



Produit tensoriel non abélien, relations entre commutateurs et homologie des groupes

Gwenaël Guérard

► To cite this version:

Gwenaël Guérard. Produit tensoriel non abélien, relations entre commutateurs et homologie des groupes. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT : . tel-00009663

HAL Id: tel-00009663

<https://theses.hal.science/tel-00009663>

Submitted on 4 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° ORDRE : 3175

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

Mention : Mathématiques et applications

PAR

Gwenaël GUÉRARD

Équipe d'accueil : Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École doctorale : MATISSE

Composante universitaire : UFR Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Produit tensoriel non abélien, relations entre commutateurs et homologie des groupes.

SOUTENUE LE 19 mai 2005 devant la commission d'Examen

Composition du jury :

Daniel CONDUCHÉ

Graham ELLIS

Daniel FERRAND

Jean-Louis LODAY

Laurent MORET-BAILLY

Produit tensoriel non abélien, relations entre commutateurs et homologie des groupes

PAR GWENAËL GUÉRARD

Université d'Angers
2 boulevard Lavoisier
49045 ANGERS cedex 01
FRANCE

Email : `gwenael.guerard@univ-angers.fr`

4 juillet 2005

Table des matières

Table des matières	3
1 Introduction	5
2 Le produit tensoriel non abélien	7
2.1 Définition et relations vérifiées par le produit tensoriel	7
2.2 Le produit extérieur	11
2.3 Quelques cas particuliers	14
2.4 Les morphismes du type $M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$	16
3 Homologie des groupes et relations entre commutateurs	23
3.1 Dimensions deux et trois	23
3.2 Version abélienne en dimensions supérieures	24
3.3 Une version alternative	25
4 Suite centrale descendante et produit tensoriel	31
4.1 Sections de morphismes de modules croisés	31
4.2 Application à $R \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_2(R)$	33
4.3 Application à $\gamma_2(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_3(R)$	35
4.4 Application à $\gamma_n(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_{n+1}(R)$	39
4.5 Le noyau de α_{n+1}	41
5 Version non abélienne en dimensions impaires	47
5.1 Construction du diagramme	47
5.2 Étude des noyaux de α et β	48
5.3 Passage à $(R \otimes R) \wedge^{n-2} R$	50
5.4 Perspectives	53
6 Bibliographie	55

1 Introduction

Le premier résultat concernant l'homologie des groupes et les relations entre commutateurs est du à Clair Miller [Mi, théorème 2, p. 593]. Il concerne l'isomorphisme entre le second groupe d'homologie et le groupe des relations entre commutateurs quotienté par les relations universelles. Avec une présentation libre $R \hookrightarrow F \twoheadrightarrow G$ du groupe G le troisième groupe d'homologie reçoit une description analogue en considérant des commutateurs dans le sous-groupe $[R, F]$ (version topologique de Ronald Brown et Jean-Louis Loday [BrLo, corollaire 4.7, p. 323], version algébrique de Graham J. Ellis [El1, théorème 6, p. 17]). Les relations universelles sont celles définissant le produit extérieur qui est un quotient du produit tensoriel non-abélien. Ces deux résultats peuvent donc s'énoncer à l'aide de ce produit via les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow G \wedge G \longrightarrow [G, G] \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow H_3(G) \longrightarrow R \wedge F \longrightarrow [R, F] \longrightarrow 1$$

La section 2 est consacrée à ces deux produits. On s'attache d'abord à exhiber des relations universellement vérifiées dans ces deux groupes et donc associées à des relations universelles entre commutateurs. Dans un second temps on s'intéresse à l'exactitude des foncteurs qu'ils définissent. L'exactitude à droite permet d'expliquer les noyaux de morphismes induits par des surjections. Ces foncteurs n'étant pas exacts à gauche on s'attache ensuite à la description de l'obstruction à cette exactitude.

Le lien entre le produit tensoriel et les commutateurs permet la construction de nombreux morphismes faisant intervenir la suite centrale descendante d'un groupe, typiquement la surjection $\gamma_n(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_{n+1}(R)$. La section 4 concerne l'étude de ces morphismes, en particulier celle de leur noyau. Comme nous nous plaçons dans le cas d'un groupe libre R nous manipulons des suites scindées. Ces suites sont constituées de morphismes de R -modules croisés et le point clé est de savoir s'il existe des sections qui sont également des morphismes de R -modules croisés. L'obstruction à l'existence de telles sections provient de relèvements de relations universelles, notamment celle de Philipp Hall

$$[[x, y], {}^y z] [[y, z], {}^z x] [[z, x], {}^x y] = 1$$

Cette question est également liée à l'éventuelle nullité des morphismes canoniques $H_3(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_n(R))$.

Le produit tensoriel défini à partir de couples de modules croisés sur un même groupe induit une généralisation de la notion de commutateurs. Cette généralisation permet d'exprimer toute l'homologie d'un groupe G en termes de relations entre commutateurs généralisés. Ces commutateurs sont pris dans des groupes construits avec le produit tensoriel à partir d'une résolution libre de G . Ceci s'exprime par des suites exactes

$$0 \longrightarrow H_n(G) \longrightarrow M_n \otimes G \longrightarrow [M_n, G] \longrightarrow 0$$

Deux versions abéliennes d'une telle interprétation, c'est à dire deux modèles de suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de groupes abéliens vérifiant l'exactitude des suites exactes courtes, figurent dans la section 3. Leur résultat en dimension trois, $M_3 = R_{\text{ab}}$, est identique (elles divergent en dimensions supérieures). Ce résultat est relié à la version relations entre commutateurs dans $[R, F]$ à travers la surjection entre les suites

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_3(G) & \longrightarrow & R_{\text{ab}} \otimes G & \longrightarrow & [R_{\text{ab}}, G] \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & H_3(G) & \longrightarrow & R \wedge F & \longrightarrow & [R, F] \longrightarrow 1 \end{array}$$

La dernière section est consacrée à la construction et à l'étude de surjections analogues en dimensions impaires supérieures

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{2n+1}(G) & \longrightarrow & M_{2n+1} \otimes G & \longrightarrow & [M_{2n+1}, G] \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \kappa & \longrightarrow & T_{2n+1} \wedge F & \xrightarrow{\kappa} & [T_{2n+1}, F] \longrightarrow 1 \end{array}$$

Cette étude est plus ardue car les noyaux ne sont plus isomorphes. Elle est liée à celle des morphismes construits à partir de la suite centrale descendante du groupe R faisant l'objet de la section précédente. La "complexité" des diagrammes induits se trouve ainsi elle aussi reliée à des relèvements de relations universelles et à l'éventuelle nullité des morphismes canoniques $H_3(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_n(R))$.

Convention

Sauf précision contraire les diagrammes commutatifs sont composés de lignes et de colonnes exactes.

2 Le produit tensoriel non abélien

2.1 Définition et relations vérifiées par le produit tensoriel

Définition

La référence principale est la deuxième partie de l'article de Ronald Brown et Jean-Louis Loday [BrLo, 314-319]. On considère un couple de groupes, M et N , agissant l'un sur l'autre (et sur eux-même par conjugaison). Le produit tensoriel $M \otimes N$ est le groupe engendré par les éléments $m \otimes n$ avec, pour $m, m_1, m_2 \in M$ et $n, n_1, n_2 \in N$, les relations

$$(m_1 m_2) \otimes n = {}^{m_1}(m_2 \otimes n) (m_1 \otimes n) \quad (1)$$

$$m \otimes (n_1 n_2) = (m \otimes n_1) {}^{n_1}(m \otimes n_2) \quad (2)$$

Soient $\mathcal{G}$ la catégorie des groupes et $\mathcal{CG}$ la catégorie dont les objets sont les couples de groupes agissant l'un sur l'autre et les flèches les couples de morphismes de groupes préservant les actions de groupe. Le produit tensoriel induit un foncteur T de $\mathcal{CG}$ dans $\mathcal{G}$.

Le produit tensoriel est symétrique. L'isomorphisme est donné par

$$\begin{aligned} M \otimes N &\longrightarrow N \otimes M \\ m \otimes n &\longmapsto (n \otimes m)^{-1} \end{aligned}$$

Contrairement au cas particulier que constitue le produit tensoriel abélien il n'est pas associatif.

Premières relations

Les deux relations de définition généralisent les célèbres identités de commutateurs

$$[x y, z] = {}^x[y, z] [x, z]$$

$$[x, y z] = [x, y] {}^y[x, z]$$

Tout comme celles-ci en engendrent de nouvelles ($[1, x] = 1$, $[x, y]^{-1} = {}^x[x^{-1}, y], \dots$), nos relations induisent directement d'autres identités.

Avec $m_1 = m_2 = 1$ et $n_1 = n_2 = 1$ on obtient

$$1 \otimes n = 1 \quad (3)$$

$$m \otimes 1 = 1 \quad (4)$$

Avec $m_1 = m_2^{-1} = m$ et $n_1 = n_2^{-1} = n$,

$$(m \otimes n)^{-1} = {}^m(m^{-1} \otimes n) \quad (5)$$

$$(m \otimes n)^{-1} = {}^n(m \otimes n^{-1}) \quad (6)$$

Ainsi, les relations universelles du produit tensoriel sont toutes liées à des identités de commutateurs.

Actions compatibles

Les actions de groupes de M sur N et de N sur M en induisent deux nouvelles du produit libre $M * N$ sur M et sur N . Ces dernières vérifient

$$({}^m n_1) n_2 = {}^m n_1 m^{-1} n_2 \quad \text{et} \quad ({}^n m_1) m_2 = {}^n m_1 n^{-1} m_2$$

En effet, $({}^m n_1) n_2 = {}^m n_1 n_2 {}^m n_1^{-1} = {}^m(n_1 m^{-1} n_2 n_1^{-1}) = {}^m n_1 m^{-1} n_2$. La seconde relation s'obtient de manière identique. On dit que les actions de M sur N et de N sur M sont compatibles lorsqu'elles vérifient également

$$({}^{m_1} n) m_2 = {}^{m_1} n m_1^{-1} m_2 \quad \text{et} \quad ({}^{n_1} m) n_2 = {}^{n_1} m n_1^{-1} n_2$$

C'est par exemple le cas quand M et N sont des sous-groupes distingués d'un groupe P agissant l'un sur l'autre par conjugaison. Plus généralement nous pouvons considérer deux modules croisés $\mu: M \rightarrow P$ et $\nu: N \rightarrow P$ sur le même groupe P . Les groupes M et N agissent alors l'un sur l'autre via P et la première relation de module croisé assure que ces actions sont compatibles. D'après [BrLo, remarque 2.16, p. 319] tout couple de groupes agissant l'un sur l'autre de manière compatible peut se ramener à un couple de modules croisés sur un même groupe (de manière générale on peut considérer le quotient de $M * N$ par les relations ${}^n m = n m n^{-1}$ et ${}^m n = m n m^{-1}$, ce groupe peut aussi être vu comme un quotient de $M \rtimes N$ ou $N \rtimes M$). Nous nous placerons dorénavant dans le cas de deux modules croisés sur un même groupe.

Commutateurs généralisés

La compatibilité des actions permet de (et est nécessaire pour) construire les deux modules croisés

$$\begin{array}{ccc} \lambda : M \otimes N & \longrightarrow & M \\ m \otimes n & \longmapsto & m {}^n m^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \lambda' : M \otimes N & \longrightarrow & N \\ m \otimes n & \longmapsto & {}^m n n^{-1} \end{array}$$

Les images $m {}^n m^{-1}$ et ${}^m n n^{-1}$ sont des généralisations de la notion de commutateur

$$[x, y] = x {}^y x^{-1} = {}^x y y^{-1}$$

C'est pourquoi on note $[M, N]$ l'image de λ et $[N, M]$ celle de λ' . De même on définit $[M, P]$ et $[N, P]$. Ces derniers contiennent respectivement les sous-groupes $[M, M]$ et $[N, N]$ (puisque M et N agissent via P). Les modules croisés $\mu \circ \lambda$ et $\nu \circ \lambda'$ sont égaux et leur image est le sous-groupe de commutateurs $[\text{Im } \mu, \text{Im } \nu]$. Plus précisément, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & P \end{array}$$

est un carré croisé. Sur cette notion due à Guin-Walery et Loday [GWLo], voir aussi la première partie de [BrLo]. Le fait que notre carré soit croisé est l'objet de la proposition 2.15 du second article.

Si l'action de M sur N (resp. de N sur M) est triviale le morphisme λ' (resp. λ) est le morphisme nul.

Soient $\mathcal{CM}$ la catégorie dont les objets sont les couples de modules croisés sur un même groupe et les flèches les couples de morphismes de modules croisés et $\mathcal{M}$ la catégorie des modules croisés. Le produit tensoriel induit un foncteur, que nous notons encore T , de $\mathcal{CM}$ dans $\mathcal{G}$. Les morphismes $\lambda: M \otimes N \rightarrow M$, $\lambda': M \otimes N \rightarrow N$ et $\mu \circ \lambda = \nu \circ \lambda': M \otimes N \rightarrow P$ induisent des foncteurs Λ , Λ' et $M\Lambda$ de $\mathcal{CM}$ dans $\mathcal{M}$. La construction du carré croisé est elle aussi fonctorielle.

Pour la construction des modules croisés λ et λ' voir [BrLo, proposition 2.3, p. 315].

Relations avec des commutateurs généralisés

La seconde relation de module croisé donne, pour $t, t' \in M \otimes N$,

$${}_t t' = {}^{\lambda(t)} t' = {}^{\lambda'(t)} t' \quad (7)$$

Elle implique en particulier que si l'une des actions est triviale le produit tensoriel $M \otimes N$ est abélien (λ ou λ' est le morphisme nul).

Le produit tensoriel vérifie également les relations

$$\lambda(t) \otimes n = t {}^n t^{-1} \quad (8)$$

$$m \otimes \lambda'(t) = {}^m t t^{-1} \quad (9)$$

$$\lambda(t) \otimes \lambda'(t') = [t, t'] \quad (10)$$

Les éléments $t {}^n t^{-1}$ et ${}^m t t^{-1}$ sont aussi des commutateurs généralisés. Plus précisément, les couples $(\mu, \mu \circ \lambda)$ et $(\mu \circ \lambda, \nu)$ permettent de construire les groupes $(M \otimes N) \otimes N$ et $M \otimes (M \otimes N)$ et les modules croisés $\lambda'': (M \otimes N) \otimes N \rightarrow M \otimes N$ et $\lambda''': M \otimes (M \otimes N) \rightarrow M \otimes N$. Avec ces derniers les relations (8) et (9) se réécrivent respectivement

$$\lambda(t) \otimes n = \lambda''(t \otimes n) \quad (11)$$

$$m \otimes \lambda'(t) = \lambda'''(m \otimes t) \quad (12)$$

Ceci signifie que λ'' coïncide avec le morphisme $\lambda \otimes id_N$ et λ''' avec $id_M \otimes \lambda'$.

Avec les relations (3) et (4), les relations (8) et (9) indiquent que N agit trivialement sur le noyau de λ et que M en fait autant sur celui de λ' .

Pour l'établissement des relations (8), (9) et (10) voir aussi [BrLo, proposition 2.3].

Relations avec des commutateurs

Les relations précédentes concernent des éléments de $M \otimes N$ dont un des termes est un produit de commutateurs généralisés. On s'intéresse maintenant au cas où l'un des termes est un commutateur classique. En fait ce cas peut se ramener au précédent.

Lemme 1. *Soient $\mu: M \rightarrow P$ et $\nu: N \rightarrow P$ deux modules croisés sur le même groupe P . Alors, pour $m \in M$ et $n_1, n_2 \in N$,*

$${}^{n_2}m \otimes [n_1, n_2] = (\lambda(m \otimes n_2)^{-1} \otimes {}^m n_1) (\lambda(m \otimes n_1) \otimes {}^{n_1} n_2) \quad (13)$$

Démonstration. On part du terme de gauche ${}^{n_2}m \otimes [n_1, n_2] = {}^{n_2}m \otimes n_2^{-1} {}^{n_2 n_1} n_2$. La relation (2) nous donne ${}^{n_2}m \otimes n_2^{-1} {}^{n_2 n_1} n_2 = ({}^{n_2}m \otimes n_2^{-1}) (m \otimes {}^{n_1} n_2)$, et la relation (6), $({}^{n_2}m \otimes n_2^{-1}) = (m \otimes n_2)^{-1}$. Notre terme de départ est donc égal à $(m \otimes n_2)^{-1} (m \otimes n_1 n_2 n_1^{-1})$.

En appliquant de nouveau la relation (2) puis la (6), on obtient

$$m \otimes n_1 n_2 n_1^{-1} = (m \otimes n_1 n_2) {}^{n_1 n_2} (m \otimes n_1^{-1}) = (m \otimes n_1 n_2) {}^{n_1 n_2} (m \otimes n_1)^{-1}$$

Nous sommes arrivés à ${}^{n_2}m \otimes [n_1, n_2] = (m \otimes n_2)^{-1} (m \otimes n_1 n_2) {}^{n_1 n_2} (m \otimes n_1)^{-1}$.

Une dernière application de la relation (2) donne $m \otimes n_1 n_2 = (m \otimes n_1) {}^{n_1} (m \otimes n_2)$. On termine avec la relation (7), qui donne

$$(m \otimes n_1) {}^{n_1} (m \otimes n_2) = {}^{m \otimes n_1} ({}^{n_1} (m \otimes n_2)) (m \otimes n_1) = {}^{m n_1 n_1^{-1}} ({}^{n_1} (m \otimes n_2)) (m \otimes n_1)$$

Nous avons obtenu ${}^{n_2}m \otimes [n_1, n_2] = (m \otimes n_2)^{-1} {}^{m n_1} (m \otimes n_2) (m \otimes n_1) {}^{n_1 n_2} (m \otimes n_1)^{-1}$ ce qui se réécrit comme annoncé d'après la relation (8). $\square$

Remarque 2. La relation symétrique est également vérifiée

$$[m_1, m_2] \otimes {}^{m_2} n = ({}^{m_1} m_2 \otimes \lambda'(m_1 \otimes n)^{-1}) ({}^n m_1 \otimes \lambda'(m_2 \otimes n)) \quad (14)$$

Ceci généralise les relations de Philipp Hall sur les commutateurs

$$[{}^x y, [z, x]] [{}^z x, [y, z]] [{}^y z, [x, y]] = 1$$

$$[[x, y], {}^y z] [[y, z], {}^z x] [[z, x], {}^x y] = 1$$

que l'on peut aussi écrire comme suit

$$[{}^y z, [x, y]] = [[z, y]^{-1}, {}^z x] [[z, x], {}^x y]$$

$$[[x, y], {}^y z] = [{}^x y, [x, z]^{-1}] [{}^z x, [y, z]]$$

Cette réécriture est nécessaire car contrairement à x , y et z , m , n_1 et n_2 et m_1 , m_2 et n n'ont pas des rôles équivalents. Ce sera toutefois le cas si notre relation est basée sur des éléments du produit fibré $M \times_P N$ ensemble des couples (m, n) vérifiant $\mu(m) = \nu(n)$. Tout triplet (m_1, n_1) , (m_2, n_2) et (m_3, n_3) d'éléments de $M \times_P N$ vérifie

$$([m_1, m_2] \otimes {}^{m_2}n_3) ([m_2, m_3] \otimes {}^{m_3}n_1) ([m_3, m_1] \otimes {}^{m_1}n_2) = 1$$

$$({}^{n_1}m_2 \otimes [n_3, n_1]) ({}^{n_3}m_1 \otimes [n_2, n_3]) ({}^{n_2}m_3 \otimes [n_1, n_2]) = 1$$

Par exemple, si M est un sous-groupe distingué de N et $\mu = \nu|_M$, alors pour m_1, m_2 et $m_3 \in M$

$$([m_1, m_2] \otimes {}^{m_2}m_3) ([m_2, m_3] \otimes {}^{m_3}m_1) ([m_3, m_1] \otimes {}^{m_1}m_2) = 1$$

Dans le cas symétrique, N sous-groupe de M et $\nu = \mu|_N$, pour n_1, n_2 et $n_3 \in N$

$$({}^{n_1}n_2 \otimes [n_3, n_1]) ({}^{n_3}n_1 \otimes [n_2, n_3]) ({}^{n_2}n_3 \otimes [n_1, n_2]) = 1$$

Avec seulement deux couples de $M \times_P N$ la relation (14) s'écrit

$$([m_1, m_2] \otimes {}^{m_2}n) (m_2 {}^n m_2^{-1} \otimes {}^n n_1) ({}^n m_1 m_1^{-1} \otimes {}^{m_1}n_2) = 1$$

et la relation (13)

$$({}^{n_1}m_2 \otimes {}^m n_1 n_1^{-1}) ({}^m m_1 \otimes n_2 {}^m n_2^{-1}) ({}^{n_2}m \otimes [n_1, n_2]) = 1$$

Remarque 3. Les relations (13) et (14) se réécrivent également avec les modules croisés λ'' et λ'''

$${}^{n_2}m \otimes [n_1, n_2] = \lambda''(((m \otimes n_2)^{-1} \otimes {}^m n_1) ((m \otimes n_1) \otimes {}^{n_1}n_2)) \quad (15)$$

$$[m_1, m_2] \otimes {}^{m_2}n = \lambda'''(({}^{m_1}m_2 \otimes (m_1 \otimes n)^{-1}) ({}^n m_1 \otimes (m_2 \otimes n))) \quad (16)$$

Notations

La construction de $(M \otimes N) \otimes N$ peut se généraliser en prenant de nouveau le produit tensoriel avec N . On note alors $M \otimes^n N$ le groupe obtenu par récurrence comme suit

$$M \otimes^{n+1} N = (M \otimes^n N) \otimes N$$

Quand $M = N$, on note $M^{\otimes n} = M \otimes^{n-1} M$.

