



**HAL**  
open science

# Algorithme de l'analyse harmonique numérique

André Eberhard

► **To cite this version:**

André Eberhard. Algorithme de l'analyse harmonique numérique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1970. Français. NNT: . tel-00009471

**HAL Id: tel-00009471**

**<https://theses.hal.science/tel-00009471>**

Submitted on 13 Jun 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

**André EBERHARD**

Ingénieur I. M. A. G.

---

## Algorithmes de l'analyse harmonique numérique

---

Thèse soutenue le 22 Juin 1970 devant la commission d'examen

MM.	J.	KUNTZMANN	Président
	N.	GASTINEL	Examineur
	J. P.	BERTRANDIAS	Examineur
	J. P.	GAUTRAY	Examineur



L I S T E   D E S   P R O F E S S E U R S

---

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET  
Doyen : Monsieur E. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

---

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Melle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire

MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme.	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I. U. T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme.	KAHANE Josette	Physique
Mme.	BONNIER Jane	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

---

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

---

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEHOWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	LONGQUEUE Jean-Pierre	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND Francis	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C. S. U. Chambéry)
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I. U. T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I. U. T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées (I. P. G.)
	MOREAU René	Hydraulique I. P. G.
	ARMAND Yves	Chimie I. U. T.
	BOLLIET Louis	Informatique I. U. T.
	KUHN Gérard	Energétique I. U. T.
	PEFFEN René	Chimie I. U. T.
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Melle.	PIERY Yvette	Biologie animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C. S. U. Chambéry)
	CONTE René	Mesures Physiques I. U. T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I. U. T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I. U. T.
	ROMIER Guy	Techniques Statistiques quantitatives I. U. T.
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique

MM.	DUSSAUD René	Mathématiques (C. S. U. Chambéry)
	BELORIZKY Elie	Physique (C. S. U. Chambéry)
Mme.	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique (C. S. U. Chambéry)
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie
MM.	BLIMAN Samuel	E. I. E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I. U. T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière

*J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur GASTINEL pour l'ambiance qui règne au sein de son équipe, ainsi que pour les nombreux encouragements et conseils qu'il m'a prodigués.*

*Je remercie Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Le Docteur GAUTRAY, Professeur à la Faculté de Médecine de Grenoble est à l'origine de ce travail. Notre longue collaboration a été pour moi pleine d'enrichissements. Je lui exprime ma vive gratitude.*

*Je remercie Monsieur le Professeur BERTRANDIAS qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.*

*Je suis très reconnaissant à Mademoiselle Geneviève BICAIS et à Monsieur Paul MOUNET qui ont apporté tous leurs soins à la présentation matérielle de ce travail, ainsi qu'à tous les membres du Laboratoire qui m'ont aidé dans cette tâche.*



TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION

CHAPITRE - I - ALGORITHME DE COOLEY ET TUKEY DANS LE CAS OU  $N=2^M$   
PRINCIPE DE L'ALGORITHME DANS LE CAS GENERAL

I-1 - Notations -----	I-1
I-2 - Permutation des lignes de S. Matrice $T^{(M)}$ . ----	I-2
I-3 - Décomposition de $T^{(M)}$ . -----	I-4
I-4 - Algorithme -----	I-9
I-5 - Coût de la méthode -----	I-12
I-6 - Permutation des colonnes de S -----	I-12
I-7 - Principe de l'algorithme de Cooley & Tukey dans le cas général -----	I-14
I-8 - D.F.T. et I.D.F.T. -----	I-18

CHAPITRE II - METHODES DE CALCUL APPROCHE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER  
D'UNE FONCTION A PARTIR DE LA D.F.T. DU VECTEUR DE SES  
VALEURS EN DES ABSCISSES DISCRETES. APPLICATION AU CAL-  
CUL APPROCHE DES COEFFICIENTS DE FOURIER

II-1 - Relation entre D.F.T. et transformation de FOURIER	II-1
II-1-1 - Distribution $\Delta$ . Produit $\Delta g$ -----	II-1
II-1-2 - Transformée de Fourier de $\Delta/N$ -----	II-5
II-2 - Application au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique -----	II-6
II-3 - Calcul approché de la transformée de Fourier d'une fonction -----	II-9
II-3-1 - Interpolation par un polynôme trigonométri- que -----	II-9
II-3-2 - Interpolation linéaire -----	II-10
II-4 - Cas d'échantillons prélevés entre a et a+T -----	II-13
II-4-1 - Distribution $\Delta_a$	II-13
II-4-2 - Cas $a = -\frac{T}{2}$ .	II-14

## CHAPITRE III - CROSS-SPECTRE ET SPECTRE DE PUISSANCE

III-1 - Fonction de cross-correlation et cross-spectre de 2 fonctions.	
Fonction d'auto-correlation et spectre de puissance d'une fonction -----	III-1
III-1-1 - Définitions de la Fonction de Cross-correlation -----	III-1
III-1-2 - Définition du cross-spectre de 2 fonctions	III-2
III-1-3 - Fonction d'auto-correlation et spectre de puissance -----	III-3
III-2 - Cas des fonctions semi-périodiques -----	III-3
III-2-1 - Définition et propriétés -----	III-3
III-2-2 - Fonction de Cross-Correlation et Cross-Spectre -----	III-4
III-2-3 - Fonction d'auto-correlation et Spectre de Puissance -----	III-8
III-2-4 - Fonctions semi-périodiques réelles -----	III-9

## CHAPITRE IV - CALCUL APPROCHE DU CROSS-SPECTRE DE DEUX FONCTIONS OU DU SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION A PARTIR DE LA D.F.T. DE LEURS ECHANTILLONS

IV-1 - Distribution de Cross-correlation des 2 distributions $\Delta g_1$ et $\Delta g_2$ -----	IV-1
IV-2 - Cross-Spectre de 2 distributions -----	IV-3
IV-3 - Relation entre le Cross-Spectre de 2 distributions et les Transformées de Fourier de ces distributions	IV-5
IV-4 - Calculs approchés du Cross-Spectre ou du Spectre de fonctions -----	IV-6
IV-4-1 - Première approximation -----	IV-6
IV-4-2 - Deuxième approximation. Cross-Spectre de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$ -----	IV-7
IV-5 - Cas des fonctions semi-périodiques -----	IV-11

IV-5-1 - Généralités - Cross-spectre fini -----	IV-11
IV-5-2 - Exemple -----	IV-13
IV-5-3 - Hanning -----	IV-16
IV-5-4 - Hamming -----	IV-17
IV-5-5 - Distribution optimum -----	IV-17

CHAPITRE V - POSSIBILITES ET VARIANTES DE L'ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY. CONVOLUTION. LISSAGE

V-1 - D.F.T. simultanée des échantillons de 2 fonctions réelles -----	V-1
V-2 - Variantes de l'algorithme de Cooley & Tukey -----	V-3
V-2-1 - Variante n° 1 -----	V-3
V-2-2 - Variante n° 2 -----	V-4
V-2-3 - Variante n° 3 -----	V-4
V-3 - Convolution discrète de deux échantillons -----	V-6
V-3-1 - Définition -----	V-6
V-3-2 - Convolution discrète regroupée -----	V-7
V-3-3 - D.F.T. et I.D.F.T. de $gg'$ -----	V-7
V-4 - Lissage d'un échantillon -----	V-8
V-4-1 - Premier procédé de lissage -----	V-10
V-4-2 - Deuxième procédé de lissage -----	V-10

ANNEXE - EXEMPLES NUMERIQUES, FIGURES ET PROCEDURES

Coefficients de Fourier du Sinus redressé -----	A1
Figure Transformée de Fourier de $\Delta/N$ -----	A2
Figure Interpolation linéaire -----	A3

- Exemple numérique de Transformée Inverse de Fourier -----	A4
- Exemple numérique de Spectre de puissance d'une fonction à support borné -----	A7
- Exemple numérique de Spectre de puissance d'une fonction semi-périodique -----	A10
Figure 1 <sup>ère</sup> Approximation -----	A11
Figure avec Hanning -----	A12
Figure avec Hamming -----	A13
- Figure "Fenêtre" spectrale optimum -----	A14
- Figure Transformée de Fourier de $\sqrt{N}$ -----	A15
- Exemple numérique de Spectre de puissance d'une fonction semi-périodique -----	A16
Figure avec Fenêtre optimum -----	A16
- Spectre de puissance d'Electroencéphalogramme -----	A17
- Exemple numérique de lissage -----	A20
- Procédures ALGOL CTG et CTGSYM -----	A23
 BIBLIOGRAPHIE -----	 A30

## INTRODUCTION

C'est en 1965 que J.W. COOLEY et J.W. TUKEY mirent au point un algorithme connu sous le nom de "F.F.T." (Fast Fourier Transform) permettant de calculer de façon très avantageuse des sommes du type :

$$G_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$$

pour  $j = 0, \dots, N-1$ .

Cet algorithme basé sur la décomposition de  $N$  en facteurs ( $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_M$ ) permet un gain en nombre d'opérations d'autant plus grand que les facteurs  $p_i$  sont plus petits. (Pour  $p_i \equiv 2$  ;  $i = 1, \dots, M$  ;  $N = 2^M$  le coût est en  $M \times 2^{M-1}$  au lieu de  $2^{2M}$  pour la méthode ordinaire).

La F.F.T. a révolutionné les techniques numériques de l'analyse harmonique en permettant de calculer les transformées de Fourier de fonctions connues en un très grand nombre de points, calculs auxquels on renonçait devant le coût des méthodes classiques.

Dans le premier chapitre nous donnons une illustration matricielle de l'algorithme qui est due à Marshall C. PEASE (cf. [3]).

Puis nous analysons le lien qui existe entre la Transformation de Fourier d'une fonction continue et la F.F.T. qui est une transformation discrète. Le passage se fait aisément grâce à la théorie des distributions et nous faisons souvent référence à L. SCHWARTZ.

L'ancienne "filière" qui permettait d'obtenir le cross-spectre de deux fonctions en calculant leur fonction de cross-correlation (dans le but essentiel de réduire le nombre de points) dont on prenait ensuite la transformée de Fourier a été abandonnée. La F.F.T. permet de l'obtenir beaucoup plus rapidement et nous montrons comment au chapitre IV. Nous montrons également comment pondérer les valeurs aux abscisses discrètes des signaux pour obtenir une "fenêtre spectrale" optimum dans un certain sens.

Enfin nous donnons des variantes de l'algorithme permettant en particulier de calculer moins de valeurs qu'on en a au départ tout en conservant le bénéfice du nombre d'opérations.

On trouvera en annexe les procédures écrites en ALGOL ainsi que des exemples d'utilisation (ces programmes sont employés journallement au Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble pour l'obtention de spectres dans l'analyse d'électro-encéphalogrammes).

## CHAPITRE - I

### ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY DANS LE CAS OU $N = 2^M$

#### PRINCIPE DE L'ALGORITHME DANS LE CAS GENERAL

##### I-1 - NOTATIONS

Soit à calculer :

$$G_j = \sum_{k=0}^{2^M-1} e^{2i\pi \frac{jk}{2^M}} \cdot g_k \quad (\text{I-1 ; 1})$$

pour  $j = 0, \dots, 2^M-1$

En notation matricielle (\*)

$$\vec{G} = S \vec{g} \quad S \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{2^M}, \mathbb{C}^{2^M})$$

Si l'on désigne par  $C_M$  la racine "principale" d'ordre  $2^M$  de l'unité :

$$C_M = e^{\frac{2i\pi}{2^M}} \quad S_{jk} = C_M^{jk}$$

---

(\*) Une lettre minuscule désignera en général dans la suite du texte un élément de l'espace de départ. La même lettre majuscule désignant l'élément qui lui correspond dans l'espace d'arrivée.

Comme nous le verrons au chapitre II,  $\vec{g}$  est un vecteur de  $\mathbb{C}^N$  dont les composantes sont les valeurs que prend une fonction complexe  $g$  à certaines abscisses.

Le produit  $j.k$  n'intervient que modulo  $2^M$ . Nous représentons  $S$  dans une écriture simplifiée  $[S]^{(M)}$  en remplaçant  $C_M^{jk}$  par  $jk \pmod{2^M}$ . Dans cette notation :

$$[S]_{pq}^{(M)} = a \Leftrightarrow S_{pq} = C_M^a$$

Dans le cas où  $M = 3$ , cela donne

$$[S]^{(M)} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right| \end{array} \quad (\text{I-1 ; 2})$$

## I-2 - PERMUTATION DES LIGNES DE S - MATRICE $T^{(M)}$

Par construction tous les éléments d'une ligne de  $S$  sont des multiples de l'indice (ou numéro) de cette ligne. Nous allons permuer ces lignes de façon à les agencer par "*ordre de parité*" décroissant. Pour cela :

- numérotons les lignes de  $S$  de  $0$  à  $2^M - 1$  en binaire en utilisant  $M$  digits  $0$  ou  $1$  ;
- inversons l'ordre des digits pour chaque nombre binaire ;
- le nombre binaire ainsi obtenu nous donne le nouveau numéro d'ordre de la ligne correspondante.

Appelons  $P$  la matrice de cette permutation.

Pour  $M = 3$  :

$$\begin{array}{rcl}
 0 & 000 & 000 & 0 \\
 1 & 001 & 100 & 4 \\
 2 & 010 & 010 & 2 \\
 3 & 011 & 110 & 6 \\
 4 & 100 & 001 & 1 \\
 5 & 101 & 101 & 5 \\
 6 & 110 & 011 & 3 \\
 7 & 111 & 111 & 7
 \end{array} \Rightarrow P = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|
 \end{array}$$

On observe que tous les numéros pairs se retrouvent dans la première moitié, la seconde moitié comportant ces mêmes numéros augmentés de 1.

Tous les multiples de 4 sont dans le premier quart, le deuxième quart comportant ces mêmes numéros augmentés de 2, etc...

Appelons  $T^{(M)}$  la matrice  $S$  ainsi permutée :  $T^{(M)} = PS$ .

$$[T^{(M)}]^{(M)} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right|
 \end{array} \quad (I-2 ; 1)$$

Si  $p$  est l'indice de ligne de  $T^M$  : ( $0 \leq p \leq 2^M - 1$ )

$$p = \sum_{k=0}^{M-1} d_k \cdot 2^k \quad d_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Cette même ligne, dans  $S$  avait le numéro :

$$r_M(p) = \sum_{k=0}^{M-1} d_k \cdot 2^{M-1-k}$$

le  $q^o$  élément de cette ligne vaut donc :

$$T_{pq}^{(M)} = S_{r_M(p)q} = e^{2i\pi \frac{r_M(p) \cdot q}{2^M}}$$

### I-3 - DECOMPOSITION DE $T^{(M)}$

Décomposons  $T^{(M)}$  en 4 sous-matrices carrées d'ordre  $2^{M-1}$  :

$$T^{(M)} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad (\text{I-3 ; 1})$$

#### I-3-1 - Sous-matrice $\alpha$

$$\alpha_{pq} = T_{pq}^{(M)} \quad p = 0, \dots, 2^{M-1} - 1$$

$$q = 0, \dots, 2^{M-1} - 1$$

$$\begin{aligned}
 p < 2^{M-1} \quad d_{M-1} &= 0 & r_M(p) &= \sum_{k=0}^{M-2} d_k \cdot 2^{M-1-k} \\
 & & &= 2 \sum_{k=0}^{M-2} d_k \cdot 2^{M-2-k} \\
 & & &= 2r_{M-1}(p) \\
 \alpha_{pq} &= T_{pq}^{(M)} = S_{r_M(p)q} = e^{2i\pi \frac{2r_{M-1}(p) \cdot q}{2^M}} = e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} = T_{pq}^{(M-1)}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = T^{(M-1)}$$

(I-3 ; 2)

où  $T^{(M-1)}$  est la matrice que nous aurions obtenue à partir de  $S$  avec un  $M$  inférieur d'une unité.

### I-3-2 - Sous-matrice $\beta$

$$\begin{aligned}
 \beta_{p,q} &= T_{p, 2^{M-1}+q}^M & p &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\
 & & q &= 0, \dots, 2^{M-1}-1
 \end{aligned}$$

$$p < 2^{M-1} \quad r_M(p) = 2r_{M-1}(p)$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{p,q} &= T_{p, 2^{M-1}+q}^{(M)} = e^{2i\pi \frac{2r_{M-1}(p) \cdot (2^{M-1}+q)}{2^M}} \\
 &= e^{2i\pi \left( r_{M-1}(p) + \frac{r_{M-1}(p)q}{2^{M-1}} \right)} \\
 &= e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} = T_{pq}^{(M-1)}
 \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha = T^{(M-1)}$$

(I-3 ; 3)

I-3-3 - Sous-matrice  $\gamma$ 

$$\begin{aligned}
 \gamma_{p,q} &= T_{2^{M-1}+p,q}^{(M)} & p &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\
 & & q &= 0, \dots, 2^{M-1}-1
 \end{aligned}$$

$$2^{M-1}+p = 2^{M-1} + \sum_{k=0}^{M-2} d_k \cdot 2^k$$

$$r_M(2^{M-1}+p) = 1+r_M(p) = 1+2r_{M-1}(p)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,q} &= T_{2^{M-1}+p,q}^{(M)} = S_{r_M(2^{M-1}+p),q} = e^{2i\pi \frac{(1+2r_{M-1}(p)) \cdot q}{2^M}} \\
&= e^{2i\pi \left( \frac{q}{2^M} + \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}} \right)} \\
&= e^{2i\pi \frac{q}{2^M}} \cdot e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} = T_{p,q}^{(M-1)} \cdot e^{2i\pi \frac{q}{2^M}}
\end{aligned}$$

$$\gamma = T^{(M-1)} \cdot L^{(M-1)}$$

(I-3 ; 4)

où  $L^{(M-1)}$  est une matrice diagonale  $L_{jk}^{(M-1)} =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ e^{2i\pi \frac{j}{2^M}} & \text{si } j=k=0, \dots, 2^{M-1}-1 \end{cases} \quad (\text{I-3 ; 5})$$

I-3-4 - Sous-matrice  $\delta$ 

$$\begin{aligned}
\delta_{p,q} &= T_{2^{M-1}+p, 2^{M-1}+q}^{(M)} & p &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\
& & q &= 0, \dots, 2^{M-1}-1
\end{aligned}$$

$$r_M(2^{M-1}+p) = 1+2r_{M-1}(p)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{pq} &= S_{r_M} (2^{M-1+p}) 2^{M-1+q} = e^{\frac{2i\pi (1+2r_{M-1}(p)) (2^{M-1+q})}{2^M}} \\
&= e^{2i\pi \frac{2^{M-1}}{2^M}} \cdot e^{2i\pi \frac{q}{2^M}} \cdot e^{2i\pi r_{M-1}(p)} \cdot e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} \\
&= (-1) \cdot L_{qq}^{(M-1)} \cdot (1) \cdot T_{pq}^{(M-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta = -T^{(M-1)} \cdot L^{(M-1)}}$$

(I-3 ; 6)

D'où :

$$T^{(M)} = \begin{vmatrix} T^{(M-1)} & T^{(M-1)} \\ T^{(M-1)} L^{(M-1)} & -T^{(M-1)} L^{(M-1)} \end{vmatrix}$$

$$T^{(M)} = \begin{vmatrix} T^{(M-1)} & 0 \\ 0 & T^{(M-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^{(M-1)} & 0 \\ 0 & L^{(M-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^{(M-1)} & I^{(M-1)} \\ I^{(M-1)} & -I^{(M-1)} \end{vmatrix}$$

(I-3 ; 7)

Dans le cas  $M = 3$

$$\begin{array}{l}
 [T^{(3)}]^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 [T^{(2)}]^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
 [T^{(2)}]^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 \text{et } [L^{(2)}]^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

#### I-4 - ALGORITHME

L'algorithme de COOLEY et TUKEY est le suivant :

Pour calculer  $\vec{G} = S\vec{g}$ , on va d'abord calculer  $\vec{G}^{**} = T^{(M)}\vec{g} = PS\vec{g} = P\vec{G}$

C'est-à-dire que le vecteur  $\vec{G}^{**}$  obtenu sera perturbé et il faudra réordonnancer ses composantes par la même règle décrite au § 1-2 pour obtenir la solution  $\vec{G}$  (la matrice de permutation  $P$  étant symétrique  $P^{-1} = P$  et  $\vec{G} = P\vec{G}^{**}$ ).

Soit  $R_0 = T^{(M)}$  et  $V_0 = \vec{g}$

On a :

$$\vec{G}^{**} = R_0 V_0 = R_1 \Delta_0 \Lambda_0 V_0$$

$$R_1 = \begin{vmatrix} | & & & | \\ T^{M-1} & & & \\ | & & & | \\ \hline & & & \\ | & & & | \\ T^{M-1} & & & \\ | & & & | \end{vmatrix}$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} | & & & | \\ I^{M-1} & & & \\ | & & & | \\ \hline & & & \\ | & & & | \\ L^{M-1} & & & \\ | & & & | \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix} | & & & | \\ I^{M-1} & & & I^{M-1} \\ | & & & | \\ \hline & & & \\ | & & & | \\ I^{M-1} & & & -I^{M-1} \\ | & & & | \end{vmatrix}$$



Les formules permettant le passage de  $V_{k-1}$  à  $V_k$  seront :

$$V_k(q \times 2^{M-1+1+j}) = V_{k-1}(q \times 2^{M-k+1+j}) + V_{k-1}(q \times 2^{M-k+1+j+2^{M-k}})$$

$$V_k(q \times 2^{M-k+1+j+2^{M-k}}) = C_M^{j \times 2^{k-1}} \times [V_{k-1}(q \times 2^{M-1+1+j}) - V_{k-1}(q \times 2^{M-k+1+j+2^{M-k}})]$$

(I-4 ; 2)

pour  $j = 0, \dots, 2^{k-k-1}$

$$q = 0, \dots, 2^{k-1-1}$$

avec

$$C_M^{j \times 2^{k-1}} = L_{jj}^{(M-k)} = e^{2i\pi \frac{j}{2^{M-k+1}}} = e^{2i\pi \frac{j \times 2^{k-1}}{2^M}} = L_{j \times 2^{k-1}, j \times 2^{k-1}}^{(M-1)}$$

Après le  $M^o$  pas,  $\vec{G}^* = R_M V_M$ .

$R_M$  est formé de  $2^M$  blocs  $T^{(0)}$  d'ordre 1 placés sur la diagonale  $T^{(0)} = e^0 = 1$   
 $R_M = I$  et

$$\vec{G}^* = V_M$$

En résumé :

$$\vec{G}^* = \underbrace{\Delta_{M-1} \Delta_{M-1} \Delta_{M-2} \Delta_{M-2} \dots \Delta_k \Delta_k \Delta_{k-1} \Delta_{k-1} \Delta_{k-2} \dots \Delta_1 \Delta_1 \Delta_0 \Delta_0 V_0}_{V_{k-1}}$$

$$\vec{G}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \prod_{k=M-1} \Delta_k \Delta_k \end{pmatrix} \vec{g}$$

$V_k$

(I-4 ; 3)

I-5 - COUT DE LA METHODE

Le  $k^e$  pas coûte  $2^{k-1} \times 2^{M-k} = 2^{M-1}$  multiplications, additions, soustractions de nombres complexes autant d'additions et autant de soustractions.

Pour M pas  $M \times 2^{M-1}$  au lieu de  $2^{2M}$  pour la méthode ordinaire.

I-6 - PERMUTATION DES COLONNES DE S

En opérant la permutation P sur les colonnes de S (au lieu des lignes) ainsi que sur les composantes de  $\vec{g}$  nous aurions obtenu directement  $\vec{G}$  également en M pas à l'aide d'un algorithme similaire :

$$\begin{aligned}\vec{G} &= S\vec{g} \\ &= SPP\vec{g} \quad (P^2 = I) \\ &= U^{(M)}\vec{g}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U^{(M)} = SP &= (T^{(M)})^t = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Pi & \\ & & \Delta_k \Lambda_k \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{matrix} M-1 \\ \Pi \\ k=0 \end{matrix} \Lambda_k^t \Delta_k^t\end{aligned}$$

$$\Lambda_k^t = \Lambda_k \text{ et } \Delta_k^t = \Delta_k \quad U^{(M)} = \begin{matrix} M-1 \\ \Pi \\ k=0 \end{matrix} \Lambda_k \cdot \Delta_k$$

En posant  $q = M-1-k$

$$U^{(M)} = \begin{matrix} 0 \\ \Pi \\ q=M-1 \end{matrix} \Lambda_{M-1-q} \Delta_{M-1-q}$$

$$\vec{G} = U^{(M)} \vec{g}^*$$

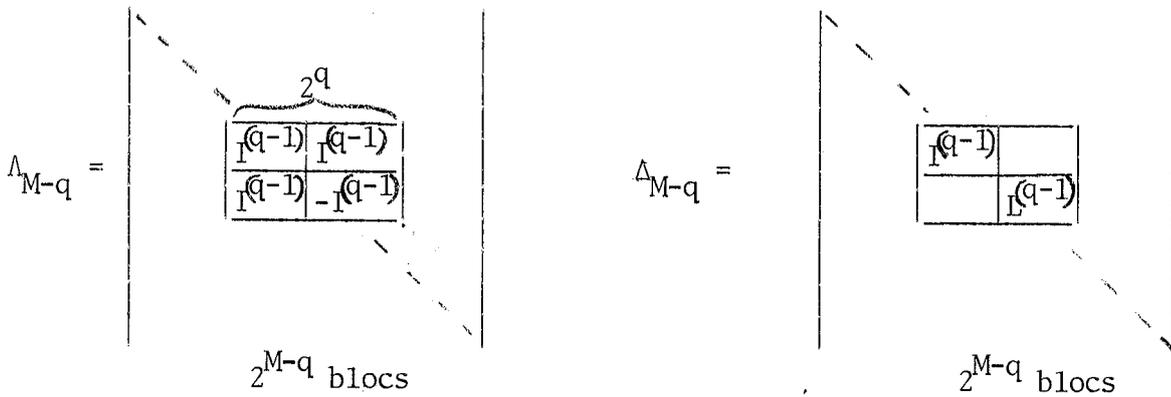
$$\vec{G} = \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 \cdots \Lambda_{M-1-q} \Lambda_{M-1-q} \Lambda_{M-q} \Lambda_{M-q} \Lambda_{M-q+1} \cdots \Lambda_{M-1} \Lambda_{M-1} \vec{g}^*$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{w_{q-1}}$   
 $\underbrace{\hspace{25em}}_{w_q}$

Au  $q^e$  pas on aura

$$w_q = \Lambda_{M-q} \Lambda_{M-q} w_{q-1} \quad (w_0 = \vec{g}^*)$$

avec :



Les formules correspondantes sont :

$$w_q(k \times 2^{q+j}) = w_{q-1}(k \times 2^{q+j}) + C_M^{j \times 2^{M-q}} \times w_{q-1}(k \times 2^{q+j+2^{q-1}})$$

$$w_q(k \times 2^{q+j+2^{q-1}}) = w_{q-1}(k \times 2^{q+j}) - C_M^{j \times 2^{M-q}} \times w_{q-1}(k \times 2^{q+j+2^{q-1}})$$

pour  $j = 0, \dots, 2^{q-1}-1$

et  $k = 0, \dots, 2^{M-q}-1$

(I-6 ; 1)

I-7 - PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY DANS LE CAS GENERAL  $N = \prod_{m=1}^M r_m$

Supposons que  $N = r_1 r_2 r_3 \dots r_M$  ( $r_m \neq 1$ ) et que l'on veuille calculer

$$G_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \quad \text{pour } j = 0, \dots, N-1 \quad (\vec{G} = S\vec{g}) \quad (\text{I-7;0})$$

Quel que soit  $k$  indice de ligne de la matrice  $S$  ( $k \in \{0, \dots, N-1\}$ ), il existe des  $\delta_\ell$  ( $\delta_\ell \in \{0, \dots, r_\ell - 1\}$  ;  $\ell = 1, \dots, M$ ) tels que :

$$\begin{aligned} k = & \delta_M \\ & + \delta_{M-1} r_M \\ & + \dots \\ & + \delta_\ell r_{\ell+1} r_{\ell+2} \dots r_M \\ & + \dots \\ & + \delta_1 r_2 r_3 \dots r_M \end{aligned}$$

En posant  $r_{M+1} = 1$  :

$$k = \sum_{\ell=1}^M \delta_\ell \prod_{m=\ell+1}^{M+1} r_m \quad (\text{I-7 ; 1})$$

Pour un ordre fixé  $(r_1, r_2, \dots, r_M)$  des facteurs composant  $N$ , la détermination des  $\delta_\ell$  est unique pour un  $k$  donné (c'est une écriture de  $k$  en base croisée.

