



HAL
open science

Sur la commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret

Badis Djeridane

► **To cite this version:**

Badis Djeridane. Sur la commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. Français. NNT: . tel-00009518

HAL Id: tel-00009518

<https://theses.hal.science/tel-00009518>

Submitted on 17 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Préparée au
**Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes
du CNRS**

En vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité: **Systèmes Automatiques**

Par
Badis DJERIDANE

Ingénieur en automatique

**Sur la Commandabilité des Systèmes
Non linéaires à Temps Discret**

Soutenance le 16 juin 2004 devant le jury

Rapporteurs: **C.H. MOOG**
 F. BOUDJEMA

Examineurs: **Ph. MOUYON**
 J. BERNUSSOU

Directeur de thèse: **J.L. CALVET**

Remerciements

Ce mémoire présente les travaux que j'ai effectués au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS, au sein du groupe Méthodes et Algorithmes de Commande (MAC).

Je remercie Monsieur Malik Ghallab, directeur du LAAS, de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je remercie tiens à remercier Mademoiselle Sophie Tarbouriech, Responsable du groupe MAC, pour m'avoir laissé faire mes travaux de recherche au sein de son groupe.

Je tiens également à exprimer ma gratitude a Monsieur Jacques Bernussou, Directeur de recherche au CNRS (LAAS), qui m'a fait l'honneur de présider ce jury de thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Claude Moog, Directeur de recherche au CNRS (IRRCyN), pour ces précieuses suggestions et commentaires tout le long de la phase de rédaction, ainsi que pour ces nombreuses explications qui ont été très utile pour appréhender le problème.

Je remercie vivement Monsieur Philippe Mouyon, professeur à SupAero, d'avoir accepter d'être mon examinateur de ma thèse ainsi que de m'avoir fait découvrir les systèmes non linéaires dans son cours de DEA.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Farès Boudjema, professeur à Ecole Polytechnique d'Alger, d'avoir accepter d'être mon rapporteur et pour m'avoir transmis son intérêt pour l'automatique.

Un grand merci, à mon directeur de thèse Jean-Louis Calvet. Il m'a inlassablement guidé et conseillé avec enthousiasme. Son soutien constant et la confiance qu'il m'a toujours témoigné sont à l'origine de ce travail.

J'exprime mes remerciements chaleureux à mes compagnons des enseignements Fred et Patrice. Et je remercie également tout les membres du groupe MAC qui ont contribué à rendre cette période la plus agréable possible. Sans oublier Christophe, avec qui j'ai eu le plaisir de partager le bureau et Luc pour son humour.

Je remercie également tout mes amis pour leurs amitié, Anouar pour ces précieuses conseils en informatique, Abdel-Hakim pour ces longues discussions, sans oublier Abdel-Ali et Mohamed pour leurs amitiés fidèles et j'adresse une pensé particulière a Hamid Demmou et Abd-El-Kader Sahraoui.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes parents, je souhaite leurs adresser un remer-

ciement spécial : votre confiance, vos encouragements , vos Douaa, et votre soutien m'ont permis d'avancer, non seulement durant les années de mes études, mais bien depuis que je suis né. Merci à mon épouse pour son écoute, la patience et le support m'ont plus d'une fois fait du bien. Je remercie également mon frère yassine pour son amitié et son humour.

Contents

I	Positionnement du sujet	11
I.1	Introduction	12
I.2	Motivations	12
I.2.1	Commande optimale en boucle fermée de système non linéaires à temps discret	12
I.2.1.1	Méthode de programmation dynamique	12
I.2.1.1.1	Formulation standard	13
I.2.1.1.2	Une autre formulation	13
I.3	Formulation du problème d'inversibilité	16
I.3.1	Inversibilité entrée-état	16
I.3.2	Inversibilité entrée-sortie	18
I.4	Présentation du plan	19
II	Accessibilité des systèmes à temps discret	21
II.1	Introduction	23
II.2	Définitions	23
II.2.1	Accessibilité	24
II.2.2	Commandabilité	24
II.3	Approche composition de fonctions	25
II.3.1	Définitions	25
II.3.2	Critère d'accessibilité	26
II.3.3	Cas linéaire	26
II.3.4	Un exemple non linéaire	27
II.4	Approche algèbre différentielle	28
II.4.1	Définitions	28
II.4.2	Critère d'accessibilité	31
II.4.3	Un exemple linéaire	32
II.4.4	Un exemple non linéaire	34
II.5	Approche géométrie différentielle	35
II.5.1	Quelques définitions	36
II.5.2	Construction d'une distribution	37
II.5.3	Critère d'accessibilité	39
II.5.4	Système linéaire	39
II.5.5	Un exemple non linéaire	40
II.6	Approche du principe du maximum	41
II.6.1	Définitions	41
II.6.1.1	Bordure du domaine de commandabilité	41

II.6.1.2	Propriété du domaine de commandabilité	41
II.6.2	Critère de commandabilité	44
II.6.3	Système linéaire	47
II.6.4	Système bilinéaire	48
II.6.5	Un exemple non linéaire	53
II.6.6	Lien avec l'approche composition de fonctions	54
II.7	Accessibilité des systèmes à temps discret sous contraintes	55
II.7.1	Introduction	55
II.7.2	Accessibilité de systèmes linéaires discrets	56
II.7.3	Accessibilité de systèmes non linéaires discrets	57
II.8	Conclusion	58
III	Inversion entrée-état	61
III.1	Introduction	62
III.2	Composition de fonction	63
III.2.1	Linéarisation jacobienne	63
III.2.2	Approche optimisation non linéaire	65
III.2.2.1	Formulation du problème d'optimisation	65
III.2.2.2	Résolution du problème	65
III.2.3	Approche algébrique	67
III.3	Linéarisation entrée-état	72
III.3.1	Approche géométrie différentielle	73
III.3.1.1	Méthode de Jayarman	73
III.3.1.1.1	Systèmes mono-entrée	73
III.3.1.1.2	Systèmes multi-entrée	77
III.3.1.2	Une autre méthode	79
III.3.1.2.1	Systèmes mono-entrée	79
III.3.1.2.2	Systèmes multi-entrée	86
III.3.2	Approche algèbre différentielle	91
III.4	Conclusion	95
IV	Autre application	97
IV.1	Introduction	98
IV.2	Modèle économique de Goodwin	98
IV.2.1	Etude de l'accessibilité du système	99
IV.3	Muscle stimulé électriquement	100
IV.3.1	Etude de l'accessibilité du système	103
IV.3.2	Inversion du système	103
IV.3.3	Optimisation par programmation dynamique	106
IV.4	Conclusion	111
	Références bibliographiques	117

List of Figures

II.1	Définition du champ de vecteur $V_u(x)$	38
II.2	Définition du champ de vecteur $Ad_0^3 V_u(x)$	38
II.3	Ensemble A non convexe	44
III.1	Matrice de transition entre états	65
III.2	Matrice de transition entre etats	67
IV.1	Modèle d'un muscle stimulé électriquement	101
IV.2	Variation du bras de levier de la force en fonction de l'angle d'articulaire	101
IV.3	Structure de la matrice des coûts de transition d'état	110
IV.4	Loi de commande optimale	110

Introduction générale

La programmation dynamique constitue avec le calcul des variations, l'une des approches essentielles pour la résolution de problèmes de commande optimale. L'approche programmation dynamique consiste à immerger un problème particulier de commande dans une famille plus grande de problème caractérisée par certains paramètres. En appliquant le principe d'optimalité, on obtient une récurrence fondamentale qui relie cette famille de problèmes. On considèrera dans ce mémoire une expression particulière de l'équation fonctionnelle, une approche dite généralisée. Cette approche basée sur une reformulation du principe d'optimalité, consiste à éliminer de façon explicite la présence de la commande dans l'équation fonctionnelle. La formulation de l'approche généralisée de la programmation dynamique admet implicitement que la fonction d'évolution possède une inverse par rapport à la commande. Cette condition est naturellement très dure et l'on propose de la relaxer par une condition d'inversion en p étapes, propriété qui s'accorde avec la propriété de commandabilité. Nous proposons ainsi de rechercher une solution du problème non pas en une étape mais en un nombre fini d'étapes. On parlera alors d'inversion généralisée en p étapes, où p correspond à l'indice de commandabilité du système.

Le travail effectué dans le cadre de la thèse a pour objectif l'étude de ce problème d'inversion entrée-état, problème qui peut être vu comme un problème de commandabilité. L'objectif concerne pour un système non linéaire à temps discret la synthèse d'une séquence de commandes assurant le transfert d'un état initial vers un état final donné.

Pour les systèmes linéaires, ce problème renvoie au problème de commandabilité étudié par Kalman, qui peut être aisément résolu à partir d'un calcul de pseudo-inverse. Pour des systèmes non linéaires, il peut apparaître alors très naturel de faire appel aux techniques de linéarisation.

Une première approche est de type linéarisation de Taylor. On obtient ainsi un système linéaire pour lequel le problème d'inversion devient trivial. Cette approche de linéarisation n'est cependant pas toujours satisfaisante ; il existe en effet des systèmes non linéaires commandables dont la linéarisation approchée n'est pas commandable. Cela provient du fait que cette méthode détruit une partie de la structure du système.

Dans le cadre de la géométrie différentielle, la linéarisation exacte a été étudiée par plusieurs auteurs. Les transformations utilisées le plus souvent sont des changements de coordonnées dans l'espace d'état et des bouclages réguliers de l'action de commande. La géométrie différentielle fournit un cadre d'étude adéquat pour la linéarisation exacte. En temps continu, la distribution des champs de vecteurs liés à des variations infinitésimales du temps est obtenue à partir de l'algèbre de Lie. Ceci est impossible en temps discret où la période d'échantillonnage est fixée. Ce sont les variations des commandes qui vont

jouer pour les systèmes à temps discret le rôle du temps en continu pour la construction des champs de vecteurs.

Dans le cadre de l'approche algébrique-différentielle de l'automatique non linéaire, la notion de platitude propose une approche plus générale au problème de linéarisation basée sur la recherche d'une fonction de sortie linéarisante. En général les sorties linéarisantes peuvent dépendre non seulement de l'état du système, mais aussi des entrées et d'un nombre fini de leurs dérivées. Il s'avère que de nombreux systèmes physiques possèdent cette propriété de platitude. Dans le même cadre, Aranda-Bricaire et al. ont aussi traité le problème de linéarisation exacte en utilisant les notions de systèmes différentiels extérieurs ; l'utilisation de 1-formes fournissant un outil bien adapté pour unifier l'étude des systèmes en temps continu et des systèmes en temps discret.

De manière générale toutefois, l'application de ces techniques de linéarisation s'adresse à une classe de systèmes non linéaires relativement limitée. On peut reprocher aussi à ces méthodes de faire appel à des concepts avancés en mathématiques tels que l'algèbre différentielle ou encore la géométrie différentielle, qui sont d'utilisation assez difficile.

On peut aussi envisager des techniques plus calculatoires pour obtenir une inversion entrée-état du système, en utilisant la fonction de composition par exemple. Dans cette approche du problème, on peut essayer de résoudre le problème d'inversion par le biais de la commande optimale. Cela peut être réalisé par la formulation directe d'un problème de programmation non linéaire. L'inconvénient est alors le caractère numérique de cette approche. Dans le même cadre d'étude, une méthode d'inversion de systèmes non linéaires discrets peut être considéré, basée sur une linéarisation séquentielle de la solution de l'équation d'état.

Chapter I

Positionnement du sujet

Sommaire

I.1	Introduction	12
I.2	Motivations	12
I.2.1	Commande optimale en boucle fermée de système non linéaires à temps discret	12
I.3	Formulation du problème d'inversibilité	16
I.3.1	Inversibilité entrée-état	16
I.3.2	Inversibilité entrée-sortie	18
I.4	Présentation du plan	19

I.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter les motivations qui nous ont amené à traiter le problème d'inversion des systèmes non linéaires à temps discret considéré ici.

Les systèmes discrets sont très utilisés dans la modélisation de procédés physiques [Bernotas *et al.*, 1986] et même dans des procédés non physiques comme par exemple ceux de nature économique [Post, 1995]. L'industrie fournit une source de problèmes et de situations qui peuvent être modélisés par des systèmes discrets [Larson et Keckler, 1969] [Bimbenet *et al.*, 1994][Cassandras, 1993]. Par ailleurs, même si le système en question n'est pas de nature discrète, on le "discrétise" souvent dans le but de simplifier l'analyse et de faciliter la tâche de calcul associée [Jayaraman, 1995]. La discrétisation de systèmes continus est particulièrement importante aujourd'hui, où la technologie actuelle demande l'implantation de commandes numériques ou discrètes.

On présentera donc tout d'abord nos motivations dans ce chapitre. On s'intéressera ensuite à la formulation d'un problème d'inversion entrée-état associé.

I.2 Motivations

I.2.1 Commande optimale en boucle fermée de système non linéaires à temps discret

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit: *Etant donné un processus défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celles qui permettent à la fois:*

1. *de satisfaire des conditions initiales et finales données;*
2. *de satisfaire diverses contraintes imposées;*
3. *d'optimiser un critère choisi.*

I.2.1.1 Méthode de programmation dynamique

L'objet de cette section est de présenter une application de la programmation dynamique dans le cadre des systèmes non linéaires à temps discret. Cette méthode d'optimisation peut être en effet utilisée efficacement pour l'optimisation de procédés de décision à étapes multiples. Elle permet de plus de déterminer une solution de type boucle fermée, admettant de façon conventionnelle comme paramètre, l'état courant du système. Cette notion de boucle fermée est l'un des points fondamentaux de la théorie de la commande.

On considère la formulation suivante d'un problème standard de commande optimale à temps discret:

$$\min_{x(0), x(K), u} I(x(0), x(K), u)$$

avec $I(x(0), x(K), u) = \sum_{k=0}^{K-1} r_k(x(k), u(k)) + r_K(x(K))$

sous la contrainte:

$$x(k+1) = f_k(x(k), u(k))$$

1. $f(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, est la fonction d'évolution du système, avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $u(k) \in \mathbb{R}^m$.
2. $r_k(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, est la fonction objectif.
3. $r_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, est la fonction objectif terminale.

On va présenter les équations fonctionnelles de l'approche standard et une autre formulation.

I.2.1.1.1 Formulation standard Quand on parle de formulation standard de la programmation dynamique, on fait référence évidemment à l'approche classique de la programmation dynamique basée sur le principe d'optimalité de Bellman [Larson et Casti, 1978]. On peut énoncer le principe d'optimalité comme suit:

Une politique optimale a la propriété que quels que soient l'état initial et la décisions initiale, les décisions restantes doivent constituer une politique optimale vis-à-vis de l'état résultant de la première décision

Ceci conduit à formuler l'équation fonctionnelle de la programmation dynamique de la manière suivante:

Pour $k = K - 1, \dots, 0$

$$I_k(x(k)) = \min_{u(k)} \{r_k(x(k), u(k)) + I_{k+1}[f_k(x(k), u(k))]\}$$

avec

$$I_K(x(K)) = r_K(x(K))$$

Alors, on aura comme fonction de coût optimal: $\hat{I} = \min_{x(0)} I_0(x(0))$.

Rappelons la propriété particulièrement intéressante de définir une politique de commande optimale qui dépend directement de l'état du système, c'est-à-dire, une loi de commande du type:

$$\hat{u}(k) = g_k(x(k)) \quad k = 0, 1, \dots, K - 1$$

I.2.1.1.2 Une autre formulation Une reformulation de la programmation dynamique plus particulièrement orientée boucle fermée a été présentée dans [Calvet et Viargues, 1995]. Elle traduit directement le principe d'optimalité de la façon suivante:

Pour une trajectoire optimale donnée, n'importe quelle portion de trajectoire depuis un point intermédiaire jusqu'au dernier point est elle-même une trajectoire optimale à partir de ce point intermédiaire.

On définira pour cela $c_k(x(k), x(k+1))$ comme le coût optimal de transition pour aller de l'état $x(k)$ à l'état $x(k+1)$ et $J_{k,K}(x(k), x(K))$ comme le coût optimal pour aller de l'état $x(k)$ à l'état final $x(K)$. On peut établir, alors le résultat suivant:

$$J_{k,K}(x(k), x(K)) = \min_{x(k+1), \dots, x(K-1)} \dot{c}_k(x(k), x(k+1), \dots, x(K)) \quad (\text{I.1})$$

où

$$\dot{c}_k(x(k), x(k+1), \dots, x(K)) = c_k(x(k), x(k+1)) + \dot{c}_{k+1}(x(k+1), \dots, x(K)) \quad k = K-2, \dots, 0$$

et

$$\dot{c}_{K-1}(x(K-1), x(K)) = c_{K-1}(x(K-1), x(K))$$

Ceci donne:

$$J_{0,K}(x(0), x(K)) = \min_{x(1), x(2), \dots, x(K-1)} I$$

Notons qu'avec cette formulation on admet implicitement que la fonction de transition possède une inverse par rapport à $u(k)$, qui doit pouvoir s'exprimer en fonction des variables $x(k)$ et $x(k+1)$, de la manière suivante:

$$u(k) = \dot{g}_k(x(k), x(k+1)) \quad k = 0, 1, \dots, K-1$$

tel que:

$$f_k(x(k), \dot{g}(x(k), x(k+1))) = x(k+1) \quad \forall x(k), x(k+1)$$

L'équation fonctionnelle de la programmation dynamique peut alors se réécrire comme suit:

Pour $k = K-1, \dots, 0$

$$J_{k,K}(x(k), x(K)) = \min_{x(k+1)} \{c_k(x(k), x(k+1)) + J_{k+1,K}(x(k+1), x(K))\}$$

avec

$$J_{K-1,K}(x(K-1), x(K)) = c_{K-1}(x(K-1), x(K))$$

alors

$$\hat{I} = \min_{x(0), x(k)} \{J_{0,K}(x(0), x(K)) + r_K(x(K))\}$$

Remarquons que la fonction J dépend maintenant de l'état courant et de l'état final. Notons également que la trajectoire optimale qui résoud l'équation fonctionnelle est obtenue sous la forme:

$$\hat{x}(k+1) = h_k(x(k), x(K)) \quad k = 0, 1, \dots, K-2$$

Ceci étend la notion de boucle fermée en ce sens que la politique de commande sera fonction, non seulement de l'état courant mais aussi de l'état final, soit :

$$\hat{u}(k) = \hat{g}_k(x(k), x(K))$$

Un aspect important de cette approche est l'élimination explicite de la commande dans la phase d'optimisation de l'algorithme de programmation dynamique. Notons qu'une idée similaire a été développée dans [Kumar et Seywald, 1996] mais sous l'approche calcul des variations.

Une formulation réduite

On peut montrer que

$$I_k(x(k)) = \min_{x(K)} J_{k,K}(x(k), x(K)) \quad k = 0, 1, \dots, K-1$$

et en remplaçant la fonction terminale $J_{K-1,K}(x(K-1), x(K))$ par

$$J_{K-1,K}(x(K-1), x(K)) = c_{K-1}(x(K-1), x(K)) + r_K(x(K))$$

on obtient une nouvelle forme de l'équation fonctionnelle qui est équivalente mathématiquement à la formulation précédente de l'équation fonctionnelle mais complètement différente quant à la complexité algorithmique des calculs associés, soit :

$$I_k(x(k)) = \min_{x(k+1)} \{c_k(x(k), x(k+1)) + I_{k+1}(x(k+1))\}, \quad k = K-2, \dots, 0$$

avec

$$I_{K-1}(x(K-1)) = \min_{x(K)} \{c_{K-1}(x(K-1), x(K)) + r_K(x(K))\}$$

La solution de cette équation est alors simplement fonction de l'état courant du système :

$$\hat{x}(k+1) = h_k(x(k)), \quad k = 0, 1, \dots, K-1$$

qui, compte tenu de l'inversion implicite de l'équation de transition d'état conduit bien à une commande optimale en boucle fermée :

$$\hat{u}(k) = g_k(x(k))$$

La détermination des coûts de transition d'état $c_k(x(k), x(k+1))$ impliquée dans la résolution de cette équation fonctionnelle étendue présuppose la connaissance de la commande $u(k)$ permettant de passer de l'état $x(k)$ à l'état $x(k+1)$, ce qui requiert

l'inversibilité de la fonction d'évolution du système relativement à la commande. Cette condition très contraignante peut être toutefois relaxée en recherchant une solution de ce problème d'inverse, non pas sur une étape, mais sur un nombre fini p d'étapes. L'existence d'une telle solution exprimée en terme de séquence finie de commandes correspond alors à une condition d'inversibilité avec retard ou d'un point de vue commande, à une condition d'accessibilité du système.

Cela nous conduit à une nouvelle formulation de l'équation fonctionnelle, dans laquelle l'optimisation effectuée à chaque pas de calcul porte sur un horizon de p étapes.

$$I_k(x(k)) = \min_{x(k+p)} \{c_k(x(k), x(k+p)) + I_{k+p}(x(k+p))\}, k = K - 2p, \dots, 0$$

avec

$$I_{K-p}(x(K-p)) = \min_{x(K)} \{c_{K-p}(x(K-p), x(K)) + r_K(x(K))\}$$

La loi de commande calculée est alors du type:

$$u(k) = g_k(x(k))$$

Rappelons que cette formulation illustre la version suivante du principe d'optimalité:
Toute trajectoire optimale ne peut être constituée que de sous-trajectoires optimales

I.3 Formulation du problème d'inversibilité

On a vu précédemment que lors du calcul des coûts optimaux c_k , on se ramène à un problème d'inverse (inversion de la fonction d'évolution par rapport $u(k)$). Dans cette section nous allons formuler le problème d'inversion entrée-état et le problème d'inversion entrée-sortie. L'inversion ici a pour objectif la synthèse d'une loi de commande, en d'autres termes, la détermination d'une séquence de commandes ou d'une commande pour assurer respectivement un transfert d'état donné ou le suivi d'une trajectoire de référence.

I.3.1 Inversibilité entrée-état

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, le problème de la détermination des coûts de transition optimaux d'un état $x(k)$ vers un état $x(k+p)$ soulève un problème d'inversibilité de l'équation d'état, que l'on peut décrire comme suit.

Soit le système non linéaire à temps discret:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad k = 0, 1, \dots$$

$x(k) \in \mathfrak{R}^n, u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et f est une fonction analytique¹.

Etant donnés un entier p , un état x_1 et un état x_2 , le problème d'inversion (ou de transfert d'état en un temps p) consiste à déterminer une séquence d'entrées (dépendant de x_1 et de x_2) telle que

¹C'est une fonction de classe finie C^k avec k un nombre fini

$$\underline{u} = g(x_1, x_2)$$

avec $\underline{u}^T = (u^T(k+p-1), u^T(k+p-2), \dots, u^T(k))$, tel que la trajectoire (ou solution) du système non linéaire passant par x_1 à l'instant k , passe par x_2 à l'instant $(k+p)$

En termes de commande de système, l'existence d'une solution \underline{u} traduit une propriété d'accessibilité. Dans le cas particulier où la fonction f est directement inversible par rapport à $u(k)$, \underline{u} se réduit naturellement à $u(k)$.

Le travail développé dans ce manuscrit s'inscrit dans le cadre de la résolution de ce problème qu'on qualifiera de problème d'inversion entrée-état d'un système non linéaire à temps discret.

Nous n'avons pas pris connaissance dans notre recherche bibliographique d'études consacrées à ce sujet, si ce n'est pour les systèmes linéaires invariants dont nous rapportons ci-après une méthode de résolution [Hisham, 2004],[Levine, 1996].

Exemple I.1 Soit le système linéaire invariant à temps discret suivant:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

la résolution de l'équation d'état à chaque pas, conduit à :

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\ &\vdots \\ x(p) &= A^p x(0) + A^{p-1}Bu(0) + \dots + ABu(p-2) + Bu(p-1) \end{aligned}$$

qu'on peut encore réécrire sous une forme matricielle globale :

$$C\underline{u} = m$$

à partir de l'expression de la matrice de commandabilité :

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{p-1}B]$$

et du vecteur m :

$$\theta = [x(p) - A^p x(0)]$$

La détermination du vecteur \underline{u} peut être effectuée à partir de la pseudo-inverse à gauche :

$$\underline{u} = (C^T C)^{-1} C^T \theta$$

I.3.2 Inversibilité entrée-sortie

Le concept d'inversion entrée-sortie (appelé aussi fonctionnelle reproductrice) a été introduit par [Brockett 1965] pour la première fois. De nombreux travaux de recherche traitent de l'inversion entrée-sortie pour le cas linéaire à temps continu [Sain 1969],[Silverman 1969] comme pour le cas des systèmes non linéaires à temps continu [Hirschorn 1979],[Singh 1982]. Comme application de ces travaux de recherche à la théorie de la commande, on citera notamment les méthodes de linéarisation par bouclage, de découplage,...). Malheureusement, il y a peu de travaux dans le cadre discret.

L'inversion entrée-sortie qui constitue d'une certaine manière un problème voisin de l'inversion entrée-état telle que nous l'avons définie précédemment peut être formulée comme suit.

Etant donné un système non linéaire à temps discret décrit comme suit:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k))\end{aligned}$$

$x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et f, h sont des fonctions analytiques.

L'inversion entrée-sortie consiste à rechercher une commande permettant de suivre une trajectoire de référence $y^* = \{y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+q)\}$. La solution du problème peut être alors exprimée sous la forme suivante:

$$u(k) = g(x(k), y^*)$$

Le problème d'inversion est traité dans [Normand-cyrot, 1981] par utilisation de la technique de l'opérateur exponentiel. Cette technique souffre cependant d'une certaine complexité pour le cas des systèmes multi-entrées. Ce même problème est traité dans [Kotta, 1990] par extension de l'algorithme algébrique de [Li, 1987] présenté pour le cas des systèmes à temps continu. Notons que le travail de Kotta a été étendu dans [Fleigner, 1996] à une classe plus générale de systèmes non linéaires à temps discret (système implicite) de la forme :

$$\begin{aligned}f(x(k+1), x(k), u(k)) &= 0 \\ h(x(k), u(k), y(k)) &= 0\end{aligned}$$

Il est important de souligner que cette approche dans [Kotta, 1990] n'est valable que pour des systèmes pour lesquels la dimension du vecteur de commande est supérieure ou égale à la dimension du vecteur de sortie. Ce problème d'inversion $h(x(k)) = x(k)$ pourrait donc éventuellement apporter une solution au problème précédemment évoqué d'inversibilité entrée-état sous la condition très restrictive où $m \geq n$. Rappelons toutefois que notre problème d'inversion entrée-état s'adresse en fait à des états terminaux et n'entre donc que de manière très marginale dans cette définition de problème d'inversion.

Citons ci-après l'exemple d'application [Kotta, 1990].

Exemple I.2 Soit le système décrit par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= x_3(k) + u_1(k) + \ln(u_2(k)) \\
 x_2(k+1) &= x_4(k) - u_1(k) - \ln(u_2(k)) \\
 x_3(k+1) &= x_1(k) + \sin(x_4(k)) \\
 x_4(k+1) &= x_3(k) - x_1(k) + u_1(k) + 2\ln(u_2(k)) \\
 y_1(k) &= x_1(k) \\
 y_2(k) &= x_2(k)
 \end{aligned}$$

L'application de l'algorithme d'inversion proposé par U. Kotta conduit à la définition de la loi de commande :

$$\begin{aligned}
 u_1(k) &= 2y_1(k+1) - x_3(k) + \sin(x_4(k)) - y_1(k+2) - y_2(k+2) \\
 u_2(k) &= \exp\{y_1(k+2) + y_2(k+2) - y_1(k+1) - \sin(x_4(k))\}
 \end{aligned}$$

On remarque que la loi de commande est fonction de la sortie du système à l'instant $k+1$ et $k+2$ ainsi que de l'état à l'instant k .