2.2 Le produit extérieur

Définition

En soulignant le lien entre les relations du produit tensoriel et les identités de commutateurs, nous avons vu apparaître les plus classiques de ces identités, à l'exception notable de celle que l'on peut considérer comme la plus simple : $[x, x] = 1$. C'est que celle-ci, hautement symétrique, ne se généralise pas aussi facilement que les autres. Ce sont les modules croisés μ et ν qui vont nous permettre cette généralisation.

On construit le produit extérieur $M \wedge N$ en ajoutant la relation $m \wedge n = 1$ pour les couples $(m, n) \in M \times_P N$. On notera, outre le lien avec notre identité précédente, la parenté avec la relation définissant le produit extérieur classique d'un groupe abélien. Les couples $(\lambda(t), \lambda'(t))$ pour $t \in M \otimes N$ appartiennent au produit fibré, mais la relation (10) nous montre que $\lambda(t) \otimes \lambda'(t)$ est déjà égal à l'élément neutre. En fait l'identité de l'antécédent n'est pas nécessaire. Soit (t, t') un couple d'éléments de $M \otimes N$ qui commutent. La relation (10) nous donne alors $\lambda(t) \otimes \lambda'(t') = 1$. C'est par exemple le cas si t et t' diffèrent d'un élément du noyau de $\mu \circ \lambda = \nu \circ \lambda'$. Ce morphisme étant un module croisé, son noyau est central. En particulier, t et t' commutent.

Le produit extérieur conserve la symétrie du produit tensoriel.

De nouveaux modules croisés

Pour tout couple (m, n) appartenant au produit fibré, ${}^m n = \mu(m)n = \nu(n)n = {}^n n = n$ et de même ${}^n m = m$. Cette relation supplémentaire est donc compatible avec les modules croisés λ et λ' . De plus le noyau du morphisme $M \otimes N \twoheadrightarrow M \wedge N$ étant stable sous l'action de P (et donc sous celles de M et N), celle-ci (et donc celles de M et N) passe au quotient.

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes N & \xrightarrow{\lambda} & M \\
 & \searrow & \nearrow \\
 \lambda' \downarrow & & M \wedge N \\
 & \swarrow & \downarrow \mu \\
 N & \xrightarrow[\nu]{} & P
 \end{array}$$

Les morphismes $\kappa : M \wedge N \longrightarrow M$, $\kappa' : M \wedge N \longrightarrow N$, $\mu \circ \kappa = \nu \circ \kappa'$ et le quotient $M \otimes N \twoheadrightarrow M \wedge N$ sont aussi des modules croisés. En particulier, le noyau du quotient est dans le centre de $M \otimes N$ (sur ce noyau, voir [BrLo, théorème 2.12, p. 317]). Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 M \wedge N & \xrightarrow{\kappa} & M \\
 \kappa' \downarrow & & \downarrow \mu \\
 N & \xrightarrow[\nu]{} & P
 \end{array}$$

est également un carré croisé, et le quotient $M \otimes N \twoheadrightarrow M \wedge N$ induit le morphisme de carrés croisés

$$\left(\begin{array}{ccc} M \otimes N & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & P \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} M \wedge N & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & P \end{array} \right)$$

Le produit extérieur induit un foncteur E de $\mathcal{CM}$ dans $\mathcal{G}$, et les morphismes κ , κ' et $\mu \circ \kappa = \nu \circ \kappa'$ des foncteurs K , K' et MK de $\mathcal{CM}$ dans $\mathcal{M}$. Les constructions du module croisé $M \otimes N \longrightarrow M \wedge N$ et du morphisme de carrés croisés sont également fonctorielles.

Relations

Le produit extérieur vérifie, pour $e, e' \in M \wedge N$, les relations

$$(m_1 m_2) \wedge n = {}^{m_1}(m_2 \wedge n) (m_1 \wedge n) \quad (17)$$

$$m \wedge (n_1 n_2) = (m \wedge n_1) {}^{n_1}(m \wedge n_2) \quad (18)$$

$$m \wedge n = 1 \text{ si } \mu(m) = \nu(n) \quad (19)$$

$$1 \wedge n = 1 \quad (20)$$

$$m \wedge 1 = 1 \quad (21)$$

$$(m \wedge n)^{-1} = {}^m(m^{-1} \wedge n) \quad (22)$$

$$(m \wedge n)^{-1} = {}^n(m \wedge n^{-1}) \quad (23)$$

$${}^e e' = \kappa(e) e' = \kappa'(e) e' \quad (24)$$

$$\kappa(e) \wedge n = e {}^n e^{-1} \quad (25)$$

$$m \wedge \kappa'(e) = {}^m e e^{-1} \quad (26)$$

$$\kappa(e) \wedge \kappa'(e') = [e, e'] \quad (27)$$

$${}^{n_2} m \wedge [n_1, n_2] = (\kappa(m \wedge n_2)^{-1} \wedge {}^m n_1) (\kappa(m \wedge n_1) \wedge {}^{n_1} n_2) \quad (28)$$

$$[m_1, m_2] \wedge {}^{m_2} n = ({}^{m_1} m_2 \wedge \kappa'(m_1 \wedge n)^{-1}) ({}^{n_1} m_1 \wedge \kappa'(m_2 \wedge n)) \quad (29)$$

Avec les morphismes $\kappa'' : (M \wedge N) \wedge N \longrightarrow M \wedge N$ et $\kappa''' : M \wedge (M \wedge N) \longrightarrow M \wedge N$, les relations (25), (26), (28) et (29) s'écrivent respectivement

$$\kappa(e) \wedge n = \kappa''(e \wedge n) \quad (30)$$

$$m \wedge \kappa'(e) = \kappa'''(m \wedge e) \quad (31)$$

$${}^{n_2} m \wedge [n_1, n_2] = \kappa''(((m \wedge n_2)^{-1} \wedge {}^m n_1) ((m \wedge n_1) \wedge {}^{n_1} n_2)) \quad (32)$$

$$[m_1, m_2] \wedge {}^{m_2} n = \kappa'''(((m_1 m_2 \wedge (m_1 \wedge n)^{-1}) ({}^{n_1} m_1 \wedge (m_2 \wedge n))) \quad (33)$$

Avec trois couples (m_1, n_1) , (m_2, n_2) et (m_3, n_3) de $M \times_P N$ (28) et (29) deviennent

$$([m_1, m_2] \wedge {}^{m_2} n_3) ([m_2, m_3] \wedge {}^{m_3} n_1) ([m_3, m_1] \wedge {}^{m_1} n_2) = 1$$

$$({}^{n_1} m_2 \wedge [n_3, n_1]) ({}^{n_3} m_1 \wedge [n_2, n_3]) ({}^{n_2} m_3 \wedge [n_1, n_2]) = 1$$

Avec seulement deux couples

$$([m_1, m_2] \wedge {}^{m_2} n) (m_2 {}^n m_2^{-1} \wedge {}^n n_1) ({}^n m_1 m_1^{-1} \wedge {}^{m_1} n_2) = 1$$

$$({}^{n_1} m_2 \wedge {}^m n_1 n_1^{-1}) ({}^m m_1 \wedge n_2 {}^m n_2^{-1}) ({}^{n_2} m \wedge [n_1, n_2]) = 1$$

Avec le produit extérieur on peut même se contenter d'un couple

$$({}^{n_1} m m^{-1} \wedge {}^m n_3) (m {}^{n_3} m^{-1} \wedge {}^{n_3} n_1) ({}^{n_1} m \wedge [n_3, n_1])^{-1} = 1 \quad (34)$$

$$([m_3, m_1] \wedge {}^{m_1} n)^{-1} ({}^{m_3} m_1 \wedge n {}^{m_3} n^{-1}) ({}^n m_3 \wedge {}^{m_1} n n^{-1}) = 1$$

Lemme 4. Soient $(m, n), (m', n') \in M \times_P N$. Ces couples vérifient l'égalité $(m \wedge n')(m' \wedge n) = 1$.

Démonstration. On l'obtient en développant $(m \ m') \wedge (n \ n')$ qui est égal à l'élément neutre par définition du produit extérieur. La relation (17) donne alors $(m \ m') \wedge (n \ n') = {}^m(m' \wedge n \ n')(m \wedge n \ n')$. En appliquant (18) à chacun des facteurs on arrive à

$$(m \ m') \wedge (n \ n') = 1 = {}^m(m' \wedge n) {}^{mn}(m' \wedge n')(m \wedge n)^n(m \wedge n')$$

Comme $m' \wedge n' = 1 = m \wedge n$, nous obtenons bien, après opération de $\mu(m)^{-1} = \nu(n)^{-1}$, la relation annoncée. $\square$

Notations

On définit $M \wedge^n N$ et $M^{\wedge n}$ comme leurs équivalents avec le produit tensoriel.

2.3 Quelques cas particuliers

Action triviales

D'après [BrLo, proposition 2.4, p. 315], si M et N agissent trivialement l'un sur l'autre, le produit tensoriel non-abélien $M \otimes N$ est isomorphe au produit tensoriel de groupes abéliens $M_{\text{ab}} \otimes N_{\text{ab}}$. On notera que les actions triviales sont compatibles. Par exemple, deux groupes abéliens A et B agissant trivialement l'un sur l'autre, le produit tensoriel non-abélien est égal au produit tensoriel de groupes abéliens. On remarque que l'on obtient les mêmes actions en considérant les modules croisés $A \longrightarrow A \oplus B$ et $B \longrightarrow A \oplus B$.

Avec ces modules croisés le produit extérieur $A \wedge B$ est isomorphe à $A \otimes B$ (le produit fibré est nul). Les modules croisés $A \longrightarrow 0$ et $B \longrightarrow 0$ donnent encore les mêmes actions. Par contre le produit extérieur qu'ils engendrent est nul (le produit fibré est $A \times B$). Si A et B sont des sous-groupes distingués d'un groupe C , les injections $A \longrightarrow C$ et $B \longrightarrow C$ donnent de nouveau les mêmes actions et un produit extérieur encore différent (pour $A=B$ on obtient le terme de dimension 2 de l'algèbre extérieur de A). Ceci souligne le fait que si le produit tensoriel ne dépend en fin de compte que des groupes et de leurs actions réciproques, le produit extérieur dépend véritablement des modules croisés.

G-modules

Étant donnés un groupe G et un G -module M , ce dernier agit trivialement sur G . Le produit tensoriel non-abélien $M \otimes G$ s'exprime également en terme de produit tensoriel classique (de G -modules).

Proposition 5. Le groupe $M \otimes G$ est isomorphe à $M \otimes_G IG$. C'est un isomorphisme de G -modules.

Démonstration. On vérifie aisément que les actions sont compatibles. Le morphisme

$$\begin{aligned}\lambda' : M \otimes G &\longrightarrow G \\ m \otimes g &\longmapsto {}^m g g^{-1}\end{aligned}$$

est trivial, et les relations (10) et (4) nous donnent $[t, t'] = 1$ pour tout couple (t, t') d'éléments de $M \otimes G$. Ce groupe est donc abélien.

L'isomorphisme est donné par : $m \otimes g \longmapsto m \otimes (g - 1)$.

La première relation, $(m_1 + m_2) \otimes g - m_1 \otimes g - m_2 \otimes g = 0$, est clairement compatible. La seconde est $m \otimes (g_1 g_2) - {}^{g_1} m \otimes {}^{g_1} g_2 - m \otimes g_1 = 0$.

L'image du membre de gauche est

$$\begin{aligned}& m \otimes (g_1 g_2 - 1) - {}^{g_1} m \otimes ({}^{g_1} g_2 - 1) - m \otimes (g_1 - 1) \\ &= m \otimes (g_1 g_2 - 1) - m \otimes (g_1 g_2 - g_1) - m \otimes (g_1 - 1) = 0\end{aligned}$$

Notre morphisme

$$\begin{aligned}M \otimes G &\longrightarrow M \otimes_G IG \\ m \otimes g &\longmapsto m \otimes (g - 1)\end{aligned}$$

est bien défini.

La réciproque est donnée par : $m \otimes (g - 1) \longmapsto m \otimes g$.

La première relation, $(m_1 + m_2) \otimes (g - 1) - m_1 \otimes (g - 1) - m_2 \otimes (g - 1) = 0$, est clairement compatible.

La seconde, $m \otimes (g_1 - 1 + g_2 - 1) - m \otimes (g_1 - 1) - m \otimes (g_2 - 1) = 0$, est utilisée pour se ramener aux générateurs $m \otimes (g - 1)$.

La troisième est ${}^{g_1} m \otimes ({}^{g_1} g_2 - 1) = m \otimes (g_1 g_2 - g_1)$.

D'après la seconde, $m \otimes (g_1 g_2 - g_1) = m \otimes (g_1 g_2 - 1) - m \otimes (g_1 - 1)$.

L'image du membre de gauche ${}^{g_1} m \otimes ({}^{g_1} g_2 - 1)$ est ${}^{g_1} m \otimes {}^{g_1} g_2$, qui, d'après la relation (2) est égal à $m \otimes (g_1 g_2) - m \otimes g_1$, lui-même image de $m \otimes (g_1 g_2 - 1) - m \otimes (g_1 - 1)$.

La réciproque est donc bien définie.

Pour l'isomorphisme de G-modules, le terme ${}^{g_1}(m \otimes g_2) = {}^{g_1} m \otimes {}^{g_1} g_2$ est envoyé sur ${}^{g_1} m \otimes ({}^{g_1} g_2 - 1)$ qui est égal à $m \otimes (g_1 g_2 - g_1) = {}^{g_1}(m \otimes (g_2 - 1))$. $\square$

Remarque 6. Les actions étant compatibles elles peuvent être obtenues à partir d'un couple de modules croisés sur un même groupe. Par exemple, les injections $M \longrightarrow M \rtimes G$ et $G \longrightarrow M \rtimes G$, le produit semi-direct agissant via G . Avec ce couple le produit extérieur est isomorphe au produit tensoriel puisque le produit fibré est nul. On obtient les mêmes actions en composant avec le quotient $M \rtimes G \longrightarrow G$, c'est à dire en considérant le couple $1 : M \longrightarrow G$ et id_G . On passe alors au produit extérieur en quotientant par les éléments $m \otimes 1$ qui sont déjà nuls (relation (4)), et nous obtenons de nouveau un produit extérieur isomorphe au produit tensoriel.

Sous groupes distingués

Pour M et N deux sous-groupes distingués d'un groupe P , les injections canoniques $M \hookrightarrow P$ et $N \hookrightarrow P$ sont des modules croisés. On peut donc considérer les groupes $M \otimes N$ et $M \wedge N$. Le noyau du quotient $M \otimes N \twoheadrightarrow M \wedge N$ est le sous-groupe engendré par les éléments $x \otimes x$ avec $x \in M \cap N$. En fait, si x appartient à $[M, N] = [N, M]$ (ici $\lambda = \lambda'$) la relation (10) nous assure que $x \otimes x$ est nul. En particulier, si P est parfait, $P \otimes P = P \wedge P$ (ce résultat figure, à formulation près, dans [De]).

Pour $x, y \in M \cap N$ le lemme 4 nous donne la relation de symétrie $(x \wedge y)(y \wedge x) = 1$. Celle-ci généralise la relation de commutateurs $[x, y][y, x] = 1$. En règle générale, cette relation ne se remonte pas au produit tensoriel. Toutefois, si l'un des termes est contenu dans $[M, N]$, les relations (8) et (9) nous donnent aussi $(x \otimes y)(y \otimes x) = 1$. En effet, $(x \otimes \lambda'(t))(\lambda(t) \otimes x) = {}^x t t^{-1} t {}^x t^{-1} = 1$, et le cas $x = \lambda(t) = \lambda'(t)$ est tout à fait similaire.

2.4 Les morphismes du type $M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$

Avec des surjections

Le produit tensoriel, sur $\mathcal{CG}$ ou sur $\mathcal{CM}$, et le produit extérieur sont exacts à droite, autrement dit ils transforment les couples de surjections, en surjections. Ce comportement très "sympathique" permet d'expliciter le noyau de morphismes du type $M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$ ou $M_1 \wedge N_1 \longrightarrow M_2 \wedge N_2$ construits à partir de surjections.

Lemme 7. *Soient deux morphismes de groupes, $\varphi: M_1 \longrightarrow M_2$, $\psi: N_1 \longrightarrow N_2$. Le noyau du morphisme $\Phi: \langle M_1 \times N_1 \rangle \longrightarrow \langle M_2 \times N_2 \rangle$ est engendré, comme sous-groupe distingué, par les éléments $(mr, n)(m, n)^{-1}$ et $(m, n)^{-1}(m, ns)$, avec $m \in M_1$, $n \in N_1$, $r \in \text{Ker } \varphi$ et $s \in \text{Ker } \psi$.*

Démonstration. Les éléments du noyau ont une écriture réduite dont la longueur est paire. On fait une récurrence sur cette longueur.

Soit $(m, n)^\varepsilon (m', n')^{\varepsilon'}$ appartenant au noyau. Alors, $\varepsilon + \varepsilon' = 0$, et, quitte à conjuguer par (m, n) , on peut supposer $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$. De plus, $m = m' r$ et $n = n' s$ avec $r \in \text{Ker } \varphi$ et $s \in \text{Ker } \psi$. Comme

$$(m' r, n' s) (m', n')^{-1} = (m' r, n' s) (m', n' s)^{-1} (m', n' s) (m', n')^{-1}$$

et que l'on a également $(m', n' s) (m', n')^{-1} = {}^{(m', n')}((m', n')^{-1} (m', n' s))$, notre élément est bien dans le sous-groupe annoncé.