Exemple :  $2^h 35^{\text{min}} 10^{\text{sec}} 6/10$ ).

La permutation que l'on va effectuer sur les lignes de la matrice  $S$  consiste là aussi à inverser l'ordre des digits  $\delta_\ell$  pour chaque numéro de ligne.

Ainsi la  $k^{\circ}$  ligne de  $S$  aura après permutation la position  $q(k)$  donnée par :

$$\begin{aligned}
 q(k) &= \delta_1 \\
 &+ \delta_2 r_1 \\
 &+ \dots \\
 &+ \delta_M r_1 r_2 \dots r_{M-1}
 \end{aligned}$$

En posant  $r_0 = 1$  :

$$q(k) = \sum_{\ell=1}^M \delta_{\ell} \prod_{m=0}^{\ell-1} r_m \quad (\text{I-7 ; 2})$$

Exemple :  $M = 3$     $r_1 = 2$     $r_2 = 2$     $r_3 = 3$   $\Rightarrow N = 12$

k	$\delta_1 \delta_2 \delta_3$	$\delta_3 \delta_2 \delta_1$	q(k)	$ S ^{(M)}$
0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1	0 0 1	1 0 0	4	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
2	0 0 2	2 0 0	8	0 2 4 6 8 10 0 2 4 6 8 10
3	0 1 0	0 1 0	2	0 3 6 9 0 3 6 9 0 3 6 9
4	0 1 1	1 1 0	6	0 4 8 0 4 8 0 4 8 0 4 8
5	0 1 2	2 1 0	10	0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 2 7
6	1 0 0	0 0 1	1	0 6 0 6 0 6 0 6 0 6 0 6
7	1 0 1	1 0 1	5	0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5
8	1 0 2	2 0 1	9	0 8 4 0 8 4 0 8 4 0 8 4
9	1 1 0	0 1 1	3	0 9 6 3 0 9 6 3 0 9 6 3
10	1 1 1	1 1 1	7	0 10 8 6 4 2 0 10 8 6 4 2
11	1 1 2	2 1 1	11	0 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cette fois, si  $|S|_{jk}^{(M)} = a$ , on a  $S_{jk} = e^{2i\pi \frac{a}{N}}$

$$[T^{(M)}]^{(M)}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0
0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0
0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0	7	2	9	4	11	6	1	8
0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2	0	10	8
0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	0	2	4
0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0	5	10	3	8	1	6	11	4
0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4

$$T^{(M)} = PS.$$

On voit immédiatement que la matrice de permutation  $P$  n'est pas symétrique (pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que, quel que soit  $m$ ,  $r_m = r_{M+1-m}$ ).

La matrice  $T^{(M)}$  se décompose en  $r_M^2$  blocs carrés d'ordre  $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{M-1}$ .

Dans notre cas :

$$T^{(3)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T^{(2)} & T^{(2)} & T^{(2)} \\ \hline T^{(2)}_{L^{(2)}} & \alpha T^{(2)}_{L^{(2)}} & \alpha^2 T^{(2)}_{L^{(2)}} \\ \hline T^{(2)}_{(L^{(2)})^2} & \alpha^2 T^{(2)}_{(L^{(2)})^2} & \alpha T^{(2)}_{(L^{(2)})^2} \\ \hline \end{array} \quad [T^{(2)}]^{(3)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 6 \ 0 \ 6 \\ 0 \ 3 \ 6 \ 9 \\ 0 \ 9 \ 6 \ 3 \\ \hline \end{array} \quad [T^{(2)}]^{(2)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ 0 \ 3 \ 2 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

$T^{(2)}$  est la matrice que nous aurions obtenue après permutation de  $S$  pour  $N = r_1 \times r_2$

$$[L^{(2)}]^{(3)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{et } \alpha = e^{2i\pi \frac{4}{12}} = e^{2i\pi \frac{1}{3}}$$

Le premier pas est basé sur la décomposition  $T^{(m)}$  en un produit de 3 matrices :

$$T^{(3)} = \begin{vmatrix} T^{(2)} & & \\ & T^{(2)} & \\ & & T^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & & \\ & L^{(2)} & \\ & & (L^{(2)})^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & I & I \\ I & \alpha I & \alpha^2 I \\ I & \alpha^2 I & \alpha^4 I \end{vmatrix}$$

(I-7 ; 3)

Puis on décomposera chaque bloc  $T^{(M-1)}$  en  $r_{M-1}^2$  blocs carrés d'ordre  $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{M-2}$ , etc... jusqu'au  $M^{\text{ème}}$  pas.

Le coût de chaque pas dépend de la valeur du facteur  $r_m$  par lequel on divise les dimensions de la matrice  $T^{(m)}$ .

$Q(r_m)$  désignant le nombre de multiplications/additions de nombres complexes à effectuer, on a :

$$Q(2) = \frac{N}{2}$$

$$Q(3) = 2N$$

$$Q(5) = 4N$$

et l'on montre que pour  $r_m$  nombre premier différent de 2 :

$$Q(r_m) = (r_m - 1) N$$

Le coût total est donc :

$$Q_{\text{total}} = \sum_{m=1}^M (r_m - 1) N \quad (\text{I-7 ; 4})$$

I-8 - D.F.T. et I.D.F.T.

L'application linéaire  $S$  qui à  $\vec{g} \in \mathbb{C}^N$  fait correspondre  $\vec{G} \in \mathbb{C}^N$  par la formule (I-7;0) est appelée Inverse Discrete Fourier Transform (I.D.F.T.).

L'application inverse ( $\vec{g} = S^{-1}\vec{G}$ ) est appelée Discrete Fourier Transform (D.F.T.). Il est clair que :

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} G_j \quad (\text{I-8 ; 1})$$

Naturellement, l'algorithme de COOLEY et TUKEY sert aussi à calculer les D.F.T. Simplement dans le cas où  $N = 2^M$  les termes de la matrice diagonale  $L^{(M-1)}$  deviennent :

$$L_{jk}^{(M-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ e^{-2i\pi \frac{jk}{2^M}} & \text{si } j = k = 0, \dots, 2^{M-1}-1 \end{cases}$$

et toutes les composantes du vecteur résultant sont à multiplier par  $\frac{1}{2^M}$ .

Partant d'un vecteur  $\vec{g}$  de coordonnées  $g_k$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), nous noterons  $\vec{G}^-$  sa D.F.T. et  $\vec{G}^+$  son I.D.F.T.

$G_j^- = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$	D.F.T.
	$j = 0, \dots, N-1$
$G_j^+ = \sum_{k=0}^{N-1} e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$	I.D.F.T.
	$j = 0, \dots, N-1$

(I-8 ; 2)

## CHAPITRE - II

### METHODES DE CALCUL APPROCHE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION A PARTIR DE LA D.F.T. DU VECTEUR DE SES VALEURS EN DES ABSCISSES DISCRETES

#### APPLICATION AU CALCUL APPROCHE DES COEFFICIENTS DE FOURIER

#### II-1 - RELATION ENTRE D.F.T. ET TRANSFORMATION DE FOURIER

##### II-1-1 - Distribution $\Delta$ . Produit $\Delta g$

Soit  $\Delta$  la distribution sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k \frac{T}{N} \quad (\text{II-1 ; 1})$$

où  $\delta_\alpha$  est la mesure de Dirac placée à l'abscisse  $\alpha$  .

$\delta_\alpha$  est une distribution à support ponctuel donc compact ( $\delta_\alpha \in \mathcal{E}'$ )  
qui à toute fonction  $\varphi \in \mathcal{E}$  (ensemble des fonctions indéfiniment dérivables  
sur  $\mathbb{R}$ ) fait correspondre un scalaire noté  $\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle$  tel que (cf. SCHWARTZ [1]  
page 83)

$$\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle = \varphi(\alpha)$$

Naturellement  $\Delta \in \mathcal{E}'$  et

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{\frac{kT}{N}}, \varphi \right\rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle \delta_{\frac{kT}{N}}, \varphi \right\rangle \\
 \langle \Delta, \varphi \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{kT}{N}\right)
 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $g$  une fonction continue et bornée, définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs complexes.

SCHWARTZ ([1] p. 99-100) a montré que dans ce cas on pouvait définir le produit  $\Delta.g$  comme étant une distribution vérifiant :

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta g, \varphi \rangle &= \langle \Delta, g\varphi \rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{kT}{N}\right) \cdot \varphi\left(\frac{kT}{N}\right)
 \end{aligned}$$

En posant :

$$g\left(\frac{kT}{N}\right) = g_k \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\langle \Delta g, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle g_k \delta_{\frac{kT}{N}}, \varphi \right\rangle$$

$$\Rightarrow \Delta g = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \delta_{\frac{kT}{N}}$$

(II-1 ; 2)

$\Delta g$  est une distribution à support borné. Sa transformée de Fourier est donnée par (cf. SCHWARTZ [1] p. 210) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Delta g](f) &= \langle \Delta g(t), e^{-2i\pi ft} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k \langle \delta_{\frac{kT}{N}}, e^{-2i\pi ft} \rangle \\ \mathcal{F}[\Delta g](f) &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-2i\pi f \frac{kT}{N}} \end{aligned}$$

Si la fréquence  $f$  prend les valeurs  $\frac{j}{T}$  (ce qui correspond à un nombre entier de périodes sur  $[0, T]$ )

$$\mathcal{F}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} \quad (\text{II-1 ; 3})$$

En calculant la Transformée de Fourier inverse de  $\Delta g$ , on aurait obtenu :

$$\bar{\mathcal{F}}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} \quad (\text{II-1 ; 4})$$

Or, nous avons vu que, partant d'un vecteur de coordonnées  $g_k$  ( $k=0, \dots, N-1$ ) D.F.T. et I.D.F.T. fournissaient deux vecteurs  $\vec{G}^-$  et  $\vec{G}^+$  par les formules (I-8;2)

$$G_j^- = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \quad G_j^+ = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$$

$$\Rightarrow \boxed{G_j^- = \frac{1}{N} \mathcal{F}[\Delta g] \left(\frac{j}{T}\right)} \quad \boxed{G_j^+ = \mathcal{F}[\Delta g] \left(\frac{j}{T}\right)} \quad (\text{II-1 ; 5})$$

Effectuer la D.F.T. (ou l'I.D.F.T.) sur un vecteur de coordonnées  $g_k$  revient donc (à un coefficient multiplicatif près égal à  $\frac{1}{N}$  dans le cas de la D.F.T.) à calculer la Transformée de Fourier (ou son inverse) d'une distribution de masses de Dirac de poids  $g_k$  placées aux abscisses  $\frac{kT}{N}$  pour des valeurs de la fréquence égales à  $\frac{j}{T}$ .

Voyons le lien qui existe entre les  $G_j^-$  et la transformée de Fourier de la fonction  $g$ .

$$G_j^- = \frac{1}{N} \mathcal{F}[\Delta g] \left(\frac{j}{T}\right).$$

La propriété fondamentale de la Transformation de Fourier qui transforme convolution en multiplication et multiplication en convolution (cf. SCHWARTZ [1] p. 218) appliquée à  $\mathcal{F}[\Delta g]$  nous donne :

$$\boxed{G_j^- = \frac{1}{N} [\mathcal{F}\Delta * \mathcal{F}g] \left(\frac{j}{T}\right)} \quad (\text{II-1 ; 6})$$

$$G_j^- = \left\langle \frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta \left(\frac{j}{T} - \lambda\right), \mathcal{F}g(\lambda) \right\rangle. \quad (\text{II-1 ; 7})$$

$G_j^-$ , est la valeur en  $\frac{j}{T}$  du produit de convolution de la fonction  $\frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta$  par la T.F. de  $g$ . De même  $G_j^+$  est la valeur en  $\frac{j}{T}$  du produit de convolution de la fonction  $\mathcal{F}\Delta$  par la T.F. inverse de  $g$ .

II-1-2 - Transformée de Fourier de  $\Delta/N$ 

$\Delta/N \in \mathcal{E}'$  et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta(\lambda) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta_{\frac{kT}{N}}(t), e^{-2i\pi\lambda t} \rangle \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{T}{N}\lambda k} \qquad \qquad \qquad (\text{II-1 ; 8}) \\
 &= \frac{1}{N} \left[ \frac{1 - e^{-2i\pi T\lambda}}{1 - e^{-2i\pi\frac{T}{N}\lambda}} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \frac{e^{-i\pi T\lambda}}{e^{-i\pi\frac{T}{N}\lambda}} \left[ \frac{e^{i\pi T\lambda} - e^{-i\pi T\lambda}}{e^{i\pi\frac{T}{N}\lambda} - e^{-i\pi\frac{T}{N}\lambda}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta(\lambda) = \frac{\sin\pi T\lambda}{N \sin\pi\frac{T}{N}\lambda} e^{-i\pi T(1-\frac{1}{N})\lambda}} \qquad \qquad \qquad (\text{II-1 ; 9})$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta(0) = 1$$

$$\frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta\left(\frac{p}{T}\right) = 0 \qquad \text{pour } p = 1, 2, \dots, N-1 \qquad \qquad \qquad (\text{II-1 ; 10})$$

La formule (II-1 ; 8) montre que  $\frac{1}{N} \mathcal{F}\Delta$  est une fonction périodique de période  $\frac{N}{T}$  dont les coefficients de Fourier sont égaux à  $\frac{1}{N}$  pour  $k = 0, \dots, N-1$  et nuls pour les autres valeurs de  $k$ .

Sur la figure 1 on a représenté les tracés de la partie réelle, de la partie imaginaire et du carré du module de cette fonction.

Remarque :

La périodicité de  $\frac{1}{N} \mathcal{F} \Delta$  entraîne celle de  $\frac{1}{N} \mathcal{F} \Delta * \mathcal{F} g$  avec la même période, et ce quel que soit  $\mathcal{F} g$ .

$$G_{kN+j}^- = \left[ \frac{1}{N} \mathcal{F} \Delta * \mathcal{F} g \right] \left( \frac{kN+j}{T} \right) = \left[ \frac{1}{N} \mathcal{F} \Delta * \mathcal{F} g \right] \left( \frac{j}{T} \right) = G_j^-$$

Il est inutile de calculer  $G_j^-$  pour plus de N valeurs consécutives de l'indice j.

On a vu que l'algorithme de Cooley et Tukey permettait d'obtenir  $G_j^-$  pour  $j = 0, \dots, N-1$ . Mais il est préférable de considérer les  $G_j^-$  obtenus pour  $j = \frac{N}{2}, \dots, N-1$  comme les valeurs de  $\left[ \frac{1}{N} \mathcal{F} \Delta * \mathcal{F} g \right] \left( \frac{j-N}{T} \right)$  puisque cela correspond à des valeurs de la fréquence, négatives, mais plus petites en valeur absolue.

## II-2 - APPLICATION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

Soit  $g_T$  une fonction continue et bornée, définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , périodique de période  $T$  et telle qu'on puisse la développer en série de Fourier :

$$g_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2i\pi \frac{m}{T} t} \quad (\text{II-2 ; 1})$$

On suppose :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |C_m| < +\infty \quad (\text{II-2 ; 2})$$

Aux instants  $\frac{kT}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), la fonction  $g_T$  prend les valeurs :

$$g_k = g_T\left(\frac{kT}{N}\right) \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2i\pi\frac{mk}{N}}$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \exists s \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in \{0, \dots, N-1\} \quad | \quad m = sN+q$$

La convergence des modules de la série  $C_m$  (II-2 ; 2) permet d'écrire :

$$g_k = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sN+q} e^{2i\pi\frac{(sN+q)m}{N}} \\ = \sum_{q=0}^{N-1} \left( \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sN+q} \right) e^{2i\pi\frac{qm}{N}} \\ g_k = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q e^{2i\pi\frac{qm}{N}} \quad (\text{II-2 ; 3})$$

La fonction  $\tilde{g}_T(t) = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q e^{2i\pi\frac{q}{T}t}$  a la même période  $T$  que  $g_T$  et prend les mêmes valeurs  $g_k$  aux abscisses  $\frac{kT}{N}$  (c'est l'interpolation trigonométrique de degré  $N$  de  $g_T$ ).

$\Delta$  étant défini par (II-1 ; 1), le produit  $\Delta g_T$  ne faisant intervenir  $g_T$  que par ses valeurs aux abscisses  $\frac{kT}{N}$ , on a :

$$\frac{1}{N} \Delta g_T = \frac{1}{N} \Delta \tilde{g}_T$$

Ce qui entraîne :

$$G_j^- = \frac{1}{N} \mathcal{F} [\Delta g_T] \left( \frac{j}{T} \right) = \frac{1}{N} \mathcal{F} [\Delta \tilde{g}_T] \left( \frac{j}{T} \right)$$

D'après (II-1 ; 7) :

$$G_j^- = \left\langle \frac{1}{N} \mathcal{F} \Delta \left( \frac{j}{T} - \lambda \right), \mathcal{F} \tilde{g}_T(\lambda) \right\rangle$$

On a :

$$\mathcal{F} [\tilde{g}_T] (\lambda) = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q \delta_{\frac{q}{T}}$$

D'où :

$$G_j^- = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q \mathcal{F} \Delta \left( \frac{j}{T} - \frac{q}{T} \right)$$

ce qui, compte-tenu de (II-1 ; 10), nous donne :

$$G_j^- = \tilde{C}_j.$$

En résumé :

$$g_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2i\pi \frac{m}{T} t} \xrightarrow{\text{echant.}} g_k = g_T \left( \frac{kT}{N} \right) \xrightarrow{\text{D.F.T.}} G_j^- = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sN+j}$$

k=0, ..., N-1                      j=0, ..., N-1

(II-2 ; 4)

Lorsqu'on "échantillonne" une fonction de période T à raison de N points équidistants par période, si l'on effectue la D.F.T. sur le vecteur obtenu avec N points consécutifs à partir de 0, on recueille pour chaque valeur de l'indice allant de 0 à N-1 la somme des coefficients de Fourier de la fonction ayant le même indice modulo N.

Voir exemple numérique (en annexe).

II-3 - CALCUL APPROCHE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTIONII-3-1 - Interpolation par un polynôme trigonométrique

Etant donnée une fonction  $g$  non périodique connue par ses valeurs aux abscisses  $\frac{kT}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) la fonction  $g_T$  périodique de période  $T$  ayant pour coefficients de Fourier :

$$\tilde{C}_j = \tilde{G}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \quad j \in \{0, \dots, N-1\}$$

(II-3 ; 1)

$$\tilde{C}_j = 0 \quad j \notin \{0, \dots, N-1\}$$

est telle que

$$\tilde{g}_T\left(\frac{kT}{N}\right) = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q e^{2i\pi \frac{qk}{N}}$$

$$\tilde{g}_T\left(\frac{kT}{N}\right) = g_k \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, N-1\}$$

Les  $\tilde{C}_j$  vérifient :

$$\tilde{C}_j = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{g}_T(t) e^{-2i\pi \frac{j}{T} t} dt \quad \text{(II-3 ; 2)}$$

La fonction  $\tilde{g}$  coïncidant avec  $\tilde{g}_T$  sur  $[0, T[$  et nulle ailleurs admet pour transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[\tilde{g}](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(t) e^{-2\pi\lambda t} dt$$

$$= \int_0^T \tilde{g}_T(t) e^{-2i\pi\lambda t} dt$$

Lorsque  $\lambda$  prend la valeur  $\frac{j}{T}$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ), compte tenu de (II-3 ; 2) on a :

$$\mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j}{T} \right) = T \tilde{C}_j$$

D'où, en tenant compte de la remarque du paragraphe (II-1 ; 2)

$\mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j}{T} \right) = T G_j^-$	}	$j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$
$\mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j}{T} \right) = \frac{T}{N} G_j^+$		
$\mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j-N}{T} \right) = T G_j^-$	}	$j = \frac{N}{2}, \dots, N-1$
$\mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j-N}{T} \right) = T G_j^+$		

(II-3 ; 3)

### II-3-2 - Interpolation linéaire

Nous avons vu précédemment au paragraphe (II-1 ; 1) que si  $g$  était une fonction continue et bornée, définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et  $\Delta$  la distribution

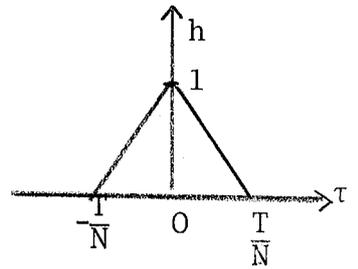
$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\delta_{kT}}{N}$$

leur produit était la distribution

$$\Delta g = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \frac{\delta_{kT}}{N}$$

Soit  $h$  la fonction sur  $\mathbb{R}$  définie comme suit :

$$h(\tau) \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T/N} & \text{si } |\tau| < \frac{T}{N} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



(II-3 ; 4)

Effectuons la convolution de la distribution  $\Delta g$  avec la fonction  $h$ .  
C'est une fonction que nous noterons  $\hat{g}$ .

$$\hat{g}(t) = [\Delta g * h](t)$$

$$= \langle \Delta g(\tau), h(t-\tau) \rangle$$

$$= \langle \sum_{k=0}^{N-1} g_k \delta_{\frac{kT}{N}}(\tau), h(t-\tau) \rangle$$

$$\hat{g}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k h\left(t - \frac{kT}{N}\right)$$

(II-3 ; 5)

Quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ , on peut trouver  $q \in \mathbb{Z}$  et  $u \in [0, \frac{T}{N}[$  tels que

$$t = q \frac{T}{N} + u$$

$$\hat{g}\left(q \frac{T}{N} + u\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k h\left(\frac{(q-k)T}{N} + u\right)$$

Compte-tenu de la définition de  $h$  et de l'intervalle de variation de  $u$ ,  $h(\frac{(q-k)T}{N} + u) \neq 0$  entraîne que  $q-k$  doit prendre soit la valeur 0, soit la valeur -1.

D'où, en introduisant  $g_{-1} = g_N = 0$  :

$$\text{pour } q \in \{-1, \dots, N-1\} \quad \hat{g}(q \frac{T}{N} + u) = g_q h(u) + g_{q+1} h(-\frac{T}{N} + u)$$

$$\hat{g}(q \frac{T}{N} + u) = g_q (1-u \frac{N}{T}) + g_{q+1} u \frac{N}{T} \quad (\text{II-3 ; 6})$$

$$u = 0 \Rightarrow \hat{g}(q \frac{T}{N}) = g_q$$

$$u \rightarrow \frac{T}{N} \Rightarrow \hat{g}(q \frac{T}{N} + u) \rightarrow g_{q+1}$$

pour  $t$  tel que  $q \notin \{-1, \dots, N-1\}$   $\hat{g}(t) \equiv 0$

La fonction  $\hat{g}$  obtenue par convolution de  $\Delta g$  avec  $h$  est donc la fonction continue, nulle en dehors de  $[-\frac{T}{N}, T[$  linéaire sur chaque intervalle  $[q \frac{T}{N}, (q+1) \frac{T}{N}]$  et telle que  $\hat{g}(q \frac{T}{N}) = g_q$ .  
(voir figure 2).