I.4 Présentation du plan

Ce travail de recherche a pour origine la mise en œuvre d'un algorithme de programmation dynamique orienté vers la détermination tabulaire d'une stratégie de commande optimale en boucle fermée de systèmes dynamiques non linéaires à temps et à variables discrets ou discrétisés. Plus précisément, le problème posé est celui de la construction d'une matrice dite de coût de transition d'état optimal, résultant de la détermination de séquences de commande optimisant les transitions d'un état initial vers un état final donnés.

Nous nous sommes ainsi attaché à formuler ce problème dans les termes d'un problème d'inversion entre les entrées (commandes) et les états terminaux d'un système non linéaire à temps discret.

Dans un deuxième chapitre, nous abordons le problème à travers l'analyse de la propriété d'accessibilité de tels systèmes. Différentes approches sont ainsi considérées : l'approche naturelle par composition de fonctions, puis des approches plus élaborées telles que l'approche algèbre ou géométrie différentielles. Ce chapitre se termine par une contribution plus personnelle basée sur l'application dans un cadre discret d'une méthode d'optimisation type principe du minimum à la recherche d'une éventuelle bordure du domaine de commandabilité.

Dans un troisième chapitre, l'inversion entrée-état du système est d'abord abordée par une méthode approchée de linéarisation jacobienne dont l'inconvénient principal est une perte d'information structurelle. L'approche composition de fonction est également traitée incluant une proposition algébrique plus personnelle. Celle-ci peut toutefois impliquer une grande complexité des calculs - Nous considérons ensuite l'approche linéarisation exacte entrée-état en utilisant soit les outils de l'algèbre différentielle, soit ceux de la géométrie différentielle. Plus élégantes conceptuellement, ces méthodes supposent la satisfaction de conditions particulières d'application. Nous proposons enfin une variante de la méthode basée sur la géométrie différentielle de Jayarman consistant à définir un

champ de vecteurs ne requérant pas l'inversibilité, par rapport à l'état, de la fonction décrivant l'évolution dynamique du système.

Un dernier chapitre présente quelques applications complémentaires de nos propositions sur deux exemples un peu plus significatifs issus de la littérature.

Après une conclusion du travail effectué, nous donnerons quelques perspectives qui s'inscrivent dans la continuité de cette étude.

Chapter II

Accessibilité des systèmes à temps discret

Sommaire

II.1	Introduction	23
II.2	Définitions	23
II.2.1	Accessibilité	24
II.2.2	Commandabilité	24
II.3	Approche composition de fonctions	25
II.3.1	Définitions	25
II.3.2	Critère d'accessibilité	26
II.3.3	Cas linéaire	26
II.3.4	Un exemple non linéaire	27
II.4	Approche algèbre différentielle	28
II.4.1	Définitions	28
II.4.2	Critère d'accessibilité	31
II.4.3	Un exemple linéaire	32
II.4.4	Un exemple non linéaire	34
II.5	Approche géométrie différentielle	35
II.5.1	Quelques définitions	36
II.5.2	Construction d'une distribution	37
II.5.3	Critère d'accessibilité	39
II.5.4	Système linéaire	39

II.5.5	Un exemple non linéaire	40
II.6	Approche du principe du maximum	41
II.6.1	Définitions	41
II.6.2	Critère de commandabilité	44
II.6.3	Système linéaire	47
II.6.4	Système bilinéaire	48
II.6.5	Un exemple non linéaire	53
II.6.6	Lien avec l'approche composition de fonctions	54
II.7	Accessibilité des systèmes à temps discret sous contraintes	55
II.7.1	Introduction	55
II.7.2	Accessibilité de systèmes linéaires discrets	56
II.7.3	Accessibilité de systèmes non linéaires discrets	57
II.8	Conclusion	58

II.1 Introduction

Le problème de la commandabilité a été lié dès les années 50 à l'étude de problème de commande optimale [Sontag, 1991]. Cependant, la commandabilité n'a été étudiée comme une notion à part qu'à partir de l'apparition des travaux de Kalman dans les années 60 sur les systèmes linéaires. Les travaux de Kalman ont fait l'objet d'une intense activité de recherche sur des aspects numériques liés au critère de commandabilité [Kenney et Laub, 1988].

Des travaux de recherche sur la commandabilité des systèmes non linéaires à temps continu ont été développés dans les années 70. L'objectif de ces travaux était de proposer un critère similaire à celui de Kalman. La géométrie différentielle, dans laquelle la fonction d'évolution du système définit directement un champ de vecteurs, fournit un cadre d'étude adéquat pour la commandabilité. Des critères locaux de commandabilité sont alors obtenus par utilisation de l'algèbre de Lie [Sussmann et Jurdjevic, 1972] pour laquelle des problèmes restent encore ouverts [Kawski, 1991].

La commandabilité dans le cas discret n'a été abordée que plus tardivement. Comme pour le cas continu, la géométrie différentielle a joué un rôle important pour étudier les systèmes non linéaires à temps discret en construisant ici des champs de vecteurs artificiels [Jakubczyk et Sontag, 1990] [Normand-Cyrot, 1983] générés à partir d'une perturbation infinitésimale de la commande.

Une approche alternative pour étudier la commandabilité des systèmes est basée sur un formalisme linéaire algébrique introduit par Di Benedetto et Moog pour l'analyse des systèmes non linéaires à temps continu dans [Di Benedetto *et al.*, 1989]. Ce formalisme a été étendu ensuite aux systèmes non linéaires à temps discret par [Grizzle, 1993]. Les auteurs développent dans [Aranda-Bricaire *et al.*, 1996] un critère d'accessibilité pour les systèmes non linéaires à temps discret qui n'utilise que de simples opérations algébriques dont le nombre peut être calculé aisément. Il apparaît donc que l'algèbre différentielle fournit un outil bien adapté pour unifier l'étude de l'accessibilité des systèmes en temps continu et des systèmes en temps discret.

Enfin, notre contribution dans ce chapitre est de proposer un critère de commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret à partir de la détermination de la bordure de commandabilité telle que définie dans le cadre continu par Vincent et Grantham [Vincent et Grantham, 1997]. Ce critère utilise le principe du maximum pour la recherche d'une condition nécessaire d'existence d'une bordure du domaine de commandabilité. Le critère développé ici est similaire à celui développé dans [Jakubczyk et Sontag, 1990], dans une approche composition de fonctions.

II.2 Définitions

Plusieurs termes sont associés dans la littérature au concept de commandabilité: at-teignabilité, accessibilité et commandabilité, plus ou moins différents dans leur définition. De nombreux auteurs adoptent même leur propre définition. On partira dans ce travail de la définition de l'accessibilité donnée dans [Sontag, 1998]. Cette notion d'accessibilité

est aussi appelée commandabilité faible.

Considérons le système non linéaire à temps discret

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ &\equiv f_{u(k)}(x(k)) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

où f est une fonction analytique et $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$.

II.2.1 Accessibilité

Désignons par $A_k^+(x)$ l'ensemble des points atteignables à partir de x au temps k ($k \geq 0$) en utilisant les séquences arbitraires de commandes:

$$u^* = \{u(0), \dots, u(k-1)\}$$

et par $A^+(x)$ ensemble des points atteignables à partir de x en un temps quelconque positif ; en d'autres mots:

$$A^+(x) = \cup_{k \geq 0} A_k^+(x)$$

Définition II.1 *On dit que le système non linéaire à temps discret (II.1) est accessible en temps positif en avant si $A^+(x)$ contient un ensemble ouvert non vide de \mathfrak{R}^n pour presque tout $x \in \mathfrak{R}^n$.*

Désignons maintenant par $A_k^-(x)$ l'ensemble des points commandables vers x en un temps k positif en utilisant des séquences de commandes arbitraires et par $A^-(x)$ l'ensemble des points commandables vers x en un temps quelconque positif, en d'autres mots

$$A^-(x) = \cup_{k \geq 0} A_k^-(x)$$

Définition II.2 *On dit que le système non linéaire à temps discret (II.1) est accessible en arrière si $A^-(x)$ contient un ensemble ouvert non vide de \mathfrak{R}^n pour presque tout $x \in \mathfrak{R}^n$.*

II.2.2 Commandabilité

Le système non linéaire à temps discret (II.1) est dit commandable sur un intervalle $[k_0, k_1]$ de temps fini avec $k_1 > k_0$, si pour chaque état x_0 et x_1 il est possible de trouver une commande admissible qui transfère le système de l'état $x(k_0) = x_0$ à l'état $x(k_1) = x_1$ [Levine, 1996].

En terme d'ensemble accessible, en désignant par X_0 l'ensemble des points initiaux x_0 et par X_1 l'ensemble des points finals x_1 , on peut reformuler la définition de la commandabilité comme suit:

$$\begin{aligned} &\exists A_{k_1-k_0}^+(x_0), \forall x_0 \in X_0 \\ &\quad \text{et} \\ &X_1 \subset A_{k_1-k_0}^+(x_0), \forall x_0 \in X_0 \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} & \exists A_{k_1-k_0}^-(x_1), \forall x_1 \in X_1 \\ & \text{et} \\ & X_0 \subset A_{k_1-k_0}^-(x_1), \forall x_1 \in X_1 \end{aligned}$$

La notion de commandabilité apparaît ainsi plus forte que la notion d'accessibilité.

II.3 Approche composition de fonctions

Pour étudier l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret, il peut être judicieux de commencer par une approche directe assez simple à mettre en oeuvre, qui constitue une bonne introduction pour l'étude de l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret. Cette technique utilise intensivement l'outil de composition de fonctions. Il faut souligner que l'opérateur de composition dans le cas discret est équivalent à l'opérateur de dérivation dans le cas continu. On présentera ci-dessous un critère pour étudier l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret; ce critère est basé sur l'utilisation du théorème de la fonction implicite.

II.3.1 Définitions

En premier lieu, rappelons la définition de l'opérateur jacobien.

Définition II.3 Soit une fonction vectorielle f d'une variable vectorielle x ; on appelle jacobienne de $f(x) = (f_i(x))_{i=1,\dots,n}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

où

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Citons ensuite deux théorèmes.

Théorème II.1 (Théorème de la fonction inverse) Soient un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application lisse (i.e. les dérivées partielles de la fonction $f(x)$ sont continues).

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$f(x)$ est un difféomorphisme (f et f^{-1} sont des fonctions lisses) si la jacobienne ∇f est non singulière.

Théorème II.2 (Théorème de la fonction implicite) Soit $f(x, y)$ une fonction vectorielle à n composantes, qui satisfait l'équation suivante:

$$f(x, y) = 0$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$. Si la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$ de la fonction vectorielle $f(x, y)$ est de rang plein, alors il existe une fonction $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ 0 &= f(x, g(x)) \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$.

II.3.2 Critère d'accessibilité

Définissons par $f_{\underline{u}}(x(0)) : x(0) \in \mathbb{R}^n \rightarrow x(k) \in \mathbb{R}^n$ la composition de fonctions $f_{\underline{u}}(x(0)) = f_{u(k-1)} \circ \dots \circ f_{u(0)}(x(0))$.

associée à l'application d'une séquence de commandes $u^* = \{u(0), \dots, u(k-1)\}$ et par $\Gamma(k, x)(\underline{u}) : \underline{u} \in (\mathbb{R}^m)^k \rightarrow f_{\underline{u}}(x) \in \mathbb{R}^n$.

où

$$\underline{u}^T = (u^T(0) \quad u^T(1) \quad \dots \quad u^T(k-1))$$

la fonction de transition d'un état initial fixé x sur k étapes. Il ressort $A_k^+(x) = \text{Im}\Gamma(k, x)(\underline{u})$.

Théorème II.3 [Jakubczyk et Sontag, 1990][Aranda-Bricaire, 1994] L'ensemble des points atteignables $A_k^+(x)$ constitue un ensemble non vide \mathbb{R}^n si et seulement si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \text{rank} \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \Gamma(k, x)(\underline{u}), \underline{u} \in (\mathbb{R}^m)^k \right\} = n$$

Alors, le système non linéaire à temps discret est accessible en temps positif si et seulement si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \text{rank} \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \Gamma(k, x)(\underline{u}), \underline{u} \in (\mathbb{R}^m)^k, k \geq 1 \right\} = n$$

Cette condition apparait très simple à mettre en oeuvre pour étudier l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret. Cependant, les calculs qu'elle implique, à savoir, une composition de fonctions, peuvent être très lourds en pratique.

II.3.3 Cas linéaire

Considérons maintenant le système linéaire à temps discret décrit par l'équation d'état :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

où $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, et A, B sont des matrices de dimension respective $n \times n$ et $n \times m$. On vérifie facilement que l'approche étudiée aboutit au critère de Kalman [Djeridane, 2002].

$$\begin{aligned}\Gamma(1, x) &= Ax(0) + Bu(0) \\ \Gamma(2, x) &= Ax(1) + Bu(1) \\ &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)\end{aligned}$$

et ainsi de suite, jusqu'à:

$$\Gamma(k, x) = A^kx(0) + A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \dots + Bu(k-1)$$

Il en résulte l'expression:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \Gamma(k, x) = [A^{k-1}B \quad A^{k-2}B \dots \quad B]$$

dans laquelle on retrouve la matrice de Kalman pour le cas des systèmes linéaires à temps discret.

II.3.4 Un exemple non linéaire

Soit le système non linéaire, non inversible par rapport à l'état, dit encore réversible([Lee *et al.*, 1987]):

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k) - u^2(k) \\ x_2(k+1) &= u(k)\end{aligned}$$

Le calcul de la jacobienne de $f(x, u)$ montre que le système n'est pas inversible par rapport à x ; en effet:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application du critère d'accessibilité conduit à exprimer:

$$\begin{aligned}\Gamma(1, x) &= f(x(0), u(0)) \\ \Gamma(2, x) &= \begin{pmatrix} u(0) - u^2(1) \\ u(1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \Gamma(k, x) = \begin{pmatrix} 1 & -2u(1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que cette matrice est toujours de rang plein, ce qui permet de conclure à l'accessibilité du système dans tout l'espace \mathbb{R}^2 .

II.4 Approche algèbre différentielle

Après avoir présenté une approche basée sur la composition de fonctions, on décrit ci-après un critère d'accessibilité issu d'une approche d'algèbre différentielle recherchant le degré relatif d'une suite de 1-formes [Aranda-Bricaire, 1994].

II.4.1 Définitions

Nous commençons en exposant de manière succincte quelques notions de la théorie des systèmes différentiels extérieurs [Sastry, 1999].

Étant donnée une variété analytique X dans laquelle x représente les coordonnées locales, soient TX l'espace tangent et T^*X l'espace cotangent dans lequel dx représente les coordonnées locales.

Définition II.4 *On considère l'espace vectoriel suivant:*

$$\Omega = \text{span } dC$$

où $dC = \{dx_i; i = 1, \dots, n\}$.

Soit v un élément de l'ensemble Ω de la forme suivante:

$$v = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i$$

où $F_i(x)$ sont des fonctions analytiques $X \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle 1-forme tout élément v de Ω .

Une 0-forme n'est rien d'autre qu'une application f de X dans \mathbb{R} .

Une 1-forme différentielle $v \in \Omega$ est une 1-forme exacte, s'il existe une 0-forme f telle que $v = df$ qui s'écrit sous la forme suivante:

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Définition II.5 (2-forme) *On considère l'espace vectoriel noté par Ω^2 et défini par:*

$$\Omega^2 = \text{span}\{\wedge dC\}$$

où $\wedge dC = \{dx_j \wedge dx_i, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, n\}$

Un élément w de Ω^2 constitue une 2-forme et peut s'écrire sous la forme suivante:

$$w = \sum_{i>j} \Psi_{i,j}(x) dx_j \wedge dx_i$$

où $\Psi_{i,j}(x)$ sont des fonctions analytiques de X dans \mathbb{R} .

Définition II.6 (Produit extérieur) *Le produit extérieur d'une p -forme $\alpha \in \Omega^p(X)$ par une q -forme $\beta \in \Omega^q(X)$ désigne une application.*

$$\wedge : \Omega^p(X) \times \Omega^q(X) \rightarrow \Omega^{p+q}(X)$$

telle que

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$$

Cette application est bilinéaire, associative, mais non-commutative.

Remarque II.1 *Il est important de noter que la définition du produit extérieur pour une forme différentielle impaire α par elle-même donne un résultat nul ($\alpha \wedge \alpha = 0$).*

Définition II.7 *La différentielle extérieure d est une application*

$$d : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X)$$

qui satisfait les propriétés suivantes:

1. d est linéaire: $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$; si λ est constante, $d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha$.
2. Si $\alpha \in \Omega^p(X)$ et $\beta \in \Omega^q(X)$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ où $\Omega^*(X) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(X)$.
3. Si f est une 0-forme, df coïncide avec la différentiation ordinaire.
4. $d(d\alpha) = 0$, $\forall \alpha$.

Les propriétés (1)-(4) définissent l'opérateur d de manière unique.

Les exemples suivants illustrent cette définition.

Exemple II.1 *Soit $v = dx_1 - \frac{x_1}{x_2} dx_2$. L'utilisation de l'opérateur de dérivée extérieure, conduit à la 2-forme :*

$$\begin{aligned} dv &= d\left(dx_1 - \frac{x_1}{x_2} dx_2\right) \\ &= d(dx_1) - \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_2^2} \wedge dx_2 \\ &= 0 - \frac{1}{x_2} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\frac{1}{x_2} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Exemple II.2 *Soit $v = \cos(x_1 x_2) x_2 dx_1 + \cos(x_1 x_2) x_1 dx_2$, alors:*

$$v = F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

avec

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos(x_1 x_2) x_2 \\ F_2 &= \cos(x_1 x_2) x_1 \end{aligned}$$

alors,

$$dF = d(\cos(x_1 x_2))$$

On peut conclure que v est une 1-forme exacte.

Notons que le formalisme algébrique pour les 1-formes a été conçu principalement pour faciliter les calculs qui font appel à des opérateurs gradient et jacobien. Dans l'étude de l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret, on n'utilisera que des 1-formes.

Remarque II.2 *Il faut souligner que pour une 0-forme, la dérivée extérieure coïncide avec la notion de différentielle totale :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Définition II.8 *On définit l'opérateur de décalage Δ de la façon suivante*

$$\Delta x(k) = x(k+1) = x^+ \quad \text{pour } k \geq 0$$

Considérons le système non linéaire à temps discret:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), k = 0, 1, \dots \quad (\text{II.2})$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m$. On suppose que l'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est analytique.

Définition II.9 (Degré relatif) *Le degré relatif d'une 1-forme $w(0) \in \text{span}\{dx(0)\}$ est défini par*

$$r = \min\{k > 0 | w(k) = \Delta^k w(0) \in \text{span}\{dx(0)\}\}$$

Si un tel entier n'existe pas, on pose $r = \infty$.

Définition II.10 (Sous-espaces de filtration) *Rappelons enfin la définition des sous-espaces de filtration $H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_k$ donnée dans [Aranda-Bricaire, 1994].*

$$\begin{aligned} H_0 &= \text{span}\{dx(0), du(0)\} \\ H_k &= \Delta^{-k}(H_0 \cap \Delta H_0 \cap \cdots \cap \Delta^k H_0) \\ &= \Delta H_{k-1} \cap H_{k-1} \end{aligned}$$

où $\Delta H_0 = \text{span}\{w^+ | w \in H_0\}$, $\Delta^k H_0 = \text{span}\{w^+ | w \in \Delta^{k-1} H_0\}$, $k \geq 1$ et $\Delta H_k = H_k^+ = \text{span}\{w^+ | w \in H_k\}$.

L'espace H_k qu'on peut alternativement définir par:

$$H_k = \text{span}\{w \in H_{k-1} | w^+ \in H_{k-1}\}, k \geq 1$$

est le sous-espace des 1-formes qui ont un degré relatif supérieur ou égal à k

En particulier, $H_1 = \text{span}\{dx(0)\}$.

Notons également qu'il existe un entier k^* tel que, pour $k \leq k^*$, $H_{k+1} \subset H_k$ mais $H_{k+1} \neq H_k$ et $H_{k^*+1} = H_{k^*+2} = \cdots = H_\infty$.

L'existence de cet entier k^* découle du fait que chaque H_k est un espace vectoriel de dimension finie et donc, soit $H_{k+1} = H_k$, soit la dimension de H_{k+1} diminue au moins d'une unité.

Les sous-espaces de filtration permettent donc une classification des 1-formes selon leur degré relatif.

II.4.2 Critère d'accessibilité

Théorème II.4 *Le système non linéaire à temps discret (II.2) est accessible si et seulement si $H_\infty = 0$.*

Le critère d'accessibilité énoncé précédemment revient à démontrer que le système ne possède pas de 1-formes à degré relatif infini.

Le calcul séquentiel des sous-espaces $\{H_k\}$ pour les systèmes linéaires à temps discret de la forme suivante:

$$x(k) = Ax(k) + Bu(k)$$

avec $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$.

peut être réalisé par application de l'algorithme suivant [Post, 1995].

Algorithme II.1 1. choix de $H_0 = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n+m}\}$, où e_i représente un vecteur canonique.

2. $H_1 = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

3. $H_2 = \text{span}\{a = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in H_1 | a \perp B\}$

4. Posons pour $k \geq 2$, $H_k = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r\}$ et $H_{k-1} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r, \mu_1, \dots, \mu_s\}$

(a) Déterminer les matrices C et D telles que $[\eta^+] = \Delta\eta = [\eta, \mu] \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$

(b) $H_{k+1} = \text{span}\{a = \eta\alpha \in H_k | \alpha \perp D^T\}$

jusqu'à $H_{k+1} = \{0\}$ ou $H_{k+1} = H_k$

Le calcul des sous-espaces de filtration $\{H_k\}$ pour les systèmes non linéaires à temps discret peut être réalisé par application de l'algorithme suivant [Post, 1995]

Algorithme II.2 1. Choix de $H_0 = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n+m}\}$.

2. $H_1 = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

3. Pour $k \geq 1$:

(a) Calcul de H_k^+ .

(b) Calcul de $H_{k+1} = H_k \cap H_k^+$.

jusqu'à $H_{k+1} = \{0\}$ où $H_{k+1} = H_k$

II.4.3 Un exemple linéaire

On considère le système linéaire à temps discret, décrit par :

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

ce qui donne après utilisation de l'opérateur d :

$$dx(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix} dx(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} du(k)$$

1-

$$H_0 = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2-

$$H_1 = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3- En remarquant que le noyau de la matrice B est:

$$Ker B = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

pour obtenir H_2 , il suffit juste d'augmenter d'une composante identiquement nulle la dimension des vecteurs de l'ensemble $Ker B$

$$H_2 = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span\{\eta_1, \eta_2\}$$

4- a) on réécrit H_1 sous la forme.

$$H_1 = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span\{\eta_1, \eta_2, \mu\}$$

Avec $\eta = [\eta_1 \quad \eta_2]$, on a

$$\eta^+ = (\eta_1^+ \quad \eta_2^+) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -9 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, le calcul de η_2^+ peut se faire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \eta_2^+ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^+ \\ &= (-dx_1(0) + dx_3(0))^+ \\ &= -dx_1^+(0) + dx_3^+(0) \\ &= -dx_1(1) + dx_3(1) \\ &= -(2dx_2(0) + du(0)) + (2dx_1(0) - 7dx_2(0) - 4dx_3(0) + du(0)) \\ &= 2dx_1(0) - 9dx_2(0) - 4dx_3(0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On considère alors le système matriciel

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -9 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

où C est une matrice de dimension 2×2 et D un covecteur de dimension 1×2 . Alors,

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Tous les vecteurs perpendiculaires à D^T sont de la forme suivante.

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

$$\begin{aligned} H_3 &= \text{span} \left\{ \eta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \{ 2\eta_1 + \eta_2 \} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \{ w \} \end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur de décalage, on obtient

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^+ = (-dx_2(0))^+ = -dx_2(1) = dx_1(0) - 4dx_2(0) - 2dx_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il faut remarquer que le vecteur w ne peut pas être un élément de H_3 , ce qui donne:

$$H_4 = \{0\}$$

Le système est donc accessible dans tout \mathbb{R}^3 .

Notons que ces algorithmes sont déjà implémentés dans des bibliothèques de calcul symbolique.

II.4.4 Un exemple non linéaire

On considère le système non linéaire à temps discret suivant:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= u_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k)u_1(k) \\ x_3(k+1) &= u_2(k) \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{pmatrix} dx_1^+ \\ dx_2^+ \\ dx_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}$$

Les sous-espaces H_k sont:

1-

$$H_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2-

$$H_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3.a) Par définition, pour obtenir H_1^+ , il suffit d'utiliser l'opérateur de décalage sur les 1-formes.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^+ = \Delta(dx_1(0)) = dx_1(1) = du_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors,

$$H_1^+ = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1(0) \\ x_3(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) L'ensemble $H_1 \cap H_1^+$ est défini par:

$$H_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Finalement H_2^+ est généré par

$$\Delta(u_1(0)dx_3(0)) = u_1(1)dx_3(1) = u_1(1)du_2(0)$$

ce qui donne:

$$H_2^+ = \text{span} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1(1) \end{pmatrix} \right\}$$

On voit clairement que:

$$H_3 = H_2 \cap H_2^+ = \{0\}$$

II.5 Approche géométrie différentielle

On présente dans cette section une approche basée sur l'utilisation de la géométrie différentielle pour étudier l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret, Cette approche est construite sur un formalisme dual de l'algèbre différentielle. En temps continu le concept local d'accessibilité est lié aux courbes intégrales de l'équation d'évolution définies pendant une variation infinitésimale du temps. Ceci est impossible en temps discret où la période d'échantillonnage est fixée. Dans ce cas, les commandes et plus précisément leurs variations vont jouer le rôle d'infiniment petit.

II.5.1 Quelques définitions

On rappelle dans ce qui suit quelques notions principales de la géométrie différentielle. Pour plus d'approfondissement, on renvoie le lecteur aux ouvrages de Isidori, Nijmeijer et Slotine. [Isidori, 1989] [Nijmeijer et Van Der Schaft, 1991] [Slotine et Li, 1991]

Définition II.11 (Champ de vecteur) *Soit X une variété lisse de dimension n . Un champ de vecteur V sur X est une application qui affecte à chaque point $p \in X$ un vecteur tangent $V(p)$ dans le plan $T_p X$ tangent à la variété X au point p .*

Définition II.12 (Distribution) *Soit l'ensemble des champs de vecteurs V_1, V_2, \dots, V_m . On définit une distribution $G(x)$ au point p de coordonnée locale x , l'espace:*

$$G = \text{span}\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$$

En d'autres termes, chaque élément de $G(x)$ au point x s'écrit sous la forme suivante:

$$\alpha_1(x)V_1(x) + \alpha_2(x)V_2(x) + \dots + \alpha_m(x)V_m(x)$$

où les $\alpha_i(x)$ sont des fonctions lisses.

Définition II.13 (Dérivée de Lie) *Si $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire lisse, et $V_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur lisse sur \mathbb{R}^n , alors la dérivée de Lie de h suivant V_1 est le scalaire défini par :*

$$L_{V_1} h = \nabla h V_1$$

Ainsi, la dérivée de Lie: $L_{V_1} h$ désigne la dérivée directionnelle de la fonction h suivant le champ de vecteur V_1 .

