithme de recherche de meilleure base introduit par Coifman et Wickerhauser se définit de la façon suivante [32] :

Soit B_j^l la base au noeud d'indice (l, j) de la dcomposition et correspondant l'intervalle I_j^l ; soit A_j^l la base choisie ce mme noeud et E_j^l le cot associ.

Aprs une initialisation par

$$A_j^L = B_j^L \text{ et } E_j^L = \varepsilon(B_j^L), \text{ pour } j = 0..2^L - 1,$$

on applique rcursivement le processus suivant :

Pour l variant de $L - 1$

Pour j variant de 0 à $2^l - 1$

Si $E_{2j}^l + E_{2j+1}^l > \varepsilon(B_j^{l-1})$ alors $A_j^{l-1} = B_j^{l-1}$ et $E_j^{l-1} = \varepsilon(B_j^{l-1})$

sinon $A_j^{l-1} = A_{2j}^l \cup A_{2j+1}^l$ et $E_j^{l-1} = E_{2j}^l + E_{2j+1}^l$

Cet algorithme permet de sélectionner la meilleure base au sens de la fonction de coût ε [32].

3.2.6 Extension à la dimension 2 des ondelettes de Malvar

Un élément de la base de Fourier 2D est le produit tensoriel de 2 éléments de dimension 1 :

$$e^{2\pi i \vec{t} \vec{\xi}} = e^{2\pi i t_1 \xi_1} \times e^{2\pi i t_2 \xi_2}.$$

Donc, la transformée de Fourier discrète, et toutes les transformées trigonométriques comme la DCT-I peuvent être calculées pour la dimension 2, séparément dans chaque direction.

On peut effectuer une transformée trigonométrique locale 2D sur 4 plus petits sous blocs en coupant d'abord l'image originale en 4 éléments, et en appliquant une transformée trigonométrique sur chacun des éléments. Cette procédure peut être appliquée récursivement afin d'obtenir une décomposition en des blocs de plus en plus petits.

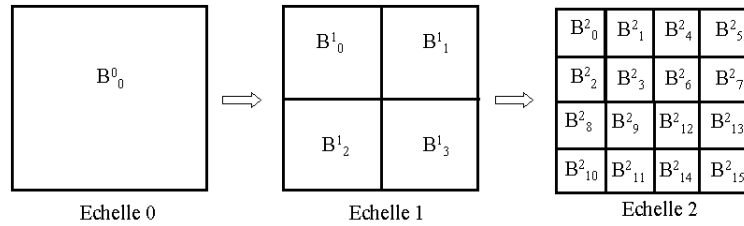


FIG. 3.6 – Notations des sous-blocs utilisées dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar

Afin de calculer la transformée en ondelettes de Malvar 2D, nous devons tout d'abord restreindre le signal selon la direction x , puis selon la direction y , grâce à l'opérateur Tf défini dans le cas 1D. Nous présentons sur la figure 3.6 les notations couramment utilisées dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar. Chaque sous bloc est noté B_j^l avec l indice d'échelle et j le numéro de la projection. A chaque itération, les blocs se divisent en quatre, chacun des sous blocs ainsi construits est numéroté dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$B_j^l \Rightarrow \begin{bmatrix} B_{4j}^{l+1} & B_{4j+1}^{l+1} \\ B_{4j+2}^{l+1} & B_{4j+3}^{l+1} \end{bmatrix}.$$

Nous notons S_l la partition de $f[x, y]$ avec des carrés de taille $N2^{-l} \times N2^{-l}$ telle que

$$S_l = \left\{ T_{B_0^l} f, T_{B_1^l} f, \dots, T_{B_j^l} f, \dots, T_{B_{4^l-1}^l} f \right\}.$$

Formellement, le calcul de la partition à l'échelle l à partir de l'échelle $l-1$ se résume par

$$\begin{aligned} S_l &= \left(U_{2^{-l}}^y \circ U_{\frac{3}{2^l}}^y \circ \dots \circ U_{\frac{2^{l-1}+1}{2^l}}^y \right) \circ \left(U_{2^{-l}}^x \circ U_{\frac{3}{2^l}}^x \circ \dots \circ U_{\frac{2^{l-1}+1}{2^l}}^x \right) \circ S_{l-1} \\ &= {}^{(l-1)}U^y \circ {}^{(l-1)}U^x \circ S_{l-1}. \end{aligned}$$

L'opération inverse s'écrit

$$S_{l-1} = {}^{(l-1)}U^{*y} \circ {}^{(l-1)}U^{*x} S_l.$$

Si l'on applique l'une des transformées trigonométriques locales définie par l'équation (3.4), selon x et selon y , sur chaque bloc B_j^l , nous obtenons alors une collection de bases trigonométriques locales 2D. Nous illustrons sur la figure 3.7, l'arbre correspondant à une décomposition en ondelettes de Malvar 2D sur 3 échelles.

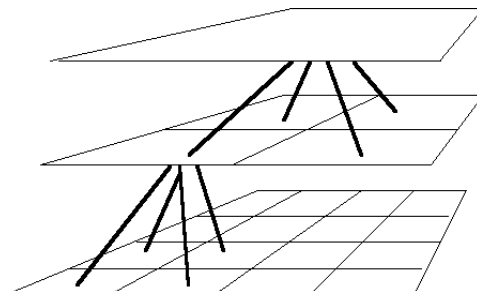


FIG. 3.7 – Décomposition en ondelettes de Malvar 2D sur 3 échelles

L'algorithme de recherche de meilleure base 2D suit le même principe que celui défini dans le cas 1D, avec pour seule différence, que l'on remarque sur la figure 3.7, que le nombre de fils pour chaque noeud n'est plus de 2 mais égal à 4. Lors de la recherche de la meilleure projection, nous comparons donc le coût des 4 sous blocs adjacents, formant un bloc dyadique, au coût du carré résultant de leurs unions (le noeud père dans l'arbre binaire).

3.3 Une décomposition optimale et non-uniforme

La décomposition en ondelettes de Malvar présentée ci-dessus a le défaut de ne pas être invariante par translation, c'est-à-dire qu'elle ne vérifie pas l'équation suivante

$$f(t) \rightarrow f(t - \beta) \iff d_{j,k}(t) \rightarrow d_{j,k}(t - \beta).$$

De plus, l'arbre binaire associé aux ondelettes de Malvar correspond à une partition dyadique uniforme du signal, c'est-à-dire que chaque intervalle vérifie $I_j^l = N \left[2^{-l}j, 2^{-l}(j+1) - \frac{1}{N} \right]$. Il ne permet donc pas d'examiner toutes les segmentations possibles avec des intervalles de taille égale à $2^{-l}N$, pour l variant de 0 à L .

Nous présentons dans cette section un nouvel algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar qui ne recherche pas uniquement la meilleure partition du signal dans la collection dyadique. La décomposition que nous proposons n'est pas invariante par translation dans un sens strict, mais invariante par translation de $s2^{-L}N$ points [15]. I. Cohen *et al.* ont exposé récemment un algorithme permettant de calculer une décomposition en ondelette de Malvar invariante par translation de $s2^{-L}N$ points [28]. Toutefois, cet algorithme n'est pas optimal relativement à la fonction de coût car il sélectionne à chaque échelle la meilleure translation avant le calcul de l'échelle suivante (afin de limiter la complexité de l'algorithme), et donc n'étudie qu'un certain nombre de translations possibles et donc de partitions. L'algorithme que nous proposons est optimal (sous certaines contraintes) tout en conservant une complexité algorithmique "raisonnable". Récemment, nous avons pris connaissance d'un algorithme proposé par Xiong [98] dans le cadre d'une décomposition double tree (nous reviendrons dans le dernier chapitre sur la définition de l'algorithme double tree) qui permet d'obtenir une division de l'axe temporel non-uniforme optimale. La méthodologie est différente mais la complexité est identique à notre méthode. Toutefois, elle ne propose pas de formalisme récursif. Nous précisons cette méthode à la fin de ce paragraphe.

La définition d'une décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme nous oblige à introduire un algorithme de partition permettant d'étudier toutes les divisions possibles d'un axe $[0, N - 1]$, avec des fenêtres de tailles égales à $2^{-l}N$ avec $0 \leq l \leq L$, mais sous la contrainte que les intervalles non adjacents sur l'axe ne fusionnent pas. En utilisant cet algorithme de partition avec des fonctions φ_k constituant une base de $l^2[0, N - 1]$, nous introduisons un cadre général de décomposition en fonction φ non-uniforme. Cette généralisation sera utilisée dans le chapitre 5 pour définir de nouvelles représentations

3.3.1 Partition non-uniforme d'un axe $[0, N - 1]$

Contrairement à la décomposition "classique" dyadique, nous commençons à l'échelle L la plus fine, qui correspond au signal divisé en 2^L segments, chacun de taille égale à $2^{-L}N$. Notons que

l'algorithme de Cohen utilise cette même initialisation. La partition du signal est alors définie par

$$S_{L,s=0} = \left\{ T_{I_0^{L,s=0}} f, T_{I_1^{L,s=0}} f, \dots, T_{I_{2^L-1}^{L,s=0}} f \right\} \text{ avec } I_j^{L,s} = N \left[2^{-L}j + s, 2^{-L}(j+1) + s - \frac{1}{N} \right].$$

Nous avons introduit un indice supplémentaire s dans les notations de S et I nous permettant de prendre en considération une possible translation. Afin de simplifier le propos, les coordonnées, comme par exemple $2^{-L}j + s$, seront toujours exprimées, dans la suite du paragraphe, par rapport au référentiel original, et ne prendront pas en compte les changements de référentiel dus aux translations.

Si nous appliquons l'opérateur de fusion "dyadique" $(L-1)U^*$ permettant de calculer l'échelle $L-1$ à partir de l'échelle L , nous obtenons la partition $S_{L-1,0}$

$$S_{L-1,0} = {}^{(L-1)}U^* S_{L,0} = \left\{ T_{I_j^{L-1,0}} f \right\}_{0 \leq j < 2^{L-1}},$$

qui correspond à la partition du signal en 2^{L-1} intervalles de taille $2^{-L+1}N$.

Une autre division du signal, avec des intervalles de taille égale à $2^{-L+1}N$ et $2^{-L}N$, est possible si le signal est translaté (rotation circulaire) de $2^{-L}N$ points avant l'opération de fusion. Cette segmentation est définie par

$$\left\{ T_{[N-2^{L-1}, N-1] \parallel [0, 2^{L-1}-1]} f \right\} \cup \left\{ T_{I_j^{L-1, 2^{-L}}} f \right\}_{j=0..2^{L-1}-1}.$$

Toutefois, si l'on étudie le terme $\left\{ T_{[N-2^{L-1}, N-1] \parallel [0, 2^{L-1}-1]} f \right\}$, on constate qu'il correspond à l'union de deux intervalles disjoints dans le signal original. Afin d'analyser le signal, nous appliquons, après fusion, une rotation de -2^{L-1} points permettant de restaurer les positions temporelles originales du signal. Cette rotation va nous contraindre à diviser l'ensemble

$$\left[N - 2^{L-1}, N - 1 \parallel 0, 2^{L-1} - 1 \right]$$

Pour cette raison, nous définissons un nouveau protocole de fusion pour lequel l'union entre le premier et le deuxième intervalle n'est pas effectuée dans le cas d'une partition translatée. Nous notons cet opérateur U_{-b}^* , avec bN le point de fusion non traité. En appliquant cette fusion particulière sur l'ensemble $S_{L,0}$ translaté de $2^{-L}N$ points, nous obtenons la partition $S_{L-1, 2^{-L}}$ définie par

$$\begin{aligned} S_{L-1, 2^{-L}} &= {}^{(L-1)}U_{-2^{-L}}^* [Tr_{2^{-L}}(S_{L,0})], \\ &= \left\{ T_{N[1-2^{-L}, 1-\frac{1}{N}]} f, T_{N[0, 2^{-L}-\frac{1}{N}]} f \right\} \cup \left\{ T_{I_j^{L-1, 2^{-L}}} f \right\}_{j=0..2^{L-1}-1}. \end{aligned}$$

Dans l'expression précédente, $Tr_s(\cdot)$ est un opérateur de rotation circulaire de sN points. Nous indiquons sur la figure 3.8 les deux partitions $S_{L-1,0}$ et $S_{L-1, 2^{-L}}$ ainsi calculées. On constate que les ensembles $S_{L-1,0}$ et $S_{L-1, 2^{-L}}$ correspondent aux noeuds pères³ permettant de construire la totalité des partitions constituées de segments de taille égale à $2^{-L}N$ et $2^{-L+1}N$.

3. Dans la suite du mémoire, nous utiliserons, par abus de langage, l'expression "l'ensemble S correspond aux noeuds pères permettant de construire la totalité des partitions ...". Cela signifie que les intervalles constituant l'ensemble S sont associés aux noeuds d'un arbre (pas forcément binaire) permettant de construire, comme l'arbre dyadique "classique", une collection de partitions.

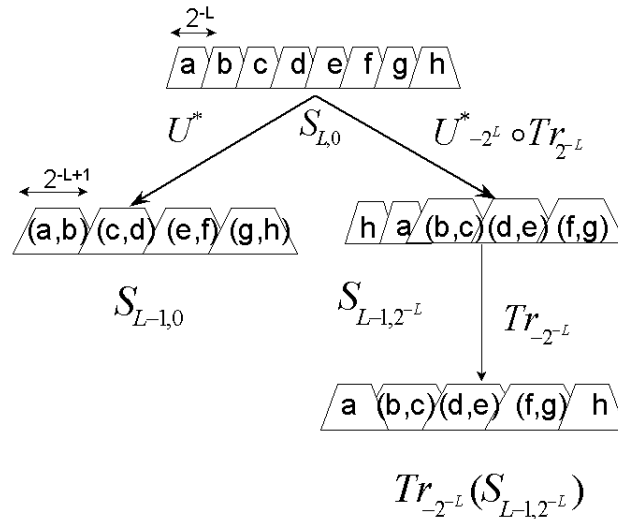


FIG. 3.8 – Fusion de $S_{L,0}$ selon U^* et $U^*_{-2^{-L}}$

Afin de pouvoir exprimer les partitions $S_{l,s}$ à toutes les échelles, nous construisons récursivement un ensemble noté $R_{l,s}$ qui correspond aux intervalles qui n'ont pas fusionné du fait des différentes translations :

$$\begin{aligned}
 R_{l,0} &\triangleq \{\emptyset\} \\
 R_{l,2^{-l-1}} &\triangleq T_{I_0^{l+1,0}} f \cup T_{I_{2^{l+1}-1}^{l+1,0}} f \\
 \text{et } \left\{ \begin{array}{l} R_{l,s} \triangleq R_{l+1,s} \cup T_{I_0^{l+1,s}} f \\ R_{l,s+2^{-l-1}} \triangleq R_{l+1,s} f \cup T_{I_{2^{l+1}-2}^{l+1,s}} f \end{array} \right. & \Bigg|_{s=2^{-L}, 2^{-l-1}-2^{-L}} \quad \text{si } l < L-1
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

On remarque que $\text{card}(R_{l,s}) = N2^{-l}$ pour $\forall s \in [2^{-L}, 2^{-l-1} - 2^{-L}]$. Nous illustrons ces différents cas sur la figure 3.9. A partir de cette figure, nous apportons quelques précisions à la définition de $R_{l,s}$:

1. Nous sommes dans le cas sans translation ($s = 0$ et $R_{l+1,0} = \{\emptyset\}$), tous les intervalles présents à l'échelle $l + 1$ peuvent alors fusionner lors du calcul de l'échelle l , on en déduit donc que $R_{l,0} = \{\emptyset\}$. Sur la figure, nous voyons que dans ce cas les intervalles a et b fusionnent ainsi que c et d. Donc l'ensemble $R_{l,0}$ reste vide.
2. L'échelle $l + 1$ correspond à une partition sans translation ($s = 0$ et $R_{l+1,0} = \{\emptyset\}$) et nous appliquons une translation de $2^{-l-1}N$ points avant le calcul de l'échelle l , alors la fusion entre $I_0^{l+1,0}$ et $I_{2^{l+1}-1}^{l+1,0}$ (le premier et le dernier intervalle de la partition $S_{l+1,0}$) est refusée, nous en déduisons que $R_{l,2^{-l-1}} = T_{I_0^{l+1,0}} f \cup T_{I_{2^{l+1}-1}^{l+1,0}} f$. Sur la figure, nous voyons que l'intervalle d est déplacé. Donc la fusion entre b et c est effectuée, alors que a et d restent inchangés.
3. L'échelle $l + 1$ correspond à une partition avec translation, donc $R_{l+1,s}$ n'est pas vide et est de taille $2^{-l-1}N$. Si nous appliquons l'opérateur de fusion afin de calculer l'échelle l , nous avons un nombre impair d'intervalles $I_j^{l+1,s}$ (précisément $2^{l+1} - 1$). Sur la figure 3.9, nous voyons que la fusion entre c et d peut être calculée. Mais, puisque la fusion entre a et e est interdite,

il est évident que cette condition doit se transmettre à travers les échelles. Donc, l'intervalle b ne peut pas fusionner avec (a, e) . Dans ce cas, l'ensemble $R_{l,s}$ est égal à l'ensemble $R_{l+1,s}$, plus la restriction du signal sur le premier intervalle de l'échelle précédente (intervalle b dans l'exemple). Ceci implique que $R_{l,s} = R_{l+1,s} \cup T_{I_0^{l+1,s}}$.

4. Enfin l'échelle $l + 1$ correspond à une partition avec translation, et nous appliquons une translation de $2^{-l-1}N$ points avant de calculer l'échelle l . Les deux premiers ensembles de $2^{-l-1}N$ points ne devant pas fusionner sont $R_{l+1,s}f$ et l'intervalle déplacé $T_{I_{2^{l+1}-2}^{l+1,s}} f$ (sur la figure, cela correspond à l'intervalle d), donc $R_{l,s+2^{-l-1}} = R_{l+1,s}f \cup T_{I_{2^{l+1}-2}^{l+1,s}} f$.

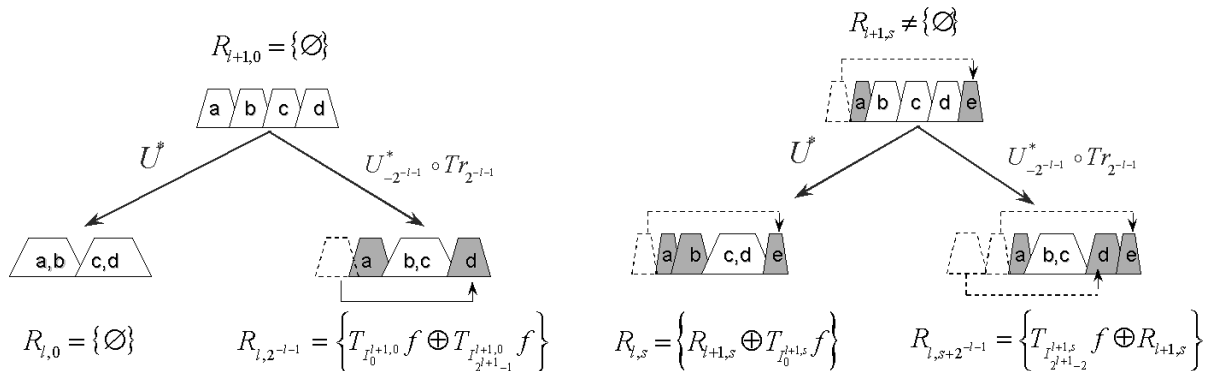


FIG. 3.9 – Construction récursive des ensembles $R_{l,s}$ (symbolisés en grisé)

De l'équation (3.13), nous pouvons alors définir, à toutes les échelles l , les partitions $S_{l,s}$ par

$$S_{l,s} = R_{l,s} \cup \left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^l-1-\delta_{[s>0]}} \quad (3.14)$$

avec $\delta_{[a]} = 1$ si a vrai.

Proposition 6 Les 2^{L-l} ensembles $S_{l,s}$, avec $s = 0..(2^{L-l} - 1)2^{-L}$, définis par l'équation (3.14) correspondent à l'ensemble des noeuds pères permettant de construire toutes les combinaisons possibles de partition non-uniforme disjointe de $[0, N - 1]$ avec des intervalles de taille variant de $2^{-l}N$ à $2^{-L}N$.

Une partition non-uniforme disjointe de $[0, N - 1]$ signifie que si l'on note A^s l'ensemble des indices $\{j_\gamma, l_\gamma, \gamma\}$ correspondant à une des partition non-uniformes construite à partir des noeuds associés à $S_{l,s}$ alors $\bigcup_{(j,l) \in A^s} I_j^{l,s} = [0, N - 1]$, $\bigcap_{(j,l) \in A^s} I_j^{l,s} = \emptyset$. La preuve de cette proposition est donnée en annexe.

Comme nous l'avons suggéré précédemment, il est évident que la condition de "non fusion", définie par l'opérateur U_{-b} , doit se diffuser dans l'arbre aux échelles inférieures (quand l décroît). Par exemple, si la fusion entre $I_j^{l,s}$ et $I_{j+1}^{l,s}$ est interdite à l'échelle l , alors la fusion

$${}^{(l-1)}U \left\{ I_j^{l,s} \cup I_{j+1}^{l,s} \cup I_{j+2}^{l,s} \cup I_{j+3}^{l,s} \right\} \Rightarrow I_{j/2}^{l-1,s} \cup I_{j/2+1}^{l-1,s}$$

doit être, elle-aussi, rejetée à l'échelle $l - 1$.

$R_{l,s}$ se trouve toujours au début de l'ensemble $S_{l,s}$, donc l'interdiction de fusion s'applique soit avec le premier intervalle $T_{I_0^{l,s}} f$, s'il n'y pas de translation, soit avec le dernier intervalle $T_{I_{2^{l+1}-2}^{l+1,s}} f$, si une translation est appliquée. Nous en déduisons la propriété suivante :

$$\left. \begin{aligned} {}^{(l)}U_{-b}^* (R_{l,s} \cup T_{I_0^{l,s}} f) &= R_{l,s} \cup T_{I_0^{l,s}} f, \text{ ou} \\ {}^{(l)}U_{-b}^* (T_{I_{2^{l+1}-2}^{l+1,s}} f \cup R_{l,s}) &= T_{I_{2^{l+1}-2}^{l+1,s}} f \cup R_{l,s} \end{aligned} \right\} \text{ pour } \forall b. \quad (3.15)$$

De ces différentes propriétés et définitions, nous introduisons une seconde proposition qui permet de construire de proche en proche la totalité des partitions non-uniformes du signal.

Proposition 7 Soit les 2^{L-l-1} ensembles $S_{l+1,s}$ correspondant aux noeuds pères, à l'échelle $l+1$, avec $s = 0..(2^{L-l-1}-1)2^{-L}$, permettant de construire toutes les combinaisons possibles de partitions non-uniformes disjointes de $[0, N-1]$ avec des intervalles de taille variant de $2^{-l-1}N$ à $2^{-L}N$.

Si on applique sur chacun des ensembles $S_{l,s}$ les deux projections suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{l,s} = {}^{(l)}U^* S_{l+1,s} \\ S_{l,s+2^{-l+1}} = {}^{(l)}U_{-2^{-l+1}}^* [Tr_{2^{-l+1}}(S_{l+1,s})] \end{array} \right|_{0 \leq s \leq 2^{-l-1}-2^{-L}} \quad (3.16)$$

alors les 2^{L-l} ensembles $S_{l,s'}$ sont les noeuds pères permettant de construire toutes les combinaisons possibles de partitions non-uniformes disjointes de $[0, N-1]$ avec des intervalles de taille variant de $2^{-l}N$ à $2^{-L}N$.

La preuve de cette proposition est donnée en annexe.

Si l'on poursuit l'algorithme proposé dans la relation (3.16) jusqu'à l'échelle 1 (l'échelle 0 correspondant au signal original) nous déduisons de la proposition 7 que la totalité des partitions comprenant des intervalles avec des tailles variant de $2^{-L}N$ à N est calculée. Nous illustrons sur la figure 3.10 l'arbre des partitions ainsi construit.

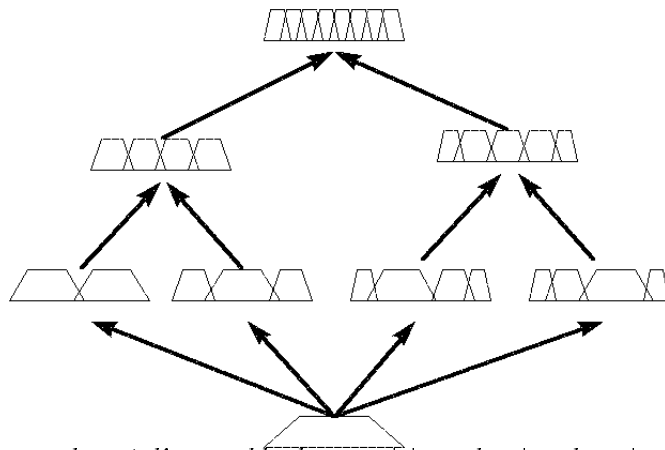


FIG. 3.10 – Arbre correspondant à l'ensemble des partitions du signal en intervalles de taille variant de 2^{-L} à 1

Notons que si nous considérons le cas où l'intervalle $I_j^{l,s}$ est de polarités opposées à ses deux extrémités pour $0 \leq l \leq L$, $0 \leq s \leq 2^L - 1$, et $0 \leq j \leq 2^{l+1} - 1 - \delta_{[s>0]}$ alors nous avons une propriété supplémentaire à la proposition 7 concernant les ensembles $S_{l,s}$:

Si on note A^s l'ensemble des indices $\{j_\gamma, l_\gamma, \}_\gamma$ correspondant à une des partitions non-uniformes construites à partir des noeuds associés à $S_{l,s}$ alors $f = \bigoplus_{(j,l) \in A^s} T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f$.

Ceci provient du fait que les intervalles $I_j^{l,s}$ sont de polarités opposées à leurs deux extrémités et donc que deux intervalles adjacents dans la partition sont toujours orthogonaux. Cette condition est respectée si en chaque nouveau point de coupure de l'algorithme, les polarités des repliements sont opposées à droite et à gauche de ce nouveau point. Cette condition est importante car elle nous permet de définir un fenêtrage orthogonal et un algorithme de reconstruction.

3.3.2 Base φ fenêtrée non-uniforme

Si on possède une fonction φ telle que $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de $l^2[0, N - 1]$ (nous ne posons pour l'instant aucune autre contrainte sur φ) alors, à partir de l'algorithme de partition non-uniforme présenté dans le paragraphe précédent, on peut définir un algorithme de décomposition en fonction φ fenêtrée non-uniforme.

En effet, si l'on applique la transformée en fonction φ sur chacun des intervalles $I_j^{l,s} \in S_{l,s}$ résultant de l'équation (3.16), nous obtenons alors une décomposition en fonction φ fenêtrée non-uniforme (les différents intervalles ne sont pas définis par $I_j = [jl_j, (j + 1)l_j - 1]$). De plus, on peut constater que cette décomposition est invariante par translation de $s2^{-L}N$ points. En effet, les 2^{L-1} sous-arbres construits à partir de la relation (3.16) correspondent aux décompositions de toutes les translations du signal de $s2^{-L}N$ points (à l'exception de celles comprenant des intervalles disjoints).

Formellement, nous définissons une collection de bases de fonction φ fenêtrée invariante par translation de $s2^{-L}N$ points et non-uniforme par récurrence selon :

$$\psi_{j,k}^{l,s} [t] \triangleq \begin{cases} T_{I_j^{l,s}}^* \varphi_k [t - (2^{-l}j + s)N] & \text{pour } j = 0..2^l - 2, \\ \left(T_{I_{2^{l-1}}^{l,s}}^* \varphi_k [t - (1 - 2^{-l})N] \right) & \text{si } s = 0 \\ \left[\left(\psi_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s} [t] \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(\psi_{0,k-2^{l+1}}^{l+1,s} [t] \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right] & \text{si } 0 < s < 2^{-l-1} \\ \left[\left(\psi_{0,k}^{l+1,0} [t] \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(\psi_{2^{l+1}-1,k-2^{l+1}}^{l+1,0} [t] \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right] & \text{si } s = 2^{-l-1} \\ \left[\left(\psi_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s-2^{-l-1}} [t] \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(\psi_{2^{l+1}-2,k-2^l}^{l+1,s-2^{-l-1}} [t] \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right] & \text{si } s > 2^{-l-1} \end{cases} \quad (3.17)$$

Nous faisons deux remarques sur la définition de $\psi_{j,k}^{l,s}$:

- Puisque $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de $l^2[0, N - 1]$ alors $\{\varphi_k [t - (2^{-l}j + s)N]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de $l^2 I_j^{l,s}$.
- L'indice k varie selon le nombre de coefficients que l'on calcule lors de la transformation dans la base φ de la fonction f restreinte à l'intervalle $I_j^{l,s}$. Si, lors de cette transformée, il n'y a pas de redondance, ni de perte, alors pour un intervalle $I_j^{l,s}$ k est tel que $0 \leq k < 2^l$. Dans le cas des partitions translattées le dernier intervalle est la réunion de deux sous-intervalles ($I_{2^{l-1}}^{l,s} \triangleq I_{j'}^{l+1,s'} \cup I_{j''}^{l+1,s''}$) chacun de taille 2^{l+1} . Donc, dans ce cas, l'indice k varie "deux fois" de 0 à $2^{l+1} - 1$ (nous avons bien toujours 2^l coefficients). Ceci explique la notation

$$\left[\left(\psi_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s} [t] \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(\psi_{0,k-2^{l+1}}^{l+1,s} [t] \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right]$$

Les coefficients dans la décomposition en fonction φ fenêtrée non-uniforme vont alors être calculés, à l'échelle l , par :

$$\begin{aligned}
d_{j,k}^{l,s} &= \langle f[j], \psi_{j,k}^{l,s}[t] \rangle \\
&= \sum_{t=N2^{-l}j+Ns}^{2^{-l}(j+1)N+sN-1} \left(T_{I_j^{l,s}} f[t] \right) \varphi_k \left[t - (2^{-l}j + s) N \right] \text{ pour } j = 0..2^l - 2 \\
d_{2^l-1,k}^{l,s} &= \begin{cases} \sum_{t=N(1-2^{-l})}^{N-1} \left(T_{I_{2^l-1}^{l,0}} f[t] \right) \varphi_k \left[t - (1 - 2^{-l}) N \right] & \text{si } s = 0 \\ \left[\left(d_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{0,k-2^{l+1}}^{l+1,s} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right] & \text{si } 0 < s < 2^{-l-1} \\ \left[\left(d_{0,k}^{l+1,0} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{2^{l+1}-1,k-2^{l+1}}^{l+1,0} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right] & \text{si } s = 2^{-l-1} \\ \left[\left(d_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s-2^{-l-1}} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{2^{l+1}-2,k-2^{l+1}}^{l+1,s-2^{-l-1}} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \right] & \text{si } s > 2^{-l-1} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Si l'on pose la condition que φ possède une base adjointe φ^* sur $l^2[0, N-1]$ telle que

$$f = \sum_k \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k^*$$

alors on peut définir simplement un algorithme de reconstruction. Les termes $T_{I_j^{l,s}} f$ peuvent être calculés à partir des coefficients $d_{j,k}^{l,s}$ par application de la transformée adjointe avec la fonction φ^* . Ensuite on calcule les termes $T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f$ (correspondant à un déploiement de la fonction autour des points de coupure) grâce à l'opérateur de repliement adjoint U^* . Puisque les intervalles sont compatibles nous pouvons reconstruire f à partir de la relation suivante : $f = \bigoplus_{(j,l) \in A^s} T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f$.

Enfin, si $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ est une base périodique orthonormée de $l^2[0, N-1]$ on étend cette base à Z avec une symétrie autour de $-\frac{1}{2}$ et une antisymétrie autour de $N - \frac{1}{2}$ suivant la relation (3.9). Nous définissons alors une nouvelle collection de fonction $\tilde{\psi}_{j,k}^{l,s}$ en substituant dans l'équation (3.17) la fonction φ_k par la fonction $\tilde{\varphi}_k$. Si $T_{I_j^{l,s}}$ est un opérateur de restriction avec des polarités respectant les propriétés de symétrie et antisymétrie de $\tilde{\varphi}_k$, nous avons le théorème suivant :

Théorème 6 *La suite $\tilde{\psi}_{j,k}^{l,s}$, $0 \leq k \leq N2^{-l} - 1$, $j = 0..2^l - 1$ est une base orthonormée de $l^2_{[0,N-1]}$*

Plus généralement, nous avons le théorème suivant

Théorème 7 *Si Γ est une partition non-uniforme disjointe de $[0, N-1]$, alors*

$$\left\{ \tilde{\psi}_{j,k}^{l,s} : I_j^{l,s} \in \Gamma, 0 \leq k \leq N2^{-l} \right\}$$

forme une base de $l^2_{[0,N-1]}$.

Preuve

La preuve de ces théorèmes est immédiate si l'on considère que, pour s fixé, la collection $\left\{ \psi_{j,k}^{l,s} \right\}_{j=0..2^l-1}$ définie par l'équation (3.17), correspond à l'une des collections de bases construite lors de la décomposition dyadique en fonction φ fenêtrée du signal f translaté de s points. Or, nous savons que la décomposition selon la fonction φ fenêtrée permet de définir une collection de bases orthonormées de $l^2_{[0,N-1]}$. Donc si l'on applique cette décomposition sur le signal translaté de

s points, puis que l'on sélectionne la base correspondant à $Tr_s \left\{ \psi_{j,k}^{l,s} \right\}_{j=0..2^l-1}$, et que finalement on applique une translation inverse de $-s$ points, nous obtenons bien une base orthonormée de $l_{[0,N-1]}^2$.

Nous avons ainsi défini un cadre général permettant de construire une multitude de bases orthonormées de $l_{[0,N-1]}^2$ qui sont non-uniformes. Nous utiliserons dans le chapitre 5 les principes exposés dans ce paragraphe pour définir des décompositions en paquets d'ondelettes non-uniformes. Mais nous pouvons aussi définir simplement une décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme :

De la même façon que dans le cas dyadique, puisque la fonction $\cos \left[\frac{\pi}{1g_i} (k + \frac{1}{2}) t \right]$ a une extension naturelle symétrique autour de $-\frac{1}{2}$ et antisymétrique autour de $N - \frac{1}{2}$ alors d'après le théorème précédent nous pouvons construire une base d'ondelettes orthonormée de Malvar qui soit non-uniforme en appliquant la transformée DCT-IV sur chaque intervalle $I_j^{l,s}$. Ces fonctions d'ondelettes sont définies en substituant dans l'équation (3.17) la fonction φ_k par $\cos \left[\frac{\pi}{1g_i} (k + \frac{1}{2}) t \right]$. Notons que nous pouvons construire d'autres bases d'ondelettes de Malvar non-uniformes en utilisant une transformée trigonométrique différente. La seule condition requise est que la polarité des opérateurs de restriction soit adaptée au type de symétrie de la fonction trigonométrique.

3.3.3 Meilleure base et meilleure translation

Comme pour le cas dyadique uniforme, l'arbre construit à partir de la relation (3.16) correspond à une collection de bases orthogonales (plus importante que pour une décomposition dyadique). Nous devons sélectionner la base qui est minimale pour une fonction de coût ε . Le choix de cette base va s'effectuer grâce à l'algorithme Best-Basis de Coifman et Wickerhauser. Dans un premier temps, nous allons sélectionner la meilleure projection pour chacune des translations. Nous appliquons alors l'algorithme Best-Basis sur chacun des sous-arbres, et ensuite nous sélectionnons la meilleure translation correspondant à l'arbre qui a le coût d'information le plus faible :

Soit $B_j^{l,s}$ la base au noeud d'indice (l, j, s) de la dcomposition et correspondant l'intervalle I_j^l ; soit $A_j^{l,s}$ la base choisie ce mme noeud et $E_j^{l,s}$ le cot associ.

Aprs une initialisation par

$A_j^{L,s} = B_j^{L,s}$ et $E_j^{L,s} = \varepsilon(B_j^{L,s})$, Pour s variant de 0 à $\frac{1}{2} - 2^{-L}$ par pas de 2^{-L} , pour $j = 0..2^L - 1$,

on applique rcursivement le processus suivant :

Pour s variant de 0 à $\frac{1}{2} - 2^{-L}$ par pas de 2^{-L}

Pour l variant de $L - 1$

Pour j variant de 0 à $2^l - 1$

Si $E_{2j}^{l,s} + E_{2j+1}^{l,s} > \varepsilon(B_j^{l-1,s})$ alors $A_j^{l-1,s} = B_j^{l-1,s}$ et $E_j^{l-1,s} = \varepsilon(B_j^{l-1,s})$

sinon $A_j^{l-1,s} = A_{2j}^{l,s} \cup A_{2j+1}^{l,s}$ et $E_j^{l-1,s} = E_{2j}^{l,s} + E_{2j+1}^{l,s}$

Soit A^* la meilleure base sur toutes les translations : $A^* = \left(A_0^{0,s^*} \text{ tel que } \varepsilon(A_0^{0,s^*}) = \min_{0 \leq s < \frac{N}{2}} \left\{ \varepsilon(A_0^{0,s}) \right\} \right)$

Toutefois de nombreuses modifications sont à apporter à l'algorithme de recherche de meilleure base afin de prendre en considération toutes les conditions et propriétés exposées précédemment.

Notons, tout d'abord, que les noeuds pères présents à une échelle l ont un certain nombre de fils communs (le nombre de noeuds est divisé par 2 lorsque $l \rightarrow l + 1$). Alors, afin de limiter le nombre

de tests et d'évaluations de coût, effectués lors de la recherche des meilleures projections, nous modifions l'algorithme Best-Basis. A l'échelle l , seuls les noeuds éléments des translations comprises dans l'intervalle $[0, (2^{L-l} - 1)2^{-L}]$ vont être traités. En effet, tous les noeuds pères de l'échelle $l - 1$ et faisant partie des translations supérieures à $2^{L-l}2^{-L}$ vont avoir des fils identiques à ceux éléments des translations $[0, (2^{L-l} - 1)2^{-L}]$. Ceci est une conséquence de la relation $S_{l,s+2^{-l-1}} =^{(l)} U_{-2^{-l-1}}^* [Tr_{2^{-l-1}}(S_{l+1,s})]$.

Nous devons aussi modifier l'algorithme Best-Basis afin d'interdire la fusion entre le premier et le second intervalle dyadique dans le cas des signaux translatés. Nous introduisons de la contrainte de "non fusion" des deux intervalles dyadiques (opérateur U_{-b}^*) un marqueur $M_j^{l,s}$ indiquant si une fusion peut intervenir sur le $j^{\text{ème}}$ noeud à l'échelle l de la décomposition du signal translaté de s points. On en déduit que :

$$\begin{cases} M_j^{l,s} = 1 \text{ si } s \geq 2^{-l-1} \text{ et } j = 0, 1 \\ M_j^{l,s} = 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (3.18)$$

Nous avons vu que cette condition de "non fusion" doit se diffuser dans l'arbre aux échelles inférieures. Nous en déduisons alors la condition suivante sur l'arbre :

$$M_j^{l,s} = 1 \text{ si } M_{2j}^{l+1,s} + M_{2j+1}^{l+1,s} > 0. \quad (3.19)$$

A partir des équations (3.18) et (3.19), nous déduisons alors l'algorithme Best-basis modifié permettant de sélectionner, pour chacune des translations, la meilleure projection, tout en respectant la structure temporelle du signal, et qui soit de complexité la plus faible possible :

De l variant de $L - 1$ à 1 ,

de s variant de 0 à $(2^{L-l-1} - 1)2^{-L}$ par pas de 2^{-L} ,

de j variant de 0 à $2^l - 1$,

$$\text{si } (M_{2j}^{l+1,s} + M_{2j+1}^{l+1,s} > 1) \text{ alors } \begin{cases} M_j^{l,s} = 1 \\ A_j^{l,s} = A_{2j}^{l+1,s} \cup A_{2j+1}^{l+1,s} \\ E_j^{l,s} = E_{2j}^{l+1,s} + E_{2j+1}^{l+1,s} \end{cases}$$

$$\text{sinon si } (E_{2j}^{l+1,s} + E_{2j+1}^{l+1,s} > \varepsilon(B_j^{l,s})) \text{ alors } \begin{cases} A_j^{l,s} = B_j^{l,s} \\ E_j^{l,s} = \varepsilon(B_j^{l,s}) \end{cases}$$

$$\text{sinon } \begin{cases} A_{s,i}^l = A_{2j}^{l+1,s} \cup A_{2j+1}^{l+1,s} \\ E_j^{l,s} = E_{2j}^{l+1,s} + E_{2j+1}^{l+1,s} \end{cases}$$

De s variant de $2^{L-l-1}2^{-L}$ à $(2^{L-l} - 1)2^{-L}$ par pas de 2^{-L}

de j variant de 0 à $2^l - 1$,

$$\text{si } j = 0, 1 \text{ alors } \begin{cases} M_j^{l,s} = 1 \\ A_j^{l,s} = Tr_{2^{-l-1}} [A_0^{l+1,s-2^{-l-1}} \oplus A_{2^{l+1}-1}^{l+1,s-2^{-l-1}}] \\ E_j^{l,s} = E_0^{l+1,s-2^{-l-1}} + E_{2^{l+1}-1}^{l+1,s-2^{-l-1}} \end{cases},$$

$$\text{sinon si } (E_{2j+1}^{l+1,s-2^{-l-1}} + E_{2j+2}^{l+1,s-2^{-l-1}} > \varepsilon(B_j^{l,s})) \text{ alors } \begin{cases} A_j^{l,s} = B_j^{l,s} \\ E_j^{l,s} = \varepsilon(B_j^{l,s}) \end{cases}$$

$$\text{sinon } \begin{cases} A_j^{l,s} = Tr_{2^{-l-1}} [A_{2j+1}^{l+1,s-2^{-l-1}} \oplus A_{2j+2}^{l+1,s-2^{-l-1}}] \\ E_j^{l,s} = E_{2j+1}^{l+1,s-2^{-l-1}} + E_{2j+2}^{l+1,s-2^{-l-1}} \end{cases}$$

Après l'application de l'algorithme de recherche de meilleure base ainsi définie, nous sélectionnons la meilleure translation A^* correspondant à l'arbre qui a le coût d'information le plus faible :

$$A^* = \left(A_0^{0,s^*} \text{ tel que } \varepsilon(A_0^{0,s^*}) = \min_{0 \leq s < \frac{N}{2}} \{ \varepsilon(A_0^{0,s}) \} \right)$$

La projection sélectionnée est alors non uniforme et minimale⁴ pour une fonction de coût ε .

3.3.4 Complexité et extension 2D

La complexité algorithmique est l'un des problèmes majeurs lorsque l'on construit des décompositions invariantes par translation. En effet, l'invariance nous oblige, en général, à calculer un certain nombre de combinaisons qui peuvent vite faire "exploser" l'algorithme. Nous allons étudier le cas de la décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme, mais un raisonnement analogue peut être effectué pour toutes bases φ fenêtrées non-uniformes.

L'algorithme classique de décomposition en ondelettes de Malvar va requérir, pour le calcul de l'échelle l , 2^{l-1} applications de l'opérateur U , et 2^l transformées trigonométriques locales, chacune sur un intervalle de $\frac{N}{2^l}$ points (si N est la longueur du signal traité). La réalisation numérique de l'opérateur U est d'une complexité négligeable. Seules les transformées trigonométriques sont prises en compte dans le calcul de la complexité de l'algorithme. Le calcul d'une échelle a donc une complexité égale à $\theta(2^l \left(\frac{N}{2^l} \log_2 \frac{N}{2^l}\right))$, que l'on approxime généralement par $\theta(N \log_2 N)$. Une décomposition en ondelettes de Malvar sur L échelles a donc une complexité vérifiant

$$\theta_{Malvar} = \theta(LN \log_2 N).$$

Maintenant, si l'on désire calculer une transformée en ondelettes de Malvar sur L échelles qui étudie toutes les partitions possibles sans aucune restriction (ni astuce) et qui soit minimale, nous devons tout d'abord décomposer le signal original, puis décomposer son translaté de $\frac{N}{2^L}$ points, etc, jusqu'à décomposer son translaté de $N - \frac{N}{2^L}$ points. 2^L décompositions sont calculées, entraînant alors une complexité θ_{inva} telle que

$$\theta_{inva} = \theta(2^L LN \log_2 N).$$

Cette complexité va croître d'une façon alarmante lorsque N et L augmentent, ce qui élimine cette méthode. La solution proposée par Cohen est invariante par translation, et sélectionne à chaque échelle la meilleure translation. En utilisant un algorithme qui débute par l'échelle L , comme il le propose, cela permet de ne multiplier que par 2 la complexité par rapport à l'algorithme classique

$$\theta_{cohen} = \theta(2LN \log_2 N).$$

Toutefois, comme nous l'avons dit, cet algorithme peut ne pas être pleinement satisfaisant car il n'est pas optimal et n'étudie pas l'ensemble des segmentations possibles.

L'algorithme que nous proposons permet d'étudier toutes les combinaisons de partitions. D'après la proposition (6), chaque échelle l est constituée de 2^{L-l} ensembles. Si, dans un premier temps, on ne se limite pas aux partitions respectant la structure temporelle du signal, le calcul de chaque

4. Elle est minimale pour l'ensemble des partitions qui respecte la structure temporelle du signal

échelle requiert $2^{L-l}N \log_2 N$ opérations. Nous avons donc une complexité θ_{MNU1} (*MNU* pour Malvar Non Uniforme) définie par :

$$\theta_{MNU1} = \theta \left(\sum_{l=1}^L 2^{L-l} N \log_2 N + N \log_2 N \right).$$

La version finale de notre algorithme ne prend en compte que les intervalles qui sont adjacents dans le signal. Donc, à chaque échelle, un certain nombre d'intervalles, symbolisés par $R_{l,s}$, ne sont plus modifiés et peuvent être retirés des ensembles $S_{l,s}$. Or nous avons vu que $\text{card}(R_{l,s}) = \frac{N}{2^l}$ pour $\forall s \in \left[\frac{N}{2^L}, \frac{N}{2^l} - \frac{N}{2^L} \right]$. Le calcul de chaque échelle requiert donc $N \log_2 N$ opérations pour $S_{l,0}$ plus $(2^{L-l} - 1)(N - \frac{N}{2^l}) \log_2(N - \frac{N}{2^l})$ opérations pour les $2^{L-l} - 1$ ensembles $S_{l,s}$, avec $s > 0$. La complexité totale de notre algorithme est alors égale à

$$\theta_{MNU2} = \theta \left(\sum_{l=1}^L \left((2^{L-l} - 1) \left(N - \frac{N}{2^l} \right) \log_2 \left(N - \frac{N}{2^l} \right) \right) + LN \log_2 N \right).$$

Nous pouvons voir que le fait de se limiter aux partitions respectant la structure temporelle du signal réduit d'une façon significative la complexité algorithmique. Nous illustrons ces différentes complexités sur la figure 3.11.

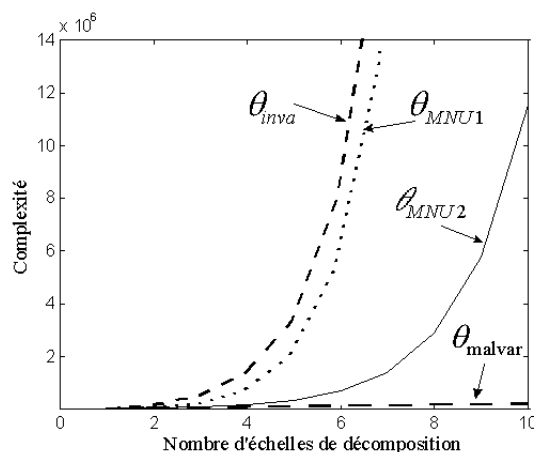


FIG. 3.11 – Evolution en fonction du nombre d'échelles de la complexité des différents algorithmes avec un signal de 2048 points : θ_{Malvar} Complexité de la décomposition en ondelettes de Malvar, θ_{inva} Complexité de la décomposition en ondelettes de Malvar invariante par translation calculée par décompositions successives du signal translaté, θ_{MNU1} Complexité de la décomposition en ondelettes de Malvar non uniforme calculée à partir de la dernière échelle sans contrainte, θ_{MNU2} Complexité de la décomposition en ondelettes de Malvar non uniforme avec la contrainte de non fusion sur les intervalles non adjacents

On constate sur cette figure que le calcul d'une décomposition en ondelettes de Malvar non uniforme sans restriction temporelle sur les intervalles (θ_{MNU1}) présente une complexité qui évolue d'une façon sensiblement identique à celle de l'algorithme basé sur le calcul de la totalité des translations (θ_{inva}). Alors que si l'on se limite à l'étude des partitions respectant la structure du signal original, l'accroissement de la complexité est beaucoup plus "raisonnable", permettant d'utiliser l'algorithme sur des grands signaux.

Comme nous l'avons indiqué, Xiong [98] a proposé récemment un algorithme permettant d'effectuer une segmentation flexible de l'axe temporel. La méthodologie est différente et est basée sur la programmation dynamique. Nous illustrons le principe de cet algorithme sur la figure 3.12.

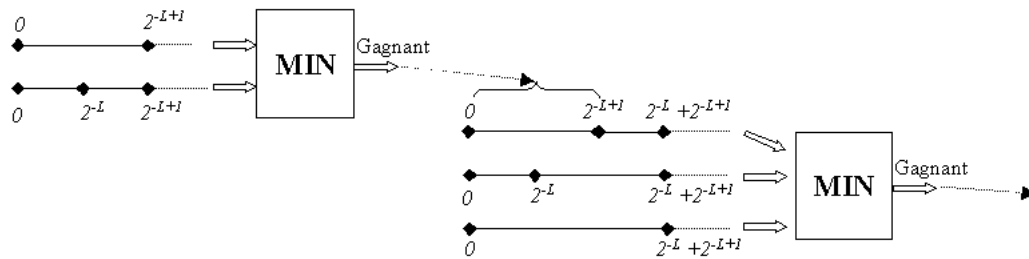


FIG. 3.12 – Principe de l'algorithme de segmentation flexible de Xiong

L'algorithme débute en se focalisant sur les deux premiers petits intervalles de $[0, N2^{-L+1} - 1]$ du signal. Il y a deux segmentations possibles dans ce cas, et celle qui présente le coût le plus faible est choisie. Ensuite l'algorithme étudie les trois premiers petits intervalles de $[0, N2^{-L+1} + N2^{-L} - 1]$. En utilisant le gagnant de la première comparaison, cet algorithme basé sur la programmation dynamique n'a besoin de faire que trois comparaisons pour trouver les meilleurs intervalles sur $[0, N2^{-L+1} + N2^{-L} - 1]$. Et l'algorithme se poursuit ainsi jusqu'à avoir étudié la totalité du signal. On constate que le nombre de coupures à calculer, ainsi que le nombre de transformations à effectuer sont identiques à notre algorithme : c'est-à-dire qu'un intervalle n'est jamais calculé deux fois ou plus. Donc la complexité algorithmique est identique pour la méthode de Xiong et la nôtre. Une première différence pourrait apparaître si l'on mesure le coût de stockage. En effet, dans l'algorithme de Xiong, la comparaison "fils-père" est effectuée au fur et à mesure de la décomposition, ce qui évite de conserver en mémoire toutes les segmentations. Mais, puisque notre méthode débute à l'échelle la plus fine, on peut aussi appliquer simultanément la division et l'algorithme de recherche de meilleure base modifié, ce qui nous permet ainsi d'avoir un coût de stockage identique. La seule différence entre ces deux algorithmes est dans leur définition. Cette différence de conception a plusieurs conséquences, dont les deux principales sont :

- Nous présentons notre méthode non-uniforme avec des coûts additifs, mais puisque la totalité des arbres est construite, on peut envisager d'autres coûts plus adaptés. L'algorithme de Xiong nécessite forcément un coût additif.
- Notre méthode permet une formalisation générale récursive. Ceci se traduit notamment par un "coût de programmation" très réduit. Ce n'est pas le cas avec l'algorithme de Xiong.

L'adaptation des algorithmes non-uniformes à la dimension 2 est difficile car la complexité va "exploser". En effet le nombre de combinaisons va vite devenir incontrôlable lorsque le nombre d'échelles augmente. Nous avons représenté sur la figure 3.13 toutes les translations qu'il faudrait effectuer pour calculer l'échelle 2 à partir de l'échelle 3, en considérant que $L = 3$. On constate que même ce premier calcul, qui dans le cas 1D présente une complexité de $2N \log_2 N$, entraîne un nombre de combinaisons très et trop important. Donc, lorsque L augmente l'algorithme ne peut plus être utilisé dans des temps raisonnables, même en n'étudiant que les partitions qui respectent la structure spatiale de l'image d'origine. Pour ces raisons, nous n'avons pas généralisé l'algorithme aux dimensions supérieures à un. Cependant, une généralisation à la dimension 2 des décompositions

non-uniformes est possible si on relâche la contrainte de recherche de base minimale absolue, en ne cherchant plus qu'une base qui correspond à un minimum local de la fonction de coût. Nous reviendrons sur cette solution dans le dernier chapitre consacré aux décompositions non-uniformes.

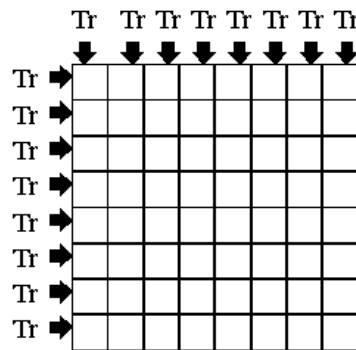


FIG. 3.13 – *Translations à calculer pour exprimer l'échelle 2 à partir de l'échelle 3 dans une décomposition 2D en ondelettes de Malvar non uniforme*

3.3.5 Exemples et discussion

Afin d'illustrer les avantages de l'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar non uniforme, nous prenons comme premier exemple un signal qui met en échec l'algorithme classique de décomposition. Ce signal est constitué de 3 atomes gaussiens temps-fréquence (TF) tel que

$$S(t) = \begin{cases} A[t] & \text{si } t \in \left[0, \frac{N}{3} - 1\right] \\ B[t] & \text{si } t \in \left[\frac{N}{3}, \frac{2N}{3} - 1\right] \\ C[t] & \text{si } t \in \left[\frac{2N}{3}, N - 1\right] \end{cases} \quad \text{avec } A, B, C \text{ 3 atomes gaussiens TF.}$$

Si l'on décompose ce signal avec l'algorithme dyadique, puis que l'on recherche la meilleure base avec un coût entropique, la partition sélectionnée est le signal dans sa totalité car les points de rupture délimitant les intervalles ne sont jamais étudiés avec l'algorithme dyadique. La décomposition non-uniforme proposée étudie des intervalles approchant mieux la structure du signal, et une partition plus adaptée est sélectionnée lors de la recherche de la meilleure base. Nous indiquons sur la figure 3.14a le signal original ainsi que sa représentation temps-fréquence théorique. La segmentation sélectionnée par l'algorithme non-uniforme est présentée sur la figure 3.14b. On constate que les 3 atomes sont détectés et mis en évidence. Nous pouvons alors, par exemple, calculer une représentation temps-fréquence qui est presque optimale (figure 3.14b).

Nous construisons un second exemple à partir de six atomes TF d'enveloppe et de fréquence variables. Ce signal se rapproche des données que l'on peut trouver en traitement de la parole. Nous appellerons ce signal de test "coif2". La position des points de coupure est aléatoire. Nous indiquons sur la figure 3.15a le signal original ainsi que sa représentation TF théorique (nous avons déjà introduit ce signal dans le premier chapitre). Nous appliquons l'algorithme dyadique et l'algorithme non-uniforme avec une fonction de coût entropique. La base sélectionnée par l'algorithme dyadique correspond à une segmentation peu précise sur certains atomes (figure 3.15b). Ceci est dû à la position des deux derniers points de coupure (600 et 890) qui sont éloignés de positions dyadiques et s'illustre parfaitement sur la représentation TF associée. Par exemple, une fenêtre est à la fois sur les 4^{ème} et 5^{ème} éléments ce qui entraîne dans la représentation TF la présence de fréquences

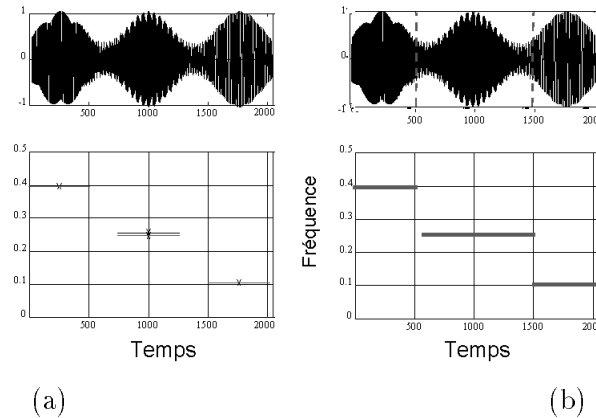


FIG. 3.14 – 3 atomes gaussien : (a) Le signal original et sa représentation temps-fréquence théorique (b) Au dessus, le signal segmenté par notre algorithme au dessous, la représentation temps-fréquence calculée à partir du signal segmenté

aux mêmes instants temporels, ce qui n'est pas le cas dans le signal. De plus, les découpages en de nombreuses fenêtres des 4^{ème} et 5^{ème} éléments (400-800) dégradent la résolution fréquentielle.

La base sélectionnée par l'algorithme non-uniforme présente une segmentation plus proche de la composition du signal (figure 3.15c). Il en résulte une représentation TF presque optimale pour la résolution en temps et en fréquence. On remarque une segmentation intempestive du premier composant, due à la faible énergie de l'atome. Ceci dégrade quelque peu, pour cette zone, la résolution fréquentielle de la représentation TF. De plus, la fenêtre correspondant à l'intervalle [400, 600] empiète sur le composant précédent ce qui fait apparaître une ligne de faible énergie à la fréquence 0.3 sur l'intervalle [400, 600]. Toutefois, les composants principaux sont beaucoup mieux séparés et donc analysés : la résolution fréquentielle est nettement supérieure à la décomposition dyadique. On peut conclure alors sur la supériorité de l'algorithme non-uniforme.

Cet algorithme est conçu pour minimiser une fonction de coût. Nous présentons dans le tableau 3.1 le coût entropique de la meilleure base sélectionnée par l'algorithme non-uniforme ainsi que le coût de la décomposition classique de différents signaux audio (ces signaux sont fournis avec la toolbox wavelab [90]). On constate que dans chaque cas la décomposition non-uniforme obtient un coût inférieur à la décomposition classique. Ceci peut être important dans un cadre de compression.

signal	cout dyadique	cout non uniforme
"greasy"	-14892540693	-15032644050
"Nation wide"	-8494175	-8525861
"caruso"	-11830980	-11889826
chant d'oiseau	-1466397729838	-1466497485390

TAB. 3.1 – Coût des meilleures bases de représentation sélectionnées par la décomposition dyadique et non uniforme pour des signaux audios

Nous avons proposé un algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar non uniforme, qui permet d'étudier toutes les partitions possibles d'un signal avec des tailles de fenêtres minimales

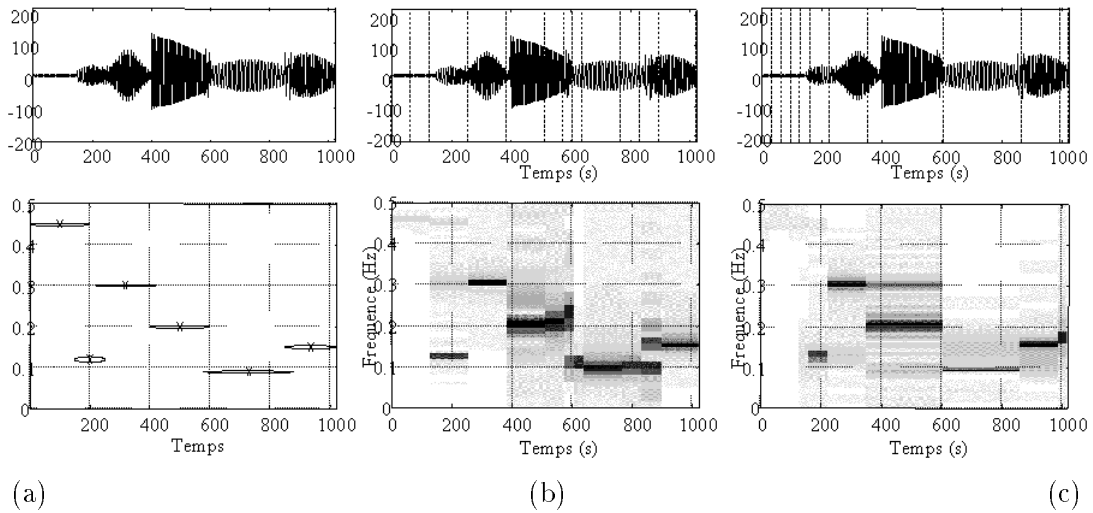


FIG. 3.15 – Signal de test *coif2* formé à partir de différents atomes temps-fréquence : (a) le signal original et la représentation théorique TF, (b) le signal segmenté par l'algorithme dyadique et la représentation TF associée, (c) le signal segmenté par l'algorithme non uniforme et la représentation TF associée

fixées. Plus généralement, la méthode proposée permet de définir une procédure calculant les partitions non uniformes d'un axe. Nous utiliserons les principes exposés ci-dessus dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Meyer.

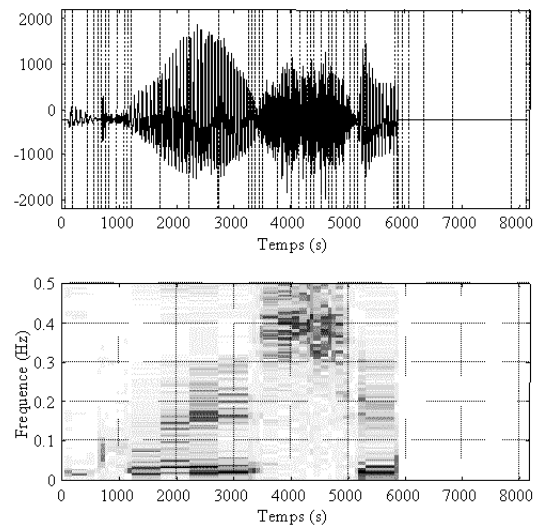


FIG. 3.16 – Le signal "greasy" segmenté par l'algorithme non-uniforme et la représentation TF associée

Néanmoins, nous ne nous sommes intéressés qu'à un seul aspect du problème : l'algorithme de décomposition. Mais lorsque l'on calcule cette décomposition non-uniforme avec un coût entropique sur des signaux réels, nous sommes en général confrontés à des phénomènes de sur-segmentation. En effet, la mesure entropique va être très sensible aux faibles variations du signal et si le signal est bruité (même légèrement) le phénomène est amplifié. La décomposition du signal audio "greasy" prononcé par une femme (ce signal est fourni avec la Toolbox Wavelab de Standford) (figure 3.16) illustre ce phénomène : la meilleure base sélectionnée correspond à un découpage très et trop fin du signal, alors que nous voudrions obtenir une partition mettant en évidence les zones principales de

stationnarité.

Il faut donc nous pencher maintenant sur le second aspect qui est la recherche de la meilleure base, ou plus précisément la définition de la fonction de coût ε . Nous avons utilisé dans les exemples précédents le critère entropique. D'autres mesures sont proposées dans la littérature, mais avec toutes un point commun : elles étudient individuellement chaque intervalle en mesurant la concentration de l'énergie ou la dispersion des coefficients. Il nous a semblé intéressant, pour un algorithme de recherche de partition optimale, d'essayer de mesurer plutôt le degré de ressemblance entre deux intervalles adjacents pour décider si l'on conserve ou non la coupure entre ces deux intervalles. Ceci fait l'objet de la section suivante.

3.4 Recherche de partitions stationnaires par une mesure de distance spectrale

Adak a proposé récemment dans un rapport de l'université de Stanford [1] un algorithme qui sélectionne les partitions en fonction des changements dans le spectre. Nous proposons d'utiliser un principe similaire mais avec une estimation plus robuste du spectre, ainsi qu'un post-traitement recombinant les intervalles, permettant ainsi de définir une partition non uniforme [16]. Dans un premier temps, nous devons construire une collection de partitions du signal avec un algorithme de complexité limitée. Pour cela, nous utilisons la méthode de division récursive proposée dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar et présentée précédemment. Après l'application de l'algorithme de partition, nous avons à chaque échelle l , un ensemble $S_l = (T_{I_j^l} f)_{j=0..2^l-1}$. Nous allons construire un arbre binaire des distances spectrales, permettant de mettre en évidence les changements dans le spectre.

3.4.1 Arbre binaire des distances spectrales

3.4.1.1 Estimation du spectre

Afin de détecter les changements dans le spectre du processus, nous devons estimer, au préalable, le spectre sur chacun des intervalles I_j^l . Notons que les distances spectrales sont toujours évaluées entre les deux moitiés d'un bloc dyadique, c'est-à-dire, que pour chaque échelle l , nous calculons les différences spectrales entre les intervalles I_{2j}^l et I_{2j+1}^l . En conséquence, les deux intervalles comparés ont le même nombre de points. L'estimation du spectre peut donc s'effectuer sans concaténation de zéros, qui introduit des oscillations parasites dans le spectre estimé.

De plus, afin de limiter les effets de bords, dus à la fenêtre carrée de partition, nous divisons le signal à l'aide de fenêtres dont la transformée de Fourier a de faibles lobes secondaires. De nombreuses fenêtres régulières sont introduites dans la décomposition en ondelettes de Malvar (ces fenêtres permettent, de plus, d'obtenir une décomposition orthogonale). Le fenêtrage du signal avec des fenêtres régulières est calculé grâce à l'opérateur $T_{I_j^l}$ défini par l'équation (3.7).

Le spectre local $F_{I_j^l}$ peut être estimé sur chaque intervalle I_j^l par le module au carré de la transformée de Fourier

$$F_{I_j^l}[\xi] = \left| \frac{1}{N/2^l} \sum_{t \in I_j^l} T_{I_j^l} f e^{-\frac{i2\pi\xi(t-a_j)}{N/2^l}} \right|^2$$

Toutefois, cette estimation n'est pas robuste car le spectre est dégradé par des oscillations parasites dues à la variance du périodogramme. Nous proposons alors d'appliquer le post-traitement proposé par Moulin pour l'estimation d'un spectre de puissance de processus aléatoire stationnaire [75]. Moulin utilise le principe du seuillage de la transformée en ondelettes (étudié par Donoho [36]) pour lisser le log-périodogramme. En effet, les oscillations parasites présentes dans le périodogramme peuvent être approximées par un processus gaussien lorsque l'on applique une transformée logarithmique. Nous retrouvons le cas classique de mesures corrompues par un bruit blanc gaussien additif tel que nous l'avons étudié dans le premier chapitre. La décomposition en ondelettes avec, par exemple, des ondelettes de Daubechies, constitue une méthode très efficace pour réduire ces oscillations [36]. Après un calcul des coefficients d'ondelettes du log-périodogramme, un seuillage est appliqué puis le spectre lissé est obtenu par transformée inverse en ondelettes. Formellement, le lissage du spectre de puissance proposé par Moulin est défini par :

$$\log F_{I_j^t}[\xi] = \vec{W}^{-1} \circ K_\lambda \circ \vec{W} \left(\log \left(\left| \frac{1}{N/2^t} \sum_{t \in I_j^t} T_{I_j^t} f e^{-\frac{i2\pi\xi(t-a_j)}{N/2^t}} \right|^2 \right) \right)$$

avec \vec{W} la transformée en ondelettes discrète, \vec{W}^{-1} la transformée inverse et K_λ une fonction de seuillage

La difficulté est de définir la fonction de seuillage K_λ , ou plus précisément le seuil λ . On trouve différentes propositions de seuils dans la littérature. Par exemple, Moulin [75] considère que l'approximation "bruit blanc gaussien" suffit et donc utilise l'estimation du seuil proposé par Donoho que nous avons présenté au premier chapitre (équation 1.15). En revanche, Gao [46] propose un seuil dépendant de l'échelle. Après des expérimentations numériques, l'approche consistant à utiliser une simple estimation du seuil, telle que l'a définie Donoho, nous a semblé plus robuste.

