Etude théorique et numérique des équations primitives de l'océan sans viscosité

Antoine ROUSSEAU
Université Paris-Sud

Orsay, 14 juin 2005

Plan de l'exposé

1. Introduction des EP et position du problème

Plan de l'exposé

1. Introduction des EP et position du problème
2. Changement de modèle : les équations δ-primitives

Plan de l'exposé

1. Introduction des EP et position du problème
2. Changement de modèle : les équations δ-primitives
3. Changement de conditions aux limites : conditions transparentes

Plan de l'exposé

1. Introduction des EP et position du problème
2. Changement de modèle : les équations δ-primitives
3. Changement de conditions aux limites : conditions transparentes
4. Conclusions et perspectives

1 Introduction

Equations Primitives de l'océan et de l'atmosphère (sans viscosité) :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + f\,\mathbf{k}\times\mathbf{v} + \nabla\phi & = & 0,\\
\dfrac{\partial \phi}{\partial z} & = & -\rho\, g,\\
\nabla\cdot\mathbf{v} + \dfrac{\partial w}{\partial z} & = & 0,\\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta + w\dfrac{\partial \theta}{\partial z} & = & 0,\\
\rho & = & \rho(\theta),\\
\text{Conditions aux limites,} & & \\
\text{Conditions initiales.} & &
\end{array}\right.$$

Cadre de l'étude :

- **indépendance en** y.

Cadre de l'étude :

- **indépendance en** y.
- **linéarisation** des EP autour d'un écoulement stratifié à vitesse constante $\overline{U}_0 > 0$ dans la direction des x, et à densité linéaire en z, $d\overline{\rho}/dz = -\rho_0 N^2/g$.

Cadre de l'étude :
- **indépendance en** y.
- **linéarisation** des EP autour d'un écoulement stratifié à vitesse constante $\overline{U}_0 > 0$ dans la direction des x, et à densité linéaire en z, $d\overline{\rho}/dz = -\rho_0 N^2/g$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - f\,v + \phi_x + \overline{U}_0\,u_x &=& 0,\\ v_t + f\,u + \overline{U}_0\,v_x &=& 0,\\ \psi_t + N^2\,w + \overline{U}_0\,\psi_x &=& 0,\\ u_x + w_z &=& 0,\\ \psi = \phi_z &=& \dfrac{g\theta}{\theta_0}, \end{array}\right.$$

où $N = N(z)$ est la fréquence de Brunt-Väisälä (BV).

Décomposition en modes normaux en z (cf. Oliger & Sundström '78, Temam & Tribbia '03)

On procède par séparation des variables, et on cherche les inconnues sous la forme $u(x,z,t) = \mathcal{U}(z)\,\hat{u}(x,t)$, $v(x,z,t) = \mathcal{V}(z)\,\hat{v}(x,t)\ldots$, ce qui conduit aux modes normaux où $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \Phi = \mathcal{U}_n$, $\mathcal{W} = \Psi = \mathcal{W}_n$.

Décomposition en modes normaux en z (cf. Oliger & Sundström '78, Temam & Tribbia '03)

On procède par séparation des variables, et on cherche les inconnues sous la forme $u(x,z,t) = \mathcal{U}(z)\,\hat{u}(x,t)$, $v(x,z,t) = \mathcal{V}(z)\,\hat{v}(x,t)\ldots$, ce qui conduit aux modes normaux où $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \Phi = \mathcal{U}_n$, $\mathcal{W} = \Psi = \mathcal{W}_n$.

On développe ensuite en série des modes normaux :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}(x,z,t) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{U}_n(z) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \phi_n \end{pmatrix}(x,t), \text{ où } \mathcal{U}_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}}\cos(\frac{n\,\pi\,z}{H}),$$

$$\begin{pmatrix} w \\ \psi \end{pmatrix}(x,z,t) = \sum_{n\geq 1} \mathcal{W}_n(z) \begin{pmatrix} w_n \\ \psi_n \end{pmatrix}(x,t), \text{ où } \mathcal{W}_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}}\sin(\frac{n\,\pi\,z}{H}).$$

Chaque mode $(u_n, v_n, w_n, \phi_n, \psi_n)$ est solution du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n_t} + \overline{U}_0\, u_{n_x} + \phi_{n_x} - f\, v_n & = & 0, \\ v_{n_t} + \overline{U}_0\, v_{n_x} + f\, u_n & = & 0, \\ \psi_{n_t} + \overline{U}_0\, \psi_{n_x} + N^2\, w_n & = & 0, \\ u_{n_x} + N\, \lambda_n\, w_n & = & 0, \\ \psi_n & = & -N\, \lambda_n\, \phi_n \end{array}\right.$$

où $\lambda_n = n\,\pi/(N\,H)$.