Définition II.14 (Dérivées de Lie successives) *On peut définir de façon récurrente les dérivées de Lie successives:*

$$\begin{aligned} L_{V_1}^0 h &= h \\ L_{V_1}^i h &= \nabla(L_{V_1}^{i-1} h) V_1 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Similairement, si V_2 est un autre champ de vecteur, alors la fonction scalaire $L_{V_2} L_{V_1} h(x)$ désigne la dérivée directionnelle de $L_{V_1} h$ suivant V_2 :

$$L_{V_2} L_{V_1} h = \nabla(L_{V_1} h) V_2$$

Définition II.15 (Crochet de Lie) *Soient V_1 et V_2 deux champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , le crochet de Lie de V_1 et V_2 est un troisième champ de vecteur défini par:*

$$[V_1, V_2] = \nabla V_2 V_1 - \nabla V_1 V_2$$

Le crochet de Lie de $[V_1, V_2]$ est souvent désigné par $ad_{V_1}V_2$ comme l'adjoint de V_2 par rapport à V_1 . On peut définir une expression récurrente des crochets de Lie successifs:

$$\begin{aligned} ad_{V_1}^0 V_2 &= V_2 \\ ad_{V_1}^i V_2 &= [V_1, ad_{V_1}^{i-1} V_2] \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Exemple II.3 *Soit:*

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{pmatrix} \\ V_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors:

$$[V_1, V_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} ad_{V_1}^2 V_2 &= [V_1, ad_{V_1} V_2] \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \sin(x_1) - x_1 \cos(x_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition II.16 (Ensemble involutif) *Un ensemble de champs de vecteurs $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ est dit involutif, si et seulement si, il existe des fonctions scalaires $a_{ij}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ telles que:*

$$[V_i, V_j] = \sum_{k=1}^m a_{ij}(x) V_k(x) \quad \forall i, j$$

La notion d'involutivité d'un ensemble signifie qu'un champ de vecteur résultant d'un crochet de Lie de n'importe quelle paire de champs de vecteurs de cet ensemble est une combinaison linéaire des différents champs de vecteurs de cet ensemble.

II.5.2 Construction d'une distribution

Dans cette section, on rappelle une nouvelle conception dite de "description infinitésimale" pour les systèmes à temps discret. Celle-ci introduit de nouveaux champs de vecteurs, qui font appel aux puissants outils de l'algèbre de Lie.

Considérons le système non linéaire à temps discret suivant:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ &= f_{u(k)}(x(k)) \end{aligned} \tag{II.3}$$

avec $x(k) \in \mathfrak{R}^n, u(k) \in U \subset \mathfrak{R}^m$ et $f(x(k), u(k))$ une fonction analytique inversible par rapport à $x(k)$.

Rappelons qu'en temps continu, des critères d'accessibilité, sont obtenus en utilisant l'algèbre de Lie [Hermann et Krener, 1977] sur des champs de vecteurs liés à des variations infinitésimales du temps. En temps discret, où la période d'échantillonnage est fixée, la commandabilité des systèmes non linéaires peut être reliée à des variations infinitésimales de commandes. En d'autres termes, les variations des commandes vont jouer pour les systèmes discrets, le rôle des variations du temps en continu.

L'idée d'introduire des champs de vecteurs liés à une perturbation infinitésimale des commandes constitue une généralisation naturelle du concept de groupe de Lie ; cette idée a été originalement proposée par [Fliess et Normand-Cyrot, 1981].

On définit pour cela un champ de vecteur de la manière suivante [Jakubczyk et Sontag, 1990]:

$$V_u(x) = \left[\frac{\partial}{\partial v} f_u^{-1} \circ f_{u+v}(x) \right]_{v=0}$$

On peut alors associer aux systèmes non linéaires discrets, des champs de vecteurs artificiels définis comme suit :

$$Ad_0^k V_u(x) = \left[\frac{\partial}{\partial v} f_0^{-k} \circ f_u^{-1} \circ f_{u+v} \circ f_0^k(x) \right]_{v=0}$$

où $f_0^k(x) = f_0 \circ \dots \circ f_0(x)$ représente la fonction de composition k fois de $f_0(x) = f(x(k), 0)$.

On peut représenter les champs de vecteurs artificiels par la figure suivante:

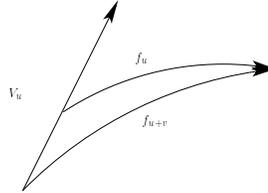


Figure II.1: Définition du champ de vecteur $V_u(x)$

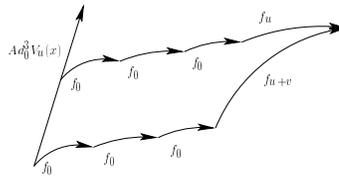


Figure II.2: Définition du champ de vecteur $Ad_0^3 V_u(x)$

Ceci permet de définir une distribution:

$$\Gamma(x) = \{Ad_0^k V_u(x) | k = 0, 1, \dots, u \in U\}$$

Remarque II.3 (méthode de calcul) *Il existe une autre écriture, plus calculatoire, pour la construction des champs de vecteurs précédemment définis. On peut en effet vérifier que:*

$$V_u(x) = (\nabla f_u(x))^{-1} \frac{\partial}{\partial u} f_u(x)$$

et l'on peut aussi définir le champ de vecteur $Ad_0^k V_u$ par:

$$Ad_0^k V_u = [\nabla f_0^k(x)]^{-1} V_u(f_0^k(x))$$

Cette expression facilite le calcul du champ de vecteur associé, dans la mesure où le terme $f_u^{-1}(x)$ n'apparaît pas explicitement.

Exemple II.4 *Soit le système non linéaire à temps discret suivant:*

$$x(k+1) = Ax(k) + g(x(k), u(k))$$

$x(k) \in \mathfrak{R}^n, u(k) \in \mathfrak{R}, A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, g$ est une fonction analytique avec $g(x(k), 0) = 0$.

Le calcul des champs de vecteurs pour ce système donne:

$$Ad_0^k V_u(x) = A^{-k} V_u(x)$$

avec $V_u(x) = (A + \frac{g(x,u)}{x})^{-1} \frac{\partial}{\partial u} g(x, u)$. On remarque que l'opérateur "Ad" correspond ici à une simple multiplication matricielle.

II.5.3 Critère d'accessibilité

On rappelle le critère d'accessibilité défini dans [Jakubczyk et Sontag, 1990]

Théorème II.5 *Le système non linéaire à temps discret est accessible, si et seulement si:*

$$\dim \Gamma(x) = n, \quad \forall x \in X$$

où

$$\Gamma(x) = \{Ad_0^k V_u(x) | k = 0, 1, \dots, u \in U\}$$

II.5.4 Système linéaire

On considère le système linéaire discret:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

avec $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ et $u(k) \in \mathfrak{R}^m$. On suppose de plus que la matrice A est non singulière.

Ceci donne:

$$\begin{aligned} V_u(x) &= [\nabla f(x, u)]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right] \\ &= [A]^{-1} B \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Ad_0^1 V_u(x) &= [\nabla f(x, u)]^{-1} V_u(f(x, 0)) \\ &= [A]^{-1} A^{-1} B \\ &= A^{-2} B \end{aligned}$$

On continue ainsi jusqu'à l'ordre k :

$$\begin{aligned} Ad_0^{k-1} V_u(x) &= [\nabla_x [f_0^k(x)]]^{-1} V_u(f_0^k(x)) \\ &= A^{-k} B \end{aligned}$$

On remarque que l'espace $\Gamma(x)$, construit à partir des champs de vecteurs précédemment défini, correspond à :

$$[A^{-k} B \quad A^{-k+1} B \quad \dots \quad B]$$

ce qui permet de retrouver le critère de Kalman.

II.5.5 Un exemple non linéaire

Soit le système non linéaire:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + u(k) \end{aligned}$$

Tout d'abord, calculons V_u comme suit:

$$\begin{aligned} V_u(x) &= [\nabla f_u(x)]^{-1} \left[\frac{\partial f_u(x)}{\partial u} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Ad_0 V_u(x) &= \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} V_u(f_0(x)) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{x_2}{x_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

x

De cette façon, on a construit les champs de vecteurs associés au système non linéaire à temps discret.

On obtient ainsi:

$$\Gamma = \{span\{V_u(x), Ad_0 V_u(x)\}\}$$

Alors le système non linéaire est accessible si et seulement si $x_1 \neq 0$ et $x_1(x_2 - 1) - x_2 \neq 0$.

II.6 Approche du principe du maximum

On propose une approche alternative pour étudier l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret basée sur l'utilisation d'outils issus de l'optimisation. En s'appuyant sur des résultats développés dans le cadre continu pour déterminer une condition nécessaire pour l'existence et la détermination de la bordure du domaine de commandabilité [Grantham et Vincent, 1975], on propose une extension de ces résultats au cas des systèmes à temps discret.

II.6.1 Définitions

On présente quelques définitions qui seront utilisées dans la suite de cette section.

On considère le système non linéaire suivant :

$$x(k+1) - x(k) = f(x(k), u(k)) \quad (\text{II.4})$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^m$ et f est une fonction analytique.

Définition II.17 (Domaine de commandabilité) *Le domaine de commandabilité C définit l'ensemble de tous les états initiaux qui peuvent atteindre un ensemble cible X sous l'action d'une loi de commande admissible et en un temps fini.*

II.6.1.1 Bordure du domaine de commandabilité

Pour des exemples assez élémentaires, il est facile de déterminer le domaine de commandabilité par une voie assez primitive qui fait une recherche exhaustive de toutes les commandes possibles, mais cette technique s'avère rapidement inadéquate pour résoudre des problèmes plus complexes. Ce qui nous conduit à dire que cette technique n'est pas réalisable pratiquement pour la détermination du domaine de commandabilité.

Quand l'ensemble de commandabilité n'est pas tout l'espace d'état, alors il y a une bordure qui délimite l'ensemble du domaine noté par ∂C . Par le biais de la détermination de la bordure du domaine de commandabilité on peut donc essayer de déterminer ce domaine de commandabilité.

Dans le cas des systèmes non linéaires à temps continu, une approche permettant de déterminer cette bordure a été proposée dans [Grantham et Vincent, 1975]. Celle-ci est basée sur l'utilisation du principe du maximum et des propriétés géométriques des systèmes.

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence d'une telle bordure de commandabilité ce qui nous conduit à développer une condition nécessaire de commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret basée sur l'utilisation du principe du maximum.

II.6.1.2 Propriété du domaine de commandabilité

On suppose que la bordure du domaine de commandabilité constitue une surface de dimension $(n - 1)$ lisse et possède un plan tangent.

A partir de la définition de la commandabilité, on peut déduire une propriété intrinsèque au domaine de commandabilité du système non linéaire à temps discret de la façon suivante. Si une trajectoire x^* quitte le domaine de commandabilité C , alors la trajectoire ne peut pas retourner vers ce domaine, une fois partie [Vincent et Grantham, 1997].

On peut de cette propriété déduire les propriétés suivantes :

1. Une solution x^* de l'équation (II.4) qui démarre à l'extérieur de C ne peut jamais atteindre C .
2. Si x^* démarre depuis ∂C , alors elle ne peut jamais atteindre l'intérieur de C .
3. Si x^* démarre à l'extérieur de ∂C , alors elle ne peut jamais atteindre la bordure de C .
4. Si $x(0) \in \partial C$ et $x(\nu) \in \partial C$, alors $x(k) \in \partial C$ pour tout $0 \leq k \leq \nu$.
5. Si ∂C contient des points anguleux (cassures), alors les trajectoires sur ∂C ne peuvent pas passer par ces points.

Démonstration

La condition (1) vient directement de la définition de l'ensemble de commandabilité. Les conditions (2),(3) et (5) viennent immédiatement de la condition (1). Par exemple, concernant la condition (2), on se place dans le voisinage de $x(0)$ en un point situé à l'extérieur de l'ensemble de commandabilité, alors il n'existe pas de trajectoire pouvant atteindre C , sinon elle violerait la condition (1). Des arguments similaires peuvent être formulés pour la démonstration des propriétés (3) et (5).

La condition (4) fournit une propriété permettant de déterminer la bordure du domaine de commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret. La démonstration est la suivante. Soit $x(0) \in \partial C$. Supposons qu'il existe une loi de commande admissible $u(x)$ tel que $x(\nu) \in X \subseteq C$ (ensemble objectif): cela contredit la propriété (2), puisque $x(k)$ ne peut jamais atteindre l'intérieur de C . On peut alors conclure que $x(k)$ reste sur la bordure du domaine de la commandabilité $x(k) \in \partial C$.

Définition II.18 (Vecteur normal extérieur) Soit A un domaine, avec une bordure appelée ∂A qui possède un plan tangent unique en chaque point. Un vecteur normal extérieur est un vecteur non-nul v dans \mathbb{R}^n qui est normal à A au point x et dirigé vers l'extérieur du domaine. Le plan tangent à ∂A est défini par l'ensemble des vecteurs e satisfaisant la relation suivante:

$$0 = v^T e$$

Par ailleurs, tout vecteur e voisin de e vérifiant:

$$0 < v^T e$$

est tangent à l'extérieur de A .

Définition II.19 (Hyperplan) *Un hyperplan dans \mathbb{R}^n est une extension naturelle d'une droite dans un espace \mathbb{R}^2 et peut être vu comme un sous espace de \mathbb{R}^n de dimension $(n - 1)$ [Culioli, 1994].*

On définit l'hyperplan L comme suit

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : L(x) = a^T x - b = 0\}$$

où a^T et b désignent respectivement un vecteur ligne et un scalaire à valeur réelles.

On définit également les demi-espaces ouverts

$$L^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : L(x) = a^T x - b > 0\}$$

$$L^- = \{x \in \mathbb{R}^n : L(x) = a^T x - b < 0\}$$

et les espaces fermés par $L \cup L^-$ ou $L \cup L^+$.

Définition II.20 (Convexité d'un ensemble) *On dit que A est un ensemble convexe, si pour tout x et y dans A et r, s dans \mathbb{R} avec $r \geq 0, s \geq 0, r + s = 1$ les points $rx + sy$ sont dans A .*

Théorème II.6 (Convexité d'une fonction) [Bertsekas, 1999] *Si f est une fonctionnelle définie sur un ensemble convexe A , f est convexe sur A si et seulement si le Hessien $\nabla^2 f$ est semi-définie positive dans tout A .*

Définition II.21 (Propriété d'une fonction convexe) [Bertsekas, 1999] *Si f est une fonction convexe, alors l'ensemble définie par $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$ est convexe*

Exemple II.5 *Dans l'espace \mathbb{R}^3 , un cube défini comme suit :*

$$A = \{(x_1, x_2, x_3); |x_1| \leq 1; |x_2| \leq 1; |x_3| \leq 1\}$$

est convexe

Exemple II.6 *Soit l'ensemble A dans \mathbb{R}^2 , défini par*

$$A = \{(x_1, x_2), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; (x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{3/2} \leq 1\}$$

Pour vérifier la convexité de l'ensemble A , il suffit juste de vérifier la convexité de la fonction $f(x_1, x_2) = (x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{3/2}$

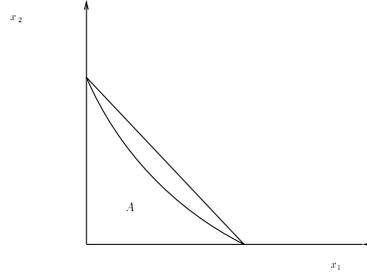
Le calcul du l'Hessien de f est:

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{-\frac{1}{2}} x_1^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{\frac{1}{2}} x_1^{-\frac{4}{3}} & \frac{1}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}} (x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}} (x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}(x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x_1^{2/3} + x_2^{2/3})^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\nabla^2 f$:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3} \frac{(x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} (x_2^{\frac{8}{3}} + x_1^2 x_2^{\frac{2}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}} x_2^2 + x_1^{\frac{8}{3}})}{x_1^{\frac{8}{3}} x_2^{\frac{4}{3}} + x_1^{\frac{4}{3}} x_2^{\frac{8}{3}} + 2x_1^2 x_2^2}$$

On remarque que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$, alors la matrice $\nabla^2 f$ est semi-définie négative, donc l'ensemble A n'est pas convexe. Cette conclusion est facilement vérifiable par une voie graphique (II.6).

Figure II.3: Ensemble A non convexe

Définition II.22 (Hyperplan tangent à une surface) Soient les équations suivantes dans R^n

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 0 \\ h_2(x) &= 0 \\ &\vdots \\ h_m(x) &= 0 \end{aligned}$$

définissant une surface de dimension $n - m$, alors l'hyperplan tangent à cette surface en un point régulier x est défini par :

$$M = \{y : (\nabla h(x))y = 0\}$$

Théorème II.7 (Théorème de séparation) [Athans et Falb, 1966]

Si C est un ensemble convexe et y un point sur la bordure de C , alors il existe un hyperplan qui contient y et l'ensemble C dans un de ses demi espaces fermés.

II.6.2 Critère de commandabilité

Proposition II.1 [Djeridane et Calvet, 2002] Sous l'hypothèse qu'il existe une loi de commande $u(x(k))$ telle que la matrice $(\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x})$ est de rang plein, une condition nécessaire de commandabilité du système (II.4) est que:

$$\text{rank}[P] = n$$

$$\text{où } P = [V_0 \ V_1 \ \cdots \ V_{N-1}] \quad N \leq n$$

avec

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} \\ V_1 &= \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right) \frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} \\ &\vdots \\ V_{N-1} &= \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right) \cdots \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \right) \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} \end{aligned}$$

Démonstration

Considérons une trajectoire d'état $x^* = \{x(0), x(1), \dots, x(k)\}$ maintenue sur la surface ∂C (bordure du domaine de commandabilité) par une commande $u(x(k))$ avec une condition initiale voisine de $x(0):\hat{x}(0)$, toujours sur la bordure, définie comme suit :

$$\hat{x}(0) = x(0) + \alpha \delta x(0, \alpha)$$

où $\delta x(0, \alpha)$ est un vecteur dirigé de $x(0)$ vers $\hat{x}(0)$ et $\alpha \in \mathfrak{R}$ un paramètre de variation de cette condition initiale.

Si on considère, toujours sur la bordure, une trajectoire perturbée:

$$\hat{x}(k) = x(k) + \alpha \delta x(k, \alpha) \quad k = 0, 1, \dots$$

il résulte à l'instant $(k + 1)$ que:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k + 1) &= x(k + 1) + \alpha \delta x(k + 1, \alpha) \\ &= f(\hat{x}(k), u(\hat{x}(k))) + \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

En utilisant le développement de Taylor au 1^{er} ordre de la fonction $f(x(k), u(x(k)))$, l'équation (II.5) peut être réécrite sous la forme:

$$\begin{aligned} x(k + 1) + \alpha \delta x(k + 1, \alpha) &= f(x(k), u(k)) + \\ &\alpha \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \delta x(k, \alpha) + \hat{x}(k) + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

où $O(\alpha^2)$ représente les termes d'ordre α^2 ou supérieur et l'expression entre crochets est évaluée en $x(k)$. Il résulte:

$$\delta x(k + 1, \alpha) = \left[\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \delta x(k, \alpha) + O(\alpha) \quad (\text{II.7})$$

Notons que l'hypothèse de convexité de la fonction $f(x(k), u(x(k)))$ implique l'existence d'un hyperplan tangent à la surface ∂C . Alors, pour le cas limite où $\alpha \rightarrow 0$, $\delta x(k, \alpha)$ tend vers le vecteur $e(k)$ que nous considérons tangent à ∂C au point $x(k)$.

Maintenant, reprenons l'équation (II.7) avec $\alpha \rightarrow 0$. on obtient l'expression suivante:

$$e(k + 1) = \left[\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] e(k)$$

avec

$$e(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta x(0, \alpha)$$

L'équation d'état précédente peut être réécrite sous la forme suivante:

$$e(k + 1) = \Phi(k + 1, k)e(k) \quad (\text{II.8})$$

dans laquelle

$$\Phi(k + 1, k) = \left[\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

représente la matrice de transition d'état et $e(k)$ représente une variation infinitésimale de la trajectoire x^* .

Si l'on considère un vecteur $\lambda(k)$ de dimension n qui satisfait l'équation d'état adjointe:

$$\lambda(k) = [\Phi(k+1, k)]^T \lambda(k+1)$$

on remarque alors que le produit scalaire:

$$\begin{aligned} \lambda^T(k+1)e(k+1) &= \lambda^T(k)\Phi(k, k+1)\Phi(k+1, k)e(k) \\ &= \lambda^T(k)e(k) \end{aligned}$$

est constant pour tout $k = 0, 1, \dots$

Avec un choix judicieux du vecteur adjoint initial $\lambda(0)$ perpendiculaire à $e(0)$ au point $x(0)$ et dirigé vers l'extérieur de C , il résulte que $\lambda^T(k)e(k) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots$. Le vecteur adjoint $\lambda(k)$ est donc normal extérieur à la bordure du domaine de la commandabilité ∂C en chaque point $x(k)$.

La trajectoire d'état à l'instant $k+1$ ($x(k+1)$) provient de l'état $x(k)$ selon la direction $f(x(k), u(k))$. Or, aucune trajectoire ne peut provenir de l'extérieur du domaine de commandabilité. Il ressort donc que pour tout vecteur $\lambda(k+1)$ normal extérieur au plan tangent à la bordure ∂C en $x(k+1)$, on a la relation:

$$\lambda^T(k+1)f(x(k), u(k)) \geq 0$$

Si l'on considère qu'il existe une stratégie de commande $u(x(k))$ qui génère une trajectoire x^* sur la bordure, on a alors:

$$\lambda^T(k+1)f(x(k), u(x(k))) = 0$$

On déduit donc que toute commande admissible $u(x(k))$ qui génère une trajectoire d'état x^* sur la bordure du domaine de commandabilité est telle qu'il existe une trajectoire d'état adjoint constituée de vecteurs non nuls $\lambda(k+1)$ normaux extérieurs aux plans tangents à cette bordure en $x(k+1)$ et vérifiant l'équation:

$$\lambda(k) = \left[I + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right]^T \lambda(k+1)$$

telle que

$$0 = H(x(k), u(x(k)), \lambda(k+1)) \leq H(x(k), u(k), \lambda(k+1))$$

où H désigne la fonction hamiltonienne du système, soit:

$$H(x(k), u(k), \lambda(k+1)) = \lambda^T(k+1)f(x(k), u(k)) \quad k = 0, 1, \dots$$

En résumé, l'existence d'une bordure de commandabilité implique qu'il existe une séquence de vecteurs normaux extérieurs non nuls $\lambda(k+1)$ qui minimisent le hamiltonien du système.

La condition $\lambda(k+1) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots$ permet donc de conclure à la non existence d'une bordure de commandabilité et par là-même à la commandabilité du système sur tout l'espace d'état.

Le problème de minimisation se résout comme suit [Bryson et Ho, 1975]:

$$\begin{aligned} x(k+1) - x(k) &= f(x(k), u(k)) \\ \lambda(k) &= \left(I + \frac{\partial f_{u(k)}(x(k))}{\partial x(k)} \right)^T \lambda(k+1) \\ 0 &= \lambda^T(k+1) \frac{\partial f_{u(k)}(x(k))}{\partial u(k)} \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Après itérations sur les deux dernières équations, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} \right]^T \lambda(N) \\ 0 &= \left[\frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} \right]^T \left[\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right]^T \lambda(N) \\ &\vdots \\ 0 &= \left[\frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} \right]^T \left[\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \right]^T \dots \left[\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right]^T \lambda(N) \end{aligned}$$

qui peut être réécrite sous la forme:

$$0^T = \lambda^T(N)P$$

où P :

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right) \frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} \dots \right. \\ &\quad \left. \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right) \dots \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \right) \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Ainsi, une condition nécessaire pour que $\lambda(k)$ ne puisse pas être nul est que $\text{rang}[P] = n$.

Remarque II.4 *Un résultat similaire peut être obtenu pour le cas des systèmes non linéaires décrits par l'équation suivante:*

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

Dans ce cas, l'opérateur $\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial x}$ doit être remplacé par $\frac{\partial f}{\partial x}$ dans les formules précédentes.

II.6.3 Système linéaire

On considère le système linéaire décrit par :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{II.10})$$

où $u(k) \in \mathfrak{R}^m$, $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, et A , B sont des matrices de dimension $n \times n$ et $n \times m$ respectivement. On peut vérifier facilement qu'à partir du principe du minimum, on aboutit au critère de Kalman.

En premier lieu définissons le hamiltonien :

$$H^k = \lambda^T(k+1)(Ax(k) + Bu(k)) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

avec $\lambda(k)$ satisfaisant l'équation adjointe :

$$\lambda(k) = A^T \lambda(k+1)$$

La condition de stationarité de H^k s'écrit:

$$0 = \lambda^T(k+1)B \quad \text{for } k = 0, \dots, N-1$$

Ceci donne après itérations successives et substitutions:

$$\begin{aligned} \lambda(N)B^T &= 0 \\ \lambda(N)B^T A^T &= 0 \\ \vdots & \\ \lambda(N)B^T (A^{N-1})^T &= 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\lambda(N) P^T = 0$$

avec

$$P = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{N-1}B]$$

où la matrice P correspond bien à celle définie par Kalman.

Il faut souligner que la matrice P est invariante sous un changement de base. La propriété d'invariance sera développée plus tard dans le chapitre 3. Ceci nous a permis de développer une condition nécessaire de commandabilité ; cependant l'équivalent de cette condition dans le cas continu n'est pas vrai.

II.6.4 Système bilinéaire

L'étude des systèmes bilinéaires à temps discret a fait l'objet de nombreuses recherches. Cela peut s'expliquer par la relative simplicité analytique du modèle et d'autre part, par l'existence d'applications pratiques issues de processus industriels, processus biologiques ou processus socio-économiques [Bruni *et al.*, 1974].

Les systèmes bilinéaires peuvent être vus comme une introduction à l'analyse des systèmes non linéaires à temps discret.

Les systèmes bilinéaires à temps discret considérés dans cette section sont caractérisés par deux matrices A et Q , où A est une matrice liée à la partie linéaire du modèle, tandis que Q est une matrice liée à la partie bilinéaire du modèle, soit:

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^m u_i(k)Q_i x(k) \quad (\text{II.11})$$

où $x(k)$ est un vecteur de dimension n , $u_i(k)$ une commande scalaire, et les matrices A et Q_1, Q_2, \dots, Q_m sont de dimension $n \times n$.

[Goka *et al.*, 1973] ont proposé une méthode pour l'analyse de la commandabilité de ce type de systèmes. Celle-ci est basée sur une décomposition du système bilinéaire en un système linéaire et une contre réaction multiplicative. Cette approche conduit à deux conditions: l'une suffisante, l'autre nécessaire. Elle impose en plus une condition d'orthogonalité $\text{rang}(Q) = 1$ où Q est factorisable en deux vecteurs.

Evans et Murthy [Evans et Murthy, 1977] ont proposé une condition nécessaire et suffisante globale de commandabilité. En plus de la décomposition en deux systèmes comme dans [Goka *et al.*, 1973], suppose l'inversibilité de la matrice A .

D'un point de vue plus général, les systèmes bilinéaires peuvent être par exemple étudiés par les outils de la géométrie différentielle. Une condition nécessaire et suffisante a été ainsi développée dans [Normand-Cyrot, 1983]. Cette approche impose l'inversibilité de $(A + u_i(k)Q)$, provenant de l'utilisation des champs de vecteurs.

On présente dans cette section un critère pour l'étude de la commandabilité des systèmes bilinéaires homogènes (II.11) similaire à celui développé dans [Normand-Cyrot, 1983], mais avec une condition d'application relaxée.