Nous proposons d'étendre cette méthode de lissage du log-périodogramme en utilisant une transformée en ondelettes non-décimée. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, cette transformée redondante possède de meilleures qualités de reconstruction pour des problèmes de débruitage. Le seuillage d'une décomposition orthogonale décimée fait apparaître de nombreuses oscillations parasites appelées par Coifman *et al.* "phénomène pseudo-gibbs". La redondance d'information présente dans une décomposition non décimée fait disparaître ce phénomène. Finalement, l'estimation du log-périodogramme local, que nous proposons, est telle que :

$$\log F_{I_j^t}[\xi] = \vec{W}_u^{-1} \circ K_\lambda \circ \vec{W}_u \left(\log \left(\left| \frac{1}{N/2^t} \sum_{t \in I_j^t} T_{I_j^t} f e^{-\frac{i2\pi\xi(t-a_j)}{N/2^t}} \right|^2 \right) \right) \quad (3.20)$$

avec \vec{W}_u la transformée en ondelettes discrète non décimée

Notons que nous pouvons utiliser une transformée trigonométrique à la place de la transformée de Fourier, plus adaptée aux signaux fenêtrés [73].

Bien que nous utilisons une décomposition non-décimée, nous avons choisi d'utiliser un seuillage "soft" [36] dont nous rappelons la définition

$$K_\lambda(x) = \text{sgn}(x) (|x| - \lambda)_+ \quad \text{avec } \alpha_+ = \sup(\alpha, 0).$$

En effet, le log-périodogramme présente des pics très importants, et le seuillage "hard" fait apparaître des discontinuités malgré la redondance d'information. Le niveau de bruit et le seuil sont

estimés tels que nous l'avons proposé dans notre algorithme *uwt_mean* dans le premier chapitre :

$$\lambda_l = \sigma \sqrt{2 \log_2(N/2^l)} \text{ avec } \sigma = MAD(w_1)/0.6745$$

Nous illustrons sur la figure 3.17 le lissage d'un log-périodogramme d'un signal autorégressif (AR) défini par :

$$(1 - 0.8e^{\pm i\pi 0.6} z^{-1}) (1 - 0.9e^{\pm i\pi 0.3} z^{-1}) Y_t = b_t \text{ avec } b_t \xrightarrow{i.i.d} N(0, 1)$$

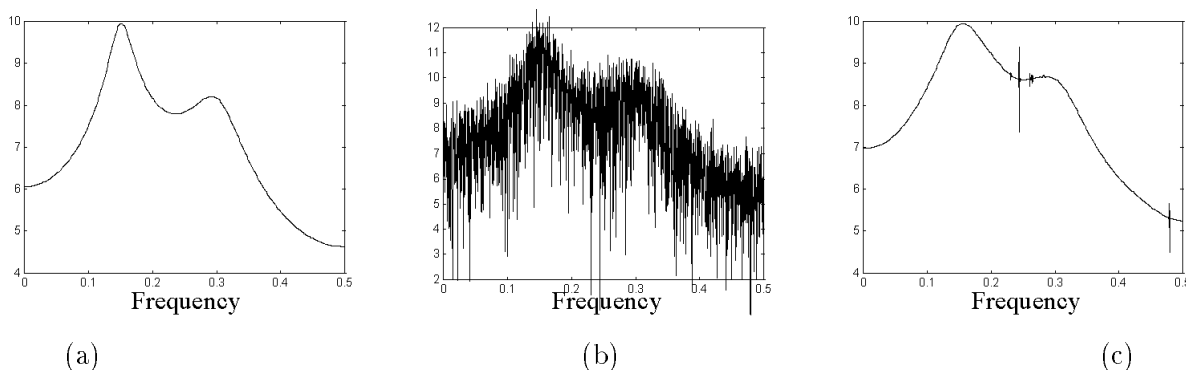


FIG. 3.17 – Log-périodogramme d'un AR : (a) théorique (b) Estimé par la méthode du périodogramme (c) Estimé par la méthode du périodogramme et débruité par la méthode en ondelettes non-décimée

Nous pouvons voir sur la figure 3.17 que le débruitage par décomposition en ondelettes non-décimée permet de lisser le log-périodogramme tout en conservant les informations principales. Nous avons aussi conçu une estimation du spectre à partir de la théorie des paquets d'ondelettes. Mais n'étant pas encore complètement finalisée, cette méthode n'a pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants en terme de qualité de spectre estimé, nous ne développerons donc pas cette approche dans ce mémoire.

3.4.1.2 Calcul de l'arbre des distances

Le calcul de l'arbre binaire des distances spectrales requiert une mesure de la distance entre les spectres estimés des intervalles adjacents. On peut trouver dans la littérature de nombreuses mesures de distance spectrale, notamment dans [7]. Après plusieurs expérimentations, nous avons choisi deux distances spectrales qui nous ont semblé robustes et simples. La distance en norme L_q définie par :

$$D(F_{I_{2^j}^l}, F_{I_{2^{j+1}}^l}) = \left\| \log F_{I_{2^j}^l} - \log F_{I_{2^{j+1}}^l} \right\|_q$$

et la distance symétrisée de Kullback (modifiée pour n'avoir que des valeurs positives) définie par :

$$D(F_{I_{2^j}^l}, F_{I_{2^{j+1}}^l}) = \frac{1}{2^{-l}} \sum_{\xi=0}^{2^l-1} \left(\frac{F_{I_{2^j}^l}(\xi)}{F_{I_{2^{j+1}}^l}(\xi)} + \frac{F_{I_{2^{j+1}}^l}(\xi)}{F_{I_{2^j}^l}(\xi)} \right)$$

De plus, nous pouvons utiliser les versions optimisées pour le gain définies par :

$$D_\alpha(F_{I_{2^j}^l}, F_{I_{2^{j+1}}^l}) = \min_{\alpha > 0} D(F_{I_{2^j}^l}, \alpha F_{I_{2^{j+1}}^l})$$

Les versions optimisées pour le gain permettent d'avoir une mesure qui n'est pas sensible à une légère modification d'enveloppe mais "uniquement" à une modification des fréquences présentes dans le signal.

Pour construire l'arbre des distances spectrales, nous calculons la différence spectrale entre les deux moitiés d'un bloc dyadique. Puis chacune des mesures de distances va être stockée dans les noeuds d'un arbre binaire. L'arbre de distance est binaire car nous utilisons la décomposition dyadique, chaque distance aura donc deux distances "fils".

Si D_j^l correspond au coût du noeud d'indice (j, l) , il est alors défini par :

$$D_j^l = D \left(F_{I_{2j}^{l+1}}, F_{I_{2j+1}^{l+1}} \right)$$

Nous représentons sur la figure 3.18 l'arbre binaire des distances spectrales construit à partir d'une partition récursive sur 3 échelles.

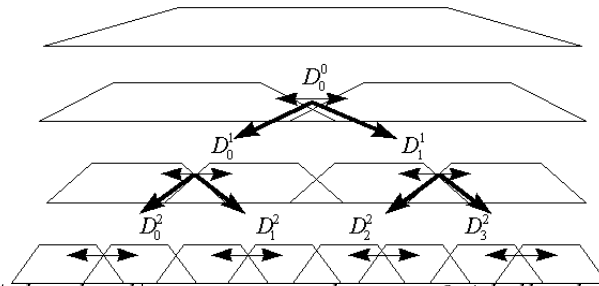


FIG. 3.18 – Arbre des distances spectrales pour 3 échelles de décomposition

3.4.2 Choix de la meilleure partition

3.4.2.1 Algorithme d'élagage

Après le calcul de l'arbre des distances spectrales, nous utilisons un algorithme d'élagage afin de fusionner les segments dyadiques pour lesquels le spectre est similaire. Afin de définir la partition qui est optimale, nous recherchons, comme Adak [1], la base qui minimise la somme des distances spectrales définie par :

$$C = \sum D(F_g, F_d)$$

avec F_g le spectre local gauche d'un intervalle dyadique divisé et F_d le spectre local droit

(3.21)

A partir de la définition précédente, nous recherchons les intervalles qui ont une distance "intra-intervalle"⁵ minimale. Si cette distance "intra-intervalle" est minimale, on peut considérer que le signal est stationnaire sur l'intervalle. La minimisation du coût défini par l'équation (3.21) permet de sélectionner la partition qui correspond aux zones de stationnarité du signal.

On peut constater que cette fonction de coût n'est pas additive car elle ne vérifie pas la condition $\varepsilon(\{x_k\}) = \sum_k \varepsilon(x_k)$. Toutefois, si nous utilisons un algorithme similaire à celui proposé par Coifman et Wickerhauser pour extraire la base optimale, défini de la façon suivante :

5. Nous appelons distance "intra-intervalle" la distance mesurée entre la partie droite et la partie gauche de l'intervalle étudié

Soit A_j^l un booleen indiquant si la coupure correspondant au noeud d'indice (j, l) est sélectionnée; soit E_j^l le cot associé, alors on applique rcursivement le processus suivant :

Pour l variant de $L - 2$ à 0 ,

Pour j variant de 0 à $2^l - 1$,

Si $D_j^l > (E_{2j}^{l+1} + E_{2j+1}^{l+1})$ alors la partition entre I_{2j}^{l+1} et I_{2j+1}^{l+1} est acceptée donc
$$\left\{ \begin{array}{l} A_j^l = 1 \\ E_j^l = (E_{2j}^{l+1} + E_{2j+1}^{l+1}) \end{array} \right.$$

sinon nous rejetons la partition donc
$$\left\{ \begin{array}{l} A_j^l = 0 \\ E_j^l = D_j^l \end{array} \right.$$

Nous pouvons facilement montrer que cet algorithme permet d'obtenir la partition minimale au sens du coût défini dans l'équation (3.21) bien qu'il ne soit pas additif [1] [32]. Après application de cet algorithme d'élagage, nous obtenons la segmentation la mieux adaptée au signal (sous l'hypothèse que le signal est "quasiment" stationnaire sur chaque intervalle de l'échelle la plus fine). Nous devons ensuite appliquer un algorithme éliminant les points de coupure n'ayant pas de père sélectionné :

Pour l variant de 0 à $L - 1$

Pour j variant de 0 à $2^l - 1$

Si $A_j^l = 0$ alors $A_{2j}^{l+1} = 0$ et $A_{2j+1}^{l+1} = 0$

Cependant, il faut s'interroger sur les problèmes de sur-segmentation, c'est-à-dire une sélection de fenêtres trop petites par rapport aux zones de stationnarité du signal. En effet, si le signal est stationnaire sur l'intervalle $[0, N - 1]$, nous ne savons pas quelle peut être l'évolution du coût entre la distance spectrale estimée sur $\left([0, \frac{N}{2} - 1] \Leftrightarrow [\frac{N}{2}, N - 1]\right)$ et ses deux distances "fils" estimées sur $\left([0, \frac{N}{4} - 1] \Leftrightarrow [\frac{N}{4}, \frac{N}{2} - 1]\right)$ et $\left([\frac{N}{2}, \frac{3N}{4} - 1] \Leftrightarrow [\frac{3N}{4}, N - 1]\right)$. Ces trois distances devraient être théoriquement nulles, mais nous sommes dans le cadre d'une estimation numérique, donc les distances vont être proches de 0 sans l'égaliser du fait des erreurs d'estimation.

Nous avons constaté concrètement que notre algorithme ne sélectionne pas des segments trop petits, car le biais du spectre estimé augmente quand la taille de l'intervalle décroît. Si, à l'échelle l , l'intervalle I_j^l correspond à une zone stationnaire, alors les distances, du fait de l'accroissement du biais, vérifient :

$$D_j^l < [D_{2j}^{l+1} + D_{2j+1}^{l+1}] < [D_{4j}^{l+2} + D_{4j+1}^{l+2} + D_{4j+2}^{l+2} + D_{4j+3}^{l+2}] \dots$$

Le point de coupure divisant l'intervalle I_j^l est donc rejeté. Nous illustrons sur la figure 3.19 l'accroissement de la distance spectrale pour un signal stationnaire lorsque la taille des intervalles décroît.

3.4.2.2 Cas symétrique

Un cas particulier va mettre en échec l'algorithme de recherche de meilleure partition proposé : le cas "symétrique". Lorsque le signal a un comportement symétrique par rapport à un point de coupure, alors la division en ce point n'est jamais sélectionnée par l'algorithme de recherche de meilleure base, même si le signal n'est pas stationnaire sur les parties droite et gauche de l'intervalle.

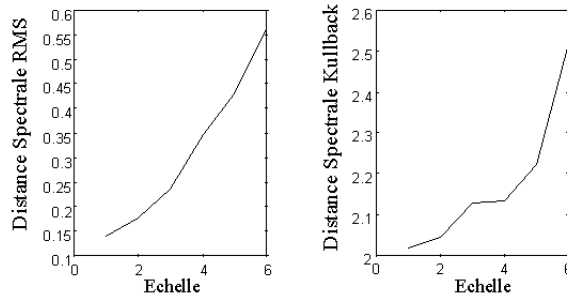


FIG. 3.19 – Influence de la taille des intervalles sur la distance spectrale

En effet, dans ce cas, les deux spectres estimés autour de ce point de symétrie sont identiques et la distance est presque nulle. Nous illustrons notre propos par un exemple simple.

Nous considérons le modèle AR défini par :

$$A[z]Y_t = b_t, \text{ pour } t \in \left[0, \frac{N}{4} - 1\right] \cup \left[\frac{3N}{4}, N - 1\right]$$

$$B[z]Y_t = b_t, \text{ pour } t \in \left[\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} - 1\right]$$

Ce signal est représenté sur la figure 3.20, ainsi que l'arbre des distances associé pour 3 échelles de décompositions.

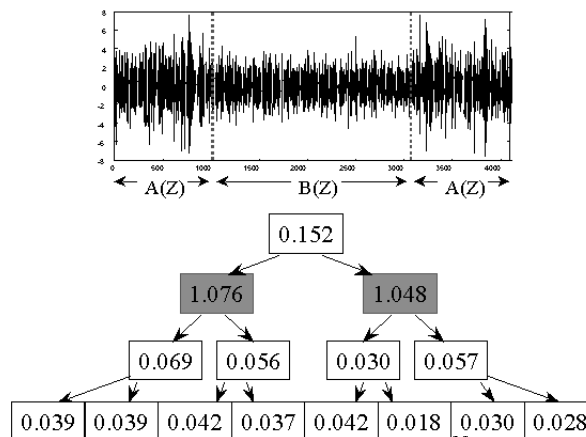


FIG. 3.20 – Exemple de signal AR symétrique par rapport à $\frac{N}{2}$ et arbre des distances associé (Distance RMS). Nous indiquons en grisé les noeuds sélectionnés

Si nous analysons cet arbre des distances, nous notons que :

- La distance D_0^0 est faible alors que le signal n'est pas stationnaire sur I_0^0 , mais il est symétrique par rapport au point $\frac{N}{2}$.
- Les distances $(D_j^1)_{j=0,1}$ sont grandes car le signal n'est pas stationnaire sur $(I_j^1)_{j=0,1}$.
- Les distances $(D_j^2)_{j=0,1,2,3}$ sont faibles car le signal est stationnaire sur $(I_j^2)_{j=0,1,2,3}$, mais la somme $\sum_{j=0}^3 D_j^2$ est supérieure à D_0^0 à cause de l'accroissement du biais.
- Les distances $(D_j^3)_{j=0..8}$ sont faibles car le signal est stationnaire sur $(I_j^3)_{j=0..8}$, mais leurs sommes deux à deux sont supérieures à $(D_j^2)_{j=0,1,2,3}$ à cause du biais.

Donc si l'on applique l'algorithme de recherche de meilleure base :

1. $D_j^2 < (D_{2j}^3 + D_{2j+1}^3)$ pour tout j , donc tous les points de partition à l'échelle 2 sont rejetés et $E_j^2 = D_j^2$,
2. $D_j^1 > (E_{2j}^2 + E_{2j+1}^2)$ pour tout j , donc tous les points de partition à l'échelle 1 sont sélectionnés et $E_j^1 = (E_{2j}^2 + E_{2j+1}^2)$,
3. Comme le nombre de points de I_0^1 est supérieur à $(I_j^3)_{j=1,2,3,4}$ alors $D_0^0 < (E_0^1 + E_1^1) = \sum_{j=0}^3 D_j^2$ et donc l'algorithme rejette la partition au point $\frac{N}{2}$.

Après élimination des points de coupure qui n'ont pas de père, l'algorithme de recherche de meilleure base va donc sélectionner l'intervalle $[0, N - 1]$ comme meilleure partition, pourtant le signal n'est pas stationnaire sur cet intervalle.

Afin de pouvoir tenir compte de ce cas particulier, nous devons étudier précisément l'évolution des mesures de distances selon trois cas de figures : le signal est stationnaire, non stationnaire ou symétrique.

Si l'on étudie l'arbre présenté sur la figure 3.20, on remarque que l'augmentation des distances spectrales est faible quand elle est due au biais (augmentation d'environ 10%), alors qu'elle est très importante dans le cas "symétrique" (augmentation d'environ 1000%). Ceci se généralise à toutes les expérimentations numériques que nous avons menées. Donc, pour traiter le cas "symétrique", nous allons étudier l'accroissement des distances spectrales entre deux échelles successives.

Si $D_j^l > (D_{2j}^{l+1} + D_{2j+1}^{l+1})$ alors nous déduisons que le signal n'est pas stationnaire sur I_j^l , sinon il existe deux possibilités :

- L'accroissement $D_j^l \Rightarrow (D_{2j}^{l+1} + D_{2j+1}^{l+1})$ n'est pas très important. Dans ce cas, on en déduit que cet accroissement est dû au biais et donc que le signal est stationnaire sur I_j^l .
- L'accroissement $D_j^l \Rightarrow (D_{2j}^{l+1} + D_{2j+1}^{l+1})$ est très important. Dans ce cas, on en déduit que la distance spectrale D_j^l est très inférieure à $(D_{2j}^{l+1} + D_{2j+1}^{l+1})$ parce que le signal est symétrique par rapport au point de coupure, mais il n'est pas stationnaire sur I_j^l . Il faut donc sélectionner la coupure au point associé à D_j^l .

A partir de ces constatations "empiriques", nous en déduisons une nouvelle condition pour la sélection des noeuds :

$$\begin{aligned} & \text{Si } \alpha D_j^l < (D_{2j}^{l+1} + D_{2j+1}^{l+1}), \text{ avec } \alpha > 2 \\ & \text{alors le point de coupure entre } I_{2j}^{l+1} \text{ et } I_{2j+1}^{l+1} \text{ est accepté et } A_j^l = 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette condition est appliquée à tout l'arbre et permet la sélection des points de coupure quand les deux intervalles sont symétriques mais non stationnaires. Pourtant, cette nouvelle condition ne va pas entraîner la division d'intervalle stationnaire car α est choisi suffisamment grand (> 2).

Si nous reprenons l'exemple de la figure 3.20 avec $\alpha = 2.5$, nous avons $2.5 * 0.152 < [1.076 + 1.048]$, le point de coupure $\frac{N}{2}$ est donc sélectionné. La partition choisie, à savoir $[0, \frac{N}{4} - 1] \cup [\frac{N}{4}, \frac{N}{2} - 1] \cup [\frac{N}{2}, \frac{3N}{4} - 1] \cup [\frac{3N}{4}, N - 1]$, est alors plus adaptée à la structure du signal. Pourtant cette partition

n'est pas entièrement satisfaisante car l'utilisation d'un arbre dyadique nous oblige à sélectionner le point de coupure $\frac{N}{2}$ pour retenir les noeuds correspondant à $\frac{N}{4}$ et $\frac{3N}{4}$: les partitions sélectionnées sont obligatoirement dyadiques. Pour supprimer cette contrainte, nous devons définir un post-traitement recombinaut certains intervalles.

3.4.2.3 Post-traitement

Avec la méthodologie présentée ci-dessus, le choix d'une segmentation correspondant aux zones les plus stationnaires peut être accompli avec une complexité $\theta(LN \log_2 N)$, grâce à l'utilisation d'un arbre binaire. Toutefois le principe de l'arbre binaire et l'algorithme de recherche de la meilleure partition, nous obligent, pour accepter un point de coupure à sélectionner tous ses noeuds pères. Or ces derniers ne correspondent pas forcément à un changement local du spectre (nous l'avons vu avec l'exemple du paragraphe précédent pour le point $\frac{N}{2}$) et ils doivent être réétudiés afin de déterminer s'ils correspondent à un changement local du spectre. Pour cela, nous proposons la procédure suivante :

Nous collectons tout d'abord l'ensemble des points de coupure détectés par l'algorithme de recherche de meilleure base. Ces points sont enregistrés dans un ensemble $P = (p_n)_{n \in Z}$ tel que :

$$p_n < p_{n+1} \text{ et } p_n \text{ est la coordonnée d'un point de coupure sélectionné} \\ \text{avec } p_0 = 0 \text{ et } p_{final} = N$$

Nous appelons noeud "non terminal sélectionné" (NTS), un noeud d'indice (l, j) tel que :

$$A_j^l = 1 \text{ et } A_{2j}^{l+1} + A_{2j+1}^{l+1} > 0$$

Si p_n correspond à un noeud NTS, nous devons décider si le signal est stationnaire sur le support $[p_{n-1}, p_{n+1} - 1]$, qui constitue la réunion des deux sous intervalles encadrant le point de coupure p_n . Toutefois, il faut construire un ensemble qui ait le même nombre de points à droite et à gauche de p_n (pour que l'estimation des deux spectres se fasse sur un nombre de points identique). Pour cela, un intervalle I_{p_n} est défini par :

$$I_{p_n} = [p_n - \min(|p_n - p_{n-1}|, |p_n - p_{n+1}|), p_n + \min(|p_n - p_{n-1}|, |p_n - p_{n+1}|)]$$

De sa définition, I_{p_n} a une taille qui correspond à une puissance de 2, et l'algorithme d'extraction de zones stationnaires, que nous venons de proposer, peut donc être appliqué sur le signal restreint à I_{p_n} . Ensuite, si le noeud père de l'arbre ainsi calculé est sélectionné, nous acceptons le point de coupure p_n , sinon nous le rejetons.

Afin d'illustrer ce post-traitement, nous reprenons l'exemple introduit dans le paragraphe précédent (figure 3.20). Après l'application de l'algorithme de recherche de partition, prenant en compte les cas symétriques, nous obtenons un ensemble P tel que :

$$P = \left[0, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}, N\right]$$

La coupure de coordonnées $\frac{N}{2}$ correspond à un noeud NTS. Nous appliquons alors l'algorithme de recherche de partition sur le signal restreint à $\left[\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} - 1\right]$. Nous illustrons sur la figure 3.21 le post-traitement appliqué à cet exemple, ainsi que l'arbre des distances spectrales calculé. Nous constatons

que le noeud père correspondant au point de coordonnées $\frac{N}{2}$ n'est pas sélectionné. La coupure en ce point est alors rejetée, et la partition finale est définie par $\left[0, \frac{N}{4} - 1\right] \cup \left[\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} - 1\right] \cup \left[\frac{3N}{4}, N - 1\right]$, correspondant ainsi à la structure du signal.

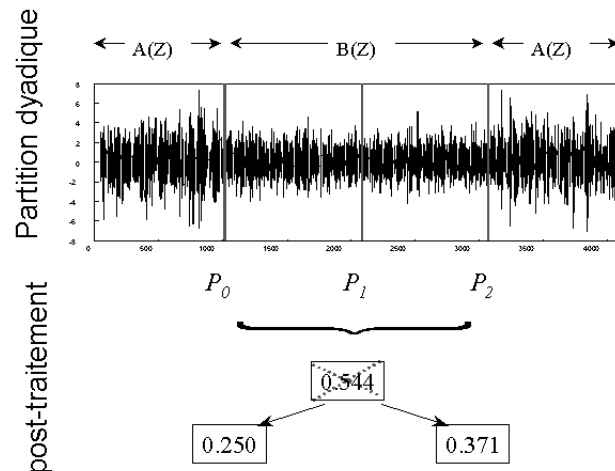


FIG. 3.21 – Illustration du post-traitement sur un exemple AR

Le post-traitement va être appliqué à tous les points de coupure associés à un noeud NTS. Cela permet de construire une partition non uniforme adaptée au signal, mais toujours avec une décomposition rattachée à un arbre binaire, afin de limiter la complexité de l'algorithme.

3.4.3 Applications 1D

3.4.3.1 Signaux de tests

Nous avons tout d'abord appliqué l'algorithme présenté ci-dessus sur le signal synthétique "coif2" introduit dans la section précédente (figure 3.15a). La partition sélectionnée avec une décomposition en 5 échelles, ainsi que la représentation TF correspondante, sont indiquées sur la figure 3.22. On constate que le résultat respecte globalement les structures du signal. Si l'on compare ce résultat, avec celui obtenu par l'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme (figure 3.15c), nous voyons que l'algorithme basé sur l'arbre des distances obtient un résultat globalement équivalent, avec simplement la disparition du phénomène de sur-segmentation présent sur le premier atome. Mais cet exemple ne constitue pas l'illustration la plus flagrante de l'intérêt de l'arbre des distances. Ce sont les signaux réels qui vont mettre en évidence les différences avec le coût entropique, qui, nous le rappelons, provoque dans ce cas des phénomènes de sur-segmentation

Le second exemple est l'enregistrement du mot "Greasy". Nous indiquons sur la figure 3.23a le signal segmenté par notre algorithme, avec une décomposition en 5 échelles. La représentation TF calculée avec la transformée pseudo Wigner-Ville lissée (SPWV) est présentée sur la figure 3.23b. Comme nous l'avons déjà mentionné, la transformée SPWV nous fournit une représentation TF précise et possédant de nombreuses qualités [44], nous permettant de considérer la représentation TF de la figure 3.23b comme référence. Nous pouvons observer les différentes composantes fréquentielles de $\langle ea \rangle$, $\langle s \rangle$ et $\langle y \rangle$ (la composante $\langle gr \rangle$ est moins visible car son énergie est faible). La représentation TF estimée à partir de notre algorithme est indiquée sur la figure 3.23c. Elle montre les mêmes composantes fréquentielles que la décomposition SPWV, avec une très bonne résolution

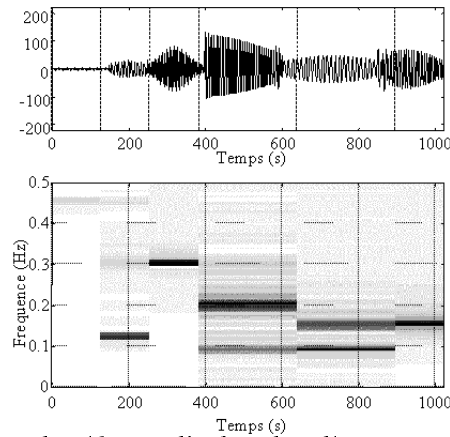


FIG. 3.22 – Segmentation du signal *coif2* par l'arbre des distances spectrales et la représentation TF correspondante

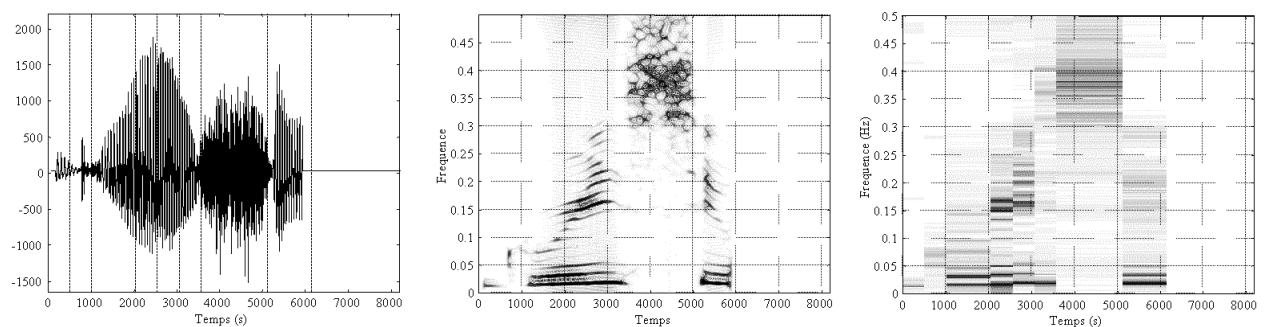


FIG. 3.23 – Le signal "Greasy": (a) Le signal original segmenté par notre algorithme (b) La transformée pseudo Wigner-Ville lissée (c) La représentation TF estimée

fréquentielle⁶. En prenant comme référence la représentation TF obtenue par transformée SPWV, nous concluons que notre algorithme détecte correctement tous les points de rupture du spectre, sans sur-segmentation, alors que l'algorithme de décomposition non-uniforme associé à un coût entropique ne parvenait pas à extraire de larges zones stationnaires (figure 3.16). Enfin, il faut noter que la transformée SWPV a une complexité algorithmique très importante, alors que notre algorithme permet d'obtenir la représentation TF rapidement.

3.4.3.2 Phonétique anglaise

Dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire de linguistique anglaise de la maison des sciences humaines et sociales de Poitiers (UMS CNRS), nous avons étudié la potentialité d'algorithmes basés sur la théorie des ondelettes pour un traitement automatique de certains problèmes de la phonétique anglaise. Dans ce mémoire nous avons choisi, pour illustrer notre propos, la problématique de "l'accent de mot" et plus particulièrement l'accentuation des mots composés. En effet, l'accentuation dans le cadre des mots composés permet de détecter le degré d'intégration entre les composantes. Par exemple, si nous traduisons "black bird" par "corbeau" alors l'expression est considérée comme un seul mot et l'accent est placé sur le début de "black". En revanche, si l'on traduit cette expression par "oiseau noir" alors deux accents primaires sont placés sur le début des deux

6. La transformée de Fourier à fenêtres a en principe la meilleure résolution si la taille des fenêtres respecte entièrement les zones de stationnarité d'un signal stationnaire par partie

mots. Dans d'autres cas, comme "feather bed" (lit de plumes), l'expression a un seul sens, mais selon le degré d'intégration, soit un seul accent primaire est placé au début de l'expression, soit l'accent primaire est placé sur le second mot et un accent secondaire (accentuation plus faible) apparaît sur le premier mot. Une méthode automatique de détection de l'accentuation permettrait de classer les différentes expressions sur un important volume de données (les "linguistes" travaillent sur des ensembles de données, dans ce cas de nature audio, appelés "corpus" qui peuvent contenir un nombre très important d'enregistrements) mais aussi d'étudier l'évolution de certaines expressions au cours du temps.

L'objectif de notre méthode est de pouvoir être utilisé avec des moyens matériels d'acquisition raisonnables. Nous utilisons une chaîne d'acquisition standard composée d'un micro de faible coût, d'une carte son et d'un PC. Il en résulte un signal audio dégradé. Nous proposons dans un premier temps une méthode de débruitage utilisant à la fois l'algorithme de partition et le seuillage de la décomposition en ondelettes non-décimée présenté dans le premier chapitre.

3.4.3.2.1 Débruitage Le signal audio est dégradé par différents bruits (électriques, parasites dus au micro ...) considérés comme stationnaires sur la totalité de l'enregistrement (il existe ensuite des bruits dus à la prononciation mais nous n'abordons pas ici cet aspect du problème). Afin de restaurer les données, nous allons appliquer notre algorithme *uwt_mean*, présenté dans le premier chapitre, basé sur un seuillage d'une décomposition en ondelettes non-décimée. Toutefois, nous modifions l'algorithme tel qu'il est formulé dans le cadre général des bruits blancs ou corrélés pour le spécialiser pour les enregistrements audio. Sachant que l'enregistrement comprend toujours à son début une zone où aucun son n'est enregistré (il se déroule quelques secondes entre le déclenchement de l'acquisition et l'instant où l'utilisateur parle), et puisque nous considérons que le bruit est stationnaire, nous allons étudier l'évolution des coefficients d'ondelettes de ce segment particulier qui ne contient pas d'information. Ceci permet d'établir un seuil pour la décomposition totale du signal.

Afin d'extraire ce segment ne comprenant que du bruit, nous appliquons l'algorithme de partition mais avec des paramètres imprécis (faible nombre d'échelle de décomposition, pas de post-traitement). En effet, le bruit peut être un obstacle à une partition "fine", et nous ne cherchons à extraire qu'un seul segment caractérisé par une absence d'information.

Une fois la segmentation "grossière" du signal sélectionnée, le premier intervalle de cette partition est décomposé à l'aide de l'algorithme non-décimé, et pour chacune des échelles, l'amplitude maximale atteinte par les coefficients dus au bruit est estimée. Ce sont ces valeurs qui vont constituer les seuils de notre algorithme de débruitage.

Ensuite, nous décomposons l'enregistrement dans sa totalité par l'algorithme en ondelettes non-décimé, nous appliquons un seuillage de type "soft" avec les seuils estimés à partir du premier segment et nous reconstruisons.

Nous présentons sur la figure 3.24 un exemple de débruitage de l'enregistrement de l'expression "feather bed" (signifiant "lit de plumes"). Nous constatons sur la figure 3.24a que notre partition "grossière" permet d'extraire un segment ne contenant pas d'information. Les seuils sont estimés sur cet intervalle. Le signal reconstruit à partir de la décomposition non-décimée seuillée est présenté sur la figure 3.24b. On constate que la totalité du bruit présent sur la ligne de base, ainsi qu'autour

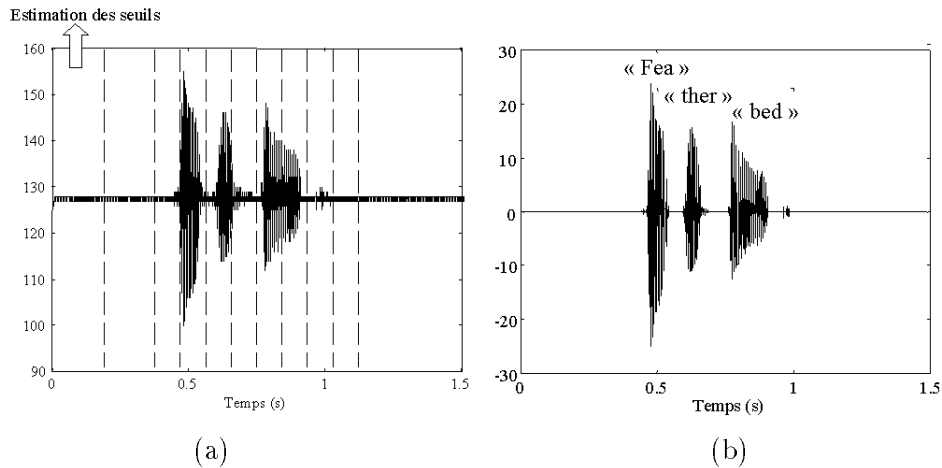


FIG. 3.24 – Débruitage du signal "Feather bed": (a) Le signal original segmenté "grossièrement" (b) Le signal débruité

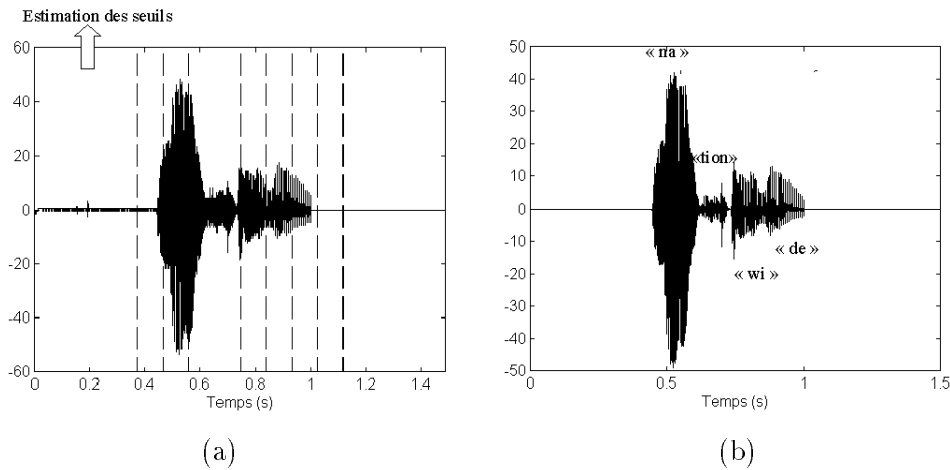


FIG. 3.25 – Débruitage du signal "Nation wide": (a) Le signal original segmenté grossièrement (b) Le signal débruité

des composantes, est supprimée. En revanche chacune des composantes du mot est conservée à l'identique.

Nous présentons sur la figure 3.25 le débruitage de l'expression "nation wide". Nous constatons sur la figure 3.25a que le premier segment sélectionné ne contient pas d'information. Le signal reconstruit à partir de la décomposition non-décimée seuillée est présenté sur la figure 3.25b. Nous constatons que les différentes composantes de l'expression se dissocient plus facilement après débruitage : les frontières entre la composante <tion> et ses deux voisines sont plus "marquées". Cette qualité apparaît plus précisément si nous étudions avec une vue en zoom le second signal "nation wide" débruité (figure 3.26).

Une fois l'enregistrement restauré, nous allons maintenant appliquer l'algorithme de partition avec des paramètres plus précis afin d'étudier les différentes accentuations.

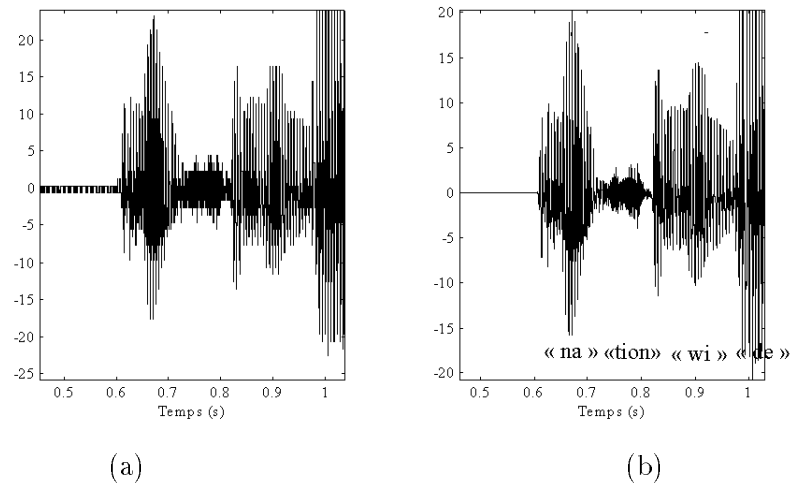


FIG. 3.26 – Débruitage du second signal "Nation wide" (vue en zoom): (a) Le signal original (b) Le signal débruité

3.4.3.2.2 Extraction de ou des accents de mots Dans cette partie, nous étudions trois expressions :

- "black bird" qui signifie soit "oiseau noir" soit "corbeau",
- "nation wide" qui signifie "à l'échelle nationale" et possède plusieurs accentuations,
- "feather bed" qui signifie "lit de plumes" et possède plusieurs accentuations.

Pour chacune de ces expressions, nous avons enregistré à une fréquence de 22.5 KHz une version "mots composés" et une version "deux mots". Chaque enregistrement est décomposé sur 8 échelles (une fenêtre à l'échelle la plus fine a donc une durée de 5.8 ms). L'arbre des coûts est calculé à partir d'une distance RMS optimisée pour le gain.

Une fois la partition optimale sélectionnée, nous établissons la représentation TF associée. Elle permet d'étudier l'évolution des différentes fréquences présentes dans le signal audio. Enfin, pour établir les différentes accentuations, nous calculons l'énergie associée à chacun des intervalles temporels sélectionnés.

L'évolution de l'énergie dans le cas d'une représentation TF peut être calculée en fonction du temps ou des fréquences. Ces courbes correspondent aux densités marginales. Nous rappelons que deux densités marginales peuvent être calculées à partir d'une représentation TF. La première correspond à l'évolution temporelle de l'énergie et se définit par :

$$F_T(t) = \sum_{\xi} S_f(\xi, t) \text{ avec } S_f \text{ la représentation TF du signal } f.$$

La seconde correspond à l'évolution fréquentielle de l'énergie et se définit par :

$$F_{\xi}(\xi) = \sum_t S_f(\xi, t).$$

Dans le cas présent, puisque la segmentation est temporelle, nous allons utiliser la marginale $F_T(t)$. L'étude de l'évolution de l'énergie au cours du temps nous permet de mettre en évidence les différentes accentuations.

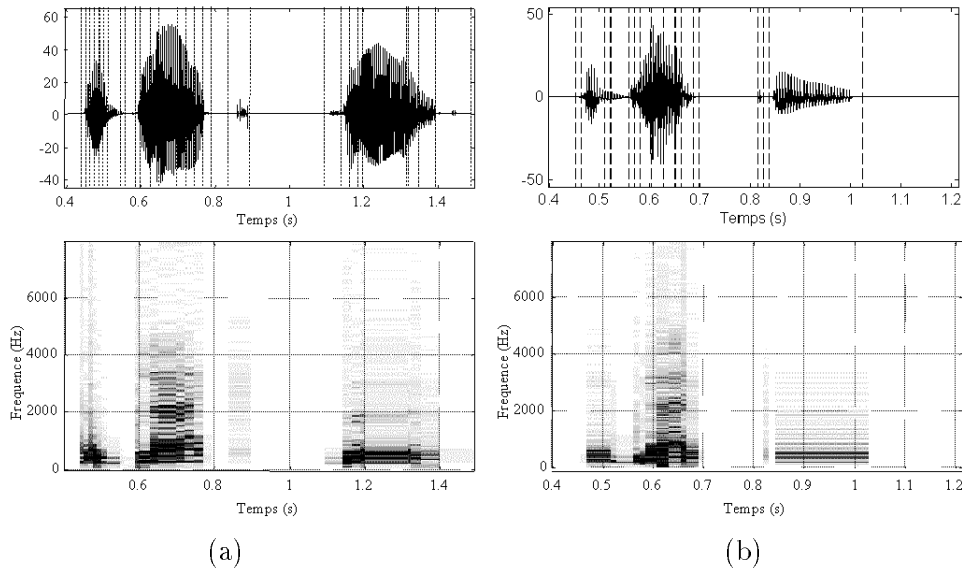


FIG. 3.27 – Segmentation de l’expression “a black bird” et la représentation TF associée : (a) un corbeau (b) un oiseau noir

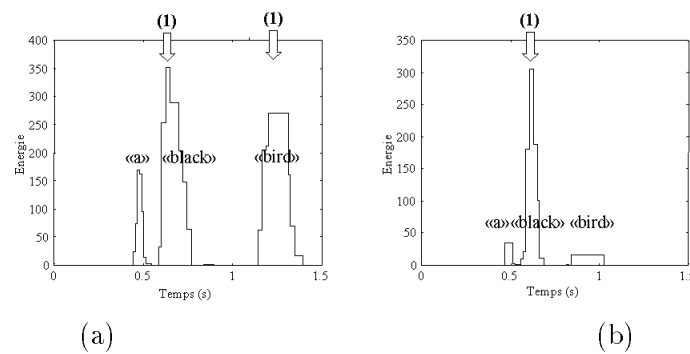


FIG. 3.28 – Evolution de l’énergie associée à l’expression “a black bird” : (a) un corbeau (b) un oiseau noir ((1) correspond à un accent primaire)

L’expression “black bird” constitue notre premier exemple. L’expression a été enregistrée sous ses deux formes (“corbeau” et “oiseau noir”). La figure 3.27 présente les partitions obtenues. Il apparaît que les fréquences fondamentales sont quasiment identiques pour les deux versions, seule la répartition de l’énergie évolue différemment.

La figure 3.28 illustre l’évolution de l’énergie au cours de l’enregistrement, calculée à partir de la partition sélectionnée. Nous voyons apparaître des différences importantes entre les deux formulations, avec la présence de deux accents primaires dans “corbeau” et d’un seul dans “oiseau noir”.

Le second exemple est l’expression “nation wide”. L’expression a été enregistrée sous ses deux formes (“non intégrée” et “intégrée”). La figure 3.29 présente les partitions obtenues. On note des différences sur la durée d’apparition de certaines fréquences. De plus, pour la première version (correspondant à un accent primaire sur le second mot), certaines fréquences sont présentes pour le mot “wide”, alors qu’elles sont invisibles dans la seconde version. En fait, ces fréquences existent aussi pour la seconde version, mais sont associées à une énergie très faible. L’accentuation a une

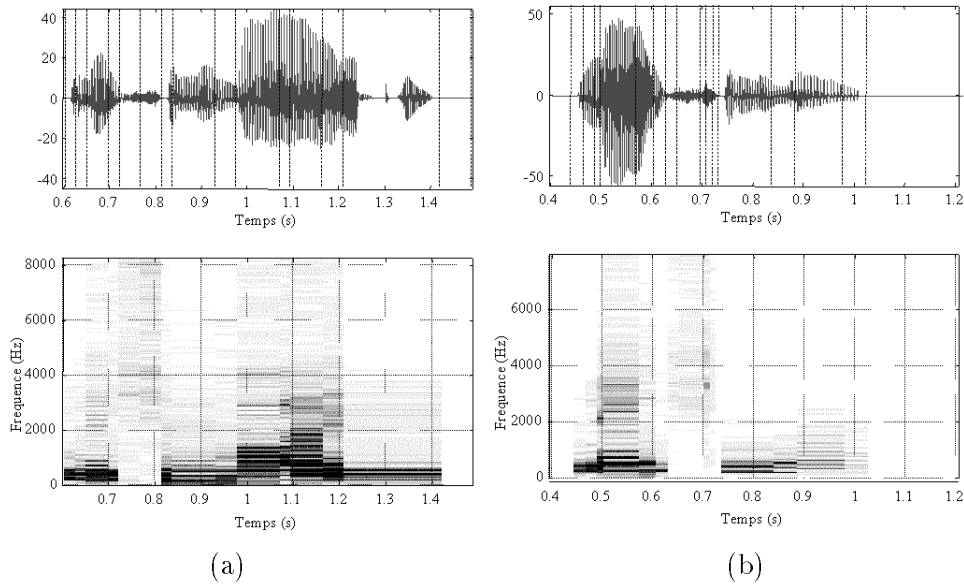


FIG. 3.29 – Segmentation de l’expression ”nation wide” et représentation TF associée : (a) non intégrée (b) intégrée

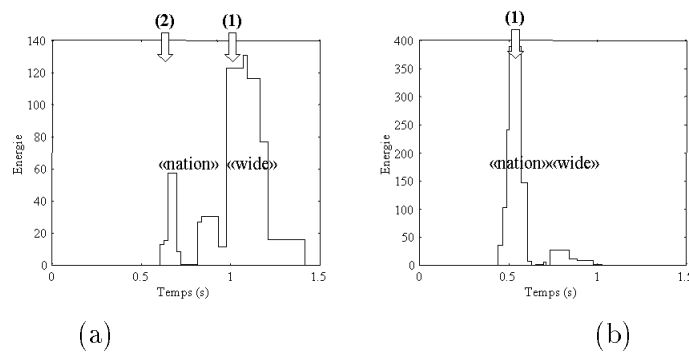


FIG. 3.30 – Evolution de l’énergie associée à l’expression ” nation wide” : (a) non intégrée (b) intégrée ((1) correspond à un accent primaire et (2) correspond à un accent secondaire)

influence très importante pour ces fréquences (fréquences telles que $\xi > 1000$ Hz).

Nous indiquons sur la figure 3.30 l’évolution de l’énergie au cours de l’enregistrement calculée à partir de la partition sélectionnée. Nous voyons la différence d’emplacement de l’accent primaire selon le degré d’intégration. Nous voyons aussi apparaître l’accent secondaire.

Le dernier exemple, l’expression ”feather bed”, pose les limites d’une interprétation à partir simplement d’une segmentation temporelle. En effet, certaines voyelles ou consonnes vont correspondre de façon intrinsèque à une énergie plus importante que d’autres, et ceci quelle que soit l’accentuation. L’expression a été enregistrée sous ses deux formes (”non intégrée” et ”intégrée”). La figure 3.31 présente les partitions obtenues. On constate que les différences sur le mot ”feather” sont assez minimales quelle que soit l’accentuation. La différence d’accentuation sur le mot ”bed” n’apparaît essentiellement qu’au tout début du mot.

Nous indiquons sur la figure 3.32 l’évolution de l’énergie au cours de l’enregistrement calculée à partir de la partition sélectionnée. Si les deux enregistrements sont traités en parallèle puis comparés, la détection des différences d’intégration, et donc d’accentuation, peut se faire simplement car dans

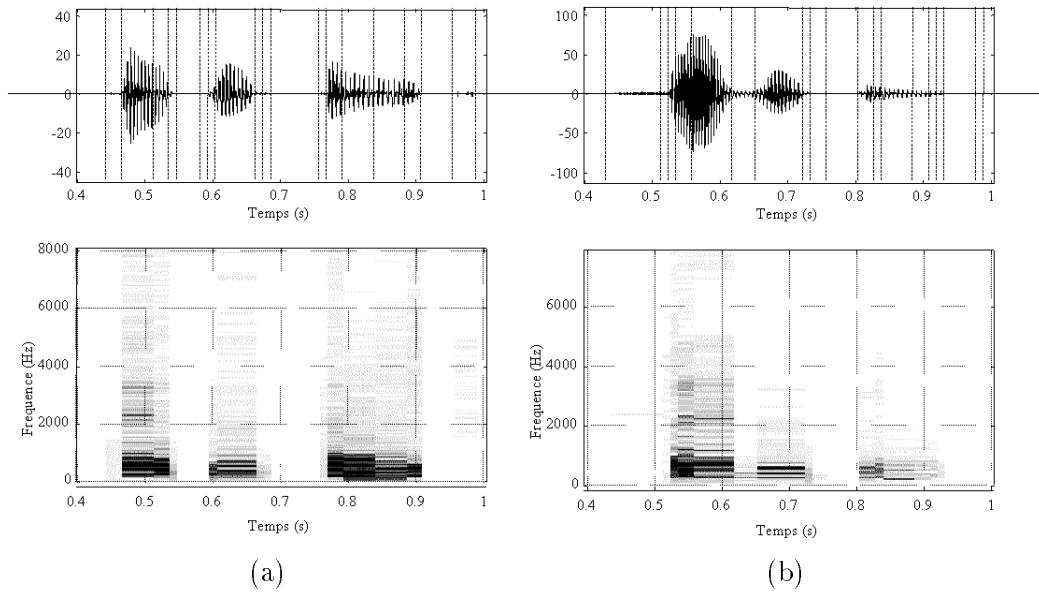


FIG. 3.31 – Segmentation et représentation TF associée de l’expression ”feather bed”: (a) non intégrée (b) intégrée

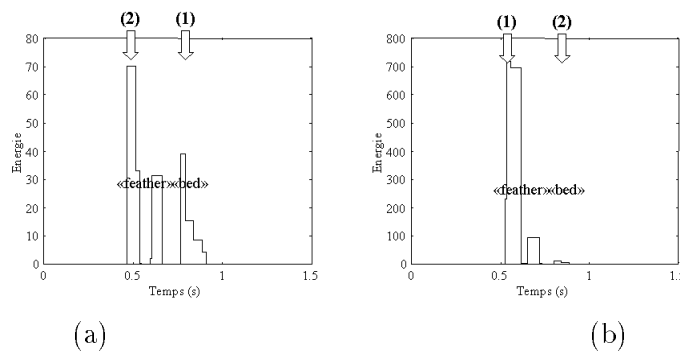


FIG. 3.32 – Evolution de l’énergie associée à l’expression ” feather bed”: (a) non intégrée (b) intégrée ((1) correspond à un accent primaire et (2) correspond à un accent secondaire)

la version ”intégrée”, le mot ”bed” ne représente que très peu d’énergie par rapport à la première. En revanche, si le premier enregistrement est traité d’une façon indépendante, il faut avoir recours à des règles phonétiques pour détecter que l’accent primaire est placé sur le second mot et non sur le premier. Nous proposons dans le chapitre suivant une décomposition reposant sur les paquets d’ondelettes de Meyer. Cette technique nous permettra de mettre en évidence d’une façon plus significative les différences existant entre les deux formulations de ”feather bed”.

Ces quelques exemples ont montré la potentialité de l’algorithme de segmentation dans une étude automatique de l’accentuation des mots en langue anglaise. Ils montrent aussi que l’on ne peut pas se détacher d’hypothèses liées à la phonétique, sinon certaines conclusions peuvent être erronées.

3.4.3.3 Application à l’EEG

Nous avons appliqué notre algorithme de partition sur les enregistrements EEG présentés dans le chapitre 2. A partir de la partition sélectionnée, nous calculons la représentation TF associée permettant ainsi d’étudier l’évolution des fréquences durant les différentes phases de l’expérimen-

tation décrites dans le paragraphe 2.3.3.2 du chapitre 2 (repos, question, réflexion, réponse). Le signal EEG ne se modélise pas forcément par des zones stationnaires. En effet, l'activité n'est à aucun moment strictement stationnaire et subit en continu des fluctuations. Nous avons pu le vérifier avec l'algorithme de partition qui a été mis en échec sur certaines zones "question-réponse" étudiées, car quel que soit le nombre d'échelles de décomposition choisi aucune zone stationnaire n'est sélectionnée. Dans ce cas, une approche avec l'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar invariant proposé dans la première partie de ce chapitre est plus adaptée, mais au prix d'un important découpage de l'axe temporel. Dans d'autres cas, des zones "globalement" stationnaires peuvent être extraites. Nous présentons ci-dessous quelques exemples.

Nous avons étudié localement le signal autour des phases de réflexion, à partir des repères fournis par les maxima d'ondelettes, méthode introduite au chapitre 2.

Nous présentons sur la figure 3.33 la segmentation du signal EEG enregistré sur la voie 17 autour d'une zone "question-réponse" (nous appellerons par la suite ce signal "EEG1"). L'étude réalisée sur l'EEG se concentre sur l'analyse de l'information présente dans les bandes $[4, 6] \cup [6, 8] \cup [8, 10] \cup [10, 12]$ et plus particulièrement sur le signal α qui a une fréquence moyenne d'environ 9 Hz. Nous voyons sur la représentation TF estimée que de l'énergie est présente dans ces bandes jusqu'au début de la réflexion, puis elle disparaît. Ces fréquences commencent à réapparaître au moment de la réponse pour ensuite se renforcer une fois le cycle terminé. Cet exemple illustre parfaitement le phénomène de désynchronisation des circuits neuronaux corticaux lors de la réflexion, qui s'accompagne d'une baisse de l'énergie du signal notamment pour les bandes citées ci-dessus. Si l'on étudie plus particulièrement le signal α (autour de 9 Hz), on constate qu'il disparaît au début de la question pour réapparaître après la réponse.

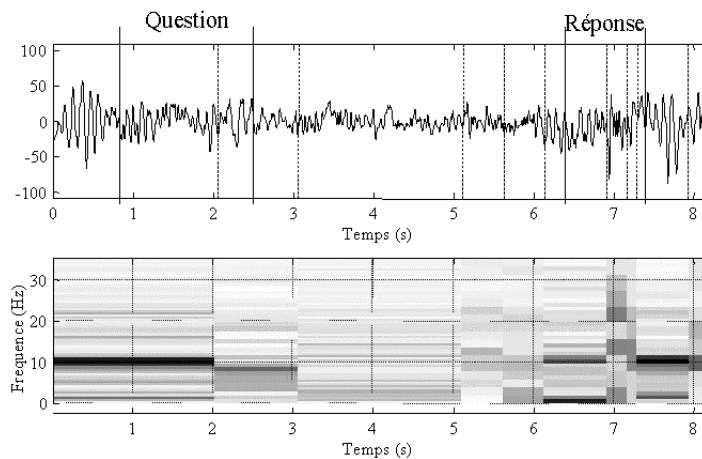


FIG. 3.33 – Segmentation du signal EEG (voie 17, zone 2) dans une zone "question-réponse" et représentation TF associée

Nous présentons sur les figures 3.34 et 3.35 la segmentation du signal EEG enregistré sur la voie 9 autour de deux zones "question-réponse" (nous appellerons par la suite ces signaux "EEG2" et "EEG3"). Tout d'abord, on remarque que le signal enregistré sur cette voie présente une énergie beaucoup plus faible dans les zones de réflexion que celui de la voie 17. De plus, l'énergie se concentre essentiellement autour du signal α dans la bande $[8 - 12]$. Sur ces deux figures, le comportement du signal EEG est sensiblement identique : disparition du signal α à la fin de la question, zone instable durant la réponse (où l'énergie du signal se répartit sur un grand nombre de fréquences), puis reprise

complète du signal α à la fin de la réponse.

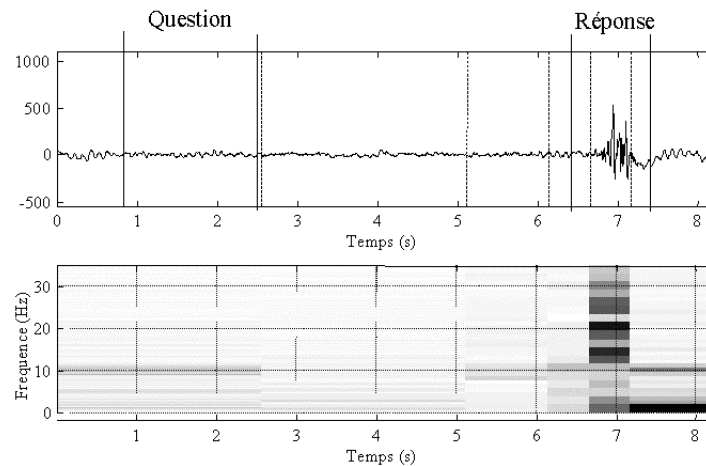


FIG. 3.34 – Segmentation du signal EEG (voie 9, zone 2) dans une zone "question-réponse" et représentation TF associée

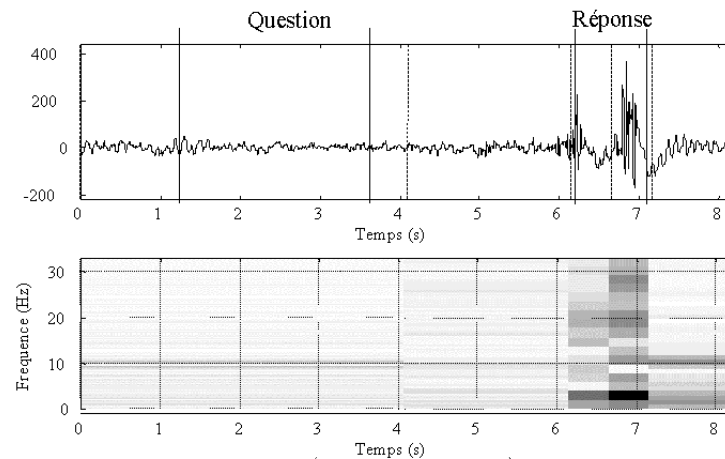


FIG. 3.35 – Segmentation du signal EEG (voie 9, zone 3) dans une zone "question-réponse" et représentation TF associée

Les exemples présentés ci-dessus ont montré que l'algorithme de partition permet d'étudier l'évolution du signal EEG dans les zones questions-réponses, et notamment le phénomène de désynchronisation. Toutefois, comme nous l'avons dit, il peut être mis en échec dans certains cas, lorsqu'aucune zone globalement stationnaire ne peut être extraite du signal. A ce propos, nous avons remarqué que les signaux issus de la voie 9 avaient un comportement globalement plus stationnaire que ceux de la voie 17. Ceci s'est illustré dans les représentations TF, où nous avons constaté que le signal de la voie 9 peut se résumer à quelques fréquences principales qui apparaissent et disparaissent. Nous en déduisons que l'étude simple du signal α peut se faire à partir de l'algorithme de partition basé sur l'arbre des distances appliqué au signal issu de la voie 9. Mais, comme nous le verrons dans le chapitre 4, une approche reposant sur un découpage de l'axe fréquentiel permet d'obtenir des résultats équivalents, mais en étant moins sensible aux fluctuations du signal EEG.

Pour résumer, notre algorithme, basé sur la décomposition en ondelettes de Malvar, permet une recherche rapide des partitions stationnaires d'un signal. La taille des fenêtres est adaptée à la proportion de changement dans le spectre du signal. Nous avons proposé un post-traitement

permettant la construction de partition non uniforme. La représentation TF obtenue possède une haute résolution fréquentielle, puisque la taille des fenêtres n'est pas constante mais adaptée aux zones de stationnarité du signal.

Nous allons maintenant étendre ce principe d'arbre des distances à la dimension 2.

3.4.4 Extension à la dimension 2 de l'arbre des distances

Comme nous l'avons vu lors du rappel sur les ondelettes de Malvar, la généralisation à la dimension 2 des fonctions trigonométriques locales s'effectue par l'intermédiaire du produit tensoriel. Cette décomposition se caractérise par la création de quatre noeuds fils à chaque étape de division. Pourtant, cette représentation n'est pas adaptée pour une extension de l'arbre des distances spectrales à la dimension 2. En effet, il faut qu'à chaque étape de division, seulement deux nouveaux blocs soient créés. Ainsi, nous pouvons évaluer, par l'intermédiaire d'une distance, la pertinence de cette nouvelle coupure. La décomposition en ondelettes de Malvar 2D construit deux nouvelles coupures par bloc à chaque projection sur une échelle plus fine. Nous devons modifier la méthodologie de décomposition afin de ne faire apparaître qu'une seule coupure à chaque itération de l'algorithme de décomposition. Pour cela, nous allons proposer un algorithme de décomposition rapide anisotropique 2D en ondelettes de Malvar.

3.4.4.1 Décomposition anisotropique en ondelettes de Malvar 2D

Nous pouvons trouver dans le livre de Wickerhauser l'illustration d'une décomposition en paquets d'ondelettes anisotropique 2D [96]. Lors de cette décomposition, les projections correspondent chacune à des directions différentes (horizontale ou verticale). Dans ce cas, les coefficients d'ondelettes ne peuvent plus être stockés dans un arbre binaire. Wickerhauser suggère d'organiser les coefficients avec un arbre non-homogène qui inclut différentes copies des mêmes coefficients. Nous proposons dans ce paragraphe un algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D ayant une complexité minimum (notamment en évitant le calcul multiple de coefficients identiques). Nous indiquons ensuite comment les différentes coupures peuvent être "rangées" dans un arbre où chaque noeud possède deux couples de deux fils.

3.4.4.1.1 Algorithme de décomposition La décomposition anisotropique va consister à diviser chaque bloc selon deux directions différentes : l'horizontale et la verticale. Nous illustrons sur la figure 3.36 la division d'un bloc. Nous notons *division_H* la division selon un axe horizontal et *division_V* la division selon un axe vertical.

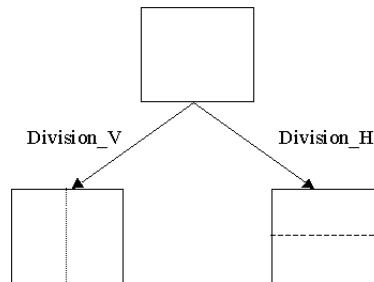


FIG. 3.36 – Division d'un bloc dans la décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D selon deux directions

L'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D va donc consister à appliquer ces deux divisions sur chacun des sous-blocs à chacune des échelles. La principale différence avec la décomposition classique est qu'il existe plusieurs découpages pour une même échelle (dans la décomposition dyadique, l'échelle l est caractérisée par un pavage de l'image avec des blocs de taille $\left[\frac{N}{2^l}, \frac{M}{2^l}\right]$). Si l'on applique cette méthode de division sans aucune restriction, un certain nombre de partitions vont être calculées deux fois. Par exemple, en étudiant en détail les divisions permettant de passer de la première échelle à la seconde, nous constatons que deux des partitions obtenues sont identiques (comme nous pouvons le voir sur la figure 3.37).

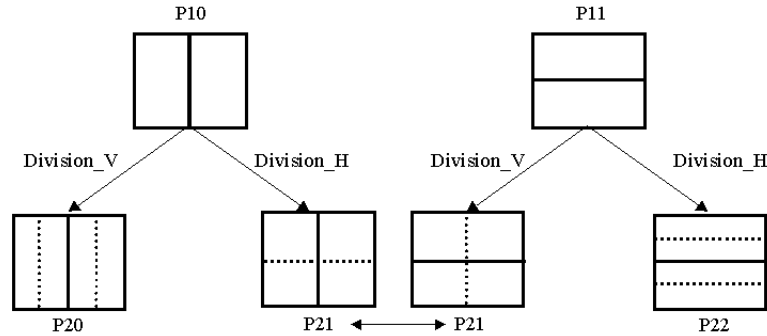


FIG. 3.37 – Décomposition de l'échelle 1 vers l'échelle 2

Afin de simplifier nos propos, nous introduisons une notation pour les différentes projections : nous notons $P_{l,s}$ les différentes partitions. l correspond à l'échelle étudiée, s l'indice de la projection avec la contrainte suivante : $P_{l,s}$ correspond à une partition comprenant des rectangles de taille $\left[\frac{N}{2^{l-s}}, \frac{M}{2^s}\right]$ avec $[N, M]$ taille de l'image de départ et s variant de 0 à l .

Nous remarquons sur la figure 3.37 que les opérations $division_H(P_{1,0})$ et $division_V(P_{1,1})$ obtiennent la même partition. D'une façon générale, nous pouvons dire que les opérations $division_H(P_{l,s})$ et $division_V(P_{l,s+1})$ vont donner la même partition pour chaque échelle l et indice s .

A chaque échelle l , nous avons $l+1$ partitions différentes. Puisque $division_H(P_{l,s}) = division_V(P_{l,s+1})$ nous allons uniquement calculer, pour chaque partition, la division selon la direction verticale. Une seule exception pour la partition d'indice 0 qui ne possède pas de frère à sa gauche et qui doit donc être divisée selon une direction horizontale.

L'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D se décline alors suivant :

Pour l variant de 0 à $L-1$,

$P_{l+1,0} = division_H(P_{l,0})$,

Pour s variant de 0 à $L+1$ par pas de 2,

$P_{l+1,2s+1} = division_V(P_{l,s})$,

pour s variant de 0 à $L+1$,

Appliquer une transforme trigonométrique sur chaque rectangle lment de $P_{l+1,s}$.

Nous illustrons l'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D sur la figure 3.38.

