



**HAL**  
open science

**L'APPROCHE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS  
DIFFERENTIELLES EN CLASSE DE TERMINALE S :  
Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les  
conséquences ?**

Salahattin Arslan

► **To cite this version:**

Salahattin Arslan. L'APPROCHE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES EN CLASSE DE TERMINALE S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?. domain\_stic.educ. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00009594

**HAL Id: tel-00009594**

**<https://theses.hal.science/tel-00009594v1>**

Submitted on 24 Jun 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**École doctorale "Mathématiques, Sciences et technologies de l'information,  
Informatique"**

Pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université Joseph Fourier  
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)  
**Spécialité** : Didactique des Mathématiques

Thèse présentée et soutenue publiquement par

Salahattin ARSLAN

*Le 01 avril 05*

---

**L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en  
Classe de Terminale S :**

Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?

---

**Composition du jury :**

**ARTIGUE** Michèle, Professeur des Universités Paris VII, *Rapporteuse*

**BALACHEFF** Nicolas, Directeur de Recherche CNRS, *Directeur de Thèse*

**CHAACHOUA** Abdelhamid, Maître de Conférences IUFM de Grenoble, *Directeur de Thèse*

**LABORDE** Colette, Professeur IUFM de Grenoble, *Présidente*

**MARIOTTI** Maria-Alessandra, Professeur Università di Siena, *Rapporteuse*

Thèse préparée au sein du Laboratoire **LEIBNIZ-IMAG**

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--



*Bu tezi, benim mutluluğum için hiç bir şeyi feda etmekten çekinmeyen anne ve babama adıyorum.*

*A mes parents... qui ont tout sacrifié pour moi... et qui sont prêts à « se priver » de moi pour mon bonheur...*



## Remerciements

*Je tiens à remercier tout d'abord Hamid CHACHOUA d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour la patience et le soutien qu'il m'a offerts mais également pour tout ce qu'il m'a appris sur la didactique. Il a toujours su respecter mes choix et me critiquer sans m'imposer son point de vue.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements aux membres du jury :*

*Merci à Colette LABORDE d'avoir accepté de présider le jury, pour ses remarques constructives mais aussi de m'avoir accueilli dans sa classe à l'IUFM pour une expérimentation qui n'a malheureusement pas trouvé place dans cette thèse...*

*J'exprime ma reconnaissance aux deux rapporteuses de ma thèse Michèle ARTIGUE et Maria-Alessandra MARIOTTI, pour avoir accepté de rapporter sur ce travail et surtout pour leurs remarques pertinentes qui m'ont permis d'améliorer mon travail.*

*Merci à Nicolas BALACHEFF, directeur de thèse mais d'abord directeur du laboratoire LEIBNIZ, qui a su m'accorder quelques séances de travail malgré sa grande charge.*

*Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire LEIBNIZ qui ont, directement ou indirectement, contribué à l'achèvement de ce travail. J'ai des pensées particulières pour chacun d'eux : Denise, Claude mais aussi Amandine, Béatrice, Henri, Jacky, Robert...*

*Je remercie tous les thésards pour les moments de discussion riche en didactique et pour la synergie et l'ambiance existante entre nous. J'ai des pensées particulières pour Julio, qui a su m'accorder du temps à chaque fois que j'ai besoin de discuter... pour Iranete avec qui nous*

*avons essayé de conquérir le modèle çkç... pour Afonso qui m'a ouvert son appartement les derniers moments de mon séjour où je suis « sans abri ».*

*Je tiens à remercier également tous les élèves de la classe de TS et en particulier leur professeur M. Jean-Pierre FOUILLEUL, de m'avoir accueilli dans sa classe....*

*J'exprime ma reconnaissance à Stéphanie, Abel et Pierre qui ont contribué à la correction d'orthographe de ce travail.*

*Je remercie tous les amis que je ne peux pas énumérer ici mais qui ont été présents dans les moments difficiles. J'ai des pensées particulières à Nuray, Mehmet, Agnieszka.... Vos amitiés nous furent précieuses et vous ne serez jamais oubliés.*

*Je remercie également ma très chère épouse Ayşegül avec qui nous avons partagé des moments difficiles pleins de stress mais aussi des moments pleins de joie. Merci ma meilleure amie d'avoir supporté mon absence ces six derniers mois et merci pour tes encouragements. Finalement la petite sœur tant attendue est née....*

*Le ministère de l'Education Nationale Turc m'a permis de bénéficier de conditions favorables en m'accordant une bourse d'étude. Je suis fier d'accomplir ma tâche.*

*Bana bu imkanı veren Türk Milli Eğitim Bakanlığına teşekkürlerimi sunarım.*

INTRODUCTION.....	7
-------------------	---

## **PARTIE A: PROBLEMATIQUE, METHODOLOGIE ET CADRE THEORIQUE**

<b>CHAPITRE A1 : PROBLEMATIQUE.....</b>	<b>13</b>
1 <i>VERS LA PROBLEMATIQUE.....</i>	13
1.1 Etude historique.....	13
1.1.1 Synthèse et résultats tirés de l'étude historique.....	16
1.2 Les travaux antérieurs.....	18
1.2.1 La prépondérance de la résolution algébrique dans l'enseignement universitaire 18	
1.2.2 La volonté et la possibilité d'introduire et d'enseigner les trois approches.....	19
1.2.3 Les trois approches font appel à des prérequis et des compétences relativement distinctes 20	
1.2.4 L'approche algébrique risque de constituer un obstacle didactique pour l'approche qualitative... mais aussi numérique.....	20
1.3 Présentation des différents modes de résolution.....	22
1.3.1 La Résolution Algébrique.....	22
1.3.2 La Résolution Numérique.....	26
1.3.3 La Résolution Qualitative.....	29
1.3.4 Mise en correspondance des trois approches.....	32
1.4 Contraintes entravant les résolutions numérique et graphique.....	39
1.5 Hypothèse et questions de la recherche.....	42
<b>CHAPITRE A2 : CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE.....</b>	<b>47</b>
2 <i>CADRE THEORIQUE : REGISTRE ET CONCEPTION.....</i>	47
2.1.1 Comment intégrerons-nous les notions de « registre » et de « conception » ?.	48
3 <i>INGENIERIE DIDACTIQUE COMME METHODOLOGIE.....</i>	53
3.1 Ingénierie Didactique en TS.....	54
3.2 Registres mobilisables en secondaire.....	56
3.2.1 Registre algébrique.....	57
3.2.2 Registre intrinsèque.....	58
3.2.3 Registre du tableau de variations.....	58
3.2.4 Registre graphique.....	61



3.2.5	Implication pour notre recherche.....	62
-------	---------------------------------------	----

## PARTIE B: ANALYSE DES PROGRAMMES ET DES MANUELS

<b>CHAPITRE B1 : ANALYSE DES PROGRAMMES.....</b>		<b>69</b>
4	<i>ANALYSE DES PROGRAMMES.....</i>	69
4.1	Aperçu des notions sous-jacentes à l’approche qualitative .....	70
4.2	Les équations différentielles dans les programmes .....	73
4.2.1	Programme de 1998 .....	74
4.2.2	Projet du programme 2001 .....	74
4.2.3	Programme en vigueur depuis 2002.....	76
4.3	Conclusion sur l’analyse des programmes.....	79
<b>CHAPITRE B2 : ANALYSE DES MANUELS.....</b>		<b>81</b>
5	<i>ANALYSE DES MANUELS.....</i>	81
5.1	Les notions sous-jacentes à l’approche qualitative dans les manuels .....	82
5.2	Les équations différentielles dans les manuels.....	84
5.2.1	Avant le changement des programmes .....	84
5.2.2	Après le changement des programmes .....	87
5.3	Conclusion.....	95

## PARTIE C: INGENIERIE DIDACTIQUE EN TERMINALE S

<b>CHAPITRE C1 : ANALYSE A PRIORI.....</b>		<b>99</b>
6	<i>ANALYSE A PRIORI DE L’INGENIERIE DIDACTIQUE.....</i>	99
6.1	Présentation de l’ingénierie.....	100
6.2	Analyse <i>a priori</i> .....	104
6.2.1	Les principales stratégies.....	104
6.2.2	PHASES n°1 : Etude des variations des courbes solutions. ....	105
6.2.3	PHASE n°2: Introduction du concept d’isoclines.....	110
6.2.4	PHASE n°3 : Champ de tangentes .....	120
6.2.5	PHASE n°4 : Théorème d’existence et d’unicité.....	123
6.2.6	Synthèse de l’analyse <i>a priori</i> des deux premières séances.....	125
6.2.7	PHASE n°5: Evaluation.....	127

6.2.8	Synthèse de l'analyse <i>a priori</i> de la troisième séance .....	140
<b>CHAPITRE C2 : ANALYSE A POSTERIORI .....</b>		<b>141</b>
7	<i>ANALYSE A POSTERIORI DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE</i> .....	141
7.1	Les quatre premières phases de l'ingénierie .....	143
7.1.1	Activité n°1 .....	143
7.1.2	Activité n°2 .....	149
7.1.3	Le devoir à la maison .....	154
7.1.4	Activité n°3 .....	160
7.1.5	Activité n°4 .....	163
7.1.6	Activité n°5 .....	163
7.1.7	Activité n°6 .....	166
7.2	Bilan des deux premières séances .....	168
7.3	Séance n°3 .....	172
7.3.1	Analyse globale .....	174
7.4	Bilan de l'expérimentation : .....	195
7.4.1	Réussite/ difficultés .....	195
7.4.2	D'autres résultats .....	200

**PARTIE D: CONCLUSION GENERALE, PERSPECTIVE. BIBLIOGRAPHIE**

8	<i>CONCLUSION GENERALE</i> .....	209
---	----------------------------------	-----

**ANNEXE**

<i>Annexes A</i> : .....	227
<i>Annexes C</i> .....	233
Annexe C1- Activités proposées aux élèves .....	234
Annexe C2- Tableau synoptique des productions des élèves en fonction de stratégies .	244
Annexe C3- Protocoles de quatre binômes d'élèves pour la troisième séance de l'ingénierie didactique proposée. ....	246



### Abréviations utilisées dans cette thèse

Dans cette thèse, nous avons eu recours à des abréviations. Afin de faciliter la lecture, en particulier de la partie C, nous les énumérons ci-dessous (N désignant le numéro d'un élément) :

$C_A$  : Conception Algébrique

$C_Q$  : Conception Qualitative

$C_T$  : Conception Transcendante

**Op. AN** : Opérateur Algébrique n° N

**Op. QN** : Opérateur Qualitatif n° N

**AN** : Activité n° N

**ANQN** : Item n°N de l'Activité n° N

**DQN** : Item n°N du Devoir à la maison

**AEN** : Activité n° N de la séance d'Evaluation

**AEN<sub>A</sub>** : Variante proposée au groupe A de l'Activité n° N de la séance d'Evaluation

**AEN<sub>B</sub>** : Variante proposée au groupe B de l'Activité n° N de la séance d'Evaluation

**SAN** : Stratégie Algébrique n° N

**SQN** : Stratégie Qualitative n° N

**SXN** : Stratégie ni algébrique ni qualitative n° N

**EN** : Elève non redoublant n° N

**E<sub>r</sub>N** : Elève Redoublant n° N

**BN** : Binôme n° N

**ED** : Equation Différentielle

**Graph [y]** : Représentation Graphique d'une (ou de plusieurs) courbe solution

**Graph [y']** : Représentation Graphique de y'

**CdT** : Champ de Tangentes d'une équation différentielle

**TdV** : Tableau de Variations des courbes solutions d'une équation différentielle



# INTRODUCTION

Les équations différentielles sont au cœur de l'analyse depuis des siècles et possèdent donc un rôle éminent pour les mathématiques. Par ailleurs, d'innombrables situations de la vie réelle pouvant être modélisées grâce à des équations différentielles, celles-ci constituent également un outil confirmé pour formuler dans un langage mathématique des phénomènes issus d'autres disciplines (comme la mécanique, l'astronomie, les sciences physiques, la chimie, la biologie, les sciences économiques etc.). Il en résulte que l'étude des équations différentielles peut (et doit) être un moment propice pour offrir une ouverture de l'application des mathématiques à la vie réelle et pour ainsi dévoiler aux apprenants la nature des recherches contemporaines en mathématiques. Mais qu'en est-il dans l'enseignement ?

Plusieurs recherches ont mis en exergue que le contenu de l'enseignement ne reflétait pas pour autant l'importance de cet objet et certains auteurs (cf. par exemple Anderson & Seaquist, 1999) ont pointé une faiblesse de motivation chez les étudiants. Ceux-ci éprouvent par ailleurs des difficultés aussi bien pour donner du sens mathématique à une équation différentielle que pour l'interpréter en tant que modèle d'un phénomène de la vie courante. Les lignes suivantes empruntées à Boyce (1994) mettent en évidence cette réalité :

« The traditional course on differential equations that I took many years ago and taught up until the past couple of years dealt almost entirely with the derivation of formulas for solutions of various kinds of differential equations. The time and effort required to develop and practice the manipulations necessary to produce solutions of these problems left little opportunity to develop skill in formulating problems in mathematical terms, or in drawing conclusions from their solutions. » (pg. 364)

Comme le témoigne cet extrait, la vie institutionnelle que mène l'objet dans ces cours joue donc un rôle déterminant dans cette réalité : il y a une prégnance de la résolution algébrique et le contenu du cours est réduit à une application des techniques algébriques toutes prêtes. D'après Boyce (idem) (mais également Blanchard, 1994) le cours étant exclusivement centré sur la manipulation des expressions algébriques, les apprenants issus de ces cours traditionnels des équations différentielles apprennent à devenir efficaces dans les manipulations algébriques sans forcément comprendre les concepts de base en jeu. Les étudiants ne donnent par conséquent pas de sens à une équation différentielle ni aux solutions.

Par ailleurs l'application des techniques algébriques étant tributaire de la nature de l'équation différentielle étudiée, la prédominance de ces techniques rend limité le nombre d'équations traitées et le cours tend de ce fait à se focaliser sur les techniques spéciales à des équations différentielles issues

## Introduction

d'un « album de famille. » Ceci étant, les équations différentielles non linéaires se trouvent écartées par l'enseignement, faute de techniques de résolution. Cependant la plupart des modèles conduisent à des équations différentielles non linéaires, généralement inaccessibles par ces techniques algébriques, de ce fait la richesse de la théorie se trouve étouffée.

Or, face à l'impossibilité de résoudre la plupart des équations différentielles, la sphère savante a connu trois principaux modes de résolution : algébrique, numérique et qualitatif. Pour ce qui est de l'enseignement, il ne semble donc pas suivre cette évolution et, comme nous l'avons évoqué, une prédominance de l'algébrique est constatée (Artigue, 1989 ; Ramirèz, 1995 ; Habre, 2000, etc.). En ce qui concerne les deux autres modes de résolution, la résolution numérique fait des apparitions de temps à autre dans l'enseignement, quant à la résolution qualitative, elle est absente dans l'enseignement et s'est contentée longtemps de servir le monde de la recherche grâce à des ordinateurs analogiques (Kallaher, 1999).

Des propos ci-dessus, il découle la nécessité d'intégration d'autres modes de résolution. Il faut par conséquent remplacer les techniques spécifiques pour obtenir des solutions, par des contenus où les apprenants se focalisent sur la formulation des équations différentielles et l'interprétation mathématique et pragmatique des solutions. En réalité cette nécessité ne provient pas uniquement des besoins didactiques, mais d'autres facteurs scientifiques (l'intérêt croissant autour des systèmes dynamiques par exemple) et technologiques (l'accessibilité des moyens informatiques par exemple) réclament une évolution et plaident pour l'intégration des techniques qualitative et numérique.

Cette thèse a cherché à élucider la question de l'ouverture de l'enseignement sur d'autres approches et plus spécifiquement sur la résolution qualitative. En privilégiant celle-ci, nous n'avons nullement l'intention de prétendre qu'elle surclasse les deux autres, mais bien au contraire nous défendons la complémentarité des trois modes de résolution évoqués ci-dessus. Nous avons favorisé l'étude qualitative pour diverses raisons expliquées plus loin dans le texte, mais en particulier parce qu'elle offre des intérêts incontestables en mobilisant un nombre important de notions de l'analyse (tangente, dérivée, fonction, etc.) et en permettant de mieux en mieux de se focaliser sur l'interprétation des solutions.

Basée en particulier sur les possibilités pédagogiques offertes par les environnement informatiques, il y a maintenant une réforme sur le contenu des équations différentielles à enseigné au niveau universitaire. Désormais, fort heureusement, des travaux militant pour un enseignement plus satisfaisant des équations différentielles ne cessent de croître (cf. Artigue 1989 ; C\*ODE\*E (*Consortium for Ordinary Differential Equations Experiments*) à Harvey Mudd College : <http://www.math.hmc.edu/codee/main.html> ; Chau & Pluvinaige 2000 ; etc.) ; le projet de Boston University (*The Boston University Ordinary Differential Equations Project* : <http://math.bu.edu/odes/>).

Inscrit dans cette perspective, notre travail défend la nécessité de rompre avec l'enseignement traditionnel des équations différentielles et de faire une révision radicale. Nous faisons l'hypothèse que l'on est actuellement capable de faire cette innovation et ce surtout grâce aux outils technologiques mais aussi didactiques que l'on a à disposition. Néanmoins l'originalité de notre travail provient notamment de la volonté de fournir aux apprenants, avant même qu'ils étudient la résolution algébrique, l'occasion de faire la « première rencontre » avec des équations différentielles via une étude qualitative. Ceci implique nécessairement le choix de la classe de Terminale qui recense des élèves redoublants censés connaître la résolution algébrique. Ainsi ce choix fournit-il l'avantage à la fois de tester l'intérêt d'introduire l'objet équation différentielle par une étude qualitative et de voir l'interaction de celle-ci avec la résolution algébrique.

Par ailleurs, qualifiant les travaux existants ayant pour objectif de donner des suggestions pour un cours « parfait » des équations différentielles, Rasmussen (1998a) pointe la pénurie des recherches portant sur la conceptualisation des étudiants à ce sujet et donne comme exception les travaux de M. Artigue (1992) et de M. Zandieh & M. McDonald (1999). Notre travail représente de ce point de vue une originalité car il se focalise tant sur le contenu que sur la conceptualisation des élèves.

La richesse de l'étude qualitative en termes de registres nous a amené à intégrer cette notion didactique dans notre travail. Nous avons par ailleurs fait appel au modèle  $ck\zeta$ , proposé par N. Balacheff (Balacheff, 1995) qui définit une conception comme un quadruplet (P, R, L,  $\Sigma$ ). Limitant le système de représentation (L) aux registres sémiotiques introduits par Duval (Duval, 1995ab), nous avons examiné de près l'interaction entre L et R, l'ensemble d'*opérateurs*, constitué des actions qui permettent de transformer une représentation (graphique, algébrique ou autres) et des manipulations pour la résolution. Il nous a non seulement été possible d'observer de plus près l'interaction entre la résolution algébrique et la résolution qualitative, mais nous avons également pu observer l'intérêt de la notion de registre pour l'apprentissage qui constitue notre principale occupation.

L'organisation de la thèse se compose de quatre parties. Dans la partie A, après une rapide étude historique, nous présenterons les trois modes de résolution en question et expliciterons les raisons pour lesquelles nous favoriserons l'un d'entre eux, à savoir la résolution qualitative. Ensuite, à l'aide des travaux antérieurs –en particulier ceux de Artigue (1989)-, nous rappellerons les contraintes qui s'opposent à l'intégration de ce mode de résolution afin de remédier à certaines d'entre elles grâce à nos choix des outils didactiques. Dans un deuxième temps, dans la partie B, nous aurons recours à une analyse des programmes et des manuels et ce afin d'explorer des connaissances des élèves pour les mettre à profit dans notre expérimentation. Notre étude se base donc sur l'hypothèse qu'une telle approche doit trouver un habitat dans la niche écologique des équations différentielles en secondaire. Afin d'explorer cette hypothèse, nous avons mis en œuvre une expérimentation dans l'institution Terminale S, présentée avec ses analyses *a priori* et *a posteriori* dans la partie C, suivie par la conclusion et perspective dans la partie D.





# CHAPITRE A : PROBLEMATIQUE, CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

*« On raconte que Newton communiqua à Leibniz un anagramme à peu près comme ceci : aaaaabbbeeeii, etc. Leibniz, naturellement, n'y compris rien du tout ; mais nous savons que cet anagramme veut dire, en le traduisant dans le langage moderne : « Je sais intégrer toutes les équations », et nous sommes amenés à nous dire que Newton avait bien de la chance ou qu'il se faisait de singulières illusions. »*

H. Poincaré, 1908, Science et méthode, Flammarion, Paris ; réédition 1920.



# CHAPITRE A1 :

*Dans ce chapitre, après une rapide étude historique, nous présentons les trois modes de résolution pour les équations différentielles. Suite à une comparaison didactique de ceux-ci, nous opterons pour la résolution qualitative tout en justifiant ce choix. Nous terminerons enfin par la présentation de nos hypothèses et questions de recherche.*

## 1 VERS LA PROBLEMATIQUE

### 1.1 Etude historique

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui fit historiquement l'objet de nombreuses recherches. Dans Thomas' Calculus (Thomas et al., 2003), on remonte le début de l'histoire de cette notion au début de l'analyse avec Fermat, Newton et Leibniz. Aussitôt que le concept de la dérivée fut suffisamment compris et que les scientifiques eurent assez d'éléments pour la travailler, elle commença à faire son apparition dans des équations issues des problèmes, tels ceux de Debeaune et Galilée, relatifs à une chaîne suspendue, à la forme optimale d'un toboggan et à l'équation de la tractrice (Wanner, 1988). L'histoire de cette notion, dont d'après *Encyclopaedia Of Mathematics* le terme est dû à G. Leibniz (1646-1716) en 1676, connaît un développement riche et marqué par la géométrie, la mécanique, l'astronomie.

Née en tant qu'outil, comme pratiquement tout concept mathématique, la notion d'équation différentielle fit tout d'abord l'objet d'études en vue d'une résolution algébrique pendant les deux premiers siècles de son apparition. Jusqu'à l'arrivée en scène de J. Liouville (1809-1882) au 19<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens ne cessèrent d'espérer trouver un jour ou l'autre une méthode complète de résolution applicable à toute sorte d'équations différentielles. L'une des premières tentatives remonte à Newton (1642-1727) dans son *Treatise on Fluxional Equations*, écrit vers 1671 et publié en 1736, et qui ne trouve pas suffisamment d'échos dans le développement de la théorie. Tout en classant les équations différentielles en trois groupes : celles de la forme  $y'=f(x)$  ou  $y'=f(y)$  ; celles de la forme  $y'=f(x, y)$  et enfin celles à dérivée partielle, il proposa une résolution par des séries infinies, et prétendit que cette méthode permettait de résoudre toute équation différentielle.

Un obstacle important relativement à la résolution algébrique fut franchi par J. Bernoulli (1667-1748) qui découvrit la méthode d'intégration des équations différentielles à variables séparables, développée et généralisée par la suite par Leibniz qui aussitôt fut capable d'intégrer les équations différentielles homogènes et ensuite les équations linéaires du premier ordre. Un peu plus tard, B. Taylor (1685-1731) utilisa les séries pour résoudre les équations différentielles.

Dès le début du 18<sup>ème</sup> siècle, munis de ces techniques élémentaires, les mathématiciens se lancèrent dans la découverte de ce que J. Bernoulli appelle « le continent inconnu » peuplé par les équations différentielles qui régissent des phénomènes mécaniques. Ils commencèrent à adapter ces équations et les méthodes de résolution découvertes à des problèmes issus de l'astronomie et de la mécanique. Comme les deux grands traités, -le Traité de mécanique analytique (1788) de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) et le Traité de mécanique céleste (paru entre 1799 et 1825) de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)- en témoignent, la mécanique, considérée comme la « science du siècle », est exploitée au maximum pour les applications de ce continent.

Grâce aux discussions avec D. Bernoulli (1700-1782), L. Euler (1707-1783) et J. L. Lagrange, sur ce qu'est une fonction et ce qu'est une solution d'une équation différentielle, Euler, qui maîtrisait désormais les fonctions, ne tarda pas à constater que les fonctions étaient la clef primordiale pour comprendre les équations différentielles. Dans *Mechanica*, publié en 1736, il développa des méthodes de résolution, basée sur des séries et certaines fonctions spéciales. Il développa par ailleurs des stratégies générales pour obtenir des solutions pour beaucoup de genres d'équations différentielles. C'est à lui, en 1739, que nous devons la méthode de variation des constantes, une des étapes principales dans le développement de la théorie.

A la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, Gauss (1777-1855), percevant le rôle fondamental de la théorie des fonctions complexes pour les équations différentielles, démontra la nécessité de l'introduction des nombres complexes dans le champ, faute de quoi la nature des équations manipulées restera limitée. C'est ainsi que la théorie des fonctions analytiques conduisit à une nouvelle théorie dans le domaine complexe. A. L. Cauchy (1789-1857) fut le premier à apprécier l'importance de ce point de vue, et dans les années 1820, il donne une nouvelle direction à la théorie en démontrant que dans certaines limites, toute équation différentielle est solvable.

Or aux mêmes périodes que les travaux de N. H. Abel (1802-1829) et de E. Galois (1811-1832) annonçant que certaines équations différentielles, notamment les équations non linéaires, n'avaient pas de solutions qui puissent être décrites par des formules, Liouville montra en 1841 l'impossibilité de résoudre certaines équations différentielles même d'ordre peu élevé, telle  $y' = x^2 + y^2$ . Les théorèmes d'existence pour des solutions des équations différentielles du premier ordre ne furent établis qu'en 1876 par R. Lipschitz (1832-1903). Ainsi le 19<sup>ème</sup> siècle a été dominé par la problématique d'existence et d'unicité de solutions et de fonctions de variables complexes mais également par la naissance de la résolution numérique.

Confrontés à toutes ces difficultés, les mathématiciens s'orientèrent tout d'abord vers un moyen palliatif qui est à la fois simple, peu coûteux et efficace pour approcher les solutions d'une équation différentielle : il s'agit de la résolution approximative. Certaines contributions d'Euler débouchèrent en 1840 sur une méthode connue aujourd'hui sous le nom de « la méthode d'Euler. » Mais si les premières méthodes numériques datent du 19<sup>ème</sup> siècle, le développement de l'analyse numérique de ces méthodes ne fut entrepris que depuis 1950 simultanément avec l'apparition des premiers calculateurs électroniques permettant la mise en œuvre effective des algorithmes construits. Dans la dernière moitié du 20<sup>ème</sup> siècle, beaucoup de mathématiciens et informaticiens appliquèrent des méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles et le développement des moyens informatiques conduisit à générer une panoplie des méthodes numériques. Aujourd'hui l'ampleur de ces méthodes est tellement grande qu'elles permettent de prouver le théorème d'existence.

Pour s'attaquer, en particulier, aux équations différentielles non linéaires, le début du 19<sup>ème</sup> siècle témoigna d'un autre axe de recherche, avec au départ A.-L. Cauchy dont les traces furent suivies entre autres par C. Briot (1817-1882), J. C. Bouquet (1819-1885) et L. I. Fuchs (1833-1902). Les mathématiciens commencèrent à étudier les propriétés des courbes intégrales au voisinage d'un point, laissant ainsi de côté le point de vue analytique. Se fondant sur ces résultats, Henri Poincaré (1854-1912), tout en introduisant de nouvelles fonctions transcendentes, se lança dans l'étude des comportements globaux des courbes solutions rompant ainsi avec le point de vue local inauguré par ses prédécesseurs. La *théorie qualitative des équations différentielles* fut ainsi inaugurée. L'objet principal de cette théorie est d'étudier qualitativement les courbes représentatives des solutions, les points singuliers et l'allure de la courbe au voisinage d'un point singulier.

Le système solaire pouvant être considéré comme un système dynamique composé de dix corps, en négligeant les satellites et les astéroïdes, Poincaré étudie l'évolution des trajectoires des planètes, et donne ainsi une nouvelle vision de la mécanique céleste. En 1889, la théorie fit l'objet du mémoire lauréat du prix du roi Oscar grâce au succès obtenu dans l'étude des N corps où il s'agit de comprendre des influences les corps s'attirant conformément aux lois de la gravitation universelle de Newton. D'ailleurs l'origine de cette théorie fut initialement motivée par une question d'astronomie : le système solaire est-il stable ? Se peut-il qu'un jour notre planète aille plonger dans le soleil, ou, au contraire lui échappera-t-elle ? On crut longtemps que le mouvement planétaire du système solaire était stable et régulier sans se soucier pour autant de le prouver. Poincaré, démontrant que les solutions d'équations différentielles pouvaient être instables, prouva que trois corps obéissant à la gravitation universelle ont une trajectoire qui dépend de la condition initiale d'où un grand nombre de corps du système solaire (les comètes, les astéroïdes, les planètes) ont un mouvement chaotique à cause d'une grande sensibilité aux conditions initiales. Les prédictions possibles sur l'avenir de ce système étant donc limitées, on ne peut jamais déterminer avec exactitude le destin de ces corps puisque la moindre perturbation dans nos mesures entraînerait irrémédiablement une forte différence de trajectoire.

L'intérêt des travaux de Poincaré n'est malheureusement redécouvert qu'au début des années 60. Un météorologue du *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), E. Lorenz, lors de sa simulation de l'atmosphère de la terre par des équations différentielles qui permettront de calculer à partir de données initiales le temps à des instants donnés, re-découvre le caractère chaotique des conditions météorologiques liées à la sensibilité des conditions initiales : une modification infime des données initiales entraînait des résultats entièrement différents. On a aussi remarqué que la différence, entre une situation calculée par ordinateur et une situation météo réelle, peut s'accroître à tel point qu'au bout d'une semaine, la situation simulée risque de n'avoir rien de commun avec la situation réelle. Pour illustrer sa découverte Lorenz avança l'image métaphorique suivante : la sensibilité aux conditions initiales est tellement importante qu'un vol d'un papillon au dessus de Pékin peut causer l'apparition d'un cyclone dans le sud des États-Unis quelques semaines après. La découverte de Lorenz intrigue un certain nombre de physiciens et de mathématiciens, ouvrant ainsi au début des années 70 la voie à l'étude des phénomènes non linéaires et chaotiques.

### 1.1.1 Synthèse et résultats tirés de l'étude historique

Comme en témoigne l'analyse historique précédente, l'un des principaux problèmes qui préoccupa les scientifiques relativement à l'étude des équations différentielles fut la recherche des fonctions solutions. L'étude historique a révélé le parcours fait par les équations différentielles depuis leurs naissances jusqu'aux nos jours et souligné donc l'existence de trois principaux modes<sup>1</sup> de résolution pour les équations différentielles.

Les premières investigations dans ce domaine furent **algébriques** et apportèrent des progrès considérables. Les procédés suivis consistèrent en une réduction aux quadratures et à calculer les solutions au moyen de fonctions élémentaires. Ainsi les solutions d'une équation différentielle furent tout d'abord exprimées à l'aide des expressions algébriques, des développements en séries etc. Le théorème fondamental de l'analyse (i.e. l'intégration), les manipulations et simplifications algébriques n'ont aidé à la résolution que dans certaines circonstances particulières. Néanmoins, en quelques années la plupart des méthodes élémentaires actuellement connues pour résoudre des équations du premier ordre furent découvertes. Ce succès amena les mathématiciens de l'époque à espérer résoudre toutes les équations différentielles. Or on n'avait toujours pas accès aux propriétés et aux résolutions de beaucoup d'équations différentielles et, de nombreuses équations furent par conséquent contournées faute de techniques de résolution fiables. En effet beaucoup d'équations différentielles rencontrées dans des problèmes semblaient à première vue accessibles mais on finissait par comprendre qu'elles étaient beaucoup plus difficiles qu'elles n'en avaient l'air. Les mathématiciens de

---

<sup>1</sup> Convenons que, dans la suite de notre travail, nous utiliserons sans distinction les mots « modes » et « approches » pour désigner les trois procédés de résolution des équations différentielles.

l'époque n'ont donc pas tardé à admettre que les solutions de toute sorte d'équations différentielles n'étaient pas tellement faciles à obtenir.

Entre-temps face à la difficulté de la tâche, les mathématiciens du 18<sup>ème</sup> siècle s'orientèrent vers d'autres procédés palliatifs de résolution d'où les équations différentielles eurent alors droit à une résolution **numérique** qui consiste à approcher, par le biais de différentes méthodes, une courbe solution d'une équation différentielle.

En 1841, lorsque Liouville donna la première démonstration de la non intégrabilité pour certaines équations différentielles ainsi que la base d'une théorie générale de l'intégrabilité, le centre de gravité de la théorie des équations différentielles se déplaça alors vers l'étude des lois générales des comportements des solutions. Ainsi avec les travaux de Fuchs et principalement, vers la fin du siècle, ceux de Poincaré, le monde des mathématiques connut un autre mode de résolution des équations différentielles qui consiste à étudier **qualitativement** une équation différentielle pour déduire les propriétés et les comportements de ses solutions.

L'étude historique, menée au paragraphe précédent, a également révélé la prégnance de l'intégration algébrique. En effet, les mathématiciens ont longtemps cherché à trouver un procédé applicable à toute équation différentielle et un grand nombre d'entre eux prétendent avoir trouvé une telle méthode. On peut citer entre autres Newton, Fontaine, Condorcet. Néanmoins, malgré le pressentiment, dès le 18<sup>ème</sup> siècle, de l'impossibilité de résoudre par quadrature la plupart des équations différentielles et malgré la preuve rigoureuse de Liouville en 1841, ce mode de résolution continue à peser dans le monde des mathématiciens et il a connu des développements notables au 19<sup>ème</sup> siècle.

En tant que didacticien, nous focalisons notre intérêt sur la transposition de ces trois modes de résolution dans l'enseignement actuel : qu'en est-il dans l'enseignement ? Une première question peut être alors formulée de la manière suivante :

#### QUESTION 1 : L'ENSEIGNEMENT PREND-T-IL EN CHARGE CES TROIS MODES DE RESOLUTION ?

Pour répondre à cette question, nous nous baserons dans un premier temps sur des travaux antérieurs (en particulier ceux de Artigue, 1989 ; Rasmussen 1998 mais également des manuels spécifique aux équations différentielles). Néanmoins un recours à l'analyse des programmes et des manuels paraît également nécessaire, c'est ce que nous ferons dans la partie B de cette thèse.



## 1.2 Les travaux antérieurs

Dans ce paragraphe, nous passerons en revue quelques travaux et ouvrages importants. Nous n'entreprendrons néanmoins pas de présenter en détail ces différentes études qui nourrissent notre travail mais plutôt d'en pointer les éléments qui peuvent nous servir directement. Nous y reviendrons à chaque fois que nous en ressentirons le besoin. L'objectif essentiel de ce paragraphe est donc de tirer quelques conclusions qui puissent nous servir par la suite.

### 1.2.1 La prépondérance de la résolution algébrique dans l'enseignement universitaire

Nous citons en premier lieu une importante recherche faite dans le milieu des années 80 à l'université de Lille. Avec la participation de quelques enseignants, **M. Artigue** et **M. Rogalski** (cf. Artigue & Rogalski, 1990) ont mené, dans une section de DEUG SSM (Sciences des Structures et de la Matière) 1<sup>ère</sup> année, une expérience sur l'enseignement des équations différentielles dans le cadre d'un contrat de rénovation pédagogique. Cette expérience, débutée en 1986-87, a été menée pendant trois années consécutives. Dans les publications consacrées à la présentation de ces travaux, Artigue (cf. Artigue 1989, 1990 et 1992 par exemple) pointe que l'enseignement usuel se contente d'une approche purement algébrique et qu'il représente de ce point de vue une obsolescence. La recherche en question se veut donc une étude de conditions de viabilité d'un enseignement qui respecterait mieux l'épistémologie du champ en s'ouvrant en particulier à une approche graphique, sans exclure la résolution numérique.

Nous tenons à souligner que la prégnance de l'algébrique au préjudice d'autres modes de résolution évoqués ci-dessus n'est pas un phénomène spécifique de la France. Il s'agit bien au contraire d'un phénomène qui dépasse les frontières françaises. Il en est de même par exemple, aux Etats-Unis (Rasmussen, 1998) ou au Mexique (Ramirez 1995). Cette situation est relevée par ailleurs dans de nombreux ouvrages récents. **M. J. Kalleher**, dans l'introduction du livre qu'il coordonne (Kalleher, 1999), rapporte que l'approche qualitative s'est longtemps contentée de servir le monde de la recherche alors que l'approche algébrique est dominante dans l'enseignement avec éventuellement une petite ouverture vers l'approche numérique. D'autre part, plus récemment **P. Blanchard**, **R. L. Devaney** et **G. R. Hall** (cf. Blanchard et al. (2002)) regrettent la difficulté de transmettre la « beauté » de l'objet « équations différentielles » dans les cours traditionnels malgré son importance pour la modélisation des phénomènes de la vie courante, et ce parce que le cours a (ou avait) tendance à se concentrer sur les techniques de résolution algébrique.

Néanmoins, certains travaux anglo-saxons qualifient l'enseignement algébrique de « traditionnel » ou d'« ancien », laissant ainsi entendre que la situation a changé depuis quelques années et surtout à l'issu

du *Reform Calculus* de *National Foundation*. Nous n'avons pas tâché d'aller vérifier cette évolution, ce qui ne concerne pas directement notre travail. Néanmoins, on pourrait s'attendre à ce que cette évolution soit effective en France grâce au promoteur des travaux faits à l'Université de Lille, travaux que nous avons présentés rapidement ci-dessus. Là non plus, nous n'avons pas les moyens d'aller vérifier puisqu'il n'y a pas de programmes universels au niveau universitaire en France. Néanmoins, l'extrait suivant en témoigne : « *Cette question [i.e. la domination historique du cadre algébrique en France] devient particulièrement cruciale en DEUG A, où la résolution exacte d'équations différentielles (utilisant le cadre algébrique) devrait normalement céder du terrain aux résolutions numérique et qualitative (notamment à l'occasion de l'introduction du théorème de Cauchy-Lipschitz) qui nécessitent, elles, les cadre numérique et géométrique. Cette occasion de mettre en scène des tâches sollicitant un travail sur divers cadres à la fois, en interaction, semble encore insuffisamment exploitée dans l'enseignement courant, bien qu'un tel travail s'avérerait tout à fait nécessaire en termes d'apprentissage* » (Praslon, 2000, p. 37) Par ailleurs dans une recherche plus récente **A. Sağlam** (Sağlam, 2004) pointe la prédominance de la résolution algébrique dans l'enseignement universitaire en France, grâce à une analyse des manuels et des photocopiés de cours issus de l'université Joseph Fourier à Grenoble en Deug SMA.

Ceci confirme que la prégnance historique de la résolution algébrique persiste donc à peser dans l'enseignement actuel français mais aussi au plan international. D'ailleurs cette tendance reste confirmée dans l'analyse des manuels et des programmes que nous avons faite dans la partie B de cette thèse.

### 1.2.2 La volonté et la possibilité d'introduire et d'enseigner les trois approches

Malgré la prédominance enracinée de la résolution algébrique, il existe fort heureusement depuis quelques lustres, comme nous l'avons souligné ci-dessus, une volonté d'intégration des approches numérique et graphique dans l'enseignement universitaire et dans des manuels destinés à un public universitaire. Citons à titre d'exemple que tous les auteurs contribuant à l'ouvrage coordonné par **M. J. Kalleher** (Kalleher, 1999), réclament une « révolution », comme le titre de l'ouvrage l'induit, dans l'enseignement des équations différentielles et plaident pour une coordination des trois modes de résolution.

Cette volonté de donner une place aux autres modes de résolution apparaît place également dans les manuels universitaires récemment publiés qui diffèrent largement des anciens tant au niveau du contenu que des méthodes d'enseignement. Par exemple, dans Blanchard et al. (2002), les auteurs croyant en l'utilité mais également en la possibilité d'effectuer une révision dans l'enseignement des équations différentielles, proposent un livre qui représente une rupture radicale avec les manuels

classiques, considérés comme des « livres de recette. » Dans cet ouvrage, tout en attaquant une équation différentielle donnée suivant généralement les trois modes de résolution, les techniques analytiques avancées sont éliminées pour être remplacées par une concentration sur la formulation des équations différentielles et l'interprétation de leurs solutions. Il en est d'ailleurs de même pour l'ouvrage de **J. Hubbard & B. West** (1999) où il s'agit de l'articulation des trois approches, grâce à un logiciel spécifique qu'ils ont inventé.

Cette volonté d'introduction d'autres approches est partagée par les noosphères dans, au moins, certains pays. La noosphère française en fait partie comme nous le verrons plus loin (dans le paragraphe 1.5 et, plus en détail lors de l'analyse des programmes dans la partie B de cette thèse) et il en est ainsi par exemple aux Etats-Unis à l'issue du *Calculus Reform* de *National Foundation*.

Les travaux que nous avons précédemment cités ont par ailleurs démontré l'accessibilité d'autres approches, notamment qualitative, pour les étudiants même au niveau débutant. Ces travaux ont aussi démontré « *une réussite à intégrer les outils de l'approche qualitative (zone, entonnoir, isocline, etc.), non familiers aux élèves et à vaincre les réticences de l'enseignement usuel vis à vis du cadre graphique, au niveau de justification.* » (Artigue, 1994)

### **1.2.3 Les trois approches font appel à des prérequis et des compétences relativement distinctes**

Dans leur article consacré à l'enseignement de l'approche qualitative, Chau & Pluvinaige (1999) ont démontré, en plus de l'accessibilité de celle-ci aux étudiants ingénieurs, que « *les trois approches font appel à des savoir-faire qui apparaissent indépendants dans une analyse des tâches mais, par exemple, les élèves performants dans la partie qualitative du problème final ont mieux tiré parti du travail graphique sous DERIVE que les élèves qui ont bien traité la partie algébrique. En définitive, il apparaît que, si l'aisance dans la méthode qualitative est plus difficile à acquérir, elle présente du point de vue didactique l'intérêt de favoriser le transfert de connaissances.* » (p. 195)

### **1.2.4 L'approche algébrique risque de constituer un obstacle didactique pour l'approche qualitative... mais aussi numérique**

Nous l'avons démontré dans Arslan et al. (2004) que, dans la plupart des cas pour faire la moindre interprétation à propos des courbes solutions d'une équation différentielle, les étudiants cherchent forcément à passer par la résolution algébrique de l'équation en question. Pour, par exemple, calculer

le coefficient directeur de la tangente à une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y$  en un point, la quasi-majorité des étudiants ont résolu l'équation en question.

Ceci, entre autres, nous a amené à nous demander si le choix fait par l'enseignement actuel des équations différentielles ne devient pas un obstacle pour l'intégration des approches numérique et qualitative.

Nous pouvons interpréter dans le même ordre d'idées, des exemples issus de différentes recherches. Empruntons un premier exemple à Moreno & Laborde (2003). Ceux-ci ont passé, à des étudiants de la deuxième année des universités mexicaines, des activités où ayant une courbe déplaçable dans l'écran de Cabri Géomètre II plus, les étudiants devaient l'associer à l'une des équations différentielles inventoriées dans une liste et ce, sans recourir à l'intégration. Les attentes des auteurs consistaient à ce que les étudiants s'appuyaient sur des « *invariants géométriques* » pour s'acquitter de la tâche. Ils rapportent à ce propos que « *la stratégie de solution [des étudiants] a consisté le plus souvent à essayer d'intégrer les équations et d'obtenir ensuite les courbes solutions* » et qu'ils ont également recueilli des propos de la forme « *on ne peut pas faire le choix sans intégrer, on va les intégrer mentalement.* » (Ibid, p. 10)

Un autre exemple qui nous paraît significatif est emprunté à **S. Habre** (Habre, 2000). Pour comprendre le statut donné par les étudiants de seconde année universitaire aux représentations graphiques des courbes solutions d'une équation différentielle, l'auteur recourt à des observations de classes et à une analyse des copies d'étudiants et des interviews. Il constate que la plupart des étudiants étaient tentés par la résolution algébrique et qu'il y avait une certaine réserve envers la résolution graphique. Par exemple à la question « *à quoi pensez-vous lors qu'on vous demande de résoudre une équation différentielle ?* », les étudiants interrogés répondent qu'ils pensaient à des solutions analytiques, alors que la classe était engagée dans un enseignement en terme d'approche qualitative par le biais de la représentation graphique des courbes solutions et des champs de tangentes, via une utilisation d'un outil informatique.

D'autre part, l'approche algébrique, telle qu'elle est présente dans l'enseignement, risque de constituer un obstacle également pour l'approche numérique. Afin d'évaluer l'intégration d'autres approches, Rasmussen (Rasmussen, 1998 et 2001) travaille avec six étudiants universitaires aux USA. Dans l'une des activités proposées, l'auteur fournit aux étudiants une équation différentielle (à savoir  $dy/dx = (2y - 5x + 3)/(x + 1)$ ) et son champ de tangentes sur lequel il leur demande de tracer à la fois la courbe solution passant par l'origine et son approximation obtenue grâce à la méthode d'Euler avec un pas de 1 unité. Il relate que les étudiants produisent un tracé approximatif qui ressemble à leur solution exacte et sans rien à voir avec le champ de tangentes ni avec l'algorithme accomplie d'Euler.

Tout ceci met en évidence à quel point la résolution algébrique peut poser d'obstacle à l'intégration de l'approche qualitative et ce surtout chez les élèves débutants. Par ailleurs l'étude que nous avons menée jusqu'ici met donc en exergue que, non seulement la résolution algébrique continue à dominer dans l'enseignement malgré la volonté de certains chercheurs à intégrer les modes numérique et qualitatif, mais aussi qu'existe la volonté d'introduire les autres approches pour suppléer à l'algébrique. Maintenant que la prédominance de l'approche algébrique est prouvée, nous sommes donc à présent face à une deuxième question primordiale :

**QUESTION 2 : FAUT-IL VRAIMENT INTRODUIRE D'AUTRES APPROCHES POUR SECONDER L'ALGEBRIQUE ?**

Pour pouvoir répondre à cette question, il paraît nécessaire tout d'abord de présenter en quoi consistent les trois modes de résolution et quelles sont les interactions entre eux.

### **1.3 Présentation des différents modes de résolution**

Dans ce paragraphe, nous mènerons une étude pour présenter les trois approches qui nous intéressent pour notre travail. Pour chacune des trois approches, nous tenterons en premier lieu de montrer en quoi elle consiste. Dans un deuxième temps, nous présenterons une étude, bien évidemment non exhaustive, des avantages offerts par cette approche en comparaison aux deux autres. Nous terminerons le paragraphe consacré à chaque approche par un rappel de certains inconvénients qu'elle représente. Nous illustrerons nos propos par des exemples à chaque fois que cela s'avèrera nécessaire. Finalement, nous terminerons ce paragraphe par une comparaison entre les trois approches afin de tenter une réponse à la question que nous nous sommes posée ci-dessus.

#### **1.3.1 La Résolution Algébrique**

Lors d'une résolution algébrique, le principe général est de ramener l'équation à des calculs de quadratures. Le travail débouche alors sur une explicitation des solutions à l'aide des fonctions usuelles et/ou des quadratures ou éventuellement des fonctions spéciales, appelées aussi des fonctions transcendantes (la fonction de Bessel par exemple). Pour résoudre donc une équation différentielle du premier ordre, il s'agit en général de trouver une fonction à une constante arbitraire qui satisfait l'équation différentielle en question.

Pour résoudre algébriquement une équation différentielle, un prélude consiste généralement à déterminer la nature (linéaire, homogène, à variables séparables, etc.) de celle-ci afin de pouvoir y appliquer la technique de résolution correspondante. Néanmoins la mise en œuvre de cette approche n'est pas toujours possible et est tributaire de la nature de l'équation différentielle. Plusieurs équations différentielles n'ayant pas de solutions explicites, on ne peut pas y appliquer la résolution algébrique. En d'autres termes, lors d'une résolution algébrique d'une équation différentielle, divers cas sont possibles :

- Il existe une catégorie d'équations différentielles, dites intégrables et pour lesquelles on peut déterminer explicitement les solutions (ceci est possible dans des cas très particuliers). Selon les cas, la résolution peut être simple ou difficile. Par exemple, la résolution de l'équation différentielle  $3xy'+y=0$ , débouche sans difficulté sur une solution explicite, à savoir  $y=Cx^{-1/3}$  ( $C \in \mathcal{R}$ ). Néanmoins, la résolution de l'équation  $y'(x^2-1)+xy=1$ , bien qu'elle ne soit pas parmi les plus dures à résoudre, n'est pas aussi facile qu'elle en a l'air pour un étudiant. Pour la résoudre, on peut par exemple commencer par résoudre l'équation homogène associée et obtenir de ce fait  $y=C_1/\sqrt{x^2-1}$  ( $C_1 \in \mathcal{R}$ ). Celle-ci doit être complétée par une solution particulière puisque la solution générale de telles équations est la sommation de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Néanmoins pour trouver une solution particulière à l'aide de la méthode des variations des constantes, il faut veiller au signe de  $x^2-1$ . Puisque la solution de l'équation homogène prend deux formes en fonction de  $|x|$  ( $|x|>1$  ou  $|x|<1$ ), on obtient deux solutions particulières (cf. **Encadré 1**) et ceci peut paraître compliqué pour les apprenants :

Si $ x >1$	Si $ x <1$
<p>En variant la constante dans <math>y=\frac{C_1}{\sqrt{x^2-1}}</math>, on obtient <math>C_1=Ln x+\sqrt{x^2-1} +C_2</math>. D'où la solution générale est :</p> $y=\frac{Ln x+\sqrt{x^2-1} +C_2}{\sqrt{x^2-1}} \text{ (pour } C_1, C_2 \in \mathcal{R}\text{)}.$	<p><math>y=\frac{C_1}{\sqrt{x^2-1}}</math> peut s'écrire <math>y=\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}</math>. Grâce à la même méthode on obtient <math>C_1=-Arcsinx+C_2</math>. D'où la solution générale est :</p> $y=\frac{-Arc \sin x + C_2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (pour } C_1, C_2 \in \mathcal{R}\text{)}.$

**Encadré 1** : Deux solutions générales selon la valeur de  $x$ .

- Il existe une autre catégorie d'équations différentielles où les fonctions solutions ne peuvent pas être exprimées par des fonctions élémentaires. Nous avons dans ce cas recours à soit des quadratures soit à des fonctions spéciales. Par exemple la solution générale de l'équation  $y'=xy+1$ , est la fonction  $y(x)=e^{x^2/2} (C+\int_0^x e^{-u^2/2} du)$  ( $C \in \mathcal{R}$ ), même si l'on ne sait pas calculer la primitive. D'autre part, on sait depuis Liouville (1841) que l'équation de Riccati  $y'+ay^2=bx^m$  n'est intégrable par quadrature que pour  $m=-4n/(2n \mp 1)$ , où  $n$  est un entier naturel. Par exemple, l'équation  $y'=y^2-$

$x$  ne vérifiant pas ces conditions, le logiciel *Maple* donne l'expression suivante comme solution générale de l'équation ( $C_1 \in \mathcal{R}$ ) :

$$\frac{\sqrt{x} \left( C_1 \text{BesselK} \left( \frac{-2}{3}, \frac{2}{3} x^{3/2} \right) - \text{BesselI} \left( \frac{-2}{3}, \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right)}{\left( C_1 \text{BesselK} \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \text{BesselI} \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right)}$$

- Il existe enfin des équations différentielles où il n'est possible d'obtenir aucune expression pour les fonctions solutions. Dans de tels cas, les résolutions numérique et qualitative sont la seule issue. Par exemple le système de trois corps ou le système  $x'(t) = x(4-2x-y)$  et  $y'(t) = y(9-3x-3y)$ .

Lors de la résolution d'une équation différentielle, un autre élément important à prendre en compte est l'interprétation de l'expression algébrique obtenue en vue de s'exprimer sur les fonctions solutions. Signalons que mis à part la dernière possibilité où aucune expression algébrique ne peut être proposée en tant que solution générale de l'équation différentielle, même lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle intégrable (les deux premiers cas cités ci-dessus), l'interprétation des fonctions solutions n'est pas toujours facile à faire. On peut énumérer plusieurs raisons à cela :

- soit, comme le second cas cité ci-dessus, la solution générale obtenue possède une quadrature qui ne peut pas être exprimée par des fonctions élémentaires ou bien elle est exprimée en fonction des fonctions spéciales (comme le cas de l'équation  $y' = y^2 - x$  présentée ci-dessus) ;

- soit la solution générale est compliquée : par exemple  $y = x \cdot \text{tg}(\text{Ln}|Cx|)$  qui est la solution générale de l'équation différentielle  $x^2 y' = xy + x^2 + y^2$  ou l'exemple cité dans Boyce (1999)  $u(t) = \frac{-75}{26} e^{-t/10} \cos \frac{\sqrt{199}}{10} t + \frac{35\sqrt{199}}{5174} e^{-t/10} \sin \frac{\sqrt{199}}{10} t + \frac{15}{26} \sin t + \frac{75}{26} \cos t$  qui est une fonction solution à conditions initiales  $u(0) = 0$  et  $u'(0) = 1$  de l'équation différentielle  $u'' + 0.2u' + 2u = 3\cos t$  ;

- soit dans la solution implicite obtenue,  $y$  ne peut pas être isolée. Par exemple la résolution de l'équation différentielle  $y' = \frac{(2x - 4y)}{x(y + 1)}$  conduit à la solution générale  $\ln y + 4 \ln x - y - 2x + 4 = C$ . Remarquons que celle-ci ne peut pas être exprimée en fonction de  $y$  et l'interprétation d'une fonction solution risque d'être difficile.

Après avoir rapidement présenté la résolution algébrique, nous nous proposons de tirer des conclusions de cette présentation afin de déceler quelques avantages et inconvénients fournis par ce mode de résolution.

Notons tout d'abord que les solutions obtenues via une résolution algébrique sont des solutions exactes. Par ailleurs les fonctions solutions étant exprimées dans le registre algébrique, elles profitent

de la richesse offerte par ce registre (cf. Bloch, 2000) et la plupart des outils de l'analyse sont à disposition. Les fonctions solutions sont manipulables dans le sens où l'on peut capturer « beaucoup » d'informations sur la nature et les propriétés des solutions. C'est un grand avantage que les deux autres techniques permettent partiellement.

D'autre part, la résolution algébrique représente également des inconvénients. Comme cela a été dit plus haut, non seulement la plupart des équations différentielles n'admettent pas une résolution algébrique, mais techniquement la mise en œuvre de la résolution n'est pas toujours facile et les calculs nécessaires à la résolution sont en général volumineux et fastidieux. Ainsi, il existe diverses variétés d'équations différentielles théoriquement résolubles par quadratures, cependant plusieurs situations mettent en évidence que la pratique, autrement dit la résolution, n'est pas aussi simple que la théorie. Dans les cours débutants d'équations différentielles, il arrive qu'une simple tâche, telle que « trouver les racines d'un polynôme », monopolise complètement l'étude de l'équation différentielle en cours d'étude. Par conséquent, de tels calculs peuvent totalement l'emporter sur la beauté et la richesse de la théorie.

Il convient par ailleurs de noter que l'utilisation de la résolution algébrique requiert généralement une certaine vigilance, non seulement en raison de l'existence des solutions singulières non engendrées par la solution générale, mais il se peut par exemple que l'on perde une solution lors d'une manipulation algébrique. Par exemple suivant les simplifications faites lors de la résolution, on peut obtenir soit  $xy=A(x-1)(y-1)$  soit  $Bxy=(x-1)(y-1)$  (avec  $A=1/B$ ) comme solution générale de l'équation différentielle  $x(x-1)y'+y(y-1)=0$ . Remarquons que celle-ci a deux solutions évidentes :  $y=0$  et  $y=1$ . La première forme proposée pour la solution générale donne la première solution évidente pour  $A=0$ , alors que la seconde solution évidente ne peut être obtenue à partir de cette primitive. En revanche, il s'agit tout à fait du contraire pour la seconde forme proposée pour la solution générale : la solution  $y=1$  peut être obtenue en posant  $B=0$ , tandis que  $y=0$  ne peut pas être obtenue.

D'autre part, l'approche algébrique fait appel à plusieurs techniques (intégration par parties, techniques pour calculer une solution particulière, changement de variables, etc.) et nécessite la maîtrise de ces outils de résolution qui ne seraient utilisables que pour quelques équations bien particulières. Par exemple, le changement de variable  $y=uv$  qui amène une équation différentielle homogène à une équation à variables séparables ne peut être appliquée que si l'équation de départ est homogène.

D'un point de vue cognitif, nous avons déjà évoqué la difficulté que l'on peut avoir à interpréter une solution générale. Signalons en plus que ce mode de résolution peut demander un apprentissage « par cœur » (par exemple connaître les primitives usuelles ou savoir quelle technique utiliser pour amener tel type d'équation différentielle à une forme souhaitée, etc.) et les techniques de résolution peuvent



s'avérer difficiles donc à retenir à long terme. La résolution algébrique risque de ce fait de se résumer à une mémorisation des formules par les étudiants sans forcément comprendre le sens mathématique (Little & McLeman, 2002). Nous nous joignons à Boyce (1994) qui déclare que : « *details of mathematical procedures and algorithms are rapidly forgotten unless they used frequently, but underlying concepts and ideas become part of an individual's mindset are always available –or at least less likely to be lost than manipulative details.* » (p. 364)

Par ailleurs d'un point de vue didactique ; la résolution algébrique se veut une technique algorithmique qui répond donc particulièrement aux attentes de l'enseignement, accusé à son tour d'être trop algorithmique. Néanmoins, puisque la résolution algébrique est généralement enfermée dans le registre algébrique (sauf le passage au registre graphique pour représenter les courbes solutions et ce après avoir obtenu l'expression algébrique des fonctions solutions), elle ne permet pas le changement de registres. Pourtant, les changements de cadres et de registres sont d'utilités didactiques devenues notoires et plusieurs recherches ont mis en exergue leurs apports pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Il découle de cette analyse que si la résolution algébrique présente un grand avantage, et qui n'est bien évidemment pas le seul, en mettant à la disposition du lecteur l'expression algébrique des fonctions solutions, elle se trouve en revanche face à quelques inconvénients.

### 1.3.2 La Résolution Numérique

Une résolution numérique d'une équation différentielle est un processus, dit méthode numérique, permettant d'évaluer la valeur en un point  $x_0+h$  ( $h \in \mathcal{R}^+$ ) de la solution  $u(x)$  d'une équation différentielle, connaissant sa valeur  $y_0 = u(x_0)$  au point  $x_0$ . Elle consiste donc à générer un ensemble de valeurs numériques approximatives de  $u(x)$  et d'approximer ainsi sur un intervalle une solution d'une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$  à condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Une fois obtenues, ces valeurs sont généralement représentées par un graphe via une interpolation.

Les méthodes numériques sont utilisées depuis le 18<sup>ème</sup> siècle et depuis que les ordinateurs se chargent des calculs, l'efficacité et les performances de ces méthodes sont d'un niveau remarquable. On peut distinguer deux classes de méthodes numériques : les méthodes à un pas (par exemple les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta...) ; et les méthodes à pas multiples (par exemple, les méthodes d'Adams-Moulton, les méthodes de prédiction-correction, les méthodes d'Adams-Bashforth, etc.). Les premières calculent une valeur approchée  $y_{n+1}$  de  $u(x_{n+1})$  à partir de la valeur approchée  $y_n$  de  $u(x_n)$  obtenue au pas précédent. Quant aux méthodes à pas multiples, elles utilisent les  $r$  valeurs précédentes ( $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r+1}$ ) (il s'agit alors d'une méthode à  $r$  pas) et ceci permet de mieux tenir compte des approximations et ce plus facilement.

L'approche numérique présente bien évidemment plusieurs avantages et intérêts pour la résolution des équations différentielles. Primo, contrairement à la technique algébrique tributaire de la nature de l'équation différentielle à résoudre, cette technique permet d'aborder toute équation de la forme  $y'=f(x, y)$ , toute équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$  pouvant être amenée à un système d'équations différentielles du premier ordre. On peut donc en tirer profit afin de remédier aux limitations de l'approche algébrique, causées par l'absence de l'expression algébrique de la fonction solution ou bien du fait que le procédé qui y amène est relativement compliqué. Secundo, nous avons expliqué plus haut que même dans les cas où la solution générale existe, celle-ci peut être inutilisable à cause de sa complexité. Suivant la nature du problème auquel on souhaite répondre, la résolution numérique peut donc être une bonne issue et on peut y faire appel lorsque la formule exacte n'est pas nécessaire, n'existe pas ou est très compliquée.

Néanmoins, le principal inconvénient de ce mode de résolution est que les solutions obtenues via cette technique sont des solutions approximatives et non pas exactes. Il en résulte que, même avec des méthodes assez élaborées, on risque de commettre des erreurs abondantes dont l'accumulation peut faire en sorte que la solution approchée n'est plus conforme voire n'a rien à voir avec la solution exacte. Par exemple avec la méthode d'Euler, on risque d'être conduit à deux erreurs dans chaque pas : une erreur de calcul de  $f(x_k, y_k)$  et une erreur d'arrondi dans le calcul de  $y_{k+1}$ .

Signalons que l'aspect approché des fonctions solutions risque de conduire à des résultats aberrants. Par exemple, on peut risquer de contredire le théorème d'existence et d'unicité (pour un exemple cf. Blanchard et al. (2002, pg. 58)). Par ailleurs lorsque analytiquement deux points appartiennent à la même courbe solution d'une équation différentielle, lorsqu'on en fait une résolution numérique, suivant la méthode choisie, l'aspect approché de la résolution numérique peut faire en sorte que les deux points censés être sur la même courbe solution n'y sont pas. Réciproquement il se peut que, par deux méthodes différentes, on obtienne des solutions différentes pour le même problème initial. Face à de tels phénomènes, les étudiants risquent de se sentir perturbés.

Il s'ensuit que pour être fiable et significatif, l'approximation doit obligatoirement être accompagnée de la prise en compte de l'erreur (i.e. l'écart entre la fonction solution exacte et la solution approchée) et de son contrôle. Vu le cadre de notre travail, nous n'entrerons pas les détails en ce qui concerne l'évaluation de l'erreur, renvoyant le lecteur intéressé à, par exemple, Demailly (1996). Précisons néanmoins que l'on peut remédier en partie à ces difficultés en choisissant la méthode la mieux adaptée et/ou le pas « optimal ». Il est vrai que dans certains cas, un petit pas diminue les erreurs, mais en revanche il augmente le nombre des calculs. Pour la méthode d'Euler par exemple, lorsqu'on divise le pas par deux, l'erreur est divisée par quatre, mais en revanche les opérations sont multipliées par deux. La difficulté principale est donc de déterminer le pas  $h$  de façon à ce que l'erreur globale ne dépasse pas une certaine tolérance que l'utilisateur se fixe à l'avance.

Pour remédier à l'erreur, un autre procédé est donc le choix d'une méthode adaptée. Les méthodes numériques sont nombreuses, leur emploi et leur choix demandent une certaine maîtrise qui peut relever d'un niveau avancé. Plusieurs facteurs sont déterminants dans le choix de la méthode numérique à utiliser : la stabilité et la consistance de la méthode mais aussi le statut du problème (bien posé, bien conditionné, raide etc.). Par ailleurs le fait que la méthode soit à un pas ou à pas multiples et l'ordre de la méthode sont aussi importants pour la précision. Parmi les méthodes à un pas, si la solution est suffisamment régulière, les méthodes d'ordre  $p$  (i.e. pour lesquelles l'erreur est proportionnelle à  $h^p$  avec  $p > 1$ ) donnent une meilleure approximation. Les calculs augmentent avec  $p$ , mais pour une même précision, le nombre de pas demandé décroît avec  $p$ . Ces méthodes demandent moins de calculs et accumulent moins d'erreurs d'arrondis.

Nous avons déjà mentionné la difficulté à déterminer un pas  $h$  « idéal » pour une méthode à un pas. De ce point de vue, l'utilisation des méthodes à pas variables présente des avantages majeurs : d'une part en permettant d'adapter le pas à chaque étape on peut optimiser l'erreur commise en fonction de la tolérance prescrite - à condition de disposer d'une estimation « instantanée » de l'erreur de consistance-, et d'autre part ces méthodes permettent de réduire le pas lorsqu'il y a une discontinuité ou une singularité dans l'équation différentielle.

Un autre inconvénient de la résolution numérique est l'excès de calculs que risque de nécessiter l'approximation d'une solution. Suivant les cas, le recours à un ordinateur ou un autre outil de calcul peut s'avérer indispensable, faute de quoi le calcul devient « irréalisable. » Néanmoins, il convient de signaler que le recours à ce genre d'outils est loin de résoudre tous les problèmes et l'utilisateur risque de faire face à des résultats fautifs, soit en raison des erreurs d'arrondis soit parce que la méthode est inadaptée à la résolution.

Enfin un autre inconvénient qu'on peut citer à propos de cette technique de résolution est qu'elle ne fournit pas une expression algébrique des fonctions solutions mais plutôt un ensemble des valeurs numériques d'une seule solution, qu'il serait préférable de représenter graphiquement. Par conséquent elle ne donne a fortiori pas un aperçu de l'ensemble des solutions et on est forcé de se restreindre à une seule fonction solution. Si l'on veut des valeurs pour d'autres solutions les mêmes opérations sont à répéter.

D'après cette analyse il s'avère que si la résolution numérique présente des avantages et supplée de ce fait la résolution algébrique, elle représente en revanche des inconvénients importants et ce dès que l'on avance dans le niveau.

### 1.3.3 La Résolution Qualitative

Enfin, la résolution qualitative consiste à étudier les propriétés globales (comportement asymptotique, allure générale, etc.) des courbes solutions à partir de l'équation différentielle de la forme  $y'=f(x, y)$  et suggère également une méthode graphique approximative pour dessiner les trajectoires des courbes solutions. Cette étude exige également d'élucider les caractéristiques des solutions et de justifier, parmi les solutions, l'existence ou la non existence d'une forme de courbe donnée. La description de ces propriétés étant généralement plus intelligible graphiquement, on a souvent recours au registre graphique. De ce fait, l'approche est également appelée « approche graphique. » Dans la suite de notre texte, nous utiliserons indifféremment « résolution qualitative » et « résolution graphique. »

Cette étude part de la supposition que lorsqu'on possède la dérivée d'une fonction - sans forcément posséder l'expression algébrique de celle-ci - on est capable d'étudier ses propriétés voire de déterminer son graphe et ce grâce à diverses propriétés de l'analyse (le théorème liant le signe de la dérivée et les variations d'une courbe ; le signe de la dérivée seconde ; etc.). Ainsi, une approche qualitative d'une équation différentielle est, schématiquement, la partition du plan suivant le signe de la dérivée, le repérage éventuellement de quelques isoclines pour arriver à un champ de tangentes pour terminer enfin par le tracé des courbes intégrales conformément au régionnement du plan et au champ de tangentes obtenu, en veillant bien évidemment aux conditions imposées par l'étude de l'équation (intersection ou non des courbes solutions, comportement à l'infini, etc.).

Après avoir *grosso modo* présenté en quoi consiste une approche qualitative d'une équation différentielle, passons maintenant à l'étude de quelques avantages et inconvénients présentés par cette approche :

Premièrement, à l'instar de l'approche numérique, cette technique a l'avantage d'être applicable à toute équation différentielle de la forme  $y'=f(x, y)$ . Dans cet esprit, il est souvent possible et utile de réduire une équation différentielle du second ordre à une équation différentielle du premier ordre par un changement de variable afin d'en faire une résolution graphique : par exemple, une équation différentielle autonome du second ordre de la forme  $y''=f(y',y)$  peut être écrite sous la forme  $v'=f(v,y)/v$  qui est une équation du premier ordre, grâce à la transformation  $y'=v(y)$  et  $y''=v'=dv/dy \cdot dy/dx=y' \cdot dv/dy=v \cdot dv/dy$ .

L'accessibilité de toute équation différentielle permet de réaliser des expériences, des découvertes et d'éliminer également le reproche fait à l'enseignement de proposer des modélisations artificielles (Little & McLeman, 2002).

Malgré le caractère approximatif des solutions obtenues via une approche qualitative et bien que cette méthode manque de précision, elle peut néanmoins être une source d'intuition en permettant d'obtenir une première idée de l'allure des trajectoires et elle donne ainsi des informations ponctuelles très précieuses sur les courbes solutions. En effet, certains des problèmes les plus importants qui concernent les équations différentielles, sont relatifs au comportement qualitatif des courbes solutions (allure et stabilité de celles-ci, sensibilité aux perturbations, existence de vibrations, etc.). Obtenir qualitativement l'allure générale de la solution est parfois fort utile, voire suffisant pour comprendre un phénomène. Par exemple, supposons que nous aimerions savoir si la population de poissons, exprimée par le modèle  $y' = e^{-y}$ , risque un jour de disparaître. Sans résoudre l'équation et sans faire une résolution approchée, la réponse est négative, la fonction dérivée  $y'$  est en effet strictement positive donc la fonction solution  $y$  est strictement croissante. Dans la vie réelle, les problèmes ne sont bien évidemment pas toujours aussi simples. Signalons néanmoins que D. Tournès (Tournès, 1996) fait état dans sa thèse de la préférence des ingénieurs à recourir à des méthodes graphiques par rapport aux méthodes analytiques et rapporte que dans son mémoire sur le mouvement troublé des moteurs, Léauté<sup>2</sup> énonce la phrase significative suivante :

*« La méthode analytique conduit à des formules compliquées et d'une application difficile ; il est préférable, à tous les points de vue, de recourir à des tracés graphiques. »*

D'autre part, même dans les cas où l'on sait analytiquement exprimer toutes les solutions d'une équation différentielle, il n'est pas inutile, voire il est parfois nécessaire, de visualiser graphiquement les conditions qu'elle s'impose et d'avoir recours aux méthodes graphiques. D'ailleurs Poincaré, à la suite d'une comparaison entre les résolutions graphique et analytique, y fait référence de la manière suivante :

*« Alors même qu'on parviendrait à faire pour une équation quelconque ce que j'ai fait pour les équations linéaires, c'est-à-dire à trouver des développements des intégrales valables dans toute l'étendue du plan, ce ne serait pas une raison pour laisser de côté les résultats que l'on peut obtenir par d'autres méthodes, car il peut arriver que ces méthodes nous fassent découvrir certaines particularités que les développements ne mettraient pas immédiatement en évidence. Ce qui m'a décidé à me placer à un point de vue nouveau. »*

Prenant l'exemple du problème des trois corps, Poincaré s'exprime de la manière suivante :

*« ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera indéfiniment, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on se poser mille questions qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? »<sup>3</sup>*

---

<sup>2</sup> Léauté, H., (1891) « Du mouvement troublé des moteurs consécutifs à une perturbation brusque. Nouvelle méthode graphique pour l'étude complète de ce mouvement », Journal de l'Ecole Polytechnique, 61<sup>ème</sup> cahier, pp. 1-33.

<sup>3</sup> Courbes définies par les équations différentielles In. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* ; Editions : Jacques Gabay, 1993. (texte reproduit à partir de Chapitre V de l'*Analyse des Travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même*, écrit en 1901 à la demande de G. Mittag-Leffler et publiée dans les *Acta Mathematica*, t. 38, 1921, pp. 55-64).

D'un point de vue cognitif, tout en donnant un nouveau sens à la notion de dérivée, cette technique de résolution ouvre un nouveau champ d'application à certaines notions de l'analyse (tangente, fonction, majoration, minoration, extremums, théorème des valeurs intermédiaires, etc.). C'est un autre grand avantage offert par cette approche et on peut donc espérer qu'une telle approche permet à la fois une nouvelle interprétation de ces notions et d'atténuer de ce fait le péril que peut causer la restriction à la seule technique algébrique. Les lignes suivantes empruntées à Tall (1986a) illustrent très bien ces propos :

*« A graphical approach to calculus is thus not just a "simple way in" for beginning students, it also provides insight into powerful theorems that occur much later in formal mathematical analysis. »*

D'autre part, au plan didactique, un autre grand intérêt de l'approche qualitative est le fait qu'elle donne lieu à des activités riches en changement de cadres et de registres. Elle permet de ce fait d'intégrer, comme nous le verrons plus loin, plusieurs registres (algébrique, graphique, tableaux, intrinsèque, etc.). De ce fait, elle permet non seulement d'intégrer des registres absents dans les deux approches mais aussi elle enrichit le travail dans le registre graphique en donnant place à des justifications graphiques et en mobilisant d'autres représentations graphiques (isoclines, champ de tangentes mais également la représentation graphique de  $y'$ , etc.) On peut par exemple penser à la représentation graphique dans le plan  $(y, y')$  de  $y'$  dans l'équation différentielle  $y'=2y$  sans forcément avoir l'expression algébrique (i.e.  $y'=2y$ ) à sa disposition. Il est bien évidemment possible de faire une étude qualitative de l'équation différentielle en question.

En revanche, l'un des principaux inconvénients de l'approche qualitative est au plan didactique : non seulement elle ne se plie pas aux exigences de l'enseignement puisqu'elle ne se prête pas à une algorithmisation, mais aussi elle s'avère difficile à apprendre, à maîtriser et à enseigner (Chau&Pluvinage, 1999). Une raison à cela est qu'elle mobilise de multiples notions de l'analyse dont celles que nous avons citées dans les lignes précédentes.

D'autre part au plan **cognitif**, Artigue (1990a) a démontré les difficultés cognitives et didactiques des étudiants dans la construction des relations entre cadres algébrique et géométrique, relations nécessaires pour l'approche qualitative. Elle a également démontré les difficultés des étudiants à fournir des justifications dans le cadre géométrique, sans négliger les problèmes sérieux que peuvent causer l'utilisation judicieuse des outils élémentaires de l'analyse et la capacité à « *enchaîner de façon cohérente une succession de raisonnements indirects* » (Chau&Pluvinage, 1999). Ces derniers soulignent ensuite le rôle prépondérant de la logique élémentaire pour l'enseignement de l'approche qualitative. Signalons par ailleurs que même pour des équations différentielles de la forme  $y'=f(x)$ , l'étude peut être ardue à mener. Sans compliquer, prenons l'exemple  $y'=sin(3x)$  qui est une équation différentielle facilement soluble analytiquement. Pour cette équation, l'isocline zéro est  $x=\frac{k\pi}{3}$

( $k \in \mathbb{Z}$ ) et les zones où la dérivée est positive sont  $2k\pi/3 < x < (2k+1)\pi/3$  et la dérivée est négative lorsque  $(2k-1)\pi/3 < x < 2k\pi/3$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Ces zones sont délimitées par les droites d'équation  $x = n\pi/3$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ). Il est évident que le régionnement du plan peut s'avérer difficile à réaliser pour les étudiants. En compliquant l'équation différentielle, par exemple pour  $y' = \sin(3xy)$ , l'étude devient encore plus compliquée.

Signalons enfin que même si on peut ramener une équation différentielle d'ordre supérieur à un système de  $n$  équations différentielles du premier ordre, l'approche qualitative devient néanmoins de plus en plus complexe à mettre en œuvre à partir d'un certain ordre.

### 1.3.4 Mise en correspondance des trois approches

Afin de mieux répondre à la question que nous nous sommes posée relativement à l'intégration des autres approches dans l'enseignement, nous proposons dans ce paragraphe de faire une comparaison des trois approches suivant trois plans (technique, cognitif et didactique) tout en tenant compte des notions, théorèmes et techniques mobilisés dans chacune d'elles. En annexe A (p. 227), nous avons présenté un tableau présentant de façon synthétique cette comparaison.

#### La disparité et la différence des trois approches

Au plan **technique**, nous constatons que l'approche algébrique est assez sélective quant à la nature des équations différentielles à résoudre et elle n'est pas toujours applicable, tandis que les résolutions numérique et qualitative peuvent être appliquées à toute équation différentielle en particulier du type  $y' = f(x, y)$  mais aussi à des équations d'ordre plus élevé. Signalons toutefois que pour les équations différentielles d'ordre élevé, la difficulté et la complexité croît rapidement dans l'approche qualitative, alors que pour l'approche numérique les résultats se généralisent sans beaucoup de changement.

En ce qui concerne les techniques mobilisées pour la résolution, nous constatons une disparité entre les trois approches. L'algébrique mobilise une grande quantité de techniques de résolution différentes, applicables dans des situations différentes et qui s'apprennent grâce à une variété de problèmes sans la possibilité d'être réduites à des préceptes. En revanche, pour les deux approches numérique et qualitative, on constate que les techniques mobilisées sont toujours les « mêmes » quelque soit la nature de l'équation étudiée. La mise en œuvre de l'approche numérique nécessite une certaine maîtrise des différentes méthodes d'approximation et une certaine vigilance vu le risque de l'erreur. Elle peut nécessiter beaucoup de calculs numériques, tout comme l'approche algébrique qui risque de nécessiter beaucoup de calculs algébriques. Le cas étant, les résolutions numérique et algébrique risquent d'être compliquées à cause des calculs mais pas seulement et, il nous semble qu'un recours à un outil à qui on peut léguer les calculs est le bienvenu pour se centrer sur l'essentiel. En ce qui

concerne l'approche qualitative, il serait peut-être possible d'affirmer que la résolution est techniquement la plus facile à un certain niveau et pour des équations différentielles adéquates. Elle fait appel en revanche à des raisonnements fins de l'analyse et elle peut s'avérer de plus en plus difficile à appliquer à partir d'un certain niveau voire pour des équations d'apparence anodine.

Au plan **cognitif**, nous constatons que chaque approche mobilise des théorèmes, notions et techniques relativement divers. L'approche numérique mobilise moins de notions que les deux autres. Les deux approches numérique et qualitative mobilisent plus de nouvelles notions que l'approche algébrique qui s'inscrit dans une continuité de l'enseignement de l'analyse.

La diversité et la richesse des techniques d'intégration mobilisées par l'approche algébrique peuvent être une difficulté pour les élèves mais en revanche ceci est récompensé par le fait que l'approche est algorithmique et une fois que l'on a appris les techniques, la résolution devient en général routinière. Quant à l'approche numérique, à part l'excès de calcul, le choix d'un pas et/ou d'une méthode optimale peut poser problème. La maîtrise de l'erreur peut également être une source de problème. En ce qui concerne l'approche qualitative, on peut dire en général qu'une certaine partie de l'étude qualitative d'une équation différentielle est facile à faire : trouver des isoclines, le champ de tangentes, allures des courbes solutions etc. Mais certaines études fines peuvent relever d'une maîtrise difficile (comme l'étude des comportements à l'infini, etc.) et la justification d'un niveau délicat parce qu'elle promeut une grande partie des notions de l'analyse. Néanmoins, elle permet une meilleure compréhension des solutions contrairement aux deux autres approches et il convient de faire une étude qualitative des courbes solutions même si une résolution algébrique est accessible.

En outre, les approches numérique et qualitative donneront l'opportunité d'aborder des situations réelles, et par conséquent des équations, plus complexes, contrairement à la résolution algébrique qui, elle, favorise des modélisations « artificielles » selon les termes de Litte&McLeman (2002). En effet, sans faire appel à ces deux approches « *models must be limited to those which lead to equations with nice, clean, analytical solutions. Unfortunately, these models tend to be very artificial.* » (idem. p. 2)

Au plan **didactique**, les approches algébrique et numérique ont l'avantage d'être algorithmiques et de ce fait satisfont les replis de l'enseignement. Elles peuvent par conséquent s'avérer plus faciles à enseigner et à maîtriser. Néanmoins quant aux changements de registres et de cadres, ces approches s'avèrent relativement pauvres. En revanche, la résolution qualitative ne se réduit pas à une algorithmisation. En ce qui concerne les registres, elle en mobilise davantage et présente deux particularités : primo, bien que le registre graphique paraisse présent au sein des trois approches, il est



mobilisé en mode monographique et idéogrammatique<sup>4</sup> (Chauvat, 1988-89) par les approches numérique et algébrique. Néanmoins, ce registre est mobilisé en mode opératoire (idem) par la résolution graphique qui mobilise plusieurs représentations dans ce registre : champ de tangentes, courbes isoclines, entonnoir, etc. Notons que dans le mode opératoire le graphique est opératoire et fonctionne comme un processus interactif non algorithmisé. La tâche ne peut pas être effectuée sans le graphique mais la réponse n'est pas donnée directement par le graphique, elle doit être construite par le sujet en interaction avec le graphique.

Une seconde particularité de l'approche qualitative relativement aux registres est qu'elle permet de mobiliser le registre intrinsèque offrant ainsi beaucoup de richesse en ce qui concerne les tâches qui peuvent être proposées.

### La complémentarité des trois approches et la nécessité d'intégrer les approches numérique et qualitative

Eu égard à cette analyse, nous constatons que chaque approche a ses intérêts et ses inconvénients selon le type d'équation différentielle et le problème posé. Cette analyse met donc en exergue la nécessité de ces trois approches, la complémentarité et la synergie entre elles : « *Graphics give qualitative global insight where numerics give quantitative results and symbolics give powerful manipulative ability.* » Tall (1992, p. 9) Il en résulte que pour obtenir une bonne compréhension des solutions, il se peut que ces trois modes de résolution soient nécessairement impliqués lors d'un traitement d'une équation différentielle donnée. Nous nous joignons à Neill & Shuard (1982)<sup>5</sup> qui déclarent que : "*The three methods of studying a first order differential equation, the sketching of solution curves, their numerical evaluation, and obtaining explicit formulae for them by integration, all contribute to an understanding of the solution.*" (p. 147)

Nous citons quelques résultats du travail de Kwon et al. (2003) pour illustrer comment la combinaison des trois approches peut influencer la résolution algébrique. Les auteurs observent deux classes lors de l'enseignement des équations différentielles : une première (appelée TRAD-DE) est une classe traditionnelle et une deuxième (RME-DE) une classe où les équations différentielles sont enseignées dans le cadre de la réforme (i.e. les trois approches sont enseignées en intégrant les nouvelles

---

<sup>4</sup> Le mode **nomographique**, utilisé directement pour obtenir des résultats numériques de façon standard et algorithmisé, correspond au fonctionnement du graphique comme outil de calcul. C'est un moyen d'obtenir graphiquement des  $y$  pour des  $x$  donnés et vice versa. Dans le mode **idéogrammatique** qui permet de mettre en évidence le comportement global des relations considérées et des propriétés déjà connues dans d'autres registres, le graphique est considéré comme outil de contrôle.

<sup>5</sup> D'après Tall (1986b).

technologies). Des différences importantes ont été notées entre les deux groupes d'étudiants et l'analyse comparative des résultats issus des deux classes a révélé que :

- bien que dans la classe RME-DE l'accent a été de moins en moins mis sur les techniques analytiques, les étudiants de cette classe ont eu de meilleurs résultats que les autres, dans des tests « routines » où on demandait de trouver la solution générale d'une équation différentielle. En effet « *RME-DE students solved a problem based on meaning, while TRAD-DE students simply memorized techniques.* » (idem, p. 1-300)
- Les étudiants de RME-DE se sont révélés meilleurs à donner du sens à une équation différentielle et, par exemple, à faire la relation entre une solution exacte et le taux d'accroissement d'une fonction. Par ailleurs les étudiants de RME-DE ont acquis une "*compréhension profonde*" dans les relations entre différentes représentations d'une équations différentielle et dans un travail de modélisation.

Les auteurs examinent par ailleurs les productions d'étudiants dans le cadre de *Views About Mathematics Survey* de Carlson (1997). Les résultats obtenus ont démontré que les attitudes des étudiants de RME-DE évoluent vers un point de vue d'« expert » : « *They valued understanding of conceptions, discussion of problems and representation of ideas, and the relation between mathematics and life more highly than TRAD-DE students.* »

Ce qui est important dans la combinaison des trois approches, ce n'est pas de les enseigner forcément à tour de rôle, mais de faire une synergie entre elles. Une telle combinaison non seulement permet une meilleure compréhension des solutions mais elle paraît pertinente dans le sens où lorsque l'une est insuffisante, l'autre peut venir en aide. On peut trouver des exemples intéressants pour voir la synergie entre les différents modes de résolution. Citons à titre d'exemple l'étude de Artigue où pour prouver que les courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = y^2$  possèdent des asymptotes verticales, on fait appel à la résolution algébrique de l'équation en question. Le recours à la résolution algébrique n'est peut-être pas le seul moyen de prouver que les courbes solutions possèdent des asymptotes mais elle s'avère très utile. Inversement, même lorsqu'on possède explicitement la solution générale d'une équation différentielle, celle-ci peut être trop compliquée - et ce d'autant plus qu'elle dépend d'un paramètre - pour permettre l'étude des branches infinies par exemple. Ceci illustre bien comment les différentes approches doivent trouver place dans l'enseignement.

Il serait donc préférable de combiner les trois approches : chacune d'elles a sa pertinence. Si, face à un problème, l'on doit choisir une approche parmi les trois, il convient de se baser sur les critères suivants : la nature de l'équation différentielle à résoudre et ce qu'on aimerait savoir sur la solution. La résolution du problème devient plus facile si l'on se demande au préalable laquelle de ces trois

méthodes amène le plus rapidement au résultat désiré. Lorsque par exemple nous avons besoin de savoir si et où notre solution croît, l'approche graphique paraît le procédé optimal afin d'arriver au but.

De prime abord, il ressort de cette étude que, vu leurs importances, les trois approches doivent être introduites. En effet, outre leur complémentarité et malgré la différence des compétences exigées, il y a une interaction entre elles dans le sens où lorsqu'une approche demeure insuffisante, on peut en mobiliser une deuxième. Il en résulte que la réponse à la **QUESTION 2**, qui s'interroge sur la nécessité de l'intégration d'autres approches, semble être affirmative et ce pour plusieurs raisons que nous avons regroupées dans différentes catégories. Il s'ensuit qu'il faut sinon supprimer, du moins atténuer les techniques de résolution longues et fastidieuses pour les remplacer ensuite par des tâches qui consistent à formuler des équations différentielles et à interpréter leurs solutions. Il ne s'agit bien évidemment pas d'exclure la résolution algébrique, mais de l'enseigner et de la renforcer. Ce que nous contestons, c'est de « perdre de temps » à résoudre toujours les mêmes types d'équations différentielles. Par exemple combien de temps un étudiant passe-t-il à calculer le « facteur intégrant » d'une équation différentielle ou bien à calculer les racines de l'équation caractéristique d'une équation différentielle du second ordre ? Ne serait-il pas préférable de laisser ceci de côté, après bien évidemment les avoir enseignés et renforcés, pour se pencher sur d'autres aspects de la théorie ?

Pour confirmer la réponse que nous avons donnée à la **QUESTION 2** et justifier la nécessité de l'intégration d'autres approches, nous pouvons énumérer, en plus de **la limitation de l'approche algébrique** (paragraphe 1.3.1) et **des intérêts des approches qualitative et numérique** (paragraphe 1.3.2 et 1.3.3), les raisons suivantes au versant didactique :

- (1). **La restriction de l'enseignement à l'approche algébrique.** Dans l'enseignement, on étudie essentiellement les équations différentielles intégrables dont la résolution est simple et les fonctions solutions sont accessibles à une éventuelle étude de comportement. Une telle délimitation ne respecte pas l'épistémologie du champ des équations différentielles et génère un décalage entre l'enseignement et le fonctionnement scientifique du domaine. Néanmoins Tall (1986b), dans son article dont le titre est frappant, signale qu'en cherchant à simplifier la théorie afin qu'elle soit plus accessible sans chercher forcément à creuser profondément on conduit à des falsifications et à des mauvais représentations des faits mathématiques. Pour illustrer ces propos, il cite quelques exemples caractéristiques.