Cherchons la transformée de Fourier de cette fonction :

$$\mathcal{F}[\hat{g}] = \mathcal{F}[\Delta g * h]$$

$$\mathcal{F}[\hat{g}] = \mathcal{F}[\Delta g] \cdot \mathcal{F}[h]$$

Pour la valeur  $j/T$  de l'abscisse elle prend la valeur

$$\mathcal{F}[\hat{g}](\frac{j}{T}) = \mathcal{F}[\Delta g](\frac{j}{T}) \cdot \mathcal{F}[h](\frac{j}{T})$$

De même, pour la transformée inverse de Fourier

$$\mathcal{F}[\hat{g}]\left(\frac{j}{T}\right) = \mathcal{F}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right) \cdot \mathcal{F}[h]\left(\frac{j}{T}\right).$$

On calcule aisément :

$$\mathcal{F}[h](\lambda) = \mathcal{F}^{-1}[h](\lambda) = \frac{T}{N} \left( \frac{\sin \pi \lambda \frac{T}{N}}{\pi \lambda \frac{T}{N}} \right)^2 \quad (\text{II-3 ; 7})$$

D'où les valeurs exactes des transformées et transformée inverse de Fourier de la fonction  $\hat{g}$  pour les abscisses  $\frac{j}{T}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) à partir de la D.F.T. et de l'I.D.F.T. des échantillons  $g_k$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) de la fonction  $g$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[\hat{g}]\left(\frac{j}{T}\right) &= T \cdot \left( \frac{\sin \pi \frac{j}{N}}{\pi \frac{j}{N}} \right)^2 \cdot G_{j_N}^- \\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}]\left(\frac{j}{T}\right) &= \frac{T}{N} \left( \frac{\sin \pi \frac{j}{N}}{\pi \frac{j}{N}} \right)^2 \cdot G_{j_N}^+ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} j &\in \mathbb{Z} \\ j_N &= j \pmod{N} \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (\text{II-3 ; 8})$$

## II-4 - CAS D'"ECHANTILLONS" PRELEVES ENTRE $a$ ET $a+T$

### II-4-1 - Distribution $\Delta_a$

Posons :

$$\Delta_a = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{a + \frac{kT}{N}} \quad (\text{II-4 ; 1})$$

Le produit de cette distribution avec la fonction  $g$  est la distribution

$$\Delta_a \cdot g = \sum_{k=0}^{N-1} g_{a_k} \delta_{a + \frac{kT}{N}} \quad (\text{II-4 ; 2})$$

en posant :

$$ga_k = g(a + \frac{kT}{N}).$$

La propriété du produit de convolution de 2 distributions de Dirac ( $\delta_\alpha * \delta_\beta = \delta_{\alpha+\beta}$ ) permet d'écrire :

$$\Delta_a \cdot g = \left( \sum_{k=0}^{N-1} ga_k \delta_{\frac{kT}{N}} \right) * \delta_a \quad \text{(II-4 ; 3)}$$

Si l'on note  $\vec{G\bar{a}}$  la D.F.T. du vecteur  $\vec{ga}$ , en prenant la transformée de Fourier de (II-4 ; 3) aux abscisses  $\frac{j}{T}$  on a :

$$\mathcal{F}[\Delta_a \cdot g] \left( \frac{j}{T} \right) = N G\bar{a}_j \cdot \mathcal{F}[\delta_a] \left( \frac{j}{T} \right)$$

la T.F. de  $\delta_a$  étant la fonction  $e^{-2i\pi a f}$

$$\mathcal{F}[\Delta_a \cdot g] \left( \frac{j}{T} \right) = e^{-2i\pi a \frac{j}{T}} \cdot N G\bar{a}_j \quad \text{(II-4 ; 4)}$$

De même

$$\overline{\mathcal{F}}[\Delta_a \cdot g] \left( \frac{j}{T} \right) = e^{2i\pi a \frac{j}{T}} \cdot G^+ a_j$$

II-4 - 2 - Cas  $a = -\frac{T}{2}$

Dans ce cas particulier :

$$\mathcal{F}\left[\Delta_{-\frac{T}{2}} \cdot g\right] \left( \frac{j}{T} \right) = (-1)^j N G\bar{a}_j \quad \text{(II-4 ; 5)}$$

$$\overline{\mathcal{F}}\left[\Delta_{-\frac{T}{2}} \cdot g\right] \left( \frac{j}{T} \right) = (-1)^j G^+ a_j$$

Pour calculer la T.F. d'une fonction dont les échantillons sont pris entre  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$  on calcule la D.F.T. du vecteur de ces échantillons et l'on change de signe les composantes d'indices impair du vecteur résultant. Puis on utilise les approximations du paragraphe (II-3)

Remarque :

$$\text{si } ga_0 = \frac{1}{2} \left[ g\left(-\frac{T}{2}\right) + g\left(\frac{T}{2}\right) \right]$$

$$ga_k = g\left(-\frac{T}{2} + \frac{kT}{N}\right) \quad k = 1, \dots, N-1$$

celà revient à faire le produit de  $g$  par

$$\Delta'_{-\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \left( \delta_{-\frac{T}{2}} + \delta_{\frac{T}{2}} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \delta_{-\frac{T}{2} + \frac{kT}{N}} \quad (\text{II-4 ; 6})$$

dont la transformée de Fourier est réelle :

$$\mathcal{F}[\Delta'](\lambda) = \cos \pi T \lambda \left[ 1 + 2 \frac{\sin \pi T \lambda \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \right)}{\sin \pi T \lambda \frac{1}{N}} \right] \quad (\text{II-4 ; 7})$$



## CHAPITRE - III

### CROSS-SPECTRE ET SPECTRE DE PUISSANCE

#### III-1 - FONCTION DE CROSS-CORRELATION ET CROSS-SPECTRE DE DEUX FONCTIONS FONCTION D'AUTO-CORRELATION ET SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION

##### III-1-1 - Définition de la Fonction de Cross-Correlation

- a) Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux fonctions continues et bornées ( $|g_1(t)| \leq M_1$  et  $|g_2(t)| \leq M_2$  sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ).

Leur fonction de cross-correlation est définie par la limite suivante (quand elle existe) :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u) dt \quad (\text{III-1 ; 1})$$

On a :

$$|[g_1 \text{ CC } g_2](u)| \leq M_1 \cdot M_2$$

- b) Dans la suite nous considèrerons des fonctions à support borné, par exemple  $g_1(t) \equiv 0$  et  $g_2(t) \equiv 0$  pour tout  $t \notin [a, b]$ , dont la fonction de cross-correlation telle qu'elle est définie par (III-1 ; 1) est nulle. Dans ce cas nous conviendrons de ne pas faire tendre  $\theta$  vers l'infini et nous prendrons comme définition de la fonction de cross-correlation de  $g_1$  et  $g_2$  :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u) dt \quad (\text{III-1 ; 2})$$

On voit que pour  $u \notin [-(b-a), (b-a)]$  on a  $[g_1 \text{ CC } g_2](u) \equiv 0$ .

On a toujours la majoration :

$$|[g_1 \text{ CC } g_2](u)| \leq M_1 \cdot M_2$$

(III-1 ; 2) peut encore s'écrire

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u) dt$$

En posant  $x = -t$  et  $g_1^{\tau}(x) = \overline{g_1(-x)}$  on obtient

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^{\tau}(x) \cdot g_2(u-x) dx \quad (\text{III-1 ; 3})$$

Dans le second membre de cette égalité on reconnaît un produit de convolution

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} [g_1^{\tau} * g_2](u) \quad (\text{III-1 ; 4})$$

Dans le cas où  $g_1$  et  $g_2$  sont à support borné, leur fonction de cross-correlation est le quotient du produit de convolution de  $g_1^{\tau}$  avec  $g_2$  par la longueur du support.

Dans les deux cas, la loi de composition n'est pas commutative.

Si  $g_1$  et  $g_2$  sont réelles  $[g_2 \text{ CC } g_1](u) = [g_1 \text{ CC } g_2](-u)$

### III-1-2 - Définition du cross-spectre de 2 fonctions

C'est la transformée de Fourier de leur fonction de cross-correlation.

On le notera  $P_{g_1 g_2}$ .

$$P_{g_1 g_2}(f) = \mathcal{F}[g_1 \text{ CC } g_2](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g_1 \text{ CC } g_2](u) e^{-2i\pi fu} du \quad (\text{III-1 ; 5})$$

III-1-3 - Fonction d'Auto-correlation et Spectre de Puissance

Fonction d'Auto-correlation :

C'est le cas où  $g_1$  et  $g_2$  sont égales ( $g_1 = g_2 = g$ ).

$$[g \text{ CC } g](u) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \overline{g(t)} g(t+u) dt \quad (\text{III-1 ; 6})$$

Si  $g$  est à support borné ( $g(t) \equiv 0$  si  $t \notin [a, b]$ )

$$[g \text{ CC } g](u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{g(t)} \cdot g(t+u) dt \quad (\text{III-1 ; 7})$$

$$g \text{ CC } g = \frac{1}{b-a} \overline{g^T} * g$$

Spectre de puissance : C'est la transformée de Fourier de la fonction d'Auto-correlation

$$P_g(f) = \mathcal{F}[g \text{ CC } g](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g \text{ CC } g](u) e^{-2i\pi fu} du \quad (\text{III-1 ; 8})$$

III-2 - CAS DES FONCTIONS SEMI-PERIODIQUESIII-2-1 - Définition et propriétés

Une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sera dite semi-périodique si elle admet un développement de la forme

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2i\pi f_m t} \quad (\text{III-2 ; 1})$$

avec

$$f_m \in \mathbb{R} \quad c_m \in \mathbb{C} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m| < +\infty$$

C'est une forme particulière des fonctions presque périodiques.

La répartition des fréquences  $f_m$  sur  $\mathbb{R}$  peut être absolument quelconque, simplement  $m \neq q \Rightarrow f_m \neq f_q$ . (Si il existe  $T \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $m$  on puisse trouver  $q \in \mathbb{Z}$  tel que  $f_m = \frac{q}{T}$  alors le développement (III-2 ; 1) se ramène à un développement en série de Fourier et  $g$  est périodique de période  $T$ ).

La transformée de Fourier d'une fonction semi-périodique  $g$  admettant le développement (III-2 ; 1) est la distribution

$$\mathcal{F}[g] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \delta_{f_m} \quad (\text{III-2 ; 2})$$

Ce qui nous permet d'énoncer qu'une fonction semi-périodique n'est pas sommable ( $g \notin L^1$ ) car la transformée de Fourier d'une fonction sommable est une fonction continue (cf. SCHWARTZ [1] p. 200).

### III-2-2 - Fonction de Cross-correlation et cross-spectre

Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux fonctions semi-périodiques :

$$g_1(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^1 e^{2i\pi f_m^1 t} \quad f_m^1 \in \mathbb{R} \quad c_m^1 \in \mathbb{C} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m^1| < +\infty \quad (\text{III-2 ; 3})$$

$$g_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^2 e^{2i\pi f_m^2 t} \quad f_m^2 \in \mathbb{R} \quad c_m^2 \in \mathbb{C} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m^2| < +\infty$$

Effectuons l'union des suites  $f_m^1$  et  $f_m^2$

$$\{f_\lambda\} = \{f_m^1\} \cup \{f_m^2\}$$

et posons

$$c_q^1 = \begin{cases} \text{si } \exists m \mid f_m^1 = f_q \text{ alors } c_m^1 \\ \text{sinon } 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q^1| < +\infty$$

$$c_q^2 = \begin{cases} \text{si } \exists m \mid f_m^2 = f_q \text{ alors } c_m^2 \\ \text{sinon } 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q^2| < +\infty$$

ce qui permet d'écrire :

$$g_1(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^1 e^{2i\pi f_q t}$$

(III-2 ; 4)

$$g_2(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^2 e^{2i\pi f_q t}$$

Pour calculer la fonction de cross-correlation de  $g_1$  et  $g_2$  nous utiliserons la définition (III-1 ; 1) puisque  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas à support borné.

Introduisons la fonction  $g_1 \underset{\theta}{\text{CC}} g_2$  dont la limite pour  $\theta \rightarrow \infty$  nous donnera  $g_1 \text{ CC } g_2$

$$\begin{aligned} [g_1 \underset{\theta}{\text{CC}} g_2](u) &= \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u) dt \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{c_m^1} e^{-2i\pi f_m t} \right) \left( \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^2 e^{2i\pi f_q (t+u)} \right) dt \end{aligned}$$

que l'on peut écrire, compte tenu de la convergence des séries des modules de  $c_m^1$  et  $c_m^2$

$$[g_1 \underset{\theta}{\text{CC}} g_2](u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{c_m^1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^2 e^{2i\pi f_q u} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} e^{2i\pi(f_q - f_m)t} dt$$

$$[g_1 \underset{\theta}{\text{CC}} g_2](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \overline{c_q^1} c_q^2 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq q}}^{+\infty} \overline{c_m^1} c_q^2 \frac{\sin\pi(f_q - f_m)\theta}{\pi(f_q - f_m)\theta} \right] e^{2i\pi f_q u} \quad (\text{III-2 ; 5})$$

Lorsque  $\theta \rightarrow \infty$ ,  $g_1 \underset{\theta}{\text{CC}} g_2 \rightarrow g_1 \text{CC} g_2$

$$[g_1 \text{CC} g_2](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1} c_q^2 e^{2i\pi f_q u} \quad (\text{III-2 ; 6})$$

La fonction de cross-correlation de deux fonctions semi-périodiques est aussi semi-périodique. Sa transformée de Fourier nous fournit le cross-spectre de  $g_1$  et  $g_2$  qui est donc la distribution

$$P_{g_1 g_2} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1} c_q^2 \delta_{f_q} \quad (\text{III-2 ; 7})$$

Une autre écriture peut être employée faisant apparaître le module du coefficient de chaque fréquence et la phase qui est associée à cette fréquence :

Nous avons vu que  $c_q^1 \in \mathbb{C}$  et  $c_q^2 \in \mathbb{C}$ .

Posons  $c_q^1 = r_q^1 e^{-i\varphi_q^1}$  avec  $r_q^1 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_q^1 \in [0, 2\pi[$

$c_q^2 = r_q^2 e^{-i\varphi_q^2}$  avec  $r_q^2 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_q^2 \in [0, 2\pi[$

Les expressions de  $g_1$  et  $g_2$  deviennent :

$$g_1(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 e^{i(2\pi f_q t - \varphi_q^1)}$$

$$g_2(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^2 e^{i(2\pi f_q t - \varphi_q^2)}$$

(III-2 ; 8)

La fonction de cross-correlation s'écrit alors :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 r_q^2 e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} e^{2i\pi f_q u}$$

(III-2 ; 9)

et le cross-spectre :

$$P_{g_1 g_2} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 r_q^2 e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \delta_{f_q}$$

(III-2 ; 10)

En désignant par  $I_1$  et  $I_2$  les ensembles d'indices tels que

$$I_1 = \{q \in \mathbb{Z} \mid c_q^1 \neq 0\}$$

$$I_2 = \{q \in \mathbb{Z} \mid c_q^2 \neq 0\}$$

on obtient :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \sum_{q \in I_1 \cap I_2} r_q^1 r_q^2 e^{i[2\pi f_q u - (\varphi_q^2 - \varphi_q^1)]}$$

(III-2 ; 11)

et

$$P_{g_1 g_2} = \sum_{q \in I_1 \cap I_2} r_q^1 r_q^2 e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \delta_{f_q}$$

La fonction de cross-correlation de deux fonctions semi-périodiques ne "recueille" que les fréquences communes aux deux signaux. Le module du coefficient de chaque fréquence est égal au produit des modules des coefficients de chacune des fonctions pour la même fréquence, la phase attachée à cette fréquence étant la différence entre la phase de la 2ème fonction et celle de la 1<sup>ère</sup>.

La fonction de cross-correlation de deux fonctions n'ayant pas de fréquence commune est la fonction nulle.

Le cross-spectre de deux fonctions semi-périodiques est une distribution de masses de Dirac complexes sur  $\mathbb{R}$ .

III-2-3 - Fonction d'Auto-correlation et Spectre de puissance

$$g_1 = g_2 = g \quad g(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q e^{2i\pi f_q t} \quad c_q \in \mathbb{C}$$

ou

$$g(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q e^{i(2\pi f_q t - \varphi_q)} \quad r_q \in \mathbb{R}$$

Les formules (III-2 ; 6) et (III-2 ; 9) deviennent :

$$[g \text{ CC } g](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q|^2 e^{2i\pi f_q u} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (r_q)^2 e^{2i\pi f_q u}$$

(III-2 ; 12)

La fonction d'auto-correlation d'une fonction semi-périodique a tous ses coefficients réels et positifs. (Les déphasages  $\varphi_q$  ont disparu). Ce qui entraîne que, quel que soit  $u$  :

$$|[g \text{ CC } g](u)| \leq |[g \text{ CC } g](0)| \quad \text{(III-2 ; 13)}$$

Pour le spectre de puissance de  $g$ , (III-2 ; 7) et (III-2 ; 10) se transforment en

$$P_g = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q|^2 \delta_{f_q} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (r_q)^2 \delta_{f_q} \quad (\text{III-2 ; 14})$$

Le spectre de puissance d'une fonction semi-périodique  $g$  est une distribution de masses de Dirac réelles placées aux abscisses  $f_q$  et proportionnelles au carré du module du coefficient correspondant.

#### III-2-4 - Fonctions réelles

Nous supposons  $f_0 = 0$

$$q < 0 \Rightarrow f_q < 0$$

$$q > 0 \Rightarrow f_q > 0$$

Si  $g_1$  et  $g_2$  sont réelles, on a alors

$$c_0^1 = r_0^1 \in \mathbb{R}$$

$$c_0^2 = r_0^2 \in \mathbb{R}$$

et quelque soit  $q$  :  $f_{-q} = -f_q$

$$c_{-q}^1 = \overline{c_q^1}$$

$$c_{-q}^2 = \overline{c_q^2}$$

(III-2 ; 14)

Si, comme on l'a vu

$$c_q^1 = r_q^1 e^{-i\varphi_q^1}$$

$$c_q^2 = r_q^2 e^{-i\varphi_q^2}$$

cela entraîne

$$c_{-q}^1 = r_q^1 e^{i\varphi_q^1}$$

$$c_{-q}^2 = r_q^2 e^{i\varphi_q^2}$$

$g_1$  et  $g_2$  s'écrivent alors :

$$g_1(t) = r_0^1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} r_q^1 \cos(2\pi f_q t - \varphi_q^1)$$

$$g_2(t) = r_0^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} r_q^2 \cos(2\pi f_q t - \varphi_q^2)$$
(III-2 ; 16)

### Fonction de cross-correlation

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = r_0^1 r_0^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} r_q^1 r_q^2 \cos(2\pi f_q t - (\varphi_q^2 - \varphi_q^1))$$
(III-2 ; 17)

=> si  $g_1$  et  $g_2$  sont réelles, leur fonction de cross-correlation l'est aussi.

### Cross-spectre

$$P_{g_1 g_2} = r_0^1 r_0^2 \delta + \sum_{q=1}^{\infty} r_q^1 r_q^2 [e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \delta_{f_q} + e^{i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \delta_{-f_q}]$$
(III-2 ; 18)

Le Cross-spectre reste une distribution de masses de Dirac complexes.

### Fonction d'Auto-correlation

$$[g \text{ CC } g](u) = (r_0)^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (r_q)^2 \cos 2\pi f_q t$$
(III-2 ; 19)

Fonction réelle paire; quelque soit  $u$ ,  $|[g \text{ CC } g](u)| \leq [g \text{ CC } g](0)$ .

Spectre de puissance

$$P_g = (r_0)^{2\delta} \sum_{q=1}^{\infty} (r_q)^2 [\delta_{f_q} + \delta_{-f_q}]$$

(III-2 ; 20)

Distribution de masses de Dirac réelles symétriques autour de l'origine.



## CHAPITRE - IV

### CALCUL APPROCHE DU CROSS-SPECTRE DE DEUX FONCTIONS OU DU SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION A PARTIR DES D.F.T. DE LEURS ECHANTILLONS

Au chapitre II nous avons vu comment, partant d'une fonction  $g$  échantillonnée aux instants  $k \frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), calculer la D.F.T. du vecteur  $\vec{g}$  de composantes  $g_k = g(k \frac{T}{N})$  revenait à calculer la Transformée de Fourier de la distribution  $\frac{1}{N} \Delta g$  pour les fréquences  $\frac{j}{T}$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ).

Sachant calculer la D.F.T. de façon avantageuse grâce à l'algorithme de Cooley & Tukey, nous allons voir comment l'on peut conserver le bénéfice de cet algorithme dans le calcul approché du cross-spectre et du spectre de puissance.

#### IV-1 - DISTRIBUTION DE CROSS-CORRELATION DES DEUX DISTRIBUTIONS $\Delta g_1$ et $\Delta g_2$

SCHWARTZ ([1] p. 130) a montré que le produit de convolution de deux distributions de Dirac est une distribution de Dirac et que

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} \quad (\text{IV-1 ; 1})$$

Par analogie avec la propriété (III-1 ; 4) du produit de cross-correlation de deux fonctions à support borné, nous définirons le produit de cross-correlation des deux distributions  $\Delta g_1$  et  $\Delta g_2$  comme étant la distribution

$$\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \frac{1}{N} \overline{(\Delta g_1)^T} * g_2$$

(IV-1 ; 2)

où

$$\Delta g_1 = \sum_{k=0}^{N-1} g_k^1 \delta_{k/N}^T \Rightarrow \overline{(\Delta g_1)^T} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{1k}} \delta_{-k/N}^T$$

et

$$\Delta g_2 = \sum_{q=0}^{N-1} g_{2q} \delta_{q/N}^T$$

ce qui entraîne, d'après (IV-1 ; 1) :

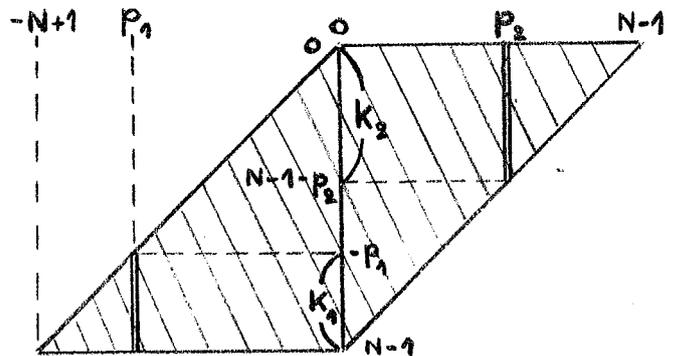
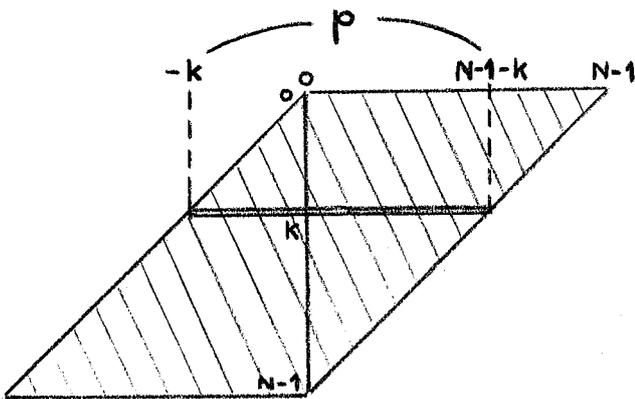
$$\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{1k}} \sum_{q=0}^{N-1} g_{2q} \delta_{(q-k)/N}^T$$

En effectuant le changement de variable

$$p = q - k \Rightarrow q = p + k$$

p balayera les indices entiers de -N+1 à N-1

$$\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=-k}^{N-1-k} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} \delta_{p/N}^T$$



$$\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \frac{1}{N} \left[ \sum_{p=-N+1}^{-1} \left( \sum_{k=-p}^{N-1} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} \right) \delta_{pN}^T \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1-p} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} \right) \delta_{pN}^T \right]$$

$$\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p \delta_{pN}^T \quad (\text{IV-1 ; 3})$$

avec  $\varphi_p = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=-p}^{N-1} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} & \text{si } -N+1 \leq p < 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-p} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} & \text{si } 0 \leq p \leq N-1 \end{cases}$

La cross-correlation de deux distributions de masses de Dirac aux abscisses  $k \frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) fait donc apparaître des masses de Dirac aux abscisses  $p \frac{T}{N}$  ( $p = -N+1, \dots, N-1$ ), chaque poids à l'abscisse  $p \frac{T}{N}$  étant formé de la somme de  $N-|p|$  produits de poids de la première distribution par des poids de la seconde.

#### IV-2 - CROSS-SPECTRE DE DEUX DISTRIBUTIONS

C'est par définition, la transformée de Fourier de la distribution de cross-correlation.

C'est une fonction de la fréquence  $f$  :

$$\mathcal{F} [\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2] (f) = \left\langle \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p \delta_{pN}^T (t), e^{-2i\pi f t} \right\rangle$$

$$\mathcal{F} [\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2] (f) = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p e^{-2i\pi f p \frac{T}{N}} \quad (\text{IV-2 ; 1})$$

Pour  $f = \frac{j}{T}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2] \left(\frac{j}{T}\right) &= \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p e^{-2i\pi \frac{jp}{N}} \\ &= \varphi_0 + \sum_{p=1}^{N-1} \left[ \varphi_{p-N} e^{-2i\pi \frac{j(p-N)}{N}} + \varphi_p e^{-2i\pi \frac{jp}{N}} \right] \\ &= \varphi_0 + \sum_{p=1}^{N-1} (\varphi_{p-N} + \varphi_p) e^{-2i\pi \frac{jp}{N}} \end{aligned}$$

En posant  $\varphi'_0 = \varphi_0$  et, pour  $p \in \{1, \dots, N-1\}$  :  $\varphi'_p = \varphi_{p-N} + \varphi_p$   
on obtient :

$$\mathcal{F} [\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2] \left(\frac{j}{T}\right) = \sum_{p=0}^{N-1} \varphi'_p e^{-2i\pi \frac{jp}{N}} \quad (\text{IV-2 ; 2})$$

avec

$$\varphi'_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p(\text{mod } N)}}$$

Calculer la Transformée de Fourier de  $\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2$  pour les fréquences  $\frac{j}{T}$   
( $j = 0, \dots, N-1$ ) revient donc à calculer la D.F.T. du vecteur  $N\vec{\varphi}'$ .

IV-3 - RELATION ENTRE LE CROSS-SPECTRE DE DEUX DISTRIBUTIONS ET LES TRANSFORMEES DE FOURIER DE CES DISTRIBUTIONS

Par définition, la cross-correlation des distributions  $\frac{1}{N} \Delta g_1$  et  $\frac{1}{N} \Delta g_2$  nous est donnée par :

$$\left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right) \text{ CC } \left(\frac{1}{N} \Delta g_2\right) = \frac{1}{N} \overline{\left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right)^T} * \left(\frac{1}{N} \Delta g_2\right)$$

En prenant la transformée de Fourier on obtient le cross-spectre :

$$\mathcal{F} \left[ \left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right) \text{ CC } \left(\frac{1}{N} \Delta g_2\right) \right] = \frac{1}{N} \mathcal{F} \left[ \overline{\left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right)^T} \right] \cdot \mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_2 \right]$$

On montre aisément que :

$$\mathcal{F} \left[ \overline{\left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right)^T} \right] = \overline{\mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_1 \right]} = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_1 \right] \quad (\text{IV-3 ; 1})$$

d'où :

$$\mathcal{F} \left[ \left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right) \text{ CC } \left(\frac{1}{N} \Delta g_2\right) \right] = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_1 \right]} \cdot \mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_2 \right] \quad (\text{IV-3 ; 2})$$

Si l'on a effectué la D.F.T. des vecteurs  $\vec{g}_1$  et  $\vec{g}_2$ , on a obtenu :

$$G_{1,j} = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_1 \right] \left( \frac{j}{T} \right) \quad \text{et} \quad G_{2,j} = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{N} \Delta g_2 \right] \left( \frac{j}{T} \right)$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{F} \left[ \left(\frac{1}{N} \Delta g_1\right) \text{ CC } \left(\frac{1}{N} \Delta g_2\right) \right] \left( \frac{j}{T} \right) = \frac{1}{N} \overline{G_{1,j}} \cdot G_{2,j}} \quad (\text{IV-3 ; 3})$$

Partant de 2 fonctions  $g_1$  et  $g_2$  dont les valeurs aux abscisses  $k \frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) ont formé les vecteurs  $\vec{g}_1$  et  $\vec{g}_2$ , calculer leurs D.F.T.  $\vec{G}_1$  et  $\vec{G}_2$  puis effectuer le produit composante à composante des vecteurs  $\frac{1}{N} \vec{G}_1$  et  $\vec{G}_2$  revient donc à calculer le cross-spectre (qui est une fonction) des distributions  $\frac{1}{N} \Delta g_1$  et  $\frac{1}{N} \Delta g_2$  pour les fréquences  $\frac{j}{T}$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ).