Supposons le résultat démontré pour les longueurs inférieures ou égales à $2n$, $n \geq 1$. Soit x un élément du noyau dont l'écriture réduite est de longueur $2n + 2$. Alors, $x = y(m, n)^\varepsilon (m', n')^{\varepsilon'} z$, avec $(m, n)^\varepsilon (m', n')^{\varepsilon'}$ appartenant au noyau. On peut aussi l'écrire sous la forme $x = {}^y((m, n)^\varepsilon (m', n')^{\varepsilon'} z y)$. Comme $z y$ est dans le noyau et de longueur inférieure ou égale à $2n$, il est dans le sous-groupe annoncé, et x aussi. $\square$

Proposition 8. Soit $\Psi = (\varphi, \psi): (M_1, N_1) \twoheadrightarrow (M_2, N_2)$ une surjection dans la catégorie $\mathcal{CG}$. Le noyau de $T\Psi: M_1 \otimes N_1 \twoheadrightarrow M_2 \otimes N_2$ est engendré, comme sous-groupe distingué, par les éléments $r \otimes n$ et $m \otimes s$, avec $m \in M_1$, $n \in N_1$, r appartenant au noyau de la surjection $\varphi: M_1 \twoheadrightarrow M_2$ et s à celui de $\psi: N_1 \twoheadrightarrow N_2$.

Démonstration. On appellent Φ le morphisme de $\langle M_1 \times N_1 \rangle$ (groupe libre engendré par $M_1 \times N_1$) dans $\langle M_2 \times N_2 \rangle$ induit par Ψ , α_i le quotient canonique de $\langle M_i \times N_i \rangle$ dans $M_i \otimes N_i$ et Ω la restriction de Φ au noyau de α_1 . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker } T\Psi & \longrightarrow & M_1 \otimes N_1 & \xrightarrow{T\Psi} & M_2 \otimes N_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \alpha_1 \uparrow & & \uparrow \alpha_2 \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker } \Phi & \longrightarrow & \langle M_1 \times N_1 \rangle & \xrightarrow{\Phi} & \langle M_2 \times N_2 \rangle \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker } \Omega & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha_1 & \xrightarrow{\Omega} & \text{Ker } \alpha_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

est formé de lignes et de colonnes exactes. Les deux premières lignes et les deux dernières colonnes le sont par définition. Les noyaux $\text{Ker } \alpha_1$ et $\text{Ker } \alpha_2$ sont les sous-groupes distingués engendrés par les relations définissant le produit tensoriel. Les morphismes φ et ψ étant surjectifs, Ω l'est aussi. La troisième ligne est donc exacte, et d'après le lemme du serpent, la première colonne aussi.

Le morphisme $\text{Ker } \Phi \longrightarrow \text{Ker } T\Psi$ est donc surjectif. D'après le lemme précédant décrivant le noyau de Φ , celui de $T\Psi$ est le sous-groupe distingué engendré par les éléments $(m r \otimes n)(m \otimes n)^{-1}$ et $(m \otimes n)^{-1}(m \otimes n s)$. Les relations (1) et (2) donnent $(m r \otimes n)(m \otimes n)^{-1} = {}^m(r \otimes n)$ et $(m \otimes n)^{-1}(m \otimes n s) = {}^n(m \otimes s)$.

Les noyaux de φ et ψ étant distingués, le noyau de $T\Psi$ est le sous-groupe distingué engendré par les éléments annoncés. $\square$

Remarque 9. Le noyau de φ est stable sous l'action de N_1 et celui de ψ l'est sous celle de M_1 . Les flèches $(\text{Ker } \varphi, N_1) \longrightarrow (M_1, N_1)$ et $(M_1, \text{Ker } \psi) \longrightarrow (M_1, N_1)$ sont des morphismes de $\mathcal{CG}$. Leurs images respectives par le foncteur T sont les morphismes $\text{Ker } \varphi \otimes N_1 \longrightarrow M_1 \otimes N_1$ et $M_1 \otimes \text{Ker } \psi \longrightarrow M_1 \otimes N_1$. Le noyau de $T\Psi$ est le sous-groupe distingué engendré par la réunion des images de ces deux morphismes.

Remarque 10. Si M_1 et N_1 agissent l'un sur l'autre de manière compatible, l'existence des deux modules croisés $\lambda: M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_1$ et $\lambda': M_1 \otimes N_1 \longrightarrow N_1$ assure que la conjugaison par un élément de $M_1 \otimes N_1$ équivaut à l'action d'un élément, au choix, de M_1 ou de N_1 . Les images de $\text{Ker } \varphi \otimes N_1 \longrightarrow M_1 \otimes N_1$ et $M_1 \otimes \text{Ker } \psi \longrightarrow M_1 \otimes N_1$ sont alors des sous-groupes distingués. La suite

$$(\text{Ker } \varphi \otimes N_1) \times (M_1 \otimes \text{Ker } \psi) \longrightarrow M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2 \longrightarrow 1$$

est donc exacte.

Théorème 11. Soit $\Sigma: (M_1 \xrightarrow{\mu_1} P_1, N_1 \xrightarrow{\nu_1} P_1) \twoheadrightarrow (M_2 \xrightarrow{\mu_2} P_2, N_2 \xrightarrow{\nu_2} P_2)$ une surjection dans la catégorie $\mathcal{CM}$. Le noyau de $T\Sigma: M_1 \otimes N_1 \twoheadrightarrow M_2 \otimes N_2$ est engendré par les éléments $r \otimes n$ et $m \otimes s$, avec $m \in M_1$, $n \in N_1$, $r \in \text{Ker } (\varphi: M_1 \twoheadrightarrow M_2)$ et $s \in \text{Ker } (\psi: N_1 \twoheadrightarrow N_2)$. Si, de plus, $T\Sigma(\{m_1 \otimes n_1 / \mu_1(m_1) = \nu_1(n_1)\})$ est égal à $\{m_2 \otimes n_2 / \mu_2(m_2) = \nu_2(n_2)\}$, alors le noyau de $E\Sigma: M_1 \wedge N_1 \twoheadrightarrow M_2 \wedge N_2$ est engendré par les éléments $r \wedge n$ et $m \wedge s$.

Démonstration. La première propriété (produit tensoriel) est une application directe de la proposition 8 et de la remarque 10.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker } E\Sigma & \longrightarrow & M_1 \wedge N_1 & \xrightarrow{E\Sigma} & M_2 \wedge N_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \beta_1 \uparrow & & \uparrow \beta_2 \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker } T\Sigma & \longrightarrow & M_1 \otimes N_1 & \xrightarrow{T\Sigma} & M_2 \otimes N_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker } \Delta & \longrightarrow & \text{Ker } \beta_1 & \xrightarrow{\Delta} & \text{Ker } \beta_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

est formé de lignes et de colonnes exactes. Les deux premières lignes et les deux dernières colonnes le sont par définition. Les noyaux $\text{Ker } \beta_1$ et $\text{Ker } \beta_2$ sont les sous-groupes distingués engendrés respectivement par $\{m_1 \otimes n_1 / \mu_1(m_1) = \nu_1(n_1)\}$ et $\{m_2 \otimes n_2 / \mu_2(m_2) = \nu_2(n_2)\}$. Le morphisme Δ est donc surjectif. La troisième ligne, et par conséquent la première colonne, sont donc également exactes. D'où la surjection $\text{Ker } T\Sigma \twoheadrightarrow \text{Ker } E\Sigma$ qui nous donne le résultat. $\square$

Remarque 12. L'hypothèse Δ surjectif serait plus générale, mais aussi plus longue à formuler, que celle se limitant aux générateurs de $\text{Ker } \beta_1$. Comme nous n'appliquons qu'en des cas où $\text{Ker } \beta_2$ est nul cette distinction ne porte pas à conséquence.

Remarque 13. Les flèches $(\mu_1|_{\text{Ker } \varphi}, \nu_1) \longrightarrow (\mu_1, \nu_1)$ et $(\mu_1, \nu_1|_{\text{Ker } \psi}) \longrightarrow (\mu_1, \nu_1)$ de $\mathcal{CM}$ induisent les morphismes $\text{Ker } \varphi \otimes N_1 \longrightarrow M_1 \otimes N_1$, $M_1 \otimes \text{Ker } \psi \longrightarrow M_1 \otimes N_1$, $\text{Ker } \varphi \wedge N_1 \longrightarrow M_1 \wedge N_1$ et $M_1 \wedge \text{Ker } \psi \longrightarrow M_1 \wedge N_1$. Le noyau de $T\Sigma$ est le sous-groupe engendré par la réunion des images des deux premiers et le noyau de $E\Sigma$ celui engendré par la réunion des images des deux derniers. Ceci se résume avec les suites exactes

$$(\text{Ker } \varphi \otimes N_1) \times (M_1 \otimes \text{Ker } \psi) \longrightarrow M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2 \longrightarrow 1$$

$$(\text{Ker } \varphi \wedge N_1) \times (M_1 \wedge \text{Ker } \psi) \longrightarrow M_1 \wedge N_1 \longrightarrow M_2 \wedge N_2 \longrightarrow 1$$

Remarque 14. Le cas particulier où les surjections $P_1 \twoheadrightarrow P_2$, $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ et $N_1 \twoheadrightarrow N_2$ sont les quotients par un même sous-groupe distingué K inclus dans l'intersection de M_1 et N_1 est traité dans [El1, proposition 1, p. 14]. Le noyau du morphisme surjectif $M \wedge N \twoheadrightarrow (M/K) \wedge (N/K)$ est engendré par les images des morphismes $K \wedge N \longrightarrow M \wedge N$ et $M \wedge K \longrightarrow M \wedge N$. D'où la suite exacte

$$(K \wedge N) \times (M \wedge K) \longrightarrow M \wedge N \longrightarrow (M/K) \wedge (N/K) \longrightarrow 1$$

Proposition 15. Soit $\mu: M \longrightarrow N$ un module croisé. Le quotient $M \twoheadrightarrow M/[M, N]$ induit, dans la catégorie $\mathcal{CM}$, $\Sigma: (M \xrightarrow{\mu} N, \text{id}_N) \longrightarrow (M/[M, N] \longrightarrow N_{\text{ab}}, \text{id}_{N_{\text{ab}}})$. Les suites

$$1 \longrightarrow [M \otimes^k N, N] \longrightarrow M \otimes^k N \longrightarrow (M/[M, N]) \otimes^k N_{\text{ab}} \longrightarrow 0$$

$$1 \longrightarrow [M \wedge^k N, N] \longrightarrow M \wedge^k N \longrightarrow (M/[M, N]) \wedge^k N_{\text{ab}} \longrightarrow 0$$

sont exactes pour tout entier naturel $k \geq 1$.

Démonstration. Le morphisme μ envoie le sous-groupe $[M, N]$ dans $[N, N]$. Le morphisme $M/[M, N] \longrightarrow N_{\text{ab}}$ est donc bien défini. Les deux groupes étant abéliens l'action triviale de N_{ab} sur $M/[M, N]$, héritée de l'action de N sur M , en fait un module croisé. La flèche Σ est donc bien une surjection dans $\mathcal{CM}$.

Le lemme 11 nous donne la suite exacte

$$([M, N] \otimes N) \times (M \otimes [N, N]) \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow (M/[M, N]) \otimes N_{\text{ab}} \longrightarrow 0$$

Le morphisme $M \times_N N \longrightarrow M/[M, N] \times_{N_{\text{ab}}} N_{\text{ab}}$ étant surjectif cette suite reste exacte après passage au produit extérieur.

La relation (8), $\lambda(t) \otimes n = t {}^n t^{-1}$ pour $t \in M \otimes N$ et $n \in N$, indique que le groupe $[M \otimes N, N]$ est égal à l'image de $[M, N] \otimes N = (\text{Im } \lambda) \otimes N$. La relation (13)

$${}^{n_2} m \otimes [n_1, n_2] = (\lambda(m \otimes n_2))^{-1} \otimes {}^m n_1 (\lambda(m \otimes n_1) \otimes {}^{n_1} n_2) \text{ pour } m \in M \text{ et } n_1, n_2 \in N$$

indique que celle de $M \otimes [N, N]$ est contenue dans ce même groupe. Le noyau de $M \otimes N \longrightarrow (M/[M, N]) \otimes N_{\text{ab}}$ est donc $[M \otimes N, N]$ et le résultat se transcrit au produit extérieur.

La généralisation aux produits multiples s'obtient par itération du cas $k = 1$. $\square$

Avec des injections

Les produits tensoriels et extérieurs ne sont pas exacts à gauche. Dans le cas particulier du produit tensoriel abélien le défaut provient d'une éventuelle torsion. Ce phénomène peut se retrouver dans le cas non-abélien. Considérons deux modules croisés $\mu: M \rightarrow P$ et $\nu: N \rightarrow P$ et M' un sous-module croisé de M . La torsion de N peut causer la non-injectivité des morphismes canoniques $M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ et $M' \wedge N \rightarrow M \wedge N$. Soit (m, n) un couple du produit fibré $M \times_P N$ avec n d'ordre k dans N . L'élément $m^k \otimes n$ est nul dans $M \otimes N$ car égal à $m \otimes n^k$. Si M' contient m^k nous obtenons un élément du noyau de $M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ (il est nul si M' contient aussi m).

Les différentes relations faisant intervenir des commutateurs généralisés, donc triviales dans le cas abélien, peuvent aussi contribuer à la non-injectivité.

Exemple 16. On utilise la relation $\lambda(t) \otimes n = t \cdot {}^n t^{-1}$, $t \in M \otimes N$. Si n agit trivialement sur t ($n \in \text{Ker } \nu$, $n = \lambda'(t), \dots$) cet élément est nul, et si M' contient $\lambda(t)$ nous obtenons un nouvel élément du noyau. Il est toutefois nul si $\lambda(t)$ appartient à l'image de la restriction de λ à $M' \otimes N$.

Exemple 17. L'identité $([m_1, m_2] \otimes {}^{m_2} n) (m_2 \cdot {}^n m_2^{-1} \otimes {}^n n_1) ({}^n m_1 m_1^{-1} \otimes {}^{m_1} n_2) = 1$ est vérifiée pour $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \times_P N$ et $n \in N$. Si le sous-module M' contient les éléments $[m_1, m_2] = \lambda(m_1 \otimes n_2) = \lambda(m_2 \otimes n_1)^{-1}$, $m_2 \cdot {}^n m_2^{-1} = \lambda(m_2 \otimes n)$ et ${}^n m_1 m_1^{-1} = \lambda(m_1 \otimes n)^{-1}$ nous obtenons de nouveau un élément du noyau (et ce dernier est nul si les trois termes appartiennent à $[M', N]$).

Ces deux exemples nécessitent que le sous-groupe $[M', N]$ soit strictement inclus dans l'intersection $[M, N] \cap M'$. On en trouvera des illustrations dans la remarque 28 de la section 4.3.

Dans le cas du produit extérieur la relation supplémentaire $m \wedge n = 1$ pour les couples $(m, n) \in M \times_P N$ peut amener un troisième exemple. En effet, $m^i \wedge n^j = (m \wedge n)^{ij} = 1$, donc si M' contient la puissance d'ordre k de m , l'élément $m^k \wedge n$ est dans le noyau de $M' \wedge N \rightarrow M \wedge N$. Cet élément est bien entendu nul si M' contient aussi m . Cette obstruction à l'exactitude correspond donc à la torsion de M/M' .

Plus généralement on peut se ramener au cas abélien en quotientant par l'action de P . Soient A, A' et B les groupes (abéliens) obtenus en quotientant respectivement M, M' et N par l'action de P . Nous obtenons le diagramme commutatif dans la catégorie $\mathcal{CM}$

$$\begin{array}{ccc} (\mu|_{M'}: M' \rightarrow P, \nu: N \rightarrow P) & \longrightarrow & (\mu: M \rightarrow P, \nu: N \rightarrow P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A' \rightarrow P_{\text{ab}}, B \rightarrow P_{\text{ab}}) & \longrightarrow & (A \rightarrow P_{\text{ab}}, B \rightarrow P_{\text{ab}}) \end{array}$$

et par suite les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' \otimes B & \longrightarrow & A \otimes B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} M' \wedge N & \longrightarrow & M \wedge N \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' \wedge B & \longrightarrow & A \wedge B \end{array}$$

Le groupe A' est le quotient de M' par $[M', P]$. Le noyau de $A' \rightarrow A$ est donc constitué du quotient $M' \cap [M, P]/[M', P]$. Le noyau de $A' \otimes B \rightarrow A \otimes B$ est engendré par $(M' \cap [M, P]/[M', P]) \otimes B$ et les éléments provenant de la torsion de B . Celui de $A' \wedge B \rightarrow A \wedge B$ contient en plus les éléments $k.a \wedge b$, avec $(a, b) \in A \times_P B$ et $k.a \in \text{Im}(A' \rightarrow A)$, provenant de la torsion de A/A' .

Voici un cas d'injectivité qui semblerait confirmer que la non exactitude à gauche provient de la torsion et du groupe quotient $M' \cap [M, P]/[M', P]$.

Théorème 18. *Soient $\mu: M \rightarrow N$ un module croisé et A un sous- N -module du noyau de μ vérifiant les conditions*

- N_{ab} est sans torsion
- l'intersection $A \cap [M, N]$ est réduite à l'élément neutre

Alors, le morphisme $A \otimes^k N \rightarrow M \otimes^k N$ induit par l'injection canonique $A \hookrightarrow M$ est injectif. Si, de plus, l'image de μ est contenue dans le sous-groupe de commutateurs $[N, N]$, $A \wedge^k N \rightarrow M \wedge^k N$ est également injectif.

Démonstration. On remarque tout d'abord que le noyau de μ , et donc A , agit trivialement sur N . De même N agit trivialement sur A puisque le sous-groupe $[A, N]$ est nul (il est inclus dans $A \cap [M, N]$). Le produit tensoriel $A \otimes N$ est donc isomorphe à $A \otimes N_{\text{ab}}$.

Le quotient par l'action de N induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\ \parallel & & \downarrow \\ A \otimes N_{\text{ab}} & \longrightarrow & (M/[M, N]) \otimes N_{\text{ab}} \end{array}$$

La seconde condition assure que le morphisme $A \rightarrow M/[M, N]$ est injectif. Avec la première nous pouvons alors affirmer que la ligne inférieure est une injection, ceci implique l'injectivité de $A \otimes N \rightarrow M \otimes N$.

Le produit fibré $A \times_N N$ est réduit aux couples $(a, 1)$. Le produit extérieur $A \wedge N$ est donc isomorphe au produit tensoriel. Le passage au produit extérieur donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \wedge N & \longrightarrow & M \wedge N \\ \parallel & & \downarrow \\ A \otimes N_{\text{ab}} & \longrightarrow & (M/[M, N]) \wedge N_{\text{ab}} \end{array}$$

L'hypothèse supplémentaire rend le produit fibré $(M/[M, N]) \times_{N_{\text{ab}}} N_{\text{ab}}$ nul. Le produit extérieur $(M/[M, N]) \wedge N_{\text{ab}}$ est donc isomorphe à $(M/[M, N]) \otimes N_{\text{ab}}$ et la ligne inférieure, identique à la précédente, est une injection. Par conséquent $A \wedge N \rightarrow M \wedge N$ est injectif.

Supposons le résultat démontré au rang k . Le module croisé $M \otimes^k N \rightarrow N$ (resp. $M \wedge^k N \rightarrow N$) et le sous-groupe $A \otimes^k N$ (resp. $A \wedge^k N$) vérifie les conditions demandées. En effet $(A \otimes^k N) \cap [M \otimes^k N, N]$ (resp. $(A \wedge^k N) \cap [M \wedge^k N, N]$) étant le noyau du morphisme $A \otimes^k N \rightarrow (M/[M, N]) \otimes^k N_{\text{ab}}$ il est nul. Le résultat est donc également vrai au rang $k + 1$. $\square$

Remarque 19. Nous sommes bien dans un cas particulier sans torsion et où le quotient qui pose problème (ici il est égal à $A \cap [M, N]$) est nul.