Soulignons néanmoins que face à une telle restriction, non seulement les étudiants ne donnent pas de sens aux équations différentielles mais ils sont amenés à un paradoxe. D'une part ceci donne à croire aux élèves que certaines équations différentielles n'ont pas solutions, tout en ignorant le théorème d'existence et d'unicité qu'ils étudient à maintes fois (c'est d'ailleurs une telle anecdote qui a poussé

West et Hubbard à rédiger leur livre<sup>6</sup>) ; d'autre part ceci fait naître chez les étudiants l'illusion que « toute équation différentielle est intégrable » grâce à des techniques spéciales : séparation des variables, facteur d'intégration (Artigue, 1989 ; Tall, 1986b). Artigue (1989) signale même qu'un tel enseignement évoque chez les élèves l'idée du « livre de recettes » dans le sens où le but est de remplir ce livre en résolvant, à chaque fois, une équation que l'on ne savait pas résoudre. Ainsi les étudiants croient-ils qu'un jour ils rempliront ce livre de recettes.

Par ailleurs plusieurs auteurs ont souligné les effets négatifs que peut générer la restriction de l'enseignement à un sous-ensemble d'équations. Rasmussen (1997, p. IV-29) rapporte que les étudiants ont tendance à penser que les solutions (fonctions ou courbes) d'une équation différentielle se comportent d'une manière « *not too strange* » et qu'elles sont nécessairement « *smooth and without abrupt changes or other irregular behavior.* » Or ceci n'est généralement pas le cas pour les équations différentielles non linéaires.

(2). **L'informatique** est désormais une réalité de la vie scolaire et les étudiants arrivent en classe avec un certain niveau en informatique. Cette technologie contribue à l'évolution de l'enseignement sur plusieurs manières et ces contributions portent aussi bien sur le contenu que sur les méthodes d'enseignement :

(i) grâce à l'informatique on n'a plus besoin de se focaliser sur les techniques, celles-ci pouvant être léguées à l'ordinateur. Il ne s'agit bien évidemment pas d'exclure la résolution algébrique mais il serait peut-être intéressant, après avoir enseigné et renforcé les techniques algébriques, de se servir d'un ordinateur pour calculer la solution générale. Ainsi, on peut éviter de faire résoudre toujours les mêmes types d'équations différentielles et de « noyer » les étudiants dans les calculs, par exemple, de facteur d'intégration ou des racines de l'équation caractéristique. Par ailleurs les étudiants se libèrent pour s'occuper d'autres aspects de la théorie des équations différentielles (modélisation, interprétation et représentation graphique des courbes solutions etc.)

(ii) d'autre part, les techniques graphiques et numériques deviennent plus accessibles grâce à ces environnements informatiques. Ceux-ci ont rendu le cours plus dynamique, plus visuel et plus qualitatif et par conséquent les expressions et manipulations algébriques occupent moins de place que dans les cours traditionnels. En effet, l'accessibilité immédiate de la nouvelle technologie offre des potentialités, entre autres, de représentations graphiques, rendant ainsi obsolète la concentration sur les techniques et astuces, indispensables pour la résolution algébriques des équations différentielles. Blanchard (94, p. 385) propose aux enseignants de ne pas donner d'équations différentielles pour

---

<sup>6</sup> West et Hubbard (1991) précisent ce qui a motivé la rédaction de leur ouvrage : « *the origin of this book, and of the programs (which preceded it) was the comment made by a student in 1980: "This equation has no solutions." The equation in question did indeed have solutions, as immediate consequence of the existence and uniqueness theorem, which the class had been studying the previous month.* » (p. viii).

lesquelles des solutions analytiques existent, mais plutôt d'utiliser l'ordinateur et les calculatrices graphiques pour faire produire des solutions approximatives et de demander aux apprenants d'interpréter les solutions.

Nous pouvons citer à propos des différents outils informatiques utilisés pour l'enseignement des équations différentielles : les logiciels (de calcul formel (CAS, Computer Algebra System) et de géométrie dynamique), les tableurs, StarLogo (Andersan&Seaquist (1999)), etc. Notons qu'il existe même des logiciels spécifiques au traitement des équations différentielles tels IPE, ODE Architect etc.

(3). **Les réformes en analyse** : ces dernières décennies ont vu apparaître des réformes, dans plusieurs pays, visant à donner un aspect plus dynamique à l'enseignement de l'analyse et des équations différentielles. Par exemple, en suivant le *Calculus Reform* de *National Science Foundation* aux USA, beaucoup d'instituteurs réorganisent désormais leurs cours en soulignant l'aspect algébrique, numérique et graphique. Désormais l'interaction entre l'algébrique, le graphique, le numérique et les situations réelles qui conduisent aux équations différentielles est de plus en plus souligné. Ceci conduit à un enseignement qui se déplace facilement entre les représentations algébrique, graphique et numérique et il s'agit, grâce à cette variété de représentations, d'interpréter le modèle représenté et de prédire les comportements des solutions à long terme.

(4). **La publication des manuels donnant place aux autres approches** : comme nous l'avons souligné plus haut, il existe désormais des manuels pouvant servir de référence, surtout pour la résolution graphique, ce qui n'était pas le cas il y a déjà deux décennies. Les manuels récemment édités, en particulier aux USA, commencent à souligner de moins en moins les techniques algébriques et de plus en plus les techniques numériques et qualitatives grâce au logiciel. Il suffit de feuilleter quelques manuels, tels Blanchard et al. (2002), Hubbard&West (1999), Kostelich&Armbruster (1997), pour se convaincre de l'évolution qu'a subie l'enseignement des équations différentielles.

(5). **La demande de la noosphère française** : la demande explicite des programmes de l'enseignement secondaire en France pour l'intégration d'autres modes de résolution. Ainsi le projet de programmes paru en janvier 2001 demandait explicitement l'intégration de la résolution qualitative. Par ailleurs, avec l'introduction de la méthode d'Euler, la résolution numérique fait bel et bien partie des programmes de l'enseignement secondaires en France.

Signalons que la demande explicite des programmes confirme tacitement que le niveau cognitif des élèves est suffisant, même au niveau Terminale, pour une assimilation d'autres approches. Nous certifierons ceci dans la partie B.

L'analyse menée jusqu'ici confirme que l'enseignement des équations différentielles doit évoluer vers d'autres approches en soulignant davantage les aspects conceptuels et éventuellement les processus qui ont donné naissance à l'équation différentielle étudiée. Il faut donc réexaminer aussi bien le contenu du cours que les méthodes d'enseignement et par conséquent une révision de curriculum s'impose : certains points sont à introduire ou à développer alors que d'autres doivent être supprimés ou atténués.

Néanmoins si la nécessité de l'intégration d'autres approches est bel et bien une réalité, celle-ci ne va pas de soi. En effet, les approches sont complémentaires mais elles exigent des compétences, des prérequis, des cadres et des registres qui ne sont pas totalement transposables. Il en résulte que l'intégration d'une façon conjointe des trois approches peut s'avérer difficile. D'autre part celle-ci se heurte à beaucoup de « contraintes », identifiées par Artigue (1989), et tout ceci témoigne de la difficulté de la tâche. Nous nous proposons de les présenter dans le paragraphe suivant :

## 1.4 Contraintes entravant les résolutions numérique et graphique

Le monopole de la résolution algébrique trouve bien évidemment des racines variées : il existe plusieurs contraintes de natures différentes qui s'opposent à l'intégration d'autres approches et qui ont fait en sorte que l'enseignement est engagé dans des « problèmes de raccord » qui donnent l'impression de le complexifier. Ces contraintes sont analysées et classées par Artigue (1989) en trois groupes : des contraintes épistémologiques, des contraintes cognitives et enfin, des contraintes didactiques.

❖ **Epistémologiques** : Ces contraintes sont liées aux caractéristiques du savoir en jeu. Elles dépendent de la notion mathématique étudiée. Inhérentes à cette notion, quiconque veut l'apprendre rencontrera nécessairement ces obstacles, avec plus ou moins d'intensité. Artigue cite les contraintes épistémologiques suivantes : **(E1)**. *La longue domination du cadre algébrique*, depuis la naissance des équations différentielles et jusqu'à nos jours, comme en témoigne l'analyse historique ci-dessus. **(E2)**. *Le développement tardif et relativement autonome de l'étude qualitative* qui n'a vu le jour qu'à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle et qui est restée ignorée pendant pratiquement un siècle. **(E3)**. *L'élémentarisation relativement récente de la théorie géométrique* : la publication des manuels en ce domaine est relativement récente. **(E4)**. *Le statut utilitaire et palliatif de la résolution numérique approchée* : malgré l'ancienneté des méthodes d'approximation numérique et leur utilité comme nous l'avons présenté ; le cadre numérique, selon Artigue, « n'est traditionnellement pas ressenti comme un cadre mathématique noble. » En général, les méthodes numériques sont perçues aussi bien par les élèves que par des professeurs voire des mathématiciens comme des « bricolages. »

❖ **Didactiques** : ces contraintes découlent aussi bien de la méthode de l'enseignant que des caractéristiques du fonctionnement du système d'enseignement au niveau global et ne doivent pas être réduites au seul enseignement des équations différentielles. Certaines d'entre elles renforcent les contraintes cognitives citées plus loin : **(D1)**. La tentation de la réduction algorithmique adoptée par l'enseignement actuel. Au niveau des équations différentielles, une telle attitude représente un secours pour les deux acteurs du triangle didactique dans le sens où, selon Artigue, elle « constitue un moment pour souffler, dénouer le stress lié aux parties délicates du cours d'analyse », tout en assurant un niveau de réussite satisfaisant. Néanmoins, bien que les approches algébrique et numérique se plient à une telle algorithmisation, l'approche qualitative elle ne s'y plie pas **(D2)**. Le mythe de la résolution complète qui oblige l'enseignant, dont le but principal est d'achever la résolution, à se limiter à des équations soigneusement choisies même si elles paraissent difficiles. **(D3)**. Le statut infra-mathématique du cadre graphique, considéré comme apte pour une description et non pas pour la justification ni a fortiori pour la résolution. On retrouve des affirmations similaires dans Menssouri (1994). Celui-ci rapporte que la lecture graphique, et encore moins la maîtrise du registre graphique, n'est pas un enjeu de l'enseignement. Ce registre est présent seulement comme un registre de représentation et non comme un registre de traitement : « un registre de représentation qui permet de donner un sens intuitif aux objets représentés » dont « le traitement n'est pas censé se faire par des moyens propres à ce registre. » Sans dénier l'intérêt de l'usage du graphique pour l'enseignement ou l'apprentissage des notions qui y sont représentables, il rapporte que le traitement du graphique dans le contrat classique peut être un obstacle au fonctionnement que la situation souhaite instaurer. Il reproche par ailleurs le fait que le traitement graphique est actuellement ponctuel : il est construit à partir de points dont les coordonnées sont connues, ou bien il est utilisé comme abaque pour trouver des coordonnées. Or le fonctionnement ponctuel, non seulement n'induit pas le fonctionnement global, mais il constitue un obstacle à ce fonctionnement. A travers cette analyse, l'auteur conteste le statut du graphique dans l'enseignement, s'agit-il vraiment d'un registre ? Or, pour qu'il soit un registre à bon escient il faut qu'il permette le traitement et ne se contente pas d'être un moyen pour la représentation : « alors on peut dire que le système de représentation graphique tel qu'il est utilisé dans l'enseignement n'est pas un registre intégrale, au sens de Duval. » (Idem.).

❖ **Cognitives** : ces contraintes sont relatives aux caractéristiques cognitives des apprenants et il s'agit des difficultés conceptuelles. Artigue souligne la difficulté de les dissocier des contraintes didactiques. Le système d'enseignement peut en effet faire en sorte qu'une contrainte didactique se transforme en une contrainte cognitive. Les contraintes suivantes sont citées au versant cognitif : **(C1)**. La difficulté des mathématiques liées à une perspective non empirique dans le cadre algébrique : le monopole historique de l'approche algébrique s'accompagne de la complexification de la théorie des équations différentielles. Les perspectives que la problématique algébrique a essayé (ou essaye) de clarifier sont d'une complexité non négligeable. C'est la raison pour laquelle la transposition de ces perspectives à l'enseignement semble donc difficile, surtout avec des étudiants débutants. **(C2)**. Le niveau de maîtrise en analyse requis par les justifications dans les cadres numériques et

*géométriques* : Lors d'une étude qualitative, la justification est basée sur les éléments algébrique (celui-ci requiert l'emploi des outils élémentaires de l'analyse : majorations, minorations, théorèmes des valeurs intermédiaires, etc.) et graphique. Pour que cette interaction soit réussie, il faut que chacune de ces parties soit suffisamment maîtrisée. Pourtant, Artigue (1989) rapporte que certains travaux (F. Boschet, A. Robert) ont montré que ces notions ne sont pas suffisamment assimilées, même au niveau DEUG. Quant au cadre numérique, le niveau de maîtrise requis est encore plus élevé (preuve qu'une méthode est d'ordre donné, estimation et contrôle des erreurs), et cela entrave le développement de l'étude numérique. (C3). *La mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative* : L'étude qualitative d'une équation différentielle, même d'un niveau simple, fait appel à plusieurs notions de l'analyse et nécessite « des capacités de traitement graphique rapide des fonctions » et elle est par conséquent difficile même pour les professionnels. A ces difficultés s'ajoute la mobilité de point de vue nécessaire aux interactions entre cadres, en particulier les cadres algébrique et géométrique. Or plusieurs travaux ont démontré les difficultés des élèves relativement aux changements de cadres et de registres. Cette mobilité requise par l'interaction entre cadres est d'autant plus complexe qu'il faut travailler à deux niveaux : celui des fonctions et celui des dérivées. En effet, lors de l'étude qualitative d'une équation différentielle, la tâche consiste à interpréter, à partir de l'équation, la dérivée des solutions afin d'aller associer ces interprétations aux représentations graphiques des courbes solutions et vice-versa.

Dans les pages précédentes, nous avons mené une étude afin de cerner les contours de notre travail. Il découle de l'analyse que malgré la nécessité d'un enseignement conjoint des trois approches, cette tâche s'annonce relativement difficile pour un travail de thèse, compte tenu en particulier des contraintes citées ci-dessus et de la limitation du temps de l'enseignement. Néanmoins un travail sur l'approche qualitative nous paraît envisageable et nous limiterons notre travail à celle-ci.

### **Pourquoi opter pour l'approche qualitative ?**

Suite à l'analyse développée ci-dessus, nous avons affirmé notre préférence de choisir de travailler l'approche qualitative. La préférence accordée à cette approche n'est bien évidemment pas sans raison et nous pouvons avancer quatre motifs, d'ordre cognitif et didactique, pour la justifier :

1. Malgré leur fonctionnement autonome et l'utilité propre à chacune de ces trois approches, nous avons déjà souligné **la prégnance de la résolution algébrique** dans l'enseignement universitaire actuel et nous constatons une **absence de l'approche qualitative** dans l'enseignement secondaire actuel.



2. **Les encouragements du projet du programme** de la classe de Terminale S, paru en janvier 2001. Comme nous le développerons lors de l'analyse des programmes (partie B), ce projet prévoyait une étude qualitative des équations différentielles, mais il est malheureusement resté lettre morte. Voici un extrait de ce projet : « *on définira la notion de solution d'une équation différentielle. On représentera le champ de tangentes (tracé à l'aide d'un logiciel) et les courbes isoclines. On tentera de donner une intuition du comportement des solutions (peuvent-elles traverser la droite d'équation  $y=T_0$  ? Existe-t-il une asymptote ?)*. »
3. Vient ensuite **l'importance de la résolution qualitative** pour l'enseignement non seulement des équations différentielles, mais pour l'ensemble de l'analyse. Vu les connaissances qu'elle mobilise, cette technique s'avère en effet très riche du point de vue de l'apprentissage. Elle fait appel à des notions clés de l'analyse (tangente, fonction, etc.) et de ce fait permettrait de les réviser.
4. Enfin il s'agit de l'approche la plus riche en terme **de cadres et de registres**. Puisque nous croyons à l'utilité et à l'efficacité des changements de cadres et de registres pour l'apprentissage, ceci est un bon argument.

## 1.5 Hypothèse et questions de la recherche

Nous avons déjà évoqué, grâce aux travaux antérieurs, au paragraphe 1.2.2 (p. 19) la possibilité de mener une étude qualitative des équations différentielles au niveau universitaire, même avec les étudiants débutants. Encouragé par ces résultats et constatant l'absence d'une approche qualitative<sup>7</sup> en Terminale Scientifique (TS), nous nous sommes interrogé sur la possibilité et les intérêts didactiques d'une telle étude à ce niveau d'enseignement. En réalité, mener une étude qualitative en Terminale présente plusieurs intérêts. Tout d'abord grâce à l'introduction de l'approche qualitative en TS, on peut espérer que, si les élèves entrant à l'université avec les prémices de l'approche qualitative, ils seront plus à l'aise avec l'approche qualitative à l'université et la prédominance de la résolution algébrique pourrait être ainsi atténuée. Par ailleurs, l'intégration de l'approche qualitative permettra à l'institution TS d'élargir le champ des équations différentielles traité actuellement en TS et d'intégrer éventuellement des équations différentielles non résolubles algébriquement. Rappelons que ce champ se limite aux équations de la forme  $y'=ay+b$  en mathématiques, augmentées de  $y''+w^2y=0$  et  $y''+ay+by=0$  ( $w, a, b \in \mathcal{R}$ ) en cours de science physique. Une fois les élèves engagés dans une approche qualitative, le cours de science physique, qui dépend naturellement de celui de mathématiques pour les équations différentielles, aura plus de flexibilité et davantage de modèles pourront être enseignés en TS.

---

<sup>7</sup> Signalons que la résolution numérique, présente au niveau universitaire, l'est également dans l'enseignement secondaire avec la méthode d'Euler depuis la rentrée en vigueur des programmes de 1998. Ceci explique en partie pourquoi nous nous sommes penché sur la résolution qualitative et non pas numérique.

C'est au moment où nous nous sommes engagé dans un tel travail que nous avons pris connaissance du projet des programmes de Terminale. Celui-ci nous a de plus en plus encouragé, puisqu'il prouve que le niveau cognitif des élèves en TS est effectivement suffisant pour permettre une telle étude. Nous nous sommes ainsi fixé comme objectif d'étudier la possibilité d'une telle étude au niveau Terminale S et de chercher à comprendre dans quelle mesure il était possible d'anticiper les nouveaux programmes.

Signalons par ailleurs qu'un autre aspect qui distingue notre travail des travaux antérieurs sur l'approche qualitative des équations différentielles est notre choix capital que l'approche qualitative précède l'approche algébrique. En effet, notre travail implique un public qui ne connaît pas encore les équations différentielles ni, a fortiori, la résolution algébrique ; tandis que les travaux antérieurs ont essayé de bâtir la résolution qualitative sur la résolution algébrique des équations différentielles. Cette décision peut être justifiée par plusieurs raisons dont nous présenterons quelques unes dans les lignes suivantes.

### **Introduire l'approche qualitative avant l'approche algébrique**

Pourquoi introduire l'approche qualitative avant la résolution algébrique ? Soulignons tout d'abord que, comme nous l'avons démontré dans le paragraphe 1.2.4 (p. 20), la résolution algébrique risque de constituer un obstacle pour l'approche qualitative, parce qu'une fois la résolution algébrique acquise, les apprenants sont fortement tentés par ces techniques. C'est la raison pour laquelle nous avons été amené à choisir la classe de TS comme terrain d'expérimentation et nous avons tenté d'introduire les équations différentielles à l'aide d'une approche qualitative.

Une autre raison, épistémologique cette fois-ci, qui nous a encouragé à maintenir cette décision est influencée par les propos de Poincaré. Celui-ci, pour justifier de l'intérêt de l'approche qualitative, fait une analogie avec l'étude des fonctions et des équations et il conclut qu'une étude qualitative globale est au préalable nécessaire à une étude quantitative. En effet

*« ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis. »<sup>8</sup> Pour lui « l'étude complète d'une fonction comprend deux parties : 1° partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction ; 2° partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.*

*Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de STURM, quel est le nombre des racines réelles : c'est la partie qualitative ; puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. [...]*

---

<sup>8</sup> Poincaré (1993), Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, Editions : Jacques Gabay.

*C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant : Construire les courbes définies par des équations différentielles. » (idem)*

Maintenant que nous avons précisé notre terrain d'expérimentation et notre souhait d'aborder l'approche qualitative avant l'approche algébrique, il convient de traiter à nouveau les contraintes qui pèsent sur cette approche. En effet afin de réaliser nos objectifs, il s'avère nécessaire de gérer au moins certaines contraintes citées au paragraphe 1.4 (p. 39), sur lesquelles nous nous proposons de jouer. Comment atténuer l'effet de ces contraintes ?

Il va de soi que rien ne peut être changé en ce qui concerne les **contraintes épistémologiques**, le besoin ne s'impose d'ailleurs pas. En effet, elles expliquent la stabilité de l'enseignement des équations différentielles et n'ont pas un lien direct avec le développement de l'approche qualitative. Signalons néanmoins que le poids de « **(E3)** *l'élémentarisation relativement récente de la théorie géométrique* » semble être atténué puisqu'il existe maintenant des manuels universitaires pouvant servir de référence. Concernant les **contraintes didactiques**, le jeu sur ces contraintes nécessite un travail vaste et un processus rigoureux qui n'est pas forcément lié à l'enseignement des équations différentielles. Il s'avère donc qu'une telle tâche est relativement ardue. Notons néanmoins que nous essayerons de nous plier devant la contrainte « **(D1)** *la tentation de la réduction algorithmique* » et de proposer autant que possible un enseignement algorithmique. Nous nous expliciterons davantage à ce sujet, plus loin dans ce texte. Quant aux **contraintes cognitives**, la première « **(C1)** *la difficulté des mathématiques liées à une perspective non empirique dans le cadre algébrique* » tend plutôt à expliquer pourquoi l'enseignement n'avance pas dans la résolution algébrique et elle n'est donc pas directement liée à l'enseignement de l'approche qualitative. En ce qui concerne la seconde « **(C2)** *le niveau de maîtrise en analyse requis par les justifications dans les cadres numériques et géométriques* », elle ne nous concerne pas directement ici, puisque le niveau doit être obligatoirement bas, compte tenu du niveau cognitif des élèves de TS. De ce point de vue, nous nous proposons d'aborder particulièrement une contrainte cognitive, soit *la mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative*.

En quoi consiste cette mobilité ? Comment la faire acquérir, ou plutôt comment contribuer à son acquisition ? Cette mobilité exige une certaine capacité à se mouvoir entre différents objets : la dérivée, les tangents, les fonctions solutions etc. Elle exige également un maniement aisé de ces notions lors de l'interaction entre différents registres, notamment l'algébrique et le graphique mais aussi le tableau de variations. Des activités liant la dérivée et les fonctions solutions, mais également liant les objets du registre algébrique à ceux du registre graphique semblent être un bon moyen pour contribuer à l'acquisition d'une telle « mobilité. » D'où l'importance de la notion du registre sémiotique, introduite par Duval (1995b). En effet, l'approche qualitative étant une navette entre l'algébrique et le graphique, le traitement des équations différentielles dans l'enseignement doit mettre

en jeu différents registres à la fois. Lors de l'interaction de ces différents registres, on pourrait s'attendre à ce qu'ils s'entraident : par exemple les positions des courbes solutions par rapport à un axe ne se fait pas dans le registre algébrique mais avec l'aide de celui-ci, en passant d'un registre à l'autre. C'est une association entre les deux registres où chacun à tour de rôle permet de contrôler ce que l'autre ne permet plus de contrôler. Ceci dit, le traitement d'une tâche est fortement tributaire du type de registre dont on dispose. En effet, chaque registre permet des traitements différents pour une même tâche et ne montre par conséquent pas les mêmes propriétés de l'équation différentielle. Nous tenons à rappeler que, comme le note Duval, chaque registre d'un concept n'hérite que d'une partie des propriétés de ce concept. D'où on peut faire l'hypothèse que c'est de la multiplicité des registres possibles que le concept et ses propriétés vont se dégager. Il en ressort que le jeu de registres est un outil efficace pour l'enseignement de l'approche qualitative des équations différentielles ainsi nous admettons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse de travail n° 1 :** Le jeu de registres apporte une aide efficace à l'apprentissage de l'approche qualitative des équations différentielles, notamment en contribuant à « *la mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative* » et donc au renforcement des liens existants entre une fonction et sa dérivée.

En effet, l'utilité de changement de registres dans l'enseignement est à présent notoire. En réalité, le postulat principal de Duval

*« consiste à affirmer que le jeu sur les registres sémiotiques, permettant au sujet d'identifier une représentation, de la traiter à l'intérieur d'un même registre ou de la convertir dans un autre registre engage la distanciation entre le signe et l'objet, et construit la signification en mathématique »* et c'est la raison pour laquelle « *la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion.* » (R. Duval, 1993)

En nous appuyant sur cette hypothèse et sur l'étude menée jusqu'ici, nous élaborons l'hypothèse suivante qui sera validée grâce à un dispositif expérimental que nous présenterons dans les pages suivantes :

**Hypothèse de recherche :** *La viabilité de l'approche qualitative en Terminale S*

Nous pouvons instaurer une approche qualitative des équations différentielles en Terminale S en jouant sur certaines contraintes et grâce au jeu de registres.

Avant de traiter cette hypothèse, il serait convenable d'aborder la question suivante : que veut dire *introduire* ou *instaurer* l'approche qualitative en Terminale ? Nous essayerons de répondre à cette question dans les pages suivantes au moment où nous présenterons notre méthodologie. Soulignons néanmoins que cette question sera directement liée à la contrainte **D1** (*la tentation de la réduction algorithmique*) à laquelle nous avons convenu de nous plier.

Il convient par ailleurs de souligner qu'afin de mettre à l'épreuve cette hypothèse nous devons tout d'abord identifier les principaux registres sémiotiques utilisables en Terminale et la façon dont ils seront utilisés dans notre travail. Nous traiterons cette question dans le chapitre A2 de la présente partie.

# CHAPITRE A2 : CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

*Dans ce second chapitre, nous introduirons, dans un premier temps, le cadre théorique choisi tout en définissant la manière dont il sera utilisé. Ensuite dans une deuxième partie, après avoir justifié le choix de l'ingénierie didactique en tant que méthodologie, nous présenterons les différents registres qui peuvent servir pour la construction d'une ingénierie en TS.*

## 2 CADRE THEORIQUE : REGISTRE ET CONCEPTION

Dans sa théorie du champ conceptuel, Vergnaud (1990) caractérise un concept par le triplet suivant :

*« S : l'ensemble de situations donnant du sens au concept (la référence)*

*I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)*

*s : l'ensemble des formes langagières ou non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures des traitement (le signifiant). » (p.145)*

Puisqu'il « n'y a pas en général de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations », Vergnaud postule alors qu'« étudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois. » (Idem, p. 146) Afin donc de tester nos hypothèses, nous nous sommes inspirés de cette déclaration et nous exposerons dans le paragraphe suivant comment nous l'intégrerons dans notre travail. Signalons néanmoins que nous avons opté pour le modèle *cKç* introduit par Balacheff (1995) qui va dans le même sens. Ce lien de parenté est en fait souligné à plusieurs occasions par l'auteur. Par exemple dans Balacheff & Gaudin (2002), la définition d'une conception par un quadruplet est suivie des lignes suivantes : « *The informed reader will recognize, underlying the three first components, the key features identified by Vergnaud [...] in order to characterize a concept; we have introduced the fourth [i. e. le structure de contrôle  $\Sigma$  ]* » (Balacheff & Gaudin, 2002, p.6) Dans les lignes qui suivent, nous développerons la

façon dont nous utiliserons cette notion de conception pour modéliser et maîtriser l'apprentissage et l'enseignement lors de notre travail. Nous expliciterons par ailleurs comment cette notion sera combinée avec celle du registre dont nous avons relevé l'importance ci-dessus. Pour cela rappelons tout d'abord la notion de conception telle qu'elle est définie dans le modèle  $cK\phi$  :

« Nous appelons conception  $C$ , un quadruplet  $(P, R, L, \Sigma)$  dans lequel :

- $P$  est un ensemble de problèmes sur lequel  $C$  est opératoire ;
- $R$  est un ensemble d'opérateurs ;
- $L$  est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de  $P$  et de  $R$  ;
- $\Sigma$  est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de  $C$ . » (Balacheff, 1995).

### 2.1.1 Comment intégrerons-nous les notions de « registre » et de « conception » ?

Nous modéliserons les trois modes de résolution des équations différentielles, que nous avons présentés ci-dessus, par trois méga-conceptions au sens entendu dans le modèle  $cK\phi$  : la conception algébrique ( $C_A$ ) qui correspond à la résolution algébrique, la conception qualitative ( $C_Q$ ) qui correspond à l'approche qualitative et enfin la conception numérique ( $C_N$ ) qui correspond à la résolution numérique approximative. Bien que le modèle  $cK\phi$  n'impose pas des conditions particulières pour définir une conception et que définir une méga-conception, à notre connaissance, ne pose pas des problèmes graves dans le modèle, on aurait pu définir plusieurs conceptions qualitatives, comme algébriques, au lieu d'une seule. Néanmoins pour le besoin de notre travail, il suffit de considérer une seule méga-conception.

Puisque nous avons justifié dans les pages précédentes la complémentarité et la nécessité des trois approches, nous pouvons affirmer que le but ultime d'un cours sur les équations différentielles est donc de faire acquérir ces trois méga-conceptions. Il ne faut pas prétendre qu'une conception est meilleure qu'une autre et il est important que l'apprenant puisse mobiliser la bonne conception à bon escient. Néanmoins dans notre travail, nous nous contenterons des deux premières conceptions et laisserons de côté  $C_N$ . Il serait peut-être intéressant de justifier l'intégration de  $C_A$  dans notre travail alors que  $C_Q$  constitue notre principale préoccupation. Nous intégrons la première conception dans notre recherche afin de tester l'hypothèse implicite que nous avons faite relativement à l'entrave que risque de constituer l'approche algébrique à l'approche qualitative. Bien que le terrain d'expérimentation choisi soit la classe de Terminale, il convient de rappeler qu'il existe des élèves redoublants qui connaissent la résolution algébrique.

Dans ce qui suit, nous procéderons à une description, plutôt sommaire, de ces deux conceptions en termes du modèle  $cK\phi$ . Les éléments de quadruplet seront au fur et à mesure introduits dans notre travail. Signalons néanmoins que pour des raisons de simplicité, nous nous limitons aux registres sémiotiques au sens de Duval en ce qui concerne L dans le quadruplet. Par ailleurs, nous nous restreignons à un niveau « débutant » quant à la sphère de pratique de ces conceptions puisque ceci subvient au besoin de notre étude. Nous visons ainsi une simplification de la description des autres éléments du quadruplet afin d'éviter de compliquer l'étude.

En ce qui concerne la conception algébrique  $C_A(\mathbf{P}_A, \mathbf{R}_A, \mathbf{L}_A, \Sigma_A)$ , elle consiste à travailler l'équation différentielle d'un point de vue algébrique et elle est fortement caractérisée par le recours à l'expression algébrique des fonctions solutions. Selon cette conception, pratiquement rien ne peut être dit sans avoir préalablement résolu l'équation différentielle. Ainsi, pour se servir d'une propriété de la dérivée, les liens entre  $y'$  et  $y$  n'étant pas établis dans l'équation différentielle, celle-ci est résolue pour ensuite être dérivée. Quant aux éléments du quadruplet, en ce qui concerne cette conception,  $\mathbf{P}_A$  englobe tout problème relatif à une équation différentielle au niveau considéré (résolution de l'équation différentielle, interprétation graphique des courbes solutions, étude de propriétés des solutions etc.). S'agissant de  $\mathbf{R}_A$ , comme le nom de la conception l'induit, la résolution algébrique joue indéniablement sur l'ensemble des opérateurs.  $\mathbf{L}_A$  est constitué en particulier des registres algébrique et graphique. En fait contrairement à ce que l'on peut imaginer, dans  $C_A$  les expressions algébriques ne sont pas les seules à être utilisées puisqu'il est possible d'associer à chaque fonction solution de l'équation différentielle son graphe. Finalement, la structure de contrôle  $\Sigma_A$  dépend à la fois des spécificités de l'algèbre en tant que système de représentation et des opérateurs que la conception permet de mobiliser.

La conception qualitative  $C_Q(\mathbf{P}_Q, \mathbf{R}_Q, \mathbf{L}_Q, \Sigma_Q)$  permet de faire une étude qualitative des courbes solutions d'une équation différentielle sans forcément la résoudre. Par exemple pour associer un élément graphique (courbe solution, champ de tangentes, etc.) à une équation différentielle, les propriétés graphiques de celui-ci sont reliées aux propriétés de  $y'$  dans l'équation différentielle. Quant aux éléments du quadruplet,  $\mathbf{P}_Q$  englobe tout problème qui demande une étude qualitative d'une équation différentielle tandis que  $\mathbf{R}_Q$  embrasse les opérateurs qui permettent d'opérer sans forcément résoudre l'équation différentielle en question. Pour  $\mathbf{L}_Q$ , même à un niveau débutant, nous pouvons lister les registres algébrique, graphique, intrinsèque et tableau de variations. Quant à la structure de contrôle  $\Sigma_Q$ , elle est constituée des propriétés algébriques mais aussi géométriques.

Nous avons ainsi présenté les conceptions  $C_A$  et  $C_Q$  qui sont des conceptions mathématiquement correctes. Nous devons aussi imaginer leurs compléments dont certains éléments sont incorrects ; nous pouvons dans ce cas-là parler des conceptions erronées  $C_A'$  et  $C_Q'$ . On obtient par exemple  $C_Q'$  par l'ajout de quelques opérateurs incorrects à  $C_Q$ .



Revenons maintenant aux deux conceptions initiales  $C_A$  et  $C_Q$ . Un examen minutieux permet de remarquer qu'elles ne sont bien évidemment pas étanches, nous dirons  $C_A \cap C_Q \neq \emptyset$ . En effet, elles peuvent avoir des problèmes en commun (i.e.  $P_A \cap P_Q \neq \emptyset$ ) : par exemple, « déterminer les variations des courbes solutions d'une équation différentielle donnée. » Elles ont des systèmes de représentations en commun (i.e.  $L_A \cap L_Q \neq \emptyset$ ) : toujours en nous limitant aux registres, nous constatons qu'au moins les registres algébrique et graphique sont communs aux deux conceptions, même s'ils ne sont pas utilisés de la même manière. Nous y reviendrons dans les lignes suivantes. Pour ce qui est des structures de contrôle, il n'y a pas d'étanchéité (i.e.  $\Sigma_A \cap \Sigma_Q \neq \emptyset$ ) : nous pouvons citer à titre d'exemple le théorème de sens de variations. Néanmoins, comparées aux opérateurs qu'elles mettent en œuvre, les deux conceptions telles que nous les avons définies présentent une étanchéité (i.e.  $R_A \cap R_Q = \emptyset$ ). Cette étanchéité est bien évidemment relative et non pas absolue.

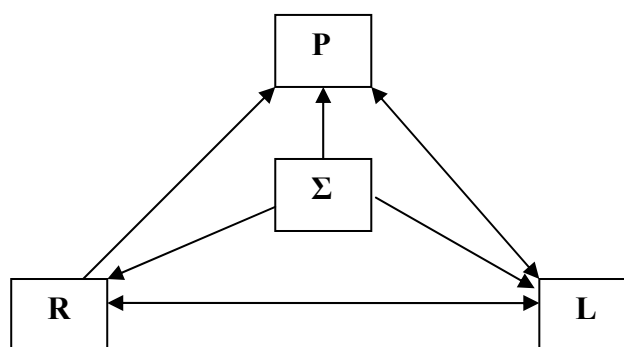
Nous venons de repérer deux distinctions principales relativement à ces deux conceptions :

- La distinction entre les ensembles d'opérateurs attachés à ces deux conceptions : celles-ci ne mobilisent donc pas les mêmes opérateurs. Néanmoins puisque les deux conceptions possèdent des problèmes communs, elles ont forcément des opérateurs distincts qui permettent de résoudre le même problème. En effet, c'est la manière d'agir qui n'est pas la même dans les deux conceptions et un élève ne mettra pas en œuvre le même opérateur selon qu'il a la conception  $C_A$  ou  $C_Q$ . Par exemple pour étudier les variations des courbes solutions d'une équation différentielle, celle-ci doit être résolue pour quelqu'un qui possède  $C_A$ , alors que l'étude peut être faite sans la résolution algébrique pour un autre élève qui possède  $C_Q$ . Il en résulte que lorsque l'équation différentielle ne peut être résolue ou lorsqu'elle n'est pas à la portée de l'apprenant, il n'y a aucun problème. Dans le cas contraire, compte tenu de la dominance de l'algébrique dans l'enseignement et selon le paragraphe 1.2.4 (p. 20), les opérateurs de  $C_A$  risquent d'empêcher l'apparition de ceux de  $C_Q$ .
- Une autre distinction est l'usage spécifique d'un registre suivant la conception. En effet, non seulement les deux conceptions ne mobilisent pas les mêmes registres - par exemple le registre intrinsèque est mobilisé exclusivement par  $C_Q$  -, mais dans le cas où un même registre est mobilisé, il se peut que celui-ci ne soit pas mobilisé de la même manière dans les deux conceptions. Par exemple, comme nous l'avons cité plus haut, le registre graphique est utilisé dans son mode monographique et/ou idéogrammatique dans  $C_A$ , alors qu'il est principalement utilisé dans son mode opératoire dans  $C_Q$ . Par ailleurs, nous avons déjà souligné que certaines représentations graphiques (tel le champ de tangentes d'une équation différentielle) du registre graphique étaient spécifiques à  $C_Q$ .

Rappelons que l'objectif principal de notre travail est d'instaurer une approche qualitative, autrement dit nous nous sommes fixé comme objectif de provoquer la conception  $C_Q$  chez les élèves. En nous basant sur la première spécificité citée ci-dessus, nous admettrons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse de travail n° 2** : pour favoriser la conception  $C_Q$ , il est suffisant de favoriser ses opérateurs.

A part l'analyse que nous avons menée jusqu'ici, cette hypothèse se justifie par le fait que, d'une manière générale (ou du moins pour le domaine qui nous intéresse ici), dans un quadruplet, R dépend de P et de L ; L dépend de R et de P et enfin  $\Sigma$  dépend de P, de R et de L (cf. **Figure 1**). Nous constatons que R joue un rôle central dans la formation d'une conception puisqu'il intervient à tout niveau dans le quadruplet. Néanmoins, les opérateurs ne sont donc pas construits dans l'absolu, mais ils dépendent fortement de P et de L. Pour provoquer donc  $C_Q$ , nous favoriserons ses opérateurs et ceci passe forcément par les problèmes et le système de représentation qui répondent à ce besoin. En résumé, pour faire émerger  $C_Q$ , nous nous contenterons de l'émergence des opérateurs de  $C_Q$ . Néanmoins, puisque dans une conception, R dépend à la fois de L et de P, nous pouvons encourager l'apparition des opérateurs souhaités par le choix judicieux des problèmes et des registres. Ceci est en parfaite correspondance avec la seconde distinction obtenue ci-dessus puisqu'une spécification de la conception  $C_Q$  était les registres. Puisque le registre graphique est utilisé d'une manière différente dans  $C_Q$  et dans  $C_A$ , nous nous appuierons sur la manière d'utiliser les registres en  $C_Q$  pour la favoriser. Par ailleurs, nous pouvons favoriser l'apparition des opérateurs souhaités grâce à l'intégration des registres et des éléments graphiques absents dans  $C_A$ . Une telle conclusion met en exergue le lien délicat entre registre et conception.



**Figure 1** : Dépendance entre les éléments du quadruplet dans une conception selon le modèle  $cK\phi$ .

De ce point de vue, afin de faire acquérir l'approche qualitative mais aussi pour en mesurer l'acquisition, nous ferons une étude en termes du modèle  $cK\phi$ , centrée plutôt sur les opérateurs. Nous

modéliserons ainsi l'apprentissage et les difficultés des élèves en termes d'opérateurs, corrects et erronés. En d'autres termes, nous viserons donc la construction de quelques opérateurs qualitatifs corrects par les élèves mais également la déstabilisation d'autres opérateurs qui entravent l'acquisition des premiers. Notre objectif peut donc se résumer à trois tâches : la stimulation des opérateurs de  $C_Q$ , la déstabilisation des opérateurs erronés de  $C_A'$  et  $C_Q'$  et enfin la déstabilisation temporaire des opérateurs de  $C_A$  qui risquent d'empêcher l'apparition des opérateurs souhaités. Ce dernier choix semble être important, vu la prédominance de l'algébrique dans l'enseignement, si l'on veut que le travail visé soit mené à bien.

Dans notre travail, nous testerons la présence et la résistance de ces opérateurs (erronés, corrects, intempestifs) chez les élèves. Pour ce faire, nous essayerons de répondre au questionnement suivant :

- Au cours et à la fin de l'expérimentation, quels sont les opérateurs effectivement construits chez les élèves, ceux déstabilisés et ceux qui subsistent ?
- Y a-t-il des opérateurs, en particulier qualitatifs, qui sont apparus bien qu'ils ne soient pas visés ?

### **En quoi une telle modélisation est pertinente pour notre travail ?**

Nous nous proposons ici de mettre en cause l'utilité d'une telle modélisation. Le modèle que nous avons adopté pour notre travail est bien adapté non seulement parce qu'il aide à « *différencier le savoir que l'enseignant veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève* » (Artigue, 1990b) mais également pour les raisons suivantes. Il nous permettra d'examiner de plus près l'interférence entre l'approche qualitative et l'approche algébrique. On peut espérer que « réduire » une approche à un ensemble d'opérateurs permet de voir plus clair, parce que nous possédons ainsi des critères pour juger à la fois l'évolution de l'apprentissage et l'interférence entre les deux conceptions.

D'autre part, ce modèle est bien-fondé parce qu'il donne accès aux difficultés et conceptions des élèves mais aussi aux obstacles qui s'opposent à l'intégration de l'approche qualitative. La modélisation de ces difficultés en termes d'opérateurs et de conception facilitera l'accès à ces difficultés. Agir en termes de conception est également pertinent parce que cela permet en outre d'examiner à la loupe les liens entre l'approche qualitative et la notion de registre sémiotique, jugée adéquate pour l'enseignement et l'apprentissage de l'approche qualitative.

### 3 INGENIERIE DIDACTIQUE COMME METHODOLOGIE

#### Pourquoi l'ingénierie didactique

Pour tester nos hypothèses et questions de recherche, nous adopterons la méthodologie « ingénierie didactique. » Rappelons que notre recherche a pour but de tester le coût et la validité empirique de l'approche qualitative dans l'institution TS : faisabilité, compatibilité avec l'enseignement en amont et en aval, identification des connaissances et des savoirs acquis et mise à l'épreuve de la qualité de ces apprentissages. Un second objectif de notre recherche est l'évaluation de l'apport d'un logiciel à un tel enseignement. Notre choix de l'ingénierie didactique, en tant que méthodologie, se justifie en fait par plusieurs raisons :

- d'une part, notre travail se voulant une manipulation des contraintes. Comme le constate Artigue (1989a), nous pensons que l'ingénierie didactique est un bon moyen pour jouer sur des contraintes :

*« On considère un point du système didactique dont le fonctionnement apparaît, pour des raisons qui peuvent être de nature diverse, peu satisfaisant. On analyse ce point de fonctionnement et les contraintes qui tendent à en faire un point d'équilibre du système puis, en jouant sur ces contraintes, on cherche à déterminer les conditions d'existence d'un point de fonctionnement plus satisfaisant. » (p. 183)*

- d'autre part, cette méthodologie est basée sur l'évaluation interne, c'est-à-dire sur des confrontations des résultats obtenus à l'issue de l'analyse *a priori* avec ceux obtenus à la suite de l'expérimentation. Ainsi, nous n'aurons pas besoin de chercher une classe-témoin. En effet, puisqu'il s'agit d'une rupture avec l'enseignement, le fait de trouver une classe-témoin n'a pas de sens pour notre travail. D'ailleurs, trouver une telle classe peut paraître difficile en Terminale, au vu des difficultés que nous allons citer dans le paragraphe suivant. De par son système d'évaluation, l'ingénierie didactique est donc un moyen privilégié pour notre recherche.

- enfin, à part les deux raisons citées, nous pouvons aussi citer la dimension d'apprentissage que nous voulons assurer. L'ingénierie didactique consiste en un moyen adapté pour la transmission des savoirs visés par notre travail. En effet, l'utilisation d'une méthode expérimentale, dite de « recherche en laboratoire » (Artigue, 1989b), ne peut prendre en charge cette dimension d'apprentissage. Citons à ce propos les lignes suivantes empruntées à R. Douady (Douady, 1993) : « le terme d'ingénierie didactique désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées

*et articulées dans le temps de façon cohérente par un maître-ingénieur pour réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves. » (p. 2)*

### 3.1 Ingénierie didactique en TS

Avant de présenter les principales caractéristiques de l'ingénierie qui sera proposée en Terminale, il convient de souligner que malgré les avantages offerts par le choix d'une telle institution, les problèmes sont loin d'être résolus. Nous sommes amenés à faire face à de nombreuses difficultés dont voici les principales, causées en particulier par la proximité du baccalauréat :

- on dépasse les programmes : l'approche que nous proposerons est en rupture avec l'enseignement actuel et l'enseignement que nous envisageons de dispenser n'apporte « rien » aux élèves en ce qui concerne le Baccalauréat qui constitue leur principale préoccupation. Ceci peut être un facteur décourageant pour notre ingénierie<sup>9</sup>.
- la limitation du temps : la difficulté que l'on vient de citer se greffe sur la limitation du temps de l'enseignement qu'on aura pour faire passer l'ingénierie.

Ces deux entraves, entre autres, rendront un peu difficile la recherche d'une classe d'expérimentation et elles feront en sorte que nous disposions d'une durée relativement courte. Il faudra s'organiser en fonction de ces contraintes, ce qui nous conduit à faire un tri parmi les concepts à enseigner.

Pour caractériser l'ingénierie que nous allons proposer, il convient d'éclaircir trois questions qui seront déterminantes pour sa conception : à quel moment de l'année scolaire le scénario doit-il être abordé ? Quel doit être son contenu ? Et enfin comment l'évaluer ? Cette dernière question a été déjà évoquée au paragraphe 2.1.1 (p. 48) et nous y reviendrons à nouveau lors de l'analyse *a priori* de notre ingénierie. Contentons-nous à présent de traiter les deux premières questions :

*A quel moment de l'année scolaire doit-elle être abordée ? Qu'est-ce que les élèves doivent savoir ou ne pas savoir ?*

Comme nous avons dit, notre ingénierie se distingue des travaux antérieurs par le fait qu'elle consiste à découvrir les équations différentielles par une approche qualitative. Il est donc indispensable qu'elle ait lieu en classe de Terminale où débute l'enseignement des équations différentielles. Ainsi projetons-

---

<sup>9</sup> Comme nous en parlerons lors de notre analyse *a posteriori*, nous avons recueilli, lors de la transcription audio, des propos des élèves accusant l'enseignant et moi-même de leur faire perdre du temps alors qu'ils doivent préparer le Bac.

nous de faire face à ce que la résolution algébrique empêche le déroulement de l'ingénierie proposée. Ceci laisse entendre clairement que notre recherche doit avoir lieu avant l'enseignement classique sur l'objet équation différentielle.

*Quel doit être le contenu de cette ingénierie ? Quelles situations proposer ?*

Concernant son contenu, il doit tenir compte de plusieurs faits :

1. Tout d'abord, le contenu de l'ingénierie doit être conforme au niveau des élèves mais il doit proposer des problèmes aptes à susciter l'apparitions des opérateurs visés : l'idée principale est de s'appuyer sur les concepts de bases des élèves afin d'en construire des nouveaux. Dans notre ingénierie, il s'agira des situations adidactiques et nous veillerons à ce que les activités proposées assurent les conditions suivantes considérées comme des conditions nécessaires « *pour qu'un problème soit source et occasion d'apprentissage* » (Douady, 1992, p. 142) : « *à l'aide de ces connaissances antérieures, l'élève peut comprendre l'énoncé* », mais « *ne peut pas résoudre complètement le problème* », et enfin « *les objets d'enseignement [...] sont des outils adaptés à la résolution du problème.* » Cela veut dire que, non seulement l'élève possède des connaissances pour aborder le problème, mais les situations ne seront donc pas destinées à une simple application de notions ou méthodes connues. Les élèves disposent des notions nécessaires mais dans un autre contexte et doivent les adapter au nouveau contexte
2. L'ingénierie qui sera proposée doit prendre en considération les contraintes didactiques et cognitives que nous avons citées au paragraphe 1.4. Nous avons déjà présenté, au paragraphe 1.5 (p. 42), la façon dont nous gérons ces contraintes. Pour nous plier à la demande algorithmique de l'enseignement, nous proposerons un enseignement algorithmique autant que possible. Pour ce faire, on peut se permettre de parler de deux études qualitatives pour une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$  :

**On peut parler d'une étude GLOBALE où les principales démarches sont :**

- (i) étudier les variations des courbes solutions de l'équation différentielle en question et partager le plan en fonction du signe de la dérivée,
- (ii) calculer et représenter graphiquement quelques isoclines afin d'accéder au champ de tangentes de l'équation différentielle,
- (iii) dessiner le champ de tangentes,
- (iv) basé sur ce dernier, tracer des courbes solutions vérifiant des conditions initiales données,
- (v) applications du théorème d'existence et d'unicité.

**On peut aussi parler d'une étude plus FINE, en complément de la première, où les principales démarches sont les suivantes :**

- (vi) étude de l'équation différentielle afin de repérer les éventuelles symétries, périodicité, etc.
- (vii) justifier éventuellement quelques parties du tracé (intersection des solutions, celles-ci coupent ou non les axes etc.).
- (viii) étudier les branches infinies d'une courbe solution,
- (ix) recherche des extremums d'une courbe solution,
- (x) zone piège, entonnoir, etc.
- (xi) ....

Nous pensons que l'on peut instaurer une étude globale en TS, mais aussi entamer une étude plus fine à un niveau élémentaire. Nous répondons ainsi à la question « *que veut dire introduire une approche qualitative* » que nous nous sommes posée après avoir introduit notre première hypothèse. La réponse est donc l'instauration des démarches de l'étude GLOBALE citée ci-dessus. C'est ce que nous allons faire pour l'ingénierie qui sera proposée.

3. Enfin une autre condition dont le contenu de notre ingénierie doit tenir compte, est le jeu de registres. Vu notre hypothèse, l'ingénierie doit prendre en compte les différents registres mobilisables à ce niveau d'enseignement.

Mais quels sont ces registres à notre disposition ? Dans ce qui suit, nous allons procéder au repérage des différents registres susceptibles d'être mobilisés à ce niveau et ensuite déterminer l'usage que l'on en fera pour notre ingénierie.

## **3.2 Registres mobilisables en secondaire**

On a coutume de se limiter à la représentation algébrique pour une équation différentielle, alors que l'on rencontre ses solutions sous différentes formes : expressions algébriques, représentations graphiques, tableaux, séries entières, intégrales, etc. Dans ce qui suit, tout en nous limitant aux registres mobilisables au niveau Terminale, nous tenterons de relever les différents registres dans lesquels les fonctions solutions d'une équation différentielle peuvent être représentées. En plus de souligner, pour chaque registre, les éléments constitutifs, cette étude sera menée pour satisfaire deux objectifs principaux : déterminer les possibilités offertes par ces registres afin de construire notre ingénierie d'une part et d'autre part, exploiter les différents aspects qui ne trouvent pas place dans l'écologie actuelle de l'enseignement des équations différentielles, telle l'étude de la représentation graphique  $y'$  dans le plan.

Lors de notre étude, nous avons remarqué qu'un travail en termes de représentations pouvait faciliter notre tâche de construction d'une ingénierie. En effet, comme nous l'avons fait remarqué, nous constatons que les trois approches peuvent mobiliser le même registre, mais la façon dont il est mobilisé et les représentations mises en œuvre diffèrent d'une approche à l'autre. Qu'est-ce qu'une **représentation** ? Pour Duval, une représentation sémiotique est constituée « *par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents.* » Duval (1993, p. 39) Dans le présent chapitre, à chaque fois qu'un registre est défini, nous tenterons de dégager ensuite les différentes représentations qui interviennent dans ce registre et pouvant nous intéresser pour la construction de notre ingénierie.

Nous pouvons distinguer, outre la langue naturelle, quatre registres de représentation sémiotique mobilisables en Terminale pour le concept d'équation différentielle : algébrique, graphique, tableau de variations, intrinsèque. Nous les développons dans les paragraphes suivants.

### 3.2.1 Registre algébrique

Compte tenu de l'enseignement actuel, ce registre s'avère suffisamment familier aux élèves. Il donne accès à la fois à l'équation différentielle, aux fonctions solutions et aux isoclines de l'équation différentielle en question. Par ailleurs il a le grand avantage d'être convertible à tout autre registre présenté ci-dessous et, suivant la tâche proposée lors d'un travail sur les équations différentielles, il peut être le registre de départ mais également celui d'arrivée. Lors d'une résolution algébrique, le travail se cantonne à ce registre sauf dans le cas où l'on représente graphiquement les fonctions solutions. En tant que registre de départ, il est probablement le plus commode pour un travail sur les équations différentielles, quelque soit le mode de résolution adopté.

Notre but n'étant pas la résolution algébrique, cherchons des tâches qui puissent nous intéresser pour la construction de notre ingénierie. Il s'avère que des tâches reliant une équation différentielle et les expressions algébriques de ses isoclines paraissent jouables à ce niveau d'enseignement : calculer les isoclines d'une équation différentielle donnée par exemple. Néanmoins, des tâches qui permettent de relier ce registre à l'un des registres présentés ci-dessous peuvent être également proposées : déterminer si une courbe donnée est solution ou non d'une équation différentielle donnée.

Les différentes représentations dans ce registre, que nous retenons pour notre travail, sont donc la représentation algébrique d'une équation différentielle et l'expression algébrique des isoclines. Nous tenterons de voir l'interaction avec les représentations qui seront identifiés dans les registres suivants.



### 3.2.2 Registre intrinsèque

Ce registre permet de représenter une équation différentielle, en l'occurrence du premier ordre, sous la forme  $y'=f(x, y)$  ou éventuellement  $y'=f(y)$  ou  $y'=f(x)$ . En d'autres termes, l'expression algébrique de  $f(x, y)$  n'est pas connue et une telle écriture représente toute équation différentielle du premier ordre pouvant être exprimée par la relation  $y'=f(x, y)$  ( $y'=y^2-x$ ,  $y'=\sin x-y$ ,  $y'=3y$ , etc.). La graphie de ce registre est très économique et celui-ci est particulièrement adapté pour formuler une définition, énoncer un théorème, présenter un résultat etc. Néanmoins, cette écriture reste très implicite et ne donne accès qu'à très peu d'information concernant l'équation différentielle en question.

Il est évident que le travail avec ce dernier registre intrinsèque n'est accessible ni à la technique algébrique ni à la résolution numérique. Cependant il ouvre un domaine riche d'application grâce à la résolution qualitative. On peut par exemple, en imposant certaines restrictions ou au contraire en donnant certaines précisions sur  $f(x, y)$  dans l'équation différentielle  $y'=f(x, y)$ , demander d'autres informations sans forcément connaître l'expression explicite de  $f$ . Par exemple, en se basant sur les propriétés données de l'équation différentielle  $y'=f(x, y)$  ; traiter qualitativement  $y'=2.f(x, y)$ . Ainsi ce registre permet-il de applications intéressantes du théorème d'existence et d'unicité autour de l'approche qualitative. Supposons par exemple que l'équation différentielle  $y'=f(x, y)$  vérifie le théorème d'existence et d'unicité et, soient deux solutions d'une telle équation :  $y_1(x)=-I$  et  $y_2(x)=x^2+I$ . On peut par exemple étudier les comportements et les branches infinies de la solution passant par l'origine. Il est clair que la solution passant par l'origine, appelons-la  $y_3(x)$ , est minorée par  $-I$  et majorée par  $x^2+I$ . Il est alors possible d'écrire la relation suivante :  $-I < y_3(x) < x^2+I$ . (Blanchard, 1995, p. 68).

Il s'avère que malgré l'utilité et l'efficacité d'un tel registre pour l'apprentissage de l'approche qualitative, il est d'une difficulté indéniable pour les élèves de Terminale. Nous sommes donc dans l'obligation de l'écarter de notre travail faute de temps et compte tenu du niveau des élèves.

### 3.2.3 Registre du tableau de variations

On peut trouver dès la classe de Seconde des tâches relatives à la constitution d'un tableau de variations d'une fonction à partir de l'expression algébrique de celle-ci. Ces tâches aboutissent en général à la représentation graphique de la fonction correspondante. Or, s'interrogeant sur la place et l'avenir du tableau de variation dans l'enseignement secondaire du concept de fonction, Jacob-Zaibak (2002) pointe dans son mémoire de DEA que, bien que présent depuis des décennies dans la pratique de l'enseignement, ce registre n'est institutionnellement reconnu qu'avec les programmes applicables à la rentrée 2000 (idem. p. 67).

À notre connaissance un tel registre est absent de l'enseignement des équations différentielles et nous nous sommes interrogé sur son introduction. Le tableau de variations peut posséder un rôle transitoire qui consiste à relier une équation différentielle et la représentation graphique des courbes solutions. On peut y voir les comportements des solutions, les solutions évidentes, l'isocline horizontale, les valeurs où l'équation différentielle est définie ou ne l'est pas, la stabilité des solutions etc. Ceci peut être enrichi par exemple par les valeurs où les fonctions solutions ne sont pas définies. En réalité en fonction du contrat didactique que l'on va établir, on peut décider de mettre ou ne pas mettre certains de ces éléments dans ce registre en question.

Nous nous demandons si la tâche suivante peut trouver place dans notre ingénierie : étude des variations des courbes solutions d'une équation différentielle à l'aide d'un tableau de variations. Il faut avouer que l'existence d'un tel registre dès la classe de 2<sup>nd</sup>e et sa reconnaissance institutionnelle ne résout pas tous les problèmes. En effet certains auteurs, Bloch (2000, p.188) par exemple, ont déjà souligné l'absence de l'institutionnalisation<sup>10</sup> dans l'enseignement et la difficulté des élèves à utiliser un tableau de variations même pour les fonctions. On peut donc penser que ceci serait plus difficile pour le cas des équations différentielles car l'utilisation de ce registre exige un codage et un décodage particulier. Pour le concept de fonction, un tableau de variation est généralement établi en trois lignes : la première ligne est affectée à la variable indépendante  $x$ , et les deux dernières lignes sont affectées à la fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$ .

Comment se présente (ou doit se présenter) ce registre pour le cas des équations différentielles ? Pour une équation de la forme  $y'=f(x, y)$  dépendant explicitement des deux variables  $x$  et  $y$ , la tâche relève d'une complexité technique. En effet, il faut trouver toutes les valeurs qui risquent d'affecter le signe de  $y'$  (les isoclines horizontales par exemple) et les reporter dans la première ligne du tableau. Viennent ensuite les signes de la dérivée en fonction de ces isoclines et ce, soit en une seule ligne si lecteur est suffisamment familier, soit en plusieurs lignes. S'inscrivent ensuite en dernière ligne  $y$ , qui représente une fonction solution, et ses variations exprimées par des flèches. Il ressort de cette analyse qu'un tableau de variations peut être relativement compliqué pour une équation différentielle quelconque même du premier ordre. Beaucoup d'objets (les solutions évidentes, les isoclines, etc.) peuvent y intervenir et, gérer les signes de la dérivée et par conséquent les variations des courbes solutions peut être difficile pour un utilisateur selon son niveau cognitif. D'autant plus que certains codages « appris » lors de la constitution d'un tableau de variations pour une fonction, doivent être changés. Par exemple la règle qui consiste à « *mettre  $x$  dans la case gauche de la première ligne, et  $f(x)$  en dessous* », doit changer en fonction de l'équation différentielle étudiée. Puisque pour une équation différentielle la première ligne du tableau peut être affectée aussi bien à  $x$  et/ou à  $y$ . Par ailleurs, il se peut que, et c'est le cas pour les équations autonomes, le tableau de variations soit

---

<sup>10</sup> Bloch constate l'absence des explicitations dans les manuels et l'enseignant se contente de dessiner un tableau de variations sans transmettre les connaissances relatives à son établissement, supposant que ceci va de soi.

organisé en fonction de  $y$  et  $y'$  et que  $x$  n'apparaisse pas du tout. Il en résulte que l'interprétation de ce registre risque de donner lieu à des confusions. En effet, si la première ligne du tableau est constituée de  $y$ , lorsque l'on étudie les variations d'une courbe solution, l'intervalle dans lequel cette courbe est définie et pour lequel les variations sont étudiées peut resté implicite.

Néanmoins pour certains cas particuliers, comme l'est l'équation différentielle  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ) qui fait l'objet de la classe de Terminale, la tâche n'est-elle pas jouable ? Pour cette équation différentielle, l'isocline horizontale est la droite  $y=0$ . Faisons un tableau de variations, en nous contentant du cas où  $a>0$  :

$y$	$-\infty$	$y=0$	$+\infty$
$y'$	-		+
$y$	↘		↗

**Tableau 1** : tableau de variations des courbes solution de  $y'=ay$   $a \in \mathcal{R}^+$ .

Ce tableau peut alors être interprété de la manière suivante : lorsqu'une fonction solution est à valeur positive (resp. négative), elle est croissante (resp. décroissante). Mais quels sont les intervalles ? Etant donné que les fonctions solutions de  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}^+$ ) sont définies sur  $\mathcal{R}$  tout entier, on peut en conclure que lorsqu'une fonction solution est à valeur positive (resp. négative), elle est croissante (resp. décroissante) sur  $\mathcal{R}$ . Enfin lorsqu'une fonction solution s'annule, elle s'annule sur  $\mathcal{R}$  tout entier.

D'après cette analyse il s'avère que même pour le cas des équations différentielles autonomes du premier ordre qui sont les plus simples à être traduites dans un tableau de variations, la situation peut être compliquée. Il en résulte que de telles interprétations peuvent être difficiles aux élèves qui sont privés d'une institutionnalisation d'un tableau de variations d'une fonction. Vu le statut du tableau de variations pour l'étude des fonctions et compte tenu des difficultés rencontrées lors de l'utilisation de ce registre, il faut par conséquent s'attendre à plus de difficultés pour sa transposition lors de l'enseignement des équations différentielles.

Malgré ces difficultés bien réelles, on peut s'interroger sur l'utilité d'un tel registre pour l'enseignement des équations différentielles. Nous affirmons que, en plus des fonctionnalités que fournit un tableau de variations pour l'étude d'une fonction (pour quelques fonctionnalités cf. Jacob-Zaibak (2003) par exemple), un tel registre permet à la fois de varier les tâches possibles autour de l'approche qualitative des équations différentielles et d'atténuer le poids de l'algébrique en tant que registre de départ pour une équation différentielle. En d'autres termes, on peut penser à une situation où le registre de départ est le tableau de variations des courbes d'une équation différentielle et on peut

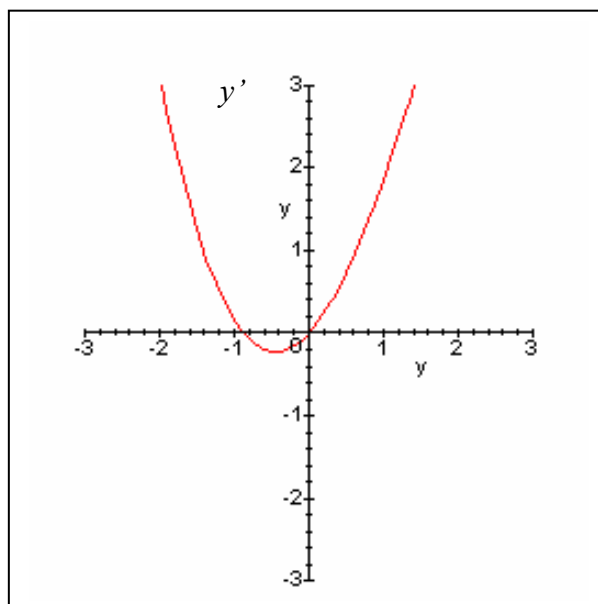
demander de tracer le champ de tangentes, quelques courbes solutions de l'équation différentielle en question, etc. C'est la raison pour laquelle notre travail peut faire appel, du moins explicitement, à un tableau de variations.

### 3.2.4 Registre graphique

On travaille dans ce registre lorsque l'on a affaire à la représentation graphique des courbes solutions ou celle des isoclines etc. Il peut donner lieu à la lecture graphique des propriétés des solutions, éventuellement à une lecture approchée des quelques valeurs d'une fonction solution. Il s'avère en particulier important lors de la résolution qualitative où il est le seul moyen de représenter les courbes solutions de l'équation différentielle. Il peut se révéler nécessaire lors qu'il s'agit de travailler une équation différentielle fournie dans le registre intrinsèque et où les résolutions numérique et algébrique se révèlent impossibles.

Nous avons dit que différentes représentations peuvent être présentes dans ce registre. Nous parlerons en premier lieu de la représentation graphique des fonctions solutions. En réalité, celle-ci peut résulter soit de la solution générale obtenue grâce à une résolution algébrique, soit d'un tableau de valeurs obtenu suite à une résolution numérique, soit d'une étude qualitative. Ce dernier procédé (i.e. la représentation graphique des courbes solutions via une étude qualitative) est généralement précédé par la représentation du champ de tangentes et/ou des isoclines etc. de l'équation différentielle en question.

Néanmoins, utilisé généralement pour représenter uniquement les courbes intégrales d'une équation différentielle, ce registre sert également à représenter  $y'$  et donne ainsi accès à une interprétation qualitative. Bien évidemment, pas plus qu'une représentation graphique d'une fonction, la nature des équations différentielles pouvant être représentées dans ce registre est limitée. En effet lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x, y)$ , la dérivée peut être représentée dans une figure à trois dimensions, qui est difficilement exploitable. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x)$  ou  $y'=f(y)$ , la représentation de la dérivée dans le plan représente des avantages. Par exemple, la **Figure 2** est la représentation graphique de  $y'$  dans l'équation différentielle  $y'=siny+y^2$ . Il n'est bien évidemment pas possible de faire une résolution numérique et *a fortiori* algébrique en se basant sur cette représentation sans avoir l'expression algébrique à sa disposition, mais il est néanmoins possible de faire une analyse qualitative de cette équation différentielle. Il ne faut cependant pas nier les difficultés que peut causer un tel travail pour un élève de Terminale S. L'interprétation correcte de ce graphe passe par la lecture minutieuse des variables et ceci ne doit pas être évident à ce niveau d'enseignement.



**Figure 2** : La représentation graphique de  $y'$  en fonction de  $y$  pour  $y' = \sin y + y^2$ .

Nous pouvons nous poser la même question que celle posée pour le cas du tableau de variations : malgré ces difficultés bien réelles, pourquoi faire appel à la représentation graphique de  $y'$  ? En fait la réponse à cette question est directement liée, nous semble-t-il, à l'utilité du changement de registres. C'est la raison pour laquelle nous nous exprimons par la voix de Duval qui cite trois motifs fondamentaux pour motiver la nécessité de la coordination des registres : l'économie de traitement, la complémentarité des registres et la conceptualisation. En effet, ce sont *les registres* qui permettent de concrétiser les objets mathématiques, de les traiter et de les mettre en relations avec d'autres objets. Par ailleurs, comme nous l'avons souligné ci-dessous, viennent s'ajouter aux motifs cités par Duval, deux autres motifs spécifiques aux équations différentielles : varier les tâches possibles autour de l'objet équation différentielle et pouvoir engager leurs résolutions ou au moins l'interprétation de leurs solutions sans mêler l'algèbre.

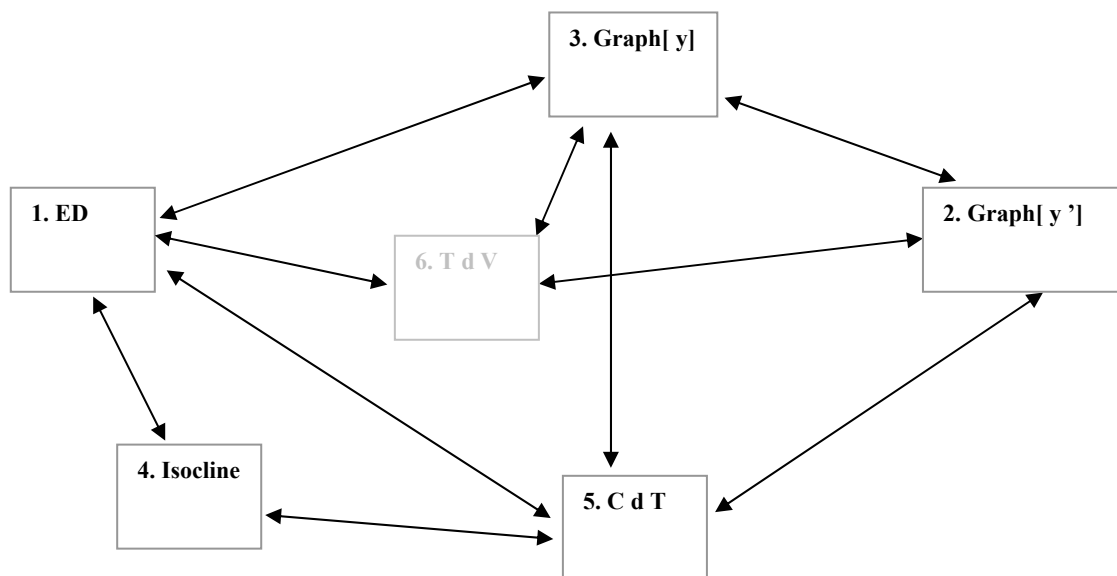
Dans ce registre graphique, les différentes représentations qui peuvent être retenues pour notre travail sont donc les suivantes : la représentation de  $y'$ , la représentation graphique des courbes isoclines, le champ de tangentes de l'équation différentielle et enfin la représentation graphique des courbes solutions.

### 3.2.5 Implication pour notre recherche

Rappelons que notre objectif est l'introduction de l'approche qualitative, ou de la conception qualitative comme nous l'avons définie, et que nous avons fait l'hypothèse que le jeu de registres peut

être une aide pour cette tâche. Nous avons entrepris, dans le paragraphe précédent, un travail qui vise à explorer les différents registres utilisables en Terminale S. Afin de nous faciliter la tâche, nous avons fait le choix d'agir en termes de représentations, au sens que nous lui avons donné ci-dessus. Par conséquent, eu égard aux différents registres présentés ci-dessus et dont nous avons dû en écarter certains, nous avons fait un choix de représentations tous registres confondus. Ceux-ci sont les suivants : **(1) ED** : l'expression algébrique de l'équation différentielle ; **(2) Graph[y']** : la représentation graphique de  $y'$  dans l'équation différentielle  $y'=f(x,y)$  ; **(3) Graph[y]** : la représentation graphique d'une ou de plusieurs courbes solutions de l'équation différentielle en question ; **(4) Isocline** : la représentation algébrique ou graphique d'une (ou de quelques isoclines) de l'équation différentielle ; **(5) CdT** : le champ de tangentes (ou quelques isoclines) de l'équation différentielle ; **(6) TdV** : le tableau des variations des courbes solutions dont nous ferons un usage « mesuré. » C'est la raison pour laquelle il est volontairement flou. Remarquons que les deux premières représentations sont du côté de l'équation différentielle alors que les quatre autres se situent du côté des solutions.

Dans la **Figure 3**, nous nous intéresserons aux interactions bilatérales de ces représentations. En effet nous pensons que, sémiotiquement parlant, la *résolution qualitative* est le passage entre ces différentes représentations. Bien que la liste des représentations que nous avons soulignées ne soit pas exhaustive, elle met en évidence une fois de plus la richesse de la résolution qualitative. Celle-ci consiste, sémiotiquement, dans la capacité de se déplacer entre ces représentations.



**Figure 3** : Différentes représentations intervenant lors d'une étude qualitative d'une équation différentielle.

Il convient de souligner que, dans cette figure, l'interaction réciproque entre deux représentations n'est pas toujours intéressante. Ceci peut être dû au fait que le passage n'apporte pas grande chose pour

l'enseignement des équations différentielles. Par exemple le passage de **Graph[y]** au **TdV** peut être considéré comme un exercice de familiarisation avec le tableau de variations. Il est évident que de telles tâches ne nous concernent pas directement ici, mais elles peuvent être intéressantes par exemple, pour illustrer les fonctions en Seconde ou Première. Par ailleurs il existe des interactions qui ne sont possibles que grâce à des QCM (par exemple le passage de **CdT** à **ED** est possible à condition de donner une liste des équations différentielles candidates à posséder le **CdT** en question). Nous tenterons néanmoins d'exploiter de telles tâches pour notre ingénierie.

Supposant que la finalité d'une étude qualitative des équations différentielles est l'esquisse des courbes solutions, nous pouvons affirmer que cette étude peut se réaliser de plusieurs façons : **(1) ↔ (4) ↔ (3)** ou **(1) ↔ (5) ↔ (3)** ou **(2) ↔ (6) ↔ (3)** etc. Il est patent que ces interactions donnent lieu à des activités riches en terme de registres : nous avons ainsi énuméré les tâches suivantes (A, T et G signifiant respectivement le registre algébrique, celui du tableau de variations et le registre graphique) : ATG ; AGG ; AGG ; AAG ; GGG ; GTG ; GG (pour lire ces sigles il faut procéder de la façon suivante : par exemple ATG signifie que l'énoncé est donné dans le registre algébrique, on passe ensuite au registre des tableaux des variations pour fournir la solution du problème dans le registre graphique). Il en résulte que différentes tâches sont possibles autour de l'approche qualitative : esquisser les courbes solutions, étudier les variations, tracer le champ de tangentes ou les isoclines, etc.

Nous nous proposons d'exploiter la **Figure 3** et ces différentes représentations pour notre ingénierie. La figure présentée nous servira de guide pour proposer des problèmes destinés à faire émerger les opérateurs qualitatifs souhaités pour introduire la conception qualitative  $C_Q$ . Nous supposons ainsi que cette analyse nous permettra d'observer de plus près l'interaction entre registre de représentation sémiotique et conception, ou plus spécifiquement opérateur.







# CHAPITRE B : ANALYSE DES PROGRAMMES ET DES MANUELS

*Cette partie a comme but de confirmer la prégnance algébrique dans l'enseignement secondaire des équations différentielles, d'explorer ce qui peut être utilisé pour l'ingénierie qui sera proposée. Pour ce faire, nous analyserons conjointement les programmes et quelques manuels.*



# CHAPITRE B1

*Dans ce chapitre, après un bref aperçu sur les notions clés de l'approche qualitative dans les programmes, nous consacrerons une étude sur la place occupée par les équations différentielles dans le programme de TS. Afin de mieux cerner l'évolution de l'enseignement aussi bien pour les équations différentielles que pour d'autres notions, nous prendrons en compte conjointement les programmes actuels et les précédents.*

## 4 ANALYSE DES PROGRAMMES

Cette analyse sera présentée en deux temps répondant chacun à un objectif : nous parcourrons *en premier lieu* les programmes de trois classes du lycée afin de voir comment les principaux objets de l'analyse auxquels nous aurons recours pendant notre ingénierie sont présentés par les programmes. Nous ferons une lecture en « diagonale » des programmes pour repérer le moindre indice pouvant être utile ou éclairer notre travail. Nous nous occuperons ainsi des concepts de fonction, de dérivée, de tangente mais également des différentes représentations (algébrique, numérique, graphique) soulignées par les programmes. Pour cette étude, nous prendrons comme référence les précédents programmes (en vigueur depuis 1998<sup>11</sup>) étant donné que les élèves avec lesquels nous avons travaillé sont issus dans ce programme. Nous veillons toutefois à indiquer à chaque fois qu'il y ait une évolution qui nous intéresse dans les nouveaux programmes (en vigueur depuis 2000<sup>12</sup> pour la classe de Seconde). Pour distinguer les programmes en vigueur alors de ceux qui sont actuellement en vigueur, à chaque fois que nous parlons des nouveaux programmes, nous expliciterons ceci.

*En deuxième lieu* nous nous consacrerons aux programmes de la classe de TS et nous explorerons tout d'abord le programme de 1998 qui sert de base à notre ingénierie pour ensuite analyser le projet du programme qui a encouragé celle-ci pour finir ensuite avec le programme en vigueur afin de voir l'évolution de ce qui est gardé et de ce qui est rejeté par rapport à ce projet.

---

<sup>11</sup> B. O. n°4 HS, 12 juin 1997.

<sup>12</sup> B. O. n°7 HS, 31 août 2000.

## 4.1 Aperçu des notions sous-jacentes à l'approche qualitative

Nous commençons notre parcours par le programme de **la classe de Seconde**. L'étude des fonctions fait l'objet de ce niveau dont le programme préconise un travail combiné par une étude qualitative (croissance, allure des représentations graphiques,...) et une étude quantitative (majorations, recherche de maximum,...). Toutefois un privilège accordé aux **fonctions** définies algébriquement se montre d'emblée. Ainsi le programme demande-t-il que la plupart des fonctions étudiées en seconde soient des fonctions définies par une expression algébrique simple, mais n'exclut néanmoins pas l'étude de fonctions définies « différemment » « pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction. » Bien que le concept « différemment » soit un peu vague, nous y trouvons des explications par la suite où il est demandé d'établir le tableau de variation et la représentation graphique des fonctions linéaires et affines et celles de référence ( $x^2$ ,  $1/x$ ,  $|x|$ ,  $x^3$  etc.). Sous la rubrique « **Travaux pratiques** », le programme demande l'étude des exemples relativement aux comportements de fonctions tels que : signe, variations, recherche de maximums et de minimums, représentations graphiques dans un repère (orthonormal ou orthogonal) ; et des exemples de lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique.

Pour ce qui est du *nouveau programme* du même niveau, il est demandé, pour l'étude des fonctions de référence, de les « expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative). » Il s'agit par ailleurs d'apprendre aux élèves à utiliser d'une façon efficace la calculatrice (mais aussi les tableurs, les logiciels de géométries) pour le calcul et pour les graphiques. Il est précisé que la plupart de ces objets concerne les trois années de lycée. Le programme souligne que les calculs algébrique et numérique, qui doivent être traités en relation étroite avec la notion de fonction, ne doivent pas « constituer un chapitre de révision systématique » mais être dispersés dans plusieurs chapitres. Sous la rubrique « **fonctions** » deux grandes capacités sont attendues de la part des élèves : identifier la variable et l'ensemble de définition d'une fonction définie dans différents registres sémiotiques (graphique, tableau et algébrique) et définir l'image d'un nombre dans chacun des cas. Ainsi l'influence de l'algébrique se voit-elle atténuée. Sous la rubrique « **étude qualitative de fonctions** », le programme exige les capacités suivantes des élèves : décrire les comportements (croissant, décroissant, ...) d'une fonction définie par une courbe avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variation et vice versa et passer du tableau de variation à une représentation graphique. Nous remarquons ainsi un véritable jeu de registres pour le concept de fonction. Dans le document d'accompagnement de ce programme, ce jeu est même explicitement demandé : « au sujet des fonctions, l'accent est mis sur les différents aspects sous lesquels apparaît la notion de fonction : graphiques, numériques, qualitatifs. Là encore, il est proposé d'insister sur les rapports respectifs des différents cadres d'étude. » Concernant l'étude des fonctions données à l'aide d'une courbe, les élèves sont tenus de lire l'information présentée par la courbe (lecture approchée d'images et d'antécédents, variations etc.). Certaines propriétés graphiques sont également à examiner : périodicité, symétrie etc. Par ailleurs, les élèves sont initiés à établir le sens de variations et à représenter graphiquement les

fonctions dites de référence, dont la position relative des courbes représentatives sera observée et découverte. Nous constatons ici un fonctionnement opératoire du registre graphique.

Nous constatons en ce qui concerne la classe de Seconde que différentes représentations du concept de fonction sont aux programmes et que cette notion est traitée sous différents aspects (graphique, algébrique, numérique, tableau, qualitatif). Nous constatons également que le nouveau programme non seulement souligne davantage ces aspects, mais il préconise par ailleurs d'« initier » les élèves à utiliser la calculatrice, le tableur et même un logiciel de géométrie dynamique.

**En classe de Première**, d'après le programme précédent, l'un des deux principaux axes autour duquel l'étude des fonctions est organisée est d'« *exploiter la **dérivation** pour l'étude locale et globale des fonctions.* » Tout en combinant les études qualitatives avec celles quantitatives, le programme exige d'exploiter systématiquement les interprétations graphiques et les problèmes numériques. Sous la rubrique « **travaux pratiques** », on préconise l'étude des exemples de lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique, des exemples simples d'obtention de la représentation graphique de fonctions telles que  $f+\lambda$ ,  $\lambda f$ ,  $f(x+\lambda)$ ,  $|f|$  etc. à partir de celle d'une fonction  $f$ . C'est ainsi que l'on voit le programme prétendre que « *l'exploitation d'une donnée graphique a un double intérêt : contrôler des résultats ; suggérer des propriétés, que l'on peut alors justifier si l'on dispose d'une étude de la fonction.* »

Dans le nouveau programme sous la rubrique « *mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations* », est exigée la capacité de résoudre des équations/inéquations se ramenant au premier degré et de résoudre graphiquement des équations/inéquations du type :  $f(x)=k$  ;  $f(x)<k$  ;  $f(x)=g(x)$  etc. (grâce à la propriété : « *si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$ , et si  $f'$  est à valeurs strictement positives sur  $]a, b[$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$  et, pour tout élément  $\lambda$  de  $]f(a), f(b)[$ , l'équation  $f(x)=\lambda$  admet une solution et une seule dans  $[a, b]$ .* ») Il s'agit même de combiner les résolutions algébrique et graphique pour un même problème, tout en explicitant les avantages et les limites de ces deux modes de résolution. Les problèmes conduisant à des équations qu'on ne sait pas résoudre peuvent éventuellement faire l'objet d'étude, pour lesquelles une résolution approchée est préconisée. Par ailleurs, les élèves sont censés apprendre à utiliser un tableau de signe pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.

Concernant la notion de **dérivée**, elle est introduite dans l'enseignement secondaire en Première S en tant qu'outil efficace pour résoudre certaines questions sur les fonctions (étude, encadrement, résolution d'équations,...). L'un des deux principaux objectifs que cette notion doit satisfaire est d'« *exploiter les énoncés du programme concernant les **fonctions dérivées** pour l'étude des fonctions.* » La dérivation est organisée autour de quatre paragraphes : (i) **Dérivation en un point** (où il s'agit de la définition du nombre dérivé qui acquiert un sens géométrique avec la notion de tangente

et un sens mécanique avec la notion de vitesse). Notons que le programme fait référence à la notion de tangente et préconise la donnée de l'équation cartésienne. Néanmoins pour la tangente au point d'abscisse  $a$ , tout en attirant l'attention sur le fait que qu'il suffit de connaître le coefficient directeur de la tangente ( $f'(a)$ ) pour la construire. Il est mentionné clairement d'observer que « *pour construire la tangente [...] le recours à l'équation cartésienne est inutile* ». ; (ii) **Dérivation sur un intervalle. Fonction dérivée** (où il s'agit de l'étude de certaines règles de dérivation) ; (iii) **Fonctions circulaires** (où il s'agit de l'étude des fonctions  $\sin x$  et  $\cos x$  avec leurs dérivées et comportements) ; (iv) **Application à l'étude du comportement local et global des fonctions** : dans ce sous-chapitre, le programme envisage l'étude des résultats suivants (qui sont admis) : le théorème de sens variations liant le signe de la dérivée aux comportements de la fonction dans le deux sens (signe de la dérivée  $\rightarrow$  comportements de la fonction et comportements de la fonction  $\rightarrow$  signe de la dérivée) (avec la propriété *si  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et si la dérivée  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$* )<sup>13</sup>.

Concernant le nouveau programme, en tant qu'application de « tangente à la courbe représentative d'une fonction  $f$  dérivable », il fait allusion à la méthode d'Euler, sans que celle-ci soit explicitement mentionnée, et il est ainsi demandé de construire point par point des approximations des courbes intégrales définies par  $y'=f(t)$  et  $y(t_0)=y_0$  via l'approximation  $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$ . Il est patent que cette étude a comme but de préparer la méthode d'Euler, certes, mais il s'agit de représenter des approximations de solutions d'une équation différentielle sans les avoir déterminées analytiquement. Nous voyons donc ici une rupture avec l'enseignement classique.

En ce qui concerne **la classe de Terminale**, dans l'introduction du programme, il est explicitement demandé d'exploiter systématiquement les interprétations graphiques des notions et les problèmes numériques qui sont liés à cette étude.

D'après le programme, l'objectif principal de la partie sur l'analyse « *est d'exploiter la dérivation et l'intégration pour l'étude globale et locale des fonctions usuelles.* »

Sous la rubrique « **fonctions numériques : études locale et globale** », le programme demande, à l'aide des exemples issus d'autres disciplines, de faire une étude conjointe des interprétations graphiques  $y=f(x)$  et cinématiques  $x=f(t)$ . Sous la rubrique « **travaux pratiques** », il s'agit de l'obtention des valeurs d'une fonction d'une variable à l'aide d'une calculatrice ou, en classe, à l'aide d'un tableur. Par ailleurs d'autres tâches sont prescrites : tracé de la courbe représentative d'une fonction, lecture des propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique, étude du sens de variation d'une fonction, détermination de son signe, recherche des extremums. Concernant **l'étude**

---

<sup>13</sup> Notons que malgré l'accentuation de cette propriété par les programmes, nous constaterons que lors de l'étude des variations d'une fonction le cas où la dérivée est nulle est négligé par les élèves.

**qualitative d'une fonction**, le programme prévoit par exemple qu'« étant donné une fonction  $f$  strictement monotone sur  $I$ , et un élément  $\alpha$  de  $I$  tel que  $f(\alpha)=0$ , les élèves doivent savoir comparer  $\alpha$  à un élément donné  $\beta$  de  $I$  en utilisant le signe de  $f(\beta)$ . Pour des fonctions dérivables sur un intervalle, on justifiera la résolution à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires vu en classe de première. A contrario, on pourra rencontrer à propos de telles équations l'idée intuitive de discontinuité d'une fonction en un point. » Par ailleurs, le programme préconise l'étude des exemples de situations (issues de la géométrie, physique...) décrites au moyen de fonctions, où on doit interpréter les résultats (variations, signe, extremums, comportements asymptotiques, ...).

Pour ce qui est du concept de **Tangente**, sous la rubrique « **travaux pratiques** », les élèves sont invités à déterminer la position de la courbe représentative par rapport à une de ses tangentes. Pour ce faire, on conseille d'étudier les variations de la dérivée, ce qui peut nécessiter la considération de la dérivée seconde. « En revanche aucune connaissance de la relation entre concavité de la courbe et dérivée seconde n'est exigible des élèves. » Nous constatons que le programme demande à ce que le lien entre la tangente et la courbe concernée soit suffisamment explicité. Néanmoins, il convient de souligner que les liens entre « coefficients directeurs » des tangentes et variations d'une courbes, et encore les liens entre « coefficients directeurs » des tangentes et signe de la dérivée ne sont pas suffisamment soulignés, du moins dans les programmes. Nous chercherons à éclaircir ce point lors de l'analyse des manuels.