3.4.4.1.2 Organisation des distances Il nous faut maintenant préciser la généralisation à la dimension 2 de l'arbre des distances introduit dans le cas du signal. Entre deux rectangles éléments

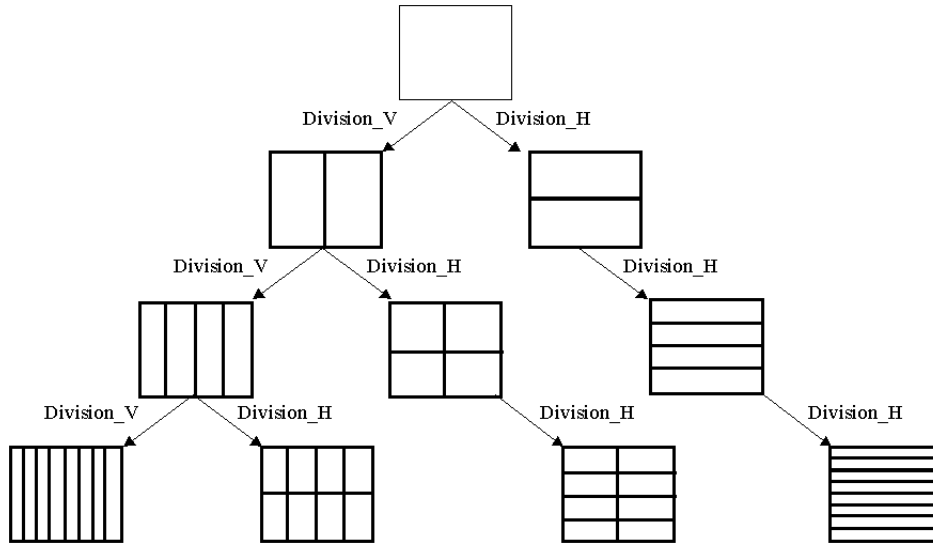


FIG. 3.38 – Algorithme de partition anisotropique 2D

d’une même partition, nous pouvons calculer une distance spectrale mesurant leur similarité dans l’espace fréquentiel. Nous introduirons dans le paragraphe suivant cette mesure. Au préalable, nous devons proposer un formalisme pour chacun des sous-blocs afin de pouvoir expliciter l’organisation de notre arbre des distances spectrales.

Nous avons présenté sur la figure 3.6 les notations couramment utilisées dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar. Nous rappelons que chaque sous-bloc est noté B_j^l avec l indice d’échelle et j le numéro du bloc.

Dans le cas de la décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D, le problème est plus complexe car il existe plusieurs partitions par échelle, et chaque bloc n’est pas décomposé selon les mêmes directions. Nous devons donc introduire un indice supplémentaire s symbolisant le numéro de la partition dont fait partie le bloc, et deux indices i, j indiquant la position du bloc dans le pavage. Lorsque l’on découpe le pavage selon la direction verticale, le nombre de lignes dans le pavage reste constant, donc l’indice i des blocs ne change pas. Concrètement,

$$B_{i,j}^{l,s} \xrightarrow{\text{Division}_V} \left[B_{i,2j}^{l+1,s} \quad B_{i,2j+1}^{l+1,s} \right]. \quad (3.23)$$

A l’inverse, lors d’une division selon l’horizontale c’est le nombre de colonne du pavage qui ne se modifie pas, donc

$$B_{i,j}^{l,s} \xrightarrow{\text{Division}_H} \left[B_{2i,j}^{l+1,s+1} \right. \\ \left. B_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \right]. \quad (3.24)$$

Nous indiquons sur la figure 3.39 l’illustration de ces notations. Si nous reprenons le principe exposé dans le cas 1D, nous définissons un spectre 2D $F_{i,j}^{l,s}$ sur chacun des blocs $B_{i,j}^{l,s}$. Puisque nous avons des coupures horizontales et verticales, nous introduisons deux symboles : DH pour les distances correspondant à des coupures horizontales, et DV pour des coupures verticales. Dans ce cas, si nous avons une fonction $D(\cdot)$ mesurant l’écart entre deux spectres 2D, nous notons

$$DH_{i,j}^{l,s} = D \left(F_{2i,j}^{l+1,s}, F_{2i+1,j}^{l+1,s} \right) \text{ et } DV_{i,j}^{l,s} = D \left(F_{i,2j}^{l+1,s}, F_{i,2j+1}^{l+1,s} \right) \quad (3.25)$$

La figure 3.39 présente des exemples de notations de distances spectrales.

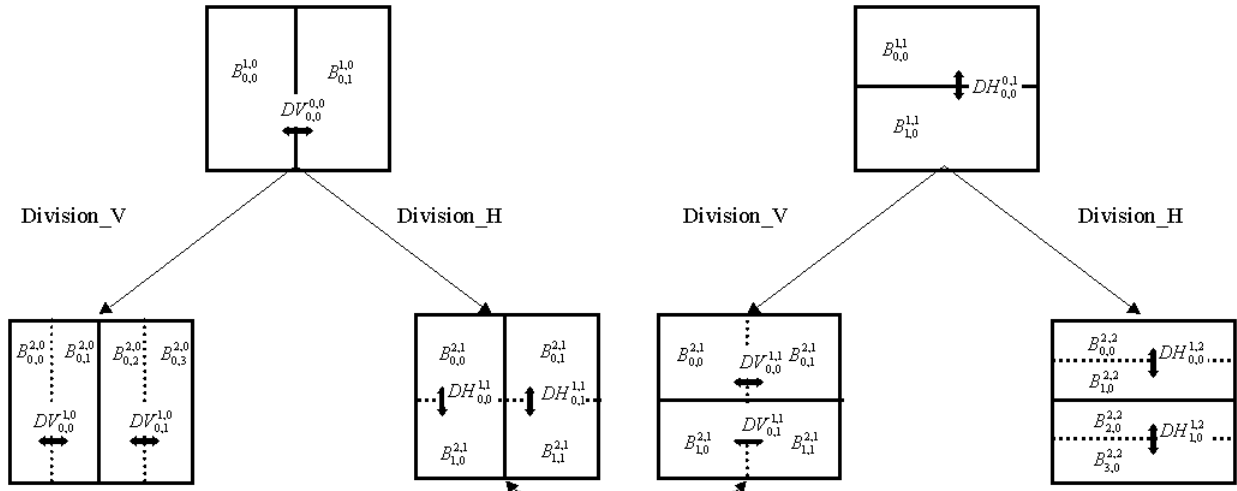


FIG. 3.39 – Notations des sous-blocs et des distances spectrales utilisées dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar anisotrope

A partir des relations (3.23), (3.24) et (3.25), nous en déduisons que chaque distance spectrale possède deux fils correspondant à deux couples de distances. Dans chacun de ces couples, les deux distances sont en concurrence. La figure 3.40 présente une illustration des relations existant entre les distances spectrales de deux échelles successives. Sur cette figure nous avons pris comme exemple un noeud père associé à une division verticale entre deux blocs $\begin{bmatrix} B_{i,j}^{l,s} & B_{i,j+1}^{l,s} \end{bmatrix}$. La distance associée à cette coupure se note $DV_{i,j/2}^{l-1,s}$. Lors de l'itération suivante, les deux blocs $B_{i,j}^{l,s}$ et $B_{i,j+1}^{l,s}$ se décomposent suivant des directions horizontales et verticales. Pour le bloc $B_{i,j}^{l,s}$, nous avons les coupures suivantes

$$B_{i,j}^{l,s} \begin{cases} \xRightarrow{\text{Division}_V} \begin{bmatrix} B_{i,2j}^{l+1,s} & B_{i,2j+1}^{l+1,s} \end{bmatrix} \text{ à laquelle correspond la distance } DV_{i,j}^{l,s} \\ \xRightarrow{\text{Division}_H} \begin{bmatrix} B_{2i,j}^{l+1,s+1} \\ B_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \end{bmatrix} \text{ à laquelle correspond la distance } DH_{i,j}^{l,s+1} \end{cases} .$$

Les deux distances $DV_{i,j}^{l,s}$ et $DH_{i,j}^{l,s+1}$ sont associées à l'un des deux noeuds fils de $DV_{i,j/2}^{l-1,s}$, mais elles sont en concurrence car redondantes. Il faudra définir une procédure de choix entre les deux. De la même façon, le bloc $B_{i,j+1}^{l,s}$ se divise selon

$$B_{i,j+1}^{l,s} \begin{cases} \xRightarrow{\text{Division}_V} \begin{bmatrix} B_{i,2j+2}^{l+1,s} & B_{i,2j+3}^{l+1,s} \end{bmatrix} \text{ à laquelle correspond la distance } DV_{i,j+1}^{l,s} \\ \xRightarrow{\text{Division}_H} \begin{bmatrix} B_{2i,j+1}^{l+1,s+1} \\ B_{2i+1,j+1}^{l+1,s+1} \end{bmatrix} \text{ à laquelle correspond la distance } DH_{i,j+1}^{l,s+1} \end{cases} .$$

Les deux distances $DV_{i,j+1}^{l,s}$ et $DH_{i,j+1}^{l,s+1}$ sont, elles aussi, associées à l'un des deux noeuds fils de $DV_{j/2}^{l-1,s}$ mais en concurrence. Toutes ces remarques sont illustrées sur la figure 3.40.

Il nous faut maintenant préciser l'estimation du spectre 2D ainsi que le calcul des distances.

3.4.4.2 Mesure de distances spectrales

Afin de détecter les changements dans le spectre du processus, nous devons estimer, au préalable, le spectre sur chacun des blocs $B_{i,j}^{l,s}$. Comme pour la dimension 1, les distances spectrales sont évaluées entre deux blocs qui ont le même nombre de points. L'estimation du spectre peut donc

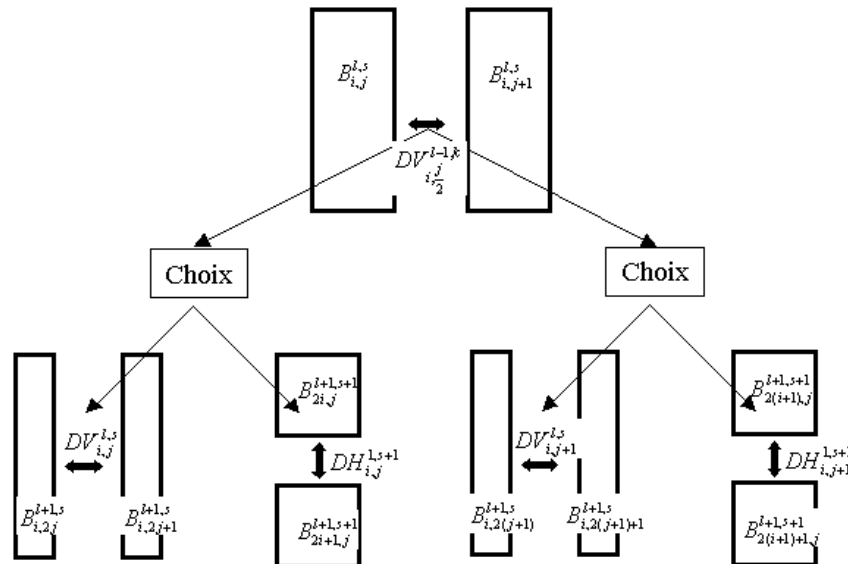


FIG. 3.40 – Construction de l'arbre des distances spectrales dans la décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique 2D

s'effectuer sans concaténation de zéros, qui introduirait des oscillations parasites dans le spectre estimé.

De plus, les fenêtres utilisées sont celles introduites dans la transformée de Malvar qui ont de faibles lobes secondaires dans le domaine de Fourier.

Le spectre local $F_{i,j}^{l,s}$ peut être estimé sur chaque bloc $B_{i,j}^{l,s}$ par le module au carré de la transformée de Fourier 2D

$$F_{i,j}^{l,s}[\xi_x, \xi_y] = \left| \frac{1}{N/2^{l-j}} \sum_{t_x \in B_{i,j}^{l,s}} \frac{1}{M/2^j} \sum_{t_y \in B_{i,j}^{l,s}} T_{B_j^{l,s}} f e^{-\frac{i2\pi\xi_x(t_x - x_{i,j}^{l,s})}{N/2^{l-j}}} e^{-\frac{i2\pi\xi_y(t_y - y_{i,j}^{l,s})}{M/2^j}} \right|^2$$

avec $(x_{i,j}^{l,s}, y_{i,j}^{l,s})$ coordonnées en haut à gauche du bloc $B_{i,j}^{l,s}$ de taille $[N/2^{l-j}, M/2^j]$

Toutefois, comme dans le cadre monodimensionnel, cette estimation n'est pas robuste car le spectre est dégradé par des oscillations parasites dues à la variance du périodogramme. Nous proposons de généraliser à la dimension 2 le post-traitement introduit par Moulin pour l'estimation d'un spectre de puissance 1D [75]. En effet, puisque la transformée de Fourier 2D est séparable, nous approximations les oscillations parasites présentes dans le périodogramme 2D par un processus gaussien 2D lorsque l'on applique une transformée logarithmique. Nous retrouvons alors le cas classique de mesures corrompues par un bruit blanc gaussien additif. La décomposition en ondelettes en deux dimensions avec, par exemple, des ondelettes de Daubechies, constitue une méthode très efficace pour réduire ces oscillations [36].

Pour les mêmes raisons que celles exprimées pour le signal (meilleures qualités de reconstruction) nous proposons d'utiliser une transformée en ondelettes non-décimée (comme nous l'avons présentée dans le premier chapitre). L'estimation du log-périodogramme local 2D, que nous proposons, est

telle que :

$$\log F_{i,j}^{l,s} [\xi_x, \xi_y] = \overrightarrow{W}_u^{(2D)-1} \circ K_\lambda \circ \overrightarrow{W}_u^{(2D)} \left(\log \left(\left| \frac{1}{N/2^{l-j}} \sum_{t_x \in B_{i,j}^{l,s}} \frac{1}{M/2^j} \left[e^{-\frac{i2\pi\xi_x(t_x - x_{i,j}^{l,s})}{N/2^{l-j}}} e^{-\frac{i2\pi\xi_y(t_y - y_{i,j}^{l,s})}{M/2^j}} \right] \right| \right)^2 \right)$$

avec $\overrightarrow{W}_u^{(2D)}$ la transformée en ondelette discrète non-décimée en dimension 2

(3.26)

La méthode de débruitage utilisée est celle proposée dans le cadre de notre algorithme *uwt_mean*. K_λ correspond à un seuillage "soft" avec une estimation du niveau de bruit sur la première échelle sur chacun des plans de la projection. Le seuil est alors l'extension aux décompositions non-décimées de celui proposé par Donoho dans le cas 2D comme nous l'avons introduit dans le premier chapitre :

$$\left(\lambda_{l'}^a = \sigma^a \sqrt{2 \log_2 \left(\sqrt{\frac{N/2^{l-j}}{2^{l'}} \frac{M/2^j}{2^{l'}}} \right)} \right)_{a=1,2,3}$$

Afin de présenter quelques résultats de débruitage de spectre 2D, nous rappelons très brièvement quelques notions sur les modèles autorégressifs en dimension 2 (AR2D). Nous avons choisi le modèle quart de plan, c'est-à-dire que le signal se modélise par [100]

$$f[x, y] = \sum_{(m,n) \in S} a[m, n] f[x - m, y - n] + b[x, y]$$

avec $S = \{0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N, (m, n) \neq (0, 0)\}$ et $a[m, n]$ les coefficients du modèle

Nous illustrons sur la figure 3.41 le modèle AR2D utilisé. Les coefficients du modèle, permettant de calculer la valeur du pixel courant, vont s'appliquer sur la zone grisée symbolisant le passé.

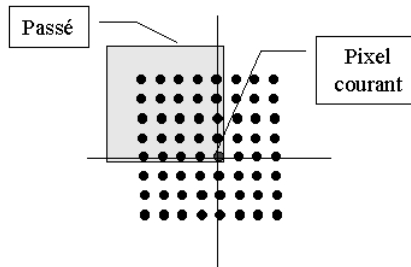


FIG. 3.41 – Modèle AR 2D quart de plan

D'une façon générale, les systèmes AR2D vont s'écrire :

$$Af[x, y] = b[x, y]$$

avec $A = a_{11} + a_{12}z_x^{-1} + a_{21}z_y^{-1} + a_{22}z_x^{-1}z_y^{-1} \dots + a_{ij}z_x^{j-1}z_y^{i-1}$ et $b[x, y] \rightarrow N^{2D} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

Nous présentons sur la figure 3.42 le lissage d'un log-périodogramme d'un signal AR 2D défini par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2728 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 \end{bmatrix} f[x, y] = b[x, y].$$

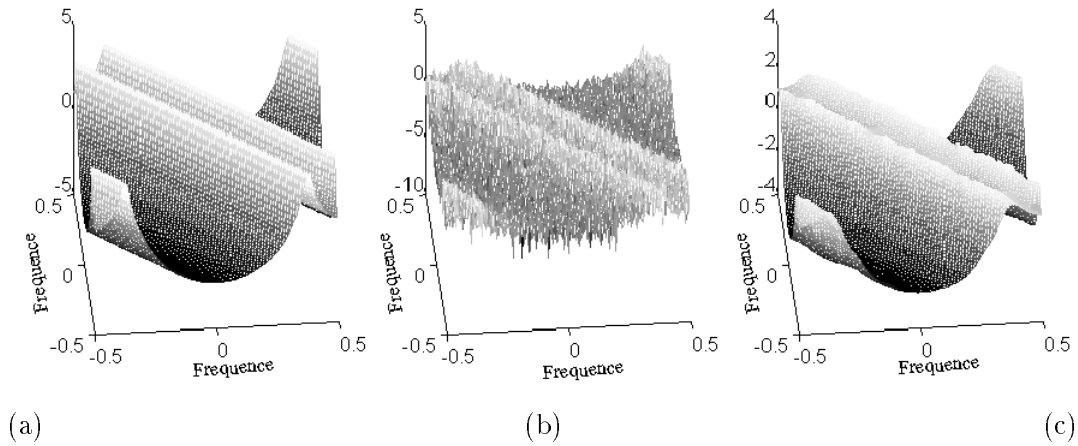


FIG. 3.42 – Log-périodogramme d'un AR 2D: (a) théorique (b) Estimé par la méthode du périodogramme (c) Estimé par la méthode du périodogramme et débruité par la méthode en ondelettes non-décimée

Nous pouvons constater sur la figure 3.42 que le débruitage par décomposition en ondelettes non-décimée 2D permet de lisser le log-périodogramme de l'image tout en conservant les informations principales. Nous présentons sur la figure 3.43 le lissage d'un log-périodogramme d'un signal AR 2D plus complexe défini par :

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1.3106 & 0 & 0.6561 \\
 0.2557 & 0 & 0.3351 & 0 & 0.1677 \\
 -0.8729 & 0 & -1.1441 & 0 & -0.5727 \\
 0.2071 & 0 & 0.2714 & 0 & 0.1359 \\
 0.6561 & 0 & 0.8599 & 0 & 0.4305
 \end{bmatrix} s[x, y] = b[x, y].$$

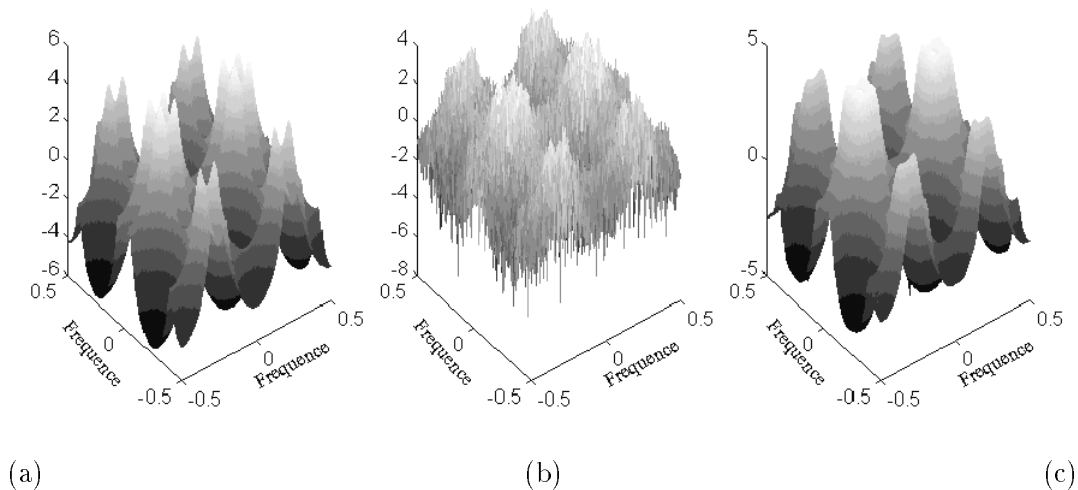


FIG. 3.43 – Log-périodogramme d'un AR 2D: (a) théorique (b) Estimé par la méthode du périodogramme (c) Estimé par la méthode du périodogramme et débruité par la méthode en ondelettes non-décimée

Comme pour l'exemple précédent, nous constatons que chacune des fréquences fondamentales du signal 2D est conservée et que tous les pics parasites ont disparu.

Ensuite, le calcul des différentes distances spectrales $DH_{i,j}^{l,s}$ et $DV_{i,j}^{l,s}$ s'effectue à partir du log-périodogramme débruité et de l'extension à la dimension 2 des distances présentées dans le paragraphe 3.4.1.2. Par exemple, si l'on choisit la distance en norme L_q :

$$DH_{i,j}^{l,s} = \left\| \log F_{B_{2i,j}^{l+1,s}} - \log F_{B_{2i+1,j}^{l+1,s}} \right\|_q, DV_{i,j}^{l,s} = \left\| \log F_{B_{i,2j}^{l+1,s}} - \log F_{B_{i,2j+1}^{l+1,s}} \right\|_q$$

L'arbre des distances spectrales associé à une image comprenant deux AR 2D, l'un étant limité par un carré au centre de l'image, est indiqué sur la figure 3.44. Nous avons entouré sur l'arbre les distances qui possèdent des noeuds fils de plus faibles valeurs. Nous constatons que ces distances correspondent bien aux frontières limitant les différentes zones.

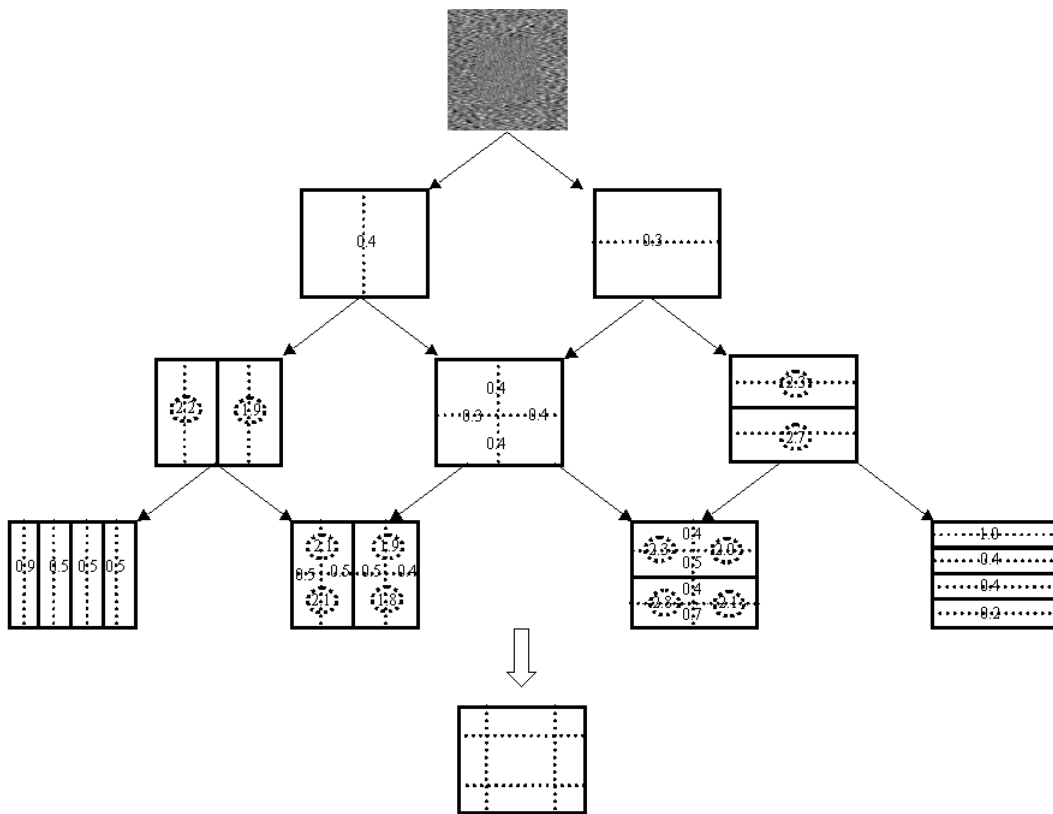


FIG. 3.44 – Arbre des distances spectrales associé à la décomposition d'une image composée de 2 AR 2D

Nous pouvons maintenant proposer un algorithme de recherche de meilleure partition à partir de l'arbre des distances spectrales 2D.

3.4.4.3 Choix de la meilleure partition

L'algorithme de recherche de meilleure base 2D va utiliser les mêmes principes que ceux exposés dans le cas du signal. Cependant, un certain nombre de différences apparaît étant donné la présence de deux fils en concurrence à chaque noeud.

3.4.4.3.1 Cas symétrique Le cas particulier symétrique va aussi, dans le cas 2D, mettre en échec l'algorithme de recherche de meilleure partition. Toutefois, comme pour le signal, on postule que l'augmentation des distances spectrales entre deux échelles successives est faible quand elle est

due au biais, alors qu'elle est très importante dans le cas "symétrique". Nous allons donc étudier l'accroissement des distances spectrales entre deux échelles successives.

Seulement un noeud a pour fils deux couples de distances et non simplement deux distances. Pour remédier à cela, nous sélectionnons dans chaque couple "fils" la distance spectrale maximale : en effet si l'accroissement est très important dans l'une des deux directions cela veut dire que nous sommes en présence d'un cas symétrique. En reprenant le modèle de l'équation (3.22), nous en déduisons la condition suivante :

$$\text{Si } \alpha DV_{i,j}^{l,s} < \left(\max \left(DV_{i,2j}^{l+1,s}, DH_{i,2j}^{l,s+1} \right) + \max \left(DV_{i,2j+1}^{l+1,s}, DH_{i,2j+1}^{l+1,s+1} \right) \right), \text{ avec } \alpha > 2$$

alors la coupure verticale entre $B_{i,2j}^{l+1,s}$ et $B_{i,2j+1}^{l+1,s}$ est acceptée.

De la même façon,

$$\text{Si } \alpha DH_{i,j}^{l,s} < \left(\max \left(DV_{2i,j}^{l+1,s}, DH_{2i,j}^{l+1,s+1} \right) + \max \left(DV_{2i+1,j}^{l+1,s}, DH_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \right) \right), \text{ avec } \alpha > 2$$

alors la coupure horizontale entre $B_{2i,j}^{l+1,s}$ et $B_{2i+1,j}^{l+1,s}$ est acceptée.

Cette condition est appliquée à tout l'arbre. Elle permet la sélection des points de coupure, quand les deux sous-blocs sont symétriques mais pas stationnaires et sans phénomène de sur-segmentation car α est choisi suffisamment grand (> 2).

3.4.4.3.2 Algorithme d'élagage Après le calcul de l'arbre des distances, nous utilisons un algorithme d'élagage afin de fusionner les blocs pour lesquels le spectre est similaire. Comme dans le cas 1D, la partition optimale est celle qui minimise la somme des distances spectrales définie par :

$$C = \sum D(F_1, F_2) \tag{3.27}$$

avec F_1 le spectre local gauche ou haut et F_2 le spectre local droit ou bas

Suivant la définition précédente, nous recherchons les blocs qui ont une distance "intra-bloc" minimale. Nous avons vu que l'on peut définir deux axes de partition : horizontal et vertical. La distance "intra-bloc" est alors construite afin de ne pas privilégier une direction :

$$D_{intra_B} = \frac{1}{2} (D(F_{haut}, F_{bas}) + D(F_{gauche}, F_{droit})) \tag{3.28}$$

Si cette distance "intra-bloc" est minimale, on peut considérer que le signal 2D est presque stationnaire sur le bloc.

Nous avons constaté que l'arbre n'est pas binaire, et que deux distances "fils" sont en concurrence pour un même noeud : il faut rejeter l'un des deux. Puisque nous recherchons la minimisation du coût défini par l'équation (3.27), nous allons sélectionner la coupure "fils" qui possède la distance "intra_bloc" la plus faible et l'autre est rejetée.

Nous utilisons un algorithme similaire à celui proposé par Coifman et Wickerhauser pour extraire la base optimale :

Soit $Ah_{i,j}^{l,s}$ un booleen indiquant si la coupure horizontale correspondant au noeud d'indice (i, j, s, l) est sélectionnée, soit $EH_{i,j}^{l,s}$ le cot associ.

Soit $Av_{i,j}^{l,s}$ un booleen indiquant si la coupure verticale correspondant au noeud d'indice (i, j, s, l) est sélectionnée, soit $Ev_{i,j}^{l,s}$ le cot associ, on applique alors le processus suivant :

Pour l variant de $L - 2$ à 0 ,
Pour s variant de 0 à l ,
Pour i variant de 0 à $2^s - 1$,
Pour j variant de 0 à $2^{l-1-s} - 1$,
Si $DV_{i,j}^{l,s} > \frac{1}{2} \left(Ev_{i,2j}^{l+1,s} + Eh_{i,2j}^{l+1,s+1} + Ev_{i,2j+1}^{l+1,s} + Eh_{i,2j+1}^{l+1,s+1} \right)$ alors la partition verticale
distance intra-bloc
entre $B_{i,2j}^{l+1,k}$ et $B_{i,2j+1}^{l+1,k}$ est choisie donc $\left\{ \begin{array}{l} Av_{i,j}^{l,s} = 1 \\ Ev_j^{l,s} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} Ev_{i,2j}^{l+1,s} + Eh_{i,2j}^{l+1,s+1} \\ + Ev_{i,2j+1}^{l+1,s} + Eh_{i,2j+1}^{l+1,s+1} \end{array} \right) \end{array} \right.$
Si $\left(Ev_{i,2j}^{l+1,s} > Eh_{i,2j}^{l+1,s+1} \right)$ alors $Av_{i,2j}^{l+1,s} = 0$ sinon $Ah_{i,2j}^{l+1,s+1} = 0$
Si $\left(Ev_{i,2j+1}^{l+1,s} > Eh_{i,2j+1}^{l+1,s+1} \right)$ alors $Av_{i,2j+1}^{l+1,s} = 0$ sinon $Ah_{i,2j+1}^{l+1,s+1} = 0$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} Ev_j^{l,s} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} Ev_{i,2j}^{l+1,s} + Eh_{i,2j}^{l+1,s+1} \\ + Ev_{i,2j+1}^{l+1,s} + Eh_{i,2j+1}^{l+1,s+1} \end{array} \right) \right\} \right\}$ **choix entre les deux**
 fils
Pour s variant de 1 à $l + 1$,
Pour i variant de 0 à $2^{s-1} - 1$,
Pour j variant de 0 à $2^{l-s} - 1$,
Si $DH_{i,j}^{l,s} > \frac{1}{2} \left(Ev_{2i,j}^{l+1,s} + Eh_{2i,j}^{l+1,s+1} + Ev_{2i+1,j}^{l+1,s} + Eh_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \right)$ alors la partition verticale
entre $B_{2i,j}^{l+1,s}$ et $B_{2i+1,j}^{l+1,s}$ est choisie donc $\left\{ \begin{array}{l} Ah_{i,j}^{l,s} = 1 \\ Eh_{i,j}^{l,s} = \frac{1}{2} \left(Ev_{2i,j}^{l+1,s} + Eh_{2i,j}^{l+1,s+1} + Ev_{2i+1,j}^{l+1,s} + Eh_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \right) \end{array} \right.$
Si $\left(Ev_{2i,j}^{l+1,s} > Eh_{2i,j}^{l+1,s+1} \right)$ alors $Av_{2i,j}^{l+1,s} = 0$ sinon $Ah_{2i,j}^{l+1,s+1} = 0$
Si $\left(Ev_{2i+1,j}^{l+1,s} > Eh_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \right)$ alors $Av_{2i+1,j}^{l+1,s} = 0$ sinon $Ah_{2i+1,j}^{l+1,s+1} = 0$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} Ah_{i,j}^{l,s} = 1 \\ Eh_{i,j}^{l,s} = \frac{1}{2} \left(Ev_{2i,j}^{l+1,s} + Eh_{2i,j}^{l+1,s+1} + Ev_{2i+1,j}^{l+1,s} + Eh_{2i+1,j}^{l+1,s+1} \right) \right\} \right\}$ **choix entre les deux**
 fils

L'algorithme présenté ci-dessus permet d'obtenir la partition minimale au sens du coût défini dans l'équation (3.27) avec un coût "intra-bloc" défini par l'équation (3.28). Nous appliquons ensuite un algorithme éliminant les points de coupure n'ayant pas de père.

3.4.4.3.3 Post-traitement Comme pour le cas monodimensionnel, l'utilisation d'un arbre, qui après sélection des fils devient binaire, et l'algorithme de recherche de meilleure partition nous obligent, pour accepter un axe de coupure, à sélectionner tous les noeuds pères. Or ceux-ci ne correspondent pas forcément à un changement local du spectre. Un post-traitement 2D doit donc déterminer si toutes les coupures sélectionnées correspondent à un changement local du spectre.

La procédure 2D est différente de celle proposée dans le cadre du signal. En effet, certains axes sélectionnés peuvent être discontinus dans la partition finale car divisés en plusieurs petits segments par des axes perpendiculaires. Donc, ce n'est plus l'axe de coupure complet qui doit être étudié localement pour déterminer s'il correspond à un changement dans le spectre mais chacun des petits segments le constituant.

Pour cela, un maillage ne comprenant que des axes non interrompus (c'est-à-dire n'ayant sur leur totalité aucun segment de division perpendiculaire) est construit à partir de la partition sélectionnée. Nous décrivons rapidement la procédure permettant de construire ce maillage :

1. Nous initialisons le maillage avec les points terminaux des axes de coupure présents dans la

partition.

2. Puis nous parcourons chacun de ces axes, et un noeud est ajouté au maillage pour chaque intersection entre l'axe étudié et un segment perpendiculaire.

Nous illustrons sur la figure 3.45 la transformation d'une partition résultant de l'algorithme de meilleure partition, constituée de 5 axes de divisions, en un maillage constitué de 9 segments.

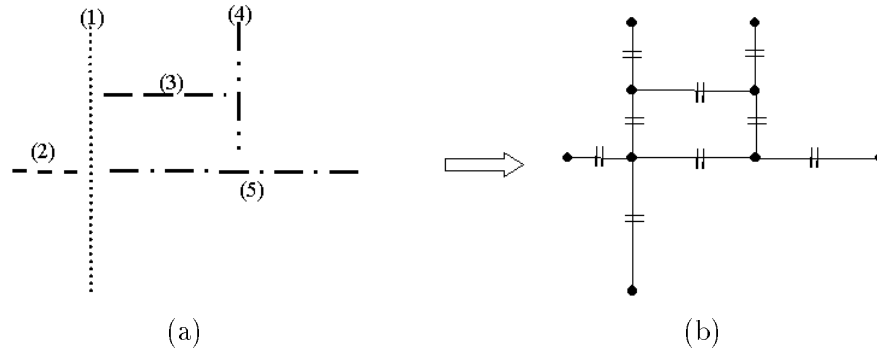


FIG. 3.45 – Transformation de la partition sélectionnée en un maillage: (a) 5 axes de division sélectionnés (b) maillage constitué de 9 segments

Le maillage est formalisé par un ensemble $P = (p_n)_{n \in Z}$ où chaque élément p_n correspond à un noeud du maillage. Pour chaque élément p_n nous stockons les coordonnées du point ainsi que les quatre noeuds directement reliés à lui (ces noeuds voisins peuvent correspondre à l'élément vide). Différentes opérations sont définies sur ces noeuds :

- $(p_n)^x$ et $(p_n)^y$ permettent d'obtenir les coordonnées (x, y) de l'élément p_n ,
- $\text{droite}(p_n)$ permet d'obtenir le noeud qui est à droite du noeud p_n , et en suivant le même principe nous définissons les opérations $\text{gauche}(p_n)$, $\text{haut}(p_n)$ et $\text{bas}(p_n)$.

A partir de ce formalisme, la procédure d'étude locale de chaque segment peut être définie. Nous construisons deux sous-blocs encadrant le segment étudié. Nous décidons ensuite si le signal 2D est stationnaire sur la fenêtre correspondant à la réunion des deux sous-blocs.

Toutefois, cette fenêtre B_{p_n} doit avoir le même nombre de points d'un côté et de l'autre du segment. Elle est donc définie pour un axe horizontal par

$$B_{p_n} = [(p_n)^x, (\text{droite}(p_n))^x] \\ \times \left[\begin{array}{l} (p_n)^y - \min(|(p_n)^y - (\text{haut}(p_n))^y|, |(p_n)^y - (\text{bas}(p_n))^y|), \\ (p_n)^y + \min(|(p_n)^y - (\text{haut}(p_n))^y|, |(p_n)^y - (\text{bas}(p_n))^y|) \end{array} \right]$$

,et pour un axe vertical par

$$B_{p_n} = \left[\begin{array}{l} (p_n)^x - \min(|(p_n)^x - (\text{gauche}(p_n))^x|, |(p_n)^x - (\text{droite}(p_n))^x|), \\ (p_n)^x + \min(|(p_n)^x - (\text{gauche}(p_n))^x|, |(p_n)^x - (\text{droite}(p_n))^x|) \end{array} \right] \\ \times [(p_n)^y, (\text{bas}(p_n))^y]$$

L'algorithme d'extraction de zones stationnaires est alors appliqué sur le signal 2D restreint à B_{p_n} . Si le noeud père de l'arbre ainsi calculé est sélectionné, nous acceptons l'axe de coupure

$[p_n, droite(p_n)]$ dans le cas horizontal, ou $[p_n, bas(p_n)]$ dans le cas vertical, associé à p_n , sinon nous le rejetons.

3.4.4.4 Résultats 2D

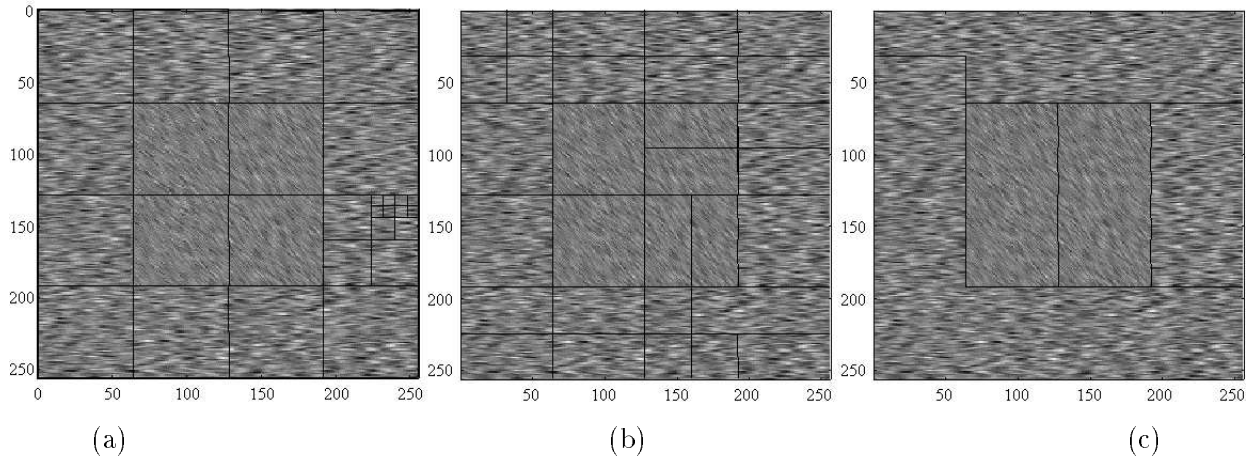


FIG. 3.46 – Découpage d'une image constituée de deux AR2D: (a) Sélection par un coût entropique (b) sélection minimisant la distance "intra-bloc" sur une décomposition anisotropique (c) découpage après post-traitement

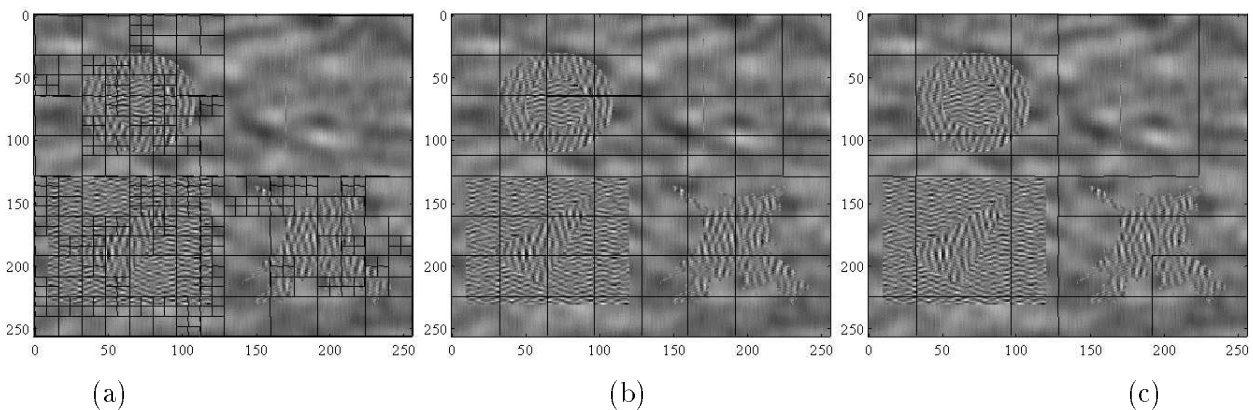


FIG. 3.47 – Découpage d'une image constituée de modèles AR2D et d'atomes TF 2D: (a) Sélection par un coût entropique (b) sélection minimisant la distance "intra-bloc" sur une décomposition anisotropique (c) découpage après post-traitement

Nous présentons sur les figures 3.46, 3.47 et 3.48, les partitions sélectionnées suivant un coût entropique, par la minimisation des distances "intra-bloc", et après post-traitement. Ces trois images sont constituées soit d'atomes TF et de modèles AR, soit de textures réelles.

Nous constatons tout d'abord sur les deux premières images que l'utilisation d'un coût entropique a pour conséquence un phénomène de sur-segmentation. En revanche, sur la troisième image composée de textures réelles, certains objets sont trop découpés, d'autres ne sont pas détectés.

L'utilisation d'une mesure de distance spectrale permet d'obtenir une séparation plus globale des différentes composantes de l'image, mais aussi une sélection de la base optimale plus robuste, c'est-à-dire que, quel que soit le type d'information présent dans l'image, les différents résultats

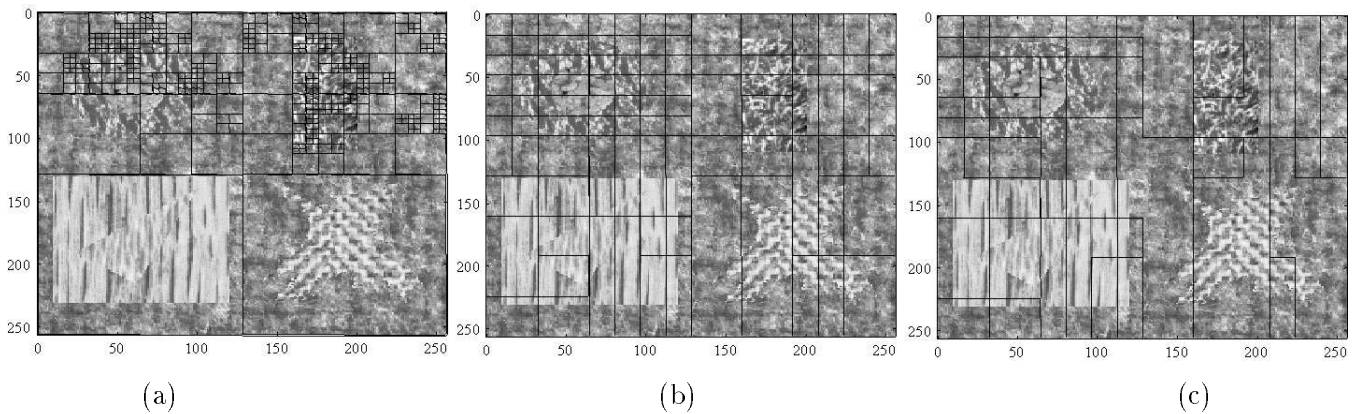


FIG. 3.48 – Découpage de l'image "texture5": (a) Sélection par un coût entropique (b) sélection minimisant la distance "intra-bloc" sur une décomposition anisotropique (c) découpage après post-traitement

sont similaires. Le post-traitement proposé permet "d'affiner"⁷ les résultats : après la suppression des coupures qui ne sont pas classifiées comme correspondant à un changement local de spectre, nous avons un découpage de l'image avec des blocs de tailles importantes (ceci est primordial si l'on veut ensuite appliquer un second traitement) qui contiennent au maximum deux classes différentes d'objets.

Il est certain que l'algorithme de décomposition en ondelettes de Malvar est limitatif lorsqu'il est étendu à la dimension 2 car un découpage d'une image avec des rectangles est trop rigide et ne permet pas de séparer parfaitement des objets de formes complexes. Toutefois, sa modification par l'intermédiaire d'une décomposition anisotropique et d'une sélection par la minimisation des distances fréquentielles "intra-bloc" apporte une amélioration sensible par rapport à la décomposition originale et des différents coûts additifs proposés dans la littérature. Il faut envisager le découpage sélectionné par l'arbre des distances comme une première étape, permettant de diviser une image en blocs, chacun d'eux ne contenant plus que deux composantes différentes. Ensuite un second traitement peut être appliqué sur chacun de ces blocs permettant de séparer les deux composantes (un simple test d'hypothèse binaire : on peut utiliser un algorithme de segmentation classique sans être confronté au difficile problème du nombre de classes).

Enfin, la méthodologie présentée dans ce paragraphe définit un cadre général d'algorithme de prédécoupage d'une image. Il faut simplement posséder :

- Une caractéristique $F_{i,j}^{l,s}$ associée à chaque bloc $B_{i,j}^{l,s}$,
- Une distance D mesurant les différences entre les caractéristiques. D doit tendre vers 0 lorsque deux sous-blocs sont presque identiques en terme d'information et doit être croissante lorsque le nombre de points diminue dans les deux blocs comparés.

Alors à partir de l'algorithme proposé, nous pouvons sélectionner le découpage correspondant aux zones les plus "stationnaires" au sens de la caractéristique $F_{i,j}^{l,s}$.

⁷. Nous mettons le terme affiner entre guillemet car il est évident qu'un découpage d'une image avec des droites horizontales et verticales ne peut pas être très fin.

3.5 Conclusion

Nous avons étudié durant ce troisième chapitre les décompositions en ondelettes de Malvar qui permettent de définir une transformation de Fourier à court terme adaptative. Durant les deux premiers chapitres, nous avons abordé la décomposition en ondelettes comme une base orthogonale possédant des propriétés particulières ou permettant d'analyser un signal avec une approche multirésolution. Avec la décomposition en ondelettes de Malvar, nous nous intéressons plus particulièrement à sélectionner la meilleure représentation TF du signal, nous nous rapprochons ainsi des méthodes TF classiques telles que le spectrogramme ou la transformée de Wigner-Ville. Les chapitres suivants vont poursuivre dans cette même voie.

Dans un premier temps, nous avons proposé un algorithme de découpage 1D non-uniforme nous permettant de définir une décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme. La méthode proposée nous permet de fixer un cadre général de décomposition en fonction φ -non-uniforme, car, comme nous allons le voir dans les deux derniers chapitres, l'axe temporel n'est pas le seul à pouvoir être découpé selon le formalisme présenté dans ce chapitre. Ce qui va nous amener vers une décomposition entièrement non-uniforme conjointement dans le domaine temporel et fréquentiel.

Dans un second temps, nous avons remis en cause les différentes fonctions de coût proposées dans la littérature qui ne mesurent pas, selon nous, la pertinence d'une coupure. Afin de pouvoir déterminer si une coupure permet de séparer deux composantes, nous avons introduit un arbre de distances spectrales. Les applications sur des signaux EEG ou audio donnent des résultats pertinents en terme d'information. L'extension à la dimension 2 de la méthodologie permet d'envisager différemment la décomposition en ondelettes de Malvar 2D. En effet, le découpage résultant correspond à une partition globale de l'image en blocs ne contenant au maximum que deux composantes. Ceci nous permet d'imaginer une chaîne de traitement robuste qui serait constituée de ce découpage, puis d'un raffinement basé simplement sur un test d'hypothèse binaire.

Ce chapitre, tout en ouvrant certaines pistes pour des recherches futures, illustre les limites de la décomposition en ondelettes de Malvar 2D. Mais, comme nous l'avons dit, l'axe temporel n'est pas le seul à pouvoir être découpé par des fenêtres régulières. L'axe fréquentiel peut lui aussi être transformé suivant la même méthodologie. Ceci nous conduit tout naturellement à la décomposition en paquets d'ondelettes, mais avec des ondelettes particulières : les ondelettes de Meyer. Nous étudions cette nouvelle décomposition dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Construction d'une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer

4.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre une méthode de calcul pour une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer. Le point de départ de notre travail est l'étude de Kolaczyk menée dans le cadre de la décomposition simple en ondelettes de Meyer [57]. Le principe général, suggéré par Meyer [74], puis par Auscher *et al.* [5], consiste à utiliser un système de division tel qu'il est conçu pour les ondelettes de Malvar, mais dans le plan fréquentiel. Ceci a pour avantage, par rapport aux méthodes "classiques" de décomposition en ondelettes, de définir des filtres à support compact dans le domaine fréquentiel. La généralisation de cette méthode numérique aux paquets d'ondelettes nous permet de proposer une nouvelle représentation numérique plus adaptée pour des problèmes d'analyse ou de séparation des différents éléments d'un signal.

A partir de cette nouvelle représentation, une méthode 1D permettant d'extraire les différentes composantes d'un signal est établie. Cet algorithme est illustré sur des signaux synthétiques, mais aussi sur les signaux EEG et audio. Avec ces différents exemples, nous allons mettre en évidence la complémentarité de cette approche avec celle proposée dans le cadre des ondelettes de Malvar.

L'extension à la dimension 2 de la base d'ondelettes ainsi que de l'algorithme de séparation des différents composants nous permet de définir un cadre d'étude adapté à des problématiques de segmentation. Nous illustrons l'extension 2D sur les images analysées dans le chapitre 3, ainsi que sur des textures issues de la base d'images du GDR ISIS.

4.2 Les ondelettes de Meyer

4.2.1 Théorie continue

Les ondelettes de Meyer peuvent être considérées comme une amélioration des ondelettes *sinc* (sinus cardinal), ou appelées ondelettes de Littlewood-Paley [94]. Les ondelettes *sinc* correspondent à un découpage fréquentiel parfait et sont basées sur une analyse multirésolution telle que [94] :

- V_0 est l'espace des fonctions à bande limitée à $[-\pi, \pi]$. Donc V_l correspond à l'espace des fonctions à bande limitée à $[-2^{-l}\pi, 2^{-l}\pi]$.

- W_0 , l'espace complémentaire à V_0 dans V_{-1} tel que $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$, correspond aux fonctions à bande limitée à $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$. Donc W_l correspond à l'espace des fonctions à bande limitée à $[-2^{-l+1}\pi, -2^{-l}\pi] \cup [2^{-l}\pi, 2^{-l+1}\pi]$.

Nous rappelons que la projection d'une fonction $f \in V_l$ sur V_{l+1} correspond à son approximation passe-bas, et que l'information perdue lors de cette projection (la partie passe-haut) est engendrée par l'espace complémentaire W_{l+1} . La figure 4.1 indique l'analyse ainsi construite.

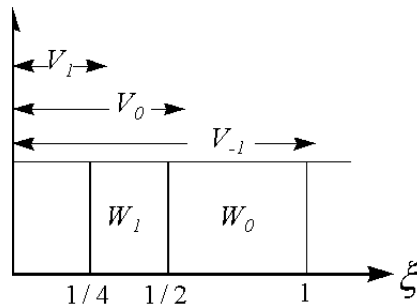


FIG. 4.1 – Décomposition par les ondelettes sinc (visualisation des fréquences positives)

La fonction d'échelle ζ , telle que la collection $(\zeta(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de V_0 , s'écrit

$$\zeta(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

La fonction d'ondelette ψ associée, telle que la collection $(\psi(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de W_0 , s'écrit

$$\psi(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t/2} \cos(3\pi t/2).$$

La base d'ondelettes est alors donnée par

$$\psi_{l,k}(t) = \left\{ 2^{l/2} \psi(2^l t - k) \right\}_{l,k \in \mathbb{Z}},$$

où $\psi_{l,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base pour les fonctions de support $[-2^{-l+1}\pi, -2^{-l}\pi] \cup [2^{-l}\pi, 2^{-l+1}\pi]$. L'ensemble $\{\psi_{l,k}\}_{l,k \in \mathbb{Z}}$ constitue une base de $L_2(\mathbb{R})$ [94].

La résolution fréquentielle des fonctions d'ondelette et d'échelle, ainsi définies, est idéale. Toutefois, elles sont à support temporel infini, avec une décroissance en $1/t$. La représentation associée va avoir une très mauvaise résolution temporelle. Le principe des ondelettes de Meyer est de lisser le cas idéal de la fonction sinc. Il faut alors construire une fonction d'échelle qui vérifie l'orthogonalité et les contraintes d'échelle de l'analyse multirésolution, et qui soit plus régulière que le sinus cardinal.

Pour construire la fonction d'échelle de Meyer, une fonction de coupure de régularité variable, est utilisée. Elle est définie par

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et $r(t) + r(1 - t) = 1$ pour tout t .

On retrouve une définition identique dans le cadre des ondelettes de Malvar. La fonction d'échelle de Meyer ζ s'exprime alors en fonction de r [72]

$$\hat{\zeta}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq 1/3 \\ \cos(\frac{\pi}{2} r(3|\xi| - 1)) & \text{si } 1/3 < |\xi| \leq 2/3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

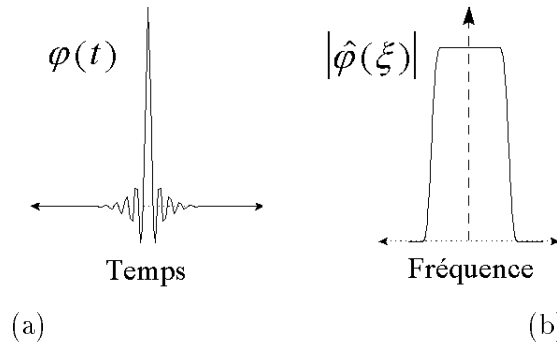


FIG. 4.2 – Fonction d'échelle de Meyer (a) Fonction temporelle $\zeta(t)$ (b) Le module de la transformée de Fourier $|\hat{\zeta}(\xi)|$

Nous indiquons sur la figure 4.2 un exemple de fonction ζ construite à partir d'une fonction r polynomiale [57].

La fonction ζ , introduite dans l'équation (4.1), définit une analyse multirésolution [94]. On peut alors trouver une fonction périodique $H(\xi) \in L_2[0, 2\pi]$ telle que

$$\hat{\zeta}(2\xi) = (1/\sqrt{2})H(\xi)\hat{\zeta}(\xi).$$

$H(\xi)$, filtre passe-bas, peut s'écrire comme [94]

$$H(\xi) = \sqrt{2} \sum_n \hat{\zeta}(2\xi + 2n). \quad (4.2)$$

Nous reprenons dans la figure 4.3 la preuve graphique de la définition de $H(\xi)$ proposée par Vetterli et Kovacevic [94].

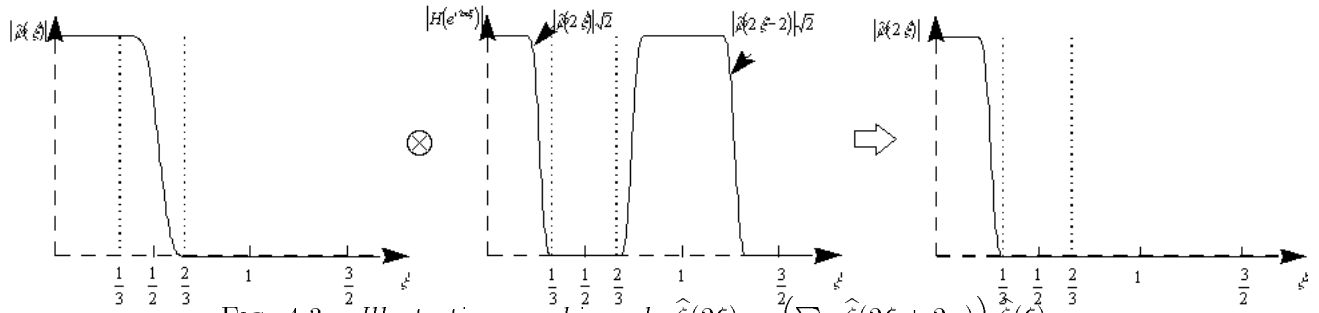


FIG. 4.3 – Illustration graphique de $\hat{\zeta}(2\xi) = \left(\sum_n \hat{\zeta}(2\xi + 2n) \right) \zeta(\xi)$

Afin de construire la fonction d'ondelette ψ associée, nous utilisons la relation liant le filtre passe-bas H au filtre passe-haut G dans le cas d'une décomposition orthogonale [94]

$$\begin{aligned} G(\xi) &= e^{-i2\pi\xi} H^*(\xi + 1/2) \\ &= -e^{i2\pi\xi} \sum_n \hat{\zeta}(2(\xi + 1/2) + 2n)\sqrt{2} \\ &= -e^{i2\pi\xi} \sum_n \hat{\zeta}(2\xi + 1 + 2n)\sqrt{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Alors la fonction d'ondelette est définie par

$$\hat{\psi}(\xi) = (1/\sqrt{2})G(\xi/2)\hat{\zeta}(\xi/2)$$

$$\begin{aligned}
 &= -e^{i\pi\xi} \left(\widehat{\zeta}(\xi + 1) + \widehat{\zeta}(\xi - 1) \right) \widehat{\zeta}(\xi/2) \\
 &= \begin{cases} e^{-i\xi\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}r(3|\xi| - 1)\right) & \text{si } 1/3 < |\xi| \leq 2/3 \\ e^{-i\xi\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}r\left(\frac{3}{2}|\xi| - 1\right)\right) & \text{si } 2/3 < |\xi| \leq 4/3 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Nous reprenons dans la figure 4.4, la preuve graphique de la définition du filtre $G(\xi)$ proposée dans [94]. Un exemple d'ondelette de Meyer est donné dans la figure 4.5.

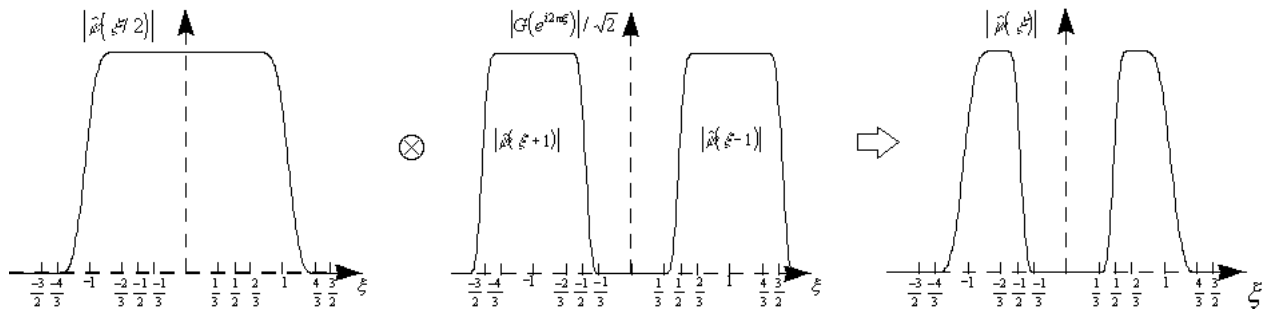


FIG. 4.4 – Illustration graphique de la construction de l'ondelette de Meyer

Théorème 8 La collection de fonction $(\psi_{l,k})_{l,k \in \mathbb{Z}}$ définie par $\psi_{l,k}(x) = 2^{l/2}\psi(2^l x - k)$, avec ψ vérifiant la relation (4.4), forme une base de $L_2(\mathbb{R})$. [5]

L'ondelette de Meyer est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$. Elle a un support compact dans le domaine fréquentiel, et une décroissance temporelle très rapide. Sa régularité est identique à celle de la fonction de coupure r .

Toutefois, les ondelettes de Meyer n'ont représenté pendant de nombreuses années "qu'un" intérêt théorique, car les filtres associés G et H n'ont pas d'expression simple en fonction de $e^{i2\pi\xi}$. En effet, le filtre discret $h[n]$ ne peut pas être utilisé efficacement dans un algorithme informatique. Puisque la séquence $h[n]$ a une décroissance très rapide, la première solution proposée permettant de calculer la décomposition de signaux discrets avec des ondelettes de Meyer, consiste à borner arbitrairement le filtre. Ceci permet ensuite d'utiliser l'algorithme de transformée rapide en ondelettes proposé par Mallat présenté dans le premier chapitre. Cette méthode est utilisée, par exemple, pour les ondelettes de Battle-Lemarié [67].

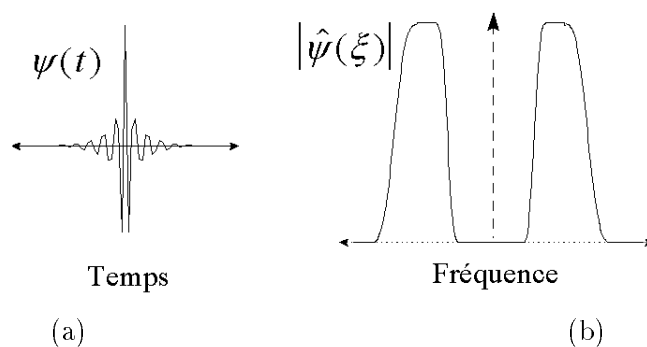


FIG. 4.5 – L'ondelette de Meyer (a) Fonction temporelle $\psi(t)$ (b) Le module de la transformée de Fourier $|\widehat{\psi}(\xi)|$

Cependant, si nous bornons la séquence $h[n]$, nous ne respectons plus le système élaboré dans le domaine continu, la décomposition n'est plus orthogonale et inversible parfaitement. De plus, nous retrouvons un système "classique" où les filtres sont à support temporel fini, et donc à support fréquentiel infini.

La seconde solution consiste à découper le signal directement dans le plan fréquentiel. Nous rapportons dans le paragraphe suivant, cette seconde méthode qui permet de développer numériquement un algorithme de décomposition en ondelettes de Meyer, tout en respectant les caractéristiques citées précédemment (notamment un support fréquentiel borné).

4.2.2 Réalisation numérique

L'idée de base, pour développer l'algorithme numérique de décomposition en ondelettes de Meyer, repose sur une adaptation de la décomposition de Malvar, que nous avons présentée dans le chapitre 3, au plan fréquentiel. Cette idée fut présentée par Meyer [74], Auscher et al. [5] puis reprise en détail et programmée en langage Matlab par Kolaczyk durant sa thèse en 1994 [57]. Dans la suite de ce paragraphe, nous reprenons en détail les principes exposés par Kolaczyk permettant la réalisation numérique de l'algorithme de décomposition.

4.2.2.1 Restriction aux fréquences positives

Etant donné la symétrie hermitienne de la transformée de Fourier, il faut tout d'abord fixer la relation qui existe entre les restrictions des parties réelles et imaginaires des fréquences positives, et les projections des fréquences négatives. Nous notons la transformée de Fourier d'une fonction f par $\hat{f} = f_1 + if_2$ et un intervalle de fréquence négative par $-I = [-b + 1, -a]$. Alors les projections de f_1 et f_2 sur $-I$ peuvent s'obtenir directement de leurs projections sur $I = [a, b - 1]$ en utilisant la relation suivante [57]

$$\left. \begin{aligned} (T_{-I}f_1)[\xi] &= (T_I f_1)[- \xi] \\ (T_{-I}f_2)[\xi] &= -(T_I f_2)[\xi] \end{aligned} \right\} \forall \xi \in]-\infty, 0]. \quad (4.5)$$

Notons que dans l'équation précédente nous reprenons la notation introduite dans le chapitre 3: $T_I f$ correspond à la restriction de la fonction f sur l'intervalle I . Cette relation permet de partitionner uniquement l'axe des fréquences positives, la décomposition totale sera ensuite obtenue par extension.

4.2.2.2 Calcul des corrélations avec la fonction d'ondelette

Soit le module de la fonction d'ondelette $w_{I_0}(\xi) = |\hat{\psi}(\xi)|$; alors, à partir de l'équation (4.4), l'ondelette peut s'écrire [57]

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= w_{I_0}(\xi) e^{-i\pi\xi} \\ &= w_{I_0}(\xi) (\cos(\xi\pi) - i \sin(\xi\pi)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si nous reprenons la terminologie de la décomposition de Malvar, nous remarquons sur la figure 4.4 que la fonction $w_{I_0}(\cdot)$ est une fenêtre de support $I_0 = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (ainsi que l'intervalle symétrique

$-I_0$). D'après l'équation (4.4), nous constatons que la segmentation n'est pas brutale, mais qu'il existe un recouvrement de $\frac{1}{6}$ à gauche I_0 de et de $\frac{1}{3}$ à droite de I_0 .

Plus généralement, l'ondelette à l'échelle l et à la position k telle que $\psi_{l,k}(x) = 2^{l/2}\psi(2^l x - k)$ correspond à une fenêtre $w_{I_l}(\xi) = w_{I_0}(2^l \xi)$ définie sur l'intervalle $I_l = [2^{-l-1}, 2^{-l}[$ avec un recouvrement de $\frac{2^{-l}}{6}$ à gauche et $\frac{2^{-l}}{3}$ à droite [5]. La réalisation de la projection est identique à celle de l'opérateur de restriction T_{I_l} de la décomposition de Malvar introduit dans le chapitre 3 avec, au point de coupure 2^{-l-1} , un recouvrement $\alpha = \frac{2^{-l}}{6}$, et au point de coupure 2^{-l} , un recouvrement $\alpha = \frac{2^{-l}}{3}$. Nous pouvons écrire, à partir de l'équation (4.6) et des propriétés de changement d'échelle et de translation de la transformée de Fourier ($\mathfrak{F}(\psi(at)) = \frac{1}{a}\widehat{\psi}(\xi/a)$ et $\mathfrak{F}(\psi(t-k)) = \widehat{\psi}(\xi)e^{-2i\pi k\xi}$), la transformée de Fourier de la fonction $\psi_{l,k}$ par [57]

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{l,k}(\xi) &= 2^{-l/2}w_{I_j}(\xi) \left(\cos(2\pi(k + \frac{1}{2})2^l \xi) - i \sin(2\pi(k + \frac{1}{2})2^l \xi) \right) \\ &= u_{l,k}(\xi) - iv_{l,k}(\xi).\end{aligned}\quad (4.7)$$

On constate que les contributions de la partie réelle et imaginaire de $\widehat{\psi}_{l,k}(\xi)$ sont, respectivement, impaire/paire et paire/impair aux points extrêmes de l'intervalle I_j . Si l'on reprend les principes introduits dans le cadre des transformées trigonométriques locales (chapitre 3), on en déduit les polarités qui doivent être utilisées pour l'opérateur $T_I f$ lors de la restriction des parties réelles et imaginaires mais aussi que les ondelettes de Meyer peuvent être représentées, dans le domaine fréquentiel, en utilisant des bases locales de polarités $(-, +)$ pour la partie réelle, et des bases locales de polarités $(+, -)$, donc correspondant respectivement à la transformée DST-III et DCT-III¹.