On remplace respectivement w_n et ϕ_n par $-u_{n_x}/N\lambda_n$ et $-\psi_n/N\lambda_n$, pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n_t} + \overline{U}_0\, u_{n_x} - \dfrac{1}{N\,\lambda_n}\psi_{n_x} - f\, v_n & = & 0, \\ v_{n_t} + \overline{U}_0\, v_{n_x} + f\, u_n & = & 0, \\ \psi_{n_t} + \overline{U}_0\, \psi_{n_x} - \dfrac{N}{\lambda_n}\, u_{n_x} & = & 0. \end{array}\right.$$

où $\lambda_n = n\,\pi/(N\,H)$.

Si l'on diagonalise la partie du premier ordre, en posant $\xi_n = u_n - \psi_n/N$, $\eta_n = u_n + \psi_n/N$, on obtient pour $n \geq 1$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \xi_{n_t} & + & (\overline{U}_0 + \dfrac{1}{\lambda_n})\,\xi_{n_x} & - & f\,v_n & = & 0, \\ v_{n_t} & + & \overline{U}_0\,v_{n_x} & + & \dfrac{f}{2}\,(\xi_n + \eta_n) & = & 0, \\ \eta_{n_t} & + & (\overline{U}_0 - \dfrac{1}{\lambda_n})\,\eta_{n_x} & - & f\,v_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Si l'on diagonalise la partie du premier ordre, en posant $\xi_n = u_n - \psi_n/N$, $\eta_n = u_n + \psi_n/N$, on obtient pour $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \xi_{n_t} & + & (\overline{U}_0 + \dfrac{1}{\lambda_n})\, \xi_{n_x} & - & f\, v_n & = & 0, \\ v_{n_t} & + & \overline{U}_0\, v_{n_x} & + & \dfrac{f}{2}\,(\xi_n + \eta_n) & = & 0, \\ \eta_{n_t} & + & (\overline{U}_0 - \dfrac{1}{\lambda_n})\, \eta_{n_x} & - & f\, v_n & = & 0. \end{array} \right.$$

Valeurs caractéristiques du système : $\overline{U}_0 - 1/\lambda_n, \overline{U}_0, \overline{U}_0 + 1/\lambda_n$.

Le problème est donc **mal posé** pour tout jeu de conditions aux limites locales. En effet $\overline{U}_0 - 1/\lambda_n$ peut tour à tour être négatif ou positif, en fonction du mode considéré, de sorte que 3 ou 2 conditions aux limites sont requises en $x = 0$, et 0 ou 1 condition aux limites en $x = L$.

2 Changement de modèle : les équations δ-primitives [TeTr03]

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + f\,\mathbf{k}\times\mathbf{v} + \nabla\phi & = & 0,\\
\delta w + \dfrac{\partial \phi}{\partial z} & = & -\rho\, g,\\
\nabla\cdot\mathbf{v} + \dfrac{\partial w}{\partial z} & = & 0,\\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta + w\dfrac{\partial \theta}{\partial z} & = & 0,\\
\rho & = & \rho(\theta),\\
\text{Conditions aux limites,} & & \\
\text{Conditions initiales.} & &
\end{array}\right.$$

Théorème : Problème bien posé (Petcu & R.).

Antoine Rousseau

Après des calculs similaires, on trouve pour chaque mode :

$$\begin{cases} u_t + \overline{U}_0\, u_x - \dfrac{1}{N\lambda_n}\psi_x - \dfrac{\delta\, g}{N^2\,\lambda_n^2}\, u_{xx} - f\, v = 0, \\ v_t + \overline{U}_0\, v_x + f\, u = 0, \\ \psi_t + \overline{U}_0\, \psi_x - \dfrac{N}{\lambda_n}\, u_x = 0. \end{cases}$$

En variables (ξ, v, η) :

$$\begin{cases} \xi_t + \alpha\, \xi_x - \varepsilon(\xi_{xx} + \eta_{xx}) - f\, v = 0, \\ v_t + \overline{U}_0\, v_x + \dfrac{f}{2}(\xi + \eta) = 0, \\ \eta_t - \beta\, \eta_x - \varepsilon(\xi_{xx} + \eta_{xx}) - f\, v = 0, \end{cases}$$

où $\alpha = \overline{U}_0 + \dfrac{1}{\lambda_n}$, $\beta = -\overline{U}_0 + \dfrac{1}{\lambda_n}$, $\varepsilon = \dfrac{\delta\, g}{2\, N^2\, \lambda_n^2}$.