Proposition II.2 *Le système bilinéaire décrit par l'équation (II.11) dans laquelle les séquences de commande sont telles que la matrice $(A + u_1(k)Q_1 + \dots + u_m(k)Q_m + Q_1 x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + Q_m x \frac{\partial u_m}{\partial x})$ est de rang plein, est commandable localement avec de "petites" commandes en $x(0)$ si et seulement si [Djeridane et Calvet, 2004a] la matrice:*

$$C = \begin{bmatrix} Q_1 A^{N-1} x(0) & A Q_1 A^{N-2} x(0) & \dots & A^{N-1} Q_1 x(0) \\ Q_2 A^{N-1} x(0) & A Q_2 A^{N-2} x(0) & \dots & A^{N-1} Q_2 x(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m A^{N-1} x(0) & A Q_m A^{N-2} x(0) & \dots & A^{N-1} Q_m x(0) \end{bmatrix}$$

est de rang plein.

Démonstration

Pour une question de simplicité, on limite dans un premier temps la démonstration au cas d'un système bilinéaire à temps discret homogène mono-entrée.

Considérons alors la fonction de transition de l'état $x(0)$ vers l'état $x(N)$

$$\begin{aligned} x(N) &= f_u(N-1) \circ \dots \circ f_{u(1)} \circ f_{u(0)}(x(0)) \\ &= \Gamma_{N-1}(x(0)) \end{aligned}$$

avec $f_{u(k)}(x(k)) = f(x(k), u(k))$

Un développement de Taylor de l'équation précédente par rapport à la commande, conduit à:

$$\begin{aligned}
x(N) &= f_{u(N-1)} \circ \cdots \circ f_{u(1)} \circ f_{u(0)}(x(0))|_{\underline{u}=0} \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_{u(N-1)}(x(0))}{\partial u(N-1)} \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(0))}{\partial u(N-2)} \cdots \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(0))}{\partial u(0)} \right] |_{\underline{u}=0} \underline{u} \\
&\quad + O(u^2) \\
&= A^N x(0) + P|_{\underline{u}=0} \underline{u} + O(u^2)
\end{aligned}$$

avec $\underline{u}^T = (u(N-1)^T \cdots u(1)^T u(0)^T)$ et

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} & \left(\frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right) \frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} & \cdots \\ \left(\frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \right) \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Démonstration de la nécessité

La démonstration de la nécessité du critère résulte directement de l'application du critère défini section II.1.

Considérons pour cela le système bilinéaire suivant:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + u(k)Qx(k) \\
&= f(x(k), u(k))
\end{aligned} \tag{II.12}$$

Il ressort en effet de l'application de ce critère au système bilinéaire mono-entrée que:

$$\frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} = A + u(k)Q, \quad \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} = Qx(k)$$

et que la matrice: $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (A + u(k)Q + Qx \frac{\partial u}{\partial x})$,

ce qui donne

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} Qx(N-1) & (A + u(N-1)Q)Qx(N-2) \\ \cdots & (A + u(N-1)Q) \cdots (A + u(1)Q)Qx(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Après substitution dans la matrice P des variables d'état par composition de fonctions avec des commandes nulles, c-a-d $x(k) = f_0 \circ f_0 \cdots \circ f_0(x(0)) = A^k x(0)$, on obtient:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} QA^{N-1}x(0) & (A + u(N-1)Q)QA^{N-2}x(0) \\ \cdots & (A + u(N-1)Q) \cdots (A + u(1)Q)Qx(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice C définie dans la proposition II.2 résulte de la substitution des séquences de commandes nulles $u(0), u(1), \cdots, u(N-1)$ dans la matrice présentée ci-dessus.

En d'autres mots, on néglige les termes de commande d'ordre supérieur à 2. Cette supposition attribue un caractère local au critère de commandabilité.

Démonstration de la suffisance

On suppose que C est de rang plein. On essaye de trouver des séquences de commandes qui permettent à partir des conditions initiales $x(0)$ d'atteindre l'objectif $x(N)$.

Si $x(0)$ est l'état initial, comme on a pu le voir, une approximation de l'état final peut être exprimée par l'équation suivante:

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} Q A^k x(0) u(k) + O(u^2)$$

Si on néglige les termes $O(u^2)$, on obtient:

$$x(N) = A^N x(0) + C \underline{u} \tag{II.13}$$

avec $\underline{u}^T = (u(N-1)^T \quad \dots \quad u(1)^T \quad u(0)^T)$

Si on suppose que C est de rang plein, on peut alors déterminer une séquence de commandes \underline{u} qui transfère l'état initial $x(0)$ vers l'état final $x(N)$. On peut par exemple chercher une séquence de commandes \underline{u} qui minimise la fonction de coût suivante:

$$\sum_{k=0}^{N-1} r(x(k), u(k))$$

avec $r(x(k), u(k)) = u^2(k)$.

dont la solution correspond à une pseudo-inverse généralisée, soit

$$\underline{u} = C^T [C C^T]^{-1} [x(N) - A^N x(0)]$$

dans laquelle, pour le cas d'un système mono-entrée, la matrice C prend donc la forme suivante:

$$[Q A^{N-1} x(0) \quad A Q A^{N-2} x(0) \quad \dots \quad A^{N-1} Q x(0)]$$

Remarque II.5 *L'extension de la démonstration présentée ci-dessus au cas des systèmes bilinéaires multi-entrées, se fait de la manière suivante:*

Démonstration de la nécessité:

On considère l'équation:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + \sum_{i=1}^m u_i(k) Q_i x(k) \\ &= f(x(k), u(k)) \end{aligned}$$

dont il résulte que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} &= A + \sum_{i=1}^m u_i(k) Q_i \\ \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} &= \sum_i^m Q_i x(k) \end{aligned}$$

On remplace ces expressions dans la matrice P avec $x(k) = A^k x(0)$ et des séquences de commandes supposées nulles. On obtient, alors la matrice énoncée dans la proposition II.2.

Démonstration de la suffisance du critère:

On peut calculer l'état final $x(N)$ à partir de l'approximation suivante:

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^m A^{N-1-k} Q_i A^k x(0) u_i(k) + O(u^2)$$

et si l'on néglige les termes en commande $O(u^2)$, on obtient:

$$x(N) = A^N x(0) + C \underline{u}$$

Il suffit alors que C soit de rang plein pour qu'une séquence de commandes existe. Par exemple, si l'on cherche à minimiser le critère:

$$\sum_{k=0}^{N-1} r(x(k), u(k))$$

avec $r(x(k), u(k)) = u_1^2(k) + u_2^2(k) + \dots + u_m^2(k)$

on obtient la solution suivante:

$$\underline{u} = C^T [C C^T]^{-1} [x(N) - A^N x(0)]$$

Exemple II.7 Soit l'exemple suivant:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + u(k)x_2(k) \end{aligned}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le domaine des commandes admissibles est défini dans [Normand-Cyrot, 1983] comme étant l'ensemble des séquences de commande qui assurent que $(A + u(k)Q)$ est de rang plein.

Si on considère, par exemple la loi de commande:

$$u(k) = \alpha^T x(k)$$

où $\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2]$ et $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, on obtient:

$$A + u(k)Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 + \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \end{bmatrix}$$

Il est évident que cette matrice $(A + u(k)Q)$ n'est pas de rang plein. On peut donc conclure que la loi de commande $\alpha^T x$ n'appartient pas au domaine des commandes admissibles, ce qui empêche a priori de conclure sur la commandabilité du système.

Par contre, la condition développée dans notre proposition apparaît bien comme une condition relaxée, dans la mesure où la matrice:

$$A + uQ + Qx \frac{\partial u}{\partial x} = A + \alpha^T x Q + Qx \alpha^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 x_2(k) & 1 + \alpha_1 x_2(k) + 2\alpha_2 x_2(k) \end{bmatrix}$$

peut être rendue inversible par un choix approprié du α . Le calcul de la matrice de commandabilité donne alors:

$$C = [AQx(0) \quad QAx(0)] = \begin{bmatrix} x_2(0) & 0 \\ x_2(0) & x_2(0) \end{bmatrix}$$

qui est de rang plein, si $x_2(0) \neq 0$.

On peut alors conclure que le système bilinéaire à temps discret est commandable pour tout $x_2(0)$ différent de zéro.

Remarque II.6 Notons enfin, que la condition développée pour le cas des systèmes bilinéaires homogènes peut être facilement étendue au cas des systèmes bilinéaires non homogènes en modifiant la matrice C dans l'expression du critère, de la façon suivante:

Considérons par exemple le système bilinéaire non homogène mono-entrée:

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k)Qx(k) + bu(k)$$

dans laquelle les séquences de commandes telles que la matrice $(A + u(k)Q + (Qx + b) \frac{\partial u}{\partial x})$ est de rang plein.

Le système est alors localement commandable si et seulement si la matrice:

$$C = [QA^{N-1}x(0) + b \quad AQA^{N-2}x(0) + Ab \quad \dots \quad A^{N-1}Qx(0) + A^{N-1}b]$$

est de rang plein.

II.6.5 Un exemple non linéaire

On étudie ici la commandabilité du système non linéaire discret non inversible suivant [Lee *et al.*, 1987]:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) - u^2(k) \\ x_2(k+1) &= u(k) \end{aligned}$$

Le calcul de la jacobienne de la fonction d'évolution donne la matrice suivante :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qui en effet, n'est pas inversible.

Si l'on considère maintenant :

$$\Theta = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(x(k))} \frac{\partial u(x(k))}{\partial x(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2u(k) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

et si l'on prend, par exemple $u(k) = x_1(k)$, on obtient :

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_1(k) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(k) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque facilement que Θ est inversible pour $u(k) = x_1(k)$. Par calcul, on obtient la matrice de commandabilité suivante :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial u(1)} & \frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} \frac{\partial f(x(0), u(0))}{\partial u(0)} \end{bmatrix}$$

où

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2u(1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est de rang plein $\forall u(k)$, ce qui permet de conclure que la condition nécessaire de commandabilité du système est satisfaite.

II.6.6 Lien avec l'approche composition de fonctions

On remarque que le critère développé dans la section II.6.2 est équivalent à celui présenté section II.3.2, obtenu par une approche composition de fonctions.

Rappelons pour cela le théorème suivant :

Théorème II.8 (règle de la chaîne) [Isidori, 1989] *Si $g(x)$ est une fonction différentiable par rapport à x et $f(y)$ une fonction différentiable par rapport à $y = g(x)$, alors $f(g(x))$ est différentiable par rapport à x et $\frac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} \Big|_{y=g(x)} \frac{\partial g(x)}{\partial x}$.*

Si l'on considère la composition de fonctions :

$$x(N) = f_{u(N-1)} \circ \cdots \circ f_{u(1)} \circ f_{u(0)}(x(0)) \quad (\text{II.14})$$

que l'on notera encore :

$$x(N) = \Gamma_{N-1}(x(0), u) \quad (\text{II.15})$$

la condition nécessaire et suffisante d'accessibilité précédemment rappelée dans la section II.3.2 peut être alors réécrite sous la forme suivante :

$$\text{rang}(P) = n$$

où

$$P = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(N-1)} & \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(N-2)} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(1)} & \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(0)} \end{array} \right] \in \mathfrak{R}^{n \times Nm} \quad (\text{II.16})$$

On peut alors écrire, en appliquant le Théorème II.8 au calcul des dérivées partielles de $\Gamma_{N-1}(x(0), u)$ par rapport $u(k)$ pour $k = 0, 1, \dots, N-1$ de la fonction de composition:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(N-1)} &= \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} \\ \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(N-2)} &= \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0), u)}{\partial u(0)} &= \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \dots \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} \end{aligned}$$

et reformuler la " matrice d'accessibilité " P de la manière suivante :

$$P = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} & \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} \frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} & \dots & \\ \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} & \dots & \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} & \end{array} \right]$$

Présentée sous cette forme, la condition nécessaire et suffisante d'accessibilité correspond à la condition nécessaire de commandabilité obtenue dans le section II.6.2, par application du principe du minimum.

Remarque II.7 *Il y a donc équivalence entre le critère basé sur le principe du maximum et celui basé sur le principe de la fonction de composition. On notera toutefois que le critère issu du principe du maximum implique moins de compositions de fonctions, et n'utilise que de simples opérateurs.*

II.7 Accessibilité des systèmes à temps discret sous contraintes

II.7.1 Introduction

Dans plusieurs applications pratiques, on est face à différent problèmes de systèmes contraints. Par exemple, considérons le problème d'un lanceur qui suit une trajectoire donnée: on est limité par la puissance des moteurs. En économie, on a une limitation sur les revenus. Dans cette section on s'intéresse à la commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret, avec des commandes sous contraintes. Cet axe de recherche est loin d'être maîtrisé et il reste beaucoup de problèmes non résolus.

La première partie aborde de la commandabilité des systèmes linéaires à temps discret tandis que la seconde partie aborde de la commandabilité des systèmes non linéaires.

Pour le cas des systèmes linéaires stationnaires, quelques approches ont été développées. Dans [Ahmed, 1985] un critère de commandabilité a été proposé pour le cas des systèmes linéaires sous commandes contraintes sous l'hypothèse que la commande appartient à un ensemble convexe ou compact. Cette approche implique la résolution d'un

problème d'optimisation de dimension infinie. Nous évoquerons dans la section II.7.2 une approche développée par Vu Ngoc Phat dans [Phat, 1996] qui présente un cadre d'étude pour la commandabilité des systèmes linéaires stationnaires et non stationnaires sous commandes contraintes et états contraints, en utilisant les outils de l'algèbre linéaire et la théorie des ensembles.

Dans le cas non linéaire, peu de travaux de recherches traitent de la commandabilité sous contraintes. Dans notre recherche bibliographique on a seulement trouvé les travaux de Vu Ngoc Phat [Phat, 1996] sur des classes particulières de systèmes non linéaires sous commandes contraintes (quasilinéaire, non linéaire, 2-D non linéaire). L'approche présentée dans la section II.7.3 est identique à celle proposée dans [Phat, 1996] pour le cas des systèmes non linéaires à commandes contraintes.

II.7.2 Accessibilité de systèmes linéaires discrets

On considère le système linéaire à temps discret sous commandes contraintes et états contraints:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{II.17})$$

où $x(k) \in X = \mathbb{R}^n, u(k) \in \Omega \in \mathbb{R}^m$ ensemble convexe.

Définition II.23 *On dit que le vecteur x est supporté sur Ω , si $\langle x, u \rangle \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$.*

où $\langle x, y \rangle$ représente le produit scalaire entre le vecteur x et le covecteur y de dimension n .

Définition II.24 *On dit que le vecteur x est orthogonal à Ω si $\langle x, u \rangle = 0$ pour tout $u \in \Omega$.*

On présente une variante du théorème de Krein-Rutman pour un opérateur linéaire A [Phat, 1996].

Théorème II.9 *Soit A un opérateur linéaire et R un cône convexe, satisfaisant $\text{int}R \neq \emptyset$ et $R \neq X$. Si R est invariant sous A ($AR \subset R$), alors il existe un vecteur $v^* \in R^*$ (R^* est le cône dual de R), tel que;*

$$A^T v^* = \lambda v^*, \lambda \geq 0$$

La condition de commandabilité des systèmes linéaires sous commandes contraintes est équivalente à celle des systèmes linéaires sans commandes contraintes, plus une condition additionnelle liée à l'effet des contraintes sur la commande. Elle est exprimé par le théorème suivant:

Théorème II.10 [Phat, 1996]

Le système linéaire à temps discret est commandable si et seulement si:

1. le système linéaire à temps discret (II.17) sans contraintes est commandable.
2. La matrice A^T n'admet pas de vecteurs propres réels (associés à des valeurs propres non réelles négatives) supportés sur $B\Omega$. Elle n'admet pas, non plus, des vecteurs propres complexes (associés à des valeurs propres complexes) orthogonaux sur Ω .

Ce résultat est obtenu par application directe du Théorème II.9. Plus précisément, ce théorème assure que l'ensemble d'atteignabilité est invariant sous l'opérateur A , soit :

$$AR \subset R$$

La première condition assure l'existence d'un ensemble d'atteignabilité, qui est traduite par la condition de commandabilité $\text{rang}[B, AB, \dots, AB^{n-1}] = n$. La seconde condition assure que l'espace d'atteignabilité est invariant sous A .

Exemple II.8 Soit l'exemple numérique suivant :

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^2$ et $-1 \leq u(k) \leq 1$.

En calculant la matrice de Kalman, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que le $\text{rang}[P] = 2$, ce qui signifie que le système linéaire à temps discret sans contraintes est commandable.

Le calcul des vecteurs propres et les valeurs propres associées conduit à :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 10 + i3.8 &\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -0.79 \\ i0.61 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 10 - i3.8 &\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -0.79 \\ -i0.61 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont complexes. Il suffit donc de vérifier que $v_i u \neq 0$. Comme $u(k) = 0$ appartient au domaine des commandes admissibles Ω , il résulte que le système linéaire est non commandable sous ces contraintes.

II.7.3 Accessibilité de systèmes non linéaires discrets

La condition de commandabilité développée dans cette section est également présentée dans [Phat, 1996]. Elle fournit seulement une condition nécessaire.

Soit le système non linéaire à temps discret suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, f est une fonction analytique et Ω ensemble des commandes contraintes.

Une condition nécessaire de commandabilité est que:

$$\text{rang}[P] = n$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial u(N-1)} & \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} & \frac{\partial f_{u(N-2)}(x(N-2))}{\partial u(N-2)} & \dots \\ \frac{\partial f_{u(N-1)}(x(N-1))}{\partial x(N-1)} & \dots & \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} & \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

où f est une fonction analytique et $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $u(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$. L'ensemble Ω est ici a priori quelconque.

Il est à noter que l'application de ce critère au cas d'un système linéaire invariant se réduit à la première condition de commandabilité (sans contraintes) du théorème II.10

Exemple II.9 Soit le système non linéaire à temps discret sous commandes contraintes:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) - u^2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - u(k) \end{aligned}$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^2$ et $-1 \leq u(k) \leq 1$.

La matrice de commandabilité conduit à:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2u(1) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant:

$$\det(P) = 1 + 2u(1)$$

Tenant compte de la contrainte sur la commande:

$$-1 \leq 1 + 2u(1) \leq 2$$

il ressort que le déterminant de P peut s'annuler et que le rang de la matrice P peut devenir inférieur à 2. Ce système non linéaire est donc non commandable dans \mathbb{R}^2 .

II.8 Conclusion

En étudiant la commandabilité des systèmes non linéaires discret par le biais de différentes techniques, il ressort que la méthode la plus intuitive est la méthode de composition qui consiste à vérifier le rang d'une matrice issue de l'utilisation de l'opérateur jacobien sur

la fonction de transition. Malheureusement cette technique ne peut pas être exploitable de façon générale à cause de sa lourdeur calculatoire.

On a alors présenté la commandabilité d'un point de vue géométrique, qui consiste à construire des champs de vecteurs artificiels au système non linéaire à temps discret, en utilisant la jacobienne de la fonction d'évolution. La remarque qui peut être faite sur la géométrie différentielle, est l'exigence de l'inversibilité de la fonction d'évolution.

On s'est ensuite orienté vers une méthode plus algébrique qui s'inscrit très bien dans l'esprit des systèmes discrets, du fait qu'on construit des sous-espaces de filtration de façon simple et avec un nombre fini d'opérations algébriques.

On a terminé l'analyse de commandabilité des systèmes non linéaires discrets avec une proposition basée sur le principe du maximum qui fait apparaître une condition sur la fonction d'évolution plus relaxée que celle associée à l'approche géométrie différentielle. Enfin, l'analyse de commandabilité sous contraintes est abordée en fin de chapitre.

Chapter III

Inversion entrée-état

Sommaire

III.1	Introduction	62
III.2	Composition de fonction	63
III.2.1	Linéarisation jacobienne	63
III.2.2	Approche optimisation non linéaire	65
III.2.3	Approche algébrique	67
III.3	Linéarisation entrée-état	72
III.3.1	Approche géométrie différentielle	73
III.3.2	Approche algèbre différentielle	91
III.4	Conclusion	95

III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté différentes approches pour l'analyse de l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la synthèse d'une loi de commande qui assure le transfert d'un état initial donné du système vers un état final donné en un temps fini. Ce problème, énoncé de cette façon, sera aussi appelé "inversion entrée-état".

Pour les systèmes linéaires, ce problème renvoie au problème de commandabilité étudié par Kalman qui peut être aisément résolu à partir d'un calcul de pseudo-inverse. Pour les systèmes non linéaires, il peut apparaître alors très naturel de faire appel aux techniques de linéarisation.

A notre connaissance, le problème d'inversion entrée-état n'a pas fait l'objet d'un traitement particulier dans la littérature. Par contre, le problème entrée-sortie qui consiste à déterminer la loi de commande assurant le suivi d'une trajectoire de consigne donnée a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, tels que [Kotta, 1990], [Normand-Cyrot, 1983]. Citons, comme application, le problème de suivi de trajectoires, en robotique par exemple [Rouchon *et al.*, 1993].

La première approche est basée sur une composition a priori de la fonction d'évolution. On considère tout d'abord la résolution du problème d'inversion entrée-état par l'utilisation d'une méthode approchée, consistant en une linéarisation jacobienne du système autour d'un point d'équilibre. Une fois cette linéarisation effectuée, on procède à l'inversion du système linéaire en utilisant les outils de l'algèbre linéaire. On présente ensuite une approche basée sur une formulation du problème d'inversion à partir d'un problème d'optimisation classique. Cette approche est exacte mais constitue cependant une approche lourde d'un point de vue calcul. Enfin, on propose une méthode algébrique d'inversion entrée-état. La solution est basée sur la linéarisation exacte de la fonction de transition composée, ce qui peut toutefois présenter l'inconvénient de ne s'adresser qu'à une classe plus réduite de systèmes non linéaires.

La deuxième partie concerne la résolution du problème d'inversion par l'utilisation de techniques de linéarisation exacte entrée-état. Ces techniques consistent à transformer un système non linéaire en un système linéaire par un changement de coordonnées et un retour d'état linéarisant. Deux voies sont présentées. L'une d'elle utilise la géométrie différentielle. Jayarman propose dans [Jayaraman, 1995] une linéarisation exacte pour les systèmes non linéaires dont l'équation d'évolution est inversible par rapport à l'état, basée sur la construction de champs de vecteurs artificiels liés au système. L'autre voie utilise l'algèbre différentielle. Aranda-Bricaire dans [Aranda-Bricaire, 1994] propose une linéarisation exacte pour les systèmes non linéaires, dont la fonction d'évolution est submersive en utilisant les outils de l'algèbre différentielle pour la construction de 1-formes. On propose enfin une méthode de linéarisation exacte d'un système non linéaire à partir de la géométrie différentielle, et en considérant un ensemble de sorties virtuelles linéaires par rapport à l'état.

III.2 Composition de fonction

Soit le système non linéaire à temps discret:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (\text{III.1})$$

où $f(x(k), u(k))$ est une fonction analytique dans \mathfrak{R}^n , $x(k) \in X \subset \mathfrak{R}^n$ et $u(k) \in U \subset \mathfrak{R}^m$.

On utilisera également la notation $f_{u(k)}(x(k))$ pour représenter $f(x(k), u(k))$ lorsque celle-ci s'avèrera plus pratique, lors de processus de composition de fonctions par exemple.

III.2.1 Linéarisation jacobienne

L'approche la plus traditionnelle est de linéariser le problème pour pouvoir appliquer les techniques développées pour l'inversion des systèmes linéaires à temps discret [Alonso, 2000]. La linéarisation qu'on appliquera, de type Taylor, est la plus simple possible. Rappelons pour cela, la linéarisation de Taylor d'une fonction $f(x, y)$ différentiable autour d'un point $x = a$ et $y = b$, soit:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a, y=b} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=a, y=b} + \dots$$

Appliqué à l'équation de transition d'état, ceci conduit, par exemple, à considérer une linéarisation autour des points d'équilibre du système $x^* \in \mathfrak{R}^n$ et $u^* \in \mathfrak{R}^m$.

La nouvelle équation d'évolution linéarisée du système devient donc:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) = f(x^*, u^*) + \frac{\partial f}{\partial x(k)} \Big|_{x(k)=x^*, u(k)=u^*} (x(k) - x^*) + \frac{\partial f}{\partial u(k)} \Big|_{x(k)=x^*, u(k)=u^*} (u(k) - u^*)$$

de la forme suivante:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \Delta$$

L'équation de transition obtenue est donc une équation affine dans laquelle A et B sont des matrices et Δ représente un vecteur contenant les termes de l'expansion de Taylor dépendant uniquement des valeurs des constantes, x^* et u^* .

On peut procéder maintenant à la résolution de ce système.

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) + \Delta \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) + \Delta = A^2x(0) + A\Delta + A + ABu(0) + Bu(1) \\ &\vdots \\ x(p) &= A^p x(0) + A^{p-1}\Delta + \dots + A\Delta + \Delta + A^{p-1}Bu(0) + \dots + ABu(p-2) + Bu(p-1) \end{aligned}$$

et reformuler comme suit la solution x à l'instant p .

$$[x(p) - A^p x(0) - A^{p-1} \Delta - \dots - A \Delta - \Delta] = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{p-1} B] \begin{bmatrix} u(p-1) \\ u(p-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

On se retrouve alors face à un système sur déterminé et à un problème de pseudo inversion.

Exemple III.1 *Considérons le système linéaire:*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

où:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T_e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ T_e \end{pmatrix}, T_e = 0.3$$

avec $x(k) \in X \subset \mathfrak{R}^2$, $u(k) \in U \subset \mathfrak{R}$, $X = [-1, 1]$ et $U = \{u \in \mathfrak{R} / |u(k)| \leq 1\}$.

On peut vérifier facilement que le système linéaire non contraint est commandable dans tout \mathfrak{R}^2 par l'utilisation du critère de Kalman.

La détermination d'une loi de commande assurant une transition entre n'importe quel état $x(k)$ et n'importe quel autre état $x(k+2)$ peut être réalisée à-travers la minimisation du critère:

$$u^T(k)u(k)$$

dont la solution peut être exprimée en terme de pseudo inverse:

$$\underline{u} = [C^T C]^{-1} C^T [x(2) - A^2 x(0)]$$

où $C = [B \quad AB]$ et $\underline{u}^T = [u^T(1) \quad u^T(0)]$.

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1}{T_e^4} ((T_e^2 + 1)(x_1(2) - x_1(0) - 2T_e x_2(0)) + x_2(0) - x_2(2)) \\ u(0) &= \frac{1}{T_e^4} (x_1(2) - x_1(0) - 2T_e x_2(0) + x_2(2) - x_2(0)) \end{aligned}$$

On peut alors déterminer la structure de la matrice de transition entrée états en résolvant le problème précédent sur un nombre fini d'états possibles.

Notons qu'une telle approche permet de résoudre le problème de commandabilité sous des contraintes de borne sur les variables d'état et de commande. Reconsidérons par exemple le système précédent dans lequel $x(k) \in X \subset \mathfrak{R}^2$ et $u(k) \in U \subset \mathfrak{R}$ avec $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $U = [0, 1]$.

La figure III.1 dresse ainsi une carte de la commandabilité du système linéaire établie à partir de la quantification des variables d'état avec une résolution de 0.2, rangées de façon lexicographique [Hackbush, 1985].