On peut aussi écrire

$$\mathcal{F}[\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2] \left( \frac{j}{T} \right) = N \overline{G_{1j}} \cdot G_{2j}^- \quad (\text{IV-3 ; 4})$$

#### IV-4 - CALCUL APPROCHE DU CROSS-SPECTRE DE 2 FONCTIONS OU DU SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION

##### IV-4-1 - Première approximation

Nous avons vu au paragraphe (II-3-1) qu'à toute fonction  $g$ , non périodique, prenant les valeurs  $g_k$  aux abscisses  $k \frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), on savait associer une fonction  $\tilde{g}$ , nulle en dehors de  $[0, T[$ , et coïncidant sur  $[0, T[$  avec la fonction périodique  $g_T$  ayant pour coefficients de Fourier les  $G_{1j}^-$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ) et telle que

$$\tilde{g} \left( k \frac{T}{N} \right) = g_k \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1$$

Et l'on avait :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j}{T} \right) &= T G_j^- & j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \mathcal{F}[\tilde{g}] \left( \frac{j-N}{T} \right) &= T G_j^- & j = \frac{N}{2} \dots N-1 \end{aligned} \quad (\text{IV-4 ; 0})$$

Si, de la même façon on associe  $\tilde{g}_1$  à  $g_1$  et  $\tilde{g}_2$  à  $g_2$  et que l'on forme leur produit de cross-correlation (à partir de la définition (III-1 ; 2) puisque  $\tilde{g}_1$  et  $\tilde{g}_2$  ont le même support borné  $[0, T[$ ) on obtient

$$[\tilde{g}_1 \text{ CC } \tilde{g}_2](u) = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{\tilde{g}_1(t)} \cdot g_2(t+u) du$$

et, d'après (III-1 ; 4)

$$\tilde{g}_1 \text{ CC } \tilde{g}_2 = \frac{1}{T} \overline{\tilde{g}_1^T} * \tilde{g}_2$$

En prenant la transformée de Fourier on obtient le cross-spectre :

$$P_{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2} = \frac{1}{T} \overline{\mathcal{F}[\tilde{g}_1]} \cdot \mathcal{F}[\tilde{g}_2]$$

qui, compte-tenu de (IV-4 ; 0), prend aux abscisses  $\frac{j}{T}$  les valeurs :

$P_{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2} \left( \frac{j}{T} \right) = T \overline{G_{1j}^-} \cdot G_{2j}^- \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$	(IV-4 ; 1)
$P_{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2} \left( \frac{j-N}{T} \right) = T \overline{G_{1j}^-} \cdot G_{2j}^- \quad j = \frac{N}{2}, \dots, N-1$	

Dans le cas où  $g_1 = g_2 = g$ , on obtient pour le Spectre de Puissance de  $\tilde{g}$  :

$P_{\tilde{g}} \left( \frac{j}{T} \right) = T  G_j^- ^2 \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$	(IV-4 ; 2)
$P_{\tilde{g}} \left( \frac{j-N}{T} \right) = T  G_j^- ^2 \quad j = \frac{N}{2}, \dots, N-1$	

#### IV-4-2 - Deuxième approximation - Cross-spectre de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$

Si, comme on l'a fait pour  $g$  au paragraphe (II-3-2) on forme  $\hat{g}_1 = \Delta g_1 * h$  et  $\hat{g}_2 = \Delta g_2 * h$ , ces fonctions ayant le même support borné  $[-\frac{T}{N}, T]$ , leur fonction de cross-correlation s'écrit :

$$\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2 = \frac{N}{(N+1)T} \overline{(\Delta g_1 * h)}^\tau * (\Delta g_2 * h) \quad (\text{IV-4 ; 3})$$

Le produit de convolution étant commutatif et associatif :

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2 &= \frac{N}{(N+1)T} \overline{(\Delta g_1^\tau * \Delta g_2)} * \overline{(h^\tau * h)} \\ \overline{h^\tau} = h &\Rightarrow \hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2 = \frac{N^2}{(N+1)T} (\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2) * (h * h) \end{aligned} \quad (\text{IV-4 ; 4})$$

La fonction de cross-correlation des fonctions  $\hat{g}_1$  et  $\hat{g}_2$  est donc le résultat de la convolution de la distribution de cross-correlation des distributions  $\frac{N^2}{(N+1)T} \Delta g_1$  et  $\Delta g_2$  avec la fonction  $h * h$ .

Le produit de convolution de la fonction  $h$  (def. (II-3 ; 2)) avec elle-même est une fonction réelle, paire, nulle en dehors de l'intervalle  $[-\frac{2T}{N}, \frac{2T}{N}]$  et qui vaut :

$$[h * h](v) = \frac{1}{6} \left[ 3 \frac{N^2}{T^2} |v|^3 - 6 \frac{N}{T} v^2 + 4 \frac{T}{N} \right] \quad \text{pour } 0 \leq |v| \leq \frac{T}{N} \quad (\text{IV-4 ; 5})$$

$$[h * h](v) = \frac{1}{6} \left[ -\frac{N^2}{T^2} |v|^3 + 6 \frac{N}{T} v^2 - 12 |v| + 8 \frac{T}{N} \right] \quad \text{pour } \frac{T}{N} \leq |v| \leq \frac{2T}{N}$$

$[h * h]$  est continue ainsi que ses dérivées première et seconde.

D'autre part (voir (IV-1 ; 3),  $(\Delta g_1) \text{ CC } (\Delta g_2)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (\Delta g_1) \text{ CC } (\Delta g_2) &= \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p \delta_{\frac{T}{N}} \quad (\text{IV-4 ; 6}) \\ \text{avec } \varphi_p &= \begin{cases} \text{si } -N+1 \leq p < 0 : \frac{1}{N} \sum_{k=-p}^{N-1} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} \\ \text{si } 0 \leq p \leq N-1 : \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-p} \overline{g_{1k}} g_{2_{k+p}} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$[\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](t) = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p \cdot [h^*h](t - \frac{pt}{N}) \quad (\text{IV-4 ; 7})$$

Quelque soit  $t \in \mathbb{R}$ , on peut trouver  $q \in \mathbb{Z}$  et  $u \in [0, \frac{T}{N}[$  tels que  $t = q\frac{T}{N} + u$ . En posant  $\varphi_p = 0$  si  $p \notin \{-N+1, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N} + u) &= \varphi_q [h^*h](u) + \varphi_{q+1} [h^*h](u - \frac{T}{N}) \\ &+ \varphi_{q-1} [h^*h](u + \frac{T}{N}) + \varphi_{q+2} [h^*h](u - \frac{2T}{N}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N} + u) &= \frac{1}{6} [(3\varphi_q - 3\varphi_{q+1} - \varphi_{q-1} + \varphi_{q+2}) \frac{N^2}{T^2} u^3 \\ &+ (-6\varphi_q + 3\varphi_{q+1} + 3\varphi_{q-1}) \frac{N}{T} u^2 \\ &+ (3\varphi_{q+1} - 3\varphi_{q-1}) u \\ &+ (4\varphi_q + \varphi_{q+1} + \varphi_{q-1}) \frac{T}{N}] \end{aligned}$$

(IV-4 ; 8)

$$u = 0 \quad [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N}) = \frac{T}{6N} [4\varphi_q + \varphi_{q+1} + \varphi_{q-1}]$$

$$u \rightarrow \frac{T}{N} \quad [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N} + u) \rightarrow \frac{T}{6N} [\varphi_q + 4\varphi_{q+1} + \varphi_{q+2}]$$

La fonction de cross-correlation de  $\hat{g}_1$  et de  $\hat{g}_2$  est continue et l'on peut vérifier qu'il en est de même de ses dérivées première et seconde.

Sa transformée de Fourier, cross-spectre de  $\hat{g}_1$  et  $\hat{g}_2$ , vérifie compte-tenu de (IV-4 ; 4)

$$P_{\hat{g}_1 \hat{g}_2} = \mathcal{F} [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2] = \frac{N^2}{(N+1)T} \mathcal{F} [(\Delta g_1) \text{ CC } (\Delta g_2)] \cdot (\mathcal{F} [h])^2 \quad (\text{IV-4 ; 9})$$

et, pour une abscisse de la fréquence égale à  $\frac{j}{T}$ , (IV-3 ; 4) et (IV-3 ; 5) entraînent

$$P_{\hat{g}_1 \hat{g}_2} \left( \frac{j}{T} \right) = T \frac{N}{(N+1)} \left( \frac{\sin \pi \frac{j}{T}}{\pi \frac{j}{N}} \right)^4 \overline{G_{1j_N}} \cdot G_{2j_N} \quad \begin{array}{l} j \in \mathbb{Z} \\ j_N = j \pmod{N} \in \{0, \dots, N-1\} \end{array}$$

(IV-4 ; 10)

Pour le spectre de puissance de la fonction  $\hat{g}$  on a :

$$P_{\hat{g}} \left( \frac{j}{T} \right) = T \frac{N}{(N+1)} \left( \frac{\sin \pi \frac{j}{N}}{\pi \frac{j}{N}} \right)^2 |G_{j_N}^-|^2 \quad \begin{array}{l} j \in \mathbb{Z} \\ j_N = j \pmod{N} \in \{0, \dots, N-1\} \end{array}$$

(IV-4 ; 11)

Si les résultats donnés par la première approximation ((IV-4 ; 1) et (IV-4 ; 2)) ainsi que ceux donnés par interpolation linéaire sont satisfaisants dans le cas de fonctions à support borné (voir exemple numérique en annexe), il n'en est pas de même pour les fonctions semi-périodiques.

IV-5 - CAS DES FONCTIONS SEMI-PERIODIQUESIV-5-1 - Généralités-Cross-spectre fini

Le problème que l'on se pose est de localiser les fréquences communes à deux signaux semi-périodiques, de déterminer l'importance relative des coefficients attachés à ces fréquences et le déphasage d'un signal par rapport à l'autre pour chaque fréquence, lorsque ces signaux nous sont connus que par leurs échantillons aux instants  $k\frac{T}{N}$   $k = 0, \dots, N-1$ .

Nous avons vu (III-2 ; 9) que le cross-spectre théorique de deux fonctions semi-périodiques complexes était la distribution.

$$P_{g_1 g_2} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 r_q^2 e^{i(\varphi_q^1 - \varphi_q^2)} \delta_{f_q}$$

La répartition des fréquences  $f_q$  sur  $\mathbb{R}$  nous étant inconnue, et ayant la contrainte d'opérer de façon discrète, nous choisirons une échelle arbitraire de fréquences sur  $\mathbb{R}$

$$\lambda_j = \frac{j}{T} \quad , \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

avec l'hypothèse que pour tout  $q$  tel que  $|f_q| > \frac{N}{2T}$  l'on puisse négliger les coefficients  $r_q^1$  et  $r_q^2$ .

Cette échelle de fréquence étant choisie, nous voudrions calculer pour chaque indice  $j$  une grandeur  $V_j^{1,2}$  proportionnelle aux coefficients  $r_q^1 r_q^2 e^{i(\varphi_q^1 - \varphi_q^2)}$  des masses de Dirac de la distribution  $P_{g_1 g_2}$  placées à des abscisses  $f_q$  voisines de  $\frac{j}{T}$ . Naturellement cette grandeur  $V_j^{1,2}$  devra être le moins possible affectée par des masses de Dirac situées loin de  $\frac{j}{T}$  sur la droite  $\mathbb{R}$ . Un autre aspect important est la "conservation de l'énergie" : quelque soit l'emplacement d'une masse de Dirac du cross-spectre entre  $\frac{j}{T}$  et  $\frac{j+1}{T}$  le total de ses contributions dans le calcul de  $V_j$  et de  $V_{j+1}$  devra varier le moins possible.

L'idéal de ce que nous voudrions serait obtenu en calculant ce que nous appellerons le cross-spectre fini de  $g_1$  et  $g_2$  et que nous définissons par

$$V_j^{12} = [P_{g_1 g_2} * h] \left( \frac{j}{T} \right) \quad (\text{IV-5 ; 1})$$

où  $h$  est la fonction définie par

$$h(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|T & \text{si } |\lambda| < \frac{1}{T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On aurait en effet :

$$V_j^{12} = \left\langle \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1} c_q^2 \delta_{f_q} \left( \frac{j}{T} - \lambda \right), h(\lambda) \right\rangle$$

$$V_j^{12} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1} c_q^2 h\left(\frac{j}{T} - f_q\right)$$

En posant

$$I_j = \{q \in \mathbb{Z} \mid f_q \in \left[ \frac{j-1}{T}, \frac{j+1}{T} \right]\}$$

$$q \in I_j \Rightarrow f_q = \frac{j}{T} + \varepsilon_q \quad \varepsilon_q \in \left[ -\frac{1}{T}, \frac{1}{T} \right]$$

$$V_j^{12} = \sum_{q \in I_j} \overline{c_q^1} c_q^2 (1 - |\varepsilon_q|T) \quad (\text{IV-5 ; 2})$$

Chaque masse de Dirac n'influerait que sur les  $V_j$  et  $V_{j+1}$  correspondant aux fréquences  $\frac{j}{T}$  et  $\frac{j+1}{T}$  qui encadrent son abscisse  $f_q$  sur  $\mathbb{R}$  et la somme de ses contributions serait rigoureusement constante et égale à  $\overline{c_q^1} c_q^2$ .

Malheureusement pour obtenir le cross-spectre fini  $V^{12}$  il faudrait calculer la transformée de Fourier (pour les valeurs  $\frac{j}{T}$ ) du produit de la transformée inverse de Fourier de  $h$  (qui est connue mais dont le support n'est pas borné) par la fonction de cross-correlation de  $g_1$  et  $g_2$  que l'on ne connaît pas.

#### IV-5-2 - Exemple

Supposons que  $g_1$  et  $g_2$  soient de la forme

$$\begin{aligned} g_1(t) &= r^1 e^{i(2\pi ft - \varphi^1)} \\ g_2(t) &= r^2 e^{i(2\pi ft - \varphi^2)} \end{aligned} \quad (\text{IV-5 ; 3})$$

et que, l'échantillonnage étant fait aux instants  $k\frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) on ait les inégalités

$$0 < f < \frac{N}{2T}$$

La D.F.T. des échantillons  $\vec{g}_1$  et  $\vec{g}_2$  nous fournit (II-1 ; 7)

$$\begin{aligned} G_{1j}^- &= \langle \mathcal{F}[\Delta/N](\frac{j}{T} - \lambda), \mathcal{F}[g](\lambda) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[\Delta/N](\frac{j}{T} - \lambda), r^1 e^{-i\varphi^1} \delta_f(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

$$G_{1j}^- = r^1 e^{-i\varphi^1} \mathcal{F}[\Delta/N](\frac{j}{T} - f)$$

et

$$G_{2j}^- = r^2 e^{-i\varphi^2} \mathcal{F}[\Delta/N](\frac{j}{T} - f)$$

Si l'on forme le produit  $\overline{G_{1j}} \cdot G_{2j}$  (à un facteur près c'est la première approximation du cross-spectre de deux fonctions pour la fréquence  $\frac{j}{T}$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} W_j &= \overline{G_{1j}} \cdot G_{2j} \\ &= r^1 e^{i\varphi^1} \overline{\mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{j}{T} - f\right)} \cdot r^2 e^{-i\varphi^2} \mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{j}{T} - f\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{W_j = r^1 r^2 e^{-i(\varphi^2 - \varphi^1)} \left| \mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{j}{T} - f\right) \right|^2} \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (\text{IV-5 ; 4})$$

et la transformée de Fourier de  $\Delta/N$  étudiée au paragraphe (II-1-2) nous donne

$$\left| \mathcal{F}[\Delta/N](\lambda) \right|^2 = \left( \frac{\sin \pi T \lambda}{N \sin \pi \frac{T}{N} \lambda} \right)^2 \quad (\text{IV-5 ; 5})$$

(voir courbe figure 1)

avec les valeurs particulières

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}[\Delta/N](0) \right|^2 &= 1 \\ \left| \mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{p}{T}\right) \right|^2 &= 0 \quad p = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (\text{IV-5 ; 6})$$

Si  $f = \frac{q}{T}$  on aura :

$$\begin{aligned} W_q &= r^1 r^2 e^{-i(\varphi^2 - \varphi^1)} \\ W_j &= 0 \quad j \neq q \end{aligned} \quad (\text{IV-5 ; 7})$$

et c'est ce que nous désirions puisque cela permet de déterminer le produit  $r^1 r^2$  et la différence de phase  $\varphi^2 - \varphi^1$  entre les deux signaux.

Par contre si  $f = \frac{q}{T} + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{T}[$   
on obtiendra

$$W_j = r^1 r^2 e^{-i(\varphi^2 - \varphi^1)} \left( \frac{\sin \pi(j-q-\varepsilon T)}{N \sin \frac{\pi}{N}(j-q-\varepsilon T)} \right)^2 \quad (\text{IV-5 ; 8})$$

On assiste à un "étalement" du spectre (voir figure 4).

Dans le cas le plus défavorable ou  $\varepsilon = \frac{1}{2T}$ , en posant  $\Gamma = r^1 r^2 e^{-i(\varphi^2 - \varphi^1)}$ ,  
on obtient en supposant N grand

$$W_q = W_{q+1} = \Gamma \left( \frac{1}{N \sin \frac{\pi}{2N}} \right)^2 \approx \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \Gamma$$

$$W_{q-1} = W_{q+2} = \Gamma \left( \frac{1}{N \sin \frac{3\pi}{2N}} \right)^2 \approx \left( \frac{2}{3} \right)^2 \Gamma \quad (\text{IV-5 ; 9})$$

$$W_{q-2} = W_{q+3} = \Gamma \left( \frac{1}{N \sin \frac{5\pi}{2N}} \right)^2 \approx \left( \frac{2}{5} \right)^2 \Gamma$$

A une distance égale à  $\frac{2,5}{T}$  de l'abscisse réelle de la masse de Dirac du spectre on recueille encore 4 % de ce que l'on a recueilli à une distance égale à  $\frac{0,5}{T}$  qui ne représentait déjà qu'environ 40 % du poids réel.

Divers procédés sont connus pour "resserrer" le spectre (cf. [4] p. 98).  
Nous en montrerons deux connus dans la littérature sous le nom de Hanning  
(du nom de Julius von Hann) et de Hamming (du nom de R.W. Hamming) et un  
troisième qui sera optimum dans un certain sens.

IV-5-3 - Hanning

Ce procédé consiste à remplacer  $G_{1j}^-$  et  $G_{2j}^-$  par une pondération (0,25|0,5|0,25) avant de faire le produit du conjugué de l'un par l'autre.

$$G_{1j}^{\text{Han}} = 0,25 G_{1j-1}^- + 0,5 G_{1j}^- + 0,25 G_{1j+1}^- \quad (\text{IV-5 ; 10})$$

$$= \langle 0,25 \mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{j-1}{T} - \lambda\right) + 0,5 \mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{j}{T} - \lambda\right) \rangle$$

$$+ 0,25 \mathcal{F}[\Delta/N] \left(\frac{j+1}{T} - \lambda\right), \mathcal{F}[g_1](\lambda) \rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}[\Delta/N] \left[ \frac{1}{4} \delta_{-\frac{1}{T}} + \frac{1}{2} \delta_{\frac{j}{T}} + \frac{1}{4} \delta_{\frac{1}{T}} \right] \left(\frac{j}{T} - \lambda\right), \mathcal{F}[g_1](\lambda) \rangle$$

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{4} \delta_{-\frac{1}{T}} + \frac{1}{2} \delta_{\frac{j}{T}} + \frac{1}{4} \delta_{\frac{1}{T}} \right] (u) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi \frac{u}{T}) = \mu(u) \quad (\text{IV-5 ; 11})$$

$$G_{1j}^{\text{Han}} = \langle \mathcal{F}[\Delta\mu/N] \left(\frac{j}{T} - \lambda\right), \mathcal{F}[g_1](\lambda) \rangle$$

$$G_{1j}^{\text{Han}} = \mathcal{F}[\Delta\mu g_1/N] \left(\frac{j}{T}\right) \quad (\text{IV-5 ; 12})$$

De même :

$$G_{2j}^{\text{Han}} = \mathcal{F}[\Delta\mu g_2/N] \left(\frac{j}{T}\right)$$

avec

$$\Delta\mu g_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \mu\left(\frac{kT}{N}\right) g_1\left(\frac{kT}{N}\right) \delta_{\frac{kT}{N}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi \frac{k}{N}) g_{1k} \delta_{\frac{kT}{N}}$$

Pour que  $\nabla g$  soit une distribution ne faisant intervenir  $g$  que par ses valeurs aux abscisses  $k\frac{T}{N}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ), la forme la plus générale de  $\nabla$  est :

$$\nabla = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \delta_{\frac{kT}{N}} \quad (\text{IV-5 ; 15})$$

On va déterminer

$$\gamma \in \mathbb{C}^N \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix}$$

de façon que la quantité

$$\beta = \frac{\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} |\mathcal{F}[\nabla](\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} |\mathcal{F}[\nabla](\lambda)|^2 d\lambda} \quad (\text{IV-5 ; 16})$$

soit maximum.

On a :

$$\mathcal{F}[\nabla](\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k e^{-2i\pi\frac{T}{N}k\lambda} \quad (\text{fonction de période } \frac{N}{T} )$$

$$\beta = \frac{\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k e^{-2i\pi\frac{T}{N}k\lambda} \right) \left( \sum_{q=0}^{N-1} \bar{\gamma}_q e^{2i\pi\frac{T}{N}q\lambda} \right) d\lambda}{\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k e^{-2i\pi\frac{T}{N}k\lambda} \right) \left( \sum_{q=0}^{N-1} \bar{\gamma}_q e^{2i\pi\frac{T}{N}q\lambda} \right) d\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left( \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q \neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q e^{2i\pi \frac{T}{N}(q-k)\lambda} \right) d\lambda \\
&= \frac{\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} \left( \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q \neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q e^{2i\pi \frac{T}{N}(q-k)\lambda} \right) d\lambda}{\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} \left( \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q \neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{N}{\pi T(q-k)} \frac{[e^{2i\pi \frac{T}{N}(q-k)\lambda}]^{1/T}}{2i} - \frac{1}{T} \right) d\lambda} \\
\beta &= \frac{\frac{2}{T} \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q \neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{N}{\pi T(q-k)} \frac{[e^{2i\pi \frac{T}{N}(q-k)\lambda}]^{1/T}}{2i} - \frac{1}{T}}{\frac{N}{T} \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q \neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{N}{\pi T(q-k)} \frac{[e^{2i\pi \frac{T}{N}(q-k)\lambda}]^{1/T}}{2i} - \frac{N}{2T}} \\
&= \frac{\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q \neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{\sin 2\pi \frac{q-k}{N}}{\pi(q-k)}}{\sum_{k=0}^{N-1} \|\gamma_k\|^2} \tag{IV-5 ; 17}
\end{aligned}$$

En posant

$$M_{qk} = \begin{cases} \frac{2}{N} & \text{si } q = k \\ \frac{\sin 2\pi \frac{q-k}{N}}{\pi(q-k)} & \text{si } q \neq k \end{cases}$$

et  $\bar{\gamma}_t = \gamma^*$ , (IV-5 ; 17) peut s'écrire

$$\boxed{\beta = \frac{\gamma^* M \gamma}{\gamma^* \gamma}}$$

(IV-5 ; 18)

et l'on sait que le maximum d'un tel rapport est atteint lorsque  $\gamma$  est proportionnel au vecteur propre  $u_0$  correspondant à la plus grande valeur propre  $\sigma_0$  de  $M$  et dans ce cas  $\beta = \sigma_0$ .

$$\gamma = \rho u_0 \quad \rho \in \mathbb{C} \quad u_0 \in \mathbb{R}^N$$

Pour la facilité d'emploi nous prendrons  $\gamma \in \mathbb{R}^N$  et nous choisirons  $\rho$  de façon que  $\mathcal{G}[\nabla/N](0) = 1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k = N$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{N}{\sum_{k=0}^{N-1} u_{0k}} \quad (\text{IV-5 ; 19})$$

$\gamma$  étant vecteur propre de  $M$  correspondant à la valeur propre  $\sigma_0$  vérifie :

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_{q,k} \gamma_k = \sigma_0 \gamma_q \quad q = 0, \dots, N-1 \quad (\text{IV-5 ; 20})$$

et pour  $q' = N-1-q$

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_{N-1-q',k} \gamma_k = \sigma_0 \gamma_{N-1-q'}$$

De par la définition de  $M$

$$M_{n-1-q',k} = \frac{\sin 2\pi \left( \frac{N-1-q'-k}{N} \right)}{\pi(N-1-q'-k)} = M_{q',N-1-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} M_{q',N-1-k} \gamma_k = \sigma_0 \gamma_{N-1-q'}$$

En posant  $k' = N-1-k$

$$\sum_{k'=0}^{N-1} M_{q',k'} \gamma_{N-1-k'} = \sigma_0 \gamma_{N-1-q'}$$

Si l'on définit le vecteur  $\lambda$  par

$$\lambda_p = \gamma_{N-1-p} \quad \forall p \in \{0, \dots, N-1\}$$

On obtient

$$\sum_{k'=0}^{N-1} M_{q',k'} \lambda_{k'} = \sigma_0 \lambda_{q'}$$

=> Le vecteur  $\lambda$  est aussi vecteur propre de M correspondant à la même valeur propre  $\sigma_0$  que  $\gamma$ . Etant tous les deux normalisés

$$\lambda = \gamma$$

c'est-à-dire

$$\gamma_p = \gamma_{N-1-p} \quad \forall p \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{IV-5 ; 21})$$

La figure 7 représente les composantes du vecteur  $\gamma$  obtenu pour  $N = 16$  (On a alors  $\beta = \sigma_0 = 0.9816$ ) et  $N = 32$  ( $\sigma_0 = 0.9812$ ) (\*\*)

### Utilisation

Voyons ce qui se passe lorsqu'on remplace  $\Delta$  par  $\nabla$  dans le produit avec la fonction  $g$

$$\langle \nabla g, \varphi \rangle = \langle \nabla, g\varphi \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \delta_{\frac{kT}{N}}, g\varphi \right\rangle$$

\*\* Lorsque  $N$  est grand, la forme de la matrice  $M$  permet d'en calculer la plus grande valeur propre et le vecteur propre correspondant sans la rentrer complètement en machine puisque qu'une seule de ses lignes permet de la déterminer complètement.

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k g_k \delta_{\frac{kT}{N}}, \varphi \right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla g = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k g_k \delta_{\frac{kT}{N}}} \quad (\text{IV-5 ; 22})$$

Vouloir faire la convolution de  $\mathcal{F}g$  avec  $\frac{1}{N} \mathcal{F}\nabla$  revient donc à effectuer une pondération des échantillonnages  $g_k$  par les  $\gamma_k$ .

$$G'_j = \frac{1}{N} [\mathcal{F}\nabla * \mathcal{F}g] \left(\frac{j}{T}\right) = \text{D.F.T.} (\gamma_k \cdot g_k)$$

Si l'on effectue cette pondération simultanément sur les échantillons  $g_{1k}$  et  $g_{2k}$  des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  en calculant le cross-spectre des distributions  $\frac{1}{N} \nabla g_1$  et  $\frac{1}{N} \nabla g_2$  on obtient

$$W_j^{\text{opt}} = \overline{G'_{1j}} \cdot G'_{2j} = r^1 r^2 e^{-i(\varphi^2 - \varphi^1)} |\mathcal{F}[\nabla/N]|^2 \left(\frac{j}{T} - f\right)$$

Voir les résultats obtenus sur l'exemple numérique.