L'objectif de l'étude qui suit est de comprendre ce qui se passe lorsque, dans les systèmes décrits plus haut, on fait tendre δ - ou ε - vers 0. Pour cela on se placera dans le cas (non restrictif ici) où **la force de Coriolis est nulle**, i.e. $f = 0$.

L'objectif de l'étude qui suit est de comprendre ce qui se passe lorsque, dans les systèmes décrits plus haut, on fait tendre δ - ou ε - vers 0. Pour cela on se placera dans le cas (non restrictif ici) où **la force de Coriolis est nulle**, i.e. $f = 0$.

On étudiera donc les sytèmes suivants, dans le cas dit "sous-critique" où $\overline{U}_0 - 1/\lambda_n < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t^\varepsilon + \overline{U}_0 \, u_x^\varepsilon - \dfrac{1}{N\lambda_n}\psi_x^\varepsilon - 2\,\varepsilon\, u_{xx}^\varepsilon & = & 0, \\ \psi_t^\varepsilon + \overline{U}_0 \, \psi_x^\varepsilon - \dfrac{N}{\lambda_n}\, u_x^\varepsilon & = & 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi_t^\varepsilon + \alpha\, \xi_x^\varepsilon - \varepsilon(\xi_{xx}^\varepsilon + \eta_{xx}^\varepsilon) & = & 0, \\ \eta_t^\varepsilon - \beta\, \eta_x^\varepsilon - \varepsilon(\xi_{xx}^\varepsilon + \eta_{xx}^\varepsilon) & = & 0. \end{array} \right.$$

On s'intéresse ainsi au système

$$\left\{\begin{array}{l}\xi_t + \alpha\, \xi_x - \varepsilon(\xi_{xx} + \eta_{xx}) = 0,\\ \eta_t - \beta\, \eta_x - \varepsilon(\xi_{xx} + \eta_{xx}) = 0.\end{array}\right.$$

On vérifie que ce système est bien posé avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{r}\xi(0,t) = \eta(0,t) = 0,\\ (\xi + \eta)(L,t) = 0.\end{array}\right.$$

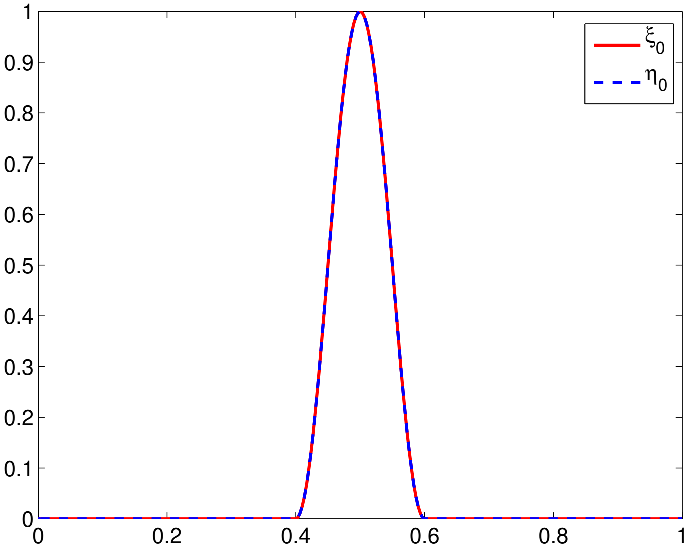
On s'intéresse ainsi au système

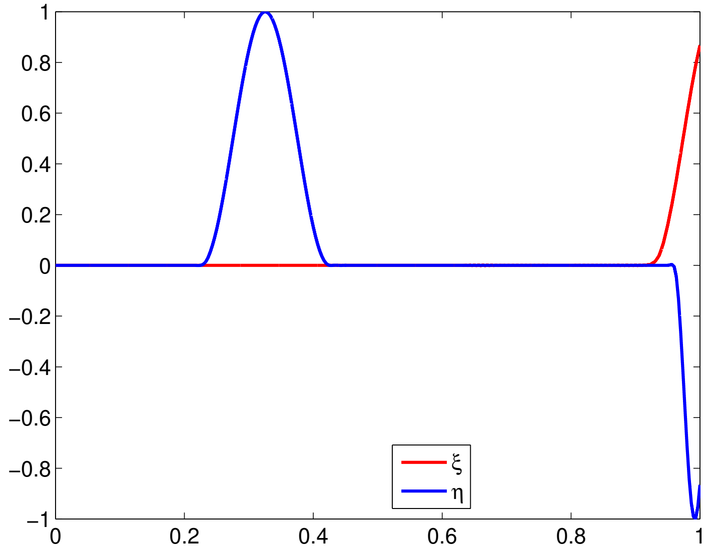
$$\left\{\begin{aligned} \xi_t + \alpha\,\xi_x - \varepsilon(\xi_{xx} + \eta_{xx}) = 0, \\ \eta_t - \beta\,\eta_x - \varepsilon(\xi_{xx} + \eta_{xx}) = 0. \end{aligned}\right.$$