Remarque III.1 *On soulignera cependant qu'une telle approche, par approximation, dans laquelle on peut perdre beaucoup d'information sur la structure du système n'est pas toujours satisfaisante et qu'il y a des systèmes non linéaires commandables dont la linéarisation n'est pas commandable. Cela justifie l'importance des méthodes non linéaristes.*

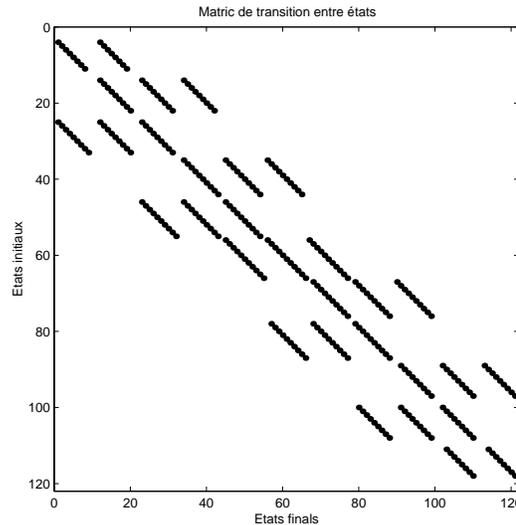


Figure III.1: Matrice de transition entre états

III.2.2 Approche optimisation non linéaire

III.2.2.1 Formulation du problème d'optimisation

On peut formuler le problème d'inversion entrées-états comme un problème de commande optimale. Le problème est de trouver les commandes $u(k)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ permettant de faire évoluer le processus de l'état initial $x(0)$ pris à l'instant $k=0$ vers l'état final $x(N)$ pris à l'instant $k=N$, tout en minimisant le critère suivant:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} u^T(i) R u(i) + x^T(i) Q x(i)$$

dans lequel matrices R et Q sont symétriques, Q est définie non négative et R est définie positive. Ce type de problème avec critère quadratique, ou énergétique est très courant dans la pratique, notamment parce qu'il peut conduire à une structure de commande optimale en boucle fermée.

Une approche systématique pour résoudre un tel problème est fournie par la programmation non linéaire [Calvet *et al.*, 2001].

III.2.2.2 Résolution du problème

Aux diverses contraintes imposées par le problème à résoudre qui correspondent ici aux équations d'état, nous associerons le paramètre de Lagrange de $\lambda(k)$. Le problème se réduit alors à satisfaire les conditions de stationarité de la fonction de Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} x^T(0) Q x(0) + \dots + \frac{1}{2} x^T(N-1) Q x(N-1) + \frac{1}{2} u^T(0) R u(0) + \dots + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) + \lambda^T(0) (x(1) - f(x(0), u(0))) + \dots + \lambda^T(N-1) (x(N) - f(x(N-1), u(N-1)))$$

qu'on peut résumer de la façon suivante:

équations d'optimalité

$$\frac{\partial L}{\partial u(0)} = Ru(0) - \left[\frac{\partial f(x(0), u(0))}{\partial u(0)} \right]^T \lambda(0) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u(1)} = Ru(1) - \left[\frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial u(1)} \right]^T \lambda(1) = 0$$

⋮

$$\frac{\partial L}{\partial u(N-1)} = Ru(N-1) - \left[\frac{\partial f(x(N-1), u(N-1))}{\partial u(N-1)} \right]^T \lambda(N-1) = 0$$

équations adjointes

$$\frac{\partial L}{\partial x(1)} = Qx(1) + \lambda(0) - \left[\frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} \right]^T \lambda(1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(2)} = Qx(2) + \lambda(1) - \left[\frac{\partial f(x(2), u(2))}{\partial x(2)} \right]^T \lambda(2) = 0$$

⋮

$$\frac{\partial L}{\partial x(N-1)} = Qx(N-1) + \lambda(N-2) - \left[\frac{\partial f(x(N-1), u(N-1))}{\partial x(N-1)} \right]^T \lambda(N-1) = 0$$

équations des contraintes

$$x(1) - f(x(0), u(0)) = 0$$

$$x(2) - f(x(1), u(1)) = 0$$

⋮

$$x(N) - f(x(N-1), u(N-1)) = 0$$

On obtient ici un système d'équations non linéaires d'ordre $(2n + m)N$, qu'on pourra essayer de résoudre par utilisation de moyens de calcul symbolique ou numérique.

Exemple III.2 *Soit le système non linéaire:*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1^2(k) + T_e x_2(k) + \frac{1}{2}T_e^2 u(k) \\ x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_2^2(k) + T_e u(k) \end{aligned}$$

La commandabilité de ce système peut être facilement analysée en utilisant les outils de l'algèbre différentielle [Calvet et al., 2001]. La résolution du problème d'optimisation avec la fonction de coût suivante:

$$r(x(k), u(k)) = u^T(k)u(k) + x^T(k)x(k)$$

ne présente aucune difficulté particulière.

Après calcul, on obtient une commande initiale $u(0)$, solution de l'équation algébrique:

$$au^2(0) + bu(0) + c = 0 \tag{III.2}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{T_e^2}{4} - \frac{T_e^3}{2} \\ b &= T_e^2 \left(+ x_2(0)(T_e - \frac{x_2(0)}{2}) + 2 \right) \\ c &= \left(\frac{1}{2}x_1^2(0) + T_e x_2(0) \right)^2 + T_e x_2^2(0) \left(1 - \frac{x_2^2(0)}{8} \right) + T_e x_2(2) - 2x_1(2) \end{aligned}$$

et une commande $u(1)$ donnée par:

$$u(1) = \frac{x_2(2)}{T_e} - \frac{1}{2T_e} \left(\frac{x_1^2(0)}{2} + T_e u(0) \right)^2$$

Notons que l'équation (III.2) dégénère en une équation du premier ordre en $u(0)$ lorsque $T_e = 2s$.

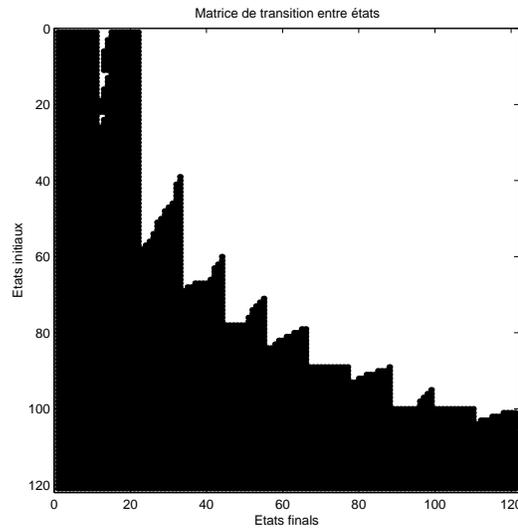


Figure III.2: Matrice de transition entre états

La figure (III.2) dresse une carte de commandabilité de l'espace d'état calculée après quantification des états $X = [0, 2] \times [0, 2]$ et une résolution de 0.1.

Remarque III.2 Cette méthode peut naturellement souffrir de complexité calculatoire et nécessiter le développement de programmes numériques spécifiques pour la résolution d'équations algébriques non linéaires plus ou moins complexes.

III.2.3 Approche algébrique

Dans la section précédente, nous avons résolu le problème d'inversion par le biais de la commande optimale. L'inconvénient peut être le caractère numérique d'une telle approche.

On présente ici une méthode d'inversion des systèmes non linéaires discrets basée sur une décomposition par séparation de la matrice de commandabilité associée à une linéarisation séquentielle de la solution de l'équation d'état [Djeridane et Calvet, 2004b].

Notons que si l'on applique une séquence de commandes $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ au système (III.1), l'état $x(N)$ peut être exprimé par composition des fonctions d'évolutions, sous la forme:

$$x(N) = \Gamma_{N-1}(x(0), u) \quad (\text{III.3})$$

L'inversion du système (III.3) consiste à déterminer une séquence de commandes $\{u(0), \dots, u(N-1)\}$, où N désigne le plus petit entier naturel pour lequel la matrice P est génériquement de rang plein et qui permet la résolution de l'équation (III.3) pour des états terminaux fixés.

La linéarisation recherchée dans cette méthode est une linéarisation exacte consistant à exprimer la fonction $\Gamma_{N-1}(x(0), u)$ (III.3) sous une forme affine du type:

$$\Gamma_{N-1}(x(0), u) = I(x(0)) + P^{(k)}(x(0))w$$

dans laquelle la matrice P est réduite à une matrice $P^{(k)}$ de rang plein, indépendante des commandes, suite à une séparation de la séquence des commandes $u = \{u_1(0), \dots, u_m(0), \dots, u_1(N-1), \dots, u_m(N-1)\}$ en deux ensembles v et w définis comme suit. L'ensemble $v = \{v_1[x(0)], v_2[x(0)], \dots, v_k[x(0)]\}$ représente l'ensemble des commandes déterminées à partir de la matrice d'accessibilité pour assurer, par contre réaction sur l'état initial, la propriété d'accessibilité du système et l'indépendance, par rapport aux commandes, de la forme réduite $P^{(k)}$ de la matrice d'accessibilité. L'ensemble $w = \{w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_{Nm}\}$ représente l'ensemble des commandes restantes.

Ces dernières commandes assurant le transfert d'un état d'origine $x(0)$ à un état de destination $x(N)$ pourront être alors, par exemple, déterminées par le calcul d'inverse:

$$w = [[P^{(k)}]^T P^{(k)}]^{-1} P^{(k)}(x(N) - I(x(0))) \quad (\text{III.4})$$

Remarquons également que si la matrice P précédemment définie (II.16) était indépendante des différentes commandes, la fonction $\Gamma_{N-1}(x(0), u)$ pourrait être alors directement exprimée sous la forme:

$$\Gamma_{N-1}(x(0), u) = I(x(0)) + P(x(0))u$$

dans laquelle $I(x(0))$ pourrait être aisément identifié à $f_{u(N-1)} \circ \dots \circ f_{u(0)}(x(0))|_{u=0}$, soit :

$$I(x(0)) = f_0 \circ \dots \circ f_0(x(0))$$

La méthode que nous proposons consiste à rechercher successivement les commandes $v_i[x(0)]$ permettant de construire une matrice d'accessibilité indépendante des commandes [Djeridane et Calvet, 2003]. Ainsi, à la première étape, pour $v = \{v_1(x(0))\}$, cette matrice d'accessibilité est réduite d'un vecteur colonne, correspondant à cette variable $v_1(x(0))$; ce qui donne :

$$P^{(1)} = P(u/v_1[x(0)], x(0)) \in \mathfrak{R}^{n \times (Nm-1)}$$

où $u/v_1(x(0))$ désigne l'ensemble des commandes après élimination de la commande $v_1(x(0))$.

La démarche consiste à déterminer la matrice $P^{(k)}$ de façon récurrente, à partir de $P^{(0)}(u, x(0)) = P$, puis pour $i = 1, \dots, k$:

$$P^{(i)}(x(0), w) = P^{(i-1)}(u/v_1[x(0)], \dots, v_i[x(0)], x(0)) \in \mathfrak{R}^{n \times (Nm-i)}$$

Ceci conduit à $P^{(k)}(x(0), w) = P^{(k)}(x(0))$.

On essaie ainsi de construire un ensemble de commandes $u = \{v, w\}$ permettant de transférer l'état du système de n'importe quelle condition initiale appartenant à l'ensemble de commandabilité à n'importe quelle condition finale appartenant à l'ensemble d'atteignabilité.

La détermination de cet ensemble de commandes permet de reconsidérer le développement suivant de la fonction de transition entre l'état initial et l'état final:

$$x(N) = f_u \circ \cdots \circ f_u \circ f_u(x(0))|_{u=\{v,w\}_{w=0}} + \left[\frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0))}{\partial w_{k+1}} \quad \cdots \quad \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0))}{\partial w_{Nm-1}} \quad \frac{\partial \Gamma_{N-1}(x(0))}{\partial w_{Nm}} \right] |_{u=\{v,w\}_{w=0}} w$$

qui peut donc être réécrit sous la forme:

$$x(N) = \Gamma_{N-1}(x(0), u) = I(x(0)) + P^{(k)}(w, x(0))w$$

La procédure peut être résumée par l'algorithme suivant :

1. Calcul de la matrice d'accessibilité P et détermination du plus petit entier naturel N caractérisant une matrice P génériquement de rang plein.
2. Calcul des matrices $P^{(i)}$ pour $i = 1, 2, \dots, k$, à partir de $P^{(0)}(x(0), u) = P$.

$$P^{(i)}(x(0), w) = P^{(i-1)}(u/v_1[x(0)], \dots, v_i[x(0)], x(0)) \in \mathfrak{R}^{n \times (Nm-1)}$$

3. Calcul de la composante affine:

$$I(x(0)) = f_u \circ \cdots \circ f_u \circ f_u(x(0))|_{u=\{v,w\}_{w=0}}$$

4. Détermination de l'ensemble des commandes w solution de (III.4).

On présente deux exemples illustratifs de l'algorithme défini précédemment. Ces exemples sont simples à résoudre. Cependant, pour des systèmes de dimension importante, l'utilisation d'un système de calcul formel tel que Maple pourra être utile [de Jager, 1995].

Exemple III.3 *Soit le système non linéaire mono-entrée*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1^2(k)x_2(k) + u(k) \end{aligned}$$

On obtient:

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} = \begin{bmatrix} x_2(1) & x_1(1) \\ 2x_1(1)x_2(1) & x_1^2(1) \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à une matrice de commandabilité génériquement de rang plein, moyennant certaines conditions sur $x(1)$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & x_1(1) \\ 1 & x_1^2(1) \end{bmatrix}$$

La détermination du domaine de commandabilité peut être réalisée à partir de la substitution de $x(1) = \Gamma_1(x(0), u)$ dans l'expression de la matrice P , soit :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & x_1(0)x_2(0) \\ 1 & x_1^2(0)x_2^2(0) \end{bmatrix}$$

Pour que cette matrice soit de rang plein, il suffit que $x_1(0)x_2(0) \neq 0$. L'ensemble de commandabilité est donc l'ensemble \mathfrak{R}^2 sauf les points des droites $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

Notons que la matrice P est déjà indépendante des commandes, qui peuvent donc être déterminées directement. Le calcul d'inverse (III.4) conduit à :

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{x_1(2) - x_1^3(0)x_2^2(0)}{x_1(0)x_2(0)} \\ u(0) &= x_2(2) - x_1(0)x_2(0)x_1(2) \end{aligned}$$

Exemple III.4 Soit le système multivariable :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_3(k) + x_1^2(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k)x_1(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) + u_2(k) \end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} = \begin{bmatrix} 2x_1(1) & 0 & 1 \\ x_3(1) & 0 & x_1(1) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à une matrice de commandabilité génériquement de rang plein sous certaines conditions sur $x(1)$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x_1(1) & 1 \\ 0 & 0 & x_3(1) & x_1(1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la matrice de commandabilité, on détermine le domaine de commandabilité de la façon suivante, après composition de fonction :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(x_3(0) + x_1^2(0) + u_1(0)) & 1 \\ 0 & 0 & x_2(0) + u_2(0) & x_3(0) + x_1^2(0) + u_1(0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque qu'il existe plusieurs choix possibles de la commande $u(0)$ permettant d'obtenir une matrice de rang plein. Le domaine de commandabilité est donc le suivant :

$$\mathcal{C}(x(0)) = \{x(0) \in \mathbb{R}^3\}$$

Après avoir caractérisé les différents domaines, déterminons les séquences de commandes par le biais de l'algorithme proposé.

A partir de la matrice de commandabilité, on peut déterminer $u_1(0)$ pour avoir un rang plein.

$$v_1[x(0)] = u_1(0) = 1 - x_3(0) - x_1^2(0)$$

On obtient:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I(x(0)) = \begin{bmatrix} 1 + x_2(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0)x_1(0) \end{bmatrix}$$

et par inversion généralisée, la séquence de commandes:

$$\begin{aligned} w_2 = u_2(1) &= x_3(2) - x_2(0) \\ w_3 = u_1(1) &= x_2(2) - x_3(0)x_1(0) \\ w_4 = u_2(0) &= x_1(2) - 1 \end{aligned}$$

Remarque III.3 Le domaine d'atteignabilité pourrait être aussi étudié par l'analyse de la matrice suivante:

$$P|_{x(0)=\Gamma^{-1}(x(2),u)} = \begin{pmatrix} 2\beta & 1 & 1 & 0 \\ -\beta^2 - u_1(1) + x_1(2) & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\beta = \frac{\frac{1}{3}(x_1(2) - u_1(1)) + (2\alpha - 18x_2(2))^2}{2\alpha - 18x_2(2)}$ et $\alpha = (81x_2(2) + 12(u_1(1) - x_1(2))^3)^{\frac{1}{3}}$. Il suffit alors que β diffère de 0, ce qui peut être obtenu par un choix adéquat de la commande $u_1(1)$. Le domaine d'atteignabilité est donc le suivant:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^3\}$$

La méthode proposée utilise des outils mathématiques très simples. Ceci n'est pas le cas du retour d'état linéarisant qui fait appel soit à la géométrie différentielle, soit à l'algèbre différentielle qui sont des outils complexes.

L'algorithme proposé permet la détermination du domaine de commandabilité du système. Il est aussi constructif en ce sens qu'il propose le calcul d'une séquence de commandes solution du problème d'inversion entrée-état d'un système non linéaire discret. La méthode est basée sur la linéarisation de la fonction de composition de transition d'état.

III.3 Linéarisation entrée-état

Le problème de la linéarisation exacte entrée-état a été initialement résolu pour le cas continu en termes d'algèbre de Lie et de champ de vecteurs.

Ce problème peut être formulé dans le cadre discret à partir de la définition suivante.

Définition III.1 [Aranda-Bricaire, 1994] *On dit que le système non linéaire à temps discret est linéarisable par bouclage statique s'il existe un difféomorphisme*

$$z(k) = \Phi(x(k))$$

et un bouclage statique

$$u(k) = \gamma(x(k), v(k))$$

où $v(k) \in \mathbb{R}^m$, tel que, dans les nouvelles coordonnées, le système compensé s'écrit

$$z(k+1) = Az(k) + Bv(k)$$

où la paire (A, B) est définie sous la forme canonique de Brunovsky [Kailath, 1980]. Le bouclage statique est régulier si $\frac{\partial \gamma}{\partial v}$ est une matrice génériquement inversible.

Pour le cas mono-entrée les matrices A, B s'écrivent sous la forme suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ceci pose un problème spécifique pour les systèmes à temps discret du fait qu'on ne dispose plus ici d'un champ de vecteur naturel [Normand-Cyrot, 1983]. Jakubczyk et al ont construit dans [Jakubczyk et Sontag, 1990] un champ de vecteur artificiel en utilisant la fonction d'évolution du système dynamique. Lee et al [Lee *et al.*, 1987] ont développé une approche pour résoudre le problème de linéarisation par changement de coordonnées (états) et par bouclage statique pour le cas mono-entrée. Nam [Nam, 1989] a développé une méthode pour résoudre le problème de linéarisation par bouclage statique pour une classe particulière de systèmes non linéaires à temps discret mono-entrée, ce qui représente une limitation en soi.

On présente dans ce chapitre une approche géométrique développée dans [Jayaraman, 1995] qui résout le problème de linéarisation d'un système non linéaire à temps discret en construisant des champs de vecteurs par le biais de la fonction d'évolution f . Enfin, on présentera une variante de la méthode de Jayarman pour la résolution du problème de linéarisation exacte entrée-état, qui possède l'avantage de relaxer la condition d'inversibilité de la fonction d'évolution.

III.3.1 Approche géométrie différentielle

On présente tout d'abord, une approche décrite dans [Jayaraman, 1995] pour résoudre le problème de linéarisation par bouclage statique. On fait ensuite une proposition de méthode élaborée à partir d'une sortie virtuelle linéaire par rapport à l'état.

Théorème III.1 [Slotine et Li, 1991]

Soit $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ un ensemble de champ de vecteurs linéairement indépendants; l'ensemble est complètement intégrable si et seulement si il est involutif.

Exemple III.5 *Considérons le système d'équations aux dérivées partielles.*

$$\begin{aligned} 4x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} &= 0 \\ -x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (x_3^2 - 3x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs de champ associés sont $\{f_1, f_2\}$:

$$f_1 = [4x_3 \quad -1 \quad 0]^T \quad f_2 = [-x_1 \quad (x_3^2 - 3x_2) \quad 2x_3]^T$$

Pour savoir si ce système admet une solution, il suffit de vérifier que l'ensemble des champs de vecteurs f_1, f_2 est complètement intégrable.

On obtient facilement:

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= [-12x_3 \quad 3 \quad 0]^T \\ &= -3f_1 + 0f_2 \end{aligned}$$

L'ensemble des champs de vecteurs est donc involutif, ce qui implique que l'ensemble des équations aux dérivées partielles peut être résolu.

III.3.1.1 Méthode de Jayarman

Dans certaines situations, on a fait une omission volontaire de l'indice k pour simplifier la notation mathématique.

III.3.1.1.1 Systèmes mono-entrée Soit le système non linéaire à temps discret:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}$ et f est une fonction analytique.

Construction d'un champ de vecteurs

On définit arbitrairement un vecteur $X_1(0)$ de dimension $n+1$ où les n premiers éléments sont nuls, sauf le dernier élément. On peut construire un champ de vecteurs à partir de $X_1(0)$, comme suit [Jayaraman, 1995]:

$$\overline{X_1}(k+1) = (\nabla f)|_{f^{-1}(x)} \overline{X_1}(k) \quad \text{avec} \quad \overline{X_1}(0) = X_1(0)$$

Par cette opération, on obtient un vecteur $\overline{X_1}(k+1)$ de dimension n . Le vecteur $X_1(k+1)$ de dimension $n+1$ est calculé comme suit:

$$X_1(k+1) = \begin{pmatrix} \overline{X_1}(k+1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir construit le champ de vecteurs $X_1(k)$, il faut vérifier la propriété de “bonne définition” rappelée ci-après.

Définition III.2 [Lee et al., 1987] Soient $f : M \rightarrow N$ une fonction lisse telle que l'opérateur $\nabla f : TM \rightarrow TN$ est surjective et un champ de vecteurs $X \in M$; alors on définit un champ de vecteurs Y sur N comme suit:

$$Y_{f(p)} = \nabla f_p X_p \quad \text{pour tout point } p \in M$$

On dit que le champ de vecteurs $Y_{f(p)}$ est bien défini, si et seulement si:

$$[X, \ker \nabla f] \subset \ker \nabla f$$

au voisinage du point p .

Pour cela on applique le lemme proposé dans [Lee et al., 1987] qui nous conduit à vérifier la condition suivante:

$$[X_1(k+1), \alpha(x, u)] \subset \text{span}\{\alpha(x, u)\}$$

où:

$$\text{span}\{\alpha(x, u)\} = \ker(\nabla f(x, u))$$

Les vecteurs $\alpha(x, u)$ peuvent donc être calculés en résolvant l'équation:

$$\nabla f(x, u)\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \alpha(x, u)$$

On a pu ainsi construire un champ de vecteurs permettant d'utiliser les outils mathématiques de la géométrie différentielle pour résoudre le problème de linéarisation par bouclage statique.

Définition III.3 [Lee et al., 1987]

On considère la fonction composée $f^n = f(f(\dots f(f(x(k), u(k)), u(k+1)) \dots), u(k+n-2)), u(k+n-1))$. On définit une fonction de sortie virtuelle $y(k) = h(x(k))$.

Le degré relatif du système (II.4) est alors défini comme le plus petit entier r tel que $\frac{\partial h \circ f^r}{\partial u(k)} \neq 0$. Ainsi le degré relatif désigne le premier instant où la sortie $y(k+r)$ est affectée par la commande $u(k)$.

Propriété III.1 [Jayaraman, 1995]

Si le système non linéaire à temps discret (II.4) avec une sortie $y(k) = h(x(k))$ a un degré relatif égal à n , alors l'ensemble de vecteurs suivant:

$$\{X_1(0), X_1(1), X_1(2), \dots, X_1(r)\}$$

est constitué de vecteur linéairement indépendants.

Condition de linéarisation**Théorème III.2** [Jayarman et Chizeck, 1993]

Le système non linéaire à temps discret mono-entrée peut être linéarisé par un bouclage statique si:

1. G_1, G_2, \dots, G_n sont des distributions involutives de dimension constante.
2. $\dim G_n = n + 1$.

où $G_k = \{X_1(0), X_1(1), \dots, X_1(k)\}$

Remarque III.4 On utilise la notation standard suivante du produit scalaire d'un champ de vecteurs Y par une 1-forme X :

$$\langle X, Y \rangle = a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x) + \dots + a_n(x)b_n(x)$$

avec $X = [a_1(x) \ a_2(x) \ \dots \ a_n(x)]$ et $Y^T = [b_1(x) \ b_2(x) \ \dots \ b_n(x)]$.

Méthode de calcul

Algorithme III.1 1. Construction des champs des vecteurs $X_1(k)$.

2. Vérification des conditions de linéarisation.
3. Calcul de la fonction analytique $\lambda(x)$ vérifiant:

$$\begin{aligned} \langle d\lambda, X(l) \rangle &= 0 \quad 0 \leq l \leq n-1 \\ \langle d\lambda, X(n) \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

avec $d\lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)$. On obtient ainsi la transformation suivante:

$$z(k) = \Phi(x(k)) = \begin{pmatrix} \lambda(k) \\ \lambda \circ f(x(k), u(k)) \\ \vdots \\ \lambda \circ f^{n-1}(x(k), u(k)) \end{pmatrix} \text{ et } v(k) = \lambda \circ f^n(x(k), u(k))$$

Exemple III.6 *Considérons le système non linéaire suivant [Jayarman et Chizeck, 1994]:*

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= (1+x_1(k))x_2(k) + u(k) \\x_2(k+1) &= \frac{x_1(k)}{1+u(k)+(1+x_1(k))x_2(k)}\end{aligned}$$

On fait une omission volontaire de l'indice k pour simplifier l'écriture. Tout d'abord, calculons la fonction inverse du système:

$$f^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_2(1+x_1) \\ \frac{x_1-u}{1+x_2(1+x_1)} \\ u \end{pmatrix}$$

ainsi que l'opérateur:

$$(\nabla f)|_{f^{-1}(x)} = \begin{pmatrix} \frac{x_1-u}{D} & D & 1 \\ \frac{D-x_2(x_1-u)}{(1+x_1)D} & \frac{-Dx_2}{1+x_1} & \frac{-x_2}{1+x_1} \end{pmatrix}$$

avec $D = 1 + x_2(1 + x_1)$.

Les champs de vecteurs associés au système sont alors:

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$X_1(1) = (\nabla f)|_{f^{-1}(x)} X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x_2}{1+x_1} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$X_1(2) = (\nabla f)|_{f^{-1}(x)} X_1(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+x_1} \\ 0 \end{pmatrix};$$

On vérifie la propriété de "bonne définition" des champs de vecteurs associés au système, soit:

$$\begin{aligned}[X_1(0), \alpha] &\subset \text{span}\{\alpha\} \\ [X_1(1), \alpha] &\subset \text{span}\{\alpha\} \\ [X_1(2), \alpha] &\subset \text{span}\{\alpha\}\end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha = \text{Ker}(\nabla f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -(1+x_1) \end{pmatrix}$$

ce qui amène à construire les distributions suivantes:

$$\begin{aligned}G_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x_2}{1+x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x_2}{1+x_1} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

qui sont de dimension constante, involutives, et telles que $\dim G_2 = 2 + 1 = 3$. Les conditions de linéarisation par bouclage statique sont donc satisfaites. On peut alors construire la transformation $\Phi(x(k))$ après résolution de l'ensemble d'équations aux dérivées partielles:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \frac{x_2}{1+x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{1}{1+x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} &\neq 0\end{aligned}$$

Il est alors évident de remarquer que $\lambda = x_2(1+x_1)$ satisfait les équations précédentes.