La courbe de la figure 8 est celle de  $|\mathcal{F}[\nabla]|^2(\lambda)$

On a également représenté (Fig. 8' ) les variations de la somme de  $|\mathcal{F}[\nabla]|^2(\lambda)$  et de  $|\mathcal{F}[\nabla]|^2(\lambda - \frac{1}{T})$  sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{T}]$ .

On voit que cette somme ne s'écarte que de 3 % de sa valeur moyenne.

## CHAPITRE - V

### POSSIBILITES ET VARIANTES DE L'ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY

#### CONVOLUTION - LISSAGE TRIGONOMETRIQUE

##### V-1 - D.F.T. SIMULTANEE DES ECHANTILLONS DE DEUX FONCTIONS REELLES

Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux fonctions réelles dont les échantillonnages aux instants  $k\frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) ont fourni les vecteurs  $\vec{g}_1$  et  $\vec{g}_2$ .

Si l'on désire calculer les D.F.T. (ou les I.D.F.T.) de ces vecteurs nous allons voir comment cela est possible en n'utilisant l'algorithme de Cooley et Tukey qu'une seule fois au lieu de deux.

Supposons que

$$\vec{g}_1 \xrightarrow{\text{D.F.T.}} \vec{G}_1 = \vec{R}G_1 + i\vec{I}G_1$$

et

$$\vec{g}_2 \xrightarrow{\text{D.F.T.}} \vec{G}_2 = \vec{R}G_2 + i\vec{I}G_2$$

où

$$\vec{R}G_1, \vec{I}G_1, \vec{R}G_2, \vec{I}G_2 \in \mathbb{R}^n$$

$g_1$  réelle entraîne

$$\begin{aligned} G_{1-N-j}^- &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{(N-j)k}{N}} g_k \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi\frac{jk}{N}} g_k \end{aligned}$$

$$G_{1N-j}^- = \overline{G_{1j}^-} = \overline{RG_{1j}^- - iIG_{1j}^-} \quad (V-1 ; 1)$$

De même

$$G_{2N-j}^- = \overline{G_{2j}^-} = \overline{RG_{2j}^- - iIG_{2j}^-}$$

Posons

$$g_k = g_{1k} + ig_{2k} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (V-1 ; 2)$$

et calculons la D.F.T. du vecteur complexe ainsi obtenu.

On a

$$G_j^- = RG_{1j}^- - IG_{2j}^- + i(RG_{2j}^- + IG_{1j}^-)$$

et

$$G_{N-j}^- = RG_{1j}^- + IG_{2j}^- + i(RG_{2j}^- - IG_{1j}^-)$$

soit en posant

$$G_j^- = RG_j^- + iG_j^- \quad j = 0, \dots, N-1$$

$RG_{1j}^- = \frac{1}{2} (RG_j^- + RG_{N-j}^-) \quad RG_{2j}^- = \frac{1}{2} (IG_{N-j}^- + IG_j^-)$
$IG_{1j}^- = \frac{1}{2} (IG_j^- - IG_{N-j}^-) \quad IG_{2j}^- = \frac{1}{2} (RG_{N-j}^- - RG_j^-)$

(V-1 ; 3)

=> pour calculer les D.F.T. de deux vecteurs réels on peut calculer la D.F.T. du vecteur complexe ayant pour partie réelle le premier vecteur et pour partie imaginaire le second et reconstituer parties réelles et parties imaginaires des résultats par les formules (V-1 ; 3).

Même possibilité avec l'I.D.F.T.

V-2 - VARIANTES DE L'ALGORITHME DE COOLEY ET TUKEYV-2-1 - Variante n° 1

Tel qu'il a été décrit au chapitre I, l'algorithme de Cooley et Tukey fournit un vecteur résultant  $\vec{G}$  ayant autant de composantes que le vecteur de départ  $\vec{g}$ . Dans certains cas, on peut ne vouloir calculer que les premières composantes de  $\vec{G}$  (correspondant aux fréquences les plus basses). Nous allons montrer que cela est possible tout en conservant les avantages de l'algorithme initial dans le cas où l'on veut obtenir un vecteur  $\vec{G}$  ayant  $2^M$  composantes ( $j = 0, \dots, 2^M - 1$ ) à partir d'un vecteur  $\vec{g}$  ayant  $N$  composantes ( $k = 0, \dots, N-1$ ) avec

$$N = Q \times 2^M \quad Q \in \mathbb{N} \quad (\text{V-2 ; 1})$$

Supposons donc que l'on veuille calculer

$$G_j = \sum_{k=0}^{Q \times 2^M - 1} e^{2i\pi \frac{jk}{Q \times 2^M}} \quad \text{pour } j = 0, \dots, 2^M - 1 \quad (\text{V-2 ; 2})$$

L'indice  $k$  variant de 0 à  $Q \times 2^{M-1}$  peut s'écrire de façon unique :

$$k = r \times Q + s \quad \left\{ \begin{array}{l} r \in \{0, \dots, 2^M - 1\} \\ s \in \{0, \dots, Q-1\} \end{array} \right. \quad (\text{V-2 ; 3})$$

L'expression de  $G_j$  devient

$$G_j = \sum_{s=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{2^M - 1} e^{2i\pi \frac{j(r \times Q + s)}{Q \times 2^M}} g_{r \times Q + s}$$

$$G_j = \sum_{s=0}^{Q-1} e^{2i\pi \frac{js}{Q \times 2^M}} \sum_{r=0}^{2^M - 1} e^{2i\pi \frac{jr}{2^M}} g_r(s) \quad (\text{IV-2 ; 4})$$

où  $\vec{g}^{(s)} \in \mathbb{C}^{2^M}$  est un sous-vecteur de  $\vec{g}$  ( $g_r^{(s)} = g_{r \times Q + s}$ )

En posant

$$\vec{G}^{(S)} = \text{I.D.F.T.} (\vec{g}^{(s)}) \quad \text{pour } s = 0, \dots, Q-1$$

(V-2 ; 4) s'écrit

$$G_j = \sum_{s=0}^{Q-1} e^{2i\pi \frac{js}{Q \times 2^M}} G_j^{(s)}$$

Soit, en notation matricielle :

$$G = \sum_{s=0}^{Q-1} D^s G^{(s)} \quad (\text{V-2 ; 5})$$

où D est la matrice diagonale  $D_{jj} = e^{2i\pi \frac{j}{Q \times 2^M}} \quad j = 0, \dots, 2^M - 1$

On est ramené à appliquer l'algorithme classique à l'ordre  $2^M$  simultanément aux Q sous-vecteurs  $g^{(s)}$  de g, à multiplier les résultats  $G^{(s)}$  par des matrices diagonales et à en faire la somme.

Coût : pour chaque  $G^{(s)}$  :  $M \times 2^{M-1}$

pour chaque produit  $D^s \cdot G^{(s)}$  :  $2^M$

Le tout Q fois, soit :  $Q \times (M \times 2^{M-1} + 2^M) \approx (M+1) \times N$

### V-2-2 - Variante n° 2

Dans l'algorithme initial, le pas en fréquence est fixé par la longueur de l'intervalle  $[0, T]$  sur lequel on a échantillonné la fonction (voir II-1-1)

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

Il est possible de choisir un pas en fréquence multiple de celui-ci :

$$\Delta f' = \frac{d}{T} \quad d \in \mathbb{N}$$

dans le cas

$$N = d \times 2^M$$

et de calculer

$$G_j = \mathcal{F}^{-1}[\Delta g] \left( \frac{j \times d}{T} \right) = \sum_{k=0}^{d \times 2^M - 1} e^{2i\pi \frac{j \times d \times k}{d \times 2^M}} g_k \quad \text{pour } j = 0, \dots, 2^M - 1 \quad (\text{V-2 ; 6})$$

$$k \in \{0, \dots, d \times 2^M - 1\} \Rightarrow k = t \times 2^M + r \quad \left\{ \begin{array}{l} t \in \{0, \dots, d-1\} \\ r \in \{0, \dots, 2^M - 1\} \end{array} \right.$$

$$G_j = \sum_{r=0}^{2^M - 1} e^{2i\pi \frac{jk}{2^M}} \sum_{t=0}^{d-1} g_{t \times 2^M + r}$$

$$G_j = \sum_{r=0}^{2^M - 1} e^{2i\pi \frac{jk}{2^M}} \tilde{g}_r \quad (\text{V-2 ; 7})$$

Pour cela il faut donc appliquer l'algorithme classique à l'ordre  $2^M$  au vecteur  $\tilde{g}$  somme de  $d$  sous-vecteurs de  $\vec{g}$

$$\tilde{g}_r = \sum_{t=0}^{d-1} g_{t \times 2^M + r} \quad r = 0, \dots, 2^M - 1$$

La procédure CTG en ALGOL présentée en annexe autorise les variantes 1 et 2. Elle nécessite  $N = Q \times d \times 2^M$ .

V-2-3 - Variante n° 3

Pour concilier la possibilité de calculer simultanément la D.F.T. de deux échantillons réels (V-1) et les variantes 1 et 2, on a écrit la procédure CTGSYM (voir annexe) qui calcule

$$G_j^+ = \overline{\mathcal{F}} [\Delta g] \left( \frac{j \times d}{T} \right) \quad \text{ou} \quad G_j^- = \frac{1}{N} \mathcal{F} [\Delta g] \left( \frac{j \times d}{T} \right) \quad (\text{V-2 ; 8})$$

$$\text{pour } j = 0, \dots, 2^M - 1 \quad \text{et} \quad j = -2^M, \dots, -1.$$

V-3 - CONVOLUTION DISCRETE DE DEUX ECHANTILLONSV-3-1 - Définition

Soient deux vecteurs  $\vec{g}_1$  et  $\vec{g}_2$  correspondant aux échantillonnages aux instants  $k \frac{T}{N}$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) de deux fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

Leur convolution discrète est le vecteur  $\vec{g}g$  dont les composantes sont les poids des masses de Dirac du produit de convolution des distributions  $\Delta g_1$  et  $\Delta g_2$ .

$$(\Delta g_1) * (\Delta g_2) = \sum_{k=0}^{N-1} g_{1k} \sum_{q=0}^{N-1} g_{2q} \delta_{(k+q) \frac{T}{N}} \quad (\text{V-3 ; 1})$$

Posons

$$p = k+q \Rightarrow q = p-k$$

$$\begin{aligned} (\Delta g_1) * (\Delta g_2) &= \sum_{k=0}^{N-1} g_{1k} \sum_{p=k}^{N-1+k} g_{2, p-k} \delta_{\frac{pT}{N}} \\ &= \sum_{p=0}^{2(N-1)} \left( \sum_{k=\max(0, p-N+1)}^{\min(p, N-1)} g_{1k} g_{2, p-k} \right) \delta_{\frac{pT}{N}} \end{aligned}$$

$$(\Delta g_1) * (\Delta g_2) = \sum_{p=0}^{2(N-1)} g g_p \delta_{\frac{pT}{N}} \quad (\text{V-3 ; 2})$$

La convolution discrète de deux vecteurs de  $\mathbb{C}^N$  est donc un vecteur de  $\mathbb{C}^{2N-1}$  défini par

$$gg_p = \sum_{k=\max(0,p-N+1)}^{\min(p,N-1)} g_{1k} g_{2,p-k} \quad p = 0, \dots, 2(N-1) \quad (\text{V-3 ; 3})$$

### V-3-2 - Convolution discrète regroupée

C'est le vecteur  $\vec{gg}'$  de  $\mathbb{C}^N$  construit à partir de  $\vec{gg}$  de la façon suivante :

$$gg'_p = gg_p + gg_{p+N} \quad p = 0, \dots, N-2 \quad (\text{V-3 ; 4})$$

$$gg'_{N-1} = gg_{N-1}$$

ce qui revient à :

$$gg'_p = \sum_{k=0}^{N-1} g_{1k} g_{2,p-k(\text{mod } N)} \quad p = 0, \dots, N-1 \quad (\text{V-3 ; 5})$$

### V-3-3 - D.F.T. et I.D.F.T. de $gg'$

$$GG_j^- = G_{1j}^- \cdot G_{2j}^- = \frac{1}{N^2} \mathcal{F} [(\Delta g_1) * (\Delta g_2)] \left( \frac{j}{N} \right) \quad (\text{V-3 ; 6})$$

$$GG_j^+ = G_{1j}^+ \cdot G_{2j}^+ = \overline{\mathcal{F}} [(\Delta g_1) * (\Delta g_2)] \left( \frac{j}{N} \right)$$

V-4 - LISSAGE D'UN ECHANTILLON

Supposons que  $g$  soit une fonction semi-périodique :

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2i\pi f_m t} \quad (\text{V-4 ; 1})$$

Sa transformée de Fourier est la distribution

$$G = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \delta_{f_m} \quad (\text{V-4 ; 2})$$

Le lissage parfait de  $g$  qui éliminerait les composants de fréquence  $f_m > F$  reviendrait à multiplier  $G$  par la "fenêtre"  $C_F$

$$C_F(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < F \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{V-4 ; 3})$$

$$G^* = G \cdot C_F \quad (\text{V-4 ; 4})$$

$$G^* = \sum_{m \in I_F} c_m \delta_{f_m} \quad (\text{V-4 ; 5})$$

où

$$I_F = \{m \in \mathbb{Z} \mid |f_m| < F\}$$

La fonction  $g^*$  lissée serait alors égale à

$$g^* = \sum_{m \in I_F} c_m e^{2i\pi f_m t} \quad (\text{V-4 ; 6})$$

La propriété fondamentale des T.F. nous donnerait, compte-tenu de (V-4; 4)

$$g^* = g * \bar{\mathcal{F}} [C_F] \quad (\text{V-4 ; 7})$$

Pour lisser la fonction  $g$  en éliminant ses composants de fréquence supérieure à  $F$  en valeur absolue, il faudrait donc effectuer la convolution de  $g$  avec la fonction

$$\bar{\mathcal{F}} [C_F](t) = \frac{\sin 2\pi Ft}{\pi t} \quad (\text{V-4 ; 8})$$

qui est à support infini.

Le fait de prélever des échantillons de la fonction  $g$  à raison de  $N$  valeurs équidistantes sur un intervalle de longueur  $T$  n'entraîne pas que l'on fasse disparaître les composants de fréquence  $f_m$  supérieure à  $\frac{N}{2T}$  en valeur absolue. Du fait du repliement du spectre (phénomène d'Aliasing) ces composants interviennent à des fréquences  $f_o = f_m \pmod{\frac{N}{T}}$  comprises entre  $-\frac{N}{2T}$  et  $\frac{N}{2T}$  (voir périodicité de  $\frac{1}{N} \mathcal{F} [\Delta]$  au §<sup>m</sup>II-1).

### Echantillonner n'est pas lisser

Une fonction  $g$  dont on sait que les composants en fréquence sont significatifs jusqu'à une fréquence  $f_{MAX}$  devra être échantillonnée  $N$  fois sur un intervalle de longueur  $T$  avec

$$\frac{N}{T} > 2 f_{MAX}$$

sous peine de retrouver en basse fréquence l'influence des composants de haute fréquence sans pouvoir les éliminer plus tard par un procédé de lissage quelqu'il soit.

V-4-1 - Premier procédé de lissage (cf. [5] LANCZOS p. 331).

Si l'on veut lisser le résultat d'un échantillonnage  $\vec{g}$  en éliminant les composants de fréquence supérieure à F en valeur absolue ( $F < \frac{N}{2T}$ ) on peut procéder comme suit :

1 - Calculer la D.F.T. de  $\vec{g}$

$$g_k \xrightarrow{\text{D.F.T.}} G_j$$

2 - A partir de  $\vec{G}$  construire le vecteur  $\vec{G}^*$  en posant (compte-tenu de la remarque du § II-1-2) :

$$G_j^* = \begin{cases} G_j & \text{si } 0 \leq \frac{j}{T} < F \quad \text{ou} \quad \frac{N}{T} - F < \frac{j}{T} < \frac{N}{T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3 - Calculer l'I.D.F.T. de  $\vec{G}^*$  qui nous donne le vecteur lissé  $\vec{g}^*$

$$G_j^* \xrightarrow{\text{I.D.F.T.}} g_k^*$$

La figure 12 illustre ce procédé qui est très efficace mais nécessite deux fois l'emploi de l'algorithme de Cooley et Tukey.

V-4-2 - Deuxième procédé de lissage

On opère directement sur le vecteur  $\vec{g}$  ( $g_k$  ;  $k = 0, \dots, N-1$ ) en remplaçant chaque composante par une pondération faisant intervenir les valeurs voisines :

$$\text{Formule à } 2p+1 \text{ points : } g_k^* = \sum_{s=-p}^p \alpha_s g_{k-s} \quad (\text{V-4 ; 9})$$

en supposant  $g_q = 0$  si  $q \notin \{0, \dots, N-1\}$ .

$\vec{g}^*$  est le résultat de la convolution discrète de  $\vec{g}$  avec  $\vec{\alpha}$  (voir § V-3).  
On peut considérer ses composantes comme les échantillons de la fonction  $g^*$  telle que

$$\Delta \cdot g^* = \Delta \cdot g * \left( \sum_{s=-p}^p \alpha_s \delta_{\frac{sT}{N}} \right) \quad (\text{V-4 ; 10})$$

En prenant la T.F. de cette expression

$$\mathcal{F}[\Delta g^*](\lambda) = \mathcal{F}[\Delta g](\lambda) \cdot \mathcal{F}\left[ \sum_{s=-p}^p \alpha_s \delta_{\frac{sT}{N}} \right](\lambda) \quad (\text{V-4 ; 11})$$

$$\mathcal{F}\left[ \sum_{s=-p}^p \alpha_s \delta_{\frac{sT}{N}} \right](\lambda) = \sum_{s=-p}^p \alpha_s e^{-2i\pi \frac{sT}{N} \lambda} = S(\lambda) \quad (\text{V-4 ; 12})$$

$S(\lambda)$  est une fonction périodique de période  $\frac{N}{T}$ .

Nous allons déterminer les  $\alpha_s$  de façon à éliminer le mieux possible les composants de fréquence  $f_m$  telle que  $F < f_m < \frac{N}{2T}$  dans la distribution  $\Delta g^*$ .

L'idéal serait que  $S(\lambda)$  soit la fonction  $C_F^{N/T}(\lambda)$  de période  $\frac{N}{T}$ , égale à 1 pour  $|\lambda| < F$  et nulle ailleurs (le premier procédé de lissage se ramène à cela puisque l'on calculait  $\mathcal{F}[\Delta g](\frac{j}{T})$  et qu'on l'annulait pour  $|\frac{j}{T}| > F$ ). Malheureusement  $S(\lambda)$  a pour coefficients de Fourier les  $\alpha_s$  dont on limite le nombre à  $2p+1$  tandis que  $C_F^{N/T}(\lambda)$  en a une infinité.

La détermination des  $\alpha_s$  peut se faire de façon que

$$\beta' = \frac{\int_{-F}^{+F} |S(\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} |S(\lambda)|^2 d\lambda} \quad (\text{V-4 ; 13})$$

soit maximum.

Le calcul est analogue à celui du § IV-5-5 et  $\alpha$  est le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre ( $= \beta'$ ) de la matrice  $M'$  :

$$M'_{qk} = \begin{cases} \frac{2FT}{N} & \text{si } q = k = -p, \dots, p \\ \frac{\sin 2\pi \frac{FT}{N} (q-k)}{\pi(q-k)} & \text{si } q \neq k \end{cases} \quad (\text{V-4 ; 14})$$

On normalisera  $\vec{\alpha}$  de façon que  $\sum_{s=-p}^p \alpha_s = 1$ .

On montre aisément que  $\alpha_{-s} = \alpha_s$ .

On remarque que  $p$  étant fixé, les  $\alpha_s$  ne dépendent que du produit de la fréquence de coupure  $F$  par le pas  $\frac{T}{N}$  de l'échantillonnage.



A N N E X E

-:-:-:-:-

COEFFICIENTS DE FOURIER

DU SINUS REDRESSE

$$g(t) = \left| \frac{\pi}{2} \sin(t) \right|$$

$$C_0 = 1$$

$$C_m = - \frac{2}{(2m+1)(2m-1)}$$

Paramètres de la procédure CTG : N = 128 , M = 5 , D = 1 , SIGNE = -1.0

m	<u>Partie Réelle</u>		<u>Partie Imaginaire</u>	
	<u>Exacte</u>	<u>Calculée</u>	<u>Exacte</u>	<u>Calculée</u>
0	1.0	9.999 <sup>-01</sup>	0.0	0.0
1	-6.667 <sup>-01</sup>	-6.668 <sup>-01</sup>	0.0	1.099 <sup>-07</sup>
2	-1.333 <sup>-01</sup>	-1.334 <sup>-01</sup>	0.0	2.109 <sup>-07</sup>
3	-5.714 <sup>-02</sup>	-5.724 <sup>-02</sup>	0.0	3.711 <sup>-07</sup>
4	-3.175 <sup>-02</sup>	-3.185 <sup>-02</sup>	0.0	3.749 <sup>-07</sup>
5	-2.020 <sup>-02</sup>	-2.030 <sup>-02</sup>	0.0	5.110 <sup>-07</sup>
6	-1.399 <sup>-02</sup>	-1.409 <sup>-02</sup>	0.0	7.899 <sup>-08</sup>
7	-1.026 <sup>-02</sup>	-1.036 <sup>-02</sup>	0.0	2.926 <sup>-07</sup>
8	-7.843 <sup>-03</sup>	-7.944 <sup>-03</sup>	0.0	-4.543 <sup>-08</sup>
9	-6.192 <sup>-03</sup>	-6.294 <sup>-03</sup>	0.0	2.083 <sup>-07</sup>
10	-5.013 <sup>-03</sup>	-5.114 <sup>-03</sup>	0.0	9.080 <sup>-09</sup>
11	-4.141 <sup>-03</sup>	-4.243 <sup>-03</sup>	0.0	2.343 <sup>-07</sup>
12	-3.478 <sup>-03</sup>	-3.580 <sup>-03</sup>	0.0	6.103 <sup>-08</sup>
13	-2.963 <sup>-03</sup>	-3.065 <sup>-03</sup>	0.0	2.542 <sup>-07</sup>
14	-2.554 <sup>-03</sup>	-2.657 <sup>-03</sup>	0.0	7.248 <sup>-08</sup>
15	-2.225 <sup>-03</sup>	-2.328 <sup>-03</sup>	0.0	3.019 <sup>-07</sup>
16	-1.955 <sup>-03</sup>	-2.058 <sup>-03</sup>	0.0	-2.276 <sup>-07</sup>
17	-1.732 <sup>-03</sup>	-1.836 <sup>-03</sup>	0.0	1.873 <sup>-07</sup>
18	-1.544 <sup>-03</sup>	-1.649 <sup>-03</sup>	0.0	-9.399 <sup>-08</sup>
19	-1.386 <sup>-03</sup>	-1.491 <sup>-03</sup>	0.0	1.167 <sup>-07</sup>
20	-1.251 <sup>-03</sup>	-1.356 <sup>-03</sup>	0.0	2.579 <sup>-08</sup>
21	-1.134 <sup>-03</sup>	-1.240 <sup>-03</sup>	0.0	1.215 <sup>-07</sup>
22	-1.034 <sup>-03</sup>	-1.140 <sup>-03</sup>	0.0	6.199 <sup>-08</sup>
23	-9.456 <sup>-04</sup>	-1.053 <sup>-03</sup>	0.0	1.403 <sup>-07</sup>
24	-8.684 <sup>-04</sup>	-9.762 <sup>-04</sup>	0.0	-7.945 <sup>-08</sup>
25	-8.003 <sup>-04</sup>	-9.088 <sup>-04</sup>	0.0	1.176 <sup>-07</sup>
26	-7.399 <sup>-04</sup>	-8.491 <sup>-04</sup>	0.0	-5.789 <sup>-08</sup>
27	-6.861 <sup>-04</sup>	-7.961 <sup>-04</sup>	0.0	-1.356 <sup>-08</sup>
28	-6.380 <sup>-04</sup>	-7.485 <sup>-04</sup>	0.0	-1.765 <sup>-08</sup>
29	-5.947 <sup>-04</sup>	-7.063 <sup>-04</sup>	0.0	5.952 <sup>-08</sup>
30	-5.557 <sup>-04</sup>	-6.680 <sup>-04</sup>	0.0	5.979 <sup>-08</sup>
31	-5.204 <sup>-04</sup>	-6.337 <sup>-04</sup>	0.0	2.275 <sup>-07</sup>

Effectuer le HANNING revient donc à pondérer chaque échantillon  $g_{1k}$  et  $g_{2k}$  par  $\frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi \frac{k}{N})$  avant d'en calculer la D.F.T.

Le cross-spectre devient :

$$W_j^{\text{Han}} = \overline{G_{1j}^{\text{Han}}} \cdot G_{2j}^{\text{Han}} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} \left| \mathcal{F}[\Delta u/N] \left( \frac{j}{T} - f \right) \right|^2 \quad (\text{IV-5 ; 13})$$

Voir exemple numérique (Figure 5 en annexe).

#### IV-5-4 - Hamming

Dans ce procédé la pondération se fait avec les coefficients

$$(0,23 \mid 0,54 \mid 0,23)$$

ce qui revient à pondérer les échantillons de départ par  $0,54 + 0,46 \cos 2\pi \frac{k}{N}$ , valeur en  $k \frac{T}{N}$  de la fonction

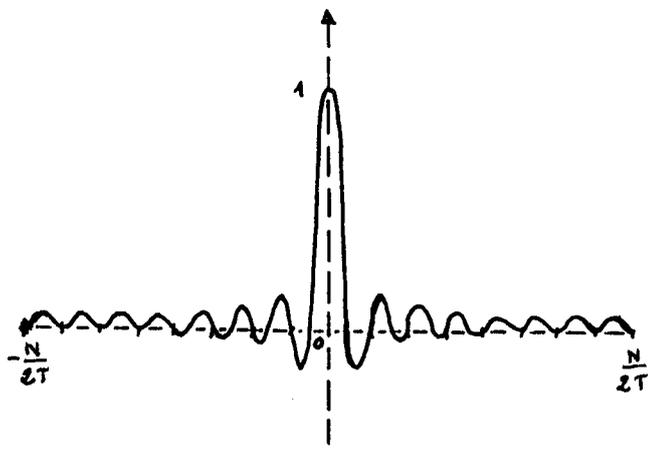
$$v(u) = 0,54 + 0,46 \cos 2\pi \frac{u}{T} \quad (\text{IV-5 ; 14})$$

Les coefficients sont des approximations de ceux qui annuleraient  $|\mathcal{F}[\Delta u/N]|^2(\lambda)$  pour  $|\lambda| = \frac{2,5}{T}$  ainsi que pour  $|\lambda| = \frac{p}{T}$   $p = 2,3,\dots$

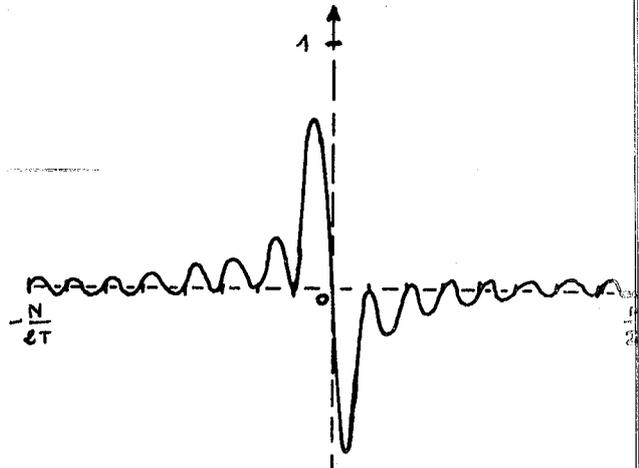
Voir exemple numérique (Figure 6 en annexe).