On vérifie que ce système est bien posé avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \xi(0,t) = \eta(0,t) = 0, \\ (\xi + \eta)(L,t) = 0. \end{aligned}\right.$$

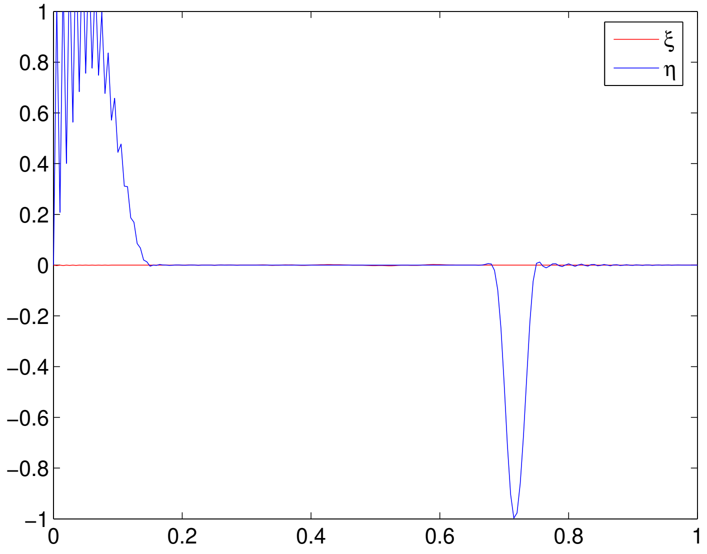
Problème : $(\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon) \longrightarrow ??$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$???

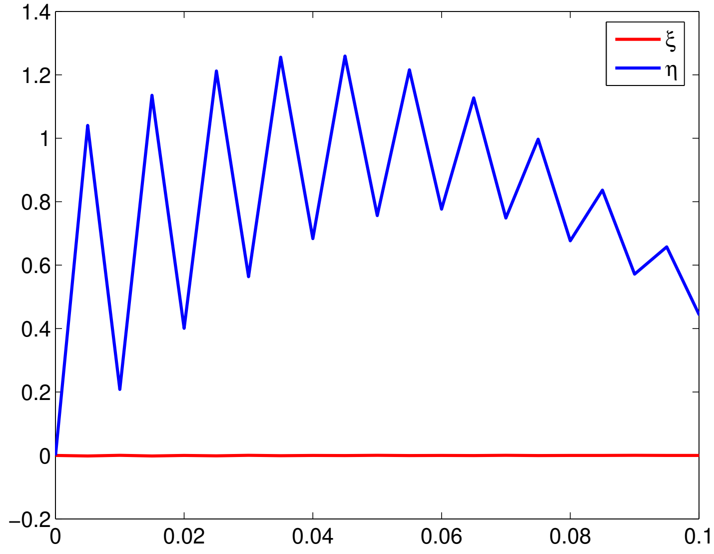

ξ_0
η_0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


ξ
η
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

$$\begin{cases} \xi^\varepsilon_t + \alpha\,\xi^\varepsilon_x - \varepsilon(\xi^\varepsilon_{xx} + \eta^\varepsilon_{xx}) = 0, \\ \eta^\varepsilon_t - \beta\,\eta^\varepsilon_x - \varepsilon(\xi^\varepsilon_{xx} + \eta^\varepsilon_{xx}) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi^0_t + \alpha\,\xi^0_x = 0, \\ \eta^0_t - \beta\,\eta^0_x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi^\varepsilon(0,t) = \eta^\varepsilon(0,t) = 0, \\ (\xi^\varepsilon + \eta^\varepsilon)(L,t) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} ?? \\ (\xi^0 + \eta^0)(L,t) = 0. \end{cases}$$


ξ
η
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


ξ
η
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1

Principe de la méthode des correcteurs

Classiquement on recherche la solution approchée dans un espace engendré par des fonctions classiques (EF P1 par exemple) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi_h(x,t) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{M} a_j(t)\,\varphi_j(x), \\ \eta_h(x,t) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{M} b_j(t)\,\varphi_j(x). \end{array}\right.$$

Principe de la méthode des correcteurs

Classiquement on recherche la solution approchée dans un espace engendré par des fonctions classiques (EF P1 par exemple) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi_h(x,t) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{M} a_j(t)\,\varphi_j(x), \\ \eta_h(x,t) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{M} b_j(t)\,\varphi_j(x). \end{array}\right.$$

Idée : Ajouter aux fonctions de base traditionnelles une fonction qui va capter le phénomène de couche limite.