On obtient, donc

$$\begin{aligned}z_1(k) &= x_2(k)(1+x_1(k)) \\ z_2(k) &= \lambda \circ f(x(k), u(k)) = x_2(k)\end{aligned}$$

et

$$v = \lambda \circ f \circ f(x(k), u(k)) = u(k)$$

Ce qui permet d'écrire le nouveau système sous la forme de Brunovsky:

$$\begin{aligned}z_1(k+1) &= z_2(k) \\ z_2(k+1) &= u(k)\end{aligned}$$

On remarque qu'il s'agit ici d'un cas particulier pour lequel on a pu obtenir $u(k) = v(k)$. Ceci était prévisible, puisque $X_1(0), X_1(1), X_1(2)$ sont des champs de vecteurs commutatifs [Nijmeijer et Van Der Schaft, 1991](si $[X, Y] = 0$, alors les champs de vecteurs X, Y sont commutatifs). Le choix de cet exemple est volontaire afin d'illustrer le fait que la linéarisation avec changement de coordonnées sans bouclage statique n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la linéarisation avec changement de coordonnée et bouclage statique [Jayarman et Chizeck, 1994].

III.3.1.1.2 Systèmes multi-entrée On présente ici une généralisation des résultats obtenus dans la section précédente aux système multi-entrée.

Construction d'un champ de vecteur

On définit tout d'abord le vecteur X_i de dimension $n+m$, égal à zéro, excepté la $(n+i)$ ème composante égale à 1. Le champ de vecteurs est analogue a celui défini précédemment dans le cas mono-entrée.

On construit ensuite la série des vecteurs de champ, comme suit [Jayarman et Chizeck, 1993]:

$$X_i(k+1) = (\nabla f)|_{f^{-1}(x)} X_i(k) \quad i = 1, \dots, m$$

Les vecteurs de champ définis précédemment vérifient la condition suivante:

$$[X_i(k+1), \alpha_j(x, u)] \subset \text{span}\{\alpha_1(x, u), \dots, \alpha_m(x, u)\}$$

où:

$$\text{span}\{\alpha_1(x, u), \dots, \alpha_m(x, u)\} = \text{Ker}(\nabla f(x, u))$$

Les vecteurs $\alpha_j(x, u)$ de dimension $n + m$ sont donc solutions de l'équation

$$\nabla f(x, u)\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \alpha(x, u) = 0$$

ce qui permet de construire la distribution suivante:

$$C_k = \{X_1(0), \dots, X_m(0), \dots, X_1(k), \dots, X_m(k)\}$$

qui sera utilisée pour le calcul de la linéarisation par bouclage statique.

Condition de linéarisation

La théorème suivant présente une généralisation des conditions de linéarisation par bouclage statique au cas multi-entrée.

Théorème III.3 [Jayarman et Chizeck, 1993]

Un système non linéaire à temps discret est linéarisable sous forme de Brunovsky par bouclage statique, si:

1. G_0, G_1, \dots, G_n sont involutifs et de dimension constante.
2. $\dim G_n = n + m$.

Méthode de calcul

Algorithme III.2 1. Construction des vecteurs de champ $X_i(k)$.

2. Vérifications des conditions de linéarisation.
3. Calcul des fonctions analytiques λ_i qui vérifient:

$$\begin{aligned} & \langle d\lambda_i, X_i(k) \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq r_i - 1 \quad 1 \leq i \leq m \\ & \text{avec} \quad d\lambda_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_n} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_1} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_m} \end{pmatrix} \\ & \text{telles que la matrice} \quad \begin{pmatrix} \langle \lambda_1, X_1(r_1) \rangle & \dots & \langle \lambda_1, X_m(r_1) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \lambda_m, X_m(r_1) \rangle & \dots & \langle \lambda_m, X_m(r_m) \rangle \end{pmatrix} \quad \text{soit non singulière} \end{aligned}$$

La linéarisation par bouclage statique sera obtenue comme suit:

$$z(k) = \Phi(x(k)) = \begin{pmatrix} \phi_1(x(k)) \\ \vdots \\ \phi_m(x(k)) \end{pmatrix}, \text{ avec } \phi_i(x(k)) = \begin{pmatrix} \lambda_i(x(k)) \\ \lambda_i \circ f(x(k), u(k)) \\ \vdots \\ \lambda_i \circ f^{n-1}(x(k), u(k)) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } v = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1}(x(k), u(k)) \\ \vdots \\ \gamma_m^{-1}(x(k), u(k)) \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma_i^{-1}(x(k), u(k)) = \lambda_i \circ f^{n-1} \circ f(x(k), u(k))$$

Remarque III.5 *Soulignons que la méthode de calcul pour le cas multi-entrée décrite dans [Jayaraman, 1995] n'est pas très claire, en ce sens qu'elle ne précise pas les démarches à suivre pour le calculs des degrés relatifs r_i .*

III.3.1.2 Une autre méthode

On fait ici une proposition de linéarisation par bouclage statique dans le cadre de la géométrie différentielle. Cette approche n'impose pas la contrainte d'inversibilité de la fonction d'évolution f , comme c'est le cas dans la méthode précédente de Jayarman [Jayarman et Chizeck, 1993]

III.3.1.2.1 Systèmes mono-entrée Le principe est de construire une sortie virtuelle linéaire

$$h(x(k)) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(k); \quad a_i \in \mathfrak{R} \quad (\text{III.5})$$

qui ait un degré relatif égal à n pour le système non linéaire considéré. Cette sortie peut être déterminée à travers la résolution d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles. A l'aide de cette sortie $h(x(k))$, on peut construire la transformation $z(k) = \Phi(x(k))$ et le retour linéarisant $v(k) = \gamma^{-1}(x(k), u(k))$.

Construction d'un champ de vecteurs

La propriété de continuité de la fonction f permet de construire la série de vecteurs suivante :

Étape 0

$$W_0 = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)}$$

Étape i

$$W_i = \frac{\partial f(x(k+i), u(k+i))}{\partial x(k+i)} \Big|_{x(k+i)=f^i} W_{i-1} \quad ; i = 1, 2, \dots, n-1$$

Remarque III.6 *Considérons la matrice de commandabilité [Djeridane et Calvet, 2002] définie dans P :*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x(n-1), u(n-1))}{\partial u(n-1)} & \frac{\partial f(x(n-1), u(n-1))}{\partial x(n-1)} \Big|_{x(n-1)=f} & \frac{\partial f(x(n-2), u(n-2))}{\partial u(n-2)} & \dots \\ \frac{\partial f(x(n-1), u(n-1))}{\partial x(n-1)} \Big|_{x(n)=f^n} & \dots & \frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} \Big|_{x(1)=f} & \frac{\partial f(x(0), u(0))}{\partial u(0)} \end{bmatrix}$$

qu'on peut encore réécrire de manière simplifiée:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} & \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=f(x, u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} & \dots & \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=f^n(x, u)} \dots \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=f(x, u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix}$$

De même, compte tenu de l'invariance de la fonction f par rapport à k , les vecteurs W_i précédemment définis peuvent être exprimés comme suit:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \\ W_1 &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=f(x, u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \\ &\vdots \\ W_{n-1} &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=f^n(x, u)} \dots \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=f(x, u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \end{aligned}$$

On remarque ainsi que la recherche d'une matrice P de rang plein correspond à la détermination de vecteurs W_i linéairement indépendants.

Invariance du champ de vecteurs

On considère toujours le système non linéaire.

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

pour lequel on définit le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = S(x, u) = \begin{pmatrix} \Phi(x) \\ \gamma^{-1}(x, u) \end{pmatrix}$$

qui transforme la fonction d'évolution f en une fonction $\tilde{f} = \Phi \circ f \circ S^{-1}(z, v)$. Alors le champ de vecteurs $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$ associé à cette nouvelle fonction est défini par la relation suivante :

$$V_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f^{k+1}} W_k \frac{\partial \gamma(x, v)}{\partial v} \circ S^{-1}(z, v) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Démonstration

On suppose que l'inverse de la transformation S existe. Cela implique que Φ^{-1} et γ^{-1} existent, propriété satisfaite par la définition du problème de linéarisation exacte. La jacobienne de la fonction \tilde{f} peut être alors exprimée par:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f \circ S^{-1}(z, v)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{S^{-1}(z, v)} \cdot \frac{\partial S^{-1}}{\partial z}$$

On vérifie tout d'abord cette propriété pour $k = 0$.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{\partial \tilde{f}(z,v)}{\partial v} \\
 &= \frac{\partial \Phi \circ f \circ S^{-1}(z,v)}{\partial v} \\
 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f \circ S^{-1}(z,v)} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{S^{-1}(z,v)} \\
 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_f \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \gamma(x,v)}{\partial v} \circ S^{-1}(z,v)
 \end{aligned}$$

Par définition de $W_0 = \frac{\partial f}{\partial u}$ on obtient.

$$V_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_f W_0 \frac{\partial \gamma(x,v)}{\partial v} \circ S^{-1}(z,v)$$

La démonstration générale peut s'effectuer par induction.

Supposons donc que:

$$V_k = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \Big|_{\tilde{f}^k} V_{k-1}$$

ce qui donne, après développement de la jacobienne:

$$\begin{aligned}
 V_k &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f^{k+1}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{f^k} \frac{\partial S^{-1}}{\partial z} \Big|_{\Phi \circ f^k} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f^k} W_{k-1} \frac{\partial \gamma(x,v)}{\partial v} \circ S^{-1}(z,v) \\
 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f^{k+1}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{f^k} W_{k-1} \frac{\partial \gamma(x,v)}{\partial v} \circ S^{-1}(z,v) \\
 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{f^{k+1}} W_k \frac{\partial \gamma(x,v)}{\partial v} \circ S^{-1}(z,v)
 \end{aligned}$$

Cette relation sera utilisée explicitement dans le cas multivariable (III.3.1.2.2) pour montrer que la distribution construite à partir des champs de vecteurs $\{W_0, W_1, \dots, W_{n-1}\}$ est invariante sous la transformation non linéaire $\Phi(x)$ et le bouclage statique régulier $\gamma(x,v)$.

Le degré relatif désigne le temps minimal pour que la sortie dépende explicitement de commande $u(k)$. Cela peut être exprimé par le lemme suivant.

Lemme III.1 *Considérons un système non linéaire mono-entrée, de degré relatif égal à n .*

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\
 y(k) &= h(x(k)) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(k) \quad \text{avec } a_i \in \mathfrak{R}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}$ et $y(k) \in \mathfrak{R}$.

Si les fonctions :

$$\begin{aligned}
 &h \\
 &h \circ f \\
 &h \circ f \circ f \\
 &\vdots \\
 &h \circ f^{n-2} \circ f
 \end{aligned}$$

sont toutes indépendantes de $u(k)$ dans le voisinage du point (x, u) et si:

$$\frac{\partial}{\partial u(k)} h \circ f^{n-1} \circ f(x, u) \neq 0$$

on a alors:

$$\begin{aligned} \langle dh, W_i \rangle &= 0 \quad 0 \leq i \leq n-2 \\ \text{et} \\ \langle dh, W_{n-1} \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

avec

$$dh = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \in \mathfrak{R}^n$$

Démonstration

Le système non linéaire muni de son équation de sortie virtuelle $h(x(k))$ ayant un degré relatif égal à n , cela se traduit par l'indépendance des différentes fonctions $h(x(k+i))$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, par rapport à la commande $u(k)$; soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x(k+i))}{\partial u(k)} &= \frac{\partial h(x(k+i))}{\partial x(k+i)} \frac{\partial f(x(k+i-1), u(k+i-1))}{\partial x(k+i-1)} \cdots \frac{\partial f(x(k+1), u(k+1))}{\partial x(k+1)} \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction $h(x(k))$ étant invariante, alors :

$$dh_k = dh_{k+1} = dh_{k+2} = \cdots = dh_{k+n} = dh = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

avec

$$dh_{k+i} = \frac{\partial h(x(k+i))}{\partial x(k+i)}$$

Compte tenu de la relation

$$W_{i-1} = \frac{\partial f(x(k+i-1), u(k+i-1))}{\partial x(k+i-1)} \cdots \frac{\partial f(x(k+1), u(k+1))}{\partial x(k+1)} \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)}$$

on peut réécrire $\frac{\partial h(x(k))}{\partial u(k)}$ sous la forme suivante :

$$\langle dh, W_i \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n-2$$

A l'étape $i = n$, le système ayant un degré relatif égal à n , la fonction $h(x(k+n))$ dépend explicitement de la commande $u(k)$. On a alors l'inégalité:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x(k+n))}{\partial u(k)} &= \frac{\partial h(x(k+n))}{\partial x(k+n)} \frac{\partial f(x(k+n-1), u(k+n-1))}{\partial x(k+n-1)} \cdots \frac{\partial f(x(k+1), u(k+1))}{\partial x(k+1)} \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

qui est évidemment équivalente à l'inégalité:

$$\langle dh, W_{n-1} \rangle \neq 0$$

Condition de linéarisation

Le système non linéaire discret décrit par (III.6) est linéarisable, si et seulement si :

1. Les vecteurs $\{W_0, W_1, \dots, W_{n-1}\}$ sont linéairement indépendants, en d'autres termes si le système est commandable.
2. L'ensemble $\{W_0, W_1, \dots, W_{n-2}\}$ est involutif dans \mathfrak{R}^{n-1} .

DémonstrationCondition suffisante

Pour la démonstration de la condition de suffisance, cela se traduit par le fait qu'à partir des conditions présentées dans la proposition, on peut construire une transformation non linéaire transformant le système en un système de la forme de Brunovsky.

La démonstration est comme suit. A partir de la condition d'involutivité des vecteurs W_0, W_1, \dots, W_{n-2} , le théorème de Frobenius implique qu'il existe une fonction scalaire $h(x(k))$ satisfaisant les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle dh, W_0 \rangle &= 0 \\ \langle dh, W_1 \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle dh, W_{n-2} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, cela donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x(k+1))}{\partial u(k)} &= 0 \\ \frac{\partial h(x(k+2))}{\partial u(k)} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial h(x(k+n-1))}{\partial u(k)} &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on définit le nouvel état du système à partir de la transformation $z(k) = [h(x(k)), h \circ f(x(k), u(k)), \dots, h \circ f^{n-1}(x(k), u(k))]$, on obtient alors:

$$z_i(k+1) = z_{i+1}(k), \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Si l'on suppose que les vecteurs $[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]$ sont linéairement indépendants, compte tenu du fait que dh est orthogonal aux vecteurs W_0, W_1, \dots, W_{n-2} , cela implique que dh ne peut pas être orthogonal à W_{n-1} . Ce que traduit l'inégalité suivante:

$$\langle dh, W_{n-1} \rangle \neq 0$$

en d'autres termes:

$$\frac{\partial h(x(k+n))}{\partial u(k)} \neq 0$$

ce qui donne:

$$z_n(k+1) = v(k)$$

où $v(k)$ désigne une fonction de $x(k)$ et $u(k)$, soit :

$$v(k) = \gamma^{-1}(x(k), u(k))$$

Condition Nécessaire

Supposons qu'il existe une transformation $z(k) = \Phi(x(k))$ et une entrée $u(k) = \gamma(x(k), v(k))$, telles que la représentation $z(k), v(k)$ satisfait la forme de Brunovsky :

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= h(x(k)) &= z_2(k) \\ z_2(k+1) &= h(f(x(k), u(k))) &= z_3(k) \\ &\vdots & \\ z_{n-1}(k+1) &= h \circ f \circ \dots \circ f(x(k), u(k)) &= z_n(k) \end{aligned}$$

Le fait que les composantes $z_1(k+1), \dots, z_{n-1}(k+1)$ sont indépendantes de la commande $u(k)$ implique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(k+1)}{\partial u(k)} &= \frac{\partial h(x(k))}{\partial u(k)} = 0 \\ \frac{\partial z_2(k+1)}{\partial u(k)} &= \frac{\partial h \circ f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial z_{n-1}(k+1)}{\partial u(k)} &= \frac{\partial h(x(k+n-1))}{\partial u(k)} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \circ f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial h(x(k+n-1))}{\partial x(k+n-1)} \frac{\partial x(k+n-1)}{\partial x(k+n-2)} \dots \frac{\partial x(k+2)}{\partial x(k+1)} \frac{\partial x(k+1)}{\partial u(k)} &= 0 \end{aligned}$$

Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\langle dh, W_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, n-2$$

La composante $z_n(k+1)$ dépendant de la commande $u(k)$, cela donne :

$$\frac{\partial z_n(k+1)}{\partial u(k)} \neq 0$$

soit :

$$\frac{\partial z_n(k+1)}{\partial u(k)} = \frac{\partial h(x(k+n))}{\partial x(k+n)} \cdot \frac{\partial x(k+n)}{\partial x(k+n-1)} \dots \frac{\partial x(k+2)}{\partial x(k+1)} \frac{\partial x(k+1)}{\partial u(k)} \neq 0$$

qu'on peut encore réécrire :

$$\langle dh, W_{n-1} \rangle \neq 0$$

Supposons, pour la démonstration de la première partie de la condition de linéarisation qui concerne le fait que les vecteurs W_0, W_1, \dots, W_{n-1} sont linéairement indépendants, que :

$$W_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i W_i$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \langle dh, W_{n-1} \rangle &= \langle dh, \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i W_i \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \langle dh, W_i \rangle \end{aligned}$$

La relation $\langle dh, W_i \rangle = 0$, pour $i = 0, \dots, n-2$, implique:

$$\langle dh, W_{n-1} \rangle = 0$$

qui est contradictoire avec le fait que le système a un degré relatif égal à n . La supposition de dépendance linéaire des vecteurs W_{n-1} et W_0, W_1, \dots, W_{n-2} n'est donc pas vérifiée.

La démonstration de la seconde partie de la condition résulte du fait que les vecteurs W_0, W_1, \dots, W_{n-2} constituent un ensemble involutif, afin d'assurer l'existence d'une fonction $h(x)$, solution du système aux dérivées partielles.

$$\begin{aligned} \langle dh, W_i \rangle &= \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \langle dh, W_{n-1} \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

Méthode de calcul

En se basant sur la proposition précédente, la linéarisation entrée-états du système non linéaire discret peut être réalisée en suivant les étapes suivantes :

1. Construction des vecteurs W_0, W_1, \dots, W_{n-1} pour un système donné.
2. Vérification la satisfaction des propriétés de commandabilité et d'involutivité.

Si ces deux propriétés sont satisfaites, alors $h(x(k))$ peut être calculée à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \langle dh, W_i \rangle &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-2. \\ \langle dh, W_{n-1} \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

3. Détermination de la transformation Φ et du retour d'état linéarisant de la façon suivante:

$$z(k) = \Phi(x(k)) = \begin{pmatrix} h(x(k)) \\ h \circ f(x(k), u(k)) \\ h \circ f^2(x(k), u(k)) \\ \vdots \\ h \circ f^{n-1}(x(k), u(k)) \end{pmatrix}$$

et

$$v(k) = h \circ f^{n-1} \circ f(x(k), u(k))$$

Exemple III.7 Soit le système non linéaire :

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1^2(k) + T_e x_2(k) + \frac{1}{2}T_e^2 u(k) \\x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_2^2(k) + T_e u(k)\end{aligned}$$

On calcule tout d'abord les champs de vecteurs.

$$W_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_e^2 \\ T_e \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_e^2 x_1(k+1) + T_e^2 \\ T_e x_2(k+1) \end{pmatrix}$$

Pour ce cas mono-variable, la sortie virtuelle doit satisfaire le système aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{aligned}\langle dh, W_0 \rangle &= 0 \\ \langle dh, W_1 \rangle &\neq 0\end{aligned}$$

avec $dh = [a_1 \ a_2]$, soit:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T_e^2 a_1 + T_e a_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}T_e^2 (x_1(k+1) + 1)a_1 + T_e x_2(k+1)a_2 &\neq 0\end{aligned}$$

On notera que la solution de ce système existe, puisque les vecteurs W_0, W_1 sont linéairement indépendants et forment un ensemble involutif.

Une solution possible est la suivante :

$$h(x(k)) = x_1(k) - \frac{1}{2}T_e x_2(k)$$

A partir de ceci, on peut définir le changement de variable adéquat.

$$\begin{aligned}z_1(k) &= h(x(k)) \\ &= x_1(k) - \frac{1}{2}T_e x_2(k) \\ z_2(k) &= h(x(k+1)) \\ &= \frac{1}{2}x_1^2(k) + T_e x_2(k) - \frac{1}{4}T_e x_2^2(k)\end{aligned}$$

III.3.1.2.2 Systèmes multi-entrée Soit le système multi-entrée suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \tag{III.7}$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ et $u(k) \in \mathfrak{R}^m$.

On définit alors les sorties virtuelles linéaires sous la forme suivante :

$$h_j(x(k)) = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i(k) \quad j = 1, \dots, m$$

Construction d'un champ de vecteurs

La construction des vecteurs W_i^j pour $i = 0, 1, \dots, r_j - 1$ est la suivante.

Pour $j = 1, 2, \dots, m$

Etape 0

$$W_0^j = \frac{\partial f(x(0), u(0))}{\partial u_j(0)}$$

Etape i On définit le vecteur W_k^j comme suit:

$$W_i^j = \frac{\partial f(x(i), u(i))}{\partial x(i)} \Big|_{x(i)=f^i} W_{i-1}^j$$

Degré relatif

On a vu dans la section mono-entrée que les vecteurs W_i^j étaient invariants sous un difféomorphisme $S(x, u)$.

L'ensemble G_l étant engendré par les vecteurs de champs W_i^j est invariant sous la transformation non linéaire $S(x, u)$, il en est de même de son rang.

On retient ici pour la détermination du degré relatif du système, une méthode développée dans le cadre continu [Marino et Tomei, 1995]. Les ensembles G_l pour $l = 0, 1, \dots, n-1$ étant invariants, la détermination du degré relatif du système non linéaire multi-entrée peut être réalisée de façon analogue au cas linéaire multi-entrée.

Si l'on définit par

$$\begin{aligned} m_0 &= \text{rang } G_0 \\ m_1 &= \text{rang } G_1 - \text{rang } G_0 \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= \text{rang } G_{n-1} - \text{rang } G_{n-2} \end{aligned}$$

avec $G_l = \text{span}\{W_i^j : 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq l\}$ pour $l = 0, \dots, n-1$,

les degrés relatifs associés au système (III.7) sont alors définis par :

$$r_i = \text{card}\{m_j \leq i : j \leq 0\}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Condition de linéarisation

Le système (III.7) est linéarisable par une transformation non linéaire $\Phi(x)$ et un bouclage statique $\gamma(x, v)$, si et seulement si :

1. Les ensembles $G_{r_i-2}, 1 \leq i \leq m$ sont involutifs dans \mathfrak{R}^n .
2. $\text{rang } G_{r_1-1} = n$

avec $r_1 \geq \dots \geq r_m$.

Démonstration

Condition suffisante

On présente seulement les grandes lignes de la démonstration, dans la mesure où la démonstration est très semblable à celle du cas mono-entrée. La condition d'involutivité des ensembles G_{r_i-2} , pour $i = 1, \dots, m$, se traduit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Par exemple, la propriété d'involutivité de G_{r_1-2} implique les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle dh_1, W_0^1 \rangle &= 0 \\
\langle dh_1, W_1^1 \rangle &= 0 \\
&\vdots \\
\langle dh_1, W_{r_1-2}^1 \rangle &= 0 \\
\langle dh_1, W_0^2 \rangle &= \\
\langle dh_1, W_1^2 \rangle &= \\
&\vdots \\
\langle dh_1, W_{r_1-2}^2 \rangle &= 0 \\
&\vdots \\
\langle dh_1, W_0^m \rangle &= 0 \\
\langle dh_1, W_1^m \rangle &= 0 \\
&\vdots \\
\langle dh_1, W_{r_1-2}^m \rangle &= 0
\end{aligned}$$

Cela doit être vrai pour toutes les sorties h_i , ce qui signifie que les sorties virtuelles ne doivent pas dépendre des séquences de commandes. On peut alors construire une transformation non linéaire Φ permettant d'obtenir un système linéaire sous la forme de Brunovsky.

Etant donné que $G_{r_m-1} \subseteq G_{r_{m-1}-1} \subseteq \dots \subseteq G_{r_2-1} \subseteq G_{r_1-1}$ et que l'ensemble G_{r_1-1} est de rang plein, sachant que dh_1 est orthogonal à G_{r_1-2} , alors dh_1 ne peut pas être orthogonal à tous les vecteurs $W_{r_1-1}^1, W_{r_1-1}^2, \dots, W_{r_1-1}^m$. De la même manière, on peut montrer que dh_i n'est pas orthogonal à tous les vecteurs $W_{r_i-1}^1, W_{r_i-1}^2, \dots, W_{r_i-1}^m$.

La démonstration de la condition nécessaire est triviale et analogue au cas mono-entrée.

Remarque III.7 *le système non linéaire discret multi-entrée (III.7) est complètement linéarisable, si et seulement si :*

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$$

Méthode de calcul

La construction est similaire au cas mono-entrée.

1. Construction des ensembles G_l , pour $l = 0, 1, \dots, n-1$.
2. Vérification des conditions de linéarisation 1 et 2.

Si ces dernières conditions sont satisfaites, alors les fonctions $h_i(x)$ peuvent être calculées à partir des équations suivantes :

$$\langle dh_i, G_{r_j-2} \rangle = 0 \quad j \geq i$$

et de la propriété d'inversibilité de la matrice.

$$\begin{pmatrix} \langle dh_1, W_{r_1-1}^1 \rangle & \cdots & \langle dh_1, W_{r_1-1}^m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle dh_m, W_{r_m-1}^1 \rangle & \cdots & \langle dh_m, W_{r_m-1}^m \rangle \end{pmatrix}$$

3. Détermination de la transformation et du retour d'état linéarisant.

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 \circ f(x, u) \\ \vdots \\ h_1 \circ f^{r_1-1}(x, u) \end{pmatrix} & \varphi_2(x) &= \begin{pmatrix} h_2 \\ h_2 \circ f(x, u) \\ \vdots \\ h_2 \circ f^{r_2-1}(x, u) \end{pmatrix} \quad \dots \\ \varphi_m(x) &= \begin{pmatrix} h_m \\ h_m \circ f(x, u) \\ \vdots \\ h_m \circ f^{r_m-1}(x, u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$v = \begin{pmatrix} h_1 \circ f^{r_1-1} \circ f(x, u) \\ h_2 \circ f^{r_2-1} \circ f(x, u) \\ \vdots \\ h_m \circ f^{r_m-1} \circ f(x, u) \end{pmatrix}$$

Exemple III.8 Soit le système:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k)x_1(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + u_1(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k)u_2(k) \end{aligned} \tag{III.8}$$

La construction des champs de vecteurs associés au système est la suivante:

Cas où $j = 1$

$$W_0^1 = \frac{\partial f(x(0), u(0))}{\partial u_1(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1^1 = \frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} \Big|_{x(1)=f} W_0^1 = \begin{pmatrix} x_1(1) + x_2(1) \\ 0 \\ u_2(1) \end{pmatrix}$$

$$W_2^1 = \frac{\partial f(x(2), u(2))}{\partial x(2)} \Big|_{x(2)=f^2} W_1^1 = \begin{pmatrix} a \\ u_2(1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $a = x_1(0)x_2^2(0)u_2(0) + x_3(0)x_2(0)u_2(0) + 2x_2(0)u_1(0)u_2^2(0) + u_1(1)x_1(0)x_2(0) + u_1(1)x_3(0) + 2u_1(1)u(1)$

Cas où $j = 2$:

$$W_0^2 = \frac{\partial f(x(0), u(0))}{\partial u_2(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_1^2 = \frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} \Big|_{x(1)=f} W_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_2^2 = \frac{\partial f(x(2), u(2))}{\partial x(2)} \Big|_{x(2)=f^2} W_1^2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ u_2(2) \end{pmatrix}$$

avec $b = x_1(0)x_2(0)x_3(0) + x_1(0)x_2(0)u_1(0) + u_1(0)x_3(0) + u_1^2(0) + u_1(1)$
On peut construire les ensembles G_l pour $l = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} G_0 &= \text{span}\{W_0^1, W_0^2\} \\ G_1 &= \text{span}\{W_0^1, W_0^2, W_1^1, W_1^2\} \\ G_2 &= \text{span}\{W_0^1, W_0^2, W_1^1, W_1^2, W_2^1, W_2^2\} \end{aligned}$$

La détermination des degrés relatifs associés au système

$$\begin{aligned} m_0 &= \text{rang}G_0 = 2 \\ m_1 &= \text{rang}G_1 - \text{rang}G_0 = 3 - 2 = 1 \\ m_2 &= \text{rang}G_2 - \text{rang}G_0 = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne, $r_1 = \text{card}\{m_j \geq 1 : j \geq 0\} = 2$ et $r_2 = \text{card}\{m_j \geq 2 : j \geq 0\} = 1$. Il faut souligner que $r_1 + r_2 = 3$, ce qui peut permettre une linéarisation complète. G_0 est un ensemble involutif et $\text{rang}(G_1) = 3$. Le système (III.8) est donc linéarisable par un bouclage statique.