3 Homologie des groupes et relations entre commutateurs

On considère un groupe G , et une présentation libre de ce groupe

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1$$

3.1 Dimensions deux et trois

Clair Miller [Mi, théorème 2, p. 593] a démontré que le deuxième groupe d'homologie de G est isomorphe au groupe des relations entre commutateurs de G , modulo les relations universelles (vérifiées dans tous les groupes). Plus précisément, l'auteur utilise le système de relation

- i. $\langle x, x \rangle = 1$
- ii. $\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = 1$
- iii. $\langle xy, z \rangle = {}^x \langle y, z \rangle \langle x, z \rangle$
- iv. $\langle x, [y, z] \rangle = {}^x \langle y, z \rangle \langle y, z \rangle^{-1}$

Ce système engendre les identités universelles entre commutateurs. Les identités (i) et (iii) correspondent à deux des relations, $x \wedge x = 1$ et $xy \wedge z = {}^x(y \wedge z)(x \wedge z)$, définissant le produit extérieur $G \wedge G$ (obtenu avec le module croisé id_G). R. Keith Dennis [De, §2, p. 6-8] a montré que ces systèmes étaient équivalents (l'identité (ii) correspond à la relation $(x \wedge y)(y \wedge x) = 1$ que nous avons énoncé dans le lemme 4 et (iv) à $x \wedge [y, z] = {}^x(y \wedge z)(y \wedge z)^{-1}$ qui est un cas particulier de (26)). Le résultat de Miller peut donc s'exprimer par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow G \wedge G \longrightarrow [G, G] \longrightarrow 1 \quad (35)$$

Dans [BrLo, corollaire 4.7, p. 323] (version topologique) et [El1, théorème 6, p. 17] (version algébrique), le troisième groupe d'homologie reçoit une description analogue. C'est le groupe des relations entre éléments de $[R, F]$, modulo les relations universelles. De même que précédemment, les relations de définition du produit extérieur $R \wedge F$ (obtenu à partir des modules croisés $i: R \hookrightarrow F$ et id_F) engendrent toutes les relations universelles dans $[R, F]$. D'où une nouvelle suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_3(G) \longrightarrow R \wedge F \longrightarrow [R, F] \longrightarrow 1 \quad (36)$$

Remarque 20. En composant avec l'injection canonique $[R, F] \hookrightarrow [F, F]$ on obtient $H_3(G)$ comme noyau du morphisme $R \wedge F \longrightarrow [F, F]$. Le groupe F étant libre la suite exacte courte (35) indique que le sous-groupe de commutateurs $[F, F]$ est isomorphe au produit extérieur $F \wedge F$. Le groupe $H_3(G)$ est ainsi isomorphe au noyau du morphisme $R \wedge F \longrightarrow F \wedge F$. Il caractérise donc une certaine obstruction à l'exactitude à gauche du produit extérieur.

3.2 Version abélienne en dimensions supérieures

Nous allons utiliser des énoncés du livre de Peter John Hilton et Urs Stambach [HiSt, chapitre VI] pour exprimer les groupes d'homologie en dimensions supérieures de manière analogue. Toutefois, nous devons considérer des G -modules et des relations entre commutateurs généralisés et non plus des groupes et des relations entre commutateurs.

D'après les théorèmes de réduction [HiSt, chapitre VI, théorèmes 12.1 et 12.2, p. 213 et 214], les groupes d'homologie à coefficients dans un G -module B vérifient,

$$\text{pour } n \geq 2, \quad H_n(G, B) = H_{n-1}(G, B \otimes IG)$$

$$\text{pour } n \geq 3, \quad H_n(G, B) = H_{n-2}(G, B \otimes R_{\text{ab}})$$

L'action par conjugaison de F sur R induit une action de F sur R_{ab} . Le sous-groupe R agissant trivialement sur R_{ab} , on obtient, en passant au quotient, une action de G sur R_{ab} qui munit ce dernier d'une structure de G -module.

En appliquant successivement ces résultats, on obtient les formules suivantes

$$H_n(G) = H_1(G, IG^{\otimes n-1})$$

$$H_{2n+1}(G) = H_1(G, R_{\text{ab}}^{\otimes n}) \quad H_{2n}(G) = H_1(G, R_{\text{ab}}^{\otimes n-1} \otimes IG)$$

Tous les groupes d'homologie s'expriment donc en terme de H_1 . Nous allons maintenant voir que le premier groupe peut être vu comme groupe de relations entre commutateurs généralisés.

Ceci est exprimé dans [HiSt, chapitre VI, (4.2), p. 192], résultat qui, à l'aide de la proposition 5, correspond à l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow H_1(G, B) \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow [B, G] \longrightarrow 0$$

D'où, les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H_{2n+1}(G) \longrightarrow R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G \longrightarrow [R_{\text{ab}}^{\otimes n}, G] \longrightarrow 0 \quad (37)$$

$$0 \longrightarrow H_{2n}(G) \longrightarrow (R_{\text{ab}}^{\otimes n-1} \otimes IG) \otimes G \longrightarrow [R_{\text{ab}}^{\otimes n-1} \otimes IG, G] \longrightarrow 0 \quad (38)$$

En particulier, en dimension 3, on obtient

$$0 \longrightarrow H_3(G) \longrightarrow R_{\text{ab}} \otimes G \longrightarrow [R_{\text{ab}}, G] \longrightarrow 0$$

La démonstration algébrique de l'interprétation de $H_3(G)$ comme groupe de relations dans $[R, F]$ (suite exacte courte (36)) par Graham J. Ellis ([El1, théorème 6]) passe par un lien avec la suite exacte courte précédente à travers le diagramme commutatif suivant (lignes et colonnes sont exactes)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \longrightarrow & H_3(G) & \longrightarrow & R_{\text{ab}} \otimes G & \longrightarrow & [R_{\text{ab}}, G] \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H_3(G) & \longrightarrow & R \wedge F & \longrightarrow & [R, F] \longrightarrow 1 \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & R \wedge R & \cong & [R, R] & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

Le groupe $R_{\text{ab}} \otimes G$ peut aussi s'obtenir à partir des modules croisés $1 : R_{\text{ab}} \longrightarrow G$ et id_G . La flèche $\Sigma : (i : R \hookrightarrow F, \text{id}_F) \twoheadrightarrow (1 : R_{\text{ab}} \longrightarrow G, \text{id}_G)$ est une surjection dans la catégorie $\mathcal{CM}$. D'après la remarque 6, $R_{\text{ab}} \wedge G$ est isomorphe à $R_{\text{ab}} \otimes G$. La surjection $R \wedge F \twoheadrightarrow R_{\text{ab}} \otimes G$ correspond donc à $E\Sigma$. Les modules croisés $R \wedge F \longrightarrow R$ et $R_{\text{ab}} \otimes G \longrightarrow R_{\text{ab}}$ correspondent respectivement aux applications du foncteur K au couple $(i : R \hookrightarrow F, \text{id}_F)$ et du foncteur K (ou Λ) à $(1 : R_{\text{ab}} \longrightarrow G, \text{id}_G)$.

Nous allons construire des diagrammes similaires en dimensions impaires supérieures dans la section 5.

3.3 Une version alternative

Nous construisons tout d'abord une G -résolution libre de $\mathbb{Z}$ faisant intervenir les groupes F et R . Le terme L_0 est tout simplement le groupe abélien libre sur G et $\partial_0 : L_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme d'augmentation. Le noyau de ∂_0 est engendré comme groupe abélien par l'ensemble $\{g - 1/g \in G\}$. Comme $g^{-1} - 1 = -g^{-1}(g - 1)$ et $g_1 g_2 - 1 = g_1(g_2 - 1) + (g_1 - 1)$ il est engendré comme G -module par tout ensemble générateur de G , donc par $\varphi(X)$ où X est une base de F . Nous pouvons donc prendre pour L_1 le G -module libre sur X et $\partial_1 : L_1 \longrightarrow L_0$ induit par l'application

$$\begin{aligned}
 X &\longrightarrow L_0 \\
 x &\longmapsto \varphi x - 1
 \end{aligned}$$

Soient M_1 le noyau de ∂_1 , L_2 le G -module libre engendré par M_1 et p_2 le G -morphisme canonique de L_2 dans M_1 . On définit M_n , L_{n+1} et p_{n+1} par récurrence comme suit :

- M_n est le noyau de p_n
- L_{n+1} est le G -module libre engendré par M_n
- p_{n+1} est le G -morphisme canonique de L_{n+1} dans M_n

En notant ∂_n la composée de p_n et de l'injection $M_{n-1} \hookrightarrow L_{n-1}$ il est clair que la suite infinie

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_0} L_0 \xleftarrow{\partial_1} L_1 \xleftarrow{\partial_2} L_2 \xleftarrow{\partial_3} L_3 \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\partial_n} L_n \xleftarrow{\dots} \dots$$

est exacte. Elle constitue donc une G -résolution libre de $\mathbb{Z}$.

On obtient l'homologie entière du groupe G comme l'homologie du complexe induit par application du foncteur $\mathcal{T} = - \otimes_G \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\partial_0} & L_0 & \xleftarrow{\partial_1} & L_1 & \xleftarrow{\partial_2} & L_2 & \xleftarrow{\partial_3} & L_3 & \xleftarrow{\dots} & \dots & \xleftarrow{\dots} & L_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & L_n & \xleftarrow{\dots} & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & \mathcal{T} \downarrow & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \mathbb{Z} & \xleftarrow{d_1} & L'_1 & \xleftarrow{d_2} & L'_2 & \xleftarrow{d_3} & L'_3 & \xleftarrow{\dots} & \dots & \xleftarrow{\dots} & L'_{n-1} & \xleftarrow{d_n} & L'_n & \xleftarrow{\dots} & \dots \end{array}$$

Le groupe $H_n(G)$ est donc isomorphe au quotient $\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$.

Pour $n \geq 2$ l'image L'_n de L_n est le groupe abélien libre engendré par M_{n-1} et le morphisme $d_n: L'_n \rightarrow L'_{n-1}$ s'obtient en annulant l'action de G . Le générateur (μ) , avec $\mu = \sum_{i=1}^N g_i(m_i)$, $m_i \in M_{n-2}$ ($\mu \in M_{n-1}$), est ainsi envoyé sur $\sum_{i=1}^N (m_i)$. Quant à L'_1 , c'est le groupe abélien libre sur X et le morphisme $d_2: L'_2 \rightarrow L'_1$ envoie le générateur (m) , avec $m = \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \in M_1$, sur $\sum_{i=1}^N (x_i)$.

Pour $n \geq 3$ le quotient $\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$ est isomorphe au noyau du morphisme $M_{n-2} \otimes G \rightarrow [M_{n-2}, G]$. Le noyau de ∂_n , qui est égal à l'image de ∂_{n+1} , est engendré par les éléments

- $(m + m') - (m) - (m')$
- $(^g m) - g.(m)$

avec m et m' éléments de M_{n-1} et g élément de G . On obtient des générateurs de l'image de d_{n+1} en quotientant par l'action de G . Ceci nous donne les éléments $(m + m') - (m) - (m')$ et $(^g m) - (m)$.

Le groupe L'_n est constitué de sommes $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\mu_i)$ avec $\mu_i \in M_{n-1}$. Modulo l'image de d_{n+1} (on utilise uniquement le premier groupe de générateurs) on peut toujours se ramener à un élément de la forme (μ) . Le terme μ est une somme $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i(m_i)$ avec

$m_i \in M_{n-2}$ vérifiant $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i m_i = 0$. Le morphisme d_n envoie (μ) sur $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i(m_i)$. Le quotient $\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$ est donc formé des classes d'éléments $(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i(m_i))$ vérifiant

$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i m_i = 0$ et $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i(m_i) = 0$. C'est à dire que $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i(m_i) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(g_i(m_i) - (m_i))$ et $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i m_i = 0 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(^g m_i - m_i)$. La somme $x = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(m_i \otimes g_i)$ est donc un élément du noyau de $M_{n-2} \otimes G \rightarrow [M_{n-2}, G]$. Notre isomorphisme est basé sur l'application $(\mu) \mapsto x$.

On peut déjà vérifier qu'elle est compatible avec la seconde relation $({}^g\mu - \mu) = 0$ ($\mu \in M_{n-1}$) qu'impose le quotient par l'image de d_{n+1} . Avec $\mu = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i g_i(m_i)$ on obtient $x = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes (g g_i) - m_i \otimes g_i)$. La relation (2) de définition du produit tensoriel donne $m_i \otimes (g g_i) = m_i \otimes g + {}^g(m_i \otimes g_i)$. En regroupant convenablement on arrive à $x = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g) + {}^g(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g_i)) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g_i)$. La relation (1) permet de ramener la première somme à $(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i m_i) \otimes g = 0 \otimes g = 0$. Finalement x est nul car G agit trivialement sur le noyau de $M_{n-2} \otimes G \longrightarrow [M_{n-2}, G]$ ($\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g_i)$ étant un élément de ce noyau, ${}^g(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g_i))$ est égal à $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g_i)$). Il est clair que l'application obtenue

$$\begin{aligned} \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1} &\longrightarrow \text{Ker } (M_{n-2} \otimes G \longrightarrow [M_{n-2}, G]) \\ (\mu) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Sa réciproque envoie $x = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (m_i \otimes g_i)$ sur $(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i (g_i(m_i) - (m_i)))$. Reste à vérifier qu'elle est bien compatible avec les relations du produit tensoriel. On démontre aisément que ces relations sont envoyées sur celles provenant du quotient par l'image de d_{n+1} .

Nous obtenons ainsi les suites exactes ($n \geq 3$)

$$0 \longrightarrow H_n(G) \longrightarrow M_{n-2} \otimes G \longrightarrow [M_{n-2}, G] \longrightarrow 0$$

Remarque 21. L'étude du quotient $\text{Ker } d_2 / \text{Im } d_3$ redonne assez facilement la formule de Hopf $H_2(G) \cong R \cap [F, F] / [R, F]$.

Le groupe M_1 est en fait isomorphe à R_{ab} . L'injection canonique de X dans L_1

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow L_1 \\ x &\longmapsto (x) \end{aligned}$$

permet de définir un morphisme croisé $\psi: F \longrightarrow L_1$ c'est à dire une application vérifiant $\psi(f_1 f_2) = \psi(f_1) + \varphi(f_1) \cdot \psi(f_2)$. La restriction $\psi|_R$ de ψ à R est donc un morphisme de groupes et se factorise ainsi à travers R_{ab} . Allan J. Sieradski étudie ce morphisme croisé dans [Si2, section 2, p. 84]. Il utilise un énoncé de J. H. C. Whitehead [WhJ1, théorème 8, p. 469] pour montrer que son noyau est restreint à $[R, R]$. Ce résultat peut se démontrer directement.

L'image par ψ de $r = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ est $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_i(x_i)$, avec $g_i = \prod_{j=1}^{i-1} x_j^{\varepsilon_j}$ si $\varepsilon_i = 1$ et $g_i = \prod_{j=1}^i x_j^{\varepsilon_j}$ si $\varepsilon_i = -1$. Le noyau de $\psi|_R$ est donc formé des éléments $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \in R$ tels qu'il existe une partition de l'ensemble des indices en paires ordonnées $i < j$ vérifiant $x_i = x_j$, $\varepsilon_i = -\varepsilon_j$ et $\prod_{k=i+1}^{j-1} x_k^{\varepsilon_k} \in R$. En particulier les éléments du noyau sont de longueur paire. On fait une récurrence sur cette longueur.

Si $r = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}$ on a forcément $x_1 = x_2$ et $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, et donc $r \in [R, R]$. Si $r = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ on peut supposer, quitte à conjuguer r (c'est à dire multiplier par un élément de $[R, R]$), que la paire $1 < i$ est de longueur minimale parmi toutes les paires. L'indice $i-1$ est donc associé à un indice j qui est strictement plus grand que i . Nous avons donc

$$r = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}} x_1^{-\varepsilon_1} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots x_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}} x_{i-1}^{-\varepsilon_{i-1}} x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

avec $r_1 = x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}$ et $r_2 = x_1^{-\varepsilon_1} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots x_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}$ des éléments de R . Modulo $[R, R]$ on peut se débarrasser des quatre facteurs $x_1^{\varepsilon_1}$, $x_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}$, $x_1^{-\varepsilon_1}$ et $x_{i-1}^{-\varepsilon_{i-1}}$. En effet,

$$\begin{aligned} r &= x_1^{\varepsilon_1} r_1 r_2 x_{i-1}^{-\varepsilon_{i-1}} x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \\ &= x_1^{\varepsilon_1} [r_1, r_2] r_2 r_1 x_{i-1}^{-\varepsilon_{i-1}} x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \\ &= x_1^{\varepsilon_1} [r_1, r_2] x_1^{\varepsilon_1} r_2 r_1 x_{i-1}^{-\varepsilon_{i-1}} x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \\ &= x_1^{\varepsilon_1} [r_1, r_2] x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots x_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_{i-2}^{\varepsilon_{i-2}} x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

Le morphisme induit $R_{ab} \longrightarrow L_1$ est donc injectif. De plus la composée $\partial_1 \circ \psi$ envoie f sur $\varphi f - 1$, sa restriction à R est donc nulle. D'où l'injection $R_{ab} \hookrightarrow \text{Ker } \partial_1$.

Si (x) est dans le noyau de ∂_1 , alors x est un élément de R et (x) est donc contenu dans l'image de notre injection. Plus généralement, si $l = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_i(x_i)$ est dans le noyau de ∂_1 , alors, le produit $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ est dans R et est un antécédent de l . Quitte à factoriser par g_1 et à multiplier par -1 , on peut supposer $\varepsilon_1 = 1$ et $g_1 = 1$. L'image par ∂_1 de $\varepsilon_1 g_1(x_1) = (x_1)$ est alors $\varphi x_1 - 1$. Cette image est non nulle si x_1 n'est pas un élément de R . On peut alors supposer que φx_1 s'annule avec un des termes de $\partial_1(\varepsilon_2 g_2(x_2)) = \varepsilon_2 g_2(\varphi x_2 - 1)$. S'il s'annule avec $\varepsilon_2 g_2 \varphi x_2$, alors $\varepsilon_2 = -1$ et $g_2 = \varphi(x_1 x_2^{-1}) = \varphi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2})$. S'il s'annule avec $-\varepsilon_2 g_2$, alors $\varepsilon_2 = 1$ et $g_2 = \varphi(x_1) = \varphi(x_1^{\varepsilon_1})$. Dans les deux cas $\varepsilon_1 g_1(x_1) + \varepsilon_2 g_2(x_2) = \psi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2})$ et son image par ∂_1 est $\varphi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}) - 1$. On suppose alors que $\varphi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2})$ s'annule avec un des termes provenant de $\varepsilon_3 g_3(x_3)$ et on obtient $\varepsilon_1 g_1(x_1) + \varepsilon_2 g_2(x_2) + \varepsilon_3 g_3(x_3) = \psi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3})$ et son image par ∂_1 est $\varphi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3}) - 1$. En réitérant le processus on arrive à $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_i(x_i) = \psi(\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i})$ et $\varphi(\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}) - 1 = 0$, c'est à dire que le produit est bien un élément de R .