Dans la méthode proposée, on ajoute un élément φ_0 “bien choisi” dans la base EF et on cherche donc la solution sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi_h(x,t) & = & a_0(t)\,\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{M} a_j(t)\,\varphi_j(x), \\ \eta_h(x,t) & = & b_0(t)\,\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{M} b_j(t)\,\varphi_j(x). \end{array} \right.$$

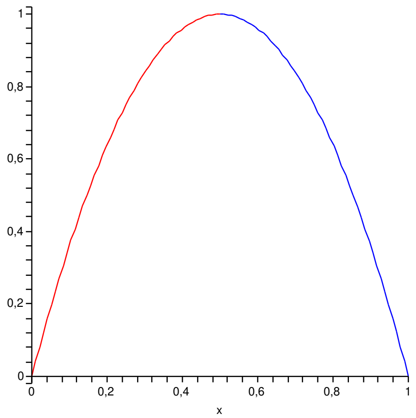
Dans la méthode proposée, on ajoute un élément φ_0 "bien choisi" dans la base EF et on cherche donc la solution sous la forme :

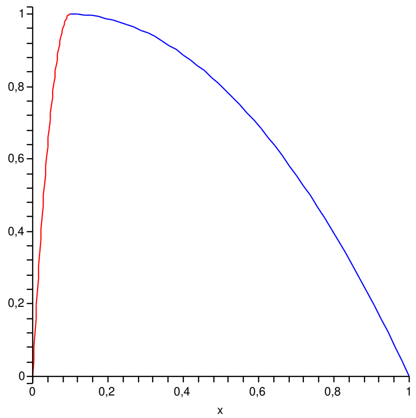
$$\left\{\begin{array}{rcl} \xi_h(x,t) & = & a_0(t)\,\varphi_0(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} a_j(t)\,\varphi_j(x), \\ \eta_h(x,t) & = & b_0(t)\,\varphi_0(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M} b_j(t)\,\varphi_j(x). \end{array}\right.$$

Problème : Le bon choix du correcteur ne peut se faire qu'en connaissance des conditions aux limites du système limite !!!

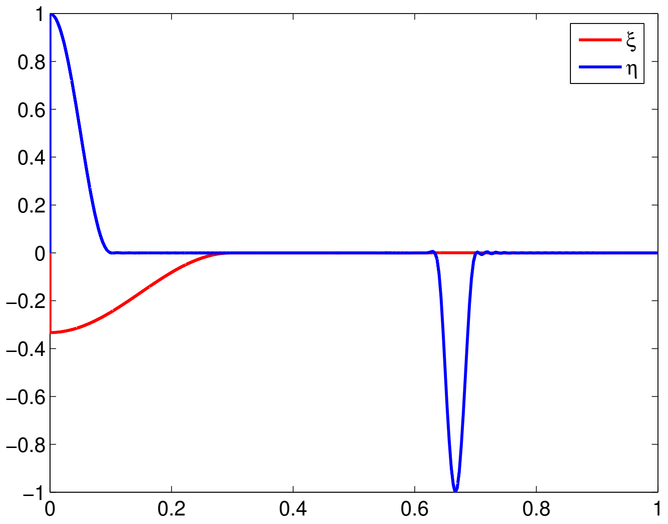
R. Temam, J. Tribbia & A.R : construction d'un correcteur empirique $\tilde{\varphi}_0$ tel que :

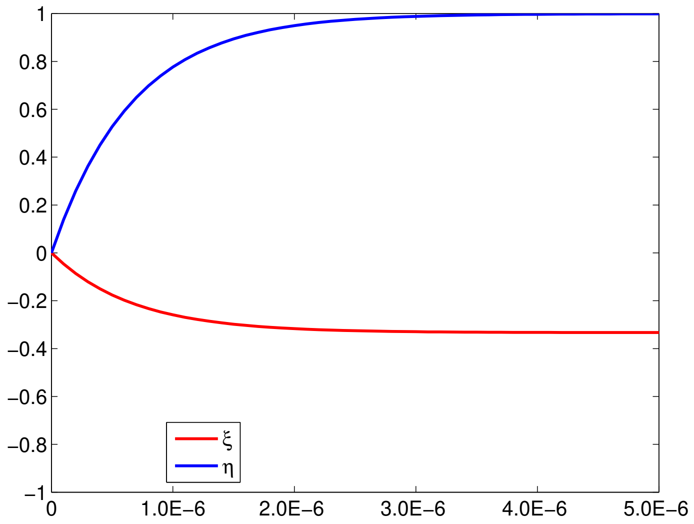
$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_0(0) = \varphi_0(L) = 0, \\ \tilde{\varphi}_0(\nu) = 1, \\ \tilde{\varphi}_0{}'(\nu) = 0. \end{cases}$$