Pour le calcul de la transformation $\Phi(x)$, on doit résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle dh_1, W_0^1 \rangle &= 0 \\ \langle dh_1, W_0^2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

sous la propriété:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \langle dh_1, W_1^1 \rangle & \langle dh_1, W_1^2 \rangle \\ \langle dh_2, W_0^1 \rangle & \langle dh_2, W_0^2 \rangle \end{pmatrix} = 2$$

Si l'on suppose que $h_1(x(k)) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + a_{13}x_3(k)$ et $h_2(x(k)) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + a_{23}x_3(k)$, il résulte les équations suivantes:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} &= 0 \\ a_{13} &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$\text{rang} \begin{pmatrix} (x_1(1) + x_2(1))a_{11} + u_2(1)a_{13} & a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$$

On remarque que $h_1(x(k)) = x_1(k) - x_2(k)$ et que $h_2(x(k)) = x_3(k)$ est une solution des équations précédentes.

On obtient ainsi la transformation:

$$\begin{aligned} z_1(k) &= h_1(x(k)) = x_1(k) - x_2(k) \\ z_2(k) &= h_1(x(k+1)) = x_1(k)x_2(k) - x_3(k) \\ z_3(k) &= h_2(x(k)) = x_3(k) \end{aligned}$$

et le retour statique:

$$\begin{aligned} v_1(k) &= x_1(k)x_2(k)x_3(k) + x_1(k)x_2(k)u_1(k) + x_3(k)u_1(k) + u_1^2(k) - x_2(k)u_2(k) \\ v_2(k) &= x_2(k)u_2(k) \end{aligned}$$

III.3.2 Approche algèbre différentielle

Une approche alternative pour résoudre le problème de linéarisation des systèmes non linéaires à temps discret mono-entrée et multi-entrée, basée sur des outils d'algèbre différentielle a été développée dans [Aranda-Bricaire *et al.*, 1996]. Elle permet d'unifier la résolution du problème, tant pour les systèmes en temps continu, que pour les systèmes en temps discret.

Dans ce chapitre, on utilise le formalisme algébrique développé précédemment dans le chapitre 2.

Soit le système non linéaire suivant:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et f est une fonction analytique.

Rappelons dans un premier temps quelques théorèmes et définitions.

Théorème III.4 [Aranda-Bricaire, 1994]

Soit un ensemble engendré par les 1-formes w_1, \dots, w_s . Si l'on suppose que

$$dw_k \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_s = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

alors l'ensemble est complètement intégrable.

Définition III.4 [Aranda-Bricaire, 1994]

Le degré relatif ou indice de commandabilité de Kronecker r_i d'une forme $w(0)$ est défini par

$$r_i = \min\{k > 0 \mid w(k) = \Delta^k w(0) \notin \text{span}\{dx(0)\}\}$$

Si un tel entier n'existe pas, on pose $r_i = \infty$.

Avant de présenter le Théorème III.5, on rappelle la définition suivante des espaces de filtration:

$$\begin{aligned} H_0 &= \text{span}\{dx(0), du(0)\} \\ H_{k+1} &= \Delta^{-1}(H_k \cap \Delta H_k) \end{aligned}$$

où Δ est un opérateur de décalage et $\Delta H_{k+1} = \text{span}\{w(k+1) \mid w(k) \in H_k\}$.

Théorème III.5 [Aranda-Bricaire, 1994]

Supposons $H_\infty = 0$. Il existe une liste d'entiers r_1, r_2, \dots, r_m , invariante sous bouclage statique régulier et m 1-formes:

$$w_1(0), \dots, w_m(0) \in \text{span}\{dx(0)\}$$

de degré relatif r_1, r_2, \dots, r_m , telles que:

1. $\text{span}\{w_i(k), 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq r_i - 1\} = \text{span}\{dx(0)\}$,
2. $\text{span}\{w_i(k), 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq r_i\} = \text{span}\{dx(0), du(0)\}$,
3. les 1-formes $\{w_i(k), 1 \leq i \leq m, k \geq 0\}$ sont linéairement indépendantes. En particulier, $\sum_i r_i = n$.

Condition de linéarisation

Le théorème ci-dessous présente une condition nécessaire et suffisante de linéarisation par bouclage statique.

Théorème III.6 [Aranda-Bricaire et al., 1996]

Le système non linéaire à temps discret est linéarisable par bouclage statique régulier, si et seulement si:

1. $H_\infty = 0$.

2. Pour $1 \leq k \leq k^*$, H_k est complètement intégrable.

On présente deux algorithmes de linéarisation: le premier pour le cas des systèmes mono-entrée, le second pour le cas multi-entrée.

Méthode de calcul pour le cas mono-entrée

Pour le cas des systèmes mono-entrée:

Algorithme III.3 1. Calcul des H_i .

2. Vérifier les conditions de linéarisation.

3. On a alors $H_n = \{d\phi(x(0))\}$, ce qui nous permet de déterminer la transformation $\Phi(x(k))$ de la manière suivante:

$$z(k) = \Phi(x(k)) = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \circ f(x, u) \\ \vdots \\ \phi \circ f^{n-1}(x, u) \end{pmatrix}$$

et

$$v(k) = \gamma^{-1}(x(k), u(k)) = \phi \circ f^{n-1} \circ f(x, u)$$

Remarque III.8 Il faut souligner que, pour avoir une linéarisation totale avec un retour d'état statique, il faut et suffit que le degré relatif soit égal à n .

Méthode de calcul pour le cas multi-entrée

On recherche ici une transformation non linéaire $\Phi(x)$ et un bouclage statique sous la forme suivante:

Algorithme III.4 1. calcul des H_i .

2. Vérifier les conditions de linéarisation.

3. Calcul des indices de commandabilité [Aranda-Bricaire et Moog, 1999] de la façon suivante :

(a) Calcul des h_i :

$$h_i = \dim H_i - \dim H_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

(b) Calcul des degrés relatifs r_j , pour $j = 1, \dots, m$:

$$r_j = \text{card}\{h_i/h_i \geq j\}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

où card signifie le cardinal de l'ensemble.

4. On a $H_{r_1} = \{d\phi_1(0)\}$ avec $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m$. Pour le calcul de ϕ_2 , on calcule le sous-espace H_{r_2} de telle façon que $d\phi_2$ soit linéairement indépendant des 1-formes $d\phi_1(0), d\phi_1(1), \dots, d\phi_1(r_2)$. On détermine ainsi de suite les fonctions $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$.
5. A partir des fonctions analytiques $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$, on construit alors:

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1 \circ f(x, u) \\ \vdots \\ \phi_1 \circ f^{r_1-1}(x, u) \end{pmatrix} & \phi_2(x) &= \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_2 \circ f(x, u) \\ \vdots \\ \phi_2 \circ f^{r_2-1}(x, u) \end{pmatrix} \quad \dots \\ \phi_m(x) &= \begin{pmatrix} \phi_m \\ \phi_m \circ f(x, u) \\ \vdots \\ \phi_m \circ f^{r_m-1}(x, u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$v = \begin{pmatrix} \phi_1 \circ f^{r_1-1} \circ f(x, u) \\ \phi_2 \circ f^{r_2-1} \circ f(x, u) \\ \vdots \\ \phi_m \circ f^{r_m-1} \circ f(x, u) \end{pmatrix}$$

Remarque III.9 Pour avoir une linéarisation complète par retour statique, il faut et il suffit que $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

Exemple III.9 On considère le système suivant:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1^2(k) + T_e x_2(k) + \frac{1}{2}T_e^2 u(k) \\ x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_2^2(k) + T_e u(k) \end{aligned}$$

En premier lieu, on calcule les sous-espaces H_i :

$$\begin{aligned} H_1 &= \{dx(0)\} \\ H_2 &= \{dx_1(0) - \frac{1}{2}T_e dx_2(0)\} \\ H_3 &= \{0\} \end{aligned}$$

On a $H_3 = 0$. Le système est donc accessible avec un degré relatif $r = 2$ et H_2 est complètement intégrable.

On peut définir le changement de variable et le retour statique comme suit:

$$\begin{aligned} z_1(k) &= x_1(k) - \frac{1}{2}T x_2(k) \\ z_2(k) &= \frac{1}{2}x_1^2(k) + T x_2(k) - \frac{1}{4}T x_2^2(k) \end{aligned}$$

et

$$v(k) = au^2(k) + bu(k) + c$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8}T^4 - \frac{1}{4}T^3 \\ b &= -\frac{1}{4}T^2 x_2^2(k) + \frac{1}{4}T^2 x_1^2(k) + \frac{1}{2}T^3 x_2(k) + T^2 \\ c &= \frac{1}{8}x_1^4(k) + \frac{1}{2}T x_1^2(k)x_2(k) + \frac{1}{2}(1 + T^2)x_2^2(k) \end{aligned}$$

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a proposé deux voies pour résoudre le problème d'inversion entrée-état. La première voie est de type composition de fonctions. Cette approche est facile à mettre en oeuvre et simple d'utilisation. Cependant, elle peut comporter des inconvénients tels que la lourdeur calculatoire liée à la composition de la fonction d'évolution, un côté approximatif pour l'approche linéarisation jacobienne ou le caractère numérique de l'approche d'optimisation. La seconde voie est la linéarisation exacte par bouclage statique. On a présenté deux approches relativement classiques: la géométrie différentielle et l'algèbre différentielle. Dans le cadre de la géométrie différentielle on a proposé une méthode de linéarisation exacte permettant de relaxer la condition d'inversibilité de la fonction d'évolution. Par contre, cette approche est limitée par la recherche d'une sortie virtuelle linéaire en l'état du système.

Chapter IV

Autre application

Sommaire

IV.1	Introduction	98
IV.2	Modèle économique de Goodwin	98
IV.2.1	Etude de l'accessibilité du système	99
IV.3	Muscle stimulé électriquement	100
IV.3.1	Etude de l'accessibilité du système	103
IV.3.2	Inversion du système	103
IV.3.3	Optimisation par programmation dynamique	106
IV.4	Conclusion	111

IV.1 Introduction

On présente dans ce chapitre des exemples issus de la littérature afin de valider l'approche de linéarisation exacte entrée-état développée dans le chapitre 3, ainsi que le critère développé dans le chapitre 2, basé sur l'utilisation du principe du maximum. On présente également dans la section (IV.3) un exemple d'application de la programmation dynamique étendue qui a été rendue possible par une linéarisation initiale du système non linéaire.

IV.2 Modèle économique de Goodwin

Le modèle présenté ici est celui de Goodwin. Ce modèle décrit le comportement cyclique suivant d'une entreprise: *“Dans l'environnement d'une entreprise, l'augmentation des salaires implique la réduction des profits, ceci induit moins d'investissement de la part de l'entreprise qui amène à une réduction des salaires. Du fait que les salaires diminuent, les bénéfices d'une entreprise augmentent. Cela conduit à l'augmentation des investissements et enfin, à celle des salaires ...”*. [Fonseca et Ussher, 1999]

Le modèle dynamique simplifié de Goodwin [Post, 1995] est décrit par 9 équations à temps discret. Les 5 premières équations correspondant à des définitions bien établies, tandis que les 4 dernières équations sont proposées par Goodwin.

$$Y_t = \sigma K_t \quad (\text{IV.1})$$

$$L_t = \frac{Y_t}{y_t} \quad (\text{IV.2})$$

$$\beta_t = \frac{L_t}{A_t} \quad (\text{IV.3})$$

$$\pi_t = Y_t - w_t L_t \quad (\text{IV.4})$$

$$\lambda_t = \frac{w_t L_t}{Y_t} \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = m \quad (\text{IV.6})$$

$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = n \quad (\text{IV.7})$$

$$\frac{w_{t+1} - w_t}{w_t} = a\beta_t \quad (\text{IV.8})$$

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = c \frac{\pi_t}{K_t} \quad (\text{IV.9})$$

Par définition, le niveau de production (Y_t) est lié à la trésorerie (K_t)(IV.1). Les offres d'emploi (L_t) proposées par l'entreprise sont calculées par le niveau de production et la productivité de la main d'oeuvre (y_t)(IV.2). Le niveau du recrutement (β_t) de l'entreprise est lié au nombre d'offres d'emploi et aux ressources en main d'oeuvre (A_t)(IV.3). Les bénéfices (π_t) sont déterminés par la différence entre le niveau de production et le coût

des salaires (w_t)(IV.4). Enfin, le coût de la productivité du travail (λ_t) est déterminé par le quotient de la masse salariale et des ressources en main d'oeuvre (IV.5).

Dans le modèle de l'équation (IV.6), on suppose que le taux de croissance de la productivité de travail est constant (m). De même, on suppose dans l'équation (IV.7), que le taux de croissance des ressources en main d'oeuvre est constant (n). Par contre, on peut agir sur le taux de croissance des salaires par le paramètre a (IV.8) et sur le taux de croissance de la trésorerie par le paramètre c (IV.9).

Les variables suivantes jouent le rôle de variables de commande, soit:

$$\begin{aligned} u_1(k) &= a \\ u_2(k) &= c \end{aligned}$$

Si l'on choisit comme variables d'état:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= Y_t \\ x_2(k) &= L_t \\ x_3(k) &= \beta_t \\ x_4(k) &= \pi_t \\ x_5(k) &= \lambda_t \\ x_6(k) &= y_t \\ x_7(k) &= A_t \\ x_8(k) &= w_t \\ x_9(k) &= K_t \end{aligned}$$

ceci conduit au modèle non linéaire à temps discret suivant:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \sigma(u_2(k)x_3(k) + x_9(k)) \\ x_2(k+1) &= \frac{\sigma(u_2(k)x_4(k) + x_9(k))}{(m+1)x_6(k)} \\ x_3(k+1) &= \frac{\sigma(u_2(k)x_4(k) + x_9(k))}{(m+1)x_6(k)(n+1)x_7(k)} \\ x_4(k+1) &= \sigma(u_2(k)x_4(k) + x_9(k)) - \frac{(x_8(k)u_1(k)x_3(k) + x_8(k))\sigma(u_2(k)x_4(k) + x_9(k))}{(m+1)x_6(k)} \\ x_5(k+1) &= \frac{x_8(k)u_1(k)x_3(k) + x_8(k)}{(m+1)x_6(k)} \\ x_6(k+1) &= (m+1)x_6(k) \\ x_7(k+1) &= (n+1)x_7(k) \\ x_8(k+1) &= x_8(k)u_1(k)x_3(k) + x_8(k) \\ x_9(k+1) &= u_2(k)x_4(k) + x_9(k) \end{aligned}$$

IV.2.1 Etude de l'accessibilité du système

Pour étudier l'accessibilité du système, il suffit de vérifier que le rang de la matrice P définie dans la section (II.6.2) est de rang plein.

On construit donc la matrice P

$$P = [V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_9]$$

avec

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\partial f_{u(8)}(x(8))}{\partial u(8)} \\
V_2 &= \frac{\partial f_{u(8)}(x(8))}{\partial x(8)} \frac{\partial f_{u(7)}(x(7))}{\partial u(7)} \\
&\vdots \\
V_9 &= \frac{\partial f_{u(8)}(x(8))}{\partial x(8)} \frac{\partial f_{u(7)}(x(7))}{\partial x(7)} \dots \frac{\partial f_{u(1)}(x(1))}{\partial x(1)} \frac{\partial f_{u(0)}(x(0))}{\partial u(0)}
\end{aligned}$$

Suite au calcul des vecteurs V_i , précédemment définis par l'outil de calcul symbolique Maple, il apparaît que le que le rang de la matrice d'accessibilité P n'est pas plein, ce qui implique que le système n'est pas accessible.

Notons que ce résultat était prévisible à partir d'une observation rapide du modèle, dans la mesure où l'on s'aperçoit que les états $x_6(k)$ et $x_7(k)$ sont indépendants des commandes. Il nous permet cependant de valider notre méthode d'analyse.

IV.3 Muscle stimulé électriquement

La stimulation électrique fonctionnelle (Functional Electrical Stimulation) consiste à appliquer des signaux électriques pour générer ou supprimer des activités du système nerveux humain, afin de commander le mouvement de membres paralysés et assurer des fonctionnalités de préhension, de maintien, ... etc. Elle peut aussi activer la perception et des fonctions corporelles viscérales.

La stimulation électrique fonctionnelle peut donc être particulièrement efficace et médicalement appropriée à de nombreuses personnes souffrant d'incapacité neurologique.

Nous abordons brièvement dans ce qui suit la physiologie musculaire au niveau fonctionnel en vue d'expliquer le sens physique du modèle développé pour le muscle stimulé électriquement.

La modélisation d'un muscle électriquement stimulé consiste à représenter le comportement d'un muscle résultant de la stimulation électrique de son nerf moteur. Une fibre musculaire répond par la loi du tout ou rien à une stimulation électrique. L'étude de la réponse d'un muscle nécessite le recrutement de toutes ces fibres par un stimulus d'intensité suffisante [Feiss, 2004] généré par un train d'impulsions électrique appliqué au muscle qui représente le signal de commande.

Ainsi, le modèle d'un muscle stimulé électriquement peut être décrit par le schéma de la figure.

Des relations mathématiques ont été établies pour caractériser le modèle d'un muscle électriquement stimulé. Pour mieux comprendre comment la force musculaire est générée, nous nous limiterons à quelques notions.

Relation couple-angle

La relation couple-angle (ou moment angulaire) est liée à des données tant anatomique (distance du point d'insertion musculaire à l'axe de rotation articulaire) que biomécanique (l'angle de rotation entre le bras de levier du muscle par rapport à l'axe de rotation).

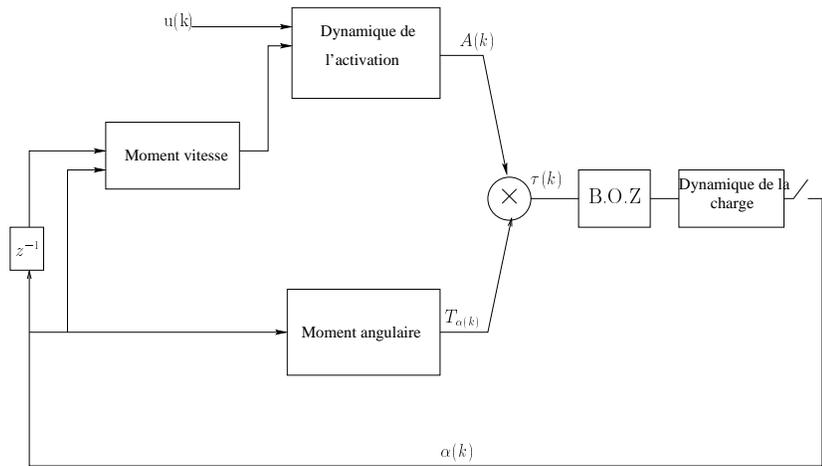


Figure IV.1: Modèle d'un muscle stimulé électriquement

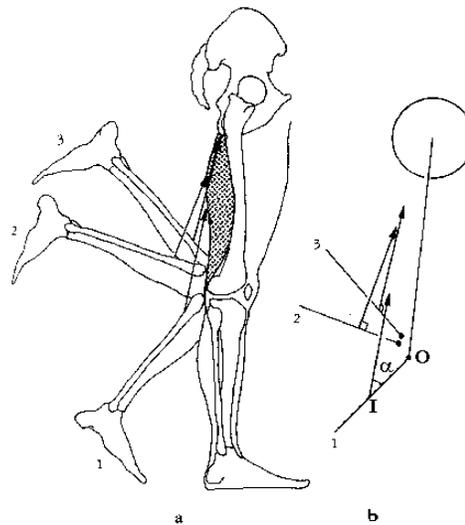


Figure IV.2: Variation du bras de levier de la force en fonction de l'angle d'articulaire

Par exemple, dans le cas de la flexion du genou représentée Figure (IV.2), le point d'insertion (I) se déplace autour du centre de rotation (O). La force résultante de ce groupe musculaire est représentée par la fleche pointant vers l'articulation où se trouve le second point d'insertion du groupe musculaire. A mesure que cette flexion se produit, l'angle α varie de 35° en position 1, à 90° en position 2 et 120° en position 3.

Niveau d'activation

Le niveau d'activation représente l'intensité de la contraction musculaire et peut varier du stade du repos à l'état d'excitation extrême.

Relation couple-vitesse

Le moment vitesse (couple de vitesse) correspond à l'image de la force maximale

que le muscle peut produire à une vitesse donnée lors d'une phase de contraction ou d'étirement. Le couple généré par le muscle est le produit du niveau d'activation et du moment angulaire.

En pratique la modélisation d'un muscle stimulé électriquement est réalisée en temps discret à partir de l'identification des différents paramètres (c, d, b) [Bernotas *et al.*, 1986] liés au modèle et de la mise en oeuvre numérique de la commande [Jayaraman, 1995].

On définit les variables suivantes:

$A(k)$	=	activation
$\tau(k)$	=	couple généré par la force musculaire
$T_\alpha(k)$	=	couple généré par l'angle α
$T_w(k)$	=	couple généré par la vitesse de contraction des muscles
$w(k)$	=	vitesse de contraction des muscles
$\alpha(k)$	=	l'angle entre la force résultante du muscle et la droite qui relie le point d'insertion du muscle et le centre de rotation de l'articulation
$u(k)$	=	train d'impulsion électrique

Le modèle d'un muscle stimulé électriquement peut être alors décrit par les équations:

$$\begin{aligned}\tau(k) &= A(k)T_\alpha(k) \\ A(k+1) &= aT_w(k)A(k) + bu(k)\end{aligned}$$

dans lesquelles le moment angulaire et le moment vitesse sont approximés linéairement de la manière suivante:

$$\begin{aligned}T_w(k) &= 1 - cw(k) \\ T_\alpha(k) &= 1 + d\alpha(k)\end{aligned}$$

Une image de la vitesse de contraction du muscle peut être définie par la variation de l'angle $\alpha(k)$.

$$w(k) = \alpha(k) - \alpha(k-1)$$

et la dynamique du bras levier peut être décrite par l'équation suivante:

$$\alpha(k+1) = l_1\alpha(k) + l_2\alpha(k-1) + l_3\tau$$

correspondant à un système linéaire du second ordre.

Le choix suivant des variables d'état:

$$\begin{aligned}x_1(k) &= A(k) \\ x_2(k) &= \alpha(k-1) \\ x_3(k) &= \alpha(k)\end{aligned}$$

conduit alors au modèle d'état:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= ax_1(k) - acx_3(k)x_1(k) + acx_2(k)x_1(k) + bu(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= l_1x_3(k) + l_2x_2(k) + l_3x_1(k) + dl_3x_1(k)x_3(k)\end{aligned}\tag{IV.10}$$

IV.3.1 Etude de l'accessibilité du système

On calcule la matrice de commandabilité du système (IV.10) à partir de la matrice de commandabilité présentée dans la section (II.6.2), soit:

$$P = (V_2 \quad V_1 \quad V_0)$$

avec

$$V_0 = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial u(k)} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x(k), u(k)) = \begin{pmatrix} ax_1(k) - acx_3(k)x_1(k) + acx_2(k)x_1(k) + bu(k) \\ x_3(k) \\ l_1x_3(k) + l_2x_2(k) + l_3x_1(k) + dl_3x_1(k)x_3(k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial f(x(2), u(2))}{\partial x(2)} V_0 = \begin{pmatrix} a - acx_3(2) + acx_2(2) & acx_1(2) & -acx_1(2) \\ 0 & 0 & 1 \\ l_3 + dl_3x_3(2) & l_2 & l_1 + dl_3x_1(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab - acbx_3(2) + acbx_2(2) \\ 0 \\ l_3b + dl_3bx_3(2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\partial f(x(2), u(2))}{\partial x(2)} \frac{\partial f(x(1), u(1))}{\partial x(1)} V_0 \\ &= \begin{pmatrix} ((a - \alpha x_3(2) + \alpha x_2(2))(a - \alpha x_3(0) + \alpha x_2(0)) - \alpha x_1(2)(l_3 + \beta x_3(0)))b \\ (l_3 + \beta x_3(0))b \\ ((l_3 + \beta x_3(2))(a - \alpha x_3(0) + \alpha x_2(0)) + (l_1 + \beta x_1(2))(l_3 + \beta x_3(0)))b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha = ac$ et $\beta = dl_3$.

Pour que la matrice P soit de rang plein, il suffit que:

$$b^3(l_3 + acx_3(1))(l_3 + acx_3(2)) \neq 0$$

Ceci implique que le système est commandable, si:

$$\begin{array}{l} b \neq 0 \\ x_3(1) \neq -\frac{l_3}{ac} \\ x_3(2) \neq -\frac{l_3}{ac} \end{array}$$

Notons que le cas où $b = 0$ impliquerait l'absence du train d'impulsions électriques appliqué sur le muscle.

IV.3.2 Inversion du système

L'inversion de ce système non linéaire à temps discret, correspond à la linéarisation par changement d'état et retour statique développée dans la section (III.3.1.2). Il faut donc tout d'abord calculer les champs de vecteurs associés au système.

$$\begin{aligned}
W_0 &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
W_1 &= \frac{\partial f(x(k+1), u(k+1))}{\partial x(k+1)} W_0 = \begin{pmatrix} ab - abc x_3(k+1) + abc x_2(k+1) \\ 0 \\ l_3 b + dl_3 b x_3(k+1) \end{pmatrix} \\
W_2 &= \frac{\partial f(x(k+2), u(k+2))}{\partial x(k+2)} W_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ (l_3 + \beta x_3(k+1)) b \\ \theta_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec $\theta_1 = (a - \alpha x_3(k+2) + \alpha x_2(k+2)) (a - \alpha x_3(k) + \alpha x_2(k)) - \alpha x_1(k+2) (l_3 + \beta x_3(k)) b$
et $\theta_2 = ((l_3 + \beta x_3(k+2)) (a - \alpha x_3(k) + \alpha x_2(k)) + (l_1 + \beta x_1(k+2)) (l_3 + \beta x_3(k))) b$.

On remarque que:

$$\text{rang}\{W_0, W_1, W_2\} = 3$$

et que l'ensemble $\{W_0, W_1\}$ est involutif dans \mathfrak{R}^3 . Les conditions de linéarisation exacte (III.3.1.2.1) sont donc satisfaites.