En ce qui concerne notre ingénierie, cette analyse a révélé que

- pour le concept de fonction, différents registres sont mobilisés et soulignés. Les élèves sont censés connaître une fonction dans différents registres : algébrique, graphique, tableaux (de variations, de signe et de valeurs). Néanmoins concernant la représentation graphique de la dérivée, rien n'est mentionné (par exemple le passage de la représentation graphique de la dérivée à celle de la fonction). Toutefois, compte tenu du statut « fonction » de la dérivée, nous pouvons supposer qu'il est demandé de même pour celle-ci que pour les fonctions. Nous espérons que les manuels nous éclaireront.
- le lien entre la tangente et le nombre dérivé est suffisamment souligné.
- Les études qualitative et graphique font partie des préoccupations des programmes.

## 4.2 Les équations différentielles dans les programmes

Comme cela a été dit auparavant, nous étudierons ici les contenus de différents programmes de mathématiques en TS pour pouvoir identifier la façon dont les équations différentielles sont introduites et traitées. Nous commencerons par les programmes en vigueur depuis 1998 et dont les élèves avec



lesquels nous avons travaillé sont issus. Avant d'analyser les programmes actuels, nous analyserons le projet qui leur a donné naissance pour voir dans quelle une évolution apparaît.

### 4.2.1 Programme de 1998

A partir de ce programme, les équations différentielles ne constituent plus un chapitre à part, mais font désormais partie du chapitre sur les « **fonctions usuelles**. » Les équations du premier ordre de la forme  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ) se trouvent dans le paragraphe « Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle » tandis que celles du second ordre de la forme  $y''+w^2y=0$  ( $w \in \mathcal{R}$ ) se rencontrent dans le paragraphe « Fonctions circulaires, sinus, cosinus et tangente. »

Pour ce qui est des équations du premier ordre, juste après la fonction exponentielle et  $\ln$ , il s'agit de la résolution de  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ) avec l'étude de l'existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée. Rien de plus et sans aucun commentaire et aucune méthode prescrite.

Mais ensuite, lorsqu'on parle des fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente, on cite également la résolution de l'équation différentielle  $y''+w^2y=0$  ( $w \in \mathcal{R}$ ) avec l'étude de l'existence et unicité de la solution vérifiant des conditions initiales données. Pour les équations du second ordre non plus, il n'existe pas de méthode prescrite.

Il n'y a aucune allusion à la représentation graphique ni à une étude qualitative dans ces deux paragraphes. Il en résulte qu'en égard à la **Figure 3** (pg.63), seul l'axe n°1 est prescrit par le programme qui, conformément à nos attentes, confirme la souveraineté de la résolution algébrique.

### 4.2.2 Projet du programme 2001

Avant de parler des programmes actuels, il convient de parler du projet daté de janvier 2001<sup>14</sup> et qui a donné naissance à ces programmes. Celui-ci a été soumis à la consultation des enseignants et des associations entre janvier et mars 2001.

Dans le paragraphe intitulé « Analyse », le projet met l'accent sur le fait que l'enseignement de l'analyse débute avec l'étude des fonctions en seconde et les éléments de base d'une telle formation sont les nombres réels et des éléments de calcul infinitésimal et intégral.

Ensuite dans la partie intitulée « fonctions usuelles » et qui concerne l'exponentielle et le logarithme ; l'introduction de celui-ci est conseillée à partir de l'étude des fonctions dérivables  $f$  vérifiant

---

<sup>14</sup> B.O. n°3 (Hors-série) du 27 octobre 2001.

l'équation fonctionnelle  $f(xy)=f(x)+f(y)$  et de le définir comme la primitive de  $1/x$  s'annulant en 1. Enfin, l'exponentielle est introduite comme réciproque du logarithme :  $g(x+y)=g(x).g(y)$ .

En ce qui concerne les *équations différentielles*, le projet prévoit le début de l'étude par l'équation  $y'=ay+b$ . Soulignant l'importance de la nature d'équation dont l'inconnue est une fonction, le projet se fixe deux objectifs principaux : « *il s'agit autant de pouvoir donner certaines propriétés des solutions que de les calculer explicitement.* » Grâce à une introduction à partir d'une situation externe aux mathématiques, il est conseillé d'amorcer l'étude qualitativement sans pour autant renoncer à la résolution algébrique qui doit suivre l'étude qualitative. Le projet s'explique ainsi :

Contenus	Modalité et TP	Commentaire
Equations différentielles  Etude de l'équation différentielle $y'=ay+b$ .	L'équation sera introduite à partir d'une situation externe aux mathématiques, par exemple l'équation linéaire de refroidissement de Newton $y'=k(T_0-y)$ où $y$ est la température d'un objet mis dans une pièce à température constante $T_0$ . Sur cet exemple, on définira la notion de solution d'une équation différentielle. On représentera le champ de tangentes (tracé à l'aide d'un logiciel) et les courbes isoclines. On tentera de donner une intuition du comportement des solutions (peuvent-elles traverser la droite d'équation $y=T_0$ ? Existe-t-il une asymptote ?) On terminera l'étude par la résolution explicite de l'équation. Unicité de la solution passant par un point.  On fera une étude analogue sur d'autres équations simples, comme $y'=k(t-y)$ , ou $y'=-y^2$ , $y$ étant une fonction de $t$ .	Les physiciens traiteront, avant que le professeur de mathématiques ait pu aborder ce sujet, des équations différentielles linéaires du second ordre et introduiront la méthode d'Euler : ils indiqueront que la problématique "équation différentielle" sera revue en mathématiques. L'important est ici d'introduire ce type d'équations, où l'inconnue est une fonction ; il s'agit autant de pouvoir donner certaines propriétés des solutions que de les calculer explicitement. L'apport des outils informatiques est primordial. Par ailleurs, les équations différentielles sont utiles pour de nombreux TPE.  Aucune connaissance spécifique n'est exigible sur ces exemples.  Les équations linéaires du second ordre seront traitées en physique.

**Extrait 1** : Extrait du projet des programmes de Mathématiques (2001).

Nous remarquons que l'étude débute par une approche qualitative des équations différentielles (équation dont les solutions sont des fonctions) à partir des exemples étudiés qualitativement, « *en s'appuyant notamment sur des champs de tangentes tracés par des logiciels* » et en donnant des intuitions des comportements des solutions. L'étude s'achève ensuite par la résolution algébrique dont la manière d'accomplir n'est pas explicitée. D'autre part, le projet transmet l'étude de certaines

équations différentielles (notamment  $y''-w^2y=0$ ) aux physiciens qui enseigneront aux élèves la méthode d'Euler d'une façon consistante. Ainsi les équations différentielles sont traitées en complémentarité en mathématiques et en physique pour contribuer à « *éclairer la cohérence naturelle entre ces deux disciplines.* » Etant donné que la méthode d'Euler est déléguée au professeur de physique, la résolution numérique fait également partie des préoccupations du projet. Celui-ci ne privilégie donc surtout pas une approche à l'autre, mais il s'agit de les combiner afin d'obtenir le maximum de profits possibles.

Pour l'enseignement des équations différentielles « *l'apport des outils informatiques est primordial* » et, avec leur puissance de calcul et les possibilités qu'ils offrent de visualisation des champs de tangentes et des courbes intégrales, ils y contribuent d'une façon incontestable à l'apprentissage et l'enseignement.

Comme cette rapide analyse en témoigne, ce projet favorise la complémentarité des trois approches de l'enseignement des équations différentielles et prend en charge les principaux axes que nous avons dégagés dans la **Figure 3** à la fin de la partie précédente. C'est la raison pour laquelle nous pensons que ce projet est relativement satisfaisant. Dans le paragraphe suivant, nous tenterons d'examiner dans quelle mesure, le contenu de ce projet a contribué aux programmes actuels.

### 4.2.3 Programme en vigueur depuis 2002

L'un des deux principaux objectifs fixés pour l'enseignement de l'analyse en TS est « *l'initiation au calcul intégral et à la problématique des équations différentielles.* » D'après le programme, ces dernières sont cruciales car elles amènent à « *la compréhension de la puissance des mathématiques pour la modélisation* », mais on ajoute aussi que la synergie avec les enseignants d'autres disciplines favorisera cet objectif.

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'ensemble du programme représente une volonté d'une étude qualitative. Par exemple, dès la classe de seconde, les programmes prévoient l'étude de la notion de fonction sous différents aspects : « *graphique, calcul, étude qualitative.* » Concernant le lien entre une fonction et sa dérivée, le programme préconise les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première et seconde et par conséquent le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

Plus spécifiquement pour les équations différentielles, le programme actuel envisage une rupture avec l'enseignement classique, ainsi les équations différentielles seront servies pour l'introduction de la fonction exponentielle. Ce travail se fera en début de l'année afin d'éviter une éventuelle rupture entre les enseignements de mathématiques, de physique-chimie et de sciences de la vie et de la terre. Voici l'extrait :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
<p><b>Introduction de la fonction exponentielle</b></p> <p>Etude de l'équation <math>f' = kf</math>.</p> <p>Théorème : « Il existe une unique fonction <math>f</math> dérivable sur <math>\mathbb{R}</math> telle que <math>f' = f</math> et <math>f(0) = 1</math>. »</p> <p>Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre <math>e</math>. Notation <math>e^x</math>.</p> <p>Extension du théorème pour l'équation <math>f' = kf</math>.</p>	<p>L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables <math>f</math> telles que <math>f(x+y) = f(x)f(y)</math>.</p> <p>On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de <math>f</math> dans le cas <math>k=1</math> ; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0 de <math>h \rightarrow e^h</math>.</p>	<p>Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.</p>

**Extrait 2** : extrait du programme actuel.

Plus spécifiquement sur l'enseignement des équations différentielles voici ce que dit le programme :

<p><b>Équations différentielles <math>y' = ay + b</math>.</b></p>	<p>On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné.</p> <p>On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à <math>y' = ay + b</math>.</p>	<p>Ce paragraphe déjà abordé lors de l'introduction de la fonction exponentielle, pourra être réparti sur l'ensemble de l'année.</p> <p>On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique <math>\tau = -1/a</math> pour <math>a &lt; 0</math>.</p> <p>Les indications utiles pour se ramener à <math>y' = ay + b</math> doivent être données.</p> <p>Des solutions de l'équation <math>y'' + w^2y = 0</math> seront introduites en cours de physique.</p>
---	---	--

**Extrait 3** : extrait du programme actuel.

Le concept d'équation différentielle naît au début de l'année avec un travail sur la fonction exponentielle. Son étude est poursuivie avec l'étude de l'équation  $y' = ay + b$  et il est demandé de faire vivre le concept régulièrement dans l'année. Il convient de noter que ce programme garde les mêmes équations différentielles que celles citées dans le projet et nous constatons une importance progressive

accordée à la modélisation, mais les démarches nécessaires pour celle-ci doivent être indiquées aux élèves avec les indications utiles.

En ce qui concerne les différents modes de résolutions, les résolutions algébrique et numérique sont retenues, alors que la résolution qualitative est complètement abandonnée. L'exemple suivant en est une preuve : dans le document d'accompagnement, il est conseillé que, lors qu'un travail de modélisation débouche sur une équation différentielle, « *les élèves pourront vérifier si telle ou telle fonction déjà connue en est solution ; sinon, ils pourront être amenés à en approcher une à l'aide de la méthode d'Euler.* » L'idée donc de champ de tangentes et d'isoclines est enterrée.

Néanmoins, grâce à la méthode d'Euler, introduite au début de l'année, la prégnance de la résolution algébrique est atténuée et on insiste sur le fait qu'il est possible d'étudier une fonction dont on ne connaît pas l'expression algébrique (cf. **Extrait 2**).

Par ailleurs, la traduction mathématique de la modélisation mettra en jeu, d'après le document d'accompagnement des programmes, des fonctions et des relations entre ces fonctions et/ou leurs dérivées. Il est demandé par conséquent que les élèves se familiarisent avec ce type de relations dès le début de l'année scolaire. Et il est clairement souligné que l'étude des variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée fait partie de cette catégorie de problèmes.

Le théorème d'existence et d'unicité pour une équation différentielle de la forme  $y'=ay+b$  fait partie du programme avec sa démonstration et les élèves sont tenus de savoir que par un point quelconque, il passe une solution unique.

D'autre part, les nouveaux programmes mettent l'accent de plus en plus sur l'utilisation de l'informatique devenue incontournable dans l'enseignement. Cet extrait en témoigne d'ailleurs :

*« L'informatique change qualitativement et quantitativement les possibilités de calculs exacts (calcul formel) ou approchés, permet des approches nouvelles de problèmes classiques et ouvre le champ à de nouveaux problèmes ; il est nécessaire de revisiter l'enseignement des mathématiques à la lumière des immenses possibilités offertes (logiciels de géométrie, de calcul formel, tableur, traceur,...) ; l'usage éclairé d'outils informatiques est donc recommandé dans chaque chapitre du programme. »*

Une étude des programmes actuels met exergue que le projet a subi des changements « fondamentaux. » L'allusion faite à l'étude qualitative n'est plus évoquée. Toutefois l'esprit général de ce programme présente, nous semble-t-il, une telle ambition. Ceci compense en une partie ce qui est abandonné au sein du projet.

### 4.3 Conclusion sur l'analyse des programmes

Cette analyse met en exergue deux points fondamentaux : d'une part une prégnance forte de la résolution algébrique et de l'absence de différents registres dans les anciens programmes, et d'autre part, elle met en évidence une évolution qui cherche de plus en plus à intégrer d'autres modes de résolutions malgré le dérobade, par rapport au projet, des programmes actuels. Nous soulignerons également l'avance prise par les nouveaux programmes qui soulignent davantage une étude qualitative des notions enseignées.



## CHAPITRE B2 :

*Dans ce chapitre, nous ne procéderons pas à une analyse des manuels pour les notions sous-jacentes à l'approche qualitative, mais nous nous contenterons de nous appuyer sur des travaux antérieurs. C'est ce que nous ferons dans un premier temps. Dans un deuxième temps, nous examinerons quatre manuels relativement aux équations différentielles, dont les deux premiers sont représentatifs des programmes antérieurs alors que les deux derniers sont conformes au programme actuellement en vigueur.*

### 5 ANALYSE DES MANUELS

Dans un premier temps nous nous référerons au mémoire de DEA réalisé par Uwimana (2002) mais aussi à la thèse de Praslon (2000) auxquels nous avons déjà eu recours. Nous examinerons comment sont étudiées les notions existantes dans l'environnement de l'approche qualitative (telle la dérivée). Nous essayerons de voir dans quelle mesure, nous pouvons mettre en place les axes présentés dans la **Figure 3** (pg. 63).

En ce qui concerne l'étude des équations différentielles, nous mènerons dans un deuxième temps une analyse en étudiant deux manuels représentatifs de l'ancien programme (1998) et deux autres conformes au nouveau programme (2001). Nous projetons ainsi d'une part d'avoir des données plus représentatives afin de connaître le niveau des élèves et d'autre part de suivre l'évolution de l'enseignement des équations différentielles.

L'analyse menée dans ce chapitre doit par ailleurs permettre d'identifier les différentes tâches mobilisant les équations différentielles, que des élèves de TS doivent être capables de réaliser. Nous essayerons également de repérer les principales difficultés que peuvent avoir les élèves dans l'apprentissage de l'approche qualitative. En vue de connaître les caractéristiques de l'enseignement, nous nous proposons par ailleurs d'identifier les registres de représentation sémiotique et la façon dont ils sont utilisés afin de les mettre au service de notre travail. Par ailleurs, nous essayerons de dégager quels sont les axes qui peuvent être travaillés dans notre ingénierie.



## 5.1 Les notions sous-jacentes à l'approche qualitative dans les manuels

Pour le besoin de son mémoire de DEA, Uwimana (2002) analyse la partie « cours » quatre manuels de Première S : Dimathème, Déclic, Transmath et Terracher. Nous remarquons grâce à cette analyse que les trois premières propriétés citées dans le paragraphe 3.2.5 (pg.107) que nous trouvons indispensables pour notre ingénierie, trouvent effectivement place dans les manuels alors que les propriétés-4 et 5 ne sont pas citées. Nous en déduisons que le lien entre le signe de la dérivée et le signe du coefficient directeur n'est pas suffisamment souligné. Un autre point que nous pouvons souligné est qu'elle démontre qu'il y a une différence par rapport au contenu d'un manuel à l'autre et que, par exemple, la propriété-1 ne se trouve pas dans Déclic.

Ensuite analysant pour la partie « exercice », un manuel de 1<sup>ère</sup> S (Dimathème) et un manuel de TS (Dimathème), elle identifie trois groupes d'exercices faisant intervenir une ou plusieurs relations et propriétés entre une fonction et sa dérivée : **(i)** des exercices dans le sens de la fonction vers la dérivée ( $f \rightarrow f'$ ) ; **(ii)** des exercices dans le sens de la dérivée vers la fonction ( $f' \rightarrow f$ ) et **(iii)** enfin des exercices dont l'énoncé mobilise conjointement  $f$  et  $f'$  et la réponse porte sur l'une ou l'autre. Parmi 307 exercices recensés dans les deux manuels :

- 212 (dont 203 où  $f$  est exprimée avec une expression algébrique et seulement 9 où  $f$  est exprimée avec un graphique) font partie de la catégorie (i) ;
- 83 (dont 76 où  $f'$  est exprimée avec une expression algébrique, 5 avec un graphique et 2 avec un tableau de valeurs) font partie de la catégorie (ii)
- 12 (dont 2 où intervient une expression algébrique) font partie de la catégorie (iii).

Cette classification révèle encore une fois la part prise par l'algébrique dans les exercices mobilisant une fonction et sa dérivée. Dans 97% des cas, la fonction ou sa dérivée est exprimée à l'aide d'une expression algébrique. Dans cette analyse nous nous intéresserons exclusivement aux exercices (18 au total) faisant intervenir un changement de registre lors de passage de  $f' \leftrightarrow f$  et plus spécialement à ceux de deux dernières catégories :

### 1. $f$ est donnée par sa représentation graphique et on demande :

des valeurs numériques de  $f'$  : quatre exercices où il s'agit de déterminer, à partir de la représentation graphique de la dérivée, des nombres dérivés, des coefficients directeurs, et ainsi que, des tangentes.

de résoudre graphiquement une équation ou inéquation du type  $f'(a)=b$ ,  $f'(a) \geq 0$  ou de déterminer l'ensemble des réels  $x_0$  pour lequel la tangente d'abscisses  $x_0$  possède un coefficient directeur de signe donné.

2. Des exercices faisant intervenir  $f'$  dans l'énoncé : on recense uniquement sept exercices où l'algébrique n'intervient pas, mais aucun exercice où la dérivée est donnée dans le registre graphique :

Cinq QCM où l'on donne des valeurs numériques de la dérivée ou ses signes (+ ou -) en langue naturelle et l'on demande les variations et les extremums de  $f$ .

Deux exercices où le tableau de variation est donné et il s'agit d'en déduire le nombre et des valeurs approchées de solutions de l'équation  $f(x)=0$  à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

3. Pour les exercices où l'énoncé fait intervenir à la fois  $f$  et  $f'$ , on recense les suivants où l'algébrique n'intervient pas :

Quatre exercices où l'on demande d'associer le graphe de  $f$  au graphe de  $f'$ . Bien qu'elles soient peu nombreuses, les tâches présentées ici sont relativement riches : soit on représente graphiquement des fonctions et des dérivées sur des repères différents (ou sur le même) et l'on demande de les associer ; soit toujours sur le même repère l'on trace les représentations graphiques de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  et l'on demande d'identifier le graphe de  $f$ , celui de  $f'$  et celui de  $f''$ .

Dans un autre exercice, après avoir associé le graphe de la dérivée à celui de la fonction, il s'agit ensuite de déterminer l'expression algébrique de la fonction sachant qu'il s'agit d'un polynôme de troisième degré.

Un exercice où l'on demande de vérifier la compatibilité entre le tableau de valeurs numériques de la fonction et le tableau de signes (+ ou -) de sa dérivée.

Un exercice où l'on donne les tableaux de valeurs numériques d'une fonction et celui de sa dérivée et l'on demande de déterminer lequel appartient à la fonction et quel est celui de la dérivée.

Bien que très peu nombreuses, les tâches liant une fonction et sa dérivée semble suffisamment diverses et il existe des tâches qui demande un changement de registres. Eu égard à la **Figure 3** (pg. 63), nous pouvons inscrire certains de ces exercices dans l'axe n°2, et d'autres dans l'axe n°3 et 4. Il convient de noter néanmoins que dans aucun cas il ne s'agit de reproduire un graphique, mais il s'agit toujours des activités d'associations. Nous constatons également des tâches liées à la comparaison des tableaux (à la fois numériques et variations) d'une fonction à ceux de sa dérivée.

## 5.2 Les équations différentielles dans les manuels

### 5.2.1 Avant le changement des programmes

#### 5.2.1.1 Terracher (Hachette Education), 1998

Les équations différentielles font partie du 7<sup>ème</sup> chapitre intitulé « **Fonctions exponentielles et puissances. Equations différentielles** » et occupent 3 pages au total.

Dans un premier temps, le chapitre commence par une introduction qui se soucie de prouver l'utilité des équations différentielles dans différentes disciplines et on tient à souligner dès le départ que dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction. L'introduction est suivie de deux illustrations à partir des phénomènes de modélisation, dont l'un ramène, à partir de la culture de bactérie, à l'équation différentielle  $y'=ay$  tandis que l'autre est modélisé par l'équation différentielle du second ordre :  $y''+w^2y=0$ . Les équations en question ne sont pas résolues mais l'idée de « solution est exprimée de la manière suivante : *« une fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle  $y'=ay$  est une fonction f, dérivables sur I telle que  $f'(x)=af(x)$ . »*

Suite à cette introduction, les fonctions solutions de  $y'=ay$  sont donné à l'aide d'un théorème qui stipule que les fonctions solutions de telle équations différentielles sont des fonctions de la forme  $x \rightarrow Ce^{ax}$ . Ensuite la démonstration de ce théorème est suivie de l'énoncé de celui d'unicité dont la démonstration est *« laissée au soin du lecteur. »* Ensuite, reprenant l'exemple sur la culture de bactérie, l'idée de condition initiale est commentée et est suivie de l'illustration de quelques courbes solutions en fonctions du signe de la constante  $a$ .

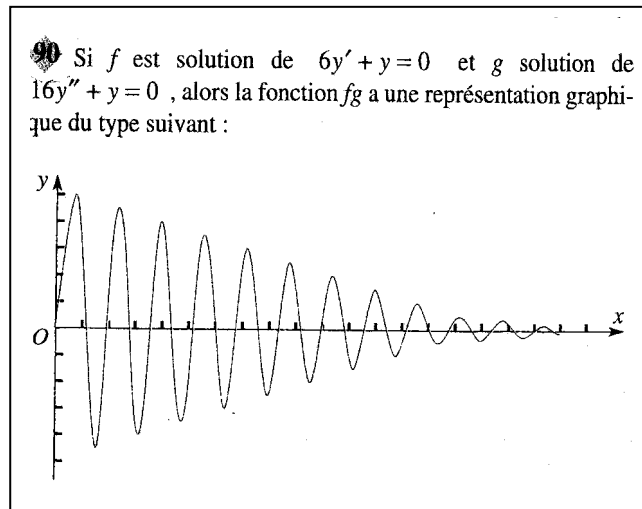
Ensuite à la troisième page, nous notons une étude similaire, sans recours aux graphiques, de l'équation différentielle :  $y''+w^2y=0$  avant de consacrer.

Sous la rubrique « **Travaux Pratiques** » et sous le titre « Exemples d'équations différentielles avec second membre », on résout algébriquement sans aucun graphique les équations différentielles  $y'-2y=e^x$  et  $y''+4y=12x$ . Le chapitre se termine par un autre exemple de modélisation résolu.

Dans la partie « **applications du cours** », les exercices proposés vont dans le même sens que la partie cours. Nous avons recensé tout d'abord trois exercices qui portent sur la résolution algébriques des équations différentielles de la forme  $y'+ay=b$ , et quatre exercices pour la résolution d'équations différentielles de la même forme à condition initiale. Les six exercices suivants font la même chose pour les équations différentielles du second ordre.

Ensuite, un exercice demande de justifier l'unicité de solutions pour l'équation différentielle  $y''+w^2y=0$ . Ensuite, sous la rubrique « **Vrai/Faux** », nous observons un seul exercice où intervient le

graphique : sachant que  $f$  est solution de  $6y'+y=0$  et  $g$  celle de  $16y''+y=0$ , on demande si  $f.g$  a une représentation graphique de la forme de la courbe donnée (cf ; **Extrait 4**). Sous la même rubrique, un exercice demande de vérifier si  $x \rightarrow e^{-5(x-x_0)} + y_0$  est solution de  $y' = -5y$ .



**Extrait 4** : Extrait du manuel Terracher, 1998, p. 175.

Ensuite, étant donné que  $g$  est une solution particulière dont la forme est indiquée dans chaque énoncé, sept exercices demandent de résoudre des équations différentielles (du premier et second ordre) avec second membre. On recense ensuite six situations de modélisation conduisant à des équations différentielles du premier ordre et une seule de second ordre. Celles-ci étant données à chaque fois, il s'agit de les résoudre.

Nous constatons dans ce manuel que le registre algébrique est quasiment le seul qui existe à part celui de la langue naturelle et à part trois illustrations dans le registre graphique : la représentation graphique des courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=ay$ , une courbe pour illustrer les données d'un énoncé qui porte sur les « courbes à sous-tangente constante » et la courbe ci-dessus représentant d'un oscillateur amorti. Le registre graphique est mobilisé dans son mode idéogrammatique (Chauvat, 1988-89). Même pour ce dernier exercice, nous avons consulté les réponses proposées par le manuel à la fin, afin de révéler les intentions des auteurs. La réponse fournie est « Vrai : c'est la représentation graphique d'une fonction du type  $x \rightarrow A \cos(Bx+C)e^{-\alpha x}$  ( $\alpha > 0$ ). » Une réponse donc purement algébrique.

L'approche mise en œuvre est donc manifestement algébrique, il n'y a que l'axe 1 qui est pris en charge par ce manuel (**Figure 3** (pg. 63)). Donc à part ED (équation différentielle) et Solution Générale, le reste des ostensifs est totalement absent. Il n'y a rien sur le lien entre la dérivée et les fonctions.

### 5.2.1.2 Didier, 1998

Dans ce manuel, les équations différentielles de la forme  $y''+w^2y=0$  font partie du second chapitre intitulé « **Fonctions circulaires, courbes paramétrées et coniques** » après une courte activité intitulée « Notion d'équation différentielle » dont l'objectif se veut l'introduction de la notion tandis que celles de la forme  $y'-my=0$  sont traitées dans le septième chapitre intitulé « **Fonction exponentielle** » et occupent seulement deux pages. Notons que l'étude ne diffère nullement de celle du premier manuel analysé et par conséquent nous ne détaillerons pas l'analyse de ce manuel.

Par simple curiosité et afin de se faire une idée, nous avons examiné les manuels de **BTS** suivants afin de voir comment les équations différentielles sont étudiées : (i) *Mathématiques, Industriel*. Hachette/Education, 2000 ; (ii) *Mathématiques, Comptabilité et Gestion, Informatique de gestion*. Hachette/Education, 2000 ; (iii) *Mathématiques Générales*. BTS DUT (Tertiaire). Hachette/ Technique, 1992. Les deux premiers manuels consacrent un chapitre à part sur les équations différentielles alors que le dernier traite des équations différentielles du premier ordre dans le chapitre « *Phénomènes exponentiels.* ». Nous trouvons intéressant à noter qu'il n'y a même pas un seul graphique dans les deux derniers manuels. Concernant le premier, bien que l'un des quatre principaux objectifs du cours donné par le manuel soit « *Etudier et représenter graphiquement une solution particulière* », il n'y a qu'un seul graphique c'est lors de la résolution approchée, d'une équation différentielle du premier ordre : méthode d'Euler. Ceci confirme encore une fois la tendance de l'enseignement actuel.

Nous avons montré dans la partie A que le rapport de la communauté mathématicienne à l'approche qualitative était resté longtemps péjoratif. Nous constatons le même rapport dans l'institution didactique. C'est d'ailleurs de probablement de la méconnaissance de la communauté savante que découlent les choix transpositifs constatés.

Nous avons par ailleurs relevé que trois principales tâches font l'objet essentiel de cet enseignement :

- Résoudre algébriquement une équation différentielle et déterminer une fonction solution à condition(s) initiale(s) donnée(s) ;
- Déterminer si une fonction donnée est une solution d'une équation différentielle ;
- Le théorème d'existence et d'unicité.

## 5.2.2 Après le changement des programmes

Puisque le nouveau programme conseille l'introduction de la fonction exponentielle à l'aide des équations différentielles, nous organiserons l'analyse de ce chapitre, tout en tâchant à satisfaire les objectifs présentés ci-dessus, de la manière suivante :

- L'étude de la façon dont on introduit la fonction exponentielle,
- Le traitement de la méthode d'Euler,
- L'étude des équations différentielles proprement dites.

Nous avons sélectionné deux manuels et nous tenons à souligner que le fait que nous avons observé des champs de tangentes dans ces manuels, a joué un rôle déterminant pour favoriser cette sélection. Nous espérons voir plus d'ostensifs et plus d'axes pris en charge en comparaison aux manuels analysés ci-dessus et conformes à l'ancien programme. Il s'agit du manuel Décllic et Terracher d'édition Hachette.

### 5.2.2.1 Décllic (Hachette Education), 2002

Au troisième chapitre intitulé « *Dérivées et Primitives* », un champ de tangentes a attiré notre attention : c'est dans le cadre de l'activité n°3 intitulée « *Champ de directions de tangentes.* » A l'activité précédente où il s'agit de l'étude d'un parcours d'une automobile roulant à  $90 \text{ km.h}^{-1}$  sur une autoroute rectiligne et qui, suite à une accélération constante de cinq seconds, atteint une vitesse de  $135 \text{ km.h}^{-1}$ , on demandait de « *déterminer une fonction  $f$  dérivable sur  $[0 ; 5]$  telle que  $\frac{dv}{dt} = a.$  » La*

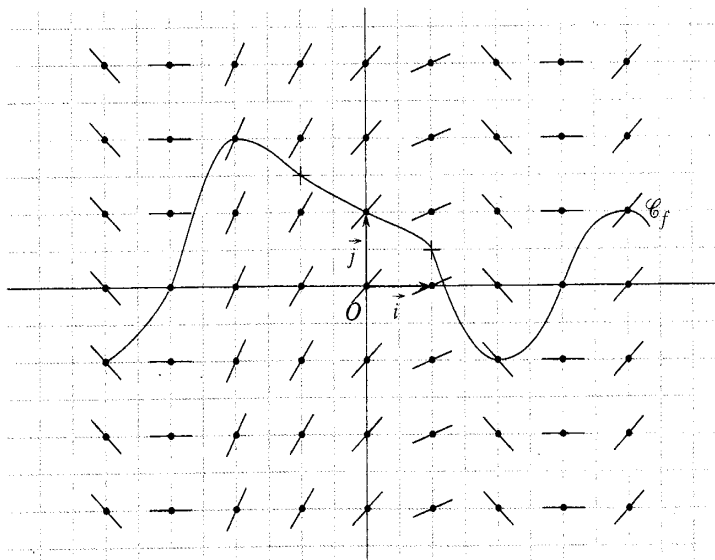
troisième activité (cf. **Extrait 5**), après avoir rappelé qu'on avait « *cherché une fonction  $f$  connaissant sa dérivée et une des ses valeurs* », donne la courbe représentative d'une fonction continue  $f$  et, « *en certains points  $M(x ; y)$ , un segment de la droite qui passe par  $M$  et a pour coefficient directeur  $f(x)$ .* »

Dans un premier item, l'activité n°3 exige de tracer « *l'allure de la courbe représentative d'une fonction  $F$  dont la dérivée est  $f$*  » en s'appuyant donc sur le champ de tangentes. Tandis que le second item exige, « *par un procédé analogue* », d'esquisser la courbe représentative d'une fonction  $G$  dont la dérivée est  $G'(x) = \frac{x}{x+1}$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $]-1 ; +\infty[$  et  $G(1)=2$ . Pour cet item, puisqu'il s'agit

d'adopter la même stratégie, l'élève doit commencer par tracer la courbe représentative de  $G'(x)$  pour  $x > -1$  ( $x = -1$  est une asymptote). Suivant la même procédure que l'énoncé, il dessine le champ de tangentes en se basant sur la courbe représentative de  $G'(x)$  mais également sur son expression algébrique. Enfin, on peut dessiner la courbe représentative d'une fonction  $G$  telle que  $G(1)=2$ .

### 3 Champ de directions de tangentes

Dans l'activité précédente, on a recherché une fonction  $f$  connaissant sa dérivée et une de ses valeurs. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction continue  $f$  et, en certains points  $M(x; y)$ , un segment de la droite qui passe par  $M$  et a pour coefficient directeur  $f'(x)$ .



- 1 Donner l'allure de la courbe représentative d'une fonction  $F$  dont la dérivée est  $f$ .
- 2 Par un procédé analogue, esquisser la courbe représentative d'une fonction  $G$  telle que  $G(1) = 2$  et, pour tout  $x$  dans  $[-1; +\infty[$ ,  $G'(x) = \frac{x}{x+1}$ .

**Extrait 5** : Extrait du manuel Déclic, 2002, pg.63.

Pour le premier item, il est évident qu'il s'agit de donner une courbe solution d'une équation différentielle de la forme  $y' = f(x)$  dont on ne connaît pas l'expression algébrique (mais l'on peut bien évidemment la déduire à partir de l'activité précédente) et que l'on connaît uniquement par la courbe représentative de  $y'$ . Relativement au second item, il s'agit de tracer une courbe solution de l'équation différentielle  $G'(x) = \frac{x}{x+1}$  et passant par  $(1; 2)$ .

Eu égard à la **Figure 3** (pg.63), le premier item s'inscrit donc dans l'axe **Graph[y']** → **CdT** → **Graph[y]**, tandis que le second item s'inscrit dans l'axe **ED** → **CdT** → **Graph[y]**.

Après avoir introduit à la page suivante la méthode d'Euler, le manuel fait faire une application de cette méthode à l'aide d'un tableur.

L'étude proprement dite des équations différentielles a lieu au quatrième chapitre intitulé « **Fonction exponentielle** » et conformément au programme, l'étude commence par l'introduction de celle-ci :

## Introduction De La Fonction Exponentielle :

Le chapitre commence par une activité intitulée « Fonctions transformant une somme en produit » et qui se veut comme une recherche des « fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathfrak{R}$  telles que : pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $f(x+y)=f(x)*f(y)$ .»

Supposant qu'il existe une fonction  $f$  non nulle vérifiant cette propriété où on remplace  $x$  par  $t$  et  $y$  par  $0$ , pour démontrer  $f(0)=1$ . Remarquant que  $x+(-x)=0$ , on demande aux élèves de démontrer  $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$  (pour  $x \in \mathfrak{R}$  et  $f(x) \neq 0$ ). Cette demande est suivie de la démonstration de la positivité de  $f$ , en

remarquant que  $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$ . Cette démonstration est déduite à partir de  $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x).f(y)}$  pour

tous réels  $x$  et  $y$ . Ensuite on définit une suite par  $u_n=f(n)$  et on demande de démontrer qu'il s'agit d'une suite géométrique et d'en déduire  $f(n)=(f(1))^n$  pour tout entier naturel. Ensuite admettant que  $f(1)=3$ , on demande de calculer les images de  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$  etc. Dans le cadre de la même activité, on

donne un algorithme qui permet de déterminer, avec la **méthode de dichotomie**, des valeurs approchées de l'image de  $f(x)$  et on demande aux élèves de le programmer sur leurs calculatrices afin de calculer les images de plusieurs réels contenus dans  $[0 ; 1]$  et de démontrer que la condition  $f(x+y)=f(x)*f(y)$  est satisfaite.

Après avoir exposé et démontré les principales propriétés de la fonction exponentielle, sans la mentionner, suite à des comparaisons des dérivées de  $x \rightarrow f(x+a)$  et de  $x \rightarrow f(x)+f(a)$ , le lecteur est amené à observer l'existence  $0 \neq \lambda \in \mathfrak{R}$ , tel que :  $f'(x)=\lambda f(x)$  (pour tout  $x \in \mathfrak{R}$ ). Celle-ci est paraphrasée par un problème de recherche d'une fonction proportionnelle à sa dérivée, en insistant que celui-ci est surtout présent lors de l'étude de la loi de désintégration radioactive et qu'il sera détaillé ultérieurement.

La deuxième activité, intitulée « Recherche d'une fonction telle que  $\varphi'=\varphi$  et  $\varphi(0)=1$  », fait démontrer tout d'abord aux élèves que la fonction cherchée n'est pas une fonction ni polynomiale ni rationnelle. Car aucune fonction polynomiale (ou rationnelle) n'est égale à sa dérivée. Ensuite définissant la suite :  $x_0=0, x_1=\frac{t_0}{n}, x_2=2*\frac{t_0}{n}, x_3=3*\frac{t_0}{n}, \dots, x_k=k*\frac{t_0}{n}, \dots, x_n=t_0$ , on fait calculer les images  $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \varphi(x_2)$ , etc. qui sont exprimées respectivement par  $y_0, y_1, y_2, \dots$ . Ensuite grâce à la méthode d'Euler introduite au chapitre précédent, on écrit :

$$\varphi(x+h) \approx \varphi(x) + \varphi'(x)*h \Rightarrow \varphi(x+h) \approx (1+h).\varphi(x).$$

Alors pour tout entier  $k$  compris entre  $0$  et  $n-1$ , il est possible d'écrire :

$$\varphi(x_{k+1}) = \varphi(x_k + \frac{t_0}{n}) \approx (1 + \frac{t_0}{n})\varphi(x_k) \text{ (Pour } x_0=0, \text{ on a } y_0=\varphi(x_0)=1).$$



Alors la courbe représentative de cette fonction  $f_n$  est obtenue en reliant les points  $(x_k ; y_k)$ . A titre d'exemple l'activité calcule ces valeurs pour  $t_0=2$  et  $n=4$  et dessine la courbe représentative. Ensuite il est demandé aux élèves de dessiner sur un même graphique les courbes représentant les fonctions  $f_2, f_3, f_{10}$  et  $f_{100}$  pour  $t_0=1$  et ensuite pour  $t_0=-2$ . En examinant la figure on demande aux élèves de conjecturer sur le signe et le sens de variations de la fonction  $\varphi$ .

Il est à noter que le manuel suppose que les élèves connaissent et maîtrisent suffisamment l'utilisation d'un tableur. Car les calculs et les tracés demandés sont à faire à l'aide d'un tableur. Mais on tient à noter aussi que le même manuel explique l'utilisation d'un tableur lors de l'étude de la méthode d'Euler.

Par ailleurs, bien que la fonction  $\varphi$  traitée dans cette activité soit une fonction particulière pour  $\lambda=1$  de la fonction  $f$  définie dans l'activité précédente comme  $f'(x) = \lambda f(x)$ , cette activité ne fait aucun référence à la précédente et se veut indépendante.

Suite à ces deux activités, la fonction exponentielle, notée « exp », est institutionnalisée directement par un théorème en guise de définition :

« Il existe une unique fonction dérivable sur  $\mathcal{R}$  qui est égale à sa dérivée et prend la valeur 1 en 0. Cette fonction est notée **exp** et appelée fonction exponentielle. On a :  $\exp' = \exp$  et  $\exp(0)=1$ . »

L'existence d'une telle fonction est admise dans le cadre de ce chapitre mais justifiée au chapitre suivant. Par contre l'unicité est démontrée sur-le-champ.

Ensuite l'exponentielle est présentée comme une solution(s) de l'équation  $f' = kf$  que l'on ne précise pas qu'il s'agit d'une équation différentielle. Ceci est fait à l'aide du théorème suivant, démontré par la suite :

« - Les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathcal{R}$  vérifiant  $f' = kf$ , où  $k \in \mathcal{R}$ , sont les fonctions  $x \rightarrow A \exp(kx)$ , où  $A$  est une constante réelle.

- Pour tous réels  $a$  et  $k$ , il existe une unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathcal{R}$  telle que :  $f' = kf$  et  $f(0) = a$ . C'est la fonction  $x \rightarrow a \cdot \exp(kx)$ . »

Ensuite, après avoir introduit la notation  $e$ , sous le titre « Etude de la fonction exponentielle », on étudie respectivement le « signe et sens de variations de exp », l'« Approximation affine au voisinage de 0 », les « Limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  », le « Tableau de variations et courbe représentative », le « Croissance comparée » et enfin la « Dérivée de  $u^n$ . »

Ensuite sous la rubrique « **Equation différentielle  $y' = ay + b$**  », on définit ce qu'est une équation différentielle et ce qu'est une solution. La forme des solutions et l'existence et de l'unicité de solution

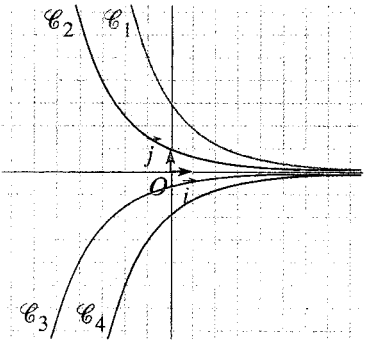
est introduite et démontrée de la même manière que les manuels précédents, suivi par la résolution algébrique de l'équation  $2y'+3y=6$  dont les solutions sont représentées graphiquement.

Sous la rubrique « **Exercices résolus** », nous repérons un seul exercice à la page 99 sur les équations différentielles sur lequel nous aimerions nous pencher plus particulièrement. Il s'agit d'un exercice dont l'énoncé est emprunté au Bac alors que la méthode de résolution est proposée par le manuel. A l'item n°4, l'énoncé demande l'étude de variations de la fonction solution calculée à l'item précédent. Il convient de souligner que pour étudier les variations de la fonction solution obtenue à l'item précédent, celle-ci est dérivée afin d'étudier le signe de la dérivée. Or sans la dériver, l'identification des signes aurait pu être faite à l'aide de l'équation différentielle. Il se peut que le choix du manuel soit régi par une question de simplicité. Néanmoins, comme nous verrons lors de nos expérimentations, ceci risque d'induire chez les élèves le recours inévitable à l'expression algébrique pour l'étude du signe de la dérivée alors que l'équation différentielle possède la même fonctionnalité.

Sous la rubrique « **Travaux Dirigés** », nous avons recensé trois situations de modélisation amenant à une équation différentielle du premier ordre et les tâches proposées sont exclusivement algébriques.

Dans la partie « **Exercices** », nous en avons recensé deux qui diffèrent de l'étude habituelle des équations différentielles. Dans un premier (cf. **Extrait 6**), il s'agit de donner une équation à des courbes solutions de l'équation différentielle  $f' = \frac{1}{2}f$ . Bien qu'il n'y ait aucune indication pour la méthode de résolution, ce qui est attendu des élèves c'est de repérer un point de la courbe pour laquelle une expression algébrique est recherchée. Une fois que ce travail est fait, la tâche prend la forme de la tâche algébrique suivante qui est assez connue dans l'institution secondaire : « *déterminer une fonction solution vérifiant une condition initiale donnée.* » La seule différence entre les deux tâches est donc le fait que l'élève détermine la condition initiale via une lecture graphique.

8 Les courbes ci-dessous représentent des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant une égalité de la forme :

$$f' = -\frac{1}{2}f .$$


Déterminer une équation de chacune de ces courbes.

**Extrait 6** : Extrait du manuel Déclic, 2002, p.106.

Concernant le second exercice qui nous paraît particulier (cf. **Extrait 7**), il demande une parfaite interprétation de la notion d'équation différentielle. L'élève est censé connaître que  $f' = kf$  permet de calculer le coefficient directeur de la tangente et que la fonction donnée  $f$  vérifie l'équation différentielle. De ce point de vue, après avoir calculé le coefficient directeur de la tangente, sachant qu'elle passe par les deux points donnés, il peut déterminer l'expression algébrique de la courbe demandée.

11 La courbe  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$f' = kf , \quad \text{où } k \text{ est un réel.}$$

La droite  $\mathcal{D}$  est tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $A(0 ; 2)$  et passe par  $B(-3 ; 1)$ .

Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $x$ .

**Extrait 7** : Extrait du manuel Déclic, 2002, p.107.

### 5.2.2.2 Terracher (Hachette Education), 2002

Nous voyons dans ce manuel également qu'une approche qualitative commence à se mettre en place au fur et à mesure. Par exemple ; sous la rubrique « **Dans la foulée** », il est proposé de démontrer que

les courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = -y^2$  sont strictement positives sur  $]0, +\infty[$ . Ce manuel n'est pas très différent du précédent, c'est la raison pour laquelle nous nous contenterons simplement d'étudier quelques passages qui nous paraissent intéressants :

Dans la rubrique « **Avant-Première** », le manuel présente un champ de tangentes en tenant à donner l'algorithme qui permet sa construction dans différents outils informatiques :

### 3. LE CHAMP DES TANGENTES

Considérons l'équation différentielle  $y' = -0,5y + 1$  (1).

Les logiciels et les calculatrices équipés du calcul formel permettent une visualisation des solutions de (1) en traçant, à intervalles réguliers, quelques tangentes aux courbes représentatives correspondantes : c'est le « **peigne** » ou « **champ** » des tangentes.

• Sur le logiciel Maple, les instructions suivantes :

```
> with(DEtools) ;
> diff (y(x), x)=1-0.5*y(x) ;
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = 1 - .5y(x)$$