Calculs avec $\tilde{\varphi}_0$, 100 points et $\varepsilon = 10^{-6}$:





Antoine Rousseau

$$\begin{cases} \xi^\varepsilon_t + \alpha\,\xi^\varepsilon_x - \varepsilon(\xi^\varepsilon_{xx} + \eta^\varepsilon_{xx}) & = & 0, \\ \eta^\varepsilon_t - \beta\,\eta^\varepsilon_x - \varepsilon(\xi^\varepsilon_{xx} + \eta^\varepsilon_{xx}) & = & 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi^0_t + \alpha\,\xi^0_x & = & 0, \\ \eta^0_t - \beta\,\eta^0_x & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi^\varepsilon(0,t) = \eta^\varepsilon(0,t) = 0, \\ (\xi^\varepsilon + \eta^\varepsilon)(L,t) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (\xi^0 + \frac{\beta}{\alpha}\,\eta^0)(0,t) & = & 0, \\ (\xi^0 + \eta^0)(L,t) & = & 0. \end{cases}$$

A partir de ces conditions aux limites trouvées empiriquement (numériquement), on procède aux trois étapes théoriques suivantes (R.-Temam-Tribbia) :

1. Preuve du caractère bien posé du nouveau système limite.

A partir de ces conditions aux limites trouvées empiriquement (numériquement), on procède aux trois étapes théoriques suivantes (R.-Temam-Tribbia) :

1. Preuve du caractère bien posé du nouveau système limite.

2. Calcul du "bon" correcteur $\varphi_0(x) = e^{-r\,x/\varepsilon}$ avec $r = \alpha\,\beta\,/\,(\alpha+\beta)$, qui permettra d'améliorer les résultats numériques.

A partir de ces conditions aux limites trouvées empiriquement (numériquement), on procède aux trois étapes théoriques suivantes (R.-Temam-Tribbia) :

1. Preuve du caractère bien posé du nouveau système limite.

2. Calcul du “bon” correcteur $\varphi_0(x) = e^{-r\,x/\varepsilon}$ avec $r = \alpha\,\beta\,/\,(\alpha + \beta)$, qui permettra d'améliorer les résultats numériques.

3. Toujours grâce à ce correcteur, prouver la convergence de $(\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ vers (ξ^0, η^0) lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

3 Changement de conditions aux limites

Retour aux équations d'origine :

$$\begin{cases} u_t - f\,v + \phi_x + \overline{U}_0\,u_x &= 0, \\ v_t + f\,u + \overline{U}_0\,v_x &= 0, \\ \theta_t + N^2 \dfrac{\theta_0}{g}\,w + \overline{U}_0\,\theta_x &= 0, \\ u_x + w_z &= 0, \\ \phi_z &= \dfrac{g\theta}{\theta_0}, \end{cases}$$

On prescrit l'information mode par mode, là où elle est requise :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \xi_{n_t} & + & (\overline{U}_0 + \dfrac{1}{\lambda_n})\,\xi_{n_x} & - & f\,v_n & = & 0, \\ v_{n_t} & + & \overline{U}_0\,v_{n_x} & + & \dfrac{f}{2}\,(\xi_n + \eta_n) & = & 0, \\ \eta_{n_t} & + & (\overline{U}_0 - \dfrac{1}{\lambda_n})\,\eta_{n_x} & - & f\,v_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Si $n \le n_c$, $\left\{\begin{array}{rcl} \xi_n(0) & = & 0, \\ v_n(0) & = & 0, \\ \eta_n(L) & = & 0. \end{array}\right.$ Si $n > n_c$, $\left\{\begin{array}{rcl} \xi_n(0) & = & 0, \\ v_n(0) & = & 0, \\ \eta_n(0) & = & 0. \end{array}\right.$

Antoine Rousseau

3.1 Cadre fonctionnel

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + A\,U = f, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Pour chaque $U = (u, v, \psi) \in D(A)$, AU est défini par :

$$AU = \begin{pmatrix} \overline{U}_0\, u_x - f\, v - \displaystyle\int_z^0 \psi_x(x, z')\, dz' \\ \overline{U}_0\, v_x + f\, u \\ \overline{U}_0\, \psi_x + N^2\, w \end{pmatrix}$$

où

$$D(A) = \left\{ U = (u, v, \psi) \in L^2(\mathcal{M}) \;/\; \left| \begin{array}{l} (u_x, v_x, \psi_x) \in L^2(\mathcal{M}) \\ (u, v, \psi) \text{ vérifient les C.L.} \end{array} \right. \right\}.$$