#### IV-5-5 - Distribution optimum

Pour améliorer le "pouvoir séparateur" du cross-spectre, on va remplacer  $\Delta$  par une distribution  $\nabla$  dont la transformée de Fourier aura ses plus grandes valeurs concentrées au maximum autour de l'origine.

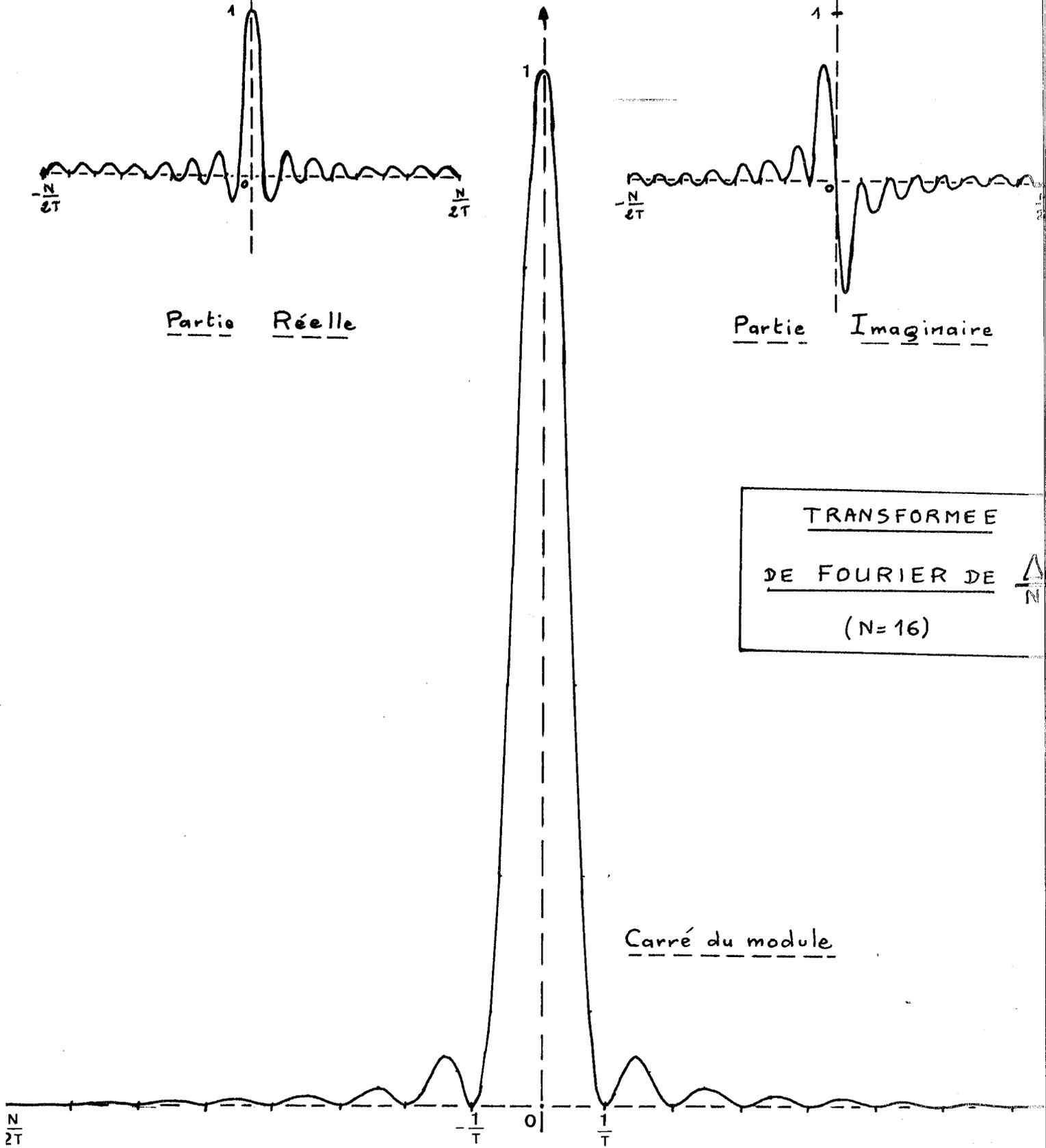


Partie Réelle



Partie Imaginaire

TRANSFORMÉE  
 DE FOURIER DE  $\frac{\Delta}{N}$   
 (N=16)



Carré du module

Figure 1

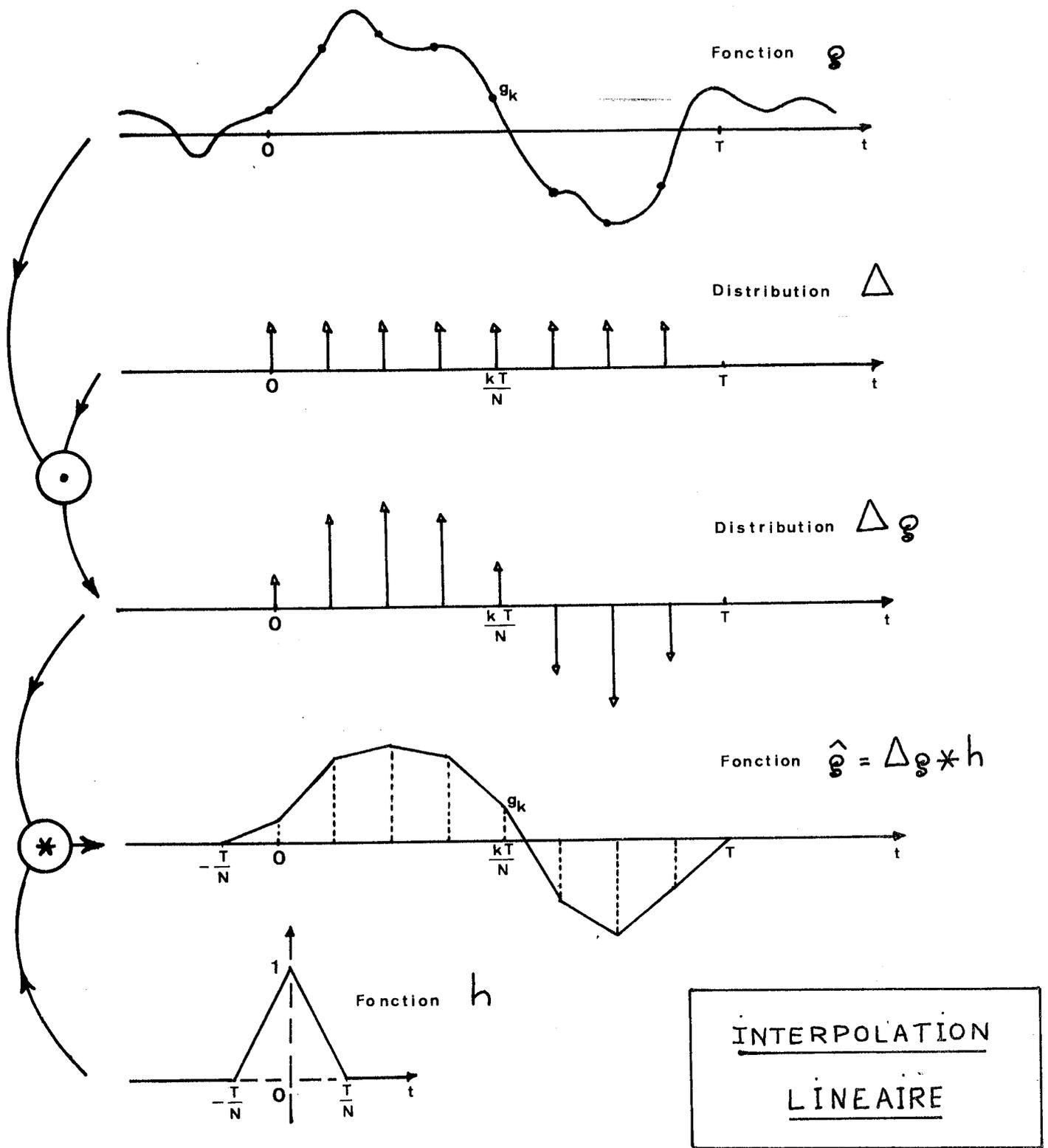


Figure 2

EXEMPLE NUMERIQUE DE TRANSFORMEE INVERSE DE FOURIER

$$g(t) = \begin{cases} t e^{-(1+i)t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}[g](f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{2i\pi f t} dt \\ &= \frac{4\pi f(1-4\pi f)}{[2-4\pi f(1-4\pi f)]^2} + i \frac{4\pi f-2}{[2-4\pi f(1-4\pi f)]^2} \end{aligned}$$

Connaissant  $g$  en  $N = 64$  abscisses discrètes entre 0 et  $T = 16\pi$  nous en avons calculé l'I.D.F.T. avec les paramètres suivants pour la procédure CTG :

$$\underline{M = 4} \quad \underline{D = 4} \quad \underline{\text{SIGNE} = +1.0}$$

L'interpolation trigonométrique de  $g$  (II-3 ; 3) nous a fourni les valeurs représentées par des points (.) sur les figures 3 et 3' pour  $\bar{\mathcal{F}}[\tilde{g}](\frac{j}{T})$ .

L'interpolation linéaire de  $g$  (II-3 ; 8) nous a fourni les valeurs représentées par des croix (x) sur les figures 3 et 3' pour  $\bar{\mathcal{F}}[\hat{g}](\frac{j}{T})$ .

TRANSFORMEE INVERSE  
DE FOURIER DE  

$$g(t) = \begin{cases} t e^{-(1+i)t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Partie Réelle

- Valeur Exacte
- Interpolation Trigonométrique
- X Interpolation Linéaire

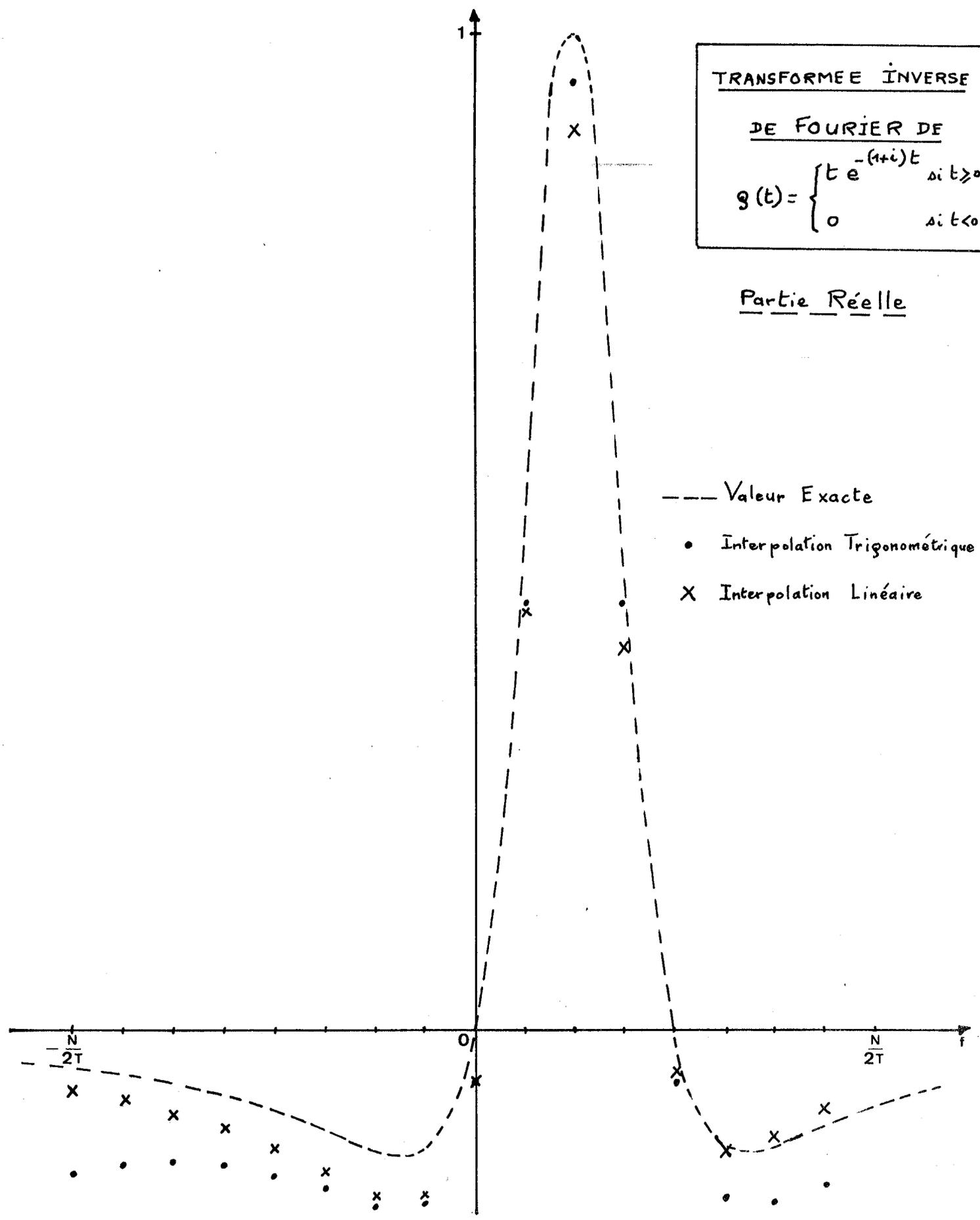


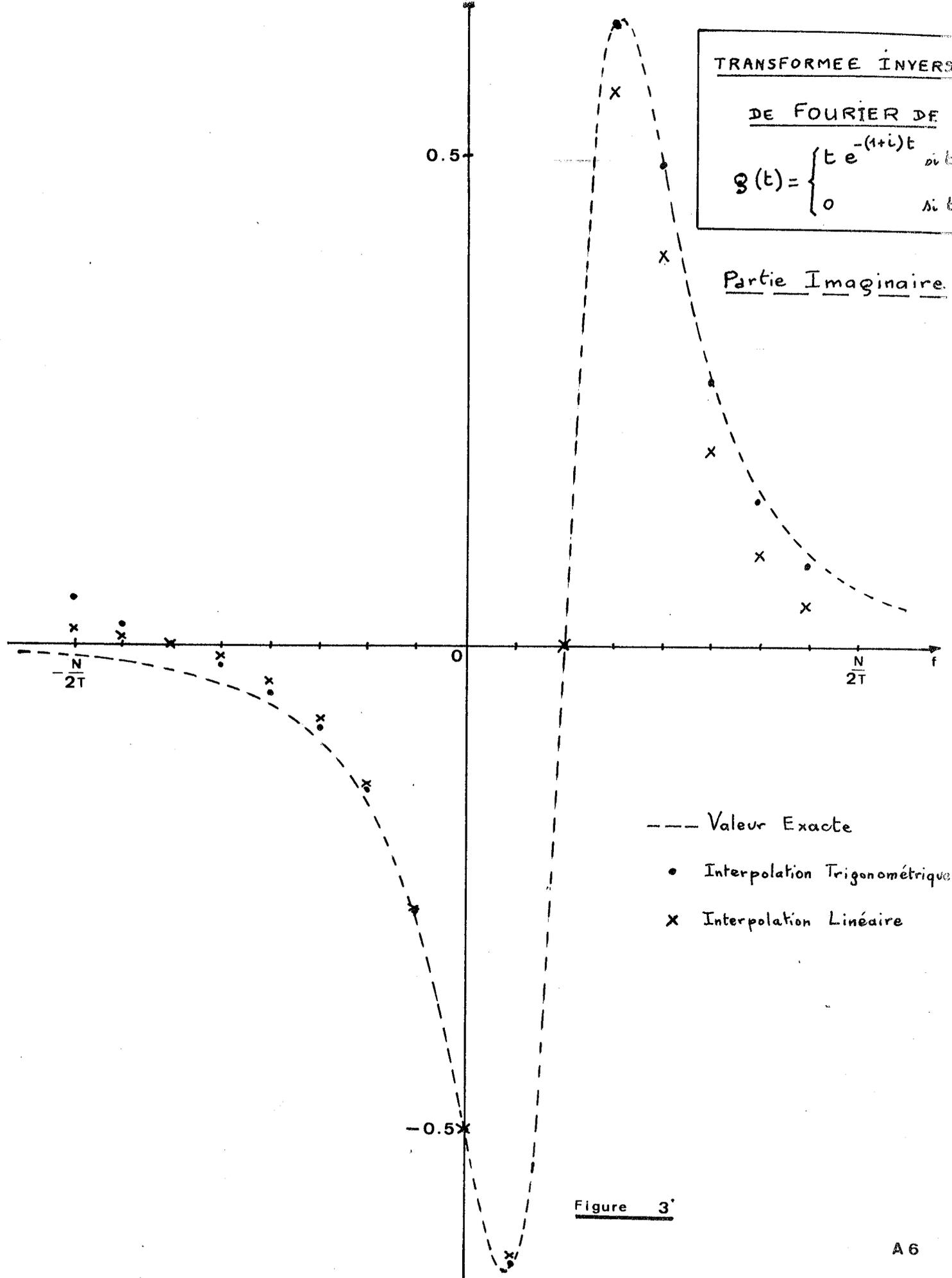
Figure 3

TRANSFORMEE INVERSE

DE FOURIER DE

$$g(t) = \begin{cases} t e^{-(1+i)t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Partie Imaginaire



- Valeur Exacte
- Interpolation Trigonometrique
- x Interpolation Lineaire

Figure 3'

## EXEMPLE NUMERIQUE DE SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION A SUPPORT BORNE

$$g(t) = \begin{cases} \alpha t(T-t) & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

### Fonction d'Auto-correlation

$$R(u) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot g(t+u) dt = R(-u)$$

$$R(u) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{6} \left[ -\frac{|u|^5}{5T} + T|u|^3 - T^2 u^2 + \frac{T^4}{5} \right] & \text{pour } |u| < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

### Spectre de puissance

$$P_g(f) = 2 \int_0^T R(u) \cos 2\pi f t dt$$

$$P_g(0) = \frac{\alpha^2 T^5}{36}$$

$$P_g(f) = \frac{2\alpha^2}{6} \left\{ \sin 2\pi f T \left[ -\frac{T^4}{5\pi f} - \frac{24}{(2\pi f)^5} \right] \right. \\ \left. + \cos 2\pi f T \left[ \frac{6T}{(2\pi f)^4} - \frac{24}{T(2\pi f)^6} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{6T}{(2\pi f)^4} + \frac{24}{T(2\pi f)^6} \right] \right\}$$

$$P_g\left(\frac{j}{T}\right) = \frac{4\alpha^2 T^5}{(2\pi j)^4}$$

Pour l'application numérique, on a pris

$$\alpha = 6 \quad T = 1$$

et on a rentré en machine le vecteur des  $g_k = g(k \frac{T}{N})$  pour  $k = 0, \dots, N-1$  avec

$$N = 64$$

On a utilisé l'Algorithme de Cooley et Tukey et calculé les 2 approximations :

$$\text{Interpolation trigonométrique de } g \rightarrow P_{\tilde{g}}(\frac{j}{T}) = T |G_j^-|^2$$

$$\text{Interpolation linéaire de } g \rightarrow P_{\hat{g}}(\frac{j}{T}) = T \left( \frac{\sin \pi \frac{j}{N}}{\pi \frac{j}{N}} \right)^4 |G_j^-|^2$$

(la fonction  $g$  étant nulle en 0 et en  $T$ , le support de  $\hat{g}$  est aussi  $[0, T]$ , d'où l'absence du coefficient  $\frac{N}{N+1}$  dans  $P_{\hat{g}}(\frac{j}{T})$ ).

Le tableau qui suit représente les résultats obtenus pour  $f = \frac{j}{T}$ ,  $j$  allant de 0 à  $\frac{N}{2}$  (le spectre est symétrique).

f	VALEURS EXACTES	PREMIÈRE APPROXIMATION		DEUXIÈME APPROXIMATION	
	$P_g(f)$	$P_g(f)$	Erreur Relative	$P_g(f)$	Erreur Relative
+0	+1.000000'+00	+9.995117'-01	+4.882216'-04	+9.995117'-01	+4.882216'-04
+1	+9.239375'-02	+9.254193'-02	+1.603757'-03	+9.239327'-02	+5.160922'-06
+2	+5.774609'-03	+5.811828'-03	+6.445348'-03	+5.774571'-03	+6.451154'-06
+3	+1.140667'-03	+1.157249'-03	+1.453748'-02	+1.140624'-03	+3.694534'-05
+4	+3.609137'-04	+3.703210'-04	+2.606519'-02	+3.609119'-04	+5.160913'-06
+5	+1.478302'-04	+1.538942'-04	+4.101993'-02	+1.478242'-04	+4.035902'-05
+6	+7.129156'-05	+7.554644'-05	+5.968297'-02	+7.128945'-05	+2.918891'-05
+7	+3.848138'-05	+4.164082'-05	+8.210378'-02	+3.847681'-05	+1.187405'-04
+8	+2.255706'-05	+2.501283'-05	+1.088690'-01	+2.255700'-05	+2.580461'-06
+9	+1.408229'-05	+1.605231'-05	+1.398943'-01	+1.408174'-05	+3.900891'-05
+10	+9.239384'-06	+1.086336'-05	+1.757667'-01	+9.239123'-06	+2.834976'-05
+11	+6.310629'-06	+7.678637'-06	+2.167785'-01	+6.310056'-06	+9.065210'-05
+12	+4.455725'-06	+5.630654'-06	+2.636896'-01	+4.455637'-06	+1.939122'-05
+13	+3.234965'-06	+4.259663'-06	+3.167570'-01	+3.234672'-06	+9.024753'-05
+14	+2.405087'-06	+3.311799'-06	+3.769972'-01	+2.404951'-06	+5.672312'-05
+15	+1.825062'-06	+2.636501'-06	+4.446089'-01	+1.824399'-06	+3.632867'-04
+16	+1.409816'-06	+2.145767'-06	+5.220184'-01	+1.409816'-06	0
+17	+1.106234'-06	+1.779742'-06	+6.088292'-01	+1.106216'-06	+1.644306'-05
+18	+8.801429'-07	+1.502373'-06	+7.069650'-01	+8.801359'-07	+7.879282'-06
+19	+7.089712'-07	+1.288772'-06	+8.178057'-01	+7.089134'-07	+8.162046'-05
+20	+5.774613'-07	+1.122360'-06	+9.436118'-01	+5.774552'-07	+1.053273'-05
+21	+4.750791'-07	+9.911071'-07	+1.086193'+00	+4.750762'-07	+6.102167'-06
+22	+3.944140'-07	+8.867274'-07	+1.248213'+00	+3.944023'-07	+2.983306'-05
+23	+3.301654'-07	+8.032737'-07	+1.432943'+00	+3.301612'-07	+1.256815'-05
+24	+2.784825'-07	+7.303117'-07	+1.644013'+00	+2.784831'-07	+2.245302'-06
+25	+2.365281'-07	+6.826455'-07	+1.886105'+00	+2.365475'-07	+8.171011'-05
+26	+2.021852'-07	+6.397131'-07	+2.163994'+00	+2.021862'-07	+5.622902'-06
+27	+1.738552'-07	+6.058779'-07	+2.484955'+00	+1.738574'-07	+1.275137'-05
+28	+1.503179'-07	+5.797412'-07	+2.256766'+00	+1.503204'-07	+1.663878'-05
+29	+1.306324'-07	+5.603416'-07	+3.289453'+00	+1.306402'-07	+6.904933'-05
+30	+1.140664'-07	+5.469261'-07	+3.794803'+00	+1.140720'-07	+4.933523'-05
+31	+1.000451'-07	+5.392835'-07	+4.390401'+00	+1.000915'-07	+4.636328'-04
+32	+8.811354'-08	+5.364418'-07	+5.088073'+00	+8.811300'-08	+6.451153'-07

## EXEMPLE NUMERIQUE DE SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION SEMI-PERIODIQUE

On a considéré le signal réel

$$g(t) = e^{2i\pi f_0 t}$$

sur un intervalle de temps  $[0, T]$  qui n'est pas un multiple de sa période :

$$\underline{f_0 = 2,75} \qquad \underline{T = 1}$$

A partir des valeurs de  $g$  aux abscisses discrètes  $k \frac{T}{N}$ , avec  $N = 16$ , on a obtenu pour la première approximation du spectre de puissance (formules V-4 ; 2) les valeurs représentées sur la figure 4. On voit que pour  $f = 1$  et  $f = 4$  et même  $f = 5$  on recueille encore des valeurs non négligeables. Le spectre est très "étalé".

Le Hanning (§ IV-5-3), figure 5, et le Hamming (§ IV-5-4), figure 6, ont presque fait disparaître les raies en  $f = 1$  et  $f = 5$  mais il subsiste une raie importante en  $f = 4$ .

La figure 9 (page A16) représente le spectre obtenu à partir des mêmes données en affectant à chaque  $g(k \frac{T}{N})$  un poids  $\gamma_k$  déterminé comme on l'a vu au § IV-5-5. Seules subsistent pratiquement les raies en  $f = 2$  et  $f = 3$ .