La première suite obtenue est donc

$$0 \longrightarrow H_3(G) \longrightarrow R_{ab} \otimes G \longrightarrow [R_{ab}, G] \longrightarrow 0$$

Elle est identique à celle que fournit la version précédente. Le diagramme de Ellis

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_3(G) & \longrightarrow & R_{\text{ab}} \otimes G & \longrightarrow & [R_{\text{ab}}, G] \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H_3(G) & \longrightarrow & R \wedge F & \longrightarrow & [R, F] \longrightarrow 1
 \end{array}$$

peut aussi s'obtenir via une section de la surjection

$$\text{Ker}(R \wedge F \longrightarrow [R, F]) \twoheadrightarrow \text{Ker}(R_{\text{ab}} \otimes G \longrightarrow [R_{\text{ab}}, G])$$

Un élément du noyau de droite s'écrit comme une somme $s = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \otimes g_i$ vérifiant la condition $\sum_{i=1}^n \bar{r}_i - {}^g \bar{r}_i = 0$. Un antécédent $p = \prod_{i=1}^n r_i \wedge f_i$ est envoyé sur $c = \prod_{i=1}^n [r_i, f_i]$. Ce dernier terme n'est pas nul, mais il est contenu dans le sous-groupe $[R, R]$. Il admet donc un antécédent $\tilde{c}$ se trouvant dans l'image de $R \wedge R \longrightarrow R \wedge F$. L'application $s \longmapsto p \tilde{c}^{-1}$ permet de construire notre section. C'est à dire qu'elle est indépendante des choix arbitraires effectués et qu'elle respecte les relations définissant le produit tensoriel $R_{\text{ab}} \otimes G$.

4 Suite centrale descendante et produit tensoriel

Nous avons déjà souligné le rapport entre le produit tensoriel défini à partir de modules croisés sur un même groupe et le sous-groupe de commutateurs correspondant. Ainsi, pour la suite centrale descendante d'un groupe R nous disposons des surjections canoniques $\gamma_n(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_{n+1}(R)$. En les associant nous obtenons une nouvelle surjection à partir du produit tensoriel multiple $R^{\otimes n} \twoheadrightarrow \gamma_n(R)$. Il est clair que toutes ces surjections se factorisent par le produit extérieur. De plus, ce sont des morphismes de R -modules croisés.

Lorsque R est libre le sous-groupe $\gamma_n(R)$ l'est aussi. La surjection $R^{\otimes n} \twoheadrightarrow \gamma_n(R)$ est alors scindée. On peut se demander si elle admet une section de R -modules croisés. L'intérêt d'une telle section est qu'elle "passe" au produit tensoriel ou extérieur.

4.1 Sections de morphismes de modules croisés

Soient un groupe P et $\partial: M \twoheadrightarrow M'$ une surjection dans la catégorie des P -modules croisés. Le morphisme ∂ induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & [M, P] & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/[M, P] \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & [M', P] & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'/[M', P] \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 0
 \end{array}$$

On note que, M et M' agissant via P , leurs sous-groupes de commutateurs généralisés $[M, P]$ et $[M', P]$ sont bien distingués, qu'ils contiennent les sous-groupes de commutateurs classiques $[M, M]$ et $[M', M']$ et que les quotients $M/[M, P]$ et $M'/[M', P]$ sont ainsi abéliens.

Si ∂ admet une section s qui est également un morphisme de P -modules croisés, alors l'élément $[m', p] = m' p m'^{-1}$ est envoyé sur $s(m')^p s(m')^{-1} = [s(m'), p]$. C'est à dire que la restriction de s à $[M', P]$ est une section de $\partial|_{[M, P]}: [M, P] \twoheadrightarrow [M', P]$. Notre P -section s est donc compatible avec le passage au quotient et induit une section du morphisme $M/[M, P] \twoheadrightarrow M'/[M', P]$.

Dans le cas où P agit trivialement sur le noyau de ∂ (exemple $\lambda: N \otimes P \twoheadrightarrow [N, P]$), l'existence d'une P -section est encore plus contraignante pour la restriction.

Proposition 22. *Si P agit trivialement sur le noyau de ∂ et si ce dernier admet une P -section s , alors la restriction $\partial|_{[M, P]}: [M, P] \twoheadrightarrow [M', P]$ est un isomorphisme dont la réciproque est la restriction de s , $s|_{[M', P]}: [M', P] \twoheadrightarrow [M, P]$.*

Démonstration. Par définition $\partial \circ s$ est l'identité, en particulier sur $[M', P]$. L'image par ∂ de $[m, p]$ est $[\partial m, p]$. Ce dernier est envoyé par s sur $[s\partial m, p]$. L'élément $m s\partial m^{-1}$ est contenu dans le noyau de ∂ . Ce sous-groupe étant central (car ∂ est un module croisé) et P agissant trivialement sur lui, on obtient l'égalité $[s\partial m, p] = [m, p]$. La composée $s \circ \partial$ correspond donc à l'identité sur $[M, P]$. $\square$

Remarque 23. Le fait que $\partial_{[M,P]} : [M, P] \rightarrow [M', P]$ soit un isomorphisme implique la trivialité de l'action de P sur $\text{Ker } \partial$, et ceci qu'il existe une section ou pas. En effet cette trivialité équivaut à la nullité du sous-groupe $[\text{Ker } \partial, P]$ qui est contenu dans l'intersection de $\text{Ker } \partial$ et de $[M, P]$, laquelle n'est autre que le noyau de la restriction.

Nous considérons maintenant la réciproque, c'est à dire, $\partial_{[M,P]} : [M, P] \rightarrow [M', P]$ étant un isomorphisme, une section de $M/[M, P] \rightarrow M'/[M', P]$ induit-elle une P -section de ∂ ? La réponse est oui quand le groupe quotient $M'/[M', P]$ est libre.

Théorème 24. *Si $\partial_{[M,P]} : [M, P] \rightarrow [M', P]$ est un isomorphisme et si le groupe abélien $M'/[M', P]$ est libre il existe des P -sections de ∂ .*

Démonstration. Soit B une famille de représentants des images réciproques dans M' des éléments d'une base du quotient $M'/[M', P]$ et $\tilde{B}$ un ensemble d'antécédents dans M des éléments de B .

Tout élément de M' s'écrit sous la forme $m' = c \prod_{i=1}^n b_i^{\varepsilon_i}$ avec $c \in [M', P]$, $b_i \in B$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. En considérant $\tilde{c}$ l'image de c par la réciproque de $\partial_{[M,P]} : [M, P] \rightarrow [M', P]$ et $\tilde{b}_i$ l'antécédent de b_i on obtient un antécédent $s(m') = \tilde{c} \prod_{i=1}^n \tilde{b}_i^{\varepsilon_i}$. Une telle écriture n'est pas unique, elle dépend de l'ordre dans le produit $\prod_{i=1}^n b_i^{\varepsilon_i}$.

Un changement de cet ordre amène à multiplier c et $\tilde{c}$ par des commutateurs du type respectif $[b_i, b_j]$ et $[\tilde{b}_i, \tilde{b}_j]$. Comme $[\tilde{b}_i, \tilde{b}_j]$ est contenu dans $[M, P]$ il est l'antécédent de $[b_i, b_j]$ par l'isomorphisme $\partial_{[M,P]}$. L'élément $s(m')$ est donc indépendant de l'écriture de m' . Reste à vérifier que s ainsi défini est bien un P -morphisme.

Soient $m'_1 = c_1 \pi_1$ et $m'_2 = c_2 \pi_2$ deux éléments de M' . Le produit $m'_1 m'_2$ est égal au produit $c \pi$ avec $c = c_1 [\pi_1, c_2] c_2$ et $\pi = \pi_1 \pi_2$. Avec cette écriture l'image de $m'_1 m'_2$ est $\tilde{c} \tilde{\pi}$. Les antécédents sont respectivement $\tilde{c} = \tilde{c}_1 [\tilde{\pi}_1, \tilde{c}_2] \tilde{c}_2$ et $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2$. Ainsi $s(m'_1 m'_2) = \tilde{c}_1 \tilde{\pi}_1 \tilde{c}_2 \tilde{\pi}_2 = s(m'_1) s(m'_2)$.

Enfin, comme $[s(m'), p]$ appartient à $[M, P]$ c'est l'image par s de $[m', p]$. Ceci signifie que $s({}^p m') = {}^p s(m')$ et donc que s est un P -morphisme. $\square$

Remarque 25. Le choix d'un ordre total sur B permettrait d'imposer une écriture unique avec les b_i rangés par ordre croissant et simplifierait d'autant la démonstration. Il est toutefois intéressant de noter que la section en est indépendante. Elle est uniquement déterminée par le choix de $\tilde{B}$.

Nous pouvons maintenant appliquer ces résultats aux surjections $R^{\otimes n} \rightarrow \gamma_n(R)$ avec R libre.

4.2 Application à $R \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_2(R)$

Nous sommes amenés à considérer le diagramme commutatif (lignes et colonnes sont exactes)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 1 & & 1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \lambda_2 \cap [R \otimes R, R] & \longrightarrow & [R \otimes R, R] & \longrightarrow & \gamma_3(R) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \lambda_2 & \longrightarrow & R \otimes R & \xrightarrow{\lambda_2} & \gamma_2(R) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \lambda_2}{\text{Ker } \lambda_2 \cap [R \otimes R, R]} & \longrightarrow & R \otimes R / [R \otimes R, R] & \longrightarrow & \gamma_2(R) / \gamma_3(R) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Le morphisme λ_2 est défini par $\lambda_2(r \otimes s) = [r, s]$. Comme R est libre $\gamma_2(R)$ est isomorphe à $R \wedge R$ (suite exacte (35)). Le noyau de $R \otimes R \twoheadrightarrow R \wedge R$ se décrit à l'aide du foncteur quadratique universelle Γ de J. H. C. Whitehead [WhJ2] (ou [BrLo, p. 316]). Ce noyau, qui est abélien puisque $R \otimes R \twoheadrightarrow R \wedge R$ est un module croisé, est engendré par les éléments $r \otimes r$. Ceux-ci ne dépendent en fait que de la classe de r modulo $\gamma_2(R)$ et vérifient les relations

$$r^{-1} \otimes r^{-1} = r \otimes r$$

$$r_1 r_2 r_3 \otimes r_1 r_2 r_3 - r_1 r_2 \otimes r_1 r_2 - r_2 r_3 \otimes r_2 r_3 - r_1 r_3 \otimes r_1 r_3 + r_1 \otimes r_1 + r_2 \otimes r_2 + r_3 \otimes r_3 = 1$$

qui définissent Γ . Ce noyau est donc un quotient de $\Gamma(R_{\text{ab}})$. Il lui est même isomorphe car R_{ab} est libre (voir [BrLo, (2.7), p. 316]). Le sous-groupe des commutateurs de poids trois est donc isomorphe à $[R \wedge R, R]$ et $\gamma_2(R) / \gamma_3(R)$ à $R \wedge R / [R \wedge R, R]$. La colonne de droite se réécrit comme suit

$$1 \longrightarrow [R \wedge R, R] \longrightarrow R \wedge R \longrightarrow R \wedge R / [R \wedge R, R] \longrightarrow 0$$

L'application du lemme 15 au module croisé id_R nous donne les isomorphismes

$$R \otimes R / [R \otimes R, R] \cong R_{\text{ab}} \otimes R_{\text{ab}} \quad \text{et} \quad R \wedge R / [R \wedge R, R] \cong R_{\text{ab}} \wedge R_{\text{ab}}$$

La dernière ligne est donc

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \mu_2 \longrightarrow R_{\text{ab}} \otimes R_{\text{ab}} \xrightarrow{\mu_2} R_{\text{ab}} \wedge R_{\text{ab}} \longrightarrow 0$$

où μ_2 est défini par $\mu_2(a \otimes b) = a \wedge b$.

Toujours d'après [BrLo, (2.7)], et parce que R est libre, le noyau de μ_2 est isomorphe à $\Gamma(R_{\text{ab}})$ et donc au noyau de λ_2 . Par conséquent l'intersection $\text{Ker } \lambda_2 \cap [R \otimes R, R]$ est nulle et $[R \otimes R, R]$ est isomorphe à $\gamma_3(R)$.

Nous pouvons réécrire notre diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & [R \otimes R, R] & \cong & \gamma_3(R) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(R_{\text{ab}}) & \longrightarrow & R \otimes R & \xrightarrow{\lambda_2} & \gamma_2(R) \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(R_{\text{ab}}) & \longrightarrow & R_{\text{ab}} \otimes R_{\text{ab}} & \longrightarrow & \gamma_2(R)/\gamma_3(R) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Le théorème 24 nous certifie l'existence de R -sections du morphisme de R -modules croisés λ_2 . Nous pouvons en construire une à partir d'une base du groupe abélien libre $\gamma_2(R)/\gamma_3(R)$. Marshall Hall Jr a exhibé des bases pour tous les quotients $\gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R)$ [Ha, théorème 11.2.4, p. 175], Edward B. Curtis a prolongé ce résultat pour obtenir des bases de la suite centrale descendante [Cu, théorème 5.6, p. 399].

Nous utiliserons les notations $[r_1, r_2, \dots, r_m] = [[r_1, r_2, \dots, r_{m-1}], r_m]$ et, pour $t \in R \otimes R$, $[t, r] = t {}^r t^{-1} = \lambda_2(t) \otimes r$ (relation 8) et $[t, r_1, \dots, r_m] = [[t, r_1, \dots, r_{m-1}], r_m]$. Étant donnée une base ordonnée X de R , X^{-1} est l'ensemble des inverses des éléments de X et $X \cup X^{-1}$ est ordonnée de la façon suivante : on conserve l'ordre de X , $x < x^{-1}$, $x^{-1} < y$ si $x < y$ et $x^{-1} < y^{-1}$ si $x < y$.

Le groupe abélien $\gamma_2(R)/\gamma_3(R)$ admet comme base l'ensemble B_2 formé des classes des commutateurs $[x, y]$ avec $x > y \in X$. Une R -section de λ_2 dépend uniquement d'un choix d'antécédents pour ces commutateurs, par exemple $s_2([x, y]) = x \otimes y$. Un élément $[c, r]$ de $\gamma_3(R)$ sera lui envoyé sur son antécédent $c \otimes r$. Nous pouvons regarder ce que cela donne sur une base de $\gamma_2(R)$.

Le groupe $\gamma_2(R)$ est libre sur la base $C(2, p)$ (avec $p \geq 2$) composée des commutateurs $[y_0, y_1, \dots, y_n]$ vérifiant les conditions

- a) $y_0 \in X$
- b) Pour $i \geq 1$, $y_i \in X \cup X^{-1}$
- c) $y_0 > y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$
- d) Si $y_i = x^{-1} \in X^{-1}$, alors $y_{i-1} = x^{-1}$ ou bien $y_{i-p-1} \neq x = y_{i-p} = \dots = y_{i-1}$.

Cette dernière condition assure que les générateurs de poids inférieur à $p + 1$ ne contiennent pas d'inverses. Elle sert à la construction de bases pour les termes suivants de la suite centrale descendante.

Les termes de poids deux correspondent à B_2 , les autres appartiennent à $\gamma_3(R)$. Avec notre choix précédent la section est définie par $s_2([y_0, y_1, \dots, y_n]) = [y_0 \otimes y_1, y_2, \dots, y_n]$, définition qui vérifie bien pour $n \geq 2$, $s_2([y_0, y_1, \dots, y_n]) = [y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] \otimes y_n$.

La proposition 18 nous assure l'exactitude des suites

$$0 \longrightarrow (\Gamma(R_{\text{ab}})) \wedge^k R \longrightarrow (R \otimes R) \wedge^k R \longrightarrow \gamma_2(R) \wedge^k R \longrightarrow 1 \quad (39)$$

La R -section s_2 induit une section pour chacune d'entre elles. Le produit extérieur multiple $(\Gamma(R_{\text{ab}})) \wedge^k R$ est isomorphe au produit tensoriel multiple $(\Gamma(R_{\text{ab}})) \otimes^k R_{\text{ab}}$.

4.3 Application à $\gamma_2(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_3(R)$

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 1 & & 1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \lambda_3 \cap [\gamma_2(R) \otimes R, R] & \longrightarrow & [\gamma_2(R) \otimes R, R] & \longrightarrow & \gamma_4(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \lambda_3 & \longrightarrow & \gamma_2(R) \otimes R & \xrightarrow{\lambda_3} & \gamma_3(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \lambda_3}{\text{Ker } \lambda_3 \cap [\gamma_2(R) \otimes R, R]} & \longrightarrow & \gamma_2(R) \otimes R / [\gamma_2(R) \otimes R, R] & \xrightarrow{\alpha_3} & \gamma_3(R) / \gamma_4(R) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Le noyau de $\gamma_2(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_2(R) \wedge R$ est contenu dans celui de λ_3 . Il est engendré par les éléments $c \otimes c$ avec $c \in \gamma_2(R)$. La relation 13 assure que ces éléments sont également contenus dans $[\gamma_2(R) \otimes R, R]$. La proposition 22 permet d'affirmer que λ_3 n'admet pas de R -section. Si l'intersection $\text{Ker } \lambda_3 \cap [\gamma_2(R) \otimes R, R]$ est restreinte au noyau de $\gamma_2(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_2(R) \wedge R$ l'obstruction doit disparaître après passage au produit extérieur.

Voici le nouveau diagramme obtenu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 1 & & 1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_3 \cap [\gamma_2(R) \wedge R, R] & \longrightarrow & [\gamma_2(R) \wedge R, R] & \longrightarrow & \gamma_4(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_3 & \longrightarrow & \gamma_2(R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_3} & \gamma_3(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \kappa_3}{\text{Ker } \kappa_3 \cap [\gamma_2(R) \wedge R, R]} & \longrightarrow & \gamma_2(R) \wedge R / [\gamma_2(R) \wedge R, R] & \xrightarrow{\beta_3} & \gamma_3(R) / \gamma_4(R) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

La suite exacte 36 nous donne le noyau de κ_3 . Il est isomorphe à $H_3(R_{\text{ab}})$. Dans [Br, théorème 6.4, p. 123] nous avons une description de $H_3(R_{\text{ab}})$. Ce groupe est isomorphe au terme de degré trois de l'algèbre extérieure de R_{ab} . L'injection induite $\wedge^3(R_{\text{ab}}) \hookrightarrow \gamma_2(R) \wedge R$ est décrite par [El2, théorème 9, p. 10]. Elle envoie le triplet (x, y, z) sur le produit

$$([x, y] \wedge {}^y z) ([y, z] \wedge {}^z x) ([z, x] \wedge {}^x y)$$

qui est un antécédent de l'identité de Philipp Hall.