```
> DEplot ("y(x), x=-1..4, y=-2..4) ;
affichent le dessin ci-contre (Fig. 1).
```

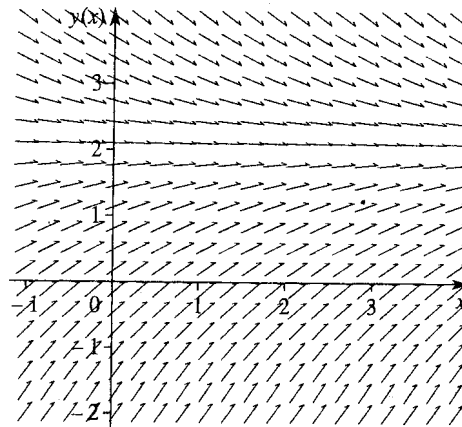


Fig. 1

Cela permet :

- d'observer que toutes les solutions ont pour limite 2 en  $+\infty$  ;
- de tracer, de façon approchée, l'unique solution prenant une valeur donnée en 0 (par exemple).

• Avec une calculatrice

**Casio Graph 100**

Avec le menu **DIFF EQ** **1st** **1: Separ**, on saisit  $f(x) = 1$ ,  $g(y) = -0,5y + 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

**Texas TI 89**

Dans **MODE** **Graph**, choisir **6: DIFF EQ** ; dans l'éditeur **Y=**, saisir  $y'_1 = -0,5y + 1$  puis  $y_1^1 = 1$  (correspond à  $y_1(0) = 1$  si  $t_0 = 0$ ), et **GRAPH**.

Dans les deux cas s'affichent le champ des tangentes et la courbe de la solution particulière  $f$  telle que  $f(0) = 1$ .

**Extrait 8** : Extrait du manuel Terracher, 2002, p.153.

Nous pensons que cet extrait est une preuve pour démontrer que le concept de champ de tangentes et par conséquent l'approche qualitative des équations différentielles commence à trouver une place dans

l'enseignement secondaire. D'ailleurs l'**Extrait 9-a** est une autre preuve pour dire la notion de champ de tangentes a commencé à faire son entrée dans l'enseignement secondaire :

**7** À l'aide d'un logiciel, nous avons représenté ci-dessous le champ des tangentes d'une équation différentielle du type  $y' = ay + b$ , ainsi que la solution  $f$  vérifiant  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = 1$ .

À l'aide du graphique, déterminer  $a$  et  $b$ , et donner l'expression de  $f(x)$ .

**8** On considère les équations différentielles suivantes :

(1) :  $y' = x^2$  ;                      (2) :  $y' = 3 - 0,5y$  ;  
 (3) :  $y' - 2y = 4$  ;                      (4) :  $y' = -y$ .

Les figures ci-après donnent sommairement l'allure des courbes représentatives d'une solution de (1), (2), (3) et (4). Associer chaque courbe à « son » équation différentielle.

**Extrait 9** : Extrait du manuel Terracher, 2002, a. p.164

b. p.153.

L'**Extrait 9-b** présente un type d'activité que nous n'avons pas constaté dans les manuels précédents. Il s'agit d'associer des courbes solutions à des équations différentielles données. Aucune indication n'étant fournie, nous ne sommes pas en mesure de repérer ce que les auteurs ont tenté d'apprendre aux élèves. Il s'avère néanmoins difficile, pour un élève de Terminale, d'accomplir une telle tâche à l'aide de la résolution algébrique. C'est donc probablement un procédé qualitatif qui est visé.

En plus des trois tâches essentielles citées à la fin du paragraphe 5.2.1.2, nous avons relevé les tâches suivantes pour l'enseignement des équations différentielles d'après le changement des programmes :

- Associer des courbes solutions à des équations différentielles ;
- construire un champ de tangentes à la fois à la main et à l'aide d'un outil informatique ;
- interpréter un champ de tangentes ;
- interpréter qualitativement une équation différentielle (cf. **Extrait 7**),
- étudier les variations des courbes solutions d'une équation différentielle.

En ce qui concerne la **Figure 3** (p.63), nous avons noté que la plupart des axes présentés dans la figure en question sont présents dans les manuels. Néanmoins, vu le nombre limité des tâches qui impliquent

ces représentations, nous ne procéderons pas à une analyse quantitative, nous nous contenterons simplement de mentionner qu'eu égard à la figure en question, nous avons pu repérer les axes  $2 \rightarrow 6$ ,  $6 \rightarrow 3$  ;  $1 \rightarrow 5$ ,  $5 \rightarrow 3$ ;  $1 \leftrightarrow 3$ .

### 5.3 Conclusion

Cette analyse du système d'enseignement met en évidence deux constats : d'une part que les anciens programmes et manuels sont fortement marqués par la dominance de l'algébrique et d'autre part, avec la rentrée en vigueur du nouveau programme, la résolution numérique et les problèmes de modélisation ont commencé à trouver une place dans l'enseignement. Par ailleurs, comme l'ont témoigné les manuels analysés, l'approche qualitative également commence à se faire une place dans l'enseignement et que les différents ostensifs que nous avons soulignés dans la **Figure 3** (pg. 63) commence à apparaître dans l'institution secondaire. Il en résulte que, le reproche fait à l'enseignement des équations différentielles, relativement à l'absence de l'approche qualitative se trouve atténué.

Cette analyse a mis également en exergue que, les élèves possédant les pré-requis d'une approche qualitative, celle-ci peut se mettre en place en classe de Terminale S. Les élèves possèdent le pré-requis suffisant pour mettre en place l'ingénierie dont les principaux éléments sont décrits un peu plus loin.

En ce qui concerne les changements de registres, totalement absents dans l'enseignement d'alors, ils commencent à apparaître avec les nouveaux programmes et que nous avons pu repérer, par-ci par-là, tous les axes que nous avons dégagés dans la **Figure 3** (p. 63). En dépit de ces remarques, nous pouvons affirmer que les changements de registres ne font pas encore totalement partie des objectifs de l'enseignement et que le traitement des équations différentielles fait appel à deux registres : algébrique et graphique.



# PARTIE C : ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION





## CHAPITRE C1 :

*Les deux chapitres précédents nous ont permis de déboucher sur l'ingénierie dont nous allons exposer le contenu. Dans ce chapitre après avoir rappelé l'hypothèse et nos questions de recherche concernées par cette expérimentation et suite à une présentation de l'ingénierie en question, nous allons présenter une analyse a priori des activités proposées.*

# 6 ANALYSE A PRIORI DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

Nous avons précédemment montré que plusieurs registres pouvaient vivre dans l'institution TS pour l'enseignement des équations différentielles, alors qu'en réalité celui-ci n'en prend en charge qu'un seul. Dans ce chapitre, en nous appuyant sur ces registres grâce au dispositif (**Figure 3**, p.63) présenté dans la partie A, nous allons essayer de contribuer à « *la mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative* » et tenter de vérifier l'hypothèse suivante :

Hypothèse : ***La viabilité de l'approche qualitative en Terminale S***

Nous pouvons instaurer une approche qualitative des équations différentielles en Terminale S en jouant sur certaines contraintes et grâce au jeu de registres.

Rappelons que, au chapitre A2, nous avons modélisé les approches algébrique et qualitative en termes de conceptions. Nous avons par ailleurs fait le choix d'agir en termes d'opérateurs pour à la fois faire acquérir la conception qualitative d'une part et voir l'interaction entre les conceptions algébrique et qualitative d'autre part. Notre objectif principal est donc de favoriser des opérateurs qualitatifs pendant les deux premières séances de notre ingénierie. En outre nous tenterons également, par le moyen des activités proposées, de confronter les élèves à des opérateurs erronés que nous viserons à déstabiliser. *In fine* nous vérifierons, à la dernière séance, la disponibilité des opérateurs souhaités et éventuellement d'autres opérateurs émergés.

Par ailleurs rappelons que lors de la définition d'une conception en termes de quadruplet, nous nous sommes limité à ceux constitués en registres de représentation sémiotique quant à L. Comme nous l'avons déjà évoqué, certains registres (et en particulier certaines représentations de ces registres) étaient spécifiques à la conception qualitative  $C_Q$ . Nous nous appuyerons également sur cette spécificité pour favoriser l'apparition de la conception souhaitée.

Compte tenu de ce rappel soulignons que, afin de tester l'hypothèse ci-dessus, nous allons essayer en particulier de répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les opérateurs effectivement construits chez les élèves et ceux déstabilisés ?
- Y a-t-il des opérateurs, en particulier qualitatifs, qui sont apparus bien qu'ils ne soient pas visés ?
- Quels sont les contrôles effectués par les élèves afin de valider ou d'invalider leurs actions ?

## 6.1 Présentation de l'ingénierie

La population concernée par notre expérimentation est une classe de Terminale S du lycée Pablo Neruda à Saint Martin d'Hères dans l'agglomération grenobloise. Suite à des négociations avec l'enseignant, nous avons disposé de trois séances pour mettre en place notre ingénierie. Cette limitation temporelle nous a nécessairement rendu sélectif en ce qui concerne les notions à enseigner. En contrepartie, travailler avec une seule classe pendant une durée limitée représente un avantage qui permet une analyse qualitative des productions d'élèves et ainsi d'en mieux tenir compte.

Concernant l'organisation du travail des élèves, hormis les moments d'institutionnalisation où la classe a travaillé en mode collectif, il a été convenu de les faire travailler individuellement les deux premières séances. Nous projetons ainsi d'institutionnaliser le plus de notions possibles grâce à une diversité d'activités à proposer. Néanmoins, ce mode de travail est pauvre du point de vue de l'observateur qui ne recueillera que peu de production à analyser. En effet, nous aurons probablement moins de chance d'accéder aux opérateurs et contrôles mobilisés par les élèves. En revanche afin de collecter le maximum de données possibles, nous les avons fait travailler en binôme lors de la dernière séance de l'*évaluation*. C'est ainsi que nous projetons de collecter le maximum de données possibles.

Dans ce qui suit, après avoir introduit les choix globaux de l'ingénierie, nous procéderons à l'explicitation des cinq phases qu'englobe l'ingénierie en question.

### Choix globaux :

1. **Un enseignement algorithmique** : compte tenu des contraintes que nous avons précédemment présentées, nous avons convenu de proposer un enseignement algorithmique. Par ailleurs il

nous a paru intéressant de satisfaire les trois axes fondamentaux relatifs à l'enseignement actuel des équations différentielles en Terminale, qui s'inscrivent dans le domaine de validité de la conception algébrique  $C_A$  : résolution d'une équation différentielle et la représentation graphique de ses courbes solutions, le théorème d'existence et d'unicité et enfin vérifier si une expression algébrique donnée est solution ou non d'une équation différentielle donnée. Pour cette raison, nous essayerons également de prendre en charge les correspondantes dans  $C_Q$  de ces trois axes. Nous expliciterons la façon dont ceux-ci seront pris en charge, lors de la présentation des phases de l'ingénierie. D'autre part nous avons également pris soin de respecter le découpage fait dans le chapitre A2 (§ 3.1, p. 55) afin d'intégrer toutes les démarches de ce que nous avons convenu d'appeler approche qualitative globale.

2. **Des situations a-didactiques** : nous avons convenu de proposer des situations dans lesquelles le rôle de l'enseignant était limité. Ce dernier peut aider les élèves à comprendre l'énoncé de l'activité et il peut dans certaines circonstances débloquer la situation. Néanmoins son rôle n'était pas destiné à aider les élèves à accomplir la tâche et il serait préférable que ces derniers produisent eux-mêmes la réponse attendue.
3. **Registres** : Les activités proposées mettent en avant des changements de registres, en particulier algébrique et graphique, et elles ont été élaborées à l'aide de la grille (**Figure 3**, p.63) présentée dans la partie A.
4. **Le contenu de l'ingénierie** : L'ingénierie consiste en une approche exclusivement qualitative sans recours à l'approche algébrique. Elle propose des situations, plutôt a-didactiques, qui satisfont les conditions citées dans le § 3.1 (p. 55) du chapitre A2. Nous avons veillé, et ce grâce à l'analyse des manuels, à ce que le contenu de notre ingénierie ne dépasse pas le niveau Terminale. Pour ce faire, les opérateurs dont la transmission est visée sont généralement inspirés de l'analyse des manuels présentée dans la partie B.
5. **Le vocabulaire** : le fait de définir les expressions « équations différentielles linéaires », « avec ou sans second membre », etc, risque de conduire à des expressions compliquées. Ces définitions non seulement compliquent la tâche des élèves, mais elles sont dans la plupart des cas dénuées d'intérêt pour une étude qualitative des équations différentielles. Nous avons donc évité d'y avoir recours.
6. **L'utilisation de l'outil informatique en mode différé** : compte tenu, entre autres, de la durée dont nous disposons, il paraît difficile de profiter d'un logiciel et nous avons convenu d'y faire appel en mode différé, i.e. pour la préparation des feuilles de travail remises aux élèves.

7. **La limitation du cours « magistral » à l'équation  $y'=2y$**  : Afin de profiter au mieux du temps limité dont nous disposons, nous nous bornerons à l'étude d'une seule équation différentielle du moins pendant la transmission de certaines notions (notamment isocline et champ de tangentes) de l'étude qualitative (i. e. les deux premières séances). Outre le fait d'accélérer la transmission des notions en question, cette limitation se justifie par sa conformité au programme de la classe de terminale S où l'étude se limite aux deux types d'équations, à savoir :  $y'=ay$  et  $y'=ay+b$ . Signalons néanmoins que la dernière phase fait appel à d'autres sortes d'équations différentielles de la forme  $y'=f(x, y)$ .

L'équation différentielle  $y'=2y$  est partout définie dans  $\mathcal{R}^2$ . En ce qui concerne ses solutions, elles sont définies sur  $\mathcal{R}$  tout entier. Conformément au théorème d'existence et d'unicité que l'équation en question satisfait, la fonction  $y=0$  étant solution, elle partage le plan en deux parties distinctes et aucune autre solution ne peut la couper. Il en résulte que lorsqu'une courbe solution est croissante (reps. décroissante) en un intervalle, elle l'est sur  $\mathcal{R}$ .

Comme toute équation différentielle autonome, l'équation  $y'=2y$  possède des particularités qui ne peuvent pas forcément être étendues à toute autre équation différentielle de la forme  $y'=f(x, y)$ . Dans ce cadre, nous nous contenterons d'en souligner deux, liées respectivement au champ de tangentes et aux courbes solutions. *Le champ de directions est invariant par translations horizontales.* Autrement dit, sur une même horizontale, les tangentes à des courbes solutions sont parallèles. Par la même, *les courbes solutions se déduisent l'une de l'autre par une translation horizontale.* En d'autres termes si  $y_1(x)$  est une solution de  $y'=2y$  (ou plus généralement de  $y'=f(y)$ ) sur  $I$ , alors les fonctions  $y_C(x)=y_1(x)+C$  ( $C \in \mathcal{R}$ ) sont aussi solutions de cette équation différentielle et elles sont définies sur  $I+C$ .

### **Les phases de l'ingénierie**

Il nous a paru intéressant, bien qu'épistémologiquement ceci soit le contraire, d'introduire le concept d'isocline avant celui de champ de tangentes. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué, nous nous servirons du premier concept afin d'introduire le second. Conformément à l'analyse faite dans les deux parties précédentes, l'ingénierie a été conçue en cinq phases complémentaires :

- i. Première Phase** : *Etude des variations des courbes solutions.*

Conçue en une activité, cette phase vise à faire étudier les variations de  $f$  dans l'équation différentielle  $f'(x)=2.f(x)$ .

- ii. Deuxième Phase** : *Introduction des isoclines.*

Trois activités coexistent dans cette phase : une première est destinée à faire découvrir le concept d'isocline. Elle vise à mettre en relief la corrélation entre  $y$  et les coefficients directeurs des tangentes à

des courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$ . Ainsi, les élèves sont invités à découvrir que les coefficients directeurs sont indépendants de  $x$  et ils ne dépendent que de  $y$ . Suite à l'institutionnalisation du concept d'isocline, l'activité suivante demande aux élèves d'interpréter ce concept et d'expliquer l'intersection de l'isocline  $I$  et d'une courbe solution de l'équation en question. Enfin une dernière activité, visant l'investissement des nouvelles connaissances, demande aux élèves de calculer les isoclines  $I$  et  $4$  et d'en préciser la nature pour l'équation différentielle  $y'=x^2+y^2$ .

A la fin de la première séance, un devoir à la maison, composé de deux activités complémentaires, sera distribué aux élèves : l'une demandant l'étude de variations des courbes solutions de l'équation  $y'=2y+1$ , l'autre demandant aux élèves d'interpréter ces variations en fonction du signe de  $y$ .

### iii. Troisième Phase : *Représentation des courbes solutions.*

Cette phase vise à faire acquérir le champ de tangentes et à apprendre à tracer des courbes solutions en se basant sur celui-ci. Nous soulignons par ailleurs qu'il existe, en n'importe quel point du plan, une courbe solution de l'équation différentielle en question. C'est ainsi que nous inaugurons le théorème d'existence et d'unicité.

A la phase précédente, les élèves ont appris ce qu'est une isocline. En ce qui concerne le passage au champ de tangentes, lorsque l'utilisateur possède un logiciel le problème ne se pose pas. Or à défaut, différentes méthodes peuvent être suivies pour accéder au champ de tangentes (par exemple, la méthode de grille, la méthode d'isocline, etc.) Nous avons opté dans notre expérimentation pour cette dernière qui consiste à représenter quelques isoclines pour une équation différentielle donnée (par exemple les isoclines  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ) et de généraliser ceci à tout l'étendu du plan.

### iv. Quatrième Phase : *Etude du théorème d'existence et d'unicité.*

Proposée à la fin de la seconde séance, cette phase vise à faire découvrir aux élèves l'unicité d'une courbe solution passant par un point donné pour  $y'=2y$ . Tout en renforçant les concepts d'isocline et de champ de tangentes, elle vise l'apprentissage du théorème d'existence et d'unicité. Les élèves doivent justifier pourquoi deux courbes sécantes ne peuvent pas être des courbes solutions de  $y'=2y$ .

### v. Cinquième Phase : *Evaluation.*

C'est la phase d'évaluation où les élèves sont divisés en deux groupes A et B. Sont proposées sept activités dont quatre sont indépendantes du groupe et trois sont spécifiques au groupe. Le fait de proposer le maximum d'activité possible provient de la volonté de recueillir le plus données possible en un temps limité dont nous disposons.

## 6.2 Analyse *a priori*

Dans cette analyse *a priori*, nous respecterons la chronologie des activités proposées pour donner une certaine clarté à la présentation. Nous adoptons les critères suivants comme une grille d'analyse que nous suivrons dans la mesure du possible : après **(1)** une présentation des **objectifs** de l'activité en question et le(s) **opérateur(s)** dont l'apprentissage est visé et éventuellement ceux que l'on veut déstabiliser ; nous procéderons, si nécessaire, à **(2) la justification de la tâche** proposée pour énumérer ensuite **(3) les connaissances requises et les difficultés prévues** et **(4) les stratégies attendues** pour l'accomplir. Ensuite nous soulignerons, lorsque ceci s'avèrera possible et intéressant, **(5) les observables** de la situation qui permettront d'évaluer le niveau de la réalisation des objectifs fixés.

Par souci de simplicité et ce durant toute notre étude, les activités des deux premières séances seront mentionnées par la lettre « **A** » suivie du numéro de l'activité. Lorsqu'une activité comporte plusieurs items, nous y ajouterons « **Q** » suivie à son tour par le numéro de l'item. Néanmoins s'il n'y a pas de risque de confusion, les items seront mentionnés tout simplement par « **Q** » suivie par son numéro, sans évoquer l'activité dont ils dépendent. Concernant la séance d'évaluation, afin de les distinguer de celles de des deux premières séances, les activités seront mentionnées par « **AE** » suivie du numéro de l'activité et lorsqu'une activité est spécifique d'un groupe, son numéro sera suivi par A ou B en indice, A et B indiquant le groupe dans lequel se trouve le binôme. Ainsi, par exemple *la troisième question de la deuxième activité* sera codée par la combinaison **A2Q3**, tandis que **AE3<sub>B</sub>** fait allusion à la troisième activité proposée à un binôme du groupe B.

Enfin, les élèves seront codés par **EN** où N correspond au numéro de l'élève. Un élève redoublant sera mentionné par **E<sub>r</sub>N**. Ainsi, **E10** désigne l'élève 10, alors que **E<sub>r</sub>11** correspond à l'élève 11 qui est un redoublant. A la dernière séance où les élèves travailleront en binômes, nous désignerons ceux-ci par la lettre « **B** » suivie du numéro du binôme.

Avant de commencer l'analyse *a priori*, il convient de présenter globalement les principales stratégies qui permettront de résoudre les tâches proposées. Cette présentation a pour but d'en faciliter le suivi. Ces stratégies seront personnalisées et le cas échéant davantage explicitées au sein de chaque activité.

### 6.2.1 Les principales stratégies

Nous avons présenté dans le chapitre A2 deux conceptions : Algébrique et Qualitative. En confirmant la prégnance de la première, nous visons l'émergence de la seconde. Par ailleurs, nous nous sommes fixés comme objectifs la stimulation des opérateurs qualitatifs et la déstabilisation de certains opérateurs non souhaités. Bien évidemment, les opérateurs, qu'ils soient algébriques ou qualitatifs, ne

sont pas explicités par les élèves et ils sont modélisés par nous même. Ces opérateurs peuvent néanmoins être apparentés à des stratégies de résolution mises en œuvre par les élèves.

Afin donc de faciliter notre observation, nous distinguerons trois groupes de stratégies (N faisant allusion au numéro de la stratégie). Nous distinguerons les **S**tratégies **A**lgébriques (**SAN**) qui sont liées à la conception algébrique et elles sont marquées par la tentation de la résolution de l'équation différentielle en question, par le recours à la primitive, à l'intégration ou à la fonction exponentielle, etc. Nous distinguerons également des **S**tratégies **Q**ualitatives (**SQN**) qui sont liées à la conception qualitative et qui sont grosso modo caractérisées par la réalisation de la tâche via l'interprétation de l'équation différentielle. Enfin nous distinguerons d'autres stratégies, notées **SXN**, qui consistent généralement en la confusion d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(y)$  avec celle  $y'=f(x)$ . Nous y ajouterons également les stratégies qui se basent sur la tentative de répondre à l'aide des activités précédentes pour traiter la tâche de l'activité en cours sans que l'on puisse forcément dire que la tâche est dûment accomplie (par exemple lorsqu'il s'agit de tracer, à l'aide d'un champ de tangentes donné, des courbes solutions à une équation différentielle ; tracer ces courbes en imitant ce qui a été fait lors d'une activité précédente). Puisque ces stratégies ne peuvent être associées ni à des stratégies algébriques ni qualitatives, nous les avons notées par X.

## 6.2.2 PHASES n°1 : Etude des variations des courbes solutions.

Une activité et un devoir à la maison composé de deux items, s'inscrivent dans cette phase.

### 6.2.2.1 Présentation de l'activité n°1

*Soit  $f$  une fonction dérivable et définie sur  $\mathcal{R}$ . On sait que pour tout  $x \in \mathcal{R}$  on a  $f'(x) = 2.f(x)$ . Étudier les variations de  $f$ .*

Il s'agit dans cette activité d'étudier les variations de  $f(x)$  définie par l'équation  $f'(x) = 2.f(x)$ . La tâche « étudier les variations d'une fonction » est connue des élèves depuis la classe de 1<sup>ère</sup> mais uniquement lorsque la fonction  $f$  est définie algébriquement. Dans ce cas, le travail de l'élève consiste à calculer  $f'$  et en fonction du signe de la dérivée obtenue, il pourra identifier les variations de la fonction. Pour ce faire, il suffit de mettre en œuvre l'opérateur **Op. A.I** suivant, basé lui-même sur la propriété-1 présentée un peu plus loin :

**Op. A.I** : [Pour une fonction  $h$ , dérivable sur un intervalle  $I \subset \mathcal{R}$  ] si  $h'$  est strictement positive (resp. négative) dans  $I$  alors  $h$  est strictement croissante (resp. décroissante) sur  $I$ .

Cet opérateur algébrique est bien évidemment correct mais il s'avère inefficace dans cette activité à cause de l'absence de l'expression algébrique de la fonction  $h$ . Nous visons par cette activité



l'apprentissage de l'opérateur **Op.Q.I** ci-dessous. Il s'avère que la principale différence entre les deux opérateurs est le recours à l'expression algébrique de la fonction dont on étudie les variations :

**Op.Q.I** : [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $y$  une fonction solution définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ ] si  $y'$  est strictement positive (resp. négative) dans un ouvert  $U$  et si le graphe de  $y$  est contenu dans  $U$  alors  $y$  est strictement croissante (resp. décroissante) sur  $I$ .

Nous avons favorisé la tâche « *étudier les variations* » parce qu'elle est provocatrice de cet opérateur. D'autre part, le choix de la notation  $f$  au lieu de  $y$  est destiné à fournir une aide aux élèves afin de leur permettre de faire le lien avec la propriété-1. Notons néanmoins que nous avons choisi l'équation différentielle  $f'=2f$  au lieu de  $f'=f$ , parce que la résolution algébrique de la première est moins accessible aux élèves que la résolution de la seconde. Rappelons que, à part les redoublants, les élèves ne connaissent pas encore la résolution algébrique. Néanmoins une correspondance avec la fonction exponentielle est toujours un risque pour la situation proposée et nous avons ainsi diminué ce risque par le choix  $f'=2f$  au lieu de  $f'=f$ .

Il s'agit lors de l'accomplissement de cette tâche, d'interpréter les propriétés algébriques de l'équation dans le registre graphique : signe de la dérivée  $\rightarrow$  variations des courbes solutions. Ainsi, la tâche peut être inscrite dans une activité de conversion de registres (**Tableau 2**). Le registre d'arrivée est nécessairement flou puisqu'il ne sera pas effectivement utilisé :



**Tableau 2** : Changement de registres en A1.

Pour la tâche proposée, les différentes unités significatives et les variations correspondantes peuvent donc être données de la manière suivante :

Equation Différentielle		Les solutions
Unités significatives	Valeurs	Variations concomitantes pour les solutions
Signe de $y'$ : variations	$>0$	Les solutions sont croissantes
	$<0$	Les solutions sont décroissantes
	$=0$	Les solutions sont constantes

**Tableau 3** : Unités significatives d'une équation différentielle et variations concomitantes au sein des solutions.

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Afin de s'acquitter de la tâche proposée, les élèves doivent mobiliser la propriété qui relie le signe de la dérivée d'une fonction aux variations (de la courbe représentative) de celle-ci. Puisque nous y

aurons occasionnellement recours, numérotons cette propriété et rappelons-là (pour une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ ) :

**Propriété 1** : Le sens de variations de  $f$  sur  $I$  est donné par le signe de sa dérivée  $f'$  sur  $I$  :

- $f$  est croissante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'$  est positive sur  $I$  ;
- $f$  est décroissante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'$  est négative sur  $I$  ;
- $f$  est constante sur  $I$  si, et seulement si,  $f'$  est nulle sur  $I$ .

Nous avons souligné que, grâce à cette propriété, les élèves étaient familiers de la tâche « étudier les variations d'une fonction », lorsque celle-ci est algébriquement connue. Or dans notre situation, la fonction n'est pas définie algébriquement, mais par une équation différentielle. Les élèves ne disposent donc pas de l'expression algébrique de  $f'(x)$ , car ils ne peuvent pas la déduire en dérivant l'expression de  $f(x)$  qui est, elle même, absente. Néanmoins, il se trouve que la dérivée  $f'(x)$  est exprimée en fonction de  $f(x)$ . Par conséquent pour pouvoir identifier le signe de la dérivée  $f'(x)$ , les élèves doivent s'appuyer sur le signe de la fonction. C'est une nouvelle tâche pour les élèves et il va falloir adapter la propriété déjà acquise à la nouvelle situation, ce qui semble une source de difficultés pour les élèves.

En outre, l'idée « fonction solution » est complètement nouvelle pour les élèves pour qui la résolution d'une « équation » débouche sur un nombre. Par ailleurs les difficultés des apprenants avec le concept de fonction sont notoires (tels Harel&Dubinsky (1992)). On peut donc s'attendre à ce que le concept continue à poser problème lors de l'étude des équations différentielles. Le saut d'un « nombre solution » à une « fonction solution » ne doit nullement être considéré comme trivial pour les élèves. Ce saut est d'autant plus problématique que les variations sont à étudier en fonction de  $f(x)$  et non pas en fonction de la variable indépendante  $x$  comme les élèves en ont pris l'habitude depuis le collège.

Par ailleurs, le fait qu'il existe une infinité de fonctions qui vérifient cette propriété constitue un saut conceptuel. Il est vrai que l'énoncé de l'activité ne souligne pas l'existence d'une infinité de fonctions  $f$  qui vérifient la relation  $f'=2f$ , il faut cependant noter que les élèves ont déjà rencontré cette situation lors de la recherche des primitives et la résolution d'équations trigonométriques. On pourra donc s'attendre à deux possibilités : d'une part, grâce à une analogie avec les situations antérieures, les élèves rendent compte qu'il y a une infinité de fonction  $f$  ou d'autre part l'étude des variations est faite pour une seule fonction  $f$ , « définie partout dans le plan (!) ». Dans tous les cas, l'enseignant est censé aider les élèves à la compréhension au moment de la correction et à introduire le concept d'infinité de solutions.

A la lumière de cette analyse, les variations des fonctions solutions de l'équation différentielle  $f'(x)=2.f(x)$  peuvent être fournies de la manière suivante. Bien que ceci ne soit pas attendu de la part des élèves, nous fournirons les variations dans le registre du tableau de variations, afin d'illustrer l'utilisation de celui-ci dans un cas particulier. Cherchons tout d'abord les valeurs de  $f$  où la dérivée est nulle :  $f'=0$  d'où  $2.f=0 \Rightarrow f=0$ . Le tableau de variations peut donc être établi de la manière suivante :

$f$	$-\infty$	$f=0$	$+\infty$	
$f'$	-		+	
$f$	↘		↗	

**Tableau 4 :** tableau de variations des courbes solutions de  $f'(x)=2f(x)$ .

Comme nous l'avons souligné lors de la présentation du registre de tableau de variations au chapitre A2, la lecture de ce registre demande un changement de contrat didactique relatif à l'utilisation du tableau de variations pour le cas des fonctions. Le tableau étant établi en fonction de la variable dépendante  $f$ , son interprétation doit naturellement en tenir compte. Nous avons déjà évoqué que les solutions de cette équation différentielle sont définies dans  $\mathfrak{R}$  tout entier. Il s'avère que lorsqu'une fonction solution est à valeurs positives, elle est strictement croissante et inversement lorsqu'elle est à valeurs négatives, elle est strictement décroissante et ce sur tout  $\mathfrak{R}$ . Nous constatons que la fonction nulle ( $f=0$ ) est une fonction constante et elle constitue une frontière entre les fonctions croissantes et celles décroissantes. En d'autres termes, ceci nous permet de partager le plan horizontalement en deux : une partie supérieure ( $y>0$ ) où les courbes solutions sont croissantes et une deuxième inférieure ( $y<0$ ) où les courbes solutions sont décroissantes et lorsque  $y=0$ , il y a une fonction constante :  $f=0$ .

Mais la question qui se pose pour l'étude des variations est la suivante : pour quelles valeurs de  $x$  ces variations sont-elles valables ? Sans tenir compte du théorème d'existence et d'unicité, nous pouvons constater qu'une courbe solution croissante (reps. décroissante) restera croissante (reps. décroissante) pour toujours. Supposons qu'une telle courbe croissante (pour  $y>0$ ) décroît pour  $y<0$ . Nous pouvons constater que, dans ce cas, une telle courbe ne sera plus solution puisqu'elle perd le statut de « fonction. » Il en résulte qu'une courbe croissante (reps. décroissante) le restera pour tout  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

### (b). Les stratégies de la résolution :

Parmi les stratégies présentées à l'entrée de ce chapitre, en fonction de la conception de l'élève, celui-ci peut adopter l'une des stratégies suivantes :

**SA1 (résolution de l'équation différentielle) :** cette stratégie est le fruit de **Op. A.I** présenté ci-dessus et se base, par définition, sur l'existence d'une expression algébrique de  $f$  qu'il faudra alors à tout prix déterminer. Pour ce faire, bien que cela ne soit pas dit dans l'énoncé, les élèves, en particulier les redoublants, reconnaissent l'*équation différentielle* qu'ils *résolvent* pour étudier les variations de  $f$ . La résolution donne  $f(x)=Ce^{2x}$  comme solution générale qui est de nouveau dérivée afin d'accéder à la fonction dérivée :  $f'(x)=2Ce^{2x}$  ( $C \in \mathfrak{R}$ ). Il s'avère que le signe de la dérivée dépend de  $C$ . Il en résulte que

- pour  $C > 0, f' > 0$  d'où  $f$  est croissante,
- pour  $C < 0, f' < 0$  d'où  $f$  est décroissante,
- pour  $C = 0, f' = 0$  d'où  $f$  est constante.

Soulignons que la volonté de résoudre l'équation différentielle peut avoir, outre la détermination du signe de la dérivée, une autre raison : pour les redoublants, le contrat didactique sur les équations différentielles stipule la résolution de celles-ci.

On peut s'attendre à ce que cette stratégie (**SA1**) apparaisse plutôt chez les redoublants, censés savoir résoudre l'équation différentielle en question. Concernant les non-redoublants, nous pensons que la stratégie suivante leur est plus accessible :

**SA2 (fonction exponentielle)** consiste à reconnaître que la fonction exponentielle vérifie l'équation différentielle donnée. Ensuite grâce à l'expression algébrique, l'élève peut étudier les variations. Une telle stratégie, utilisée à bon escient, est susceptible de conduire aux variations. Dans ce cas, la stratégie rejoint en fait la précédente. Néanmoins, une primitive de la fonction exponentielle étant elle-même, les élèves risquent de considérer  $e^{2x}$  comme l'unique fonction  $f$  qui vérifie l'équation différentielle. Ils risquent de ce fait de conclure que  $f(x) = e^{2x}$  (d'où  $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ ). Puisque celle-ci est strictement positive, la fonction  $f$  est strictement croissante « partout » dans le plan.

**SA3 (intégration ou recherche de primitive)** : il s'agit de rechercher à déterminer l'expression de  $f(x)$  par l'*intégration* ou la *recherche de primitive* puisque les élèves ont appris à intégrer les deux côtés d'une expression lors de l'étude de l'intégration. Ainsi, on peut s'attendre à deux cas pour l'intégration de l'expression donnée : soit  $f(x) = F(x) + C$ , soit  $f(x) = f^2(x) + C$  ( $C \in \mathcal{R}$ ) à la suite d'une confusion avec l'intégration de  $2x$ . Les deux ne permettent pas de répondre à la question des variations de  $f$ .

**SQ1 (signe de la dérivée)** : cette stratégie consiste à reconnaître que le **signe** de  $f'$  dépend de celui de  $f$  et mobilise donc l'opérateur souhaité (**Op.Q.I**) sans recours à l'expression algébrique de  $f$ .

**SX1 (confusion avec  $y' = 2x$ )** : générée par une confusion entre l'équation donnée et l'équation  $f'(x) = 2x$ , cette stratégie consiste à donner les variations suivantes « pour  $x > 0, f' > 0$  alors  $f$  est croissante, et pour  $x < 0, f' < 0$  alors  $f$  est décroissante. Enfin, lorsque  $x = 0, f' = 0$ . » Compte tenu du passé scolaire des élèves, une telle réponse semble plausible. En effet, ceux-ci ont toujours connu qu'une fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$  sont définies par une expression de  $x$ .

Finalement, vu la nouveauté de la tâche, il se peut qu'il y ait des élèves qui s'abstiennent de répondre sous prétexte que, ne connaissant pas l'expression algébrique de  $f$ , la dérivée n'est pas connue et par conséquent le signe de  $f'$  ne peut pas être identifié. Ils en concluront l'impossibilité d'étudier les variations. Rappelons que ceci est en conformité avec la conception algébrique  $C_A$ .

Cette activité étant proposée à un moment où les élèves n'ont pas encore étudié les équations différentielles et comme la technique de résolution n'est pas encore enseignée, nous nous attendons à

ce que **SQ1** soit dominante. Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que les stratégies algébriques -et notamment **SA1**- émergeraient plutôt chez les redoublants. Néanmoins d'autres élèves non-redoublants peuvent établir le lien avec la fonction exponentielle et répondre ainsi via la stratégie **SA2**.

Signalons que, à condition que l'élève sache s'en servir, les stratégies **SA1** et **SA2** sont susceptibles de conduire à l'étude des variations. Toutefois, nous avons choisi de proposer l'équation  $f'(x)=2f(x)$  et non pas  $f'(x)=f(x)$ , pour réduire le recours à ces stratégies et favoriser de ce fait l'apparition de l'opérateur **Op.Q.I** qui consiste à raisonner sans faire intervenir l'expression algébrique de  $f$ .

Cette analyse a révélé qu'une distinction entre redoublants et non redoublants peut être significative pour, entre autres, vérifier l'interaction entre registres algébrique et qualitatif. De ce point de vue, nous tâcherons pendant notre analyse de faire cette distinction, tant qu'elle paraît possible et nécessaire.

### (c). Les observables :

Deux observables dont le second est fortement tributaire du premier, semblent importants dans cette activité : l'identification du signe de la dérivée et l'étude des variations des courbes solutions. Le premier permettra de mesurer l'impact de la conception algébrique sur les comportements des élèves, alors que le second mettra en évidence l'utilisation judicieuse de la propriété-1 rappelée ci-dessus.

En ce qui concerne l'organisation du cours en classe, à la fin du temps accordé pour traiter cette activité, il a été prévu qu'on ramasse les feuilles et que l'enseignant fasse un bilan, résume ce qui a été fait au tableau et donne les variations des courbes solutions avec un tableau de variations. Il présente ensuite ce qu'est une *équation différentielle* tout en introduisant la notation  $y$  avec la transformation de l'écriture  $f'(x)=2f(x)$  en  $y'=2y$  et il soulignera par ailleurs l'existence d'une infinité de solutions.

## 6.2.3 PHASE n°2: Introduction du concept d'isoclines.

Cette phase est composée de trois activités dont nous procéderons à la présentation une par une :

### 6.2.3.1 Présentation de l'activité n°2

Cette activité, inscrite dans une perspective heuristique, conduit les élèves à la découverte de la notion d'isoclines. Pour ce faire, elle leur demande de calculer les coefficients directeurs des tangentes au long des droites verticales et horizontales (i.e. les isoclines de l'équation différentielle en question). L'encadré suivant introduit l'activité :

*Puisqu'en un point donné le nombre dérivé d'une fonction signifie le coefficient directeur de la tangente passant par ce point, la propriété « une fonction est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle  $I$ , si et seulement si, sa dérivée est positive (resp. négative) dans  $I$  » peut être traduite ainsi : « une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur  $I$  si et seulement si, en chacun des points de sa représentation graphique dans  $I$ , les coefficients directeurs des tangentes sont positifs (respectivement négatifs). »*

*En se servant de l'annexe ci-jointe, répondre aux questions suivantes :*

- Q1.** *On prend une droite parallèle à l'axe des ordonnées, la droite  $x=1$  par exemple. Pour l'équation  $y'=2y$ , calculer les coefficients directeurs des tangentes aux points suivants se trouvant sur la droite :  $A_1(1 ; -3)$ ,  $B_1(1 ; -1)$ ,  $C_1(1 ; 0)$ ,  $D_1(1 ; 1)$ ,  $E_1(1 ; 2)$ ,  $F_1(1 ; 3)$ . Dessiner ces points ainsi que les tangentes correspondantes dans le repère donné dans l'annexe.*
- Q2.** *Maintenant prenons une droite parallèle à l'axe des abscisses, la droite  $y=1$  par exemple. A l'aide de la même équation, calculer les coefficients directeurs des tangentes aux points suivants se trouvant sur la droite :  $A_2(-2 ; 1)$ ,  $B_2(-1 ; 1)$ ,  $C_2(0 ; 1)$ ,  $D_2(2 ; 1)$ . Représenter ces points dans le même repère donné dans l'annexe et mettre la valeur du coefficient directeur au point concerné (on ne demande pas de représenter les tangentes ni les segments correspondants). Que peut-on conclure ?*
- Q3.** *Même question pour les points suivants :  $A_3(-2 ; 2)$ ,  $B_3(-1 ; 2)$ ,  $C_3(0 ; 2)$ ,  $D_3(2 ; 2)$  se trouvant sur la droite  $y=2$ . Que peut-on conclure ?*
- Q4.** *Que peut-on conclure de toutes ces questions ?*

Grâce à cette activité, les élèves sont invités à découvrir que les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$  sont immuables sur des droites horizontales (items **A2Q2**, **A2Q3**), tandis qu'ils varient sur une droite verticale (**A2Q1**). La représentation de ces tangentes sur la figure fournie aux élèves une aide pour mieux appréhender ces idées qui doivent être formalisées au quatrième item (**A2Q4**). Signalons que, pour la gestion du temps mais aussi afin de rendre la figure plus perceptible, les élèves sont invités à se contenter de représenter les tangentes par un petit segment dont le milieu est le point de tangence et de mettre la valeur du coefficient directeur à côté de ce segment. Les élèves sont ainsi face à un champ de tangentes primitif et apprennent qu'un segment dans un champ de tangentes est un représentant de la tangente à une courbe solution et lorsqu'une courbe solution  $y$  passe, elle est forcément tangente à ce segment. En termes d'opérateurs, nous donnons ci-dessous les opérateurs visés et l'opérateur algébrique qui risque d'entraver son apparition :

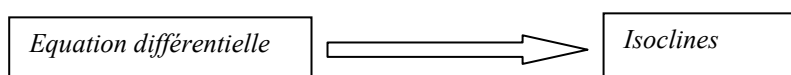
**Op. Q.II :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] si une courbe solution est croissante (resp. décroissante) en un intervalle  $I$  alors les coefficients directeurs des tangentes à cette courbe sont positifs (resp. négatifs) dans  $I$ .

**Op. Q.III** : [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] le coefficient directeur de la tangente à une courbe solution passant par  $A(x_0, y_0)$  est  $y'=f(x_0, y_0)$ .

**Op. A.II** : [soit  $h$  une fonction définie et dérivable sur  $I \subset \mathbb{R}$  et  $A(x_0, y_0) \in I$ ] si  $T$  est la tangente à la courbe représentative de  $h$  alors en  $x_0$  le coefficient directeur de  $T$  est  $h'(x_0)$ .

Rappelons encore une fois que les deux opérateurs sont corrects et la principale différence entre les deux est le recours à l'expression algébrique de la fonction. De ce fait, **Op. A.II** n'est opératoire que pour une équation différentielle que l'on sait résoudre.

Soulignons que cette activité propose un changement de registre, de l'algébrique vers le graphique, où deux représentations (**ED** et **Isoclines**) sont impliquées et pour que ce changement soit réussi, l'interprétation présentée dans le Tableau 6 doit être faite :



**Tableau 5** : Changement de registres dans A2.

Equation Différentielle		Les solutions	
Unités significatives	Valeurs	Variations concomitantes pour les coefficients directeurs des tangentes	Commentaire
<b>Signe de <math>y'</math> : variations</b>	>0	Coefficient directeur positif	Les tangentes peuvent être remplacées par des vecteurs tangents, ce qui peut s'avérer fort utile pour appréhender le champ de tangente ou lors du travail avec un logiciel, notamment, de géométrie dynamique.
	<0	Coefficient directeur négatif	
	=0	Coefficient directeur nul	

**Tableau 6** : Unités significatives d'une ED et variations concomitantes des tangentes à des solutions.

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Les connaissances qui interviennent ici sont le calcul du coefficient directeur de la tangente et la représentation graphique d'une tangente. Les élèves doivent donc mobiliser principalement la propriété suivante pour accomplir la tâche. Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ;  $C$  la courbe représentative de  $f$  et  $A(x_0, y_0) \in I$  un point de  $C$  :

**Propriété 2** : « puisque  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $C$  admet au point  $A$  une tangente ( $T$ ) de coefficient directeur  $f'(x_0)$ . »

Une tâche semblable et familière aux élèves consiste à calculer le coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique d'une fonction  $f$  dont l'expression algébrique est disponible. D'après ces propriétés, pour déterminer la pente de la tangente en un point, il suffit donc, après avoir identifié la dérivée, de connaître les coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  du point en question. Bien évidemment, dans le cas

d'une équation différentielle, tout comme l'activité précédente, la dérivée n'est pas explicitement définie, mais elle est définie en termes de la fonction. Il en résulte que les élèves doivent interpréter la propriété-2 pour pouvoir la rendre efficace à utiliser dans cette activité. La principale difficulté à laquelle les élèves risquent de se trouver confrontés est donc le calcul du coefficient directeur.

Puisque les fonctions solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$  sont les  $y$ , les fonctions cherchées sont alors dérivables. Alors elles doivent admettre une tangente en chaque point du plan, dont le coefficient directeur vaut  $2y_0$  pour le point  $(x_0, y_0)$ . Il suffit donc de connaître l'ordonnée d'un point pour déterminer la pente de la tangente qui y passe. En ce qui concerne la représentation graphique de la tangente, les élèves doivent mobiliser un procédé que nous appelons « *technique graphique.* » Celle-ci est basée sur le fait qu'un vecteur  $\vec{v}$  de pente  $m$ , peut être considéré comme la somme de deux vecteurs orthogonaux de longueurs respectivement  $1$  et  $m$  (cf. Figure 4). Réciproquement pour représenter un vecteur de pente  $m$ , il suffit donc d'avancer horizontalement de  $1$  unité, et de se déplacer verticalement de  $m$  unités. La jonction du point de départ à celui d'arrivée donne le vecteur recherché. Pour faire donc la représentation graphique d'une tangente au point concerné il suffit d'avancer d'un pas et de monter de la valeur du coefficient directeur calculé.

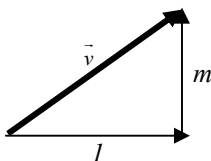


Figure 4 : Somme de deux vecteurs.

### (b). Les stratégies de la résolution :

En fonction de la conception mobilisée les stratégies suivantes peuvent être mises en œuvre par les élèves : ne reconnaissant pas le nombre dérivé dans l'équation différentielle, l'élève fait appel respectivement à **SA1** (Résolution de l'équation différentielle) ou à **SA2** (recours à l'exponentielle) pour calculer le nombre dérivé aux points demandés. Soulignons que ces stratégies trouvent leurs racines dans l'opérateur **Op. A.II** qui exige forcément l'expression algébrique (ou la dérivée) de la fonction. Il n'est donc pas exclu, et ce surtout pour les redoublants, que les élèves déterminent la solution passant par le point en question (la solution vérifiant une condition initiale donnée) et que, à l'aide de la dérivée de cette solution, ils calculent le coefficient directeur. Une autre stratégie attendue est **SX1** qui consiste en une confusion entre l'équation différentielle fournie  $y'=2y$  et  $y'=2x$ . Enfin, nous pouvons citer la stratégie qualitative, **SQ1**, qui permet de calculer le **coefficient directeur** de la tangente à partir de l'équation différentielle (grâce à **Op. Q.III**).

Bien que **SQ1** demeure la stratégie optimale pour plusieurs raisons, **SA1** est également susceptible d'aboutir au calcul des coefficients directeurs à condition de déterminer la fonction solution passant par le point en question. Les élèves seront donc amenés à déterminer une fonction solution vérifiant une condition initiale donnée. Vu le temps imparti, la difficulté de calculer les coefficients directeurs



des tangentes pour les 14 points donnés et de tracer les segments, est évidente. Les points pour lesquels les coefficients directeurs des tangentes sont à déterminer, sont volontairement nombreux pour permettre aux élèves, d'une part d'observer plus clairement les variations des coefficients directeurs et d'autre part pour entraver l'apparition de SA1. Pour ce qui est de SA2, elle ne fonctionne plus pour cette activité et nous nous attendons à un recours plus faible à cette stratégie.

**(c). Les observables :**

Compte tenu des objectifs de cette activité, trois observables semblent importants :

- **Calcul de coefficient directeur** : les élèves font face encore une fois à une situation inhabituelle où la dérivée est exprimée à l'aide de la fonction elle-même. Il nous permettra d'observer l'évolution des opérateurs algébriques et qualitatifs.
- **Représentation des tangentes** : Cet observable permettra de repérer d'éventuelles difficultés sur la représentation graphique de tangentes.
- **Conclusion** : enfin, un autre observable est les *conclusions adéquates* à tirer des trois premiers items, qui amèneront au concept d'*isocline* dont l'activité vise l'introduction.

Concernant l'organisation du travail en classe, nous avons prévu de distribuer dans un premier temps les deux premiers items et une annexe où les élèves disposent d'un repère orthonormé afin de représenter les segments demandés. L'enseignant lit et explique l'énoncé, en particulier le premier paragraphe, tout en soulignant encore une fois le passage de  $f$  à  $y$  pour la notation d'une équation différentielle. Au bout de quinze minutes, on ramasse la première fiche, sans l'annexe, pour distribuer la deuxième où les deux derniers items sont présentés. Dix minutes plus tard, les feuilles ainsi que l'annexe seront ramassées afin d'institutionnaliser le concept d'*isocline*. Une fois que les élèves ont remarqué par leur propre initiative que sur des droites parallèles à l'axe des abscisses les coefficients directeurs des tangentes restent inchangés, il semble que c'est un moment propice pour introduire le concept d'*isoclines*. L'enseignant fait un bilan et institutionnalise ce nouveau concept. Il prend par ailleurs le soin de souligner que dans l'équation étudiée, il s'agit des droites tandis que ceci n'est pas toujours le cas et qu'en général les équations différentielles possèdent des courbes en tant qu'*isoclines*. Pour la suite de la séance, nous avons prévu de traiter la troisième activité (A3) avant de distribuer aux élèves la feuille du devoir à la maison. Néanmoins le déroulement effectif n'a pas permis de traiter A3 dans la première séance. C'est la raison pour laquelle nous suivrons le déroulement réel et présenterons le devoir à la maison avant A3.

### 6.2.3.2 Présentation du devoir à la maison

Le principal objectif de ce devoir est d'évaluer l'acquisition des connaissances transmises lors de la première séance. Elle comporte trois exercices dont le premier (DQ1) teste l'acquisition des connaissances transmises en A1, le second (DQ2) celles transmises en A2 et enfin DQ3 qui évalue le concept d'isocline. Ce dernier item où il s'agit de calculer certaines isoclines pour  $y'=2y$  a été annulé, puisqu'il est directement lié à A3 qui a été reportée à la séance suivante suite au retard pris lors de la première séance. Dans ce qui suit, nous détaillerons distinctement l'analyse des deux premiers items :

#### Premier Item (DQ1) :

Cet item propose la même tâche que A1 et demande aux élèves d'étudier les variations de  $y$  dans l'équation  $y'=2y+1$ . Nous ne détaillerons pas la présentation de cet item, renvoyant le lecteur à l'analyse *a priori* de A1. Il nous permettra donc d'observer l'évolution des stratégies mises en œuvre par les élèves en A1. Pour accomplir cette tâche, les élèves doivent tout d'abord calculer les valeurs pour lesquelles la dérivée est nulle. Puisque celle-ci est nulle pour  $y=-\frac{1}{2}$  qui est également une solution évidente pour l'équation différentielle en question. Les fonctions solutions de  $y'=2y+1$  sont définies partout dans  $\mathcal{R}$ . Le plan est donc divisé en deux parties bien distinctes : une première partie correspondant à  $-\frac{1}{2} < y$  où les courbes solutions sont croissantes et une deuxième partie correspondant à  $y < -\frac{1}{2}$  où les courbes solutions sont décroissantes.

Concernant les stratégies mobilisables par les élèves, compte tenu de la similitude avec A1, on peut s'attendre à des stratégies relativement identiques à celles attendues en A1 : SA1 (résolution de l'équation différentielle), SA2 (fonction exponentielle) et SQ1 (signe de la dérivée). Signalons néanmoins que SA1 et SA2 sont plus difficiles à mobiliser qu'au sein de A1. En effet, contrairement à A1, l'équation différentielle proposée ici, est plus difficile à résoudre. Il est plus compliqué de deviner une fonction exponentielle qui la vérifie. Concernant SA3, avec l'éventuelle correction qui aurait pu avoir lieu à la suite de A1, nous pensons qu'il n'y aura plus de recours.

Néanmoins, en plus de SX1 (confusion avec  $y'=2x+1$ ), on peut s'attendre à l'apparition de SX2 (confusion entre  $y'=2y+1$  et  $y'=2y$ ). Celle-ci consiste donc à dire que les variations de  $y$  dans l'équation  $y'=2y+1$  sont les mêmes que dans l'équation  $y'=2y$ .

#### Second Item (DQ2) :

Signalons tout d'abord que cet item a été proposé par l'enseignant qui pensait, semble-t-il, que ses élèves étaient capables d'accomplir une telle tâche. Rappelons qu'en A2, le paragraphe d'introduction a mis l'accent sur la relation entre les variations d'une courbe et le signe du coefficient directeur des tangentes dans un intervalle. Cet item vise à tester l'appropriation d'une telle propriété en y mêlant le

signe de la dérivée. La tâche peut donc être considérée comme une navette entre le registre algébrique et celui de tableau de variations :

**A partir de la première question, compléter les propositions suivantes :**  
 Si une fonction est solution de (E), lorsque sa valeur y est ..... elle est croissante.  
 Si une fonction est solution de (E), lorsque sa valeur y est ..... elle est décroissante.  
 Si une fonction est solution de (E), en un point où sa valeur y est.....sa courbe admet une tangente de coefficient directeur positif.  
 Si une fonction est solution de (E), en un point où sa valeur y est.....sa courbe admet une tangente de coefficient directeur négatif.

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Les connaissances mises en jeu à travers cet item sont la propriété-1 qui relie le *signe de la dérivée* aux *variations de la courbe solution*, ainsi que la propriété suivante :

**Propriété 3 :** soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Les variations de  $f$  sur  $I$  sont données par le signe du coefficient directeur de sa tangente ( $T$ ) :

- $f$  est croissante sur  $I$  si, et seulement si, les coefficients directeurs de ses tangentes ( $T$ ) sont positifs sur  $I$  ;
- $f$  est décroissante sur  $I$  si, et seulement si, les coefficients directeurs de ses tangentes ( $T$ ) sont négatifs sur  $I$  ;
- $f$  est constante sur  $I$  si, et seulement si, les coefficients directeurs de ses tangentes ( $T$ ) sont nuls sur  $I$ .

De ce point de vue, les première et troisième propositions, identiques dans le fond, sont satisfaites pour  $y > -\frac{1}{2}$  et avec le même ordre d'idées, les deux autres propositions sont satisfaites pour  $y < -\frac{1}{2}$ . Notons cependant que la connaissance de ces propriétés est nécessaire, mais n'est pas suffisante pour accomplir la tâche. Les résultats de l'item précédent (**DQ1**) sont impliqués, faute de quoi il n'est pas possible de traiter la tâche proposée. En effet, le signe de la dérivée n'est pas directement impliqué dans l'énoncé de **DQ2** et il faut établir la relation entre la valeur de  $y$  et le signe de sa dérivée. Ainsi, pour pouvoir traiter cet item, les variations obtenues à l'item précédent doivent subir un aménagement interne et conforme au Tableau 7 et l'élève doit passer du premier au second tableau :

Signes de la dérivée	Variations des courbes solutions	Signes du coefficient directeur	Valeurs de y	Variations de y	Signes du coefficient directeur
$f' > 0$	<b>croissante</b>	<b>&gt;0</b>	$y > -\frac{1}{2}$	<b>croissante</b>	<b>&gt;0</b>
$f' < 0$	<b>décroissante</b>	<b>&lt;0</b>	$y < -\frac{1}{2}$	<b>décroissante</b>	<b>&lt;0</b>
$f' = 0$	<b>constante</b>	<b>=0</b>	$y = -\frac{1}{2}$	<b>constante</b>	<b>=0</b>

**Tableau 7 :** Unités significatives dans une équation différentielle et variations concomitantes pour les solutions.

L'exercice vise donc à évaluer l'acquisition des unités significatives de l'équation différentielle et leurs variations concomitantes au sein, à la fois, des solutions et des coefficients directeurs des tangentes. Soulignons que les deux premières suppositions évaluent l'acquisition de l'opérateur **Op.Q.I**,

tandis que les deux dernières visent la construction de l'opérateur ci-dessous. Notons enfin que l'ensemble de l'item met également à l'épreuve **Op. Q.II** :

**Op. Q.IV** : [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] Si  $y'$  est positive (resp. négative) dans un ouvert  $U$  alors les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions sont positifs (resp. négatifs) dans  $U$ .

**(b). Les stratégies de la résolution :**

En fonction de la conception mobilisée, en plus de **SQ1** (Signe de la dérivée), deux stratégies paraissent plausibles pour les élèves : en premier lieu, **SX2** (confusion entre l'équation différentielle fournie et  $y'=2y$ ) semble plausible. Il en résulte que les élèves remplissent les pointillés en alternance par  $y>0$  et  $y<0$ . Cependant le recours à cette stratégie peut être imputé au fait que l'on dit souvent : « lorsque la dérivée est positive (respectivement négative), la fonction est croissante (respectivement décroissante). » Alors sans essayer de faire le point sur les conditions qui déterminent les signes de la dérivée dans l'énoncé proposé, les expressions qui font allusion à la valeur de  $y$  risquent d'être considérées comme faisant allusion aux signes de la dérivée. Nous y reviendrons le cas échéant dans l'analyse a posteriori.

Une autre stratégie qui risque d'apparaître chez les élèves est **SX3** où, sans s'apercevoir de l'équivalence entre les propositions (la première  $\equiv$  la troisième et la deuxième  $\equiv$  la quatrième), les élèves donnent deux réponses différentes aux deux propositions équivalentes. L'appel à une telle stratégie peut avoir différentes explications :

- soit la non maîtrise de l'**Op. Q.II** qui relie « variation d'une courbe » et « signe des coefficients directeurs de ses tangentes » et de ce fait l'existence chez les élèves d'une conception qui cloisonne ces deux unités significatives (cf. Tableau 7) d'une équation différentielle. Ceci peut également entraîner un nombre important des réponses incorrectes pour les deux dernières suppositions plutôt que pour les deux premières. Ceci mettrait en cause l'acquisition de **Op. Q.IV**.
- soit la non compréhension de la notion « fonction solution » à laquelle chacune des propositions de l'énoncé fait allusion.

### 6.2.3.3 Présentation de l'activité n°3

Cette activité, composée de deux items, est l'ultime maillon de la première phase de notre ingénierie : découverte du concept d'isocline. Elle vise à renforcer et à approfondir ce concept institutionnalisé en **A2** où les élèves ont disposé d'une définition et de connaissances sommaires sur le concept :

**Q1 : A partir de l'équation de départ :  $y'=2y$ , peut-on anticiper les droites sur lesquelles les pentes restent identiques, c'est-à-dire les isoclines ? Si oui comment ?**

**Q2 : Que signifie qu'une courbe solution croise l'isocline 1 ?**

En termes d'opérateurs, les deux items de cette activité, outre le renforcement des opérateurs **Op. Q.III** et **Op. Q.IV**, visent à instaurer l'opérateur suivant qui est le fruit des deux derniers :

**Op. Q.V** : [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] si  $f(x, y)$  est constante alors  $y'$  l'est également.

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Avant de détailler notre analyse en considérant les items un par un, soulignons que les connaissances à mobiliser afin de pouvoir s'acquitter de la tâche sont celles acquises pendant et à l'issue de **A2**. Nous ne nous attendons donc pas à des difficultés notables dans cette activité où les élèves sont invités à réorganiser et à formaliser les connaissances acquises en **A2**.

**Première Question (A3Q1) :**

La tâche proposée, tout en restant dans le registre algébrique, nécessite le passage entre deux représentations : de l'expression algébrique (**ED**) aux **Isoclines**. L'énoncé de cet item a été formulé de manière à rappeler aux élèves la définition de l'isocline qu'ils ont apprise à la fin de la dernière séance et nous avons préféré conserver l'objet « droite » afin de leur faciliter la tâche. C'est la raison pour laquelle l'énoncé contient intentionnellement l'expression « *les droites sur lesquelles les pentes restent identiques.* » Tenant compte de cette définition, nous nous attendons à ce que les élèves s'aperçoivent que pour l'équation différentielle en question, l'isocline  $c$  ( $c \in \mathcal{I}$ ) est définie par l'équation  $y'=c$  soit  $2y=c$ . Ceci revient en fait à la droite définie par  $y=c/2$ , ce qui est conforme aux observations faites, en particulier, en **A2Q2** et **A2Q3**.

**(b). Les stratégies de la résolution :**

Seules deux stratégies paraissent plausibles pour s'acquitter de la tâche proposée. **SQ1**, basée sur **Op. Q.V**, consiste à stipuler que  $y'$  doit être constante. En effet, eu égard à l'opérateur **Op. Q.III**, pour que les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions soient toujours les mêmes, il faudrait que  $y'$  reste constante. Il en résulte que  $y$  doit l'être également. Néanmoins on peut aboutir au même résultat en considérant  $y$  constante. Dans ce cas, bien que le résultat soit correct, le procédé suivi est contestable. En effet, une telle stratégie n'est gagnante que pour une équation différentielle autonome. Ainsi pour  $y=c$ ,  $y'=2c$  d'où on peut conclure que l'isocline  $2c$  correspond à la droite d'équation  $y=c$ .

La seconde stratégie plausible et susceptible d'amener les élèves à une bonne réponse est **SX3**. Elle porte sur la tentation de répondre à l'aide des activités précédentes, notamment **A2**.

**Deuxième item (A3Q2) :**

Cet item a comme but de donner l'occasion aux élèves d'explicitier le concept d'isocline et mettra à l'épreuve l'acquisition des « segments » présentés en A2. Il leur permettra ainsi de préparer le concept de champ de tangentes qui sera introduit un peu plus tard. Vu la tâche proposée, nous ne parlerons pas de stratégies. Afin de répondre aux exigences de l'énoncé, la tâche des élèves consiste à « paraphraser » la définition donnée ci-dessus. Puisqu'une isocline est une (ou des) courbe sur laquelle les tangentes ont un coefficient directeur donné, alors lorsqu'il s'agit de l'isocline  $l$ , ceci veut dire que les tangentes à des courbes solutions en n'importe quel point de l'isocline sont toutes parallèles et ont un coefficient directeur  $l$ . En d'autres termes, nous avons visé à transmettre l'opérateur suivant :

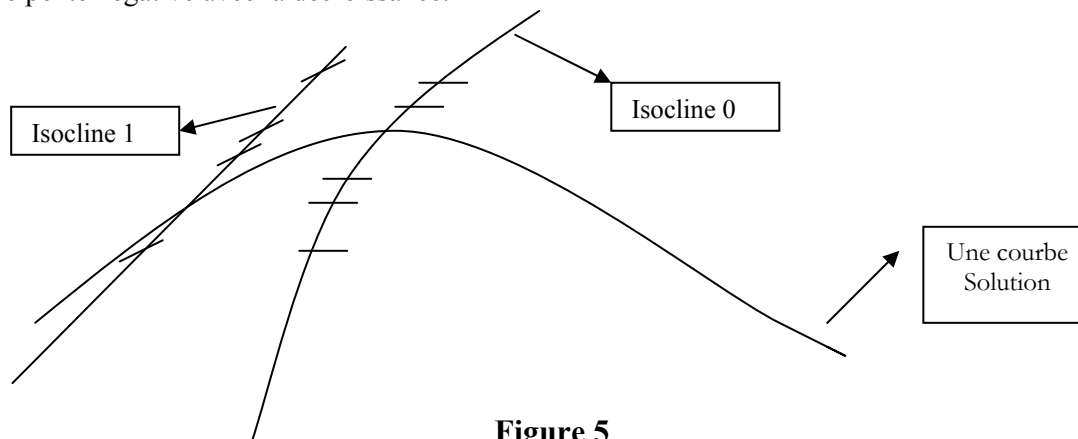
**Op. Q.VI :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] si une courbe solution coupe la courbe  $f(x, y)=c$  ( $c \in \mathcal{R}$ ) alors elle la coupe en admettant en ce point une tangente de coefficient directeur  $c$ .

Relativement à l'organisation du cours, après la collecte des feuilles de travail, l'enseignant consacra du temps à approfondir ce nouveau concept institutionnalisé à la fin de la précédente séance. Les connaissances suivantes seront transmises aux élèves, à l'aide d'un transparent :

Pour une équation différentielle du type  $y'=f(y)$ , une **isocline** est une (ou une réunion de) courbe (ou plus particulièrement la droite) définie comme  $f(y)=c$  ( $c \in \mathcal{R}$ ) et sur laquelle une courbe solution de l'équation différentielle donnée admet comme tangente une droite de pente  $c$ . L'appellation est en général faite en fonction de la valeur de la pente. C'est-à-dire, la (ou les) courbe(s) ayant comme équation  $f(y)=c$  est appelée l'*isocline*  $c$ . Plus précisément pour  $c=0$ , on dit qu'il s'agit de l'*isocline* 0, pour  $c=1$  de l'*isocline* 1 etc.

Au point où une courbe solution croise l'isocline  $c$ , la solution a une tangente de pente  $c$  (cf. **Figure 5**). Comme nous voyons sur la figure, la courbe solution croise l'isocline 0 avec une pente 0, c'est-à-dire que la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses, et la même solution coupe l'isocline 1 avec une pente 1.

Nous soulignerons également qu'une pente positive va de pair avec la croissance des courbes solutions et une pente négative avec la décroissance.



**Figure 5**

### 6.2.3.4 Présentation de l'activité n°4

Cette activité a comme objectif d'une part de tester la viabilité du concept d'isocline chez les élèves ou autrement dit la viabilité de **Op. Q.IV**. La voici :

*Calculer les isoclines 1 et 4 de l'équation différentielle  $y'=x^2+y^2$ . Quelle est la nature de ces isoclines ?*

Le travail se passe exclusivement dans le registre algébrique et exige le passage de l'équation aux isoclines. Pour accomplir la tâche proposée, les élèves doivent appliquer la définition acquise à l'activité précédente. Les isoclines recherchées correspondant à  $y'=1$  et  $y'=4$ , sont définies respectivement par  $x^2+y^2=1$  et  $x^2+y^2=4$  qui correspondent, à leur tour, à des cercles de rayons respectivement 1 et 2. Nous insistons sur la nature de ces isoclines pour souligner l'idée que les isoclines ne sont pas forcément des droites. Nous visons ainsi à confronter une éventuelle conviction des élèves qui associe d'une façon perpétuelle les isoclines à des droites. En effet, ils ont travaillé, et ce dès le début, sur des isoclines droites. Donc le fait de changer d'équation différentielle travaillée dès le début est important pour mener à bien la transmission de ce concept.

Par ailleurs, la forme de l'équation différentielle a été choisie volontairement afin de distinguer les éventuels élèves qui auraient fait appel à **SQ1** en **A3Q1** mais en partant du fait que « *y doit être constante.* » Une telle attitude amènera à substituer 1 ou 4 à  $y$  d'où on obtient  $x^2+1$  et  $x^2+4$  comme équations pour les isoclines demandées. Par ailleurs, le type d'équation différentielle permet de déterminer les élèves qui auraient fait appel à **SX3** (traitement à l'aide de la seconde activité) en **A3Q1**. Pour l'équation différentielle proposée, de telles stratégies ne sont plus gagnantes.

En ce qui concerne l'organisation du travail en classe, à l'issue du temps imparti l'enseignant corrige et insiste encore une fois sur le fait que des isoclines ne sont pas forcément des droites et peuvent être des courbes quelconques.

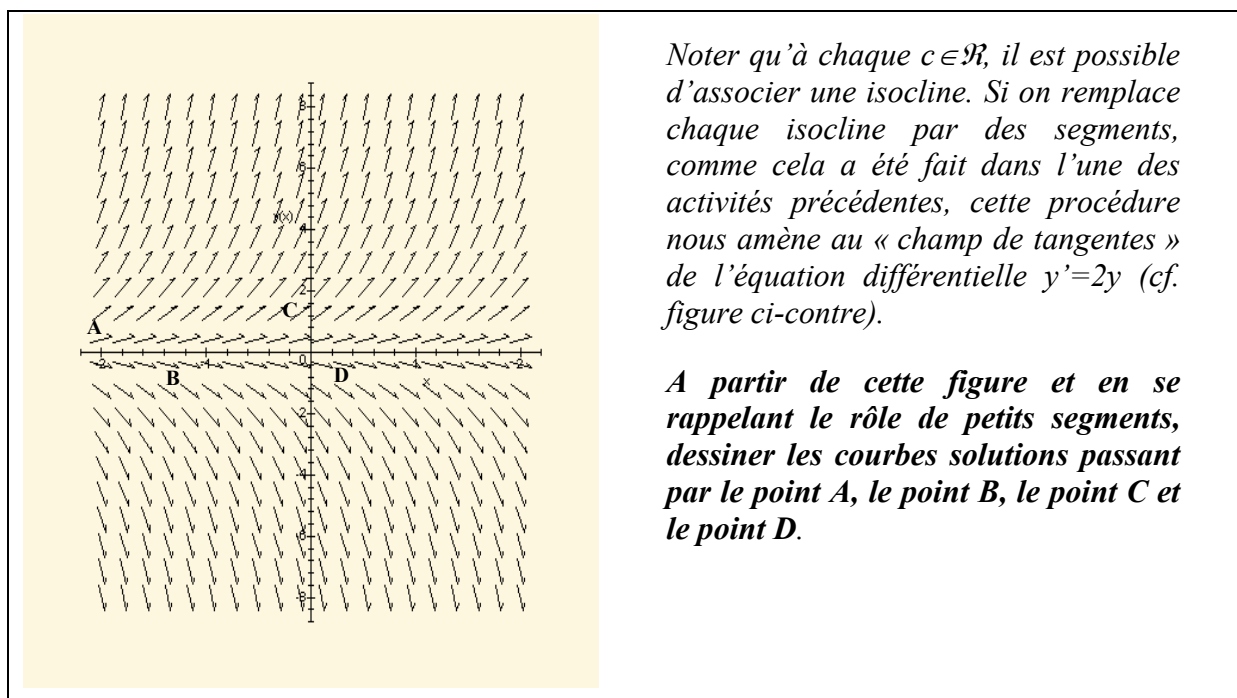
### 6.2.4 PHASE n°3 : Champ de tangentes

Prenant appui sur le concept d'isoclines, cette phase vise l'introduction de la notion de champ de tangentes pour arriver enfin à celle du portrait de phase. Nous avons déjà formulé notre souhait d'opter pour la « méthode des isoclines » qui nous paraît assez adéquate pour obtenir un champ de tangentes, en particulier si on n'a pas un ordinateur à disposition. Remarquons que, pour l'équation différentielle donnée, à chaque point du plan on peut associer une isocline- $c$  ( $c \in \mathcal{R}$ ). Une courbe solution qui croise celle-ci, elle la croise en admettant en ce point une tangente de pente  $c$ . Lorsque l'on remplace l'isocline par des segments, comme cela a été fait en **A2**, on arrive au *champ de tangentes* de

l'équation différentielle. A partir de ce dernier, il sera possible de tracer une courbe solution passant par un point donné. Basé sur ces réflexions, nous proposons l'activité suivante :

### 6.2.4.1 Présentation de l'activité n°5

Suite à la présentation professorale de l'analyse ci-dessus, rappelée également via le petit paragraphe introductif dans l'énoncé, les élèves travaillent l'activité n°5. Celle-ci, considérée comme un passage de CdT à Graph[y], en plus de l'introduction de ces nouveaux concepts, vise également à introduire le théorème d'existence - « pour un point donné du plan, il existe une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ), passant par ce point. » Le théorème d'existence et d'unicité sera institutionnalisé à l'issue de l'activité suivante. Voici **A5** :



#### (a). Connaissances requises et difficultés prévues :

Afin de pouvoir traiter correctement l'activité, la seule connaissance mise en jeu est la conceptualisation des segments étudiés à la deuxième activité. Cette capacité découle en fait de la bonne conceptualisation de la notion de tangente. L'activité met l'accent sur le fait qu'en chaque point du plan, la tangente à une courbe solution passant par ce point est bien définie suivant certains critères. Les élèves doivent en conséquence veiller à ce que les courbes tracées soient dûment tangentes aux petits segments de la figure donnée. Toujours en termes d'opérateurs, nous visons donc l'acquisition de l'opérateur **Op. Q.VII** et **Op. Q.VIII**. Signalons que, contrairement à l'opérateur **Op. A.III**, le premier n'exige pas forcément le recours à l'expression algébrique de la fonction. Nous les introduisons ci-dessous :



**Op. Q.VII :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] Si une courbe donnée est une courbe solution alors, en chacun de ses points, le coefficient directeur de la tangente à cette courbe est égal à la valeur de  $y'$  calculée grâce à l'équation différentielle.

**Op. A.III :** si  $g(x)$  est une fonction solution de  $y'=f(x, y)$  alors elle doit vérifier l'équation différentielle [i.e.  $g'(x)=f(x, g(x))$ ].

Les élèves risquent de se tromper en ce qui concerne l'axe des abscisses qui représente une courbe solution et qui, compte tenu du théorème d'existence et d'unicité, ne doit donc être coupée par aucune autre courbe solution. Mais nous tenons à noter que « *le théorème d'existence et d'unicité* » n'est pas encore traité.

### **(b). Les stratégies de la résolution :**

Il est inutile de parler de stratégies pour cette activité. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que les élèves peuvent accomplir la tâche avec différents raisonnements dans la tête : conformément à la constatation de Rasmussen (1998a), il est possible par exemple que les redoublants de la classe tracent les courbes demandées en s'appuyant sur leurs connaissances antérieures sans se préoccuper des segments et qu'ils essaient ainsi d'imiter la fonction exponentielle, connue en tant que solution de l'équation différentielle donnée. En effet, ces élèves ont déjà étudié les équations différentielles et ils sont donc censés connaître l'allure des courbes solutions de l'équation différentielle en question. En ce qui concerne les non redoublants, ils viennent d'étudier la fonction exponentielle et connaissent sa représentation graphique. En établissant le lien entre l'équation différentielle et la fonction exponentielle, il ne doit pas être surprenant que ces élèves tracent une représentation graphique de la fonction exponentielle.

En ce qui concerne l'organisation du travail dans la classe, les élèves disposent de cinq minutes pour tracer les courbes demandées. Suite au ramassage des feuilles de travail, le tracé des courbes sera donné à l'aide des transparents. L'enseignant fait ensuite remarquer que plus les isoclines sont serrées, plus la précision est affinée. Cette correction sera suivie du moment d'institutionnalisation du concept de « *champ de tangentes* » et nous proposons à l'enseignant la définition ci-dessous. Nous tenons à signaler que l'objectif de cette activité ne peut se résumer au seul fait d'introduire le champ de tangentes, mais aussi elle vise à le faire fonctionner. C'est ainsi que les élèves apprennent à tracer les courbes solutions en s'appuyant sur le champ de tangentes et travaillent le *portrait de phase*. Néanmoins afin d'éviter une éventuelle confusion entre notions chez les élèves, le portrait de phase ne sera pas institutionnalisé et nous nous sommes contenté de le présenter par un dessin.

**Le champ de tangentes** (ou champ de directions) : nous avons constaté qu'à l'aide de l'équation différentielle, il est possible d'associer à chaque point  $(x_0 ; y_0)$  du plan une tangente. La représentation de ces tangentes par des segments constitue un champ de directions pour l'équation différentielle en question.

L'enseignant explique ensuite le lien étroit entre les isoclines, le champ de tangentes et les tracés des courbes solutions et insiste sur le fait qu'une courbe solution passant par un point est tangente au segment en ce point. En effet, ce segment n'est qu'un représentant de la tangente au point concerné. Il souligne par ailleurs le lien entre la nature de l'équation différentielle (sans aller jusqu'à dire qu'elle est autonome) qui ne dépend que de  $y$  et la translation verticale des courbes solutions. Cette translation est exprimée en fait par l'opérateur suivant qui n'est pas explicité dans la conception algébrique :

**Op. Q.VIII** : Si  $C_I$  est une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=f(y)$  (resp.  $y'=f(x)$ ), toute courbe  $C$  qui se déduit de  $C_I$  par translation horizontale (resp. verticale) est aussi solution.

## 6.2.5 PHASE n°4 : Théorème d'existence et d'unicité

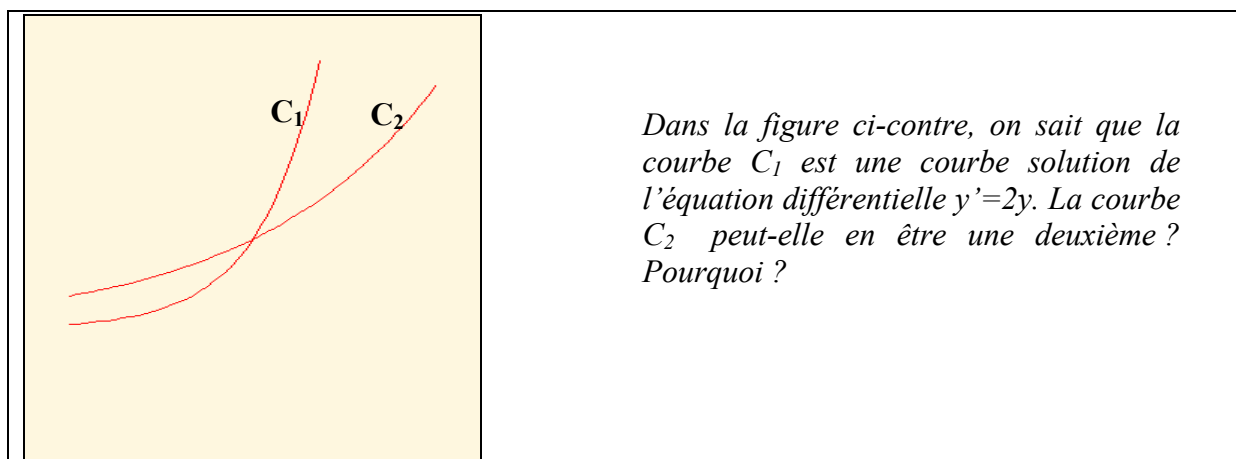
L'activité suivante vise à institutionnaliser le théorème d'existence et d'unicité qui est l'un des points fondamentaux du programme de la classe de Terminale (cf. partie B) :

**Théorème 1** (existence et unicité):

« Par un point  $(x_0 ; y_0)$  passe une et une seule courbe représentative d'une solution de l'équation différentielle  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ). »

### 6.2.5.1 Présentation de l'activité n°6

Cette activité correspond au passage des courbes solutions (**Graph[y]**) à l'équation différentielle (**ED**) en passant éventuellement par les **Isoclines**. Son objectif primordial est l'introduction du *théorème d'existence et d'unicité*. Le traitement de cette activité sera suivi de l'énoncé de ce théorème qui sera admis. Bien qu'elle ne soit pas explicitée, l'existence a été *grosso modo* évoquée en **A5** et l'unicité sera donc donnée grâce à cette activité où nous souhaitons faire remarquer que deux courbes solutions d'une équation différentielle du type  $y'=2y$  -ou plus généralement de la forme  $y'=ay+b$  ( $a, b \in \mathcal{R}$ )- ne se coupent jamais. L'activité est la suivante :



**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Pour réaliser la tâche, l'élève doit interpréter les unités significatives de  $y'=2y$  pour observer les variations concomitantes au sein des tangentes à des courbes solutions ou des isoclines. Ainsi, l'équation différentielle en question associe à chaque point donné du plan un seul coefficient directeur, soit une seule tangente. Dans l'énoncé de cette activité, qui est un cas particulier d'intersection, ce raisonnement en termes de tangente permet d'accomplir la tâche puisque les courbes possèdent des tangentes différentes au point d'intersection, elles ne peuvent pas être toutes deux solutions de  $y'=2y$ . Or, on aurait pu imaginer deux courbes qui possèdent une seule tangente au point d'intersection. Dans de tels cas, le raisonnement en termes de tangente au point d'intersection ne permet plus de trancher. Un remède peut être le recours aux isoclines. Cette technique permet de résoudre la tâche dans des cas plus particuliers que celui proposé dans cette activité, mais aussi des cas plus généraux que l'est la situation dans laquelle, au point d'intersection, les courbes ont la même tangente. Pour ce faire, sur une horizontale (i.e. une isocline), les courbes solutions possèdent des tangentes de même coefficient directeur. Les deux courbes données ne vérifiant pas ces conditions, elles ne peuvent pas être toutes deux solutions.

Soulignons néanmoins que dans de telles situations où il s'agit de « *déterminer si une courbe donnée est solution ou non d'une équation différentielle donnée* », il est généralement plus facile de prouver le cas négatif. En d'autres termes, il suffit de trouver un point où la (ou les) courbe(s) donnée(s) ne satisfait pas l'équation différentielle pour la rejeter. Or pour prouver que la courbe donnée est effectivement solution (cf. par exemple l'activité **AE5** de la séance d'évaluation), le contrôle doit être effectué pour tous les points de la courbe ce qui est généralement difficile, voire impossible. Pour remédier à cela, nous avons généralement recours à la généralisation. En d'autres termes nous effectuons le test pour des points soigneusement choisis et lorsque ceci s'avère sans problème, nous supposons que ceci est bon pour l'ensemble. Nous y reviendrons dans l'analyse de **AE5**.

**(b). Les stratégies de la résolution :**

Trois stratégies, dont la seconde paraît davantage plausible que les deux autres, s'avèrent possibles pour le traitement de cette tâche :

**SA1** consiste à faire appel à la résolution algébrique afin de comparer les deux courbes solutions. La solution générale de l'équation différentielle en question étant  $y=Ce^{2x}$ , deux solutions quelconques sont  $y=C_1e^{2x}$  et  $y=C_2e^{2x}$ . Un simple raisonnement algébrique permet de voir que deux solutions sont soit disjointes soit confondues, ce qui n'est pas le cas dans l'énoncé. Cette stratégie est attendue plutôt chez les redoublants.

**SQ1** consiste à raisonner via les concepts de « **tangente** » ou d'« **isocline**. » Il s'agit plus précisément de prouver qu'au point d'intersection les deux courbes possèdent des tangentes différentes. Or, au point  $(x_0, y_0)$ , l'équation  $y'=2y$  admet une seule tangente ayant comme pente  $2.y_0$ . Ou bien, pour parler des isoclines : sur une même isocline, deux courbes solutions de  $y'=2y$  possèdent des tangentes parallèles. Puisque ce n'est pas le cas dans la figure proposée, alors les deux courbes ne peuvent pas être, toutes deux, solutions de cette équation différentielle. Cette activité vise donc l'acquisition de l'opérateur suivant, dérivé de **Op. Q.VIII** :

**Op. Q.IX** : si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ), alors elles découlent l'une de l'autre par une translation horizontale.

**SX3** consiste à répondre en imaginant les **courbes solutions déjà connues**. En effet, les élèves viennent d'étudier en **A5** la forme et la disposition des courbes solutions de l'équation différentielle en question qui sont invariantes par une translation horizontale.

Continuer à travailler avec la même équation différentielle représente un double intérêt : d'une part nous donnons la possibilité aux élèves qui auraient tracé des courbes croisées en **A5** de se corriger ou de s'exprimer. D'autre part nous visons à repérer les élèves, ou plutôt les redoublants, répondant à l'aide des connaissances antérieures. Puisque ceux-ci connaissent déjà la forme des courbes solutions, ils risquent de répondre correctement à l'activité précédente sans forcément connaître le statut des petits segments.

**6.2.6 Synthèse de l'analyse *a priori* des deux premières séances**

La *première séance* a pour objectif d'introduire au fur et à mesure le concept d'isocline. Une fois que les variations des fonctions solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$  sont étudiées (**A1**), les élèves sont amenés à découvrir que sur des droites horizontales les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions sont invariants tandis que sur des droites verticales ils changent conformément à l'étude faite à l'activité précédente (**A2**).

Quant à la *seconde séance*, outre l'approfondissement de certains concepts et techniques transmis la séance précédente, elle vise l'apprentissage d'autres nouveaux concepts et techniques (champ de tangentes, tracé des courbes solutions). Elle débute par l'activité **A3** qui fait le point de la séance précédente, suivie par **A4** qui illustre le concept d'isocline. Ensuite **A5** présente le champ de tangentes tout en amorçant le théorème d'existence et d'unicité. Et finalement, la dernière activité vient compléter ce théorème.

Les deux séances mobilisent trois registres (algébrique, graphique et tableau de variations) et cinq représentations (**ED**, **Isocline**, **TdV**, **CdT** et **Graph [y]**). Le travail tantôt reste enfermé dans l'un de ces registres, tantôt exige un passage de l'un vers l'autre sans privilégier un sens. Les difficultés principales auxquelles les élèves sont confrontés lors de cette première séance sont l'absence de technique pour étudier les variations d'une fonction dont ils ne connaissent pas l'expression algébrique, l'originalité et la nouveauté de l'équation  $y'=2y$  grâce à laquelle ils doivent calculer le coefficient directeur des tangentes, le fonctionnement des liens entre les variations d'une courbe, le signe de la dérivée et celui du coefficient directeur des tangentes.

Rappelons en outre que les deux séances visent l'instauration explicite des opérateurs qualitatifs cités tout au long de l'analyse, mais également la déstabilisation temporaire de quelques autres opérateurs qui s'avèrent inadaptés pour les situations proposées et qui peuvent risquer de constituer des entraves pour la transmissions des opérateurs visés.

En prérequis, aucune connaissance élaborée n'est exigée. Les compétences et les connaissances que nous visons à enseigner à travers ces deux séances sont les suivantes :

- étude des variations d'une fonction sans que son expression et/ou l'expression de sa dérivée soit explicitée,
- calcul du nombre dérivé d'une fonction dont la dérivée n'est pas explicite,
- les liens existants entre les variations des courbes solutions, les signes de la dérivée et les signes des coefficients directeurs des tangentes,
- les solutions ( $y$ ) d'une équation différentielle sont des fonctions,
- ce que représente une équation différentielle et qu'elle possède une infinité de solutions.
- ce que représentent les isoclines d'une équation différentielle et qu'elles peuvent être des courbes quelconques et pas forcément des droites,
- calculer les isoclines d'une équation différentielle grâce à celle-ci,
- s'approprier le rôle des « *petits segments* » présentés à l'activité **A2**,
- utiliser les concepts d'isocline et de tangente pour justifier,

- la méthode des isoclines pour représenter un champ de tangentes,
- dessiner, conformément à un champ de tangentes donné, des courbes solutions vérifiant des conditions initiales données,