Le calcul des coefficients d'ondelettes continus $d_{l,k}^\circ$ s'écrit

$$d_{l,k}^\circ = \langle f, \psi_{l,k} \rangle = \int_{\xi} f_1(\xi) u_{l,k}(\xi) d\xi - \int_{\xi} f_2(\xi) v_{l,k}(\xi) d\xi. \quad (4.8)$$

Afin de pouvoir combiner les coefficients correspondant à la partie réelle et imaginaire, Kolaczyk [57] déduit de l'équation (4.8) deux relations :

$$\begin{aligned}\frac{d_{l,k}^\circ + d_{l,-(k+1)}^\circ}{2} &= \int_{\xi} f_1(\xi) u_{l,k}(\xi) d\xi, \\ \frac{d_{l,k}^\circ - d_{l,-(k+1)}^\circ}{2} &= \int_{\xi} f_2(\xi) v_{l,k}(\xi) d\xi.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Afin de faire apparaître, à droite des relations, les transformées trigonométriques locales, la partie gauche de l'équation (4.9) est modulée par $2(-1)^{k+1}$. Plus précisément²,

$$\begin{aligned}d_{l,k}^{\circ\Re} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2} (d_{l,k}^\circ + d_{l,-(k+1)}^\circ) \\ &= \int_0^\infty f_1(\xi) \sqrt{\frac{2}{|\lg_l|}} w_{I_l} \sin \left[(k + 1/2) \frac{\pi}{|\lg_l|} (\xi - 2^{-l-1}) \right] d\xi \\ \text{avec } \lg_l &= 2^{-l}\end{aligned}$$

et,

1. Les transformées DST_III et DCT_III ont des polarités identiques aux transformées DST_IV et DCT_IV, mais avec une symétrie et antisymétrie, non plus autour de $-\frac{1}{2}$ et $N - \frac{1}{2}$, mais 0 et N .

2. On utilise la propriété $(-1)^n \cos(x) = \cos(x + n\pi)$

$$\begin{aligned}
d_{l,k}^{\circ\Im} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \left(d_{l,k}^{\circ} - d_{l,-(k+1)}^{\circ} \right) \\
&= \int_0^{\infty} f_2(\xi) \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} w_{I_l} \cos \left[(k+1/2) \frac{\pi}{|g_l|} (\xi - 2^{-l-1}) \right] d\xi
\end{aligned}$$

sont les coefficients correspondant aux projections des parties réelles et imaginaires positives de \widehat{f} sur l'intervalle I_j .

Pour réaliser un algorithme numérique, nous nous plaçons maintenant dans le cadre des signaux discrets à durée limitée. Dans ce cas, les coefficients d'ondelettes discrets $d_{l,k}$ s'écrivent

$$d_{l,k} = \sum_{\xi=0}^{N/2} f_1[\xi] u_{l,k}[\xi] - \sum_{\xi=0}^{N/2} f_2[\xi] v_{l,k}[\xi].$$

Puisque le signal est à durée limitée (avec les problèmes de bords que cela pose), Kolaczyk définit une décomposition en ondelettes de Meyer **périodique**. Pour cela, le coefficient continu $d_{l,-(k+1)}^{\circ}$ est substitué par $d_{l, \frac{N}{2^l} - k - 1}^{\circ}$ ³ dans l'équation (4.9), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{d_{l,k} + d_{l, \frac{N}{2^l} - k - 1}}{2} &= \sum_{\xi=0}^{N/2} f_1[\xi] u_{l,k}[\xi], \\
\frac{d_{l,k} - d_{l, \frac{N}{2^l} - k - 1}}{2} &= \sum_{\xi=0}^{N/2} f_2[\xi] v_{l,k}[\xi].
\end{aligned}$$

Comme dans le cas $L^2(\mathfrak{R})$, nous pouvons exprimer les projections des parties réelles et imaginaires de \widehat{f} en fonction des coefficients des transformées en cosinus et sinus locales discrètes par modulation des relations

$$\begin{aligned}
d_{l,k}^{\mathfrak{R}} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \left(d_{l,k} + d_{l, \frac{N}{2^l} - k - 1} \right) \\
&= \sum_{\xi=0}^{N/2-1} f_1[\xi] \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} w_{I_l}[\xi] \sin \left[(k+1/2) \frac{\pi}{|g_l|} (\xi - 2^{-l-1}) \right], \\
d_{l,k}^{\Im} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \left(d_{l,k} - d_{l, \frac{N}{2^l} - k - 1} \right) \\
&= \sum_{\xi=0}^{N/2} f_2[\xi] \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} w_{I_l}[\xi] \cos \left[(k+1/2) \frac{\pi}{|g_l|} (\xi - 2^{-l-1}) \right]. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Puisque nous sommes dans un cadre discret w_{I_l} correspond à une fenêtre régulière définie sur l'intervalle $I_l = [N2^{-l-1}, N2^{-l} - 1]$ avec un recouvrement égal à la partie entière de $\left(\frac{2^{-l}N}{6}\right)$ à gauche et un recouvrement égal à la partie entière de $\left(\frac{2^{-l}N}{3}\right)$ à droite.

3. Sachant qu'à l'échelle l nous avons un vecteur de coefficient de longueur $\frac{N}{2^l}$, donc si on considère que les coefficients sont périodiques alors $d_{l,-(k+1)}^{\circ} = d_{l, \frac{N}{2^l} - k - 1}^{\circ}$.

Nous déduisons⁴ de la précédente équation, l'opération combinant les projections de la partie réelle et imaginaire qui permet de calculer les coefficients d'ondelettes à l'échelle l [57]

$$d_{l,k} = \begin{cases} (-1)^{k+1} (d_{l,k}^{\Im} + d_{l,k}^{\Re}), & \text{si } k = 0, \dots, 2^{-l-1} - 1 \\ (-1)^{k+1} (d_{l,2^{-l}-k-1}^{\Im} - d_{l,2^{-l}-k-1}^{\Re}), & \text{si } k = 2^{-l-1}, \dots, 2^{-l} - 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans l'équation (4.10), nous retrouvons la formulation que nous avons introduite lors de l'étude des ondelettes de Malvar (chapitre 3) : la décomposition en ondelettes de Meyer correspond bien à une restriction sur des intervalles I_l des parties réelles et imaginaires de \hat{f} (avec des polarités adaptées) suivie d'une décomposition trigonométrique locale).

L'algorithme de décomposition en ondelettes de Meyer périodique se résume numériquement à :

-
- **Restriction de la partie réelle positive de \hat{f}** $I_l = [N2^{-l-1}, N2^{-l} - 1]$ avec une polarité $(-, +)$ et comme zone de recouvrement $(\frac{N2^{-l}}{3}, \frac{N2^{-l+1}}{3})$: $\hat{d}_{l,k}^{\Re} = T_{I_l} f_1$
 - **Restriction de la partie imaginaire positive de \hat{f}** $I_l = [N2^{-l-1}, N2^{-l} - 1]$ avec une polarité $(+, -)$ et comme zone de recouvrement $(\frac{N2^{-l}}{3}, \frac{N2^{-l+1}}{3})$: $\hat{d}_{l,k}^{\Im} = T_{I_l} f_2$
 - **Calcul des transformées trigonométriques locales** : $d_{l,k}^{\Re} = DST \cdot III(\hat{d}_{l,k}^{\Re})$ et $d_{l,k}^{\Im} = DCT \cdot III(\hat{d}_{l,k}^{\Im})$
 - **Combinaison des coefficients $d_{l,k}^{\Re}$ et $d_{l,k}^{\Im}$ selon la relation (4.11) afin d'obtenir $d_{l,k}$.**
-

Du fait de l'orthogonalité des projections, la reconstruction peut être réalisée simplement. Les projections $T_{I_l} f_1$ et $T_{I_l} f_2$ peuvent être reconstruites à partir des coefficients d'ondelettes par transformée trigonométrique inverse (après séparation des coefficients d'ondelettes entre la partie réelle et imaginaire)

$$\begin{aligned} T_{I_l} f_1 [\xi] &= \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} d_{l,k}^{\Re} \sin \left[(k+1/2) \frac{\pi}{|g_l|} (\xi - 2^{l-1}) \right], \\ T_{I_l} f_2 [\xi] &= \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} d_{l,k}^{\Im} \cos \left[(k+1/2) \frac{\pi}{|g_l|} (\xi - 2^{l-1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ensuite on calcule les termes $T_{I_l}^* T_{I_l} f_1 [\xi]$ et $T_{I_l}^* T_{I_l} f_2 [\xi]$ (correspondant à un déploiement de la fonction autour des points de coupure) grâce à l'opérateur de repliement adjoint U^* introduit dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar. Puisque la projection est orthogonale, c'est-à-dire que $T_{I_l}^* T_{I_l} T_{I_{l'}}^* T_{I_{l'}} = 0$ pour tout $l \neq l'$, et que les intervalles adjacents sont de polarités opposées,

4. Ceci à partir de deux points. Tout d'abord, le nombre de points de $\{d_{l,k}^{\Re}\}$ et $\{d_{l,k}^{\Im}\}$ est égal à 2^{-l-1} (et non à 2^{-l} comme les coefficients d'ondelettes). Ceci est dû à la symétrie autour de 2^{-l-1} symbolisée par $2^{-l} - k - 1$. Il en résulte que $d_{l,k}^{\Re} = d_{l,k}^{\Im} = 0$ lorsque $k = 2^{-l-1} \dots 2^{-l} - 1$, et $d_{l,2^{-l}-k-1}^{\Re} = d_{l,2^{-l}-k-1}^{\Im} = 0$ lorsque $k = 0 \dots 2^{-l-1} - 1$. La deuxième astuce réside simplement dans la relation $(-1)^{k+1} (-1)^{k+1} = 1$.

nous pouvons reconstruire \widehat{f} à partir de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= \sum_l (P_l f_1 + i P_l f_2) \\ \text{avec } P_l f_1 &= \begin{cases} T_l^* T_l f_1 [\xi], & \text{si } \xi \geq 0 \\ T_l^* T_l f_1 [-\xi], & \text{si } \xi < 0 \end{cases} , \\ \text{et } P_l f_2 &= \begin{cases} T_l^* T_l f_2 [\xi], & \text{si } \xi \geq 0 \\ -T_l^* T_l f_2 [-\xi], & \text{si } \xi < 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Toutefois, nous constatons dans la relation (4.13) que la somme sur l est infinie. Or, en pratique, le nombre d'échelles est limité, donc la somme doit être finie. Il faut définir la trame qui conserve l'information "basse-fréquence" non codée dans les échelles d'ondelettes. A cette trame va correspondre la fonction d'échelle définie dans l'équation (4.1). La réalisation numérique du calcul des coefficients associés à la trame, proposée par Kolaczyk, fait l'objet du paragraphe suivant.

4.2.2.3 Calcul des corrélations avec la fonction d'échelle

Soit $\widetilde{w}_{\widetilde{I}_0}(\xi) = |\widehat{\zeta}(\xi)|$; si nous reprenons la terminologie de la décomposition en ondelettes de Malvar, la fonction $\widetilde{w}_{\widetilde{I}_0}(\cdot)$ est une fenêtre définie sur l'intervalle $\widetilde{I}_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. D'après l'équation (4.1), nous avons un recouvrement de $\frac{1}{6}$ à gauche et $\frac{1}{6}$ à droite.

Plus généralement, la fonction d'échelle à la position k et à l'échelle l telle que $\zeta_{l,k}(x) = 2^{l/2} \zeta(2^l x - k)$ correspond à une fenêtre $\widetilde{w}_{\widetilde{I}_l}(\cdot) = \widetilde{w}_{\widetilde{I}_l}(2^l \cdot)$ définie sur l'intervalle $\widetilde{I}_l = \left[-2^{-l-1}, 2^{-l-1}\right]$ avec un recouvrement de $\frac{2^{-l}}{6}$ à gauche et $\frac{2^{-l}}{6}$ à droite [57]. Comme pour le calcul des coefficients d'ondelettes, l'opérateur $T_{\widetilde{I}_l}$ de la décomposition de Malvar permet la restriction de \widehat{f} à l'intervalle \widetilde{I}_l avec, au point de coupure -2^{-l-1} , $\alpha = \frac{2^{-l}}{6}$, et au point de coupure 2^{-l-1} , $\alpha = \frac{2^{-l}}{6}$. En suivant le même raisonnement que pour l'équation (4.7) (translation et changement d'échelle de la transformée de Fourier), nous pouvons écrire la transformée de Fourier de la fonction $\zeta_{l,k}$ par :

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}_{l,k}(\xi) &= 2^{-l/2} \widehat{\zeta}(2^l \xi) e^{-i2\pi \xi 2^l k} \\ &= 2^{-l/2} \widetilde{w}_{\widetilde{I}_l}(\xi) \left(\cos(2\pi k 2^l \xi) - i \sin(2\pi k 2^l \xi) \right) \\ &= \widetilde{u}_{l,k}(\xi) - i \widetilde{v}_{l,k}(\xi). \end{aligned}$$

Dans ce cas, les contributions de la partie réelle et imaginaire de $\widehat{\zeta}_{l,k}(\xi)$ sont, respectivement, paire/paire et impaire/impaire aux points extrêmes de l'intervalle \widetilde{I}_l . On en déduit que la fonction d'échelle peut être représentée en utilisant des bases locales de polarités (+, +) pour la partie réelle, et des bases locales de polarités (-, -) pour la partie imaginaire, donc correspondant, respectivement, à la transformée DCT-I et DST-I (voir chapitre 3).

Le calcul des coefficients de la trame $c_{l,k}^\circ$ dans le cas d'une décomposition en ondelettes de Meyer dans $L^2(\mathbb{R})$ est défini par :

$$c_{l,k}^\circ = \langle f, \zeta_{l,k} \rangle = \int_{\xi} f_1(\xi) \widetilde{u}_{l,k}(\xi) d\xi - \int_{\xi} f_2(\xi) \widetilde{v}_{l,k}(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

En suivant le même raisonnement que pour les coefficients d'ondelette, nous nous plaçons dans le cas des signaux discrets à durée limitée. Ensuite les coefficients d'ondelette sont modulés afin d'obtenir des transformées trigonométriques locales. Les coefficients $\left\{ c_{l,k}^{\Re} \right\}_{k=0}^{2^{-l+1}-1}$ correspondant à

la partie réelle s'écrivent alors

$$\begin{aligned} c_{l,0}^{\Re} &= c_{l,0}, \\ c_{l,2k}^{\Re} &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}(c_{l,k} + c_{l,2^l-k}) \\ &= \sum_{\xi=0}^{N/2-1} f_1[\xi] \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} \tilde{w}_{\tilde{I}_l}[\xi] \cos \left[k \frac{\pi}{|g_l|} (\xi + 2^{l-1}) \right], \\ c_{l,2k+1}^{\Re} &= 0, \end{aligned}$$

et les coefficients $\{c_{l,k}^{\Im}\}_{k=0}^{2^{l+1}-1}$ correspondant à la partie imaginaire s'écrivent

$$\begin{aligned} c_{l,0}^{\Im} &= 0, \\ c_{l,2k}^{\Im} &= \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}(c_{l,k} - c_{l,2^l-k}) \\ &= \sum_{\xi=0}^{N/2-1} f_2[\xi] \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} \tilde{w}_{\tilde{I}_l}[\xi] \sin \left[k \frac{\pi}{|g_l|} (\xi + 2^{l-1}) \right], \\ c_{l,2k+1}^{\Im} &= 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'opération combinant les coefficients $c_{l,k}^{\Re}$ et $c_{l,k}^{\Im}$ permettant de calculer les coefficients de la trame à l'échelle l ,

$$c_{l,k} = \begin{cases} c_{l,0}^{\Re}, & \text{si } k = 0 \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} (c_{l,2k}^{\Im} - c_{l,2k}^{\Re}), & \text{si } k = 1, \dots, 2^{l-1} \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} (c_{l,2^l-k}^{\Im} - c_{l,2^l-k}^{\Re}), & \text{si } k = 2^{l-1} + 1, \dots, 2^l - 1 \end{cases}. \quad (4.15)$$

A partir des propriétés précédentes, l'algorithme du calcul de la trame, pour une décomposition en ondelettes de Meyer périodique, se résume numériquement à :

-
- **Restriction de la partie réelle positive de \hat{f}** $\tilde{I}_l = [-N2^{l-1} + 1, N2^{l-1} - 1]$ avec comme polarité $(+, +)$ et comme zone de recouvrement $(\frac{N2^{l-1}}{6}, \frac{N2^{l-1}}{6})$: $\hat{c}_{l,k}^{\Re} = T_{\tilde{I}_l} f_1$
 - **Restriction de la partie imaginaire positive de \hat{f}** $\tilde{I}_l = [-N2^{l-1} + 1, N2^{l-1} - 1]$ avec comme polarité $(-, -)$ et comme zone de recouvrement $(\frac{N2^{l-1}}{6}, \frac{N2^{l-1}}{6})$: $\hat{c}_{l,k}^{\Im} = T_{\tilde{I}_l} f_2$
 - **Calcul des transformées trigonométriques locales** : $c_{l,k}^{\Re} = DCT'I(\hat{c}_{l,k}^{\Re})$ et $c_{l,k}^{\Im} = DST'I(\hat{c}_{l,k}^{\Im})$
 - **Combinaison des coefficients $c_{l,k}^{\Re}$ et $c_{l,k}^{\Im}$ afin d'obtenir $c_{l,k}$.**
-

Les projections $T_{\tilde{I}_l} f_1$ et $T_{\tilde{I}_l} f_2$ peuvent être reconstruites à partir des coefficients d'ondelettes par transformée trigonométrique inverse :

$$\begin{aligned} T_{\tilde{I}_l} f_1[\xi] &= \frac{c_{l,0}^{\Re}}{\sqrt{|g_l|}} + \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} \sum_{k=1}^{2^{l+1}-1} c_{l,k}^{\Re} \cos \left[k \frac{\pi}{|g_l|} (\xi + 2^{l-1}) \right], \\ T_{\tilde{I}_l} f_2[\xi] &= \sqrt{\frac{2}{|g_l|}} \sum_{k=1}^{2^{l+1}-1} c_{l,k}^{\Im} \sin \left[k \frac{\pi}{|g_l|} (\xi + 2^{l-1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Puis, on calcule les projections $T_{\tilde{I}_l}^* T_{\tilde{I}_l} f_1[\xi]$ et $T_{\tilde{I}_l}^* T_{\tilde{I}_l} f_2[\xi]$ grâce à l'opérateur de repliement adjoint U^* . Afin de concevoir l'algorithme complet de reconstruction, il suffit de constater que la projection associée à la trame est orthogonale à celle associée aux coefficients d'ondelettes, c'est-à-dire que $T_{\tilde{I}_l}^* T_{\tilde{I}_l} T_{\tilde{I}_{l'}}^* T_{\tilde{I}_{l'}} = 0$ pour tout l, l' , et que les intervalles adjacents de \tilde{I}_l (à savoir I_l et $-I_l$) sont de polarités opposées. Nous en déduisons alors la relation finale nous permettant de reconstruire \hat{f} à partir des coefficients d'ondelettes et de la trame (L nombre d'échelles de décomposition)

$$\hat{f} = \left[T_{\tilde{I}_L}^* T_{\tilde{I}_L} f_1 + \sum_{l=1}^L P_{I_l} f_1 \right] + i \left[T_{\tilde{I}_L}^* T_{\tilde{I}_L} f_2 + \sum_{l=1}^L P_{I_l} f_2 \right].$$

Pour conclure sur le développement numérique des ondelettes de Meyer, nous présentons sur la figure 4.6 les différentes fenêtres associées aux fonctions d'ondelettes et d'échelle pour une décomposition en 3 échelles. Sur cette figure, nous faisons apparaître les différents intervalles $\{I_l\}_{l=1,2,3}$ et \tilde{I}_3 , ainsi que la polarité des restrictions associées. Nous constatons que les polarités sont bien alternées.

La figure 4.6 met en évidence une limitation qui n'a pas été formulée dans ce paragraphe. Le support fréquentiel de la fonction d'ondelettes ψ_1 , qui correspond à la première échelle d'ondelettes, et donc des fenêtres w_{I_1} et w_{-I_1} , dépasse le domaine fréquentiel des données $[-N/2 + 1, N/2 - 1]$. Afin de pouvoir utiliser cette fenêtre sur des signaux à durée limitée, nous la tronquons dans le plan fréquentiel, en faisant une coupure brutale en $-1/2$ et $1/2$ sans recouvrement.

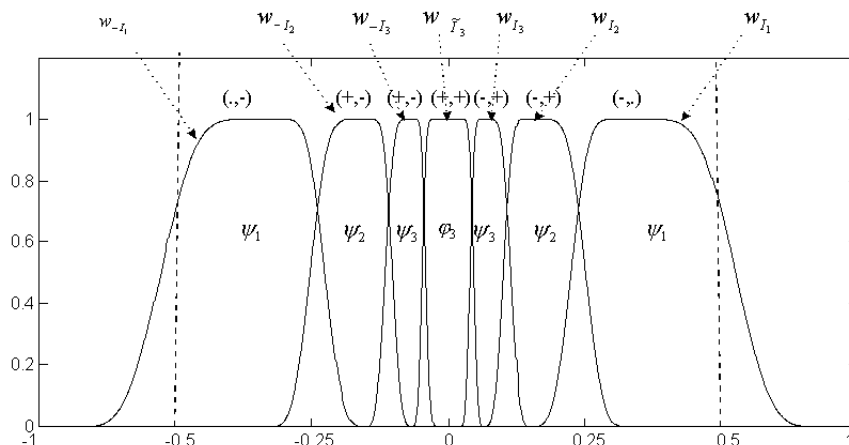


FIG. 4.6 – Fonctions d'ondelettes et d'échelle : fenêtres associées (nous indiquons entre parenthèse les polarités pour les projections de la partie réelle). Notons que les fonctions présentées ne sont pas normées.

4.2.3 Propriétés de la décomposition discrète en ondelettes de Meyer

Nous étudions les différentes propriétés de la transformée en ondelettes de Meyer discrète. Le calcul dans le domaine fréquentiel, et non temporel, est la principale différence de cette décomposition par rapport aux ondelettes numériques "classiques", ce qui implique des filtres à support temporel infini. Nous étudions dans ce paragraphe la décroissance des fonctions d'ondelettes ainsi que ses conséquences sur la localisation temporelle dans une décomposition discrète. A l'inverse, nous avons une meilleure séparation fréquentielle, et nous illustrons ceci sur un signal synthétique composé de différents atomes temps-fréquence.

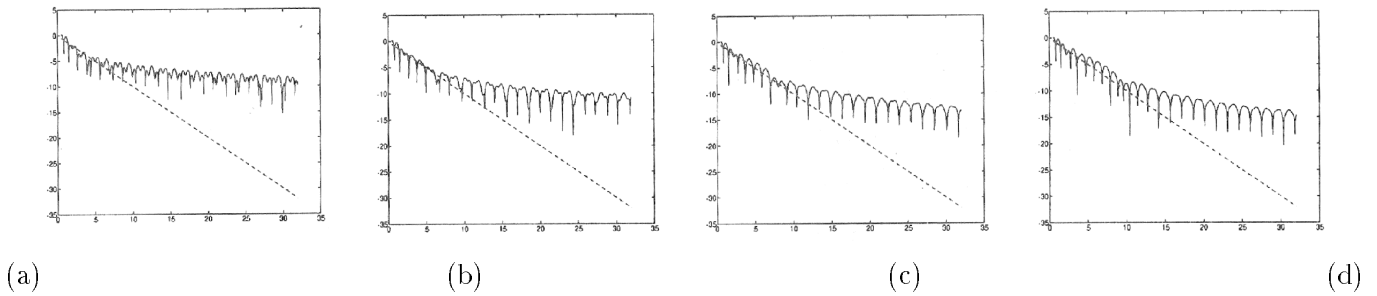


FIG. 4.7 – Affichage de $\log(|\psi(t)|)$ pour $t > 1/2$ en utilisant une fonction rampe $r \in C^p(\mathbb{R})$ de degré variable : (a) $p = 0$ (b) $p = 1$ (c) $p = 2$ (d) $p = 3$

4.2.3.1 Décroissance de la fonction d'ondelette

La décroissance de la fonction d'ondelette de Meyer va dépendre de la fonction de coupure r . Si r est de degré p alors $\hat{\psi} \in C^p(\mathbb{R})$: l'indice de décroissance de ψ augmente avec p . Dans la figure 4.7, nous reprenons les courbes présentées par Kolaczyk dans son mémoire de thèse. Sur ces courbes, la fonction $\log(|\psi(t)|)$, avec $t > 1/2$, est tracée pour différentes valeurs de p . A titre de comparaison, la droite $\log(e^{-t})$ (correspondant donc à une décroissance exponentielle) est elle aussi représentée.

Logiquement, on remarque que la décroissance de la fonction ψ s'accélère lorsque p augmente. En effet, la courbe $\log(|\psi(t)|)$ "quitte" le modèle exponentiel pour un t supérieur lorsque p augmente.

4.2.3.2 Localisation temporelle

L'utilisation de filtres à support temporel infini va avoir pour conséquence une localisation temporelle plus faible que les décompositions basées sur des filtres à support compact comme les filtres de Daubechies. Afin d'évaluer cette localisation à différentes échelles, nous décomposons une fonction Dirac avec des ondelettes Symmlet-8, et des ondelettes de Meyer (définies pour $p = 3$).

Nous présentons sur la figure 4.8, l'énergie des coefficients pour trois échelles de décompositions (échelle 1,3 et 5). Le résultat optimal serait de n'avoir des coefficients d'ondelette non nuls qu'à la position correspondant à la discontinuité. En pratique, les coefficients sont nuls lorsque le support de l'ondelette ne comprend pas de discontinuités. On constate sur la figure 4.8 que les différences entre les deux représentations sont à peine visibles. Seules les échelles les plus grossières, lorsque l'ondelette est très dilatée, présentent un nombre de coefficients non nuls autour de la discontinuité plus important pour les ondelettes de Meyer. Toutefois, les amplitudes de ces coefficients de Meyer "parasites" sont très faibles par rapport au coefficient correspondant à la discontinuité (sur la figure qui correspond à la distribution d'énergie ils n'apparaissent presque pas). De plus, la taille de l'intervalle des coefficients significatifs, encadrant une discontinuité, reste minime pour les ondelettes de Meyer.

Afin de quantifier l'effet de dispersion, dû aux ondelettes de Meyer, Kolaczyk a mesuré l'énergie des coefficients autour des positions des discontinuités. Il a montré que cette énergie est très proche de celle d'une décomposition classique (différence de 4 % par rapport à des ondelettes de Daubechies-6) [57]. Ceci confirme que la localisation temporelle des ondelettes de Meyer est très proche des ondelettes classiques à support temporel borné.

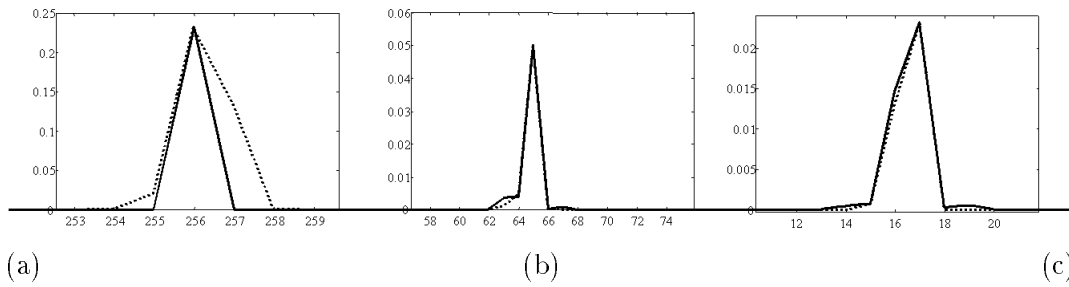


FIG. 4.8 – Décomposition du dirac avec l'ondelette de Meyer (trait plein) et l'ondelette Symmlet-8: (a) Echelle 1 (b) Echelle 3 (c) Echelle 5

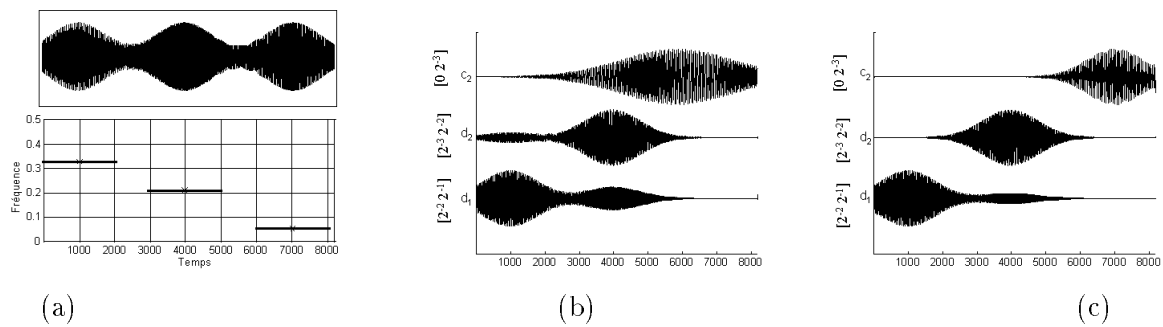


FIG. 4.9 – Décomposition du signal Atomes sur 2 échelles: (a) représentation théorique (b) décomposition avec des ondelettes Symmlet-8 (c) décomposition avec des ondelettes de Meyer avec $p = 3$

4.2.3.3 Séparation fréquentielle

Comme nous l'avons dit, le calcul des coefficients d'ondelettes directement dans le plan fréquentiel nous permet d'utiliser des filtres à support fréquentiel fini. Ceci se traduit par une meilleure localisation fréquentielle, et donc une meilleure séparation des différentes bandes. Afin d'illustrer cette propriété, nous décomposons un signal composé de trois atomes TF. Ce signal va présenter trois pics distincts dans le plan fréquentiel à des positions différentes. Dans ce cas, le résultat optimal serait de n'avoir sur chacune des échelles qu'un atome (la coordonnée fréquentielle de chacun des atomes étant fixée à une valeur adéquate). Nous présentons sur la figure 4.9a le signal original ainsi que la représentation TF associée. Le premier atome ne doit apparaître que sur la première échelle (fréquence: $[N2^{-2}, N2^{-1}]$), le second sur la deuxième échelle (fréquence: $[N2^{-3}, N2^{-2}]$), enfin le troisième sur la trame (fréquence: $[0, N2^{-3}]$). On constate, sur la décomposition avec les ondelettes Symmlet-8, que la séparation entre les bandes de fréquences n'est pas excellente (figure 4.9b). Par exemple, le troisième atome présent sur la trame débute autour de la position 2500, alors qu'il ne devrait apparaître qu'à partir de la position 5500. En fait, un certain nombre de coefficients de la zone 2500-5500 proviennent du deuxième atome. On en déduit que le support fréquentiel infini du filtre a des conséquences non négligeables. On constate que la décomposition en ondelettes de Meyer sépare d'une façon presque optimale les différents atomes (figure 4.9c). Le seul défaut visible se trouve sur la première échelle dans la zone 3000-5000. Ceci est dû au large recouvrement de la fenêtre associée. Mais d'une façon générale, nous concluons que la décomposition en ondelettes de Meyer apporte une amélioration très sensible par rapport aux décompositions "classiques".

Pourtant, le schéma de décomposition présenté ci-dessus est limité, car il ne correspond qu'à

une partition de l'espace fréquentiel en intervalles $[N2^{-l-1}, N2^{-l}]$. Nous allons généraliser cette représentation en utilisant la théorie des paquets d'ondelettes mais en conservant le principe de la partition dans l'espace fréquentiel.

4.3 Les paquets d'ondelettes de Meyer pour le signal

La décomposition en ondelettes de Meyer peut être limitée si l'on désire étudier certains signaux, car la division de l'axe fréquentiel n'est pas assez souple. En effet, la première échelle d'ondelette correspond à l'intervalle de fréquence $[N/4, N/2]$ qui est de taille non négligeable. Si le signal étudié possède, par exemple, deux atomes TF dans cet intervalle, ils ne pourront pas être dissociés. C'est pourquoi nous devons construire une décomposition qui va rediviser cet intervalle, et tous les autres, d'une façon récursive, jusqu'à la séparation des différents éléments du signal. La théorie des paquets d'ondelettes permet cette redivision.

4.3.1 Rappel sur les paquets d'ondelettes 1D

En utilisant les filtres H et G , une séquence de fonctions est définie récursivement suivant [96]:

$$\begin{aligned}\psi_0^0 &\triangleq \zeta, \\ \psi_{2^j}^{l+1} &\triangleq h_j^l \psi_j^l, \\ \psi_{2^j+1}^{l+1} &\triangleq g_j^l \psi_j^l.\end{aligned}\tag{4.17}$$

La collection de ces fonctions, pour $l = 0, 1, \dots$, correspond à ce que nous appellerons les *paquets d'ondelettes* associés à H et G . Les formules récursives (4.17) permettent un arrangement sous la forme d'un arbre binaire (figure 4.10).

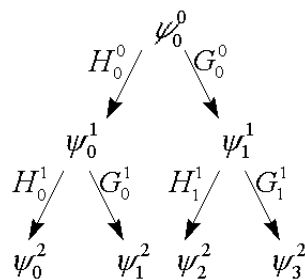


FIG. 4.10 – Construction des paquets d'ondelettes

A partir de cette définition, nous construisons une collection de bases. Deux propriétés importantes peuvent être démontrées.

Théorème 9 Les fonctions $\{\psi_j^l[t-k] : j, k \in \mathbb{Z}, j \geq 0\}$ sont une base de $l^2(\mathbb{Z})$. [96]

Corollaire 1 Si H et G sont des filtres miroirs en quadrature, alors $\{\psi_j^l[t-k] : j, k \in \mathbb{Z}, j \geq 0\}$ est une base orthonormée de $l^2(\mathbb{Z})$. [96]

Si l'on considère que $\{\psi_j^l[t-k] : 0 \leq k < \lg_j\}$ est une base orthonormée d'un sous-espace fermé de $l^2[0, N-1]$ noté W_j^l , le corollaire nous permet d'écrire que $W_j^l = W_{2^j}^{l+1} \oplus W_{2^j+1}^{l+1}$ (un noeud père

est divisé en deux sous-espaces orthogonaux), et plus généralement que $W_0^0 = \bigoplus_{j=0}^{2^l-1} W_j^l$, pour tout $l \geq 0$. Cette propriété est importante pour définir un algorithme de reconstruction.

La localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes est plus compliquée à étudier que pour les autres décompositions. En effet, si l'on considère dans l'équation (4.17) que le filtre h_j^l correspond simplement à la dilatation d'un facteur 2^l du filtre passe-bas h , alors ce filtre ne jouera pas toujours le rôle de passe-bas durant la décomposition. h_j^l va soit jouer le rôle de passe-bas, soit de passe-haut selon les espaces étudiés. Il est caractérisé par une fonction de permutation introduite par Coifman et Wickerhauser. Pour résumer, nous pouvons dire que

$$h_j^l \text{ est un considéré comme un filtre } \begin{cases} \text{passe-bas si } j \text{ est pair} \\ \text{passe-haut si } j \text{ est impair} \end{cases}.$$

Ceci influence alors le support fréquentiel des fonctions ψ_j^l . Soit cette fonction correspond au détail de l'espace $W_{j/2}^{l-1}$, soit à l'information passe-bas. Afin de pouvoir définir que chaque fonction ψ_j^l a comme support fréquentiel l'intervalle dyadique I_j^l tel que $I_j^l = \left[-\frac{Nj}{2^l} + 1, -\frac{N(j+1)}{2^l}\right] \cup \left[\frac{Nj}{2^l}, \frac{N(j+1)}{2^l} - 1\right]$, nous avons fixé que

$$h_j^l = \begin{cases} h(2^l \xi) & \text{si } j \text{ est pair} \\ g(2^l \xi) & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et } g_j^l = \begin{cases} g(2^l \xi) & \text{si } j \text{ est pair} \\ h(2^l \xi) & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases} \quad (4.18)$$

A partir du support fréquentiel des fonctions de paquets d'ondelettes, on peut déduire les propriétés suivantes

Théorème 10 *Si Γ est une partition dyadique disjointe de $[0, N - 1]$, alors $\{\psi_{j,k}^l : I_j^l \in \Gamma, 0 \leq k < \lg_{I_j^l}\}$ forme une base de $l^2[0, N - 1]$. [96]*

Corollaire 2 *Si H et G sont des filtres miroirs en quadrature et Γ est une partition dyadique disjointe de $[0, N - 1]$, alors $\{\psi_{j,k}^l : I_j^l \in \Gamma, 0 \leq k < \lg_{I_j^l}\}$ est une base orthonormée de $l^2[0, N - 1]$. [96]*

Une partition fréquentielle disjointe va correspondre à la notion d'*arbre admissible* que nous avons introduite dans le chapitre 3. Nous rappelons qu'un arbre admissible correspond à un arbre binaire pour lequel chaque noeud a 0 ou 2 fils. Cet arbre admissible correspond à une base sélectionnée parmi la collection construite à partir des relations récursives (équation (4.17)). La méthode de sélection peut être l'algorithme Best-Basis de Coifman-Wickerhauser présenté dans le chapitre 3.

Si l'on note A l'ensemble correspondant à un arbre admissible, alors du second corollaire, on en déduit que $l^2[0, N - 1] = W_0^0 = \bigoplus_{(j,l) \in A} W_j^l$.

La région TF correspondant à la concentration maximum de l'énergie de l'atome $\psi_{j,k}^l$ est approximée par le bloc d'Heisenberg suivant : $[2^l k, (2^l + 1)k] \times [j2^{-l}, (j + 1)2^{-l}]$. Cette définition nous permet, comme nous l'avons présenté dans le chapitre 3, d'illustrer chaque décomposition discrète en paquets d'ondelettes par une image TF.

4.3.2 Réalisation de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer

Si l'on applique les relations de l'équation (4.17) dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{2j}^{l+1}(\xi) &= H_j^l(\xi) \widehat{\psi}_j^l(\xi), \\ \widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}(\xi) &= G_j^l(\xi) \widehat{\psi}_j^l(\xi). \end{aligned}$$

avec les filtres H et G définis dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Meyer (équations (4.2) et (4.3)), alors les fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer peuvent être calculées à toutes les échelles.

Le filtre H_j^l correspond à un filtre passe-bas appliqué à l'échelle l sur un ensemble ayant pour support fréquentiel $[j2^{-l}, (j+1)2^{-l} - 1]$. On peut donc définir le filtre H_j^l en fonction de H par

$$H_j^l(\xi) = H(2^l(\xi + j2^{-l}))$$

La translation en j présente dans la définition du filtre est une conséquence de notre choix de définir directement le filtre h_j^l en fonction h et de ne pas utiliser la relation (4.18).

Le filtre G_j^l est obtenu à partir de la relation $G_j^l(\xi) = e^{-i2\pi\xi} H_j^{l*}(\xi + 1/2)$. Nous proposons donc que les filtres H_j^l et G_j^l soient définis pour tout l, j par

$$\begin{aligned} H_j^l(\xi) &= \sqrt{2} \sum_n \widehat{\zeta}(2^l(2\xi + j2^{-l}) + 2n) \\ &= \sqrt{2} \sum_n \widehat{\zeta}(2^{l+1}\xi + 2n + j) \\ G_j^l(\xi) &= -e^{i2^{l+1}\pi\xi} \sqrt{2} \sum_n \widehat{\zeta}(2^{l+1}\xi + 2n + 1 + j) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous présentons, sur la figure 4.11, les quatre fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer de l'échelle 2 construites à partir de l'équation (4.19) avec

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_0^2(\xi) &= \frac{1}{2} H_0^1(\xi) H_0^0(\xi) \widehat{\zeta}(\xi), \\ \widehat{\psi}_1^2(\xi) &= \frac{1}{2} G_0^1(\xi) H_0^0(\xi) \widehat{\zeta}(\xi), \\ \widehat{\psi}_2^2(\xi) &= \frac{1}{2} H_0^1(\xi) G_0^0(\xi) \widehat{\zeta}(\xi), \\ \widehat{\psi}_3^2(\xi) &= \frac{1}{2} G_0^1(\xi) G_0^0(\xi) \widehat{\zeta}(\xi). \end{aligned}$$

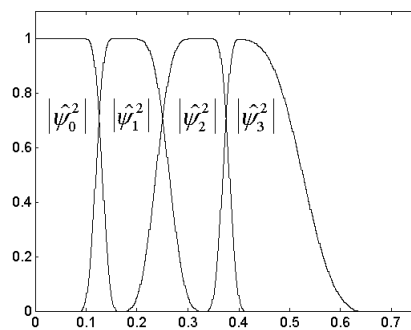


FIG. 4.11 – Module de la transformée de Fourier des fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer à l'échelle 2 (Fréquence positive et fonctions non normées).

Nous allons maintenant adapter au calcul des paquets d'ondelettes de Meyer [17], les méthodes numériques proposées par Kolaczyk, et présentées dans le premier paragraphe. Du fait de la relation (4.17), la réalisation numérique de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer se définit récursivement. Comme pour la décomposition en ondelettes, l'intervalle des fréquences traitées est réduit aux fréquences positives. La partie négative est calculée par extension grâce à la relation (4.5) présentée dans le premier paragraphe.

4.3.2.1 Calcul des coefficients de paquets d'ondelettes associés à $\widehat{\psi}_{2j}^{l+1}$ avec $j > 0$

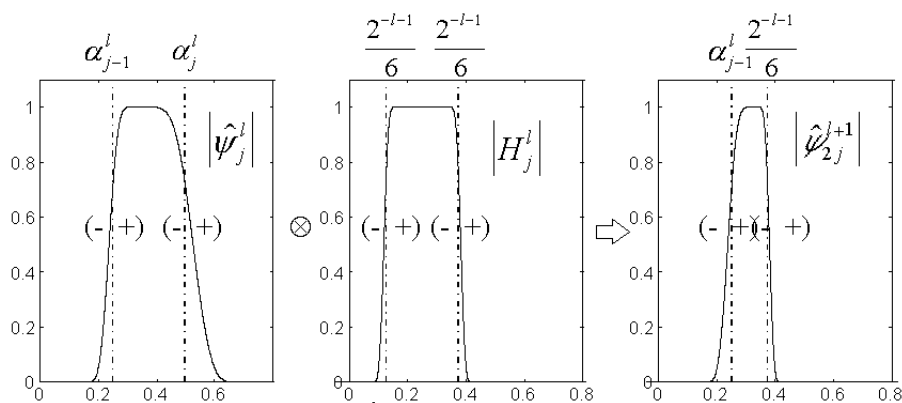


FIG. 4.12 – Construction de la fonction $\widehat{\psi}_{2j}^{l+1}$ à partir de $\widehat{\psi}_j^l$ et H_j^l . La taille des zones de recouvrement, ainsi que la polarité du repliement dans le cas de la partie réelle sont indiquées

4.3.2.1.1 Définition de l'intervalle Nous nous plaçons à une échelle l donnée de la projection. $\widehat{\psi}_j^l$ a alors pour support $[j2^{-l}, (j+1)2^{-l}[$ plus une zone de recouvrement définie à droite et à gauche de cet intervalle. Afin d'obtenir la fonction $\widehat{\psi}_{2j}^{l+1}$, le filtre H_j^l est appliqué. D'après la définition (4.19), H_j^l a un support égal à

$$\left[j2^{-l} - 2^{-l-1} + n2^{-l+1}, j2^{-l} + 2^{-l-1} + n2^{-l+1} \right]_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Le support de la fonction $\widehat{\psi}_{2j}^{l+1}$ est donc égal à l'intersection des deux intervalles, c'est-à-dire (comme nous pouvons le voir sur la figure 4.12)

$$\begin{aligned} I_{2j}^{l+1} &= \left[j2^{-l}, (j2^{-l} + 2^{-l-1}) \right] \\ &= \left[(2j)2^{-l-1}, (2j+1)2^{-l-1} \right]. \end{aligned}$$

4.3.2.1.2 Définition du recouvrement Un intervalle I_j^l a deux zones de recouvrement respectivement notées α_j^l à sa droite, et α_{j-1}^l à sa gauche. D'après la définition de I_j^l , nous constatons que la borne gauche du nouvel intervalle I_{2j}^{l+1} est identique à celle de I_j^l et la coupure en ce point a été réalisée à une échelle précédente. La zone de recouvrement à gauche est donc identique à celle de I_j^l et a été définie à une échelle précédente. En revanche, la zone de recouvrement à droite de I_{2j}^{l+1} correspond à la nouvelle division. D'après les équations (4.1) et (4.19) ce recouvrement est égal à $\frac{2^{-l-1}}{6}$.

D'une façon générale, les tailles des zones de recouvrement sont définies par récurrence suivant

$$\text{recouvrement de } I_{2j}^{l+1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{2j}^{l+1} = \frac{2^{-l-1}}{6} \text{ à droite} \\ \alpha_{2j-1}^{l+1} = \alpha_{j-1}^l \text{ à gauche} \end{cases}. \quad (4.20)$$

L'initialisation est fixée par la première coupure $\alpha_0^0 = \frac{1}{6}$ (la première fenêtre correspondant à ζ). Il faut noter que la zone de recouvrement peut devenir supérieure à la taille de l'intervalle. Ceci nous contraint à un calcul récursif des partitions, car on ne peut pas calculer localement la restriction de la fonction \widehat{f} sur un intervalle, indépendamment des repliements effectués aux échelles précédentes.

4.3.2.1.3 Définition des polarités et transformées Si l'on respecte les définitions du paragraphe 4.2, et d'après l'équation (4.19), les polarités au nouveau point de coupure $j2^{-l} + 2^{-l-1}$ sont, respectivement, $(-, +)$ ⁵ pour la partie réelle et $(+, -)$ pour la partie imaginaire. La partition au point $j2^{-l}$ a été calculée à une échelle précédente et correspond à des polarités identiques (ceci est vrai pour la première échelle et s'étend alors par récurrence). Nous en déduisons que les polarités de l'intervalle associé à $\widehat{\psi}_{2j}^{l+1}$ correspondent à la transformée en sinus DST-III pour la partie réelle et en cosinus DCT-III pour la partie imaginaire.

4.3.2.2 Calcul des coefficients de paquets d'ondelettes associés à $\widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}$

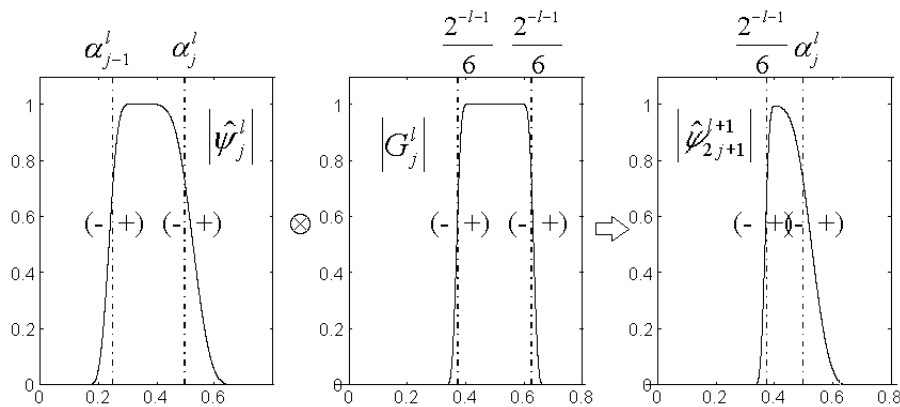


FIG. 4.13 – Construction de la fonction $\widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}$ à partir de $\widehat{\psi}_j^l$ et G_j^l . La taille des zones de recouvrement, ainsi que les polarités du repliement dans le cas de la partie réelle sont indiquées.

Nous appliquons le même raisonnement pour déterminer l'intervalle, les recouvrements, les polarités et les transformées associés à $\widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}$.

Afin d'obtenir la fonction $\widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}$ à partir de la fonction $\widehat{\psi}_j^l$, nous appliquons le filtre G_j^l . D'après la définition (4.19), G_j^l a un support égal à

$$\left[(j+1)2^{-l} - 2^{-l-1} + n2^{-l+1}, (j+1)2^{-l} + 2^{-l-1} + n2^{-l+1} \right]_{n \in \mathbb{Z}}.$$

La fonction $\widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}$ correspond alors à un intervalle (cf figure 4.13)

$$I_{2j+1}^{l+1} = \left[(2j+1)2^{-l-1}, (2j+2)2^{-l-1} \right[$$

Selon le même principe que pour $\widehat{\psi}_{2j}^{l+1}$, les zones de recouvrement doivent être définies par récurrence

$$\text{recouvrement de } I_{2j+1}^{l+1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{2j+1}^{l+1} = \alpha_j^l \text{ à droite} \\ \alpha_{2j}^{l+1} = \frac{2^{-l-1}}{6} \text{ à gauche} \end{cases}. \quad (4.21)$$

Les polarités au nouveau point de coupure $j2^{-l} + 2^{-l-1}$ sont $(-, +)$ pour la partie réelle et $(+, -)$ pour la partie imaginaire. Le repliement autour du point $(j+1)2^{-l}$ a été calculé à une échelle précédente et correspond à des polarités identiques. Les polarités de l'intervalle associé à $\widehat{\psi}_{2j+1}^{l+1}$ correspondent donc à la transformée en sinus DST-III pour la partie réelle et en cosinus DCT-III pour la partie imaginaire. Tous ces paramètres sont résumés sur la figure 4.13.

5. Nous utilisons dans un souci de simplicité la notation (\pm, \pm) , qui avait été introduite précédemment pour indiquer la polarité aux deux extrémités d'un intervalle. Ici, elle indique la polarité à droite et à gauche du point de coupure.

Finalement, si l'on se place dans le cas d'un signal à durée limitée, les projections de la partie réelle et imaginaire dans une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer s'écrivent (pour $\forall j > 0$)

$$\begin{aligned} d_{l,j,k}^{\Re} &= \sum_{\xi=0}^{N/2-1} f_1[\xi] \sqrt{\frac{2}{\lg l}} w_{I_j^l}[\xi] \sin \left[(k+1/2) \frac{\pi}{\lg l} (\xi - 2^{-l-1}) \right], \\ d_{l,j,k}^{\Im} &= \sum_{\xi=0}^{N/2-1} f_2[\xi] \sqrt{\frac{2}{\lg l}} w_{I_j^l}[\xi] \cos \left[(k+1/2) \frac{\pi}{\lg l} (\xi - 2^{-l-1}) \right], \end{aligned}$$

avec $w_{I_j^l}$ une fenêtre de support $[Nj2^{-l}, N(j+1)2^{-l} - 1]$ ayant un recouvrement défini par les équations (4.20) et (4.21) selon si j est paire ou impaire (et en substituant dans ces équations $\frac{2^{-l-1}}{6}$ par partie entière de $(\frac{2^{-l-1}N}{6})$).

En suivant le même principe que pour les ondelettes de Meyer, nous combinons les projections correspondant aux parties réelles et imaginaires afin d'obtenir les coefficients de paquets d'ondelettes de Meyer discrets périodiques :

$$d_{j,k}^l = \begin{cases} (-1)^{k+1} (d_{l,j,k}^{\Im} + d_{l,j,k}^{\Re}), & \text{si } k = 0, \dots, 2^{-l-1} - 1 \\ (-1)^{k+1} (d_{l,j,2^{-l}-k-1}^{\Im} - d_{l,j,2^{-l}-k-1}^{\Re}), & \text{si } k = 2^{-l-1}, \dots, 2^{-l} - 1 \end{cases}$$

4.3.2.3 Calcul des coefficients de paquets d'ondelettes associés à $\widehat{\psi}_0^{l+1}$

Nous allons nous intéresser au cas de la trame ($j = 0$). La fonction $\widehat{\psi}_0^{l+1}$ est définie, à chaque échelle, par

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_0^{l+1} &= H_0^l \widehat{\psi}_0^l \\ &= 2^{(l+1)/2} \sum_n \widehat{\zeta}(2^{l+1}\xi + 2n) \widehat{\psi}_0^l \\ &= H(2^l \xi) \widehat{\psi}_0^l \end{aligned}$$

Sachant que $\psi_0^0 = \zeta$, on constate que le calcul des coefficients de paquets d'ondelettes de la trame reste identique au cas des ondelettes "simples". Afin de calculer les coefficients de paquets d'ondelettes de Meyer $d_{0,k}^l$, toutes les relations exprimées dans le paragraphe 4.2.2.3 pour le calcul de la trame dans une décomposition en ondelettes sont donc utilisées à nouveau.

4.3.2.4 Algorithme et reconstruction

Pour un signal de longueur finie égale à N , l'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer périodique se résume à

Pour l variant de 1 à L .

– **Pour j variant de 0 à 2^{l-1} ,**

Repliement de la partie réelle positive de \widehat{f} autour du point $(2j+1)\frac{N}{2^l}$ avec une polarité positive gauche et négative droite et une zone de recouvrement partie entière $(\frac{N2^{-l}}{6})$

Repliement de la partie imaginaire positive de \hat{f} autour du point $(2j+1)\frac{N}{2^l}$ avec une polarité négative gauche et positive droite et une zone de recouvrement partie entière $\left(\frac{N2^{-l}}{6}\right)$

- **Calcul des transformées trigonométriques locales :** $d_{0,k}^{l,\Re} = DCT^I(T_{I_0^l}^l f_1)$ et $d_{0,k}^{l,\Im} = DST^I(T_{I_0^l}^l f_2)$
- **Combinaison des coefficients $d_{0,k}^{l,\Re}$ et $d_{0,k}^{l,\Im}$ afin d'obtenir $d_{0,k}^l$.**
- **Pour j variant de 1 à 2^l ,**

Calcul des transformées trigonométriques locales : $d_{j,k}^{l,\Re} = DST^{III}(T_{I_j^l}^l f_1)$ et $d_{j,k}^{l,\Im} = DCT^{III}(T_{I_j^l}^l f_2)$

Combinaison des coefficients $d_{j,k}^{l,\Re}$ et $d_{j,k}^{l,\Im}$ afin d'obtenir $d_{j,k}^l$.

L'algorithme décrit ci-dessus est résumé sur la figure 4.14.

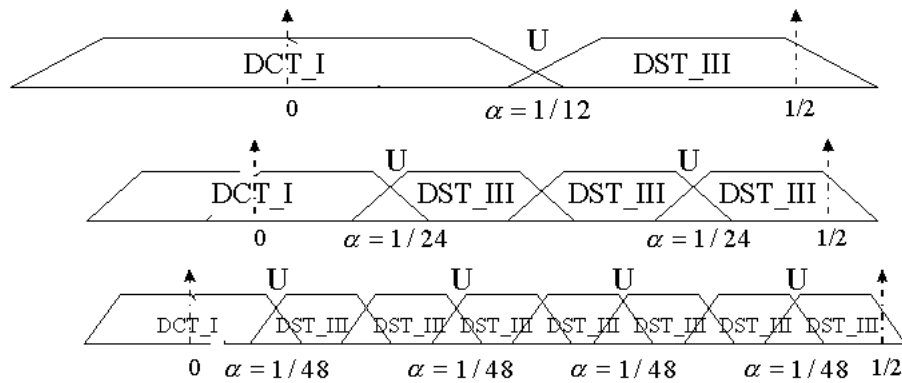


FIG. 4.14 – Algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer. Nous indiquons les points de repliement traités à chaque échelle (notés avec le symbole U), ainsi que la taille de la zone de recouvrement associée. Les transformées trigonométriques indiquées correspondent au traitement de la partie réelle de \hat{f}

Afin de pouvoir définir simplement l'algorithme de reconstruction, il faut que les paquets d'ondelettes de Meyer vérifient $W_j^l = W_{2j}^{l+1} \oplus W_{2j+1}^{l+1}$. La preuve est immédiate grâce au lemme 2 si l'on considère que les filtres H_j^l et G_j^l sont miroirs en quadrature. Mais, les propriétés des opérateurs de restriction peuvent aussi constituer une manière différente de le démontrer dans le cas des paquets d'ondelettes de Meyer. Après avoir calculé les transformées trigonométriques inverses sur chaque intervalle de coefficients, nous obtenons les ensembles $T_{I_j^l}^l f_i[\xi]$, comme pour la transformée en ondelettes (équations (4.12) et (4.16)). On calcule les termes $T_{I_j^l}^* T_{I_j^l}^l f_1[\xi]$ et $T_{I_j^l}^* T_{I_j^l}^l f_2[\xi]$ grâce à l'opérateur de repliement adjoint U^* . Puisque la projection est orthogonale, c'est-à-dire que $T_{I_j^l}^* T_{I_j^l}^* T_{I_{j'}^l}^* T_{I_{j'}^l}^l = 0$ pour tout $l \neq l' \times j \neq j'$, et que les intervalles adjacents sont de polarités opposées, nous pouvons écrire que

$$T_{I_j^l}^* T_{I_j^l}^l f_{1,2}[\xi] = T_{I_{2j}^{l+1}}^* T_{I_{2j}^{l+1}}^{l+1} f_{1,2}[\xi] \oplus T_{I_{2j+1}^{l+1}}^* T_{I_{2j+1}^{l+1}}^{l+1} f_{1,2}[\xi].$$

Si l'on note A l'ensemble correspondant à un arbre admissible sélectionné par un algorithme de

meilleure base, alors la fonction \widehat{f} peut être reconstruite à partir de la relation suivante

$$\widehat{f}[\xi] = \sum_{(l,j) \in A} \left(P_{I_j^l} f_1[\xi] + iP_{I_j^l} f_2[\xi] \right),$$

$$\text{avec } P_{I_j^l} f_1[\xi] = \begin{cases} T_{\widetilde{I}_0^*}^* T_{\widetilde{I}_0} \widetilde{f}_1[\xi], & \text{si } j = 0 \\ T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_1[\xi], & \text{si } \xi \geq 0 \text{ et } j > 0 \\ T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_1[-\xi], & \text{si } \xi < 0 \text{ et } j > 0 \end{cases},$$

$$\text{et } P_{I_j^l} f_2[\xi] = \begin{cases} T_{\widetilde{I}_0^*}^* T_{\widetilde{I}_0} \widetilde{f}_1[\xi], & \text{si } j = 0 \\ T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_2[\xi], & \text{si } \xi \geq 0 \text{ et } j > 0 \\ -T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_2[-\xi], & \text{si } \xi < 0 \text{ et } j > 0 \end{cases}.$$
(4.22)

4.3.3 Propriétés de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer

Nous allons étudier les propriétés de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer. Il nous faut aborder la perte de localisation temporelle par rapport à des décompositions avec des filtres à support temporel fini, mais aussi l'apport dans la séparation fréquentielle des différents éléments du signal.

4.3.3.1 Résolution temporelle

Comme pour la décomposition en ondelettes de Meyer, l'utilisation de filtres à support temporel infini a pour conséquence une dégradation de la résolution temporelle par rapport à des filtres à support temporel compact. Afin de mesurer cette différence, pour diverses échelles, et différentes projections, nous décomposons une fonction Dirac, avec des paquets d'ondelettes Symmlet-8 et des paquets d'ondelettes de Meyer.

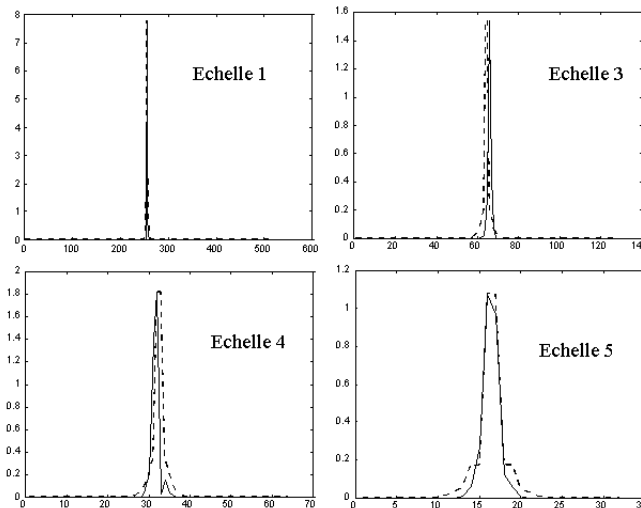


FIG. 4.15 – Décomposition d'un dirac sur 5 échelles de paquets d'ondelettes. Nous présentons l'énergie des coefficients pour un plan par échelle (le comportement sur les autres plans est identique). En trait continu les ondelettes Symmlet-8, en pointillé les ondelettes de Meyer

Nous présentons sur la figure 4.15, l'énergie des coefficients des deux décompositions sur cinq échelles pour des plans donnés. On constate que les différences entre les deux représentations sont à peine visibles pour les échelles les plus fines. Aux échelles plus grossières, lorsque l'ondelette est plus

dilatée, le nombre de coefficients d'amplitude non négligeable est légèrement plus important pour les paquets d'ondelettes de Meyer. Toutefois, l'écart est très faible (quelques coefficients de différence). Logiquement, nous retrouvons les constatations faites lors de l'étude de la décomposition simple en ondelettes de Meyer.

4.3.3.2 Séparation fréquentielle

L'importance d'une meilleure séparation fréquentielle dans le cas des paquets d'ondelettes, est prépondérante par rapport à la décomposition classique, car les paquets cherchent à séparer, à travers la construction d'une collection de bases, chaque élément du signal. Afin d'illustrer les différences entre les paquets d'ondelettes de Meyer et les filtres à support temporel fini, nous réutilisons le signal synthétique "coif2" composé de six atomes TF (nous rappelons sur la figure 4.16 la représentation TF théorique associée).

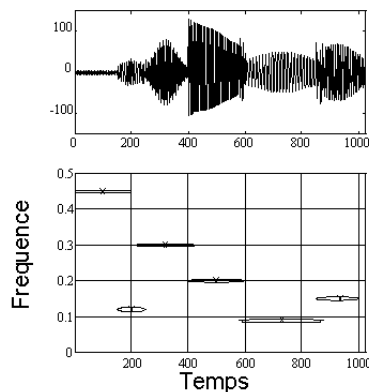


FIG. 4.16 – Signal constitué de 6 atomes TF, et sa représentation TF théorique

Nous indiquons sur la figure 4.17 les décompositions obtenues sur deux échelles par les paquets d'ondelettes de Meyer et les paquets d'ondelettes Symmlet-8 (les échelles suivantes présentent des caractéristiques identiques). On constate que la séparation fréquentielle n'est pas excellente pour la décomposition avec les ondelettes Symmlet-8. Certains atomes, annotés sur les plans de projection avec des flèches, apparaissent d'une façon erronée dans certaines bandes de fréquence. L'énergie de l'erreur peut être très importante, comme pour le quatrième atome du signal, qui correspond à une fréquence 0.2, et que l'on retrouve dans les bandes $[0.25, 0.5]$ ou $[0.25, 0.375]$. La décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer permet une séparation quasi-parfaite des atomes (pour cela, il faut bien sûr sélectionner la meilleure base au sens d'un critère).

Si nous sélectionnons la meilleure base selon un critère entropique grâce à l'algorithme Best-Basis présenté dans le chapitre 3, une représentation TF peut être estimée sous forme de rectangle d'Heisenberg. Nous présentons sur la figure 4.18 les trois représentations extraites de la décomposition du signal "coif2" en paquets d'ondelettes de Daubechies, de Symmlet, et de Meyer. On remarque tout d'abord que la représentation associée aux ondelettes Symmlet est meilleure que celle des ondelettes de Daubechies. Les filtres de daubechies D4 sont plus courts dans le domaine temporel que ceux associés à l'ondelette de Symmlet, et ont donc une résolution fréquentielle plus faible. Ceci entraîne une dispersion de l'énergie des atomes sur plusieurs bandes de fréquence. On constate que la représentation associée aux ondelettes de Meyer extrait d'une façon plus précise les différents atomes présents dans le signal (symbolisés par des cercles) avec une concentration de l'énergie à la position

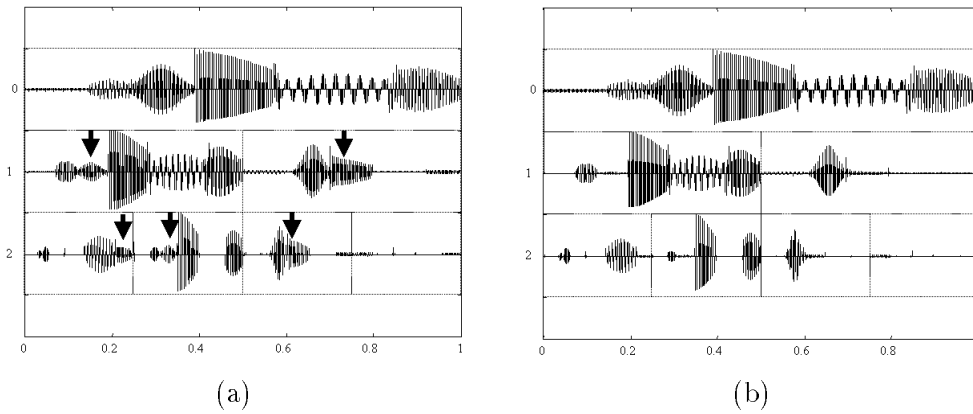


FIG. 4.17 – Décompositions du signal *coif2* sur 2 échelles de paquets d'ondelettes: (a) Ondelettes *Symmlet-8* (nous indiquons avec des flèches les atomes qui ne devraient pas apparaître sur certaines échelles, si la séparation fréquentielle était correcte) (b) Ondelettes de Meyer.

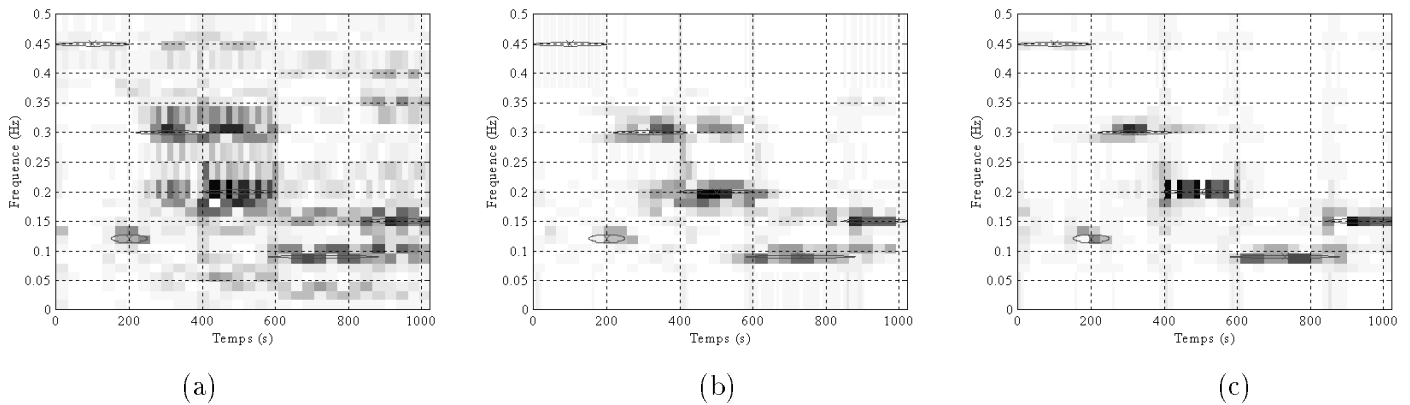


FIG. 4.18 – Représentation TF du signal *coif2* calculée à partir de la meilleure base sélectionnée sur 4 échelles de paquets d'ondelettes: (a) Ondelettes *Daubechies-4* (b) Ondelettes *Symmlet-8* (c) Ondelettes de Meyer.

théorique des atomes. Cet exemple illustre la supériorité des paquets d'ondelettes de Meyer sur les autres bases pour une problématique d'analyse ou de séparation des composants d'un signal.