D'après le lemme 15 le quotient $\gamma_2(R) \wedge R / [\gamma_2(R) \wedge R, R]$ est isomorphe au produit extérieur $(\gamma_2(R)/\gamma_3(R)) \wedge R_{\text{ab}}$. Le produit fibré $(\gamma_2(R)/\gamma_3(R)) \times_{R_{\text{ab}}} R_{\text{ab}}$ étant nul ce produit extérieur est isomorphe au produit tensoriel $(\gamma_2(R)/\gamma_3(R)) \otimes R_{\text{ab}}$ (β_3 est donc égal à α_3). Le morphisme composé $\text{Ker } \kappa_3 \longrightarrow \gamma_2(R) \wedge R / [\gamma_2(R) \wedge R, R]$ correspond donc au morphisme

$$\begin{aligned} \wedge^3(R_{\text{ab}}) &\longrightarrow (\gamma_2(R)/\gamma_3(R)) \otimes R_{\text{ab}} \\ (x, y, z) &\longmapsto [x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x + [z, x] \otimes y \end{aligned}$$

La source a pour base $\{(x, y, z) \in X^3, x > y > z\}$, et le but $B_2 \times X$ qui est isomorphe à $\{(x, y, z) \in X^3, x > y\}$. Selon cette base du but l'image du générateur (x, y, z) s'écrit $[x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x - [x, z] \otimes y$. Les trois éléments de la base apparaissent uniquement dans l'image de (x, y, z) . Le morphisme est donc injectif, et le quotient $\text{Ker } \kappa_3 \twoheadrightarrow \text{Ker } \kappa_3 / \text{Ker } \kappa_3 \cap [\gamma_2(R) \wedge R, R]$ est ainsi un isomorphisme. L'intersection $\text{Ker } \kappa_3 \cap [\gamma_2(R) \wedge R, R]$ est nulle et $[\gamma_2(R) \wedge R, R]$ est isomorphe à $\gamma_4(R)$. Notre diagramme est devenu

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & [\gamma_2(R) \wedge R, R] & \cong & \gamma_4(R) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_3(R_{\text{ab}}) & \longrightarrow & \gamma_2(R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_3} & \gamma_3(R) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \wedge^3(R_{\text{ab}}) & \longrightarrow & \frac{\gamma_2(R)}{\gamma_3(R)} \otimes R_{\text{ab}} & \xrightarrow{\alpha_3} & \gamma_3(R)/\gamma_4(R) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Remarque 26. Le sous-groupe de commutateurs $[\gamma_2(R) \wedge R, R]$ est l'image du morphisme $\gamma_3(R) \wedge R \longrightarrow \gamma_2(R) \wedge R$ induit par l'injection $\gamma_3(R) \hookrightarrow \gamma_2(R)$. Ceci nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_3(R/\gamma_3(R)) & \longrightarrow & \gamma_3(R) \wedge R & \longrightarrow & \gamma_4(R) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_3(R_{\text{ab}}) & \longrightarrow & \gamma_2(R) \wedge R & \longrightarrow & \gamma_3(R) \longrightarrow 1 \end{array}$$

L'intersection $H_3(R_{\text{ab}}) \cap [\gamma_2(R) \wedge R, R]$ est l'image de $H_3(R/\gamma_3(R)) \longrightarrow H_3(R_{\text{ab}})$ qui est donc le morphisme nul.

Le théorème 24 nous certifie l'existence de R -sections du R -module croisé κ_3 . Nous pouvons en construire une à partir d'une base de $\gamma_3(R)/\gamma_4(R)$, par exemple B_3 ensemble des classes des commutateurs $[x, y, z]$ avec $(x, y, z) \in X^3$ et $x > y \leq z$. Il nous faut choisir un antécédent pour chacun de ces générateurs, le plus simple est $s_3([x, y, z]) = [x, y] \wedge z$. Un élément de $\gamma_4(R)$, $[c, r]$ avec $c \in \gamma_3(R)$ est envoyé sur son antécédent $c \wedge r$. Voyons ce que cet exemple donne sur une base de $\gamma_3(R)$.

On ordonne B_2 ainsi : si $x > x'$ alors $[x, y] > [x', y']$, si $y > y'$ alors $[x, y] > [x, y']$. On définit et on ordonne $B_2 \cup B_2^{-1}$ comme on a procédé pour $X \cup X^{-1}$. Le sous-groupe $\gamma_3(R)$ est libre sur $C(3, p)$ ($p \geq 3$) ensemble des commutateurs $[c_0, c_1, \dots, c_n]$ vérifiant

- a) $c_0 \in C(2, p)$
- b) Pour $i \geq 1$, $c_i \in B_2 \cup B_2^{-1}$
- c) $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$
- d) Si $c_0 \in B_2$, alors $n \geq 1$ et $c_0 > c_1$
- e) Si $c_i = b^{-1} \in B_2^{-1}$, alors $c_{i-1} = b^{-1}$ ou bien $c_{i-p-1} \neq b = c_{i-p} = \dots = c_{i-1}$

Remarque 27. En utilisant la définition de $C(2, p)$ pour préciser le terme c_0 et en ordonnant $B_1 \cup B_1^{-1} \cup B_2 \cup B_2^{-1}$ par poids croissant et sous-ordre sus-définis on obtient un commutateur de la forme $[b_0, b_1, \dots, b_m]$ vérifiant

- i. $b_0 \in B_1$
- ii. Pour $i \geq 1$, $b_i \in B_1 \cup B_1^{-1} \cup B_2 \cup B_2^{-1}$
- iii. $[b_0, b_1, \dots, b_m] \in \gamma_3(R)$
- iv. $b_0 > b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$
- v. $[b_0, b_1, \dots, b_i] > b_{i+1}$
- vi. Si $b_i = b^{-1} \in B_j^{-1}$, alors $b_{i-1} = b^{-1}$ ou bien $b_{i-p-1} \neq b = b_{i-p} = \dots = b_{i-1}$

La condition iv. implique que b_1 est lui aussi de poids un. La v. que si b_2 est de poids deux il est strictement inférieur à $[b_0, b_1]$. Et la vi. que les inverses ne peuvent apparaître avant le rang $p + 1$. En particulier les commutateurs de poids trois ne contiennent pas d'inverse et forment un sous-ensemble en bijection avec B_3 .

Notre construction donne $s_3([c_0, c_1, \dots, c_n]) = [c_0 \wedge c_1, c_2, \dots, c_n]$ pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$ il faut regarder de plus près la forme des éléments considérés. Ils constituent l'ensemble $C(2, p) \setminus B_2$, c'est à dire les éléments de $C(2, p)$ de poids au moins trois. Ce sont donc les commutateurs $[y_0, y_1, \dots, y_m]$ avec $m \geq 2$. Notre construction donne $s_3([y_0, y_1, \dots, y_m]) = [[y_0, y_1] \wedge y_2, y_3, \dots, y_m]$.

Comme précédemment la proposition 18 assure l'exactitude des suites

$$0 \longrightarrow H_3(R_{\text{ab}}) \wedge^k R \longrightarrow \gamma_2(R) \wedge^{k+1} R \longrightarrow \gamma_3(R) \wedge^k R \longrightarrow 1$$

La section s_3 induit successivement une section pour chacune d'entre elles et $H_3(R_{\text{ab}}) \wedge^k R$ est isomorphe à $H_3(R_{\text{ab}}) \otimes^k R_{\text{ab}}$.

On peut maintenant revenir sur le premier diagramme avec $\gamma_2(R) \otimes R$. L'intersection $\text{Ker } \lambda_3 \cap [\gamma_2(R) \otimes R, R]$ est réduite au noyau de $\gamma_2(R) \otimes R \rightarrow \gamma_2(R) \wedge R$. Ceci nous donne la suite exacte

$$\Gamma(\gamma_2(R)/\gamma_3(R)) \rightarrow [\gamma_2(R) \otimes R, R] \rightarrow \gamma_4(R) \rightarrow 1$$

La colonne de droite devient donc

$$0 \rightarrow \text{Im}(\Gamma(\gamma_2(R)/\gamma_3(R))) \rightarrow \text{Ker } \lambda_3 \rightarrow \wedge^3(R_{\text{ab}}) \rightarrow 0$$

La liberté de $\wedge^3(R_{\text{ab}})$ implique que cette suite est scindée. Exemple de section :

$$\begin{aligned} \wedge^3(R_{\text{ab}}) &\rightarrow \text{Ker } \lambda_3 \\ (x, y, z) &\mapsto ([x, y] \otimes {}^y z) ([y, z] \otimes {}^z x) ([z, x] \otimes {}^x y) \end{aligned}$$

Finalement notre diagramme devient

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 1 & & 1 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & \text{Im}(\Gamma(\gamma_2(R)/\gamma_3(R))) & \rightarrow & [\gamma_2(R) \otimes R, R] & \rightarrow & \gamma_4(R) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Im}(\Gamma(\gamma_2(R)/\gamma_3(R))) & \rightarrow & \gamma_2(R) \otimes R & \xrightarrow{\lambda_3} & \gamma_3(R) \rightarrow 1 \\ & & \times \wedge^3(R_{\text{ab}}) & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \wedge^3(R_{\text{ab}}) & \rightarrow & \frac{\gamma_2(R)}{\gamma_3(R)} \otimes R_{\text{ab}} & \xrightarrow{\alpha_3} & \gamma_3(R)/\gamma_4(R) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

En combinant les sections s_2 et s_3 on obtient une section de $(R \otimes R) \wedge R \rightarrow \gamma_3(R)$. On peut expliciter le noyau de ce morphisme avec le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & (\Gamma(R_{\text{ab}})) \otimes R_{\text{ab}} & = & (\Gamma(R_{\text{ab}})) \otimes R_{\text{ab}} & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Ker } \kappa & \rightarrow & (R \otimes R) \wedge R & \rightarrow & [R \otimes R, R] \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \wedge^3(R_{\text{ab}}) & \rightarrow & \gamma_2(R) \wedge R & \rightarrow & \gamma_3(R) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 1 & & \end{array}$$

La colonne de gauche est scindée, par exemple par

$$\begin{aligned} \wedge^3(R_{\text{ab}}) &\rightarrow \text{Ker } \kappa \\ (x, y, z) &\mapsto ((x \otimes y) \otimes {}^y z) ((y \otimes z) \otimes {}^z x) ((z \otimes x) \otimes {}^x y) \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & [(R \otimes R) \wedge R, R] & \cong & \gamma_4(R) & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & (\Gamma(R_{ab})) \otimes R_{ab} & \longrightarrow & (R \otimes R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_3} & \gamma_3(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \times H_3(R_{ab}) & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \parallel & & & & & \\
 0 \longrightarrow & (\Gamma(R_{ab})) \otimes R_{ab} & \longrightarrow & R_{ab}^{\otimes 3} & \longrightarrow & \gamma_3(R)/\gamma_4(R) & \longrightarrow 0 \\
 & \times \wedge^3(R_{ab}) & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

La proposition 18 assure de nouveau l'exactitude des suites scindées

$$0 \longrightarrow ((\Gamma(R_{ab})) \otimes^{k+1} R_{ab}) \times (H_3(R_{ab}) \otimes^k R_{ab}) \longrightarrow (R \otimes R) \wedge^{k+1} R \longrightarrow \gamma_3(R) \wedge^k R \longrightarrow 1$$

Remarque 28. D'après la remarque 20 faite en 3.1, $H_3(R_{ab})$ qui est le noyau du morphisme $\gamma_2(R) \wedge R \twoheadrightarrow \gamma_3(R)$ est identique à celui du morphisme $\gamma_2(R) \wedge R \longrightarrow R \wedge R$. Il représente donc un cas précis de non-exactitude à gauche du produit extérieur. La description du noyau indique que l'obstruction à l'injectivité correspond à l'exemple 17 donné en 2.4 et vient de ce que le quotient $\gamma_2(R)/\gamma_3(R)$ n'est pas nul.

De même le noyau de $\gamma_2(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_3(R)$ est identique à celui de $\gamma_2(R) \otimes R \longrightarrow R \otimes R$. Ce noyau est la somme directe du précédent $(\gamma_2(R) \wedge R \twoheadrightarrow \gamma_3(R))$ et de celui de $\gamma_2(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_2(R) \wedge R$. Ce dernier correspond à l'exemple 16 et est aussi lié au quotient $\gamma_2(R)/\gamma_3(R)$.

4.4 Application à $\gamma_n(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_{n+1}(R)$

On considère le diagramme commutatif ($n \geq 3$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \lambda_{n+1} \cap [\gamma_n(R) \otimes R, R] & \longrightarrow & [\gamma_n(R) \otimes R, R] & \longrightarrow & \gamma_{n+2}(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \lambda_{n+1} & \longrightarrow & \gamma_n(R) \otimes R & \xrightarrow{\lambda_{n+1}} & \gamma_{n+1}(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \alpha_{n+1} & \longrightarrow & \frac{\gamma_n(R)}{\gamma_{n+1}(R)} \otimes R_{ab} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & \gamma_{n+1}(R)/\gamma_{n+2}(R) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Comme dans le cas $n = 2$ le noyau de $\gamma_n(R) \otimes R \twoheadrightarrow \gamma_n(R) \wedge R$ est contenu dans celui de λ_{n+1} et dans $[\gamma_n(R) \otimes R, R]$. Nous n'obtenons pas un isomorphisme entre $[\gamma_n(R) \otimes R, R]$ et $\gamma_{n+2}(R)$. Le morphisme λ_{n+1} n'admet donc pas de R -section.

En passant au produit extérieur on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 1 & & 1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_{n+1} \cap [\gamma_n(R) \otimes R, R] & \longrightarrow & [\gamma_n(R) \wedge R, R] & \longrightarrow & \gamma_{n+2}(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & H_3(R/\gamma_n(R)) & \longrightarrow & \gamma_n(R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_{n+1}} & \gamma_{n+1}(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \alpha_{n+1} & \longrightarrow & \frac{\gamma_n(R)}{\gamma_{n+1}(R)} \otimes R_{\text{ab}} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & \gamma_{n+1}(R)/\gamma_{n+2}(R) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Le sous-groupe de commutateurs $[\gamma_n(R) \wedge R, R]$ étant l'image du morphisme $\gamma_{n+1}(R) \wedge R \longrightarrow \gamma_n(R) \wedge R$ induit par l'injection $\gamma_{n+1}(R) \hookrightarrow \gamma_n(R)$, l'intersection $\text{Ker } \kappa_{n+1} \cap [\gamma_n(R) \otimes R, R]$ est l'image du morphisme (induit par la même injection) $H_3(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_n(R))$.

Théorème 29. *Les trois propositions*

- κ_{n+1} admet des R -sections
- le morphisme $H_3(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_n(R))$ est nul
- le noyau de α_{n+1} est isomorphe à $H_3(R/\gamma_n(R))$

sont équivalentes.

Remarque 30. Le premier morphisme $H_3(R/\gamma_3(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_2(R))$ est nul. Il peut paraître étonnant que tous le soient. On notera que c'est toutefois le cas pour le deuxième groupe d'homologie. En effet, la formule de Hopf indique que le groupe $H_2(R/\gamma_n(R))$ est isomorphe au quotient $\gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R)$. Le morphisme induit par l'injection $\gamma_{n+1}(R) \hookrightarrow \gamma_n(R)$, $H_2(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_2(R/\gamma_n(R))$, correspond donc au morphisme $\gamma_{n+1}(R)/\gamma_{n+2}(R) \longrightarrow \gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R)$ et est ainsi clairement nul.

Le noyau de α_{n+1} est calculable en utilisant des bases des groupes abéliens libres concernés.

4.5 Le noyau de α_{n+1}

On obtient une base totalement ordonnée B_n du quotient abélien $\gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R)$ par récurrence. Celle-ci est formée des commutateurs $[u, v]$ avec $u \in B_i$ et $v \in B_j$ tels que $i + j = n$, $u > v$ (i.e. si $i = j$ on applique l'ordre de B_i , sinon $i > j$) et enfin si $u = [w, z]$ alors $z \leq v$. En réécrivant u selon la définition de B_i et en réitérant le processus jusqu'à arriver à $B_1 = X$ on obtient des éléments de la forme $[b_0, b_1, \dots, b_m]$ de poids exactement n avec $b_0 \in X$, $b_0 > b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$ et $[b_0, b_1, \dots, b_i] > b_{i+1}$. En particulier m est inférieur à $n-1$, b_1 est de poids 1, b_2 de poids inférieur à 2 et de manière générale b_i est de poids inférieur à 2^{i-1} .

Le groupe $(\gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R)) \otimes R_{\text{ab}}$ est abélien libre sur $B_n \times X$. Pour déterminer des générateurs du noyau de α_{n+1} on décompose l'image de $[b_0, b_1, \dots, b_m] \otimes b$ dans la base B_{n+1} . Cette image est $[b_0, b_1, \dots, b_m, b]$. Si b est supérieur à b_m l'image est un élément de B_{n+1} . Sinon il faut remettre b à sa place. Ceci s'effectue en appliquant la relation de Jacobi (induite par celle de Philipp Hall). Ainsi

$$[b_0, b_1, \dots, b_m, b] = [b_0, b_1, \dots, [b_m, b]] + [b_0, b_1, \dots, b, b_m]$$

...

$$= [b_0, b_1, \dots, [b_m, b]] + \dots + [b_0, b_1, \dots, [b_{i+1}, b], b_{i+2}, \dots, b_m] + [b_0, b_1, \dots, b_i, b, b_{i+1}, \dots, b_m]$$

Il faut ensuite s'occuper, si nécessaire, des termes qui sont apparus successivement. Par exemple, si $[b_m, b]$ est supérieur à $[b_0, b_1, \dots, b_{m-1}]$ il faut remplacer le premier terme $[b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, [b_m, b]]$ par $-[b_m, b, [b_0, b_1, \dots, b_{m-1}]]$. En dimensions élevées ces réécritures sont fastidieuses. On peut les expliciter en basses dimensions.

Cas $n = 1$

On considère le morphisme $R_{\text{ab}} \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow \gamma_2(R)/\gamma_3(R)$. Les bases sont respectivement $X \times X$ et $B_2 = \{[x, y], (x, y) \in X^2 \text{ et } x > y\}$. L'image de $x \otimes y$ est $[x, y]$ que l'on réécrit $-[y, x]$ si $y > x$. Le noyau admet comme base l'ensemble des éléments $x \otimes x$ et $x \otimes y + y \otimes x$, avec $x \neq y$. On retrouve bien le groupe $\Gamma(R_{\text{ab}})$.

Cas $n = 2$

On considère $(\gamma_2(R)/\gamma_3(R)) \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow \gamma_3(R)/\gamma_4(R)$. Les bases sont $B_2 \times X$ et $B_3 = \{[x, y, z], (x, y, z) \in X^3 \text{ et } x > y \leq z\}$. L'écriture de l'image de $[x, y] \otimes z$ dans B_3 est :

- $[x, y, z]$ si $y \leq z$
- $-[y, z, x] + [x, z, y]$ sinon

Nous obtenons comme base du noyau l'ensemble des éléments

$$[x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x + [z, x] \otimes y \text{ avec } x, y \text{ et } z \text{ deux à deux distincts}$$

On retrouve bien $\wedge^3(R_{\text{ab}})$ qui est abélien libre sur les triplets d'éléments deux à deux distincts.