- connaître les courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$ , ainsi que la propriété suivante qui découle du théorème d'existence et d'unicité : deux de ses courbes ne se coupent jamais,
- le théorème d'existence et d'unicité,

Cette liste ne se veut bien évidemment pas exhaustive. En effet, notre but ne consiste pas à empiler les connaissances, mais à choisir celles qui nous paraissent essentielles pour notre étude. Nous répondons ainsi à une étude qualitative globale telle que nous l'avons présentée dans le chapitre A2.

## 6.2.7 PHASE n°5: Evaluation

### 6.2.7.1 Présentation générale de la séance et des activités proposées

Dans cette dernière séance, les élèves travaillent en binôme et ils sont divisés en deux groupes nommés **A** (les cinq premiers binômes) et **B** (les quatre binômes restants). Chacun des groupes confronte sept activités dont quatre sont communes à toute la classe et les trois activités restantes sont fonction du groupe, soit dix activités au total. Les activités 2, 4, 5 et 6 sont communes et par souci de simplicité, elles seront évoquées respectivement par **AE2**, **AE4**, **AE5** et **AE6**. Il s'avère que les activités 1, 3 et 7 dépendent du groupe qui sera évoqué en indice du label de l'activité : par exemple **AE1<sub>A</sub>** ou **AE7<sub>B</sub>**. Concernant l'organisation du cours, les activités seront distribuées deux par deux et la durée maximum conseillée pour traiter les activités **AE2**, **AE4** et **AE6** est de 10 minutes, alors qu'elle est de cinq minutes pour les activités restantes.

#### Les activités communes :

Etant donné le champ de tangentes de l'équation  $y'=y^2-x$ , en **AE2** il a été demandé aux élèves de tracer des courbes solutions passant par des points donnés. Partant du graphe de l'équation de  $y'=2y$  dans le plan  $(y, y')$ , **AE4** consiste à étudier les variations de  $y$ , et à déterminer ainsi l'allure de la courbe solution passant par le point  $(0 ; 1)$ . En **AE5** où la représentation graphique de la parabole  $y=2x^2$  est donnée sans que l'expression soit communiquée, nous demandons aux élèves si cette courbe est ou non une courbe solution de  $y'=x$ . Enfin en **AE6**, il leur est demandé d'associer des équations différentielles à des champs de tangentes.

#### Les activités spécifiques aux groupes :

Nous nous sommes contraint, pour ces activités, à proposer des variantes similaires et qui évaluent relativement les mêmes connaissances. Ainsi, les variantes **AE1<sub>A</sub>** et **AE1<sub>B</sub>** proposent respectivement

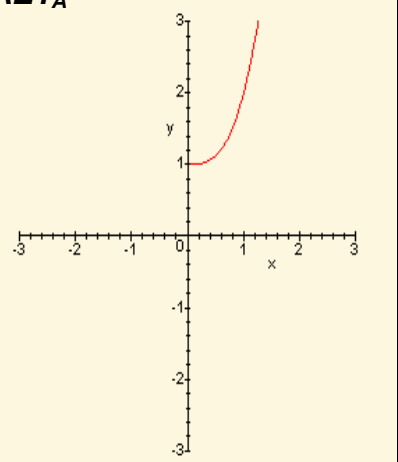
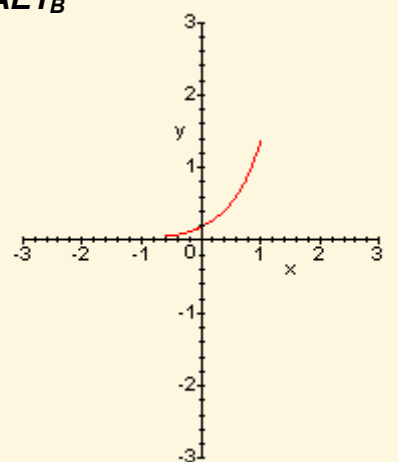
une courbe chacune, et demandent si ces courbes peuvent satisfaire respectivement les équations  $y'=y^2$  et  $y'=2y+1$ . Quant aux variantes **AE3<sub>A</sub>** et **AE3<sub>B</sub>**, la première demande si l'équation  $2y'=e^{-x^2}$  peut avoir des courbes solutions décroissantes tandis qu'en **AE3<sub>B</sub>**, il s'agit d'expliquer pourquoi une droite à coefficient directeur négatif ne peut être tangente à aucune courbe solution de l'équation  $2y'=y^2$ . En ce qui concerne la dernière activité, en **AE7<sub>A</sub>**, il s'agit de trouver le point de tangence entre l'équation différentielle  $y'=2y$  et la droite d'équation  $y=x$ . Enfin en **AE7<sub>B</sub>**, sachant que la droite  $y=2$  est l'isocline- $\delta$ , il s'agit de déterminer la constante  $a$  dans l'équation différentielle  $y'=ay$ .

### 6.2.7.2 Analyse a priori des activités

Nous nous consacrerons dans ce qui suit à étudier les activités proposées dans l'ordre chronologiques :

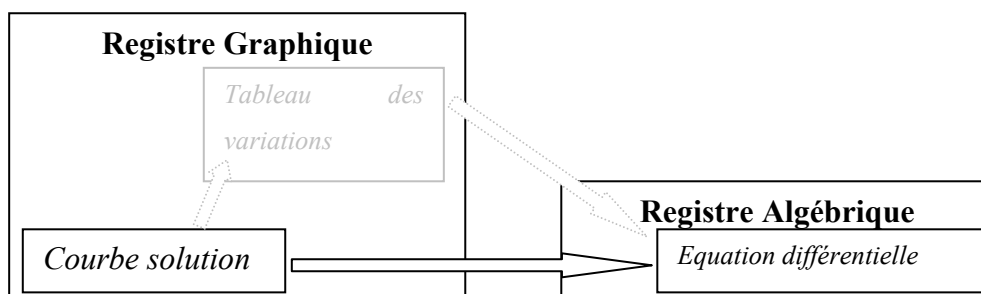
#### 6.2.7.3 Présentation de l'activité n°1 : AE1

Il s'agit plus précisément, dans cette activité, de reconnaître si une courbe donnée est solution d'une équation différentielle donnée. Les énoncés des variantes sont donnés dans l'encadré suivant :

<p><b>AE1<sub>A</sub></b></p> 	<p><b>AE1<sub>B</sub></b></p> 
<p><i>La courbe dessinée ci-dessus peut-elle être une courbe solution de l'équation différentielle <math>y'=y^2</math> ? Justifier votre réponse.</i></p>	<p><i>La courbe ci-dessus peut-elle être une courbe solution de l'équation différentielle <math>y'=2y+1</math> ? Justifier votre réponse.</i></p>

La tâche proposée ici peut être considérée comme l'analogue géométrique de la tâche algébrique suivante qui fait l'objet de la classe de Terminale : « vérifier si une expression algébrique donnée est fonction solution d'une équation différentielle donnée. » Pour s'acquitter de la tâche algébrique, après avoir éventuellement dérivé l'expression algébrique fournie, il suffit de remplacer chaque entité (l'expression de  $y$ , sa dérivée, sa dérivée seconde, etc.) dans l'équation différentielle en question. Alors que pour accomplir la tâche proposée en **AE1**, il faut identifier et interpréter des unités

significatives graphiques et les variables visuelles pertinentes pour les relier à celles algébriques. La tâche proposée nécessite donc le passage du **Graph[y]** dans le registre graphique à celui de l'équation différentielle (**ED**) dans le registre algébrique, en passant éventuellement par les variations des courbes solutions (i.e. **TdV** qui est volontairement flou dans le Tableau 8 ci-dessous) :



**Tableau 8** : Changement de registres en **AE1**.

Notons que **AE1**, outre l'évaluation des acquisitions des outils qualitatifs, elle vise à tester si les élèves ont plutôt tendance à adopter un raisonnement algébrique ou graphique. Bien que  $y'=y^2$  ne soit pas à la portée des élèves, ils peuvent y accéder par tâtonnement. En ce qui concerne l'équation  $y'=2y+1$ , elle est accessible aux redoublants.

En outre, la variante **AE1<sub>B</sub>** vise à mettre en évidence une éventuelle confusion entre  $y'=2y$  et  $y'=2y+1$ . Il est à remarquer que la courbe donnée est une courbe solution de l'équation  $y'=2y$ , alors que l'équation proposée par l'énoncé est  $y'=2y+1$ . D'ailleurs, le fait de donner des courbes de la forme exponentielle représente une variable didactique, pour les deux variantes, qui sert à mettre à l'épreuve l'existence d'une éventuelle conception selon laquelle l'élève associe, à toute équation différentielle, des courbes de cette forme. Sans recourir à aucune stratégie de résolution, il se peut que les élèves, conformément à cette conception, donnent une réponse affirmative. Une telle attitude paraît plus probable chez le groupe **B** qui fait face à une disposition plus familière de la courbe exponentielle dans le plan.

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Les élèves ont déjà travaillé une tâche semblable à la fin de la séance précédente (cf. **A6**) et il suffit de mobiliser l'un des opérateurs acquis les deux premières séances de l'ingénierie (en particulier **Op.Q.I**, **Op. Q.III**, **Op. Q.IV** ou **Op. Q.VII**) afin de pouvoir traiter l'activité.

**(b). Les stratégies de la résolution :**

Vu la tâche proposée, les stratégies attendues sont très proches pour des deux variantes :



**SA1** consiste, rappelons-le, à la **résolution algébrique** des équations différentielles fournies. Bien que les deux équations proposées ne soient pas à la portée des élèves, cette stratégie semble plausible et ce surtout pour les élèves redoublants du groupe **B**. La résolution algébrique donne  $y=Ce^{2x}-1$  qui représente des courbes exponentielles verticalement translatées par rapport à celles de l'équation  $y'=2y$ . La courbe donnée n'y étant pas conforme, elle est rejetée. En ce qui concerne les binômes du groupe **A**, ils ne peuvent avoir accès à la solution générale de l'équation  $y'=y^2$  que par tâtonnement, puisque celle-ci dépasse largement leur niveau. La résolution de cette équation donne  $y=\frac{-1}{(x+c)}$  qui représente des hyperboles. La courbe soumise n'y satisfaisant pas, elle peut être rejetée.

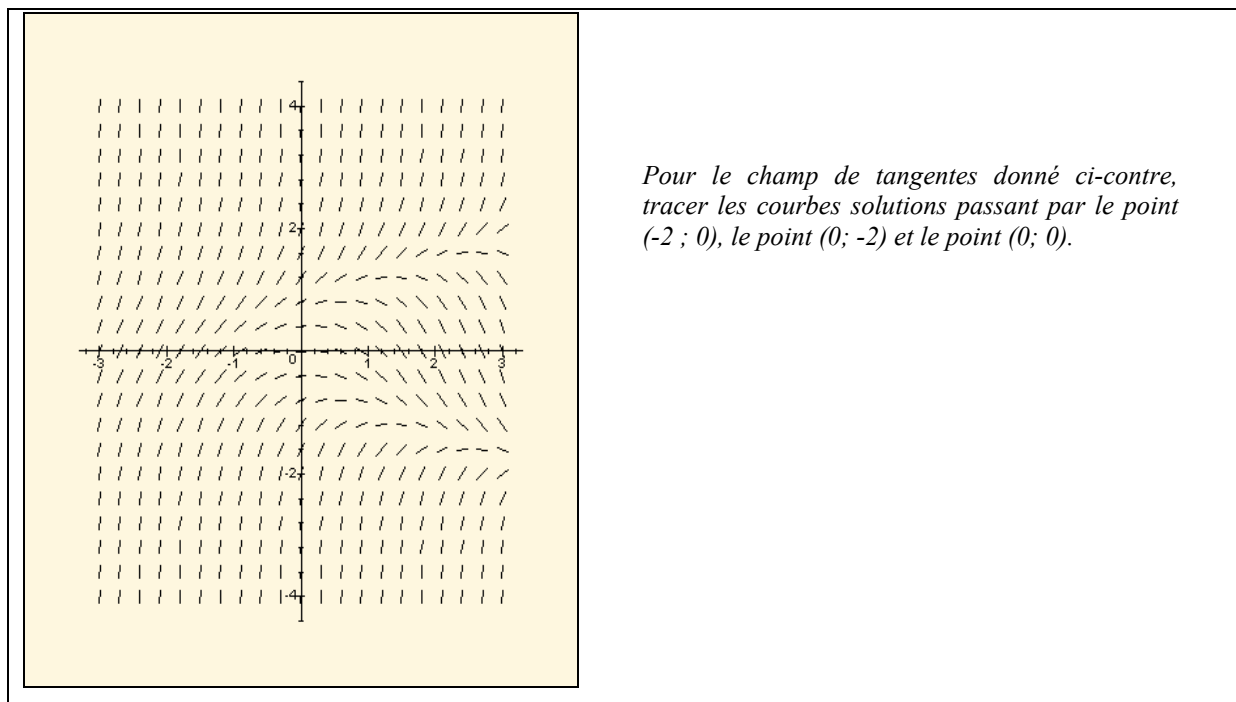
**SQ1** : cette stratégie peut émerger en deux procédés dont le second peut être également mis en œuvre via les isoclines. Elle peut être mise en œuvre grâce à la comparaison des **variations** de la courbe proposée à celles des courbes solutions de l'équation différentielle (**Op.Q.I**). D'autre part, cette stratégie peut être mise en œuvre de la manière suivante : en calculant, à l'aide de l'équation différentielle, le **coefficient directeur** en un (ou plusieurs) point convenablement choisi sur la courbe, on constate qu'il ne correspond pas au coefficient directeur observé sur la figure (**Op. Q.III**, **Op. Q.IV** ou **Op. Q.VII**). Par exemple pour **AE1<sub>A</sub>**, un point pertinent est (0 ; 1). En effet, le coefficient directeur de la tangente en ce point est 1 d'après le calcul, alors qu'il est nul d'après la figure.

**SX2** : cette stratégie, rappelons-le, consiste à **confondre** les courbes solutions de l'équation différentielle proposée avec celles de  $y'=2y$  qui est la seule équation différentielle étudiée en détail par les élèves et qui leur est donc devenue familière.

Signalons que l'apparition de cette dernière stratégie chez élèves peut être interprétée en termes d'obstacle didactique. Nous y reviendrons le cas échéant dans l'analyse *a posteriori*.

#### 6.2.7.4 Présentation de l'activité n°2 : AE2

Cette activité porte sur l'évaluation du concept de *champ de tangentes* et teste la capacité des élèves à tracer des courbes compatibles avec un champ de directions donné. Rappelons qu'il s'agit de la même tâche qu'en **A5**, mais en revanche le champ de tangentes donné à cette activité est celui de  $y'=y^2-x$  :



Pour éviter la répétition des propos dits en **A5**, nous nous contenterons de rappeler quelques points qui nous paraissent importants. Signalons tout d'abord que le champ de tangentes fourni en **A5** peut être qualifié par « simple » et « régulier. » De surcroît l'équation différentielle fournie en **A5**, déjà familière aux redoublants, l'est devenue à tous les élèves. Or cette fois-ci, il s'agit d'un champ de tangentes plus « compliqué » et, dont les courbes solutions ne sont plus symétriques par rapport à l'axe des abscisses contrairement à celles de l'équation  $y'=2y$ . De surcroît, contrairement aux courbes solutions de  $y'=2y$ , celles de  $y'=y^2-x$  peuvent couper l'axe des abscisses. Par ailleurs, en fonction de la précision du tracé de l'élève, les courbes passant par l'origine et par  $(0 ; -2)$  peuvent s'unir ou non (cf. Figure 6). Nous aimerions voir comment les élèves se comportent compte tenu du théorème d'existence et d'unicité qu'ils viennent d'étudier. Les élèves ont appris, au moment de l'institutionnalisation de ce théorème en **A6**, que deux courbes solutions d'une équation différentielle de la forme  $y'=ay$  ne se coupaient pas. Comment adapteront-ils ce théorème à cette nouvelle situation ? Il est fort probable que les traces écrites des élèves ne fournissent pas d'éléments de réponse à cette question. Nous espérons en trouver dans la transcription des enregistrements audio. En résumé, trois aspects peuvent entraver le tracé des courbes demandées : les diverses formes qu'ont les courbes solutions, le fait qu'elles dépassent l'axe horizontal et enfin le fait qu'elles « contredisent » le théorème d'existence et d'unicité.

Comme il a été présenté plus haut, le tracé des courbes requises représentera deux courbes qui ont à peu près la même allure et qui se ressemblent, alors que la troisième diffère largement des deux premières (cf. Figure 6). Un tracé décent doit se baser sur la bonne interprétation des segments. A défaut, nous pouvons nous attendre à ce que certains élèves cherchent à déformer leur tracé en vue d'obtenir des courbes allant dans le même sens et qui sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.

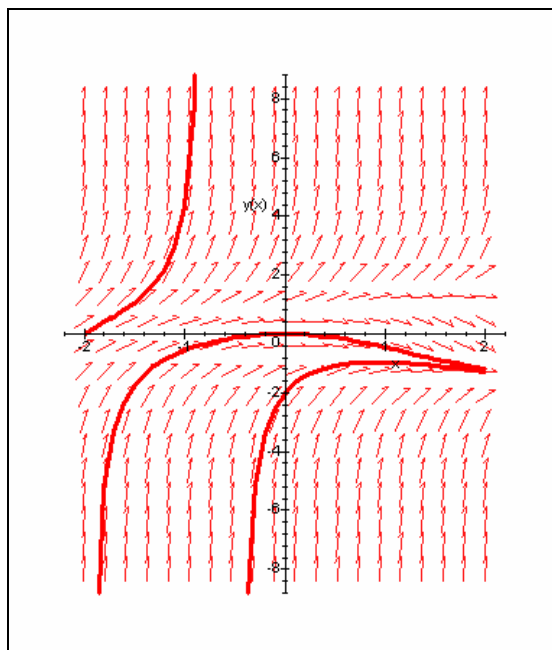


Figure 6 : Tracé, par Maple, des courbes solutions demandées.

### 6.2.7.5 Présentation de l'activité n°3 : AE3

Cette activité a pour objectif de tester l'assimilation de la relation « *entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée* » (propriété-1) pour la variante **AE3<sub>A</sub>** et de la relation « *entre le signe de la dérivée et le signe du coefficient directeur de la tangente* » (propriété-2) pour la variante (**AE3<sub>B</sub>**). Certains travaux (Uwimana, 2002) ont révélé que les élèves manifestaient des difficultés pour comprendre ces relations, mais aussi des conceptions erronées relative à ces relations. Nous pensons de ce fait que cette activité fournira une occasion pour évaluer l'apprentissage des élèves à ce sujet. Voici les énoncés :

**AE3<sub>A</sub>**: Pour l'équation différentielle  $2y' = e^{-x^2}$ , est-il possible de trouver un intervalle où les solutions de cette équation sont décroissantes ?

**AE3<sub>B</sub>**: Dites pourquoi la droite  $y = -2x$  ne peut être tangente à aucune courbe solution de l'équation différentielle  $2y' = y^2$ .

Remarquons que les équations différentielles fournies sont de la forme  $2y' = f(x; y)$ , au lieu de  $y' = f(x; y)$  pour voir si l'ajout d'un coefficient pour  $y'$  influence les conduites des élèves.

#### (a). **Connaissances requises et difficultés prévues :**

Afin d'accomplir les tâches proposées, les élèves du groupe **A**, gardant en mémoire la propriété « *la fonction exponentielle n'est jamais négative* », doivent mobiliser l'opérateur **Op.Q.I** qui fait le lien entre les variations des courbes solutions et le signe de la dérivée dans une équation différentielle. En ce qui concerne les élèves du groupe **B**, après avoir identifié le coefficient directeur d'une droite sous

la forme  $y=ax$  ( $a \in \mathcal{R}$ ), ils doivent faire appel à **Op. Q.III** et **Op. Q.IV**. Puisque les équations différentielles données ne peuvent pas être résolues par les élèves, aucun opérateur algébrique parmi ceux présentés ci-dessus ne conduit à l'accomplissement de la tâche.

En ce qui concerne la tâche à accomplir, les élèves du groupe **B** sont face à une tâche nouvelle dans le cadre de l'ingénierie tandis que des tâches similaires à celle proposée en **AE3<sub>A</sub>** ont déjà été fournies (par exemple, l'étude des variations des courbes solutions d'une équation différentielle). Il convient néanmoins de noter que l'équation différentielle proposée en **AE3<sub>A</sub>** risque d'être confondue avec la solution générale, puisqu'elle contient la fonction exponentielle.

Pour traiter les deux variantes, l'identification du signe de la dérivée est donc nécessaire. Il s'ensuit que la dérivée étant strictement positive dans les deux équations différentielles, les courbes solutions ne sont jamais décroissantes (pour **AE3<sub>A</sub>**) et aucune courbe solution ne possède une tangente à coefficient directeur négatif (pour **AE3<sub>B</sub>**). Puisque la droite proposée aux élèves possède un coefficient directeur négatif, elle ne peut être tangente à une courbe solution.

### (b). Les stratégies de la résolution :

Pour ce qui est des stratégies attendues pour s'acquitter des tâches proposées dans cette activité, nous pensons que deux stratégies sont *a priori* possibles :

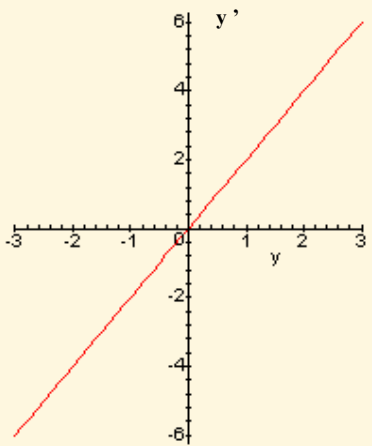
**SQ1** où, grâce au diagnostic du signe de la dérivée à l'aide de l'équation différentielle, il s'agit de mobiliser les opérateurs qualitatifs cités ci-dessus afin de s'acquitter de la tâche.

**SA1** consiste à résoudre les équations différentielles fournies et ne peut pas être mise en œuvre par les élèves du groupe **A**. Néanmoins ceux du groupe **B** peuvent, avec tâtonnement, découvrir la solution générale ou une seule solution de l'équation différentielle donnée. Ainsi, essayant par exemple  $y=-1/x$ , ils s'apercevront que cette expression vérifie l'équation. Notons que cette tentative de résolution des équations peut être faite soit en vue de traiter directement les tâches, soit afin de déterminer le signe de la dérivée. Dans tous les cas, un tel procédé soulignera encore une fois la résistance de la conception algébrique qui exige forcément la disponibilité de l'expression algébrique. Néanmoins à l'issue de deux séances traitant une étude qualitative, une telle réponse nous paraît très peu probable.

#### 6.2.7.6 Présentation de l'activité n°4 : AE4

Il s'agit dans cette activité où la tâche nécessite une conversion du registre graphique (**Graph[y']**) à celui du tableau de variations des courbes solutions (**TdV**), de tester la capacité des élèves à établir et à interpréter la relation entre  $y'$ ,  $y$  et la variable indépendante  $x$ . L'activité propose une tâche déjà connue des élèves dans le registre algébrique (cf. **A1**), ceux-ci doivent néanmoins identifier graphiquement le signe de la dérivée. Ceci nous permettra de ce fait de faire une comparaison entre les

deux activités. Certes, le choix de l'équation différentielle  $y'=2y$  facilite la tâche des élèves puisque l'équation est devenue familière mais d'autre part ce choix se justifie par le fait de tester une éventuelle tendance à donner  $y'=2x$  comme équation de la droite. L'énoncé de l'activité est le suivant :

	<p><i>Pour l'équation différentielle <math>y'=f(y)</math>, le graphe de <math>f</math> est donné comme ci-contre. A l'aide de ce graphe, établir le tableau de variation de <math>y</math>. Que peut-on dire des variations de la courbe solution passant par le point <math>(0 ; 1)</math> ?</i></p>
---	---

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Les informations tirées de la représentation graphique doivent être exprimées dans le registre de la langue naturelle, éventuellement à l'aide d'un tableau de variations. Une fois que le signe de la dérivée est ainsi identifié, **Op.Q.I** peut être mobilisé afin de traiter les variations des courbes solutions de  $y'=f(y)$ . Pour pouvoir identifier les variations de la courbe solution passant par le point donné, il suffit de repérer que celui-ci a comme ordonnée 1 et que la courbe solution se situe dans la partie où les courbes solutions sont croissantes.

Nous nous attendons à des difficultés majeures relativement à cette activité. En effet, une telle tâche n'étant pas présente dans l'enseignement secondaire on peut même s'attendre à des difficultés lors de la dévolution du problème. Contrairement aux tâches relatives à la *lecture graphique* et institutionnalisées dans l'enseignement, la tâche proposée à travers cette activité consiste à interpréter une équation algébrique en se basant sur la représentation graphique de sa dérivée. De surcroît ce qui est nouveau dans cette tâche, ce sont les variables en fonction desquelles le graphique est établi. Les élèves sont habitués à étudier des graphiques représentés à l'aide des variables indépendante et dépendante. Or dans cette activité, le graphique est donné en fonction de la variable dépendante et de sa dérivée. Il s'agit donc là d'un saut conceptuel notable pour les élèves.

**(b). Les stratégies de la résolution :**

Concernant les réponses attendues des élèves, notons que la conception algébrique ne fonctionne qu'à condition de donner une expression à la droite donnée. Les élèves sont donc en quelque sorte forcés de recourir à la conception qualitative. Voici les stratégies attendues :

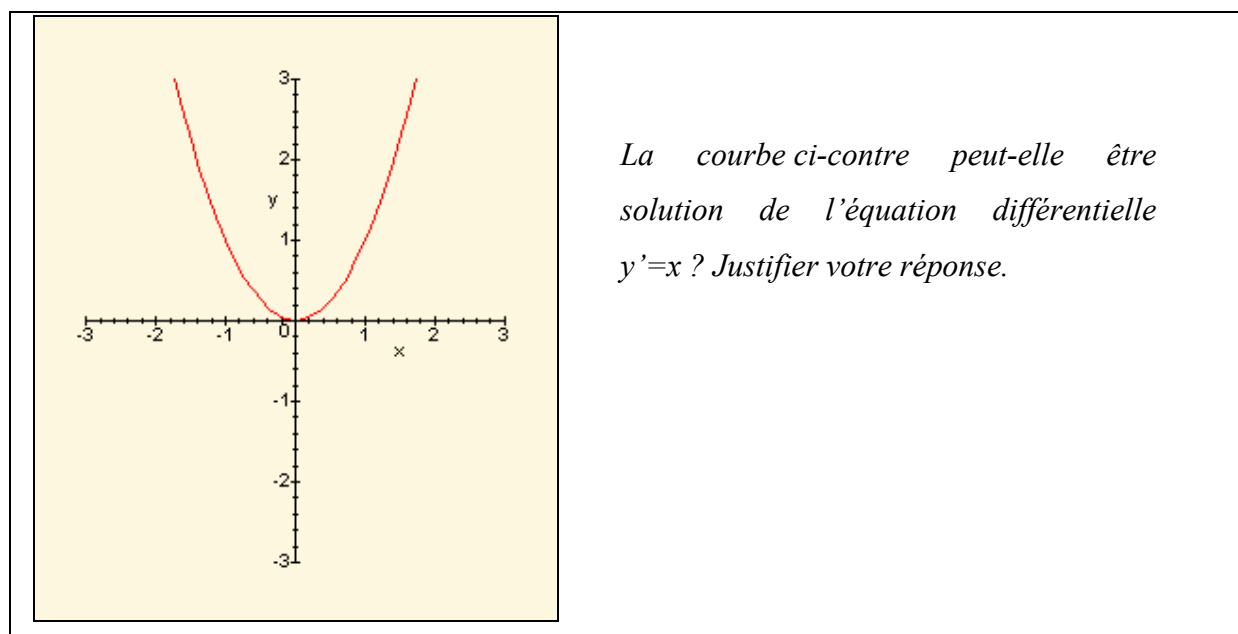
**SA1** consiste à donner une **équation à la droite** proposée pour obtenir l'équation différentielle  $y'=2y$ . La tâche se transforme ainsi en celle proposée en **A1**.

**SQ1** consiste, suite à la lecture graphique, à obtenir le signe de la dérivée (**Op.Q.I**), d'où l'étude des variations demandées.

**SX4** : compte tenu du système d'enseignement qui propose exclusivement des graphes illustrant l'objet en cours d'étude, le graphe donné risque d'être considéré comme « la représentation graphique » d'**une solution**, voire de l'équation différentielle elle-même qui est un nouvel objet pour les élèves. On peut ainsi s'attendre à une confusion entre la courbe solution dont les comportements sont demandés et la droite représentée dans la figure. Il est ainsi possible que les élèves proposent comme variations, les comportements de la droite en question qui est strictement croissante.

### 6.2.7.7 Présentation de l'activité n°5 : AE5

Cette activité est conçue dans la même perspective que la précédente, dans la mesure où elle vise à vérifier si les élèves font appel à la résolution algébrique ou s'ils se servent des opérateurs qualitatifs récemment acquis. Soulignons par ailleurs que la tâche proposée est la même qu'en **AE1**, mais contrairement à celle-ci, l'équation différentielle proposée est une recherche de primitive et la classe entière est censée savoir la résoudre. Ceci est volontaire afin de tester une éventuelle tendance des élèves à privilégier un raisonnement algébrique. Voici l'activité proposée :



En ce qui concerne le changement de représentations, il s'agit de passer de **Graph[y]** à **ED**. Pour ce faire, les élèves peuvent faire appel aux isoclines (**Isoclines**) ou éventuellement à l'étude des variations des courbes solutions (**TdV**), mais aussi à la solution générale :

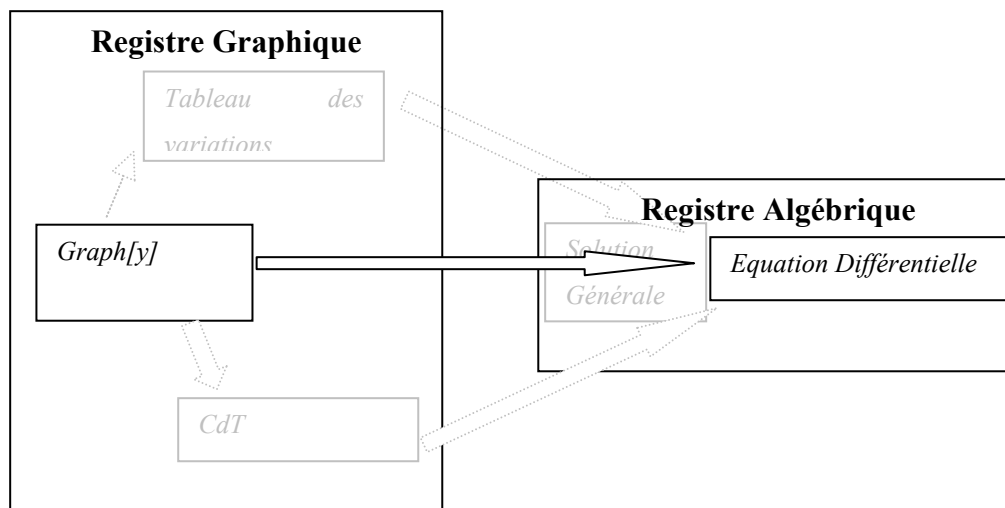


Tableau 9 : Changement de registres en AE5.

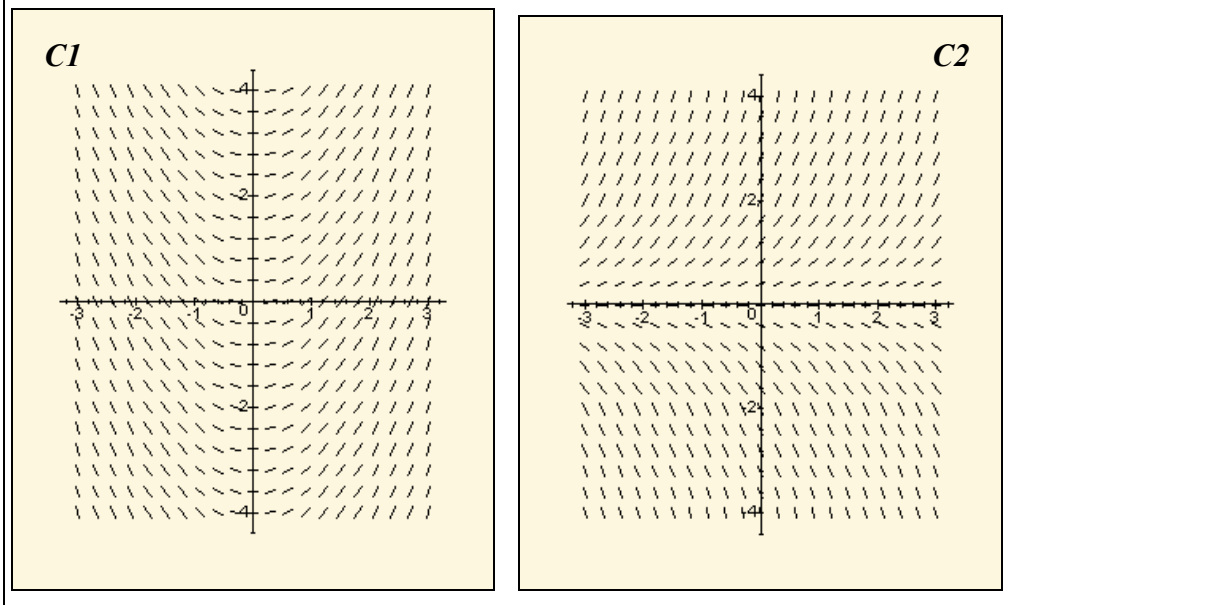
Lorsqu'il s'agit d'une courbe solution, il est souvent difficile d'avoir tous les éléments nécessaires pour s'acquitter de la tâche sans impliquer la résolution algébrique en raison de la difficulté de vérifier si toutes les conditions sont satisfaites. Par exemple, lorsque l'on a recours aux tangentes à la courbe en question, pour tester si celle-ci est solution ou non, il n'est pas possible de faire le test pour toutes les tangentes à cette courbe. Il est néanmoins possible d'avoir un point de vue global grâce aux implicites (par exemple vérifier pour quelques tangentes et conjecturer que c'est bon pour tout le reste). En revanche lorsque la courbe n'est pas solution et qu'il y a une anomalie (comme c'était le cas en AE1), la tâche est plus facile et il suffit par exemple de trouver un seul point où il y a une incompatibilité entre le dessin et le calcul pour dire que « *la courbe n'est pas une courbe solution.* » Ainsi ce point est la seule difficulté à laquelle les élèves risquent donc d'achopper et compte tenu du contrat didactique, une telle situation risque de devenir un vrai embarras pour les élèves. Nous avons eu recours intentionnellement à une telle variable didactique afin d'observer les outils que les élèves mettent en œuvre pour s'acquitter de la tâche. Nous envisageons ainsi d'obtenir des données sur les nouveaux concepts légués. Notons par ailleurs que ce que nous jugerons dans les productions des élèves c'est le raisonnement adopté et non pas la conclusion à laquelle ce dernier serait amené.

Les connaissances mises en jeu et les stratégies auxquelles les élèves peuvent avoir recours pour s'acquitter de la tâche sont sans doute les mêmes que celles citées pour AE1.

### 6.2.7.8 Présentation de l'activité n°6 : AE6

La tâche proposée ici consiste à associer des équations différentielles à des champs de tangentes en justifiant son choix. Elle consiste donc en une navette entre le CdT dans le registre graphique et ED dans le registre algébrique, en passant, éventuellement, par le registre *de tableau de variations* :

Associer à chacun des champs de tangentes donné ci-dessous (C1, C2) l'une des équations différentielles :  $y'=x$ ,  $y'=y$ ,  $y'=y-x$ . (Attention l'une de ces équations ne peut être associée à aucun champ de tangentes). Justifier votre réponse.



En ce qui concerne les connaissances mises en jeu et les stratégies attendues pour cette activité, elles sont identiques à celles requises en **AE1**. Pour ne pas complexifier la situation, les équations proposées sont relativement élémentaires à part la dernière. Le fait de donner des équations différentielles familières permet de tester si les élèves font appel à la résolution algébrique pour réaliser la tâche.

### 6.2.7.9 Présentation de l'activité n°7 : AE7

Cette activité consiste à tester l'assimilation du concept d'isocline pour le groupe **B** et la relation entre le coefficient directeur de la tangente et les variations des courbes solutions (propriété-1) pour le groupe **A**. Les deux variantes ayant des objectifs relativement distincts, contrairement aux activités précédentes, nous les analyserons distinctement. L'encadré suivant présente les deux énoncés. Notons que le choix d'un type d'équation différentielle, devenu familier aux élèves, a pour but de préserver les élèves des calculs encombrant et d'éviter ainsi qu'ils s'égarer dans d'autres tâches que la tâche visée.

*AE7<sub>A</sub>: Trouver le point de tangence entre une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y$  et la droite  $y=x$ .*

*AE7<sub>B</sub>: Pour l'équation différentielle  $y'=ay$ , les courbes solutions admettent, sur la droite  $y=2$ , des tangentes de pente 6. Quel est le coefficient de  $y$  dans l'équation  $y'=ay$  ?*



**Variante A : AE7<sub>A</sub>**

Cette variante met à l'épreuve de nouveau le rapport des élèves aux objets « *dérivée* » et « *coefficient directeur*. » Elle ressemble en réalité à AE3<sub>B</sub> où il s'agit de prouver pourquoi une droite de coefficient directeur négatif ne peut jamais représenter une tangente pour une équation différentielle où la dérivée n'est jamais négative. Or dans cette activité les élèves vont plus loin et sachant que la droite proposée est tangente à l'une des courbes solutions de l'équation différentielle en un point, ils ont comme tâche de déterminer ce point.

Avant de détailler l'analyse de cet item, interrogeons-nous sur l'existence et l'unicité d'un tel point de tangence entre une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y$  et la droite  $y=x$ . Est-ce qu'il y a une solution de l'équation différentielle  $y'=2y$  de telle sorte que la droite  $y=x$  soit tangente ? La solution générale de  $y'=2y$  est  $y=Ce^{2x}$  ( $C \in \mathcal{R}$ ). Soit  $y=C_1e^{2x}$  ( $C_1 \in \mathcal{R}$ ) la fonction solution à condition particulière et à laquelle la droite  $y=x$  est tangente. Il en résulte que celle-ci doit vérifier l'expression de la fonction solution quelque part puisque les deux objets possèdent un point commun  $(x_0, y_0)$  et en ce point le coefficient directeur de la tangente est  $2C_1e^{2x_0}$ . Or selon l'expression algébrique de la droite, celle-ci a 1 comme coefficient directeur. D'où  $2C_1e^{2x_0} = 1$  et  $C_1 = \frac{1}{2}e^{-2x_0}$ . Remplaçant  $C_1$  dans l'expression algébrique de la fonction solution, on obtient  $y_0 = \frac{1}{2}e^{-2x_0} \cdot e^{2x_0}$  d'où  $y_0 = \frac{1}{2}$  et  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Il en résulte que la droite  $y=x$  est tangente à la courbe représentative de  $y = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1}$  au point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

*Une tangente, ne peut-elle pas être tangente à une deuxième solution ?* Le raisonnement par l'absurde amène à la réponse. Supposons que la droite  $y=x$  soit tangente à deux courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$ . Puisque conformément au théorème d'existence et d'unicité, par un point passe une et une seule courbe solution, cette droite est tangente aux deux solutions respectivement aux points  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$ . Puisque la droite  $y=x$  vérifie ces points, on peut prendre  $x_0 = y_0 = a$  et  $x_1 = y_1 = b$ . Or les fonctions solutions vérifiant ces conditions initiales sont respectivement  $y = ae^{2(x-a)}$  et  $y = be^{2(x-b)}$ . D'autre part le nombre dérivé de ces deux fonctions doit être 1 aux deux points en question puisque le coefficient directeur de  $y=x$  est 1. Il en résulte que  $y' = 2ae^{2(x-a)} \Rightarrow y'(a) = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$  et  $y' = 2be^{2(x-b)} \Rightarrow y'(b) = 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ . Il résulte de cette analyse que  $x_0 = y_0 = a = x_1 = y_1 = b = \frac{1}{2}$ . D'où  $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ , la droite en question ne peut être tangente qu'à une seule courbe solution.

**(a). Connaissances requises et difficultés prévues :**

Soulignons que les élèves font face encore une fois à une tâche non institutionnalisée ; ils sont cependant censés posséder les outils nécessaires pour s'en acquitter. Certaines connaissances et propriétés sont à rendre opérationnelles. En d'autres termes, afin de pouvoir traiter correctement cet item, il faut connaître ce que signifie l'équation différentielle  $y'=2y$  et pouvoir ainsi connaître le statut de  $y$  et de  $y'$ . Après la reconnaissance du coefficient directeur d'une droite de la forme  $y=ax$  ( $a \in \mathcal{R}$ ), la mobilisation, en particulier, de l'opérateur **Op. Q.III** doit amener à une bonne réponse.

Parmi les difficultés auxquelles les élèves risquent de faire face, nous pouvons souligner le fait de considérer l'équation de la tangente comme une solution de l'équation différentielle. En effet, comme nous l'avons souligné lors de l'analyse des programmes et des manuels, la tâche « *vérifier si une expression algébrique donnée est ou non fonction solution d'une équation différentielle donnée* » fait partie de l'institution secondaire. La tâche proposée par **AE7<sub>A</sub>** risque d'être identifiée à la tâche qui fait partie de l'institution secondaire.

**(b). Les stratégies de la résolution :**

Pour ce qui est des stratégies attendues, nous énumérons les suivantes :

**SQ1** : sachant que  $y'$  est le coefficient directeur de la tangente (**Op. Q.III**) et la droite donnée ayant  $l$  comme coefficient directeur, cette stratégie consiste à supposer qu'au point de tangence, le coefficient directeur doit être  $l$  d'où  $y'=l$ . Il en résulte que  $2y=l \Rightarrow y=l/2$ . Une fois que l'ordonnée du point de tangence est déterminée, il suffit d'utiliser l'équation de la droite afin d'en calculer l'abscisse : pour  $y=l/2$ , l'équation  $y=x \Rightarrow x=l/2$ . D'où les coordonnées du point de tangence :  $(l/2 ; l/2)$ .

D'autre part, s'appuyant sur le concept d'**isocline**, un autre raisonnement peut être mis en œuvre mais il est très peu probable : le coefficient directeur de la droite donnée étant  $l$ , le point de tangence se situe sur l'isocline  $l$ . Or pour  $y'=2y$ , l'isocline en question est définie par la droite  $y=l/2$ . Il en résulte que le point cherché possède  $l/2$  comme ordonnée. Puisque le point se situe sur la droite d'équation  $y=x$ , son abscisse est identique à son ordonnée. Néanmoins, un tel raisonnement étant sophistiqué, il peut être difficile à mettre en œuvre par ces élèves débutants.

**SA1** : cette stratégie paraît plausible chez les redoublants qui sont censés connaître la résolution algébrique de l'équation différentielle  $y'=2y$ . Le procédé sera probablement similaire à ce que nous avons présenté ci-dessus au moment où nous avons justifié l'existence d'un tel point de tangence. Néanmoins le recours à cette stratégie paraît difficile à gérer par les élèves.

**Variante B : AE7<sub>B</sub>**

Restant dans le registre algébrique, il s'agit dans cette variante de faire des allers-retours entre **ED** et **Isocline**, bien que ce dernier concept ne soit pas explicité par l'énoncé. Elle vise à évaluer le sens algébrique donné au concept d'isocline. A part **A3**, ce nouveau concept a été évoqué plutôt dans le cadre graphique et dans le sens **ED**  $\rightarrow$  **Isocline**. Or nous procédons ici à l'inverse : connaissant une isocline, il s'agit de la relier à son équation différentielle dont on connaît certains éléments.

En ce qui concerne les **connaissances requises**, les élèves doivent mobiliser l'opérateur **Op. Q.V**. L'expression « *les courbes solutions admettent, sur la droite  $y=2$ , des tangentes de pente 6* » doit amener à remarquer que l'isocline-6 est la droite d'équation  $y=2$ . Il en résulte que  $y'=6$  lorsque  $y=2$ .

D'où la réponse :  $6=y'=a.2 \Rightarrow a=3$ . Une fois que la définition du concept d'isocline est acquise, la tâche ne doit pas présenter de difficulté aux élèves.

## 6.2.8 Synthèse de l'analyse *a priori* de la troisième séance

Au total, dix activités sont proposées aux élèves qui travaillent par binôme et sont face éventuellement à des activités différentes selon le groupe où ils se trouvent. Grâce à des équations différentielles de la forme  $y'=f(x, y)$ , une grande variété de tâches sont proposées afin de révéler des différents opérateurs mis en œuvre par les élèves. La séance mobilise les registres algébrique, graphique et celui de tableau de variations et cinq représentations sont explicitement impliquées : **ED**, **Isocline**, **CdT**, **Graph[y]** et **Graph[y']**, tandis que **TdV** et éventuellement la **solution générale** restent implicites du fait du choix que nous avons fait. Pour ce qui est du passage d'un registre à l'autre, il n'y a pas un sens privilégié au détriment d'autres : nous avons donné place à des activités enfermées au registre algébrique ou au registre graphique, mais il existe aussi des activités qui vont de l'un de ces deux registres à l'autre ou à celui de tableau de variations et vice-versa.

Aucune nouvelle connaissance n'est visée lors de cette séance, or nous essayons de rendre explicites pour les élèves certaines techniques, telle celle d'associer un champ de tangentes à une équation différentielle. La séance vise par ailleurs à mettre davantage l'accent sur la relation entre une tangente et une isocline tout en renforçant l'assimilation des liens entre le signe de la dérivée et le coefficient directeur de la tangente et les variations des solutions. D'autre part, la séance reprend certaines activités proposées durant les deux séances précédentes dans le registre algébrique, en les proposant cette fois-ci dans le registre graphique. L'objectif d'une telle volonté consiste à évaluer l'influence du registre algébrique sur les raisonnements des élèves. En d'autres termes, nous aimerions savoir si une tâche réussie dans le registre algébrique achoppe à des difficultés dans le registre graphique. Par exemple, reprenant la tâche proposée en **A1**, nous avons ainsi proposé d'étudier les variations des courbes solutions  $y$  de l'équation différentielle  $y'=2y$  sans avoir communiqué cette dernière expression. En revanche la relation entre  $y$  et  $y'$  est donnée par une droite dans le plan orthonormé  $(y, y')$ .

Dans la suite de notre travail, nous procéderons à la présentation effective de notre ingénierie et verrons dans quelle mesure nos objectifs sont atteints.

## CHAPITRE C2 :

*Notre analyse sera structurée en fonction des séances tout en restant chronologique. Pour chaque activité proposée, tout en essayant de rappeler son objectif et éventuellement les stratégies attendues pour s'acquitter de la tâche proposée, nous essayerons de faire une analyse quantitative et ensuite qualitative en fonction des stratégies utilisées par les élèves. Avant de terminer l'analyse de l'activité en cours par une synthèse, nous présenterons les éventuelles difficultés que nous aurons pues repérer.*

# 7 ANALYSE A POSTERIORI DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

Dans les chapitres précédents, nous avons modélisé les approches algébrique et qualitative en termes d'opérateurs et nous nous sommes fixé comme objectif l'apparition des opérateurs de la conception qualitative. Rappelons tout d'abord les opérateurs dont l'apparition est visée. Cette liste d'opérateurs sera au fur et à mesure enrichie par d'autres opérateurs (algébriques ou qualitatifs, erronés ou corrects) effectivement construits par les élèves.

**Op.Q.I :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $y$  une fonction solution définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ ] si  $y'$  est strictement positive (resp. négative) dans un ouvert  $U$  et si le graphe de  $y$  est contenu dans  $U$  alors  $y$  est strictement croissante (resp. décroissante) sur  $I$ .

**Op. Q.II :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] si une courbe solution est croissante (resp. décroissante) en un intervalle  $I$  alors les coefficients directeurs des tangentes à cette courbe sont positifs (resp. négatifs) dans  $I$ .

**Op. Q.III :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] le coefficient directeur de la tangente à une courbe solution passant par  $A(x_0, y_0)$  est  $y'=f(x_0, y_0)$ .

**Op. Q.IV :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] si  $y'$  est positive (resp. négative) dans un ouvert  $U$  alors les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions sont positifs (resp. négatifs) dans  $U$ .

**Op. Q.V :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathfrak{R}^2$ ] si  $f(x, y)$  est constante alors  $y'$  l'est également.

**Op. Q.VI :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathfrak{R}^2$ ] si une courbe solution coupe la courbe  $f(x, y)=c$  ( $c \in \mathfrak{R}$ ) alors elle la coupe en admettant en ce point une tangente de coefficient directeur  $c$ .

**Op. Q.VII :** [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathfrak{R}^2$ ] si une courbe donnée est une courbe solution alors, en chacun de ses points, le coefficient directeur de la tangente à cette courbe est égal à la valeur de  $y'$  calculée grâce à l'équation différentielle.

**Op. Q.VIII :** Si  $CI$  est une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=f(y)$  (resp.  $y'=f(x)$ ), toute courbe  $C$  qui se déduit de  $CI$  par translation horizontale (resp. verticale) est aussi solution.

**Op. Q.IX :** si  $CI$  et  $C2$  sont deux courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=ay$  ( $a \in \mathfrak{R}$ ), alors elles découlent l'une de l'autre par une translation horizontale.

Afin de tester l'approbation de ces opérateurs, nous procéderons en deux parties dans l'analyse *a posteriori* : la première où les quatre premières phases de l'ingénierie sont analysées afin de voir les conditions de transmissions des opérateurs visés. Dans la seconde partie, nous présenterons l'analyse de la dernière phase, soit la séance d'évaluation. Lors de cette analyse, nous essayerons d'apporter des éléments de réponse aux questions ci-dessous :

- Les opérateurs dont l'acquisition est visée par notre ingénierie, ont-ils apparu ? Y a-t-il d'autres opérateurs qualitatifs corrects qui ne sont pas spécifiquement visés par l'ingénierie mais qui ont quand même apparu ?
- Quels sont les facteurs (d'autres opérateurs, d'autres conceptions, registre, etc.) qui ont entravé l'apparition des opérateurs visés ? Et quels sont en particulier ces opérateurs inappropriés ?
- Dans quelle mesure les registres et les changements de registres ont constitué des difficultés pour les élèves ou ont favorisé leur travail ?

Notons que pour garder l'anonymat des élèves, ceux-ci seront codés par **EN** où N correspond au numéro de l'élève. Un élève redoublant sera mentionné par **E<sub>r</sub>N**. Ainsi, **E10** désigne l'élève 10, alors que **E<sub>r</sub>11** correspond à l'élève 11 qui est un redoublant.

## 7.1 Les quatre premières phases de l'ingénierie

Dans ce qui suit, nous analyserons les six activités et le devoir à la maison, qui s'inscrivent dans les quatre premières phases de l'ingénierie.

### 7.1.1 Activité n°1

Il s'agit dans cette activité, qui vise l'acquisition de l'opérateur **Op.Q.I**, d'étudier les variations de  $f$  pour l'équation différentielle  $f''=2.f$ . Pour pouvoir les étudier, il faut tout d'abord identifier le signe de  $f'$ , tâche à laquelle les élèves sont habitués. Mais le problème qui se pose ici est le fait que les élèves ne disposent pas de l'expression algébrique de  $f'$ . Cette dernière est exprimée en fonction de  $f$  qui donne accès au signe de la dérivée. Ceci dit les variations doivent être fournies par les élèves en fonction de la variable dépendante ( $y$  ou  $f$ ) et, la variable indépendante  $x$  reste implicite comme c'est détaillé dans l'analyse *a priori*. Dans celle-ci, nous avons souligné que cinq stratégies (dont trois algébriques) étaient plausibles pour traiter la tâche proposée dans cette activité. Nous les rappelons rapidement : **SA1** consiste à *résoudre* l'équation différentielle afin de, en particulier, identifier le signe de la dérivée ; dans **SA2**, la fonction *exponentielle* est mobilisée ; tandis que **SA3** consiste à déterminer l'expression de  $f$  par une *recherche de primitive* ou l'*intégration* de  $f'(x)=2.f(x)$ . Par ailleurs, nous avons noté une stratégie qualitative, **SQ1**, qui consiste à déterminer le *signe* de  $f'$  en fonction de celui de  $f$ . Finalement dans **SX1**, il s'agit d'une *confusion* entre  $f'(x)=2.f(x)$  et  $f'(x)=2x$ .

Tout en tenant en compte de la distinction redoublants/non redoublants, le tableau suivant présente l'analyse des productions des élèves en fonction des stratégies :

	SA1	SA2	SA3	SQ1	SX1	Autres	Total
<b>Réussite/dont redoublants</b>	0/0	0/0	0/0	3/1	-	0/0	4/2
<b>Echec /dont redoublants</b>	2/2	3/1	2/2	3/1	-	4/1	13/7
<b>Total Recours/ dont redoublants</b>	2/2	3/1	2/2	6/2	-	4/1	17/9

**Tableau 10 :** Tableau récapitulatif des stratégies suivies en fonction du type d'élèves (redoublants ou non).

Ce tableau met en évidence que la confusion entre  $f'(x)=2f(x)$  et  $f'(x)=2x$  n'a pas eu lieu et que la stratégie optimale (**SQ1**) est la plus utilisée. Viennent ensuite **SA2** et, avec deux copies chacune, les stratégies **SA1** et **SA3**. Compte tenu de ce tableau, nous constatons que parmi les huit redoublants seuls deux ont adopté la stratégie qualitative. Nous présenterons ci-dessous une analyse détaillée en fonction des stratégies apparues. Evoquons cependant quatre élèves (catégorie « **Autres** ») dont deux se contentent de recopier l'expression de départ, tandis qu'un troisième, désespéré, y ajoute simplement le domaine de définition :  $]-\alpha, +\infty[$ . Quant au quatrième élève, il nous était difficile d'interpréter sa production dont la reproduction est la suivante : «  $2.f(x)>0 \Rightarrow f(x)=\frac{f'(x)}{2} \Rightarrow$

$f'(x) > 0$  » Bien qu'il n'y ait aucune conclusion faite par l'élève, nous avons l'impression qu'il essaie d'exprimer le signe de la fonction en fonction de la dérivée.

### Stratégie SQ1

Parmi les six élèves qui ont su associer le signe de  $f''$  à celui de  $f'$ , seuls trois élèves ont abouti à une étude des variations, mais sans avoir examiné le cas de  $f''=0$ . Dans l'**Extrait 10**, nous donnons à titre d'exemple le raisonnement de l'élève **E10** et celui de **E17** qui s'est contenté d'examiner les cas où  $f' < 0$  et  $f' > 0$ . On présume, pour cet élève, que le temps lui a manqué, car son dernier mot est incomplet.

E10	E17
<p><math>si f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0</math> donc <math>f</math> est croissante</p> <p><math>si f(x) \leq 0, f'(x) \leq 0</math> donc <math>f</math> est décroissante.</p>	<p><math>f'(x) = 2f(x)</math></p> <p><math>si f(x) &gt; 0 \Rightarrow f'(x) &gt; 0 \Rightarrow f(x)</math> sera une fonction croissante</p> <p><math>si f(x) &lt; 0 \Rightarrow f'(x) &lt; 0 \Rightarrow f(x)</math> sera une fonction décroiss</p>

**Extrait 10** : Productions des élèves **E10** et **E17**.

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse *a priori*, les productions des élèves mettent en évidence leur difficulté à donner un statut à  $x$  et à donner les variations en fonction des intervalles. Néanmoins, ces productions peuvent être interprétées de la manière suivante : si  $f(x)$  est solution de  $f' = 2f$ , tant que le graphe de  $f$  reste dans une région du plan où  $f'$  est positif (resp. négatif), la fonction  $f$  est croissante (resp. décroissante). Si un tel graphe passe par l'axe des abscisses ( $y=0$ ), il a en ce point une tangente horizontale.

Conformément à nos attentes, et comme cela est développé dans l'analyse *a priori*, les élèves parlent, comme les extraits ci-dessus en témoignent, d'**une** fonction solution –non pas des fonctions-. Nous tenons à noter qu'un tel phénomène n'a rien d'aberrant dans la mesure où les élèves ne connaissaient pas encore la notion d'« équation différentielle » et qu'elle possède une infinité de solutions pour qu'ils puissent interpréter le cas où  $f''=0$  par le fait que la « solution » passant par l'origine est constante. Mais comme cela a été évoqué, nous avons anticipé de tels phénomènes et les élèves seront corrigés à la fin de cette activité lors du moment de correction.

Il convient de mentionner que, parmi les élèves mobilisant cette stratégie, **E12** a procédé à un changement de variables à savoir  $f=X$  et  $f'=X'$  (cf. **Extrait 11**). Une interprétation possible de cette substitution est l'embarras causé par la coexistence d'une fonction et de sa dérivée dans la même expression.

$f'(x) = 2f(x) \quad \text{soit } f = X \text{ et } f' = X'$ $X' = 2X \quad X = X'/2 \text{ donc } X' \text{ est du signe de } X.$
--

**Extrait 11** : extrait de E12.

Parmi les trois élèves restants, **E<sub>r</sub>9** a examiné un seul cas ( $f' < 0$ ) et les deux autres ont simplement indiqué le lien entre le signe de  $f'$  et celui de  $f$  en disant «  $f'(x)$  est du même signe que  $f(x)$  ». La difficulté de ces trois élèves peut trouver son origine dans la gestion des variables ( $x$  et  $f$ ), tâche complexe, comme cela a été évoqué auparavant.

Rappelons que cette activité vise l'acquisition de l'opérateur **Op.Q.I** qui relie le signe de la dérivée à celui de la fonction solution et qui permet d'étudier les variations des courbes solutions en se basant uniquement sur le signe de la dérivée dans l'équation différentielle et sans faire appel aux expressions algébriques des fonctions solutions. Il en résulte que cet opérateur a été mobilisé par les six élèves de cette catégorie.

**Stratégies SA1 et SA2**

Il s'agit de deux stratégies voisines où la fonction exponentielle entre en jeu. C'est la raison pour laquelle nous les étudions simultanément.

Il s'avère à l'analyse *a posteriori* que, bien que l'expression n'ait pas été présentée comme une *équation différentielle*, cinq élèves (dont deux non redoublants) ont établi le lien avec la fonction exponentielle et adopté l'une de ces deux stratégies. Nous nous apercevons que, conformément à notre attente, les deux élèves qui ont mis en œuvre **SA1**, sont effectivement des redoublants. Soulignons que nous ne remarquons pas une volonté d'étudier les variations de  $f$  chez les deux redoublants (**E<sub>r</sub>1** et **E<sub>r</sub>15**) utilisant stratégie, mais plutôt une volonté de rechercher la fonction elle-même, conformément à **Op. A.I**. L'étude des variations des fonctions solutions d'une équation différentielle paraît hors contrat pour ces redoublants qui se sont cantonnés l'année dernière à s'acquitter des trois tâches présentées dans l'analyse des manuels : résoudre algébriquement une équation différentielle, déterminer une courbe solution vérifiant une condition initiale donnée et démontrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle donnée. Revenons à ces deux redoublants : **E<sub>r</sub>15** arrive à résoudre l'équation, tandis que **E<sub>r</sub>1** se trouve désemparé malgré le recours à ses notes de l'année passée<sup>15</sup>. Comme en témoigne l'**Extrait 12**, les deux élèves suivent la même méthode de résolution qui consiste à prendre  $e^{2x}$  et à démontrer ensuite qu'elle satisfait l'expression donnée.

<sup>15</sup> Nous avons constaté pendant le déroulement de l'expérimentation que certains redoublants feuilletaient leurs cahiers de l'année passée et certains élèves consultaient leurs manuels.



E <sub>r</sub> 15	E <sub>r</sub> 1	E18
$f'(x)=2f(x)$ $f(x)=e^{2x}$ d'où $f'(x)=2e^{2x}$ - $e^{2x}$ autre solution $f(x)=ke^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$	$f'(x)=2f(x)$ $f(x)=e^{2x}$ d'où $f'(x)=2e^{2x}$ $\Rightarrow f'(x)=k.f(x)$ . $f(x)=ae^{kx}$ (a réel).	ex : $f(x)=e^{2x}$ $f'(x)=e^{2x} \cdot 2 = 2f(x)$ dans ce cas $f'(x) > 0$ donc $f(x)$ est strictement croissante.

**Extrait 12** : extraits des élèves E<sub>r</sub>15 et E<sub>r</sub>1 pour la stratégie SA1 et de E18 pour la stratégie SA2.

Il convient de noter que nous avons remarqué le même procédé, qui consiste à démontrer que  $e^{2x}$  satisfait l'expression donnée, chez les trois élèves (E18, E3 et E<sub>r</sub>5) de la stratégie SA2, qui commettent l'erreur commune suivante : bien que ceci ne soit pas dit explicitement, la fonction exponentielle  $e^{2x}$  est prise comme l'unique solution de l'équation différentielle fournie. En dérivant cette expression, les élèves obtiennent  $f'(x)=2.e^{2x}$  d'où  $f' > 0$  et résultent que «  $f(x)$  est strictement croissant. » (cf. à titre d'exemple la production de E18 dans la dernière colonne de l'Extrait 12). Il convient de noter que E<sub>r</sub>5 après avoir conclu que «  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in D_f$  », il calcule la limite  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{2x}$ . Ce calcul provient, nous semble-t-il, d'une confusion entre « étude de variations » et celle de « comportement à l'infini. »

On peut penser que l'attitude des trois élèves de la stratégie SA2, provient en partie de l'énoncé de l'activité A1 auquel nous pouvons reprocher de ne pas être suffisamment clair. Ce défaut a été corrigé au moment de la correction de l'activité en question. Cette analyse permet de déboucher sur l'opérateur Op. A.IV suivant dont nous testerons la résistance tout au long de notre ingénierie. Nous vérifierons par ailleurs si cet opérateur est mobilisé pour toute équation différentielle de la forme  $y'=f(x, y)$ . Cet opérateur sera libellé par la lettre A, en référence à la conception algébrique C<sub>A</sub>, puisqu'il est causé par celle-ci :

**Op. A.IV** : la « solution » de l'équation différentielle  $y'=2y$  est  $e^{2x}$ .

Afin de mieux cerner la conduite des élèves recourant aux stratégies SA1 et SA2, intéressons-nous plus particulièrement à deux observables : l'obtention d'une expression algébrique pour  $f(x)$  et le traitement de celle-ci en vue de l'étude de variations (cf. Tableau 11). Comme le montre ce dernier, les deux premiers élèves se sont contentés de donner la solution générale. Concernant l'étude des variations, rien n'indique une telle volonté chez ces élèves. Quant aux élèves de SA2, deux d'entre eux proposent des variations basées sur la supposition  $f(x) = e^{2x}$ .

	SA1		SA2		
	E <sub>r</sub> 1	E <sub>r</sub> 15	E3	E <sub>r</sub> 5	E18
<b>Expression Algébrique</b>	$f(x) = a.e^{kx}$	$f(x) = k.e^{2x}$	$e^{2x}$	$e^{2x}$	$e^{2x}$
<b>Etudes de Variations</b>	sans traitement	sans traitement	sans traitement	faux	faux

**Tableau 11** : Tableau récapitulatif des élèves recourant aux stratégies SA1 et SA2.

Il s'ensuit que, bien que théoriquement possible, aucun élève n'a su identifier les variations grâce à la solution générale alors qu'ils auraient pu le faire comme cela est détaillé dans l'analyse a priori.

### Stratégie SA3

En ce qui concerne cette stratégie où la primitive entre en jeu, deux redoublants la mobilisent. Bien qu'attendue plutôt chez les non redoublants qui viennent d'étudier le concept de « primitive » et qui ne connaissent pas encore l'objet « équation différentielle », cette stratégie a apparue chez les redoublants. Ce phénomène montre très bien à quel point une rupture avec le contrat didactique peut avoir une influence importante sur les comportements des élèves. Tout comme les élèves de SA1, l'intention de ces redoublants ne semble pas avoir comme finalité l'étude des variations de  $f$ , mais plutôt une volonté de déterminer la fonction. Ci-dessous à titre d'exemple la production de E<sub>r</sub>11 :

<i>on prend la primitive <math>f(x)</math> de <math>f'(x)</math> et <math>F(x)</math> celle de <math>f(x)</math></i>		
$f(x) = F(x)^2$	$f(x) = \frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'(x)$	$f'(x) - 2f(x) = 0.$

**Extrait 13** : extrait de E<sub>r</sub>11.

A l'examen de ces deux copies, nous pouvons supposer que toute variable à droite de l'égalité dans une expression algébrique est vue comme une variable indépendante par ces élèves, alors que la variable dépendante se trouverait à gauche de l'égalité. C'est la raison pour laquelle les élèves se permettent d'intégrer  $f$  comme une variable indépendante. Ce raisonnement, renforcé par la limitation de  $f$  à  $e^{2x}$ , nous a conduit à nous poser la question suivante : une équation différentielle est-elle vue comme « fonction » spéciale ou une autre manière d'écrire la fonction exponentielle ? Nous essayerons de trouver des éléments de réponse à cette question tout au long de cette analyse.

**Pour conclure en ce qui concerne cette première activité**, quatre élèves ont donné une « approximation » des variations des fonctions. Compte tenu de la nature de la tâche proposée et de la rupture avec l'enseignement actuel, la réussite des élèves ne doit pas être négligée. Notons qu'au cours de notre observation, les élèves se sont révélés désemparés et nous avons pu constater leur difficulté à comprendre la tâche dont la forme était tout à fait nouvelle pour eux. La question d'un élève, lors du traitement de cette activité, montre la difficulté des élèves à entrer vraiment dans le jeu : « *est-ce qu'on définira la fonction ?* » Il en résulte qu'un aspect qui a entravé la réussite est la nouveauté de la tâche. Nous tenons à rappeler que les élèves qui ont eu recours aux stratégies SA1 et SA3, ainsi que les élèves classés dans la catégorie « autres », ne se soucient pas du signe de la dérivée mais ils cherchent plutôt à déterminer la fonction  $f$ . Bien évidemment, compte tenu de l'opérateur Op. A.I qui exige absolument l'expression algébrique d'une fonction pour pouvoir étudier ses variations, l'identification

de  $f$  peut avoir comme but l'étude de ses variations, mais ceci met en exergue comment un opérateur algébrique entrave l'apparition d'un opérateur qualitatif. La difficulté liée à la nouveauté de la tâche s'est incarnée également par la difficulté de l'*identification du signe de la dérivée*. En effet, à défaut de cette identification l'*étude des variations* ne peut être établie. C'est la raison pour laquelle, nous ne possédons pas de données suffisantes pour évaluer les élèves en terme d'*étude de variations*, si ce n'est l'absence de l'étude du cas où  $f'=0$ .

D'autre part l'absence, chez les élèves, de la technique pour étudier le signe d'une fonction dérivée exprimée à l'aide d'une équation différentielle a provoqué l'émergence d'une part de la stratégie qualitative visée et d'autre part d'autres procédés inadéquats : telle l'attribution d'une seule « fonction solution » à l'équation différentielle fournie ou l'intégrer comme s'il s'agissait d'une fonction. On peut y ajouter l'attitude des élèves qui considèrent la fonction exponentielle comme l'unique « solution » de l'équation différentielle en question (cf. stratégie SA2). Bien évidemment l'apparition de ces procédés inadéquats est renforcée par le choix de la notation à laquelle nous avons eu recours pour introduire l'activité, à savoir  $f$  au lieu de  $y$ . Mais d'autre part, ce choix semble avoir aidé les élèves à interpréter qualitativement une équation différentielle.

Enfin la forte distinction repérée entre redoublants et non redoublants mérite d'être examinée de plus près. Parmi les huit redoublants, seuls deux ont opté pour la stratégie qualitative et un autre se contente de recopier l'expression. Ceci dit cinq redoublants, dont quatre ont donné (ou au moins essayé de donner) une expression à  $f$ , ont opté pour une stratégie algébrique. Ce résultat permet d'une part de confirmer nos attentes relativement au privilège accordé par les redoublants aux stratégies algébriques et d'autre part, il met en évidence l'effet de l'approche algébrique pour l'enseignement de l'étude qualitative<sup>16</sup>. L'analyse a mis en évidence que le recours au qualitatif est de 25% (dont 12% de réussite) chez les redoublants, alors qu'il s'élève à 44% (dont 22% de réussite) chez les non redoublants. Il en résulte que le recours au qualitatif est nettement plus élevé chez les non redoublants que chez les redoublants. En revanche le recours aux stratégies algébriques s'élève à 62% (sans réussite) chez les redoublants alors qu'il est de 22% (avec 11% de réussite) chez les autres. Remarquons, contrairement au cas précédent, que le recours à l'algébrique est manifestement plus fréquent chez les redoublants. Quant aux élèves désemparés, ils représentent 13% des redoublants et 34% des autres élèves. Ceci montre que les non redoublants, soit font appel au qualitatif, soit essayent un autre procédé. Alors que les redoublants préfèrent faire appel à l'algébrique dès qu'ils en ont l'occasion. Ceci confirme notre interrogation quant à l'influence de la résolution algébrique, du moins chez les débutants, pour l'enseignement de l'approche qualitative.

---

<sup>16</sup> Pour permettre une comparaison plus fine entre les redoublants et les autres, nous présenterons une étude en terme de pourcentage. Bien qu'un tel recours ne soit pas décent lorsque le nombre d'échantillons n'est pas suffisamment élevé, nous visons en fait par là une meilleure compréhension de la part du lecteur.

## 7.1.2 Activité n°2

Cette activité, composée de quatre items, fait suite à la précédente et a comme finalité de faire découvrir aux élèves le concept d'isocline. Etant donné l'équation  $y'=2y$ , les trois premiers items demandent aux élèves de calculer les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions aux points situés sur les droites  $x=1$ ,  $y=1$  et  $y=2$  et de représenter ensuite les tangentes par des petits segments sur une grille fournie. Enfin au dernier item, les élèves sont invités à tirer des conclusions en se basant sur des calculs et des tracés réalisés. Ils sont ainsi conduits à remarquer que sur des droites horizontales (i.e. des isoclines pour l'équation donnée), les coefficients directeurs des tangentes aux courbes solutions sont immuables. L'activité confirme par ailleurs les variations obtenues à l'activité précédente : les courbes solutions sont décroissantes au-dessous de l'axe des abscisses (resp. croissantes en dessus) car les coefficients directeurs des tangentes à ces courbes solutions sont négatifs (resp. positifs).

Vu l'énoncé de l'activité, nous la découperons en trois tâches complémentaires dont chacune constituera un observable : primo le *calcul des coefficients directeurs* des tangentes ; secundo le *dessin des tangentes* aux points concernés et tertio la déduction des *conclusions adéquates*. Dans ce qui suit, nous présentons une analyse par rapport à ces trois observables en consacrant à chaque fois une rubrique aux difficultés constatées.

### Calcul du coefficient directeur

Les stratégies attendues pour traiter cette activité sont les mêmes qu'en **A1** : nous nous attendons, dans la catégorie qualitative, à **SQ1** (calcul du **coefficient directeur** grâce à l'équation différentielle) et dans la catégorie algébrique à **SA1** (résolution de l'équation différentielle) ou **SA2** (recours à l'exponentielle). Enfin une confusion entre  $y'=2y$  et  $y'=2x$  n'est pas exclue (**SX1**). Le tableau synoptique<sup>17</sup> suivant présente les données obtenues à la suite de l'expérimentation :

	<b>SQ1</b>	<b>SA1</b>	<b>SA2</b>	<b>Autres</b>	<b>Réussite/TOTAL</b>
<b>Q1</b>	15 (dont 2 N. A.)	-	1 (faux -redoublant)	2 (faux- redoublants)	13/17+1
<b>Q2</b>	14 (dont 1 N.A.)	-	-	0/3 (S.R. – dont 2 redoublants)	13/17
<b>Q3</b>	17	-	-	-	17/17
<b>Réussite/TOTAL</b>	43/46	-	0/1	0/5	43/17

**Tableau 12 :** Tableau récapitulatif des stratégies suivies en fonction du type d'élèves (redoublants ou non).

Ce dernier met en évidence que presque tous les élèves ont eu recours à **SQ1** du moins pour deux items : soit, au total, 46 recours dont trois ne sont pas achevés. Notons que seuls deux élèves ont fait appel à l'équation de la tangente en **A2Q1** pour, probablement, confirmer que le calcul fait correspond

<sup>17</sup> N.A. : réponse non-achevée ; S.R. : sans réponse

bien au coefficient directeur. Néanmoins, y compris ces deux élèves, aucun élève ne s'est servi de l'équation de la tangente pour la tracer. Par ailleurs le tableau ci-dessus révèle que la stratégie SA1 n'a pas du tout été utilisée. En ce qui concerne la fonction exponentielle (SA2), un seul redoublant (E<sub>r</sub>1) y fait appel et ce uniquement lors du premier item.

La dernière colonne de ce tableau témoigne d'une évolution lors du passage du premier item aux deux suivants : en A2Q1, le nombre de réponses avortées (deux non achevées et deux erronées) est de quatre, alors qu'en A2Q2 il y a une réponse non achevée et trois sans réponses et enfin toutes les réponses sont bonnes en A2Q3. Vu l'évolution des élèves, les non-réponses au second item peuvent être imputées à l'insuffisance du temps. Rappelons en effet que cette activité a été proposée sur deux feuilles et en deux temps. Les élèves n'ont sans doute pas convenablement géré le temps et en consacrant un peu plus de temps à Q1, ils ont dû négliger Q2.

La réussite est d'autant plus satisfaisante que le calcul des coefficients directeurs a été en général fait sans aucune difficulté et la reconnaissance du coefficient directeur de la tangente est devenue spontanée en A2Q2 et A2Q3 : en général, les élèves soit calculent pour quelques points et ensuite généralisent, soit concluent sans faire de calcul et déduisent d'emblée à partir de l'équation différentielle. Par exemple E<sub>r</sub>5 qui a eu recours à l'exponentielle à l'activité précédente, affirme dès le premier item que « pour toutes les tangentes leur coefficient directeur sera égal à deux fois de l'ordonnée. ». Malgré la nouveauté de la tâche pour les élèves, cette réussite doit être interprétée comme une réussite de l'intégration de l'opérateur Op. Q.II dont l'activité vise l'acquisition. Il résulte de ces remarques qu'en général, bien que la notation utilisée soit  $y$  et  $y'$  et non pas  $f$  et  $f'$ , les élèves n'ont pas eu de difficultés à reconnaître et à calculer les coefficients directeurs des tangentes. Soulignons en outre que certains élèves se sentaient plus à l'aise avec  $f$  et transformaient la notation fournie par l'énoncé, soit  $y'=2y$  en  $f'(x)=2f(x)$ . Mais vu les résultats, à part quelques problèmes, les élèves semblent avoir assimilé l'utilisation de la notation  $y$  bien que cela soit la première activité où ils s'en servent. Sur les dix-sept élèves, deux ne se sont jamais servis de  $y$ , neuf ont eu recours servent exclusivement à  $y$  et enfin six élèves combinent  $f$  et  $y$ .

Néanmoins, si la **notation** avec  $y$  semble être assimilée par la majorité des élèves, ceci est loin d'être le cas pour certains et elle continue à poser des problèmes. Ces problèmes sont tellement graves qu'ils mettent en cause l'acquisition du concept de « **fonction** » chez les élèves (E<sub>r</sub>9, E<sub>r</sub>1 et E<sub>r</sub>15)<sup>18</sup>. Nous remarquons à travers la production de E<sub>r</sub>9 (cf. Extrait 14) qu'il considère la variable  $y$  comme à la fois indépendante et dépendante. Son attitude consiste à attribuer le statut de « **variable indépendante** » à toute variable située à droite de l'égalité dans une expression algébrique. L'élève se corrige par la suite et calcule  $f'(l)$  pour les six points de Q1 où les abscisses sont  $l$ . Néanmoins la

---

<sup>18</sup> Les propos qui seront exposés par la suite sont barrés par les élèves. Néanmoins les erreurs commises étant significatives, nous avons pris le soin de considérer ces productions.

difficulté de cet élève subsiste à l'item suivant où il s'agit des points sur la droite  $y=1$  (i.e. les ordonnées sont 1). L'élève continue à écrire  $f'(1)$  pour tous les points bien qu'il calcule « correctement » le coefficient directeur qui vaut constamment 2. Ceci dit, pour un point (a ; b), l'élève prend  $f'(b)$  au lieu de  $f'(a)$ .

	E <sub>r</sub> 9	E <sub>r</sub> 1 et E <sub>r</sub> 15
pour le point A <sub>1</sub> (1 ; -3)	$x=1 \Leftrightarrow f(y)=1$ $2*f(y)=$ <i>ex. : <math>f(-3)=1</math></i> $f(y)=y \Rightarrow 2y=2$ $f(y)=1$	<i>pour <math>x=1, y=-3</math></i> <i>pour <math>x=1 y'=2.1=2</math></i> <i>pour <math>y=-3 y'=2.(-3)=-6</math>.</i>

**Extrait 14** : extrait des élèves E<sub>r</sub>9, E<sub>r</sub>1 et E<sub>r</sub>15.

En ce qui concerne E<sub>r</sub>1 et E<sub>r</sub>15, ils considèrent l'équation différentielle donnée à la fois comme  $y'=2x$  et  $y'=2y$  (cf. **Extrait 14**). Ensuite les deux valeurs calculées (i.e.  $y'=2$  et  $y'=-6$ ) pour « le coefficient directeur » au point (1 ; -3) forment curieusement (2 ; -9). Nous constatons à travers la production de E<sub>r</sub>15 que ceci n'est pas dû à un manque d'attention car il barre -6 pour remplacer par -9.

Ces extraits nous montrent clairement que l'utilisation de  $y$  à droite d'une égalité entraîne chez ces élèves un aplatissement entre la variable indépendante et celle dépendante. Nous décrivons l'attitude de ces trois élèves par l'opérateur suivant. Puisqu'il ne peut pas *a priori* être attaché ni C<sub>A</sub> ni C<sub>Q</sub>, nous le décrivons sans utilisation de A ni de Q :

**Op. 1** : dans une équation différentielle de la forme  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ), l'inconnue «  $y$  » représente à la fois une variable indépendante et une variable dépendante.

Avant de terminer l'analyse en fonction du « *calcul des coefficients directeurs des tangentes* », nous proposons une comparaison entre les élèves redoublants et non redoublants afin de permettre une analyse plus fine. En effet, l'étude menée à l'activité précédente a mis en évidence la pertinence d'une comparaison entre ces deux types d'élèves. Nous prenons en compte, comme à l'activité précédente, l'appel aux stratégies algébrique et qualitative, la réussite en termes de ces stratégies. Une telle comparaison n'étant pas significative pour Q2 et Q3 –puisque la réussite est totale-, nous nous limitons au premier item. Nous parlerons toujours en termes de pourcentage bien que le nombre d'échantillon ne soit pas suffisamment élevé. Nous constatons que le recours au qualitatif est de 100% (dont 89% de réussite) chez les non redoublants, alors que ce taux diminue à 58% (dont 56% de réussite) chez les redoublants. Par ailleurs, nous constatons, toujours chez ces derniers, un recours de 11% (sans réussite) aux stratégies algébriques et de 22% aux "Autres". Nous tenons à souligner que trois des quatre élèves qui ont donné une réponse avortée au premier item sont des redoublants.

## Dessin des segments représentant des tangentes

Pour ce qui est du seconde observable, **le dessin**, nous avons recensé cinq dessins complets, huit incomplets mais sans erreur et quatre dessins erronés. La réussite peut être considérée comme satisfaisante et concernant la technique graphique, elle est effectivement acquise.

D'autre part, nous avons également noté quelques *difficultés* chez certains élèves. Nous avons constaté chez deux élèves (**E3**, **E6**) une indifférenciation entre pente négative-positive. Relativement à **E3** qui semble être un élève en difficulté comme nous avons pu le constater pendant l'intégralité de notre observation, il dessine tous les segments à pentes positives, alors qu'il calcule correctement le coefficient directeur comme négatif pour les points  $A_1$  et  $B_1$ . Cette difficulté ne doit nullement être attribuée à un manque d'attention et l'existence d'autres productions similaires confirment en effet nos inquiétudes : **E<sub>r</sub>7**, **E<sub>r</sub>16** et **E<sub>r</sub>11** dessinent des segments de pentes positives alors qu'ils calculent les coefficients directeurs comme négatifs. Certains de ces élèves se corrigent et d'autres non. Nous en concluons que pour certains élèves, **une tangente a toujours une direction positive**.

D'autre part, lorsque nous examinons les productions des élèves **E<sub>r</sub>5** et **E<sub>r</sub>15**, nous constatons que, pour représenter les segments censés passer par les points  $A_1(1 ; -3)$  et  $B_1(1 ; -1)$ , ils dessinent deux segments passant respectivement par les points  $(1 ; -6)$ ,  $(1 ; -2)$  et par l'origine. Il convient de constater qu'aux points en question les coefficients directeurs valent respectivement  $-6$  et  $-2$ . Bien que les deux élèves effacent les segments en question et se corrigent par la suite, nous en concluons que pour certains élèves, **une tangente de coefficient directeur  $m$  ( $m \in \mathcal{R}$ ) passe par le point d'abscisse  $m$  et par l'origine**. Par ailleurs, la production de **E<sub>r</sub>1** confirme l'existence d'une telle tendance : bien que les points  $(1 ; -6)$  et  $(0 ; 2)$  ne soient pas mentionnés dans l'énoncé, cet élève les coche sur son dessin. Rappelons que pour le point  $A_1(1 ; -3)$ , cet élève a calculé deux valeurs pour  $y'$  (cf. **Extrait 14**) :  $2$  et  $-6$ . Nous pensons qu'il avait tendance à tracer aux points cochés des tangentes dont les coefficients directeurs correspondent aux ordonnées de ces points.

## Conclusions Tirées par les Elèves

Relativement au dernier observable rappelons qu'il consiste à interpréter la figure obtenue afin de remarquer qu'il y a des moments où les coefficients directeurs ne changent pas et d'arriver vers des prémices du concept d'isoclines. Notons que si on ne tient pas compte de certaines erreurs développées plus loin – et susceptibles de dissimuler des connaissances et conceptions erronées –, il existe dix élèves (sur dix-sept) ayant donné des réponses relativement bonnes, trois élèves (**E<sub>r</sub>1**, **E<sub>r</sub>5**, **E<sub>r</sub>16**) s'abstiennent et enfin quatre élèves donnent une réponse incorrecte. Les élèves réussissant se regroupent autour de la réponse suivante qui est celle de **E<sub>r</sub>7** :

*« on peut dire sur une même droite parallèle à l'axe des abscisses, le coefficient directeur sera le même. Sur les droites parallèles à l'axe des ordonnées le coefficient directeur varie : lorsque y est négatif, le coefficient directeur est négatif, lorsque y est positif, le coefficient directeur est positif. »*

D'autre part, bien que l'énoncé de l'activité fasse référence aux droites, certains élèves (**E3**, **E13**, **E<sub>r</sub>15**) préfèrent raisonner à l'aide des points. Voici à titre d'exemple le raisonnement du premier :

*« En plusieurs points d'une même ordonnée, chacune des tangentes passant par ces points sont parallèles (coefficient directeur identique).  
En plusieurs points d'une même abscisse, chacune des tangentes passant par ces points ne sont pas parallèles (coefficient directeur différent). »*

Nous constatons que cette attitude est en accord avec la constatation de Duval (1988) qui rapporte que, face à une représentation graphique, dans l'enseignement la « démarche de pointage » est favorisée. Celle-ci consiste à associer dans un tracé un couple de nombre à un point et inversement. Cette démarche semble intéressante pour tracer une droite ou lire un point d'intersection par exemple. Cependant, elle devient défectueuse lorsqu'il s'agit par exemple de la conversion inverse : partir de la représentation graphique de la droite pour retrouver l'équation correspondante.

En ce qui concerne les difficultés observées, les extraits suivants, issus des productions d'élèves, mettent en cause l'appropriation de certaines notions élémentaires de l'analyse (pente, droite, tangente, axe des abscisses, fonction, etc.) : « droites parallèles aux abscisses/ordonnées », « des points auxquels on cherche le coefficient directeur », « des tangentes des points d'une droite », « signe des tangentes des droites » et « les coefficients directeurs des points. » Par ailleurs, d'autres fautes concernant les nouvelles notions (équation différentielle, fonction solution, etc.) sont apparues : « tangente à une équation différentielle », « droite parallèle à l'axe des abscisses d'une équation différentielle. »

En **conclusion**, la réussite aux trois grands observables paraît relativement satisfaisante : 87% de réussite pour le calcul de coefficient directeur, 76% pour le dessin et enfin 59% de réussite pour la conclusion. Il en résulte que la transmission de l'opérateur **Op. Q.II** de **C<sub>Q</sub>** semble être réussie et d'autres opérateurs, qui constituaient des entraves en **A1**, semblent aussi être déstabilisés.

D'autre part, malgré l'institutionnalisation faite à la fin de l'activité précédente, les élèves éprouvent encore des difficultés à assimiler le concept « équation différentielle », ce qui semble naïf vu la durée de l'enseignement. Quant à la **fonction exponentielle** présente lors de l'activité précédente chez cinq élèves (dont **E<sub>r</sub>1**), elle persistait au départ uniquement chez celui-ci.



Afin de cerner l'état de l'avancement de l'apprentissage, nous présentons une brève comparaison, à l'aide du tableau synoptique (cf. **Tableau 13**), entre les deux activités passées jusqu'à présent. Ce tableau révèle que le recours aux stratégies qualitatives est passé de 44% (dont 22% de réussite) à 100% (dont 89% de réussite) chez les non redoublants, alors qu'il est passé de 25% (dont 12% de réussite) à 67% (dont 56% de réussite) chez les redoublants. Concernant les stratégies algébriques, elles passent de 22% (avec 11% de réussite) à 0% chez les non redoublants, alors qu'elles passent de 62% (sans réussite) à 11% (sans réussite) chez les redoublants. Les élèves désemparés représentent 13% des redoublants et 34% des autres élèves à la première activité, alors qu'ils représentent 0% des non redoublants et 22% des redoublants en A2.

		A1	A2
Non Redoublants	Algébrique	22% (dont 11% réussite)	0%
	Qualitative	44% (dont 22% réussite)	100% (dont 89% réussite)
	Autres	34%	0 %
Redoublants	Algébrique	62% (sans réussite)	11% (sans réussite)
	Qualitative	25% (dont 12% réussite)	67% (dont 56% réussite)
	Autres	13%	22 %

**Tableau 13 :** Tableau récapitulatif des recours aux stratégies en fonctions du type d'élèves en A1 et A2.

### 7.1.3 Le devoir à la maison

Rappelons que le but principal de ce devoir, composé de deux items, consiste à la fois à tester et à renforcer les connaissances des élèves acquises lors de la première séance et à évaluer les stratégies mises en œuvre par les élèves afin de mesurer la progression de l'apprentissage. Quatorze élèves sur dix-neuf ont rendu leurs copies. Nous nous proposons d'étudier les items distinctement dans ce qui suit.

#### Item n° 1 (DQ1) :

Puisque cet item est le même que l'activité A1, les stratégies de résolution attendues sont les mêmes qu'en A1, quoique les stratégies algébriques sont beaucoup plus difficiles à mettre en œuvre qu'au sein de A1. L'analyse des productions des élèves a montré que sept ont proposé une réponse acceptable pour l'étude des variations des courbes solutions pour l'équation différentielle  $y' = 2y + 1$ . Les productions des élèves en fonctions des stratégies sont résumées dans le **Tableau 14**. Il convient de souligner qu'il nous a paru inutile de continuer à faire une distinction en termes de type d'élèves (redoublants ou non), car les productions représentent une uniformité :

	SQ1	SA2	SR	Total
Bonne Réponse	7	-	2	7
Réponse Non-Achevée	2	-		2
Mauvaise Réponse	1	2		5
<b>Total</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>14</b>

**Tableau 14 :** recours aux différentes stratégies et validité des réponses.

Nous constatons grâce à ce tableau que deux stratégies sont utilisées et, **SA1** et **SA3**, présentes en **A1**, n'ont pas apparues. Ceci révèle que le recours à l'algébrique a presque disparu puisque deux élèves uniquement ont eu recours à **SA2**. Parmi les dix élèves faisant appel à **SQ1**, sept ont réussi et les deux autres ont des réponses incomplètes. Pour ce qui est des élèves qui donnent des réponses incomplètes, ils traitent sans doute ce devoir dans la salle et ne trouvent pas suffisamment de temps pour le traiter en intégralité. En effet, ils avaient correctement traité **A1** qui est analogue à celle-ci. Dans ce qui suit, nous nous proposons une analyse en fonction des stratégies :

### La stratégie SQ1

En général, les sept étudiants aboutissent à une bonne réponse sans aucune difficulté pour déterminer les valeurs où la dérivée est nulle et pour étudier ainsi les variations. Par contre aucun de ces élèves n'étudie le cas de  $y = -\frac{1}{2}$ . Nous exposons quelques points qui nous paraissent intéressants.

$y'' = 2y'$	$\rightarrow$ Si $y'' < 0$	$y' < 0$		
	$\rightarrow$ Si $y'' > 0$	$y' > 0$		
	$\rightarrow$ Si $y'' = 0$	$y' = 0$		
$y' = 2y + 1$	$\rightarrow$ Si $y' = 0$	$y = -\frac{1}{2}$		
	$\rightarrow$ Si $y' > 0$	$y > -\frac{1}{2}$		
	$\rightarrow$ Si $y' < 0$	$y < -\frac{1}{2}$		
$y$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$+\infty$
$y'$	-	0	+	
$y''$	-	0	+	
varie <sup>o</sup> $y$				

**Extrait 15 :** extrait de E8.

Deux élèves (**E10** et **E18**) démarrent en identifiant les zéros de l'équation et établissent ensuite un tableau de variations. Celui-ci devait être établi en fonction de  $y$  (cf. analyse *a priori*), or le premier de ces élèves l'établit en fonction de  $x$ . Quant au second, bien qu'il mette  $y$  à la première ligne,  $y'$  à la deuxième, il met « variations » dans la troisième et n'ose donc pas mettre  $y$ . Bien que l'énoncé de l'exercice demande explicitement l'étude des variations de  $y$ , il nous semble que le fait de mettre deux fois  $y$  le dérange. Comme nous y ferons allusion plus loin, de tels phénomènes peuvent être expliqués par le statut particulier de  $y$  : à la fois variable dépendante, fonction solution et isocline.

D'autre part, deux élèves (**E2** et **E8**) ont mis en œuvre cette stratégie en faisant appel à la dérivée seconde sans en expliciter la raison. Il convient de souligner que le second était absent lors de la première séance et qu'il a probablement copié sur le premier, car les deux élèves fournissent deux copies identiques. Le raisonnement fourni est correct, et est suivi d'un tableau de variations sans explication (cf. **Extrait 15**). Ce dernier met en exergue qu'il y a des élèves qui arrivent à établir la relation entre  $y$ ,  $y'$  et  $y''$ .

Enfin, **E4** suit une stratégie qui consiste en un mélange de **SQ1** et **SX2** et difficile donc à classer dans l'une ou dans l'autre catégorie. Voici sa production :

«  $f'(x) = 2f(x) + 1$  la dérivée est du signe de  $f(x)$ .  
 si  $y \geq 0$ , alors  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissante  
 si  $y < -\frac{1}{2}$  alors  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est décroissante. »

Par ailleurs, bien qu'il prétende que « la dérivée est du signe de  $f(x)$  », l'intervalle  $-\frac{1}{2} < y < 0$  est exclu de là où la dérivée est positive. Nous pouvons décrire cette attitude par l'opérateur suivant auquel nous reviendrons ultérieurement. Il se peut que l'apparition de cet opérateur soit renforcée par le choix de l'équation différentielle  $y' = 2y$  pour laquelle l'opérateur donne des résultats corrects.

**Op. II** : [Soit  $h$  une fonction définie et dérivable dans  $I \subset \mathbb{R}$ ] si  $h'$  est positive (resp. négative) dans  $I$  alors  $h$  est positive (resp. négative) dans cet intervalle et réciproquement.

## La stratégie SA2

Deux élèves (**E3** et **E13**), donnant deux copies identiques, font appel à cette stratégie basée sur l'exponentielle. Concernant **E3**, bien que non redoublant, il a déjà eu recours à l'exponentielle en **A1**. Il convient de préciser que la prestation de cet élève pour l'ensemble de l'ingénierie reste insatisfaisante et que s'il tient à la fonction exponentielle, c'est parce qu'il avoue, lors de la dernière séance, l'avoir « vue dans un manuel. » Comme le montre l'**Extrait 16**, conformément à l'opérateur **Op. A.I** de  $C_A$ , les élèves cherchent d'abord à résoudre l'équation donnée d'une façon obscure. Après avoir exprimé  $y$  en fonction de  $y'$ , les élèves obtiennent  $y = e^{2x} + x$ . Il semble que, comme la suite en témoigne, les élèves, prenant l'égalité  $y = e^{2x}$ , essaient d'obtenir une équation dont la dérivée amène à l'équation différentielle donnée. Nous pensons que  $e^{2x} + x$  est vue comme « une » expression de  $y$ , bien qu'elle ne découle pas de l'intégration de l'expression où  $y$  est exprimée en fonction de  $y'$ . En effet,

par la suite cette expression est dérivée pour étudier les variations. Néanmoins suite à la dérivation de  $y=e^{2x}+x$ , les élèves obtiennent  $y=2e^{2x}+1$  où  $e^{2x}$  est cette fois-ci remplacée par  $y$ . Ceci met en exergue la difficulté de ces deux élèves à identifier le statut de  $y$ . Ainsi les élèves croient-ils, même s'ils ne le disent pas explicitement, qu'ils ont à la fois résolu l'équation et étudié les variations de  $y$ .

$y' = 2y + 1$      $y' + 1 = 2y$      $y = \frac{y' - 1}{2} = \frac{y'}{2} - \frac{1}{2}$

$y = e^{2x} + x$

$y' = e^{2x} \times 2 + 1$   
 $y' = 2y + 1$

$\Rightarrow y' = 2e^{2x} + 1$

la fonction  $e^{2x}$  est toujours positive donc  $2e^{2x} + 1 > 0$   
 donc la dérivée est toujours positive, la fonction  $y = e^{2x} + x$   
 est strictement croissante.

Si  $y'$  est positive alors  $y$  est positive.

$y'$  et  $y$  sont de même type car  $y$  ne peut que contenir  
 la fonction exponentielle pour que l'équation  $y' = 2y + 1$   
 soit valide.

**Extrait 16** : extrait de E3.

D'autre part, nous reconnaissons dans la production de ces élèves l'opérateur **Op. II**, puisqu'ils énoncent que « si  $y'$  est positive alors  $y$  est positive. » Néanmoins une autre difficulté qui saute aux yeux est l'association faite entre  $y$  et la fonction exponentielle. Les élèves en concluent que «  $y$  ne peut que contenir la fonction exponentielle pour que l'équation  $y' = 2y + 1$  soit valide. » Nous décrivons cette attitude par l'opérateur suivant :

**Op. III** : la solution générale d'une équation différentielle du type  $y' = ay + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) possède forcément la fonction exponentielle et elle est de la forme  $y = e^{ax} + f(x)$ .

**Item n° 2 (DQ2) :**

Strictement lié au précédent, cet item exige une maîtrise des relations entre trois entités de l'équation différentielle fournie : variations des courbes solutions, signe de la dérivée et signe du coefficient directeur de la tangente. Par ailleurs, puisqu'il y a une corrélation étroite entre le signe de la dérivée et la valeur de la fonction solution, celle-ci entre en jeu à son tour en tant que quatrième entité. Il s'avère que cet item exige une habileté importante à interpréter les unités significatives du registre algébrique et leurs effets concomitants au sein des variations des courbes solutions. Rappelons que ce item évalue l'acquisition des opérateurs **Op.Q.I**, **Op. Q.II** et **Op. Q.IV**.

Pour ce qui est des stratégies attendues, en plus de **SQ1**, nous nous attendons aussi à **SX2** où l'élève procède comme s'il s'agissait de l'équation  $y'=2y$ . Enfin une dernière stratégie possible pour cet item est **SX3** où les élèves ne remarquent pas que les suppositions proposées sont équivalentes deux par deux (la première va de pair avec la troisième et la deuxième avec la quatrième), et ils donnent donc **deux réponses différentes aux deux propositions équivalentes**. Tous les élèves ont répondu au moins aux deux premières suppositions et nous présentons la partition des élèves en fonction des stratégies dans le **Tableau 15**. Ce dernier montre que la stratégie la plus utilisée est **SX2**. Par ailleurs, contre deux appels à **SQ1**, cinq élèves ont mobilisé la stratégie **SX3**. Nous nous proposons de donner suite à notre analyse en fonction des stratégies adoptées :