On conclut que le système peut être linéarisé par un changement d'état et un retour statique. Pour le calcul de la transformation $\Phi(x(k))$ et du retour statique $\gamma(x(k), v(k))$, nous considérerons les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\langle dh, W_0 \rangle &= 0 \\
\langle dh, W_1 \rangle &= 0
\end{aligned}$$

avec

$$h = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) + a_3 x_3(k)$$

qui conduisent par substitution, à:

$$\begin{aligned}
ba_1 &= 0 \\
[ab - abc x_3(k+1) + abc x_2(k+1)] a_1 + [l_3 b + dl_3 b x_3(k+1)] a_3 &= 0
\end{aligned}$$

On remarque que $h(x) = x_2$ est une solution pour le système d'équations précédemment présenté. De plus, la solution $h(x) = x_2$ vérifie la condition suivante:

$$\langle dh, W_2 \rangle \neq 0$$

puisque

$$(l_3 + \beta x_3(k+1)) b \neq 0$$

Le changement d'état peut être alors calculé de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
z_1(k) &= h(x(k)) = x_2(k) \\
z_2(k) &= h(x(k+1)) = x_3(k) \\
z_3(k) &= h(x(k+2)) = l_1 x_3(k) + l_2 x_2(k) + l_3 x_1(k) + dl_3 x_1(k) x_3(k)
\end{aligned}$$

avec le retour d'état statique:

$$\begin{aligned} v(k) &= h(x(k+3)) \\ &= (l_1x_3 + l_2x_2 + l_3x_1 + dl_3x_1x_3)(l_1 + dl_3(ax_1 - acx_3x_1 + acx_2x_1)) + l_3(ax_1 - acx_3x_1 + acx_2x_1) + l_2x_2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système linéaire:

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(k)$$

L'inversion de ce système linéaire en z, v est alors directe, à partir de:

$$z(k+3) - A^3z(k) = [B \ AB \ A^2B] \begin{pmatrix} v(k+2) \\ v(k+1) \\ v(k) \end{pmatrix}$$

avec

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$[B \ AB \ A^2B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En conclusion, l'inversion du système conduit à:

$$\begin{aligned} v(k) &= z_1(k+3) - z_3(k) \\ v(k+1) &= z_2(k+3) \\ v(k+2) &= z_3(k+3) \end{aligned}$$

avec

$$z(k) = \Phi(x(k)) = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ l_1x_3(k) + l_2x_2(k) + l_3x_1(k) + dl_3x_1(k)x_3(k) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} u(k) &= \gamma(x(k), v(k)) \\ &= (l_1x_3 + l_2x_2 + l_3x_1 + dl_3x_1x_3)(l_1 + dl_3(ax_1 - acx_3x_1 + acx_2x_1)) + l_3(ax_1 - acx_3x_1 + acx_2x_1) + \\ &\quad l_2x_2 + u(bl_3 + bdl_3(l_1x_3 + l_2x_2 + l_3x_1 + dl_3x_1x_3)) \end{aligned}$$

IV.3.3 Optimisation par programmation dynamique

On considère le problème d'optimisation suivant:

$$\min \sum_{i=0}^{11} m_1 x_1^2(i) + m_2 (x_3(i) - x_2(i))^2 + m_3 u^2(i) + C_f$$

sous les contraintes:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= ax_1(k) - acx_3(k)x_1(k) + acx_2(k)x_1(k) + bu(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= l_1x_3(k) + l_2x_2(k) + l_3x_1(k) + dl_3x_1(k)x_3(k) \end{aligned}$$

dans lequel $u^2(i)$ est associé à la minimisation d'énergie, x_1^2 à la minimisation du degré d'intensité de la contraction du muscle et $(x_3 - x_2)^2$ à la réduction de la vitesse de contraction du muscle.

avec un coût final:

$$Cx_f = x_1^2(12) + x_2^2(12) + x_3^2(12)$$

L'état initial est donné par $x(0)^T = [0, 0, 0]$.

Nous nous sommes intéressé ici à la résolution de ce problème d'optimisation par la méthode de programmation dynamique appliquant la formulation étendue du principe d'optimalité décrite dans [Calvet et Viargues, 1995] et dans le chapitre 1 de ce mémoire.

Compte tenu de la non linéarité du problème, la résolution de l'équation fonctionnelle étendue associée à cette méthode sera réalisée de manière numérique à partir d'une quantification des états.

La résolution du problème d'optimisation par programmation dynamique peut être alors décomposée en quatre phases.

1. Phase de quantification des états.
2. Phase de calcul de la matrice des coûts optimaux de transition d'état.
3. Phase de résolution de l'équation fonctionnelle.
4. Phase de reconstruction des trajectoires optimales.

Choix de la grille des états

On décide donc de travailler sur un nombre fini d'états résultant d'une quantification de ces variables. Nous rangerons par la suite cet ensemble fini de valeurs possibles des variables d'état dans le vecteur suivant:

$$X_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n_s} \end{pmatrix}$$

où α_i représente les coordonnées d'un point particulier de la grille des états, et n_s le nombre total de points de cette grille. On obtient alors $n_s = \prod_{i=1}^3 q_i$, si q_i désigne le nombre de niveau de quantification de la i^{me} composante du vecteur d'état.

A partir de la définition suivante des bornes:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1(k) \leq 2 \\ 0 &\leq x_2(k) \leq 2 \\ 0 &\leq x_3(k) \leq 2 \end{aligned}$$

nous avons généré une grille correspondant à un pas de quantifications h uniforme $h = 0.2$.

Ceci implique $n_s = 11 \times 11 \times 11 = 1331$ et nous amène à ranger l'ensemble des points de la grille dans le vecteurs:

$$X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1330 \\ 1331 \end{pmatrix}$$

Une représentation ordonnée du vecteur X_k peut être réalisée à partir d'un codage des variables entières α_i en une base 11, définie comme suit:

α_i	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	0	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1330	10	10	9
1331	10	10	10

Pour retrouver la valeur réelle des variables d'état, il suffit alors d'utiliser les expressions ci-après:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2 \times \text{élément de la 1 colonne de } X_k \\ x_2 &= 0.2 \times \text{élément de la 2 colonne de } X_k \\ x_3 &= 0.2 \times \text{élément de la 3 colonne de } X_k \end{aligned}$$

ce qui donne,

α_i	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	0	0	0.2
3	0	0	0.4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1330	2	2	1.8
1131	2	2	2

Calcul de la matrice des coûts optimaux de transition d'état

Avant de présenter l'algorithme, il est important de présenter un élément clé de la méthode de calcul associée à la formulation étendue: la matrice de coût optimal de transition d'états C_k . Un élément $C_k(i, j)$ de cette matrice représente donc, par définition, la valeur du coût optimal correspondant au chemin reliant un état α_i à une étape k , à un état α_j à l'étape $k+3$. Cette matrice contient donc les valeurs optimales de tous les coûts de transition $c_k(x_k, x_{k+3})$ possibles entre les deux étapes k et $k+3$.

Notons que dans le cas mono-entrée considéré dans cet exemple, l'optimalité résulte de l'unicité des transitions. Dans le cas multi-entrée, la recherche d'une solution optimale doit être réalisée.

Ramenée à notre exemple, la détermination de la matrice C_k peut être décrite sommairement par l'algorithme suivant.

Algorithme IV.1 Calcul de C_k

Pour chaque état $i : 1 \rightarrow 1331$

Pour chaque état atteint $j : 1 \rightarrow 1331$

$$z_i = \Phi(x_i)$$

$$z_j = \Phi(x_j)$$

$$v_i = [A^2B \ AB \ B](z_j - A^3z_i)$$

$$u_i = \gamma(v_i, x_i)$$

calcul du coût de la transition entre l'état i vers l'état j

fin j

fin i

Les coûts optimaux de transition peuvent être rangés dans la matrice suivante:

	α_1	α_2	\cdots	α_{1331}
α_1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	\cdots	$c_{1,1331}$
α_2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	\cdots	$c_{2,1331}$
α_3	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	\cdots	$c_{3,1331}$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	
α_{1130}	$c_{1330,1}$	$c_{1330,2}$	\cdots	$c_{1330,1331}$
α_{1331}	$c_{1331,1}$	$c_{1331,2}$	\cdots	$c_{1331,1331}$

dans laquelle l'élément $c_{i,j}$ représente le coût de transition optimal entre l'état α_i et l'état α_j .

Résolution de l'équation fonctionnelle

L'équation fonctionnelle de la formulation étendue de la programmation dynamique peut être décrite sous le modèle matriciel suivant, de type produit matrice-vecteur, en utilisant les outils de l'algèbre max-plus.[Calvet et Viargues, 1995]

Posons

$$I_3 = C_3 \otimes L_4$$

puis, résoudre pour chaque étape $k = 2, 1, 0$

$$I_k = C_k \otimes I_{k+1}$$

où $I_k(i) = \min_j \{c_k(i, j) + I_{k+1}(j)\}$. L'opérateur \otimes représente une combinaison d'opérateurs somme et minimisation.

De manière plus détaillée, la détermination des commandes optimales peut être décrite par le processus d'itération suivant:

Algorithme IV.2 *Calcul matriciel des u_k*

Pour chaque étape $k : 2 \rightarrow 0$

Pour chaque état $i : 1 \rightarrow 1331$

Pour chaque état atteint $l : 1 \rightarrow 1331$

résolution de l'équation fonctionnelle

stockage de I

fin l

fin i

fin k

Notons que la formulation qui en résulte peut être directement exploitée d'un point de vue numérique dans des environnements de calcul matriciel de type Matlab.

Reconstruction des trajectoires optimales

Cette phase de reconstruction permet d'obtenir la séquence des commandes optimales. Après avoir résolu l'équation fonctionnelle dans l'ordre inverse des étapes, le calcul de la trajectoire optimale, ainsi que de la séquence des commandes, sera décrite par l'algorithme suivant:

Algorithme IV.3 *Calcul de la trajectoire optimale pour x_0*

$$\tilde{x} = \arg\{\min I_0\}$$

Pour $k = 0, 1, 2$

\tilde{u}_k à partir de la matrice des commandes.

$$\tilde{x}_{k+1} = f(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k)$$

fin k

Simulation numérique

En l'absence de valeurs numériques réelles qui ne nous ont pas été accessibles, on a considéré ici des valeurs normalisées pour les différents paramètres associés au système décrit dans (IV.10).

Les valeurs numériques des paramètres utilisées dans le code sont données par:

$$a = 1, c = 1, b = 1, d = 1, l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 1, m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1.$$

Le calcul des séquences de commandes ont été traité à l'aide du logiciel Matlab, et on retrouve la structure suivante de la matrice des coûts des transitions états (IV.3).

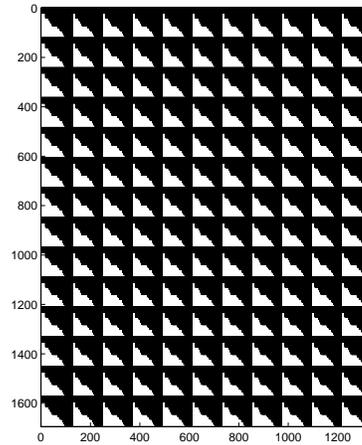


Figure IV.3: Structure de la matrice des coûts de transition d'état

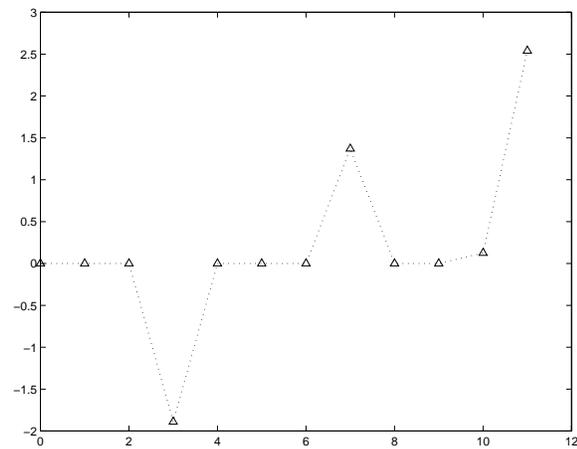


Figure IV.4: Loi de commande optimale

où le point de couleur noir représente un coût fini et le point de couleur blanc représente un coût infini.

Par exemple, pour transférer l'état initial $(0, 0, 0)$ vers l'état final $(1.4, 0.4, 1)$ on a un coût de 6.15. La figure (IV.4) regroupe la trajectoire de la loi de commande pour cet exemple.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a traité un exemple complet. En utilisant le critère d'accessibilité développé à partir du principe du minimum sur le modèle issu de l'économie "modèle de Goodwin" on a pu vérifier que ce système n'est pas commandable dans tout l'espace des états. Cependant, pour le modèle biomédical "stimulation électrique d'un muscle" on a pu calculer l'inversion entrée-état du système en s'appuyant sur la proposition développée au chapitre 3 dans le cadre de la géométrie différentielle. On a alors calculé la matrice des coûts de transition incluse dans la détermination d'une stratégie de commande qui minimise le problème présenté précédemment.

Conclusion générale

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire était de réaliser la synthèse d'une méthode particulière de programmation dynamique pour résoudre un problème de commande optimale. Cette méthode impliquant la détermination d'une matrice de coûts de transition entre états nous a amené à nous concentrer sur le problème de la commandabilité des systèmes non linéaires à temps discret, problème que nous avons encore qualifié de problème d'inversion entrée-états.

Nous avons d'abord consacré un premier chapitre à la présentation du problème de commande optimale, en commençant dans un premier temps par une description rapide de différentes approches de programmation dynamique pour la résolution du problème considéré. On s'est ainsi intéressé plus particulièrement à une formulation explicite du principe de Bellman (résolution d'équation fonctionnelle étendue) qui nous a conduit à considérer le problème de la recherche de séquences de commandes entre deux états terminaux.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'analyse de l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret et à la caractérisation du domaine de commandabilité. Pour cela, nous nous sommes intéressé à plusieurs approches telles que la composition de fonction, l'utilisation de l'algèbre différentielle, de la géométrie différentielle ou encore du principe du maximum.

L'approche de composition de la fonction d'évolution permet d'étudier l'accessibilité des systèmes non linéaires de façon intuitive, puisqu'elle calcule juste le rang de la jacobienne de la fonction de transition. Cependant, elle fait une utilisation intensive de la fonction de composition, ce qui implique une complexité calculatoire.

La géométrie différentielle ayant joué un rôle important dans l'étude de l'accessibilité des systèmes non linéaires dans le cas continu, il pouvait apparaître logique d'utiliser les outils de la géométrie différentielle pour étudier l'accessibilité dans le cas discret. Cependant, ceci ne s'applique pas de manière aussi naturelle et conduit à construire des champs de vecteurs artificiels liés au système ; cette construction nécessitant l'inversibilité de la fonction d'évolution du système.

Par ailleurs, l'utilisation de l'algèbre différentielle constitue un outil bien adapté pour unifier l'étude de l'accessibilité des systèmes continus et discrets. On a présenté un algorithme qui permet d'étudier l'accessibilité d'un système non linéaire par la construction de sous-espaces de filtration en un nombre fini d'étapes.

De manière générale, il faut toutefois souligner que l'utilisation de la géométrie dif-

férentielle, ou de l'algèbre différentielle, nécessite une manipulation d'outils mathématiques complexes.

Nous avons enfin proposé une étude de l'accessibilité des systèmes non linéaires à temps discret basée sur l'utilisation du principe du maximum. La condition nécessaire de commandabilité développée est équivalente à une condition nécessaire d'inexistence d'une bordure du domaine de commandabilité. Le développement de cette condition se traduit par une vérification du rang d'une matrice, faisant juste appel au calcul matriciel élémentaire et donc simple à mettre en oeuvre. Plus spécifiquement, la commandabilité des systèmes bilinéaires à temps discret a été également étudiée en utilisant l'approche du principe du maximum. Une condition nécessaire et suffisante de commandabilité a été ainsi établie sous une hypothèse sensiblement relaxée par rapport à d'autres approches.

Parallèlement, on s'est aussi intéressé à la commandabilité des systèmes à temps discret sous contraintes. On a présenté dans un premier temps un résultat basé sur l'utilisation de l'algèbre linéaire développé pour les systèmes linéaires contraints en commandes. On a développé ensuite une condition nécessaire pour l'étude de la commandabilité des systèmes non linéaires contraints en commande par une approche principe du maximum. On retrouve ainsi une condition proposée par d'autres auteurs dans une approche différente.

Le troisième chapitre a été dédié à la résolution du problème d'inversion entrée-état. Dans ce cadre, on a suivi principalement deux voies.

La première voie consiste tout simplement à composer la fonction d'évolution et conduit à la résolution d'équations algébriques non linéaires. On a proposé comme méthode de résolution deux approches : une approche basée sur la programmation non linéaire et une approche basée sur l'élimination des séquences de commandes incluses dans la matrice d'accessibilité. Cette voie peut présenter naturellement des limites calculatoires pour les systèmes d'ordre relativement élevé.

La deuxième voie consiste à utiliser une méthode de linéarisation exacte, lorsque celle-ci est possible, pour transformer un système non linéaire à temps discret en un système linéaire de la forme de Brunovsky. Dans ce cas, on peut considérer deux approches : l'algèbre différentielle et la géométrie différentielle.

Dans le cas de l'algèbre différentielle, il suffit de vérifier l'intégrabilité des sous-espaces de filtration déjà considérés pour l'étude de l'accessibilité. On peut alors, à partir des 1-formes exactes qui constituent ces sous-espaces de filtration, construire un difféomorphisme et un bouclage statique. Dans le cas de la géométrie différentielle, on a proposé une méthode basée sur la construction de champs de vecteurs artificiels sans condition d'inversibilité de la fonction d'évolution. La détermination du difféomorphisme et du bouclage statique se fait par résolution d'un système d'équations algébriques linéaires et d'une composition de fonctions. Il faut souligner que dans l'approche proposée, on fait l'hypothèse d'une sortie linéarisante, linéaire en l'état.

Enfin, le quatrième chapitre présente deux exemples pour illustrer l'application de nos propositions pour une analyse de l'accessibilité et pour l'inversion entrée-état basée sur une linéarisation exacte.

Le problème d'inversion entrée-état reste naturellement très ouvert et il nous semble intéressant de poursuivre les investigations entamées. On citera quelques prospectives.

1. Le problème de commandabilité et d'inversion entrée-état pour les systèmes non linéaires à temps discret contraints en état et la commande et pour lequel nous n'avons développé jusqu'à présent qu'une approche de commande optimale.
2. L'étude de l'accessibilité des systèmes stochastiques.
3. La résolution de problème d'inversions entrée-état par l'utilisation de la théorie de platitude dans laquelle on recherche une sortie plate à partir de laquelle on peut déterminer une commande qui amène le système d'un point initial vers un autre point final.

Références bibliographiques

- [Ahmed, 1985] Ahmed, N.U. (1985). Finite-time null controllability for a class of linear evolution equation. *Journal Optimisation and Theory Application*, 47.
- [Alonso, 2000] Alonso, A. (2000). *Sur l'exploitatin de modèles discrets en programmation dynamique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [Aranda-Bricaire, 1994] Aranda-Bricaire, E. (1994). *Linéarisation par bouclage des systèmes non linéaires*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes.
- [Aranda-Bricaire *et al.*, 1996] Aranda-Bricaire, E., Kotta, Ü., et Moog, C.H. (1996). Linearization of Discrete-Time Systems. *SIAMJ. Control and Opt.*, 34(6):1999–2000.
- [Aranda-Bricaire et Moog, 1999] Aranda-Bricaire, E. et Moog, C. (1999). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York.
- [Athans et Falb, 1966] Athans, M. et Falb, P.L. (1966). *Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications*. McGRAW-HILL, New York.
- [Bernotas *et al.*, 1986] Bernotas, L.A., Crago, P.E., et Chizeck, H.J. (1986). A discrete-time model of electrically stimulated muscle. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 33:829–838.
- [Bertsekas, 1999] Bertsekas, D.P. (1999). *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Massachusetts.
- [Bimbenet *et al.*, 1994] Bimbenet, J.J., Dumoulin, E., et Trystram, G. (1994). *Automatic control of food and biological processes*. Elsevier, Amesterdam.
- [Bruni *et al.*, 1974] Bruni, C., Dipillo, G., et Koch, G. (1974). Bilinear systems : An appealing class of “nearly linear” systems in theory and applications. *IEEE Trans on Automatic Control*, AC-19.
- [Bryson et Ho, 1975] Bryson, A.E. et Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: optimization, estimation, and control*. John Wiley and Sons, New York.
- [Calvet *et al.*, 2001] Calvet, J.L., Djeridane, B., et Alonso, A. (2001). Numerical and algebra computing for the determinatin of state transition control matrices in nonlinear discrete-time systems. In *IFAC Symposium on NOLCOS'01*.
- [Calvet et Viargues, 1995] Calvet, J.L. et Viargues, G. (1995). Invariant Imbedding and Parallelism in Dynamic Programming for Feedback Control. *Journal. of optimization. theory. and application.*, 87:121–140.

- [**Cassandras, 1993**] Cassandras, C.G. (1993). *Discret event systems: Modeling and Performance Analysis*. Aksen Associates Incorporated Publishers, Boston.
- [**Culioli, 1994**] Culioli, J.C. (1994). *Introduction à l'optimisation*. Ellipses, paris.
- [**de Jager, 1995**] de Jager, B. (1995). The use of symbolic computation in control: Is it viable? *IEEE Trans. Automat. Control*, 40:84–89.
- [**Di Benedetto et al., 1989**] Di Benedetto, M., Grizzle, J., et Moog, C.H. (1989). Rank of invariants of nonlinear. *SIAM J. Contr. Optim*, 27:658–672.
- [**Djeridane, 2002**] Djeridane, B. (2002). Sur la commandabilité des systèmes non linéaires discrets. In *3e Congrès des doctorants, Toulouse*.
- [**Djeridane et Calvet, 2002**] Djeridane, B. et Calvet, J.L. (2002). A necessary controllability condition for nonlinear discrete-time systems. In *Proc. American Control Conference*.
- [**Djeridane et Calvet, 2003**] Djeridane, B. et Calvet, J.L. (2003). An explicit control approach of accessibility for non linear discrete-time systems. In *Proc. American Control Conference*.
- [**Djeridane et Calvet, 2004a**] Djeridane, B. et Calvet, J.L. (2004a). An necessary and sufficient local controllability condition for bilinear discrete-time systems. In *Proc. American Control Conference*.
- [**Djeridane et Calvet, 2004b**] Djeridane, B. et Calvet, J.L. (2004b). Sur l'inversion entrée-état de systèmes non linéaires discrets. *Journal européen des systèmes automatisés, soumis*.
- [**Evans et Murthy, 1977**] Evans, M.E. et Murthy, D.N.P. (1977). Controllability of class of discrete time bilinear systems. *IEEE Trans on Automatic Control*.
- [**Feiss, 2004**] Feiss, P. (2004). *Monitoring de la curarisation: Antagonisme des myorelaxants*. cours en ligne de la faculté de médecine de Limoges.
- [**Fliess et Normand-Cyrot, 1981**] Fliess, M. et Normand-Cyrot, D. (1981). A group-theoretic approach to discrete-time systems. In *Conference on Decision and Control*.
- [**Fonseca et Ussher, 1999**] Fonseca, G.L. et Ussher, L. (1999). *The history of economic thought*. site internet.
- [**Goka et al., 1973**] Goka, T., Tarn, T.J., et Zaborszky, J. (1973). On the controllability of class of discrete bilinear systems. *Automatica*.
- [**Grantham et Vincent, 1975**] Grantham, W.J. et Vincent, T.L. (1975). A controllability minimum principle. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 17:93–114.
- [**Grizzle, 1993**] Grizzle, J.W. (1993). A linear algebraic framework for the analysis of discrete-time nonlinear systems. *SIAM. J. Control Optim*, 31:1026–1044.

- [Hackbush, 1985] Hackbush, W. (1985). *Multigrid Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Hermann et Krener, 1977] Hermann, R. et Krener, A.J. (1977). Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22.
- [Hisham, 2004] Hisham, A. (2004). *Commande optimale*. Hermes, Paris.
- [Isidori, 1989] Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Jakubczyk et Sontag, 1990] Jakubczyk, B. et Sontag, E.D. (1990). Controllability of Nonlinear Discrete-Time Systems: A Lie-Algebraic Approach. *SIAMJ. Control and Opt.*, 28(1):1–33.
- [Jayaraman, 1995] Jayaraman, G. (1995). *Computational Schemes for Exact Linearization of Discrete-time Systems Using a Geometric Approach*. PhD thesis, Case Western Reserve University.
- [Jayarman et Chizeck, 1993] Jayarman, G. et Chizeck, H.J. (1993). Feedback linearization of discrete-time systems. In *Proc. Conference on Decision and Control*.
- [Jayarman et Chizeck, 1994] Jayarman, G. et Chizeck, H.J. (1994). Exact linearization of discrete-time nonlinear systems using state space transformation. In *Proc. Conference on Decision and Control*.
- [Kailath, 1980] Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [Kawski, 1991] Kawski, M. (1991). High-order conditions for local controllability practice. In *Symposium MTNS, Kobe*, pages 271–276.
- [Kenney et Laub, 1988] Kenney, C. et Laub, A.J. (1988). Controllability and stability radii for companion form systems. *Math. Control Signals Systems*, 1:239–256.
- [Kotta, 1990] Kotta, U. (1990). Right inverse of a discrete time non-linear system. *INT. J. Control*, 51(1):1–9.
- [Larson et Casti, 1978] Larson, R.E. et Casti, J.L. (1978). *Principles of dynamic programming: Part I*. Marcel Dekker, New York.
- [Larson et Keckler, 1969] Larson, R.E. et Keckler, W.G. (1969). Application of dynamic programming to the control of water resources systems. *Automatic*, 5:15–26.
- [Lee et al., 1987] Lee, H.G., Arapostathis, A., et Marcus, S.I. (1987). Linearization of discrete-time systems. *INT. J. Control*, 45(5):1803–1822.
- [Levine, 1996] Levine, W.S. (1996). *The Control Handbook*. CRC Press - IEEE Press, Boca Raton (USA).
- [Marino et Tomei, 1995] Marino, R. et Tomei, P. (1995). *Nonlinear Control Design: Geometric Adaptive and Robust*. Prentice-Hall, New York.

- [**Nam, 1989**] Nam, K. (1989). Linearization of discrete-time nonlinear systems and a canonical structure. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34:119–122.
- [**Nijmeijer et Van Der Schaft, 1991**] Nijmeijer, H. et Van Der Schaft, A.J. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey.
- [**Normand-Cyrot, 1983**] Normand-Cyrot, D. (1983). *Théorie et pratique des systèmes non linéaires en temps discret*. PhD thesis, Université Paris-Sud.
- [**Phat, 1996**] Phat, V. N. (1996). *Constrained Control Problems of Discrete Processes*. World Scientific, Singapore.
- [**Post, 1995**] Post, B.A. (1995). Computer Algebra Analysis of Nonlinear Discrete-time System. Master's thesis, University of Twente, Netherland.
- [**Rouchon et al., 1993**] Rouchon, P., Fliess, M., Lévine, J., et Martin, P. (1993). Flatness and motion planing: the car with n-trailers. In *Proc. 2nd. European Control Conference*, pages 1518–1522.
- [**Sastry, 1999**] Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems : Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, New York.
- [**Slotine et Li, 1991**] Slotine, J-J.E. et Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey.
- [**Sontag, 1991**] Sontag, E.D. (1991). Kalman's controllability rank condition: from linear to non linear. In *mathematical system theory: The influence of R.E Kalman*.
- [**Sontag, 1998**] Sontag, E.D. (1998). *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*. Springer-Verlag, New York.
- [**Sussmann et Jurdjevic, 1972**] Sussmann, H.J. et Jurdjevic, V. (1972). Controllability of nonlinear systems. *Journal Diff. Eqs*, 12:95–116.
- [**Vincent et Grantham, 1997**] Vincent, T.L. et Grantham, W.J. (1997). *Nonlinear and optimal control systems*. Wiley and Sons, New York.