Cas $n = 3$

On considère $(\gamma_3(R)/\gamma_4(R)) \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow \gamma_4(R)/\gamma_5(R)$. Les bases sont $B_3 \times X$ et B_4 qui est la réunion des deux ensembles $\{[x, y, z, t], (x, y, z, t) \in X^4 \text{ et } x > y \leq z \leq t\}$ et $\{[x, y, [z, t]], ([x, y], [z, t]) \in B_2 \times B_2 \text{ et } [x, y] > [z, t]\}$. La décomposition de l'image de $[x, y, z] \otimes t$ dans B_4 est :

- $[x, y, z, t]$ si $z \leq t$
- $[x, y, [z, t]] + [x, y, t, z]$ si $y \leq t < z$ et $[x, y] > [z, t]$ (i.e. $x > z$)
- $-[z, t, [x, y]] + [x, y, t, z]$ si $y \leq t < z$ et $[z, t] \geq [x, y]$ (i.e. $z \geq x$)
- $[x, y, [z, t]] - [y, t, x, z] + [x, t, y, z]$ si $t < y$ et $z = x$
- $-[z, t, [x, y]] - [y, t, x, z] + [x, t, y, z]$ si $t < y$ et $z > x$
- $[x, y, [z, t]] + [x, z, [y, t]] - [y, t, z, x] + [x, t, y, z]$ si $t < y$ et $z < x$

Le morphisme est injectif sur le sous-groupe engendré par les termes $[x, y, z] \otimes t$ avec $z \leq t$. Si l'on rajoute les termes vérifiant $y \leq t < z$ on obtient une surjection. Quand $x = z$ et $y = t$, $[x, y, [z, t]] = 0$. Nous avons un premier élément du noyau :

$$[x, y, x] \otimes y - [x, y, y] \otimes x$$

Le commutateur $[x, y, [z, t]]$ est obtenu de manière unique sauf si $y = t$. Ceci nous donne comme générateurs supplémentaires les éléments :

$$[x, y, z] \otimes y - [x, y, y] \otimes z + [z, y, x] \otimes y - [z, y, y] \otimes x$$

Pour finir, si $t < y$ l'image de $[x, y, z] \otimes t$ est égale à celle de :

$$-[z, t, x] \otimes y + [z, t, y] \otimes x - [y, t, x] \otimes z + [x, t, y] \otimes z$$

D'où un dernier groupe de générateurs :

$$[x, y, z] \otimes t + [z, t, x] \otimes y - [z, t, y] \otimes x + [y, t, x] \otimes z - [x, t, y] \otimes z$$

Avec $t = y$ on retrouve le groupe précédent. Le noyau admet donc la base formée des éléments :

- $[x, y, x] \otimes y - [x, y, y] \otimes x$ avec $x > y$
- $[x, y, z] \otimes t + [z, t, x] \otimes y - [z, t, y] \otimes x + [y, t, x] \otimes z - [x, t, y] \otimes z$ avec $t \leq y$, $x > y \leq z$, $t < z$ et $[x, y] \neq [z, t]$ (i.e. si $t = y$ alors $z \neq x$)

Cas $n = 4$

On considère $(\gamma_4(R)/\gamma_5(R)) \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow \gamma_5(R)/\gamma_6(R)$. Les bases sont $B_4 \times X$ et B_5 qui est la réunion des deux ensembles $\{[x, y, z, t, u], (x, y, z, t, u) \in X^5 \text{ et } x > y \leq z \leq t \leq u\}$ et $\{[x, y, z, [t, u]], ([x, y, z], [t, u]) \in B_3 \times B_2\}$ (cette dernière partie est donc en bijection avec $B_3 \times B_2$). L'écriture de l'image de $[x, y, z, t] \otimes u$ dans B_5 est :

- $[x, y, z, t, u]$ si $t \leq u$
- $[x, y, z, [t, u]] + [x, y, z, u, t]$ si $z \leq u < t$
- $[x, y, z, [t, u]] - [z, u, t, [x, y]] + [x, y, t, [z, u]] + [x, y, u, z, t]$ si $y \leq u < z$

- $[x, y, z, [t, u]] - [z, u, t, [x, y]] + [x, y, t, [z, u]] - [y, u, x, z, t] + [x, u, y, z, t]$ si $u < y$ et $x \leq z$
- $[x, y, z, [t, u]] - [z, u, t, [x, y]] + [x, y, t, [z, u]] + [x, z, t, [y, u]] - [y, u, t, [x, z]] - [y, u, z, x, t] + [x, u, y, z, t]$ si $u < y$ et $z < x \leq t$
- $[x, y, z, [t, u]] - [z, u, t, [x, y]] + [x, y, t, [z, u]] + [x, z, t, [y, u]] - [y, u, t, [x, z]] - [y, u, z, [x, t]] + [y, u, z, t, x] + [x, u, y, z, t]$ si $u < y$ et $t < x$

Celle de l'image de $[x, y, [z, t]] \otimes u$ est :

- $-[z, t, u, [x, y]] + [x, y, u, [z, t]]$ si $t \leq u$ et $y \leq u$
- $[t, u, z, [x, y]] - [z, u, t, [x, y]] + [x, y, u, [z, t]]$ si $u < t$ et $y \leq u$
- $-[z, t, u, [x, y]] - [y, u, x, [z, t]] + [x, u, y, [z, t]]$ si $t \leq u$ et $u < y$
- $[t, u, z, [x, y]] - [z, u, t, [x, y]] - [y, u, x, [z, t]] + [x, u, y, [z, t]]$ si $u < t$ et $u < y$

La détermination d'une base du noyau est laissée aux courageux.

Le noyau de α_{n+1} est un quotient du groupe $H_3(R/\gamma_n(R))$ qui est isomorphe au noyau de $\gamma_n(R) \wedge R \longrightarrow \gamma_{n+1}(R)$. D'après la suite exacte 37 ce dernier est également isomorphe au noyau de $\text{Ab}(\gamma_n(R)) \otimes (R/\gamma_n(R)) \longrightarrow [\text{Ab}(\gamma_n(R)), R/\gamma_n(R)]$. En fait nous pouvons écrire la surjection entre les suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_3(R/\gamma_n(R)) & \longrightarrow & \text{Ab}(\gamma_n(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_n(R)} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & [\text{Ab}(\gamma_n(R)), R/\gamma_n(R)] \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha_{n+1} & \longrightarrow & \frac{\gamma_n(R)}{\gamma_{n+1}(R)} \otimes R_{\text{ab}} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & \gamma_{n+1}(R)/\gamma_{n+2}(R) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Le groupe $\text{Ab}(\gamma_n(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_n(R)}$ est moins pratique que $\frac{\gamma_n(R)}{\gamma_{n+1}(R)} \otimes R_{\text{ab}}$. Il est abélien parce que $\text{Ab}(\gamma_n(R))$ agit trivialement sur $R/\gamma_n(R)$, mais il n'est pas libre. On peut toutefois trouver des ensembles générateurs. Le groupe abélien $\text{Ab}(\gamma_n(R))$ est libre sur la base $C(n, p)$ ($p \geq n$) formée des classes des commutateurs $[b_0, b_1, \dots, b_m]$ vérifiant

- $b_0 \in B_1$
- Pour $i \geq 1$, $b_i \in \bigcup_{j=1}^{n-1} (B_j \cup B_j^{-1})$
- $[b_0, b_1, \dots, b_m] \in \gamma_n(R)$
- $b_0 > b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$
- $[b_0, b_1, \dots, b_i] > b_{i+1}$
- Si $b_i = b^{-1} \in B_j^{-1}$, alors $b_{i-1} = b^{-1}$ ou bien $b_{i-p-1} \neq b = b_{i-p} = \dots = b_{i-1}$

La dernière condition assure que le sous-ensemble des générateurs de poids n est en bijection avec B_n .

Le groupe abélien $\text{Ab}(\gamma_n(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_n(R)}$ est engendré par $C(n, p) \times X$. On développe aisément à gauche puisque la trivialité de l'action de $\text{Ab}(\gamma_n(R))$ rend notre produit tensoriel linéaire par rapport à ce facteur. Quand on développe à droite on se débarrasse de l'action grâce à la relation (8)

$$c \otimes (xy) = c \otimes x + {}^x(c \otimes y) = c \otimes x - [c, y] \otimes x + c \otimes y$$

Pour le traitement des inverses, aucun problème

$$c \otimes x^{-1} = -x^{-1}(c \otimes x) = -(x^{-1}c) \otimes x$$

L'image par β_{n+1} du générateur $[b_0, b_1, \dots, b_m] \otimes x$ est $[b_0, b_1, \dots, b_m, x]$. Pour l'écrire dans la base $C(n, p)$ il s'agit, tout comme dans la section précédente, de remettre x à sa place. Par contre, comme on quotiente seulement par l'action de $\gamma_n(R)$ (il faut utiliser Phillip Hall et non plus Jacobi) cette réécriture est beaucoup plus complexe. Par exemple le générateur

$$[x, y, x] \otimes y - [x, y, y] \otimes x$$

du noyau de $\frac{\gamma_3(R)}{\gamma_4(R)} \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow \gamma_4(R)/\gamma_5(R)$ correspond à l'élément

$$[x, y, x] \otimes {}^xy + [x, y, y] \otimes [x, y] - [x, y, y] \otimes x$$

du noyau de $\text{Ab}(\gamma_3(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_3(R)} \longrightarrow [\text{Ab}(\gamma_3(R)), R/\gamma_3(R)]$ et à

$$([x, y, x] \wedge {}^xy) ([y, [x, y]] \wedge [x, y])^{-1} ([y, [x, y]] \wedge {}^{[x, y]}x)$$

dans le noyau de $\gamma_3(R) \wedge R \longrightarrow \gamma_4(R)$. Quant au générateur

$$[x, y, z] \otimes t + [z, t, x] \otimes y - [z, t, y] \otimes x + [y, t, x] \otimes z - [x, t, y] \otimes z$$

il correspond à l'élément

$$\begin{aligned} & {}^{t[x, y]t^{-1}}([t, [y, x]] \wedge [z, t]) + [t, [x, y]] \wedge {}^{[x, y]}z + [x, y, z] \wedge {}^zt \\ & + {}^{y[z, t]y^{-1}}([y, [t, z]] \wedge [x, y]) + [y, [z, t]] \wedge {}^{[z, t]}x + [z, t, x] \wedge {}^xy \end{aligned}$$

La nécessité de prendre en compte l'action de R rend donc l'étude du noyau beaucoup plus ardue. Ce qui nous intéresse principalement c'est ce que le noyau de $\text{Ab}(\gamma_n(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_n(R)} \longrightarrow [\text{Ab}(\gamma_n(R)), R/\gamma_n(R)]$ peut contenir de plus que celui de $\frac{\gamma_n(R)}{\gamma_{n+1}(R)} \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow \gamma_{n+1}(R)/\gamma_{n+2}(R)$. Le premier cas où ces noyaux ne sont pas isomorphes pourrait être $n = 3$.

La relation de Philipp Hall nous fournit de nombreux éléments du noyau de $\text{Ab}(\gamma_3(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_3(R)} \longrightarrow [\text{Ab}(\gamma_3(R)), R/\gamma_3(R)]$ sous la forme

$$[x, y] \otimes {}^yz + [y, z] \otimes {}^zx + [z, x] \otimes {}^xy$$

avec x, y et z de poids suffisants pour que $[x, y]$, $[y, z]$ et $[z, x]$ soient des éléments de $\gamma_3(R)$. C'est à dire que deux des trois doivent être de poids supérieur à deux. On peut alors oublier les actions puisqu'elles reviennent à multiplier par un élément de $\gamma_3(R)$.

La plupart de ces antécédents de Philipp Hall sont en fait nuls. En effet, lorsque x , y ou z est de poids supérieur à trois, la relation (34), qui est un relèvement dans $\gamma_3(R) \wedge R$ de la relation de Philipp Hall correspondante, nous assure la nullité de

$$[x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x + [z, x] \otimes y$$

Il nous reste les cas x , y et z de poids deux et deux de poids deux, un de poids un. Le premier des deux est encore nul. Si on note T l'ensemble des triplets (x, y, z) de R^3 vérifiant la condition de poids, l'application

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \text{Ab}(\gamma_3(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_3(R)} \\ (x, y, z) &\longmapsto [x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x + [z, x] \otimes y \end{aligned}$$

est linéaire par rapport à chacune des trois variables. En effet,

$$\begin{aligned} &[x, y] \otimes zt + [y, zt] \otimes x + [zt, x] \otimes y \\ &= [x, y] \otimes z + {}^z([x, y] \otimes t) + [y, z] {}^z[y, t] \otimes x + {}^z[t, x] [z, x] \otimes y \\ &= [x, y] \otimes z + {}^z([x, y] \otimes t) + {}^{[y, z]}({}^z[y, t] \otimes x) + [y, z] \otimes x + {}^{[t, x]}([z, x] \otimes y) + {}^z[t, x] \otimes y \end{aligned}$$

Comme $[y, z]$ et ${}^z[t, x]$ sont de poids supérieur à trois les deux actions correspondantes sont triviales, et comme $[y, z]$ et $[x, z]$ sont de poids supérieur à trois

$${}^z[t, x] \otimes y = {}^z([t, x] \otimes y) \quad \text{et} \quad {}^z[y, t] \otimes x = {}^z([y, t] \otimes x)$$

Nous nous retrouvons donc avec

$$([x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x + [z, x] \otimes y) + {}^z([x, y] \otimes t + [y, t] \otimes x + [t, x] \otimes y)$$

Finalement, R opérant trivialement sur le noyau, nous obtenons bien la linéarité.

En fin de compte, le dernier candidat pour appartenir au noyau de

$$H_3(R/\gamma_3(R)) \longrightarrow \text{Ker } \alpha_4$$

est l'élément $[x, y] \otimes z + [y, z] \otimes x + [z, x] \otimes y$ avec x et y de poids deux et z de poids un.

Dans le noyau de $H_3(R/\gamma_4(R)) \longrightarrow \text{Ker } \alpha_5$ on pourrait aussi retrouver des antécédents de Philipp Hall, avec des termes de poids deux ou trois. Quant aux relations de Philipp Hall dont les poids ne permettent pas un relèvement dans le groupe $\text{Ab}(\gamma_4(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_4(R)}$, les associer peut permettre d'éliminer ce problème.

Ainsi, avec u et v de poids 2 et x de poids 1, l'élément

$$[u, x, v] \otimes x + [v, x, u] \otimes x - [u, x, x] \otimes v - [v, x, x] \otimes u$$

est dans le noyau de $\text{Ab}(\gamma_4(R)) \otimes \frac{R}{\gamma_4(R)} \twoheadrightarrow [\text{Ab}(\gamma_4(R)), R/\gamma_4(R)]$. La nullité de son image est due à l'existence des relations $[[u, x], v, x] + [v, x, [u, x]] + [x, [u, x], v] = 0$ et $[[v, x], u, x] + [u, x, [v, x]] + [x, [v, x], u] = 0$ qui sont bien deux relations de Philipp Hall mais ne se relèvent pas séparément. Les termes qui se compensent, c'est à dire $[v, x, [u, x]]$ et $[u, x, [v, x]]$, empêchent un tel relèvement car ils sont de poids 3+3.

5 Version non abélienne en dimensions impaires

5.1 Construction du diagramme

On part avec la suite exacte (37)

$$0 \longrightarrow H_{2n+1}(G) \longrightarrow R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G \longrightarrow [R_{\text{ab}}^{\otimes n}, G] \longrightarrow 0$$

Le produit tensoriel multiple $R_{\text{ab}}^{\otimes n}$ sera vu non comme produit tensoriel abélien classique mais comme produit tensoriel non abélien construit à partir du module croisé trivial $1 : R_{\text{ab}} \longrightarrow G$. Les modules croisés intermédiaires $R_{\text{ab}}^{\otimes i} \otimes R_{\text{ab}} \longrightarrow G$ obtenus en appliquant le foncteur $M\Lambda$ sont tous triviaux. Le morphisme quotient $R \longrightarrow R_{\text{ab}}$ nous fournit une surjection $(i : R \hookrightarrow F) \twoheadrightarrow 1$ dans la catégorie $\mathcal{M}$. Celle-ci induit la surjection $R^{\otimes n} \twoheadrightarrow R_{\text{ab}}^{\otimes n}$, dans la catégorie des groupes, et le foncteur $M\Lambda$ nous donne $(\lambda'_n : R^{\otimes n} \longrightarrow F) \twoheadrightarrow (1 : R_{\text{ab}}^{\otimes n} \longrightarrow G)$ qui est une surjection dans $\mathcal{M}$.

Le produit tensoriel $R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G$ est le résultat de l'application du foncteur T au couple de modules croisés sur G $(1 : R_{\text{ab}}^{\otimes n} \longrightarrow G, id_G)$. D'après la remarque 6, il coïncide avec le produit extérieur $R_{\text{ab}}^{\otimes n} \wedge G$. L'application du foncteur K à la surjection dans $\mathcal{CM}$ $(\lambda'_n, id_F) \twoheadrightarrow (1, id_G)$ nous donne le diagramme commutatif avec morphismes verticaux surjectifs

$$\begin{array}{ccc} R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G & \longrightarrow & R_{\text{ab}}^{\otimes n} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R^{\otimes n} \wedge F & \longrightarrow & R^{\otimes n} \end{array}$$

On obtient donc le diagramme commutatif (de suites exactes)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{2n+1}(G) & \longrightarrow & R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G & \longrightarrow & [R_{\text{ab}}^{\otimes n}, G] \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \kappa & \longrightarrow & R^{\otimes n} \wedge F & \xrightarrow{\kappa} & [R^{\otimes n}, F] \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \delta & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha & \xrightarrow[\delta]{} & \text{Ker } \beta \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}$$

5.2 Étude des noyaux de α et β

D'après la proposition 15 le noyau de $R^{\otimes n} \rightarrow R_{\text{ab}}^{\otimes n}$ est $[R^{\otimes n}, R]$.

Lemme 31. *Le noyau de β est aussi $[R^{\otimes n}, R]$.*

Démonstration. Le morphisme β est la restriction à $[R^{\otimes n}, F]$ du morphisme $R^{\otimes n} \rightarrow R_{\text{ab}}^{\otimes n}$. Le noyau de ce dernier, $[R^{\otimes n}, R]$, étant inclus dans $[R^{\otimes n}, F]$, c'est aussi le noyau de β . $\square$

Les éléments $x \wedge r$, avec x dans $R^{\otimes n}$ et r dans R , sont dans le noyau de α . Le morphisme $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ est donc clairement surjectif, et on obtient le diagramme commutatif (lignes et colonnes sont exactes)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2n+1}(G) & \longrightarrow & R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G & \longrightarrow & [R_{\text{ab}}^{\otimes n}, G] \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \alpha \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \kappa & \longrightarrow & R^{\otimes n} \wedge F & \xrightarrow{\kappa} & [R^{\otimes n}, F] \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \delta & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha & \xrightarrow[\delta]{} & [R^{\otimes n}, R] \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Nous obtenons une interprétation de $H_{2n+1}(G)$ comme groupe de relations dans $[R^{\otimes n}, F]$. Dans le cas de $H_3(G)$, toutes les relations universelles dans $[R, F]$ viennent des relations de définitions de $R \wedge F$. En dimensions supérieures, le noyau de δ correspond aux relations dans $[R^{\otimes n}, R]$ qui sont indépendantes des relations de définitions de $R^{\otimes n} \wedge F$.

On peut être plus précis sur le noyau de α .

Lemme 32. *Le noyau de $\alpha: R^{\otimes n} \wedge F \rightarrow R_{\text{ab}}^{\otimes n} \otimes G$ est le sous-groupe engendré par les éléments $x \wedge r$, avec x dans $R^{\otimes n}$ et r dans R .*

Démonstration. Le morphisme $(R^{\otimes n} \rightarrow R, \text{id}_R) \rightarrow (R^{\otimes n} \rightarrow F, \text{id}_F)$ de la catégorie $\mathcal{CM}$ induit, via le foncteur K , le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 R^{\otimes n} \wedge R & \xrightarrow{\varepsilon} & R^{\otimes n} \wedge F \\
 \kappa_{n+1} \downarrow & & \downarrow \kappa \\
 R^{\otimes n} & = & R^{\otimes n}
 \end{array}$$

Le sous-groupe considéré est l'image du morphisme ε .