	SQ1	SX2	SX3	Total
<b>Bonne Réponse</b>	1	-	-	1
<b>Réponse Non Achevée</b>	1	-	-	1
<b>Mauvaise Réponse</b>	-	7	5	12
<b>Total</b>	2	7	5	14

**Tableau 15 :** Tableau récapitulatif en fonction des stratégies et la validité des réponses.

**La stratégie SQ1**

Deux élèves mobilisent cette stratégie et seul **E<sub>r</sub>7** donne une bonne réponse. Quant à **E6**, il ne traite que les deux premières propositions et ce, sans avoir traité le premier item. Apparemment, l'exercice est traité en classe, il se peut que l'élève n'ait pas eu le temps de traiter intégralement le devoir.

**La stratégie SX2**

Huit élèves mobilisent cette stratégie. On aurait pu s'attendre à ce que ceux qui ne traitent pas l'exercice précédent ou bien qui le traitent comme s'il s'agissait de l'équation  $y'=2y$  fassent appel à cette stratégie. Or, un seul cas est conforme à cette attente. Ceci peut être expliqué par l'opérateur **Op. II** qui relie le signe d'une fonction à ses variations ou autrement dit, au signe de sa dérivée. Selon cet

opérateur il serait possible d'étudier les variations sans forcément posséder le signe de la dérivée et il suffirait d'avoir le signe de la fonction. Signalons que cet opérateur peut être relié à la conception ci-dessous, relevée par Uwimana (2002) dans son mémoire de DEA :

**Conception 1** : [pour une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$ ] **La fonction  $f$  et sa fonction dérivée  $f'$  sont de même sens de variation sur  $I$**  : si  $f$  est croissante (respectivement décroissante) sur  $I$  alors sa dérivée  $f'$  est croissante (respectivement décroissante) sur  $I$  et vice-versa.

En ce qui concerne cette conception, nous pouvons noter quelques opérateurs de la manière suivante : « si  $f > 0$  sur  $I$  alors  $f' > 0$  sur  $I$  », « si  $f < 0$  sur  $I$  alors  $f' < 0$  sur  $I$  », « si  $f' > 0$  sur  $I$  alors  $f > 0$  sur  $I$  » et « si  $f' < 0$  sur  $I$  alors  $f < 0$  sur  $I$ . »

D'autres productions qui confirment l'existence et la résistance de **Op. II**, sont les suivantes : à l'instar de **E6** cité ci-dessus, **E<sub>r</sub>1** traite cet item sans avoir étudié le premier item. D'autre part, bien que **E3** et **E13** annoncent la fonction  $y$  comme « *strictement croissante* » en **DQ1**, au second item  $y$  est considérée décroissante pour certains cas.

### La stratégie SX3

Les cinq élèves de cette catégorie avaient suivi **SQ1** à l'item précédent (dont trois l'avaient réussi et deux avaient des réponses non achevées). Par ailleurs, il convient de signaler que tous les élèves de cette stratégie ont procédé de la même façon : respectivement «  $y > -\frac{1}{2}$  » et «  $y < -\frac{1}{2}$  » pour les deux premières suppositions et respectivement « positive » et « négative » pour les deux autres. Nous nous demandons pourquoi le cas contraire n'a pas eu lieu ? Pourquoi aucun élève n'a écrit respectivement «  $y > -\frac{1}{2}$  » et «  $y < -\frac{1}{2}$  » pour les deux dernières suppositions et respectivement « positive » et « négative » pour les deux premières ? Il est clair que les deux premières suppositions sont régies par **Op.Q.I** (ou la propriété-1) qui relie signe de la dérivée et les variations d'une fonction, tandis que les deux dernières dépendent de **Op. Q.IV** (ou la propriété-4) qui relie le signe de la dérivée à celui du coefficient directeur de la tangente. La propriété-1 est suffisamment travaillée par l'enseignement tandis que la propriété-4 est supposée allant de soi. Il s'avère que le raisonnement de ces élèves relève de la non assimilation de la propriété-4 et de la discrimination entre signe de la dérivée et signe du coefficient directeur de la tangente. Ceci peut également être expliqué par la non-maîtrise de l'opérateur **Op. Q.II** et il y a un cloisonnement entre les variations d'une courbe et le signe du coefficient directeur des tangentes.

Par conséquent, pour expliquer la chute de la réussite à ce second item, nous pouvons avancer trois motifs :

- la méconnaissance de la notion « *fonction solution* » sur laquelle l'énoncé se base,
- la difficulté à assimiler les propriétés et opérateurs en question

-et enfin les diverses conceptions erronées que les élèves possèdent relativement à différentes unités significatives liées aux différentes représentations développées dans le chapitre A2.

En **conclusion** pour le devoir à la maison, **DQ1** marque un succès relativement satisfaisant alors qu'un seul élève a réussi le second item. Le succès obtenu au premier item démontre que la transmission de **Op.Q.I** est relativement réussie. Or, les réponses au second item mettent en cause le succès des opérateurs **Op. Q.II** et **Op. Q.IV** car bien que dans l'introduction de l'activité n°2, nous ayons souligné le fait que les variations d'une courbe solution dans un intervalle et les coefficients directeurs de ses tangentes dans le même intervalle sont étroitement liés, cinq élèves (sur quatorze) ont opté pour la stratégie **SX3** qui décline cette propriété.

D'autre part, hormis **SA2**, les stratégies algébriques constatées en **A1** ont disparu et vu les résultats obtenus, la distinction entre redoublants et non redoublants ne s'avère plus intéressante. Néanmoins, il convient de souligner qu'en général ce sont les redoublants qui préfèrent utiliser la notation  $f$  alors qu'ils ont été habitués à l'utilisation de la notation avec  $y$  l'année dernière tandis que les non redoublants se sont montrés plus ouverts à assimiler cette notation.

### 7.1.4 Activité n°3

Cette activité, composée de deux items, se veut le bilan de la première séance dont l'objectif global est d'amener les élèves à la découverte du concept d'isocline. Ainsi l'objectif de **A3** consiste à approfondir ce nouveau concept. Pour une analyse plus détaillée, nous ferons un découpage par item :

#### Item n° 1 (A3Q1) :

Cet item demande aux élèves d'identifier les isoclines pour l'équation  $y'=2y$ . Comme cela a été détaillé dans l'analyse *a priori*, les élèves doivent se baser sur les connaissances apprises lors de la première séance et en particulier sur la définition du concept d'isocline afin de s'acquitter de la tâche. En ce qui concerne les stratégies rappelons que deux sont attendues : **SQ1** qui consiste à utiliser le fait que  $y'$  doit être constante alors que **SX3** porte sur la tentation de répondre à l'aide des activités précédentes, notamment à l'aide de l'activité n°2.

	SQ2	SX3	Autres	Sans réponse	Total
Bonne réponse	3	6	-	1	9
Réponse Non-Achevée	3	-	2		6
Total	6	6	2		15

**Tableau 16 :** Tableau récapitulatif en fonction de stratégie et la validité des réponses.

Comme en témoigne le **Tableau 16**, nous avons noté neuf (sur quinze) réussites pour le premier item. Pour répondre à cette question, six élèves ont tenté **SQ1** et six élèves ont adopté **SX3**. Par ailleurs, un élève ne se prononce pas, un deuxième se contente d'exprimer  $y$  en fonction de  $y'$  et la réponse d'un élève est inexploitable.

### La stratégie SQ1

Parmi les six élèves de cette stratégie, un seul (**E4**) partant de l'équation  $y'=2y$ , dit que  $y'$  ne dépend que de  $y$  et d'où il conclut que « *si  $y$  est le même pour une série de points, ces points auront tous le même  $y'$  et seront donc isoclines.* » Ceci justifie, nous semble-t-il, son appropriation de la nouvelle notion. Trois élèves admettent que «  *$y$  doit être constante* » pour qu'on puisse déterminer une isocline, bien que **E<sub>r</sub>11** en reste là, les deux autres donnent des réponses relativement acceptables.

Pour les deux élèves restants de cette stratégie, les productions doivent être abordées par méfiance et c'est la raison pour laquelle nous les avons considérées comme, sinon incorrectes, du moins non-achevées. Il s'agit de celles de **E17** et **E8** qui nous ont amené à nous interroger sur l'assimilation de cette notion. Voici ce qu'écrit le premier : « *si  $y$  reste constant le coefficient de la droite d'équation  $y'=2y$  aura pour coefficient directeur  $2y$  donc toutes les droites passant par les points de  $y$  auront le même coefficient* ». Nous pouvons bien évidemment imputer ceci à la difficulté d'expression de l'élève et cette phrase peut être interprétée de la manière suivante : « *si  $y$  est constante et égale à  $y_0$  alors  $y'$  qui est le coefficient directeur de la tangente passant par ce point, défini par l'équation  $y'=2y$ , l'est également. Donc toutes les tangentes passant par les points d'ordonnée  $y_0$  ont le même coefficient directeur à savoir  $2y_0$ .* » Or les expressions « *la droite d'équation  $y'=2y$*  » « *toutes les droites passant par les points de  $y$  auront le même coefficient* » doivent être examinées de plus près comme cela a été fait en **A2Q4**. L'équation différentielle  $y'=2y$  n'est-elle pas perçue, par cet élève, comme une famille de droite dans le plan  $(x, y)$  ? La production de **E8** confirme nos inquiétudes puisque de son côté, il écrit que « *les droites sur lesquelles les pentes restent identiques peuvent être des droites ayant un coefficient proportionnel à une de ces droites.  $y'=2y$   $k$ =coefficient de proportionnalité  $y'=2ky$  (...)* » qui met très bien en évidence comment les concepts se sont enchevêtrés chez cet élève. Examinons la suite de son raisonnement : « *Si un point sur  $y'=k$  (droite) alors  $y'=2k$  et  $y'=k$  est une isocline de  $2k$ .* » Il nous semble que l'équation différentielle  $y'=2y$  est conçue par celui-ci comme une famille de droite. La difficulté de ces deux élèves à maîtriser les concepts est évidente : l'équation différentielle est conçue comme une famille de droites. Par ailleurs,  $y'=k$  représente pour ces élèves à la fois une droite et une isocline mais aussi un coefficient directeur.

### La stratégie SX3

Pour définir les isoclines, six élèves se basent sur **A2** où ils avaient remarqué que sur des horizontales les pentes restaient inchangées. Connaissant la définition d'isocline, ils essaient donc de combiner les



deux données. Ils en résultent alors, généralement sans aucune explication, que les droites horizontales sont des isoclines. Par exemple, un élève s'est contenté de dire que « toutes les droites horizontales sont des isoclines. Elles ont des pentes identiques. » Bien qu'ambiguë, cette dernière phrase peut signifier que « sur une isocline les tangentes ont des coefficients directeurs identiques. »

En plus de la difficulté à s'exprimer on peut faire le reproche suivant à ces élèves, ainsi que à ceux de la catégorie **SQ1** qui partent de la supposition que «  $y$  doit être constante » : cette attitude ne fonctionne que pour certaines équations différentielles, pas de la forme  $y'=ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ) pour les premiers et autonomes pour les seconds. On pourrait se demander dans ces conditions si ces élèves peuvent calculer les isoclines de l'équation différentielle  $y'=y+x$  par exemple. En effet, **SX3** et le fait de partir du principe que «  $y$  doit être constant » ne fonctionnent pas. Nous espérons que l'activité suivante nous donnera des précisions puisqu'il s'agit, dans cette dernière, de l'équation  $y'=x^2+y^2$  qui ne s'inscrit pas dans la portée de ces stratégies. D'autre part, le second item de l'activité en cours (**A3Q2**) permettra d'évaluer l'acquisition de ce nouveau concept d'isocline.

Malgré quelques difficultés soulignées, notons par ailleurs qu'aucun élève n'a donné une réponse négative à ce premier item et que tous les élèves se doutent qu'il est possible de déduire les isoclines à partir de l'équation différentielle. Nous pensons ainsi prétendre que les élèves ont commencé à avoir une certaine familiarité avec le concept d'isocline et que celui-ci est opérationnel chez certains élèves dont la plupart éprouvent de difficultés à s'exprimer.

### **Item n°2 (A3Q2) :**

Dans cet item où il s'agit de l'interprétation d'une courbe solution avec une isocline, onze élèves sur quinze donnent une réponse acceptable, dont quatre se contentent d'écrire « isocline 1  $\Leftrightarrow$  coefficient directeur 1 » et les sept autres élèves expliquent de façon satisfaisante le croisement entre la courbe solution et l'isocline 1. Par ailleurs, trois élèves rendent des copies blanches et seul **E3** (il s'agit toujours du même élève que dans les activités précédentes) continue à faire appel à l'exponentielle de la façon suivante : «  $y=e^{2x}$   $y'=2e^{2x}$  et  $y'=1$ . » Pour cet élève qui admettait  $y=e^{2x}+x$  comme solution de l'équation  $y'=2y+1$  lors du devoir à la maison, la solution générale de  $y'=2y$  est sans doute  $y=e^{2x}$ . Nous avons l'impression qu'il essaie de résoudre le système  $\{y'=2e^{2x}$  et  $y'=1\}$  au lieu de répondre au problème de l'énoncé.

En résumé, nous pouvons dire que les élèves ont fait leur profit de la première séance et que le concept d'isocline a été relativement acquis. Néanmoins malgré cette étude optimiste, nous voudrions souligner la production de **E6** qui se justifie de la manière suivante : « la courbe représentative de l'équation différentielle coupe l'isocline 1 signifie qu'en ce point la tangente à la courbe a un coefficient directeur =1. » Bien qu'il parle de « la courbe représentative » d'une équation

différentielle, nous pensons que ceci est dû plutôt à un manque d'attention. En effet, nous avons examiné à la loupe les productions de cet élève tout au long de l'ingénierie et nous n'avons pas constaté des erreurs semblables. Nonobstant, puisque d'autres élèves prennent  $y'=k$  pour une droite ou l'équation  $y'=2y$  comme une droite au plan  $(x, y)$  et compte tenu du chevauchement entre différents statuts de  $y$ , présenté dans les activités précédentes, cette question de statut de  $y$  et d'une équation différentielle semble importante. Nous tenterons de nous exprimer au moment où nous ferons un bilan des deux premières séances au paragraphe 7.2.

### 7.1.5 Activité n°4

Cette activité a comme objectif d'une part de tester la viabilité du concept d'isocline chez les élèves et d'autre part de tester et de renforcer le fait qu'une isocline ne doit pas forcément être une droite, ce qui a été dit à plusieurs reprises pendant le cours. Il s'agit plus précisément de calculer les isoclines 1 et 4 pour l'équation différentielle  $y'=x^2+y^2$  et d'en préciser la nature.

L'analyse des productions des élèves révèle que, sauf E4, tous les élèves ont relativement réussi la tâche demandée. Quant à E4, écrivant  $y'=1$  pour l'isocline 1, il remplace  $y'$  et  $y$  respectivement par  $f'(x)$  et  $f(x)$  dans l'équation donnée, s'égare et en reste là. Mais qu'est-ce qui l'a amené à faire ce changement ? Nous pensons en fait que sa difficulté provient de la méconnaissance de l'expression algébrique du cercle et qu'elle n'est pas due à la notion d'isocline. En effet, pour avancer dans le traitement de la tâche, il faut que l'expression algébrique du cercle soit accessible à l'élève. D'ailleurs, nous tenons à noter que cet élève est le seul à adopter la meilleure stratégie qui consiste à dire que « l'isocline  $k$  est définie par  $y'=k$  » à l'activité n°3. La difficulté est effectivement due aux anciennes connaissances de l'élève.

Nous trouvons cette réussite rassurante, car à l'activité précédente nous nous étions demandés si les élèves étaient vraiment capables de calculer les isoclines pour une équation différentielle qui dépend explicitement à la fois de  $x$  et de  $y$ . Par ailleurs bien que le travail antérieur relatif aux équations différentielles des élèves se résume à l'équation  $y'=2y$  et que cette activité mobilise une équation différentielle qui n'est pas du tout du même genre, la réussite des élèves est rassurante.

### 7.1.6 Activité n°5

Dans cette activité, étant donné le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y'=2y$ , nous demandons de tracer des courbes solutions passant par des points fournis. Tout en introduisant le concept de *champ de tangentes*, cette activité vise à expliciter le rôle des « petits segments » étudiés dans les activités précédentes.

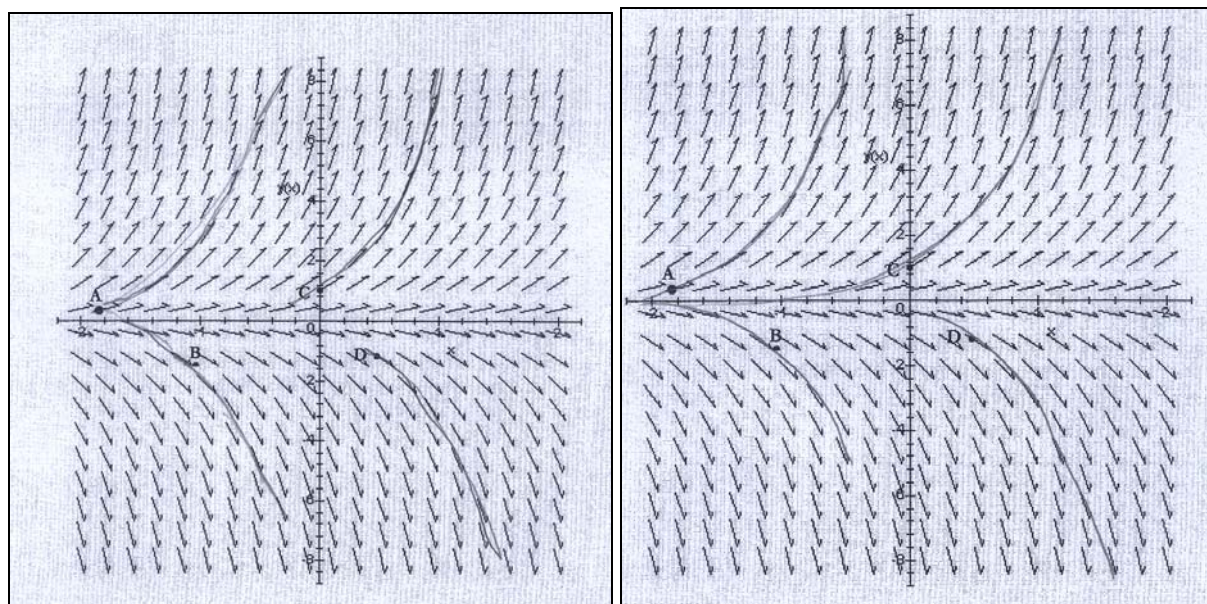
Compte tenu de l'analyse des productions des élèves, il nous est possible d'annoncer qu'en général, les copies des élèves sont satisfaisantes : neuf élèves sur quinze ont réussi cette activité et les figures de quatre élèves se sont avérées difficiles à juger. Un seul élève (E18) donne un tracé complètement faux. Dans ce qui suit, nous regroupons les élèves en trois groupes (voir **Tableau 17**) afin d'éclairer notre analyse : ceux dont les tracés sont correctes (groupe I), ceux qui se forcent pour relier les courbes aux flèches quitte à déformer la courbe (groupe II) et les élèves d'autres catégories :

Groupe I	Groupe II	Groupe III
E2, E3, E6, E7, E8, E9, E11, E13, E17.	E1, E5, E10, E12.	E4, E18.

**Tableau 17** : Regroupement des élèves en fonction de la validité du tracé.

### Groupe I

Ce groupe d'élèves trace les courbes demandées sans les forcer à joindre les petits segments. Les tracés sont donc corrects et nous pouvons supposer que ces élèves ont une bonne interprétation des segments. En effet ces derniers indiquent la direction de la courbe solution qui passe par la proximité et non pas pour constituer une partie de cette courbe. Néanmoins, ceci ne doit pas empêcher la courbe de rejoindre le segment, puisqu'en général dans le champ de tangentes donné, les segments sont tellement serrés que parfois on est même obligé de passer dessus.



**Figure 7** a. Figure de E<sub>r</sub>1

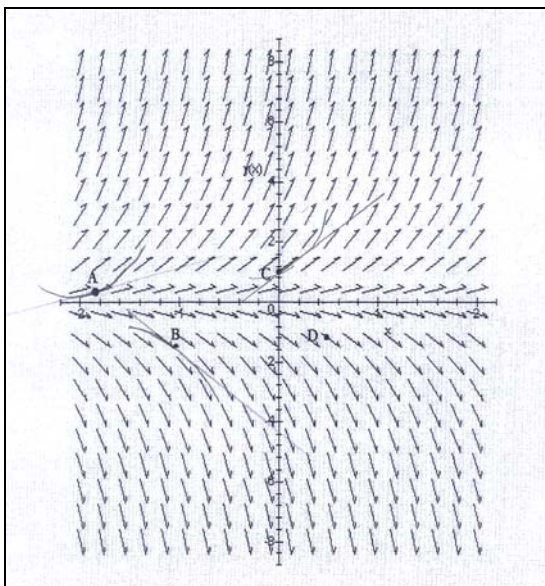
b. Figure de E10.

## Groupe II

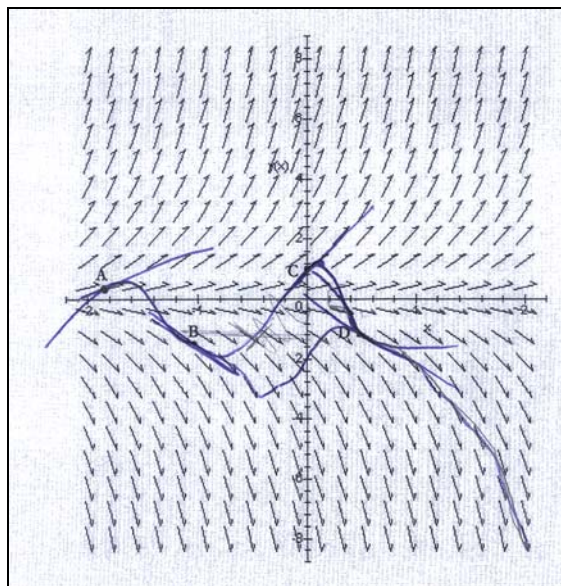
Contrairement aux précédents, les élèves de ce groupe se forcent à joindre les courbes solutions aux segments au risque de les déformer (cf. **Figure 7**). Bien qu'ils aient des courbes qui ont des formes relativement correctes, il nous est difficile de juger ces tracés. Les segments sont-ils considérés comme une partie des courbes ou bien sont-ils vus comme un repère pour améliorer le tracé ?

## Groupe III

Dans cette catégorie, nous examinerons deux élèves qui ont des tracés particuliers : premièrement **E4**, en dessinant des tangentes aux points donnés, il essaie ensuite de tracer, sans aller jusqu'au bout, des courbes convexes admettant les droites dessinées comme tangentes (cf. **Figure 8-a**). En d'autres termes, au lieu de dessiner la courbe à l'aide de tous les segments, l'élève la dessine en se basant sur la tangente dessinée par lui-même à travers le segment sur lequel se trouve le point. Bien qu'à première vue nous ayons l'impression que l'élève ne tient pas compte du champ de tangentes, l'influence de ce dernier sur le travail de l'élève est non négligeable. Si cela n'avait pas été le cas, pourquoi ne pas dessiner des courbes concaves au dessus de l'axe des abscisses et convexes en dessous ? Mais nous ne pouvons nous exprimer sur les raisons qui ont poussé l'élève à dessiner des courbes incomplètes.



**Figure 8** a. figure de E4



b. figure de E18.

Quant à la copie de **E18** (cf. **Figure 8-b**), après avoir dessiné les tangentes aux points A, B, C, D ; il essaie de tracer une courbe sinusoïdale passant par ces points et respectant uniquement les quatre tangentes dessinées par lui-même sans tenir compte des segments fournis dans le champ de tangentes. Quels sont les raisonnements qui ont amené cet élève à procéder d'une telle façon ? Pour pouvoir

répondre à cette question, il faut réexaminer les productions de cet élève aux activités précédentes. Rappelons que cet élève avait manifesté la même conception en **A1** où il avait considéré  $e^{2x}$  comme l'unique solution de l'équation différentielle  $y'=2y$ . Le fait qu'il donne les variations en utilisant la stratégie idéale lors du devoir à la maison peut être alors expliqué par la considération d'une seule  $y$  comme fonction solution. Quoiqu'il en soit, l'activité suivante doit aider l'élève à se corriger puisqu'elle souligne qu'une équation différentielle possède « plusieurs » solutions, une propriété déjà soulignée à l'issue de **A1**, mais apparemment elle n'a pas atteint ses objectifs pour certains élèves.

En ce qui concerne l'intersection des courbes solutions avec l'axe horizontal, à part **E18**, seuls deux élèves (**E1**, **E10**) dessinent des courbes coupant l'axe en question. Toutefois, le second n'ayant pas encore étudié les équations différentielles, sa production ne doit pas être considérée comme aberrante. Concernant le premier élève redoublant, nous pensons qu'il constitue un bon exemple pour mettre en évidence la dominance algébrique de l'enseignement mais aussi la négligence de l'étude des solutions évidentes : si l'enseignement mettait davantage l'accent sur la représentation graphique des courbes solutions et que le statut des solutions évidentes était encore davantage travaillé, nous n'aurions peut-être pas fait face à une telle erreur chez cet élève redoublant.

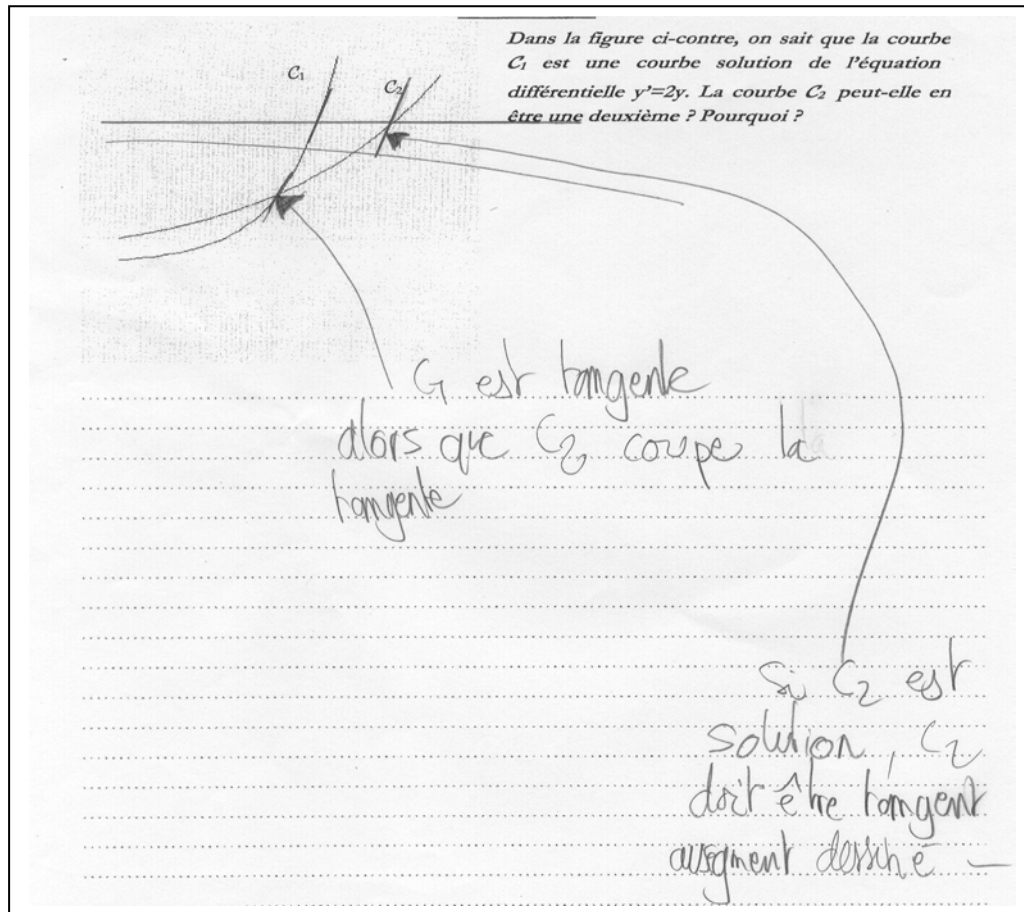
L'analyse menée jusqu'ici nous révèle que la réussite des élèves est non négligeable. Soulignons en outre ne pas avoir rencontré des élèves qui tracent des courbes en se basant uniquement sur la connaissance de la forme exponentielle, comme l'a rapporté Rasmussen (1998ab). Le cas de trois élèves (**E4**, **E13**, **E18**) dont les figures erronées sont présentées ci-dessus, met en évidence que le fait de tracer des courbes à bon escient et sans tenir compte des segments n'est pas tellement évident et ne peut pas être attribué à une coïncidence. Dans le cas contraire, si l'hypothèse qui impute la réussite à une coïncidence est admise, il faudrait aussi se demander par exemple pourquoi tous les élèves n'ont pas commis la même erreur que l'**E18** ? Tous ces arguments nous amènent à penser que cette réussite est vraiment réelle et qu'elle doit être considérée comme un enchaînement de la progression observée depuis le début de l'ingénierie.

### 7.1.7 Activité n°6

Tout en visant à renforcer les concepts transmis jusqu'ici, l'objectif principal de cette activité consiste à institutionnaliser le théorème d'existence et d'unicité en vertu duquel les élèves remarquent que, deux courbes solutions d'une équation différentielle de la forme  $y'=2y$  (ou plus généralement du type  $y'=ay$  ( $a \in \mathbb{R}$ )) ne se coupent jamais. Pour ce faire, les élèves sont invités à justifier si deux courbes exponentielles entrecroisées peuvent être deux courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=2y$ . Rappelons que nous nous attendions à trois stratégies pour le traitement de la tâche : **SA1** (résolution algébrique de l'équation), **SX3** qui consiste à raisonner à l'aide des connaissances antérieures, et enfin, **SQ1** qui consiste à faire appel soit au concept de « tangente » soit à celui d'« isocline » et de mobiliser ainsi l'opérateur souhaité.



L'analyse des productions des élèves a montré que tous les élèves ont fait appel à cette dernière stratégie et « réussi » cette activité. Autrement dit, si nous ne tenons pas compte des fautes d'expressions des élèves et des confusions telle qu'entre « isocline » et « tangente », la réussite des élèves est intégrale. Tous les élèves répondent « non » à cette activité et, ils apportent tous des arguments plus ou moins satisfaisants à la question « pourquoi. » Mais suivant les arguments donnés, il est possible de regrouper les élèves en deux catégories : des élèves dont le raisonnement est convaincant et ceux dont le raisonnement est difficile à comprendre, pour ne pas dire incorrect.



**Extrait 17** : Production de **E18** en A6.

Prenons l'exemple de **E18** dont nous trouvons la justification convaincante (cf. **Extrait 17**) : cette reproduction est convaincante dans la mesure où elle met en exergue la bonne assimilation de la part de l'élève des concepts d'isoclines et de tangente. En effet, l'élève constate qu'au point d'intersection l'une des courbes coupe la tangente de l'autre. Alors il constate tout en dessinant une isocline que sur celle-ci les deux courbes doivent avoir des tangentes parallèles, ce qui n'est pas le cas dans l'énoncé. Ceci met en évidence l'intégration des opérateurs **Op. Q.VI** et **Op. Q.VIII** cités ci-dessus. D'autres élèves (tels **E10** et **E12**) raisonnent en considérant la tangente au point d'intersection qui peut être interprété en termes d'acquisition de **Op. Q.VI** : par exemple **E12** se justifie de la manière suivante :

«... au même point il faut qu'elles [les deux courbes] aient la même tangente. Or, ici,  $C_1$  et  $C_2$  n'ont pas la même tangente au point d'intersection. »

Pour les élèves dont le raisonnement est difficile à comprendre, prenons par exemple le cas de **E2** : « les isoclines n'ont pas la même inclinaison en  $C_1$  et  $C_2$ . Des isoclines sont parallèles donc les courbes passant par des isoclines ne peuvent pas se couper. Les courbes ne sont pas parallèles. » D'autre part, **E4** écrit : « Non car les isoclines ont des coefficients directeurs parallèles et ne peuvent pas s'entrecroiser. » Bien que le raisonnement du premier puisse être assimilé à une difficulté d'expression et que la phrase peut être reformulée, celui du second élève met en évidence d'une façon nette une confusion entre « isocline » et « tangente. » Néanmoins il convient de noter que cette confusion incombe à la non maîtrise de la part de cet élève et non pas à une ignorance totale de ce nouveau concept. En effet, nous avons pu constater qu'en **A3**, il a correctement traité la tâche.

Nous pouvons déduire de cette activité deux résultats remarquables : d'une part, malgré un bon niveau de réussite, la difficulté de certains élèves à assimiler dûment les nouveaux concepts et d'autre part l'absence des stratégies algébriques.

## 7.2 Bilan des deux premières séances

En ce qui concerne la **première séance**, les analyses des productions des élèves ont révélé qu'un quart des élèves ont réussi la première activité et la quasi-totalité la seconde.

Pour ce qui est du devoir à la maison composé de deux items, nous avons fait face à un paradoxe : les élèves ont relativement réussi le premier item, alors qu'il n'y a qu'un seul élève qui réussit le second. Nous y reviendrons ci-dessous.

En ce qui concerne la **seconde séance**, nous avons noté une réussite progressive et les résultats des analyses des productions des élèves ont mis en évidence que les notions qui font l'objet de l'ingénierie ont été relativement bien acquises. En effet, les quatrième et sixième activités ont été réussies par tous les élèves et la réussite aux deux autres activités était d'un niveau satisfaisant. Par ailleurs, nous n'avons pas noté des difficultés tenaces et les quelques difficultés relevées portent plutôt sur les connaissances antérieures des élèves.

Il en résulte que, malgré les quelques difficultés que nous allons développer plus loin, nous pouvons espérer qu'*a priori* les notions « équation différentielle », « isocline », « champ de tangentes », etc. possèdent désormais du sens pour la plupart des élèves et que l'interaction entre ces différents objets est à la portée des élèves. Par ailleurs, nous pouvons aussi nous attendre à ce que les principales tâches qui ont fait l'objet de notre ingénierie, soient dorénavant accessibles à ces élèves et que les opérateurs visés soient également acquis par eux. Ainsi pensons-nous que les élèves possèdent les outils

nécessaires afin de faire une étude qualitative (globale) d'une équation différentielle au niveau pas très avancé. En d'autres termes, face à une équation différentielle convenablement choisie, les élèves qui ont fait l'objet de cet enseignement sont censés être capables de réaliser les démarches suivantes :

- Etudier les variations des courbes solutions d'une équation différentielle,
- Identifier et représenter les isoclines d'une équation différentielle afin d'arriver à un champ de tangentes,
- Tracer des courbes solutions conformes au champ de directions préalablement tracé,
- Interpréter le théorème d'existence et d'unicité pour des équations différentielles simples,
- Vérifier si une courbe est une solution d'une équation différentielle donnée.

D'après cette analyse il s'avère **que l'approche qualitative peut effectivement être enseignée en classe de Terminale S**. Il convient de noter que l'étude menée recouvre ainsi les trois axes fondamentaux dont a besoin un élève de Terminale : « résoudre » une équation différentielle, déterminer une courbe solution vérifiant une (des) condition(s) initiale(s) donnée(s), le théorème d'existence et d'unicité. Notons néanmoins que dans notre étude ces axes sont dans le registre graphique et non pas algébrique. Par exemple pour ce qui est de la « résolution » d'une équation différentielle, l'étude est faite dans le registre graphique qui consiste à déterminer les variations et l'allure des courbes solutions et non pas au sens algébrique qui porte à déterminer la solution générale de cette équation différentielle. Il aurait donc été préférable qu'une telle étude soit conjointement menée avec une étude algébrique pour que les élèves puissent réaliser le passage entre les approches, algébrique et qualitative, tout en accomplissant les trois axes cités ci-dessus.

D'autre part, il convient de noter que nous avons repéré, dès le départ, une distinction significative entre redoublants et non-redoublants et que celle-ci pouvait donner lieu à des résultats intéressants. Basé sur ce constat, nous pouvons confirmer l'hypothèse émise sur **la difficulté à faire une analyse qualitative des équations différentielles chez des sujets possédant la technique algébrique mais dont la base n'est pas solide**. Ce résultat est donc confirmé par la tendance des redoublants vers des stratégies et opérateurs algébriques, une tendance marquante plutôt au départ. Signalons néanmoins que cette discrimination n'est intéressante que lorsque l'activité en cours s'inscrit dans la sphère de pratique de la conception algébrique. Ainsi, à la deuxième séance où les activités ne s'inscrivent généralement pas dans la sphère de pratique de cette conception, la distinction entre redoublants et non redoublants n'était plus significative. En effet, bien qu'en **A3** (première activité de la deuxième séance) les redoublants se sont avérés un peu plus lents que les autres élèves, aux activités suivantes nous n'avons plus observé de tels écarts.



Néanmoins, cette remarque ne contredit pas le premier résultat ci-dessus qui note une réussite chez l'ensemble des élèves. En effet, d'une part nous avons noté une disparition des stratégies algébriques, présentes au départ, qui doit être considérée comme un signe d'apprentissage mais qui témoigne aussi de la pertinence des activités choisies ; et d'autre part les résultats du devoir à la maison ont démontré que le recours à l'algébrique a presque disparu bien que la conception algébrique soit opératoire pour cette activité.

**D'autre part, malgré cette étude optimiste, nous avons également relevé des entraves sur lesquelles nous nous proposons de nous pencher.** Celles-ci seront traitées sous différentes catégories : difficultés d'expression, de notation et difficultés liées aux notions élémentaires de l'analyse.

Des **difficultés d'expression** : nous avons noté à plusieurs reprises que, par exemple lors d'un raisonnement, les élèves éprouvaient de difficultés à s'exprimer. Les extraits suivants issus des productions d'élèves mettent en cause l'appropriation de **certaines notions élémentaires** (pente, droite, tangente, axe des abscisses, etc.) : « *droites parallèles aux abscisses/ordonnées* », « *l'ordonnée des points auxquels on cherche le coefficient directeur* », « *des tangentes des points d'une droite de la forme  $x=k$*  », « *les droites de la forme  $y=k$  auront des tangentes* », « *signe des tangentes des droites* », « *l'axe des abscisses d'une équation différentielle* » et « *les coefficients directeurs des points.* »

Soulignons que ces difficultés d'expression ne sont pas spécifiques aux notions élémentaires et que d'autres concernant les nouvelles notions (équation différentielle, fonction solution, etc.) sont également apparues : « *tangente à une équation différentielle* », « *une droite parallèle à l'axe des abscisses d'une équation différentielle* », « *tous les points de la fonction solution de  $f'(x)=2 \cdot f(x)$  au dessous de l'axe  $O_x$  ont un coefficient directeur négatif* » et « *la courbe représentative de l'équation différentielle.* » Ces difficultés doivent-elles être attribuées à un manque de conceptualisation, surtout pour les nouvelles notions, ou bien font-elles parties des erreurs « ordinaires » des élèves ? Une question à laquelle il est difficile de répondre à ce niveau.

Il en résulte que les embarras de certains élèves aux deux premières séances devraient être attribués à la non maîtrise des notions « *équation différentielle* », « *fonction solution* », « *isocline* » etc. et mettent bien évidemment en doute la conceptualisation de ces nouvelles notions chez leurs auteurs. Si l'élève n'a pas bien compris ce qu'est une équation différentielle, il risque d'avoir du mal à donner un statut à  $y$  et/ou à en étudier les variations.

Nous avons également noté des **difficultés liées aux connaissances antérieures** des élèves : par exemple celles liées à la **représentation graphique de tangente** : comme nous l'avons relaté dans l'analyse *a posteriori* de A2 (cf. p. 152), certains élèves ne distinguent pas entre coefficient directeur négatif/positif lors du tracé de la tangente et toute tangente dessinée est de coefficient directeur positif

même si celui-ci est trouvé négatif. De surcroît, pour d'autres élèves une tangente de coefficient directeur  $m$  doit passer par un point d'abscisse  $m$  et par l'origine.

Une autre difficulté relevée concerne la **notation**, en d'autres termes ce que signifie «  $y$  » pour les élèves. Il est possible en général de dire que les élèves ont assimilé la notation avec  $y$ . Il convient de souligner que ce sont généralement les redoublants qui préfèrent utiliser la notation  $f$  tandis que les non redoublants se sont montrés plus ouverts à assimiler  $y$ . Mais d'autre part, nous avons noté un cloisonnement entre les deux représentations d'une même équation différentielle, soit  $y'=2y$  et  $f'(x)=2f(x)$ . Par exemple en **DQ2** lors de l'étude des variations des courbes solutions, un élève propose « pour  $y > -\frac{1}{2}$ ,  $f$  est croissante. » Une telle difficulté est directement liée aux statuts de  $y$  et de  $f$  attribués par les élèves et nous en déduisons que  $y$  est vue comme la variable indépendante et  $f$  comme la fonction solution. Or le passage de  $f$  à  $y$  a été suffisamment souligné par l'enseignant.

Cette discrimination entre  $f$  et  $y$  peut par ailleurs être expliquée par la difficulté à distinguer entre les  $y$  qui incarnent parfois une variable indépendante, parfois une fonction solution, parfois une isocline, parfois une droite et même parfois elle prend des valeurs et se comporte donc exactement de la même manière que  $x$  dans la notation  $f(x)$  (le cas de l'activité **A2**). Cette « complexité » a conduit les élèves à des erreurs graves : par exemple l'analyse a démontré que l'utilisation de  $y$  au côté droit d'une égalité ( $y'=2y$  par exemple), entraînait une confusion entre les variables indépendante et dépendante d'où nous avons constaté l'apparition d'un opérateur qui stipule que, dans une équation différentielle,  $y$  représente à la fois la variable indépendante et la variable dépendante. Cet opérateur permet en fait d'interpréter, par exemple, les attitudes des élèves ayant intégré «  $2.f(x)$  » comme «  $f(x)^2$  » considérant ainsi  $f$  comme une variable indépendante. Il permet également de décrire l'attitude des élèves qui calculent deux coefficients directeurs pour la (ou les ?) tangente à une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y$  au point  $(a, b)$  :  $y'=2a$  et  $y'=2b$ .

Entre autres, ces constatations nous ont amené à décrire la **conception « transcendantale »**<sup>19</sup> qui permet nous semble-t-il de comprendre les attitudes de ces élèves mais aussi d'autres comportements. Cette conception consiste à considérer une équation différentielle comme une fonction « spéciale » qui possède également sa dérivée. Selon cette conception, on peut « naturellement » parler d'une représentation graphique, d'une tangente à cette représentation, d'une limite, etc, pour cette fonction spéciale. Cette conception s'est manifestée dans plusieurs productions d'élèves : par exemple, un élève tente de déterminer l'ensemble de définition, un autre élève tente de calculer la limite. Cette « fonction » permettrait également, selon cette conception, de calculer par exemple deux coefficients directeurs au même point.

---

<sup>19</sup> Nous avons choisi cette appellation en référence à Poincaré qui appelle ses fonctions ainsi.

Cette conception permet de décrire non seulement le comportement des élèves qui « intègrent » l'équation  $f' = 2f$  comme  $f = F^2$  ( $F$  étant la primitive de  $f$ ), mais également les comportements des élèves qui prennent  $e^{2x}$  comme l'unique solution de l'équation différentielle fournie : « **la « solution » de l'équation différentielle  $y' = 2y$  est  $e^{2x}$ .** » Nous nous sommes interrogé sur une éventuelle association entre « équation différentielle » et « fonction exponentielle » et nous nous demandons, chez les apprenants, si cette association n'est pas faite pour toute équation différentielle, du moins, de la forme  $y' = f(x, y)$ . Notons avoir relevé les mêmes tendances chez des stagiaires de l'IUFM (cf. Arslan et Al. 2004). Nos inquiétudes ont été confirmées par les deux élèves qui, lors du devoir à la maison en **DQ2**, par un tour de stratagèmes proposent  $y = e^{2x} + x$  pour l'équation différentielle  $y' = 2y + 1$  et finissent par « *y ne peut que contenir la fonction exponentielle pour que l'équation  $y' = 2y + 1$  soit valide.* »

D'autres productions d'élèves que cette conception permet de décrire est le dessin fourni par un élève à la cinquième activité où une courbe passant par quatre points est proposée. Soulignons d'ailleurs que le raisonnement de certains élèves donnant la bonne réponse ne se démarque pas de cette conception. Certains extraits soumis ci-dessus relativement aux difficultés d'expression confirment l'existence d'une telle conception : par exemple « *la courbe représentative de l'équation différentielle.* »

Ce bref bilan révèle que le bon fonctionnement de la séance a été perturbé par diverses conceptions et opérateurs, qui existaient déjà ou que les élèves se sont forgés. Bien évidemment, les résultats évoqués dans ce bilan sont partiels et ils seront testés plus sévèrement lors de l'analyse a posteriori de la dernière séance et nous continuerons dans la suite de notre analyse à tester l'existence de ces résultats.

### 7.3 Séance n°3

Rappelons que cette séance est composée de sept activités (dont trois sont constituées de deux variantes et un binôme répond uniquement à l'une des variantes) que nous allons étudier chronologiquement<sup>20</sup>. Puisque les élèves ont travaillé en binôme, nous organiserons notre analyse en termes de binômes et non plus d'élèves.

En ce qui concerne la méthodologie que nous allons suivre pour analyser cette séance, elle diffère de celle des deux premières. C'est la raison pour laquelle il convient de la présenter avant de procéder à l'analyse. Afin de permettre une meilleure lisibilité des résultats obtenus, nous organiserons notre analyse en deux temps. Dans un premier temps (au paragraphe 7.3.1), nous présenterons les productions des binômes en termes de réussite/non-réussite sans entrer dans les détails. Dans un deuxième temps, au paragraphe 7.4, nous présenterons les résultats qui peuvent être ressortis grâce à

---

<sup>20</sup> Pour les énoncés des activités le lecteur peut se référer à l'analyse a priori ou à l'annexe de la partie en cours.

cette séance d'évaluation tout en les illustrant le cas échéant par les productions écrites et audio des binômes.

Concernant les productions audio, notons que les neuf binômes formés ont été enregistrés. Néanmoins quelques problèmes techniques nous ont permis de ne transcrire que les protocoles de quatre binômes, à savoir **B2**, **B4**, **B6** et **B7**. Lorsque ceci s'avèrera nécessaire, nous n'hésiterons pas à illustrer notre analyse par les productions audio des binômes. Pour faciliter la lecture du protocole que nous allons citer dans la suite, il convient de noter quelques principes : les propos en crochet et en italique sont nos commentaires. Le signe « (...) » signifie une rupture ou un temps relativement court de silence. Quant à « [...] », ceci signifie un temps plus long de silence.

Avant de présenter notre analyse, il nous paraît intéressant de rappeler que les activités visent à contrôler l'acquisition et le réinvestissement des connaissances transmises pendant les séances précédentes. A travers des tâches proposées, nous contrôlons, - en **AE1**, **AE5** et **AE7<sub>B</sub>** - la disponibilité du concept d'isocline, la capacité à s'en servir ou à se servir du concept de tangente afin d'identifier si une courbe donnée est une solution d'une équation différentielle fournie. Nous contrôlons par ailleurs, en **AE2** et **AE6**, l'assimilation de la notion du champ de tangentes et si les élèves peuvent associer des champs de tangentes donnés à des équations différentielles et s'ils sont capables de tracer des courbes compatibles à un champ de tangente donné. Nous visons également, en **AE3** et **AE7<sub>A</sub>**, à tester l'assimilation de la relation entre une fonction et sa dérivée et le signe du coefficient directeur de la tangente. Enfin **AE4** évalue la capacité des élèves à lire un graphique hors contrat, donné dans le plan  $(y, y')$  et l'habileté à identifier le signe de la dérivée à partir de cette représentation graphique.

En ce qui concerne les stratégies pouvant être mobilisées par les élèves, nous ne les détaillerons pas ici au sein de chaque activité, renvoyant le lecteur à l'analyse *a priori*. Contentons-nous de les rappeler : **SA1** qui consiste à la **résolution algébrique** des équations différentielles fournies et/ou à donner une expression algébrique à la courbe fournie ; **SA2** où la fonction exponentielle entre en jeu. Les deux autres stratégies plausibles sont **SQ1** qui consiste à interpréter qualitativement l'équation différentielle en cours et **SX2** qui résulte d'une confusion entre les propriétés de  $y'=2y$  et celles proposées par l'activité.

Il convient également de rappeler que nous tenterons de tester l'acquisition des opérateurs visés –dont la liste se trouve au début du présent chapitre<sup>21</sup> - et l'apparition d'autres opérateurs traités au cours des

---

<sup>21</sup> Dans la suite de ce texte, nous ferons souvent allusion à ces opérateurs que nous évoquerons par leurs numéros. Nous essayerons de rappeler un opérateur lorsque nous l'évoquons. Néanmoins le fort recours à ces opérateurs au moment de l'analyse ne nous permet pas de rappeler un opérateur à chaque fois qu'il est évoqué. C'est la raison pour laquelle nous les avons listés à la page 99 et nous invitons le lecteur à y référer au cas de besoin.

séances précédentes. Notre analyse contribuera également, dans la mesure du possible, à relever les contrôles mobilisés par les élèves. Afin de faciliter le suivi, rappelons les opérateurs concernés par l'expérimentation tout en précisant à quelle(s) activité(s) ils ont trait. Dans le tableau ci-dessous le signe (+) signifie que l'opérateur concerné peut être mobilisé lors de l'activité en question et que l'analyse de celle-ci peut *a priori* permettre de mesurer l'acquisition de cet opérateur. En revanche, le signe (-) signifie que l'opérateur en question n'a aucun trait à l'activité en question.

	Op. Q.I	Op. Q.II	Op. Q.III	Op. Q.IV	Op. Q.V	Op. Q.VI	Op. Q.VII	Op. Q.VIII	Op. Q.IX
AE1	+	+	+	+	+	+	+	-	-
AE2	-	+	-	-	-	+	+	-	-
AE3	+	+	+	+	-	+	+	-	-
AE4	+	+	-	+	-	-	-	-	-
AE5	+	+	+	+	+	+	+	-	-
AE6	+	+	+	+	+	+	+	+	+
AE7	+	+	+	+	+	+	+	-	-

**Tableau 18** : Lien entre opérateurs et activités.

### 7.3.1 Analyse globale

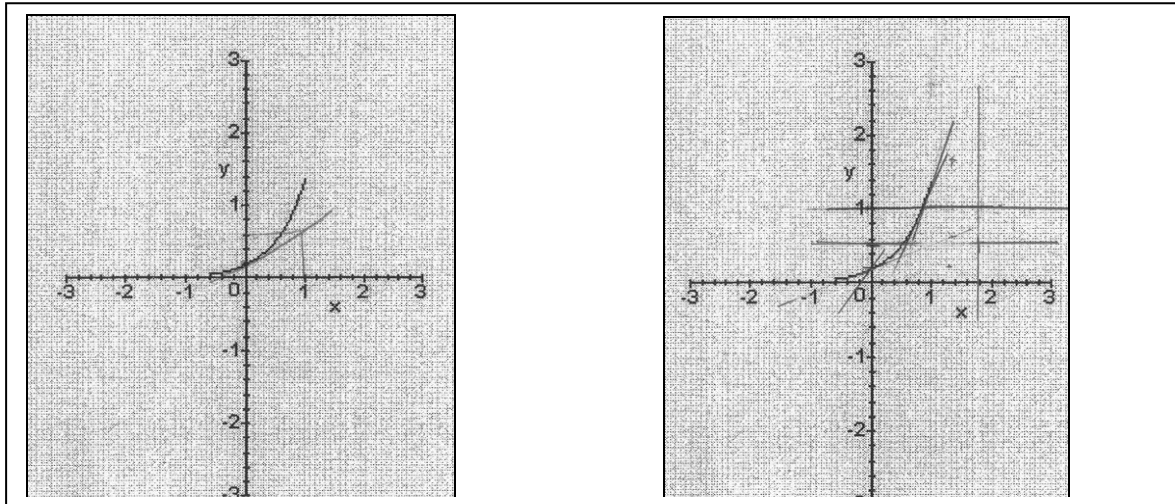
#### 7.3.1.1 Activité n°1 : AE1 :

Dans les deux variantes de cette activité, il s'agit de démontrer si la courbe donnée dans l'énoncé est ou non une courbe solution de l'équation différentielle proposée, à savoir respectivement  $y'=2y$  et  $y'=2y+1$ . Puisque les deux variantes sont analogues et que les stratégies attendues sont les mêmes pour les deux, nous nous permettons de faire une analyse pour l'ensemble des binômes en faisant abstraction des variantes proposées.

L'analyse des productions révèle qu'un seul binôme (**B8**) s'abstient et que le reste des binômes fait appel à **SQ1**. En d'autres termes les binômes mobilisent d'abord **Op. Q.III** pour calculer le coefficient directeur en un point optimal qui est ensuite comparé à la figure en vertu de **Op. Q.VII**. Les procédés suivis pour mobiliser **SQ1** sont relativement variés et riches, et démontrent, nous semble-t-il, l'accessibilité d'un raisonnement qualitatif aux élèves. Par exemple ; après avoir remarqué sur la figure que la tangente au point d'ordonnée 1 est horizontale, les deux redoublants (**E<sub>r</sub>7** et **E<sub>r</sub>11**) du binôme **B1** fournissent le raisonnement suivant : « pour  $y=1$   $y'=1$ . La tangente au point d'ordonnée 1 aurait un coefficient directeur égal à 1 or c'est une tangente horizontale. » Pour ce qui est du binôme **B3**, déterminant la tangente au point (0 ; 1), soit  $y=x+1$ , il en résulte que « la droite d'équation  $x+1$  n'est pas tangente à la courbe donc la courbe n'est pas solution. » Concernant le binôme **B6**, lui aussi composé de deux élèves lents (**E3** et **E13**), **SQ1** est mise en œuvre d'une façon assez intéressante :

traçant une tangente à la courbe au point  $(0 ; 0.2)$ , il en calcule le coefficient directeur, trouvé 0.4 grâce à la figure<sup>22</sup> (cf. Extrait 18-a). Or l'équation différentielle donnant un coefficient directeur à valeur 1.4, les élèves arrivent à la conclusion suivante : « *1.4 ≠ 0.4, le coefficient directeur par le calcul (1.4) n'est pas vérifié par le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A (0 ; 0.2). Donc la courbe dessinée n'est pas une courbe solution de l'équation différentielle  $y' = 2y + 1$ .* »

Nous voyons clairement à ces productions que l'opérateur **Op. Q.VII** sert de contrôle par s'acquitter de la tâche.



Extrait 18 a. Figure de **B6**

b. Figure de **B7**.

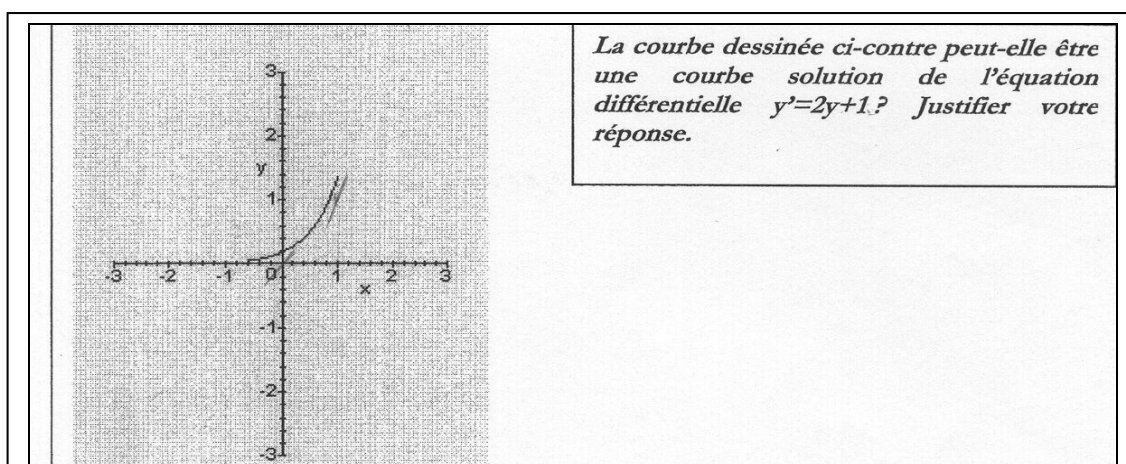
Concernant **B7** (cf. Extrait 18-b), le binôme fixe trois points sur la courbe :  $(0 ; 1)$ ,  $(0 ; 0.5)$ ,  $(0 ; 0.2)$ , pour lesquels les coefficients directeurs sont correctement calculés (via **Op. Q.III**). Ensuite, conformément à **Op. Q.VII**, les tangentes en ces points sont également tracées par le binôme, d'où celui-ci conclut que « *la courbe représentée n'est pas solution.* » Nous déduisons de leur figure que la droite censée être tangente au point  $(0 ; 0.2)$  coupe la courbe au lieu d'être tangente (déduction confirmée par l'intervention ci-dessous). L'examen des enregistrements audio de ce binôme met en évidence l'hésitation du binôme à répondre à la question. En fait ce flottement provient d'une erreur de calcul du coefficient directeur au point concerné (par l'oubli du rajout de 1, le coefficient directeur est trouvé 0.4, au lieu 1.4) :

68. **E10** : (*elle murmure*), mais c'est pas bon regarde.... C'est pas bon.... [...] Eh Yann !  
[L'autre : *hii*]... Elle est pas bonne la solution regarde! En 0.2, elle la coupe la droite, parce que j'avais oublié de rajouter le 1... Donc elle est pas une solution. [...]

<sup>22</sup> La tangente dessinée passant, d'après la figure, par les points  $(0 ; 0.2)$  et  $(1 ; 0.6)$ , la pente est calculée à l'aide de ces deux points.

**B4**, avant de donner une bonne réponse via **SQ1**, se comporte de la façon suivante : l'équation donnée est transformée en  $y'-y^2=0$ , ensuite  $y'$  est tout d'un coup remplacée par  $2y$ . D'où les élèves obtiennent  $2y-y^2=0$ . Nous ne comprenons pas cette substitution, en effet ni la production écrite, ni le protocole ne fournissent malheureusement aucun indice à ce sujet. Pour expliquer cette substitution, nous pouvons penser que pour ce binôme  $y'$  est constamment égale à  $2y$ . Le binôme se corrige par la suite.

D'autre part, nous avons noté une confusion entre « isocline » et « tangente » chez le binôme **B9** qui conclut sa réponse de la façon suivante : « la courbe dessinée n'est pas une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y+1$  à cause de l'isocline au point  $(0 ; 0)$ . La pente de l'isocline ne correspond pas à la concavité de la courbe. » Suite à l'examen de la figure du binôme (cf. **Extrait 19**), nous constatons que le mot « isocline » est à remplacer par « tangente » pour que les propos des élèves deviennent corrects. En effet, les coefficients directeurs des tangentes sont correctement calculés et les tangentes en questions sont représentées par des segments sur la figure.



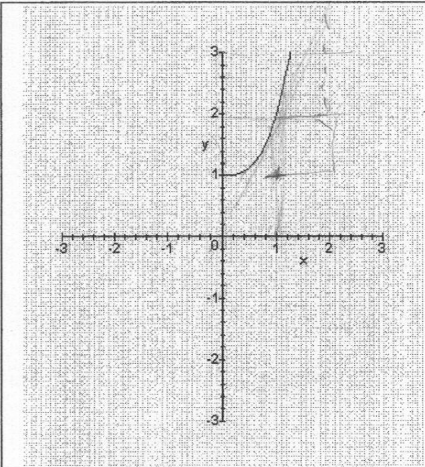
**Extrait 19** : Figure du binôme **B9**.

A part **B8** qui s'abstient, **B2** est le seul à donner une réponse que nous n'avons pas pu juger (cf. **Extrait 20**). Après avoir précisé que l'équation donnée correspondait au coefficient directeur de la tangente, d'après les enregistrement audio le binôme précise dès le départ qu'il faut prendre des points sur la courbe et voir si le coefficient directeur calculé à partir de l'équation différentielle correspond bien à celui calculé grâce à la figure (cf. intervention 9-10 du protocole en annexe). Mais la question que le binôme se pose est « quel(s) point(s) ? »

Le binôme prend ensuite la droite  $x=1$  et écrit ensuite : « pour  $(1 ; 1)$   $y'=1$  » et ensuite « pour  $(1 ; 2)$   $y'=4$  oui pour ce point. » La tangente présumée passée par le point  $(1 ; 2)$  est également tracée. Lorsqu'on examine la figure, on remarque qu'ils ont essayé de tracer la droite  $x=1$ , en essayant de la faire croiser avec la courbe donnée au point  $(1 ; 2)$ . Voici une interprétation plausible de ce qu'ils ont fait : au point  $(1 ; 1)$ , le coefficient directeur est calculé alors que la courbe n'y passe pas. Ce point

n'est donc pas déterminant pour les élèves d'où il est rejeté. Quant au point (1; 2), le coefficient directeur est trouvé égal à 4 et d'après les élèves celui-ci correspond au graphique.

L'activité met en évidence que les opérateurs visés sont acquis par les élèves. Signalons néanmoins que, vu la difficulté à distinguer généralement entre opérateur et contrôle dans une conception, il nous a été difficile de ressortir les contrôles mobilisés par les élèves. Nous pouvons néanmoins affirmer que certains opérateurs, en particulier **Op.Q.I**, **Op. Q.II** et **Op. Q.VII**, ont joué le rôle de contrôle pour les actions des mises en œuvre par les élèves.



*La courbe dessinée ci-contre peut-elle être une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=y^2$  ? Justifier votre réponse.*

$y' = y^2 \rightarrow$  coefficient directeur de la tangente  
 pour la droite  $x=1$   
 pt.  $(1,1)$   $y' = 1$       pt.  $(1,2)$   $y' = 4$   
 qui pour ce point

**Extrait 20** : extrait du binôme **B2**.

### 7.3.1.2 Activité n°2 : AE2 :

Il s'agit dans cette activité de tracer trois courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=y^2-x$  (celle-ci non fournie aux élèves) en se basant sur son champ de tangentes. A la séance précédente, la classe a travaillé un champ de tangentes qui peut être qualifié de simple et de « régulier » et surtout, les courbes solutions avaient une forme familière : exponentielle. D'autant plus que les redoublants sont censés les connaître. Or cette fois-ci, le champ de tangentes fourni est plus compliqué et non seulement les courbes solutions ne sont plus symétriques par rapport à l'axe horizontal, mais elles peuvent également le couper, contrairement au cas de la séance précédente.



Les tracés fournis mettent en évidence qu'à part **B3** et **B6**, tous les binômes ont réussi à tracer correctement les courbes solutions demandées. Le commentaire écrit par **B8** met en évidence que les élèves ont compris ce qu'est un champ de tangentes et ce que signifient les « petits segments » : « *on suit le champ de tangentes à proximité du point demandé et on trace la courbe toujours en s'aidant des tangentes.* » Par ailleurs, un autre binôme (**B4**) souligne la distinction entre le champ de tangentes fourni à cette activité et celui de la séance précédente : « *les premières séances, nous avons remarqué que les champs de tangentes étaient symétriques par rapport à l'axe des abscisses.* » Nous pensons que ces raisonnements démontrent qu'un champ de tangentes est désormais accessible aux élèves.

D'autre part, nous pouvons souligner quelques difficultés relatives à cette activité. Par exemple, bien que le binôme **B7** dessine correctement les courbes demandées, nous constatons une hésitation, relevée à la fois par le tracé - non suffisamment foncé - et par le commentaire que le binôme propose : « *si elles doivent passer par les 3 points à la fois, ce n'est pas possible mais si elles doivent passer par ces 3 points il y a beaucoup de solutions.* » Rappelons que l'un des élèves de ce binôme est **E18** qui avait fourni une seule courbe – au lieu de quatre- en **A5**, alors que cette fois-ci, il s'oppose catégoriquement à ce qu'il existe une seule courbe passant par les trois points (cf. intervention ci-dessous) :

16. **E18** : *mais attend ! Essaie de regarder ! tu peux pas revenir c'est plus une fonction. Si tu regardes [...]*

Ceci met en évidence que le contrôle exercé par les élèves est le statut « fonction » des courbes solutions. Nous pouvons ainsi repérer un contrôle mobilisé par les élèves :

**Cntrl 1** : les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions.

En ce qui concerne les deux binômes (**B3** et **B6**) qui fournissent des tracés incorrects, **B6** est sans doute influencé par les courbes solutions de l'équation  $y'=2y$ . La lecture du protocole (cf. annexe) permet de remarquer que les élèves n'accordent aucune importance aux segments et se contentent d'imiter les courbes solutions de  $y'=2y$  dans la mesure où ils s'en souviennent. L'un des élèves formant le binôme n'arrête pas de se poser la question suivante en sous-entendant l'activité **A5** de la deuxième séance : « *comment on avait fait pour raisonner ?* » Et puis elle se confie de la manière suivante :

81. **E13** : *moi je pense me souvenir des tangentes, elles sont comme ça [...] Donc la courbe elle va comme ça et puis après, elle devient de plus en plus droite donc elle va comme ça. (hii L'autre confirme) [...] Attend, on essaie de faire les autres, parce que normalement, elles devraient être...*

Pour les courbes solutions passant par les points  $(-2 ; 0)$  et  $(0 ; -2)$ , les élèves se sont forcés pour que les deux courbes soient le plus symétrique possible par rapport à l'origine (cf. **Figure 9-a**). Pour que leur production soit conforme à ce qui a été fait la séance précédente, le binôme cherche forcément une symétrie entre les courbes solution, mais la question qu'il se pose est « symétrique » mais par rapport à quoi ? (cf. intervention 130-138 dans l'annexe) Tandis que pour la courbe passant par l'origine, elle est représentée par la droite  $y=0$  comme c'est le cas dans l'équation  $y'=2y$ . Nous pouvons ainsi penser que le contrôle exercé par les élèves est le suivant :

**Cntrl 2** : les courbes solutions d'une équation différentielle sont de la forme exponentielle.

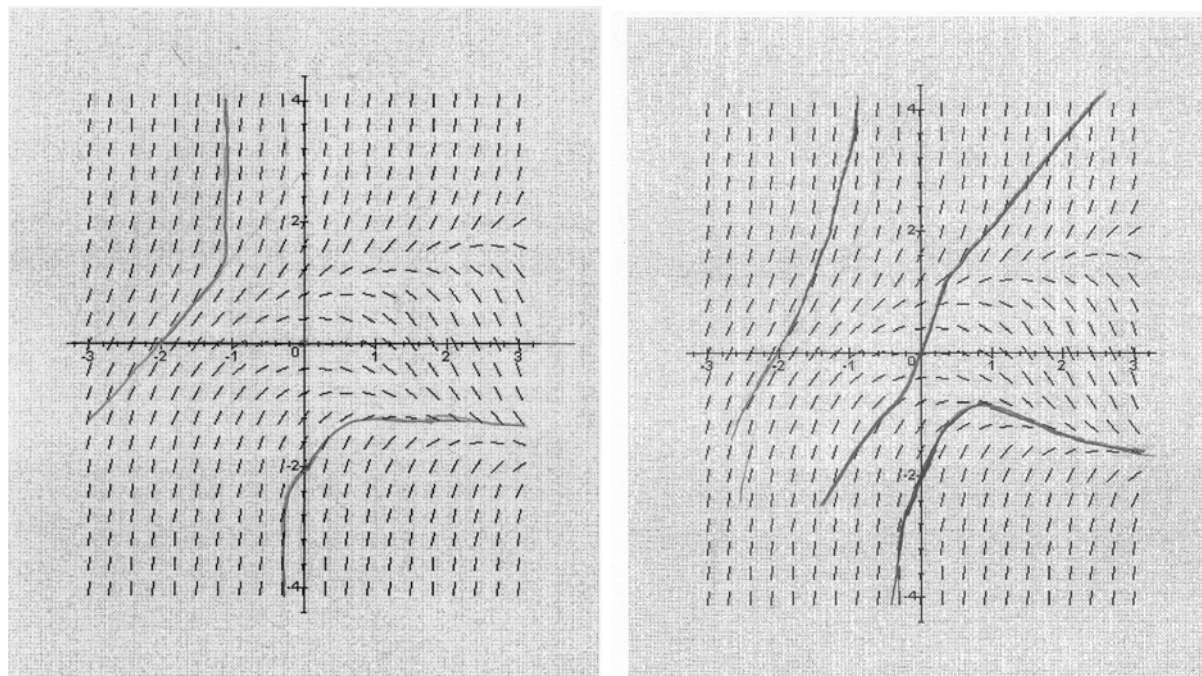
- 95. **E13** : ah been,  $(0, 0)$ , elle est... elle est horizontale, hii ? [...] Elle est horizontale...
- 96. **E3** : Sandra ?
- 97. **E13** : au zéro, elle est horizontale...
- 98. **E3** : au zéro ?
- 99. **E13** : t'es d'accord, non ?
- 100. **E3** : been oui, je pense, oui...

Malgré tout, les élèves ne sont pas convaincus de ce qu'ils ont fait et ils manifestent leurs doutes tout au long de l'activité. En fait, les segments ne signifient pas un grand intérêt pour les élèves et ils sont dépendants de l'équation différentielle de la séance précédente :

- 104. **E3** : oui mais ce qu'il y a... on est vraiment pas sûres que ça soit ça...
- 105. **E13** : ah non, vraiment pas, non...
- 106. **E3** : je me souviens plus comment on avait fait... [...]
- 107. **E13** : on avait pris une feuille, on avait écrit... [...] en cours...
- 108. **E13** : comment ça se fait, nous, on a fait déjà...
- 109. **E3** : j'sais pas
- 110. **E13** : « *par un point, il passe une et une seule courbe représentative de l'équation différentielle* » himm, himm [...]
- 111. **E3** : le champ de tangentes, « *à chaque point il est possible d'associer une tangente grâce à une équation différentielle* ». Sauf que là on n'a pas la même équation différentielle...
- 112. **E13** : si c'est la même, c'est celle-là...(elle sous-entend certainement  $y'=2y$ )
- 113. **E3** : ah, c'est celle-là ?
- 114. **E13** : oui, je pense...
- 115. **E3** : been j'sais pas en fait...

En fait un tel tracé trouve sa racine dans la conception des élèves tout au long de l'ingénierie. Malgré les bons dessins fournis par les deux élèves en **A5**, où ils faisaient face à une tâche semblable, ils ont fait appel plusieurs fois à des stratégies autres que qualitatives dans les deux premières séances (cf. tableau dans l'annexe, p. 245). Ceci révèle la difficulté des élèves à faire une approche qualitative.

D'autre part, nous pouvons également penser que la quasi-limitation lors des deux premières séances à l'équation différentielle  $y'=2y$ , a constitué un obstacle didactique chez ces élèves, mais aussi chez d'autres qui de temps à autre n'ont cessé de faire appel à **SX2** les deux premières séances.



**Figure 9 a.** Figure de **B6**

**b.** Figure de **B3**.

Concernant **B3**, bien que les deux courbes soient plus ou moins correctement dessinées, à partir d'un moment donné la troisième, celle passant par l'origine, coupe les segments au lieu de les suivre comme tangents (cf. **Figure 9-b**). Ceci montre que les segments ne sont pas dûment suivis. Or nous constatons sur le bord de leur feuille une courbe dessinée à titre d'exemple, qui est tangente à un segment. Rappelons qu'en **A5**, le premier élève de ce binôme, **E<sub>r</sub>16**, était absent, alors que **E17** se forçait pour passer sur les segments au lieu de les suivre. Puisque le binôme cherche à produire des courbes symétriques par rapport à l'origine et comme nous n'avons pas accès à son protocole, nous pouvons faire les mêmes commentaires que pour le binôme précédent (**B6**). Ceci peut donc être expliqué par la volonté du binôme de produire des courbes qui soient conformes à celles de  $y'=2y$ .

### 7.3.1.3 Activité n°3 : AE3 :

Rappelons que chacune des variantes de cette activité propose une équation différentielle où la dérivée n'est jamais négative et interroge les élèves sur la possibilité de trouver un intervalle où les courbes solutions sont décroissantes pour le groupe A et si une droite à coefficient directeur négatif peut être tangente à une courbe solution pour le groupe B.

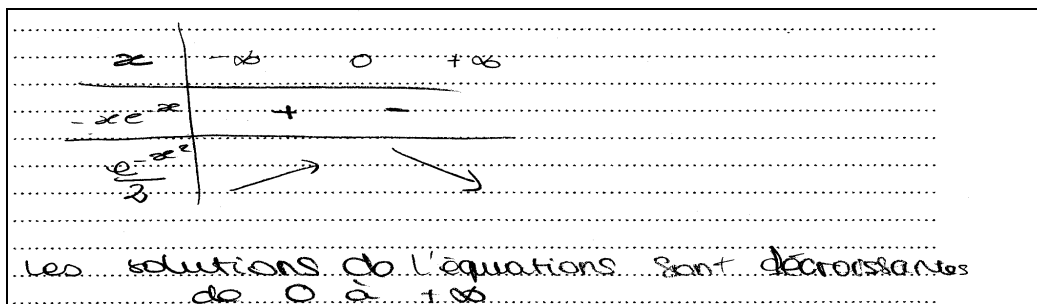
Quatre binômes (**B1**, **B4**, **B6**, **B8**) donnent une réponse correcte avec des justifications satisfaisantes. Nous avons relevé grâce à des enregistrements audio que **B6** tâtonne avant de donner une bonne réponse. En effet, tout comme **B7** (cf. infra), il suit tout d'abord un procédé qui cherche à démontrer que la droite donnée est une solution et non pas une tangente à une courbe solution. Il se rend compte ensuite de cette faute et se corrige :

160. **E3** : ah oui mais là ... ah oui parce que là ... mais non là, je crois que... on doit bien suivre une autre piste. Parce que là, c'est tangente ... à la courbe ... [*hii L'autre essaie de comprendre ensuite confirme*] c'est pas qu'elle vérifie l'équation différentielle ...

Dans ce qui suit nous examinerons les cinq binômes qui ont échoué à cette activité, tout en essayant de comprendre les causes de cet échec.

Concernant **B7**, nous remarquons qu'il ne distingue pas entre « tangente » et « solution » et essaye de se débrouiller avec la technique qui sert à vérifier si une expression donnée est solution d'une équation différentielle ou non : il remplace  $y$  par  $-2x$  dans l'équation différentielle donnée –à savoir  $2y' = y^2$ – et obtient donc  $y' = 2x^2$ . Ensuite, le binôme conclut que «  $2x^2$  n'est pas la dérivée de  $y$ . » Il est difficile de deviner ce qui est entendu par « la dérivée de  $y$  », mais nous pensons qu'il s'agit de  $-2$  (car  $y = -2x$ ). Nous n'avons pas pu relever des explications à l'aide des enregistrements audio, car l'un des élèves voulait travailler individuellement. Suite à notre avertissement, l'élève en question s'est montré plus coopératif. Mais malheureusement, il n'y a rien concernant cette activité dans l'enregistrement, ceci dit que le travail a dû être effectué au moment où les élèves se parlaient moins.

D'autre part, nous constatons que deux binômes (**B3**, **B9**) représentent la conception « *transcendante* » introduite lors du bilan des deux premières séances et selon laquelle une équation différentielle est considérée comme une nouvelle fonction. Concernant le premier binôme, prétendant qu'il est possible de fournir un tel intervalle, il procède exactement comme s'il s'agissait d'une fonction : en calculant la dérivée seconde, ils aboutissent à un tableau de variations (cf. **Extrait 21**), établi en fonction de  $y'$  et  $y''$ . La stratégie suivie pour calculer celle-ci est correcte, néanmoins suite à un manque d'attention le binôme perd de vue le carré et écrit  $-xe^{-x}$  au lieu de  $-xe^{-x^2}$ . Grâce au tableau établi, le binôme conclut que « *les solutions sont décroissantes de 0 à  $+\infty$ .* » Notons qu'à l'intervalle proposé par le binôme la dérivée seconde est négative. Ceci est en parfaite correspondance avec la conception « *transcendante* » car il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction afin de déterminer ses variations.



**Extrait 21** : Tableau de variations fourni par **B3**.

Concernant le binôme **B9**, après avoir remplacé  $y$  par  $-2x$  dans l'équation différentielle donnée, il arrive à  $y' = 2x^2$  et conclut que : « cette équation a une représentation graphique de la forme d'une parabole. » Nous voyons clairement que la représentation graphique de  $y'$  est associée à celle de l'équation différentielle. Le binôme continue ensuite de la manière suivante : « Les isoclines sont toutes parallèles les unes aux autres. Dans ce cas, il est impossible d'obtenir une parabole donc la droite  $y = -2x$  ne peut pas être tangente à aucune courbe solution de l'équation différentielle  $2y' = y^2$ . » Nous remarquons dans cette copie que les notions « équation différentielle », « solution » et « tangente » sont toutes mélangées.

En ce qui concerne **B5**, le binôme fait deux résolutions distinctes : premièrement, remplaçant le côté droit de l'équation différentielle donnée (i.e.  $2y' = e^{-x^2}$ ) par  $y$ , il obtient  $2y' = y$ . Comme nous l'avons évoqué pendant l'analyse de deux premières séances, la fonction exponentielle évoque, surtout chez les deux élèves redoublants qui forment ce binôme, la solution générale d'une équation différentielle. D'où  $e^{-x^2}$  est remplacé par  $y$ . Essayant de résoudre  $2y' = y$ , le binôme aboutit à «  $f(x) = ke^{1/2 \cdot x}$  ( $k \in \mathcal{R}$ ) » d'où «  $f(x) = k\sqrt{e^x}$ . » Nous remarquons l'influence de la conception algébrique qui se manifeste par le souhait d'identifier la fonction, mais aussi les conséquences de la limitation de l'enseignement à un sous-ensemble des équations différentielles. D'autre part, la substitution de  $y$  à  $e^{-x^2}$ , nous amène à reformuler la conception ci-dessous, constatée déjà lors des premières séances. Signalons néanmoins que cette conception a été relevée chez les stagiaires de l'IUFM lors d'un travail relaté dans Arslan et al. (2004) :

**Conception 2** : dans une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$ ,  $y$  peut être remplacée par la fonction exponentielle.

Les élèves n'étant pas satisfaits de cette première résolution, mettent une croix sur cette partie et font une deuxième résolution qui va dans le même sens que **B3** dont nous avons présenté la production ci-dessus.  $y'$  est donc vue comme la fonction pour laquelle les variations sont recherchées, d'où la conception « *transcendante*. »

Enfin, en ce qui concerne **B2**, le binôme prétend qu'il est possible de trouver un tel intervalle et que « cela signifie que la courbe a des coefficients directeurs décroissants. » Les élèves tracent le graphe de  $y'$  qui évoque la forme d'une cloche et dont le sommet est le point d'ordonnée 1. Ce graphe montre qu'effectivement lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  les coefficients directeurs diminuent. Nous pouvons décrire ce raisonnement par la **Conception 1** qui consiste à croire qu'un « coefficient directeur décroissant » va de pair avec la « décroissance de la courbe. » Cette conception, déjà relevée lors de la première séance, est la suivante :

**Conception 1** : [pour une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$ ] La fonction  $f$  et sa fonction dérivée  $f'$  sont de même sens de variation sur  $I$ .

En fait, cette conception est clairement énoncée par les deux élèves :

82. **E6** : où les solutions de cette équation sont décroissantes  
 83. **E4** : en fait, c'est quand... quand  $y'$  est décroissante en fait, c'est ça ??  
 84. **E6** : oui...

[...]

136. **E6** : je sais plus ce que je voulais dire. [...] en fait elles sont décroissantes. C'est en fait c'est des solutions des coefficients d'équations... des... des coefficients directeurs qui sont décroissantes. [hii (**E4 confirme**)] Et la courbe aussi en fait [hii (**E4 confirme**)].

Notons que les comportements des binômes **B3** et **B5**, que nous avons interprété en terme de conception « *transcendante* », trouvent également une explication à l'aide de cette conception. En effet, nous pouvons également penser que les élèves font appel à la dérivée seconde afin d'identifier les variations de la dérivée pour ensuite mettre en œuvre la **Conception 1**.

Cette analyse a mis en évidence que les cinq binômes échouent à cause des conceptions erronées (**Conception 1**, **Conception 2** et conception « *transcendante* ») mais aussi à cause de l'opérateur ci-dessous. Il paraît intéressant de souligner que celui-ci apparaît plutôt chez les binômes formés des non-redoublants.

Op. IV : **l'expression de la tangente vérifie l'équation différentielle** : si la droite  $y=ax+b$  est tangente à une courbe solution d'une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  alors l'expression algébrique de la droite doit vérifier l'équation différentielle, i. e.  $y'=f(x, ax+b)$ .

Cet opérateur trouve racine en fait dans des conceptions erronées des élèves relativement à la notion de dérivée. Ne pourrait-on pas relier cette attitude à la conception révélée par Ubuz et qui consiste à croire que l'expression de la dérivée est l'expression de la tangente ? En effet, Ubuz (2001) rapporte avoir révélé les diverses « conceptions erronées » relativement à la notion de dérivée : « (a) *derivative at a point gives the function of a derivative*, (b) *tangent equation is the derivative function*, (c)

derivative at a point is the tangent equation, and (d) derivative at a point is the value of the tangent equation at that point. » (p. 129) Ceci explique pourquoi les élèves s'attendent à ce que l'expression de la tangente doit vérifier l'équation

#### 7.3.1.4 Activité n°4 : AE4 :

Cette activité, semblable à **A1**, consiste à faire étudier les variations des courbes solutions  $y$  dans l'équation  $y'=2y$  à l'aide du graphe de  $y'$ , fourni dans le plan  $(y, y')$ , sans que l'équation différentielle soit communiquée aux élèves.

Eu égard aux productions des binômes, nous constatons que trois binômes (**B2**, **B5**, **B9**) rendent des copies blanches. Le premier de ces binômes ne remarque l'activité que plus tard (cf. Protocole de **B2** en Annexe). Six binômes traitent donc cette activité et à part **B6**, tous les binômes étudient les variations des courbes solutions comme s'il s'agissait du graphe de l'équation différentielle de la forme  $y'=2x$ . Nous pouvons penser que l'interprétation du graphique donné dans le plan  $(y, y')$  est une véritable difficultés pour les élèves. Or comme nous le montre l'extrait ci-dessous, pris au protocole de **B6** (cf. également le protocole de **B7**), les élèves sont capables d'identifier correctement les variables :

210. **E13** : le graphe de  $f$  est donné ci-dessous... [...] been elle est croissante.  
211. **E3** : been c'est une fonction affine, c'est  $y=x$ . [...] non c'est pas  $y=x$ .  
212. **E13** : non, même t'as pas besoin de trouver... parce que regarde [...] ça c'est la dérivée...  
213. **E3** : ah non...  
[...]
220. **E13** :  $y$  là, il est sur l'axe des abscisses en fait...  
221. **E3** : comment tu sais ?  
222. **E13** : been  $f(y)$ . Quand tu as  $f(x)$  ...  $x$  c'est les abscisses et quand t'as  $f(y)$  ...

Après avoir convaincu **E3**, **E13** veut s'engager dans l'étude des variations de la courbe solution passant par  $(0, 1)$  malgré l'insistance de **E3** sur le fait que la courbe concernée est une courbe exponentielle. Faute de temps, le binôme n'y arrive malheureusement pas :

238. **E13** : attends il faut qu'on la trace la courbe, Claire...  
239. **E3** : elle est là. (elle trace une courbe exponentielle) c'est l'exponentielle...  
240. **E13** : non, been moi je crois j'ai une idée. [...] je crois j'ai une idée Claire ... je crois j'ai une idée...  
241. **E3** : mais c'est l'exponentielle, j'ai vu dans le livre...  
242. **E13** : t'as  $(0,1)$ ... (hii L'autre confirme) tu place sur  $f(y)$ ... ça te donne le point qui est sur  $f(y)$  ... Et après ça te donne  $y'$ . [...]  
243. **E3** :  $y'$ , c'est 1 ?

244. **E13** : been non.  
 245. **E3** : been si.  
 246. **E13** : parce que  $y'$  est égal à  $f(y)$ .  
 247. **E3** : ah c'est vrai. Je suis bête... Attends, attends, Attends, attends... [...] la fonction... [...]  
 248. **E13** : écris n'importe quoi parce que on a plus de temps...

Pour l'étude des variations de  $y$ , faute de temps, le binôme se comporte conformément à la **Conception 1** qui attribue les mêmes variations à une courbe et à sa dérivée et il finit par donner le raisonnement suivant : « la courbe  $f(y)$  est strictement croissante sur  $\mathcal{R}$ , donc  $y$  croît. » En ce qui concerne la courbe passant par (0 ; 1), le binôme dessine une courbe exponentielle : « La fonction passant par (0 ; 1) paraît être  $e^x$  qui est strictement croissante » et c'est l'intervention 241 ci-dessus qui nous explique pourquoi la fonction exponentielle. Ceci explique également pourquoi cet élève n'a cessé d'y recourir pendant les deux premières séances, alors que nous nous demandions pourquoi un non redoublant insistait autant sur le recours à l'exponentielle.

Les binômes restants (**B1** et **B7** ; **B3**, **B4** et **B8**) étudient les variations comme s'il s'agissait de la représentation graphique de  $y'$  dans le plan  $(x, y')$  et non pas dans  $(y, y')$ . Les deux premiers binômes mobilisent l'expression algébrique de la droite donnée, soit  $y'=2x$ , pour étudier les variations des courbes solutions tandis que les trois derniers font pratiquement la même étude mais sans faire explicitement appel à l'expression algébrique. Par exemple, **B7** identifie, comme le confirme le protocole, que la droite donnée correspond à la représentation graphique de la dérivée et prenant le point (1 ; 2) sur la droite, « identifie » l'équation différentielle :  $y'=2x$ . Un tableau de variations est ensuite établi « correctement » grâce à cette équation. Ensuite la primitive de l'équation susdites (soit  $y=x^2+c$ ) et la courbe solution passant par (0, 1) (soit  $y=x^2+1$ ) sont calculées. Les élèves se basent sur celle-ci afin d'étudier « correctement » les variations pour la courbe demandée.

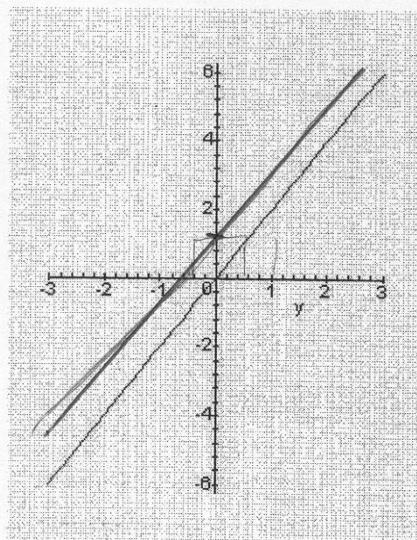
Parmi ces binômes, **B4** représente une particularité compte tenu de l'étude des variations de la courbe passant par le point (0, 1). Le binôme dessine sur la figure, parallèlement à la droite donnée, une droite qui passe par le point en question (cf. **Extrait 22**). La droite dessinée coupe donc l'axe des abscisses au (-0.5, 0). D'où les variations de cette courbe sont données de la manière suivante : «  $y$  décroissant sur  $] -\infty ; -0.5[$  et  $y$  croissant sur  $] -0.5 ; +\infty[$ . » On pourrait être tenté de chercher derrière ce raisonnement une conception erronée. Or l'extrait ci-dessous met en exergue que les variations de la courbe en question sont faites très rapidement et sans beaucoup de réflexion. Ceci nous soulage dans le sens où cette erreur pourrait être imputée au manque d'attention.

119. **E12** : donc  $y'$  inférieur à zéro... Vas-y, vas-y marque ça, marque ça.  $y'$  inférieur à zéro, donc  $y$  est décroissante. [...] donc  $y$  décroissante. [...] Si  $f(y)$  supérieur à zéro... sur 0,  $+\infty$ ... donc  $y'$  supérieure à zéro donc  $y$  croissante. [...] Et que peut-on dire du point machin, puff (au sens je n'en



sais rien). Attends, comment est-ce qu'elle passe la courbe ? (maintenant il commence à faire rédiger à l'autre) Pour la courbe machin passant par le point (0, 1) [...] y... par (0, 1)... [...] tu mets juste y décroissante sur  $-\infty, -0,5\dots$  et croissant sur  $-0,5, +\infty$ .

4. Pour l'équation différentielle  $y'=f(y)$ , le graphe de  $f$  est donné comme ci-dessous :



A l'aide de ce graphe, étudier les variations de  $y$ .  
Que peut-on dire des variations de la courbe solution passant par le point (0 ; 1) ? Illustrer votre réponse.

**Extrait 22** : Figure fournie par **B4**.

Vu cette analyse, nous pouvons penser que la plupart des binômes sont prêts à travailler de telles tâches et que le signe de la dérivée peut être déterminé grâce à la représentation graphique de celle-ci. Or le plan où la représentation graphique est fournie reste très important pour les élèves. En effet, cette activité aurait été réussie par ces mêmes binômes si nous avions fourni le graphe de  $y'=2x$  et non pas celui de  $y'=2y$ . La faible réussite des élèves pourrait donc être imputée à la spécialité du plan choisi par nous-même.

### 7.3.1.5 Activité n°5 : AE5 :

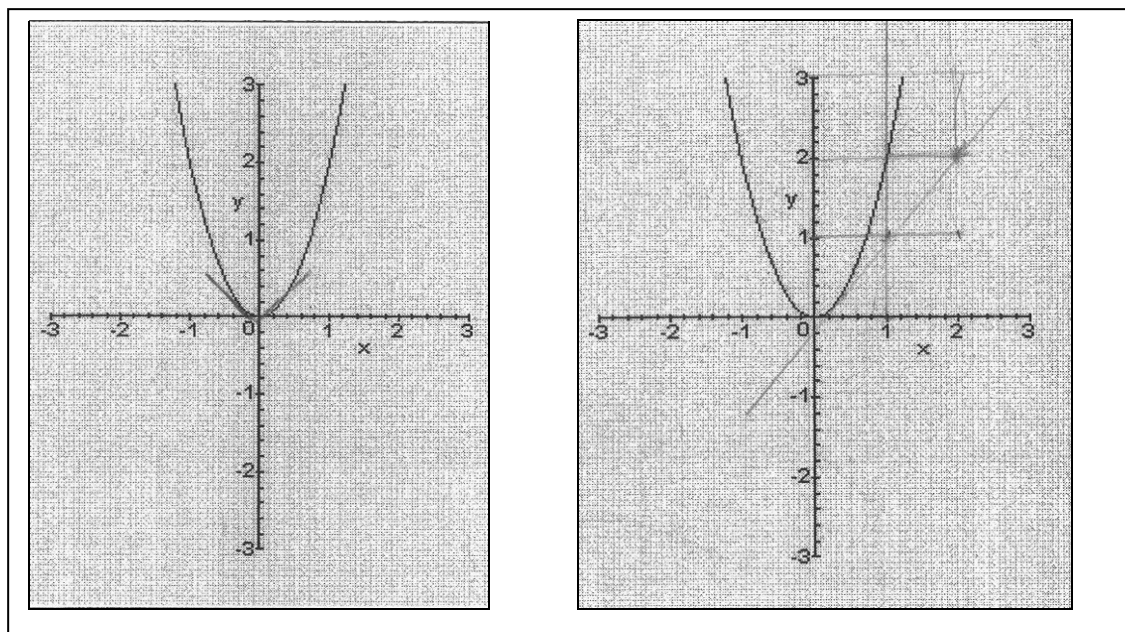
Cette activité est pratiquement la même que **AE1**, mais à une différence près : l'équation proposée s'inscrit dans la portée des élèves qui savent la résoudre. Il s'agit de prouver si la courbe donnée peut être une courbe solution de l'équation  $y'=x$ . La courbe fournie est une parabole ( $y=2x^2$ ) dont l'expression algébrique n'est pas communiquée, mais exprimée uniquement dans le registre graphique.

Les productions de binômes révèlent qu'effectivement quatre binômes (**B1**, **B3**, **B7**, **B8**) font appel à **SA1**, quatre autres binômes (**B2**, **B5**, **B6**, **B9**) à **SQ1** et enfin **B4** suit un procédé vague.

Le premier groupe de binômes (i.e. les **B1**, **B3**, **B7**, **B8**) donne d'emblée la primitive (soit  $y = \frac{x^2}{2} + c$ ) de l'équation différentielle donnée et prédit que la courbe donnée doit faire partie de cette famille de courbes. Les binômes mettent en doute la courbe sous prétexte qu'elle n'est pas de la forme de la solution générale obtenue. Nous voyons clairement l'apparition de **Op. A.III** qui se base sur l'expression algébrique de la courbe mais le contrôle exercé n'est pas explicité. Néanmoins grâce au protocole de **B7**, nous constatons que les élèves ont pris des points et remarqué que le calcul obtenu grâce à l'équation ne correspondait pas à celui sur la figure. Par exemple ; pour  $x=1$ , d'après l'expression algébrique (soit  $y = \frac{x^2}{2}$  car le binôme prend  $c=0$ )  $y$  doit être à  $1$ , or sur le graphique pour  $x=1$ ,  $y > 1$  d'où le binôme conclut que la courbe proposée ne peut être une courbe solution de  $y'=x$ . Ceci affirme que **Op. Q.VII** constitue un contrôle pour la stratégie mise en œuvre par les élèves.

En ce qui concerne les binômes qui font appel à **SQ1**, **B6** fournit le même raisonnement qu'en **AE1**. Il dessine une tangente qui passe, au jugé, par les points A(1 ; 2.4) et B(0.5 ; 0). Le coefficient directeur est calculé de la manière suivante : «  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0.5 - 1}{0 - 2.4} = 0.21$ . »<sup>23</sup> Or, d'après l'équation différentielle le coefficient directeur de la tangente en ce point est  $y'=1$ . Il en résulte que « *le coefficient directeur de la tangente n'est pas égal à  $y'$  donc la courbe ne peut être solution de l'équation différentielle  $y'=x$ .* » Quant à **B9**, sans expliciter, il dessine deux tangentes à la courbe donnée, l'une au premier et l'autre au troisième cadran (cf. **Extrait 23-a**). Il conclut ensuite que « *oui, la courbe ci-dessus peut être une solution de l'équation différentielle  $y'=x$  car les tangentes correspondent à la forme de la courbe représentée.* » Une interprétation possible de ce comportement est que les élèves, sans se soucier des valeurs des coefficients directeurs, se contentent de comparer les signes des coefficients directeurs des tangentes réelles à ceux obtenus grâce à l'équation différentielle. Il en résulte que, au premier cadran,  $x$  étant positif une tangente doit avoir un coefficient directeur positif, or c'est exactement ce dont témoigne la figure (cf. **Extrait 23-a**). Il en est de même pour la tangente au troisième cadran.

<sup>23</sup> Les coordonnées des points sont mal placées, mais ceci ne change pas grand-chose au niveau du résultat.



Extrait 23 : a. Figure fournie par **B5**

b. Figure fournie par **B5**.

En ce qui concerne le binôme **B2** qui ne répond pas correctement en **AE1**, il représente un cas particulier et souligne une autre difficulté des élèves relativement à l'approche qualitative. En réalité, le binôme identifie, sans difficulté, les isoclines de l'équation différentielle fournie :

149. **E4** : been oui, en fait il faut que le coef directeur des tangentes soit égal à  $x$ ... En fait là il faut que ça soit 1, là il faut que ça soit 2 [...] donc  $y'$ , c'est le coefficient directeur est égal à  $x$ . Eh bien...

Sur la production écrite, le binôme fait le raisonnement suivant : « *Cela fonctionne pour (1 ; 1) mais pas pour (1 ; 2) donc la courbe n'est pas solution...* » Or comme le montre clairement leur figure (cf. **Extrait 23-b**), la courbe donnée ne passe pas par (1 ; 1) et il n'y aucune raison pour que « ça fonctionne. » D'après leur figure, la droite passant par le point (1 ; 1) est tangente à la courbe au point  $\approx(0.4 ; 0.4)$ . Grâce à l'examen de leur production et de l'analyse de leur protocole, nous relevons l'attente suivante de ce binôme : *toute droite coupant une isocline doit être quelque part tangente à une courbe solution et non pas sur l'isocline*. Puisque la droite passant au point (1 ; 1) est tangente à la courbe, le binôme l'admet, alors celle passant par le point (1 ; 2) n'est nulle part tangente à la courbe donnée mais elle la coupe. Mais toujours, d'après l'analyse du protocole, nous constatons que **E4** n'est pas d'accord avec ce raisonnement alors que **E6** insiste :

163. **E4** : mais là, c'est pas la tangente au point 1... là ça fait la tangente à ce point là (*sur la figure, la droite est tangente au point, approximativement (0.4 ; 0.4)*), ça fait pas la tangente à...

164. **E6** : mais oui, c'est pas...ça, ça veut pas dire, c'est tangente à ce point, c'est coefficient directeur de la tangente... donc le coefficient directeur de la tangente, ça signifie pas le point.

En ce qui concerne **B5**, il est le seul à essayer de se servir des variations à l'aide de l'équation, après avoir coché les points (1 ; 2) et (1.4 ; 3) présumés sur la courbe donnée. Le raisonnement suivant est fourni sans aucune conclusion : « sur  $J0 ; +\infty[$ ,  $x > 0$  [et] sur  $J0 ; \infty[$ ,  $y' > 0$ . » Sachant que le binôme avait donné une réponse correcte en **AE1** où il s'agit d'une tâche identique, nous pouvons supposer que l'activité en cours est également réussie mais le binôme ne complète pas sa réponse pour des raisons diverses, peut-être manque de temps.

Relativement à **B4**, le binôme dessine pour  $y < 0$  une courbe qui, prise avec la partie droite de celle donnée, évoque le graphe de  $x^3$ . Ensuite, il conclut de la manière suivante : « on voit que la dérivée est toujours positive, hors la fonction  $y=x$  est strictement croissante. La courbe est donc solution de l'équation différentielle  $y'=x$ . » Le protocole de ce binôme indique que la courbe donnée est vue à la fois comme une courbe solution, mais aussi comme un indicateur du signe de la dérivée. Ceci met également en exergue la difficulté des élèves à différencier les variables et à distinguer entre fonction et dérivée. Pour le binôme, l'expression algébrique de la courbe parabolique donnée est  $y=x$ . Mais est-ce au sens  $y=f(x)$  ? Voici un extrait du protocole :

121. **E12** : là, la dérivée, elle est... positive. Non, c'est faux. Ah si, si... Si c'est possible. Si la dérivée, elle est tout le temps positive et  $y=x$  (il dit bien  $y$  et non pas  $y'$ ), elle est tout le temps croissante et en plus, elle passe en zéro je crois.
122. **Er9** : been là  $x$ , il est négatif.
123. **E12** : non.
124. **Er9** : been  $x$ , il est négatif.
125. **E12** : tu rigole ou quoi ?
126. **Er9** : là,  $x$ ...
127. **E12** : mais  $y=x$ , c'est est...
128. **Er9** : c'est l'axe des  $x$ , il est pour ça là.
129. **E12** : Been oui...
130. **Er9** : Et ça, c'est la courbe représentative de  $y'$ .
131. **E12** : ouais.
132. **Er9** : donc c'est faux.
133. **E12** : mais non, elle est toujours positive,
134. **Er9** : ouais, elle est toujours positive, mais  $x$  il est pas toujours positif.
135. **E12** : là  $x$ , c'est pas une fonction.  $y=x$ ... c'est ça en gros. [...] C'est toujours posi... c'est toujours croissant.
136. **Er9** : j'sais pas...

137. **E12** : là  $x$ , il représente les axes des abscisses, non ? [...]
138. **Er9** : moi, je dirai que c'est ça, [...] la courbe elle est positive, mais là  $x$ , il est négatif, donc...
139. **E12** : mais t'est sûr qu'il est positif ?
140. **Er9** : oui c'est ce que je constate, oui. Tu vois là...
141. **E12** : (*en criant*) mais non...