Conditions aux limites :

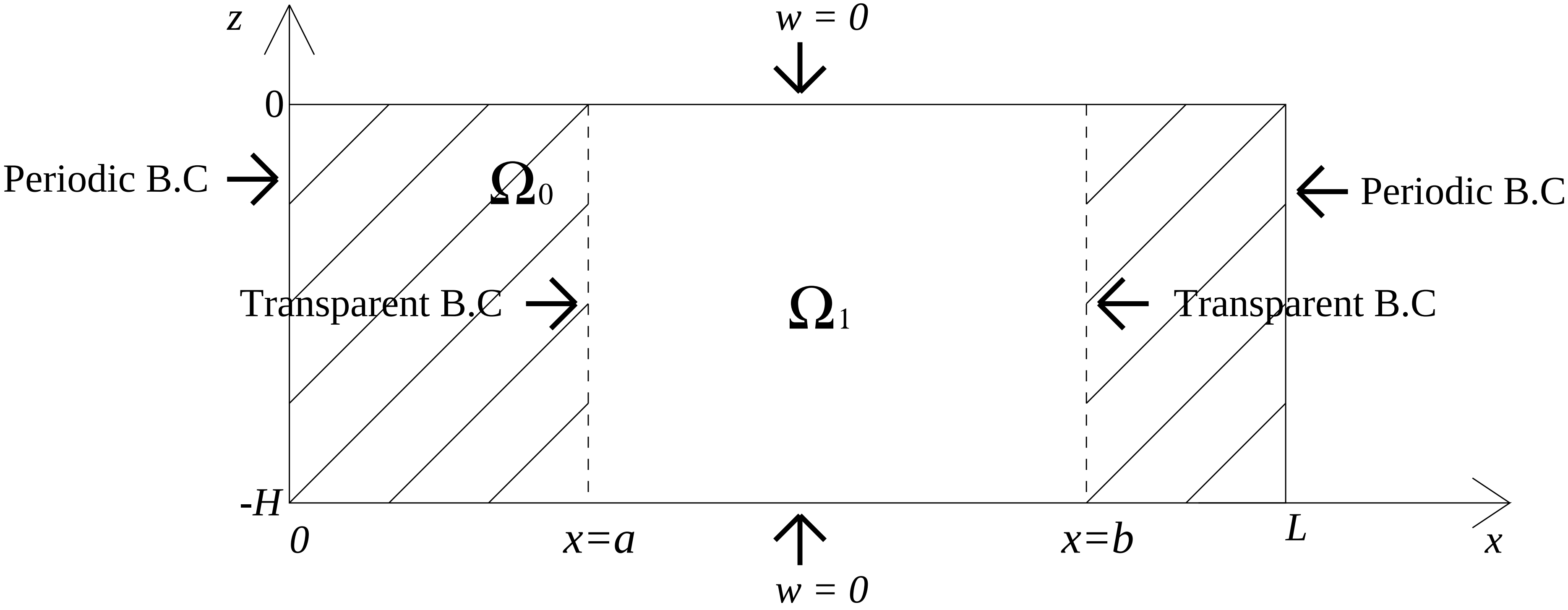
$$\text{Si } n \leq n_c, \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-H}^{0} u(0,z)\,\mathcal{U}_n(z)\,dz - \frac{1}{N}\int_{-H}^{0} \psi(0,z)\,\mathcal{W}_n(z)\,dz = 0, \\ \displaystyle\int_{-H}^{0} v(0,z)\,\mathcal{U}_n(z)\,dz = 0, \\ \displaystyle\int_{-H}^{0} u(L,z)\,\mathcal{U}_n(z)\,dz + \frac{1}{N}\int_{-H}^{0} \psi(L,z)\,\mathcal{W}_n(z)\,dz = 0, \end{cases}$$