La flèche $(R^{\otimes n} \rightarrow F, id_F) \rightarrow (R_{ab}^{\otimes n} \xrightarrow{0} G, id_G)$ est une surjection dans $\mathcal{CM}$. L'application induite $\{t \otimes \lambda_n(t)/t \in R^{\otimes n}\} \rightarrow \{\tau \otimes 0/\tau \in R_{ab}^{\otimes n}\}$ est clairement surjective (le second ensemble est réduit à 0). Le morphisme $\kappa_{n+1}: R^{\otimes n} \wedge R \rightarrow R^{\otimes n}$ a la même image que $\lambda_{n+1}: R^{\otimes n} \otimes R \rightarrow R^{\otimes n}$. Le théorème 11 nous donne comme générateurs du noyau de α les éléments $\kappa_{n+1}(x) \wedge f$ et $y \wedge r$, avec $x \in R^{\otimes n} \wedge R$, $y \in R^{\otimes n}$, $r \in R$ et $f \in F$. Autrement dit, la suite

$$((R^{\otimes n} \wedge R) \wedge F) \times (R^{\otimes n} \wedge R) \rightarrow R^{\otimes n} \wedge F \rightarrow R_{ab}^{\otimes n} \otimes G \rightarrow 0$$

est exacte. D'après le diagramme ci-dessus, $\kappa_{n+1}(x) = \kappa \circ \varepsilon(x)$. La relation (25) nous donne alors $\kappa_{n+1}(x) \wedge f = \varepsilon(x) \wedge^f \varepsilon(x)^{-1}$. L'image de $(R^{\otimes n} \wedge R) \wedge F$ est donc incluse dans celle de ε , et la suite

$$R^{\otimes n} \wedge R \xrightarrow{\varepsilon} R^{\otimes n} \wedge F \rightarrow R_{ab}^{\otimes n} \otimes G \rightarrow 0$$

est exacte. □

Remarque 33. En dimension 3 le noyau de α est isomorphe à $R \wedge R$, c'est à dire que le morphisme $R \wedge R \rightarrow R \wedge F$ est injectif. Ceci est démontré dans [El1, corollaire 3, p. 15] à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R \wedge F & \longrightarrow & [R, F] \\ \uparrow & & \uparrow \\ R \wedge R & \cong & [R, R] \end{array}$$

En dimension supérieure le morphisme $R^{\otimes n} \wedge R \rightarrow R^{\otimes n} \wedge F$ cesse d'être injectif. Exemple pour $n = 2$. On prend F libre avec deux générateurs x et y et R le sous-groupe distingué engendré par x^2 et y . L'élément $(x^2 \otimes x^2) \wedge [x, y]$ est alors contenu dans le noyau du morphisme $(R \otimes R) \wedge R \rightarrow (R \otimes R) \wedge F$. En effet, y étant dans R il opère trivialement sur $x^2 \otimes x^2$ (relation (8)). Notre élément est donc égal à $y(x^2 \otimes x^2) \wedge [x, y]$. La relation (28) nous donne alors l'identité

$$\begin{aligned} (x^2 \otimes x^2) \wedge [x, y] &= [(y(x^2 \otimes x^2)(x^2 \otimes x^2)^{-1}) \wedge x] [((x^2 \otimes x^2)^x (x^2 \otimes x^2)^{-1}) \wedge xy] \\ &= (1 \wedge x)(1 \wedge xy) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul d'après la relation (20). Pour s'assurer que notre élément du noyau n'est pas nul on constate d'abord qu'il est contenu dans l'image du morphisme $\Gamma(R_{ab}) \otimes R_{ab} \rightarrow (R \otimes R) \wedge R$. D'après la suite exacte (39) ce morphisme est injectif. Notre sous-groupe R est libre sur $\{x^2, y, [x, y]\}$. On peut construire une base de $\Gamma(R_{ab})$ contenant $x^2 \otimes x^2$. L'élément $(x^2 \otimes x^2) \wedge [x, y]$ est donc non nul dans $(R \otimes R) \wedge R$. Cet exemple se prolonge en dimensions supérieures avec $((x^2 \otimes x^2)^{\otimes i} x^2) \wedge [x, y]$. À noter que l'obstruction à l'injectivité provient une nouvelle fois du fait que le quotient $[R, F]/[R, R]$ n'est pas nul ($[x, y]$ en fait partie).

5.3 Passage à $(R \otimes R) \wedge^{n-2} R$

On peut remplacer avantageusement $R^{\otimes n}$ par $(R \otimes R) \wedge^{n-2} R$ dans notre construction.

Le produit tensoriel multiple $R_{ab}^{\otimes n}$ peut aussi être construit à partir du module croisé $id_{R_{ab}}$. Si ce changement ne modifie pas le produit tensoriel, il en va autrement pour le produit extérieur. À partir du module croisé $1: R_{ab} \rightarrow G$, $R_{ab}^{\otimes n} \wedge R_{ab}$ est nul. Par contre, à partir de $id_{R_{ab}}$, pour $n \geq 2$, $R_{ab}^{\otimes n} \wedge R_{ab}$ est isomorphe à $R_{ab}^{\otimes n+1}$ (on quotiente par les éléments $t \otimes 0$ qui sont déjà nuls). Plus généralement, $R_{ab}^{\otimes n}$ est isomorphe à $(R_{ab} \otimes R_{ab}) \wedge^{n-2} R_{ab}$. On doit garder le premier produit tensoriel car $R_{ab} \otimes R_{ab}$ n'est en général pas isomorphe à $R_{ab} \wedge R_{ab}$ (on quotiente cette fois par $x \otimes x$).

Le morphisme de modules croisés $id_R \rightarrow id_{R_{ab}}$ nous donne alors la surjection

$$(R \otimes R) \wedge^{n-2} R \twoheadrightarrow (R_{ab} \otimes R_{ab}) \wedge^{n-2} R_{ab} = R_{ab}^{\otimes n}$$

Le groupe $(R \otimes R) \wedge^{n-2} R$ obtenu à partir du module croisé id_R est identique à celui obtenu à partir de l'injection canonique $i: R \hookrightarrow F$. Notre surjection en induit une seconde

$$((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge F \twoheadrightarrow R_{ab}^{\otimes n} \wedge G = R_{ab}^{\otimes n} \otimes G$$

Le noyau de $(R \otimes R) \wedge^{n-2} R \twoheadrightarrow R_{ab}^{\otimes n}$ et de $[(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, F] \rightarrow [R_{ab}^{\otimes n}, G]$ est $[(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R]$. Celui de $((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge F \twoheadrightarrow R_{ab}^{\otimes n} \wedge G$ est l'image de $(R \otimes R) \wedge^{n-1} R \rightarrow ((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge F$ (même défaut d'injectivité que pour $R^{\otimes n} \wedge R \rightarrow R^{\otimes n} \wedge F$).

On obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \longrightarrow & H_{2n+1}(G) & \longrightarrow & R_{ab}^{\otimes n} \otimes G & \longrightarrow & [R_{ab}^{\otimes n}, G] \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \alpha \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker } \kappa & \longrightarrow & ((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge F & \xrightarrow{\kappa} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, F] \longrightarrow 1 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker } \delta & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha & \xrightarrow[\delta]{} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R] \longrightarrow 1 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

Cette substitution revient à se débarrasser de certaines des relations universelles dans $[R^{\otimes n}, R]$ qui ne proviennent pas des relations de définitions de $R^{\otimes n} \wedge F$, autrement dit à réduire le noyau de δ .

Par exemple, pour $n = 3$, nous avons dans $[R^{\otimes 3}, R]$ la relation

$$((r_1 \otimes r_2) \otimes [r_1, r_2])^{r_3} ((r_1 \otimes r_2) \otimes [r_1, r_2])^{-1} = 1$$

En effet, la relation (8) nous donne

$$((r_1 \otimes r_2) \otimes [r_1, r_2])^{r_3} ((r_1 \otimes r_2) \otimes [r_1, r_2])^{-1} = ((r_1 \otimes r_2)^{[r_1, r_2]} (r_1 \otimes r_2)^{-1}) \otimes r_3$$

On conclut avec la seconde relation de module croisé (7) et la relation (3).

Dans $R^{\otimes 3} \wedge F$ cette relation se relève en $((r_1 \otimes r_2) \otimes [r_1, r_2]) \wedge r_3$. Cet élément est bien évidemment neutralisé dans $((R \otimes R) \wedge R) \wedge F$. Le passage de $R^{\otimes 3}$ à $(R \otimes R) \wedge R$ permet donc bien de se débarrasser de certaines relations superflues.

Le noyau de α est l'image de $((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge R \longrightarrow ((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge F$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 1 & & & \\ & \uparrow & & \uparrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \delta & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{\delta} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R] \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_{n+1} & \longrightarrow & ((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_{n+1}} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R] \longrightarrow 1 \end{array}$$

le morphisme $\text{Ker } \kappa_{n+1} \longrightarrow \text{Ker } \delta$ est clairement surjectif. Nous allons étudier $\text{Ker } \delta$ via $\text{Ker } \kappa_{n+1}$.

Dans la section précédente nous avons obtenu le premier de ces noyaux, à savoir celui de $(R \otimes R) \wedge R \longrightarrow [R \otimes R, R]$. Il est la somme directe de $\Gamma(R_{\text{ab}}) \otimes R_{\text{ab}}$, engendré par des termes de la forme $(r \otimes r) \wedge s$, et de $\wedge^3(R_{\text{ab}}) \cong H_3(R_{\text{ab}})$, engendré par des termes de la forme Philipp Hall $((x \otimes y) \wedge^y z) ((y \otimes z) \wedge^z x) ((z \otimes x) \wedge^x y)$. Ceci signifie que $H_5(G)$ est le quotient du noyau de $(R \otimes R) \wedge F \longrightarrow [R \otimes R, F]$ par les éléments des deux formes ci-dessus.

De manière générale nous avons une certaine récurrence dans la construction de ces noyaux. Le noyau en dimension n induit une partie de celui en dimension $n+1$ (comme $\Gamma(R_{\text{ab}})$ noyau de $R \otimes R \longrightarrow [R, R]$ donne la partie $\Gamma(R_{\text{ab}}) \otimes R_{\text{ab}}$ du noyau de $(R \otimes R) \wedge R \longrightarrow [R \otimes R, R]$). On peut le voir à travers le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{Ker } \kappa_n \otimes R_{\text{ab}} & \cong & \text{Ker } \kappa_n \wedge R & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_{n+1} & \longrightarrow & ((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_{n+1}} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R] \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \zeta & \longrightarrow & \text{Im } \kappa_n \wedge R & \xrightarrow{\zeta} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R] \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

qui provient de l'identité des morphismes κ_{n+1} et $\kappa_n \wedge id_R$. Ainsi $\text{Ker } \kappa_n \otimes R_{ab}$ engendre une partie de $\text{Ker } \kappa_{n+1}$ (l'injectivité reste à débattre) et le "reste" nous est donné par le noyau de ζ . Le premier noyau nous donne donc une partie $(\Gamma(R_{ab}) \otimes^{n-1} R_{ab}) \oplus (\wedge^3(R_{ab}) \otimes^{n-2} R_{ab})$ (ici l'injectivité est assurée par la proposition 18). Nous obtenons ainsi le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \text{Ker } \kappa_3 \otimes R_{ab} & \cong & \text{Ker } \kappa_3 \wedge R & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_4 & \longrightarrow & ((R \otimes R) \wedge R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_4} & [(R \otimes R) \wedge R, R] & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
0 \longrightarrow & \text{Ker } \zeta & \longrightarrow & [R \otimes R, R] \wedge R & \xrightarrow{\zeta} & [(R \otimes R) \wedge R, R] & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& 1 & & 1 & & &
\end{array}$$

où les colonnes sont scindées.

Le noyau de ζ est égal à $H_3(R/\gamma_3(R))$ d'après le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \text{Ker } \zeta & \longrightarrow & [R \otimes R, R] \wedge R & \xrightarrow{\zeta} & [(R \otimes R) \wedge R, R] & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow & & \parallel & & \parallel & \\
0 \longrightarrow & H_3(R/\gamma_3(R)) & \longrightarrow & \gamma_3(R) \wedge R & \longrightarrow & \gamma_4(R) & \longrightarrow 1
\end{array}$$

Le noyau de $(R \otimes R) \wedge^2 R \longrightarrow [(R \otimes R) \wedge R, R]$ est donc somme directe de $\Gamma(R_{ab}) \otimes^2 R_{ab}$, de $H_3(R_{ab}) \otimes R_{ab}$ et de $H_3(R/\gamma_3(R))$. Pour le suivant le diagramme devient

$$\begin{array}{ccccccc}
& \text{Ker } \kappa_4 \otimes R_{ab} & \cong & \text{Ker } \kappa_4 \wedge R & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_5 & \longrightarrow & ((R \otimes R) \wedge^2 R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_5} & [(R \otimes R) \wedge^2 R, R] & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
0 \longrightarrow & \text{Ker } \zeta & \longrightarrow & \text{Im } \kappa_4 \wedge R & \xrightarrow{\zeta} & [(R \otimes R) \wedge^2 R, R] & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& 1 & & 1 & & &
\end{array}$$

Cette fois le noyau de ζ est lié à $H_3(R/\gamma_4(R))$ par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \text{Ker } \zeta & \longrightarrow & [(R \otimes R) \wedge R, R] \wedge R & \xrightarrow{\zeta} & [(R \otimes R) \wedge^2 R, R] & \longrightarrow 1 \\
& \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & H_3(R/\gamma_4(R)) & \longrightarrow & \gamma_4(R) \wedge R & \longrightarrow & \gamma_5(R) & \longrightarrow 1
\end{array}$$

Plus précisément c'est un sous-groupe de $H_3(R/\gamma_4(R))$.

Le groupe $[(R \otimes R) \wedge^2 R, R]$ est isomorphe à $[\gamma_3(R) \wedge R, R]$. Le noyau de ζ est donc le noyau de $H_3(R/\gamma_4(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_3(R))$.

5.4 Perspectives

Comme à la fin de la section précédente nous retrouvons les morphisme canoniques $H_3(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_n(R))$. La question est surtout de savoir s'il sont tous nuls ou non. Si c'est le cas tout se passe assez simplement. Nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \text{Ker } \kappa_n \otimes R_{\text{ab}} & \cong & \text{Ker } \kappa_n \wedge R & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker } \kappa_{n+1} & \longrightarrow & ((R \otimes R) \wedge^{n-2} R) \wedge R & \xrightarrow{\kappa_{n+1}} & [(R \otimes R) \wedge^{n-2} R, R] & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & H_3(R/\gamma_n(R)) & \longrightarrow & \gamma_n(R) \wedge R & \xrightarrow{\zeta} & \gamma_{n+1}(R) & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 1 & & 1 & & &
 \end{array}$$

dans lequel les colonnes sont scindées. Finalement le noyau de κ_{n+1} est isomorphe à la somme directe

$$(\Gamma(R_{\text{ab}}) \otimes^{n-1} R_{\text{ab}}) \oplus (H_3(R_{\text{ab}}) \otimes^{n-2} R_{\text{ab}}) \oplus \cdots \oplus H_3(R/\gamma_n(R))$$

Si les morphismes $H_3(R/\gamma_n(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_{n-1}(R))$ sont nuls jusqu'au rang n , le résultat reste valable jusqu'au noyau de κ_{n+1} . Le noyau suivant est alors une extension du noyau de $H_3(R/\gamma_{n+1}(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_n(R))$ par la somme directe $(\Gamma(R_{\text{ab}}) \otimes^n R_{\text{ab}}) \oplus (H_3(R_{\text{ab}}) \otimes^{n-1} R_{\text{ab}}) \oplus \cdots \oplus (H_3(R/\gamma_n(R)) \otimes R_{\text{ab}})$.

6 Bibliographie

- [Br] K. S. BROWN, *Homology of groups*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1982
- [BrLo] R. BROWN and J.-L. LODAY, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology **26** (1987), 311-335
- [Cu] E. B. CURTIS, *Some relations between homotopy and homology*, Ann. of Math. **82** (3) (1965), 386-413
- [De] R. K. DENNIS, *In search of new "Homology" functors having a close relationship to K-theory*, preprint, Cornell University (1976)
- [EcHi] B. ECKMANN and P. J. HILTON, *On central group extensions and homology*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 345-355
- [EcHiSt] B. ECKMANN, P. J. HILTON and U. STAMMBACH, *On the homology theory of central group extensions : the commutator map and stem extensions*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 102-122 and
- [El1] G. J. ELLIS, *Non-abelian exterior product of groups and exact sequences in the homology of groups*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 13-19
- [El2] G. J. ELLIS, *On five well-known commutator identities*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **54** (1993), 1-17
- [El3] G. J. ELLIS, *Crossed squares and combinatorial homotopy*, Math. Z. **214** (1993), 93-110
- [Gu] A. GUT, *A ten-term exact sequence in the homology of a group extension*, J. Pure Appl. Algebra **8** (1976), 243-260
- [GWLo] D. GUIN-WALERY and J.-L. LODAY, *Obstructions à l'excision en K-théorie algébrique*, in Evanston Conference on Algebraic K-theory, 1980, Lecture notes in Mathematics, Vol. 854, pp. 179-216, Springer Verlag (1981)
- [Ha] M. HALL JR., *The Theory of groups*, MacMillan, New York, 1959
- [HiSt] P. J. HILTON and U. STAMMBACH, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1996
- [Mi] C. MILLER, *The second homology group of a group; relations among commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 588-595
- [Ra] J. G. RATCLIFFE, *Free and projective crossed modules*, J. London Math. Soc. (2) **22** (1980), 66-74

- [Si1] A. J. SIERADSKI, *Framed links for Peiffer identities*, Math. Z. **175** (1980), 125-137
- [Si2] A. J. SIERADSKI, *A combinatorial interpretation of the third integral homology of a group*, J. Pure Appl. Algebra **33** (1984), 81-96
- [Si3] A. J. SIERADSKI, *Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of group*, Inv. Math. **84** (1986), 121-139
- [WhG] G. W. WHITEHEAD, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Math. 61, Springer-Verlag, 1978
- [WhJ1] J. H. C. WHITEHEAD, *Combinatorial Homotopy II*, Bull. A.M.S. **55** (1949), 453-496
- [WhJ2] J. H. C. WHITEHEAD, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. **52** (1950), 51-110

Résumé

Le produit tensoriel non abélien construit à partir de modules croisés $M \longrightarrow P$ et $N \longrightarrow P$ est en surjection sur le sous-groupe de commutateurs $[\text{Im } M, \text{Im } N]$. Les factorisations à travers chacun des modules croisés définissent des commutateurs généralisés. Les noyaux associés à ces factorisations du type $M \otimes N \longrightarrow [M, N]$ et $M \otimes N \longrightarrow [N, M]$ sont des quotients de groupes de relations entre commutateurs généralisés par des relations universelles. Toute l'homologie d'un groupe peut s'exprimer sous la forme de tels quotients. L'étude des identités vérifiées par le produit tensoriel, de l'exactitude à droite et de l'obstruction à l'exactitude à gauche permet d'expliciter plus ou moins complètement certains de ces quotients et d'établir des liens entre différents groupes de cette forme. Ces questions sont également liées à l'existence de sections compatibles avec les structures de module croisé et à l'éventuelle nullité, pour un groupe libre R , des morphismes canoniques $H_3(R/\gamma_n(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_{n+1}(R))$.

Mots clés

Produit tensoriel non abélien, produit extérieur, relations entre commutateurs, sections de morphismes de modules croisés, homologie des groupes.

Abstract

The non-abelian tensor product based on a couple of crossed modules $M \longrightarrow P$ and $N \longrightarrow P$ is in surjection on the commutator sub-group $[\text{Im } M, \text{Im } N]$. The factorisations through the crossed modules define generalised commutators. The kernels associated to the factorisations $M \otimes N \longrightarrow [M, N]$ and $M \otimes N \longrightarrow [N, M]$ are quotients of groups of relations between commutators by universal relations. Such quotients give all the homology of a group. We obtain some of this quotients or some links between them by studying identities in tensor product, right exactness and obstruction to left exactness. This questions are also connected to the construction of sections respecting crossed modules laws and to the nullity of canonical morphisms $H_3(R/\gamma_n(R)) \longrightarrow H_3(R/\gamma_{n+1}(R))$ induced by a free group R .

Key words

Non-abelian tensor product, exterior product, relations between commutators, sections of crossed modules morphismes, homology of groups.