4.4 Algorithme de "séparation" 1D

A partir des propriétés de séparation fréquentielle des paquets d'ondelettes de Meyer, nous proposons un algorithme permettant d'extraire les différents composants d'un signal [17].

4.4.1 Hypothèses et principes

L'algorithme proposé va s'appliquer sur les signaux que l'on nomme "stationnaires par partie". Nous avons abordé cette classe de signaux dans le chapitre 3. Nous rappelons ici brièvement leurs propriétés. Ces signaux peuvent se modéliser sous la forme d'une somme de composants qui sont stationnaires sur un intervalle fixé et nul autre part. Les signaux de ce type peuvent s'exprimer de la façon suivante

$$s[t] = \begin{cases} y_1[t], \text{ pour } t \in [0, t_1 - 1] \text{ avec } \hat{y}_1[\xi] \text{ défini sur } [\xi_{11}, \xi_{12}] \\ y_2[t], \text{ pour } t \in [t_1, t_2 - 1] \text{ avec } \hat{y}_2[\xi] \text{ défini sur } [\xi_{21}, \xi_{22}] \\ \dots \\ y_n[t], \text{ pour } t \in [t_{n-1}, t_n - 1] \text{ avec } \hat{y}_n[\xi] \text{ défini sur } [\xi_{n1}, \xi_{n2}] \end{cases} . \quad (4.23)$$

Notons que les intervalles fréquentiels de chaque composant sont continus dans le modèle exposé, mais qu'ils peuvent être disjoints.

Pour séparer et faire apparaître les différentes composantes du signal, une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer est bien adaptée du fait de son excellente séparation fréquentielle. Toutefois, cette décomposition correspond à une collection de bases, et nécessite la sélection de la base optimale pour un critère donné. Si l'on utilise les critères couramment proposés dans la littérature (comme l'entropie, ou une mesure d'énergie), nous n'obtenons pas forcément le résultat escompté, car ces mesures sont une évaluation de la distribution de l'énergie des coefficients, et non une mesure du degré de séparation des composantes du signal. L'algorithme Best-Basis sélectionne la représentation qui minimise la somme des coûts, mais la distribution spatiale de l'énergie des coefficients sur chacune des échelles n'est jamais prise en compte.

Nous avons mis l'accent sur cette particularité dans le chapitre 3 à propos de la décomposition en ondelettes de Malvar. Et pour "améliorer" la sélection de la meilleure base, nous avons proposé de mesurer entre deux sous-fenêtres temporelles l'écart des spectres estimés. De la même façon, si nous voulons extraire les différentes composantes d'un signal qui se localisent à des coordonnées temporelles et fréquentielles différentes, nous allons plutôt utiliser un critère mesurant la séparation par deux sous-fenêtres fréquentielles des différentes composantes du signal. Si l'on reprend la modélisation introduite dans l'équation (4.23), la décomposition optimale correspond à une projection sélectionnée pour chaque composant $y_i[t]$. Pour cela, puisque chaque composant se concentre sur un intervalle temporel borné et disjoint des autres, nous allons modéliser la distribution temporelle de l'énergie pour chacune des fenêtres fréquentielles, puis évaluer si le comportement temporel de l'énergie de deux sous-fenêtres "fils" diffère d'une façon importante.

Nous introduisons une fonction ET qui symbolise la distribution temporelle de l'énergie des coefficients d'ondelettes. La sélection de la meilleure représentation va donc s'effectuer grâce à une mesure notée Φ définie par :

$$\Phi(d_{2j}^l, d_{2j+1}^l) = ET(d_{2j}^l) \cap_{ET} ET(d_{2j+1}^l)$$

avec \cap_{ET} une mesure de ressemblance entre 2 distributions temporelles.

A partir de cette fonction de coût, nous pouvons décider si la division en deux d'un intervalle fréquentiel permet de séparer certains composants du signal.

4.4.2 Enveloppe et mesure d'intersection

4.4.2.1 Evaluation de la distribution de l'énergie en fonction du temps : fonction ET

Il faut définir une fonction qui permet de modéliser l'évolution temporelle de l'énergie du signal pour une certaine bande de fréquences. Pour cela, nous reprenons les méthodes proposées dans les algorithmes de segmentation de textures par décomposition de Gabor ou en ondelettes [59]. En effet,

une image composée de différentes textures peut s'apparenter à un signal 2D stationnaire par partie, ou chacun des composants $y_i [t_x, t_y]$ correspond à une texture. Comme pour ces algorithmes, nous allons utiliser la notion d'enveloppe afin de mesurer la disposition spatiale de l'énergie : $ET(d_j^l)$ va correspondre à l'enveloppe du signal $(d_j^l)_k$.

L'enveloppe d'un signal défini sur un support fréquentiel borné se calcule généralement par l'intermédiaire du signal analytique. Pour un signal $s(t)$, le signal analytique $\tilde{s}(t)$ est défini par $\tilde{s}(t) = s(t) + iHs(t)$, avec Hs la transformée de Hilbert de s , suivant $Hs(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\eta)}{t-\eta} d\eta$. L'enveloppe du signal original est alors le module du signal analytique $\tilde{s}(t)$.

Toutefois, Laine a montré sur des exemples numériques que cette méthode de calcul de l'enveloppe pouvait être très sensible au bruit et réclamait un temps de calcul assez important [59]. Il a donc proposé une seconde méthode d'estimation de l'enveloppe basée sur les passages par 0 du signal. Elle est plus robuste, plus simple à calculer, et permet d'obtenir une enveloppe plus "approximée", résultat plus adapté à notre problématique, à savoir extraire globalement l'évolution temporelle de l'énergie.

Dans cette méthode, le maximum absolu entre deux passages par 0 de la courbe est tout d'abord détecté, puis cette valeur est assignée à chaque point élément de cet intervalle. Nous présentons sur la figure 4.19 un exemple de calcul d'enveloppe par la méthode des passages par 0 appliquée sur un signal Doppler.

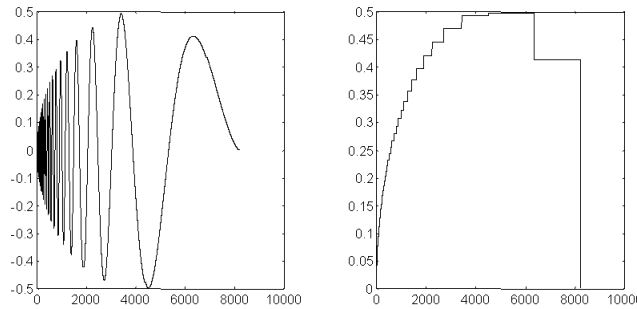


FIG. 4.19 – Calcul de l'enveloppe d'un signal Doppler par la méthode des passages par 0

Si nous notons $(z_i^{(l,j)})_{i \in Z}$ l'ensemble des points correspondant à un passage par 0 du signal $(d_j^l)_k$, alors notre fonction $ET(d_j^l)$ est définie par

$$ET(d_j^l)[k] = \max_{t \in [z_{i-1}, z_i]} |d_{j,t}^l|, \text{ avec } k \in [z_{i-1}, z_i]$$

Il nous faut maintenant introduire la fonction de coût qui va évaluer le degré de ressemblance entre deux enveloppes calculées sur deux projections différentes.

4.4.2.2 Fonction de coût : $\Phi(\cdot)$

Afin de mesurer le degré de ressemblance entre deux enveloppes, nous calculons la courbe correspondant à la "quantité" d'énergie commune à chaque instant aux deux espaces fréquentiels. Cette intersection des deux enveloppes peut être définie par la courbe passant par tous les minima des deux courbes. En effet, la valeur minimum des deux enveloppes correspond à la quantité commune d'énergie à un instant donné. Nous définissons donc cette ressemblance par :

$$d_j^l \cap_E d_{j+1}^l = \sum_{k=0}^{N/2^l-1} \min(d_{j,k}^l, d_{j+1,k}^l)$$

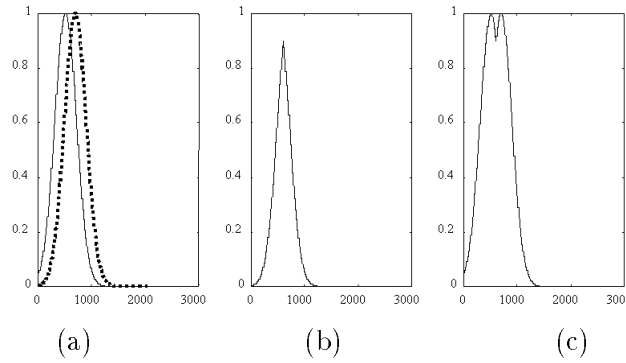


FIG. 4.20 – Calcul du degré de ressemblance des deux enveloppes: (a) les deux enveloppes (b) la courbe d'intersection $d_j^l \cup_E d_{j+1}^l = 330$ (c) la courbe d'union $d_j^l \cap_E d_{j+1}^l = 690$

Toutefois, afin d'évaluer l'importance de l'intersection par rapport à l'énergie commune modélisée par les deux enveloppes, nous définissons l'opération d'union entre les courbes. Cette union se calcule par une courbe passant par tous les maxima. L'énergie commune se calcule donc par :

$$d_j^l \cup_E d_{j+1}^l = \sum_{k=0}^{N/2^l-1} \max(d_{j,k}^l, d_{j+1,k}^l).$$

La fonction de coût est alors définie par :

$$\Phi(d_j^l, d_{j+1}^l) = \frac{d_j^l \cap_E d_{j+1}^l}{d_j^l \cup_E d_{j+1}^l}$$

Nous illustrons ces différentes mesures sur deux exemples simples correspondant à deux enveloppes gaussiennes. Dans le premier cas (figure 4.20), les deux enveloppes sont situées à des coordonnées temporelles proches. Il faut alors considérer dans ce cas que la division fréquentielle n'apporte rien à la séparation des composants du signal. Si l'on calcule la courbe d'intersection et d'union, on trouve des valeurs respectivement égales à 330 et 690, ce qui correspond à une mesure de coût égale à 0.5.

Dans le second cas (figure 4.21), les deux enveloppes sont nettement distinctes. La division fréquentielle met donc en évidence deux composants du signal. La courbe d'intersection correspond à une valeur 47, alors que la courbe d'union correspond à une valeur 973. Nous avons donc un coût égal à 0.05. Le coût est 10 fois inférieur au précédent, on constate que cette division peut être considérée comme significative par la fonction de coût.

4.4.3 Choix de la meilleure représentation

Nous avons défini une mesure qui permet d'évaluer l'indice de séparation des composants d'un signal par division de l'espace fréquentiel. Nous allons utiliser cette fonction de coût avec la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer afin de définir un algorithme d'extraction des différents composants d'un signal. On débute à l'échelle la plus fine (correspondant aux fenêtres fréquentielles les plus petites), et pour chacune des paires de fenêtres, nous mesurons à l'aide de la fonction Φ l'indice de séparation des différents composants du signal. Puis nous comparons les différents coûts à une valeur seuil symbolisant les divisions "significatives". Lorsque le coût est inférieur à la valeur seuil la coupure est alors sélectionnée.

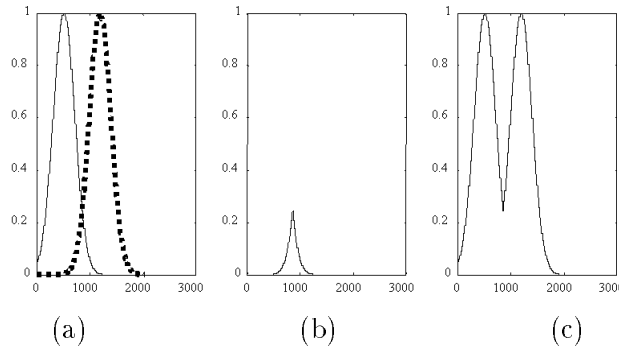


FIG. 4.21 – Calcul du degré de ressemblance des deux enveloppes: (a) les deux enveloppes (b) la courbe d'intersection $d_j^l \cup_E d_{j+1}^l = 47$ (c) la courbe d'union $d_j^l \cap_E d_{j+1}^l = 973$

Notre algorithme diffère de Best-Basis car il ne cherche pas à minimiser un coût, mais à sélectionner, en fonction d'un seuil, des divisions significatives. Nous avons donc modifié l'algorithme Best-basis: lorsque une division est considérée comme significative à une échelle fine, toutes les divisions correspondant à ses noeuds pères doivent être sélectionnées.

L'algorithme de recherche meilleure base va donc se définir de la façon suivante :

– Soit A_j^l un booléen indiquant si la coupure correspondant au noeud d'indice (j, l) est sélectionnée; soit E_j^l le cot associ,

– Pour l variant de $L - 2$ à 0 ,

Pour j variant de 0 à $2^l - 1$

Si $E_j^l < \lambda_{ET}$ alors la partition entre I_{2j}^{l+1} et I_{2j+1}^{l+1} est sélectionnée: $\begin{cases} A_j^l = 1 \\ E_{j/2}^{l-1} = E_j^l \end{cases}$

sinon la partition est rejetée: $A_j^l = 0$

Une dernière étape doit être ajoutée à notre algorithme, permettant de rejeter les cas où l'information présente dans la fenêtre fréquentielle n'est pas significative, mais due au bruit ou à l'approximation numérique. Car dans ce cas la mesure de similarité est peu robuste, et nous pouvons avoir des phénomènes de sur-segmentation.

Nous étudions la répartition de l'énergie entre les deux fenêtres après partition. Si l'énergie du père se diffuse massivement dans l'une des deux fenêtres, on considère que l'autre fenêtre ne contient pas d'information significative et elle ne sera pas étudiée, ainsi que toutes les sous-fenêtres associées. Cette étude commence à l'échelle la plus grossière pour aller vers les échelles les plus fines. L'algorithme se décline de la façon suivante :

– Soit M_j^l un booléen indiquant si la fenêtre fréquentielle d'indice (j, l) est significative ou non,

– Pour l variant de 1 à $L - 1$,

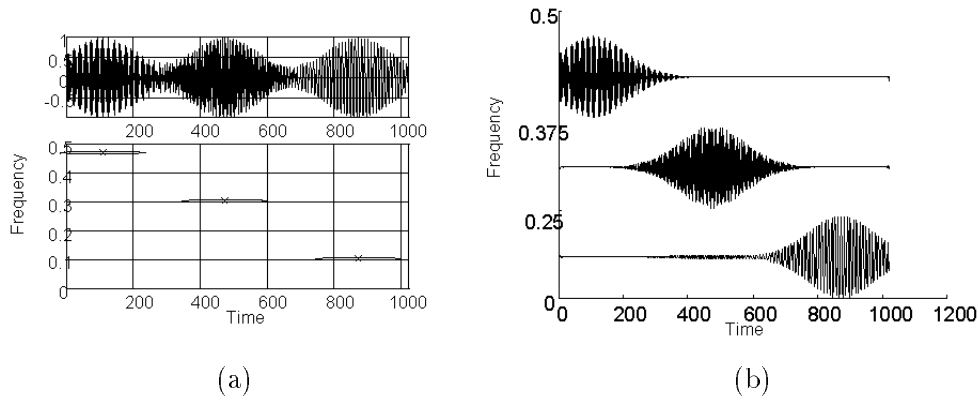


FIG. 4.22 – Signal de test composé de 3 atomes TF : (a) représentation TF théorique (b) Meilleure base sélectionnée par notre algorithme

De j variant de 0 à $2^l - 1$,

Si $M_{j/2}^{l-1} = 0$ **alors la fenêtre ne contient pas d'information significative, la fenêtre étudiée est rejetée** : $M_j^l = 0$

sinon Si $\|d_j^l\|^2 / \|d_{j/2}^{l-1}\|^2 > \lambda_E$ **alors la fenêtre est considérée comme contenant de l'information significative** : $M_j^l = 1$

sinon $M_j^l = 0$

Cette sélection des fenêtres est appliquée avant l'algorithme de recherche de meilleure base afin de ne faire la recherche de divisions significatives que sur les fenêtres fréquentielles correspondant à de l'information.

Notre algorithme nécessite la définition de deux seuils : λ_{ET} et λ_E . Nous avons constaté numériquement que les réglages $\lambda_{ET} \in [0.1, 0.4]$ et $\lambda_E \in [0.001, 0.01]$ permettent d'obtenir les résultats les plus probants.

4.4.4 Applications

4.4.4.1 Signaux de test

Nous avons appliqué tout d'abord notre algorithme sur deux signaux de tests. Nous pouvons constater sur les figures 4.22 et 4.23 que notre algorithme sélectionne bien les fenêtres qui permettent de séparer les différents composants des signaux. Afin d'illustrer les différences avec les coûts tels que le coût entropique, nous décomposons le signal de la figure 4.23 (signal "coif2") sur 6 échelles et nous sélectionnons la meilleure base avec le coût entropique et avec l'indice de recouvrement. Les représentations TF associées à ces deux "meilleure base" sont indiquées sur la figure 4.24.

Nous constatons que le coût entropique provoque une sur-segmentation de l'axe fréquentiel, entraînant une dispersion de l'énergie des atomes entre différentes projections. Comme nous l'avons déjà constaté sur la figure 4.23, notre algorithme sélectionne les bandes de fréquences permettant d'isoler les différents atomes (avec quelques coupures supplémentaires dues au caractère dyadique de la segmentation). De plus les bandes de fréquence ne contenant pas d'information significative ne

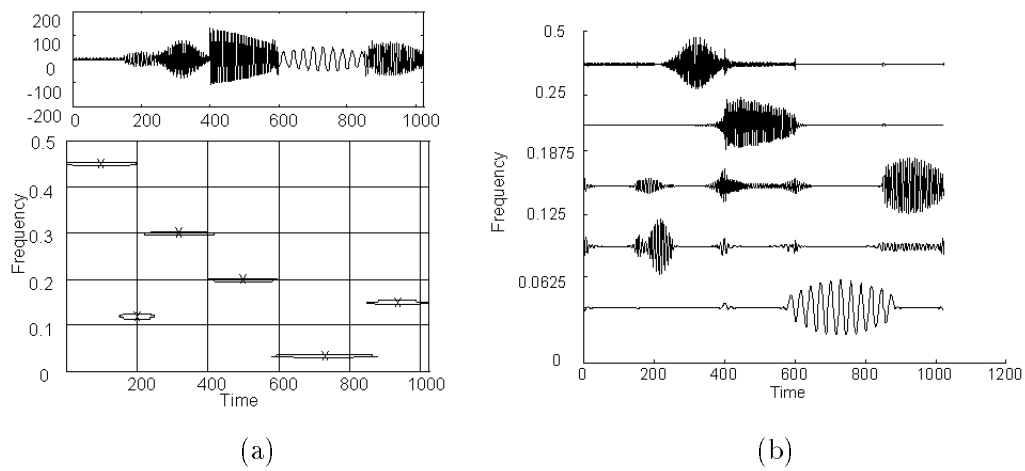


FIG. 4.23 – Signal "coif2" composé de 6 atomes TF : (a) représentation TF théorique (b) Meilleure base sélectionnée par notre algorithme

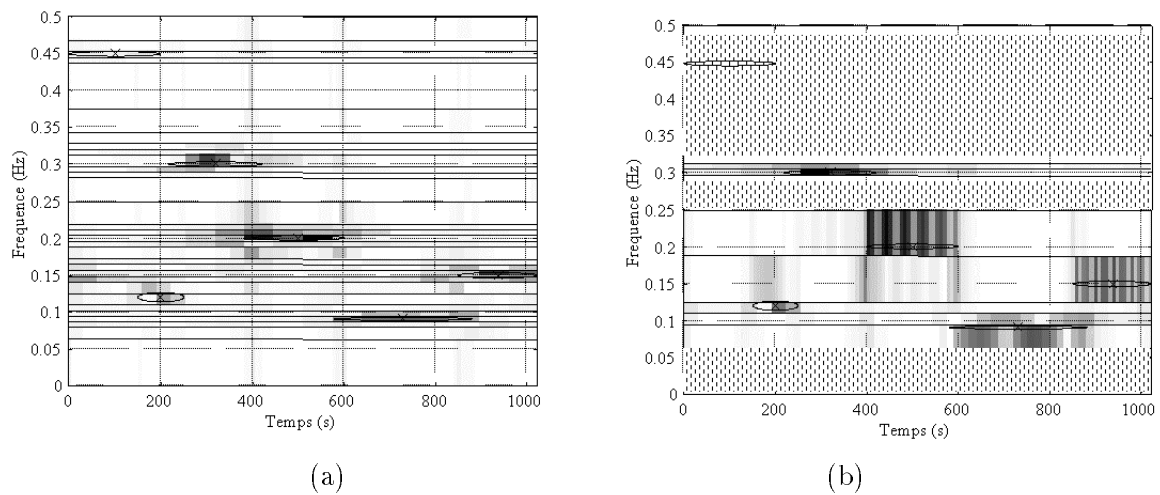


FIG. 4.24 – Signal "coif2" composé de 6 atomes TF : (a) représentation TF associée à la meilleure base minimisant le coût entropique (b) représentation TF associée à la meilleure base sélectionnée par notre algorithme (les zones hachurées correspondent à des intervalles fréquentiels rejetés). Sur les deux figures nous indiquons la division de l'espace fréquentiel.

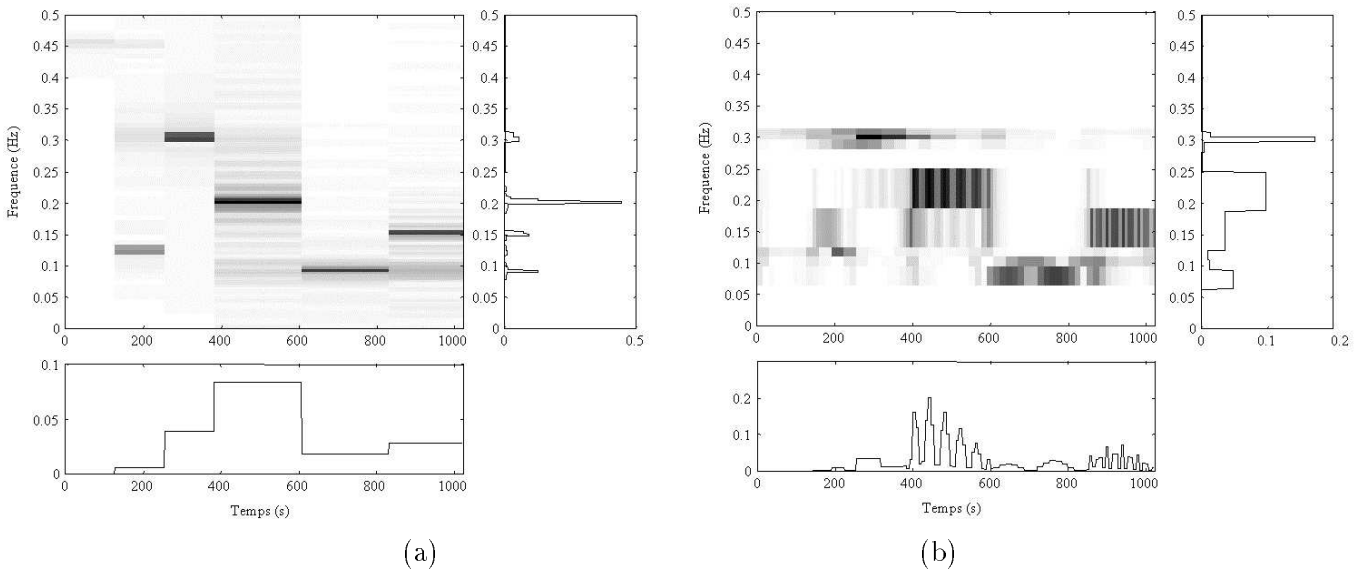


FIG. 4.25 – Signal "coif2" composé de 6 atomes TF: (a) représentation TF associée à la meilleure base sélectionnée par l'arbre des distances (b) représentation TF associée à la meilleure base sélectionnée par les enveloppes. Nous indiquons les densités marginales calculées à partir des deux représentations TF

sont pas sélectionnées (le premier atome qui possède une énergie très faible par rapport aux autres a été supprimé, mais il peut s'apparenter à du bruit). Cet exemple illustre que la méthodologie de partition proposée associée à une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer permet d'obtenir une représentation optimale pour un algorithme de segmentation.

L'algorithme proposé dans le chapitre 3 utilisant la décomposition de Malvar et celui utilisant la décomposition de Meyer présentent des similitudes. En effet, ces deux algorithmes cherchent à séparer les composantes du signal en appliquant un découpage, le premier dans le domaine temporel, le second dans le domaine fréquentiel. Si l'on calcule les densités marginales⁶ associées aux deux représentations TF sélectionnées par les deux algorithmes sur le signal "coif2", nous mettons en évidence les parallèles existant entre ces deux méthodes.

Nous indiquons sur la figure 4.25 les différentes densités marginales calculées à partir des deux représentations TF.

Le premier algorithme sépare les composants selon leur similitude dans le domaine fréquentiel, ce qui entraîne un découpage par "zone" de l'énergie dans le domaine temporel. A l'inverse, le second algorithme sépare les composants selon leur similitude dans le domaine temporel, ce qui entraîne un découpage par "zone" de l'énergie dans le domaine fréquentiel. On peut voir sur la figure 4.25 que ces deux approches fournissent des résultats complémentaires. Lorsque l'on cherche à extraire un comportement moyen dans le domaine temporel on utilise le premier algorithme, à l'inverse lorsque l'on cherche à extraire des bandes de fréquences caractéristiques des éléments du signal, on utilise le second algorithme.

L'algorithme est ensuite utilisé sur des signaux réels de la Toolbox Wavelab [90]. Le premier est un signal sismique. Nous évaluons sa représentation TF à partir de la transformée de Wigner-Ville.

6. Nous avons introduit les densités marginales associées à une représentation TF dans le chapitre 3.

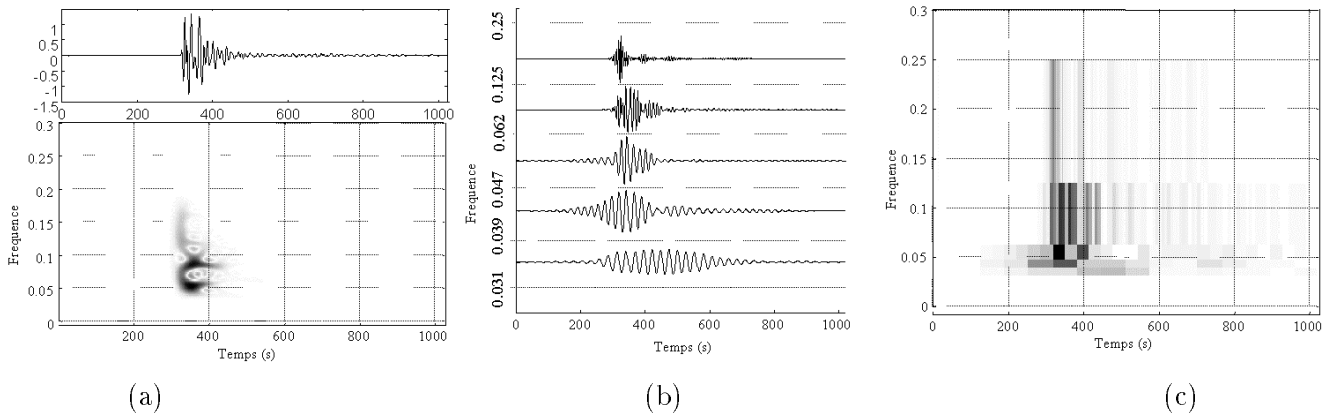


FIG. 4.26 – *Signal sismic : (a) Décomposition de Wigner-Ville (b) Meilleure base sélectionnée par notre algorithme (c) Représentation TF associée*

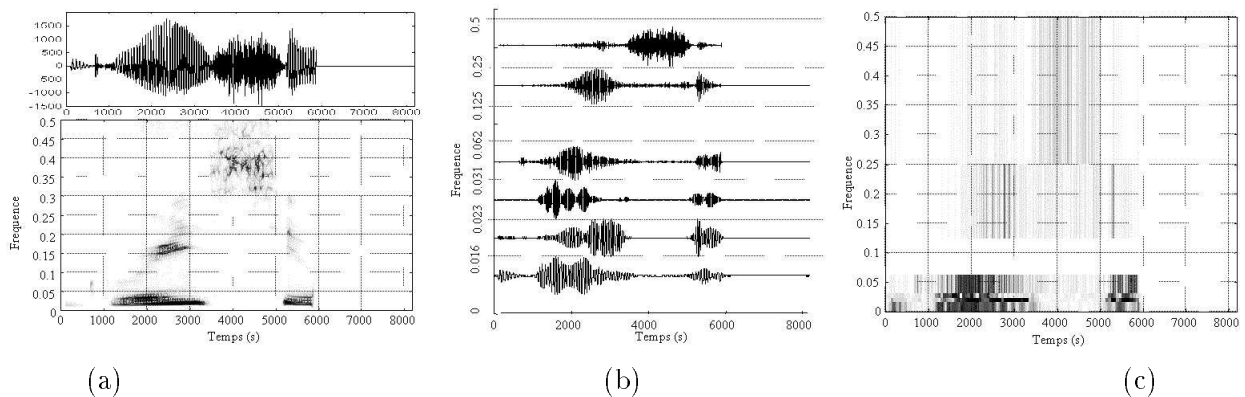


FIG. 4.27 – *Signal de parole : (a) Décomposition de Wigner-Ville (b) Meilleure base sélectionnée par notre algorithme (c) Représentation TF associée*

Nous pouvons voir sur la figure 4.26a que le signal est formé de 4 composantes principales, que l'on retrouve parfaitement après application de notre algorithme, ainsi que sur la représentation TF associée :

- une composante basse fréquence $[0.03, 0.04]$ qui se situe durant toute la secousse ,
- une composante intermédiaire $[0.04, 0.06]$ qui se situe au début de la secousse,
- une composante plus haute fréquence $[0.06, 0.125]$ qui se trouve globalement dans le même intervalle de temps que la composante basse fréquence,
- une composante "haute" fréquence $[0.125, 0.25]$ se situant au début de la secousse.

Le second signal réel est l'enregistrement vocal que nous avons déjà étudié (mot "greasy"). On voit apparaître sur la représentation de Wigner-Ville les différents phonèmes composant ce mot (figure 4.27a). A partir de notre décomposition, ces différents phonèmes sont mis en évidence. Seuls ceux qui possèdent une énergie faible, se trouvant au début du signal, sont ignorés dans le découpage. Un algorithme de segmentation permettant d'isoler temporellement chacun des phénomènes peut alors être facilement appliqué. Si l'on compare la représentation TF de la figure 4.27 avec celle associée à

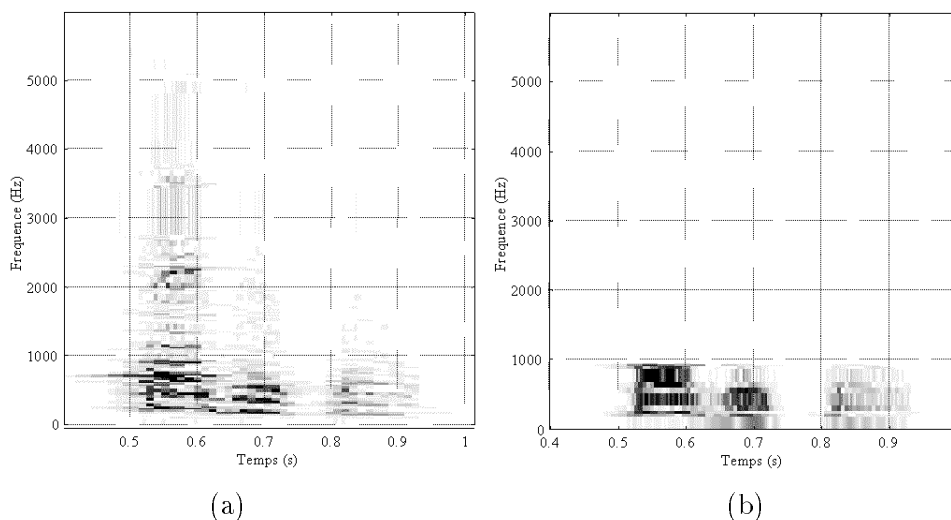


FIG. 4.28 – Décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer du signal "Feather bed" (accent primaire sur le premier mot) sur 9 échelles: (a) Meilleure base sélectionnée par un coût entropique (b) Meilleure base sélectionnée par l'indice de recouvrement d'enveloppe

l'arbre des distances (chapitre 3, figure 3.23), on constate que les résultats sont nettement différents : la décomposition en ondelettes de Malvar met plus en évidence les différentes harmoniques des phonèmes ainsi que leurs évolutions au cours du temps, en revanche la décomposition de Meyer extrait plus globalement les différentes composantes du signal. Comme nous l'avons vu avec le signal "coif2", ces deux approches sont complémentaires.

4.4.4.2 Phonétique anglaise

Nous avons appliqué la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer sur les enregistrements vocaux associés à l'étude de l'intonation des mots composés anglais, application que nous avons présentée dans le chapitre 3. Notons que l'algorithme est utilisé sur les signaux débruités par la méthode du chapitre 3.

Dans un premier temps nous faisons une comparaison entre une sélection de la meilleure base selon le coût entropique et selon l'indice de recouvrement d'enveloppe. Sur la figure 4.28 nous indiquons les deux représentations TF associées aux deux meilleures bases sélectionnées lors de la décomposition du signal "feather bed" avec l'accent primaire sur le premier mot. Comme nous l'avons déjà remarqué, le coût entropique provoque une importante segmentation de l'axe fréquentiel et donc une dispersion de l'énergie dans différentes petites bandes fréquentielles. A l'inverse, le coût Φ permet d'obtenir un comportement "moyen" du signal en ne sélectionnant que de larges fenêtres fréquentielles. Il est certain que la base sélectionnée par le coût entropique est plus précise en prenant en compte les légères nuances, mais elle est aussi plus difficilement interprétable. En terme d'outil "phonétique", le coût entropique obtient des résultats similaires à un sonographe, appareil qui s'apparente à un banc de filtres découpant d'une façon constante l'axe fréquentiel.

La décomposition par paquets d'ondelettes de Meyer associée au coût Φ permet d'extraire le comportement moyen fréquentiel du signal : donc à l'inverse de la décomposition de Malvar où nous analysons le signal grâce à la densité marginale temporelle, nous allons extraire la densité marginale fréquentielle F_{ξ} .

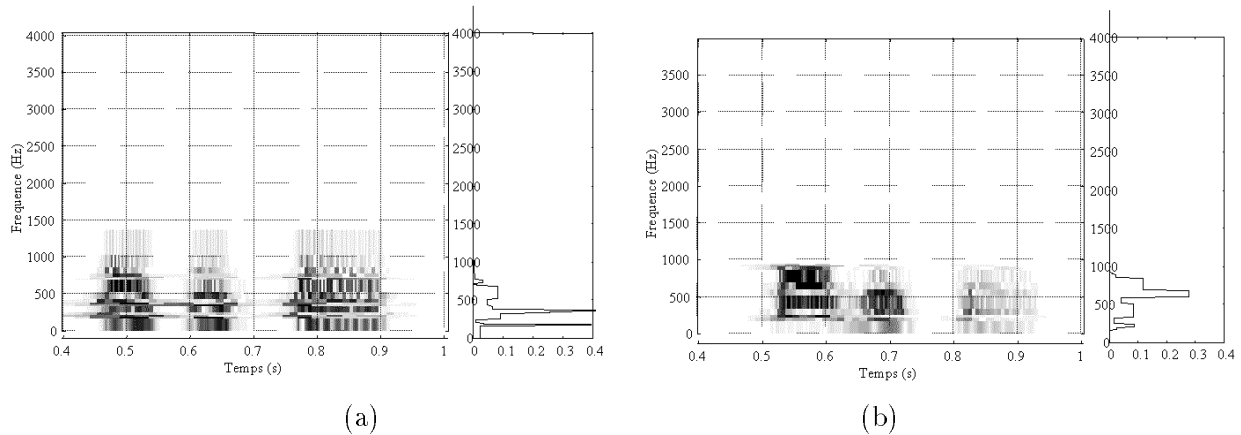


FIG. 4.29 – Décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer du signal "Feather bed" sur 9 échelles. Représentation TF et distribution marginale fréquentielle : (a) non intégré (b) intégré

Nous indiquons sur la figure 4.29 les représentations TF associées aux deux versions de l'expression "feather bed" ainsi que les fonctions F_ξ . Logiquement, on constate que les deux formulations de l'expression possèdent des fréquences fondamentales identiques. En revanche, la distribution de l'énergie est différente selon l'accentuation. Les deux phonèmes <fea> et <be> ont leurs énergies fréquentielles qui se concentrent entre 0 et 1500 Hz mais avec un maximum dans la bande [500, 800] pour <fea> et [250, 500] pour <be>. Quand l'accent est placé sur le second mot (figure 4.29a) on trouve les maxima d'énergie de la courbe F_ξ dans l'intervalle [250, 500] correspondant à <be>. A l'inverse, lorsque l'accent est placé sur le premier mot, le maximum d'énergie est situé dans la bande [500, 800] correspondant à <fea>. On en conclut que la technique basée sur les ondelettes de Meyer peut détecter l'accent primaire. Notons que la méthode basée sur les ondelettes de Malvar a été mise en échec sur cet exemple (figure 3.32). En effet, nous avons été obligés d'utiliser des connaissances phonétiques sur cet exemple pour détecter l'accent primaire. Toutefois, avec les ondelettes de Meyer, il faut connaître la description fréquentielle de chacune des composantes pour conclure à partir de la densité F_ξ . C'est pourquoi la partition temporelle reste nécessaire et complémentaire à la partition fréquentielle. D'autant plus que l'approche basée seulement sur le découpage fréquentiel peut être elle aussi mise en échec dans la détection de l'accent primaire. Nous l'illustrons dans l'exemple suivant.

Nous indiquons sur la figure 4.30 les représentations TF associées aux deux versions de l'expression "a black bird" ainsi que la distribution marginale en fréquence. Dans ce cas, la distribution de l'énergie est très similaire entre les deux accentuations. En effet, <bla> et <bir> ont leurs énergies fréquentielles distribuées entre 250 et 1500 (avec simplement plus d'énergie au-dessus de 900 Hz pour <bla>). Donc, que l'accent soit positionné sur les deux mots ou sur un seul ne modifie pas la densité F_ξ , si ce n'est, en proportion, plus ou moins d'énergie au dessus de 900 Hz. Dans ce cas, l'approche temporelle avec les ondelettes de Malvar est plus adaptée.

Enfin, nous indiquons sur la figure 4.31 les représentations TF associées aux deux versions de l'expression "nation wide" ainsi que les distributions F_ξ . Le phonème <na> présente des fréquences dans la bande [0, 1000] alors que le phonème <wi> se situe dans la bande [0, 1500] donc contient de plus hautes fréquences. Lorsque l'accent est placé sur le second mot (figure 4.31a) on trouve les maxima de la courbe F_ξ autour de 1000 Hz, correspondant à <wi>. A l'inverse, lorsque l'accent est

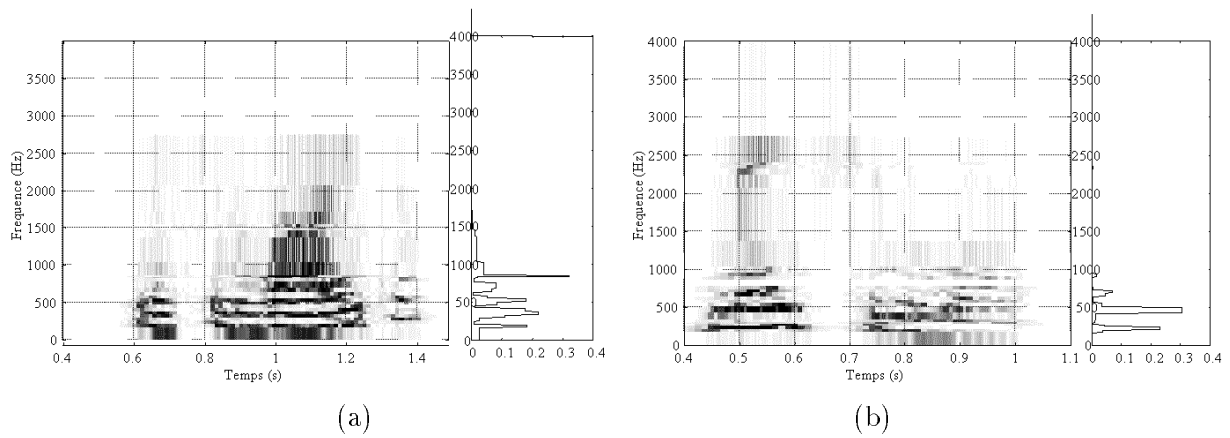


FIG. 4.30 – Décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer du signal "a black bird" sur 9 échelles. Représentation TF et distribution marginale fréquentielle: (a) non intégré (b) intégré

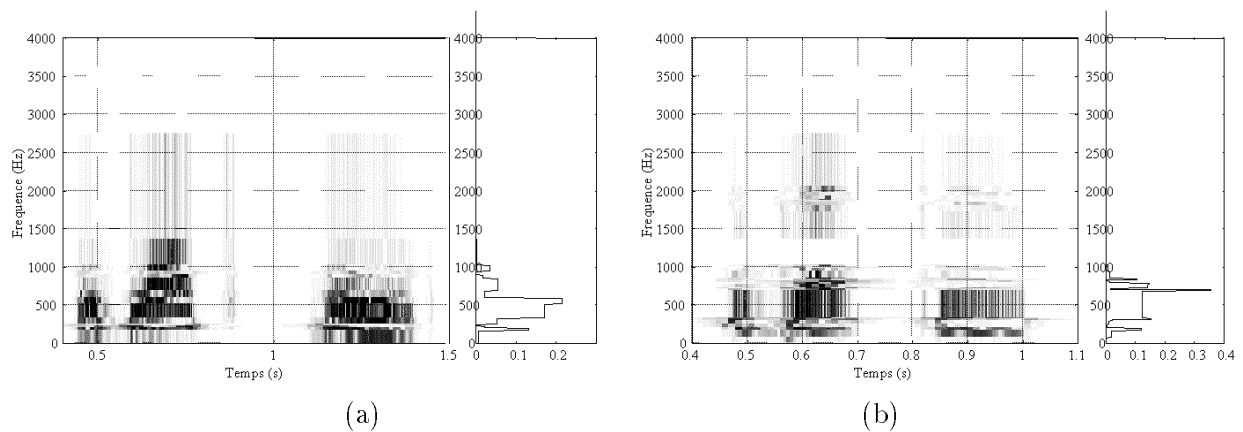


FIG. 4.31 – Décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer du signal "nation wide" sur 9 échelles. Représentation TF et distribution marginale fréquentielle: (a) non intégré (b) intégré

placé sur le premier mot, ce maximum d'énergie est situé dans la bande $[200, 500]$ correspondant à $\langle na \rangle$.

Cette application nous montre encore une fois que les deux approches, temporelle et fréquentielle, sont complémentaires et que lorsque l'une des deux est mise en échec l'autre la "remplace". Cette simple étude sur l'application des ondelettes dans des problèmes de détection d'accent ouvre de nombreuses opportunités de collaboration avec les chercheurs en phonétique sur des problèmes plus complexes.

4.4.4.3 Application à l'EEG

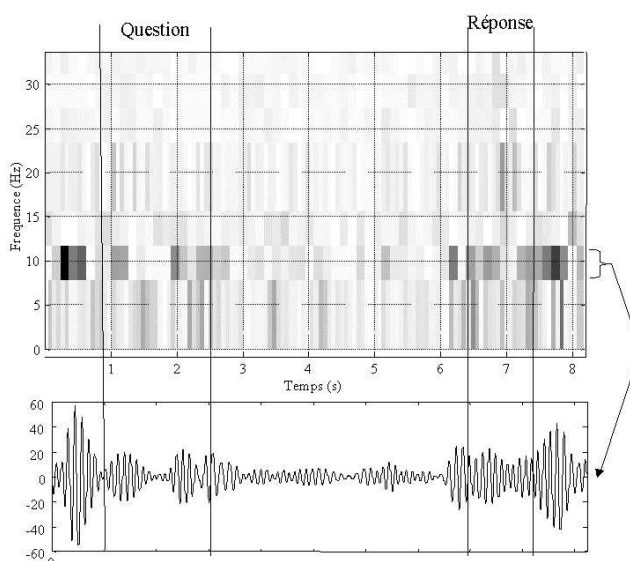


FIG. 4.32 – Représentation TF associée à la décomposition en paquet d'ondelettes de Meyer du signal EEG (voie 17, zone 2) dans une zone "question-réponse" et distribution temporelle des coefficients associés à la bande comprenant 10 Hz

Nous appliquons notre algorithme de partition sur les enregistrements EEG présentés dans le chapitre 2. A partir de la représentation TF associée à la meilleure base, on va étudier l'évolution des fréquences durant les différentes phases du protocole d'enregistrement des signaux (repos, question, réflexion, réponse) [22].

Comme nous l'avons vu avec l'algorithme de partition temporelle, le signal EEG ne se modélise pas forcément par des zones stationnaires. En effet, l'activité n'est à aucun moment strictement constante et subit en continu des fluctuations. Toutefois, certaines bandes de fréquences contiennent des composantes qui ont un comportement homogène sur des intervalles temporels. On pourrait assimiler le signal EEG à une somme de composantes localement stationnaires, concentrées dans certaines bandes fréquentielles, à laquelle s'ajoutent des composantes non stationnaires. Dans ce cas, l'algorithme de segmentation temporelle est souvent mis en échec car il ne peut pas extraire un intervalle temporel pour lequel le comportement du signal reste homogène (cf chapitre 3). Notre découpage fréquentiel peut lui sélectionner des bandes correspondant à un comportement globalement homogène du signal. C'est pourquoi l'approche par les paquets d'ondelettes de Meyer a obtenu des résultats très encourageants sur l'EEG. Mais, puisque le signal ne se modélise pas parfaitement par des composantes localement stationnaires et distinctes temporellement les unes des autres, nous

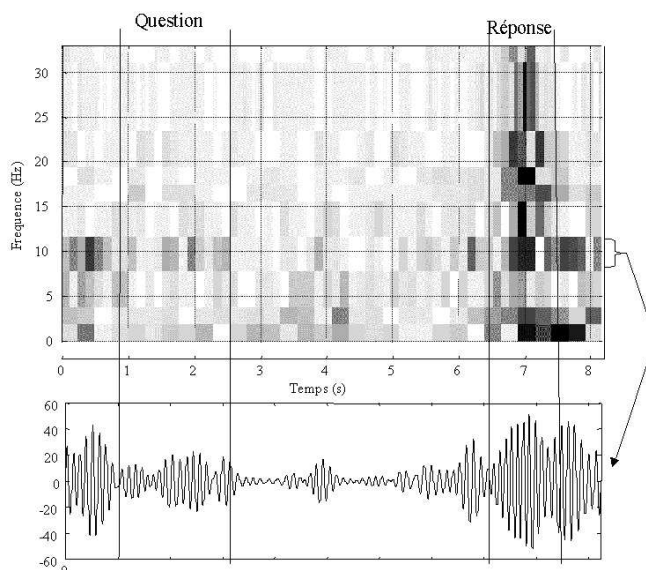


FIG. 4.33 – Représentation TF associée à la décomposition en paquet d'ondelettes de Meyer du signal EEG (voie 9, zone 2) dans une zone "question-réponse" et distribution temporelle des coefficients associés à la bande comprenant 10 Hz

avons dû accepter un seuil de recouvrement élevé (égal à 0.4) afin d'obtenir des représentations satisfaisantes.

Nous avons étudié localement le signal autour des phases de réflexion, à partir des repères fournis par les maxima d'ondelettes, méthode introduite au chapitre 2. Nous présentons sur la figure 4.32 le découpage fréquentiel du signal EEG enregistré sur la voie 17 (cf chapitre 2) autour d'une zone "question-réponse". On constate qu'un intervalle fréquentiel encadrant 10 Hz a été sélectionné. Or comme nous l'avons précisé, l'étude réalisée sur l'EEG se concentre plus particulièrement sur le signal α qui a une fréquence moyenne d'environ 9 Hz, nous étudions la courbe correspondant à l'évolution des coefficients associés à cette fenêtre fréquentielle. A partir de cette distribution nous constatons que de l'énergie est présente d'une façon significative jusqu'au début de la réflexion, tout en ayant diminué à l'amorce de la question. Ensuite le signal est d'amplitude faible durant la réflexion. Enfin, l'énergie commence à réapparaître au moment de la réponse pour ensuite se renforcer une fois le cycle terminé. Avec cette distribution des coefficients, nous illustrons parfaitement le phénomène de désynchronisation des circuits neuronaux corticaux, avec une précision accrue par rapport à la représentation obtenue par découpage temporel (figure 3.33).

Nous présentons sur les figures 4.33 et 4.34 le découpage fréquentiel du signal EEG enregistré sur la voie 9 autour de deux zones "question-réponse". Sur la distribution représentée figure 4.33, on remarque que l'énergie présente dans la bande incluant 10 Hz a un comportement similaire à l'enregistrement précédent. Toutefois, la "reprise" est plus marquée dès la fin de la réflexion et le début de la réponse. Le signal de la figure 4.34 présente, lui, un comportement différent. Comme les deux autres, l'énergie présente dans la bande comprenant 10 Hz décroît bien durant la question mais d'une façon plus lente, et surtout elle réapparaît durant la réflexion. Ensuite, elle augmente d'une façon importante au début de la réponse. Ce signal met en évidence un autre type de comportement des circuits neuronaux. Une étude plus approfondie sur un plus grand panel d'enregistrements et en collaboration avec des médecins est nécessaire pour émettre les conclusions "biologiques" qui

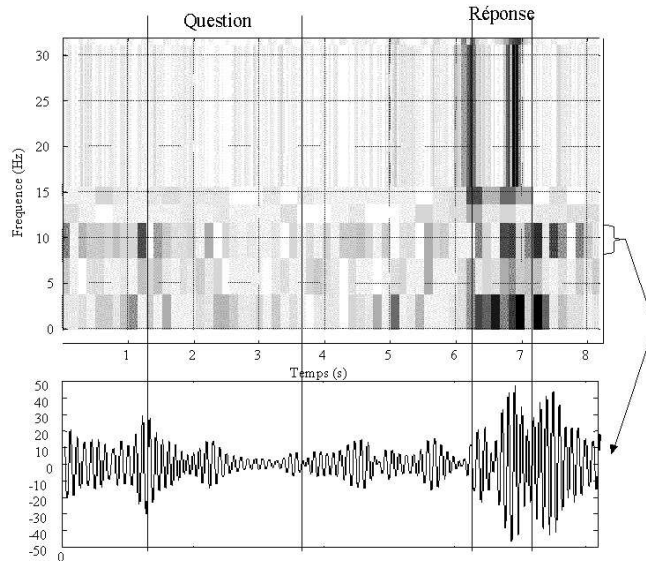


FIG. 4.34 – Représentation TF associée à la décomposition en paquet d'ondelettes de Meyer du signal EEG (voie 9, zone 3) dans une zone "question-réponse" et distribution temporelle des coefficients associés à la bande comprenant 10 Hz

s'imposent. Mais avec ces trois analyses, nous mettons en évidence la potentialité de la méthodologie basée sur les paquets d'ondelettes de Meyer dans l'interprétation des signaux EEG.

Ces différents exemples (signaux de tests, vocaux et EEG) ont montré, à partir d'un exemple simple d'algorithme de recherche de meilleure base, la potentialité de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer pour des problèmes d'analyse de signaux. L'utilisation d'un découpage par fenêtre dans le plan fréquentiel permet d'obtenir une représentation dans laquelle chaque élément ayant un support fréquentiel borné n'apparaît que sur une seule projection. La généralisation des principes de calcul de Kolaczyk permet de définir un algorithme en paquets d'ondelettes de Meyer ayant une complexité algorithmique raisonnable et sensiblement identique à celle des paquets d'ondelettes classiques. Notons que les paquets d'ondelettes de Meyer ont obtenu des résultats encourageants pour l'étude sur les signaux de radiocommunications (travail réalisé par X. Doussain dans le cadre d'un DESS). Nous allons étendre maintenant cette décomposition à la dimension 2.

4.5 Extension à l'image des décompositions de Meyer

4.5.1 Ondelettes de Meyer 2D

Pour la dimension 2, Kolaczyk [57] a créé un algorithme de transformée-reconstruction en ondelettes de Meyer basé sur le même principe que les extensions au 2D des bases associées à des filtres à support temporel fini, comme la base de Daubechies. Dans $L^2(\mathfrak{R}^2)$ la base orthonormée de Meyer est composée de toutes les translations et dilatations dyadiques des trois fonctions de base $\zeta(x)\psi(y)$, $\zeta(y)\psi(x)$ et $\psi(x)\psi(y)$, où ζ et ψ sont les fonctions père et mère de la décomposition de Meyer 1D. Du fait du caractère séparable de cette base et de la nature de l'algorithme de décomposition qui s'applique sur un vecteur, il est facile de créer un algorithme pour la dimension 2 à partir des méthodes de calcul proposées dans le cas 1D.

Dans la décomposition en ondelettes de Meyer 2D, l'algorithme applique la projection 1D, telle

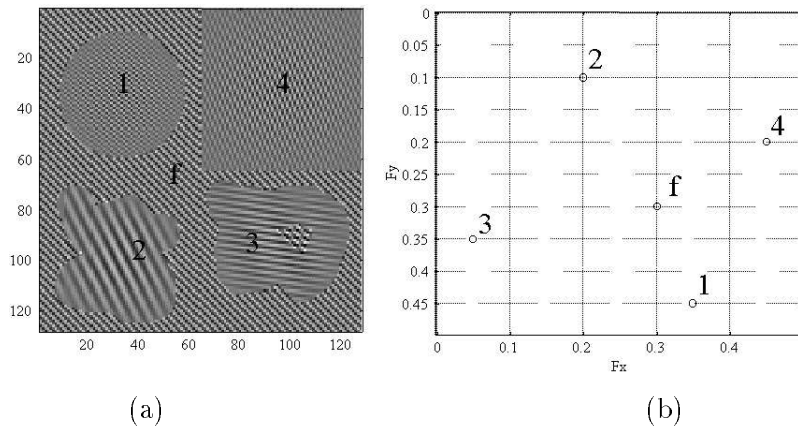


FIG. 4.35 – Construction d'une image de test à partir de 5 atomes TF 2D: (a) Image de test (b) Position dans le plan fréquentiel 2D des différents atomes

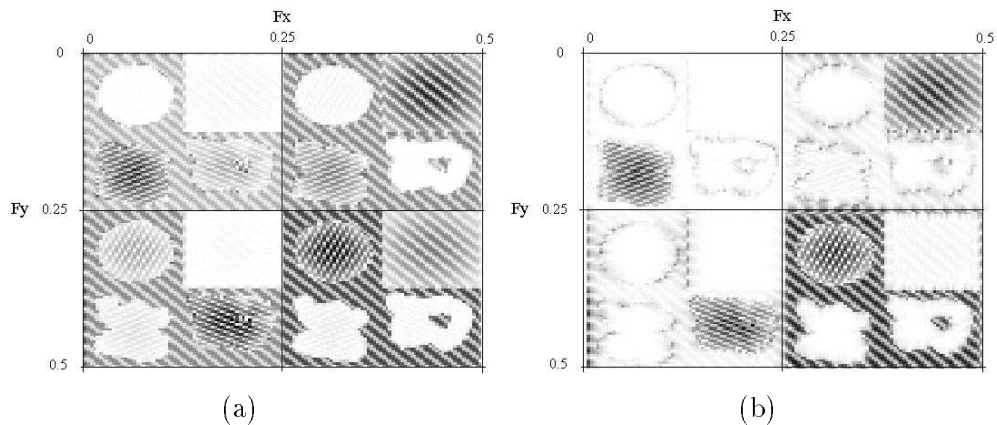


FIG. 4.36 – Décomposition sur une échelle d'une image de test de 5 atomes TF 2D: (a) Ondelettes de Daubechies (b) Ondelettes de Meyer

qu'elle est définie dans la première partie de ce chapitre, avec une fenêtre adaptée à l'échelle sur chaque ligne de l'image originale, puis applique la projection 1D appropriée sur chaque colonne de la matrice ainsi calculée. L'algorithme de reconstruction utilise ce même principe, à savoir traitement des lignes et des colonnes avec la méthodologie 1D.

Afin d'illustrer la décomposition en ondelettes de Meyer 2D, nous construisons une image test composée de 5 atomes TF 2D correspondant à des couples de fréquences (ξ_x, ξ_y) précis et à des positions dans l'espace indépendantes les unes des autres. Nous indiquons sur la figure 4.35 cette image composée de 5 atomes TF 2D ainsi que les différentes coordonnées fréquentielles des composantes.

Comme pour le cas monodimensionnel, l'utilisation d'un fenêtrage dans le domaine fréquentiel 2D permet une meilleure séparation fréquentielle que l'utilisation de filtres à support temporel fini. Pour preuve, nous décomposons l'image de test sur une échelle (les échelles suivantes présentent des résultats similaires) avec les ondelettes de Daubechies et les ondelettes de Meyer. Le résultat est indiqué sur la figure 4.36.

On constate, avec les ondelettes de Daubechies, que des atomes sont dans des bandes de fréquence qui ne correspondent pas. Par exemple, le fond de l'image qui a des coordonnées fréquentielles égales à $(0.3, 0.3)$ se distribue dans toutes les bandes, car sa position fréquentielle est proche des points

de coupure. De même, l'atome 3 de coordonnées $(0.35, 0.05)$ a son énergie dispersée dans le bloc $[0, 0.25] \times [0.25, 0.5]$ mais aussi $[0, 0.25] \times [0, 0.25]$. Dans la décomposition en ondelettes de Meyer chaque atome se trouve entièrement localisé dans le bloc fréquentiel correspondant. Il apparaît seulement quelques points parasites aux frontières des différents atomes dus aux discontinuités créées par le changement de modèle.

4.5.2 Rappel sur les paquets d'ondelettes 2D

Comme pour la décomposition en ondelettes 2D, nous pouvons construire une base de paquets d'ondelettes 2D dans $L^2(\mathfrak{R}^2)$ où chaque élément de base est le produit séparable des fonctions de paquets d'ondelettes 1D

$$\psi_{j,j'}^l(x, y) = \psi_j^l(x) \psi_{j'}^l(y)$$

Une base de paquets d'ondelettes 2D divise le plan de Fourier bidimensionnel en régions carrées de différentes tailles. Dans le cas monodimensionnel, nous avons un arbre binaire associé à la base de paquets d'ondelettes, dans le cas bidimensionnel nous avons un arbre "quad-tree" composé d'espaces séparables qui sont divisés en quatre sous-espaces orthogonaux. Nous retrouvons l'arrangement introduit dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Malvar 2D. Chaque noeud de ce quad-tree est indicé par sa profondeur l ainsi que par deux indices $0 \leq j < 2^l$ et $0 \leq j' < 2^l$. Le noeud (l, j, j') correspond à un espace séparable $W_{j,j'}^l = W_j^l \otimes W_{j'}^l$. On prouve qu'une base orthonormée de $W_{j,j'}^l$ est obtenue avec le produit séparé des bases de paquets d'ondelettes 1D de W_j^l et $W_{j'}^l$: $\left\{ \psi_j^l(x - 2^l n) \psi_{j'}^l(y - 2^l m) \right\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ [68].

Comme pour le cas monodimensionnel, on peut montrer que $W_{j,j'}^l$ est la somme directe de ses quatre sous-espaces orthogonaux (les quatre sous-espaces localisés aux quatre noeuds fils de (l, j, j')) :

$$W_{j,j'}^l = W_{2j,2j'}^{l+1} \oplus W_{2j+1,2j'}^{l+1} \oplus W_{2j,2j'+1}^{l+1} \oplus W_{2j+1,2j'+1}^{l+1}$$

Nous appelons quad-tree admissible tout quad-tree dont les noeuds ont 0 ou 4 fils. Soit A l'ensemble des indices $\{j_\gamma, j'_\gamma, l_\gamma\}_\gamma$ des noeuds d'un arbre quad-tree admissible, alors nous avons $W_{0,0}^0 = \bigoplus_{(j,j',l) \in A} W_{j,j'}^l$.

A partir des propriétés de séparabilité des fonctions $\psi_{j,j'}^l(x, y)$, on peut définir ces fonctions par récurrence selon :

$$\begin{aligned} \psi_{0,0}^0 &\triangleq \zeta, \\ \psi_{2j,2j'}^{l+1} &\triangleq h x_j^l h y_{j'}^l \psi_{j,j'}^l, \\ \psi_{2j+1,2j'}^{l+1} &\triangleq g x_j^l h y_{j'}^l \psi_{j,j'}^l, \\ \psi_{2j,2j'+1}^{l+1} &\triangleq h x_j^l g y_{j'}^l \psi_{j,j'}^l, \\ \psi_{2j+1,2j'+1}^{l+1} &\triangleq g x_j^l g y_{j'}^l \psi_{j,j'}^l, \end{aligned}$$

avec $h a_j^l$ application du filtre h_j^l , tel qu'il est défini dans le paragraphe 4.3.1 selon a et $g a_j^l$ application du filtre g_j^l selon a .

A partir de cette définition, nous constatons que l'extension au cas 2D d'une décomposition en paquets d'ondelettes consiste simplement à l'appliquer selon les lignes et les colonnes les filtres

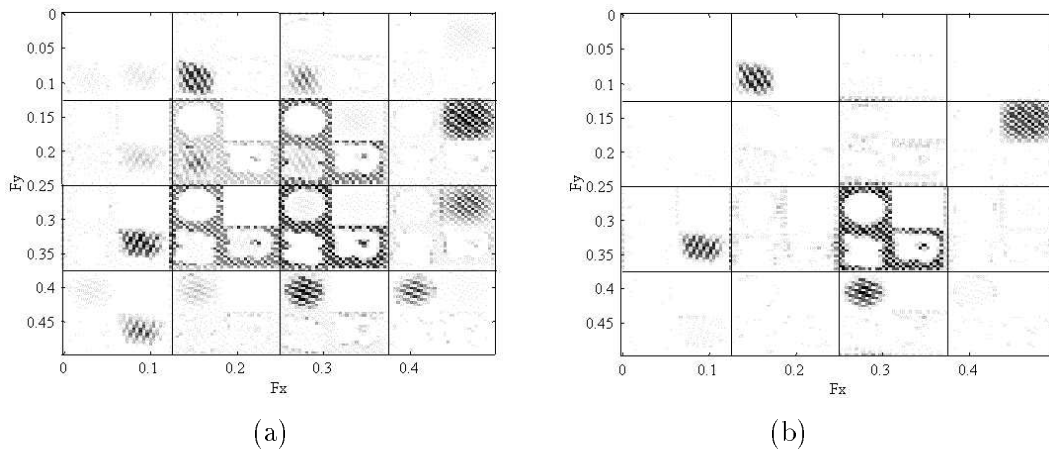


FIG. 4.37 – Projection d'une image de test de 5 atomes TF 2D sur la seconde échelle de paquets d'ondelettes: (a) Ondelettes de Daubechies (b) Ondelettes de Meyer

(h_j^l, g_j^l) . Pour les filtres à support temporel fini, l'algorithme repose sur un banc de filtres 2D. Dans le cadre des paquets d'ondelettes de Meyer, la méthodologie s'inspire de la décomposition en ondelettes de Malvar 2D.

4.5.3 Applications des paquets d'ondelettes de Meyer 2D

Puisque la base de paquets d'ondelettes 2D est le produit séparable des fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer 1D, nous utilisons l'algorithme développé dans le cadre 1D sur chaque ligne et chaque colonne de l'image. La méthode de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer 2D se résume à (si l'on note *fwt_paquet_meyer1D* la décomposition d'un vecteur en paquet d'ondelettes de Meyer) [18]:

Pour l variant de 1 à L ,

res_inter ← application de *fwt_paquet_meyer1D* l'échelle l sur chaque ligne de l'image source
 W^l ← application de *fwt_paquet_meyer1D* l'échelle l sur chaque colonne de *res_inter*.

Après sélection de la meilleure base de représentation, un algorithme de reconstruction 2D peut être appliqué utilisant un principe similaire à celui de décomposition, c'est-à-dire reposant sur la méthode de reconstruction 1D utilisée selon les lignes et les colonnes.

Encore une fois, le découpage dans le domaine fréquentiel permet une meilleure séparation fréquentielle qu'avec des filtres à support temporel fini. Pour exemple, nous projetons l'image de test, introduit précédemment, sur la seconde échelle de paquets d'ondelettes (les échelles suivantes présentent des résultats similaires) avec les ondelettes de Daubechies et les ondelettes de Meyer. Le résultat est présenté sur la figure 4.37.

On constate qu'avec les paquets d'ondelettes de Daubechies, l'énergie des atomes 2D se disperse dans différentes bandes de fréquences dont certaines ne correspondent pas aux coordonnées de l'atome. Pour résumer, tous les atomes apparaissent au moins sur deux bandes fréquentielles (bandes voisines des coordonnées de l'atome). Avec la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer chaque atome se trouve entièrement localisé dans le bloc fréquentiel correspondant. Seuls quelques

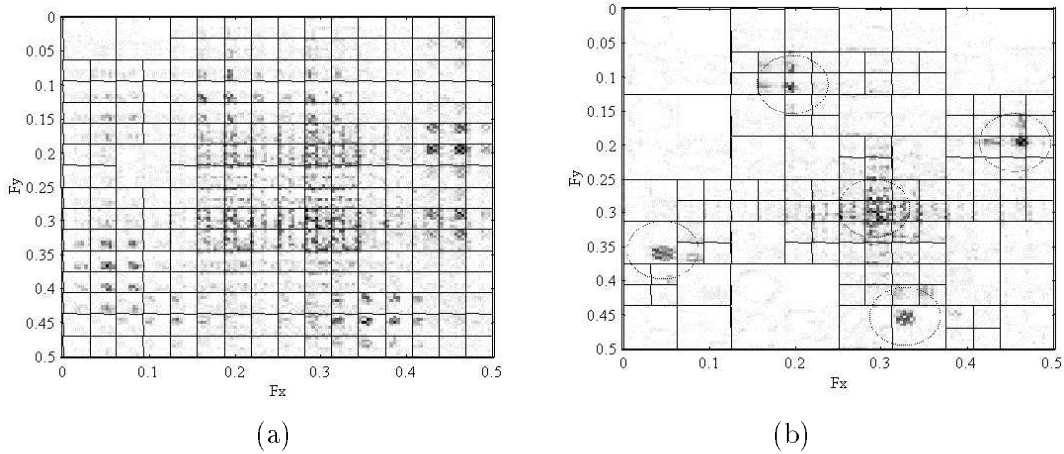


FIG. 4.38 – Projection d'une image de test de 5 atomes TF 2D sur 4 échelles de paquets d'ondelettes: sélection de la meilleure base (a) Ondelettes de Daubechies (b) Ondelettes de Meyer

points parasites sont présents aux frontières des différents atomes dus aux discontinuités créées par la rupture de modèle, et d'autres liés au recouvrement des fenêtres fréquentielles.

Si nous sélectionnons la meilleure base selon un critère entropique avec l'algorithme Best-Basis 2D, une représentation "optimale" TF 2D peut être obtenue. Nous présentons sur la figure 4.38 les deux représentations extraites à partir des paquets d'ondelettes de Daubechies et de Meyer. On constate encore une fois une dispersion de l'énergie des atomes entre plusieurs bandes de fréquences dans le cas des ondelettes de Daubechies. En revanche la représentation associée aux ondelettes de Meyer extrait d'une façon plus précise les différents atomes présents dans le signal (symbolisés par des cercles) avec une concentration de l'énergie à la position théorique fréquentielle des atomes. Cet exemple illustre la supériorité des paquets d'ondelettes de Meyer 2D pour une problématique d'analyse ou de séparation des composants d'une image. Notons enfin qu'en raison de la dispersion de l'énergie, la segmentation fréquentielle associée aux ondelettes de Daubechies est plus importante. Il y a un phénomène de sur-segmentation, c'est-à-dire une sélection de fenêtres très fines qui, connaissant les atomes présents dans l'image, n'apportent pas d'information. La segmentation fréquentielle sélectionnée avec la décompositions de Meyer est moins importante et plus adaptée. Toutefois, elle reste supérieure à la segmentation optimale qui permettrait de séparer chacune des composantes sans sur-segmentation. Nous allons donc adapter à la dimension deux, la fonction de coût basée sur le recouvrement des enveloppes qui permet de sélectionner la base séparant au mieux les composantes.

4.5.4 Algorithme de séparation 2D

Comme dans le cas monodimensionnel, nous introduisons une fonction $ET^2(\cdot)$ qui symbolise la distribution spatiale 2D de l'énergie des coefficients d'ondelettes. La sélection de la meilleure représentation va donc s'effectuer grâce à une mesure notée Φ^2 définie par :

$$\left\{ \Phi^2 \left(d_{2j+a_1, 2j'+a'_1}^l, d_{2j+a_2, 2j'+a'_2}^l \right) = ET^2(d_{2j+a_1, 2j'+a'_1}^l) \cap_{ET}^2 ET^2(d_{2j+a_2, 2j'+a'_2}^l) \right\}$$

avec $(a_{1,2} = 0, 1; a'_{1,2} = 0, 1)$ & $((a_1, a'_1) \neq (a_2, a'_2))$ et \cap_{ET}^2 une mesure de ressemblance entre 2 distributions spatiales 2D.

Notons que pour chaque échelle, un bloc fréquentiel se divise en quatre sous-fenêtres ce qui explique les notations $(a_{1,2} = 0, 1; a'_{1,2} = 0, 1) \& ((a_1, a'_1) \neq (a_2, a'_2))$. La sélection va être plus complexe que dans le cas 1D, car nous avons, pour chaque ensemble de noeuds fils, six mesures d'intersection (toutes les combinaisons possibles entre 4 éléments). Nous reviendrons ultérieurement sur la procédure de sélection prenant en compte la multiplicité des mesures d'intersection.

4.5.4.1 Evaluation de la distribution de l'énergie dans le domaine spatial 2D : fonction ET^2

Il faut définir une fonction 2D qui permet de modéliser l'évolution spatiale de l'énergie du signal pour une certaine bande de fréquences. L'enveloppe nous semble à nouveau un choix judicieux et nous reprenons la méthode proposée par Laine d'estimation de l'enveloppe basée sur les passages par 0 du signal [59]. Toutefois, son extension à la dimension deux nécessite certains choix. En effet, l'estimation des passages par 0 s'effectue sur un vecteur, et sa généralisation à une matrice doit être précisée. Laine *et al.* proposent d'appliquer cette méthode, soit selon les lignes, soit selon les colonnes de la matrice, la direction étant fixée par la bande de fréquence étudiée. Mais cette généralisation ne nous a pas satisfait durant nos expérimentations, car l'enveloppe a tendance à s'étendre dans la direction utilisée pour l'estimation. De plus, aucune suggestion n'est faite par Laine quant à l'approximation de l'enveloppe de la composante passe-bas. Nous proposons une nouvelle technique d'estimation de l'enveloppe 2D qui ne privilégie aucune direction. Nous calculons tout d'abord une enveloppe à partir de l'algorithme 1D appliqué sur chaque ligne de la matrice, puis nous calculons une seconde enveloppe selon les colonnes. Enfin l'enveloppe finale est définie comme la courbe passant par les minima de ces deux enveloppes.

Si nous notons $(^{lig} z_i^{(l,j,j')})_{i \in Z}$ l'ensemble des points correspondant à un passage par 0 du signal 2D $d_{j,j'}^l$ étudié selon les lignes, et $(^{col} z_i^{(l,j,j')})_{i \in Z}$ l'ensemble des points correspondant à un passage par 0 du signal 2D $d_{j,j'}^l$ étudié selon les colonnes notre fonction $ET^2(d_{j,j'}^l)$ est alors définie par

$$ET^2(d_{j,j'}^l)[x, y] = \min \left(\max_{t_x \in [^{lig} z_{i-1}, ^{lig} z_i]} |d_{j,j'}^l[t_x, y]|, \max_{t_y \in [^{col} z_{i-1}, ^{col} z_i]} |d_{j,j'}^l[x, t_y]| \right),$$

avec $[x, y] \in [^{lig} z_{i-1}, ^{lig} z_i] \times [^{col} z_{i-1}, ^{col} z_i]$.

Nous présentons sur la figure 4.39 un exemple d'estimation d'enveloppe 2D sur l'une des projections en ondelettes de Meyer de l'image Test2d. Nous sommes dans un plan correspondant à l'application d'un filtre passe-haut selon les colonnes et d'un filtre passe-bas selon les lignes. Suivant Laine, l'estimation de l'enveloppe s'effectue alors par l'utilisation de l'algorithme 1D selon les colonnes. Le résultat est indiqué sur la figure 4.39b. On constate un étirement des formes selon les colonnes qui rend imprécis la localisation des atomes. La figure 4.39c présente l'enveloppe estimée selon notre méthode. Elle respecte plus précisément les formes et a tendance à être plus restrictive, ce qui est tout à fait adapté au but recherché, à savoir une mesure d'intersection d'enveloppes.

Il nous faut maintenant introduire la fonction de coût 2D qui va évaluer le degré de ressemblance entre deux enveloppes calculées sur deux projections différentes.

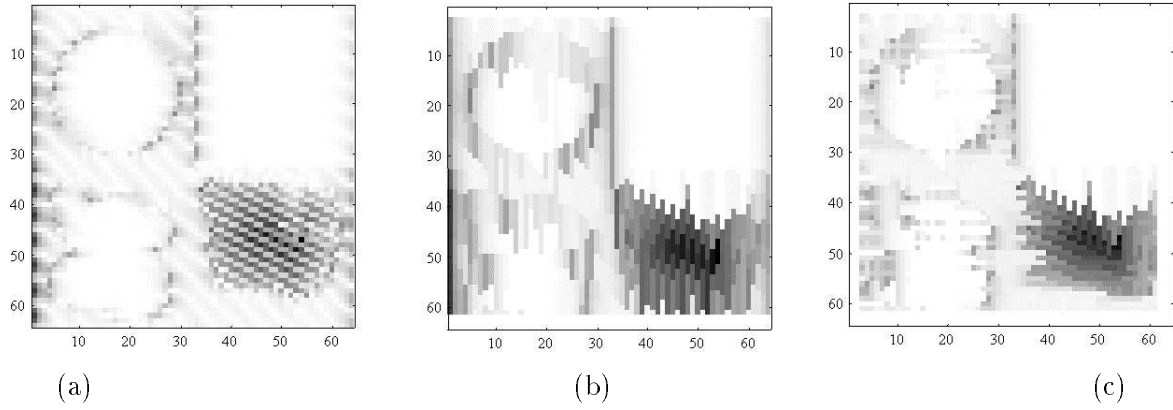


FIG. 4.39 – Estimation d'une enveloppe 2D (a) Distribution de l'énergie de la décomposition (b) Estimation selon Lignes (c) Estimation sans direction privilégiée

4.5.4.2 Fonction de coût 2D : $\Phi^2(\cdot)$

Afin de mesurer le degré de ressemblance entre deux enveloppes, nous calculons la courbe correspondant à la "quantité" d'énergie commune à chaque instant aux deux espaces fréquentiels. Pour cela, nous reprenons les mêmes définitions que pour le signal, simplement étendues à la dimension 2 :

$$\Phi^2(d_{j_1, j'_1}^l, d_{j_2, j'_2}^l) = \frac{d_{j_1, j'_1}^l \cap_E^2 d_{j_2, j'_2}^l}{d_{j_1, j'_1}^l \cup_E^2 d_{j_2, j'_2}^l},$$

avec

$$d_{j_1, j'_1}^l \cap_E^2 d_{j_2, j'_2}^l = \sum_{x=0}^{N/2^l-1} \sum_{y=0}^{M/2^l-1} \min(d_{j_1, j'_1}^l[x, y], d_{j_2, j'_2}^l[x, y]),$$

et,

$$d_{j_1, j'_1}^l \cup_E^2 d_{j_2, j'_2}^l = \sum_{x=0}^{N/2^l-1} \sum_{y=0}^{M/2^l-1} \max(d_{j_1, j'_1}^l[x, y], d_{j_2, j'_2}^l[x, y]).$$

4.5.4.3 Choix de la meilleure représentation 2D

Nous avons défini une mesure 2D qui permet d'évaluer la qualité de séparation des composants d'une image par division de l'espace fréquentiel. Nous allons utiliser cette fonction de coût avec la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer afin de définir un algorithme d'extraction des différentes textures d'une image.

Au préalable, nous étudions la répartition de l'énergie entre les quatre sous-fenêtres résultant d'une division. Si l'énergie du père se diffuse très faiblement dans l'une des fenêtres, on considère que cette fenêtre ne contient pas d'information significative et elle ne sera pas étudiée, ainsi que toutes les sous fenêtres associées. Ce "seuillage" est symbolisé par le paramètre λ_E^2 .

Ensuite nous sélectionnons les partitions fréquentielles significatives. On débute à l'échelle la plus fine (correspondant aux fenêtres fréquentielles les plus petites), et pour chacun des groupes de 4 fenêtres "fils", nous mesurons, à l'aide de la fonction Φ^2 , l'indice de séparation des différentes composantes du signal. Puis nous comparons ces différentes mesures à une valeur seuil λ_{ET}^2 symbolisant

les divisions "significatives". Puisque la comparaison n'est pas binaire, c'est-à-dire qu'elle n'est pas unique mais, pour une division, nous avons six comparaisons, il faut fixer un critère décidant si la divisions en quatre sous-fenêtres est significative. Nous proposons pour cela la condition suivante qui nous semble la plus adaptée : une coupure est considérée comme significative si elle permet de séparer deux textures sur au minimum deux sous-fenêtres "fils".

L'algorithme de recherche de la meilleure base 2D va donc se définir de la façon suivante :

- Soit $A_{j,j'}^l$ un boolean indiquant si la coupure correspondant au noeud d'indice (j, j', l) est slectionne; soit $E_{j,j'}^l$ le cot associ; soit Θ la condition $(a_{1,2} = 0, 1; a'_{1,2} = 0, 1)$ $((a_1, a'_1) \neq (a_2, a'_2))$

- Pour l variant de $L - 2$ 0,

Pour j variant de 0 $2^l - 1$, Pour j' variant de 0 $2^l - 1$

Si $\min_{\Theta} \left(\Phi^2 \left(d_{2j+a_1, 2j'+a'_1}^l, d_{2j+a_2, 2j'+a'_2}^l \right) \right) < \lambda_{ET}^2$ alors la partition de $B_{j,j'}^l$ en

$$\begin{bmatrix} B_{2j, 2j'}^{l+1} & B_{2j, 2j'+1}^{l+1} \\ B_{2j+1, 2j'}^{l+1} & B_{2j+1, 2j'+1}^{l+1} \end{bmatrix}$$

est slectionne: $A_{j,j'}^l = 1$ et $E_{j,j'}^{l-1} = \min_{\Theta} \left(\Phi^2 \left(d_{2j+a_1, 2j'+a'_1}^l, d_{2j+a_2, 2j'+a'_2}^l \right) \right)$,

sinon la partition est rejete: $A_{j,j'}^l = 0$

Notre algorithme nécessite la définition de deux seuils : λ_{ET}^2 et λ_E^2 . Les intervalles de définition de ces deux paramètres sont identiques au cas monodimensionnel. Toutefois, le paramètre λ_{ET}^2 peut être plus strict car la distinction spatiale des textures est plus marquée que dans le cas 1D.

4.5.4.4 Illustration

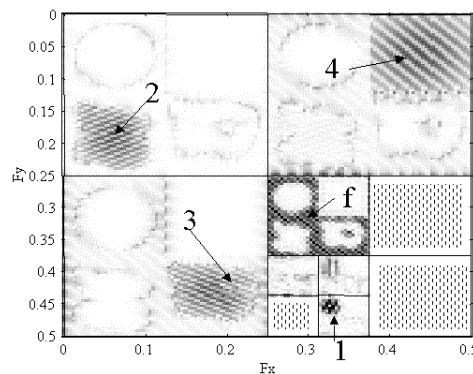


FIG. 4.40 – Décomposition en paquet d'ondelettes de Meyer de l'image test2d. Meilleure base sélectionnée par le recouvrement des enveloppes (les zones hachurées correspondent à des blocs fréquentiels rejetés)

Nous avons appliqué notre algorithme sur l'image de test définie au début de ce paragraphe. Nous constatons sur la figure 4.40 que notre algorithme sélectionne correctement les blocs fréquentiels qui permettent de séparer les différentes textures de l'image. Chacun des composants est présent dans

une fenêtre et une seule et chaque fenêtre n'a qu'un seul composant. Si l'on compare cette partition avec celle obtenue pour le coût entropique, nous constatons que cette partition est plus adaptée à l'analyse de l'image : elle est minimale et optimale. De plus les bandes de fréquences ne contenant pas d'information significative sont rejetées.

Toutefois, dans le domaine 2D, la sélection d'une représentation TF optimale n'est pas l'application la plus recherchée. En revanche elle s'inscrit parfaitement dans un algorithme de segmentation. Nous présentons dans le paragraphe suivant une méthode de classification utilisant notre algorithme de séparation.

4.6 Classification non supervisée: vers la segmentation de texture

Nous avons proposé une procédure de décomposition qui permet de projeter un signal 1D ou 2D dans un espace de représentation le plus adapté possible pour la séparation des différents composants. Une étape s'ajoute logiquement à cette projection "adaptative" : un algorithme de segmentation. Nous proposons dans la suite de ce paragraphe une segmentation basée sur la technique des centres mobiles permettant de regrouper les différents points du signal selon un critère de similarité.

4.6.1 Méthode de classification : nuées dynamiques

Nous faisons un bref rappel de la technique des nuées dynamiques couramment utilisée dans le domaine de la segmentation d'images [59], [25], de la reconnaissance de formes [42] ou de l'analyse de données. La méthode des nuées dynamiques consiste à calculer la partition optimale de l'ensemble des individus en N_c sous-ensembles, chaque sous-ensemble étant représenté par un "noyau". On note :

- Ω l'ensemble des points à classer,
- $P = (P_1, P_2 \dots P_{N_c})$ une partition de Ω en N_c classes,
- $L = (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{N_c})$ un ensemble de N_c noyaux, où λ_i est le noyau de la classe P_i ,
- $C(P, L)$ un critère mesurant l'adéquation entre une partition P et l'ensemble des noyaux L .

On cherche la partition P^* et la représentation L^* associée qui optimisent leurs adéquations au sens du critère C . Nous utilisons l'algorithme des nuées dynamiques avec des noyaux définis comme les centres d'inertie des différentes classes. La qualité d'un couple partition-centre $C(P, L)$ est mesurée par la somme des inerties des classes par rapport à leur centre :

$$C(P, L) = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{i \in P_k} d^2(i, \lambda_k).$$

Différentes mesures de distances peuvent être utilisées, nous avons choisi d'utiliser la distance euclidienne. L'algorithme se décline alors de la façon suivante :

***Tirage au hasard de N_c points de Ω qui forment les centres initiaux des N_c classes,
Tant que non convergence***

- ***Construction d'une nouvelle partition en affectant chaque point de Ω la classe dont il est le plus près du centre: $L \rightarrow P$,***

-
- *Les centres de gravit de la partition qui vient d'être calculé deviennent les nouveaux centres: $P \rightarrow L$.*
-

La convergence de cet algorithme est facilement justifiable [42].

Lors de la segmentation d'un signal ou d'une image, l'ensemble Ω est constitué d'une mesure ou d'un vecteur de mesures associé à chaque coordonnée t ou $[x, y]$. Après l'application de l'algorithme de nuées dynamiques, les échantillons $f[t]$ ou $f[x, y]$ sont groupés en classes constituant ainsi la partition. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment constituer l'ensemble Ω à partir de la représentation en paquets d'ondelettes de Meyer.

4.6.2 Constitution de l'ensemble Ω

Pour chaque échantillon du signal, nous allons construire un vecteur de mesures caractérisant le comportement du signal en ce point précis. A partir de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer, et après sélection de la meilleure base, nous avons une mesure "instantanée" du comportement fréquentiel du signal, pour des intervalles fréquentiels qui, par définition, sont discriminatoires. La mesure de l'énergie à chaque instant pour chaque bande fréquentielle sélectionnée va alors constituer nos vecteurs de mesures. Pour cela, nous utilisons la notion d'enveloppe introduite dans l'algorithme de meilleure base : le vecteur de mesures associé à une coordonnée précise est défini par les valeurs, en ce point, des enveloppes estimées sur les différentes projections sélectionnées. Nous notons :

- B^* l'ensemble des couples (l, j) correspondant à la meilleure base (dans le cas 2D les couples sont (l, j, j')),
- N_{B^*} le nombre de projections sélectionnées,
- v_t le vecteur de mesures caractérisant le comportement du signal au point t . Ce vecteur comprend N_{B^*} composantes notées $v_t^{(i)}$ avec $i = 1 \dots N_{B^*}$.

L'ensemble Ω est défini de la façon suivante :

$$\Omega = \{v_t\}_{t=0 \dots N-1} \text{ avec } v_t \in \mathfrak{R}^{N_{B^*}} \text{ tel } (v_t)_i = \left\{ ET(d_{j_i}^{l_i}) [t] \right\}_{i=1 \dots N_{B^*}} .$$

L'ensemble Ω^2 pour le cas 2D est construit de la même façon :

$$\Omega^2 = \{v_{xN+y}\}_{x=0 \dots N-1, y=0 \dots M-1} \text{ avec } v_{xN+y} \in \mathfrak{R}^{N_{B^*}} \text{ tel } (v_{xN+y})_i = \left\{ ET^2(d_{j_i, j'_i}^{l_i}) [x, y] \right\}_{i=1 \dots N_{B^*}} .$$

Toutefois, les différentes projections ne possèdent pas le même nombre de points. En effet, la projection d'un signal de dimension N à l'échelle l a $\frac{N}{2^l}$ coefficients. Nous devons donc extrapoler les points manquants afin de construire, pour chaque couple $(l, j) \in B^*$ un ensemble de N points. Pour cela, deux solutions sont proposées :

1. Interpolation par dilatation : puisque l'on peut considérer que l'énergie d'un coefficient de paquets d'ondelettes, à l'échelle l , se distribue majoritairement dans un intervalle temporel de taille 2^l points (cf bloc d'Heisenberg), nous construisons un vecteur de dimension N à partir du vecteur de dimension $\frac{N}{2^l}$ en affectant la valeur $ET(d_j^l) [t]$ aux points de coordonnées $2^l t + s$ avec $s = 0 \dots 2^l - 1$.

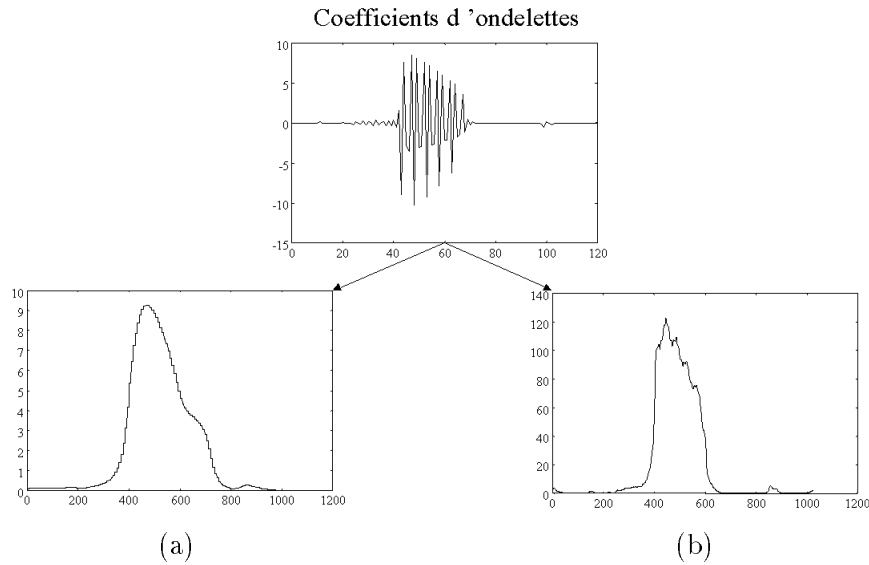


FIG. 4.41 – Estimation d'une enveloppe et interpolation à partir de coefficients d'ondelettes (a) Interpolation par dilatation (b) Interpolation multirésolution

2. Interpolation par "multirésolution" : nous utilisons le concept initial de représentation multi-échelles tel qu'il est défini dans le premier article de Mallat. Pour cela, à chaque échelle, indépendamment des autres, nous appliquons l'algorithme de reconstruction. Dans le cas des paquets d'ondelettes de Meyer 1D, cet ensemble, à l'échelle l pour le plan j , correspond à $\mathfrak{S}^{-1} \left(P_{l_j}^1 f_1 + i P_{l_j}^2 f_2 \right)$ avec P opérateur de reconstruction défini dans l'équation (4.22) et \mathfrak{S}^{-1} transformée de Fourier inverse.

En dimension 2, la procédure est identique. Nous indiquons sur la figure 4.41 le résultat de l'estimation de l'enveloppe interpolée à partir des coefficients d'ondelettes. Cet exemple correspond à l'un des atomes du signal "coif2", atome défini sur l'intervalle temporel $[400, 600]$. On constate que l'enveloppe obtenue par dilatation est plus régulière que la seconde estimation mais moins précise : elle dépasse largement la position 600. Cet exemple n'est pas illustré pour juger et choisir l'une ou l'autre méthode, mais simplement pour comprendre leurs différences. En effet, selon les applications, il nous a semblé plus opportun d'utiliser l'une ou l'autre méthode.

A ce stade, un ensemble de N vecteurs de taille N_B a été constitué. Toutefois l'information "position temporelle" n'est jamais intégrée dans les vecteurs v_t . La solution la plus simple serait d'ajouter une dimension aux vecteurs v_t avec comme $(N_B + 1)^{\text{ème}}$ composante la position t . Mais nous sommes alors confrontés à un problème de pondération des différentes composantes de v_t . En effet, cette nouvelle composante se distribue entre 0 et $N - 1$, alors que les mesures $ET(d_j^l)[t]$ sont en général inférieures à 1. La position est alors privilégiée lors de la classification et nous obtenons une partition égale à la division de l'axe temporel en intervalles de taille $\frac{N}{N_C}$. Il faut intégrer l'information "position" d'une autre façon. Nous proposons pour cela d'appliquer un filtre passe-bas sur l'enveloppe estimée pour deux raisons :

1. Les différentes enveloppes estimées par ET peuvent être perturbées par de petites oscillations.
2. Le filtrage introduit de la corrélation entre les mesures proches temporellement, ce qui nous permet d'intégrer l'information "position" dans le vecteur v_t .

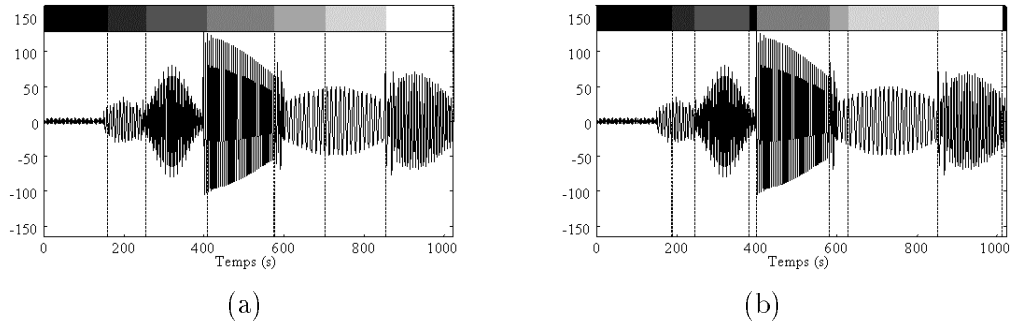


FIG. 4.42 – Segmentation du signal *coif2* composé de six atomes TF. Les couleurs indiquent les différentes classes. (a) Interpolation de l'enveloppe par dilatation (b) Interpolation de l'enveloppe par multirésolution

L'algorithme de segmentation va donc se définir suivant (nous le décrivons directement pour le cas 2D) :

- **D**composition de l'image s de taille $N \times M$ en paquets d'ondelettes de Meyer,
- Slection de la meilleure base B^* suivant la fonction de $\cot \Phi^2$,
- Pour i variant de 1 N_{B^*} ,

Estimation de l'enveloppe filtre et interpole selon l'une des deux mthodes proposes :

$$ET_{\text{filtre,interpole}}^2(d_{j_i, j_i'}^{l_i})$$

Pour n variant de 1 N ,

Pour m variant de 1 M ,

Affectation de la mesure la composante correspondante du vecteur v_{nN+m} :

$$v_{nN+m}^{(i)} = ET_{\text{filtre,interpole}}^2(d_{j_i, j_i'}^{l_i})(n, m)$$

- Application de l'algorithme de nues dynamiques sur l'ensemble $\{v_{nN+m}\}_{n=0\dots N-1, m=0\dots M-1}$.

4.6.3 Applications

Nous utilisons tout d'abord notre algorithme de segmentation sur le signal de test "coif2" construit à partir de six atomes TF. La meilleure base de paquets d'ondelettes sélectionnée a été présentée sur la figure 4.23b, où chacun des composants n'apparaît que sur un plan de projection avec toutefois une non-sélection du premier atome d'énergie négligeable. Le résultat de l'algorithme de segmentation appliqué dans cette base est présenté sur la figure 4.42.

Nous indiquons sur la figure 4.42 le résultat pour les deux méthodes d'interpolation (interpolation de l'enveloppe par dilatation ou multirésolution). Les deux résultats sont satisfaisants et possèdent chacun des avantages et des inconvénients :

- Sachant que les enveloppes interpolées par dilatation sont moins précises mais plus lisses, l'algorithme de segmentation est alors peu sensible aux zones transitoires durant lesquelles le

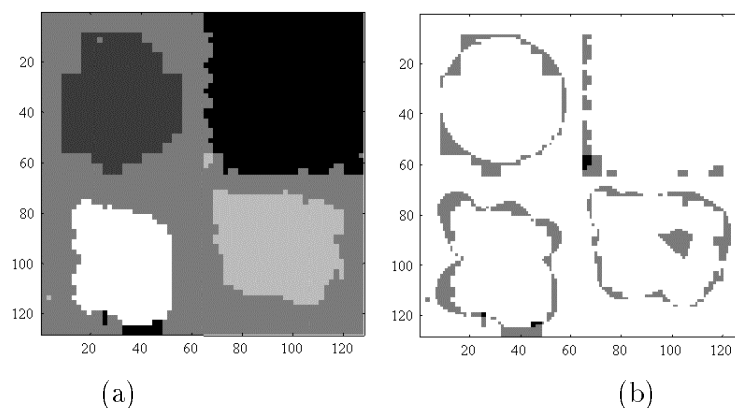


FIG. 4.43 – Segmentation de l'image *test2d* composé de cinq atomes TF2D (a) Image segmentée (b) Image erreur

signal a une faible énergie (autour des points 400, 600 et 1000). Ceci permet d'obtenir un seul point de coupure entre chaque atome. En revanche cette imprécision provoque une césure de l'atome défini sur l'intervalle $[600, 800]$. En effet, nous avons remarqué sur la figure 4.41a que l'enveloppe de l'atome défini sur $[400, 600]$, interpolée par dilatation, se prolongeait au-delà de 600, provoquant ainsi la création d'une nouvelle classe.

- Sachant que les enveloppes interpolées par multirésolution sont plus précises, l'algorithme est alors sensible aux zones transitoires ce qui provoque la création de classes dans ces zones transitoires. En revanche, chaque atome est correctement découpé.

Nous ne prolongeons pas plus l'étude de l'algorithme 1D pour nous intéresser plus particulièrement à son extension en dimension 2. C'est dans le cadre de la segmentation de textures que notre algorithme trouve pleinement sa place.

L'algorithme de segmentation a été appliqué sur l'image *Test2D* composée de 5 atomes TF 2D. La meilleure base de paquets d'ondelettes de Meyer sélectionnée a été présentée sur la figure 4.40. Après segmentation, nous obtenons la partition illustrée sur la figure 4.43a. Nous constatons que chaque atome est correctement détecté. Il est certain que les formes ne sont pas respectées exactement car les différentes textures sont définies avec des enveloppes gaussiennes, donc avec une forte réduction de l'information à l'approche des contours. Mais nous avons une détection des différents objets de l'image tout à fait satisfaisante. Nous indiquons sur l'image 4.43b les erreurs de classification associées à chaque forme. Comme nous venons de l'indiquer, les erreurs se situent à la périphérie des objets. Nous ne présentons pas le résultat de la segmentation basée sur l'interpolation de l'enveloppe par multirésolution, car il est sensiblement identique.

Cet exemple va nous servir de référence pour comprendre l'importance et l'influence de la fonction de coût ainsi que de l'ondelette utilisée. Nous indiquons sur la figure 4.44 le résultat de différentes segmentations utilisant soit un critère entropique avec la base de Meyer, soit un banc de filtres de Meyer Q -constant⁷, soit enfin une sélection de la meilleure base avec le critère Φ^2 mais associé aux ondelettes de Daubechies.

7. Un banc de filtres Q -constant signifie que l'on sélectionne à une échelle donnée toutes les projections, donc chaque bande de fréquences a une taille constante.

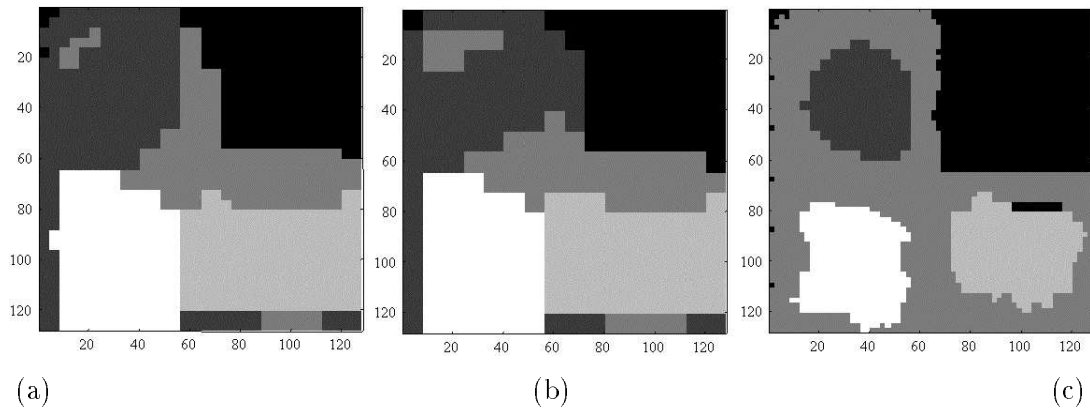


FIG. 4.44 – Segmentation de l'image test2d composé de cinq atomes TF2D (a) Image segmentée à partir de la meilleure base sélectionnée par le coût entropique (b) Image segmentée à partir de la base construite par un banc de filtres de Meyer Q -constant (c) Image segmentée à partir de la meilleure base de paquets d'ondelettes de Daubechies sélectionnées par l'indice de recouvrement des enveloppes

Afin de quantifier les erreurs de classification, nous mesurons, pour chaque objet, le nombre de pixels attribués au fond de l'image et qui correspondent à l'objet, ou inversement. Cette mesure correspond à l'image 4.43b dans le cas de notre algorithme. Le tableau 4.1 indique ces mesures d'erreurs pour les différentes projections.

	Atome 1	Atome 2	Atome 3	Atome 4
Meyer + Enveloppe	358	443	425	316
Meyer + coût entropique	2306	873	1851	864
banc de filtres de Meyer Q -constant	2834	841	1807	896
Daubechies + Enveloppe	606	417	725	324

TAB. 4.1 – Mesures d'erreurs de classification pour chaque objet dans les différentes méthodes de décomposition

Tout d'abord, nous notons que les résultats obtenus avec le coût entropique ou par un banc de filtres de Meyer Q -constant sont très grossiers. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le coût entropique provoque une sur-segmentation de l'espace fréquentiel et nous obtenons une meilleure base qui est très proche de celle calculée par un banc de filtres Q -constant. C'est pourquoi les erreurs de ces deux décompositions sont similaires. La mauvaise localisation temporelle des frontières entre les objets dans les deux partitions s'explique par une sélection de trop fines fenêtres fréquentielles qui, en plus de ne pas être significatives pour la séparation des différentes textures, possèdent une faible résolution temporelle. D'autre part, non seulement le résultat de la segmentation n'est pas très bon, mais la dimension de l'ensemble à classifier Ω est grande (N_{B^*} est grand car de nombreuses projections sont sélectionnées) ce qui entraîne un temps de calcul important.

Le résultat obtenu par les paquets d'ondelettes de Daubechies associés au coût Φ^2 est sensiblement identique en terme d'erreur à la base de Meyer. En effet, même si l'information se disperse entre les différentes projections, elle reste prépondérante dans les bandes correspondant aux diffé-

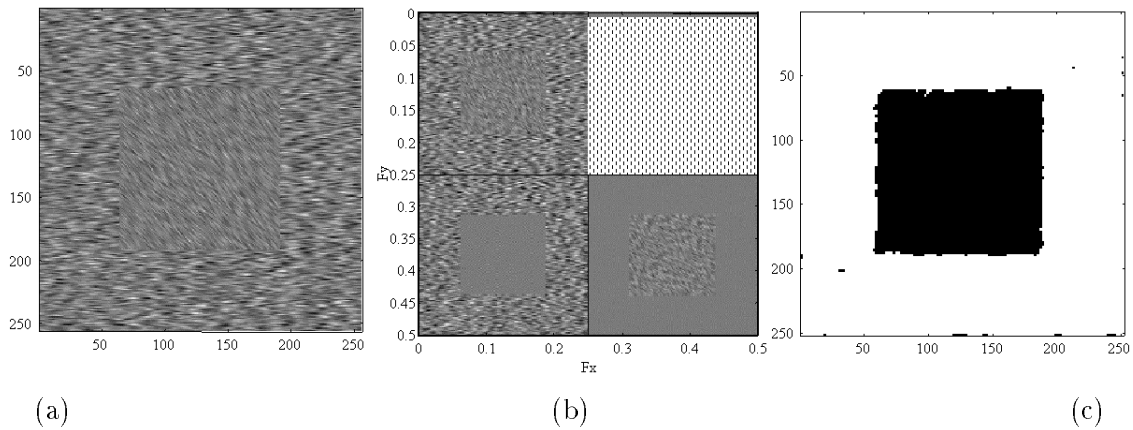


FIG. 4.45 – Segmentation de l'image "2ar" composé de deux AR2D (a) Image originale (b) Meilleure base sélectionnée par le recouvrement des enveloppes (les zones hachurées correspondent à des blocks fréquentiels rejetés) (c) Image segmentée

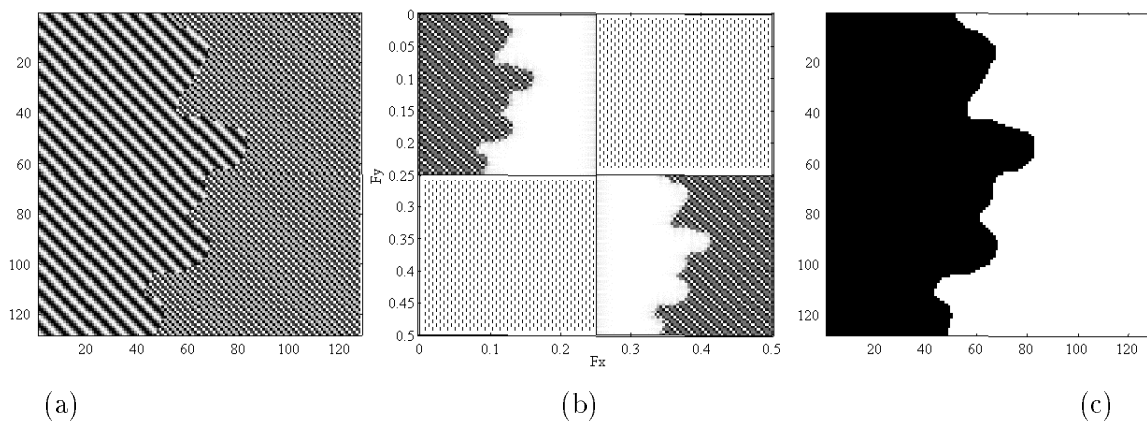


FIG. 4.46 – Segmentation de l'image "2cos" composé de deux atomes 2D (a) Image originale (b) Meilleure base sélectionnée par le recouvrement des enveloppes (les zones hachurées correspondent à des blocks fréquentiels rejetés) (c) Image segmentée

rents atomes et donc ces bandes sont sélectionnées par notre coût sans sur-segmentation de celles-ci. Toutefois, du fait de la dispersion de l'énergie des atomes due au support fréquentiel infini des filtres, l'espace à classifier est plus grand que pour les ondelettes de Meyer (pour cet exemple $N_{B^*} = 7$ pour les ondelettes de Meyer et $N_{B^*} = 12$ pour les ondelettes de Daubechies). Or dans le cadre de la segmentation d'images, donc de la classification de $N \times M$ vecteurs, cet accroissement de la dimension de l'espace des mesures peut être catastrophique en terme de temps de calcul (dans notre exemple cela correspond à $128 * 128 * 5 = 81920$ mesures supplémentaires à traiter). C'est pourquoi la base de paquets d'ondelettes de Meyer associée à une mesure de recouvrement d'enveloppe nous semble une méthode tout à fait adaptée pour la segmentation d'images.

Nous présentons sur les figures 4.46 et 4.45 les résultats de l'algorithme de segmentation appliqué sur deux images composées de deux objets. Ces deux exemples illustrent les deux points suivants :

- Le coût basé sur le recouvrement des enveloppes permet d'extraire les projections qui séparent les différentes textures et cela sans sur-segmentation.

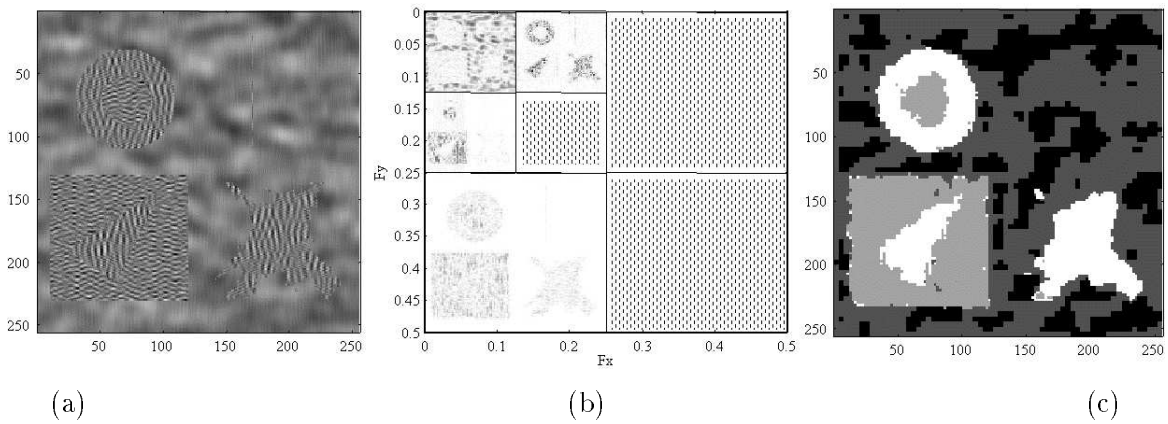


FIG. 4.47 – Segmentation de l'image "mel" composé d'atomes 2D et d'AR2D. Les couleurs indiquent les différentes classes. (a) Image originale (b) Meilleure base sélectionnée par le recouvrement des enveloppes (les zones hachurées correspondent à des blocks fréquentiels rejetés) (c) Image segmentée

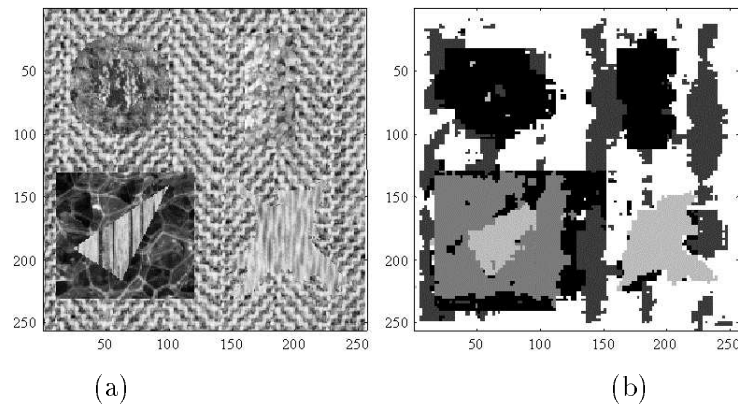


FIG. 4.48 – Segmentation de l'image "texture3" (a) Image originale (b) Image segmentée

- La partition calculée ensuite dans cette base optimale détecte presque parfaitement les contours des objets.

La figure 4.47 présente le résultat de l'algorithme de segmentation appliqué sur une image test composée d'un mélange d'atomes 2D et d'AR2D. Les formes des objets sont fixées par l'image "Savoise" du GDR ISIS. On constate encore une fois que la meilleure base sélectionnée est la représentation minimale permettant de séparer les différents composants. Après segmentation, les différents objets sont détectés d'une façon satisfaisante, bien que certaines formes soient complexes.

Afin d'évaluer la potentialité de notre algorithme de segmentation sur des textures réelles, nous l'appliquons sur les images définies par le GDR ISIS composées de différentes textures (sable, lierre, laine, herbe, eau, canevas, bulles et bois) suivant les formes de l'image "savoise".

Les figures 4.48, 4.49, 4.50 et 4.51 présentent les résultats de segmentation sur ces images "réelles" issues du GDR ISIS. On constate que globalement les différents objets sont correctement détectés avec toutefois plus ou moins de réussite selon les textures. Certaines textures ne se dissocient pas, comme par exemple le triangle et le carré dans l'image 4.50, et nécessiteraient un nombre d'échelles de décomposition plus important pour se séparer, mais ce qui entraînerait une dégradation de la résolution temporelle. Une des solutions pourrait être de coupler l'algorithme de segmentation

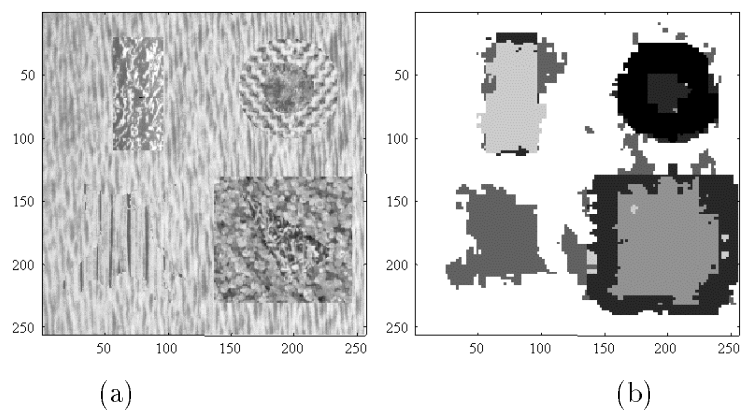


FIG. 4.49 – Segmentation de l'image "texture4" (a) Image originale (b) Image segmentée

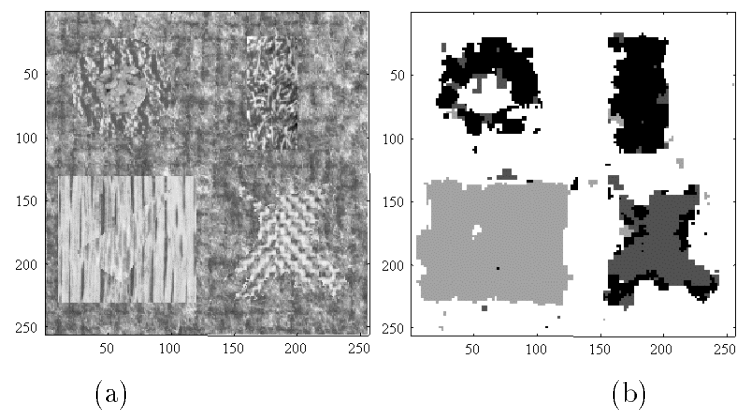


FIG. 4.50 – Segmentation de l'image "texture5" (a) Image originale (b) Image segmentée

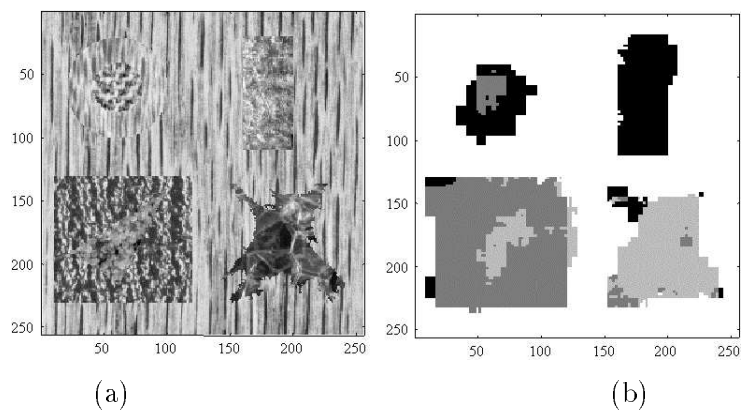


FIG. 4.51 – Segmentation de l'image "texture6" (a) Image originale (b) Image segmentée

présenté dans ce chapitre avec la méthode de pré-découpage introduite dans le chapitre précédent.

Pour conclure sur ces résultats, il faut noter que pour toutes ces textures, grâce à l'utilisation des ondelettes de Meyer et d'un coût adapté, l'espace des mesures est de dimension limitée ce qui permet une classification rapide.

4.7 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle base de décomposition : les paquets d'ondelettes de Meyer. L'utilisation de filtres à support fréquentiel fini nous permet d'obtenir des représentations dans lesquelles les différentes informations se concentrent sur quelques projections. En adaptant les principes numériques introduits par Kolaczyk, nous définissons un algorithme de décomposition, basé sur les ondelettes de Malvar, qui possède une complexité algorithmique raisonnable. En utilisant les qualités de cette nouvelle base, nous introduisons une fonction de coût qui va mesurer le taux de séparation de chacune des coupures fréquentielles. Cette nouvelle fonction de coût nous permet d'obtenir une partition de l'espace fréquentiel optimale et minimale pour une séparation des différentes composantes du signal. L'association de cette nouvelle base et de ce nouveau coût nous permet d'obtenir dans le cas 1D une représentation TF mettant en évidence les informations présentes dans le signal. A travers l'application sur les signaux vocaux et EEG, nous avons montré que cette décomposition est complémentaire à celle présentée dans le chapitre 3, et nous permet, notamment pour les signaux EEG, d'extraire des caractéristiques fondamentales pour l'étude du signal.

L'extension à la dimension 2 de ces différentes méthodes nous a amené tout naturellement à la proposition d'un algorithme de segmentation de textures. En utilisant ce qui se fait couramment dans le domaine de la segmentation, mais adapté à notre espace optimal de représentation, nous définissons un algorithme de segmentation de textures qui obtient des résultats très encourageants que ce soit sur les textures de synthèses ou des textures réelles. Nous avons choisi d'utiliser comme méthode de regroupement la technique des nuées dynamiques mais l'adaptation des différentes méthodes de segmentation, proposées dans la littérature, à cet espace optimal de représentation pourrait très certainement donner des résultats satisfaisants.

Dans le chapitre 3, nous avons proposé une méthode de décomposition en fonction φ fenêtrée non-uniforme. Puisque la décomposition de Meyer repose sur le principe des bases trigonométriques locales, nous pouvons utiliser l'algorithme introduit pour les bases φ -non-uniforme afin de généraliser ce qui est introduit dans ce chapitre 4 à une décomposition non-uniforme. Ensuite, nous combinons les deux approches, temporelle et fréquentielle, pour construire une base totalement non-uniforme. Ceci fait l'objet de notre dernier chapitre.

Chapitre 5

Vers le tout non-uniforme

5.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, la décomposition en paquets d'ondelettes offre une plus grande souplesse que la décomposition en ondelettes, car elle permet de rediviser l'axe fréquentiel. Pourtant, elle conserve encore certaines contraintes. Notamment, la partition fréquentielle sélectionnée correspond forcément à une division dyadique uniforme de l'axe fréquentiel. Une division appliquée directement dans le plan fréquentiel, comme le propose la décomposition de Meyer, nous offre une grande liberté dans la définition des intervalles fréquents analysés. En effet, en utilisant les principes de la décomposition de Meyer présentés dans le chapitre 4 avec l'algorithme de partition non-uniforme proposé dans le chapitre 3, nous allons définir une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme [22].

Néanmoins, on peut rester insatisfait des solutions proposées par les deux décompositions adaptatives (Malvar et Paquets d'ondelettes), car le découpage du plan temps-fréquence reste encore trop rigide. Avec les ondelettes de Malvar, nous avons une partition adaptative de l'axe temporel, mais le découpage fréquentiel est fixé par la taille de l'intervalle étudié. Avec les paquets d'ondelettes, nous avons un découpage fréquentiel adaptatif mais qui s'applique à la totalité du signal. C'est pourquoi, récemment, est apparue une nouvelle base, l'algorithme Double Tree, combinant à la fois l'approche de Malvar et celle des paquets d'ondelettes. Mais comme précédemment, l'algorithme initial, proposé par Vetterli et al [50], possède les contraintes de découpages temporel et fréquentiel forcément dyadiques. En combinant les deux partitions non-uniformes, dans le plan temporel et fréquentiel, nous construisons une représentation qui atteint le minimum absolu pour un critère donné dans le cadre des pavages rectangulaires du plan temps-fréquence, et qui a pour seule contrainte que les côtés des rectangles de pavage soient égaux à une puissance de deux.

5.2 Décomposition non-uniforme en paquets d'ondelettes de Meyer

5.2.1 Principe général

Comme nous l'avons noté, la décomposition en paquets d'ondelettes ne permet pas d'étudier toutes les partitions fréquentielles possibles avec des intervalles de taille variant de $2^{-1}N$ à $2^{-L}N$. Une particularité similaire avait déjà été relevée sur l'axe temporel lors de l'étude des ondelettes

de Malvar. Cette contrainte provient de la méthodologie de calcul utilisée dans l'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes. En effet, l'utilisation d'un banc de filtres, divisant, à chaque étape, un espace en deux sous-espaces complémentaires, impose des partitions dyadiques. Afin d'élargir la collection de bases à des décompositions non dyadiques, il faut remettre en cause le processus de calcul. Comme le suggère S. Mallat [68], l'utilisation d'un fenêtrage dans le plan fréquentiel offre une plus grande souplesse dans la définition des bandes de fréquences étudiées. C'est pourquoi, l'algorithme introduit dans le cadre des paquets d'ondelettes de Meyer, nous semble un point de départ très intéressant pour définir une nouvelle méthode de segmentation de l'axe fréquentiel moins contraignante.

Nous devons définir un algorithme permettant d'étudier toutes les divisions possibles de l'axe fréquentiel, avec des fenêtres ayant une taille égale à $2^{-l-1}N$ avec $l \in [0, L]^1$, mais sous la contrainte que les intervalles non adjacents ne peuvent pas fusionner (car il faut respecter la périodicité de la transformée de Fourier). Une telle méthode a été proposée dans le cadre des bases φ -non-uniforme dans le chapitre 3. Puisque la décomposition de Meyer est une base fenêtrée particulière, nous allons utiliser les bases fenêtrées non-uniformes pour construire une décomposition en paquets d'ondelettes non-uniforme. Mais, avant cela, nous devons modifier les fonctions de bases de Meyer pour qu'elles aient un recouvrement constant dans le plan fréquentiel.

5.2.2 Paquets d'ondelettes de Meyer à recouvrement constant

Comme nous l'avons constaté, les fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer correspondent à un fenêtrage dans le plan fréquentiel avec à un recouvrement variable. Cette taille varie selon l'échelle suivant $\alpha_l = \frac{2^{-l}}{6}$. Cela permet d'avoir des zones de recouvrement proportionnelles à la taille de l'intervalle traité, et de respecter la condition $\psi_{l,k}(x) = 2^{l/2}\psi(2^l x - k)$.

Toutefois, l'utilisation d'une zone de recouvrement de taille variable lors d'une décomposition non-uniforme influence, d'une façon non négligeable, le choix de la meilleure translation (cf chapitre 3). Nous modifions donc la définition de l'ondelette de Meyer afin d'avoir des fenêtres fréquentielles à recouvrement constant pour toutes les échelles.

Pour cela, la fonction d'échelle ne respecte plus la condition $\zeta_l(x) = 2^{l/2}\zeta(2^l x)$, mais elle est définie directement à l'échelle l par

$$\widehat{\zeta}_l(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |2^{-l}\xi| \leq 1/3 + \frac{1-2^{-L+l}}{6} \\ \cos\left(\frac{\pi r}{2} \left(\frac{3}{2^{-L}} \left(|\xi| - \text{sgn}(\xi) * \left(2^{-l-1} - 2^{-L-1}\right)\right) - 1\right)\right) & \text{si } 1/3 + \frac{1-2^{-L+l}}{6} < |2^{-l}\xi| \leq 2/3 - \frac{1-2^{-L+l}}{6} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans l'équation précédente, L correspond à l'échelle la plus grossière et fixe la zone de recouvrement, donc l est tel que $l \leq L$. Nous apportons quelques précisions sur la définition de la fonction d'échelle introduite dans l'équation (5.1) en illustrant notre propos sur la figure 5.1. Cette figure indique, pour $L = 3$, la fonction d'échelle de Meyer "classique" $\widehat{\zeta}(\xi)$, le recouvrement correspondant à l'échelle L , et la fonction d'échelle à recouvrement constant $\widehat{\zeta}_1(\xi)$ définie à partir de l'équation (5.1).

1. Notons que nous ne traitons que l'intervalle $[0, \frac{N}{2} - 1]$ et non l'intervalle $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$ afin de simplifier le propos dans la suite du paragraphe.

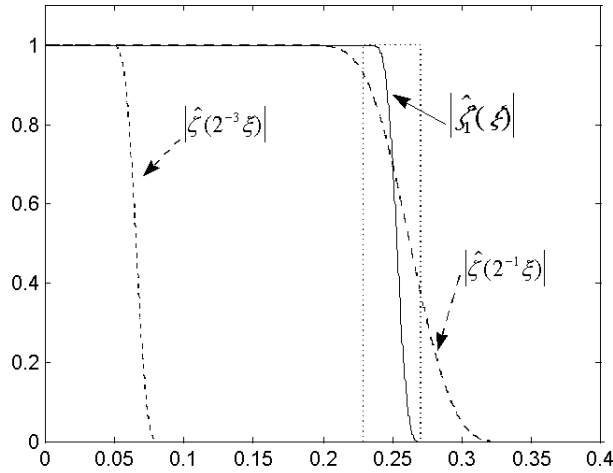


FIG. 5.1 – Construction d'une fonction d'échelle de Meyer avec une zone de recouvrement à taille constante pour toutes les échelles (définie dans l'exemple par $\alpha = \frac{2^{-3}}{6}$)

Nous constatons que la zone de recouvrement correspondant à $\widehat{\zeta}_1(\xi)$, symbolisée sur la figure par un rectangle en trait pointillé, est plus étroite que pour la fonction $\widehat{\zeta}(2^{-1}\xi)$. En effet, la zone de recouvrement a été réduite de $\left(\frac{2^{-l}}{6}\right)_{l=1}$ à $\left(\frac{2^{-L}}{6}\right)_{L=3}$. En conséquence, la fonction de coupe n'est plus définie sur l'intervalle $|\xi| \in \left] \frac{2^{-l}}{3}, \frac{2^{-l+1}}{3} \right]$ mais sur l'intervalle $|\xi| \in \left] \frac{2^{-l}}{3} + \frac{2^{-l-2^{-L}}}{6}, \frac{2^{-l+1}}{3} - \frac{2^{-l-2^{-L}}}{6} \right]$. A l'inverse, l'intervalle sur lequel la fonction $\widehat{\zeta}_l$ est égale à l'unité est plus large et correspond à $\xi \in \left[-\frac{2^{-l}}{3} - \frac{2^{-l-2^{-L}}}{6}, \frac{2^{-l}}{3} + \frac{2^{-l-2^{-L}}}{6} \right]$.

Nous avons proposé que la décroissance de la fonction $\widehat{\zeta}_l(\xi)$ soit fixée par la fonction $\widehat{\zeta}(2^{-L}\xi)$. En conséquence, la zone de coupe de la fonction $\widehat{\zeta}_l(\xi)$ est obtenue grâce à l'expression suivante

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}r\left(\frac{3}{2^{-L}}|\xi| - 1\right)\right) \quad (5.2)$$

qui correspond à un recouvrement égal à $\frac{2^{-L}}{6}$. Seulement le point de coupe associé à cette expression a pour coordonnée 2^{-L-1} . Or, par définition, la fonction $\widehat{\zeta}_l$ a un point de coupe de coordonnée 2^{-l-1} . Nous devons donc traduire l'expression (5.2) de $(2^{-l-1} - 2^{-L-1})$ points. La fonction d'échelle sur la zone de recouvrement est alors définie par

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}r\left(\frac{3}{2^{-L}}\left(\xi - 2^{-l-1} + 2^{-L-1}\right) - 1\right)\right).$$

Nous avons ainsi commenté chaque point particulier de la définition de $\widehat{\zeta}_l$. Notons que nous ne présentons sur la figure 5.1 que les fréquences positives. Dans le cas des fréquences négatives, la translation de l'expression (5.2) est simplement de signe opposé.

Suivant les mêmes principes, nous modifions la définition de la fonction d'ondelette par

$$\widehat{\psi}_l(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2/3 - \frac{1-2^{-L+l}}{6} < |2^{-l}\xi| < 2/3 + \frac{1-2^{-L+l}}{6} \\ e^{-i\xi\pi 2^{-l}} \sin\left(\frac{\pi}{2}r\left(\frac{3}{2^{-L}}\left(|\xi| - \text{sgn}(\xi) * \left(2^{-l-1} - 2^{-L-1}\right)\right) - 1\right)\right) & \text{si } 1/3 + \frac{1-2^{-L+l}}{6} < |2^{-l}\xi| \leq 2/3 - \frac{1-2^{-L+l}}{6} \\ e^{-i\xi\pi 2^{-l}} \cos\left(\frac{\pi}{2}r\left(\frac{3}{2^{-L}}\left(|\xi| - \text{sgn}(\xi) * \left(2^{-l-1} - 2^{-L-1}\right)\right) - 1\right)\right) & \text{si } 2/3 + \frac{1-2^{-L+l}}{6} < |2^{-l}\xi| < 4/3 - \frac{1-2^{-L+l}}{6} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.3)$$

Si l'on compare l'expression (5.3) à la définition originale des ondelettes de Meyer (équation (4.1), chapitre 4), nous constatons que seule la taille des zones de recouvrement est modifiée. En conséquence, on peut montrer, suivant le même principe que pour les ondelettes de Meyer, que la collection de fonctions $(\tilde{\psi}_{l,k})_{l,k \in \mathbb{Z}}$, définie à partir de la relation (5.3), forme une base de $L_2(\mathbb{R})$.

Plus généralement, on peut construire des paquets d'ondelettes de Meyer avec des zones de repliement constantes, en intégrant les modifications proposées ci-dessus dans la définition des filtres H_j^l et G_j^l

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j^l(\xi) &= \begin{cases} \sqrt{2} \sum_n \hat{\zeta}_l(\xi + 2n + j) & \text{si } j \text{ est pair} \\ -e^{i2^{l+1}\pi\xi} \sqrt{2} \sum_n \hat{\zeta}_l(\xi + 2n + 1 + j) & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}, \\ \tilde{G}_j^l(\xi) &= \begin{cases} -e^{i2^{l+1}\pi\xi} \sqrt{2} \sum_n \hat{\zeta}_l(\xi + 2n + 1 + j) & \text{si } j \text{ est pair} \\ \sqrt{2} \sum_n \hat{\zeta}_l(\xi + 2n + j) & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer à recouvrement constant $\tilde{\psi}_j^l$ sont définies à partir des relations suivantes :

$$\tilde{\psi}_0^0 \triangleq \zeta, \tilde{\psi}_{2j}^{l+1} \triangleq \tilde{H}_j^l \tilde{\psi}_j^l, \tilde{\psi}_{2j+1}^{l+1} \triangleq \tilde{G}_j^l \tilde{\psi}_j^l.$$

Comme les fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer introduites dans le chapitre 4, les fonctions $\tilde{\psi}_j^l$ correspondent à un intervalle fréquentiel $]-j+1)2^{-l}, -j2^{-l}] \cup [j2^{-l}, (j+1)2^{-l}[$, mais avec des tailles de zones de recouvrement constantes, telles que $\alpha_j^l = \alpha = \frac{2^{-L}}{6}$. Les polarités des repliements restent identiques à celles définies dans le cadre des paquets d'ondelettes de Meyer. Nous indiquons sur la figure 5.2 un exemple de fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer à recouvrement constant.

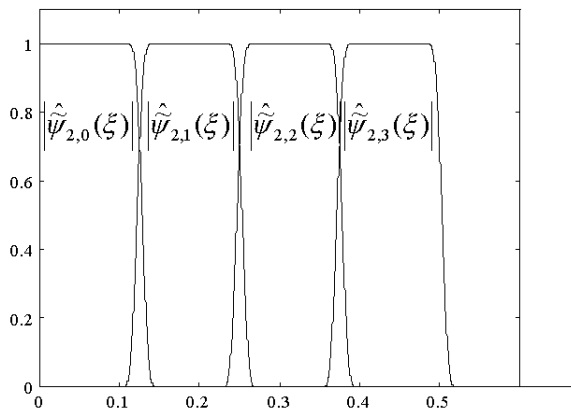


FIG. 5.2 – *Module de la transformée de Fourier des fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer avec un recouvrement constant, à l'échelle 2 (fréquence positive et fonctions non normées).*

Puisque les filtres \tilde{H}_j^l et \tilde{G}_j^l sont des filtres miroirs en quadrature, on peut montrer que, si Γ est une partition dyadique disjointe de \mathbb{R} , alors $\{\tilde{\psi}_{j,k}^l : I_j^l \in \Gamma, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de $L^2(\mathbb{R})$ (cf chapitre 4).

Nous ne développons pas l'algorithme numérique discret de décomposition et de reconstruction dans le cas des paquets d'ondelettes à recouvrement constant. Il est semblable à celui présenté dans le paragraphe 4.3.2.4 du chapitre 4, avec, pour seule différence, une taille de zone de repliement constante et égale à $\frac{2^{-L}}{6}$.

5.2.3 Algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme

Nous avons vu, dans le chapitre 4, que les fonctions d'ondelettes de Meyer s'expriment selon des transformées trigonométriques locales. Les axes réel et imaginaire du domaine de Fourier sont traités comme l'axe temporel lors de la décomposition en ondelettes de Malvar. La décomposition de Meyer a donc deux propriétés très importantes :

1. Chacune des transformées trigonométriques associées vérifient les propriétés de la fonction $\tilde{\varphi}$ introduite dans le cadre des décompositions en fonction φ -non-uniforme (base orthonormée de $[0, N - 1]$ possédant une extension naturelle symétrique et antisymétrique aux points extrêmes de l'intervalle, chapitre 3, paragraphe 3.3.2).
2. Les différents opérateurs de repliement associés sont de polarités opposées aux extrémités de l'intervalle.

D'après le paragraphe 3.3.2 du chapitre 3, nous pouvons proposer une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme qui définit une base orthonormée de $l^2[0, N - 1]$ et qui possède un algorithme de reconstruction simple.

Pour cela, nous incorporons le processus de partition non dyadique d'un axe (l'axe fréquentiel) dans l'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes à recouvrement constant. La seule modification mineure à apporter à l'algorithme présenté dans le chapitre 3 est d'introduire un facteur $\frac{1}{2}$ dans la définition des intervalles fréquentiels $I_j^{l,s}$, soit

$$I_j^{l,s} = \frac{1}{2} * N \left[2^{-l}j + s, 2^{-l}(j + 1) + s - \frac{1}{N} \right]$$

car l'axe traité correspond à $\left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$ et non plus $[0, N - 1]$.

Dans un premier temps, les parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier de f sont traitées grâce à l'expression

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{l,s} = {}^{(l)}U^* S_{l+1,s} \\ S_{l,s+2^{-l+1}} = {}^{(l)}U_{-2^{-l+1}}^* [Tr_{2^{-l+1}}(S_{l+1,s})] \end{array} \right\}_{0 \leq s \leq 2^{-l-1} - 2^{-L}}$$

que nous avons introduite dans la proposition 7 du chapitre 3 (page 97) afin d'obtenir un découpage de l'axe fréquentiel non dyadique.

En chaque point de coupure, la taille de la zone de repliement est égale à $\frac{N2^{-L}}{6}$, et la polarité est $(-, +)$ pour la partie réelle et $(+, -)$ pour la partie imaginaire. Nous obtenons ainsi une collection d'ensemble $S_{l,s}$, $s = 0 \dots 2^l - 1$, $l = 0 \dots L$, correspondant à la totalité des partitions de l'axe fréquentiel comprenant des intervalles avec des tailles variant de $2^{-L-1}N$ à $\frac{N}{2}$.

Ensuite, selon les principes du chapitre 4, il suffit d'appliquer une transformée trigonométrique adaptée sur chacun des intervalles fréquentiels $I_j^{l,s}$:

- Si $j2^{-l} + s = 0$, on applique une transformée DCT_I pour la partie réelle et DST_I pour la partie imaginaire,

2. Il faut noter que dans ce cas, le calcul ne s'effectue pas que sur l'intervalle de fréquences positives, mais sur $[-a, a]$. Toutefois, afin d'alléger le propos, nous ne mentionnons que l'intervalle positif.

– Sinon, on applique une transformée DST_III pour la partie réelle et DCT_III pour la partie imaginaire.

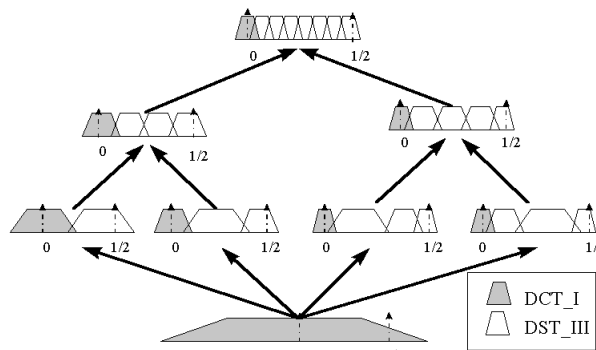


FIG. 5.3 – Algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme. Les transformées trigonométriques indiquées correspondent au traitement de la partie réelle de \hat{f} .

Nous indiquons sur la figure 5.3 un résumé de l'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme. Concrètement, en intégrant les opérations combinant les parties réelle et imaginaire présentées dans le chapitre 4 pour les ondelettes de Meyer (équations (4.11) et (4.15)) dans la formalisation introduite pour les bases φ fenêtrées non-uniformes du chapitre 3 (paragraphe 3.3.2, page 98), nous pouvons construire une projection $P_{j,k}^{l,s}(\hat{f})$ qui définit les différentes transformations trigonométriques associées, permettant ainsi de calculer un coefficient de paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme pour tout indice l, s, j, k :³

$$P_{j,k}^{l,s}(\hat{f}) \triangleq \begin{cases} M_{I_j^{l,s}}^k(\hat{f}) & \text{si } j2^{-l} + s > 0 \\ \widetilde{M}_{I_j^{l,s}}^k(\hat{f}) & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{avec } M_{I_j^{l,s}}^k(\hat{f}) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \left(\left\langle T_{I_j^{l,s}} f_2, \text{DCT-III}_{I_j^{l,s},k} \right\rangle + \left\langle T_{I_j^{l,s}} f_1, \text{DST-III}_{I_j^{l,s},k} \right\rangle \right), & \text{si } k = 0, \dots, 2^{-l-1} - 1 \\ (-1)^{k+1} \left(\left\langle T_{I_j^{l,s}} f_2, \text{DCT-III}_{I_j^{l,s},2^{-l-k}-1} \right\rangle - \left\langle T_{I_j^{l,s}} f_1, \text{DST-III}_{I_j^{l,s},2^{-l-k}-1} \right\rangle \right), & \text{si } k = 2^{-l-1}, \dots, 2^{-l} - 1 \end{cases},$$

$$\text{et } \widetilde{M}_{I_j^{l,s}}^k(\hat{f}) = \begin{cases} \left\langle T_{\widetilde{I}_j^{l,s}} f_1, \text{DCT-I}_{\widetilde{I}_j^{l,s},0} \right\rangle, & \text{si } k = 0 \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \left(\left\langle T_{\widetilde{I}_j^{l,s}} f_2, \text{DST-I}_{\widetilde{I}_j^{l,s},2k} \right\rangle - \left\langle T_{\widetilde{I}_j^{l,s}} f_1, \text{DCT-I}_{\widetilde{I}_j^{l,s},2k} \right\rangle \right), & \text{si } k = 1, \dots, 2^{-l-1} \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \left(\left\langle T_{\widetilde{I}_j^{l,s}} f_2, \text{DST-I}_{\widetilde{I}_j^{l,s},2^{-l-k}} \right\rangle - \left\langle T_{\widetilde{I}_j^{l,s}} f_1, \text{DCT-I}_{\widetilde{I}_j^{l,s},2^{-l-k}} \right\rangle \right), & \text{si } k = 2^{-l-1} + 1, \dots, 2^{-l} - 1 \end{cases},$$

$$\text{et } \widetilde{I}_j^{l,s} \triangleq \frac{1}{2} \left[- \left((j+1)2^{-l} + s \right), (j+1)2^{-l} + s \right]$$

3. Notons que par rapport à la formulation générale introduite pour les bases non-uniformes dans le chapitre 3, nous avons abrégé les notations en notant par exemple $\text{DCT-III}_{I_j^{l,s},k}$ le $k^{\text{ème}}$ coefficient de la transformée DCT-III appliquée sur l'intervalle $I_j^{l,s}$ et en remplaçant la somme $\left(\sum_{t \in I_j^{l,s}} T_{I_j^{l,s}} f[t] \cdot \text{DCT-III}_{I_j^{l,s},k}[t] \right)$ par sa notation sous forme de produit scalaire $\langle \cdot \rangle$.

A partir de la projection $P_{j,k}^{l,s}(\hat{f})$, les coefficients de paquets d'ondelettes de Meyer non uniformes, respectant la contrainte de non fusion entre les intervalles fréquentiels non adjacents, s'écrivent

$$d_{j,k}^{l,s} = \left(P_{j,k}^{l,s}(\hat{f}) \right) \text{ pour } 0 \leq j \leq 2^l - 2$$

$$d_{2^l-1,k}^{l,s} = \begin{cases} P_{2^l-1,k}^{l,0}(\hat{f}) & \text{si } s = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \left(d_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{0,k-2^{l+1}}^{l+1,s} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \\ \left(d_{0,k}^{l+1,0} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{2^{l+1}-1,k-2^{l+1}}^{l+1,0} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \end{array} \right] & \text{si } 0 < s < 2^{-l-1} \\ \left[\begin{array}{l} \left(d_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,0} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{2^{l+1}-1,k-2^{l+1}}^{l+1,0} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \\ \left(d_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s-2^{-l-1}} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{2^{l+1}-2,k-2^{l+1}}^{l+1,s-2^{-l-1}} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \end{array} \right] & \text{si } s = 2^{-l-1} \\ \left[\begin{array}{l} \left(d_{2^{l+1}-1,k}^{l+1,s-2^{-l-1}} \right)_{\text{si } k < 2^{l+1}} \text{ ou } \left(d_{2^{l+1}-2,k-2^{l+1}}^{l+1,s-2^{-l-1}} \right)_{\text{si } k \geq 2^{l+1}} \end{array} \right] & \text{si } s > 2^{-l-1} \end{cases} .$$

D'après le théorème 7 du chapitre 3 (page 99), les coefficients $d_{j,k}^{l,s}$ sont éléments d'une collection de bases orthogonales. Cette collection est plus importante que celle de la décomposition dyadique. Nous devons sélectionner la base qui est minimale pour une fonction de coût. Le choix va s'effectuer grâce à la version modifiée de l'algorithme Best-Basis proposée dans le paragraphe 3.3.3 du chapitre 3.

Une fois la meilleure base sélectionnée, le signal peut être reconstruit à partir des coefficients de paquets d'ondelettes non uniformes, car les projections définies ci-dessus sont orthogonales. Après avoir appliqué les transformées trigonométriques inverses sur chaque intervalle, nous obtenons les ensembles $T_{I_j^{l,s}} f_i(\xi)$. Ensuite, les termes $T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_1(\xi)$ et $T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_2(\xi)$ sont calculés grâce à l'opérateur de repliement adjoint U^* . Puisque la projection est orthogonale, c'est-à-dire que $T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} T_{I_{j'}^{l',s}}^* T_{I_{j'}^{l',s}} = 0$ pour tout $l \neq l' \times j \neq j'$, et que les intervalles adjacents sont de polarités opposées, nous pouvons écrire que

$$T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_2[\xi] = T_{I_{2j}^{l+1,s}}^* T_{I_{2j}^{l+1,s}} f_2[\xi] \oplus T_{I_{2j+1}^{l+1,s}}^* T_{I_{2j+1}^{l+1,s}} f_2[\xi].$$

Donc, si l'on note A l'ensemble correspondant à un arbre admissible pour une modulation précise, sélectionné par notre algorithme de meilleure base modifié, la fonction \hat{f} peut-être reconstruite à partir de la relation suivante

$$\hat{f}[\xi] = \sum_{(l,j,s) \in A} \left(P_{I_j^{l,s}} f_1[\xi] + iP_{I_j^{l,s}} f_2[\xi] \right),$$

$$\text{avec } P_{I_j^{l,s}} f_1[\xi] = \begin{cases} T_{\tilde{I}_0^{l,s}}^* T_{\tilde{I}_0^{l,s}} f_1[\xi], & \text{si } j2^{-l} + s = 0 \\ T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_1[\xi], & \text{si } \xi \geq 0 \text{ et } j2^{-l} + s > 0 \\ T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_1[-\xi], & \text{si } \xi < 0 \text{ et } j2^{-l} + s > 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

$$\text{et } P_{I_j^{l,s}} f_2[\xi] = \begin{cases} T_{\tilde{I}_0^{l,s}}^* T_{\tilde{I}_0^{l,s}} f_1[\xi], & \text{si } j2^{-l} + s = 0 \\ T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_2[\xi], & \text{si } \xi \geq 0 \text{ et } j2^{-l} + s > 0 \\ -T_{I_j^{l,s}}^* T_{I_j^{l,s}} f_2[-\xi], & \text{si } \xi < 0 \text{ et } j2^{-l} + s > 0 \end{cases}.$$

5.2.4 Applications de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non uniforme

Afin d'illustrer les avantages d'une décomposition en paquets d'ondelettes non uniforme, nous construisons un signal synthétique composé de trois atomes TF. L'un de ces atomes se trouve à

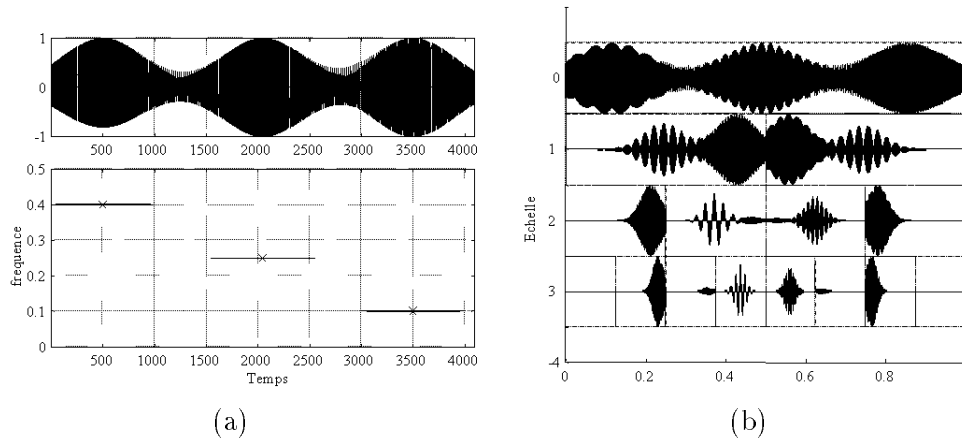


FIG. 5.4 – (a) Signal composé de 3 atomes TF (L'un étant placé sur un point de coupure dyadique) (b) Décomposition sur 3 échelles de paquets d'ondelettes de Meyer avec l'algorithme dyadique

la coordonnée fréquentielle 0.25, donc sur l'un des points de coupure du découpage dyadique. Ce signal et sa représentation TF "théorique" sont illustrés sur la figure 5.4a.

Nous présentons sur la figure 5.4b les trois premières échelles de la décomposition du signal synthétique, avec les paquets d'ondelettes de Meyer dyadiques. Nous constatons que l'énergie du second atome se divise toujours entre deux plans, quelle que soit l'échelle. Ceci rend impossible la sélection d'une base permettant une extraction de chacun des atomes par division adaptative de l'axe fréquentiel. Nous n'illustrons pas la décomposition en paquets d'ondelettes avec des filtres à support temporel fini (comme les ondelettes de Daubechies), car elle présente des résultats similaires mais avec une séparation fréquentielle moins performante (cf chapitre 4).

A l'inverse, nous constatons sur la figure 5.5a que pour certaines modulations (par exemple $s = N2^{-3}$ sur la figure), la décomposition non-uniforme permet de faire apparaître les trois atomes dans trois fenêtres fréquentielles différentes. Si l'on applique alors l'algorithme de recherche de meilleure base modifié, nous pouvons sélectionner un découpage fréquentiel qui met en évidence les différents composants du signal, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.5b.

Nous illustrons maintenant les différences existant entre une décomposition en paquets uniforme et non uniforme à partir de quelques signaux réels.

La figure 5.6 illustre pour le signal "greasy" la meilleure base dyadique ainsi que la meilleure base non-uniforme sélectionnée avec un coût entropique pour une décomposition en quatre échelles. Nous mettons en évidence sur cette figure deux zones fréquentielles pour lesquelles les différences de segmentation sont significatives. La zone (1) est définie sur l'intervalle $[0.125, 0.2625]$ et correspond à deux fréquences fondamentales qui subissent une modulation sur l'intervalle temporel $[2000, 3000]$. On constate sur la représentation dyadique que, du fait de la rigidité de la partition, ce phénomène n'est pas mis en évidence. Afin de le faire apparaître avec la décomposition dyadique, il faut utiliser des fenêtres fréquentielles plus fines, c'est-à-dire un nombre d'échelles plus important et accepter une sur-segmentation dans d'autres intervalles. La décomposition non-uniforme, en s'adaptant mieux à la structure du signal permet, avec un faible nombre d'échelle, de faire apparaître ce phénomène. La seconde zone est définie sur l'intervalle $[0.35, 0.4125]$. Elle correspond à une zone que l'on peut considérer comme stationnaire avec une présence d'énergie constante pour toute cette bande fréquentielle sur l'intervalle temporel $[3500, 5000]$. On constate que la décomposition dyadique divise

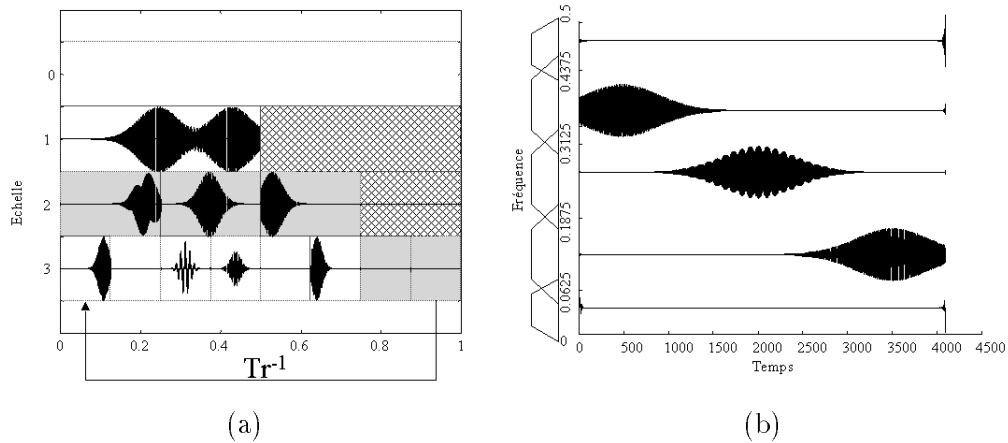


FIG. 5.5 – (a) Décomposition sur 3 échelles de paquets d’ondelettes avec l’algorithme non-uniforme : la décomposition présentée correspond à la modulation $s = N2^{-3}$. Les zones hachurées indiquent, pour chacune des échelles, les zones fréquentielles non calculées du fait de la non fusion entre intervalles non adjacents. En grisé nous indiquons les intervalles fréquents correspondant à la meilleure base de représentation sélectionnée. (b) Meilleure base sélectionnée sur la décomposition en 3 échelles de paquets d’ondelettes avec l’algorithme non uniforme (les fenêtres grisées dans la représentation de gauche)

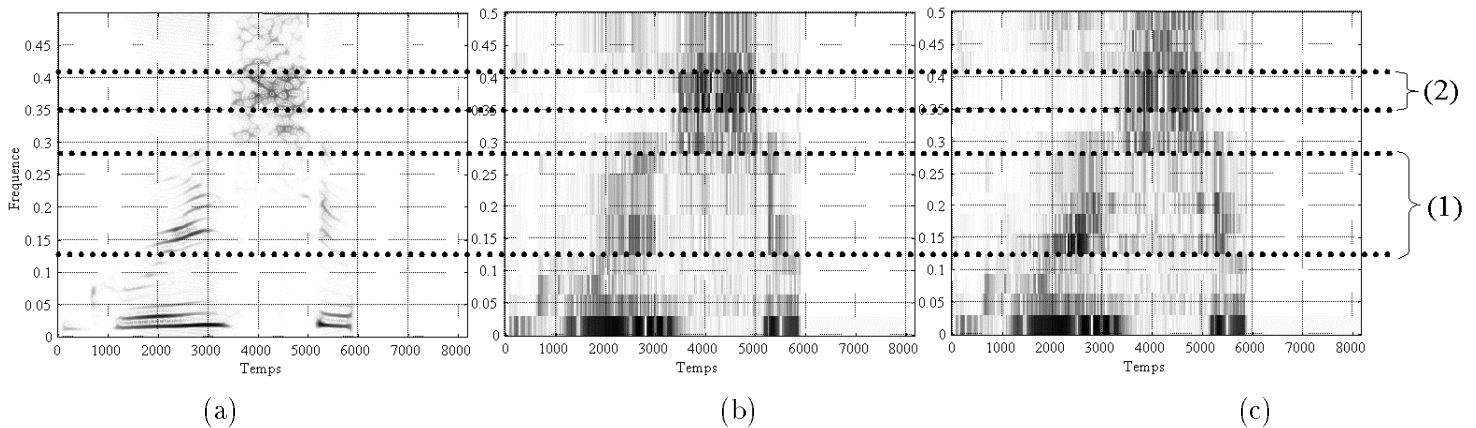


FIG. 5.6 – Signal Greasy (a) Représentation de Pseudo-Wigner-Ville lissée (b) Meilleure base dyadique sur 4 échelles (Entropie = -649470) (c) Meilleure base non uniforme ($s = 3 * 2^{-4}N$, entropie = -649795). Les quatre lignes délimitent les deux zones pour lesquelles les différences de partition entre les deux décompositions sont les plus significatives.

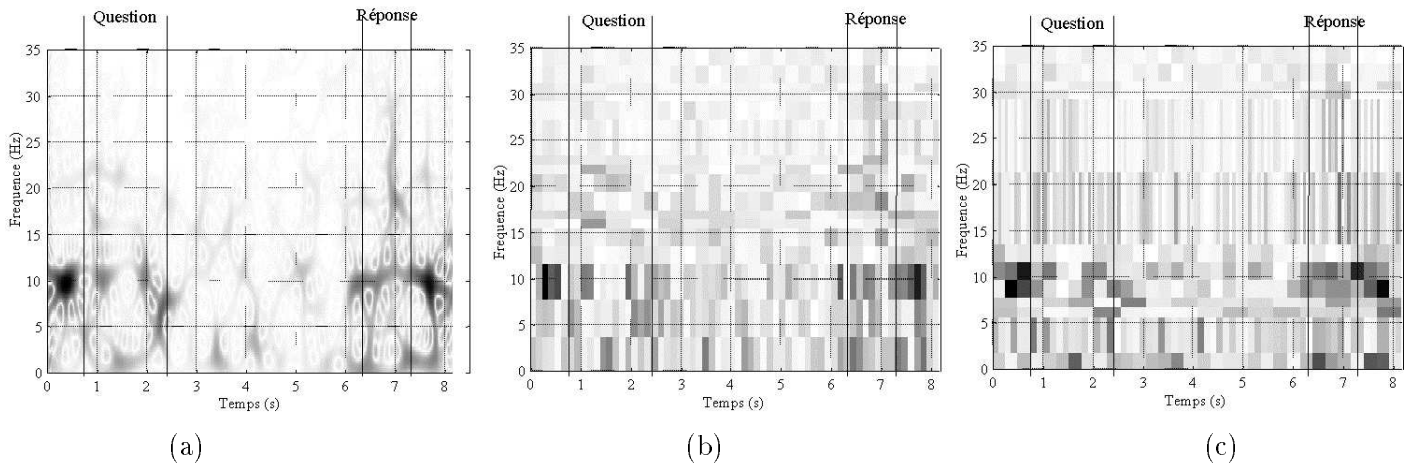


FIG. 5.7 – Signal EEG1 (a) Représentation de Pseudo-Wigner-Ville lissée (b) Meilleure base dyadique sur 7 échelles (c) Meilleure base non uniforme ($s = 62 * 2^{-7}$).

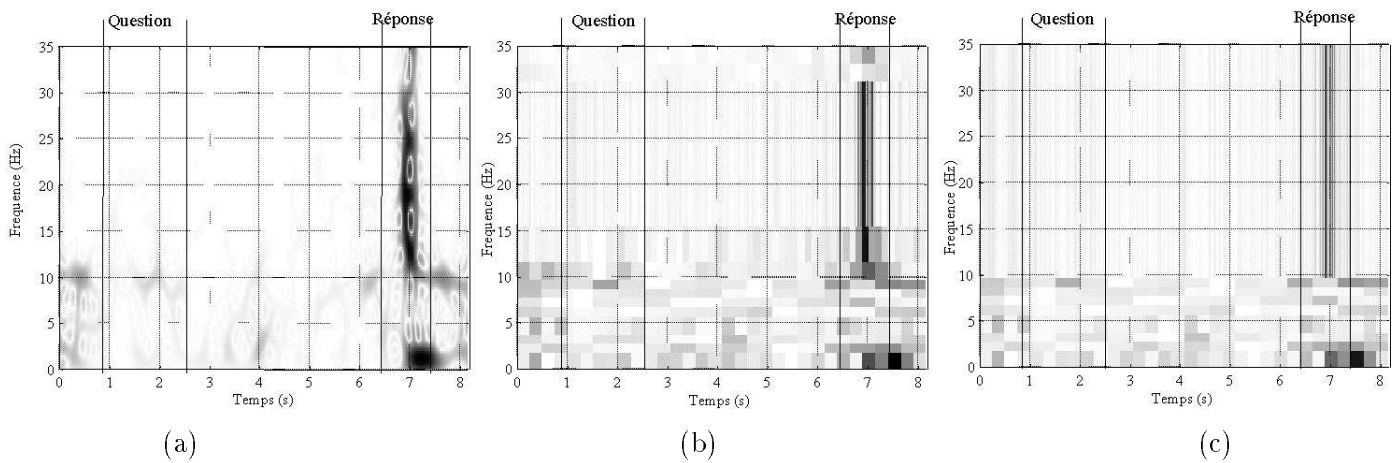


FIG. 5.8 – Signal EEG2 (a) Représentation de Pseudo-Wigner-Ville lissée (b) Meilleure base dyadique sur 7 échelles (c) Meilleure base non uniforme ($s = 10 * 2^{-7}$).

cette zone, alors que la décomposition non uniforme la rassemble dans une seule fenêtre.

Les figures 5.7 et 5.8 illustrent les différences entre la décomposition dyadique et la décomposition non-uniforme pour les signaux EEG, avec une décomposition en 7 échelles. Afin de juger de la qualité des résultats, nous calculons pour chacun des signaux la transformée de Wigner-Ville lissée. Encore une fois, cette transformée ne permet pas d'obtenir la représentation TF "théorique" associée aux signaux, mais indique d'une façon assez précise l'évolution des fréquences au cours du temps.

Il existe trois grandes différences entre les deux partitions fréquentielles sélectionnées sur le signal EEG1 (figure 5.7) :

1. L'existence d'une fine fenêtre fréquentielle "basse fréquence" dans la décomposition non uniforme met en évidence la présence ponctuelle d'énergie très basse fréquence dans le signal. Ceci s'illustre surtout dans l'intervalle "réponse". Dans la décomposition dyadique, ces atomes se diffusent dans une bande fréquentielle plus large.
2. La division en deux fenêtres de la bande contenant 10 Hz dans le découpage non uniforme

met en évidence une diminution de la fréquence de la composante principale du signal à la fin de la réponse.

- Enfin la faible segmentation de la bande située au-dessus de 11 Hz dans la décomposition non uniforme suggère un comportement presque stationnaire du signal dans cette bande (stationnaire dans le sens où l'énergie pour toutes les fréquences supérieures à 11 Hz apparaît et disparaît aux mêmes instants temporels). La décomposition dyadique sur-segmente cette zone

Pour le signal EEG2 (figure 5.8) les différences de partition sont plus faibles. La principale différence réside dans la division de la bande située au-dessus du signal α . La décomposition non dyadique sélectionne une très grande fenêtre dans cette zone mettant ainsi en évidence la présence d'une "colonne homogène" d'énergie durant la réponse. La décomposition dyadique sur-segmente cette zone.

Nous ne poursuivons pas l'analyse de la décomposition en paquets d'ondelettes non uniforme sur les signaux réels qui nécessiterait maintenant la définition de fonctions de coût plus adaptées à nos différentes problématiques. Nous discuterons à la fin de ce chapitre de l'extension à la dimension 2 de cette décomposition non uniforme. Nous introduisons maintenant une nouvelle décomposition basée sur la méthode des "doubles-arbres".

5.3 Arbre-double non uniforme

5.3.1 La décomposition "double tree"

5.3.1.1 Principe

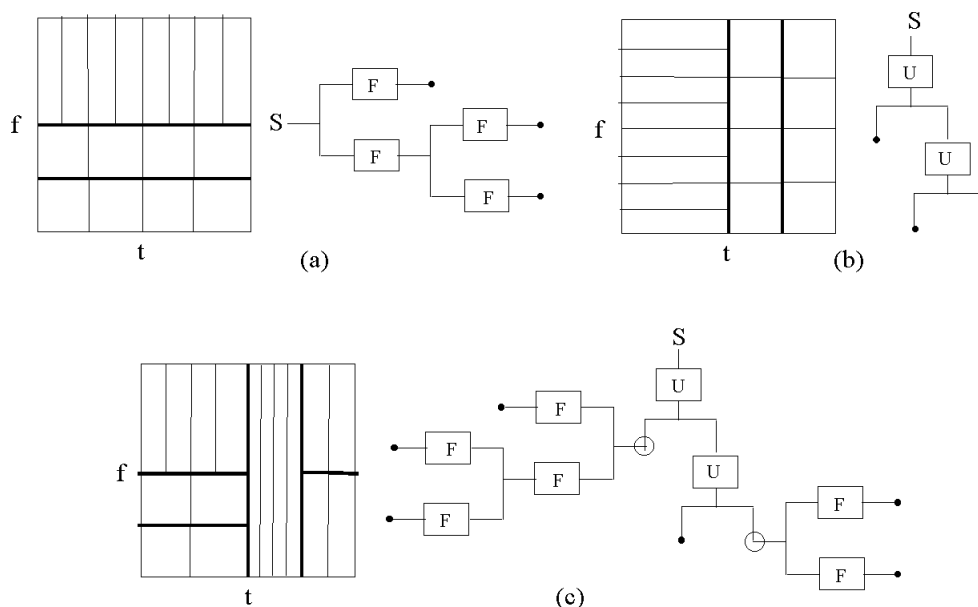


FIG. 5.9 – Pavage du plan TF. (a) Paquets d'ondelettes (b) Ondelettes de Malvar (c) Base adaptative en temps/fréquence (double arbres). U symbolise le découpage en deux d'un segment temporel. F symbolise l'application d'un filtre.

Comme nous l'avons vu, les paquets d'ondelettes permettent de rechercher un découpage optimal de l'axe fréquentiel pour un signal donné. Toutefois, cette sélection se fait sur la globalité du signal,

c'est-à-dire que le découpage fréquentiel sélectionné s'applique, avec une résolution temporelle fixée, à la totalité du signal. Nous illustrons ceci sur la figure 5.9a où nous indiquons sous forme de blocs d'Heisenberg le découpage du plan temps-fréquence associé à une base de paquets d'ondelettes.

Les ondelettes de Malvar permettent un découpage optimal de l'axe temporel pour un signal. Mais la taille de chaque intervalle temporel fixe la division fréquentielle correspondant à ce segment. Nous illustrons ceci sur la figure 5.9b.

On constate que ces différentes particularités vont être limitatives lors de l'étude de signaux non stationnaires. En effet, lorsque l'on utilise une décomposition en paquets d'ondelettes sur un signal non stationnaire, le découpage fréquentiel sélectionné correspond au comportement moyen du signal et ne prend pas en compte les différentes zones temporelles. A l'inverse, les ondelettes de Malvar sélectionnent les zones temporelles stationnaires mais ne s'adaptent pas à la distribution de l'énergie dans le plan fréquentiel pour chacun des segments temporels.

On peut s'interroger sur l'existence d'un système permettant d'obtenir une décomposition qui s'adapte conjointement à l'évolution temporelle et fréquentielle du signal. L'une des solutions serait de découper le signal en petits segments et de rechercher pour chacun de ces segments la meilleure base de paquets d'ondelettes. Toutefois, la partition temporelle initiale est arbitraire et ne s'adapte pas forcément à la structure du signal. L'idée est donc de combiner le découpage récursif temporel proposé dans le cadre des ondelettes de Malvar avec le découpage récursif fréquentiel existant dans les paquets d'ondelettes. C'est-à-dire que sur chaque intervalle temporel construit lors de la décomposition de Malvar, nous appliquons une décomposition en paquets d'ondelettes à la place d'une transformée trigonométrique locale. L'algorithme permettant d'obtenir des décompositions de ce type s'appelle l'algorithme "double tree" (deux arbres : l'un temporel et l'autre fréquentiel) et a été proposé par Vetterli et al [50]. Nous le notons algorithme DT.

Nous illustrons cette décomposition sur la figure 5.9c, où l'on constate que la représentation s'adapte à la fois en temps et en fréquence.

Considérons un signal composé de 4 segments ($ABCD$), on note $Wp^{(L)}$ la décomposition en paquets d'ondelettes sur L échelles alors l'algorithme DT e décline de la façon suivante :

- Calcul de $Wp^{(L_0)}(ABCD)$
- Calcul de $Wp^{(L_1)}(AB)$ et $Wp^{(L_1)}(CD)$
- Calcul de $Wp^{(L_2)}(A)$, $Wp^{(L_2)}(B)$, $Wp^{(L_2)}(C)$ et $Wp^{(L_2)}(D)$

Pour trouver, d'une façon conjointe, la meilleure segmentation temporelle et fréquentielle, on applique tout d'abord l'algorithme Best-Basis (présenté dans le chapitre 3) sur les différentes décompositions en paquets d'ondelettes, ce qui permet de déterminer la meilleure partition fréquentielle pour chaque segment. Ensuite, le coût total de chacune de ces meilleures bases fréquentielles est rattaché à l'intervalle temporel associé et l'algorithme de meilleure base est alors appliqué sur l'arbre binaire correspondant aux divisions temporelles, sélectionnant ainsi le meilleur découpage temporel. La complexité de l'algorithme DT est $\theta(N(\log N)^2)$.

Nous remarquons dans l'algorithme présenté ci-dessus trois paramètres à définir : L_0 , L_1 et L_2 qui correspondent aux nombres d'échelles fréquentielles. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature des règles fixant concrètement ces paramètres. D'une façon générale, les auteurs décident implicitement

d'une profondeur de décomposition constante, c'est à dire que si L est le nombre d'échelles de l'arbre "temporel" alors $L_0 = L, L_1 = L - 1 \dots L_l = L - l$. Cependant, nous avons constaté durant nos expérimentations que cette solution désavantageait la segmentation temporelle, car, comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 4, les petites fenêtres fréquentielles ont tendance à diminuer le coût (phénomène de sur-segmentation). Ce sont donc les segments temporels décomposés avec le plus grand nombre d'échelles fréquentielles qui vont être avantagés, c'est-à-dire, à l'extrême, le signal dans sa totalité. Pour remédier à ceci on peut utiliser un réglage des paramètres constants : $L_0 = L_f, L_1 = L_f \dots L_l = L_f$.

Il reste encore un problème à éclaircir par rapport à l'algorithme DT : les décompositions ainsi construites sont-elles orthogonales ?

Pour répondre à cette question il faut considérer deux cas [50] :

Segmentation temporelle sans recouvrement.

Dans ce cas, on retrouve la difficulté de la décomposition d'un signal de longueur finie, à savoir comment traiter les bords. On peut utiliser les filtres de Haar qui, ayant une longueur de 2, ne présentent pas de problèmes de bords. On peut aussi utiliser le principe de périodisation du signal. Cette solution se généralise à tous les bancs de filtres (nous l'avons utilisée pour le système de décomposition de Meyer) et présente l'avantage d'être simple à réaliser. Il provoque toutefois l'apparition de discontinuités aux extrémités des projections. Enfin, on peut utiliser des filtres particuliers pour traiter les extrémités des intervalles. Cette solution permet de ne pas faire apparaître des discontinuités. Il existe une importante littérature sur la construction de ces filtres "spéciaux" [50], [27], [68].

Quelle que soit la solution choisie, si la base de paquets d'ondelettes utilisée est une base orthonormée de $l^2[0, N - 1]$, alors l'algorithme DT permet la construction d'une collection de bases orthonormées de $l^2[0, N - 1]$ variant dans le temps.

Segmentation temporelle avec recouvrement.

Cette solution est plus "esthétique" car elle ne provoque pas une segmentation brutale du signal. Cependant, la méthodologie de repliement (opérateur U du chapitre 3) proposée dans le cadre des ondelettes de Malvar ne permet pas d'obtenir une décomposition orthonormée car les bases de paquets d'ondelettes ne sont pas périodiques. En effet, la procédure d'extension indiquée dans l'équation (3.9) du chapitre 3 ne définit pas, à partir des paquets d'ondelettes, des fonctions orthogonales dans les zones de recouvrement. Il faut alors introduire des fonctions particulières pour ces zones de recouvrement. Cette opération est réalisée directement à partir des filtres [49], [51] [50] mais elle est plus complexe.

Nous voulons utiliser le principe de l'algorithme DT pour définir une décomposition entièrement non-uniforme. Or cette décomposition, pour être complètement non-uniforme, doit utiliser les ondelettes de Meyer⁴. Nous ne pouvons donc pas utiliser la méthodologie permettant de construire des filtres traitant les zones de recouvrement temporel proposée par Vetterli et al [50] car les filtres de Meyer sont à support temporel infini⁵. Nous utilisons obligatoirement une segmentation temporelle sans recouvrement avec une périodisation de chaque segment. Une proposition de "pseudo-

4. Les ondelettes de Meyer constituent le seul système que nous connaissons qui permet d'obtenir un découpage non-uniforme de l'axe fréquentiel.

5. La méthode proposée par Vetterli est une approche numérique qui calcule directement à partir des séquences $h[n]$ et $g[n]$ les coefficients des filtres "de recouvrement".

ondelettes” de Meyer qui soient orthogonales dans les zones de recouvrement et leurs utilisations numériques sont des problèmes ouverts que nous ne traitons pas dans ce mémoire de thèse.

5.3.1.2 Vers le tout non-uniforme

L’algorithme DT représente la méthode ”ultime” permettant de découper le plan temps-fréquence en rectangle optimum. Mais dans sa formulation originale, nous voyons qu’elle conserve une contrainte : les divisions temporelle et fréquentielle sont dyadiques.

Xiong [98] a proposé une première amélioration permettant de rendre non-uniforme la segmentation temporelle. Il applique son algorithme de division temporelle non-uniforme sur le signal, que nous avons présenté dans le chapitre 3, et pour chacun des intervalles temporels, il calcule une décomposition en paquets d’ondelettes. Toutefois, une seule des deux contraintes est supprimée : le découpage fréquentiel reste dyadique.

En utilisant notre méthode de partition non-uniforme d’un axe, introduite dans la proposition 7 du chapitre 3 (page 97), à la fois sur l’axe temporel et fréquentiel, nous obtenons, au prix d’une complexité plus importante mais ”contrôlée”, un pavage du plan temps-fréquence optimal qui a pour seule contrainte que les cotés des rectangles soient égaux à des puissances de deux.

Toutes les composantes de cet algorithme sont décrites soit au chapitre 3, soit au paragraphe précédent de ce chapitre. Il suffit de les combiner suivant le même principe que l’algorithme DT dyadique et l’algorithme DT non-uniforme se résume à :

- Calcul des ensembles $\{S_{l,s}\}_{1 \leq l \leq L, 0 \leq s < 2^{L-1}}$ correspondant à la totalité des partitions temporelles non-uniformes disjointes de $[0, N - 1]$ du signal avec n intervalles de taille variant de $2^{-L}N$ à $2^{-1}N$. (algorithme du paragraphe 3.3 du chapitre 3, page 93)
- Sur chaque intervalle temporel $I_j^{l,s}$, élément de la division non-uniforme, calcul de la décomposition sur L_l échelles en paquets d’ondelettes de Meyer non-uniforme : $Wpno^{(L_l)} \left(1_{I_j^{l,s}} f \right)$ (algorithme du paragraphe 5.2.3 de ce chapitre)

La recherche de la meilleure base suit un principe similaire à celui de l’algorithme DT dyadique :

- Recherche de la meilleure partition fréquentielle non-uniforme pour chaque intervalle $I_j^{l,s}$, et association du coût total de cette projection optimale au noeud ”temporel” d’indice (l, s, j)
- Recherche de la meilleure partition temporelle non-uniforme

Notons que l’algorithme Best-Basis n’est pas utilisé, mais le choix des meilleurs partitions non-uniformes fréquentielle et temporelle s’effectue grâce à la version modifiée de l’algorithme Best-Basis proposée dans le paragraphe 3.3.3 du chapitre 3.

Puisque la base de paquets d’ondelettes de Meyer non-uniformes constitue une base orthonormée de $l^2[0, N - 1]$, et que nous avons utilisé une segmentation temporelle sans recouvrement, l’algorithme proposé ci-dessus permet la construction d’une collection de bases orthonormées non-uniforme de $l^2[0, N - 1]$ variant dans le temps.

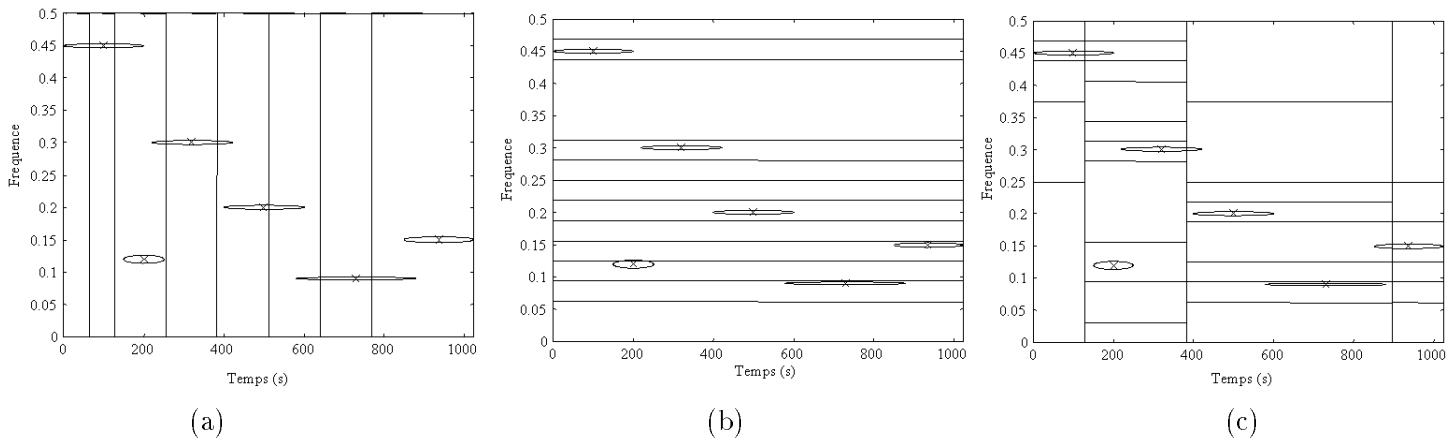


FIG. 5.10 – Signal "coif2" composé de 6 atomes TF (a) pavage associé à la meilleure base de Malvar non-uniforme (4 échelles) (b) pavage associé à la meilleure base de Meyer non-uniforme (4 échelles) (c) pavage associé à la meilleure base de double tree non-uniforme (3 échelles temporelles, 4 échelles fréquentielles)

5.3.1.3 Quelques applications

Afin d'étudier l'algorithme DT non-uniforme, nous utilisons le signal "coif2" composé de 6 atomes TF. Plutôt que d'illustrer la décomposition TF calculée à partir de la meilleure base sélectionnée, nous représentons le pavage du plan TF associée, ceci afin de bien "marquer" les différences entre les méthodes. Le signal a été décomposé par l'algorithme DT non-uniforme sur 3 échelles temporelles, et chacun des arbres fréquentiels a une profondeur de 4. A titre de comparaison, nous illustrons les découpages du plan TF associés à la meilleure base de la décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme, et à la meilleure base de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme. La meilleure base est sélectionnée selon un coût entropique. Nous présentons les résultats sur la figure 5.10.

Nous constatons que les découpages non-uniformes selon l'axe temporel (ondelettes de Malvar) ou selon l'axe fréquentiel (ondelettes de Meyer) permettent de séparer correctement les différents composants, mais dans une "seule direction". Par exemple, si l'on étudie le premier atome :

- Grâce à la décomposition de Malvar, nous concluons directement de la représentation TF sélectionnée que le premier atome est centré sur l'intervalle temporel $[64, 127]$, mais nous n'avons pas d'information directe sur sa fréquence fondamentale. Il faut étudier pour cela le maximum des coefficients.
- A l'inverse, avec la décomposition de Meyer, nous concluons directement de la représentation TF que cet atome a une fréquence centrale comprise dans l'intervalle $[0.4375, 0.4688]$ mais nous n'avons pas d'information directe sur sa position temporelle. Il faut étudier pour cela l'évolution temporelle des coefficients.
- L'algorithme DT non-uniforme nous fournit ces deux informations directement et simultanément. De plus, puisque le découpage est non-dyadique, les rectangles correspondant au découpage du plan TF s'adaptent le plus précisément possible à chaque atome du signal.

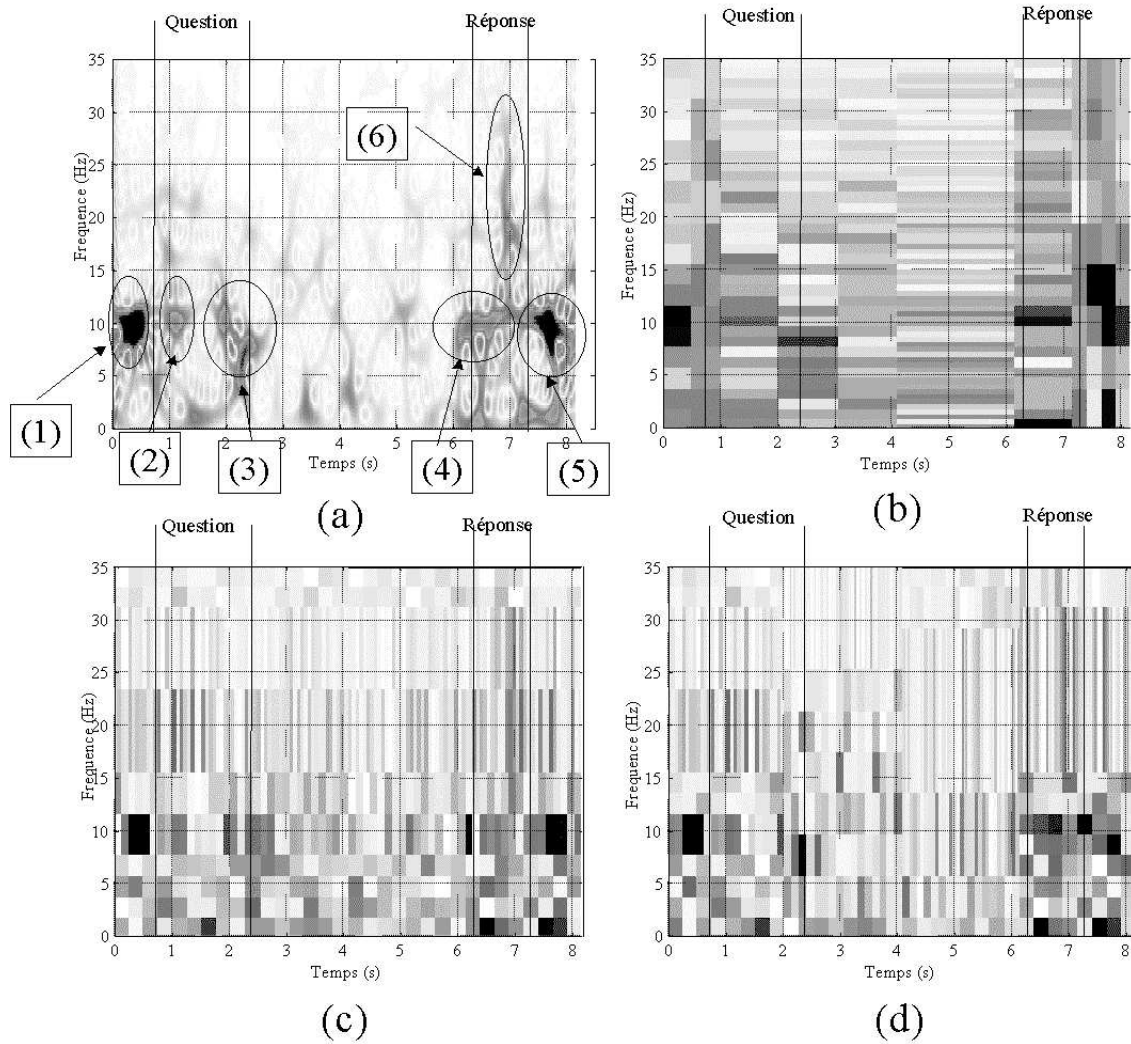


FIG. 5.11 – *Signal EEG1 (a) Représentation de Pseudo-Wigner-Ville lissée (b) représentation TF associée à la meilleure base de Malvar non-uniforme (4 échelles) (c) représentation TF associée à la meilleure base de Meyer non-uniforme (6 échelles) (d) représentation TF associée à la meilleure base de double tree non-uniforme (2 échelles temporelles, 6 échelles fréquentielles)*

On constate sur cet exemple que l'apport de l'algorithme DT non-uniforme en terme de qualité d'analyse est très important. Nous n'illustrons pas les décompositions dyadiques car elles ne sont qu'un cas particulier des transformations non-uniformes et obtiendront, au mieux, un résultat équivalent.

La figure 5.11 illustre les différences entre la décomposition de Malvar non-uniforme, la décomposition de Meyer non-uniforme, et l'algorithme DT non-uniforme sur un signal EEG (le signal EEG1). Nous rappelons la transformée de Wigner-Ville de ce signal sur cette figure. Si nous étudions en détail les différentes représentations TF et la transformée de Wigner-Ville, on constate que le principal apport de l'algorithme DT non-uniforme se situe sur l'analyse de la composante principale (intervalle de fréquence [8, 12]). Afin de commenter les avantages et les défauts de ces trois méthodes, nous isolons sur la représentation de Wigner-Ville six zones caractéristiques (numérotées

de 1 à 6 sur la figure 5.11a) :

1. *Concentration d'énergie localisée sur le bloc $[8, 12] \text{ Hz} \times [0, \text{début_question}]$* . Pour les trois décompositions, ce bloc d'énergie homogène est correctement mis en évidence.
2. *Réapparition de l'énergie sur la bande fréquentielle $[8, 12]$ et sur un intervalle de temps très court (juste après le début de la question)*. Du fait de la division temporelle, on constate que la décomposition de Malvar ne localise pas cette zone d'énergie en l'étirant trop dans le temps. La décomposition de Meyer et l'algorithme DT détectent correctement cette composante très courte dans le temps.
3. *Diminution rapide de la fréquence de la composante fondamentale (juste avant la fin de la question)*. La décomposition de Malvar met en évidence cette diminution de la fréquence, mais, encore une fois, avec une trop grande imprécision dans les coordonnées temporelles. Du fait du découpage fréquentiel global du signal, la transformée de Meyer n'est pas très sensible à cette évolution. Seule la présence d'énergie dans des zones plus basses fréquences la signale. Notons qu'en augmentant le nombre d'échelles de décomposition, la transformée de Meyer peut mettre en évidence cette caractéristique (en ayant une précision temporelle très moyenne), mais dans ce cas elle découpe d'avantage les zones homogènes (1) et (2) (cf figure 5.7c). Du fait du découpage adaptatif à la fois en temps et en fréquence, l'algorithme DT met en évidence avec une précision temporelle suffisante cette évolution.
4. *Réapparition d'énergie dans une bande fréquentielle très réduite centrée autour de 10, et débutant à l'amorce de la réponse*. La décomposition de Malvar détecte très bien cette caractéristique car elle est définie sur un large intervalle temporel. En revanche le découpage des paquets d'ondelettes est trop grossier, avec une bande fréquentielle trop large. Comme pour le point (3), ceci peut être amélioré avec un nombre d'échelles plus important mais provoquant dans d'autres zones un phénomène de sur-segmentation. L'algorithme DT fait apparaître correctement cette zone très localisée fréquentiellement et s'étalant sur un large intervalle temporel.
5. *Diminution de la fréquence de la composante principale à la fin de la réponse*. Le système de Malvar met en évidence cette évolution fréquentielle, mais du fait d'une segmentation temporelle très fine, la résolution fréquentielle est très mauvaise ce qui provoque la création d'un bloc fréquentiel s'étirant jusqu'à 15 Hz. Encore une fois, le découpage des paquets d'ondelettes est trop grossier et seul l'algorithme DT fait apparaître correctement cette évolution.
6. *"Colonne" d'énergie sur la bande fréquentielle $[15, 30]$ localisée un peu avant la fin de la réponse*. Avec le système de Malvar, cette colonne n'est pas du tout apparente du fait d'une très mauvaise résolution temporelle et d'un découpage trop important de l'axe fréquentiel. La décomposition de Meyer détecte cette zone en sélectionnant de grandes fenêtres fréquentielles, mais le résultat est moins précis que l'algorithme DT qui, pour cette zone temporelle, sélectionne une fenêtre fréquentielle allant de 15 à 30 Hz.

A partir de cet exemple, nous déduisons quelques conclusions permettant de faire un bilan sur les différentes techniques TF étudiées dans les trois derniers chapitres :

- La décomposition de Malvar s'adapte très bien à des composantes localisées ou très localisées

fréquentiellement mais qui ont un support temporel large. Lorsque le signal évolue rapidement dans le temps, cette représentation n'est pas performante. Par exemple, si l'on décompose une fonction dirac (figure 5.12a) le support temporel de la singularité est trop étroit et la représentation TF sélectionnée n'extrait alors pas correctement l'information du signal. Dans ce cas, la décomposition en paquets d'ondelettes et l'algorithme DT sont plus adaptées (figures 5.12b et 5.12c).

- La décomposition de Meyer met plus en évidence des évolutions rapides du signal dans le temps, mais il faut que le signal ait un comportement fréquentiel homogène sur toute sa durée. Si le signal présente différentes zones bien identifiées, le découpage fréquentiel sélectionné n'est pas forcément adapté pour toutes les zones, ce qui peut entraîner des phénomènes de sur-segmentation et donc une dispersion de l'énergie entre différentes bandes. Par exemple, si l'on décompose un signal stationnaire par partie (figure 5.13b), la représentation TF sélectionnée peut être complexe à analyser du fait d'une segmentation fréquentielle trop importante de certaines composantes. Dans ce cas, la décomposition de Malvar obtient les meilleurs résultats (figure 5.13a), mais la représentation TF associée à l'algorithme DT est tout à fait satisfaisante (figure 5.13c).
- La décomposition DT représente un compromis entre ces deux décompositions : elle permet de détecter des changements rapides du signal dans le temps, tout en s'adaptant à des changements fréquents importants. Quand on n'a pas de connaissances sur le signal que l'on étudie, elle constitue la meilleure méthode d'analyse.

Nous ne traitons pas de l'apport du non-uniforme par rapport aux décompositions dyadiques car, nous l'avons abordé de nombreuses fois durant les trois derniers chapitres, elles n'obtiennent, au mieux, qu'un résultat équivalent (par exemple sur le signal AR présenté sur la figure 5.13, une méthode dyadique sera forcément mise en défaut).

Enfin, notons que ces méthodes non-uniformes sont proposées dans un cadre "algorithmique", mais avant leurs utilisations dans des problématiques réelles, il faut s'attarder sur le critère de choix permettant la sélection de la meilleure représentation non-uniforme.

5.3.2 Evolution future des algorithmes non-uniformes

5.3.2.1 balanced double tree

Un première approche permettant d'obtenir des paquets d'ondelettes variant dans le temps est obtenue par l'utilisation d'un arbre binaire simple sur chaque segment dyadique du signal : l'algorithme DT. Pourtant, puisque nous calculons un découpage fréquentiel dyadique sur différents segments temporels, nous avons une certaine asymétrie dans le découpage sélectionné : nous avons plusieurs arbres de coupures fréquentielles sur chaque segment temporel mais pas l'inverse (figure 5.14a). Ceci est corrigé par l'arbre indiqué sur la figure 5.14b, dans lequel chaque signal "temps" ou "fréquence" est traité comme un candidat pour de futures segmentations fréquentielles et temporelles : cet algorithme se nomme "balanced double tree" [98], que nous noterons algorithme BDT. L'algorithme DT de la figure 5.14a est un cas particulier de l'algorithme BDT. la sélection de la meilleure base dans le cas BDT s'effectue d'une façon équivalente à l'algorithme DT. Simplement

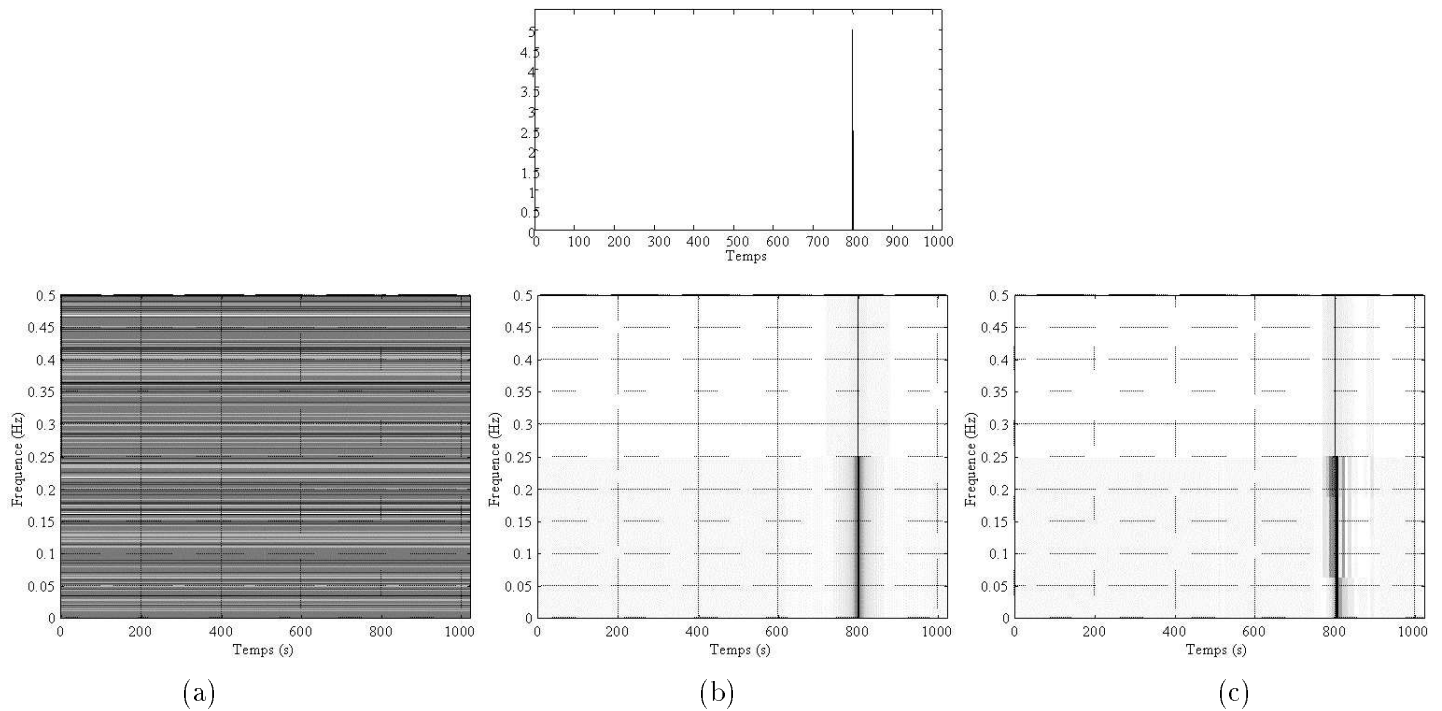


FIG. 5.12 – Décomposition d’une fonction Dirac (a) Représentation TF associée à la meilleure base de Malvar non-uniforme (4 échelles) (b) Représentation TF associée à la meilleure base de Meyer non-uniforme (4 échelles) (c) Représentation TF associée à la meilleure base de DT non-uniforme (2 échelles temporelles, 4 échelles fréquentielles)

à chaque noeud, nous sélectionnons selon le coût minimum, la partition temporelle ou la partition fréquentielle.

Les différences entre l’arbre simple, l’arbre DT et l’arbre BDT sont apparentes sur les découpages TF générés par ces différents algorithmes. Sur la figure 5.15a nous montrons un exemple de découpage calculé par l’arbre simple. Chaque découpage fréquentiel est appliqué sur la totalité du signal, puisque la structure de l’arbre ne varie pas au cours du temps. La figure 5.15b donne un exemple de découpage associé à l’arbre DT. La ligne verticale au milieu de la représentation correspond à une coupure dans le domaine temporel. Ensuite chacun des segments temporels est traité à partir de l’arbre simple appliqué dans le domaine fréquentiel. Enfin la figure 5.15c montre un exemple de découpage obtenu par l’arbre BDT. Ce découpage ne peut être obtenu ni par l’arbre, ni par l’arbre double.

De la même façon que pour l’algorithme DT, l’algorithme BDT est proposé à l’origine avec un découpage dyadique des axes temporel et fréquentiel. Nous pouvons intégrer nos méthodes non-uniformes pour définir un arbre BDT non-uniforme conjointement adaptatif en temps et en fréquence. Pour cela, il ”suffit” d’appliquer récursivement l’algorithme DT non-uniforme, que nous avons présenté dans le paragraphe précédent, sur chaque vecteur de coefficients construit lors de la décomposition. Mais, si le principe est simple à exposer, on imagine facilement que la complexité va vite devenir incontrôlable⁶ lorsque le nombre d’échelles augmente. C’est pourquoi nous ne présentons pas dans ce mémoire les résultats de cet algorithme BDT non-uniforme car il nous semble

6. A titre de comparaison, la complexité est supérieure à la recherche d’un découpage anisotropique non-uniforme d’une image.

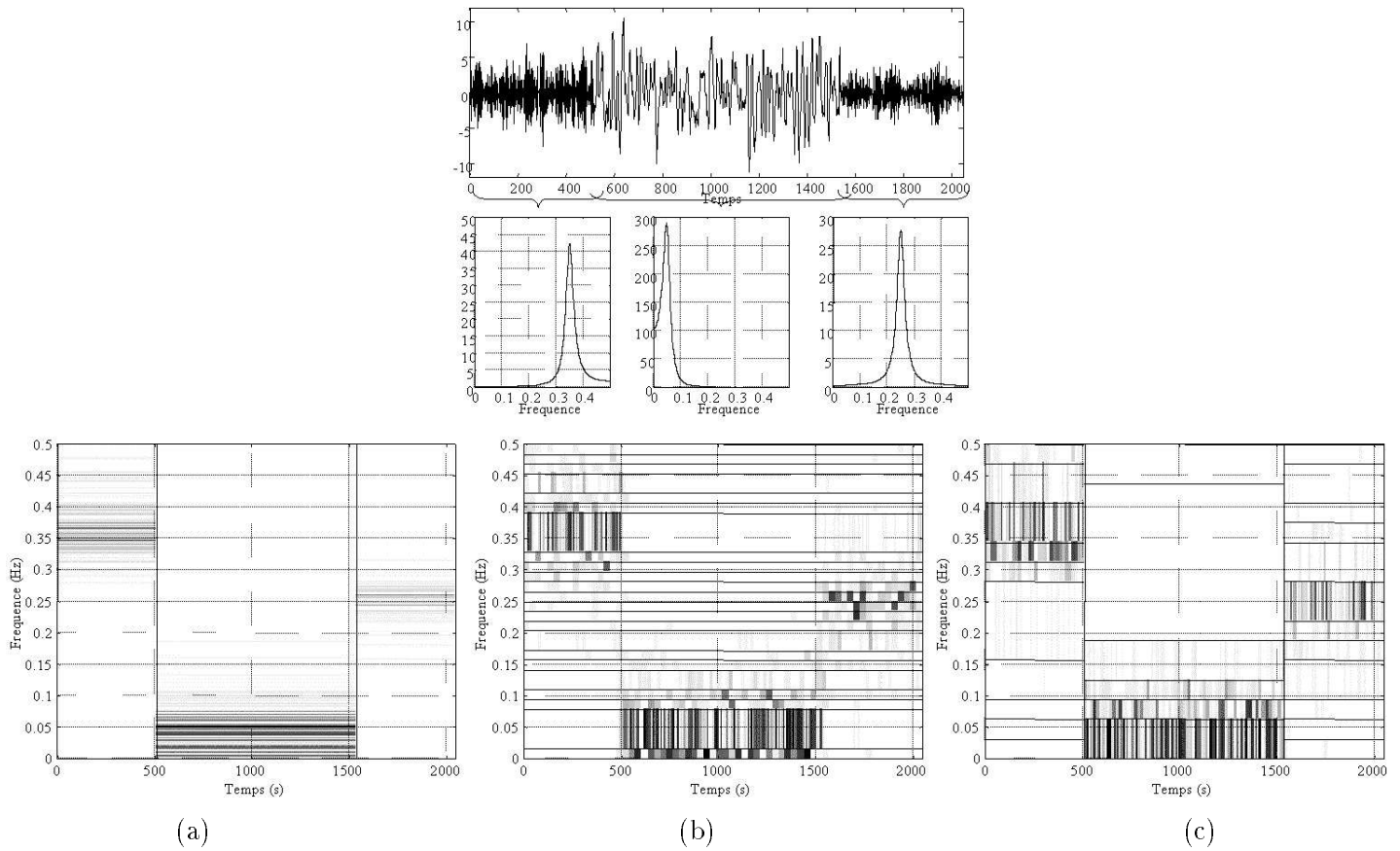


FIG. 5.13 – Décomposition d’un signal composé de trois modèles AR (a) Représentation TF associée à la meilleure base de Malvar non-uniforme (4 échelles) (b) Représentation TF associée à la meilleure base de Meyer non-uniforme (4 échelles) (c) Représentation TF associée à la meilleure base de DT non-uniforme (2 échelles temporelles, 4 échelles fréquentielles)

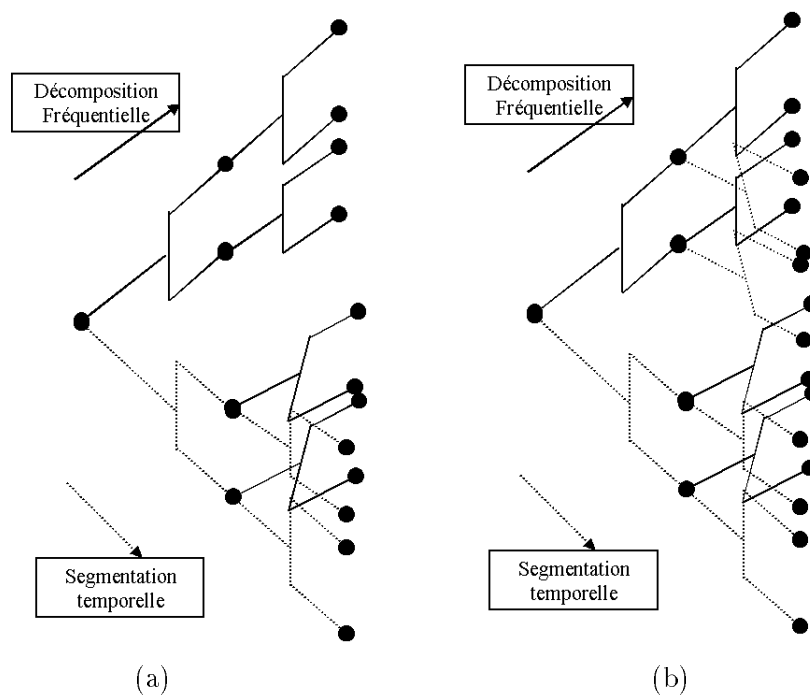


FIG. 5.14 – (a) Double tree (b) balanced double tree

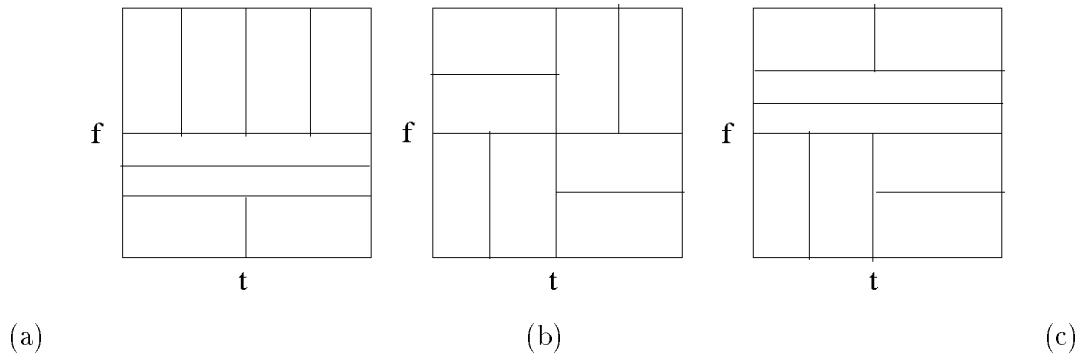


FIG. 5.15 – Exemple de découpage du plan TF (a) Paquets d’ondelettes (simple arbre) (b) arbre DT (c) Arbre DBT

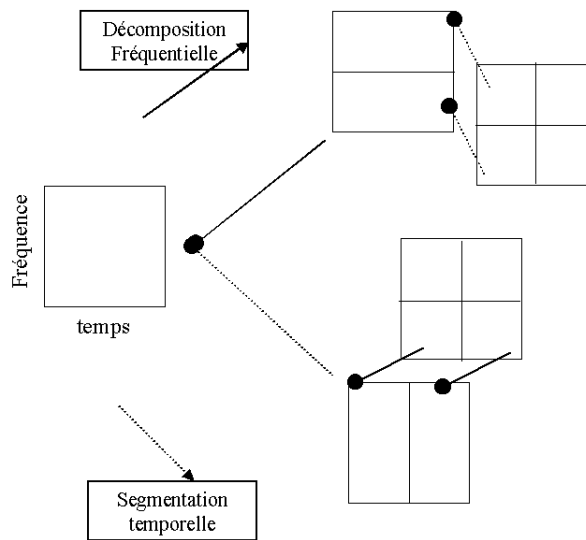


FIG. 5.16 – Exemple de découpage du plan TF avec l’arbre BDT

que les apports en terme de résultats ne sont pas significatifs par rapport à l’accroissement du coût de calcul. Il nous semble plus opportun de libérer certaines contraintes pour limiter la complexité de la méthode. Nous présentons différentes ”pistes” à étudier.

Découpage fréquentiel dyadique

Dans le cas d’un découpage temporel sans recouvrement et sans périodisation du signal, les opérations de ”coupure temporelle” et ”coupure fréquentielle” sont commutatives, c’est-à-dire qu’effectuer une coupure temporelle, puis ensuite une coupure fréquentielle, revient au même découpage que d’effectuer l’inverse. Dans ce cas un certain nombre de noeuds de l’arbre associé à l’algorithme BDT sont redondants : la complexité de calcul est alors équivalente à celle de l’algorithme DT. Pour illustrer ceci, nous étudions l’algorithme BDT dyadique sur deux échelles. La figure 5.16 présente les différentes étapes, ainsi que le découpage du plan temps-fréquence associé, montrant ainsi la redondance dans les partitions.

Nous pouvons d’ailleurs remarquer sur cette figure que l’algorithme BDT dyadique sans recouvrement est équivalent à rechercher le découpage anisotropique 2D optimale de l’image TF. Or, durant le chapitre 3, nous avons mis en évidence une certaine redondance dans la décomposition anisotropique 2D en ondelettes de Malvar. Nous la retrouvons ici. Si l’on reprend les remarques faites

dans le cadre de l'algorithme anisotropique, nous constatons que le nombre de coupures nécessaires pour calculer l'algorithme BDT dyadique est identique à celui de l'algorithme DT. La différence entre ces deux algorithmes n'apparaît que lors de la recherche de la meilleure base, où chaque noeud de la décomposition BDT a 4 fils en concurrences deux à deux (on retrouve évidemment le principe exposé durant la décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique).

La base de Haar permet un découpage temporel sans recouvrement et sans périodisation (car les filtres associés sont de longueur 2). Toutefois, nous ne pouvons effectuer qu'un découpage dyadique fréquentiel. Si l'on accepte un découpage dyadique de l'axe fréquentiel avec une faible séparation, on peut alors définir un algorithme BDT non-uniforme sur l'axe temporel de complexité raisonnable (égale à celle de l'algorithme DT). Pour cela, puisque nous sommes dans le cadre d'une transformée sans recouvrement temporel et sans périodisation, le calcul des coefficients se fait par l'intermédiaire de l'algorithme DT avec un découpage non-uniforme sur le temps et une base de Haar. Ensuite, lors de la recherche de la meilleure base, nous collectons, pour chaque noeud élément d'un arbre "fréquentiel", les coûts associés à des intervalles fréquentiels identiques mais correspondant à un découpage de l'intervalle temporel étudié. Par exemple, si le noeud étudié correspond à un intervalle temporel ${}^{(t)}I_j^{l,s}$ et à un intervalle fréquentiel ${}^{(f)}I_{j'}^{l',s'}$ nous collectons tous les coûts dans l'arbre DT associé à un bloc ${}^{(t)}I_{j_2}^{l_2,s_2} \times {}^{(f)}I_{j'_2}^{l'_2,s'_2}$ tel que

$${}^{(t)}I_{j_2}^{l_2,s_2} \subset {}^{(t)}I_j^{l,s} \text{ et } {}^{(f)}I_{j'_2}^{l'_2,s'_2} = {}^{(f)}I_{j'}^{l',s'}$$

Ceci permet ainsi de calculer une décomposition BDT, non-uniforme temporellement, sans accroissement de la complexité. On note dans cette méthode l'importance de conserver toutes les partitions non-uniformes et de ne pas intégrer la sélection du meilleur découpage dans la décomposition, ce qui n'est pas le cas avec la méthode de Xiong.

Post-traitement

Afin de limiter la complexité de la décomposition, nous pouvons aussi ne plus rechercher l'optimisation absolue de la représentation, mais simplement appliquer, après un premier découpage, un post-traitement limitant l'asymétrie de l'arbre DT.

L'idée est de calculer le pavage optimal du plan TF avec l'algorithme DT non-uniforme, puis ensuite essayer de rediviser par l'algorithme DT chaque bande fréquentielle sélectionnée. Nous ne sommes pas assuré d'obtenir le minimum de la fonction de coût, mais nous introduisons plus de souplesse dans la décomposition. Par exemple, on peut rechercher tout d'abord un découpage fréquentiel global et grossier du signal par l'intermédiaire des paquets d'ondelettes de Meyer non-uniformes, puis on analyse avec l'algorithme DT non-uniforme chaque vecteur de coefficients sélectionnés pour introduire un découpage temporel. L'algorithme se décline alors selon :

- Décomposition du signal en paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme
- Sélection de la base B optimale selon une fonction de coût
- Pour tout vecteur de coefficients $d_j^{l,s}$ tel que $(l, j, s) \in B$
 Décomposition de $d_j^{l,s}$ par l'algorithme DT non-uniforme
 Sélection de la meilleure représentation dans l'arbre DT non-uniforme

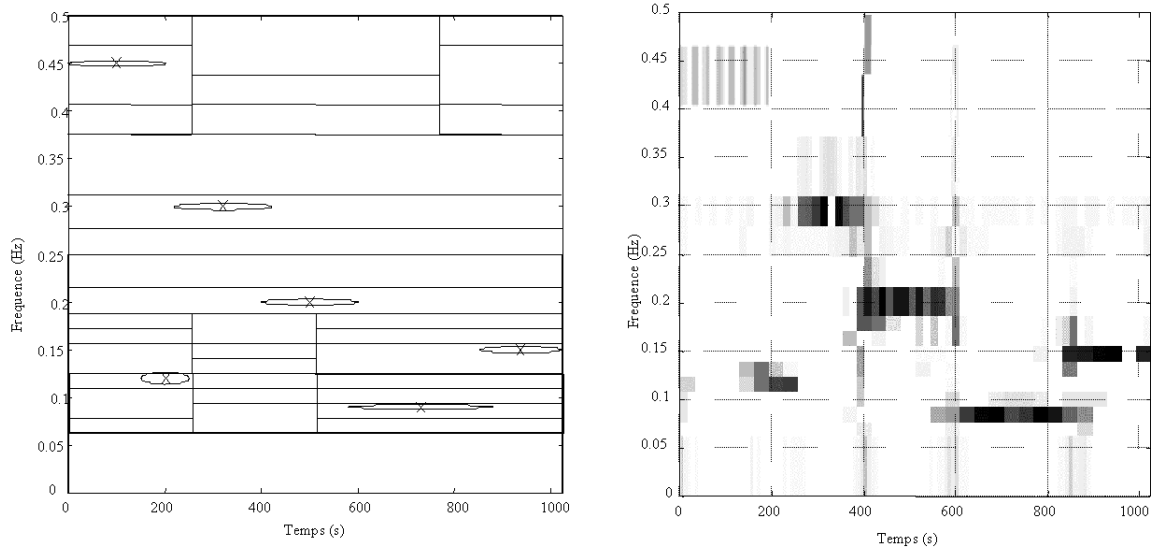


FIG. 5.17 – Décomposition du signal "coif2" par l'intermédiaire d'une base de paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme, puis par l'application de l'algorithme DT sur chaque bande fréquentielle sélectionnée.

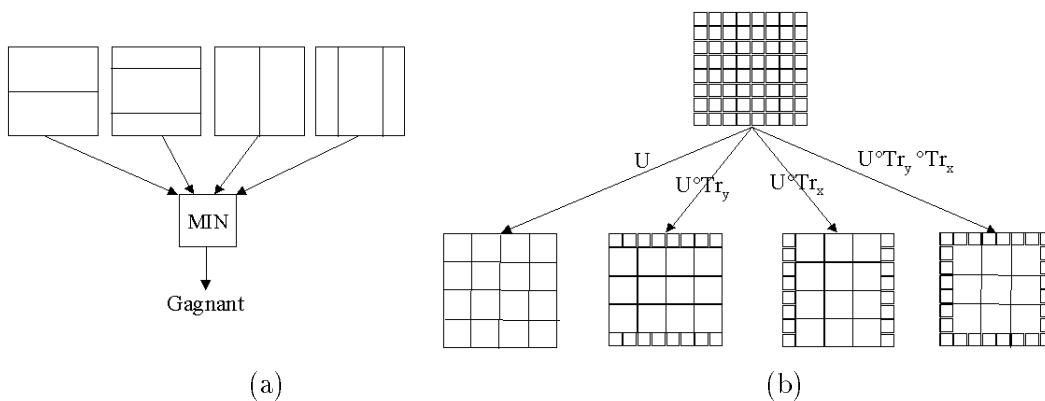


FIG. 5.18 – Découpage 2D non-uniforme sans contrainte d'optimisation absolue (a) Choix à chaque découpage (b) Translation complète de l'image selon une direction

A titre d'illustration, nous appliquons cette méthode sur le signal "coif2". Nous constatons sur la figure 5.17 que la partition ainsi sélectionnée ne peut pas être obtenue par un arbre simple ou par un arbre DT. Le découpage permet de séparer les différents composants, ceci s'illustre sur la décomposition TF associée.

5.3.2.2 Une décomposition 2D non-uniforme

Le découpage non-uniforme d'une image reste un problème complexe. La difficulté ne se situe pas au niveau de la définition de l'algorithme mais plutôt, comme nous l'avons noté dans le chapitre 3, au niveau de la complexité algorithmique. En effet, si l'on veut rechercher une partition non-uniforme optimale 2D, nous avons alors un nombre de combinaisons qui devient vite incontrôlable lorsque le nombre d'échelles de décomposition augmente, et ceci même avec une prise en compte des différentes redondances.

Xiong soulignait à la fin de sa thèse ce problème de calcul non-uniforme 2D. Et il énonçait alors

comme perspective une méthode se basant tout d'abord sur un pré-découpage dyadique puis un raffinement non-uniforme sur chaque bloc sélectionné. On peut en effet envisager d'utiliser, par exemple, la décomposition anisotropique 2D, introduite dans le chapitre 3, pour obtenir un pré-découpage de l'image. Puis calculer sur chaque bloc de l'image, une décomposition non-uniforme à partir d'une extension à la dimension deux de l'algorithme 1D proposé dans le chapitre 3.

Nous n'avons pas eu connaissance dans la littérature de telles méthodes : faut-il penser que cette pré-segmentation dyadique est trop restrictive ?

Pour arriver à une décomposition non-uniforme 2D de complexité raisonnable, nous pouvons aussi réduire la contrainte d'optimisation absolue de la partition. Dans ce cas, nous proposons deux solutions :

- On choisit à chaque étape de la décomposition la meilleure partition possible avant de continuer le découpage (figure 5.18a). Nous pouvons ainsi sélectionner, avec une faible complexité, une partition anisotropique non-uniforme. Mais il est évident que cette partition n'est pas optimale pour la fonction de coût, puisque le choix se fait au fur et à mesure de la division.
- On limite le nombre de translations possibles, à savoir : aucune translation, translation de un intervalle pour toutes les lignes, translation de un intervalle pour toutes les colonnes, translation de un intervalle pour toutes les lignes et colonnes (figure 5.18b). Cette méthode s'inscrit dans une généralisation "réduite" de la méthode de partition proposée dans le chapitre 3. Nous constatons sur la figure 5.18b que le nombre de combinaisons, pour chaque bloc, est de 4, ce qui est raisonnable. Comme précédemment, cette approche ne permet pas d'obtenir le minimum absolu de la fonction de coût, mais elle nous semble fort prometteuse, car elle permet d'étudier assez rapidement, un grand nombre de partitions différentes.

Calculer directement une décomposition non-uniforme, même définie sous certaines contraintes, plutôt que d'effectuer une étape de pré-découpage dyadique, nous semble plus adapté, car le pré-découpage implique trop de contraintes que le post-traitement ne pourra pas contourner.

La proposition d'un algorithme de partition non-uniforme 2D est maintenant pour nous une étape fondamentale pour le développement de nouvelles méthodes d'analyse 2D. En effet à partir des principes exposés dans ce mémoire, et de ce schéma de partition non-uniforme, nous pourrions construire facilement :

- Une décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme 2D,
- Une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer non-uniforme 2D
- Une décomposition en paquets d'ondelettes variant dans l'espace entièrement non-uniforme à la fois dans l'espace et la fréquence.

C'est ce dernier point qui nous semble le plus important, car Xiong a montré durant sa thèse [98] que l'algorithme DT dyadique 2D donnait de très bons résultats dans le domaine, par exemple, de la compression. Son extension par une méthode doublement non-uniforme nous permet d'avoir un découpage le plus adaptatif possible de l'image et donc de concentrer au mieux l'information sur quelques coefficients : on peut espérer alors des améliorations significatives.

5.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce cinquième et dernier chapitre un ensemble de décompositions non-uniformes. Ces décompositions, de par leur souplesse de division, permettent d'obtenir des représentations TF qui s'adaptent très bien à l'évolution temporelle et fréquentielle du signal.

Dans un premier temps, nous avons utilisé la liberté qui nous était offerte par le système de décomposition de Meyer, pour définir un algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer orthogonales et non-uniformes. Cette méthode nous permet d'étudier tous les découpages fréquentiels possibles du signal et ainsi d'extraire une base optimale pour l'étude de signaux ayant un comportement globalement stationnaire dans le plan fréquentiel. L'illustration sur des signaux EEG a montré que cette analyse est plus "fine" que la décomposition dyadique en paquets d'ondelettes, mettant ainsi en évidence certains phénomènes qui pouvaient se disperser entre plusieurs bandes dyadiques et donc qui n'étaient pas détectés.

Dans un second temps, nous avons introduit l'algorithme Double Tree qui permet de définir une décomposition en paquets d'ondelettes variant dans le temps. En utilisant les concepts proposés dans le cadre du chapitre 3, et au début de ce chapitre, nous avons alors défini une décomposition conjointement non-uniforme et adaptative sur les axes temporel et fréquentiel. Cette méthode s'inscrit comme un aboutissement des différentes techniques TF que nous avons étudiées durant les chapitres 3, 4 et 5. Comme nous l'avons vu sur des signaux de tests, elle offre un compromis entre la décomposition de Malvar, qui est inadaptée aux signaux présentant des singularités, et la décomposition en paquets d'ondelettes qui va donner un résultat grossier lors de l'étude de signaux, par exemple, stationnaires par partie. La non-uniformité permet à la méthode de s'adapter à tous signaux réels en ne posant aucune contrainte sur la définition des intervalles, si ce n'est qu'ils aient une longueur égale à une puissance de deux.

Toutefois, ce chapitre présente simplement des concepts algorithmiques pour de futures recherches, mais leurs intégrations dans des problématiques concrètes telle que l'EEG ne sont pas pleinement finalisées. Il faut en effet nous pencher sur le problème de la sélection de la meilleure représentation non-uniforme qui est un aspect aussi important que l'algorithme de décomposition.

Enfin, la prochaine étape à franchir reste l'extension de nos algorithmes non-uniformes en dimension 2.

Conclusion

Définir une méthodologie permettant d'extraire, avec une précision maximale, l'information présente dans un signal est primordial dans de nombreuses applications. Les décompositions numériques temps-échelle et temps-fréquence, définies dans le cadre général des ondelettes, fournissent un ensemble de solutions possédant chacune leurs caractéristiques propres. Toutefois, certaines de ces méthodes numériques, présentes dans la littérature, proposent un cadre général mais possèdent certaines contraintes qui peuvent être dommageables par rapport au but recherché : faire apparaître l'information d'une façon optimale. L'objectif de ce travail a donc été d'étudier, dans un premier temps, le schéma de fonctionnement, les propriétés, mais aussi les limites de ces différents algorithmes afin, dans un second temps, de modifier certains aspects des méthodologies pour rendre, soit la représentation plus adaptative, soit la classification plus pertinente.

Un microscope mathématique plus performant ?

Nous nous sommes intéressés tout d'abord à la capacité des ondelettes d'étudier localement un signal, et donc à séparer ses différents éléments. En modifiant, soit le schéma de décomposition, soit la procédure de sélection des coefficients pertinents, nous avons introduit des méthodologies plus robustes, ou traitant des cas particuliers comme les signaux très fortement bruités.

Débruitage

L'extension du débruitage, tel qu'il a été proposé par Donoho *et al.*, reposant sur le seuillage des coefficients d'ondelettes, a fait l'objet du premier chapitre. Après avoir rappelé son principe, nous avons mentionné que cette méthode faisait apparaître un certain nombre de discontinuités et qu'il pouvait être mis en échec face à des signaux fortement bruités. Nous avons alors introduit le principe du débruitage non-décimé, proposé durant notre DEA, et finalisé au début de cette thèse, qui apporte une amélioration sensible des résultats grâce à la redondance présente dans la décomposition. De plus, l'estimation du seuil à partir de toute la décomposition non-décimée permet de proposer un seuil robuste, tout en conservant une complexité algorithmique raisonnable. Puis, nous avons intégré cette méthode non-décimée dans un algorithme itératif permettant de restaurer des signaux fortement dégradés dont on possède un faible nombre d'occurrences. Cette intégration permet de sélectionner pas à pas les coefficients associés à l'information. Puisque la décomposition en ondelettes possède des propriétés remarquables pour des problématiques de débruitage, l'algorithme converge rapidement vers le signal recherché et ne nécessite donc qu'un faible nombre d'occurrences contrairement aux méthodes statistiques. La réévaluation de l'erreur de reconstruction à chaque itération permet d'extraire des informations noyées dans le bruit, qui sont supprimées lors du traitement d'une seule occurrence. L'illustration de ces algorithmes sur des signaux et images de tests a mis en évidence leurs potentialités, confirmées par les résultats obtenus sur des images cérébrales d'IRM fonctionnelle.

Grâce à leur définition générale, les améliorations que l'on peut apporter à ces différentes méthodes sont nombreuses. Dans le cadre des méthodes itératives, il serait, par exemple, intéressant d'utiliser une base de paquets d'ondelettes pour analyser le résidu à chaque itération, afin de ne se focaliser que sur les bandes de fréquences dans lesquelles de l'information est encore présente.

Maxima d'ondelettes

La seconde méthode étudiée, permettant d'analyser localement un signal, a été les maxima d'ondelettes (chapitre 2). Cette représentation permet de caractériser le gradient d'un signal à différentes échelles. Un certain nombre de propriétés liées à la propagation des maxima est très utiles dans des problématiques de segmentation ou de débruitage. Toutefois, nous avons mis en évidence des particularités du banc de filtres associé qui pouvaient diminuer la robustesse de l'analyse : la décomposition provoque une translation des positions des points d'inflexion à travers les échelles, et elle introduit une corrélation entre les dérivés partielles lors de son extension à l'image. Ensuite, nous avons constaté que les caractéristiques permettant de classifier les différents maxima étaient, soit peu étudiées dans la littérature pour une grille dyadique, soit trop sensibles au bruit. Notre apport sur cette représentation s'est articulé selon trois axes :

- Modification du schéma de décomposition. Afin de résoudre le problème de translation, nous avons proposé une simple modulation du filtre dérivateur afin que les translations dues aux filtres passe-bas et passe-haut se compensent. Ensuite pour obtenir une représentation 2D sans corrélation entre les dérivées partielles, nous avons dilaté les filtres, et de ce fait les dérivées sont calculées symétriquement autour d'un point central, éliminant ainsi la corrélation. Mais ces nouveaux filtres 2D nous obligent à interpoler les coefficients de la première échelle d'ondelettes. Pour cela, nous avons utilisé la technique, proposée par Vetterli, basée sur l'estimation du coefficient de régularité de Lipschitz
- Chaînage des maxima dans le cadre monodimensionnel. Quelle que soit la problématique, l'utilisation des maxima suppose un chaînage à travers les échelles. Or, nous avons vu que le chaînage dans une décomposition dyadique est complexe car la représentation n'est pas dense. Nous avons proposé un algorithme de chaînage simple et robuste qui repose sur deux mesures mises en concurrence. Le premier paramètre avantage la similitude entre les amplitudes, le second, avantage la similitude en position. Ensuite, une confrontation est effectuée et le maximum qui correspond à l'évolution la plus régulière est relié. Enfin, un post-traitement complète toutes les chaînes débutant aux échelles grossières qui ne se poursuivent pas aux échelles les plus fines. L'algorithme a montré, durant nos expérimentations, un comportement robuste grâce à la double sélection, ainsi qu'à l'étape de post-traitement. Nous avons pu alors proposer une méthodologie de segmentation, qui est incorporée dans un module de traitement permettant d'analyser des signaux de radiocommunication. Le chaînage permet aussi de segmenter les signaux "audio" et "mouvement des lèvres", signaux annexes à des enregistrements EEG, apportant ainsi des données très importantes : le début et la fin des questions et des réponses formulées lors d'un protocole permettant de mettre en évidence les phénomènes de désynchronisation des circuits neuronaux.
- Sélection des maxima 2D. Dans le cadre de l'image, les maxima s'utilisent généralement dans un repère polaire. Chaque maximum se caractérise donc selon deux mesures : l'angle et la

norme. La majorité des algorithmes proposés dans la littérature n'utilise que l'information norme, or nous avons montré que cette caractéristique est plus sensible au bruit que l'angle. Nous avons alors introduit un postulat selon lequel l'information, même bruitée, conserve un angle de gradient stable, alors que l'angle du bruit fluctue. Ceci nous a permis de définir une méthodologie discriminatoire qui, étendue au cadre multiéchelles, et associée à l'algorithme de reconstruction de Mallat, construit un nouvel algorithme de débruitage 2D. Cependant, cette discrimination nécessite l'étude de l'angle sur plusieurs réalisations. Nous avons proposé de simuler ces différentes réalisations selon l'étude de l'évolution de l'angle dans un proche voisinage spatial sur la même échelle et/ou à l'échelle supérieure. Notre méthode nécessite le réglage de plusieurs paramètres, mais, du fait de la confrontation des deux votes, nous obtenons un algorithme de débruitage robuste face aux paramètres. Bien évidemment, cette méthode s'applique en priorité aux images où l'information "contour" est prépondérante, comme, par exemple, les images d'angiographie.

Nous avons abordé le problème du débruitage 2D par maxima d'ondelettes suivant une certaine approche : sélection des maxima suivant un critère. Mais la littérature est riche de méthodes permettant, à partir d'une image du gradient, la détection des contours dans un environnement bruité. Une seconde étape à ce travail serait de généraliser toutes ces méthodes à la représentation multiéchelles et de reconstruire une image à partir des contours détectés, afin de définir de nouveaux algorithmes de débruitage. Il est difficile de présager des résultats, mais l'étude ne peut être qu'instructive.

Des décompositions atomiques temps-fréquence optimales ?

La seconde partie de ce mémoire s'est attachée à définir des méthodes permettant de représenter au mieux l'information TF contenue dans un signal. Nous avons quitté le domaine d'analyse multiéchelles des fonctions pour nous pencher sur les méthodes permettant de découper le plan temps-fréquence suivant un pavage optimal.

Les ondelettes de Malvar

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les ondelettes de Malvar et plus généralement les bases fenêtrées. Ces méthodes s'inscrivent dans la continuité de la transformée de Fourier à fenêtres, car elles appliquent une segmentation adaptative de l'axe temporel. Nous avons vu qu'elles conviennent bien aux signaux que l'on considère stationnaires par partie, car elles vont découper et analyser chaque zone homogène. L'algorithme numérique associé, proposé par Coifman et Meyer, permet de sélectionner le découpage optimal avec une faible complexité. Toutefois, nous avons relevé deux limites à cet algorithme :

- Bien que la définition "théorique" ne pose aucune contrainte sur la partition, l'algorithme numérique n'étudie qu'une certaine catégorie de divisions : les partitions temporelles dyadiques, ceci afin de limiter la complexité. Nous avons proposé un algorithme de découpage 1D non-uniforme nous permettant de construire une décomposition en ondelettes de Malvar non-uniforme, et ceci avec une complexité algorithmique optimale. L'illustration sur des signaux a montré le gain en performance en ce qui concerne le coût de codage de cette décomposition "plus" adaptative. De plus, la méthode proposée nous permet de fixer un cadre général de décomposition en fonction φ -non-uniforme de complexité limitée. Ce principe de partition non-uniforme est l'un des éléments fondamentaux de notre travail, car sa formulation générale

nous a permis de l'utiliser dans le cadre des paquets d'ondelettes de Meyer et dans la théorie des arbres doubles.

- Dans un second temps nous avons remis en cause les différentes fonctions de coûts proposées dans la littérature, qui ne mesurent que localement, sur chaque intervalle temporel, la distribution des coefficients. Nous avons constaté lors de nos expérimentations que ces mesures, telle l'entropie, provoquent des phénomènes de sur-segmentation, car elles sont peu robustes face au bruit ou face à des variations d'amplitudes. Afin de déterminer si une coupure temporelle permet de séparer deux composantes, nous mesurons une distance spectrale entre les deux sous-fenêtres résultant de la division. Pour estimer convenablement le spectre sur chaque intervalle, nous avons généralisé la méthode proposée par Moulin en débruitant le log-périodogramme par un seuillage des coefficients d'ondelettes non-décimés. Cependant, afin d'avoir un algorithme de complexité réduite, le principe d'un arbre binaire est utilisé (i.e. partition dyadique). Un post-traitement est donc appliqué après la sélection de la partition afin de mesurer la pertinence des coupures créées du fait du caractère dyadique de la segmentation. Cette méthode a permis un découpage rapide et simple des signaux, par exemple, audio mettant ainsi en évidence, globalement, les zones "quasi-stationnaires". A travers l'extension à la dimension 2 de l'arbre des distances, nous avons proposé certains éléments :

1. Un algorithme rapide de décomposition en ondelettes de Malvar anisotropique
2. Une estimation du log-périodogramme 2D par débruitage en ondelettes non-décimé
3. Un formalisme général pouvant être utilisé dans un autre algorithme de pré-découpage avec d'autres mesures de similarité.

Les résultats obtenus par l'application de la décomposition anisotropique de Malvar 2D associée à un arbre de distances spectrales ne sont pas pleinement satisfaisants en terme de qualité de segmentation : il est certain que le découpage par des rectangles d'une image ne peut pas isoler précisément chaque objet. Toutefois, un arbre de distances spectrales associé à une décomposition anisotropique permet d'améliorer sensiblement les résultats par rapport au coût entropique. D'autre part, le découpage sélectionné peut être envisagé comme une première étape permettant de diviser une image en blocs ne contenant plus que deux composantes différentes. A travers ce chapitre 3, nous avons pu être mis en évidence les limites de la décomposition en ondelettes de Malvar, surtout dans le cadre bidimensionnel.

Paquets d'ondelettes de Meyer

Avec le chapitre 4, nous avons étudié la décomposition duale de celle des ondelettes de Malvar : les paquets d'ondelettes. Cette décomposition permet d'obtenir une représentation TF optimale selon une fonction de coût, ceci grâce à un découpage adaptatif de l'axe fréquentiel. Néanmoins, les différents exemples numériques ont montré que l'utilisation de filtres à support temporel fini dégradait la qualité de la représentation ainsi construite. Nous avons alors proposé deux modifications :

- En reprenant le travail de Kolaczyk [57] mené dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Meyer, nous avons proposé un nouvel algorithme numérique : la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer. Cette transformation consiste simplement à utiliser un fenêtrage et à

appliquer des décompositions trigonométriques dans le plan fréquentiel. Il en résulte une base de paquets d'ondelettes associée à des filtres à support fréquentiel fini, séparant ainsi mieux les différents composants fréquentiels que les filtres "classiques".

- En utilisant les qualités de cette nouvelle base, nous introduisons une fonction de coût qui va mesurer le taux de "ressemblance" des coefficients entre deux sous-fenêtres après division d'un intervalle fréquentiel. Puisque les coefficients d'ondelettes s'expriment dans le domaine temporel, nous proposons une mesure d'intersection d'enveloppe. Comme pour les ondelettes de Malvar, ce coût évite le phénomène de sur-segmentation (de l'axe fréquentiel) présent avec des coûts tel que l'entropie. L'application de cette méthode sur des signaux réels, notamment les signaux EEG, a fourni des caractéristiques prépondérantes sur l'évolution du signal. L'extension à la dimension deux définit un espace de représentation dans lequel, théoriquement, les différentes textures se séparent d'une façon optimale. Nous avons donc testé un algorithme de segmentation appliqué dans cet espace optimal. Le choix a été fait d'utiliser les nuées dynamiques pour regrouper les différents pixels de l'image, mais à partir du protocole général que nous avons proposé, toute méthode permettant de classifier un espace de mesures peut être utilisée. Les résultats obtenus sur des texture synthétiques et réelles sont encourageants, et l'étape suivante est de tester d'autres méthodes de classification plus "élaborées".

doubles arbres

A ce stade de notre travail, il restait encore quelques contraintes sur nos représentations TF 1D :

- le découpage fréquentiel issu de la décomposition en paquets d'ondelettes est forcément dyadique
- les deux méthodes (Malvar et paquets d'ondelettes) fournissent des découpages adaptifs mais soit de l'axe temporel, soit de l'axe fréquentiel, jamais conjointement.

Nous avons étudié dans le cinquième et dernier chapitre une famille de solutions permettant de construire une décomposition adaptative à la fois sur le temps et la fréquence et qui soit totalement non-uniforme.

Dans un premier temps, puisque les ondelettes de Meyer sont basées sur l'algorithme de Malvar, nous avons exploité la liberté qui nous était offerte pour définir une décomposition en paquets d'ondelettes non-uniforme. En utilisant les principes de division non-uniforme exposés dans le chapitre 3, nous construisons un algorithme numérique, de complexité minimale, qui étudie toutes les partitions possibles de l'axe fréquentiel. L'application de cette nouvelle décomposition sur des signaux réels a montré que, pour un coût additif tel que l'entropie, la décomposition non-uniforme permet de mieux mettre en évidence certaines évolutions du signal, car le découpage fréquentiel est plus "adaptatif".

Dans un second temps, nous avons repris la théorie des doubles arbres, proposée par Vetterli *et al.* [51], combinant à la fois le principe de la partition adaptative fréquentielle et temporelle. Comme nous l'avons vu, l'algorithme est simple : à la place d'une base trigonométrique pour chaque intervalle temporel, comme dans les ondelettes de Malvar, on utilise une décomposition en paquets d'ondelettes. L'algorithme des doubles arbres représente la méthode "ultime" permettant de découper le plan temps-fréquence en rectangle optimum. Mais dans sa formulation originale, nous avons

vu qu'elle conserve une contrainte : les divisions sont dyadiques. En intégrant notre méthode de partition non-uniforme d'un axe, à la fois sur l'axe temporel et fréquentiel, nous obtenons, au prix d'une complexité plus importante mais "contrôlée", un pavage du plan temps-fréquence optimal qui a pour seule contrainte que les cotés des rectangles soient égaux à des puissances de deux. Nous avons illustré sur quelques signaux synthétiques et réels la potentialité, et surtout la souplesse de cette nouvelle décomposition.

Ce dernier chapitre pose les bases de nouvelles recherches, mais les décompositions non-uniformes doivent évoluer selon deux plans :

- Les coûts utilisés dans le cadre des décompositions non-uniformes ne sont pour l'instant qu'une mesure de dispersion. Or nous avons insisté, dans le cadre dyadique, sur le fait que ces coûts n'étaient pas forcément les plus pertinents. Il faut donc maintenant définir de nouvelles mesures pour le non-uniforme, qui peuvent s'appliquer à un découpage pour lequel les noeuds de l'arbre n'ont plus simplement deux fils de tailles égales.
- L'extension à la dimension 2 pose certains problèmes en terme de complexité algorithmique. Nous avons proposé à la fin de ce mémoire quelques solutions en supprimant la contrainte d'optimalité absolue de la décomposition. Cet aspect doit être ré-étudié avec attention car, comme nous l'avons mentionné, l'algorithme des doubles arbres possède déjà des résultats très intéressants pour la compression d'image dans sa formulation dyadique. Or, nous avons montré que le dyadique n'est qu'un cas particulier de nos décompositions non-uniformes. On peut donc s'attendre à des améliorations significatives en terme de taux de compression.

Le futur

En plus de toutes les perspectives "théoriques" énumérées dans cette conclusion, s'ajoutent des perspectives "pratiques". Nous avons proposé des solutions permettant d'assouplir ou d'augmenter la performance d'un certain nombre d'algorithmes basés sur les ondelettes. Quelques applications ont été utilisées au cours de ce mémoire pour illustrer ou valider nos méthodes : l'EEG, la parole, les signaux de télécommunication, les images médicales, etc. Il nous faut maintenant réfléchir à l'exploitation de la potentialité de nos méthodes dans ces applications et dans d'autres. Les quelques objectifs que nous nous fixons sont les suivants :

Utilisation des représentations atomiques adaptatives TF dans des problèmes d'analyse de signaux

La première idée est d'ajouter une sur-couche graphique "utilisateur" sur les méthodes informatiques proposées durant la deuxième partie de ce mémoire (chapitre 3,4 et 5) afin de concevoir un outil d'analyse exploitable par les spécialistes des différents domaines avec lesquels nous avons collaboré.

Ensuite, les différentes applications 1D présentées dans ce mémoire ont été les résultats d'études de "potentialité" de nos méthodes pour trois domaines. Nous allons maintenant développer réellement ces applications pour :

- L'aide à l'étude de problèmes de la phonétique anglaise en collaboration avec les phonéticiens de la MSHS de Poitiers (S. Hanote).
- L'aide à la caractérisation des différents comportements des signaux de téléphonie mobile selon le modèle de propagation du signal en collaboration avec l'équipe radiocommunication

de notre laboratoire (R. Vauzelle).

- L'aide à la caractérisation des phénomènes de désynchronisation des signaux EEG en collaboration avec les médecins du CHU de Poitiers (J. Paquereau).

Chaîne de transmission d'images

Au cours de ce mémoire, nous avons proposé tous les ingrédients d'une chaîne complète de transmission d'images : des méthodes de restauration de données, des méthodes de segmentations globales ou fines et enfin des décompositions optimales au sens d'un critère qui peut être une mesure de compression/distorsion, donc tout à fait adaptée à un algorithme de compression. Il reste à articuler les différents modules entre eux. Attardons nous quelques instants sur le module "compression" peu explicité dans ce mémoire. Nous envisageons un traitement double comme l'avait proposé Mallat : codage des contours de l'image avec une sélection au préalable des maxima d'ondelettes possédant un angle stable, puis projection des textures dans une base complètement non-uniforme pour un codage vectoriel de ces textures. Nous pouvons ensuite envisager une reconstruction de qualité variable, et donc un taux de compression variable, selon la finalité de l'image.

Généralisation des différents algorithmes 2D proposés aux images couleurs

Le domaine des images couleurs, encore peu étudié, connaît actuellement un essor considérable au niveau des applications. Les premières expérimentations, notamment la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer d'images couleurs, ont montré un potentiel pour des problématiques de classification, de segmentation ou de compression. Le domaine d'étude reste encore vaste et ouvert.

De nombreuses extensions des algorithmes numériques temps-échelle et temps-fréquence sont encore à étudier ...

Bibliographie

- [1] S. Adak. Time-dependent spectral analysis of nonstationary time series. Technical report, Stanford University, 1995.
- [2] E. Ademovic, G. Charbonneau, and J.C. Pesquet. Wheezing lung sounds analysis with adaptive local trigonometric transform. In *First CORSA WP III Symposium on Signal Processing in Lung Sound Analysis*, Helsinki University of Technology (FI), June 1995.
- [3] E. Ademovic, P. Helisto, and J.C. Pesquet. Segmentation of infant respiratory sounds with malvar's wavelets. In *Inter. Conf. EMBS Workshop on Wavelets in medicine and biology*, Baltimore, November 1994. IEEE.
- [4] M. Antonini, M. Barlaud, I. Daubechies, and P. Mathieu. Image coding using vector quantization in the wavelet domain, April 1990.
- [5] P. Auscher, G. Weiss, and V. Wickerhauser. Local sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets. In C. CHUI, editor, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, pages 237–256. Academic Press, San Diego, 1992.
- [6] A.WITKIN. Scale space filtering. 1983.
- [7] M. Basseville. Distances en traitement du signal et reconnaissance des formes. Technical report, IRISA, 1988.
- [8] A. Bijaoui, J. Starck, and F. Murtagh. Restauration des images multi-echelles par l'algorithme a trous. *Traitement du Signal*, 11:232–243, 1994.
- [9] P. Burt and E. Adelson. The laplacien pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. Comm.*, 31:482–550, 1983.
- [10] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. on PAMI*, 8(6):679–698, 1986.
- [11] R. Carmona, W. Hwang, and R. Frostig. Wavelet analysis for brain-function imaging. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 14(3):556–564, September 1995.
- [12] R.A. CARMONA. Extrema reconstruction and spline smoothing: Variations on an algorithm of mallat and zhong. In A. Antoniadis and G. Oppenheim, editors, *Wavelets and Statistics*, volume 103 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 83–94, New York, 1995. Springer-Verlag.

-
- [13] P. Carré. Débruitage par transformée en ondelettes : applications aux images irmf. Rapport de DEA, 1996.
- [14] P. Carré and C. Fernandez. Débruitage d'une image par représentation en bords multiéchelles : utilisation de l'information angle. In *16ème colloque GRESTI*, Grenoble, France, 1997.
- [15] P. Carré and C. Fernandez. A nonuniform, shift-invariant, and optimal algorithm for malvar's wavelet decomposition. In *International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Pittsburgh, October 1998. IEEE.
- [16] P. Carré and C. Fernandez. Research of stationary partitions in nonstationary processes by measurement of spectral distance with the help of nondyadic malvar's decomposition. In *International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Pittsburgh, October 1998. IEEE.
- [17] P. Carré and C. Fernandez. The construction of a meyer's wavelets packets decomposition: an algorithm for the extraction of signal components. Submitted for Publication to *Signal Processing*, 1999.
- [18] P. Carré and C. Fernandez. Paquets d'ondelettes de meyer pour le traitement d'images. In *17ème colloque GRESTI*, Vannes, France, 1999.
- [19] P. Carré and C. Fernandez. Use of the angle information in the wavelet transform maxima for image denoising. Submitted for Publication to *Pattern Recognition*, 1999.
- [20] P. Carré and C. Fernandez. Débruitage de multiples copies d'un signal ou d'une image par transformée en ondelettes non-décimée. In *RFIA*, Paris, France, 2000.
- [21] P. Carré, H. Leman, C. Marque, and C. Fernandez. Denoising the EHG signal with an undecimated wavelet transform. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 45(8):1104–1113, September 1998.
- [22] P. Carré, N. Richard, C. Fernandez, and J. Paquereau. Non-dyadic decomposition algorithm with meyer's wavelet packets: an application to eeg signal. In *Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, Denver, July 1999. SPIE.
- [23] S. Chang. Image interpolation using wavelet-based edge enhancement and texture analysis. Master's thesis, Berkeley University, May 1995.
- [24] S.G. Chang, Z. Cvetkovic, and M. Vetterli. Resolution enhancement of images using wavelet transform extrema extrapolation. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, volume 4, pages 2379–2382, Detroit, May 1995. IEEE.
- [25] J.P. Cocquerez and S. Phillip. *Analyse d'images: Filtrage et segmentation*. Masson, Paris, 1995.
- [26] A. COHEN. *Ondelettes et Traitement numérique du Signal*. Masson, 1992.
- [27] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore. Multiscale decomposition on bounded domains. Preprint 113, IGPM, February 1996.
-

- [28] I. Cohen, S. Raz, and D. Malah. Orthonormal shift-invariant adaptative local trigonometric decomposition. *Signal Processing*, 57(1), 1997.
- [29] R. Coifman and S. Donoho. Translation-invariant de-noising. In A. Antoniadis and G. Oppenheim, editors, *Wavelets and Statistics*, volume 103 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 125–150, New York, 1995. Springer-Verlag.
- [30] R. Coifman and F. Majid. Adapted waveform analysis and denoising. In Y. Meyer and S. Roques, editors, *Progress in Wavelet Analysis and Applications (Proceedings of the International Conference “Wavelets and Applications”, Toulouse, France, June, 1992)*, pages 63–76. Editions Frontieres, B.P. 33, 91192 Gif-sur-Yvette, Cedex, France, 1993, 1992.
- [31] R. Coifman and Y. Meyer. Remarque sur l’analyse de Fourier à fenêtres. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 312:259–261, 1991.
- [32] R. Coifman and M. Wickerhauser. Entropy-based algorithms for best basis selection. *IEEE Trans. Info. Theory*, 38(2):719–746, 1992.
- [33] R. Coifman and M. Wickerhauser. Wavelets and adapted waveform analysis: A toolkit for signal processing and numerical analysis, 1993.
- [34] R. Coifman and M. Wickerhauser. Adapted waveform denoising for medical signals and images. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 14(5):578–586, 1995.
- [35] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [36] D. Donoho. Wavelet shrinkage and w.v.d.: A 10-minute tour. Technical report, Stanford University, 1992.
- [37] D. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on Information Theory*, 41(3):613–627, 1995.
- [38] D. Donoho and I. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. Technical report, Stanford University, 1994.
- [39] D. Donoho and I. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3):425–455, 1994.
- [40] D. Donoho, S. Mallat, and R. Von Sachs. Estimating covariances of locally stationary processes: Consistency of best basis methods. In *Symposium on Applications of Time-Frequency and Time-scale methods*, Paris (Fr), June 1996. IEEE.
- [41] D. Donoho, S. Mallat, and R. Von Sachs. Estimating covariances of locally stationary processes: Rates of convergence of best basis methods. Technical report, Stanford University, 1997.
- [42] B. Dubuisson. *Diagnostic et reconnaissances des formes*. Hermes, Paris, 1990.
- [43] P. Duhamel and M. Vetterli. Fast fourier transforms: A tutorial review. *Signal Processing*, 19:259–299, 1990.

-
- [44] P. Flandrin. *Temps-frequence*. Hermes, Paris, France, 1993.
- [45] D. Gabor. Theory of communication. *J. Inst. Electr. London*, 93(III):431, 1946.
- [46] H. GAO. Choice of thresholds for wavelet shrinkage estimate of the spectrum. Technical report, MathSoft, 1994.
- [47] H. Gao and A. Bruce. Waveshrink with semisoft shrinkage. Technical Report 39, MathSoft, Seattle, September 1995.
- [48] P. Gregson. Using angular dispersion of gradient direction for detecting edge ribbons. *IEEE Trans. on PAMI*, 15(7):682–695, 1993.
- [49] C. Herley. Boundary filters for finite-length signals and time-varying filter banks. To appear in *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, March 1994.
- [50] C. Herley, J. Kovacevic, K. Ramchandran, and M. Vetterli. Tillings of the time-frequency plane: Construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(12):3341–3359, December 1993.
- [51] C. Herley and M. Vetterli. Orthogonal time-varying filter banks and wavelet packets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42:2650–2663, 1994.
- [52] M. Hilton, T. Ogden, D. Hattery, G. Eden, and B. Jawerth. Wavelet denoising of functional mri data. In A. Aldroubi and M. Unser, editors, *Wavelet Applications in Biology and Medecine*. CRC Press, 1996.
- [53] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and P. Tchamitchian. A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. In J.M. Combes, A. Grossmann, and P. Tchamitchian, editors, *Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 289–297. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [54] W. Hwang and S. Mallat. Characterization of self-similar multifractals with wavelet. Technical Report 641, New York University, 1993.
- [55] B. JAWERTH, Y. LIU, and W. SWELDENS. Signal compression with smooth local trigonometric bases. *Optical engineering*, 33(7):2125–2135, 1994.
- [56] I. Johnstone and B. Silverman. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. *J. Roy. Statist. Soc.*, 59(2):319–351, 1997.
- [57] E. Kolaczyk. *Wavelet Methods for the Inversion of Certain Homogeneous Linear Operators in the Presence of Noisy Data*. PhD thesis, Stanford University, October 1994.
- [58] A. Laine and J. Fan. An adaptive approach for texture segmentation by multi-channel wavelet frames. Technical Report TR-93-025, University of California, August 1993.
- [59] A. Laine and J. Fan. Texture classification by wavelet packet signatures. *IEEE Trans. on PAMI*, 15(11):1186–1191, November 1993.
-

- [60] M. Lang, H. Guo, C. Burrus, and R. Wells. Nonlinear processing of a shift invariant dwt for noise reduction. In *Mathematical Imaging: Wavelet Applications for Dual Use*, volume 2491, Orlando, April 1995. SPIE.
- [61] M. Lang, H. Guo, J. Odegard, C. Burrus, and R. Wells. Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform. *IEEE Trans. Signal Processing Letters*, 3(1):10–12, January 1996.
- [62] C. Lee. *Mobile cellular telecommunications systems*. Mc Gray-Hill international editions, New York, 1990.
- [63] W. Lee. *Mobile Communications Design Fundamentals*. Wiley Series in Telecommunications, New York, 1993.
- [64] J. Lu. *Signal Recovery and Noise Reduction with Wavelets*. PhD thesis, Dartmouth College, June 1993.
- [65] J. Lu. On consistent signal reconstruction from wavelet extrema representation. In *Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, volume 3169, San Diego, 1997. SPIE.
- [66] J. Lu, J. Weaver, D. Healy, and Y. Xu. Noise reduction with multiscale edge representation and perceptual criteria. In *International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*. IEEE, October 1992.
- [67] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet transform. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(7):674–693, 1989.
- [68] S. Mallat. *A wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [69] S. Mallat and W. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. Information Theory*, 38(2):617–643, 1992.
- [70] S. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(7):710–732, July 1992.
- [71] H. MALVAR. Lapped transform for efficient transform/subband coding. *IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing*, 38(6):969–978, June 1990.
- [72] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*, volume I. Hermann, Paris, 1990.
- [73] Y. Meyer. *Ondelettes et algorithmes concurrents*. Hermann, Paris, France, 1992.
- [74] Y. Meyer. *Les ondelettes: algorithmes et applications*. Armand Colin, Paris, 1994.
- [75] P. Moulin. Wavelet thresholding techniques for power spectrum estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(11):3126–3136, 1994.
- [76] G. Nason. Wavelet shrinkage using cross-validation. *J. Roy. Statist. Soc. B*, 58:463–479, 1996.
- [77] G. Nason and B. Silverman. The stationary wavelet transform and some statistical applications. In Anestis Antoniadis and Georges Oppenheim, editors, *Wavelets and Statistics*, volume 103 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 281–299, New York, 1995. Springer-Verlag.

-
- [78] A. Papoulis. *Probability, random variables, and stochastic process*. Mc Graw-Hill Book, 1984.
- [79] D. Pastor and R. Gay. Decomposition d'un processus stationnaire du second ordre. *Traitement du Signal*, 11(5):393–3136, November 1995.
- [80] J. Pesquet, H. Krim, and H. Carfantan. Time-invariant orthonormal wavelet representation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(8):1964–1970, August 1996.
- [81] Y. Pousset. *Optimisations pour la prediction des zones de couverture radioelectrique*. PhD thesis, Ircm-Sic Laboratory University of Poitiers, July 1998.
- [82] Y. Pousset, P. Carré, and R. Vauzelle. Comparaison of two wavelet analysis for a radiomobile signal processing. In *Progress in Electromagnetics Research Symposium*, Ottawa, December 1998.
- [83] Y. Pousset, P. Carré, and R. Vauzelle. Optimization in computation time of the coverage zone by wavelet maxima. In *URSI*, Toronto, August 1999.
- [84] U. Ruttimann, N. Ramsey, D. Hommer, and P. Thévenaz. Analysis of functional magnetic resonance images by wavelet decomposition. In *Int. Conf. on Image Processing*, pages 633–636. IEEE, September 1995.
- [85] M. Shensa. Wedding the à trous and Mallat algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(10):2464–2482, 1992.
- [86] M. Shensa. An inverse dwt for nonorthogonal wavelets. Technical Report TR 1621, NCCOSC, San Diego, July 1993.
- [87] J. Starck and F. Murtagh. Image restoration with noise suppression using the wavelet transform. *Astronomy and Astrophysics*, 1994.
- [88] J.L. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui. Multiresolution support applied to image filtering and restoration. *Comp. Vision, Graphics and Image Proc.*, 57(5):420–431, 1995.
- [89] C. Taswell. Speech compression with cosine and wavelet packet near-best bases. In *ICASSP*, pages 566–568, Atlanta, May 1996. IEEE.
- [90] Donoho's team. Matlab toolbox wavelab, 1995.
- [91] M. Unser, P. Thévenaz, C. Lee, and U. Ruttimann. Registration and statistical analysis of pet images using the wavelet transform. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, pages 603–611, October 1995.
- [92] R. Vauzelle. Methode d'optimisation des outils de prediction de la couverture radio en milieu urbain. In *3 journee d'etude de la propagation electromagnetique dans l'atmosphere du decimetrique a l'angstrom*, Rennes, October 1997.
- [93] R. Vauzelle. Wavelet and propagation prediction for mobile radio communications. In *PIERS*, Nantes, France, July 1998.
-

- [94] M. Vetterli and J. Kovačević. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.
- [95] E. WESFREID and M.V. WICKERHAUSER. Adapted local trigonometric transforms and speech processing. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(12):3596–3600, 1993.
- [96] M. Wickerhauser. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*. A K Peters, Massachusetts, 1994.
- [97] M.V. WICKERHAUSER. Lectures on wavelet packet algorithms. Technical report, INRIA/Rocquencourt Minicourse Lecture Notes, November 1991.
- [98] Z. Xiong. *Representation and coding of images using wavelets*. PhD thesis, University of Illinois, 1996.
- [99] D. Youla and H. Webb. Image restoration by the method of convex projections. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, (1):81–101, 1982.
- [100] H. Youlal, M. Janati-idrissi, and M. Najim. *Modelisation parametrique en traitement d'images*. Masson, Paris, 1994.
- [101] S. Zhong. *Edge Representation from Wavelet Transform Maxima*. PhD thesis, New York University, September 1990.

Annexes Chapitre 1

Soit \tilde{f} , une fonction obtenue après transformation inverse à partir des coefficients d'ondelettes non-décimés et seuillés. Soit \tilde{f}_b la fonction résultant d'un débruitage avec l'algorithme décimé de Johnstone appliqué sur la fonction translatée $TR_b(f)$, alors la fonction \tilde{f} est telle que :

$$\tilde{f} = \frac{1}{2^L} [\tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \dots + \tilde{f}_b + \dots + \tilde{f}_{2^L-1}]$$

Preuve

Par la suite, afin de simplifier les équations, nous écrivons le seuillage $T_{\lambda_i}(w_i)$ par Tw_i et $T_{\lambda_i}(d_i^k)$ par Td_i^k .

Soit \tilde{f} , une fonction obtenue après transformation inverse à partir des coefficients d'ondelettes non-décimés et seuillés :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= Q_u^{-1}Tw_1 + P_u^{-1}c_1 \\ &= Q_u^{-1}T \left[d_{(0)}^1 \overleftrightarrow{\cup} d_{(1)}^1 \right] + P_u^{-1} \left[e_{(0)}^1 \overleftrightarrow{\cup} e_{(1)}^1 \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Or le seuil proposé dans l'équation (1.19) permet la distributivité de T par rapport à $\overleftrightarrow{\cup}$. De ceci et de la relation (1.10) sur l'opérateur de reconstruction non-décimée, l'équation (5.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \frac{1}{2} \left[Q_{-}^{-1} \left(Td_{(0)}^1 \right) + Q_{-}^{-1} \left(Td_{(1)}^1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[P_{-}^{-1}e_{(0)}^1 + P_{-}^{-1}e_{(1)}^1 \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dans l'équation (5.6), on peut poursuivre le calcul en exprimant $e_{(0)}^1$ et $e_{(1)}^1$ par rapport à l'échelle suivante. Par exemple pour $e_{(0)}^1$:

$$\begin{aligned} e_{(0)}^1 &= Q_u^{-1}T \left[d_{(0)}^2 \overleftrightarrow{\cup} d_{(1)}^2 \right] + P_u^{-1} \left[e_{(0)}^2 \overleftrightarrow{\cup} e_{(1)}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[Q_{-}^{-1} \left(Td_{(0)}^2 \right) + Q_{-}^{-1} \left(Td_{(1)}^2 \right) \right] + \frac{1}{2} \left[P_{-}^{-1}e_{(0)}^2 + P_{-}^{-1}e_{(1)}^2 \right] \end{aligned}$$

De cette manière, par récursion, nous avons finalement \tilde{f} qui est égal à

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \frac{1}{2} \left[Q_{-}^{-1} \left(Td_{(0)}^1 \right) + Q_{-}^{-1} \left(Td_{(1)}^1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} P_{-}^{-1} \left[Q_{-}^{-1} \left(Td_{(0)}^2 \right) + Q_{-}^{-1} \left(Td_{(1)}^2 \right) + Q_{-}^{-1} \left(Td_{(2)}^2 \right) + Q_{-}^{-1} \left(Td_{(3)}^2 \right) \right] \\ &\quad \dots + \frac{1}{2^l} P_{-}^{-(l-1)} \left[\sum_{b=0}^{2^l-1} Q_{-}^{-1} \left(Td_{(b)}^l \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{1}{2^L} \sum_{b=0}^{2^L-1} P_-^{-L} e_{(b)}^L \\
& = \sum_{l=1}^L \left(\frac{1}{2^l} P_-^{-(l-1)} \left[\sum_{b=0}^{2^l-1} Q_-^{-1} \left(Td_{(b)}^l \right) \right] \right) + \frac{1}{2^L} \sum_{b=0}^{2^L-1} P_-^{-L} e_{(b)}^L
\end{aligned} \tag{5.7}$$

En développant, et en effectuant les rassemblements appropriés, l'équation (5.7) peut s'écrire :

$$\tilde{f} = \frac{1}{2^L} \left[\begin{array}{l} \left[\sum_{l=1}^L \left(P_-^{-(l-1)} Q_-^{-1} \left(Td_{(0)}^l \right) \right) + P_-^{-L} e_{(0)}^L \right] \dots \\ + \left[\sum_{l=1}^L \left(P_-^{-(l-1)} Q_-^{-1} \left(Td_{(b)}^l \right) \right) + P_-^{-L} e_{(b)}^L \right] \dots \\ + \left[\sum_{l=1}^L \left(P_-^{-(l-1)} Q_-^{-1} \left(Td_{(2^L-1)}^l \right) \right) + P_-^{-L} e_{(2^L-1)}^L \right] \end{array} \right] \tag{5.8}$$

Si nous notons \tilde{f}_b la fonction résultant d'un débruitage avec l'algorithme décimé de Johnstone appliqué sur la fonction translatée $TR_b(f)$, alors \tilde{f}_b est définie par,

$$\tilde{f}_b = \left[\sum_{l=1}^L \left(P_-^{-(l-1)} Q_-^{-1} \left(Td_{(b)}^l \right) \right) + P_-^{-L} e_{(b)}^L \right] \tag{5.9}$$

Si l'on fait varier b de 0 à $2^L - 1$ dans l'équation (5.9), on constate que l'on retrouve les différents sous-ensembles de l'équation (5.8). Finalement, la fonction \tilde{f} , définie par l'équation (5.8), est égale à :

$$\tilde{f} = \frac{1}{2^L} \left[\tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \dots + \tilde{f}_b + \dots + \tilde{f}_{2^L-1} \right] \tag{5.10}$$

Annexes Chapitre 2

Soit le vecteur aléatoire Z_{∇} défini comme l'approximation numérique du gradient des mesures bruitées. Puisque $b(x, y)$ suit une distribution conjointement gaussienne Z_{∇} suit lui aussi une loi de densité qui est une distribution conjointement gaussienne. Nous notons ∇_X et ∇_Y les deux variables aléatoires correspondant à la dérivée approximée discrète de $f(x, y)$ selon respectivement x et y . Nous allons calculer les différents paramètres de la distribution gaussienne, à savoir $E(\nabla_x)$, $E(\nabla_y)$, $E(\nabla_x^2)$, $E(\nabla_y^2)$ et $E(\nabla_x \nabla_y)$. Auparavant, nous énonçons quelques propriétés qui seront utilisées dans les différents calculs.

– Propriétés

1. $b(x, y)$ suit une loi conjointement gaussienne centrée avec une matrice de variance-covariance diagonale, donc

$$E(b[x + h_1, y + h_2]) = 0 \text{ pour tout } h_1, h_2, \quad (5.11)$$

$$E(b[x + h_1, y + h_2]^2) = 1 \text{ pour tout } h_1, h_2, \quad (5.12)$$

$$E(b[x + h, y]b[x, y + h]) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (5.13)$$

2. $s(x, y)$ est l'information déterministe, donc

$$E(s[x + h_1, y + h_2]^2) = 0 \text{ pour tout } h_1, h_2, \quad (5.14)$$

$$E(b[x + h_1, y]b[x, y + h_2]) = 0 \text{ pour tout } h_1, h_2. \quad (5.15)$$

– Calcul de $E(\nabla_x)$ et $E(\nabla_y)$

$$\begin{aligned} E(\nabla_x) &= E\left(\frac{f[x + h_1, y] - f[x - h_2, y]}{|h_1| + |h_2|}\right) \\ &= E(s[x + h_1, y] + \sigma b[x + h_1, y] - s[x - h_2, y] - \sigma b[x - h_2, y]). \end{aligned}$$

D'après la propriété (5.11) nous avons

$$E(\nabla_x) = s[x + h_1, y] - s[x - h_2, y].$$

De la même façon, nous avons :

$$E(\nabla_y) = s[x, y + h_1] - s[x, y - h_2].$$

Par la suite, nous noterons $m_{\nabla_x} = s[x + h_1, y] - s[x - h_2, y]$ et $m_{\nabla_y} = s[x, y + h_1] - s[x, y - h_2]$ l'information déterministe recherchée.

– **Calcul de $E(\nabla_x^2)$ et $E(\nabla_y^2)$**

$$E(\nabla_x^2) = E\left((s[x + h_1, y] + \sigma b[x + h_1, y] - s[x - h_2, y] - \sigma b[x - h_2, y])^2\right).$$

D'après les propriétés (5.11), (5.14) et (5.15), alors

$$\begin{aligned} E(\nabla_x^2) &= \sigma^2 E(b[x + h_1, y]^2) + \sigma^2 E(b[x - h_2, y]^2) \\ &= 2\sigma^2. \text{ (d'après (5.12))} \end{aligned}$$

De même :

$$E(\nabla_y^2) = 2\sigma^2.$$

– **Calcul de $E(\nabla_x \nabla_y)$**

$$E(\nabla_x \nabla_y) = E\left(\begin{array}{l} (s[x + h_1, y] + \sigma b[x + h_1, y] - s[x - h_2, y] - \sigma b[x - h_2, y]) \\ (s[x, y + h_1] + \sigma b[x, y + h_1] - s[x, y - h_2] - \sigma b[x, y - h_2]) \end{array}\right).$$

D'après les propriétés (5.11), (5.12), (5.14) et (5.15) :

$$E(\nabla_x \nabla_y) = \sigma^2 E(b[x + h_1, y] b[x, y + h_1]) + \sigma^2 E(b[x - h_2, y] b[x, y - h_2]).$$

A partir de la relation (5.13), nous déduisons :

$$E(\nabla_x \nabla_y) = \sigma^2 \delta_{[h_1=0]} + \sigma^2 \delta_{[h_2=0]}.$$

Annexes Chapitre 3

Boîtes d'Heisenberg

Les boîtes d'Heisenberg ont été introduites dans le cadre de la décomposition de Fourier à fenêtres. Les éléments de base de la transformée de Fourier à fenêtres sont construits en translatant en temps et en fréquence une fenêtre temporelle g :

$$g_{u,w}(t) = g(t - u) e^{iwt}$$

L'énergie de $g_{u,w}$ est concentrée dans le voisinage de u sur un intervalle de taille σ_t , mesuré par la déviation standard de $|g|^2$. On peut alors vérifier que sa transformée de Fourier est une translation de w de \hat{g} :

$$\hat{g}_{u,w}(\xi) = \hat{g}(\xi - w) e^{-iu(\xi - w)}$$

L'énergie de $\hat{g}_{u,w}$ est concentrée dans le voisinage de w sur un intervalle de taille σ_ξ , qui mesure le domaine sur lequel \hat{g} n'est pas négligeable. Dans le plan temps-fréquence (t, ξ) la dispersion de l'énergie de l'atome $g_{u,w}$ est symboliquement représentée par une boîte d'Heisenberg (figure 5.19). Ce rectangle est centré en (u, w) et a une taille temporelle σ_t et une taille fréquentielle σ_ξ . Le principe d'incertitude montre que son aire vérifie $\sigma_t \sigma_\xi \geq \frac{1}{2}$.

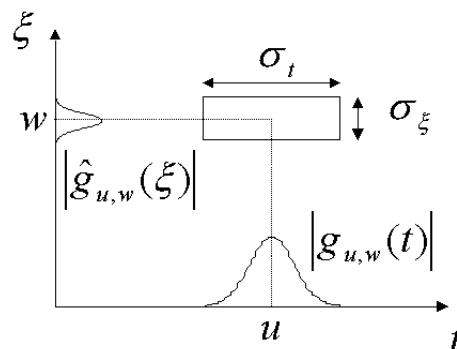


FIG. 5.19 – Boîtes Temps-Fréquence (boîtes d'Heisenberg) représentant la dispersion de l'énergie d'un élément de base $g_{u,w}$

Dans un cas plus général, si nous avons une décomposition TF associée à une fonction g_γ , γ symbolisant l'ensemble des indices permettant de définir la fonction g_γ (par exemple un indice d'échelle et un indice de translation), alors l'information contenue dans le coefficient de décomposition d_γ défini par $d_\gamma = \langle f, g_\gamma \rangle$ est représentée dans le plan temps-fréquence dans une région correspondant au bloc d'Heisenberg de la fonction g_γ [68].

Concrètement, dans le cas discret, pour illustrer la transformation d'un signal $\{f[t]\}_{0 \leq t \leq N-1}$ dans une base de fonctions orthonormales $\{g_\gamma\}_{0 \leq \gamma \leq N-1}$, chacune des fonctions g_γ ayant une boîte d'Heisenberg $[u_1^\gamma, u_2^\gamma] \times [w_1^\gamma, w_2^\gamma]$, nous effectuons les opérations suivantes :

1. Calcul des N coefficients $d_\gamma = \langle f, g_\gamma \rangle$
2. Création d'une image nulle $(TF[x, y] = 0)_{0 \leq x \leq N-1, 0 \leq y \leq N-1}$
3. Pour chaque coefficient d_γ , affectation de son énergie au bloc correspondant :

$$(TF[x, y] = |d_\gamma|^2)_{u_1^\gamma \leq x \leq u_2^\gamma, w_1^\gamma \leq y \leq w_2^\gamma}$$

Ensuite, si nous affichons l'image $(TF[x, y])_{0 \leq x \leq N-1, 0 \leq y \leq N-1}$, nous obtenons la représentation TF associée à la transformée du signal f dans la base $\{g_\gamma\}_{0 \leq \gamma \leq N-1}$.

Preuve de la proposition 6

Pour prouver cette proposition, nous utilisons la propriété de l'arbre binaire qui dans le cas classique permet de construire toutes les partitions dyadiques uniformes disjointes :

- $S_{l,0}$ correspond aux noeuds pères permettant de construire toutes les partitions dyadiques uniformes disjointes du signal f ,
- $S_{l,2^{-L}}$ correspond aux noeuds pères permettant de construire toutes les partitions dyadiques uniformes disjointes du signal f translaté de $2^{-L}N$ points (à l'exception de celles comprenant des intervalles non-adjacents avant la translation),
-
- $S_{l,(2^{L-l}-1)2^{-L}}$ correspond aux noeuds pères permettant de construire toutes les partitions dyadiques uniformes disjointes du signal f translaté de $(2^{L-l}-1)2^{-L}N$ points (à l'exception de celles comprenant des intervalles non-adjacents avant la translation).

Si l'on poursuit, on constate que $S_{l,(2^{L-l}-1)2^{-L}+2^{-L}} = S_{l,2^{-l}}$ correspond à une partition élément de la collection construite à partir de $S_{l,0}$. Nous avons donc défini à partir des 2^{L-l} ensembles $S_{l,s}$, avec $s = 0..(2^{L-l}-1)2^{-L}$, l'ensemble des partitions possibles disjointes du signal avec des intervalles de taille variant de $2^{-l}N$ à $2^{-L}N$.

Preuve de la proposition 7

On peut trouver une échelle, par exemple l'échelle L , qui vérifie la première partie de la proposition :

nous avons 2^{L-l} ensembles $S_{l,s}$ correspondant aux noeuds pères, à l'échelle l , avec $s = 0..(2^{L-l}-1)2^{-L}$, permettant la construction de la totalité des partitions non-uniformes disjointes de $[0, N-1]$ avec n intervalles tels que la taille de ces intervalles varie de $2^{-L}N$ à $2^{-l}N$.

D'après la proposition 6, ces intervalles sont définis par $S_{l,s} = R_{l,s} \cup \left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{L-l}-1-\delta_{[s>0]}}$.

Nous étudions les deux relations introduites dans l'équation (3.16) :

$$S_{l-1,s} = {}^{(l-1)}U^* S_{l,s} = {}^{(l-1)}U^* R_{l,s} \cup {}^{(l-1)}U^* \left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{L-l}-1-\delta_{[s>0]}}$$

$$S_{l-1,s+2^{-l}} = {}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* [Tr_{2^{-l}}(S_{l,s})] = {}^{(l-1)}U^* R_{l,s} \cup {}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* \left[Tr_{2^{-l}} \left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{L-l}-1-\delta_{[s>0]}} \right]$$

– Si $s = 0$ alors $R_{l,0} = \{\emptyset\}$ et nous sommes donc dans le cas "classique" avec

$$S_{l-1,s} = {}^{(l-1)}U^* \left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}} = \left\{ T_{I_j^{l-1,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-1}.$$

– Si $s > 0$, on sait que $\text{card}(R_{l,s}) = N2^{-l}$, donc $\text{card}\left(\left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-2}}\right) = N2^{-l} + N(2^{l-1} - 1)2^{-l+1}$. Nous ne pouvons donc former que $(2^{l-1} - 1)$ intervalles $I_j^{l-1,s}$. D'après l'équation (3.15), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} {}^{(l-1)}U^* \left\{ R_{l,s} \cup T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-2}} &= {}^{(l-1)}U^* \left\{ T_{I_0^{l,s}} f \cup R_{l,s} \right\} \cup \left\{ T_{I_j^{l-1,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-2} \\ \implies S_{l-1,s} &= \underbrace{R_{l,s} \cup T_{I_0^{l,s}} f}_{R_{l-1,s}} \cup \left\{ T_{I_j^{l-1,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-2}. \end{aligned}$$

De la même façon, nous étudions le terme ${}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* [Tr_{2^{-l}}(S_{l,s})]$:

$$\begin{aligned} S_{l-1,s+2^{-l}} &= {}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* [Tr_{2^{-l}}(S_{l,s})] \\ &= {}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* [Tr_{2^{-l}}(R_{l,s})] \cup {}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* \left[Tr_{2^{-l}} \left(\left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-\delta_{[s>0]}} \right) \right] \\ &= R_{l,s} \cup {}^{(l-1)}U_{-2^{-l}}^* \left[Tr_{2^{-l}} \left(\left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-\delta_{[s>0]}} \right) \right] \\ &= \begin{cases} \underbrace{R_{l,s} \cup T_{I_{2^{l-2}}}^{l,s} f}_{R_{l-1,s+2^{-l}}} \cup \left\{ T_{I_j^{l-1,s+2^{-l}}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-2} & \text{si } s > 0 \\ \underbrace{T_{I_0^{l,2^{-l}}} f \cup T_{I_{2^{l-2}}}^{l,2^{-l}} f}_{R_{l-1,2^{-l}}} \cup \left\{ T_{I_j^{l-1,2^{-l}}} f \right\}_{j=0..2^{l-1}-1} & \text{si } s = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons donc, à l'échelle $l-1$, 2^{L-l+1} ensembles $S_{l-1,s}$ vérifiant

$$S_{l-1,s} = R_{l-1,s} \cup \left\{ T_{I_j^{l,s}} f \right\}_{j=0..2^{l+1}-1-\delta_{[s>0]}}.$$

Nous en déduisons, d'après la proposition 6, que nous avons construit les noeuds pères permettant le calcul de la totalité des partitions non-uniformes disjointes de $[0, N-1]$ du signal avec n intervalles de taille variant de $2^{-L}N$ à $2^{-l+1}N$. La proposition est donc démontrée.