142. **Er9** : ah si.
143. **E12** : mais non... [...] Si la dérivée, elle est toujours positive, la courbe, elle sera toujours croissante.
144. **Er9** : oui, mais tu oublie que  $x$  là, il est bien négatif ? Mais alors... t'es...
145. **E12** : ça a rien à voir. [...] Ca a rien à voir. Je pense pas que ça a à voir.
146. **Er9** : mais si toi, tu me parle de dérivée toujours... positive.
147. **E12** : been oui... donc la courbe elle est toujours croissante. [...]
148. **Er9** : mais c'est pas le cas.
149. **E12** : mais si, on voit là que c'est juste la dérivée qu'il nous montre. Et la dérivée, on remarque qu'elle est toujours positive. [...] Moi je pense que c'est oui.
150. **Er9** : Non
151. **E12** : non non non... Moi je dirais ça, c'est  $y'=y$ . Regarde [...]  $y'=x$ ... [...] Toi, tu dirais que c'est ça  $y'=x$  ?
152. **Er9** : ouais, ouais.
153. **E12** : moi, j'accepte ton truc, si  $y$  il est  $x^2$ .  $y'$  égal à....

Apparemment l'élève **E12** de ce binôme confond la représentation graphique d'une courbe solution avec la représentation de  $y'$ . Est-ce que ceci est provoqué par **AE4** où nous avons fourni la représentation graphique de  $y'$  dans le plan  $(y, y')$  ? Par la suite ce même élève avoue sa difficulté dans l'intervention suivante :

173. **E12** : je comprends pas quoi correspond à quoi en fait. [...] Hii ? Qu'est-ce que tu en sais ? C'est sur le formulaire, hii ? [...] mais c'est pas ça ? Mais si, c'est ça. C'est des équations différentielles ça ? [...] Je comprends pas ce qu'on fait en fait. Je comprends pas quoi correspond à quoi.

Comme nous nous y attendions, quatre binômes sur neuf ont eu recours à la résolution algébrique alors qu'aucun binôme n'y avait eu recours en **AE1** où il s'agit d'une tâche identique. Ceci peut être expliqué par l'accessibilité de la résolution algébrique de l'équation différentielle en **AE5** alors qu'en **AE1** tel n'est pas le cas. Ceci confirme d'une part notre hypothèse sur le recours à l'algèbre et d'autre part nous constatons également que lorsque la résolution algébrique est accessible, le recours aux opérateurs algébriques est plus important que dans le cas où la résolution algébrique n'est pas accessible aux élèves. Ceci confirme par ailleurs les résultats obtenus chez les étudiants de l'IUFM (cf.

Arslan&Laborde, 2003). Il semble que la solubilité de l'équation différentielle est une variable à disposition des enseignants pour favoriser une approche qualitative.

### 7.3.1.6 Activité n°6 : AE6 :

Il s'agit dans cette activité d'associer trois équations différentielles avec deux champs de tangentes en justifiant son choix. L'analyse des productions a démontré qu'à part **B9** qui s'abstient, tous les binômes font la bonne correspondance. Pour justifier leurs actions, quatre binômes (**B2**, **B4**, **B6**, **B8**) font appel à **SQ1**, trois autres binômes (**B1**, **B5**, **B7**) à **SA1** et un binôme (**B3**) utilise les deux à la fois.

Pour les binômes de la stratégie **SQ1**, donnons à titre d'exemple la justification fournie par **B6** : « *le coefficient directeur de la tangente en 1 point correspond à ses abscisses* » pour le premier champ de tangentes (C1) et « *...correspond à son ordonnée* » pour C2. Concernant **B8**, la justification donnée est la suivante : « *si on prend un x, on remarque qu'il y a des isoclines verticales* » pour C1 et « *même raisonnement mais avec y au lieu de x* » concernant C2. La réponse de ces élèves met en évidence l'acquisition du concept d'isocline mais aussi des opérateurs qualitatifs et en particulier **Op. Q.V.**

En ce qui concerne les binômes qui ont eu recours à la stratégie algébrique, par exemple, **B7** résout les deux premières équations et dessine sur chacun des champs de tangentes une courbe solution et constate ainsi que C1 correspond à la première équation et C2 à la deuxième. Concernant les deux autres binômes, **B1** se contente, pour C1, de dire qu'il s'agit des paraboles comme courbes solutions, alors que **B5**, en résolvant l'équation  $y'=y$ , l'associe à C2. Les deux binômes ne font pas de justification pour l'autre association.

Le recours à la résolution algébrique est donc présent explicitement chez un binôme et implicitement chez trois binômes. Ces derniers, sans l'explicitement, disent, par exemple, que les courbes solutions d'une telle équation correspondent à telle forme et ils associent ainsi les équations à des champs de tangentes correspondantes.

Si nous résumons cette analyse, nous pouvons dire que, à part le binôme donnant une copie blanche, tous les binômes ont réussi sans difficulté cette activité. Mais il n'est pas facile d'en dire autant pour la justification.

### 7.3.1.7 Activité n°7 : AE7 :

Dans cette activité, composée de deux variantes, en **AE7<sub>A</sub>** nous demandons aux élèves de trouver le point de tangence entre une courbe solution de  $y'=2y$  et la droite  $y=x$  alors que **AE7<sub>B</sub>** demande d'identifier  $a$  ( $a \in \mathcal{R}$ ) dans l'équation différentielle  $y'=ay$  sachant que  $y=2$  est l'isocline 3.

Nous constatons, grâce à l'analyse des productions, que trois binômes (**B2**, **B3**, **B5**) échouent à cette activité. Remarquant que ceux-ci appartiennent au groupe A, nous nous pencherons particulièrement sur **AE7<sub>A</sub>**, après avoir brièvement évoqué les résultats des binômes du groupe B.

En ce qui concerne ces derniers, tous les binômes réussissent donc et il n'y a pas de particularité à noter. Donnons à titre d'exemple, la production de **B7** : la valeur de  $a$  est correctement donnée de la manière suivante : «  $y'=6 \Rightarrow ay=6 \Rightarrow a=3$ . » Nous déduisons au protocole de binôme que la notion d'isocline est généralement acquise bien que certains élèves éprouvent encore des difficultés :

261. **E18** : c'est quoi déjà isocline ?

262. **E10** : c'est-à-dire que quand t'as une courbe... une droite  $y=a$  et après toutes les tangentes, elles sont toutes de la même inclinaison. [...] L'isocline c'est une droite. Fais voir la question, Yann...

En ce qui concerne le groupe B, un seul binôme (**B1**) donne une réponse correcte : remarquant d'emblée que le coefficient directeur de la tangente est  $1$ , écrit  $y'=1$  d'où  $2y=1$  et  $y=1/2$ . Puisque le point en question se trouve sur la droite  $y=x$ , alors  $x=1/2$ , d'où il obtient le point  $(1/2 ; 1/2)$ . Quant à **B3**, il donne une réponse incomplète et se contente de dire que le coefficient directeur de la tangente correspond à  $y'$ .

Concernant **B4**, comme nous l'avons souligné en **AE5**, il éprouve des difficultés à distinguer entre « tangente » et « solution » d'une équation différentielle, bien que la réponse donnée puisse paraître juste à première vue :

183. **E12** : la dérivée de  $x$ . [...]  $y=x$ , donc  $y'=1$ . Donc  $2y=1$ , non ?... ou rien à voir ? donc  $y=1/2$  donc  $x=1/2$ . Donc point de tangence  $(1/2, 1/2)$ .

184. **Er9** : t'es fou hi, tu crois que je vais y arriver. [...]  $y'=2y$ ,  $y=x$ . Ce qui me donne  $y'=2x$ ...

185. **Er9** :  $y'=2x$ ...

186. **E12** : oui.

187. **Er9** : been oui, si  $y=x$  et...

188. **E12** : donc  $y=x^2$ ... dans ce cas là...

189. **Er9** : Ah oui ?

190. **E12** : non, mais non.  $y=x$ , on vient de marquer. C'est ça que je comprends.

191. **Er9** : ah oui ?

192. **E12** : si  $y'$  est... c'est  $2x$ , pourquoi  $y$  c'est pas  $x^2$  ?

Nous constatons grâce à cet extrait que si le binôme est arrivé à trouver correctement le point de tangence, ceci ne prouve nullement une bonne compréhension de la part du binôme. En effet,  $\{y'=2y$  et  $y=x\}$  amène les élèves à  $y'=2x$  dont l'intégration devrait donner, d'après **E12**, à  $y=x^2$  alors qu'ils ont  $y=x$ .

Nous constatons la même attente chez **B2** qui remplace  $y$  par  $x$  dans l'équation différentielle d'où il conclut « *donc  $y'=2x$ .* » Lorsque nous examinons les enregistrements audio, nous constatons que le binôme est satisfait de ce qu'il a fait, mais qu'il a des difficultés notables en ce qui concerne ce qu'est une équation différentielle :

204. **E6** : been  $y'=2y$ ... et  $y$  égal à  $x$ . [...] donc  $y'$  égal à  $2x$ .
205. **E4** : ihh (*elle ne consent ni contredit*)... oui (*cette fois-ci, elle confirme, mais elle n'as pas l'air très satisfaite*)
206. **E6** : been, ça donne ça non ?
207. **E4** : been oui (*elle rigole*)... [...] Voilà...
208. **E6** : et donc voilà c'est fini... (*elle rigole*).
209. **E4** : ah non il faut trouver un point, non ?
210. **E6** : non... [...] oui
211. **E4** : oui ?
212. **E6** : je comprends pas du tout... Been le point tu peux pas le calculer si t'as pas une... t'as une infinité de tangentes.
213. **E4** : ah non il faut que la tangente coupe ta droite en un point...
214. **E6** : non c'est l'équation qui coupe la droite en un point, c'est ça ?
215. **E4** : je sais pas...
216. **E6** : si...
217. **E4** : C'est l'équation différentielle qui coupe une droite, non ?
218. **E6** : oui... « *entre une courbe solution et la droite, trouver le point de tangence* »
219. **E4** : ah voilà... en fait il faut que ton équation différentielle et la courbe, elles se croisent...
220. **E6** : ...se croisent en un même point.
221. **E4** : et c'est ce point qu'il faut trouver la tan.. le... la tangente ?
222. **E6** : ah non, le point ça a pas de tangente, le point, il doit être sur une équation différentielle donc, non ?
223. **E4** : oui... Donc il faut trouver la... la... la tangente de l'équation différentielle au point d'intersection de l'équation différentielle et la droite, non ?
224. **E6** : oui... mais ça, c'est pas bon alors ce que j'ai marqué.
225. **E4** : imm... (*elle rigole, elle sait pas quoi dire*)... comment ça ?
226. **E6** : je vais pas effacer, on va faire un trait (*effectivement y a un trait sur leur papier*).  
Et si  $y$  égal  $x$ , en fait ça serait la courbe qui est comme ça en fait ?

En ce qui concerne **B5**, composé de deux redoublants, il est toujours perturbé par la résolution algébrique et la solution générale. Voici leur extrait :



$$\begin{aligned}
 y' = 2y & \quad y' - 2y = 0 \Rightarrow f(x) = k e^{2x} \\
 k e^{2x} & = x \quad y = x \\
 \ln(k e^{2x}) & = \ln x \quad y = x \text{ passe par } (0, 0) \\
 \ln e^{2x} & = \ln x^2 \quad (1, 1) \\
 2x & = \ln x \\
 x & =
 \end{aligned}$$

Extrait 24 : Production du binôme **B5** en AE7.

En résumé, deux binômes répondent correctement à cette variante et la réponse du troisième est incomplète. En ce qui concerne le dernier binôme il essaie de répondre à l'aide de la solution générale, mais la démarche devient plus compliquée, même impossible.

## 7.4 Bilan de l'expérimentation :

Pour le bilan, nous procéderons en deux temps. Nous ferons dans un premier paragraphe un bilan en termes de réussite et des difficultés constatées et dans un deuxième temps, nous donnerons d'autres résultats intéressants que notre travail permet de déceler.

### 7.4.1 Réussite/ difficultés

#### Une réussite générale et progressive

L'expérimentation que nous avons menée en classe de Terminale S a témoigné d'une réussite à un niveau satisfaisant. Il convient de rappeler que la « jauge » pour mesurer la réussite des élèves était le recours aux opérateurs qualitatifs. D'une manière générale, au fur et à mesure de l'avancement dans l'ingénierie, nous avons noté une réussite constante dans la mobilisation des opérateurs qualitatifs, mais également à abandonner les opérateurs inappropriés.

L'analyse a également révélé une certaine maîtrise de la part des élèves en ce qui concerne les opérateurs qualitatifs. Citons à titre d'exemple la richesse incontestable lors de la mise en œuvre de l'**Op. Q.III** (i.e. : [pour une équation différentielle  $y'=f(x, y)$  où  $f(x, y)$  est définie sur un certain domaine de  $\mathbb{R}^2$ ] le coefficient directeur de la tangente à une courbe solution passant par  $A(x_0, y_0)$  est  $y'=f(x_0, y_0)$ .) en **AE1**. Trois procédés se sont manifestés lors de la mobilisation de cet opérateur. Soit les élèves prennent un point optimal pour lequel le coefficient directeur de la tangente à la courbe est évident (généralement zéro) et le comparent au coefficient directeur obtenu grâce à l'équation différentielle. Soit ils tracent sur la figure une tangente à la courbe donnée, dont ils calculent pragmatiquement le coefficient directeur et comparent au coefficient directeur calculé grâce à l'équation différentielle. Soit enfin ils déterminent la tangente en un point grâce à l'équation différentielle, obtiennent l'équation de la tangente et la tracent pour constater qu'elle n'est pas tangente à la courbe donnée sur la figure.

Nous avons néanmoins constaté que des problèmes pouvaient entraver l'apparition de ces opérateurs et perturber ainsi les élèves. Par exemple, la *difficulté à déterminer un point optimal pour mettre en œuvre Op. Q.III* : le binôme **B2** précise dès le départ qu'en **AE1**, il faut prendre des points sur la courbe et voir si le coefficient directeur calculé à partir de l'équation différentielle correspond bien à celui calculé grâce à la figure. Mais la question que le binôme se pose est « quel(s) point(s) ? » Ce dernier éprouve la même difficulté en **AE5**.

Lors de la dernière séance de l'évaluation, nous avons observé en plus de l'intégration des opérateurs qualitatifs, la disparition des opérateurs algébriques qui risquent d'entraver l'apparition des premiers. En effet, à part **Op. A.III** (qui consiste à trouver l'expression algébrique d'une courbe pour vérifier

algébriquement si elle est solution d'une équation différentielle donnée ou non) en **AE5**, aucun opérateur algébrique n'a été mobilisé par les élèves. Nous avons ainsi souligné que la nature de l'équation différentielle fournie (dont la résolution algébrique est accessible aux élèves ou non) est une variable à disposition de l'enseignant qui veut stimuler une approche qualitative. En effet, bien qu'il s'agisse de la même tâche en **AE1** (où l'équation différentielle fournie ne s'inscrit pas à la portée des élèves) et en **AE5** (où l'équation différentielle est à la portée des élèves, y compris les non redoublants), aucun binôme ne fait appel à **Op. A.III** en **AE1** tandis que quatre binômes y ont fait appel en **AE5**.

Notons d'autre part que la persistance, en l'occurrence de **Op. A.III**, mais d'une manière générale des opérateurs algébriques peut être incombée aux choix de l'enseignement qui reste, comme il a été souligné, à dominance algébrique pour l'ensemble du domaine de l'analyse.

Compte tenu des différentes représentations que nous avons prises en compte dans la figure **Figure 3** (p. 63), nous pouvons affirmer que les conversions n'ont généralement pas posé de difficultés aux élèves et qu'il n'y a pas de particularité à noter relativement à ces conversions à part les difficultés que nous avons introduites ci-dessous en termes d'unités significatives. On peut donc attester que les passages **ED** ↔ **TdV**, **ED** ↔ **Isoclines**, **ED** → **CdT**, **CdT** → **Graph[y]**, et **Graph[y']** → **TdV** sont plutôt réussis. Néanmoins pour cette dernière conversion un contrat est à négocier avec les élèves lorsque **Graph[y']** est représentée dans un plan autre que  $(x, y)$ . D'autre part, nous n'avons pas de données pour nous prononcer en ce qui concerne les conversions **TdV** → **Graph[y]**, **Graph[y']** → **CdT** et enfin **Graph[y']** → **Graph[y]**. Signalons cependant que dans les manuels, il existe des tâches qui prennent en compte cette dernière conversion comme en témoigne le mémoire de DEA de Uwimana (2002).

En termes de registres, nous pouvons ainsi dire que, telles qu'elles ont été travaillées dans notre ingénierie, les conversions entre registres « algébrique → tableau de variations », « tableau de variation → graphique » et « algébrique ↔ graphique » sont plutôt réussies pour ce qui est des activités que nous avons proposées. D'autre part, les résultats que nous avons obtenus qui restent, avouons-le, partiels, ne nous permettent pas de constater que dans un tel sens les élèves réussissent mieux alors que dans l'autre il y a plus de difficultés. Nous ne mettons bien évidemment pas en doute les difficultés des élèves relativement aux changements de registres, difficultés notées par plusieurs recherches et devenues notoires (cf. pour une notion élémentaire comme « la droite » Duval, 1988). Les affirmations que nous faisons en termes de registres doivent donc être abordées avec prudence et assignées à la dimension partielle de notre expérimentation.

Il résulte de ce bilan que les principales techniques de l'approche qualitative pour un niveau débutant (telles démontrer qu'une courbe est une solution d'une équation différentielle donnée, tracer la courbe

solution en se basant sur le champ de tangentes, déterminer les isoclines d'une équation différentielle, etc.) se sont avérées acquises par la plupart des élèves. D'où nous pouvons tirer un premier résultat

### **Résultat 1 : l'approche qualitative est accessible aux élèves de Terminale S.**

D'autre part, si l'enseignement de l'approche qualitative a été réussi par la majorité des élèves, en revanche il a conduit à des difficultés chez d'autres. Ainsi, nous avons également noté des difficultés conceptuelles, techniques (vocabulaire, notations, etc.) et des difficultés d'enseignement. Nous essayerons de les présenter dans ce qui suit.

### **Les notions ne sont pas encore stables chez les élèves**

Vu la durée de notre expérimentation, ceci n'a rien d'aberrant et les élèves ont besoin d'un temps de familiarisation avec les nouveaux concepts. Par exemple malgré la conceptualisation de la notion d'isocline de la part de certains élèves (cf. par exemple l'analyse de la production du **B7** en **AE7**), d'autres éprouvent un manque de familiarisation. Nous avons déjà noté par exemple que certains élèves mobilisaient le concept d'isocline sans y faire allusion explicitement. En **AE5**, le binôme **B2** découvre que les coefficients directeurs des tangentes à des courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=x$  restent immuables sur des droites verticales sans faire allusion au terme « isocline. » Ceci explique en partie l'abstention des élèves à utiliser les nouveaux termes. D'autre part, nous avons également constaté chez très peu d'élèves une confusion entre « tangente » et « isocline. » De surcroît d'autres élèves éprouvent des difficultés à se souvenir de cette nouvelle notion. Citons par exemple un extrait du protocole du binôme **B6** :

- 301. **E13** : c'est un isocline, celui-là.
- 302. **E3** : le quoi ? [...] ouais.
- 303. **E13** : un isocline ?
- 304. **E3** : isocline, c'est une droite...
- 305. **E13** : tu crois ? Je m'en souviens plus ce qu'était...
- 306. **E3** : si c'est là...

### **Difficulté à distinguer « tangente » et « solution »**

L'idée de ce qu'est une (courbe) solution a du mal à ressortir chez certains élèves car ils pensent que « l'expression de la tangente doit vérifier l'équation différentielle » (cf. par exemple l'analyse de la production de **B2** en **AE7** (p. 193) ; cf. également l'analyse de **AE3** (p. 180)). Nous avons relié cette

attitude à la conception révélée par Ubuz (2001) et qui consiste à croire que l'expression de la dérivée est l'expression de la tangente.

Il convient néanmoins de souligner que cette confusion est apparue chez les binômes composés de non redoublants (**B2**, **B7** et **B9**). Il en résulte que si les non redoublants avaient l'avantage d'être moins attirés par les stratégies algébriques, ils ont eu d'autres difficultés conceptuelles. D'où nous pouvons affirmer que la résolution qualitative peut à son tour être à l'origine d'autres problèmes. Citons à ce propos, sans entrer dans les détails, Rasmussen (2003) qui souligne que certains étudiants qui venaient de faire un enseignement de l'approche qualitative ne considéraient pas les solutions évidentes comme des solutions de l'équation différentielle, mais plutôt avec les mots de l'un de ces étudiants comme « *just a test for stability.* »

### **La conception « transcendante »**

Nous avons déjà parlé lors du bilan de deux premières séances de l'émergence d'une conception que nous avons nommée « transcendante. » La séance d'évaluation a mis en évidence sa persistance chez le binôme **B2** comme c'est développé lors de l'analyse de l'activité **AE7**.

Compte tenu de ces deux derniers paragraphes qui soulignent des difficultés à amorcer l'approche qualitative, nous pouvons ressortir que

### **Résultat 2 : il ne faut pas croire en vain que l'approche qualitative va résoudre tout les problèmes. Elle peut au contraire en faire émerger d'autres.**

Comme nous l'avons souligné tout au long de cette thèse, si l'approche qualitative peut suppléer aux deux autres approches, elle aussi à son tour, elle a besoin des deux autres. D'où **la complémentarité des approches.**

### **D'autres opérateurs et/ou conception et/ou d'autres facteurs peuvent perturber la tâche.**

Par ailleurs, puisque le passage d'un registre à un autre suppose qu'on ait identifié tous les éléments constitutifs d'une représentation dans chaque registre, cette expérimentation a mis en évidence d'autres difficultés que nous avons pu déceler grâce à l'atomisation faite en termes d'unités significatives (Duval, 1988) abritées au sein d'une équation différentielle. Afin de mieux cerner les difficultés des élèves, prenons la figure ci-dessous où nous avons exposé les principales unités significatives auxquelles nous avons eu recours pendant notre expérimentation :

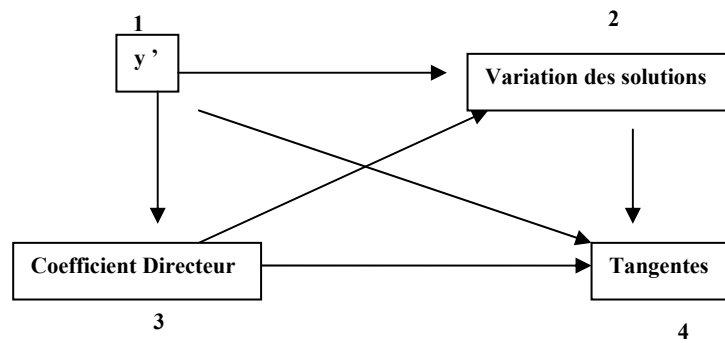


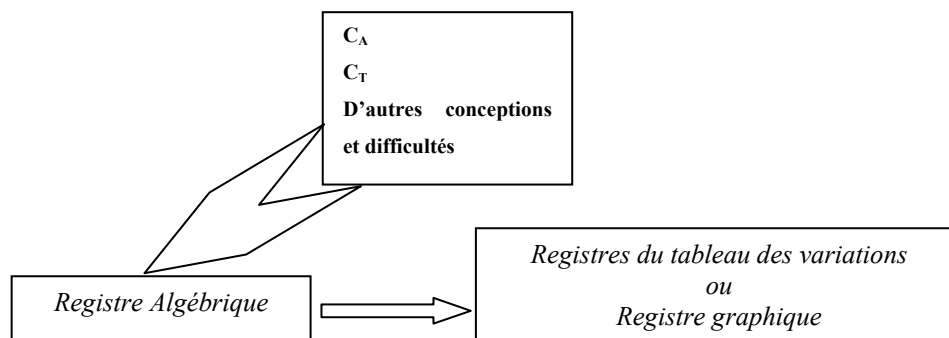
Figure 10 : Interaction entre diverses unités significatives intervenant lors de l'ingénierie.

Nous avons constaté lors de la première séance que le passage entre les unités ci-dessus n'était pas dûment appréhendé par certains élèves : par exemple concernant le passage 1→2, nous avons révélé qu'il est contrarié non seulement par les conceptions algébrique et « transcendante » mais également par la **Conception 1** selon laquelle une fonction hérite des mêmes signes que sa fonction dérivée  $y'$ . Par ailleurs l'activité **A2** a mis en exergue que chez certains élèves le passage 3→4 n'était pas stable, car ils ne différenciaient pas « pente négative » et « pente positive » (i.e. *une tangente a toujours une direction positive*) ou qu'ils considéraient qu'une tangente de coefficient directeur  $m$  doit passer à la fois par l'origine et par le point d'abscisses  $m$ .

En outre nous avons noté, surtout lors de la première séance, un cloisonnement entre les diverses unités significatives que nous venons de présenter : le bloc constitué de 1 et 2 et le bloc constitué de 3 et 4. D'où nous pouvons affirmer que les passages 1→3, 2→4, 3→2 et 1→4 posaient des problèmes aux élèves. C'est la raison pour laquelle les élèves ont échoué en **DQ2** où ils ont cloisonné « *signe de coefficient directeur de tangente* » et « *variations des courbes solutions.* » En ce qui concerne le passage 1→4 les difficultés de certains élèves ont été confirmées en **AE3** lors de la dernière séance.

Il en résulte que pour certains élèves, en plus des difficultés à donner du sens aux nouvelles notions (équation différentielle, solution mais aussi isocline) dont l'apprentissage est visé, le changement de représentations que nous visions à faire pratiquer lors de l'ingénierie s'est vu découragé par la conception algébrique (en conduisant par exemple à chercher à tout prix l'expression algébrique de la fonction pour étudier les variations), par d'autres conceptions erronées (transcendante, **Conception 1**, etc.) mais également d'autres difficultés liées, par exemple, aux représentations graphiques des tangentes et que, faute de données, nous ne qualifierons pas en termes de conceptions. Cette brève analyse révèle que le bon fonctionnement de l'ingénierie a été perturbé par diverses conceptions et opérateurs, qui existaient déjà ou que les élèves se sont forgés (cf. **Figure 11**) d'où nous sommes amené au résultat suivant :

**Résultat 3 : certaines conceptions, en particulier erronées, freinent l'approche qualitative.**



**Figure 11** : Influences de  $C_A$  et  $C_T$  et d'autres difficultés sur le changement de registres.

Il en résulte que la granulation faite en termes d'unités significatives met en exergue l'interaction entre « conception » et « registre de représentation sémiotique » et comment les conceptions pèsent sur le changement des registres et ce, en particulier lors du passage d'une unité significative à une autre. Suivant la conception de l'élève, la mise en correspondance des unités significatives peut être donc facile ou au contraire difficile. Par exemple pour un apprenant qui possède la conception algébrique, la tâche proposée en **A1** (i.e. le passage n°2 ci-dessus) n'est réalisable que si l'expression algébrique de la fonction pour laquelle les variations seront étudiées, est disponible. Il s'avère à cette analyse que ce modèle permet effectivement d'atomiser les connaissances et de voir de plus près les difficultés et la réussite.

### **La nécessité de la notion de « Registre » pour l'enseignement de l'approche qualitative**

L'ingénierie que nous avons mise en œuvre a permis de constater que le jeu de registres favorisait l'enseignement de l'approche qualitative. D'ailleurs la **Figure 3** (p. 63) met en évidence que l'enseignement de l'approche qualitative fait appel à plusieurs représentations issues de plusieurs registres et que celui-ci ne peut se passer du jeu de registres. De ce fait, nous pouvons affirmer que

**Résultat 4 : on peut s'appuyer sur le jeu de registres pour favoriser l'approche qualitative.**

#### **7.4.2 D'autres résultats**

##### **D'autres opérateurs qualitatifs ne sont pas apparus.**

Nous n'avons pas constaté d'apparition d'autres opérateurs qualitatifs. Ceci peut être expliqué par le fait que les activités soumises aux élèves ont été conçues de manière à ce que les opérateurs visés au cours des deux premières séances soient suffisants pour le traitement.

## Des contrôles

Les productions écrites et audio des élèves n'ont pas permis d'accéder à des contrôles mobilisés par ceux-ci. Nous n'avons pu repérer que très peu de contrôles dont un premier consiste à mobiliser le statut fonction des solutions d'une équation différentielle afin de valider (ou invalider) son action. Un autre contrôle exercé par les élèves est la forme de la fonction solution : exponentielle ou non. Rappelons que ces contrôles sont apparus lors du tracé des courbes solutions d'une équation différentielle à l'aide de son champ de tangentes en **AE2**.

Or nous avons d'autre part constaté que certains opérateurs de la conception  $C_Q$  pouvaient jouer le rôle de contrôle pour les actions des élèves (cf. par exemple l'analyse de l'activité **AE1**). Mais aussi par exemple **Op. A.I** ou d'autres opérateurs algébriques peuvent être des contrôles pour les opérateurs qualitatifs et vice-versa. Il en résulte que

**Résultat 5 : les conceptions  $C_Q$  et  $C_A$  peuvent être des structures de contrôles l'une de l'autre.**

## L'influence de l'algébrique sur l'enseignement de l'approche qualitative

Il convient de souligner que les élèves avaient des prédispositions pour les raisonnements algébriques. Pour illustrer cette tendance, reprenons la comparaison entre les deux activités de la dernière séance, **AE1** et **AE5**, où il s'agit de la même tâche : prouver si une courbe donnée est solution d'une équation différentielle donnée. Rappelons qu'en **AE1** contrairement à **AE5**, les équations différentielles sont hors de la portée des élèves. Nous avons constaté en **AE1** que tous les binômes ont fait appel à une stratégie qualitative tandis qu'en **AE5** quatre binômes ont fait appel à une stratégie algébrique qui consiste à résoudre l'équation différentielle (à savoir  $y'=x$ ). Ceci s'explique par le fait que lorsque la tâche ne s'inscrit pas dans la sphère de pratique de la conception algébrique, les élèves font appel à des raisonnements qualitatifs. Or lorsqu'un raisonnement algébrique est accessible, c'est celui-ci qui est favorisé par les élèves. Il convient de souligner que les redoublants ne sont pas les seuls à recourir à la résolution algébrique de l'équation différentielle en **AE5**. Bien que constitué des élèves non redoublants, le binôme **B7** mobilise l'opérateur algébrique en **AE5** alors qu'il avait eu recours à un opérateur qualitatif en **AE1**. Rappelons que ces élèves non redoublants ont déjà étudié la primitive. Il en résulte que :

**Résultat 6 : les élèves ont un penchant vers l'algébrique.**



## La résolution algébrique est-elle un obstacle à l'approche qualitative ?

Malgré ce dernier résultat, rappelons que cette tendance vers l'algébrique était plus importante chez les redoublants que chez les autres élèves. L'analyse a par ailleurs décelé un écart de réussite entre les redoublants et les non redoublants. En effet, l'ingénierie que nous avons mise en place nous a permis de remarquer que la réussite des redoublants –qui était tentés plutôt par les stratégies « algébriques »- était nettement plus faible que les autres élèves qui préféraient plutôt faire appel aux stratégies qualitatives ou ne rien faire. Cette distinction entre les deux groupes d'élèves mérite donc une attention particulière.

L'écart que nous venons d'évoquer peut certes être interprété en termes des difficultés personnelles des redoublants qui peuvent être considérés comme moins « brillants » en comparaison aux autres élèves. Pourtant compte tenu de la dernière séance, nous pouvons affirmer qu'à part le binôme **B5**, composé de deux redoublants relativement faibles, les redoublants se sont avérés intégrés dans l'apprentissage. Lorsque nous examinons en particulier les binômes **B1** et **B8**, composés également des redoublants, nous constatons qu'ils se sont relativement bien intégrés. Par exemple **B8** réussit toutes les activités de la dernière séance à part l'activité **AE4** où tous les binômes ont échoué. La faible réussite des redoublants au départ doit donc être effectivement recherchée ailleurs que dans la faiblesse personnelle des binômes. Est-ce la possession de la technique algébrique elle-même ?

La forte préférence des redoublants pour les stratégies algébriques et la faiblesse de réussite de ceux-ci par rapport aux autres élèves, nous ont donc amené à nous interroger sur l'interaction entre la résolution algébrique et l'approche qualitative. La première entrave-t-elle l'enseignement de la seconde ? Nous ne nions bien évidemment pas la synergie entre les approches, une synergie que nous avons démontré dans la première partie de cette thèse. Nous nous interrogeons simplement sur la situation des élèves débutants.

Nous pouvons affirmer qu'en réalité la distinction entre les deux groupes d'élèves est causée et alimentée par la possession de la résolution algébrique chez les redoublants. Nous avons noté dès le départ l'hégémonie de la conception algébrique qui s'est incarnée par l'apparition de l'opérateur qui demande forcément l'expression algébrique d'une fonction afin de pouvoir étudier ses variations. Cet opérateur a provoqué l'émergence, en particulier chez les redoublants, de la conception « transcendante. »

Par ailleurs la production du binôme **B5** (composé de deux redoublants) en **AE3** a mis en évidence un autre résultat marquant : pour étudier les variations des courbes solutions de l'équation différentielle  $2y' = e^{-x^2}$ , le binôme remplace  $e^{-x^2}$  par  $y$  et obtient  $2y' = y$ . De cette attitude nous avons décelé la **Conception 2** qui stipule que l'on peut remplacer, dans une équation différentielle,  $y$  par une expression exponentielle et vice-versa. Le choix donc de la transposition didactique qui réduit le champ des équations différentielles à des équations spéciales influence par exemple sur ce qu'est une

équation différentielle. Une équation différentielle étant associée à une fonction exponentielle pour les élèves issus d'enseignement algébrique, ceux-ci se permettent de faire cette substitution.

Par ailleurs, nous avons également noté que, malgré l'opérationnalité de la conception algébrique dans certaines tâches, les redoublants n'ont pas réussi à la faire fonctionner pour accomplir la tâche. Nous avons interprété ceci en termes de rupture de contrat didactique où une équation différentielle sert à être résolue et non pas, par exemple, à calculer un coefficient directeur de la tangente à l'une de ses courbes solutions.

Nous constatons via ces rappels que non seulement la conception algébrique attire les élèves mais également la possession non stable, de cette conception génère d'autres conceptions erronées. De ce fait, nous nous permettons d'affirmer au moins pour les débutants qu'effectivement

**Résultat 7 : L'approche algébrique peut être un obstacle à l'enseignement de l'approche qualitative chez des débutants.**

**L'influence de l'algébrique s'atténue-t-elle au cours de temps ? Comparaison entre TS et IUFM**

Afin de répondre à cette question, nous nous proposons de faire une comparaison, dans la mesure du possible, entre les résultats issus de cette expérimentation et ceux issus d'un travail auprès d'une cinquantaine d'étudiants des IUFM de Grenoble et de Chambéry (cf. Arslan&Laborde, (2003) et Arslan et al. (2004)).

Tout d'abord, une comparaison entre la seconde activité (A2) proposée en TS et une première activité proposée à l'IUFM et dans lesquelles il s'agit relativement de la même tâche, met en évidence un écart important de réussite entre les deux groupes d'apprenants : la réussite en TS est presque de 100%, tandis qu'à l'IUFM, y compris les étudiants ayant répondu via la stratégie algébrique, 16% réussissent à tracer la tangente à la courbe solution de l'équation différentielle  $y' = y$ . D'ailleurs rappelons que, nous avons également noté d'autres tendances similaires chez les deux populations : par exemple malgré l'opérationnalité de la conception algébrique pour cette tâche, les redoublants de TS n'avaient pas réussi à la faire fonctionner pour accomplir la tâche, tandis que seulement trois étudiants ont su tracer la tangente grâce à cette conception. La même tendance se trouve donc confirmée chez les deux populations.

Par ailleurs, la tendance des redoublants en TS vers les stratégies algébriques se trouve également confirmée chez les étudiants de l'IUFM, pour qui nous avons noté une tendance vers les procédés algébriques dès qu'ils en trouvent l'occasion. Par exemple dans une activité d'association entre un vecteur tangent variable dans l'écran de Cabri et une équation différentielle choisie parmi une liste, nous avons constaté que lorsque la résolution algébrique de l'équation différentielle est accessible (le

cas de  $y' = hy^2$  ( $h \in \mathcal{R}$ ), le recours aux opérateurs algébriques (en particulier **Op. A.III** : si  $g(x)$  est une fonction solution de  $y' = f(x, y)$  alors elle doit vérifier l'équation différentielle [i.e.  $g'(x) = f(x, g(x))$ ].) était plus important que lorsqu'il s'agit de l'équation  $y' = by^2/x^2$ . Dans certaines circonstances, cette tendance ne s'avère pas problématique. Or nous avons démontré que le recours à cet opérateur avait trompé certains étudiants qui essaient d'identifier à tout prix l'expression algébrique de la courbe qu'ils esquissent dans Cabri (cf. Arslan&Laborde, 2003).

Nous remarquons également la même tendance chez les étudiants mexicains : Moreno & Laborde (2003) ont passé, à des étudiants de la deuxième année des universités mexicaines, des activités où ayant une courbe déplaçable dans l'écran de *Cabri Géomètre II plus*, ils devaient l'associer, « SANS L'INTEGRER » à l'une des équations différentielles inventoriées dans une liste. Comme dans notre cas, les attentes des auteurs consistent à ce que les étudiants s'appuient sur des « invariants géométriques » pour s'acquitter de la tâche. Ils rapportent à ce propos que « *la stratégie de solution a consisté le plus souvent à essayer d'intégrer les équations et d'obtenir ensuite les courbes solutions* » et qu'ils ont également recueilli, de la part des étudiants, des propos de la forme « *on ne peut pas faire le choix sans intégrer, on va les intégrer mentalement.* » (Ibid, pg 10)

D'autre part, une comparaison entre les deux échantillons d'apprenants permet également de relever la coexistence, chez les deux groupes, des opérateurs erronés suivants :

- « La » solution de l'équation différentielle  $y' = ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ) est  $y = e^x$  (ou une équation différentielle possède une solution ou une seule courbe représentative).
- La solution générale de n'importe quelle équation différentielle possède forcément la fonction exponentielle.
- Toute équation différentielle est intégrable.
- Dans une équation différentielle de la forme  $y' = ay$  ( $a \in \mathcal{R}$ ), l'inconnu «  $y$  » représente à la fois une variable indépendante et une variable dépendante.

Ceci confirme que la restriction de l'enseignement des équations différentielles à un enseignement algébrique émerge donc des tendances non désirables chez les apprenants. Néanmoins, bien qu'on croie que celles-ci sont atténuées au fur et à mesure que l'on avance dans le niveau scolaire, ces constatations mettent en évidence que ceci n'est pas le cas. La ténacité de certaines difficultés met en cause cette croyance. En revanche l'importance de différence, relevée au début de ce paragraphe pour la même tâche, entre les élèves de Terminale et les étudiants de l'IUFM conduit à penser plutôt le contraire :

**Résultat 8 : il ne faut pas s'attendre à l'atténuation de la conception algébrique chez les apprenants au fur et à mesure de l'avancée dans le niveau d'enseignement.**

### **Le fait que l'enseignement dispensé en TS ne soit pas dans le programme a joué un rôle négatif sur les résultats**

En effet, les élèves étaient conscients de cette réalité et l'enseignant leur a annoncé dès la première séance que c'était un travail de recherche et qu'il referait le cours sur les équations différentielles tel qu'il est conçu par les programmes. Les extraits ci-dessous du binôme **B2** témoignent de l'insatisfaction des élèves :

146. **E6** : been, c'est de leur faute, si on n'a pas notre Bac... (*l'autre rigole*)... c'est vrai, on perd du temps, on pouvait faire des choses plus intéressantes... [...] Alors...  $y'=x$ ...
147. **E4** : Been c'est pas dur ça...

**Partie D : Conclusion Générale et Perspective**

# PARTIE D : CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE



## 8 CONCLUSION GENERALE

Dans la première partie de cette thèse (partie A, chapitre 1), nous avons démontré, en nous fondant en particulier sur des travaux antérieurs, l'obsolescence de l'enseignement des équations différentielles, basé en particulier sur la résolution algébrique. Cette obsolescence est justifiée par plusieurs motifs didactique et technologique et nous nous sommes interrogé sur l'intégration de l'approche qualitative dans l'enseignement, une intégration qui se pratique depuis un certain temps au niveau supérieur. Plusieurs travaux ont déjà démontré la limitation de l'approche algébrique et la nécessité de l'*approche qualitative*, mais également son accessibilité aux étudiants débutants. Encouragé par ces résultats, mais également par le projet à l'origine des programmes actuellement en vigueur, nous avons abordé l'intégration de ce mode de résolution au niveau Terminale. Le choix de ce niveau se justifie, entre autres, par la conviction que « *la possession de la résolution algébrique des équations différentielles peut être un obstacle pour l'enseignement de l'approche qualitative.* » Nous y avons débouché par le biais de quelques résultats issus des travaux antérieurs (cf. p. 36). Il nous a ainsi paru important de faire une entrée à l'enseignement des équations différentielles par une approche qualitative avant même la classe n'aborde la résolution algébrique.

Pour qu'un enseignement de l'approche qualitative réussisse, il nous a semblé nécessaire de prendre en compte les contraintes relevées par M. Artigue (1989) et auxquelles l'enseignement de l'approche qualitative bute. Examinant ces contraintes, nous nous sommes fixé comme objectifs d'atténuer en particulier l'une d'elles, de nature cognitive, baptisée par l'auteur de « *la mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative.* » Cette mobilité exige un maniement aisé entre les différentes représentations d'une fonction et de sa dérivée d'où l'importance de la notion de registre sémiotique. Nous avons donc convenu d'y contribuer par le biais du jeu de registres d'où nous avons admis l'**hypothèse de travail** suivante qui stipule que l'on peut atténuer cette contrainte grâce au jeu de registres :

*Le jeu de registres peut apporter une aide efficace à l'apprentissage de l'approche qualitative des équations différentielles, notamment en contribuant à « la mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative » et donc au renforcement des liens existant entre une fonction et sa dérivée.*

Prenant appui sur cette hypothèse, nous avons élaboré notre **hypothèse de recherche** :



*Nous pouvons instaurer une approche qualitative des équations différentielles en Terminale S en jouant sur certaines contraintes et grâce au jeu de registres.*

Cette hypothèse prétend, non seulement qu'une telle approche est viable en Terminale, mais par elle affirme par ailleurs que l'entrée aux équations différentielles peut se faire à l'aide de l'approche qualitative avant que la résolution algébrique ne soit enseignée. Il convient de souligner que notre travail se distingue des anciens par la population à laquelle il a trait. En effet la population de Terminale étant composée des élèves redoublants et des non redoublants, ceci nous a fourni l'occasion d'observer d'une part la viabilité de l'approche qualitative chez des sujets qui ne possèdent pas la résolution algébrique (i.e. les élèves non redoublants) et d'autre part elle permet de mesurer, grâce aux redoublants, l'impact de la possession de la résolution algébrique sur l'enseignement de l'approche qualitative chez les sujets débutants. De ce fait, notre travail représente une originalité.

Pour faciliter et modéliser l'apprentissage, nous avons donc choisi comme outil didactique la notion de **registre sémiotique** introduite par Duval. Afin de mettre au service de notre recherche cet outil, nous nous sommes posés les questions suivantes, auxquelles nous avons cherché des réponses dans le chapitre A2 et la partie B (chapitre B1 et chapitre B2) de cette thèse :

- *Quels sont les différents registres utilisables en TS ? Et quels sont ceux qui sont effectivement utilisés ?*
- *Pour les registres qui ne sont pas utilisés, peut-on les intégrer dans notre expérimentation ?*

Afin de répondre à ce questionnement, nous avons procédé, dans le chapitre A1, à une étude des différents registres vivables dans l'enseignement des équations différentielles en secondaire. Nous avons démontré qu'à part le registre algébrique, dominant dans l'enseignement, d'autres registres étaient vivables et nous en avons choisi le registre algébrique, le registre du tableau de variations et le registre graphique. Nous avons ensuite fait un choix de différentes représentations issues de ces différents registres et stipulé que sémiotiquement l'approche qualitative consistait au passage flexible entre ces différentes représentations et que conformément à Duval (1988) le passage entre ces différentes représentations était subordonné au passage entre les différentes unités significatives que constituent ces représentations. Ce choix nous a conduit à établir la **Figure 3** (pg. 63) en termes de ces différentes représentations. Celle-ci a constitué une base pour préparer les activités, que nous avons proposées pendant notre ingénierie.

Par ailleurs pour modéliser l'apprentissage, il nous a paru intéressant d'agir en termes de **conceptions** (Balacheff, 1995) ou plus particulièrement en termes d'opérateurs. Pour ce faire, nous avons modélisé les approches algébriques et qualitatives par des conceptions, respectivement, algébrique et qualitative

et nous nous sommes fixés comme objectif de privilégier la conception qualitative. Prenant comme hypothèse de travail « *pour favoriser une conception, il est en général suffisant de favoriser ses opérateurs. Inversement pour déstabiliser une conception, il suffit en général de déstabiliser ses opérateurs* », nous nous sommes fixés comme objectifs de favoriser les opérateurs de la conception qualitative et déstabiliser les opérateurs inappropriés qui risquent d'entraver l'apparition des opérateurs visés.

Par ailleurs, une autre originalité de notre ingénierie consiste en le choix des outils didactiques pertinents, en termes de registres, d'opérateurs et de conceptions, qui a permis d'une part de mieux suivre l'évolution des apprenants et d'autre part de mieux localiser leurs difficultés.

Afin de tester notre hypothèse de recherche, nous avons opté pour l'ingénierie didactique en tant que méthodologie. Soucieux de proposer des activités qui ne dépassent pas le niveau cognitif des élèves, nous nous sommes tout d'abord chargé d'**analyser les programmes et les manuels** afin de préciser le contenu de cette ingénierie. Cette analyse vise en outre à confirmer la prégnance de l'algébrique dans l'enseignement secondaire et à suivre l'évolution de l'enseignement des équations différentielles. Pour ce faire, nous avons pris en compte à la fois les programmes et manuels qui concernent les élèves ayant fait l'objet de notre expérimentation et ceux qui sont entrés en vigueur après notre ingénierie, à l'entrée 2003, afin de voir dans quelle mesure les propositions du projet ont été prises en compte. L'analyse des programmes et des manuels a mis en exergue deux points fondamentaux : d'une part une prégnance forte de la résolution algébrique et l'absence de différents registres dans les programmes et manuels en vigueur alors, et d'autre part, elle a révélé une évolution des nouveaux programmes qui cherche de plus en plus à intégrer d'autres modes de résolution. Dans cet esprit, nous avons constaté que l'approche numérique, via la méthode d'Euler, avait fait son entrée à l'occasion de la mise en place des programmes de mathématiques en classe de 1<sup>ère</sup> S en septembre 2001. Ce programme prévoit l'utilisation de la méthode d'Euler pour explorer expérimentalement des primitives que l'on ne sait pas calculer ou sans les calculer analytiquement. Il semble qu'une telle approche amène l'élève à réfléchir à la signification de la dérivée d'une fonction par le biais de la construction d'une fonction inconnue à partir de la connaissance de sa dérivée locale. De ce fait, nous avons constaté une bascule vers une interprétation qualitative de la dérivée.

Pour ce qui est de l'approche qualitative des équations différentielles proprement dite, l'allusion faite dans le projet des programmes aux notions de champ de tangentes et d'isocline est abandonnée dans le nouveau programme dont l'esprit général représente cependant un esprit qualitatif comme nous venons de souligner. Néanmoins, une analyse des manuels récents nous a permis de constater que certaines notions (tel champ de tangentes) et tâches (telle l'étude des variations des courbes solutions d'une équation différentielle) relatives à l'étude qualitative ont commencé à se faire une place dans l'enseignement.

Il en résulte que cette analyse non seulement encourage une ingénierie didactique telle que nous l'entendons mais elle a également permis de démontrer que les élèves étaient supposés posséder des connaissances et techniques pour faire une analyse qualitative des équations différentielles à un niveau débutant. Grâce à cette analyse et des travaux antérieurs sur la notion de dérivée, nous avons pu construire notre ingénierie tout en veillant à ce que les représentations que nous avons choisies soient bien prises en charge par celle-ci.

Afin donc de tester notre hypothèse de recherche, nous avons élaboré et expérimenté une ingénierie didactique en classe de TS. Nous ne reprendrons pas dans les détails les résultats que nous avons obtenus, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 7.4 (p. 195). Signalons néanmoins que les activités que nous avons proposées pendant notre ingénierie ont permis de valider notre hypothèse qui stipule non seulement qu'une approche qualitative est possible au niveau Terminale mais également que l'enseignement des équations différentielles peut s'inaugurer à l'aide de cette approche. En effet, les **données recueillies** ont permis de mettre en évidence qu'en un temps aussi limité les élèves se sont avérés capables de s'approprier des nouveaux raisonnements qualitatifs. De ce fait, nous avons noté qu'à la fin de notre ingénierie les élèves étaient capables de s'acquitter qualitativement des principales tâches qui constituent les préoccupations du programme de Terminale S : « résoudre » une équation différentielle (que l'on traduit qualitativement par « représenter graphiquement des courbes solutions de cette équation différentielle »), démontrer qu'une fonction est une solution d'une équation différentielle, le théorème d'existence et d'unicité. L'ingénierie ne s'est contentée pas de ces tâches mais les élèves ont également appris à étudier les variations des courbes solutions d'une équation différentielle, calculer la tangente à une courbe solution, calculer les isoclines d'une équation différentielle, esquisser le champ de tangentes et des courbes solutions d'une équation différentielle à l'aide de son champ de tangentes. Il en résulte qu'une *approche qualitative peut être introduite au niveau Terminale*.

D'autre part, l'analyse a révélé l'attrait de la conception algébrique pour les apprenants. Nous avons de ce fait noté que ceux-ci se penchaient vers un raisonnement algébrique dès qu'ils ont l'opportunité et que l'algébrique est accessible. Nous avons ainsi noté que cette tendance risquait parfois de conduire les sujets à des résultats aberrants. Il en résulte que, vu en particulier les résultats 6 et 7, la conviction « *la possession de la résolution algébrique des équations différentielles peut être un obstacle pour l'enseignement de l'approche qualitative* » se trouve confirmée.

Néanmoins, d'autres résultats obtenus (tel le résultat 2) invitent à une prudence en ce qui concerne l'enseignement de l'approche qualitative et souligne encore une fois la complémentarité des trois approches. En effet, nous avons démontré si la possession de l'approche algébrique risque de constituer en un obstacle pour l'approche qualitative, celle-ci, à son tour, peut générer des conceptions

erronées (telle la conception « transcendante ») ou des confusions entre « tangente » et « fonction solution » par exemple.

En ce qui concerne l'influence de la résolution algébrique sur l'enseignement de l'approche qualitative, l'ingénierie que nous avons mise en place nous a effectivement permis de constater au départ un **écart de réussite entre les deux types d'élèves** : redoublants et non redoublants. Bien que de prime abord, nous soyons tentés d'assigner la faiblesse de réussite des redoublants à leurs faiblesses personnelles, les données recueillies pour les deux dernières séances ont mis en cause cette supposition. En effet, la suite de l'analyse n'a révélé aucune différence significative entre les deux types d'élèves.

La **similitude** frappante de difficultés manifestées par les élèves de Terminale et les étudiants de l'IUFM (Arslan&Laborde, 2003) a mis en exergue que l'on ne pouvait pas s'attendre à ce qu'un temps de maturation atténue ces difficultés. Bien au contraire, quelques résultats ont démontré que certaines difficultés pouvaient progressivement s'enraciner avec le temps.

Le **choix d'agir en termes de registre et de conception** a permis d'une part d'affirmer que le jeu de registre apporte une aide considérable à l'enseignement de l'approche qualitative et d'autre part de ressortir les difficultés et conceptions qui risquent d'entraver l'enseignement de l'approche qualitative. Nous avons ainsi décelé que **plusieurs conceptions** venaient entraver la conceptualisation de l'approche qualitative. Nous en avons révélé, entre autres, la conception algébrique, la conception « transcendante », certaines conceptions erronées sur la notion de dérivée. Eu égard à cette analyse, nous pouvons affirmer que « *certaines conceptions des élèves freinent l'enseignement de l'approche qualitative.* »

En conclusion de cette thèse nous pouvons affirmer que qu'une approche qualitative peut se mettre en place dans l'enseignement secondaire et ce, grâce au jeu de registres. Cette analyse a par ailleurs souligné encore une fois la nécessité de l'intégration d'autres approches que l'algébrique.

## PERSPECTIVE

Au terme de ce travail, il convient de souligner que la question de l'intégration de l'approche qualitative est loin d'être épuisée. Ce travail a permis de déterminer, d'une part les caractéristiques générales de l'enseignement des équations différentielles en secondaire et d'autre part d'affirmer qu'une approche qualitative puisse entreprendre à ce niveau d'enseignement. Néanmoins la durée dont nous disposions ne nous a permis pas d'approfondir d'autres aspects de l'approche qualitative. Compte

tenu du contrainte du baccalauréat, la classe de Terminale ne permet pas de disposer du temps nécessaire pour un tel travail.

Un prolongement possible de ce travail peut donner lieu à un scénario en classe de Première S où la contrainte de temps se pose moins. Prenant en compte les données obtenues dans ce travail, une ingénierie didactique peut se mettre en place afin d'étudier de plus près certains aspects qui n'ont pas pu être développés dans ce travail, en intégrant éventuellement des activités qui mobilisent un changement de cadres. Une enquête auprès d'enseignants de Première et de Terminale S visant à identifier le contenu d'un tel travail serait le bienvenu. Vu le dérapage pris par les programmes en vigueur par rapport au projet de l'année 2001, un tel scénario pourrait éventuellement être à la base des prochains programmes de Terminale S. Néanmoins, la construction d'une telle expérimentation ne semble pas être un exercice que l'on peut mener seul. Ceci semble possible dans le cadre d'un dispositif d'accompagnement d'un enseignant (ou d'une équipe d'enseignants) sur éventuellement des années consécutives. Un tel travail pourrait être enrichi grâce à l'intégration d'un logiciel, en particulier de géométrie dynamique.

## Bibliographie

1. ANDERSAN P., SEAQUIST C. R. (1999), Using Starlogo to introduce differential equations, *Electronic Proceedings of the Twelfth Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Chicago. (<http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-12/C18/pdf/paper.pdf>)
2. ARSLAN S., LABORDE C. (2003) Un outil favorisant le jeu de cadres : Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. In *Actes du Congrès Européen ITEM*, Reims France.
3. ARSLAN S., CHAACHOUA A., LABORDE C. (2004), Reflexions on the teaching of differential equations: what effects of a teaching to algebraic dominance? In *Actes du congrès ICME-10*, Copenhagen Denmark.
4. ARTIGUE M., GAUTHERON V. (1983), *Systèmes différentiels : étude graphique*, Paris : Cedic.
5. ARTIGUE M. (1989a), Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire, *Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble*, IMAG, pp.183-209.
6. ARTIGUE M. (1989b), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n°3, pp. 281-308. Grenoble : La pensée Sauvage.
7. ARTIGUE M. (1990a), Difficultés cognitives et didactiques dans la construction de relations entre cadre algébrique et cadre graphique, in G. Booker, P. Cobb, T. N. de Mendicutti (eds), *Proceedings of the fourteenth PME Conference*, Oaxtepec, Mexico, vol. 1, pp.11-18.
8. ARTIGUE M. (1990b), Epistémologie et didactique *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10, n°2.3, pp. 241-285, Grenoble : La pensée Sauvage.
9. ARTIGUE M., ROLGALSKI R. (1990), Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG, in *Enseigner autrement les mathématiques, en DEUG Première année*, pp. 113-128, Commission inter-IREM.

10. ARTIGUE M. (1992), Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, pp. 109-132. *MAA Notes*, vol.25.
11. ARTIGUE M. (1993), Enseignement de l'analyse et fonctions de référence, *Repères* n° 11.
12. AYRES, F. (1992), *Théorie et applications des équations différentielles*, Schaum.
13. BALACHEFF N. (1995), Conception, connaissance et concept, In *Séminaires 1994-1995. Didactique et technologies cognitives en mathématiques*. Grenoble.
14. BALACHEFF N. & GAUDIN N. (2002), Students conceptions: an introduction to a formal characterization, *Les cahiers du laboratoire Leibniz* n° 65, <http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers>.
15. BARBER, F., (1994). Technology, Cooperative learning, and assessment in the Teaching of Ordinary Differential Equations, *Primus*, 4 (4) 337-346.
16. BLANCHARD P. (1994), Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint, *The college mathematics journal*, vol.25, n°5, pp.385-393.
17. BLANCHARD P., DEVANEY R. L., HALL G. R. (2002), *Differential Equations*. Brooks: Cole.
18. BLOCH I. (2000), *Enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
19. BOTTAZINI U. (2000), La découverte d'une terre inconnue, In. *Les génies de la Science : Poincaré, Pour La Science*.
20. BOYCE W. E. (1994), New directions in Elementary Differential Equations, *The college mathematics journal*, vol.25, n°5, pp. 364-371.
21. BOYCE, W. E., (1999). "Differential Equations in the Information Age", in *Revolutions in Differential Equations: Exploring ODEs with Modern Technology*, The Mathematical Association of America, Notes. 13-18.

22. BRAUN M (1993), *Differential Equations and Their Applications: an introduction to applied mathematics*, New York: Springer Verlag.
23. CARLSON, M., (1997). Views about mathematics survey: Design and results, *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting/North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 395-402.
24. CASTELA C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieurs : Un exemple concret celui de tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 15, n°1. Grenoble : La pensée Sauvage. RDM.
25. CHAU O., PLUVINAGE F. (1999), Comparaison de compétence dans les approches algébrique, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en première année universitaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.19, n°2, pp.195-220. Grenoble : La pensée Sauvage.
26. CHAUVAT G. (1998/99), Courbes et fonctions au collège, *Petit X*, n°51, pp. 23-44.
27. CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique*, Grenoble : La pensée sauvage.
28. DEMAILLY J. P. (1996), *Analyse numérique et équations différentielles*, Presse Universitaire de Grenoble.
29. DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris 7.
30. DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7, n°2. Grenoble : La pensée Sauvage.
31. DOUADY R. (1992), Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-IREM*, n°6, pp.132-158.
32. DOUADY R. (1993), L'ingénierie didactique, un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. *In Cahier de DIDIREM*, IREM de Paris VII.
33. DUVAL R. (1988), Graphiques et Equations : articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 1. IREM de Strasbourg.



34. DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, n°5, pp. 37-65. IREM de Strasbourg.
35. DUVAL R. (1995a), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. In *Actes de la VIII Ecole d'été de didactique des mathématiques*, pp. 198-214. IREM Clermont-Ferrand.
36. DUVAL R. (1995b), *Sémiosis et Pensée Humaine*, Paris : Peter Lang.
37. EL FAQIH E. M., (1991), *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
38. HABRE S. (2000), Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 455-472.
39. HABRE S. (2002), writing in a reformed differential equations class. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics* University of Crete, Greece.
40. HAREL, G., & DUBINSKY, E. (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
41. HIRSCH M. W. (1984) The dynamical systems approach to differential equations, *Bull. American Mathematical Society*, vol. 11, n°1, pp.1-64.
42. HIRSCH M. W., SMALE S. (1974) *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press.
43. HUBBARD J., WEST B. (1991), *Differential equations, a dynamical approach*, New York: Springer Verlag.
44. HUBBARD J., WEST B. (1999), *Equations Différentielles et systèmes dynamiques*, Paris : Cassini.

45. HUGHES Hallett, D. (1991). Visualization and Calculus Reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes No. 19, 121–126.
46. JACOB-ZAIBAK E. (2002), *Le tableau de Variation et ses fonctionnalités en classe de Seconde, mémoire de DEA*, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
47. JAMES M., KENT P., RAMSDEN P. (1997) “TangentField”: A tool for “webbing” the learning of differential equations, *Electronic Proceedings of the Tenth Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-10/P8/pdf/paper.pdf>.
48. KALLAHER M. J. (1999), *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with Modern Technology*, MAA Notes.
49. KOSTELICH, E., & ARMBRUSTER, D., 1997, *Introductory Differential Equations: From Linearity to Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley).
50. KWON, O.; JU, M. ; CHO, K.; SHIN, K.; (2003), Student’ conceptual understanding and attitudes in RME-based differential equations class, *Proceedings of the twenty-seventh PME Conference*, Honolulu, Hawai’i - USA.
51. LABORDE C. (1999), Core Geometrical Knowledge for using the Modelling Power of Geometry with Cabri-Geometry, *Teaching Mathematics and its applications*, vol. 18 n° 4.
52. LITTLE C.; McLEMAN C. (2002) Improved computer software for the teaching of ordinary differential equations: The ODEToolkit in the Classroom Setting. *2<sup>nd</sup> International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level*; Crete , Greece, July 1-6, 2002.
53. MENSOURRI D. (1994), *Essaie de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition: le cas des relations et équations dans les classes de Seconde et de Première*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble.
54. MORENO J., LABORDE C. (2003) Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. In *Actes du Congrès Européen ITEM*, Reims France.

55. NEILL H. and SHUARD H. (1982), *Teaching Calculus*, Blackie.
56. PERRIN, M. J. (2001), Milieu, cadres et registres, In *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. IREM de Paris VII.
57. PRASLON F. (2000), *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse : Le cas de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.
58. RAMIREZ A. H. (1995), *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con los Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Thèse de doctorat, Centre de Investigación y de estudios avanzados del instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa, Mexique.
59. RASMUSSEN, C. (1996). Qualitative Problem Solving Strategies of First Order Differential Equations: The Case of Amy, *Electronic Proceedings of the Fifth Conference on the Teaching of Mathematics*, <http://archives.math.utk.edu/CTM/FIFTH/Rasmussen/paper.pdf>.
60. RASMUSSEN, C. (1997). *Qualitative and numerical methods for analyzing differential equations: A case study of students' understandings and difficulties*. Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland, College Park.
61. RASMUSSEN C. L. (1998a), Learning obstacles in differential equations, *Proceedings of the twenty-second PME Conference*, Stellenbosch, South Africa pp. 25-32.
62. RASMUSSEN, C. (1998b), Reform in differential equations: A case study of students' understandings and difficulties. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, CA
63. RASMUSSEN, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
64. RASMUSSEN, C. & KING, K. (2000). Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 161-172.

65. Rasmussen, C. & Whitehead K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations, *MAA's Teaching and Learning Research Sampler.*, [http://www.maa.org/t\\_and\\_l/sampler/rs\\_7.html](http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html).
66. ROBINSON James C. (2004), *An introduction to ordinary Differential equations*, Cambridge University Press, United Kingdom.
67. Romberg, T., Fennema, E., & Carpenter, T. (1993). Integrating research on the graphical representation of function. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
68. ROSS C. C. (1995), *Differential equation, an introduction to Mathematica*, New York: Springer Verlag.
69. SAGLAM, A. (2004), *Les équations différentielles en mathématiques et en physique: étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
70. SHANNON K. (1994), Using Spreadsheets and Derive to teach differential equations, *Electronic Proceedings of the Eight Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-7/SB2/pdf/paper.pdf>.
71. TALL D. O., (1985), Understanding the calculus, *Mathematics Teaching*, 110, 49-53.
72. TALL D. O. (1986a), A Graphical Approach to Integration and the Fundamental Theorem, in *Mathematics Teaching*, 113 48–51.
73. TALL D. O. (1986b), Lies, Damn Lies ... and Differential equations, in *Mathematics Teaching*, 114, 54–57.
74. TALL D. O. (1992), Students difficulties in calculus, Published in *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992, Québec, Canada*, (1993), 13–28.
75. THOMAS G. B., FINNEY R. L., WEIR M. D., GIORDANO F.R. (2003), *Thomas' Calculus*. New York: Addison Wesley.

76. TOURNES D. (1996), *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914)*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, Denis Diderot.
77. TOURNES D. (1996), Construction d'équations algébriques et différentielles, In *Actes du Congrès Européen ITEM*, Reims France.
78. Ubuz, B. (2001). "First year engineering students' learning of point tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers". *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, Vol.20, 113-137.
79. UWIMANA C. (2002), *Liens entre une fonction et sa fonction dérivée*, Mémoire de DEA, université Joseph Fourier, Grenoble I.
80. VERGNAUD, G (1990). La théorie des champs conceptuels, *RDM*. Vol. 10, n°2.3, pp. 133-170.
81. WANNER G. (1988), Les équations différentielles ont 350 ans, *L'enseignement Mathématique*, t.34, pp. 365-385.
82. WHITEHEAD K. & RASMUSSEN, C (2003). Undergraduate students' mental operations in systems of differentials equations, *Proceedings of the twenty-seventh PME Conference*, Honolulu, Hawai'i - USA.
83. ZANDIEH, M. & McDONALD, M. (1999), Student understandings of equilibrium solution in differential equations, *Proceedings of the twenty-first PME Conference*, Cuernavaca, Mexico.

#### MANUELS SCOLAIRES UTILISES

1. Mathématiques Terminale S, Collection TERRACHER, 1998, Editions Hachette
2. Mathématiques Terminale S, 1998, Editions DIDIER
3. Mathématiques Terminale S, Collection DECLIC, 2002, Editions Hachette
4. Mathématiques Terminale S, Collection TERRACHER, 2002, Editions Hachette
5. *Encyclopaedia Of Mathematics*, Vol. 3, Kluwer Academic Publishers





# ANNEXES





**Annexes A :**

**Tableau :** *Un échantillon de « notions, techniques, théorèmes, cadres, registres et tâches » pour les trois approches.*



	Résolution Algébrique	Résolution Numérique	Approche Qualitative
Techniques	<p><b>Changement</b> de variables ou application d'une transformation afin d'amener l'équation différentielle à une forme désirée (exacte, à variables séparées etc.). Par exemple si homogène : appliquer la transformation <math>y=vx</math>.</p> <p><b>Intégration</b> par parties.</p> <p><b>Décomposition</b> d'une fraction rationnelle en éléments simples.</p> <p><b>Factorisation</b> et Développement limités.</p> <p><b>Techniques</b> pour calculer une solution particulière (la variation de constantes, la méthode des coefficients indéterminés etc.).</p> <p><b>Transformations</b> trigonométriques et logarithmiques (par exemple passer de <math>\text{Arcsin}x</math>-<math>\text{Arcsin}y=A</math> à <math>x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=B</math> ou de <math>\ln x^2+\ln(x^2/y^2)=A+x</math> à <math>y^2=Be^x</math>.</p> <p><b>Identifier</b> la nature (linéaire ou non, exacte, etc.) et éventuellement l'ordre d'une équation différentielle afin de pouvoir appliquer la bonne technique de résolution.</p> <p><b>Déterminer</b> le facteur d'intégrant afin d'amener à une équation exacte.</p> <p><b>Certaines</b> techniques d'intégration.</p>	<p><b>Certaines</b> techniques fondamentales de l'analyse Numérique : interpolation, approximation polynomiale, etc.</p> <p><b>Identifier</b> la méthode la plus adaptée à utiliser et/ou le pas « optimal. »</p> <p><b>Méthode</b> d'Euler.</p> <p><b>Méthode</b> de Runge-Kutta.</p> <p><b>Le développement</b> limité au premier ordre d'une fonction.</p> <p><b>Calculer</b> l'erreur.</p> <p><b>Présenter</b> le résultat graphiquement ou dans un tableau.</p>	<p><b>Régionnement</b> du plan suivant le signe de la dérivée.</p> <p><b>Raisonnement</b> par l'absurde.</p> <p><b>Repérage</b> des propriétés d'invariance du champ par symétrie ou translation.</p> <p><b>Repérage</b> des solutions particulières.</p> <p><b>La méthode</b> des isoclines pour tracer le champ de tangentes.</p> <p><b>Représentation</b> des solutions dans un portrait de phase.</p>
Résultats- théorèmes	<p><b>Théorèmes</b> d'existence et d'unicité.</p>	<p><b>En voisinage</b> d'un point, une fonction et sa tangente ne se dissocient pas beaucoup.</p> <p><b>Théorèmes</b> d'existence et d'unicité,</p> <p><b>Conditions</b> nécessaires pour qu'une méthode soit consistante, divergente et/ou stable.</p> <p><b>Les corollaires</b> liant la stabilité, divergence et la consistance d'une méthode.</p>	<p><b>Existence</b> de limite (finie ou non) des fonctions monotones.</p> <p><b>Comparaison</b> des fonctions.</p> <p><b>Théorèmes</b> d'existence et d'unicité,</p> <p><b>Lemme</b> de la nasse (piège à trajectoires).</p> <p><b>Théorème</b> des valeurs intermédiaires.</p> <p><b>Théorème</b> des accroissements finis.</p> <p><b>Une fonction</b> différentiable a une tangente dans chaque point du plan où elle est définie.</p> <p><b>Pour une</b> fonction <math>f(x)</math> ; <math>f'(x_0)</math> signifie la pente de la tangente passant par <math>(x_0, y_0)</math>.</p> <p><b>Les théorèmes</b> concernant les extremums.</p>

<b>Cadres</b>	Algébrique, Graphique, Analytique, ...	Graphique, Numérique, ...	Algébrique, Graphique, Numérique, Géométrique, Analytique, ...
<b>Registres</b>	Symbolique, Graphique, ...	Symbolique, Graphique, Tableaux (de valeurs), ...	Symbolique, Graphique, Tableaux (des variations), Intrinsèque, ...

Tâches	<p><b>Résoudre</b> une équation différentielle,</p> <p><b>Obtenir</b> une équation différentielle d'une famille de courbe.</p> <p><b>Déterminer</b> la nature, l'ordre et/ou le degré de l'équation différentielle afin de lui appliquer la bonne transformation qui puisse amener à la résolution et afin de pouvoir s'immiscer dans l'application de la bonne procédure.</p> <p><b>Tracer</b> les courbes représentatives des solutions</p> <p><b>Démontrer</b> qu'une fonction vérifie une équation différentielle.</p> <p><b>Déterminer</b> une solution vérifiant une condition(s) initiale(s) donnée(s).</p> <p><b>Ramener</b> une autre équation différentielle donnée à une autre de nature précise en lui faisant subir des transformations afin de la résoudre facilement</p> <p><b>Déterminer</b> les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes donnée.</p> <p><b>Pour une</b> équation différentielle donnée, étudier l'existence et l'unicité des solutions passant par un point donné quelconque.</p> <p><b>Explorer</b> les parties du plan où les solutions existent ou n'existent pas.</p> <p><b>Etablir</b> l'équation différentielle qui régit une fonction donnée.</p>	<p><b>Résoudre</b> un problème de Cauchy à l'aide d'une méthode numérique.</p> <p><b>Comparer</b> deux observations faites par une méthode approximative pour deux courbes « voisines » (par exemple passant par <math>y(0)=2</math> et <math>y(1)=2</math> pour l'équation différentielle <math>y'=e^{2/y}</math> avec <math>h=0.5</math>) de la même équation différentielle.</p>	<p><b>tracer</b> les ostensifs graphiques (isoclines, le champ de tangentes, etc.) d'une équation différentielle.</p> <p><b>Associer</b> une équation différentielle à un ostensif graphique.</p> <p><b>Partitionner</b> le plan suivant le signe de la dérivée.</p> <p><b>Tracer</b> une courbe solution à partir d'un champ de tangentes. Et interpréter les comportements, éventuellement à l'infini, de cette courbe solution.</p> <p><b>Etudier</b> le signe de la dérivée seconde.</p> <p><b>Comparer</b> les allures, les pentes etc. de deux courbes solutions d'une équation différentielle (ou deux équations différentielles différentes).</p> <p><b>Etudier</b> les propriétés d'une courbe solution (montrer qu'elle possède deux branches infinies à direction asymptotiques verticales ; des points d'inflexion etc.).</p> <p><b>Situer</b> cette courbe par rapport à une isocline, à une autre courbe etc.</p> <p><b>Démontrer</b> qu'une fonction donnée est une barrière (inférieure ou supérieure) pour une équation différentielle donnée.</p> <p><b>Comparer</b> cette barrière et une solution de l'équation différentielle.</p> <p><b>Ayant le</b> graphe de <math>f(x, y)</math> pour l'équation différentielle <math>y'=f(x, y)</math>, interpréter les courbes solutions ou esquisser ostensif graphique.</p> <p><b>Pour une équation</b> différentielle vérifiant le théorème d'existence et d'unicité quelques informations étant données, en ressortir d'autres informations. (Telle démontrer que deux solutions d'une équation différentielle ne se coupent pas)</p>
--------	---	---	--



## **Annexes C**

**Annexe C1** : *Activités proposées aux élèves de Terminale.*

**Annexe C2** : *Tableau synoptique des productions d'élèves en fonction des stratégies*

**Annexe C3** : *Protocoles de quatre binômes d'élèves pour la troisième séance de l'ingénierie proposée.*



## **Annexe C1- Activités proposées aux élèves**

# SEANCE n°1

Le 26 avril 2002

Lycée Pablo Neruda de Saint Martin d'Hères

Classe de Terminale.

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

## Activité n°1 :

Soit  $f$  une fonction dérivable et définie sur  $\mathcal{R}$ . On sait que pour tout  $x \in \mathcal{R}$  on a  $f'(x) = 2.f(x)$ . Etudier les variations de  $f$ .

## Activité n°2 :

Puisqu'en un point donné le nombre dérivé d'une fonction signifie le coefficient directeur de la tangente passant par ce point, la propriété « une fonction est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle, si et seulement si, sa dérivée est positive (resp. négative) » peut être traduite ainsi : « une fonction est croissante ( respectivement décroissante) si et seulement si, en chacun des points de sa représentation graphique, les coefficients directeurs des tangentes sont positifs (respectivement négatifs)».

En se servant de l'annexe ci-jointe, répondre aux questions suivantes :

A2Q1. On prend une droite parallèle à l'axe des ordonnées, la droite  $x=1$  par exemple. Pour l'équation  $y'=2y$ , calculer les coefficients directeurs des tangentes aux points suivants se trouvant sur la droite :  $(1 ; -3)$ ,  $(1 ; -1)$ ,  $(1 ; 0)$ ,  $(1 ; 1)$ ,  $(1 ; 2)$ ,  $(1 ; 3)$ . Dessiner ces points ainsi que les tangentes<sup>24</sup> correspondantes dans le repère donné dans l'annexe.

A2Q2. Maintenant prenons une droite parallèle à l'axe des abscisses, la droite  $y=1$  par exemple. A l'aide de la même équation, calculer les coefficients directeurs des tangentes aux points suivants se trouvant sur la droite :  $(-2 ; 1)$ ,  $(-1 ; 1)$ ,  $(0 ; 1)$ ,  $(2 ; 1)$ . Représenter ces points dans le même repère donné dans l'annexe et mettre la valeur du coefficient directeur au point concerné (on ne demande pas de représenter les tangentes ni les segments correspondants).

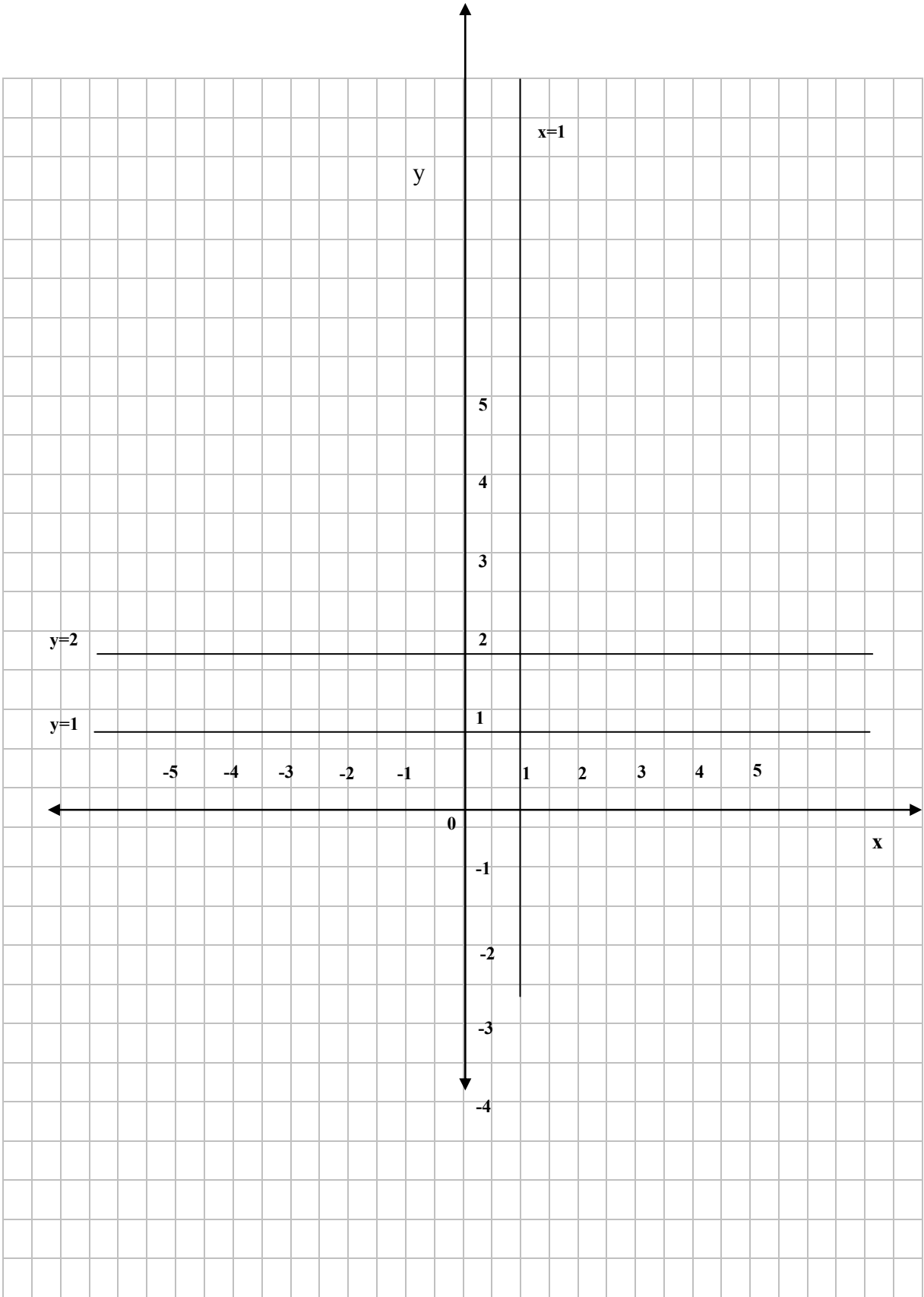
Que peut-on conclure ?

A2Q3. Même question pour les points suivants :  $(-2 ; 2)$ ,  $(-1 ; 2)$ ,  $(0 ; 2)$ ,  $(2 ; 2)$  se trouvant sur la droite  $y=2$ . Que peut-on conclure ?

A2Q4. Que peut-on conclure de toutes ces questions ?

<sup>24</sup> Pour faciliter la tâche et afin d'éviter l'encombrement de la figure par des tangentes, on propose de représenter chaque tangente par un petit segment dont le milieu est le point tangence et de mettre la valeur du coefficient directeur à coté de ce segment.

### Annexe de l'activité 2:



**Devoir à la maison :**

**DQ1.** Soit  $y$  une fonction dérivable et définie sur  $\mathcal{R}$ . Etudier les variations de  $y$  pour l'équation  $y' = 2y + 1 \dots \dots \dots (E)$

**DQ2.** A partir de la première question, compléter les propositions suivantes :

*Si une fonction est solution de (E), lorsque sa valeur  $y$  est  $\dots \dots \dots$  elle est croissante.*

*Si une fonction est solution de (E), lorsque sa valeur  $y$  est  $\dots \dots \dots$  elle est décroissante.*

*Si une fonction est solution de (E), en un point où sa valeur  $y$  est  $\dots \dots \dots$  sa courbe admet une tangente de coefficient directeur positif.*

*Si une fonction est solution de (E), en un point où sa valeur  $y$  est  $\dots \dots \dots$  sa courbe admet une tangente de coefficient directeur négatif.*

**DQ3.** Pour la même équation déterminer les isoclines  $-3, 0, 1.5, 5$ .

## SEANCE n°2 :

### Activité n°3 :

**A3Q1.** A partir de l'équation de départ :  $y' = 2y$ , peut-on anticiper les droites sur lesquelles les pentes restent identiques, c'est-à-dire les isoclines ? Si oui comment ?

**A3Q2.** Que signifie qu'une courbe solution croise l'isocline 1 ?

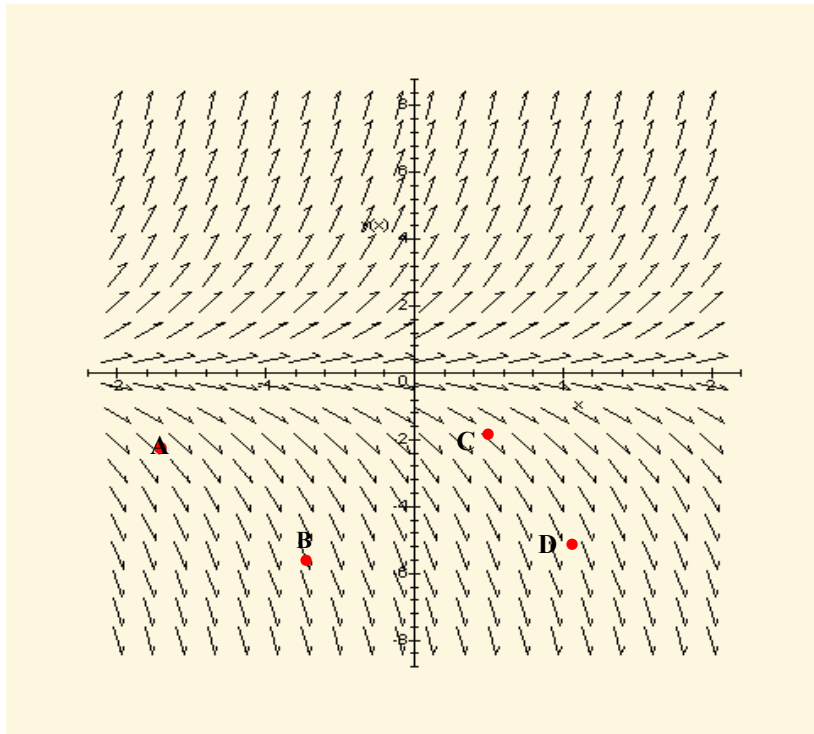
### Activité n°4 :

Calculer les isoclines 1 et 4 de l'équation différentielle  $y' = x^2 + y^2$ . Quelle est la nature de ces isoclines ?

### Activité n°5 :

Noter qu'à chaque  $c \in \mathcal{R}$ , il est possible d'associer une isocline. Si on remplace chaque isocline par des segments, comme cela a été fait dans l'activité précédente, cette procédure nous amène au « champ de tangentes » de l'équation différentielle  $y' = 2y$  (cf. figure ci-dessous).

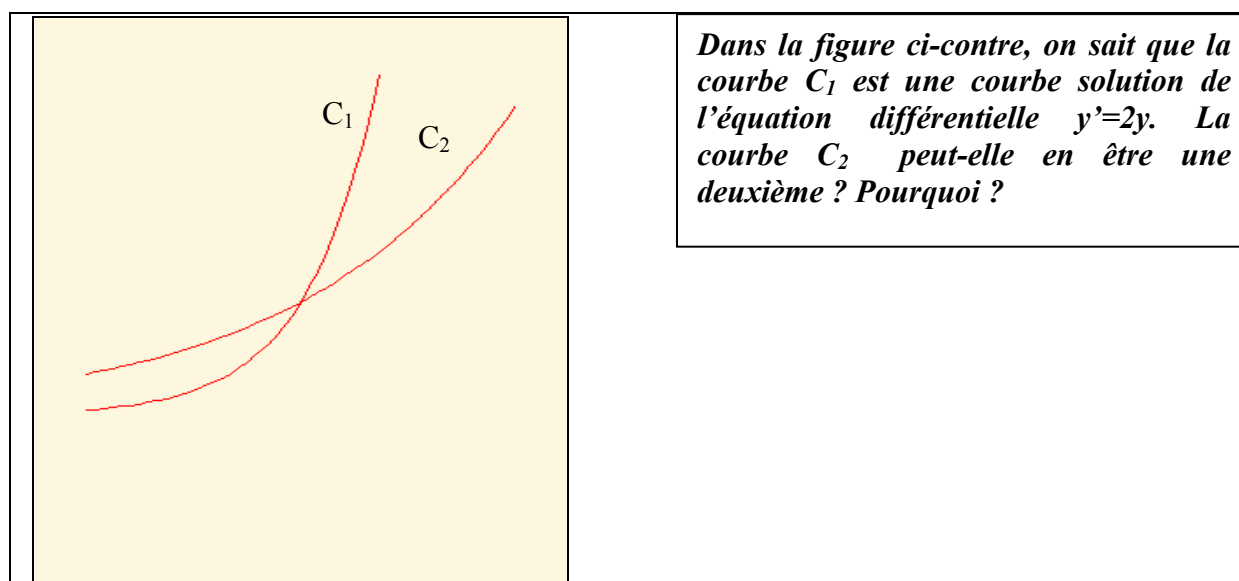
A partir de cette figure et en se rappelant le rôle de petits segments, dessiner les courbes solutions passant par le point A, le point B, le point C et le point D.



Commentaire : .....

.....

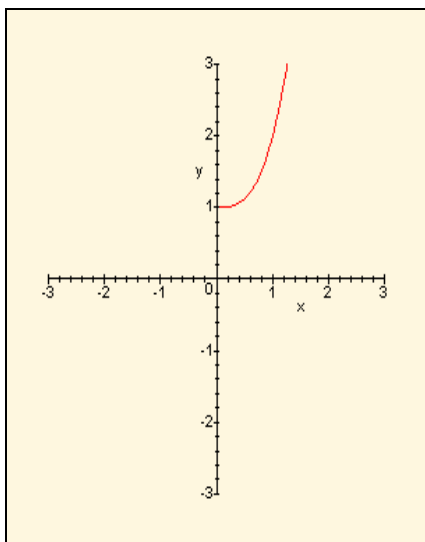
## Activité n°6 :



## SEANCE n°3 :

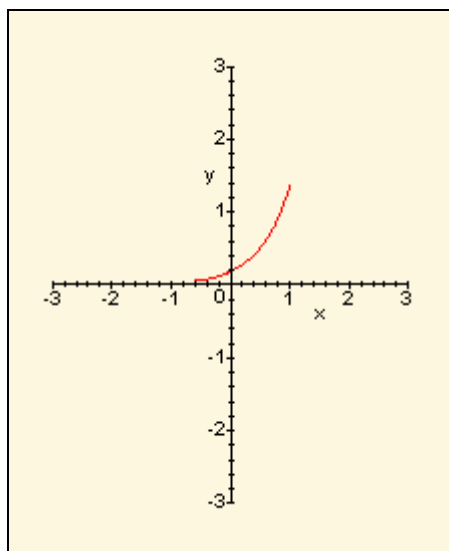
### Activité AE1 :

**AE1<sub>A</sub> :**



*La courbe dessinée ci-contre peut-elle être une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=y^2$  ? Justifier votre réponse.*

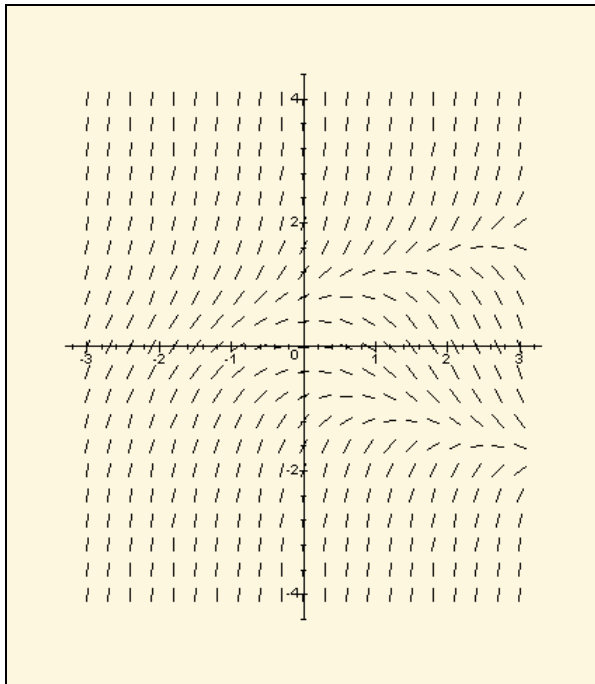
**AE1<sub>B</sub> :**



*La courbe dessinée ci-contre peut-elle être une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y+1$  ? Justifier votre réponse.*

### Activité AE2 :

Pour le champ de tangentes donné ci-dessous, tracer les courbes solutions passant par le point  $(-2 ; 0)$ , le point  $(0 ; -2)$  et le point  $(0 ; 0)$ .



Commentaire : .....

.....

### Activité AE3 :

**AE3<sub>A</sub> :**

Pour l'équation différentielle  $2y' = e^{-x^2}$ , est-il possible de trouver un intervalle où les solutions de cette équation sont décroissantes ?

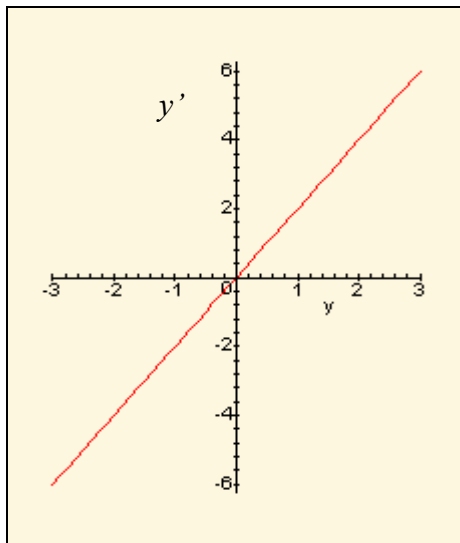
**AE3<sub>B</sub> :**

Dites pourquoi la droite  $y = -2x$  ne peut être tangente à aucune courbe solution de l'équation différentielle  $2y' = y^2$ .



### Activité AE4 :

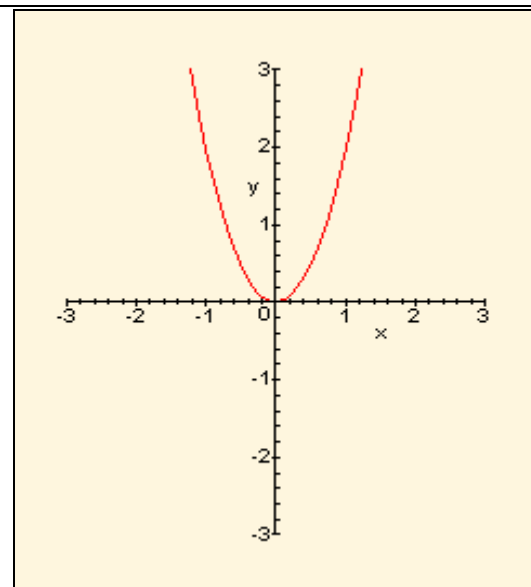
Pour l'équation différentielle  $y'=f(y)$ , le graphe de  $f$  est donné comme ci-dessous :



A l'aide de ce graphe, étudier les variations de  $y$ .

Que peut-on dire des variations de la courbe solution passant par le point  $(0 ; 1)$  ? Illustrer votre réponse.

### Activité AE5 :



La courbe ci-contre peut-elle être solution de l'équation différentielle  $y'=x$  ? Justifier votre réponse.

### Activité AE6 :

Associer à chacun des champs de tangentes donné ci-dessous (C1, C2) l'une des équations différentielles suivantes (Attention l'une de ces équations ne peut être associée à aucun champ de tangentes) :

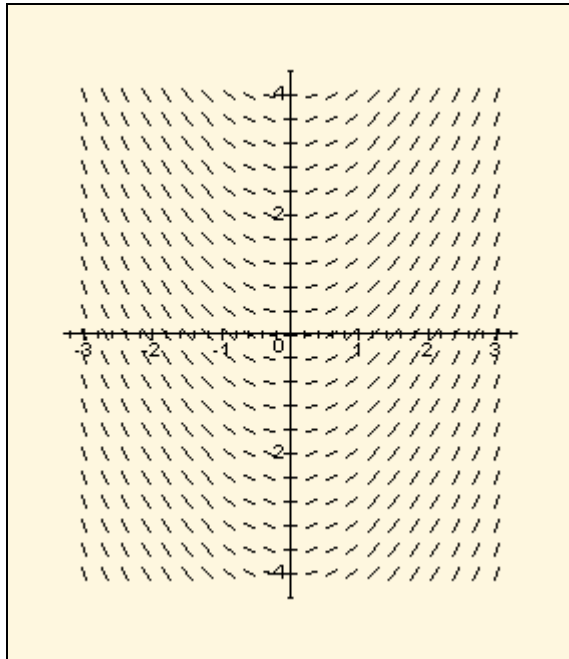
(E1).... $y'=x$ ,

(E2).... $y'=y$ ,

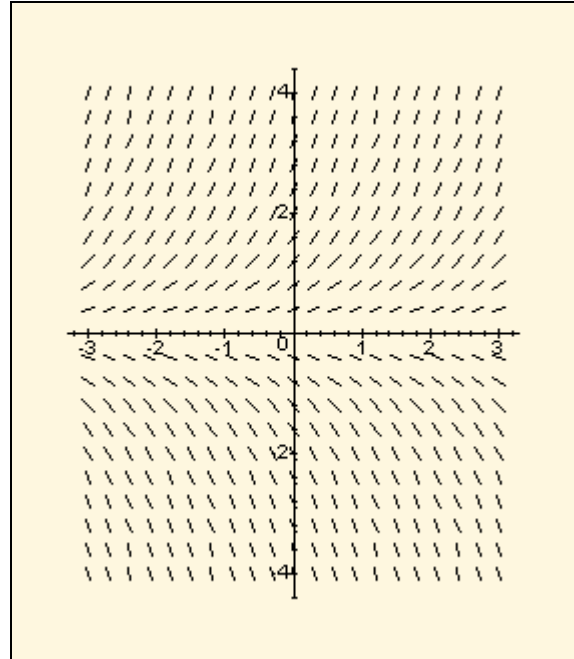
(E3).... $y'=y-x$ .

Justifier votre réponse.

C1.



C2.



### Activité AE7 :

AE7<sub>A</sub> :

Trouver le point de tangence entre une courbe solution de l'équation différentielle  $y'=2y$  et la droite  $y=x$ .

AE7<sub>B</sub> :

Pour l'équation différentielle  $y'=ay$ , les courbes solutions admettent, sur la droite  $y=2$ , des tangentes de pente 6. Quel est le coefficient de  $y$  dans l'équation  $y'=ay$  ?

**Annexe C2- Tableau synoptique des productions des élèves en fonction de stratégies**

## Annexes C

Activités →		A1	A2			Devoir		A3		A4	A5	A6	AE1	AE 2	AE 3	AE 4	AE 5	AE 6	AE 7
Items → Elèves ↓			1	2	3	1	2	1	2										
B1	E <sub>r</sub> 7	SA3	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX4 B.R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.	SQ1	B.R.	SQ1 B.R.	Confusion entre $y'=2x$ et $y'=2y$ . M.R.	SA1 B.R	SA1 B.R	B.R
	E <sub>r</sub> 11	SA3	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX2	SQ2 B.R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.							
B2	E4	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX2	SQ2 B.R.		M.R.	B.R.	SQ1 B.R.	SQ1 M.R.	B.R	Cncp-1 M.R.	S. R.	SQ1 M.R	SQ1 B.R	Confusion entre tangente et solution. M.R.
	E6	S. R.	SQ1	SQ1	SQ1	S. R.	SQ1	SX4 B.R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.							
B3	E17	SQ1	SQ1	S. R.	SQ1	SQ1	SX3	SQ2 B.R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.	SQ1 B.R.	M.R.	C <sub>T</sub> (l'ED est dérivée pour les variations) M.R.	Confusion entre $y'=2x$ et $y'=2y$ . M.R.	SA1 B.R	SA1+ SQ1 B.R	N.C.
	E <sub>r</sub> 16	S. R.	SQ1	S. R.	SQ1	A B S E N T													
B4	E <sub>r</sub> 9	SQ1	SQ1	N. C.	SQ1	SQ1	SX3	S. R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.	SQ1 B.R.	B.R.	SQ1 B.R.	Confusion entre $y'=2x$ et $y'=2y$ . M.R.	N.C. M.R	SQ1 B.R	B.R
	E12	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX3	SX4 B.R.		B.R.	N. C.	SQ1 B.R.							
B5	E <sub>r</sub> 1	SA1	SX1	SQ1	SQ1	S. R.	SX2	SQ2 B.R.		B.R.	N. C.	SQ1 B.R.	SQ1 B.R.	B.R.	Cncp-4 ; C <sub>A</sub> M.R.	S. R.	SQ1 N.C.	SA1 B.R	M.R (résolution algébrique)
	E <sub>r</sub> 15	SA1	SX1	S. R.	SQ1	A B S E N T													
B6	E3	SA2	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX2	N. C. M.R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.	SQ1 B.R.	M.R.	SQ1 B.R.	Cncp-1 M.R.	SQ1 B.R	SA1 B.R	B.R
	E13	N.C.	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX2	S. R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.							
B7	E10	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX2	SX4 B.R.		B.R.	N. C.	SQ1 B.R.	SQ1 B.R.	B.R.	Confusion entre tangente et solution. M.R.	Confusion entre $y'=2x$ et $y'=2y$ . M.R.	SA1 B.R	SA1 B.R	B.R
	E18	SA2	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX2	SQ2 B.R.		B.R.	M.R.	SQ1 B.R.							