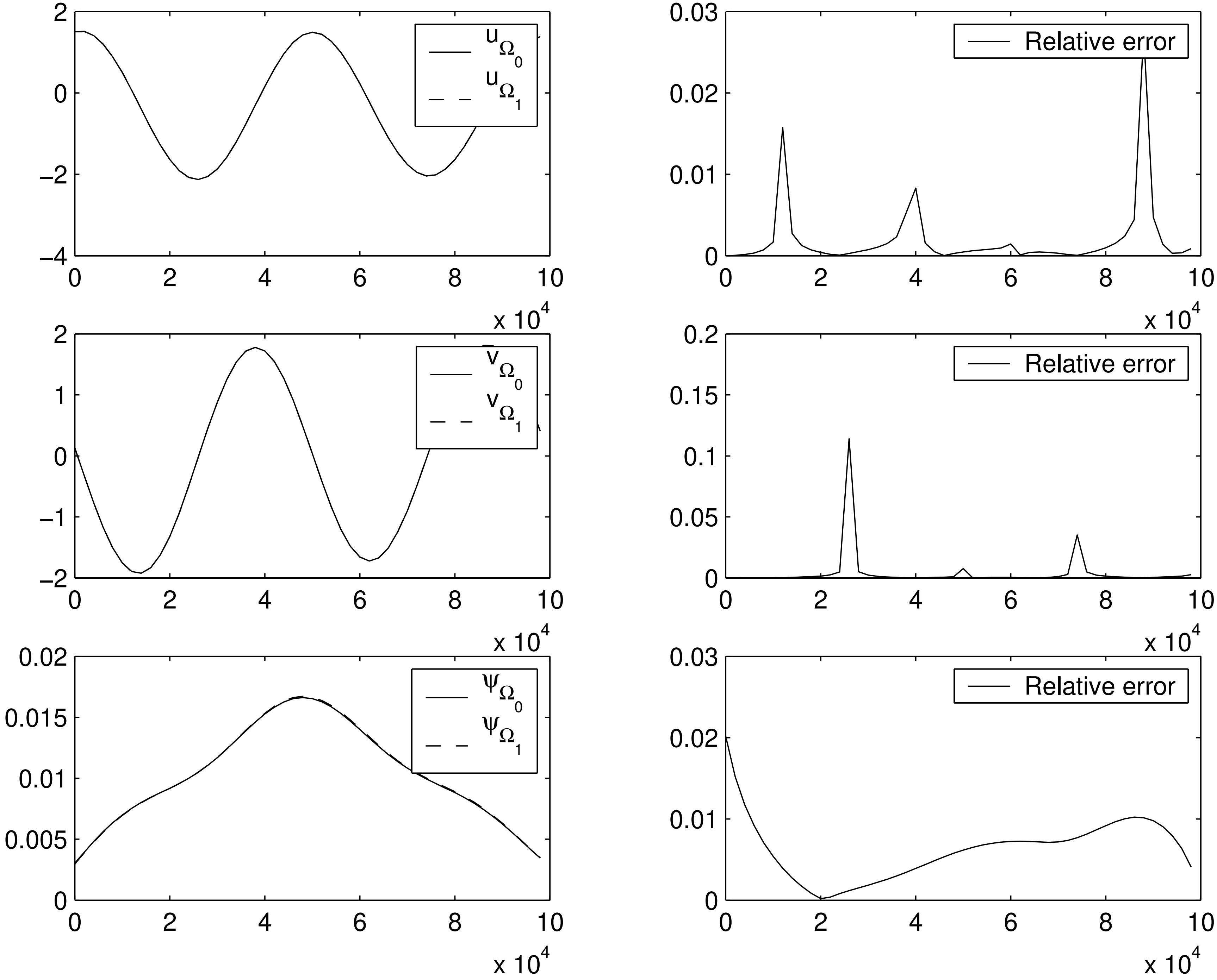
$$\text{Si } n > n_c, \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-H}^{0} u(0,z)\,\mathcal{U}_n(z)\,dz = 0, \\ \displaystyle\int_{-H}^{0} v(0,z)\,\mathcal{U}_n(z)\,dz = 0, \\ \displaystyle\int_{-H}^{0} \psi(0,z)\,\mathcal{W}_n(z)\,dz = 0, \end{cases}$$

Théorème (R.-Temam-Tribbia) :
Les équations primitives 2D, linéaires, sont bien posées avec ces conditions aux limites.

<u>Théorème</u> (R.-Temam-Tribbia) :
Les équations primitives 2D, linéaires, sont bien posées avec ces conditions aux limites.

3.2 Simulations Numériques





u_{Ω_0}
u_{Ω_1}
Relative error
v_{Ω_0}
v_{Ω_1}
Relative error
ψ_{Ω_0}
ψ_{Ω_1}
Relative error
x 10^4

4 Conclusion & perspectives

- Avec les δ-EPs, résultat inattendu dans le cadre des conditions de type Dirichlet pour un problème *a priori* très simple...

- Pour les EP avec des conditions aux limites transparentes, les résultats sont plus satisfaisants (linéaire et non linéaire).

4 Conclusion & perspectives

- Avec les δ-EPs, résultat inattendu dans le cadre des conditions de type Dirichlet pour un problème *a priori* très simple...

- Pour les EP avec des conditions aux limites transparentes, les résultats sont plus satisfaisants (linéaire et non linéaire).

- Comment adapter les résultats théoriques du linéarisé aux EP non linéaires ?

- Passer au 3D.