SPECTRE DE PUISSANCE DE

$$g(t) = e^{2i\pi 2,75t} \quad (N=16)$$

PREMIÈRE APPROXIMATION

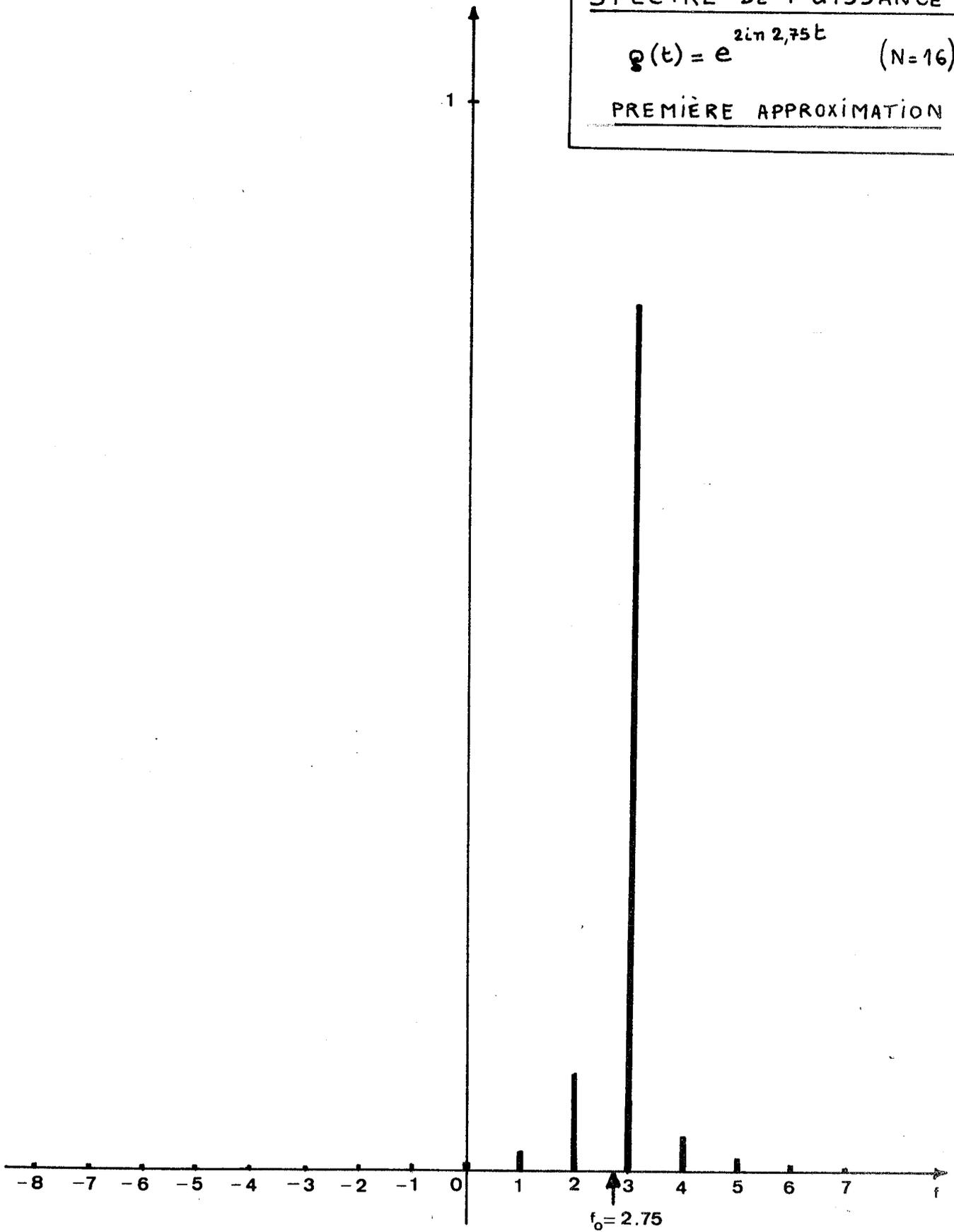


Figure 4

SPECTRE DE PUISSANCE DE

$$g(t) = e^{2i\pi 2,75t} \quad (N=16)$$

AVEC HANNING

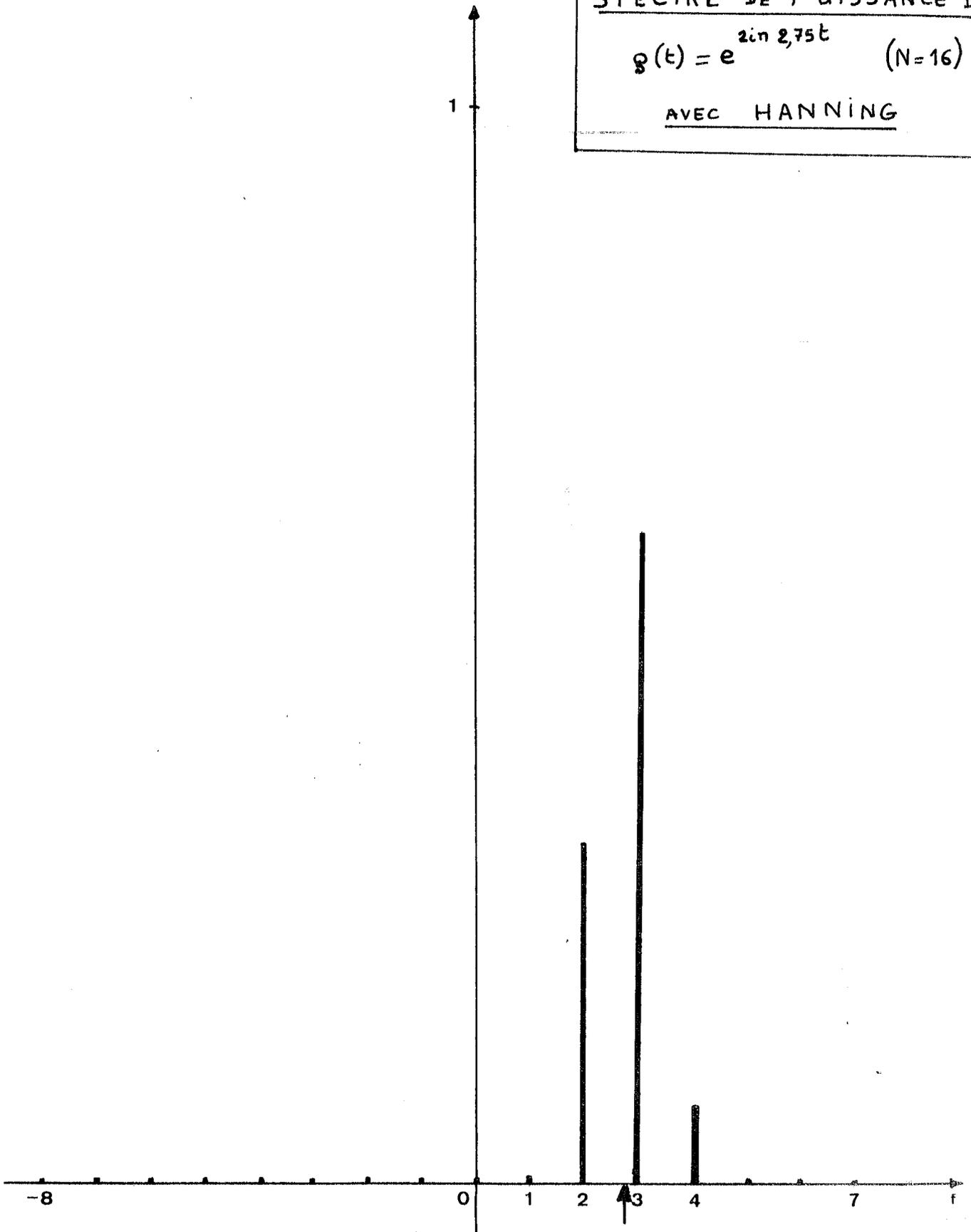


Figure 5

SPECTRE DE PUISSANCE DE

$$g(t) = e^{2in 2,75t} \quad (N=16)$$

AVEC HAMMING

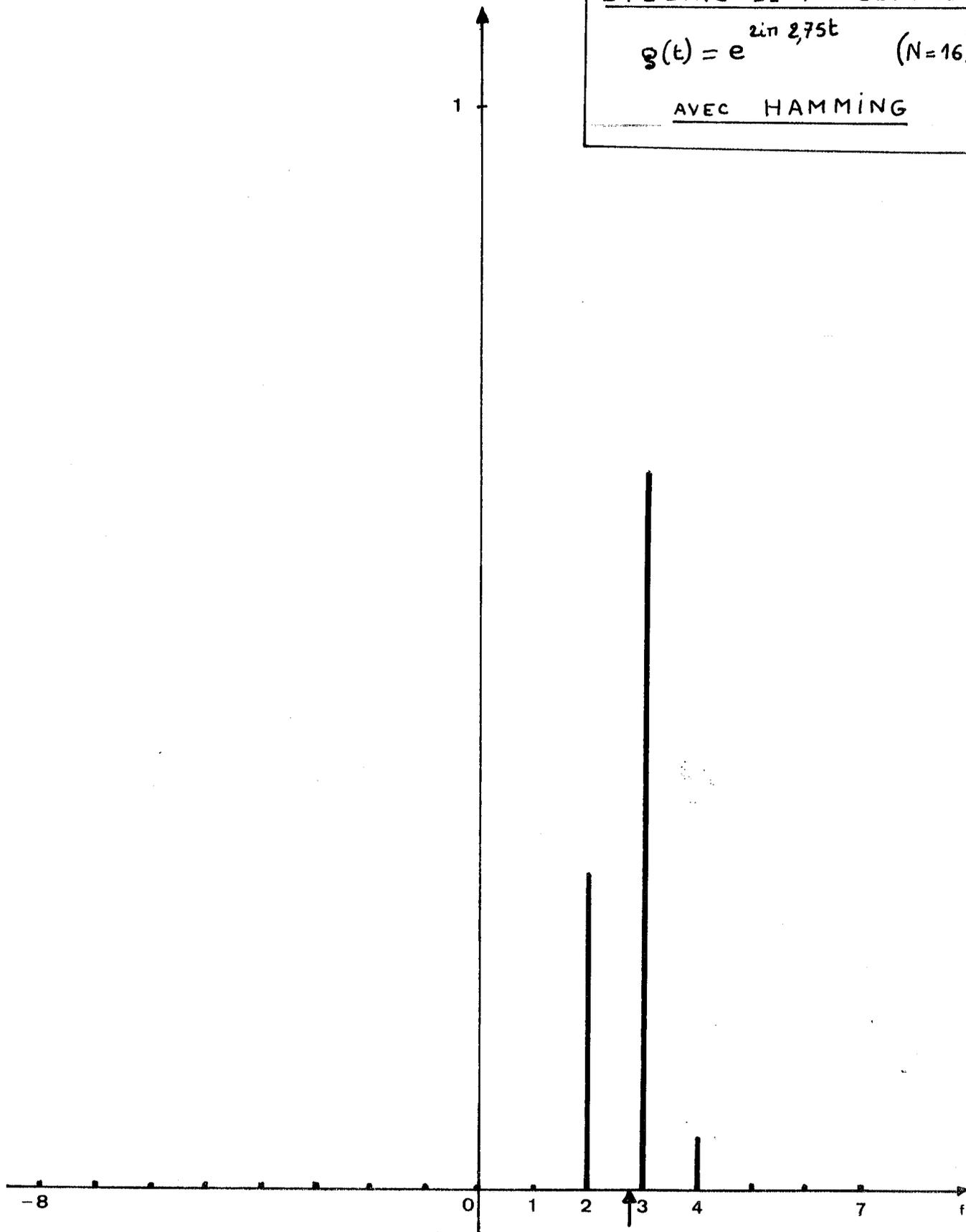


Figure 6

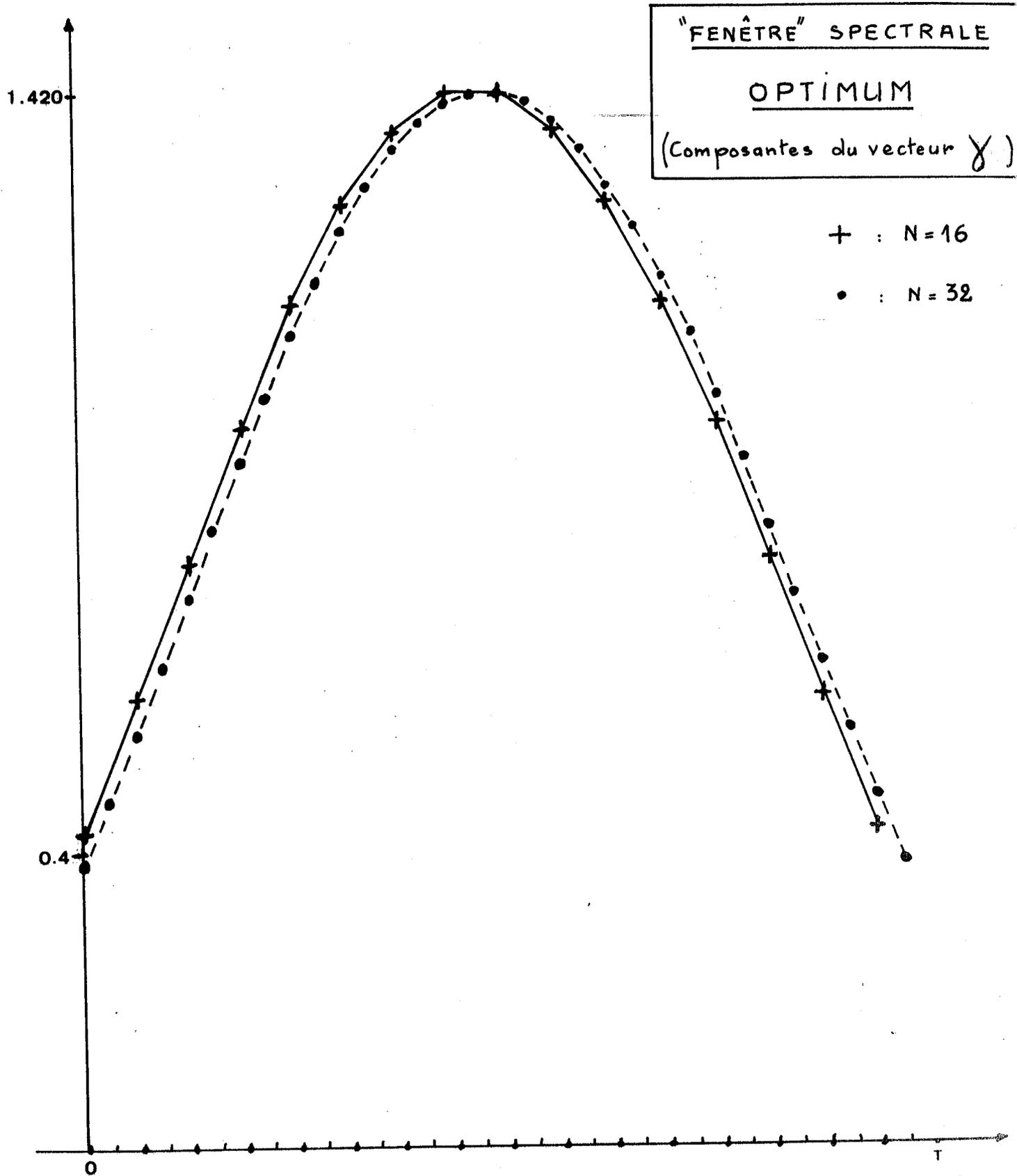


Figure 7

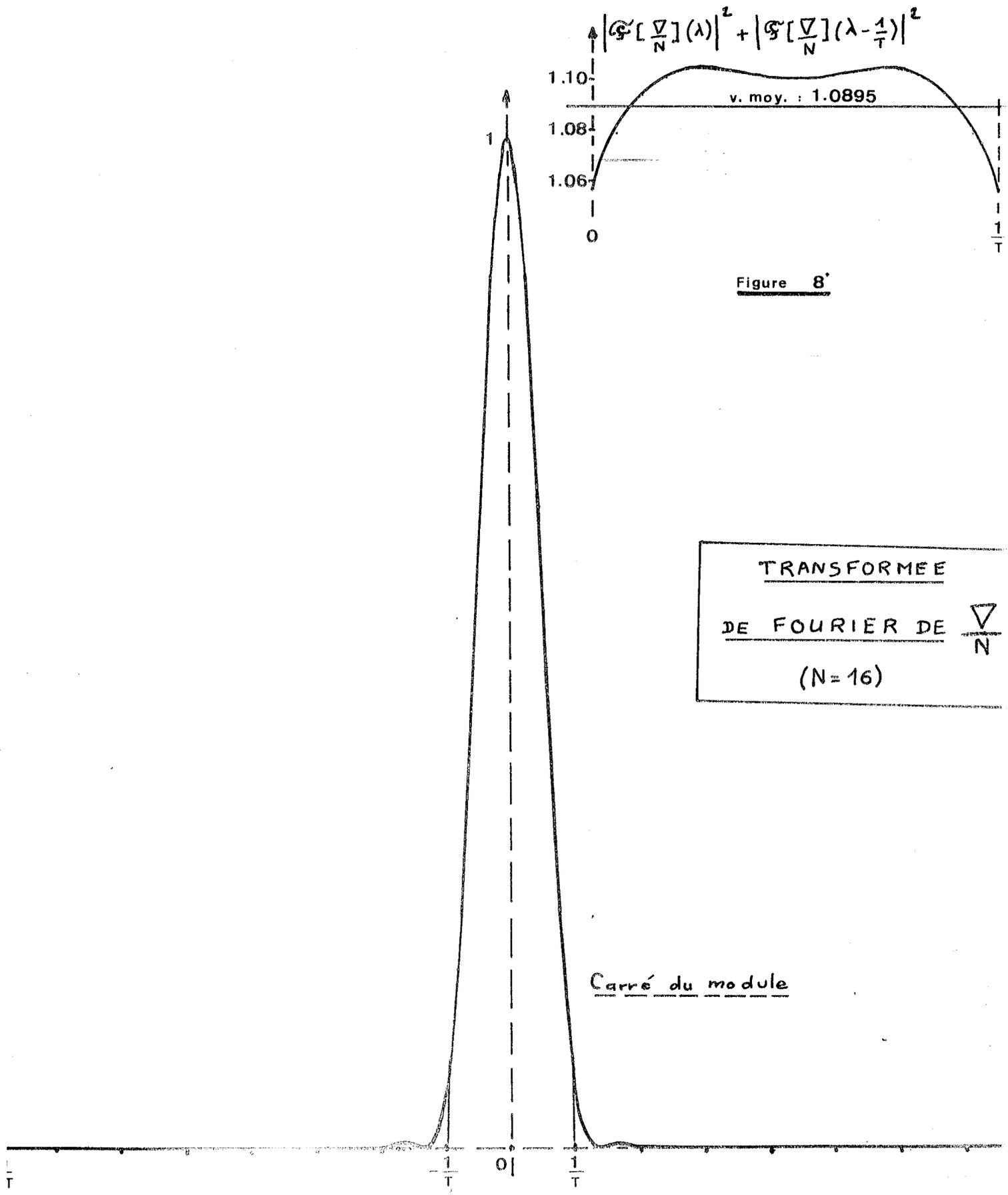


Figure 8

SPECTRE DE PUISSANCE DE

$$g(t) = e^{i \sin 2,75t} \quad (N=16)$$

AVEC FENÊTRE OPTIMUM

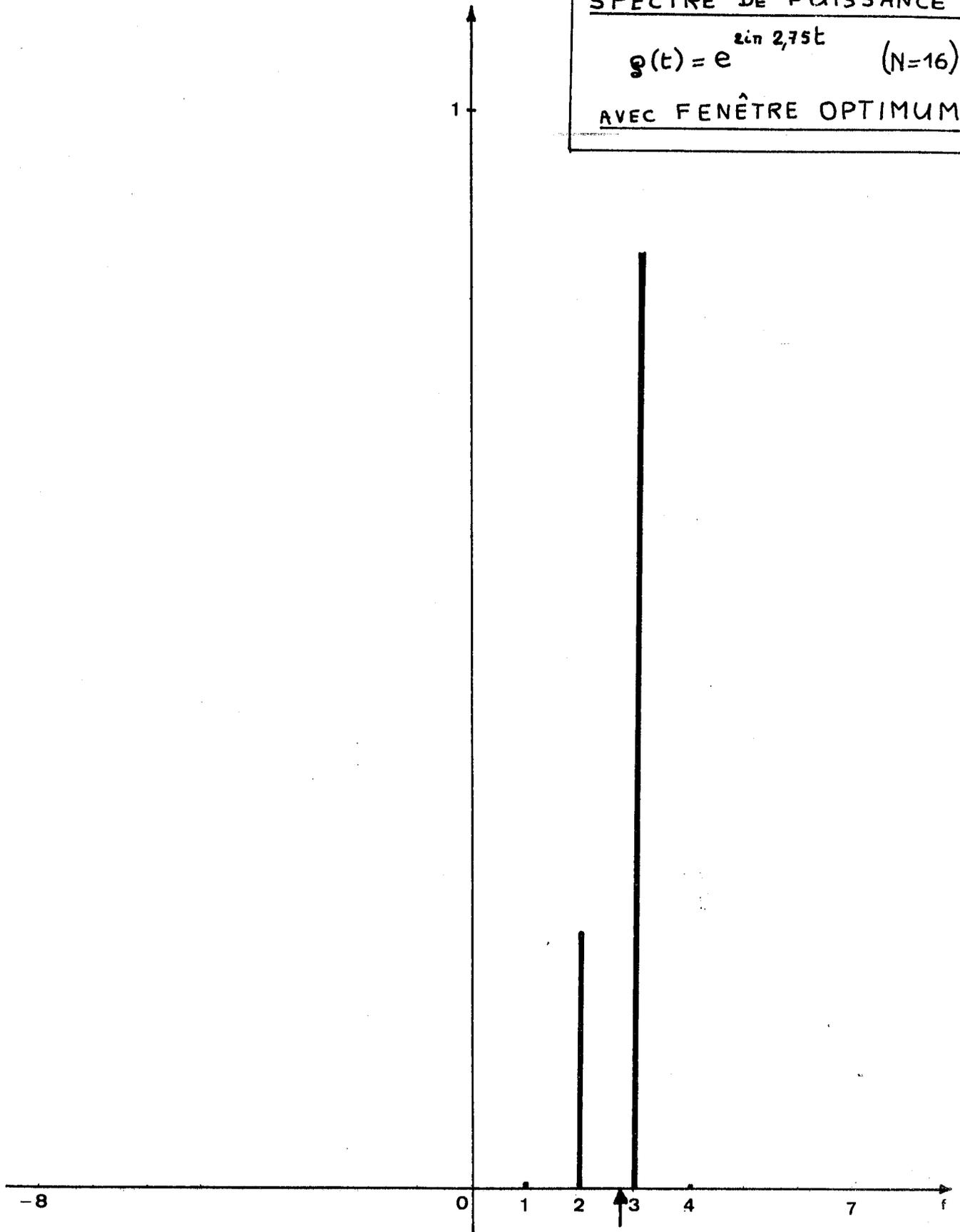


Figure 9

## SPECTRE DE PUISSANCE D'ELECTROENCEPHALOGRAMME

La figure 10 représente un exemple de spectre de puissance obtenu à partir d'une piste d'Electroencéphalogramme convertie à raison de 512 valeurs à la seconde sur 4 secondes (N = 2048).

Le professeur GAUTRAY, s'intéressant à l'évolution de tels spectres au cours du cycle menstruel de la femme, nous avons enregistré plusieurs sujets deux fois par semaine durant un cycle ou plus. Pour chaque spectre obtenu on a calculé les quantités

$$R_{\theta} = \frac{\int_4^8 P(f) df}{\int_0^{32} P(f) df} \quad \text{et} \quad R_{\alpha} = \frac{\int_8^{12} P(f) df}{\int_0^{32} P(f) df}$$

correspondant respectivement à la part d'activité des rythmes Têta (4 à 8 Hz) et Alpha (8 à 12 Hz) dans l'activité totale.

La figure 11 représente les variations de  $R_{\theta}$  au cours d'un cycle pour un sujet donné. Pour chaque jour d'enregistrement, on a 3 valeurs de  $R_{\theta}$  ("1", "2" et "3") qui correspondent à 3 séquences prélevées à une minute d'intervalle dans les mêmes conditions, le sujet étant au repos, yeux fermés.

On fait passer un sinus de période égale à la longueur du cycle du sujet en déterminant ses coefficients par moindres carrés sur les moyennes ("5"), de chaque jour.

Ces résultats ont fait l'objet d'une communication (cf. [6]).

SPECTRE DE PUISSANCE

D' E. E. G.