B8	E <sub>r</sub> 5	SA2	SQ1	SQ1	SQ1	N.F.	N.F.	SX4 B.R.		B.R.	N. C.	SQ1 B.R.	S.R.	B.R.	SQ1 B.R.	Confusion entre $y'=2x$ et $y'=2y$ . M.R.	SA1 B.R	SQ1 B.R	B.R
	E <sub>r</sub> 14	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	A B S E N T													
B9	E2	S. R.	SQ1	SQ1	SQ1	SQ1	SX3	SX4 B.R.		B.R.	B.R.	SQ1 B.R.	SQ1 B.R.	B.R.	Confusion entre tangente et solution. ; C <sub>T</sub> M.R.	S.R.	SQ2 B.R	S.R	B.R
	E8	A B S E N T					SQ1	SX3	SQ2 M.R.		B.R.	B.R.							

**Légende:** S.R.: sans réponse, N. F.: copie non fournie, N.C.: réponse non classée.

**Annexes C :**

**Annexe C3- Protocoles de quatre binômes d'élèves pour la troisième séance  
de l'ingénierie didactique proposée.**

**Binôme B2 : E4 et E6.****Activité AE1 :**

1. **E4** : Il faut calculer le coefficient directeur et puis tu vois si marche....
  2. **E6** : Non... ça c'est une fonction déjà  $x$  au carré
  3. **E4** : been ouais ?! Been pourquoi elle part pas de 0 ?
  4. **E6** : Parce que c'est en fait c'est  $x$  au carré plus 1.
  5. **E4** : Ah d'accord. [...] Et comme l'équation définie, on la retrouve ?
  6. **E6** :  $y$ ,  $x$  ...
  7. **E4** : ...égal à  $y$  au carré. Si par exemple on prend un point quelconque, et puis...
  8. **E6** : ça, c'est le coefficient directeur de la tangente
  9. **E4** : euh... Ouais..... Non... [...] j'sais pas. Est-ce qu'on prend un point et on essaie de voir ?
  10. **E6** : oui mais un point euh... j'arrive pas à voir lequel.
- [...]
11. **E6** : Point 1 ? Par exemple  $y^2=1$ , on va prendre cette équation là.
  12. **E4** : ah oui ?
  13. **E6** : oui je crois c'est la droite de cette équation là. Parce qu'elle aura un coefficient directeur de 1. Donc en fait on avance de 1 et on descend, ça fait zéro.
  14. **E4** : on descend ?
  15. **E6** : oui... oui...
  16. **E4** : c'est quand c'est négatif qu'on descend...
  17. **E6** : exactement... donc en fait on avancera de 1...
  18. **E4** : ça ferait ça...c'est impossible. C'est pas une tangente... c'est pas une tangente ça
  19. **E6** : been j'ai pris au point  $y=0$
  20. **E4** : ah been voilà...
  21. **E6** : là en fait, zéro.... 0, 1...
  22. **E4** : et maintenant,  $y$ , il est égal à 1 alors...
  23. **E6** : c'est  $x$  égal à 0...
  24. **E4** : et  $y$  égale à 1.
  25. **E6** : ouais...
  26. **E4** : c'est bien ce qu'on avait dit...
  27. **E6** : donc ça marche ?
  28. **E4** : been non, ça a pas l'air de marcher...
  29. **E6** : pour prendre la solution de l'équation différentielle...himm un truc comme ça.
  30. **E4** : been je n'en sais rien du tout. [...] là  $y$  a tout le coefficient directeur de tangente quand même...

(En fait, les élèves passent à **AE2** et reprennent cette première activité après avoir traité **AE2**).

*Activité AE2 :*

31. E6 : alors le champ de tangentes... On peut passer à celui-là, non ?
32. E4 : been oui. Si on n'arrive pas à faire ça...
33. E6 : « pour le champ de tangentes donné... », c'est comment déjà qu'on les trace ?
34. E4 : j'sais pas... (elles rigolent toutes les deux)
35. E6 : il faut en fait que ça soit parallèle aux autres, c'est ça ?
36. E4 : ouais... je crois... mais... oui... c'est bizarre... non...
37. E6 : déjà faut qu'elle aille dans le même sens pour qu'elle soit parallèle à celle-là.
38. E4 : hiim... (elle confirme)
39. E6 : ces deux là...
40. E4 : hiimm...
41. E6 : il faut retourner en arrière...
42. E4 : ça va là ? (elle parle à quelqu'un d'autre qui répond « oui c'est parti. C'est mignon »)
43. E6 : non en descendant... [...] mais ça fait un truc comme ça.
44. E4 : been oui.... Sans qu'elle soit parallèle aux autres...
45. E6 : j'sais pas... ça donne un truc comme ça et puis elles sont pas parallèles en elles comme l'autre fois.
46. E4 : oui... oui
47. E6 : on peut pas savoir si c'est juste parce que...[...] zéro... au point zéro... le point zéro ça peut être la courbe comme ça...hein ?
48. E4 : oui...oui mais après elle redescend de l'autre côté aussi ?
49. E6 : ça va dans ce sens parce que regarde...
50. E4 : oui
51. E6 : elle peut pas remonter... A moins qu'elle parte tout droit mais... (elle doute).
52. E4 : il peut passer en dessous, hein ? (elles discutent des dernières courbes)
53. E6 : mais en fait il faut que ça soit parallèle aux tangentes...parce que en fait là y a plusieurs tangentes qui sont parallèles à...
54. E4 : elle peut partir plutôt comme ça
55. E6 : parce qu'en fait là moi je vois... comme ça... hein ?
56. E4 : oui.
57. E6 : mais là, ça arrive aussi à le faire, celle-là... là comme ça, c'est vrai ? il faut redescendre.... Mais là ça va pas là.... parce qu'il faut qu'elle redescende comme ça.... Faut qu'elle soit tangente à ça... parce que en fait on n'a pas le droit
58. E4 : oui mais regarde ! Comment tu veux être parallèle aux deux puisqu'elles sont pas parallèles les deux courbes ? Il faut plus ou moins que tu suive un truc ou l'autre... là tu fais traverser, toi ?

59. **E6** : non là, en fait elle est tangente quand tu la traces... et maintenant... [...] Commentaire ? Aucun... c'est super joli...

*(On fait une annonce pour dire qu'il faut passer à la seconde question)*

### **Activité AE1 (suite)**

60. **E4** : been voilà... donc l'autre... l'autre... *(Elle parle de la première activité)*
61. **E6** : au point... si on trace la courbe d'équation  $1. y=1$ ... C'est ça  $y=1$  ? [oui (**E4** confirme)]  $y=1$ , quand on prendra... ça... Ça donnera une courbe comme ça, non ? ça donnera une courbe de quatre. Donc ça fera un deux, trois quatre... Donc ça ferait un truc comme ça.
62. **E4** : Et normalement quand c'est le même  $y$ , là... ça fait toutes tes... elles ont toutes les mêmes correcteurs *(probablement elle a envie de dire coefficient directeur)*? Comment on appelait ça là ? *(elle parle des isoclines)*.
63. **E6** : mais, non, regarde. Là en fait c'était  $2y$ , alors que là c'est  $y$  au carré ok ?
64. **E4** : ah, d'accord...been parce qu'on calcule à partir de  $1$ ,  $y$  c'est toujours  $1$ . Donc  $y$  au carré, c'est toujours  $1$ .
65. **E6** : donc là, on a la droite... [...] en fait on calcule des points, non ? [...] pour  $x=1$ ... [...] on va essayer, hein ?? [*hii (l'autre confirme)*]...  $(1, 1)$ .
66. **E4** : oui.. oui
67. **E4** : ton truc...
68. **E6** :  $1... (1,1)$ .. Parce qu'on est sur cette droite là *(la droite  $x=1$ )*....  $(1, 2)$ ...
69. **E4** : ça fait quatre.
70. **E6** : parce que en fait oui... là ça  $(1, 2)$ ... ça fait  $y^2$  4... Tu vas de  $1$  tu montes de quatre... ça fait un... trois, quatre...
71. **E4** : been il passe partout...
72. **E6** : been pas celui-là non... parce que au point  $(1, 1)$  là il se retrouve là... tu montes de  $1$ ...

*(Nous ramassons les feuilles et nous en distribuons des autres)*

### **Activité AE3**

*(Au départ elles sont choquées de la forme de l'équation différentielle)*

73. **E4** : *(elle siffle)*... ah oui quand même... et puis c'est pas n'importe quel truc...
74. **E6** : je sais que sur le bouquin y avait une formule comme ça qui donnais ça... en fait après tu mets, mais bon voilà... *(Ensuite elles demandent à un autre élève de leur emprunter son livre. Ce dernier refuse au départ et finit par l'emprunter)*
75. **E4** : *(elle parle à une voisine à qui elle demande pourquoi elle ne bosse pas. Cette dernière répond qu'elle ne comprend rien du tout)* avec les exponentielles on peut faire comment ?



76. **E6** : là je comprend... Là je suis totalement... (*elles rigolent*)..... en fait parce que la fonction exponentielle
77. **Professeur** : je vous laisse voir, non ? des... de l'exponentielle  $-x^2$ ... est-ce qu'elle est décroissante ou croissante, ça vous pouvez le voir... vous pouvez le voir assez facilement, hein ? Qu'est-ce qui fait que exponentielle  $-x^2$ , elle est croissante ou décroissante ? Quand vous avez une fonction comment vous savez si elle est croissante ou décroissante ?
78. **E6** : euh... Sa dérivée ?
79. **Professeur** : oui... par exemple...mais est-ce que c'est intéressant ? Est-ce que c'est ça qui vous intéresse pour exponentielle de  $-x^2$  ? Qu'est-ce qui vous intéresse en fait, réfléchissez bien à...
80. **E4** : on fait  $\ln$  les deux côtés là ?
81. **Professeur** : il faut bien lire la question pour savoir à quoi ça rapporte le mot « décroissante »....
82. **E6** : où les solutions de cette équation sont décroissantes
83. **E4** : en fait, c'est quand... quand  $y'$  est décroissante en fait, c'est ça ??
84. **E6** : oui...  
(*Elles sont en train de feuilleter, probablement, le manuel*)
85. **E4** : si y a un petit cours.. c'est dans une... un autre chapitre c'est avec les exponentielles... c'est le chapitre des exponentielles. [...] mais c'est vraiment tout petit hein... tout petit..
86. **E6** : ah oui « *équations différentielles* » (*elle trouve la rubrique*)
87. **E4** : voilà.
88. **E6** : ah non, c'est pas ça.. et puis y a pas d'exercices résolus...
89. **E4** : non y a rien... [...] mais ça se peut qu'on tombe là-dessus au bac ?
90. **E6** : je ne sais pas.
91. **E4** : ça m'énerve...
92. **E6** : là, on n'a pas de carré, on n'a pas les... [...] Non c'est pas ça... [...]  $-x^2$ ...
93. **E4** : tu es d'accord avec moi... [...] on a le droit de faire ça ? (*elle parle de notre expérimentation*)
94. **E6** : donc après  $y'$  égal  $e$  sur deux  $x$  deux
95. **E4** : euh... je suis sûre, mais ça se peut, oui euh... je sais jamais ce truc.
96. **E6** : ça c'est la fonction  $y$
97. **E4** : t'es là ?
98. **E6** : non, non...
99. **E4** : je m'étais arrêtée parce que je regardais... alors là, on a des  $x$  truc, machin... Ah non... non regarde, c'est pas... il faut mettre 1 sur  $x$  en fait  $x^2$ . [...] Et pas... désolée...
100. **E6** : t'es méchante...

101. **E4** : c'est pas moi, ce sont les maths qui sont méchantes... C'est celui qui a fondée les exponentielles, c'est Euler qui est méchant... Voilà...
102. **E6** : donc y' égal...
103. **E4** : non il faut remettre le moins « - » hein à ce moment là... [...] de... exponentielle de  $x^2$ . Alors maintenant il faut trouver.... [...] « décroissantes » (*elle revoit la fin de l'énoncé en fait*). Been en fait plus... plus... plus ça, ça va monter, ça va tendre vers l'infini ou il va tendre vers zéro, donc ça fera... ça fera des solutions décroissantes. Donc il suffit en fait que ça tende vers l'infini. C'est ça hein, non ?
104. **E6** : attend !
105. **E4** : donc il suffit que  $x$  monte.
106. **E6** : peut-être, oui. [...] le  $e$ , il est où, ton  $e$  ?
107. **E4** : imm... il est là, en fait c'est un petit  $e$ .
108. **E6** : ah petit  $e$ , t'as pas petit  $e$ ...
109. **E4** : un petit  $e$ , un petit  $e$  comment ?
110. **E6** : non t'as pas petit  $e$ ... Regarde, regarde... Les solutions décroissantes ça serait de zéro à 1.
- (*En fait, elles arrivent à dire ça grâce à leur figure qui ressemble à une cloche. Mais nous constatons plus tard que la figure n'est pas encore dessinée à ce stade.*)
111. **E4** : et après c'est nul, t'es sûre ou jusqu'à ces deux et après c'est tout petit...
112. **E6** : non, c'est tout petit...
113. **E4** : oui mais si ça continue à tendre vers zéro, c'est quand même... c'est quand même décroissant... [*hii (E6 confirme)*] Même si tu vois pas bien...
114. **E6** : c'est vrai on dirait que ça s'arrête.
115. **E4** : ça marche terrible, hein... (*elles rigolent*)
116. **E6** : regarde elle s'arrête.
117. **E4** : elle s'arrête.
118. **E6** : à zéro bla... elle s'arrête.
119. **E4** : ah... t'es à combien là à un ? [...]
120. **E6** : en fait elle tend vers zéro, vers l'infini... vers zéro, donc elle est décroissante jusqu'à là, c'est ça ? Et puis après elle décroît et c'est constant...
121. **E4** : c'est constant après ?
122. **E6** : oui...
123. **E4** : t'es sûre ?
124. **E6** : been viens voir... pourquoi  $y=50$  ?
125. **E4** : je ne sais pas.
126. **E6** : tu vois, regard ! après ça va zéro zéro zéro. [...] tu vois ça fait 5 10 moins 22 tu crois que si je fais un dessin on verra mieux ? [*hii (E4 confirme)*]
127. **E4** : ça fait comme ça...

128. **E6** : là tu te trompe là... normalement la solution décroissante, ça serait ça ? [*hii (E4 confirme)*] parce que après, ça serait  $y=0$  [*hii (E4 confirme)*, *oui*] [...] been oui il est possible.
129. **E4** : mais non il demande un intervalle où c'est décroissante...
130. **E6** : est-il possible de trouver un intervalle...
131. **E4** : ah d'accord.
132. **E6** : ils nous disent pas de donner.
133. **E4** : d'accord, d'accord. [...]
134. **E6** : un intervalle [...] décroissante [...] cela signifie [...]
135. **E4** : non ça veut rien dire
136. **E6** : je sais plus ce que je voulais dire. [...] en fait elles sont décroissantes. C'est en fait c'est des solutions des coefficients d'équations... des... des coefficients directeurs qui sont décroissantes. [*hii (E4 confirme)*] Et la courbe aussi en fait [*hii (E4 confirme)*].
137. **E4** : oui alors comment t'expliquerait ? [...] Cela suffit... (*elles rigolent.*)
138. **E6** : et si je fais la dérivée ? Non ça nous arrangera pas.
139. **E4** : oui le problème...
140. **E6** : pour...

#### *Activité AE4*

141. **E4** : oui mais il faut passer à la suite, arrête on n'y a même pas touché. Y avait une autre ?
142. **E6** : non...
143. **E4** : si...
144. **E6** : ah oui, bon c'est dommage hein...

(*On annonce qu'on va ramasser les feuilles.*)

#### *Activité AE5*

145. **E4** : tu imagines ? On est en train d'assimiler des trucs forts et puis après... On va se planter...
146. **E6** : been, c'est de leur faute, si on n'a pas notre Bac... (*l'autre rigole*)... c'est vrai, on perd du temps, on pouvait faire des choses plus intéressantes... [...] Alors...  $y'=x$ ...
147. **E4** : Been c'est pas dur ça...
148. **E6** : « *justifier votre réponse.* »
149. **E4** : been oui, en fait il faut que le coef directeur des tangentes soit égal à  $x$ ... En fait là il faut que ça soit 1, là il faut que ça soit 2 [...] donc  $y'$ , c'est le coefficient directeur est égal à  $x$ . Eh bien...
150. **E6** : non ça fait pas (1, 1).

151. **E4** : non mais...  $y'$  ça te donne le coefficient directeur de la tangente. [*oui (E6 confirme)*]. Donc voilà... donc là, quand t'as  $x=1$ , ça fait 1. Donc ça fait 1 sur 1 quoi... comme ça ? [*oui (E6 confirme)*]. Comme ça ?
152. **E6** : oui mais ça coupe, donc le 1, c'est sur cette ligne... On positive avec carrefour...
153. **E4** : sur  $x$  hein, c'est ça ?  $x$  égal à 1 ? [*hii (E6 confirme)*]. [...] De toute façon ça serait  $x$  égal à 1, euh... Le coefficient directeur, ça serait 20 trucs.
154. **E6** : (1,1),  $y'$  égal à 1.
155. **E4** : voilà.
156. **E6** : même pour zéro, n'importe quel point. [*hii (l'autre confirme)*].
157. **E4** : pour tout euh... pour euh ...
158. **E6** :  $y'$  dépend de  $x$ .
159. **E4** : been oui.
160. **E6** : donc, le 1 est ici, on avance de 1 et on monte de 1.
161. **E4** : mais elle est pas bonne
162. **E6** : si elle est bonne.
163. **E4** : mais là, c'est pas la tangente au point 1... là ça fait la tangente à ce point là (*sur la figure, la droite est tangente au point, approximativement (0.4 ; 0.4)*), ça fait pas la tangente à...
164. **E6** : mais oui, c'est pas...ça, ça veut pas dire, c'est tangente à ce point, c'est coefficient directeur de la tangente... donc le coefficient directeur de la tangente, ça signifie pas le point.
165. **E4** : hii (*elle sait pas quoi dire, elle n'affirme ni contredit*). ?? Oh là là. (*Elle rigole*). [...] Oui mais regarde, si tu prend...  $x=1$  et  $y=2$ , ça ferait aussi un coeff de... de 1.
166. **E6** : de... là non ça ferait un coeff de deux. Si tu prends... ah non, oui (*elle réalise sa faute*). [...] Been oui tu décales de 1 et tu montes de 1. C'est ça ? (*On comprend qu'elle est en train de dessiner, donc elle demande une confirmation pour la figure*). Et tu fais comme ça, et ça fait pas un coeff... en fait elle est pas...[...] Donc pour  $x=1$ ,  $y$  a un point qui irait. Et peut-être que pour  $x=2$ ... En ce point là  $x=2$ , ça va peut-être marcher. [...] been, elle est carrément pas solution. [...]
167. **E4** : En fait,  $y$  a que 1 qui marche...
168. **E6** : oui c'est logique.... [...] en fait, ça fonctionne... « *cela fonctionne pour...* » (*elle répète c'est qu'elles ont écrit sur papier*)...

### Activité AE6

169. **E6** : « Associer à chacun... » (*elle est en train de lire l'énoncé, alors que l'autre siffle encore face à la forme inhabituelle de l'énoncé*)
170. **E4** : bien...

171. **E6** : oui c'est  $x=...$   $y=x$  je pense... Celui là, non ? [...] non, non, non il marche pas...  
Celui-là, il marche pas.
172. **E4** : pourquoi ???
173. **E6** : parce que au -1, ça va descendre...
174. **E4** : t'as jamais monté
175. **E6** : pourquoi il vont monter là ?
176. **E4** : alors là, pas de question.
177. **E6** : ah, non c'est ici...
178. **E4** : non en fait, lui... regarde lui il descend... tous... Donc ça pouvait être ça... [...]
179. **E6** : oui c'est vrai, c'est... [...]  $x=y$ , euh,  $y'=x$  [voilà (l'autre confirme)]. Euh, il m'énerve ce truc... [...] Et donc... et donc, celle-ci, ça serait celle-ci... [...] Si on prend ça égal  $y$ . Si on prend le point (0,1), là  $y=1$ ... ça ferait 1.
180. **E4** : oui ça peut aller... [...]
181. **E6** : si on prend  $y=2$
182. **E4** : oui c'est toujours pareil.
183. **E6** : on avancerait de 1....
184. **E4** :  $0.x=0$ , on avancerait de 1 et on monterait de deux, c'est ça hein ? [...]
185. **E6** : On monterait jusqu'à quatre, ça nous ferait... [...] oui, c'est ça... celle-là, ça serait  $y= y'$ ... parce que après quand c'est moins, ça va descendre [hii (l'autre confirme)]. Donc C1 correspond à C2, hein ?
186. **E4** : Non...
187. **E6** : pardon à E1
188. **E4** : à E1 ? Oui...
189. **E6** : C1 correspond à C2. (Elles rigolent)
190. **E4** : tu fais les deux champs de tangentes... [...]
191. **E6** : il faut justifier ? Ah non.. [...] C1 correspond à E2.
192. **Nous-même** : très bien, mais il faut justifier
193. **E6** : il faut justifier ?
194. **Nous-même** : oui, il faut dire pourquoi. Vous l'avez écrits par hasard ?
195. **E6** : Non, been en fait on a calculé des points et ça a marché, c'est pour ça...
196. **Nous-même** : d'accord, vous allez marquer ça alors... Vous donnez les points pour lesquels vous avez calculés.  
(Elles rigolent)
197. **E6** : pour le point (0, 2)... J'ai pris le point (0, 2) hein, c'est ça ? [hii (l'autre confirme)]. Donc  $y'=y$ ,  $x$  égal à 2...
198. **E4** : ça marche.
199. **E6** : hii.. (elle confirme)... pour  $x=1$ ...
200. **E4** : mais tu précise hein... ? [...] Oui voilà...

201. **E6** :  $x=1$ ...

*Nous annonçons qu'il faut encore traiter un dernier exercice, E4 n'est pas contente et se demande « encore un dernier ? »*

202. **E6** :  $x=1$ ... (elle écrit le reste sans parler, se référer à son papier)

### **Activité AE7**

203. **E4** : « Trouver le point... » (elle est en train de lire l'énoncé).

204. **E6** : been  $y'=2y$ ... et  $y$  égal à  $x$ . [...] donc  $y'$  égal à  $2x$ .

205. **E4** : ihh (elle ne consent ni contredit)... oui (cette fois-ci, elle confirme, mais elle n'as pas l'air très satisfaite)

206. **E6** : been, ça donne ça non ?

207. **E4** : been oui (elle rigole)... [...] Voilà...

208. **E6** : et donc voilà c'est fini... (elle rigole).

209. **E4** : ah non il faut trouver un point, non ?

210. **E6** : non... [...] oui

211. **E4** : oui ?

212. **E6** : je comprends pas du tout... Been le point tu peux pas le calculer si t'as pas une... t'as une infinité de tangentes.

213. **E4** : ah non il faut que la tangente coupe ta droite en un point...

214. **E6** : non c'est l'équation qui coupe la droite en un point, c'est ça ?

215. **E4** : je sais pas...

216. **E6** : si...

217. **E4** : C'est l'équation différentielle qui coupe une droite, non ?

218. **E6** : oui... « entre une courbe solution et la droite, trouver le point de tangence »

219. **E4** : ah voilà... en fait il faut que ton équation différentielle et la courbe, elles se croisent...

220. **E6** : ...se croisent en un même point.

221. **E4** : et c'est ce point qu'il faut trouver la tan.. le... la tangente ?

222. **E6** : ah non, le point ça a pas de tangente, le point, il doit être sur une équation différentielle donc, non ?

223. **E4** : oui... Donc il faut trouver la... la... la tangente de l'équation différentielle au point d'intersection de l'équation différentielle et la droite, non ?

224. **E6** : oui... mais ça, c'est pas bon alors ce que j'ai marqué.

225. **E4** : imm... (elle rigole, elle sait pas quoi dire)... comment ça ?

226. **E6** : je vais pas effacer, on va faire un trait (effectivement y a un trait sur leur papier).  
Et si  $y$  égal  $x$ , en fait ça serait la courbe qui est comme ça en fait ?

227. **E4** : oui...

228. **E6** : donc à 1 correspond 1...

229. **E4** : à e correspond e.
230. **E6** : oui... donc en fait... Ah non, il faut trouver un point... il faut trouver un point que quand y' soit égal à euh... [...] que en fait ce y soit égal à ce y et après on trouvera le point. [*iim (l'autre ne sait pas quoi dire)*]. [...] Donc en fait quand y égal 1, x égal à 1 et ça c'est y' égal 2. [...] Mais il y a une infinité de points [...]
231. **E4** : ula (elles rigolent)
232. **E6** : je vais laisser ça, non ? (*nous pensons qu'elle sous entend ce qu'elle a marqué sur la feuille*) Parce que vraiment, c'est....

***Binôme B4 : E12 et Er9****(Le binôme commence par la seconde activité)****Activité AE2***

1. **Er9** : oui donc qu'est-ce qu'on disait ? [...] Il nous avait dit que les champs de tangentes, c'était parallèle entre eux, non ? ... Non le machin là, les tangentes étaient parallèles entre eux.
2. **E12** : mais pas toujours...
3. **Er9** : oui là non mais d'habitude oui...
4. **E12** : tu peux faire  $(-2, 2)$ ... $(-2, 0)$
5. **Er9** :  $-2$  tac...
6. **E12** : oui tu suis en fait... (*il sous entend les segments*) Et puis à chaque fois, tu... tu... tu formes une tangente du style...
7. **Er9** : style quoi ?
8. **E12** : been voilà un truc comme ça.
9. **Er9** : après on monte...
10. **E12** : et puis après tu remonte...
11. **Er9** : et après, il recommence, non ?
12. **E12** : oui... y a un point d'inflexion là non ?
13. **Er9** : ouais (*mais il n'a pas l'air très sur*) [...] oui comme ça...
14. **E12** : oui, du style...  $0$ ...  $-2$  . C'est celui-là ? (*il est en train de repérer le point sur le champ de tangentes*) [*hii l'autre confirme*] celui là est déjà peut couper celui-là...
15. **Er9** : ???...
16. **E12** : là, je fais vraiment de la merde..
17. **Er9** : tu remonte jusqu'où là ?
18. **E12** : been c'est pas un truc du style [...] jusqu'au , non ? Qu'est-ce que tu en penses ?
19. **Er9** : oui
20. **E12** :  $(0,0)$ , tu le fais, tu le démerde... le coeff, c'est le même, non ? Il part comme ça...
21. **Er9** : Alors là, à  $(0, 0)$  elle est... ah oui... oui c'était comme ça...
22. **E12** : mais moi je vais partir quand même... c'est le... je vais finir à peu... comme on a fini...
23. **Er9** : non, mais continue vers là bas...
24. **E12** : commentaire ? Pour le commentaire, il faut marquer que les tangentes, elles sont parallèles entre elles... ou pas ?
25. **Er9** : oui si tu veux, oui... [...]
26. **E12** : en plus le champ de tangentes, il était parallèle en haut... euh... symétrique en haut et en bas. Au dessus de l'axe des abscisses...
27. **Er9** : je pense que ça a été croissant... et ça décroissante.



(Nous venons pour ramasser les feuilles, alors que E12 pose la question suivante)

28. **E12** : d'habitude, ils sont pas symétriques les deux champs de tangentes ? (nous pensons qu'il veut dire en bas et en haut)
29. **Nous-même** : non
30. **E12** : c'est pas tout le temps comme ça ?
31. **Nous-même** : non
32. **E12** : donc, c'est pas ça le commentaire qu'il faut dire.... C'est pas vrai non plus qu'elles sont parallèles entre elles les champs de tangentes ?
33. **Nous-même** : bon vous écrivez ce que vous voulez... De toutes façons, vous serez pas jugés, donc...
34. **E12** : non, mais...
35. **Nous-même** : tous ce que vous écrivez, ça m'intéresse..
36. **E12** : ah, ok...
37. **Nous-même** : donc écrivez ce que vous voulez...
38. **E12** : bon, on va écrire des conneries, hein...

(Ils rigolent...)

### **Activité AE1**

39. **E12** : « la courbe dessinée ci-contre... » (il lit l'énoncé)  
(Ils parlent en anglais, du genre (why ? why not ? speak english....))
40. **Er9** : on dirait, elle est croissante la courbe ?
41. **E12** : oui, oui
42. **Er9** : c'est vrai que c'est très important ça... [...]
43. **E12** : non, je pense pas... attend !... Parce que.... [...] Attend !... Ca fait  $y' = y^2$  égal.... Ca fait  $y' - y^2 = 0$ .

(Nous annonçons qu'il faut passer à la seconde activité)

44. **Er9** : ça fait deux fois zéro. Ca fait zéro moins zéro égal zéro.
45. **E12** : alors que là en zéro, c'est 1.
46. **Er9** : moi, je pense pas...
47. **E12** : attends ! (à partir de maintenant, ils recommencent à écrire ce qu'ils ont fourni dans la feuille qu'ils ont rendue) on va... himm  $y' = y^2$  [ouais. L'autre confirme] c'est  $y' - y^2$  égal zéro [ouais. L'autre confirme]. C'est pareil. Le...  $y'$  est  $x.2x$ . ça fait donc hi... [...] deux y, oui... non, on peut pas voir ça comme ça ?
48. **Er9** : oui, mais à ce moment là, c'est pas solution.
49. **E12** : non.... Ça fait donc...  $2y - y^2 = 0$ , himm ou  $y = 1$ .

50. **Er9** : c'est  $2-1=0$ .
51. **E12** : sauf  $y=0$ , c'est plutôt plus facile. [...] Pour  $y=0$ ...
52. **Er9** : pour  $y=0$ , ça marche.
53. **E12** :  $0-0=0$ ....
54. **Er9** : en principe euh...ça marche que pour  $y=0$ .
55. **E12** : pourquoi ?
56. **Er9** : been vas-y, essaie. [...]Si tu prends... Là si tu fais pour 1, ça fait deux fois 1 moins  $y^2$  donc moins  $1^2$ .  $1-1$  ça fait égal à zéro. Et pour  $y=1$  ?
57. **E12** : ça fait  $2-1=0$ .
58. **Er9** : ça te donne  $1=0$ .
59. **E12** :c'est faux. Oui... Donc la...
60. **Er9** : je pense que c'est pas ça, mais c'est pas grave.
61. **E12** : la courbe n'est pas solution...
62. **Er9** : peut-être tu vas ajouter le truc... [...]
63. **E12** : lequel himm c'était deux ou zéro ? [...]
64. **Er9** : Non. [...] oui il faut qu'on écrive que de la merde en fait.
65. **E12** : oui là, vraiment que de la merde.
66. **Er9** : moi j'ai un autre truc à te proposer.
67. **E12** : vas-y propose.
68. **Er9** : tu vois là  $y'=y^2$  et là t'as une....[...] comment dire ?
69. **E12** : une tangente
70. **Er9** : oui. Donc la dérivée, elle tend vers zéro.
71. **E12** : ah non
72. **Er9** : ah si. Si la courbe, si là elle est verticale si une tangente comme ça (*en fait il dessine une tangente horizontale sur la figure*)
73. **E12** : oui oui oui
74. **Er9** : et là  $y^2$ , ça serait égal à 1
75. **E12** : oui
76. **Er9** : ça serait ça (*nous pensons qu'il montre la tangente qu'il a dessinée*) ?
77. **E12** : oui
78. **Er9** : et donc ça serait pas possible, parce qu'en ce point la dérivée est à zéro et la fonction 1.
79. **E12** : oui, oui vas-y, mais ça c'est pas mal aussi.
80. **Er9** : car la dérivée est nulle en zéro.

### **Activité AE3**

81. **Er9, E12** :(*les deux en même temps*) Mais non parce que ça, c'est déjà positif.
82. **Er9** : Oui exactement, il est impossible de trouver une solution...

83. **E12** : oui... oui... [...] C'est donc juste l'exponentielle, elle est toujours positive, la dérivée, elle est elle est toujours positive, donc c'est toujours croissant.
84. **Er9** : donc  $2y'$ ...
85. **E12** : supérieur à zéro.
86. **Er9** : donc... la solution...
87. **E12** : les solutions sont... [...] Donc les solutions sont croissantes.
88. **Er9** : oui... donc il est impossible. [...]
89. **E12** : non... mais non... attends. [...]
90. **Er9** : là, c'est toujours constant ?
91. **E12** : oui, oui...
92. **Er9** : elles sont jamais décroissantes... dès que c'est... elles sont à l'infini
93. **E12** : Non, non... Ca c'est  $e$  de moins  $x^2$ , donc... Donc  $e$  de moins  $x^2$ , il est toujours positif... mais si c'est pareil, il est toujours positif. T'es con, pourquoi t'as tout effacé ? [...]
94. **Er9** : ouias, c'était toujours positif, mais...
95. **E12** : là... c'est-à-dire, la dérivée elle est toujours positive, non ?
96. **Er9** : si, si t'as raison.
97. **E12** : ah bien sûr que j'ai raison. Parce que je le vaut bien. [...]
98. **Er9** : pourquoi il nous dit pas négatif ou pas ?
99. **E12** : non, mais non...c'est pas un problème... si c'est bon ce qu'on dit là.... [...]
100. **Er9** : mais non regarde, à un moment la fonction elle redescend ?
101. **E12** : ouais.
102. **Er9** : donc c'est-à-dire que la dérivée est forcément négative...
103. **E12** : non...
104. **Er9** : si...ah si... ah si...si la fonction exponentielle moins  $x^2$  est décroissante, c'est-à-dire que ça... [...]
105. **E12** : oui, mais non...c'est pas ça qu'on voit. On voit que  $e$  de moins  $x^2$ , ça serait toujours positif ça. Donc ça, ça serait toujours positif.
106. **Er9** : non...
107. **E12** : donc ça serait toujours croissant, enfin un truc comme ça...

#### **Activité AE4**

108. **Er9** : « Pour l'équation différentielle... » (il est en train de lire l'énoncé).
109. **E12** : regarde ! les variations de  $y$ , c'est-à-dire que toute là, la dérivée, elle est décrois... elle est... elle est négative. Been  $y$ , il est décroissant. Et là, vu que c'est positif, il est croissant. [hii L'autre confirme] Non ? vas-y, dis vas-y.... marque ça. [...]  
Tu mets sur  $-\infty, 0, f(y)$  est négative, donc  $y$  est... décroissante.
110. **Er9** : ouais, mais le problème, c'est quoi, tu sais ? C'est  $f(y)$ ... Et là,  $f(y)$  est négative.

111. **E12** : ouais, ouais, vas-y. C'est ça, oui, oui... donc tu [...] la dérivée. Là, elle est négative et là, elle est positive. Donc quand c'est négatif, le truc elle est décroissante et là puisque c'est positif, c'est croissant.
112. **Er9** : ça, c'est... ça c'est  $y'$  qu'on a ou  $f(y)$  ?
113. **E12** : oui, c'est  $y'$  là...
114. **Er9** : t'es sûr ?
115. **E12** : oui, oui... been c'est pareil.  $y'$  et  $f(y)$ . [...] Là t'as la dérivée, t'as l'équation de la dérivée.
116. **Er9** : là, tu marque ihh... [...] sur  $-\infty$ , 0, c'est ça ?
117. **E12** : sur... ouais.
118. **Er9** : donc si  $y'$ ...
119. **E12** : donc  $y'$  inférieur à zéro... Vas-y, vas-y marque ça, marque ça.  $y'$  inférieur à zéro, donc  $y$  est décroissante. [...] donc  $y$  décroissante. [...] Si  $f(y)$  supérieur à zéro... sur 0,  $+\infty$ ... donc  $y'$  supérieure à zéro donc  $y$  croissante. [...] Et que peut-on dire du point machin, puff (*au sens je n'en sais rien*). Attends, comment est-ce qu'elle passe la courbe ? (*maintenant il commence à faire rédiger à l'autre*) Pour la courbe machin passant par le point (0, 1) [...]  $y$ ... par (0, 1)... [...] tu mets juste  $y$  décroissante sur  $-\infty$ , -0,5... et croissant sur -0,5,  $+\infty$ .

### Activité AE5

120. **Er9** : been, moi je dis ouais. (*on ne les entend pas lire l'énoncé*). Been  $x$  est négatif.
121. **E12** : là, la dérivée, elle est... positive. Non, c'est faux. Ah si, si... Si c'est possible. Si la dérivée, elle est tout le temps positive et  $y=x$  (*il dit bien  $y$  et non pas  $y'$* ), elle est tout le temps croissante et en plus, elle passe en zéro je crois.
122. **Er9** : been là  $x$ , il est négatif.
123. **E12** : non.
124. **Er9** : been  $x$ , il est négatif.
125. **E12** : tu rigole ou quoi ?
126. **Er9** : là,  $x$ ...
127. **E12** : mais  $y=x$ , c'est...
128. **Er9** : c'est l'axe des  $x$ , il est pour ça là.
129. **E12** : Been oui...
130. **Er9** : Et ça, c'est la courbe représentative de  $y'$ .
131. **E12** : ouais.
132. **Er9** : donc c'est faux.
133. **E12** : mais non, elle est toujours positive,
134. **Er9** : ouais, elle est toujours positive, mais  $x$  il est pas toujours positif.

135. **E12** : là  $x$ , c'est pas une fonction.  $y=x$ ... c'est ça en gros. [...] C'est toujours posi...  
c'est toujours croissant.
136. **Er9** : j'sais pas...
137. **E12** : là  $x$ , il représente les axes des abscisses, non ?  
[...]
138. **Er9** : moi, je dirai que c'est ça, [...] la courbe elle est positive, mais là  $x$ , il est négatif,  
donc...
139. **E12** : mais t'est sûr qu'il est positif ?
140. **Er9** : oui c'est ce que je constate, oui. Tu vois là...
141. **E12** : (*en criant*) mais non...
142. **Er9** : ah si.
143. **E12** : mais non... [...] Si la dérivée, elle est toujours positive, la courbe, elle sera  
toujours croissante.
144. **Er9** : oui, mais tu oublie que  $x$  là, il est bien négatif ? Mais alors... t'es...
145. **E12** : ça a rien à voir. [...] Ca a rien à voir. Je pense pas que ça a à voir.
146. **Er9** : mais si toi, tu me parle de dérivée toujours... positive.
147. **E12** : been oui... donc la courbe elle est toujours croissante. [...]
148. **Er9** : mais c'est pas le cas.
149. **E12** : mais si, on voit là que c'est juste la dérivée qu'il nous montre. Et la dérivée, on  
remarque qu'elle est toujours positive. [...] Moi je pense que c'est oui.
150. **Er9** : Non
151. **E12** : non non non... Moi je dirais ça, c'est  $y'=y$ . Regarde [...]  $y'=x$ ... [...] Toi, tu  
dirais que c'est ça  $y'=x$  ?
152. **Er9** : ouais, ouais.
153. **E12** : moi, j'accepte ton truc, si  $y$  il est  $x^2$ .  $y'$  égal à...
154. **Er9** :  $y$  a pas de  $x^2$ . C'est ou  $y'=x$  ou  $y'=y$  ou  $y'=y-x$ . ça, c'est  $y'=y$ . (*Ici il fait allusion  
à l'activité suivante*) Ce qu'on a vu l'autre jour.
155. **E12** : *hii (il confirme)* Mais attend, ça ça serait  $y'=x$  ? [...] Mais si ça, c'est  $y'=x$ , alors  
ça c'est juste.
156. **Er9** : ouais, c'est ça que je t'ai dit. [...]
157. **E12** : vas-y, marque ton truc, parce que moi...
158. **Er9** : non, j'sais pas pourquoi, mais je pense que c'est...
159. **E12** : marque la dérivée... Vu que la dérivée est toujours positive, donc c'est bien...  
moi je dis qu'elle est solution de l'équation  $y'=x$ , car, voilà... machin égal  $x$ , c'est  
toujours croissant, non ? Qu'est-ce tu en penses ?
160. **Er9** : moi je dirais... Ah oui d'accord. Je vois... je vois ton raisonnement. Toi tu dis  
qu'elle est toujours positive, donc tu traites pas la fonction  $y=x$  ?
161. **E12** : voilà. [...] Mais t'es pas si fort, ha...

162. **Er9** : je trouve très fort ce qu'on a marqué là, toi tu trouves pas ? (*nous pensons qu'ils parlent de leur noms, car ils ont écrit n'importe quoi... « De Vos, etc. »*).
163. **E12** : je crois que c'est la dernière séance. [...] Toi, l'année dernière t'as fais ce truc ?
164. **Er9** : been !!
165. **E12** : (*il rigole*) L'année dernière t'as fais ça ?
166. **Er9** : Ouais, mais pas tout ça....
167. **E12** : et t'avais compris quoi ?
168. **Er9** : T'as une solution du style  $y$  avec  $k$ , enfin  $x$  ou j'sais pas un truc comme ça. [...] On avait fait ça en fin d'année.
169. **E12** : ouais, ouais, c'est pas important ?
170. **Er9** : j'sais pas.
171. **E12** : si je tombe sur un tel truc en bac j'aurai zéro. Je comprends rien de ce qu'on a fait.
172. **Er9** : j'sais pas
173. **E12** : je comprends pas quoi correspond à quoi en fait. [...] Hii ? Qu'est-ce que tu en sais ? C'est sur le formulaire, hii ? [...] mais c'est pas ça ? Mais si, c'est ça. C'est des équations différentielles ça ? [...] Je comprends pas ce qu'on fait en fait. Je comprends pas quoi correspond à quoi.

### *Activité AE7*

174. **Er9**: heureusement sur cette feuille y a...
175. **E12** : « *Trouver le point de tangence...* » (il lit l'énoncé)
176. **Er9** :  $y'=1$ ...  $y=x$ ... donc  $2y=x$ .
177. **E12** : donc la dérivée, c'est 1. [...] Ouais puisque  $y=x$ .
178. **Er9** : c'est ça, non ?
179. **E12** : non y a pas de prime.
180. **Er9** : ah y a pas de prime ?
181. **E12** : [...] ça fait  $y'=2x$ . Donc  $y'=1$  donc d'où  $1.2y=1$ . Donc  $y=...$
182. **Er9** : il sort d'où ton 1 ?
183. **E12** : la dérivée de  $x$ . [...]  $y=x$ , donc  $y'=1$ . Donc  $2y=1$ , non ?... ou rien à voir ? donc  $y= \frac{1}{2}$  donc  $x= \frac{1}{2}$ . Donc point de tangence  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
184. **Er9** : t'es fou hi, tu crois que je vais y arriver. [...]  $y'=2y$ ,  $y=x$ . Ce qui me donne  $y'=2x$ ...
185. **Er9** :  $y'=2x$ ...
186. **E12** : oui.
187. **Er9** : been oui, si  $y=x$  et...
188. **E12** : donc  $y=x^2$ ... dans ce cas là..
189. **Er9** : Ah oui ?

190. **E12** : non, mais non.  $y=x$ , on vient de marquer. C'est ça que je comprends.
191. **Er9** : ah oui ?
192. **E12** : si  $y$ 'est.... c'est  $2x$ , pourquoi  $y$  c'est pas  $x^2$  ?
193. **Er9** : on marque ?
194. **E12** : oui vas-y marque.
195. **Er9** : si  $y'=2x$ ...
196. **E12** :  $y$  devrait être égal à [...]  $x^2$ . [...]  $y=x$ .

**Binôme B6 : E13 et E3****Activité AE1**

1. **E13** : Alors, il faudra prendre des points et vérifier...
2. **E3** : parce que  $y'$ , c'est la dérivée ?
3. **E13** : oui. [...] on prend un point, par exemple zéro un.... Zéro un. Ça fait  $f'(1)$ ...
4. **E3** : non de zéro, parce que...
5. **E13** : oui de zéro... égal... égal deux fois un plus 1... donc ça fait  $f'(0)$ , c'est égal à 3.
6. **E3** : trois... sur la courbe ? [...]
7. **E13** : been, c'est la tangente. [...] Donc ça fait...
8. **E3** : Ah oui c'était pas le coeff directeur, là ?
9. **E13** : si c'est le coeff directeur de la tangente.
10. **E3** : il faut qu'elle augmente.
11. **E13** : elle augmente de deux ? parce que là, c'est... deux, un... trois, un... deux...
12. **E3** : trois...
13. **E13** : trois...
14. **E3** : Alors, non trois c'est là...
15. **E13** : ah oui... et oui et un, c'est là... on est trop connes. [...]
16. **E3** : ah oui.
17. **E13** : c'est pas un, c'est zéro...
18. **E3** : zéro, zéro virgule...
19. **E13** : zéro deux...
20. **E3** : c'est zéro un alors dans ce point là.
21. **E13** : non, c'est zéro deux. Parce que là, ça ferait zéro deux, zéro quatre, zéro six et puis zéro huit et là [*ah oui L'autre confirme*] un. [...] on va effacer ça alors. [...] Ca fait zéro deux.
22. **E3** : zéro virgule 2.
23. **E13** : Aie (*elle tombe le micro*)
24. **E3** : Donc, ça fait... [...] deux fois zéro virgule deux plus un... donc ça fait 1,4
25. **E13** : ouais... et là... [...] been là, c'est pas si précis pour [...] ha ? [...] Attend ! On prend zéro.... Bon [...] On prend les points sur la tangente et voir si le coefficient directeur est égal à 1.4...
26. **E3** : Ah oui... oui
27. **E13** : là, ça fait 1. [...] là ça augmente de 1.
28. **E3** : himm
29. **E13** : deux, quatre, six, ça fait...
30. **E3** : c'est zéro six.
31. **E13** : zéro six... [...]
32. **E3** : Donc là, on a un point ? [...]



33. **E13** : donc c'est... c'est...un point de la tangente, celui-là ?
34. **E3** : non, non c'est un point de la courbe.
35. **E13** : been oui... c'est un point de la tangente aussi.
36. **E3** : oui mais...
37. **E13** : le coefficient directeur de la tangente, on peut le faire là...
38. **E3** : là dedans ?
39. **E13** : oui... [...] un...
40. **E3** : zéro six ... zéro six ...
41. **E13** : prend d'autre(s) point(s)!
42. **E3** : si c'est celui-là l'autre point...
43. **E13** : ah oui c'est vrai
44. **E3** : ce sont des tangentes
45. **E13** : ah oui des tangentes.
46. **E3** : on va leur écrire.
47. **E13** : D'accord
48. **E3** : ça fait zéro six moins zéro deux... sur 1 moins zéro...
49. **E13** : zéro quatre sur un
50. **E3** : ah zéro quatre... (*elles rigolent*)
51. **E13** : et c'est pas gagné.
52. **E3** : been non. (*Elles commencent à écrire sur la feuille*) zéro quatre différent de 1.4 donc la courbe...
53. **E13** : le coefficeint...
54. **E3** : directeur par le calcul... donc c'est 1.4 le coefficient directeur par calcul... 1.4 n'est pas vérifié...
55. **E13** : par le coefficient directeur de la tangente...
56. **E3** : par le coefficient directeur de la tangente...
57. **E13** : de la tangente à la courbe en ce point...
58. **E3** : de la tangente à la courbe au point A (0 ; 0.2), donc...
59. **E13** : la courbe dessinée... ne peut pas être une courbe solution
60. **E3** : voilà... et là y en a un ?

### ***Activité AE2***

61. **E13** : « pour le champ de tangentes... » [Elle lit l'énoncé]
62. **E3** : et le point (0, -2)...
63. **E13** : alors attend ! (*elle reprend l'énoncé*). [...] Il faut suivre les hiim...
64. **E3** : t'es sûre ? [...]
65. **E13** : comment on avait fait pour raisonner ?
66. **E3** : himm

67. **E13** : là, là, là, là, ...
68. **E3** : Et là non ?
69. **E13** : oui, comment on avait raisonné ? Non, il ne fait pas comme ça ?
70. **E3** : j'sais pas ...
71. **E13** : moi, je crois ... oui ... Attend, on va refaire ... on va refaire.
72. **E3** : Attends elle doit faire comme ça
73. **E13** : t'es sûre ? Comment ça se fait ?
74. **E3** : Been comme ça non ?
75. **E13** : non, non ... elle fait pas comme ça, non.
76. **E3** : pourquoi elle fait pas comme ça ?
77. **E13** : tu sais elle part pas comme ça... parallèle à
78. **E3** : comment alors
79. **E13** : moi je pense qu'elle était comme ça, tu vois ? [...]
80. **E3** : non, elle est en continuité là, je pense... [...] ça sert à rien.
81. **E13** : moi je pense me souvenir des tangentes, elles sont comme ça [...] Donc la courbe elle va comme ça et puis après, elle devient de plus en plus droite donc elle va comme ça. (*hii L'autre confirme*) [...] Attend, on essaie de faire les autres, parce que normalement, elles devraient être...
82. **E3** : (0, -2) (*elle cite le second point donné*)
83. **E13** : (0, -2) [...] là, et puis après elle devrait faire conique [...]
84. **E3** : comme ça ?
85. **E13** : oui je pense... Et l'autre c'est... Attend là, on va déjà faire descendre jusqu'à là bas, de toute façon elle est... elle fait comme ça. (*oui, oui, L'autre confirme*) Tu vois c'est... c'est pratiquement la même. (*oui L'autre confirme*) ... et après (0, 0).
86. **E3** : on va les faire au stylo, comme ça serait mieux.
87. **E13** : mais attend, attend, on n'est pas sûres...
88. **E3** : mais si on est sûres...
89. **E13** : on n'est pas sûres...
90. **E3** : mais si on est sûres...
91. **E13** : attend... [...] Celle de (0, 0), elle aussi... on devrait la faire continuer la haut là...
92. **E3** : si tu veux, oui...
93. **E13** : on a déjà fini, tu crois pas ?
94. **E3** : (0, 0)...
95. **E13** : ah been, (0, 0), elle est... elle est horizontale, hii ? [...] Elle est horizontale...
96. **E3** : Sandra ?
97. **E13** : au zéro, elle est horizontale...
98. **E3** : au zéro ?

99. **E13** : t'es d'accord, non ?
100. **E3** : been oui, je pense, oui...
101. **E13** : parce qu'on va pas la faire par... Parce que tu ne peux pas la faire partir ni vers le haut ni vers le bas elle est horizontale...
102. **E3** : maintenant il faut faire commentaires
103. **E13** : commentaire ? [*elles rigolent*] [...] Attend, moi je fais les courbes, toi tu fais les commentaires... [...]
104. **E3** : oui mais ce qu'il y a... on est vraiment pas sûres que ça soit ça...
105. **E13** : ah non, vraiment pas, non...
106. **E3** : je me souviens plus comment on avait fait... [...]
107. **E13** : on avait pris une feuille, on avait écrit... [...] en cours...  
(*Nous annonçons qu'il faut passer à la seconde question, et qu'il reste cinq minutes.*)
108. **E13** : comment ça se fait, nous, on a fait déjà...
109. **E3** : j'sais pas
110. **E13** : « *par un point, il passe une et une seule courbe représentative de l'équation différentielle* » himm, himm [...]
111. **E3** : le champ de tangentes, « *à chaque point il est possible d'associer une tangente grâce à une équation différentielle* ». Sauf que là on n'a pas la même équation différentielle...
112. **E13** : si c'est la même, c'est celle-là... (*elle sous-entend certainement  $y'=2y$* )
113. **E3** : ah, c'est celle-là ?
114. **E13** : oui, je pense...
115. **E3** : been j'sais pas en fait...
116. **E13** : ah oui... [...] Mais moi je ressens qu'elles sont symétriques, ha... [...]
117. **E3** : Tu vois pas qu'elles sont un petit peu les mêmes ?
118. **E13** : ahh (*Elle tousse*)
119. **E3** : A l'inverse ?
120. **E13** : c'est normal parce que c'est (0, -2) et là (-2, 0).
121. **E3** : been, ça veut dire que... y a...
122. **E13** : en zéro en plus... en zéro je crois, ah non.
123. **E3** : c'est vrai qu'il y a une symétrie...
124. **E13** : par l'axe des abscisses (*elle n'écoute pas l'autre et continue sa réflexion*) ... regarde, là... là, regarde, là... là...
125. **E3** : Tu dis ?
126. **E13** : là, celle-là c'est pas symétrique à elle. [*Oui L'autre confirme*] [...] Et après, on mettra ça en commentaire après... après que t'as fini ton...

127. **E3** : il passe une seule courbe (*elle répète qu'elle a écrit sur la feuille*) il semblerait...[...] que le champs des tangentes non... que les différentes courbes observables sur le champ de tangentes...
128. **E13** : non on peut dire c'est... c'est par rapport à ces deux points là... Il semblerait que les courbes...
129. **E3** : que les courbes solutions passant par les points (-2, 0) ...
130. **E13** : been voilà, oui... Par rapport à quoi ?
131. **E3** : tu crois que c'est par rapport à l'origine ?
132. **E13** : je ne sais pas. Been je pense.
133. **E3** : parce que j'hésite moi.
134. **E13** : ah non c'est peut-être... mais non, c'est une droite conique qui est n'importe comment. [...] S'ils étaient symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ça serait comme l'autre. ...Je suis bête. ... Par rapport à... elle sera plus, enfin...
135. **E3** : mais moi je parlais... parlais pas...
136. **E13** : elle sera... oui c'est symétrique par rapport...
137. **E3** : zéro
138. **E13** : par rapport... [...] à l'origine.  
(*Entre temps, le professeur annonce qu'on va ramasser les exercices.*)

### **Activité AE3**

139. **E13** : c'est laquelle qu'il faut faire ?
140. **E3** : hii ?
141. **E13** : c'est laquelle qu'il faut faire d'abord ?
142. **E3** : mais y a pas d'ordre, hà... mais si, si...
143. **E13** : il a écrit la question 1 etc. [...]
144. **E3** : alors « *dites pourquoi* » (*elle en train de lire l'énoncé*)
145. **E13** : comment ?
146. **E3** : « *dites pourquoi* »
147. **E13** : « *la droite ...* » (*E13 interrompt l'autre et continue à lire*). [...] D'abord déjà on va faire deux petites vérifications habituelles.
148. **E3** : c'est-à-dire ?
149. **E13** : donc si y... [...]
150. **E3** : c'est équivalent ...
151. **E13** : hii (*elle confirme*) mais y' égal  $4x^2$
152. **E3** : d'abord tu fais y' est égal au  $(2x)^2$ .
153. **E13** : y' est égal au  $(2x)^2$ . ... Ooo (*elle prononce un son spécial du genre, « ça va pas »*).
154. **E3** : Et alors quoi ?

155. **E13** : or c'est pas ça. Le primitif de  $-2x$
156. **E3** : la dérivée de  $-2x$ .
157. **E13** : ah oui la dérivée de...  $-2x$  est  $-2$ . [...] (*elle est en train de dicter*) Or y' devrait être égal à ... tu dis quoi ?
158. **E3** : 2 ...  $-2$ .
159. **E13** :  $-2$ . [...] Elle peut pas être tangente. [...] Ah il faudrait que la courbe ait cette forme là, mais non ...
160. **E3** : ah oui mais là ... ah oui parce que là ... mais non là, je crois que on doit bien suivre une autre piste. Parce que là, c'est tangente ... à la courbe ... (*hii L'autre essaie de comprendre ensuite confirme*) c'est pas qu'elle vérifie l'équation différentielle ...
161. **E13** : ouais, ouais.
162. **E3** : ensuite alors, on recommence ... comme il faut ... « dites pourquoi » (*elle en train de relire l'énoncé*)
163. **E13** : on va prendre un peu au hasard.
164. **E3** : mais non qui vérifie ça. ... [...] Mais de toutes façons, on peut pas...
165. **E13** : alors il faut que cette droite là... elle soit tangente... (*elle s'arrête pour réfléchir*)
166. **E3** : been pourtant y, y, y... moi j'sais pas, ha... [...]
167. **E13** : en fait y, ça fait ça... mais ça on s'en fous en fait ça... on s'en fous... (*elle soupire*)  
(*elles rigolent*) ...
168. **E3** : ... « dites pourquoi... » (*elle relit l'énoncé*)
169. **E13** : on va faire avec un point piff, ha... [...]
170. **E3** : been non attend [...]
171. **E13** : soit un point qui vérifie... ça... la droite... [...] pour un point... (*elle réfléchit à voix haute*) [...]
172. **E3** : Mais non, faut qu'on reparte comme on l'a fait tout à l'heure.
173. **E13** : oui justement comme ça on va voir avec le coeffi directeur si ça colle avec ça.
174. **E3** : d'accord, vas-y.
175. **E13** : il faut prendre un peu au hasard. Parce que si on prend x, y on n'y arrivera pas.
176. **E3** : oui mais comment tu sais qu'il est sur la courbe ?
177. **E13** : been oui been forcément... Pour un point A vérifiant l'équation  $y=-2x$ ... A...
178. **E3** : non il faudrait peut-être commencer par ce... le point vérifiant ça.
179. **E13** : et après on prendra un point qui est là-dedans...  
[...]
180. **E13** : On prend un point au hasard qui est sur une courbe solution...

181. **E3** : ah mais si on prend une... une courbe de la droite ?  $x$  égal à [...] c'est-à-dire que la tangente... c'est-à-dire que la tangente ... c'est-à-dire qu'elle est pas tangente à la courbe.
182. **E13** : been si. Ca veut rien dire. Il faut qu'on calcule son coefficient directeur ... à cette tangente.
183. **E3** : oui.
184. **E13** : mais il faut qu'on calcule son coefficient directeur non ?
185. **E3** : Mais non, non... Son coefficient directeur, c'est -2.
186. **E13** : ah oui.
187. **E3** : on est trop nulles.
188. **E13** : ah ouais grave
189. **E3** : « *le coefficient directeur de la droite est -2* » (elle répète ce qu'elles ont marqué sur la feuille). [...] Pour qu'elle soit tangente à la courbe il faut qu'il y ait un point qui vérifie que  $y'$  est égale à -2.
190. **E13** : attend, attend, attend, attend... attend... « *le coefficient directeur de la droite est -2* » (elle répète ce qu'elles ont marqué sur la feuille).
191. **E3** : Pour qu'elle soit tangente à la courbe ...
192. **E13** : attend, je vais mettre là, parce que ça me pique le doigt.
193. **E3** : il faut que  $y'$  soit égal à -2 [...] Donc il faut trouver un point qui vérifie ça.
194. **E13** : been si  $y'=-2$ , ça vérifie...
195. **E3** : been oui ...
196. **E13** : il faut donc trouver un point qui vérifie  $y'$  égal à ... Il faut trouver un point qui vérifie ça. [...]
197. **E3** :  $y'=-2$ . Et après on va faire  $y'=y^2/2$ . [...] C'est impossible que ça soit un jour négatif, parce que c'est un carré. [...] Donc ça peut être arrivé à -2.
198. **E13** : parce que là qu'est-ce qu'on nous demande, c'est ça ?
199. **E3** : [...] attend, attend. [...] Ah, remarque... fais  $y... y^2/2=-2$ . [...] voilà... -4, c'est impossible. Parce qu'un carré... c'est négatif... négatif...
200. **E13** : Donc, il existe pas de hiii...
201. **E3** : attend, attend, attend...il faut mettre ça alors. [...]
202. **E13** : cela est impossible. [...] Donc... la droite  $y=-2x$  (elle fait dicter) ... je répète ce je dis. (Elles rigolent)... donc la droite  $y=-2x$  ne peut être... être tangente... à aucune courbe solution de l'équation différentielle.
203. **E3** : ...à aucune courbe solution de l'équation différentielle. [...] Voilà...

#### **Activité AE4**

204. **E13** : « *pour l'équation différentielle  $y'=f(y)$ , le graphe de  $f$  est donné comme ci-dessus.* » (Elle est en train de lire l'énoncé.)

205. **E3** : alors de  $f$  ?
206. **E13** : hmm [*L'autre confirme*]  $f(y)$ , oui. [...] « à l'aide de ce graphe, étudier... » (*Elle continue à lire l'énoncé.*) [...]
207. **E3** : been, il faut attendre.
208. **E13** : « *Que peut-on dire des variations...* » (*Elle continue à lire l'énoncé.*)
209. **E3** : ah, attend, attend, attend... oh la, attend... [...] alors attend...
210. **E13** : le graphe de  $f$  est donné ci-dessous... [...] been elle est croissante.
211. **E3** : been c'est une fonction affine, c'est  $y=x$ . [...] non c'est pas  $y=x$ .
212. **E13** : non, même t'as pas besoin de trouver... parce que regarde [...] ça c'est la dérivée...
213. **E3** : ah non...
214. **E13** : à l'aide de ce graphe... [...] étudier, ils disent, mais on va étudier, c'est... croissante.
215. **E3** : mais non [...] t'es pas sûre.
216. **E13** : mais si, elle peut pas être décroissante. ... la dérivée, elle est égale à  $f(y)$  (*hii L'autre confirme*) Tu sais pas  $y$ .
217. **E3** : ha, oui, oui... oui
218. **E13** : c'est ça le problème. [...] Et là, c'est quoi qu'on a ? ... C'est le graphe de  $f$ . [...] donc là,  $y$  c'est  $x$  ? [...] Les variations de  $y$ ... donc  $y$ , elle augmente...
219. **E3** : la courbe...  $f(y)$  est strictement croissante (*elle répète en dictant en fait*).
220. **E13** :  $y$  là, il est sur l'axe des abscisses en fait...
221. **E3** : comment tu sais ?
222. **E13** : been  $f(y)$ . Quand tu as  $f(x)$  ...  $x$  c'est les abscisses et quand t'as  $f(y)$  ...
223. **E3** : ah oui...
224. **E13** : en fait là ici...  $y'$  c'est là ... et  $y$ ... c'est là. (*Lorsqu'on regarde le dessin, les variables sont correctement installées.*)
225. **E3** : la courbe...  $f(y)$  est strictement croissante (*elle répète ce qu'elles ont marqué*).
226. **E13** :  $y$  ... mets-le ...  $y$  correspond à  $x$  ...
227. **E3** : à  $x$  ? Non, non, non on peut pas dire ça ... il faut dire... il faut juste dire que  $y$  donc augmente quoi ...
228. **E13** : tu crois ?
229. **E3** : on va pas dire... que c'est  $y$  qui correspond à l'axe des abscisses ?
230. **E13** : ah been ça, on est censé le savoir ... Enfin on va pas le dire, quoi ...
231. **E3** : ah bon ... Been si tu veux ...
232. **E13** : donc  $y$  ...
233. **E3** : est croissante ...
234. **E13** : augmente ... parce que c'est la courbe qui est croissante ...  $y$  ...
235. **E3** : et tu dis les variations de  $x$  ...

236. **E13** : donc si la courbe est croissante ... donc  $y$ ... croît... (*Elle répète en dictant*).
237. **E3** : voilà. « *Que peut-on dire des variations...* » (*Elle lit la suite de l'énoncé*). [...] Il est où...
238. **E13** : attends il faut qu'on la trace la courbe, Claire...
239. **E3** : elle est là. (elle trace une courbe exponentielle) c'est l'exponentielle...
240. **E13** : non, been moi je crois j'ai une idée. [...] je crois j'ai une idée Claire ... je crois j'ai une idée...
241. **E3** : mais c'est l'exponentielle, j'ai vu dans le livre...
242. **E13** : t'as (0,1)... (hii L'autre confirme) tu place sur  $f(y)$ ... ça te donne le point qui est sur  $f(y)$  ... Et après ça te donne  $y'$ . [...]
243. **E3** :  $y'$ , c'est 1 ?
244. **E13** : been non.
245. **E3** : been si.
246. **E13** : parce que  $y'$  est égal à  $f(y)$ .
247. **E3** : ah c'est vrai. Je suis bête. ... Attends, attends, Attends, attends... [...] la fonction... [...]
248. **E13** : écris n'importe quoi parce que on a plus de temps...
249. **E3** : ... passant par (0, 1) pourrait être (*en fait elle est en train de dicter*).
250. **E13** : écris n'importe quoi, ha ?
251. **E3** : exponentielle de  $x$ . ...
252. **E13** : elle est croissante.
253. **E3** : qui est strictement ...
254. **E13** : ah non, elle est ... ouais ...
255. **E3** : qui est strictement croissante.
256. **E13** : attends c'est quoi la question en fait ? (*elle relie la suite de l'énoncé*) « *Que peut-on dire des variations...* » [...]
257. **E3** : been voilà.
- (*On annonce qu'on va ramasser.*)

### *Activité AE5*

258. **E13** : c'est laquelle qu'il faut faire d'abord ?
259. **E3** : c'est celle que tu as dans la main. (*Elles rigolent*)
260. **E13** : « *La courbe ci-contre ...* » (*Elle est en train de lire l'énoncé*).
261. **E3** : bon on va faire comme tout à l'heure on a fait.
262. **E13** : himm
263. **E3** : been on va choisir un point been ... je ne sais pas quel point il faut choisir
264. **E13** : zéro.
265. **E3** : c'est zéro, (0, 0)... (*elles rigolent*).



266. **E13** : been attend c'est quoi la question là ? (*elle relie l'énoncé*). Alors si on prend un point  $(0, 0)$  donc ... on dit souvent sur un point  $(0, 0)$ ; zéro ?
267. **E3** : non sur un point A.
268. **E13** : ouais, ouais sur le point [...] mais si on prend zéro, on y arrivera jamais. Mais de toutes façons on peut pas prendre autre chose.
269. **E3** :  $y'$  est égal à  $x$ .  $y'$  égal à zéro.
270. **E13** :  $x$  égal à ...
271. **E13** : on prend deux points ... de cette tangente ... la tangente elle est là. C'est l'axe des abscisses et c'est forcément zéro.
272. **E3** : donc elle est solution ? ... Non elle est pas solution.
273. **E13** : ça c'est  $y$  égal ... ça c'est  $x$  ...  $x^2$ . [...] le point A  $(0 ; 0)$  ... Been sinon on prendra un autre point que  $(0 ; 0)$  ... au lieu de  $(0 ; 0)$  on prendra  $(0 ; 0.1)$
274. **E3** : been c'est parce que c'est pas précis... voilà c'est pas terrible quoi. [...] ça doit être  $x^2$  de toutes façons, ha. (*elle murmure*)
275. **E13** : been non, chez moi en carré ça fait 1. [...] C'est pas  $x^2$ , ha...
276. **E3** : ah been, moi je comprend pas. ... ah oui, oui,
277. **E13** : ça fait 2,4.
278. **E3** : alors on va prendre sur le point A...  $(1 ; 2.4)$  [...]  $y'$  est égale à [...]  $y'$  est égal à 1. Parce que c'est  $y'=x$ . Ensuite on pouvait... ihh la tangente en ce point ... ça s'écrit comment, comme ça ? (Je pense qu'elle montre la relation qu'elle a écrite). [...] On prend celui-là qui passe par zéro là (*hii L'autre confirme*) [...] (elle est train de dicter) de... la... tangente... [...] on prend en A... comment il s'appelle ce qu'on écrit ? zéro...
279. **E13** : le quoi ? Ah...
280. **E3** : himmm... [...]
281. **E13** : 0,5...
282. **E3** : 0,5, je crois t'as raison... en  $B(0,5 ; 0)$ . Ensuite... on fait, non... on calcule... le...
283. **E13** : qu'est-ce qu'on calcule ? (*En rigolant*)
284. **E3** : been, c'est bon ha (*Elles rigolent*) (*Elle répète des propos inaudibles en dictant*) ... ça fait...
285. **E13** : on va commencer à regarder celle-là.
286. **E3** : (*elle continue à répéter le calcul sur papier*)
287. **E13** : je crois qu'on a... celui-là, on en trouve jamais qu'une seule solution.
288. **E3** : peut-elle être solution, il demande...
289. **E13** : je sais mais c'est bizarre on trouve toujours [...]
290. **E3** : non, mais la dernière fois, c'était « montrer qu'elle ne l'est pas » [...]
291. **E13** : oui mais justement, c'est bizarre [...]
292. **E3** : pourquoi c'est pas bon ? [...]
293. **E13** : ça doit être égal à 1. [...]

294. **E3** : Mais si elle doit être solution normalement Sandra. [...]
295. **E13** : tu fais comique...
296. **E3** : mais non peut-être pas ha....
297. **E13** : mais non regarde. Celle qui passe par zéro, elle est plus comme ça (*hii L'autre confirme*)
298. **E3** : oui t'as raison... [...] Ah mais non [...]
299. **E13** : elle est où la gomme ? [...]
300. **E3** : elle est là.
301. **E13** : c'est un isocline, celui-là.
302. **E3** : le quoi ? [...] (*nous pensons qu'elle la lui montre*) ouais.
303. **E13** : un isocline ?
304. **E3** : isocline, c'est une droite...
305. **E13** : tu crois ? Je m'en souviens plus ce qu'était...
306. **E3** : si c'est là...
307. **E13** : Ah oui. C'est la droite... (*elles fouillent dans leurs anciennes notes*).
308. **E3** : c'est la droit himm... [...] Alors moi, je vais mettre mes idées la dessus et toi tu me diras ce que t'en penses...

### **Activité AE6**

309. **E13** : alors attends, attends... (*elle lit l'énoncé de l'activité suivante, sans se soucier de ce qu'elle vient de dire l'autre*) [...] « Attention l'une de ces équations... » Ah...je ne sais pas, ça c'est  $y' \text{ égal à } x$ .
310. **E3** : oui... [...]
311. **E13** : himmm,  $y' \text{ égal à } y$ .
312. **E3** : himm, moi aussi ce que je pensais, oui.
313. **E13** : moi je mets comme [...] been non [...]
314. **E3** : been c'était faux.
315. **E13** : il faut justifier ha [...]
316. **E3** : il nous demande de justifier
317. **E13** : oui, mais moi j'sais pas justifier, moi
318. **E3** : been déjà regarde, quand tu les traces...[...] déjà je pense que tu dois avoir des trucs... [...]
319. **E13** : alors attends... « Associer à chacun ... » [...]
320. **E3** : attend ça, c'était  $y'=y$  ça veut dire que le coefficient directeur de la courbe tangente en un point, il est égal à son ordonnée.
321. **E13** : him (*elle confirme*)
322. **E3** : je pense qu'on va pouvoir démerder avec ça.
323. **E13** : hii, hii (*elle confirme*)

324. **E3** : attend, je vais écrire ça...hiimm himm (*elle lit rapidement quelque chose*)  
correspond au champ de tangentes [...]
325. **E13** : y a un s ... [...]
326. **E3** : après là, tu peux mettre par exemple que ... le coefficient directeur en un point  
correspond à son abscisse ... [...] (*elle fait dicter*) le coefficient directeur de la tangente  
... de la tangente ... de la tangente...
327. **E13** : en un point ...
328. **E3** : correspond à son abscisse ...
329. **E13** : encore un dernier ? [...] Pourquoi de la tangente ? [...] ...de la courbe ?
330. **E3** : parce que  $y'$  correspond au coefficient directeur de la tangente ... en un point.
331. **E13** : c'est pas le coefficient directeur d'une courbe ?
332. **E3** : non. [...] ça n'existe pas le coefficient directeur d'une courbe.
333. **E13** : ah been si. [...] si [...]
334. **E3** : ah been si je suis conne. ... Non mais c'est de la tangente, parce que c'est la  
dérivée qui correspond au coefficient directeur de la tangente.
335. **E13** : et là je vais mettre égal à son ordonnée (*elle parle pour  $y'=y$* ).
336. **E3** : ouais.
337. **E13** : elle correspond... [...]

(*Nous ramassons les feuilles*)

N'importe quoi ...

### **Activité AE7**

338. **E3** : « pour l'équation... » (*Elle lit l'énoncé*). Sur une droite, ils admettent...
339. **E13** : ah oui en fait quand t'as une droite  $y=2$ , en un point la tangente... son coeff  
directeur est de 6. [...] non ? Et moi je pense que c'est le coefficient directeur.  
mais...quel est le coefficient directeur ? [...]
340. **E3** : Ah non, c'est le coefficient directeur de  $y$  qu'on veut ...
341. **E13** : been si c'est ça, 6.
342. **E3** : c'est «  $a$  » qu'on cherche là ...
343. **E13** : hiimm, himm (*elle confirme*)
344. **E3** : c'est ça ? [...] « ... de pente 6. » (*elle relie l'énoncé*)
345. **E13** : ça veut dire que  $y'$  égal à ...
346. **E3** : 6
347. **E13** : et  $2a$  égal à 6. Donc ...
348. **E3** : pourquoi  $2a$  ?
349. **E13** : parce qu'ils disent  $y=2$  je remplace de  $2a$ , non c'est pas ça ? [...] Donc  $a$  égal 3.

(*Elles rigolent*)

351. **E13** : c'est qu'on avait fait en plus.
352. **E3** : c'est bizarre, moi je trouve ...
353. **E13** : ça faisait trois ... oh là, là, là, c'est bizarre, moi je suis d'accord avec toi.
354. **E13** : (*en s'adressant à quelqu'un d'autre*) les courbes, elles sont quoi ? (*On lui répond, elle comprend pas, d'ailleurs c'est incompréhensible*) Elles sont quoi ? (*incompréhensible*)
355. **E13** : ça veut dire que la droite elle coupe la courbe. [...] himm, himm... Himm, himm Ah d'accord. Been oui, on a compris, la courbe était comme ça, et la tangente, elle fait 6.
356. **E3** : been si ça nous donne le coefficient directeur de la tangente. Moi je suis désolée, c'est 6.
357. **E13** : ah oui, c'est ce que je pensais aussi.
358. **E3** : attend, on va ... on va reprendre ça ... Donc ... [...]  $y'$ , c'est égal à 6. Donc ça fait  $ay$  est égal à 6. Donc  $a$  est égal à 6 sur  $y$ . Mais est-ce que t'es sûre que 2, c'est un point de  $y$ , enfin c'est  $y$  ?
359. **E13** : been là, ils nous disent sur la droite  $y=2$ , donc ça veut dire que là, notre  $y$ , il est 2. [...] Dans ce cas, ici  $y$  égal 2.
360. **E3** : been ça fait un des points de la courbe, ha ...enfin de  $y$  ... [...]
361. **E13** : mais  $a$  c'est pas le coefficient directeur,  $a$ .
362. **E3** : been si ...
363. **E13** : non le coefficient directeur, c'est 6.
364. **E3** : Ah oui le coefficient directeur ...

*Nous les remercions et le cours se termine.*



**Binôme B7 : E10 et E18****Activité AE1**

1. **E10** : tu veux commencer la première ?
2. **E18** : ben, oui...Mais c'est ton exercice, moi je fais le mien
3. **E10** : ben, c'est pas comme ça...
4. **E18** : vas-y, c'est quoi ton problème ? (*Il lit l'énoncée*) « La courbe dessinée ci-.... »
5. **E10** : (*elle l'interpelle*) On commence par ça...
6. **E18** :  $y'=2y+1$
7. **E10** : isocline !!
8. **E18** : Bon, c'est le coefficient directeur
9. **E10** : coefficient directeur ?
10. **E18** : sinon, tu fais euh... Mais on te dit que...ça tu essaye de trouver...essaye de trouver une fonction qui vérifie ça. Après tu vas dire...si c'est bon. Parce que ça...ça fait  $y'-2y-1=0$ . Après tu...
11. **E10** : ben c'est quoi ce truc ?
12. **E18** : Ben, ça c'est un truc exponentielle...
13. **E10** : je pensais les isoclines c'est y égale comme ça et après toutes les tangentes sont...sont parallèles...Ben oui. Voilà, c'est ça. Il faut déterminer les points auxquels elles passent...Après on calcule les coefficients pour voir si ...si ça marche.
14. **E18** : Et, il faut le faire comment ?
15. **E10** : Regarde !... Là, ils nous disaient enfin calculer les tangentes en ces points (*il me semble qu'elle montre l'activité-2*) (*mmm... mmm... L'autre confirme*) Ce qu'on fait c'est déterminer les points, on calcule les tangentes...
16. **E18** : Mais attend ! fais voir ! ...aux points 3..-1 ...Ben allons on se dit euh...
17. **E10** : Le coefficient directeur ou ? Hein ?
18. **E18** : Ben oui... le coefficient directeur...coefficient directeur des tangentes...Ben voilà, exact. Tu prends  $y=$  par exemple, oui on va voir avec ça, ça fait, la, si on prend 2 ah non 1. si on prend  $y=1$ ...
19. **E10** : Ca te fait 0.52, hein ?
20. **E18** :  $y' = \dots$  égal... $2+1$ , ça fait égal 3. Après il faut voir, regarde ! Tu traces...met au point 1.
21. **E10** : deux, Yann...
22. **E18** : Mais parce que c'est l'équation.
23. **E10** : Oui c'est deux fois 0.2. Ah...Mais tu prends au point 1.
24. **E18** : Ben oui...ça fait là...Et le truc qui fait 3. Donc si j'avance. Ah mais non on peut pas s'y retrouver.
25. **E10** : (...) (*elle essaye de dire quelque chose, mais Yann ne l'écoute pas*).
26. **E18** : Donc si j'avance de ( 2) Mais je m'en fous.
27. **E10** : Regarde ça fait un triangle.

28. **E18** : Toi tu m'emmerde...Là ça me fait 1, 2, 3. C'est des centimètres ou quoi ? Oui. Trois centimètres...1...2...3. Celui-là...
29. **E10** : Ca a l'air vachement intéressant.
30. **E18** : Et après... Tac.
31. **E10** : t'es sûr que c'est comme ça ?
32. **E18** : Tac...Ouais, c'est bon ça fait une tangente...Ben, oui, Si...Parce que c'est...C'est dans ce point que ça fait tangente. Si tu veux qu'on en calcule pour un autre. Si on fait pour 0.5 par exemple. Ca fait  $y' = [l'autre : I]$ . Ca fait un et deux. Attends. Faut marquer les points pour s'y retrouver. Ca fait donc combien... 0...0.5 et là c'était 0.1... (*Il tousse*) ça fait 2. Alors en 0.5, faut que je le remette... là...j'avance... (*l'autre : Non*)...Oh là là...
33. **E10** : Encore des bons, mais...
34. **E18** : mais je me trompe...je me trompe jamais. Et là, j'avance de deux...un deux... ça fait là et là...là...
35. **E10** : Pourquoi tu n'as pas avancé de 1, alors ?
36. **E18** : Parce que j'ai commencé à partir d'ici.
37. **E10** : faut avancer de deux tu étais au zéro.
38. **E18** : Mais, non j'étais pas au zéro. J'étais là...
39. **E10** : Oui.
40. **E18** : T'es 0.9 hein ? Donc je vais aller à 1.9. Je dois avancer de 1.
41. **E10** : Et pourquoi tu avances de 1 ?
42. **E18** : Parce que c'est la définition des coefficients directeurs. Ah là...Ah là je sais plus que je faisais là ?
43. **E10** : himm
44. **E18** : Oh...je parlais de là...je parlais voilà...je parlais de 0.5...je suis là...Tac j'avance de...Et mais attends ! Ca fait pas 1.
45. **E10** : Mais non, ça va faire 0.9.
46. **E18** : Merde ! Attends ! je suis planté dessus...Non c'était une bonne idée...Alors là, je suis au machin, j'avance de 1. Tac...1 je me trouve ici et j'augmente de 3. Qu'est-ce qu'on fait ici ? ...Tac...Voilà...
47. **E10** : Après c'est normal qu'elle soit tangente à la courbe, tu l'as pris de toute façon égale à trois.
48. **E18** : Ben oui, je pars hein...t'es bien d'accord que je pars d'ici ? Tu vois je prends un truc là-dedans...
49. **E10** : si tu relit des points à la tangente, elle sera forcément tangente.
50. **E18** : been non regarde ! Si jamais...si jamais je fais 1...et imagine je... j'ai trouvé 4 par exemple je me trouve là et je fais comme ça, ça serait pas tangent.... [...] Bon après si je fais 2 donc 0.5 tac...j'avance de 1...
51. **E10** : Non

52. **E18** : (*il réfléchit et murmure*) j'avance de 1, je me trouve ici... tac et je monte de deux. [...] ça me fait là....
53. **E10** : c'est pas très tangent moi je trouve hein ? Parce que normalement, la tangente, elle devrait être comme ça.
54. **E18** : Ouais, elle devrait être comme ça.... Ouais, ça, c'est pas possible... dès fois il faudrait trouver une autre méthode.
55. **E10** : on calcule l'angle
56. **E18** : ah been regarde...si y'....euh...  $2+1$ , oh là ça me fait, c'est par exemple exponentielle de...de  $2x$ .
57. **E10** : il faut regarder hein quand même ces deux 1, ça ne dépendait pas de  $x$ .
58. **E18** : hi ? Mais non oh là là. [...] T'es d'accord ? Regarde ! Si tu as  $y=x$  coefficient directeur c'est 1... t'es d'accord ? [*Ouais*] Been alors tu avances de 1 et tu remonte de 1 ; c'est le coefficient directeur, voilà... Alors si tu prends ça.....ça me fait  $2x$  plus [...]
59. **E10** : Tu fais ton truc tout seul ou quoi ? ben alors moi je suis d'accord. [*Been tiens !*] Been oui, moi j'ai dis que c'est une solution [...]
60. **E18** : been... c'est pas normal de dire ça...
61. **E10** : mais on peut essayer d'autres points aussi avec des pentes.....
62. **E18** : been j'ai essayé d'autres points
63. **E10** : prend le 0.2 [...] ça fait combien 2 fois 0.2.
64. **E18** : ça fait 0.4, hein ?  
[...]

*(nous annonçons qu'il fallait passer à la deuxième question)...*

65. **E18** : Alors on va passer à la deuxième....
66. **E10** : non ça va... Hein Yann.
67. **E18** : been c'est bon c'est une solution. [...](*il est en train de lire l'énoncé de la seconde activité*) Alors -2, 0 euh.... Je peux passer par là
68. **E10** : (*elle murmure*), mais c'est pas bon regarde.... C'est pas bon.... [...] Eh Yann ! [*L'autre : hii*]... Elle est pas bonne la solution regarde! En 0.2, elle la coupe la droite, parce que j'avais oublié de rajouter le 1... Donc elle est pas une solution. [...]

### **Activité AE2**

69. **E18** : (*Il murmure*)
70. **E10** : Il faut qu'elles passent toutes par ces trois points. (c'est à la fois une question à Yann et une affirmation, c'est-à-dire qu'elle n'est pas sûre)
71. **E18** : tracer les courbes (il rappelle l'énoncé)...Tu vois...
72. **E10** : Passant par le point 2, ... il faut qu'elles passent toutes par les trois points... Passant par le point le et le, les points alors.... par ces trois points...
73. **E18** : Ouais



74. **E10** : himm
75. **E18** : on te dit que c'est pas isocline, parce que le coefficient directeur y correspond pas
76. **E10** : ça veut rien dire...
77. **E18** : on réfléchit bien ...
78. **E10** : je vois rien ça veut rien dire.
79. **E18** : C'est pas possible...
80. **E10** : ???
81. **E18** : mais attend ! Essaie de regarder ! tu peux pas revenir c'est plus une fonction. Si tu regardes [...]

*(Le professeur annonce qu'on va ramasser cet exercice... Certains élèves s'y opposent)*

82. **E18** : parce que tu veux le faire, ce que tu veux.
83. **E10** : arrête, j'ai pas dis hein... J'ai dit que je voulais vérifier trois ensembles. Non à mon avis, c'est pas possible hein. C'est bien hein de travailler ensemble, mais chacun pour son bien. Eh Yann, comment je fais moi pour comprendre ton truc après ?

*(Pendant presque sept minutes, il n'y a que ces deux trois phrases.)*

84. **Nous-même** : *(nous intervenons pour demander si)* : vous travaillez pas en binômes ?
85. **E10** : been apparemment, oui.
86. **E18** : been elle essaie de faire...
87. **Nous-même** : il faut que vous discutiez entre vous hein ?
88. **E18** : been oui...
89. **E10** : lui, il veut pas.
90. **Nous-même** : vous voulez pas ???
91. **E18** : c'est pas parce que je veux pas, mais...

*(De temps en temps, ils continuent à se disputer mais très peu. Pratiquement rien à noter.)*

#### **Activité AE4**

92. **E10** :  $f(y)$  c'est  $2x$ .
93. **E18** :  $f(y)$  ? been non. (l'autre: *been si*)  $f(y)$ , elle est croissante.
94. **E10** : non,  $y'=f(y)$  ça veut dire que si  $f(\dots)$  égale à  $f(y)$ ...
95. **E18** : Ca veut dire que  $y$  est positive. Mais ça veut dire euh...
96. **E10** : égale
97. **E18** : Non, ça veut dire que  $y$  devrait être croissante de zéro à truc et décroissante de...
98. **E10** : tu veux dire que c'est ça  $f(y)$ . Been ça veut dire que puisque euh... Ton  $y'$  est...est croissante.[...] et  $y$  est [...]

99. **E18** : ouais, ça fait sur  $[0, +\infty[$ ...
100. **E10** : Tu fais pas, hi... Enfin tu fais quoi ?
101. **E18** : voilà
102. **E10** : ???
103. **E18** : been, tu vas voir là  $y'$  est positive et là négative.
104. **E10** : hiim
105. **E18** : been là, on a la dérivée... là on a la dérivée, d'accord ?  $y'=f(y)$ . Ca c'est la notation de la dérivée. [...] Donc... ça c'est la dérivée, donc après on a mmm...on a  $y$ . [L'autre : *Mais*] Regarde, si tu veux on fait un tableau, c'est...
106. **E10** : donc, c'est....
107. **E18** : been  $y'=f(y)$ . Le graphe de  $f$ , c'est la représentation de  $y'$ . (L'autre acquiesce : *hii*). Ce qui fait  $y'$ , comme ça... $x, y, 0, +\infty, -\infty, 0, 0$  (il est en train de faire le tableau de variations), après, là c'est négatif, là c'est positif. Comme ça comme ça. (L'autre : *Oui*). Voilà. « *Que peut-on dire des variations...* » (il lit le reste de l'énoncé)
108. **E10** : been non...
109. **E18** : been si, là c'est zéro. Parce que si... Ouais, là c'est zéro...
110. **E10** :  $2x^2$  impossible.
111. **E18** : ah ouais... la dérivée, regarde  $y'$ ... le coefficient directeur il vaut 2. Ca fait  $2x$ ... voilà. Et  $y$  égale, la primitif de ça, been ça fait un tiers... hop un demi... Donc ça me fait  $x^2$ .
112. **E10** : ah oui
113. **E18** : been c'est bon...Regarde décroissante, croissante.
114. **E10** : elle passe par 0 et 2 ?
115. **E18** : bien sur qu'elle passe par zéro.
116. **E10** : ???
117. **E18** : elle fait « fut fut » (*sifflement*), et voilà c'est bon. Les deux,  $+\infty, +\infty$ ...
118. **E10** : y en a peut être plusieurs... il faut peut être plus C. plus constante.
119. **E18** : mais non, celle-ci passe pas par zéro.
120. **E10** : Mais...
121. **E18** : mais tu mets plus C tu veux dire ?
122. **E10** : Plus C, ha... Regarde si tu fais, euh...  $x^2+1$ , hein, ça passera pas par l'origine. Ca passera par 1.
123. **E18** : been oui, si c'est plus zéro alors...
124. **E10** : been hi, comment ?
125. **E18** : been oui, c'est plus zéro, parce que... sinon, si jamais c'étais plus genre cinq, tu te retrouve là.. et... au lieu de hein...ça se comptera sur zéro, ça se compterait sur cinq.
126. **E10** : pourquoi ?

127. **E18** : been, parce que sinon... sinon ça voudra dire que...euh... si elle, elle reste là, alors que...y... il est là, been c'est presque ...c'est pas, hi... Been voilà. Que peut-on dire des courbes solutions passant par (*il relie la suite de l'énoncé... Il accentue sur (0 ; 1) en répétant*)
128. **E10** : been carré plus un... non c'est vrai  $x^2+1$ .
129. **E18** : c'est quoi « *que peut-on dire* » déjà ? [...]
130. **E10** : La courbe solution, celle qui passe par.. hi...qui est décroissante et croissante qui passe par... hi...
131. **E18** : par zéro...
132. **E10** : non pas forcément, parce qu'il passe par zéro...Ca veut dire elle est...
133. **E18** : oui c'est zéro, c'est...oui...
134. **E10** :  $x^2+1$  je t'ai dit...
135. **E18** :  $x^2+1$  ?
136. **E10** : c'est logique. Si tu mets ça... tu remplace zéro là... (*Yann est en train de murmurer*)  
Donc là, tu peux mettre
137. **E18** : oui
138. **E10** : ici, c'est zéro.
139. **E18** : oui mais, plus C. Là, ça voudra dire que c'est pas zéro, c'est C en fait.
140. **E10** : oui.
141. **E18** :  $y=x^2+1$  et donc,
142. **E10** : elle passe pas par zéro, mais....
143. **E18** : (*il est en train de corriger le tableau*) 1, infini...
144. **E10** : On rend ?
145. **E18** : Oui...

### *Activité AE5*

146. **E10** : si y est...
147. **E18** : donc ça c'est....
148. **E10** : been..
149. **E18** : hii... rien pour 1 c'est 1. Pour -1, c'est 1, pour 2 c'est... (*Il est sûrement en train de repérer des points sur la courbe donnée*)
150. **E10** : j'sais pas ?
151. **E18** : pour 2... c'est 4 ?
152. **E10** : j'sais pas
153. **E18** : comment ?
154. **E10** : si  $y'=x$ , y, il est égal à  $x^2$  sur 2. [...] been viens voir un peu. [...]
155. **E18** : regarde si je prends... si jamais
156. **E10** : himm...
157. **E18** : si jamais

158. **E10** : si  $y'=x$ ,  $y$ , il est égal à  $x^2$  sur 2. [L'autre : oui] C'est un primitif.
159. **E18** : (*il fait des calculs en murmurant*). ça veut dire... oui mais dans ce cas là [...] tu as...  
[...] Si jamais on avait  $x^2$  sur 2 si je prends 1, ça me ferait  $\frac{1}{2}$ . Et on n'a pas  $\frac{1}{2}$ , on a 1 et plus que 1 là.
160. **E10** : oui y a la constante... plus la constante, elle...
161. **E18** : non, mais la constante, elle fait... Donc là, la constante, c'est zéro.  $x^2+1$ , par exemple.  
c'est voilà
162. **E10** : (*elle siffle*) ouais
163. **E18** : been oui...
164. **E10** : la courbe...
165. **E18** : ça passe par...
166. **E10** : (*il murmure en écrivant*) la courbe ... n'est pas du type  $y=x^2/2+C$ .

### **Activité AE6**

167. **E18** : (*il est en train de lire l'énoncé*) [...]
168. **E10** : ça veut dire...
169. **E18** : oui. ça veut dire que... ça fait  $x^2$  sur 2. Et  $x^2$  sur 2,
170. **E10** : comment ça...
171. **E18** : Si on prend 1, ça soit ça fait 1 sur deux
172. **E10** : Comment ?
173. **E18** : ouais. Mais va va à 1. Toc là.
174. **E10** : himm..
175. **E18** : been presque on est sur la ligne deux,
176. **E10** : non, ça va...
177. **E18** : hii
178. **E10** : pour deux, ça fait quatre deux, ça fait deux
179. **E18** : ok!
180. **E10** : been ça va pas hi,
181. **E18** : hii ?
182. **E10** : attends fait voir. Trois ça fait... neuf sur deux.
183. **E18** : Mais c'est vrai qu'après neuf ce n'est plus logique.
184. **E10** : ah oui..
185. **E18** : là ça doit ...
186. **E10** : mais non là je crois ça va...
187. **E18** : t'es sûre ?
188. **E10** : il n'a pas dit de tracer donc à quoi elle correspond.
189. **E18** : oui... E1
190. **E10** : il faut mettre là

191. **E18** : E1... C1.
192. **E10** : oui
193. **E18** : c'est vrai. E1... C1.
194. **E10** : mmm..
195. **E18** : si  $y'=y$ , ça fait exponentielle 1.
196. **E10** : hein?
197. **E18** : c'est exponentiel de 1.
198. **E10** : comment ?
199. **E18** : si t'a  $y'=y$ , tu n'as que la fonction exponentielle ou la fonction ... y a que là la dérivée de la fonction exponentielle c'est la fonction exponentielle. [*ouais*] donc si t'as la dérivée est égale à... à la fonction, c'est... y a que ça. T'as d'autres fonctions qui vérifient ça ?
200. **E10** : non, je n'ai pas... c'est exponentielle de x égale e de x.
201. **E18** : mmm (*il confirme*)... Been non exponentielle x égal  $e^x$ .
202. **E10** : been oui  $e^x$ .
203. **E18** : oui donc là c'est  $e^x$ .
204. **E10** : mais pas forcément de x, de  $2x$ ,  $3x$ , ça serait pareil.
205. **E18** : been si jamais t'as y...  $y'=2y$
206. **E10** : Ah non ça marche plus.
207. **E18** : regarde! Si t'as  $y'=2y$ , ...  $e^{2x}$ . Parce que si tu dérive, après ça serait  $e^{2x}$  multiplié par [l'autre : *par 2*] par 2.
208. **E10** : donc ça marche pas...
209. **E18** : mais si ça marche...
210. **E10** : regards si t'as  $e^{2x}$ , tu dérive ça fait  $e^{2x}$ . Multiplié par la dérivée de  $2x$ , donc c'est 2.
211. **E18** : mais si j'ai pas ça, c'est que ça c'est la solution d'une équation  $y'=2y$ .
212. **E10** : oui c'est parce qu'il nous donne ça.
213. **E18** : mais non... Ecoute ce que je te dis.
214. **E10** : donc c'est forcément que  $2x$ .
215. **E18** : non
216. **E10** : Oui
217. **E18** : eh oui... donc on va voir si
218. **E10** : si ?
219. **E18** : donc on met quoi  $y'=y$  [L'autre : *non*] mais si.
220. **E10** : been là...been là, ça serait l'inverse...

(*Nous intervenons en demandant*)

221. **Nous-même** : elle fait le champ de tangentes cette calculatrice ?

222. **E18** : non

Alors que **E10** répond en disant

223. **E10** : je ne sais pas du tout.
224. **Nous-même** : alors qu'est-ce que vous allez calculer?
225. **E10** : on va essayer pour voir si ça correspond à...Hiii
226. **E18** : been déjà pour 0.3... et puis après...
227. **E10** : ça fait tout juste 2.5. Donc ça fait deux zéro sept. Si been c'est bon.. mais non je peux la faire...
228. **E18** : 0.6, 0.7
229. **E10** : même 0.5... non pas du tout. Been alors ça fait 0.6.
230. **E18** : on va prend 0.7
231. **E10** : been non... Si on mettait 0.5 ça faisait 0.6... ça ça fait 0.2 0.3 0.4 0.6 0.8. Donc je veux pas.
232. **E18** : been vas-y... zérooo sept.
233. **E10** : been là ça peut être... ça doit être celle-là
234. **E18** : tu es sûre ?
235. **E10** : et après on va voir, si je prends celui-là, been disons pour 4.
236. **E18** :  $y=4$  ou  $x=4$  ?
237. **E10** : non  $y=4$ .
238. **E18** : tu veux pas partir de  $x$  plutôt? Je préfère  $x$ .
239. **E10** : been  $x=1$
240. **E18** :  $x=1$ ? [...] C'est 2.7
241. **E10** : Hiimm, moi... 2.5 ça me fait combien sur 1.5?
242. **E18** : 2 virgule been ça fait trois
243. **E10** : ouais ouais...ça doit être celui là [...] tu comprends ?
244. **E18** : ouais...
245. **E10** : ça te va ?
246. **E18** : d'accord...
- (Nous intervenons en demandant si « c'est bon » pour ramasser leur feuille.)
247. **E10** : .. ouais un truc comme ça... C'est ça ?
248. **E18** : ouais...
249. **E10** : e égal à 1
250. **E18** : trois... pas de solutions.
251. **E10** : t'as des chiffres ? Essaie de trouver le  $a$ ...
252. **E18** : « Attention l'une de ces ED ne... » (Il lit l'énoncé...)
- (On ramasse les feuilles...)

### Activité AE7

253. **E18** : Il est en train de lire l'énoncé de la nouvelle activité... « *Quel est le coefficient directeur..* »

254. **E10** : been trois... a est égal trois. [...] Ca veut dire 6 égal.. ah non ça fait... ça fait.... Ah non c'est égal trois.
255. **E18** : c'est quoi alors... tu peux calculer ? [...] Quel est le coefficient de  $y$  ? (*il est en train de réfléchir*)
256. **E10** : d'accord, alors pour l'équation...
257. **E18** : been sur la droite  $y=2$ ...
258. **E10** : c'est... en fait c'est l'isocline...
259. **E18** : tu crois ?
260. **E10** : toutes les... (L'autre : *ouais*)... je vois pas si... ... (*ouais*)...
261. **E18** : c'est quoi déjà isocline ?
262. **E10** : c'est-à-dire que quand t'as une courbe... une droite  $y=a$  et après toutes les tangentes, elles sont toutes de la même inclinaison. [...] L'isocline c'est une droite. Fais voir la question, Yann...
263. **E18** : himm...
264. **E10** : sur la droite  $y=3$  ils auront des tangentes... Tu vois ce que je veux dire ?
265. **E18** : non
266. **E10** : been si tu fais  $y=...$  supposons que  $y=3$  (*hii*.. Il confirme)  $y'=a.3$  donc... parce que  $a$ , il est égal à 9 c'est un nombre, hii
267. **E18** : been là...coefficient de trois [...] alors trois est le coefficient demandé....