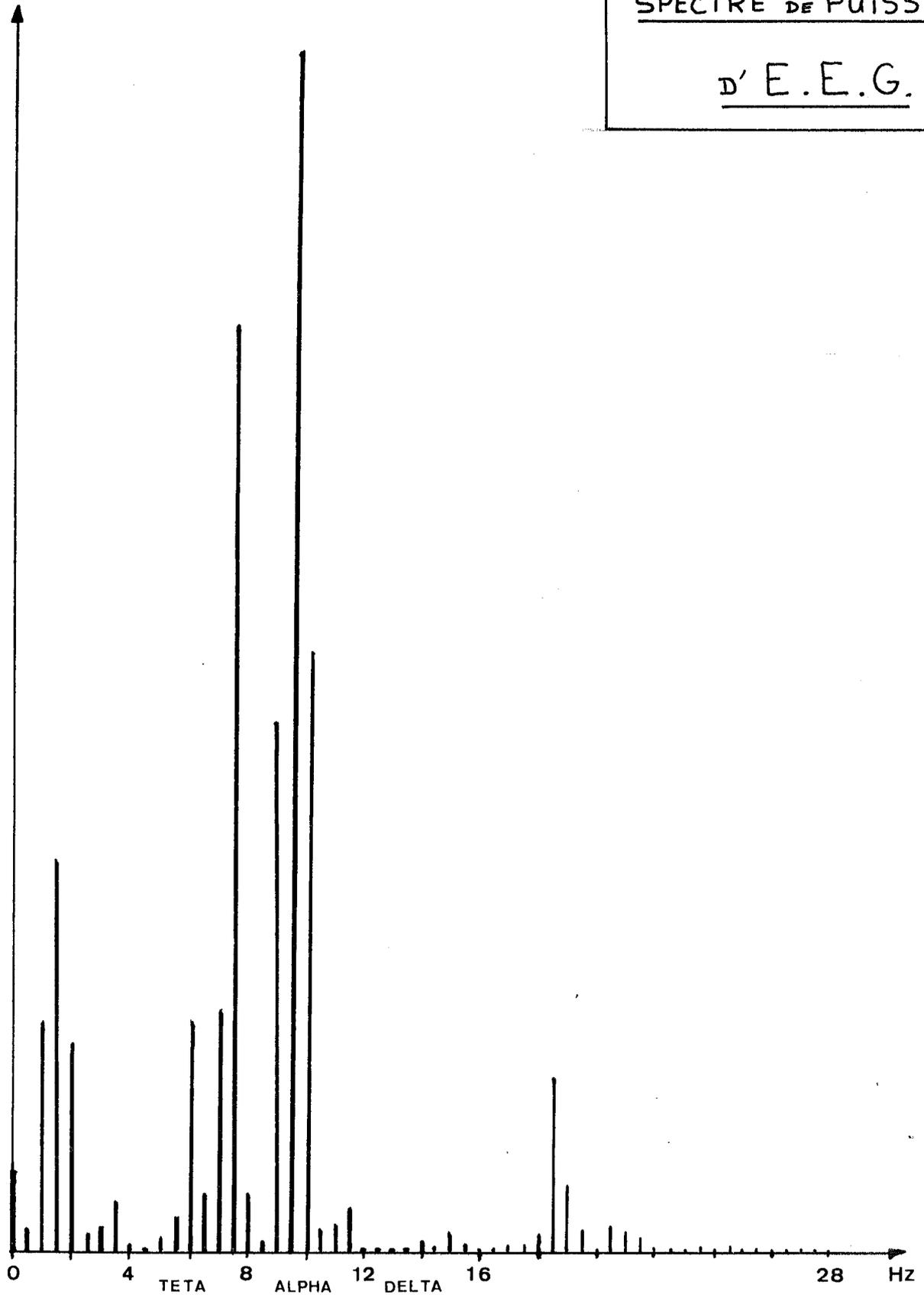
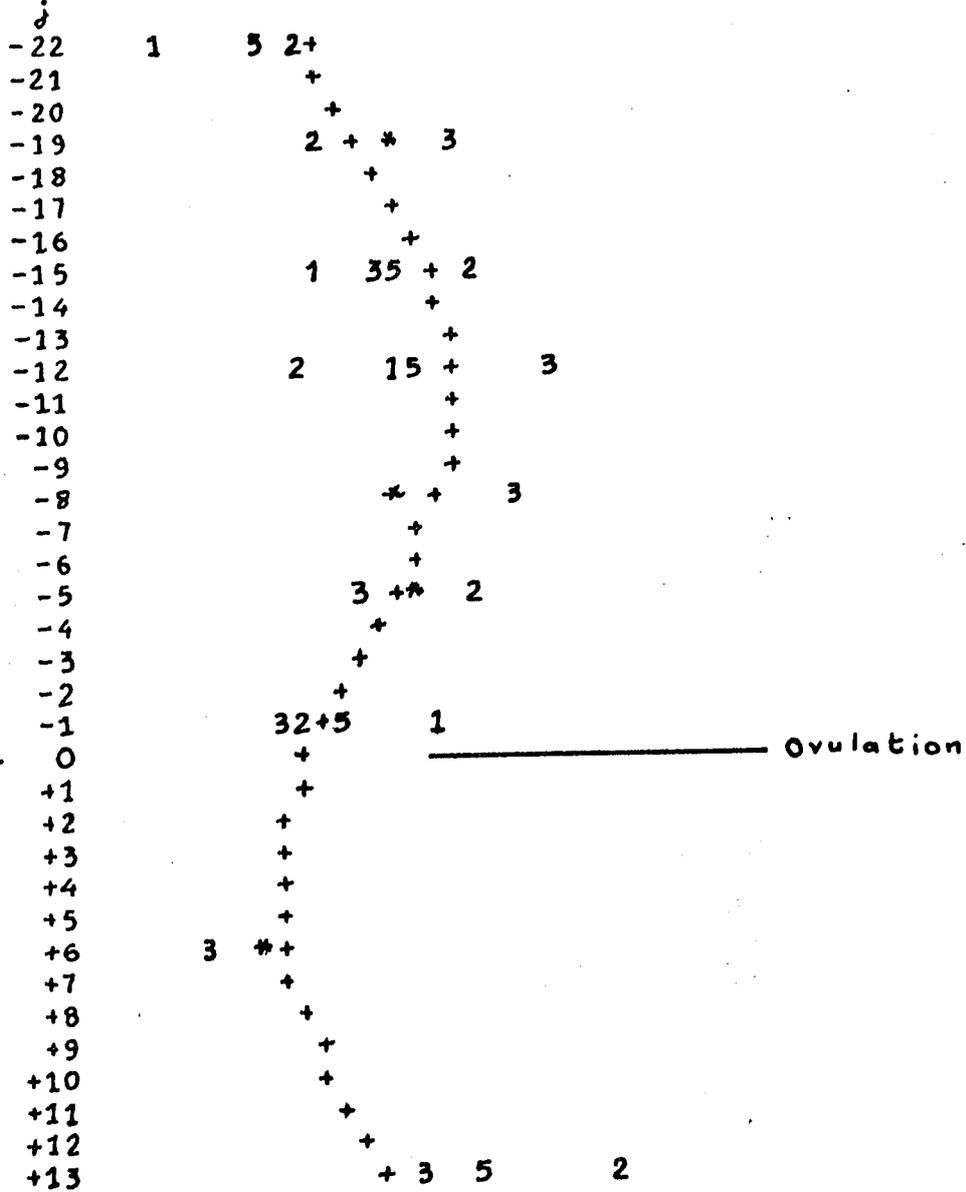


Figure 10

EVOLUTION RYTHMES TETA (4-8) P1 S2

$A0 = +1.036186' - 01$   
 $A1 = -2.540742' - 02$        $C = +3.987236' - 02$   
 $B1 = -3.072895' - 02$        $PHI = +1.984130' + 01$



Longueur du Cycle:  $LC = 31$  jours

$$"5" = \frac{"1" + "2" + "3"}{3}$$

"5" est la moyenne des 3 valeurs de  $R_{\theta}$  calculées un même jour. La sinusoïde (+) a été déterminée aux moindres carrés sur cette moyenne, en fixant la période à LC :

$$S(j) = A0 + C * \cos\left(2\pi \frac{j - PHI}{LC}\right)$$

Figure 11

## EXEMPLE NUMERIQUE DE LISSAGE

Un signal comportant de hautes fréquences nous étant donné en  $N = 128$  points sur  $T = 1$  seconde (points des figures 10 et 11 où on ne l'a représenté que sur une demi seconde), on lui a appliqué les deux procédés de lissage décrits au chapitre V.

1<sup>er</sup> procédé (voir § V-4-1). (LANCZOS)

On a calculé la D.F.T. du vecteur  $\vec{g}$ , annulé les termes correspondant à une fréquence supérieure à  $F = 20$  Hz et repris l'I.D.F.T. Le résultat est donné par les tirés de la figure 10.

Coût en  $N \log_2 N$ .

2<sup>ème</sup> procédé (voir § V-4-2)

On a déterminé les poids  $\alpha_s$  d'une formule à  $2p+1 = 5$  points en cherchant le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre  $\sigma_0$  de  $M$  pour  $F \cdot T = \frac{20}{128}$ .

On a obtenu :  $\sigma_0 = 0,9474$

$$\alpha_{-2} = \alpha_2 = 0,1473$$

$$\alpha_{-1} = \alpha_1 = 0,2249$$

$$\alpha_0 = 0,2557$$

puis on a remplacé chaque  $g_k$  par

$$g_k^* = \sum_{s=-2}^2 \alpha_s g_{k+s}$$

Le résultat est donné par les tirés de la figure 11.

Coût en  $(2p+1)N$ .

Lorsque  $N$  croît, le 2<sup>ème</sup> procédé est très vite beaucoup plus avantageux que le 1<sup>er</sup> pour des résultats tout-à-fait comparables.

PREMIER PROCÉDÉ DE

LISSAGE

Fréquence de Coupure : 20 Hz

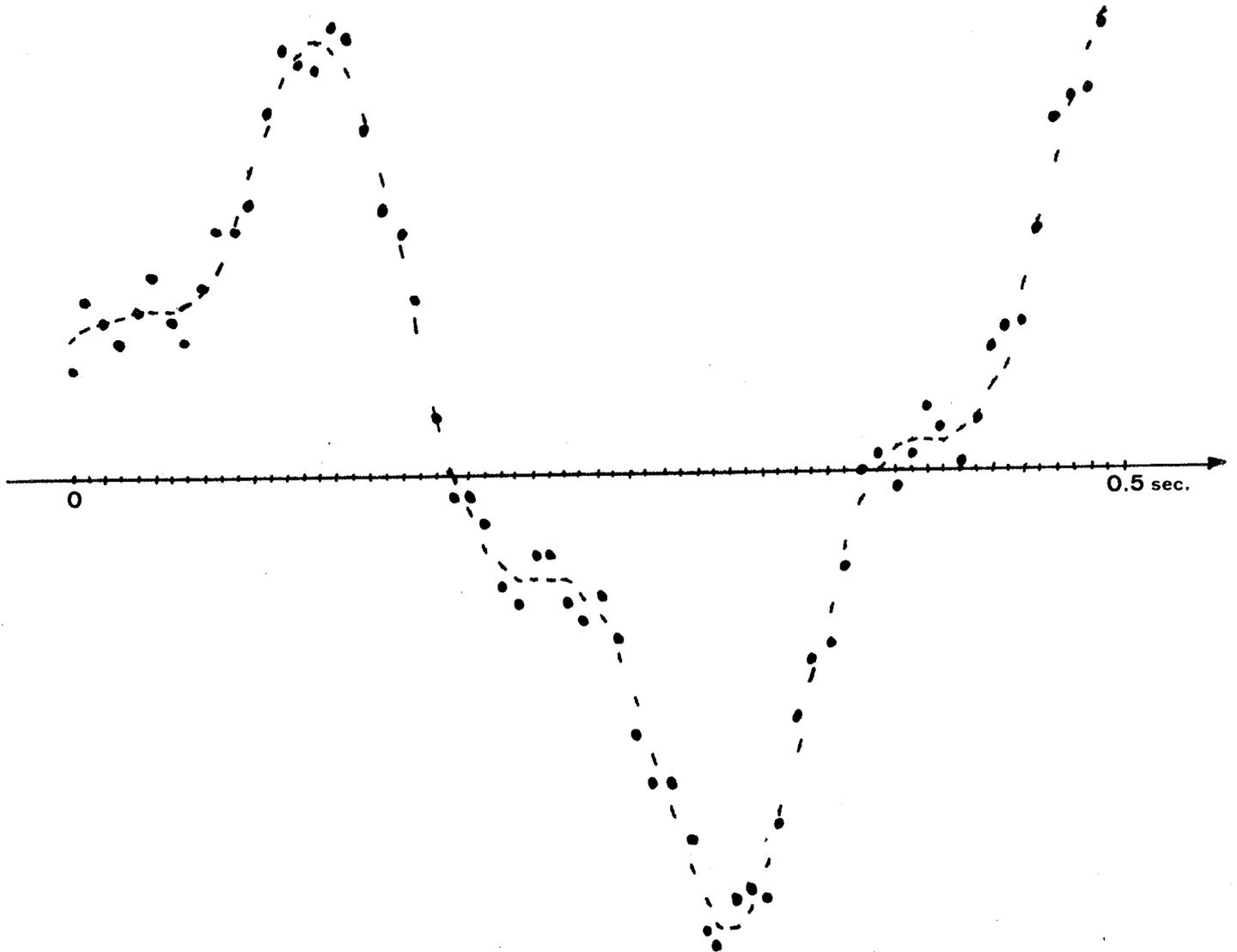


Figure 12

DEUXIEME PROCÉDÉ DE

LISSAGE

$$\frac{F.T}{N} = \frac{20}{128}$$

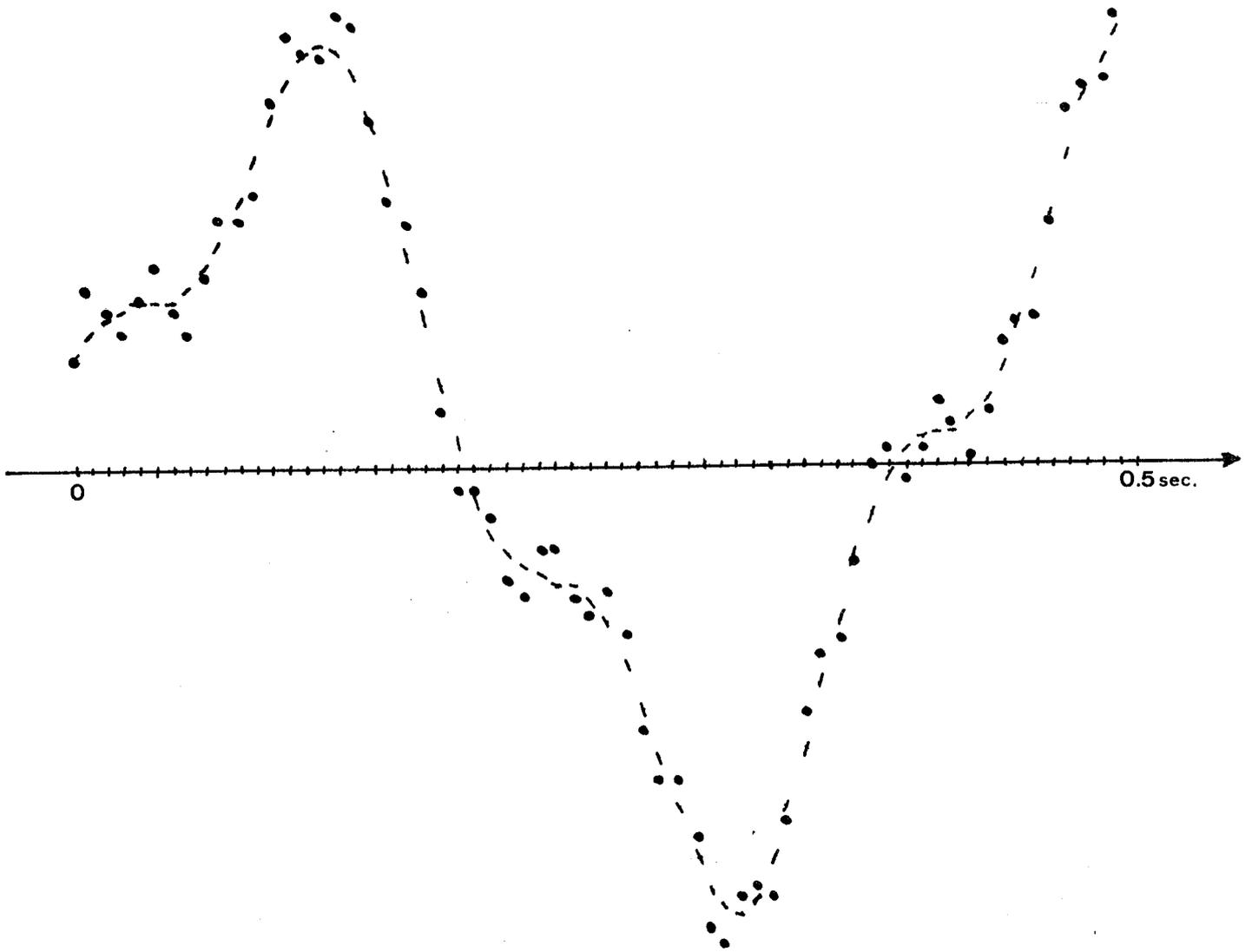


Figure 13

Si P est un vecteur à N composantes complexes (partie réelle PRE[k] ,  
partie imaginaire PIM[k] , k = 0, ..., N-1) ces deux procédures calculent

$$G_j^{\text{SIGNE}} = \text{COEF} \times \sum_{k=0}^{N-1} \text{EXP}(\text{SIGNE} \times 2i\pi \times j \times D \times k/N) \times P_k$$

avec

$$- \text{COEF} = \begin{cases} 1 & \text{si SIGNE} = 1 & \text{(I.D.F.T.)} \\ \frac{1}{N} & \text{si SIGNE} = -1 & \text{(D.F.T.)} \end{cases}$$

$$- P_k = \text{PRE}[k] + i \text{PIM}[k]$$

pour  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^M - 1$  dans le cas de CTG.

$j = -2^M, \dots, 2^M - 1$  dans le cas de CTGSYM.

On doit avoir  $D \times 2^M \leq N$ .

Les résultats  $G_j^{\text{SIGNE}}$  (complexes) sont rangés dans PRE et PIM pour  
 $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^M - 1$  dans le cas de CTG et  $j = -2^M, \dots, 2^M - 1$  dans le cas de  
CTGSYM.

Les tableaux PRE et PIM devront donc être déclarés avec les bornes  
[0 : N-1] dans le cas de CTG et [-2<sup>M</sup> : N-1] dans le cas de CTGSYM.

PROCEDURE C.T.G.

```
'PROCEDURE' CTG(PRE,PIM,N,M,D,SIGNE) ;
'VALUE' N,M ;
'INTEGER' N,M,D ;
'REAL' SIGNE ;
'ARRAY' PRE,PIM ;
```

```
'BEGIN'
'INTEGER' 'PROCEDURE' LM(P) ;
'INTEGER' P ;
'BEGIN'
  'INTEGER' I,J,K,L,P2,R ;
  R := P ;
  L := 0 ;
  P2 := PMM12 ;
  'FOR' I := 0 'STEP' .1 'UNTIL' M-1 'DO'
  'BEGIN'
    J := R/'2 ;
    K := R - J*2 ;
    L := L + K*P2 ;
    R := J ;
    P2 := P2/'2
  'END' I ;
  LM := L
'END' LM ;
```

Procédure LM  
commune à la  
Procédure CTGSYM

```
'INTEGER' I,J,K,L,H,P,Q,S,J1,J2,PK2,PM2,J1Q,J2Q,JK2,JPM2,PKM12,
PMMK2,PMM12,IPMMK2,NSD,ISI ;
'REAL' DEPI,X,CO,SI,COI,SII,COI1,SII1,COI1J,SII1J,SIIJ,C1,C2,VIHJ1,
COEF,MEM,COIJ,VIHJ2,V2HJ1,V2HJ2,VRR,VRI,WW1,WW2 ;
```

```
NSD := N/'D ;
PM2 := 2**M ;
PMM12 := PM2/'2 ;
Q := NSD/'PM2 ;
DEPI := 6.283185 ;
COEF := 'IF' SIGNE < 0.0
      'THEN' 1.0/N
      'ELSE' 1.0 ;
```

```
'BEGIN'
  'ARRAY' T(/1:2,0:PMM12-1/) ;
```

'COMMENT' INITIALISATION DE T ;

```
T(/1,0/) := COI1 := 1.0 ;
T(/2,0/) := SII1 := 0.0 ;
X := DEPI/PM2*SIGNE ;
CO := COS(X) ;
SI := SIN(X) ;
'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' PMM12 - 1 'DO'
'BEGIN'
  T(/2,I/) := SII := SII1*CO + COI1*SI ;
  T(/1,I/) := COI := COI1*CO - SII1*SI ;
  SII1 := SII
'END' I ;
```

Tronc commun  
à la procédure CTGSYM

'COMMENT' REORDONNANCEMENT NOUVELLE FORMULE DE PRE ET PIM ;

```
ISI := PM2 - 1 - 2**((M+1)/'2) ;
'IF' D = 1
'THEN' 'GOTO' REOR ;
'FOR' I := 0 'STEP' 1 'UNTIL' NSD - 1 'DO'
'BEGIN'
  WW1 := WW2 := 0.0 ;
  'FOR' J := 0 'STEP' NSD 'UNTIL' N - NSD 'DO'
  'BEGIN'
    WW1 := WW1 + PRE(/I+J/) ;
    WW2 := WW2 + PIM(/I+J/)
  'END' J ;
  PRE(/I/) := WW1 ;
  PIM(/I/) := WW2
'END' I ;
REOR : 'FOR' I := 0 'STEP' 1 'UNTIL' ISI 'DO'
'BEGIN'
  P := LM(1) ;
  'IF' P > 1
  'THEN' 'BEGIN'
    'FOR' J := 0 'STEP' 1 'UNTIL' Q - 1 'DO'
    'BEGIN'
      J1 := I*Q + J ;
      J2 := P*Q + J ;
      MEM := PRE(/J1/) ;
      PRE(/J1/) := PRE(/J2/) ;
      PRE(/J2/) := MEM ;
      MEM := PIM(/J1/) ;
      PIM(/J1/) := PIM(/J2/) ;
      PIM(/J2/) := MEM
    'END' J
  'END'
'END' I ;
```

Tronc Commun

à la procédure CTGSYM

(Suite)

'COMMENT' ALGORITHME ;

```
PK2 := 1 ;
PMNK2 := PMN2 ;
'FOR' K := 1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
'BEGIN'
  PKM12 := PK2 ;
  PK2 := PK2*2 ;
  PMNK2 := PMNK2/'2 ;
  IPMNK2 := 0 ;
  'FOR' I := 0 'STEP' 1 'UNTIL' PKM12 - 1 'DO'
  'BEGIN'
    C1 := T(/1, IPMNK2/) ;
    C2 := T(/2, IPMNK2/) ;
    JPK2 := 0 ;
    'FOR' J := 0 'STEP' 1 'UNTIL' PMNK2 - 1 'DO'
    'BEGIN'
      J1Q := (JPK2+1)*Q ;
      J2Q := J1Q + PKM12*Q ;
      'FOR' H := 0 'STEP' 1 'UNTIL' Q - 1 'DO'
      'BEGIN'
        V1HJ1 := PRE(/J1Q + H/) ;
        V1HJ2 := PRE(/J2Q + H/) ;
        V2HJ1 := PIM(/J1Q + H/) ;
        V2HJ2 := PIM(/J2Q + H/) ;
        VRR := C1*V1HJ2 - C2*V2HJ2 ;
        VRI := C2*V1HJ2 + C1*V2HJ2 ;
        PRE(/J1Q + H/) := V1HJ1 + VRR ;
        PRE(/J2Q + H/) := V1HJ1 - VRR ;
        PIM(/J1Q + H/) := V2HJ1 + VRI ;
        PIM(/J2Q + H/) := V2HJ1 - VRI
      'END' H ;
      JPK2 := JPK2 + PK2
    'END' J ;
    IPMNK2 := IPMNK2 + PMNK2
  'END' I
'END' K ;
```

Tronc commun

à la procédure CTGSYM

(fin)

```

X := DEPI/NSD*SIGNE ;
CO := COS(X) ;
SI := SIN(X) ;
CO1I := 1.0 ;
SI1I := 0.0 ;
'FOR' I := 0 'STEP' 1 'UNTIL' PM2 - 1 'DO'
'BEGIN'
  COI := CO1I ;
  SII := SI1I ;
  CO1IJ := 1.0 ;
  SI1IJ := WW1 := WW2 := 0.0 ;
  JPM2 := 0 ;
  'FOR' J := 0 'STEP' 1 'UNTIL' Q - 1 'DO'
  'BEGIN'
    COIJ := CO1IJ ;
    SIIJ := SI1IJ ;
    VRR := PRE(/I*Q + J/) ;
    VRI := PIM(/I*Q + J/) ;
    WW1 := WW1 + COIJ*VRR - SIIJ*VRI ;
    WW2 := WW2 + SIIJ*VRR + COIJ*VRI ;
    CO1IJ := COIJ*COI - SIIJ*SII ;
    SI1IJ := COIJ*SII + SIIJ*COI ;
    JPM2 := JPM2 + PM2
  'END' J ;
  CO1I := COI*CO - SII*SI ;
  SI1I := COI*SI + SII*CO ;
  PRE(/I/) := WW1*COEF ;
  PIM(/I/) := WW2*COEF
'END' I
'END'
'END' CTG ;

```

```
'PROCEDURE' CTGSYM(PRE,PIM,N,M,D,SIGNE) ;
'VALUE' N,M ;
'INTEGER' N,M,D ;
'REAL' SIGNE ;
'ARRAY' PRE,PIM ;
```

```
'BEGIN'
```

```
Procedure LM commune a la procedure CTG .
```

```
'INTEGER' I,J,K,L,H,P,Q,S,J1,J2,PK2,PM2,J1Q,J2Q,JK2,JPM2,PKM12,
PMMK2,PMM12,IPMMK2,NSD,ISI,IQ ;
```

```
'REAL' DEPI,X,CO,SI,COI,SII,COI1,SII1,COI1J,SII1J,SIIJ,C1,C2,V1HJ1,
Y,COY,SIY,COIP,SIIP,COEF,MEM,COIJ,V1HJ2,V2HJ1,V2HJ2,VRR,VRI,
WW1,WW2,COIJP,SIIJP,COI1JP,SII1JP,WW3,WW4 ;
```

```
Tronc commun a la procedure CTG .
```

```
X := DEPI/NSD*SIGNE ;
CO := COS(X) ;
SI := SIN(X) ;
COI1 := 1.0 ;
SII1 := 0.0 ;
Y := - DEPI/Q*SIGNE ;
COY := COS(Y) ;
SIY := SIN(Y) ;
'FOR' I := 0 'STEP' 1 'UNTIL' PM2 = 1 'DO'
'BEGIN'
COI := COI1 ;
SII := SII1 ;
COIP := COI*COY - SII*SIY ;
SIIP := COI*SIY + SII*COY ;
COI1J := COI1JP := 1.0 ;
SII1J := SII1JP := WW1 := WW2 := WW3 := WW4 := 0.0 ;
JPM2 := 0 ;
IQ := I*Q ;
'FOR' J := 0 'STEP' 1 'UNTIL' Q - 1 'DO'
'BEGIN'
COIJ := COI1J ;
SIIJ := SII1J ;
COIJP := COI1JP ;
SIIJP := SII1JP ;
VRR := PRE(/IQ + J/) ;
VRI := PIM(/IQ + J/) ;
WW3 := WW1 + COIJ*VRR - SIIJ*VRI ;
WW2 := WW2 + SIIJ*VRR + COIJ*VRI ;
```

```

WW3 := WW3 + COIJP*VRR - SIIJP*VRI ;
WW4 := WW4 + SIIJP*VRR + COIJP*VRI ;
COIJ := COI*COI - SII*SI ;
SIIJ := COI*SI + SII*CO ;
COIJP := COIJP*COIP - SIIJP*SIIP ;
SIIJP := COIJP*SIIP + SIIJP*COIP ;
JPM2 := JPM2 + PM2
'END' J ;
COI := COI*CO - SII*SI ;
SII := COI*SI + SII*CO ;
PRE(/I/) := WW1*COEF ;
PIM(/I/) := WW2*COEF ;
PRE(/I - PM2/) := WW3*COEF ;
PIM(/I - PM2/) := WW4*COEF
'END' I
'END'
'END' CTGSYM ;

```

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] SCHWARTZ L. Méthodes Mathématiques de la Physique.  
Cours HERMANN.
- [2] COOLEY J.W., TUKEY J.W. - An Algorithm for the machine calculation of  
complex Fourier Series.  
Math. Comput. 19 (Apr. 1965), pp. 297-301.
- [3] PEASE Marshall C. - An adaptation of the Fast Fourier Transform for  
Parallel Processing.  
Journal of the A.C.M. Vol. 15 n° 2 April 1968
- [4] BLACKMAN R.B., TUKEY J.W. - The measurement of power Spectra.  
DOVER N.Y.
- [5] LANCZOS C. Applied Analysis.  
Isaac PITMAN. Londres.
- [6] GAUTRAY J.P. Correlative study of E.E.G. quantitative analysis and  
urinary pattern during the human menstrual cycle.  
6ème Congrès mondial de Gynécologie et d'Obstétrique.  
New York 1970, Abstracts n° 482.
- GAUTRAY J.P. Variations d'E.E.G. au cours du cycle menstruel.  
A paraître dans la Revue Française de Gynécologie et  
d'Obstétrique.

VU

Grenoble, le...

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE