



HAL
open science

**DEMONSTRATION , RAISONNEMENT ET
VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT
SECONDAIRE DES MATHEMATIQUES EN FRANCE
ET EN ALLEMAGNE**

Richard Cabassut

► **To cite this version:**

Richard Cabassut. DEMONSTRATION , RAISONNEMENT ET VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHEMATIQUES EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT : . tel-00009716

HAL Id: tel-00009716

<https://theses.hal.science/tel-00009716>

Submitted on 9 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

U.F.R.de Mathématiques

Ecole doctorale « Savoir scientifique : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

thèse pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée par

CABASSUT Richard

DEMONSTRATION, RAISONNEMENT ET VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHEMATIQUES EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE

Thèse dirigée par M. Bernard PARZYSZ

soutenue le 27 mai 2005

JURY

Mme Marie-Jeanne PERRIN	Professeur des Universités IUFM Nord-Pas-de-Calais.	Présidente
M. Yves CHEVALLARD	Professeur des Universités IUFM d'Aix-Marseille	Rapporteur
M. Bernard PARZYSZ	Professeur émérite des Universités IUFM d'Orléans-Tours	Directeur de thèse
Mme Jacqueline ROBINET	Maître de Conférences Université de Paris 7	
M. Klaus VOLKERT	Professeur des Universités Université de Cologne	Rapporteur

Table des matières

0	INTRODUCTION : pourquoi cette recherche ?	11
0.1	La démonstration dans l'enseignement secondaire	11
0.2	La comparaison franco-allemande	13
0.3	Un enseignement de la démonstration comme élément de formation générale au raisonnement	14
0.4	Preuves chez les élèves et preuves officielles	15
0.5	Premières questions	16
0.6	Organisation de la thèse	16
1	Cadre théorique et problématique	19
	Organisation du chapitre 1	21
1.1	Raisonnement, validation, argumentation, démonstration	22
1.1.1	Le choix de la terminologie comme enjeu théorique	22
1.1.2	Raisonnement de validation	24
1.1.3	Premiers exemples de raisonnement de validation	28
1.1.4	Différentes conceptions de la vérité	33
1.1.5	Raisonnement de nécessité et raisonnement de plausibilité	36
1.1.6	Argumentation et démonstration/preuve	46
1.1.7	Raisonnement élémentaire de validation ou argument chez Toulmin	47
1.1.8	Les trois statuts de propositions dans un argument : donnée, règle de validation, conclusion	49
1.1.9	Variation de statut dans un argument pour une même proposition	55
1.1.10	Absence de règle de validation	56
1.1.11	Exemples d'analyses séquentielle et structurelle d'un raisonnement	59
1.1.12	Analyse structurelle d'un raisonnement de validation	62
1.1.13	Analyse séquentielle d'un raisonnement de validation	63
1.1.14	Exemples de types d'arguments non mathématiques	64
1.1.15	Conclusion	73
1.2	L'approche anthropologique	74
1.2.1	La validation : objet de connaissance ? objet de savoir ? objet à enseigner ?	75
1.2.2	Analyse des validations	85
1.2.3	Fonctions de la validation	99
1.2.4	Questions liées au cadre théorique	108
1.3	Problèmes méthodologiques généraux	109
1.3.1	Différentes méthodologies comparatives	109
1.3.2	Comparaison dans des langues différentes	113
1.3.3	Comparaison dans des institutions différentes	125
1.4	Problématique et objets d'étude	136
1.4.1	Questions de recherche	136
1.4.2	Hypothèses de recherche	137
1.4.3	Objets d'études	138
1.4.4	Hypothèses de travail	140

2	Comparaison de réflexions et de recherches sur la validation ou sur la comparaison franco-allemande.....	141
	Organisation du chapitre 2.....	142
2.1	Motivation et protocole de l'étude.....	143
2.2	Conceptions de la validation en France :	144
2.2.1	Balacheff.....	144
2.2.1.1	Aspect social de la preuve.....	144
2.2.1.2	Typologie de preuves.....	145
2.2.2	Duval.....	147
2.2.2.1	Le problème de l'explicitation dans les argumentations.....	147
2.2.2.2	Absence de validité des argumentations.....	147
2.2.2.3	Linguistique et discursif.....	149
2.2.2.4	Typologie des pas de raisonnement.....	150
2.2.2.5	Analyse des exemples de pas de raisonnement.....	150
2.2.2.6	Registres de représentation sémiotique.....	156
2.2.3	Arsac.....	157
2.2.4	IREMs de Grenoble et de Rennes.....	158
2.2.4.1	La démonstration est un texte.....	158
2.2.4.2	Le rôle de la figure.....	159
2.2.4.3	Faire exister la phase heuristique.....	159
2.2.4.4	Construire la rationalité pour enseigner la démonstration.....	160
2.3	Conceptions de la validation en Allemagne :	161
2.3.1	Stein.....	161
2.3.1.1	Le niveau abstrait de la théorie logique mathématique.....	161
2.3.1.2	Le niveau de la théorie mathématique.....	162
2.3.1.3	Le niveau de la théorie organisée localement.....	162
2.3.1.4	Le niveau de la théorie quotidienne.....	163
2.3.1.5	Un exemple de preuve du niveau de la théorie quotidienne :.....	164
2.3.2	Holland.....	164
2.3.2.1	La démonstration mathématique.....	165
2.3.2.2	Trois niveaux de preuves.....	165
2.3.3	La preuve dans des manuels de didactique.....	168
2.3.3.1	Analyse de la preuve, de la justification et de l'argumentation.....	168
2.3.3.2	Base d'argumentation, aspect subjectif de la preuve.....	172
2.3.3.3	Pratique de la preuve dans l'enseignement.....	173
2.3.3.4	Argumentation et démonstration.....	173
2.4	Différentes comparaisons franco-allemandes.....	174
2.4.1	Image des mathématiques chez les élèves.....	174
2.4.2	Etude TIMSS.....	176
2.4.2.1	Un exemple d'effet de structure.....	177
2.4.2.2	Tâches de raisonnement.....	179
2.4.3	La démonstration en classe du théorème de Pythagore (Knipping).....	180
2.5	Conclusion.....	185
2.5.1	Typologie des arguments.....	185
2.5.2	Types d'arguments et fonctions des validations.....	187
2.5.3	Autres informations.....	191

3	Comparaison des programmes d'enseignement et des textes officiels.....	195
	Organisation du chapitre 3.....	196
3.1	Motivation et protocole de l'étude.....	197
3.2	Etude des programmes du Bade-Wurtemberg.....	198
3.2.1	Etude des programmes de Gymnasium de forme normale à partir de 1971 ...	198
3.2.1.1	Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1971	198
3.2.1.2	Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1984	202
3.2.1.3	Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1994	206
3.2.1.4	Programmes à venir	218
3.2.2	Etude des programmes de Realschule et Hauptchule de 1984 et 1994.....	221
3.2.2.1	Programmes de Hauptschule.....	221
3.2.2.2	Programmes de Realschule.....	222
3.2.2.3	Comparaison des occurrences des mots relatifs à la validation.....	223
3.3	Etude des programmes français.....	224
3.3.1	Programme français des années 1968 à 1971	225
3.3.1.1	Premier cycle	225
3.3.1.2	Second cycle	228
3.3.2	Programme français des années 1977 à 1983	229
3.3.2.1	Premier cycle	230
3.3.2.2	Second cycle	231
3.3.3	Programme français des années 1985 à 1992	233
3.3.3.1	Premier cycle	233
3.3.3.2	Second cycle	234
3.3.4	Programme français des années 1996 à 2001	236
3.3.4.1	premier cycle.....	236
3.3.4.2	2 nd cycle	244
3.4	Conclusions.....	256
3.4.1	La démonstration en Bade-Württemberg.....	256
3.4.2	La démonstration en France.....	258
3.4.3	Comparaison franco-allemande	259
4	Etude de la validation dans des manuels de classe.....	263
	Organisation du chapitre 4.....	264
4.1	Motivation et protocole de l'étude.....	265
4.2	La démonstration comme thème d'étude.....	267
4.2.1	Protocole particulier d'étude.....	267
4.2.2	En France	268
4.2.3	En Bade-Wurtemberg	277
4.2.4	Comparaison	282

4.3	La validation de théorèmes de cours.....	285
4.3.1	Motivation et protocole d'étude.....	285
4.3.2	La somme des angles d'un triangle.....	287
4.3.3	La mise en garde contre le recours à la figure	299
4.3.4	Le périmètre et l'aire du cercle	303
4.3.5	Le théorème de Pythagore	314
4.3.6	Autres rencontres avec des preuves du théorème de Pythagore.....	322
4.3.7	Variation de la fonction élévation au carré	327
4.3.8	Equations et inéquations du second degré	331
4.3.9	Théorème de Thalès.....	335
4.3.10	Volumes de solides usuels	340
4.4	Conclusion	341
5	Etude de validations de copies.....	347
	Organisation du chapitre 5.....	348
5.1	Motivation et protocole d'étude.....	349
5.1.1	Motivation.....	349
5.1.2	Protocole d'étude	349
5.1.2.1	Choix du dispositif d'étude.....	349
5.1.2.2	Contexte institutionnel.....	350
5.1.2.3	Choix d'un exercice pour notre étude.....	352
5.1.3	Analyse de la correction proposée	353
5.1.3.1	Un exemple de résolution possible	353
5.1.3.2	Analyse séquentielle	354
5.1.3.3	Analyse structurelle	355
5.1.3.4	Commentaire de la solution proposée :.....	355
5.1.3.5	Corrigé officiel.....	359
5.1.3.6	Consignes de correction.....	361
5.2	Corpus de l'étude	361
5.2.1	Quelques caractéristiques des copies du centre de Haute Alsace.....	361
5.2.2	Répartition des notes selon le pays dans l'ensemble des copies étudiées.....	362
5.2.2.1	Constitution du corpus d'étude	362
5.2.3	Etude qualitative	363
5.2.3.1	Illustration d'arguments non mathématiques.....	364
5.2.3.2	Illustration d'arguments mathématiques.....	366
5.2.3.3	Illustration de copies prototypiques.....	369
5.2.3.4	Commentaires et conjectures de recherche.....	372
5.2.3.5	Prudence dans les conjectures.....	372
5.3	Grille et protocole de saisies des données.....	374
5.3.1	Grille de saisie des Extrait du tableau des données saisies.....	375
5.3.2	Données.....	376
5.3.3	Variables générales	376
5.3.4	Variables d'analyse du texte de démonstration :	377
5.3.4.1	Complexité d'une démonstration.....	377
5.3.4.2	Mesure de l'expansion du texte.	381
5.3.4.3	Structure d'un argument :	383
5.3.4.4	Marquage des unités démonstratives	384
5.3.5	Convention de saisie de donnée.....	385

5.4	Analyse des résultats de l'étude.....	386
5.4.1	Statistiques descriptives.....	386
5.4.2	Interprétations et comparaisons statistiques.....	387
5.4.2.1	Complexité de la démonstration.....	387
5.4.2.2	Expansion de la démonstration.....	390
5.4.2.3	Structure des arguments.....	391
5.4.2.4	Règles d'argument utilisées.....	393
5.4.2.5	Ajout d'une figure.....	393
5.4.2.6	Ajout de données.....	393
5.5	Conclusion.....	394
6	Conclusion.....	401
6.1	Conclusions méthodologiques.....	402
6.2	Questions et hypothèses de recherche.....	403
6.2.1	La double transposition et les différents types de validation.....	403
6.2.2	Place de la démonstration : la démonstration objet d'enseignement.....	406
6.2.3	Comparaison franco-allemande sur la validation.....	408
6.3	Perspectives de recherche.....	412
6.3.1	Représentation de la démonstration.....	412
6.3.2	Différences avec les autres Länder et les autres formes d'école.....	413
6.3.3	Pratiques de la démonstration.....	413
6.3.4	Apprentissage des élèves.....	413
6.3.5	Cadre théorique.....	414
6.4	Conclusion.....	415
7	Bibliographie.....	417
7.1	Articles, livres.....	417
7.2	Manuels scolaires.....	422
7.3	Textes ministériels.....	422
7.4	Ouvrages de référence (dictionnaires, encyclopédies).....	423
8	Annexes.....	425
8.1	La démonstration comme thème d'étude.....	426
8.1.1	en France.....	426
8.1.1.1	Annexe.....	426
8.1.1.2	Annexe.....	427
8.1.1.3	Annexe.....	431
8.1.1.4	Annexe.....	434
8.1.1.5	Annexe.....	436
8.1.1.6	Annexe.....	444
8.1.2	En Bade-Wurtemberg.....	449
8.1.2.1	Annexe.....	449
8.1.2.2	Annexe.....	450
8.1.2.3	Annexe.....	453
8.1.2.4	Annexe.....	454
8.1.2.5	Annexe.....	455
8.2	Copies d'élèves.....	460

Dédicace

à toi, rêve inachevé,
à toi, parti trop vite en cette année 2001 et qui me manques,
à toi, restée, qui m'as montré un chemin,
à toi, à qui je montre un chemin,
à toi, pour ce chemin jusqu'où le ciel rencontre la mer.

« Le temps qui passe est un bandit et nous sommes les bagages qu'il emporte » D.P.

Remerciements

Le chemin qui a conduit à ces réflexions de didactique des mathématiques est long et les remerciements en conséquence.

Il a débuté sans doute avec les conseils du vieux maître Espinay qui m'avait préparé en mathématiques au concours d'entrée à l'école normale d'instituteurs, en classe de troisième, marquant ainsi mon entrée dans la carrière d'enseignant : « N'oublie pas ! Le plus important, c'est d'aimer les élèves ! ». L'importance de ce qui n'est pas mathématiques dans l'enseignement des mathématiques était affirmée.

Puis il y a eu l'IREM¹ de Montpellier, où en 1980, j'ai commencé à réfléchir à la didactique des mathématiques, autour du professeur Charles Roumieu, qui avait mis en place une option de didactique des mathématiques, dans le cadre du DEA² de Mathématiques pures et appliquées.

L'enseignement secondaire, avec notamment les formidables ressources de l'APMEP³, ont nourri cette réflexion.

En 1989, dans le cadre d'un DEA de didactique des mathématiques, l'école strasbourgeoise de didactique, autour de François Pluvinaige, avec Claire Dupuis, Photis Nobelis, Jean Martinet, Raymond Duval et bien entendu Georges Glaeser, ont consolidé cette réflexion didactique en lui donnant une dimension scientifique.

Mon affectation à Strasbourg en 1990 m'a permis de profiter des richesses de l'IREM de Strasbourg, notamment en travaillant dans différents groupes⁴ de cet IREM. Les contacts avec les collègues y furent riches et m'ont permis de découvrir d'autres structures⁵, notamment en Allemagne où les rencontres avec Erich Strobel, Klaus Volkert, Dr. Brandt, Dr. Eggs, Georg Lutz, Hans-Jürgen Elschenbroich furent déterminantes, tout comme la collaboration avec l'équipe alsacienne de mathématiques sans frontières.

Puis, à partir de 1999, sous l'impulsion de Bernard Parzysz, compagnon de l'APMEP, j'ai découvert la richesse de l'équipe Didirem⁶. Puis vint la découverte d'ARDM⁷. Il est difficile de citer toutes les personnes à qui je suis redevable, mais je remercierai particulièrement Rudolf Sträßer, qui m'a notamment accueilli à Bielefeld, ainsi que Valentina Celi et Christine Knipping.

L'IUFM⁸ de Strasbourg, avec notamment Alain Kuzniak, Nicole Bopp, Jean-Claude Rauscher, Robert Adjage, ainsi que les collègues de mathématiques, m'ont accueilli, compensant en partie le difficile éloignement géographique du laboratoire Didirem.

Institutionnellement, je veux remercier le Rectorat de Strasbourg, l'IUFM d'Alsace et l'INRP⁹ pour leur soutien en terme d'allègement de service.

Comme on le voit, le chemin a été long, et agréable de rencontres. Mais c'est avec satisfaction que je le termine par ce travail : c'est l'occasion de remercier tous les membres du jury pour

¹ Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

² Diplôme d'Etudes Approfondies

³ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

⁴ le groupe franco-allemand, le groupe Europe, le groupe d'histoire des mathématiques.

⁵ la MNU du Bade-Wurtemberg, le séminaire de didactique de l'Université de Freiburg, l'association Mathématiques sans Frontières.

⁶ DIDIREM est une équipe de recherche en didactique des mathématiques, rattachée à l'UFR de mathématiques de l'université Paris 7

⁷ Association pour la recherche en didactique des mathématiques

⁸ Institut Universitaire de Formation des Maîtres

⁹ Institut national de recherche pédagogique.

leur participation, avec d'abord une attention particulière pour Bernard Parzysz, qui m'a accompagné au cours de ces dernières années.

Marie-Jeanne Perrin m'a également soutenu au sein du laboratoire Didirem, malgré l'éloignement de Paris.

J'ai découvert les travaux d'Yves Chevallard sur l'anthropologie du didactique en préparant ma première école d'été de didactique en 2000. J'y ai trouvé un cadre théorique intéressant pour conduire ma recherche. Je suis donc très heureux de sa participation au jury.

Klaus Volkert, que je connais grâce au groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg, m'a ouvert à la didactique allemande, notamment lors de visites à la Pädagogische Hochschule de Heidelberg ou au séminaire de didactique de Köln. Je suis également très heureux de sa participation au jury.

Enfin je remercie Jacqueline Robinet, de l'Université de Paris 7, pour sa participation au jury. Il faut ici redire ma gratitude à l'Université de Paris 7 de m'avoir accueilli, malgré les contraintes d'éloignement et de disponibilité.

Avertissement

Les mentions bibliographiques renvoient à la bibliographie finale avec la convention suivante. Ross [1998, p.252-255, trad. R.C.] signifie : Ross auteur, 1998 année de parution, citation de la page 252 à 255, traduction en français assurée par Richard Cabassut.

Les mentions entre crochet [] dans une citations désignent des insertions que nous avons introduites pour une meilleure compréhension de la citation.

Pour ce qui concerne les citations, essentiellement en allemand, nous avons choisi de les présenter dans leur traduction française pour permettre une lecture fluide du texte. Deux cas se présentent. Soit nous avons traduit nous-même et dans ce cas nous avons cité le texte original en note. Soit nous avons utilisé une traduction « officielle » (par exemple l'édition en langue française du livre de Toulmin) ; dans ce cas nous n'avons pas jugé nécessaire de proposer l'original en note.

0 INTRODUCTION : pourquoi cette recherche ?

0	INTRODUCTION : pourquoi cette recherche ?	11
0.1	La démonstration dans l'enseignement secondaire	11
0.2	La comparaison franco-allemande	13
0.3	Un enseignement de la démonstration comme élément de formation générale au raisonnement	14
0.4	Preuves chez les élèves et preuves officielles	15
0.5	Premières questions	16
0.6	Organisation de la thèse	16

La question du « pourquoi » est essentielle dans une recherche, mais également dans un acte d'enseignement, et dans beaucoup d'actes de la vie. Chercher les raisons d'un acte, c'est-à-dire ce qui l'explique, le justifie, le motive, c'est chercher le sens. Cherchons donc des raisons, sachant qu'au cours de la recherche pourront apparaître de nouvelles raisons, non formulées, parce qu'inconscientes, oubliées ou à découvrir.

Il y a plus d'une dizaine d'années j'avais commencé l'aventure de la recherche en didactique des mathématiques avec l'équipe strasbourgeoise, sous la direction de François Pluvinage. La motivation franco-allemande était déjà forte : j'habitais et je travaillais en Allemagne. Le thème de mon mémoire de DEA fut : *Comparaison de l'enseignement et de l'image des mathématiques chez des lycéens français et des lycéens allemands* [Cabassut 1989]. Puis ce fut le retour en France et l'aventure s'était mise en sommeil, avec les contraintes et les plaisirs de la vie professionnelle, et de la vie tout court. Mais le désir de l'aventure se réveillait de temps à autres. La motivation franco-allemande restait forte. J'en ai parlé à Bernard Parzysz qui m'a suggéré de m'intéresser au thème de la démonstration. Le décor était planté pour une nouvelle aventure.

0.1 La démonstration dans l'enseignement secondaire

Une problématique majeure de l'enseignement des mathématiques en second cycle : la démonstration.

Comme enseignant de mathématiques dans l'enseignement secondaire, nous ressentons la démonstration comme mode de validation caractéristique des mathématiques et son enseignement comme élément indispensable à l'acquisition d'une culture mathématique. Mais nous observons également la difficulté des élèves à assumer les tâches et les productions liées à la démonstration. Enfin l'évolution des exercices d'évaluation, par exemple au baccalauréat

français, tendait à privilégier des niveaux d'exigence où la démonstration restait appauvrie : calculs, algorithmes, applications directes de théorèmes. C'est pourquoi nous sommes motivés dans notre pratique professionnelle par ce thème de la démonstration. L'APMEP [Gras et al 2003] propose d'ailleurs une approche des contenus d'enseignement par dix problématiques pour le second cycle, parmi lesquelles la problématique « conjecture et preuves ».

L'utilisation des calculatrices et des logiciels informatiques et la démonstration.

Le développement du recours aux calculatrices programmables, graphiques, formelles et aux logiciels mathématiques repose avec force le problème de la démonstration. L'IREM¹⁰ de Montpellier [IREM de Montpellier 1998] précise que « dans un environnement « calculatrice », la possession par les élèves d'outils de calculs puissants incite à modifier fortement le contenu des questions et les réponses ne seront pas forcément induites par le professeur. On trouvera souvent des questions du type « que penser de telle situation ? ». La place est alors libre pour un travail de conjectures, de preuves partielles, de réfutations ». Il se pose également le problème de l'exécution de certaines tâches de validation par la calculatrice ou l'ordinateur: à quelles conditions une procédure de validation utilisant une calculatrice ou un ordinateur constitue-t-elle une démonstration ? La réforme des lycées [Ministère 1999, 2002] introduit avec force l'utilisation des calculatrices et des logiciels dans l'enseignement des mathématiques de toutes les séries générales et redéfinit la place de la démonstration. Ce sont autant de motivations d'actualité pour étudier la démonstration.

Les contraintes professionnelles :

Le fait d'être enseignant dans le secondaire motive naturellement pour une étude à ce niveau d'enseignement, notamment parce que l'expérience accumulée peut être réinvestie dans la recherche et réciproquement les hypothèses de la recherche pourront être vérifiées plus facilement dans notre pratique professionnelle. Des études dans l'enseignement primaire ou dans l'enseignement supérieur auraient nécessité un investissement plus important du fait de notre éloignement de ces niveaux d'enseignement. La difficulté à concilier un travail de recherche avec un engagement professionnel à plein temps pose des contraintes qui vont orienter la recherche, tant au niveau des thèmes choisis – recherches de thèmes motivants- que des méthodologies adoptées – éviter les méthodologies « chronophages ».

¹⁰ Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

0.2 La comparaison franco-allemande

L'enseignement des mathématiques pour élèves étrangers :

Nous enseignons depuis dix ans dans un lycée international qui accueillent pour des périodes de durées variables (quelques mois, une année scolaire ou jusqu'au baccalauréat) des élèves étrangers. Pour ces élèves ont été mis en place des cours de mathématiques permettant l'adaptation linguistique, culturelle et scolaire à l'enseignement mathématique français. Nous avons accueilli notamment des élèves allemands qui rencontrent parfois des difficultés pour produire des démonstrations correspondant aux critères demandés par le professeur français. Les auteurs de la brochure *Outils mathématiques pour élèves non francophones ou en difficultés* [IREM de Strasbourg 1999] précisaient que « les méthodes de raisonnement et de rédaction employées en France constituent un très gros obstacle » pour ces élèves.

Y a-t-il donc des différences dans les critères de productions de démonstration entre la France et l'Allemagne, notamment au niveau des raisonnements que de la rédaction? Ou bien ces différences sont-elles dues à l'hétérogénéité des pratiques des enseignants, indépendamment du pays considéré ? Si la réponse à la première question est affirmative, peut-on proposer aux élèves allemands accueillis en France un enseignement d'adaptation permettant de surmonter les difficultés dues à ces différences ?

Les échanges dans l'enseignement des mathématiques entre élèves français et allemands :

Nous avons pratiqué ou étudié [Cabassut, Molard, 1996] des échanges entre élèves français et allemands impliquant l'enseignement des mathématiques. A cette occasion sont apparues des différences entre les classes dans les programmes d'enseignement, et dans la pratique de ces programmes. Ces différences ont notamment concerné pour la partie cours les résultats démontrés ou admis, et la pratiques de leurs éventuelles démonstrations. Annette MOLARD [Molard 1996, p.44] précisait « le « Beweis¹¹ » allemand est concis ; on exige moins de détail dans la formulation ».

Quels sont la place et le statut de la démonstration en Allemagne et en France ? Comment intervient-elle dans les évaluations ? Une réponse à ces questions permettrait de faciliter les échanges de classes précédents.

¹¹ On peut traduire par « démonstration ». Nous discuterons cette traduction de manière plus approfondie dans un prochain paragraphe.

Les lycées franco-allemands :

Nous avons enseigné pendant six ans dans un lycée franco-allemand¹². Ces établissements proposent, dans un même lieu géographique, un même programme d'enseignement des mathématiques à des élèves français ou allemands, chacun le recevant dans sa langue maternelle, par un enseignant de son pays. En fin d'étude secondaire, ces élèves passent la même épreuve de mathématiques du baccalauréat franco-allemand avec double correction, par un professeur français et par un professeur allemand.

Comment les différences évoquées précédemment peuvent être intégrées dans une évaluation commune aux deux groupes d'élèves? Comment les questions mettant en jeu la démonstration peuvent être évaluées?

La comparaison avec l'Allemagne :

Enfin l'étude comparée de l'enseignement des mathématiques en France et en Allemagne nous a paru depuis longtemps une source de questionnements riches pour une réflexion sur nos pratiques professionnelles [Cabassut 1988, 1989, 1998, 2000] et il nous paraît naturel d'appliquer cette étude comparative au domaine de la démonstration. Ouvrir une réflexion comparée dans un domaine – la démonstration, c'est aussi mettre en place une méthodologie des études comparatives et étudier dans quelles mesures elle peut être étendue à d'autres domaines. Nos travaux compléteront les comparaisons récentes avec l'Allemagne de [Knipping 2003] sur l'enseignement du théorème de Pythagore dans des classes, et de [Pepin 2001] sur les manuels de classe.

0.3 Un enseignement de la démonstration comme élément de formation générale au raisonnement

Dans les décisions concernant des actions que nous devons engager dans notre vie quotidienne, les processus de preuves jouent un rôle important comme aide à la décision. Le contexte de la prise de décision fournit également d'autres critères qui peuvent être extérieurs au processus de preuves¹³ – contraintes temporelles ou matérielles par exemple. Par exemple si on effectue une réparation automobile et qu'on souhaite rétablir le circuit électrique dans une voiture, il est important de pouvoir prouver avec certitude que les manipulations que l'on va effectuer ne vont pas endommager l'installation électrique. Ici un enjeu de risque de

¹² Deutsch-Französisches Gymnasium, Halbergstrasse, Saarbrücken.

¹³ Preuve : Ce qui démontre, établit la vérité de qqch. [Bibliorom Larousse, 1996].

détérioration conduit à décider d'une action par un processus de preuve. Si le risque de sécurité n'est pas vital, le garagiste peut adopter une attitude expérimentale : il repère la cause la plus plausible et change l'organe supposé défectueux. Si le dysfonctionnement se poursuit malgré son intervention, il étudiera une autre cause possible. Ici le raisonnement plausible se substitue au précédent raisonnement de preuve. Par contre s'il s'agit de choisir quel est le meilleur film à choisir pour une séance donnée, une argumentation¹⁴ suffira à déterminer le choix probablement le meilleur, sans qu'on en soit certain. Cependant il existe des décisions avec prises de risques – par exemple un diagnostic médical en situation d'urgence à la suite d'un accident – pour lesquelles on n'a pas le choix entre la certitude d'une preuve et la fiabilité d'une argumentation : le contexte de la situation impose une décision urgente et c'est un processus d'argumentations, plus ou moins fiables, qui conduira à la décision.

Il est donc important de recevoir une formation générale aux processus de preuve et d'argumentation. L'enseignement de la démonstration permet de distinguer et de pratiquer ces deux processus. Quelles sont les distinctions et les similitudes entre preuves et argumentations ? Une comparaison franco-allemande permet-elle de mieux les éclairer ?

0.4 Preuves chez les élèves et preuves officielles

Dans le domaine des recherches françaises en didactique des mathématiques sur la preuve les travaux de Balacheff [1988] mettent en évidence différentes formes de raisonnements chez des élèves du collège : l'empirisme naïf « consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion [...] l'expérience cruciale est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible [Balacheff 1987, p.163] ». « Ces deux types relèvent d'une même rationalité empirique (i.e. tirée de l'expérience) selon laquelle l'accumulation des faits fonde la conviction dans la validité d'une assertion [Balacheff 1988, p.565] ». Or notre connaissance des programmes du collège et du lycée, ainsi que la fréquentation de différents manuels scolaires, nous amène à penser que des raisonnements empiriques y semblent également présents dans la pratique de preuves.

Quels types de raisonnements peuvent être mis en oeuvre dans la production de preuves d'après les textes officiels et dans les manuels scolaires ? Y observe-t-on des différences ou des similitudes par rapport aux observations faites chez les élèves ? Qu'apporte l'éclairage franco-allemand ?

¹⁴ Argumentation : action d'argumenter ; ensemble d'arguments. Argumenter : **1.** Présenter des arguments, une argumentation sur, contre qqn, qqch. **2.** Log. Tirer des conséquences. [Bibliorom Larousse, 1996]

0.5 Premières questions

Au terme de l'étude de nos motivations nous formulons les premières questions suivantes.

Pourquoi enseigne-t-on la démonstration en France et en Allemagne ? Quels y sont la place et le statut de la démonstration dans l'enseignement secondaire des mathématiques? Quels y sont la place et le statut des processus de preuve et d'argumentation ? Quels types de raisonnements y sont mis en oeuvre ?

Quelles différences et quelles similitudes la comparaison de la place et du statut de la démonstration en France et en Allemagne met-elle en évidence ?

Nous allons indiquer maintenant comment est organisé ce travail pour répondre à ces premières questions.

0.6 Organisation de la thèse

Dans la première partie, « Cadre théorique et problématique » [1] nous précisons d'abord [1.1] le cadre philosophique [Toulmin 1958] dans lequel nous nous plaçons, ce qui nous permet de préciser la terminologie, les deux grands types de raisonnements (de plausibilité et de nécessité) que nous considérons, et de mettre en évidence la notion de validation qui regroupe les notions d'argumentation et de preuve. Ensuite [1.2] nous précisons le cadre théorique didactique [Chevallard 1985, 1992] que nous adoptons, ce qui nous permet de préciser différents éléments utiles dans la suite (institution, tâche, technique, technologie, théorie, fonction) décrivant la validation. Nous décrivons en [1.3] les problèmes méthodologiques généraux liés à une étude comparative, qui nous amène à conclure cette première partie en reformulant de manière plus précise les objets, les questions et les hypothèses de notre étude [1.4].

Les parties suivantes présentent nos différentes études comparant France et Allemagne sur des réflexions et des recherches sur la validation [2], des programmes et des textes officiels [3], des manuels scolaires [4], des productions d'élèves [5], ce qui nous permet de livrer nos conclusions [6], en précisant notre bibliographie [7] et nos annexes [8].

1 Cadre théorique et problématique

1	Cadre théorique et problématique	19
	Organisation du chapitre 1	21
1.1	Raisonnement, validation, argumentation, démonstration	22
1.1.1	Le choix de la terminologie comme enjeu théorique	22
1.1.2	Raisonnement de validation	24
1.1.3	Premiers exemples de raisonnement de validation	28
1.1.4	Différentes conceptions de la vérité	33
1.1.5	Raisonnement de nécessité et raisonnement de plausibilité	36
1.1.6	Argumentation et démonstration/preuve	46
1.1.7	Raisonnement élémentaire de validation ou argument chez Toulmin	47
1.1.8	Les trois statuts de propositions dans un argument : donnée, règle de validation, conclusion	49
1.1.9	Variation de statut dans un argument pour une même proposition	56
1.1.10	Absence de règle de validation	56
1.1.11	Exemples d' analyses séquentielle et structurelle d'un raisonnement	59
1.1.12	Analyse structurelle d'un raisonnement de validation	62
1.1.13	Analyse séquentielle d'un raisonnement de validation	63
1.1.14	Exemples de types d'arguments non mathématiques	64
1.1.15	Conclusion	73
1.2	L'approche anthropologique	74
1.2.1	La validation : objet de connaissance ? objet de savoir ? objet à enseigner ? ..	75
1.2.2	Analyse des validations	85
1.2.3	Fonctions de la validation	100
1.2.4	Questions liées au cadre théorique	108
1.3	Problèmes méthodologiques généraux	110
1.3.1	Différentes méthodologies comparatives	110
1.3.2	Comparaison dans des langues différentes	114
1.3.3	Comparaison dans des institutions différentes	126
1.4	Problématique et objets d'étude	137
1.4.1	Questions de recherche	137
1.4.2	Hypothèses de recherche	138
1.4.3	Objets d'études	139
1.4.4	Hypothèses de travail	141

Introduction : le débat sur les différentes formes de raisonnement et sur la place de la démonstration dans l'enseignement

Comme le rappelle Hanna [2000, p.10, trad. R.C.], depuis plusieurs années, l'enseignement de la démonstration est en question aux Etats-Unis, et notamment avec les standards du Conseil National des Professeurs de Mathématiques (NCTM) de 1989, qui recommandaient que « moins d'accent soit sonné aux preuves en deux colonnes¹⁵ et à la géométrie euclidienne en tant que système axiomatique »¹⁶, et les standards de 2000 qui proposaient un « plus grand accent sur le test des conjectures, la formulation des contre-exemples et la construction et l'examen des arguments valides »¹⁷. Knuth [2000, p.1, trad. R.C.] estime que ces standards « atténuent le rôle de la preuve dans les mathématiques scolaires, choisissant en revanche de porter l'attention sur le raisonnement »¹⁸. Ross [1998, p.252-255, trad. R.C.] rappelle les positions de ce conseil : « l'un des buts les plus importants de l'enseignement des mathématiques est d'enseigner aux étudiants le raisonnement logique. Cette capacité fondamentale n'est pas seulement mathématique [...] On devrait faire ressortir que le fondement des mathématiques est le raisonnement. Tandis que la science vérifie à travers l'observation, les mathématiques vérifient à travers le raisonnement logique [...] Des résultats peuvent être validés dans un petit nombre de cas directement, mais les étudiants doivent reconnaître que tout ce qu'ils ont dans ce cas c'est l'évidence d'une conjecture, jusqu'à ce que le résultat ait été rigoureusement établi [...] La chose importante est d'être honnête : si seulement des illustrations ou un argument de plausibilité sont proposés, les étudiants doivent se rappeler qu'une raison logique ou une démonstration est nécessaire. Ce point ne devrait pas être perdu maintenant que la technologie propose un moyen d'exploration des idées mathématiques et d'examen des conjectures. Bien sûr, le développement des démonstrations doit se faire davantage d'après leur valeur éducative que d'après la correction formelle »¹⁹. Ces propos de Ross rappellent que le raisonnement logique n'est pas un monopole des raisonnements mathématiques et qu'il existe d'autres formes de raisonnements que le

¹⁵ la preuve en deux colonnes écrit dans la colonne de gauche les affirmations successives et dans la colonne de droite, au regard de chaque affirmation situé à gauche, la justification de l'affirmation.

¹⁶ "less emphasis be given to two-column proofs and to Euclidean geometry as an axiomatic system"

¹⁷ "greater emphasis on the testing of conjectures, the formulation of counterexamples and the construction and examination of valid arguments"

¹⁸ "the 1989 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) de-emphasized proof in school mathematics, choosing instead to emphasize reasoning"

¹⁹ "One of the most important goals of mathematics courses is to teach students logical reasoning. This is a fundamental skill, not just a mathematical one [...]. It should be emphasized that the foundation of mathematics is reasoning. While science verifies through observation, mathematics verifies through logical reasoning [...] Results may be shown to hold in a small number of cases directly, but students must recognize that all they have in that case is evidence of a conjecture until the result has been firmly established. [...] The important thing is to be honest; if only illustrations and a plausibility argument are supplied, the students should be reminded that a logical reason or proof is needed. This point should not get lost now that technology provides a means for exploring mathematical ideas and testing conjectures. Of course, the emphasis on proofs should be more on their educational value than on formal correctness"

raisonnement logique, notamment les raisonnements par illustration, par plausibilité, par observation ou par exploration, que nous préciserons plus loin.

La France a connu un débat analogue. Pluvinage [1989, p.6-7], à propos de l'enseignement de la démonstration au collège dans les programmes de 1985, rappelle : « le mot démonstration a tout simplement disparu [...] est-il raisonnable de vouloir tenter de faire apprendre la démonstration ? De notre point de vue, non, et d'ailleurs les résultats qu'a exposés Balacheff [1988] sont dans l'ensemble plutôt négatifs : la démonstration pourrait y sembler réservée, dans son accomplissement, à une minorité d'élèves. Notre point de vue est donc radicalement différent : c'est le raisonnement qui mérite d'être poursuivi comme l'un des objectifs de la géométrie ». Houdebine [1990, p. 21], dans un article au titre évocateur : *Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question*, précise : « L'un des objectifs du Collège est d'apprendre à argumenter. L'enseignement du français a évolué dans ce sens depuis quelques années. En faisant travailler les élèves sur la démonstration l'enseignant de mathématiques peut participer à cet apprentissage, surtout s'il le fait en liaison avec l'enseignement de français ».

Nous allons proposer, dans le paragraphe suivant, une réflexion sur la notion de raisonnement en nous inspirant des travaux de Toulmin [1958] sur l'utilisation d'arguments, ce qui nous permettra de prendre en compte notamment les raisonnements non mathématiques et de situer notre réflexion dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard [1992]. Nous décrirons deux méthodes d'analyse des raisonnements, ce qui permettra d'en vérifier la validité.

Organisation du chapitre 1

Nous allons proposer dans la première partie (1.1) une réflexion philosophique sur la notion de raisonnement. Après avoir montré l'enjeu théorique de la terminologie (1.1.1) nous définirons le raisonnement de validation (1.1.2) que nous illustrerons sur différents exemples (1.1.3). Nous évoquerons différentes conceptions de la vérité (1.1.4), et les différents termes pour la qualifier : nécessaire, certaine, probable, plausible (1.1.5) ce qui permet de définir deux grands types de raisonnement de validation : les argumentations et les preuves/démonstrations (1.1.6).

On s'inspire alors des travaux de Toulmin [1958] (1.1.7) pour décomposer un raisonnement de validation en arguments (1.1.9). Un raisonnement de validation a alors une structure en graphe d'arguments (1.1.12) et peut s'analyser de manière séquentielle (1.1.13). On donne alors différents exemples d'arguments non mathématiques utilisés dans l'enseignement des mathématiques. (1.1.14).

Dans la seconde partie (1.2) du chapitre nous insérons cette réflexion sur la validation dans l'enseignement des mathématiques, en adoptant le cadre de la théorie anthropologique du

didactique de Chevallard [1985, 1992]. Mais nous devons adapter ce cadre en définissant de nouvelles notions (la double transposition didactique en (1.2.1)) et en adaptant les différentes notions (institution, tâche, technique, technologie, théorie) anthropologiques pour étudier la validation dans l'enseignement des mathématiques (1.2.2). Nous précisons les différentes fonctions que peuvent remplir des validations (1.2.3). Nous reformulons alors nos questions dans le cadre théorique ainsi défini (1.2.4).

Dans la troisième partie de ce chapitre nous évoquons différents problèmes méthodologiques généraux : comparatifs (1.3.1), linguistiques (1.3.2) et institutionnels (1.3.3), ce qui nous permet de décrire notre dispositif de recherche pour répondre aux questions précédentes (1.4)

1.1 Raisonnement, validation, argumentation, démonstration

1.1.1 Le choix de la terminologie comme enjeu théorique

Dans le domaine du raisonnement, la terminologie est très variable d'un auteur à l'autre. Le choix du vocabulaire²⁰ n'est pas neutre. Par exemple limiter les termes inférence ou validité au seul usage qu'en fait la logique classique²¹, c'est se placer hors du propos de Richard [1998, p.157-171] qui étudie les inférences dans le raisonnement inductif ou de Toulmin [1993, p.145-151] qui évoque la validité formelle pour des argumentations qui relèvent de la logique quotidienne. De la même façon réserver le mot démonstration à son seul usage mathématique c'est ignorer son utilisation dans d'autres champs de connaissance.

Cette variation de la terminologie existe également au sein de la communauté des didacticiens français des mathématiques. Par exemple, pour Houdebine [1990, p.26], une argumentation est un « texte ou discours dont le but est de convaincre un partenaire. Le texte contient des arguments, c'est-à-dire des affirmations destinées à convaincre et ces arguments sont liés par des mots qui structurent le texte en vue de convaincre. L'argumentation dépend du partenaire à laquelle elle s'adresse. Elle n'a vraiment de sens que s'il y a quelqu'un à convaincre » ; une démonstration est « un texte argumentatif spécifique des mathématiques (structure particulière, arguments pris parmi des résultats déjà énoncés), dont la sémantique est liée à la résolution de problème et à la preuve ». Pour Duval [1992, p. 42-43], « une argumentation n'est pas une démonstration [...] Pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un

²⁰ Dans cette précision du vocabulaire il faudra bien distinguer l'emploi d'un mot comme terme générique alors qu'il regroupe plusieurs conceptions différentes ; par exemple lorsqu'on évoquera la logique ou la vérité, on sera conscient qu'il y a plusieurs logiques ou plusieurs vérités : ces termes seront donc compris dans leur sens générique.

²¹ la logique classique désigne « la partie fondamentale de la logique contemporaine qui s'est constituée au cours de la seconde moitié du XIX^e siècle et au début du XX^e siècle. Elle rompt avec la présentation traditionnelle en adoptant un formalisme inspiré des mathématiques. Ses deux parties fondamentales sont la logique des propositions et la logique des prédicats » [Hottois 2002, p.199]

raisonnement valide²². L'argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n'obéit pas à des contraintes de validité mais à des contraintes de pertinence. Cette différence est classiquement exprimée par le fait que l'une aurait pour objectif la vérité²³ et l'autre viserait la vraisemblance et la conviction d'autrui ou de soi-même ». Alors que pour Houdebine une démonstration peut être une argumentation, c'est impossible pour Duval.

Les différences de signification du vocabulaire chez les enseignants du secondaire sont également très présentes et peuvent donner lieu à des polémiques qui peuvent placer au second rang le débat de fond. Ainsi lors d'exposés²⁴ auprès d'enseignants du secondaire ou à l'occasion d'un article [Cabassut 2004] soumis à un comité de lecture d'une revue de l'enseignement secondaire, avons nous été surpris de réactions²⁵ qui voulaient limiter le mot « démonstration » voire le mot « preuve » aux seules activités mathématiques. Par exemple l'expression « preuve pragmatique » définie par Balacheff [1999, p.201] devait être corrigée en « vérification pragmatique », le mot « preuve » ne pouvant être reçu que dans son acception mathématique et alors même que nous rappelions la définition qu'en donnait Balacheff lui-même.

Nous évoquerons plus loin les problèmes de traduction qui accentue la nécessité de préciser le vocabulaire. Pour le moment définissons le terme raisonnement, ce qui nous amènera à préciser les termes validation, démonstration et argumentation.

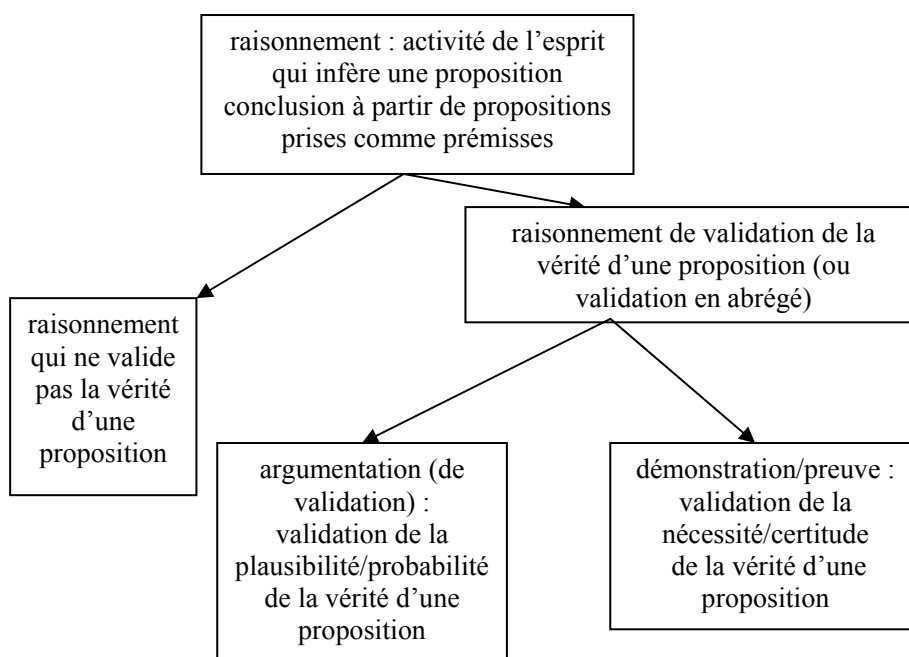
Expliquons dans le paragraphe suivant les distinctions rassemblées dans le schéma ci-après :

²² A propos de la validité d'un raisonnement, Duval [1995, p.212] précise : « la validité d'un raisonnement dépend du respect de règles pour l'organisation des propositions entre elles, et non pas du contenu des propositions ».

²³ Nous précisons plus loin les différentes conceptions de la vérité et de la vraisemblance.

²⁴ Exposés lors d'atelier aux journées nationales [Cabassut 2000b] ou au séminaire national de l'APMEP [Cabassut 2003]

²⁵ extrait d'une lettre du comité de lecture : « L'expression **preuve** pragmatique a choqué certains ; **vérifier** (est-ce le mot qui convient ?) n'est pas **démontrer**, et d'ailleurs, vous l'écrivez vous-même un peu plus loin. Alors peut-on parler d'une **preuve** ? Vous savez l'importance qu'on donne en France à la définition de la démonstration ».



1.1.2 Raisonnement de validation

1.1.2.1 Raisonner dans une institution dans le cadre d'une théorie

Nous adoptons la conception du raisonnement développée par Blanché [1995, p. 1-8] : « un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps [...] Pour se préciser et se communiquer, le raisonnement devra bientôt s'extérioriser dans le langage parlé, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale... Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses [...] L'office de la logique²⁶ est de déterminer les conditions de validité d'une inférence ».

Pour étudier un raisonnement il est bon de préciser :

²⁶ Blanché utilise « la logique » comme terme générique ; dans l'article cité il évoque plusieurs logiques possibles : « une logique opératoire naturelle », « le formalisme logique contemporain », « la logique traditionnelle », une « logique déontique » qui désigne l' « étude systématique des propriétés formelles vérifiées par des notions juridiques comme celles de droit et d'obligation » [Bibliorum Larousse, 1996] ; dans [Blanché, 1996] il évoque d'autres logiques : formelle, symbolique, modales, plurivalentes, affaiblies...

- Dans quelles conditions **institutionnelles**²⁷ il a été produit (raisonnement communiqué oralement par un élève dans une classe, raisonnement écrit dans un manuel de classe, raisonnement produit en mathématique ou en biologie, ...); le type d'*institution* permettra parfois de mieux préciser le type de *langage, de savoir ou de logique* utilisés; car si nous concevons qu'un raisonnement utilise *une* logique, celle-ci n'est pour autant ni unique ni explicite; l'institution permet de préciser également les *contrats*²⁸ qui régissent la communication²⁹ et les comportements au sein de l'institution. Ces contrats sont la plupart du temps implicites. Ils règlent notamment le degré d'explicitation et de rigueur de la communication. Ils sont parfois le résultat d'un consensus ou d'une coutume³⁰ au sein de l'institution. Nous précisons plus loin la notion de contrat.
- Dans quel cadre *théorique* il est situé: la **théorie**³¹ à laquelle se réfère un raisonnement fixe notamment les *règles d'inférence*³² (et à ce titre englobe la logique attachée à ce raisonnement), leurs conditions d'utilisation et par là même les critères permettant de déterminer si l'application d'une règle est correcte ou incorrecte; la théorie définit également les objets manipulés par le raisonnement (proposition, prémisses, conclusion, ...); la théorie définit la conception de *la vérité* à laquelle on se rattache: elle peut définir le vrai, le faux, notamment en définissant des vérités premières admises et les règles d'inférence qui permettront d'étendre la vérité à d'autres propositions. Bien entendu, la théorie n'est pas toujours définie explicitement. Cependant la connaissance des *institutions* où la théorie est mise en œuvre permet de mieux la préciser. Quelques exemples de théories seront développés plus loin.

1.1.2.2 La limitation au raisonnement de validation

Plusieurs types de raisonnement peuvent être produits suivant la fonction qu'on leur assigne. Blanché [1995, p.4] rappelle que « la logique s'est expressément limitée, jusqu'à une époque toute récente, aux seuls énoncés déclaratifs, caractérisés par la propriété d'être vrais ou faux. Elle a laissé de côté les

²⁷ «*Institution* » est pris dans son sens général: chose (règle, usage, organisme) établie; Chevallard [1992, p. 88] va jusqu'à parler d'« *institution de la vie quotidienne* ».

²⁸ Nous évoquerons plus loin cette notion de contrat notamment étudiée par Brousseau [1988] ou Chevallard [1988].

²⁹ L'institution précisera notamment les partenaires de cette communication, évoqués chez différents auteurs sous différents noms: émetteur, locuteur, énonciateur, proposant, récepteur, auditeur, communauté...

³⁰ Nous empruntons ce terme à Balacheff [1988b].

³¹ «*théorie* » est pris dans son sens général: ensemble des idées ou des institutions concernant un domaine particulier (définition suggérée par l'encyclopédie Universalis); Stein [1986, p. 14, trad. R.C.] va jusqu'à parler de «*théorie de la vie quotidienne [Alltagstheorie]*».

³² nous précisons plus en détail ce terme dans un prochain paragraphe

énoncés qui relèvent du bon et du mauvais, comme ceux qui expriment un ordre, une exhortation, un conseil, une règle de conduite. Pourtant, ce n'est pas seulement dans le domaine de la pure spéculation que le raisonnement intervient pour nous tirer d'embarras, c'est aussi, et c'est même d'abord, pour résoudre les problèmes que nous posent les affaires de la vie. On raisonne quand on délibère pour prendre une décision, soit dans le for inférieur d'une conscience, soit dans un conseil ou une assemblée. La justification relève le plus souvent de cette fonction pratique ». Nous distinguerons deux types de raisonnement. Le premier type de raisonnement **visé à établir la connaissance de la vérité d'une proposition** ; cette vérité peut être certaine, nécessaire, probable, plausible, ... Nous précisons ces différentes conceptions de la vérité plus loin. Le second type de raisonnement **qui ne vise pas la connaissance de la vérité d'une proposition** : il vise la connaissance d'une proposition suivant certains critères de bien, de beau, de souhaitable ou autres, mais qui ne sont pas des critères de vérité. Envisageons quelques exemples de ce dernier type. Un premier exemple concerne un **raisonnement pour décider** un choix, par exemple le choix d'un lieu de vacances. Ce raisonnement va avancer des raisons pour choisir ou ne pas choisir tel lieu, en fonction de critères de confort, de préférence, de coût, ... éventuellement en appréciant chaque critère sur une échelle plus ou moins précise - la comparaison quantitative des prix sera sans doute plus aisée que la comparaison qualitative du confort ou des préférences. Ce raisonnement ne vise pas à établir la vérité ou la plausibilité d'une proposition, mais à décider un choix. Un autre exemple illustre le **raisonnement pour persuader**, par exemple la plaidoirie d'un avocat concernant l'innocence de son client. Supposons que le client soit coupable et que l'avocat le sache. Le but de sa plaidoirie n'est pas d'établir la vérité ; il est de persuader les jurés que son client est innocent. Il va utiliser toutes les raisons, pour persuader que son client est innocent, évitant les raisons de sa culpabilité. Un dernier exemple est relatif au **raisonnement pour découvrir**. « Les découvertes importantes ne se font pas à l'aventure, mais plutôt par une certaine convergence de raisonnements, souvent un peu lâches, où l'on va directement au but visé en sautant certains enchaînements sur lesquels on se réserve de revenir ensuite » [Loc.cit.]. Le but n'est pas d'établir la vérité ou la plausibilité d'une proposition, mais de découvrir cette proposition.

Notre recherche ne se propose pas de prendre en compte ce type de raisonnement qui ne vise pas à connaître la vérité d'une proposition. On pourra trouver une approche générale de ces raisonnements dans [Oléron 1996] et [Richard 1998]. Dans notre étude nous nous limiterons au premier type de raisonnement qui vise à connaître la vérité d'une proposition car ce sont ces raisonnements qui apparaissent dans l'enseignement de la démonstration. Bien entendu on peut, à l'occasion de ce type de raisonnement, décider, découvrir ou persuader, mais ceci n'est pas nécessaire. Nous proposerons des exemples illustrant ces différents cas dans la suite de notre travail. Ceci signifie que nous pourrons trouver des fonctions (décider, persuader,

découvrir, expliquer, ...) communes aux deux types de raisonnement. Illustrons notre propos avec l'argumentation. « L'argumentation est aussi une forme complexe. Elle consiste à invoquer des raisons pour ou contre une thèse, soit pour y parvenir en pesant le pour et le contre (délibération), soit, à partir d'une thèse donnée, en présentant seulement les arguments favorables ou défavorables, afin de la faire admettre (justification) ou rejeter (réfutation). Elle joue surtout, mais non exclusivement (argumentation philosophique), dans le domaine pratique. Elle relève de la dialectique, à la fois en tant que raisonnement probable, et parce qu'elle suppose un dialogue, fût-ce entre « les deux lobes du même cerveau » » [Ibid. p.7]. Nous nous limiterons donc aux argumentations qui visent à établir la plausibilité d'une proposition ; nous ne considérerons pas les argumentations de l'autre type, par exemple des argumentations sur le bien ou sur le beau.

Nous appellerons les raisonnements qui visent à connaître la vérité d'une proposition sous les termes « raisonnements de validation » ou en abrégé « validations ». Dans le cas de l'argumentation, nous nous limiterons à l'« argumentation de validation » que nous continuerons à appeler argumentation en raison du contexte. Nous allons justifier ce choix terminologique dans le paragraphe suivant.

1.1.2.3 Le choix du mot validation

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de mot unanimement employé pour désigner les raisonnements qui visent la connaissance de la vérité d'une proposition.

[Brousseau 1998, p.127] distingue dans le fonctionnement de l'élève les questions de validation des questions de formulation ou d'action : « un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration ». Pour Douady [1999 ; p.5] : « Il faut prouver ce que l'on affirme autrement que par l'action. C'est l'objectif de la situation de validation ».

Pour [Margolinas 1993, p.30-31] dans la résolution d'un problème « la phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel [...] la phase de conclusion est une phase de validation si l'élève y décide lui-même de la validité de son travail ».

Plus récemment [IREMs de Grenoble et de Rennes 2003, p.103] réserve « le mot « raisonnement » pour désigner l'activité intellectuelle, en général non complètement explicite, de manipulation d'informations, données ou acquises, pour produire de nouvelles informations. Un processus de validation est cette activité lorsque sa finalité est de s'assurer de la validité d'un énoncé et éventuellement de produire une explication (respectivement une preuve ou une démonstration) ».

Dans ce travail, nous choisissons d'étendre les significations du mot « validation » proposées par les auteurs précédents : le terme « validation » désignera les raisonnements qui établissent

la connaissance de la vérité d'une proposition. Une validation pourra évoquer aussi bien une argumentation, une justification, une preuve ou une démonstration³³. Nous évoquerons plus loin, dans le paragraphe concernant différentes conceptions de la vérité, la distinction faite parfois entre la vérité d'une proposition dans une théorie donnée, et la validité d'un schéma de raisonnement dans une logique donnée (validité attachée à la seule forme du raisonnement). En considérant la validation de la connaissance de la vérité d'une proposition, nous évoquons les deux aspects de vérité et de validité : l'établissement de la vérité ou de la plausibilité de la proposition au moyen de raisonnements valides par rapport à la logique considérée.

En résumé :

Dans une **institution** qui précise, implicitement ou explicitement, langage, savoir, théorie, vérité, logique et contrats, un **raisonnement de validation** infère, à l'aide de règles d'inférence, la connaissance de la vérité d'une proposition à partir, de propositions dont la vérité est connue ou admise.

1.1.3 Premiers exemples de raisonnement de validation

Les exemples qui suivent ne vont pas être analysés en détail. On veut simplement illustrer différents termes introduits précédemment : validation, institution, théorie, contrat. Les deux premiers exemples ont été produits par un professeur enseignant en classe de seconde les programmes de 2000. Nous avons produit les trois derniers exemples à la suite sur le même problème pour illustrer des variations sur les notions précédemment introduites. Des outils d'analyse détaillée des raisonnements seront proposés dans une partie ultérieure.

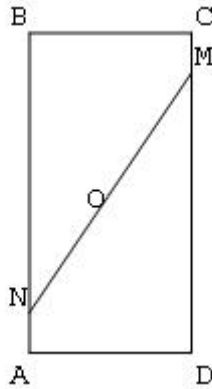
Exemple 1 :

Tâche à effectuer dans une classe de seconde française (programme de l'année 2000):

On considère dans un rectangle ABCD de centre O le point M sur le côté [CD] et la droite (OM) qui recoupe le côté [AB] en N.

Montrons que l'aire du trapèze ANMD est indépendante de la position de M sur]CD[.

³³ Nous distinguerons ces termes plus loin.



Exemple de texte de raisonnement produit par le professeur dans une classe de seconde française:

On considère la symétrie de centre O.

Comme O est centre du rectangle, la symétrie transforme :

A en C,

B en D,

C en A,

D en B,

[CD] en [AB],

(OM) en (OM),

M point d'intersection de (OM) avec [CD] en le point d'intersection de (OM) avec [AB] qui est par définition N,

N en M,

NBCM en MDAN.

Comme une symétrie conserve les aires, NBCM et MDAN ont même aire et forment par réunion le rectangle ABCD. Donc l'aire du trapèze MDAN est la moitié de l'aire du rectangle ABCD. L'aire du trapèze est donc constante, indépendante de la position de M sur [CD].

Commentaire :

Ici l'institution est la classe de seconde française où ce texte a été produit par le professeur.

Le savoir mathématique considéré dans ce texte se réfère au savoir géométrique de la géométrie axiomatique naturelle [Houdement, Kuzniak 1999, p.297] ou à la géométrie proto-axiomatique [Parzys 2003, p.111] où les validations sont déductives, à partir des définitions et propriétés admises ou démontrées.

Les justifications semblent suffisantes pour une classe de seconde. On pourrait détailler certains passages en précisant les propriétés (symétrie d'une intersection, aire d'une surface décomposée,...) ou les calculs (pour montrer que l'aire du trapèze est la moitié de l'aire du

rectangle). Le degré d'exigence de précision de la rédaction est de l'ordre du contrat implicite en place dans la classe considérée.

La logique utilisée ici est la logique mathématique classique.

Le langage utilisé est un mélange de langue naturelle et d'écritures symboliques mis en évidence par [Laborde 1982, p.18].

Les propriétés de la symétrie centrale ainsi que les propriétés des aires des figures composées permettent d'inférer des résultats. Nous détaillerons ces mécanismes d'inférence dans la suite de notre étude.

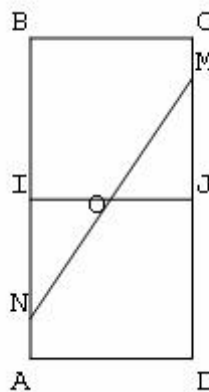
Cet exemple constitue un raisonnement de validation dans l'institution considérée.

Exemple 2 :

Autre texte de raisonnement :

On considère les milieux respectifs I et J des segments [AB] et [CD].

On a donc la figure complétée suivante.



Par symétrie par rapport à O :

A est envoyé en C car O centre du rectangle est milieu de [AC],

B est envoyé en D car O centre du rectangle est milieu de [BD],

donc le milieu I de [AB] est envoyé en le milieu J de [CD] car une symétrie conserve les milieux.

D'après le théorème de Thalès appliqué à I,O,J alignés et N,O,M alignés et (MJ) parallèle à

(NI), on a : $\frac{OI}{OJ} = \frac{ON}{OM} = \frac{IN}{IM} = 1$. Donc $IN = JM$.

- Si M est dans [JC], alors N est dans [IA], et $AN = AI - IN$ et $DM = DJ + JM$.

La formule de l'aire a du trapèze ANMD donne :

$$a = \frac{(AN + DM) \times AD}{2} = \frac{(IA - IN + DJ + JM) \times AD}{2} = \frac{2IA \times AD}{2} = IA \times AD$$

qui est l'aire du rectangle ADJI, moitié de celle du rectangle ADCB, donc indépendante de M.

- Si M est dans [DJ] on procède de manière analogue avec $AN = AI + IN$ et $DM = DJ - JM$, on obtient encore a égal à l'aire du rectangle ADJI, moitié de celle du rectangle ADCB, donc indépendante de M.

Commentaire :

Ce raisonnement se situe dans le même type d'institutions que précédemment. Il constitue également un raisonnement de validation. Par contre le contrat implicite semble différent du contrat précédent, notamment dans le recours à la figure.

Dans cette validation, il n'est pas précisé pourquoi lorsque M dans [JC], alors N est dans [IA]. On aurait pu le justifier en précisant que, comme la symétrie de centre O envoie M en N, C en A, J en I, alors le point M de [JC] est envoyé en un point de [IA]. Donc N est dans [IA]. Dans cette classe, avec ce professeur, le contrat implicite n'oblige pas à préciser cette justification. Comment savoir s'il s'agit d'un oubli de précision ou d'un contrat fixant un niveau de précision ? La situation n'est pas toujours évidente. Elle est clarifiée lorsqu'un élève demande s'il est nécessaire de préciser une information et lorsque le professeur lui répond que ce n'est pas nécessaire. Elle est encore plus claire si les programmes officiels indiquent explicitement qu'une précision n'est pas exigible.

Adaptons le texte de raisonnement précédent à l'école primaire. Ce changement d'institution va entraîner un changement de théorie et de validation.

Exemple 3 :

Autre texte de raisonnement adapté à l'école primaire :

On découpe le triangle OMJ.

On le colle sur le triangle OIN.

On observe visuellement que le trapèze ANMD est recomposé en le rectangle AIJD.

On peut recommencer avec différents points M dans [CJ] et on observe toujours la même conclusion.

On conclut que la propriété que le trapèze ANMD a même aire que le rectangle AIJD est vérifiée pour n'importe quel point M.

Commentaire :

Cette validation pourrait être acceptée au niveau de l'école primaire, avec une éventuelle reformulation plus simple de l'énoncé et du raisonnement (en désignant par exemple les différentes surfaces composant le rectangle par des couleurs différentes).

On peut cependant avoir des surprises dans la réalisation effective de la vérification : imprécision du découpage, ou encore un élève peut en cours de manipulation retourner le triangle OMJ et ne plus pouvoir effectuer la superposition sur le triangle OIN.

On travaille ici sur les objets physiques représentant les concepts de triangle ou de trapèze. Les techniques sont physiques (découpage, assemblage) ; la validation est perceptive ; le niveau théorique est celui de la géométrie concrète au sens de Parzys [Loc. cit.].

Par contre au niveau d'une classe de seconde, ce raisonnement pourrait être accepté pour formuler une conjecture sur la vérité de l'énoncé (en renforçant la persuasion que l'énoncé à valider est vrai) mais serait refusé comme validation : la seule constatation perceptive par superposition des surfaces n'est pas considérée comme suffisante. La superposition doit être modélisée par le recours par exemple à la symétrie centrale comme c'est le cas de la première validation.

Exemple 4 :

Autre exemple de texte de raisonnement :

L'aire du trapèze est le produit de sa hauteur AD avec la demi somme de ses bases DM et AN.

Quand M s'éloigne de D vers C, on pourrait penser que l'aire augmente car la base DM augmente. Mais dans le même temps où DM augmente, AN diminue. Cette diminution de AN va compenser l'augmentation de DM dans la demi somme des bases du trapèze ADMN, ce qui explique pourquoi l'aire va rester constante.

Commentaire :

Ce raisonnement s'appuie d'une part sur des constats sans doute perceptifs : quand DM augmente, AN diminue. De cette propriété on déduit, dans la demi somme des bases DM et AN du trapèze ANMD, que la diminution de AN compense l'augmentation de DM. Mais les justifications de la compensation exacte dans la demi somme ne sont pas données : on en reste à une approche intuitive de la compensation. On essaie de rendre compréhensible la constance

de l'aire en l'expliquant³⁴ par la compensation dans la demi somme des bases. Mais on ne donne pas les raisons pour lesquelles cette compensation est exacte. Du fait de cette absence, ce raisonnement pourrait considérer que cette explication est une validation incomplète. Elle ne constitue pas un raisonnement de validation car il manque une règle d'inférence justifiant la compensation exacte.

Exemple 5 :

Autre exemple de texte de raisonnement comparant les deux premières validations :

La preuve utilisant la formule de l'aire du trapèze peut apparaître rigoureuse à un élève car elle semble se limiter à un calcul (ici d'aires) alors que les considérations géométriques semblent parfois plus arbitraires. De plus cette preuve pourrait paraître plus naturelle car elle essaie d'évaluer l'aire du trapèze sur laquelle porte la question. L'évaluation par le calcul ne semble pas poser de problèmes majeurs.

Par contre la seconde preuve, qui nécessite d'avoir reconnu un centre de symétrie dans la figure, explique de manière géométrique la constance de l'aire du trapèze, moitié de l'aire constante d'un rectangle fixe. Elle explique sans recours au calcul et montre l'élégance de la méthode géométrique.

Commentaire :

Ce raisonnement n'est pas un raisonnement de validation. Il n'a pas pour fonction de valider la vérité d'une proposition. Il avance des arguments pour ou contre différentes propositions exprimant une opinion : les caractères rigoureux ou naturels ou explicatifs ou élégants d'une preuve. Il est un discours « méta » sur différentes validations, au sens de [Robert, Robinet 1993].

Avant de préciser les différents éléments constitutifs du raisonnement de validation, revenons sur la notion de vérité qui est centrale dans le raisonnement de validation par rapport aux autres raisonnements (persuasion, décision, découverte, explication,...)

1.1.4 Différentes conceptions de la vérité

On considère qu'une vérité est relative à l'institution, et à la théorie considérée dans cette institution. On utilisera parfois l'article défini *la* pour désigner la vérité considérée

³⁴ Balacheff [1987, p.147] appelle « explication un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat »

relativement à une institution et une théorie précise, sachant qu'un changement d'institution et/ou de théorie peut entraîner un changement de vérité. Par exemple dans le cadre d'une institution mathématique et d'une théorie de la géométrie euclidienne la proposition « par un point extérieur à une droite il passe une parallèle et une seule » est vraie ; par contre si on se place dans une théorie de géométrie non euclidienne, elle devient fautive, ce qui souligne la relativité de la vérité. Blanché [1999, p.7] évoque d'autres exemples : « Cette relativité se manifeste aussi par la distinction des paliers sur lesquels on l'établit. On peut distinguer d'abord, en gros, et sans pour autant méconnaître les transitions, le palier de la connaissance vulgaire et celui de la connaissance scientifique. Il n'est pas rare, dans la vie quotidienne, d'attribuer la vérité à des propositions que la science déclare fausses; et à bon droit, si on les maintient dans le contexte où elles s'insèrent. Par exemple, il est vrai que le soleil se lève chaque matin à l'horizon, en ce sens que c'est bien ce que voit notre regard naïf, ce sur quoi nous réglons nos journées, et ainsi de suite. À mesure qu'on s'élève de niveau, la même proposition peut changer, et même plusieurs fois, dans son rapport à la vérité. «L'air n'est pas pesant»: cela est vrai en ce sens qu'en effet nous n'en sentons pas le poids sur nos épaules, que cela s'accorde avec l'expérience d'Aristote trouvant le même poids pour une vessie remplie d'air et la même vessie vidée de cet air, par exemple. Mais cela devient faux avec l'expérience de Toricelli. Et cela redevient vrai après Newton: une quantité de matière, quelle qu'elle soit, et donc aussi bien un gaz comme l'air, n'a pas un poids qui lui serait propre, mais seulement une masse qu'attire la masse terrestre; un corps idéalement isolé n'est pas pesant, mais les corps sont, selon l'expression de Max Born, «mutuellement pesants ». Ainsi, même au niveau scientifique, la vérité s'exfolie ».

L'emploi de l'article défini *la* dans l'expression « la vérité » n'est donc pas relié à l'existence d'une vérité absolue. On adopte un point de vue relativiste. Ce relativisme rappelle le point de vue de Balacheff qui appelle « explication un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat » et « preuve une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » [Balacheff 1987, p.147-148]. Le consensus au sein d'une communauté, reflet d'une institution et d'une théorie, permet de définir ainsi une vérité relative. Pour notre part nous adoptons un point de vue anthropologique³⁵ en définissant la vérité relativement à une institution, et donc à une théorie, à une logique et à des contrats issus de cette institution.

Différentes théories philosophiques ou scientifiques proposent des conceptions variées de la vérité, de l'adéquation d'une proposition avec le fait qu'elle décrit³⁶, jusqu'à la non contradiction de la proposition avec le système formel ambiant. Soulez décrit ainsi ces deux grands pôles dans les conceptions de la vérité : « les vérités purement logiques de caractère analytique

³⁵ lié à l' « étude des croyances et des institutions, des coutumes et des traditions des différentes sociétés humaines » (définition de bibliorom Larousse)

³⁶ *adaequatio rei et intellectus*

a priori et les vérités matérielles synthétiques et a posteriori. Aux premières correspondent [...] les lois logiques ou tautologies et aux secondes les énoncés susceptibles d'être confrontés aux faits de la nature parce qu'ils possèdent une référence factuelle ». [Soulez 1999, p.9]. Mais Soulez expose d'autres conceptions, notamment « l'inspiration pragmatiste d'une conception qui définit la vérité par le succès dans l'action et la convergence des croyances, conception qui a sa source dans la philosophie du philosophe américain Charles Sanders Peirce » [Ibid. , p.16].

Par exemple, on pourrait considérer que, dans les institutions respectivement mathématiques, de sciences expérimentales ou de la « vie quotidienne », les inspirations respectivement logicistes, empiristes ou pragmatistes de la vérité dominant.

Les logiciens distinguent vérité et validité. [Hottois 2002, p.73] précise que « la rigueur voudrait que l'on réserve la propriété de vérité à des proposition et la propriété de validité à des formes d'inférence ou de déduction, c'est-à-dire à des schémas de raisonnement. Ainsi par exemple, les prémisses d'un syllogisme sont vraies (ou fausses) tandis que la structure du syllogisme est une forme valide de raisonnement. Ceci veut dire qu'elle transmet fidèlement la vérité des prémisses à la conclusion : si les prémisses sont vraies la conclusion sera vraie aussi ». Nous considérerons que la validité est une forme de vérité des règles de formation de propositions. La règle de formation des propositions modus ponens³⁷ est vraie (ou valide) dans la logique mathématique par contre la règle « syllogisme heuristique »³⁸ du type « si p alors q, or q, donc p » n'est pas vraie (ou valide) dans la logique mathématique. Par contre sous la forme « si p alors a, or q, donc p probable », cette règle peut être vraie (ou valide) dans la logique de la vie quotidienne. Nous développerons ce point dans un paragraphe suivant.

1.1.4.1 Exemples de conception de la vérité

types d'institutions :	mathématique	de sciences expérimentales	de la vie quotidienne
conception de la vérité :	logique mathématique	empirique	pragmatique
exemple d'un critère de vérité :	non contradiction avec le système formel ambiant	adéquation entre les faits et les théories	succès dans l'action et convergence des croyances

³⁷ Modus ponens : si p alors q, or p donc q

³⁸ Terme que nous empruntons à [Polya 1957, p.107]

1.1.4.2 Exemples de raisonnement

Dans le paragraphe précédent sur les premiers exemples de raisonnements, dans les exemples 1 et 2, relatifs à la classe de seconde française, la conception de la vérité est celle de la logique classique : est vrai ce qui a été défini, démontré ou admis comme vrai dans la construction du savoir mathématique. La validation de la vérité est déductive : elle se fait à l'aide de règles d'inférences basées sur les règles de la logique classique ou sur les définitions ou propriétés (admises ou démontrées). Par contre, dans l'exemple 3, la conception de la vérité s'appuie sur l'adéquation avec la réalité perçue : elle est de type empirique ou pragmatique. La validation est perceptive, éventuellement au moyen d'une action (ici découpage et superposition).

1.1.5 Raisonnement de nécessité et raisonnement de plausibilité

1.1.5.1 Vérité nécessaire/certaine et vérité probable/plausible

Nous avons souhaité ne pas limiter les règles d'inférence au cadre de la logique classique où elles garantissent la validité d'un raisonnement, comme par exemple le modus ponens ou le modus tollens. Nous adopterons la définition large de [Oléron 1996, p.57] : « l'inférence consiste dans le passage d'un donné ou admis initial à un admis qui est accepté à cause de sa connexion avec celui-ci ». Pour Armangaud [1999, p.1] « on distingue aussi l'inférence démonstrative ou déduction, qui comporte l'idée de nécessité, et l'inférence non démonstrative, ou induction, qui comporte l'idée de probabilité; inférer signifie donc soit déduire soit induire ». La distinction³⁹ entre nécessaire et probable rappelle la distinction aristotélicienne entre raisonnements analytiques et raisonnements dialectiques. Pour [Perelmann Olbrechts-Tyteca, 1976, p.1-2] « le domaine de l'argumentation est celui du vraisemblable, du plausible, du probable, dans la mesure où ce dernier échappe aux certitudes du calcul ». Oléron précise [Oléron, 1996, p. 106-107] : « A défaut de pouvoir être strictement vérifiée, une hypothèse peut se présenter comme plus ou moins *plausible* [...]. Divers facteurs de plausibilité ont été mentionnés : la simplicité, l'ampleur du champ d'application, la similitude avec des interprétations acceptées, l'intelligibilité des mécanismes invoqués. Ce peuvent être des raisons pour accepter une interprétation, mais ce ne sont pas des preuves au sens strict du mot ».

Nous nous référerons à Toulmin qui propose « la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal « nécessairement ») et ceux dont la garantie ne nous habilite qu'à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot « probablement »), sujette à de possibles exceptions

³⁹ [Oléron 1996, p.24] rappelle qu'Aristote retient les modalités du possible et du nécessaire, les scolastiques celles du possible et du contingent, et Kant celles du réel, du nécessaire et du possible.

(« vraisemblablement ») ou conditionnelle (« pourvu que... »). [Toulmin 1993, trad. P.d.B., p.184]. Les démonstrations mathématiques utilisent uniquement des arguments nécessaires qui expriment des conditions suffisantes pour la réalisation de la conclusion, et s'interdisent d'utiliser des arguments probables qui expriment des conditions nécessaires. Du fait de cette ambiguïté du mot « nécessaire » nous préférons l'expression « argument de nécessité » ou « raisonnement de nécessité » où la nécessité se réfère à la conclusion (et non pas aux conditions de réalisation de la conclusion, conditions qui sont suffisantes). Nous utiliserons également le mot « certitude », notamment par opposition à « probable ». Cependant la certitude peut être la conséquence d'un acte de foi, qui échappe à la raison. Dans ce cas il ne s'agit pas d'une certitude obtenue nécessairement par applications de règles d'inférence. On voit donc la difficulté à trouver un terme qui échappe à toute connotation. Pour l'utilisation du terme « certitude » que nous en ferons, une conclusion est certaine si « la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion », ce qui signifie que la conclusion est celle d'un argument de nécessité au sens de Toulmin [ibid.]. La certitude est donc le produit d'arguments de nécessité, dans la logique considérée.

De même nous préférons le mot « plausible » au mot « probable » pour les raisons suivantes. D'une part le mot « probable » est très connoté en mathématiques. La théorie des probabilités, qui est une partie de la théorie mathématique, propose dans des contextes très précis des modèles permettant de mesurer la vraisemblance d'apparition de certains événements, les procédures de mesure de la vraisemblance (par exemple dans les théories de l'échantillonnage, de l'estimation ou des tests) étant complètement distinctes des procédures d'une démonstration qui établirait la certitude. Etendre ceci à la mesure de la force de la vraisemblance de la vérité d'une proposition est très délicat. C'est pourquoi nous éviterons le mot « probable » pour éviter de créer une connexion illusoire avec la théorie des probabilités, compte tenu que notre recherche opère dans l'enseignement des mathématiques.

D'autre part le mot « plausible » a une connexion beaucoup moins forte avec la théorie des probabilités. Il est très souvent utilisé dans les programmes de l'enseignement secondaire des mathématiques comme nous l'observerons plus loin. Il se distingue très clairement de « nécessité ».

On pourrait estimer que les conclusions probables ou plausibles ne sont pas certaines et par conséquent, en l'absence de certitude, ne sont d'aucune utilité. Pourtant il faut reconnaître que le raisonnement plausible est très utilisé dans la vie quotidienne pour décider d'une action à entreprendre, en droit pour se forger un jugement avec intime conviction malgré l'absence de

preuves flagrantes, ou dans les sciences expérimentales où la vérification d'une théorie, dans certaines conditions, conduit à la valider.

Rappelons enfin les définitions proposées par [Bibliorom Larousse, 1996] pour quelques mots de sens voisins.

Probable = « (latin *probabilis*, de *probare*, approuver) Qui a beaucoup de chances de se produire, vraisemblable. *Succès probable* ».

Vraisemblable = « Qui a l'aspect de la vérité, qu'on est en droit d'estimer vrai ».

Plausible = « (du latin *plaudere*, applaudir)

1. Qui peut être considéré comme vrai. *Alibi plausible*.

2. Que l'on peut admettre comme valable. *Hypothèse plausible* ».

Nous pensons que les éléments communs aux trois mots probable, vraisemblable et plausible qualifiant la connaissance de la vérité de la conclusion sont :

- l'absence de nécessité de vérité,

- la possibilité, généralement peu probable, peu vraisemblable ou peu plausible, que la conclusion ne soit pas vraie malgré le raisonnement conduit.

En résumé :

On appelle raisonnements de nécessité (ou de certitude) des raisonnements de validation pour lesquels la conclusion est nécessairement ou certainement vraie. On appelle raisonnements de plausibilité (ou plausibles) des raisonnements de validation pour lesquels la conclusion est probablement ou plausiblement vraie.

1.1.5.2 Relativité du raisonnement de nécessité

La nécessité dépend bien entendu du cadre théorique dans lequel on se situe et de la logique qui s'y rattache. Ainsi dans l'institution « groupe d'élèves », Balacheff [1987 p.163] décrit l'empirisme naïf qui « consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion ». Les élèves mobilisant ce type de preuves n'ont pas de doutes sur la vérité de la conclusion. Dans l'institution « classe de mathématique », la vérification d'une assertion d'après l'observation d'un petit nombre de cas conduit à la formulation d'une conjecture : l'assertion est plausible mais en aucun cas certaine. De même dans l'institution « classe de mathématiques de l'école primaire » la preuve qu'un triangle représenté sur un livre est isocèle pourra être effectuée par vérification à l'aide du compas et on conclura que le triangle est nécessairement isocèle dans le cadre théorique de l'école primaire. La même démarche dans l'institution « classe de mathématiques de terminale scientifique d'un lycée français »

conduirait à la formulation d'une conjecture sur la plausibilité du caractère isocèle du triangle : seule une démonstration mathématique prouverait cette conjecture. Cela tient, comme le suggère [Parzysz 2003, p.111-112] au passage d'une validation perceptive à une validation déductive correspondant dans le cadre théorique à un passage d'une géométrie spatio-graphique à une géométrie proto-axiomatique.

Rappelons la prise en compte du raisonnement plausible dans différents contextes.

1.1.5.3 Raisonnement plausible chez les élèves

Coppé a souligné l'importance du raisonnement de plausibilité mis en jeu dans la vérification dans les travaux d'élèves : « nous soulignons que c'est la limitation de l'incertitude plutôt que la certitude absolue qui est visée par l'élève [...] il peut faire une vérification qui lui apportera plus ou moins de certitude ou bien qui lui montrera que son résultat est faux [Coppé 1993, p.211- 215] » même si « les processus de vérification sont faits la plupart du temps, dans le cadre du travail privé de l'élève, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas montrés au professeur [*ibid.* p.209] »

Balacheff a mis en évidence chez les élèves deux types de preuves pragmatiques qui relèvent du raisonnement plausible : « l'empirisme naïf consiste à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas » et l'expérience cruciale « désigne une expérimentation dont le résultat permet de choisir entre deux hypothèses [...] ce type de validation se distingue de l'empirisme naïf en ce que celui qui y recourt pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en « pariant » sur la réalisation d'un cas qu'il puisse reconnaître pour aussi peu particulier que possible » [Balacheff 1999, p.206].

Pedemonte signale que le raisonnement plausible est introduit par Peirce⁴⁰ sous le nom d'abduction, en utilisant également le terme de plausibilité et montre son utilisation par les élèves dans la phase de conjecture précédant l'élaboration d'une démonstration [Pedemonte 2002, p. 68].

1.1.5.4 Raisonnement plausible dans les classes de mathématiques

Pour Durand-Guerrier, « une assertion est dite contingente si sa vérité et sa fausseté sont toutes deux possibles » [Durand-Guerrier 1996, p.237], éventuellement à un instant donné où on n'a pas encore les moyens de savoir si l'assertion est vraie ou fausse. Elle montre l'existence d'énoncés contingents, non seulement chez les élèves, mais également dans la classe de mathématiques tout au long de la scolarité obligatoire et au delà, dans les pratiques de classe,

⁴⁰ [Peirce 1960, 2.5.189]: „The surprising fact C is observed, But if A were true, C would be a matter of course; hence, there is a reason to suspect that A is true” cité par [Pedemonte 2002, p.68] qui propose la traduction « Le fait surprenant C est observé Mais si A était vrai alors C devrait l'être évidemment Ainsi, il est raisonnable de suggérer que A soit vrai »

dans des récréations mathématiques, dans les manuels. Pour certains de ces énoncés contingents, le raisonnement mobilisé peut être un raisonnement plausible. L'exemple de la preuve par 9 est éloquent : elle renforce la plausibilité du résultat sans le certifier.

1.1.5.5 Raisonnement plausible dans les programmes d'enseignement

Les programmes de Gymnasium de Bade-Wurtemberg, mis en place en 1994 et en vigueur sur la période comparée, font souvent référence au raisonnement de plausibilité. Dès l'introduction générale on précise : « Des considérations de plausibilité montrent souvent aux élèves davantage qu'une démonstration scientifiquement irréprochable »⁴¹ [Ministerium Lehrplanheft 4 1994, p. 28, trad. R.C.] Ces évocations de la plausibilité se poursuivent tout au long de la scolarité comme nous l'avons illustré dans [Cabassut 2002, 2004]. Les nouveaux programmes mis en place en 2002 dans le cycle supérieur [Kursstufe] du Gymnasium, accentuent la place du raisonnement de plausibilité et proposent « un déplacement marqué des « mathématiques comme produit » » où « les notions sont données à l'avance, les théorèmes sont démontrés formellement » vers « les mathématiques comme processus » » où « les notions sont développées, les théorèmes sont prouvés, justifiés plausiblement »⁴² [Ministerium 2001, p.190].

En France, le programme du cycle central du collège précise : « l'élargissement des domaines étudiés et l'enrichissement des outils acquis au fur et à mesure, alliés à une plus grande maturité des élèves, permettent de les initier davantage à l'activité mathématique. À ce propos, les *études expérimentales*⁴³ (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves *ne les confondent avec des démonstrations* : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, *on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré* » [Ministère 1998, p.41]. On limite ici clairement le raisonnement plausible aux conjectures.

1.1.5.6 Exemples de raisonnements de nécessité ou de plausibilité

Dans le paragraphe précédent sur les premiers exemples de raisonnements, dans les exemples 1 et 2, relatifs à la classe de seconde française, les raisonnements sont des raisonnements de nécessité.

Par contre si on utilise au niveau de la classe de seconde, la validation de l'exemple 3, avec découpage et superposition, alors on effectue un raisonnement de plausibilité. En effet dans le

⁴¹ « Plausibilitätsbetrachtungen zeigen den Schülerinnen und Schülern oft mehr als ein wissenschaftlich einwandfreier Beweis »

⁴² « Unterrichtlich soll dies durch eine Akzentverschiebung weg von „Mathematik als Produkt“ hin zu „Mathematik als Prozess“ realisiert werden: Mathematik als Produkt [...] Begriffe vorgeben, Sätze formal beweisen [...] Mathematik als Prozess [...] Begriffe entwickeln, Sätze finden, plausibel begründen »

⁴³ Nous mettons en italique les passages qui nous paraissent cruciaux.

cadre de la classe de seconde, d'une part, vérifier perceptivement la superposition de surface n'entraîne pas nécessairement, dans le cadre de la logique de la classe de seconde, la superposition effective des surfaces. La plausibilité de cette superposition est justifiée par sa vérification perceptive. D'autre part la vérification d'une propriété dans un cas, ou plusieurs cas de figures, ne permet pas d'affirmer qu'elle est nécessairement vraie dans tous les cas de figures. On se contente d'affirmer qu'il est plausible qu'elle soit vraie dans tous les cas, dans le cadre de la logique de la classe de seconde.

Par contre ce même raisonnement à l'école primaire est un raisonnement de nécessité. On voit donc bien l'importance à distinguer les institutions, et plus précisément les théories rattachées à ces institutions. En prenant le cadre proposé par [Parzysz 2003, p.111], à l'école primaire ce raisonnement relève de la géométrie concrète qui est la principale théorie de référence, pour laquelle la validation perceptive constitue un raisonnement de nécessité. Dans le cas de la classe de seconde, la géométrie proto-axiomatique est la théorie de référence. Dans cette théorie un raisonnement de découpages-recompositions sur une réalisation particulière avec une validation perceptive n'est pas reconnu comme un raisonnement de nécessité⁴⁴ : seuls les raisonnements s'appuyant sur des définitions et des théorèmes de la théorie, constituent des validations déductives. Cependant ce raisonnement, de découpages-recompositions sur une réalisation particulière avec une validation perceptive, peut être reconnu comme un raisonnement de plausibilité qui va permettre de formuler une conjecture que l'on essaiera de démontrer par une validation déductive⁴⁵ de la géométrie proto-axiomatique. Ce raisonnement de plausibilité n'est pas un raisonnement de la géométrie proto-axiomatique. C'est un raisonnement qui s'appuie sur la géométrie concrète fréquentée par l'élève à l'école primaire et en partie au collège, mais qui s'appuie également sur la pratique quotidienne de la classe dans laquelle des expériences de validation perceptive ont été mises en défaut par la géométrie proto-axiomatique (nous indiquerons plus loin des extraits de manuels de classe proposant des contre-exemples où la validation perceptive est contredite par la validation déductive). Dans la pratique quotidienne la validation perceptive conduit à rendre plausible un résultat mais ne constitue pas une validation nécessaire ou certaine au niveau de la géométrie proto-axiomatique. On voit donc que ce raisonnement de plausibilité s'inscrit dans la vie quotidienne de la classe, qui intègre des pratiques antérieures (celles de la géométrie concrète) et des pratiques actuelles (celles des conjectures). Ces éléments (raisonnement plausible, conjecture) de théorie de la vie quotidienne ne sont pas des éléments d'une théorie

⁴⁴ D'ailleurs beaucoup de professeurs de ce niveau mettent en garde les élèves en exhibant des contre-exemples.

⁴⁵ Qui peut éventuellement s'appuyer sur la démarche de plausibilité.

mathématique mais plutôt les éléments d'une théorie de l'activité mathématique qui s'inscrit dans une théorie plus large de la vie quotidienne. Comme nous l'avons écrit précédemment, cette théorie de l'activité mathématique, ou cette théorie de la vie quotidienne, ne sont pas organisées avec la précision ou l'explicitation que l'on rencontre dans les théories mathématiques. Nous avons vu que dans le cadre de la logique de l'école primaire, ce qui est validé perceptivement est nécessairement vrai. On n'introduit pas de doute dans la géométrie du constat, où l'évidence perceptive fait nécessité de vérité. Ce sera l'enjeu du collège français de transformer cette nécessité perceptive en plausibilité perceptive, par le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive.

1.1.5.7 Exemples de schémas de raisonnements de nécessité ou de plausibilité

Schémas de raisonnements de nécessité de la logique des propositions (d'après [Hottois 2002, p.52-53]):

modus ponens : si D alors C, or D, donc C

modus tollens : si D alors C, or non C, donc non D (on pourra mettre en parallèle ce schéma avec le syllogisme heuristique exposé plus loin).

modus barbara (ou syllogisme hypothétique) : si D alors D', si D' alors C, donc si D alors C.

Schémas de raisonnements de nécessité de la logique des prédicats (les notions et exemples suivants sont empruntés à [ibid. p.82-83])

$P(x)$ désigne une fonction propositionnelle de la variable x

instanciation universelle : pour tout x , on a $P(x)$; donc $P(a)$ (où a constante individuelle quelconque substituée à x).

Exemple de raisonnement mobilisant une instanciation universelle :

- 1) Tous les hommes sont mortels (pour tout x , $P(x)$: « si x est un homme alors x est mortel ») (prémisse)
- 2) Socrate est un homme (prémisse)
- 3) Si Socrate est un homme alors Socrate est mortel (instanciation universelle du pas 1 : a =Socrate et $P(x)$ instancié en remplaçant x par a)
- 4) Socrate est mortel (modus ponens à partir des pas 2 et 3)

généralisation universelle : $P(a)$, donc (pour tout x , on a $P(x)$) (avec a constante absolument quelconque dans le domaine des x)

Exemple de raisonnement mobilisant une généralisation universelle :

- 1) Aucun vivant n'est un minéral (prémisse)
- 2) Toute plante est vivante (prémisse)
- 3) Si a est une plante alors a est vivante (instanciation universelle de 2)
- 4) Si a est vivant alors a n'est pas un minéral (instanciation universelle de 1)
- 5) Si a est une plante alors a n'est pas un minéral (syllogisme hypothétique à partir des pas de 3 et 4)
- 6) Aucune plante n'est un minéral (généralisation universelle de 5)

généralisation existentielle : $P(a)$, donc il y a un x tel que $P(x)$ (où a constante quelconque)

instanciation existentielle : il y a un x tel que $P(x)$, donc $P(w)$ (où w est une constante d'objet, mais qui ne désigne pas une constante quelconque, et qui ne doit pas désigner un objet identifié (ayant eu par exemple des occurrences antérieures)).

Pour des exemples de ces deux derniers cas nous renvoyons à [loc. cit.].

Schémas de raisonnements de plausibilité

syllogisme heuristique (d'après [Polya 1957, p.107]) : Si C alors D , or D , donc C davantage plausible.

Polya propose l'exemple suivant⁴⁶ [loc. cit.] : « Quand nous approchons d'une terre, nous voyons souvent des oiseaux. Or, nous voyons des oiseaux. Donc, il devient plus croyable que nous approchions d'une terre ».

induction : $P(w_1), P(w_2), \dots, P(w_n)$ (où w_1, w_2, \dots, w_n constantes du domaine de x), donc pour tout x , $P(x)$ davantage plausible.

Ceci est un cas particulier du syllogisme heuristique pour $C=(\text{pour tout } x, P(x))$ et $D=(P(w_1), P(w_2), \dots, P(w_n))$.

⁴⁶ Le qualificateur « souvent » pourra gêner dans l'exemple de Polya : nous avons voulu garder l'exemple original proposé par Polya. Si cette formulation gêne, on pourra la reformuler en : « Quand nous approchons d'une terre, nous pouvons voir des oiseaux. Or, nous pouvons voir des oiseaux. Donc, il devient plus croyable que nous approchions d'une terre ».

On peut aussi introduire de la plausibilité lorsque les prémisses ou données ne sont pas acquises comme nécessairement vraies mais comme plausibles (comme conclusion par exemple d'un précédent raisonnement de plausibilité). Le schéma suivant peut être proposé.

modus ponens de plausibilité : si D alors C, or D plausible, donc C plausible.

Une autre variante est lorsque la plausibilité est exprimée dans l'énoncé conditionnel : ces énoncés conditionnels ont pu être obtenus à partir de raisonnements de plausibilité précédents.

Le schéma suivant peut être proposé :

modus ponens de plausibilité : si D alors C plausible, or D, donc C plausible.

1.1.5.8 Raisonnement de plausibilité en mathématiques

En principe le raisonnement plausible n'existe pas dans les mathématiques savantes comme raisonnement de validation. En effet la notion de plausibilité n'est pas définie. Certes il existe une théorie des probabilités qui permet dans le cadre de la statistique inférentielle (théorie de l'échantillonnage, théorie de l'estimation, théorie des tests) de mesurer la probabilité d'acceptation (ou de rejet) d'hypothèse avec un seuil de risque déterminé. Mais ces théories ne sont pas des théories de validation des énoncés mathématiques. De plus on conçoit la difficulté à définir une mesure de la plausibilité d'une proposition. Les mathématiques classiques s'inscrivent dans le cadre de la logique classique, logique bivalente pour laquelle seules deux valeurs de vérité sont définies : vrai ou faux. La valeur plausible n'existe pas. Bien entendu le raisonnement plausible est pratiqué par les mathématiciens et a été étudié par [Polya 1958]: dans ce cas il s'agit d'un raisonnement heuristique et non d'un raisonnement de validation mathématique.

Pour ce qui concerne les mathématiques savantes on peut noter le recours au raisonnement plausible pour donner de la force à des conjectures. Dans [Cabassut 1982] nous signalions la conjecture du jacobien qui figure parmi les 18 problèmes de Smale : dans le cas d'un endomorphisme f d'anneaux de polynômes à deux indéterminées X et Y sur le corps des complexes, le déterminant de la matrice aux dérivées partielles par rapport à X et par rapport à Y de $f(X)$ et $f(Y)$ s'appelle le jacobien de f . Si f est un automorphisme le jacobien est non nul. Réciproquement, la conjecture du jacobien affirme que si le jacobien est non nul, f est un automorphisme. Nous signalions également les travaux de [Wright 1981, 423-234] indiquant que la vérification de cette conjecture grâce à un ordinateur (et à des réductions de cas) avait été faite jusqu'au degré 100 pour les polynômes $f(X)$ et $f(Y)$. Beaucoup de chercheurs sont persuadés, avec ces arguments de plausibilité, que la conjecture est vraie. C'est pourquoi ils

cherchent à la démontrer. Jusqu'à présent de nombreuses démonstrations incorrectes ont été publiées, et leur incorrection signalée après-coup ; la dernière date de novembre 2004⁴⁷.

Cette importance du raisonnement plausible chez les mathématiciens a conduit [Jaffe, Quinn 1993, p.10 ; trad. R.C.] à proposer qu' « à l'intérieur d'un article, une nomenclature standard devrait avoir cours : pour le matériel spéculatif, un mot comme « conjecture » devrait remplacer « théorème », un mot comme « prédire » devrait remplacer « montrer » ou « construire », et des expressions comme « motivation » ou « argument favorable » devrait remplacer « preuve ». Idéalement le titre et le résumé devraient contenir un mot comme « hypothétique », « spéculatif » ou « conjectural »⁴⁸. Hanna [2000, p.10 ; trad. R.C.] signale cependant qu'après un débat dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* la majorité de la communauté n'a pas soutenu le projet de Jaffe et Quinn d'émergence d'une branche des « mathématiques spéculatives » à côté des « mathématiques rigoureuses ».

Donc, dans la situation actuelle (mais qui pourrait évoluer le jour où la communauté des mathématiciens déciderait de modifier les théories et les schémas de raisonnement qui caractérisent les mathématiques actuelles), nous considérons qu'il n'y a pas de raisonnement plausible en mathématiques en tant que raisonnement de validation, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'argumentation mathématique où sens où nous l'avons défini. Les raisonnements plausibles et les argumentations que produisent les mathématiciens, même s'ils s'appuient sur des connaissances mathématiques, empruntent les schémas de raisonnement de plausibilité à des théories qui ne sont pas encore mathématiques. Cependant certains auteurs actuels évoquent la notion d'argumentation mathématique : [Ermel 1999, p.54], [Pedemonte 2002, p.23]. Nous nous rangerons à la position de [Balacheff 1999b, p.7] : « Je soutiendrais donc qu'il n'y a pas d'argumentation mathématique au sens suggéré d'une pratique argumentative en mathématiques qui se caractériserait par le fait qu'elle échapperait à certaines des contraintes qui pèsent sur la démonstration. Ceci ne signifie pas que tout discours en mathématique qui vise à établir la validité d'un énoncé ait toujours eu et puisse toujours avoir les caractéristiques d'une démonstration [...] La résolution de problèmes, dans laquelle je dirais volontiers que tous les coups sont permis, est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives reprenant des moyens opérationnels ailleurs (métaphore, analogie, abduction, induction, etc.) qui s'effaceront lors de la construction du discours qui seul sera acceptable au regard des règles propres aux mathématiques ».

⁴⁷ On pourra lire des informations complémentaires sur :

<http://mathworld.wolfram.com/JacobianConjecture.html>.

⁴⁸ Within a paper, standard nomenclature should prevail: in theoretical material, a word like “conjecture” should replace “theorem”; a word like “predict” should replace “show” or “construct”; and expressions such as “motivation” or “supporting argument” should replace “proof”. Ideally the title and abstract should contain a word like “theoretical”, “speculative”, or “conjectural”.

1.1.6 Argumentation et démonstration/preuve

Nous allons préciser notre terminologie concernant les validations suivant le type de raisonnement, de plausibilité ou de nécessité, qu'elles mobilisent.

Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire (ou certaine), nous appellerons le raisonnement de validation une **preuve** ou une **démonstration** ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons **argumentation**.

On peut considérer qu'une démonstration est un cas limite d'argumentation, par exemple pour laquelle la probabilité est certaine. [IREMs de Grenoble et de Rennes 2003, p.105] précise : « En se plaçant dans la suite de Toulmin il paraît possible d'envisager une certaine continuité de l'argumentation à la démonstration, et pourquoi pas de considérer la démonstration comme un genre argumentatif particulier ».

Le terme « argumentation » a en général une signification plus large, la présentation des raisons qui appuient une affirmation, une thèse, une demande dont le but n'est pas toujours la connaissance de la vérité. Ici nous nous limiterons aux argumentations de validation, dont le but est la connaissance de la vérité de la proposition pour laquelle on produit une argumentation. Par exemple, on ne considère pas les argumentations rhétoriques dont le but est de persuader un auditoire particulier de la vérité d'une proposition même si l'argumentateur sait parfaitement que la proposition est fausse.

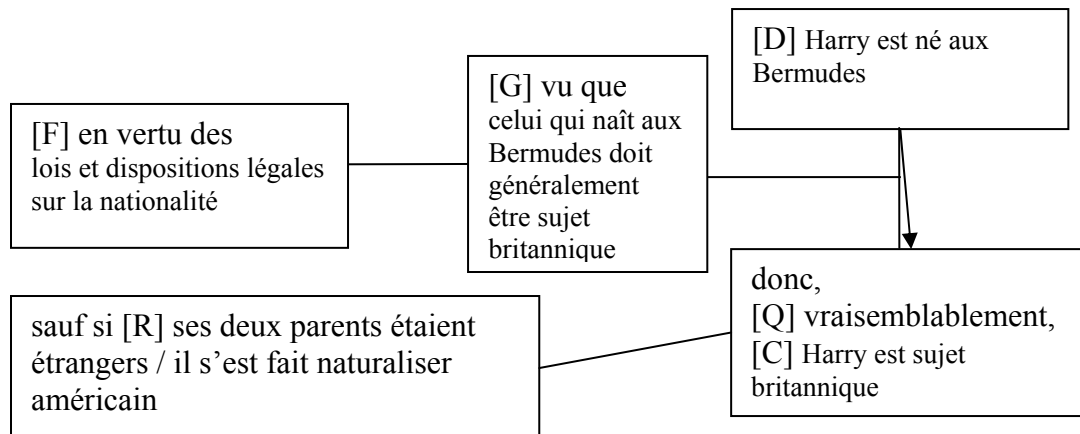
Le terme de « démonstration » est souvent réservé aux preuves abstraites ou formelles, comme par exemple les preuves mathématiques. Si la validation nécessite une réalisation matérielle (preuve pragmatique), une vérification des conséquences (preuve expérimentale) ou se base sur la perception (preuve visuelle) ou sur le contenu et non la forme d'une proposition supposée vraie (preuve sémantique) on préfère souvent le terme de « preuve » à celui de « démonstration ». Certains auteurs comme Balacheff [1988, p. 31] limitent le terme de « démonstration » aux seules preuves mathématiques. Dans les traductions, aux mots « preuve » et « démonstration » ne correspond bien souvent que le seul mot « Beweis » en allemand ou le seul mot « proof » en anglais.

Dans ce travail, le terme validation regroupe les notions de démonstration et d'argumentation, en l'absence de terme unanimement reconnu pour regrouper ces deux notions. En résumé :

Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire/certaine, nous appellerons le raisonnement de validation une **preuve** ou une **démonstration** ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons **argumentation**.

1.1.7 Raisonnement élémentaire de validation ou argument chez Toulmin

Toulmin propose l'exemple suivant [ibid. p.129] que nous allons analyser.



Pour étudier les raisonnements de validation, Toulmin les décompose en raisonnements élémentaires qu'il appelle arguments [Toulmin 1958, p.97]. On remarquera que le traducteur de Toulmin, Philippe De Brabanter, traduit « the uses of argument » par « les usages de l'argumentation ». Nous ne retiendrons pas ce choix pour deux raisons. D'abord nous avons réservé au mot « argumentation » une autre signification, celle des raisonnements qui s'appuient sur le raisonnement plausible. Ensuite le terme anglais « argument » a plusieurs sens. Par exemple « reason or reasons given to support or oppose something » [Macmillan 1979] qui correspond à « une raison qui appuie une affirmation, une thèse ou une demande » pour le mot français « argument » [Larousse 1996]. Nous ne retiendrons pas cette signification. Par contre en anglais « argument » peut également signifier : « process or line of reasoning » [Macmillan 1979] qui est synonyme de « argumentation » qui correspond à « raisonnement tendant à établir une preuve, à fonder une opinion » pour « argument » en français dans [Hachette 1980]. Nous retenons cette signification qui fait de l'argument un raisonnement ; Toulmin propose un modèle présentant la structure d'un argument. On notera que des travaux récents s'inspirent du modèle de Toulmin : [Knipping 2003a, p.37], [Pedemonte 2002, p.87].

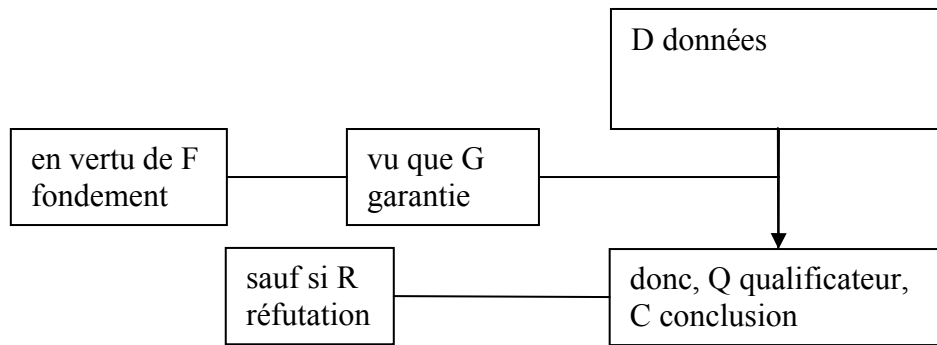


Figure: Modèle d'argument de Toulmin

Dans ce schéma **D** désigne les **données** de départ dont la vérité est admise ou acquise par de précédents raisonnements, soit dans l'exemple la proposition admise comme vraie : « Harry est né aux Bermudes ».

Dans « Donc Q, C » C désigne l'affirmation de la vérité de la proposition de conclusion, que l'on désignera plus simplement par conclusion et **Q** désigne le **qualificateur** de la vérité, **nécessaire ou plausible**. Dans notre exemple C correspond à « Harry est sujet britannique » avec le qualificateur Q « vraisemblablement ».

« Vu que **G** » fait référence à la **garantie** permettant l'inférence de D vers C, avec le qualificateur Q. « Nous avons besoin à ce stade d'énoncés généraux, hypothétiques, qui peuvent faire office de passerelle, et autoriser le genre de passage qu'implique l'argument en question. Ceux-ci peuvent normalement s'écrire très brièvement (sous la forme « Si D, alors C ») ; mais, pour plus de transparence, on a avantage à les développer et les rendre plus explicites : « des données telles que D habilient à tirer des conclusions, ou énoncer des thèses, telles que C »[...] Les propositions de ce type, je les appellerai garanties (G) » [Toulmin 1993, trad. P.d.B., p.120]. La garantie dans notre exemple est la proposition « celui qui naît aux Bermudes doit généralement être sujet britannique ».

« Sauf si **R** » désigne une **réfutation** possible de la conclusion. Dans l'exemple, la naissance aux Bermudes ne donnent pas la nationalité britannique si les deux parents de l'enfant ne sont pas britanniques, d'où la première réfutation signalée par Toulmin. La seconde concerne le cas où Harry, né aux Bermudes, a abandonné sa nationalité britannique en se faisant naturaliser américain. Dans ce cas Harry n'a plus la nationalité britannique. On remarquera que la précision des réfutations possibles permet de renforcer la plausibilité de la conclusion dans le cas où les réfutations ne sont pas vérifiées. Pour obtenir un schéma plus simple que celui de Toulmin, nous proposons de prendre en compte ce bloc des réfutations dans les données, la garantie ou la conclusion. Les données deviennent alors « D, en supposant que R ne soit pas vrai » ou bien la garantie devient « Vu que G sauf si R » ou bien la conclusion C devient « C, sauf si R ».

« En vertu de **F** » : « derrière nos garanties, on trouvera normalement d'autres assurances, sans lesquelles les garanties mêmes ne possèderaient ni autorité, ni crédit- nous pouvons les désigner par le terme de **fondement (F)**⁴⁹ d'une garantie [...] Les énoncés de garanties sont hypothétiques, semblables à des passerelles, leur fondement peut s'exprimer sous la forme d'énoncés factuels catégoriques aussi bien que les données invoqués directement à l'appui de nos conclusions » [ibid. p.127-129]. Dans l'exemple le fondement F correspond à l'énoncé : « en vertu des lois et dispositions légales sur la nationalité » qui invoque « des lois régissant la nationalité des personnes nées dans des colonies britanniques [...] Le fait que les lois qui s'y rapportent ont été effectivement promulguées et qu'elles reprennent les dispositions que nous avons mentionnées, peut être vérifié par un simple examen des annales parlementaires qui s'y rapportent et des recueils de jurisprudence appropriés » [ibid. p.128-130].

1.1.8 Les trois statuts de propositions dans un argument : donnée, règle de validation, conclusion

Ce qui est fondamental dans le modèle de Toulmin, c'est que les différentes propositions composant un argument ont des statuts fonctionnels différents. Nous allons donc nous inspirer du modèle de Toulmin en distinguant essentiellement trois statuts : donnée, règle de validation et conclusion.

1.1.8.1 Exemple introductif

Soit le raisonnement suivant.

ABC est un triangle rectangle en A.

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit (théorème de Pythagore).

Donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

1.1.8.2 Donnée et conclusion

Une **donnée** est une proposition dont la connaissance de la vérité est acquise (ou supposée acquise ou admise), soit comme prémisse première de début de raisonnement, soit comme conclusion intermédiaire d'un précédent raisonnement, devenant prémisse intermédiaire d'un prochain raisonnement.

Dans notre exemple introductif « ABC est un triangle rectangle en A » est une donnée.

⁴⁹ Nous développerons plus loin la notion de fondement dans le cadre de la théorie anthropologique.

La vérité des prémisses est soit supposée connue en début de raisonnement (prémisses premières), soit validée par des raisonnements précédents, et dans ce dernier cas les prémisses sont les conclusions des précédents raisonnements. La connaissance de la vérité peut être qualifiée de nécessaire ou de probable, avec éventuellement un degré de vraisemblance. La logique et la théorie rattachées au raisonnement de validation précisent la qualification de la connaissance de la vérité. Si un raisonnement précédent a inféré une conclusion probablement vraie, et si cette conclusion est à son tour utilisée comme prémisse, on aura donc une prémisse non pas vraie, mais probablement vraie. On évitera si on le souhaite, pour ne pas introduire dès le début une incertitude, d'avoir dans un raisonnement des prémisses premières probablement vraies, mais il sera possible d'avoir, en cours de raisonnement, des prémisses intermédiaires probablement vraies.

Une **conclusion** est une proposition dont la connaissance de la vérité est nouvellement acquise à l'issue de l'argument. Nous incluons dans la conclusion la modalisation de sa vérité (nécessaire ou plausible).

Dans notre exemple introductif « donc $AB^2+AC^2=BC^2$ » est une conclusion.

1.1.8.3 Règle de validation.

La première qualité du modèle de Toulmin est de distinguer parmi les prémisses les données des garanties. Toulmin précise que dans son schéma d'un argument « le recours explicite que comporte cet argument part directement de la thèse avancée aux données sur lesquelles elle s'appuie : en un sens, la garantie est incidente et explicative, sa tâche consistant simplement à indiquer explicitement la légitimité du passage en question et de le renvoyer à la classe de passages plus importante dont la légitimité est présupposée. Voilà une des raisons pour lesquelles il convient de distinguer données et garanties : celles-là sont invoquées explicitement, celles-ci implicitement. On peut de surcroît faire observer que les garanties sont générales, qu'elles attestent la solidité des arguments du type approprié, et qu'elles doivent être établies d'une manière très différente des faits que nous produisons comme données. Cette distinction, entre données et garanties, est analogue à celle qu'on établit dans les cours de justice entre les points de fait et les points de droit » [ibid. p.123]

Cette distinction n'est pas toujours claire.

Nous avons déjà rencontré la distinction ambiguë entre « règles d'inférence » et « prémisses ». Certains [Hottois 2002, p.28] peuvent considérer que les données et la garantie de Toulmin sont des prémisses et que les seules règles d'inférence à considérer sont les règles d'inférence logique, en l'occurrence ici le modus ponens : D vrai et (si D alors C) vrai alors C est vrai. C'est par exemple le cas dans l'étude des syllogismes où mineure et majeure sont deux prémisses. Pour d'autres, comme Toulmin [ibid. p.132], la mineure est une donnée et la

majeure est une garantie. C'est pourquoi nous allons définir la catégorie « règle de validation » qui regroupera à la fois les garanties de Toulmin et les règles d'inférence de Hottois, ce qui évitera l'ambiguïté dépendant des auteurs auxquels on se réfère.

Dans notre exemple introductif, la règle de validation, qui permet d'inférer, à partir des données « ABC est un triangle rectangle en A », la conclusion « donc $AB^2+AC^2=BC^2$ », est constituée des propositions suivantes :

- une règle principale, appelée « théorème de Pythagore » : « Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit (théorème de Pythagore)»,
- des règles secondaires comme par exemple :
 - o des définitions : d'un triangle rectangle, d'une hypoténuse, des côtés d'un angle droit, de la longueur d'un segment, du carré d'un nombre, d'une somme de deux nombres, ...
 - o des règles de logique : la règle du modus ponens. Pour pouvoir appliquer le théorème de Pythagore de la forme « si D alors C » il faut appliquer une règle logique, le modus ponens : si D est vraie et si (si D alors C) est vraie, alors C est vraie. Mais pour appliquer cette règle logique il faut appliquer à son tour la règle de substitution qui permet de substituer dans les règles logiques précédentes les variables propositionnelles par les propositions correspondantes du théorème de Pythagore.

On voit que si l'on veut préciser explicitement toutes les règles secondaires utilisées, on risque de devoir expliciter beaucoup de règles (définitions, règles logiques, ...) ce qui alourdirait la formulation du raisonnement. De fait les règles secondaires sont rarement explicitées et il peut même arriver de ne pas expliciter la règle principale, par exemple dans la formulation suivante : « si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2+AC^2=BC^2$ ». Le théorème de Pythagore n'est pas explicitement cité. On peut cependant considérer qu'il est implicitement cité du fait de son instanciation dans le cas du triangle ABC.

Par rapport aux règles secondaires, la règle principale est celle qui joue le rôle le plus important dans l'argument étudié, celle qui donne la spécificité, la « couleur » de cet argument. On voit la difficulté à définir précisément cette notion de règle principale par rapport à la règle secondaire. Les règles secondaires sont plus générales par rapport à l'argument étudié : les définitions ou les règles logiques pourront être utilisées dans d'autres arguments, alors que le théorème de Pythagore est caractéristique des arguments qui sont des applications du théorème de Pythagore (des instanciations de ce théorème).

La distinction entre donnée et règle de validation est également délicate.

Sur notre exemple, la donnée « ABC est un triangle rectangle en A » est un fait particulier, une instantiation de la définition générale de triangle rectangle. En principe ce fait n'a pas de portée générale dans la théorie étudiée. Par contre la règle de validation est constituée de propositions ayant une portée plus générale que cette donnée : définitions, théorème, règles de logique, ... Nous signalerons plus loin que la distinction entre donnée et règle de validation n'est pas toujours aisée.

Une **règle de validation** est un ensemble de propositions ayant les propriétés suivantes :

- Chaque proposition de la règle de validation est acquise comme vraie (admise ou validée).
- Chaque proposition un statut plus général qu'une simple donnée dans la théorie considérée et dans la logique à laquelle la théorie se réfère : définition, axiome, théorème, règle, loi, principe, propriété, garantie,...
- Dans la règle de validation il y a une règle principale, en général de la forme si D alors C (correspondant à la garantie de Toulmin) qui, pour être appliquée, exige l'utilisation d'autres règles (appelées règles secondaires) associées en général au type de logiques utilisée dans l'institution.
- Dans la théorie logique considérée, l'invocation de ces propositions lorsqu'une prémisse est donnée permet d'acquérir la connaissance de la vérité d'une conclusion. On dit que la règle de validation permet d'inférer la connaissance de la vérité de la prémisse à la conclusion.

1.1.8.4 Modèle d'analyse séquentielle d'un argument

Nous proposons d'analyser un argument selon le modèle suivant :

Données	Règle de validation	Conclusion
---------	---------------------	------------

Si nous reprenons l'exemple précédent proposé par Toulmin on obtient :

Données	Règle de validation	Conclusion
Harry est né aux Bermudes	Règle principale : celui qui naît aux Bermudes doit généralement être sujet britannique (sauf si ses deux parents étaient étrangers ou s'il s'est fait naturaliser américain)	vraisemblablement Harry est sujet britannique

1.1.8.5 Distinction entre donnée et règle de validation

Pourquoi la définition de règle de validation n'est pas très satisfaisante ? Elle renvoie à la logique considérée la charge de la permission d'inférer. Mais ce renvoi explique aussi la difficulté de la définition. Selon qu'on se place dans la logique des propositions, très explicite et très précise, ou bien dans la logique de la vie quotidienne, peu explicite et peu précise, la règle de validation est plus ou moins facile à déterminer ou à expliciter.

On peut rapprocher la règle de validation de la loi de passage proposée pour l'argumentation par Plantin [1996, p.26], ou du triplet (vérifications, énoncé-tiers, détachement) proposé pour la déduction par Duval [1995, p.244]. Dans ce dernier cas, la règle principale correspond à ce que Duval appelle l'énoncé-tiers, et les règles de vérification-détachement sont des règles secondaires.

Une deuxième raison de non satisfaction est que la frontière entre données et règle de validation n'est pas toujours très claire. La distinction annoncée est que la règle de validation est plus générale que les données, et que la règle de validation remplit une fonction d'inférence entre les données et la conclusion. C'est pourquoi certains logiciens considéreraient dans notre exemple introductif que le théorème de Pythagore est également une donnée, et que les seules règles de validation à considérer sont les règles d'inférence logique, dans notre exemple le modus ponens et ses règles secondaires.

Illustrons cette difficulté sur quelques exemples.

Exemple 1 :

Soit l'étude du syllogisme proposée par Toulmin [ibid, p.132].

Toulmin étudie l'exemple :

Socrate est un homme ;

Tous les hommes sont mortels ;

Donc Socrate est mortel.

On peut analyser cet argument comme suit :

Données	Règle de validation	Conclusion
Socrate est un homme	Règle principale : Tous les hommes sont mortels Règles secondaires : Modus ponens,	Socrate est mortel

	instanciation universelle	
--	---------------------------	--

Dans cet exemple la règle de validation a plus de généralité que les données.

Les données sont formées d'une proposition simple, formée d'un sujet et d'un prédicat, susceptible d'être vraie ou fausse.

La règle de validation est formée de la règle principale « tous les hommes sont mortels » qui n'est plus une proposition simple mais une relation sur un ensemble d'individus, avec une quantification (tous). En ce sens cette proposition est plus générale. De plus cette proposition permet l'inférence des données à la conclusion en la reformulant sous la forme : si (D : x est un homme), alors (C : x est mortel), et en appliquant la règle du modus ponens, D est vérifié puisque par substitution $x = \text{Socrate}$ est un homme, on en conclut que $x = \text{Socrate}$ est mortel.

Dans cet exemple, pour Toulmin, les données constituent une prémisse singulière alors que la règle de validation comprend une prémisse universelle.

Si maintenant on considère deux prémisses universelles, la distinction entre données et règle de validation est moins claire.

Exemple 2 :

Empruntons ce syllogisme à [Duval 1995, p.240-246].

Toutes les corneilles sont des oiseaux.

Tous les oiseaux sont des animaux.

Donc toutes les corneilles sont des animaux.

On peut analyser cet argument comme suit :

Données	Règle de validation	Conclusion
Toutes les corneilles sont des oiseaux	Règle principale : Tous les oiseaux sont des animaux. Règles secondaires: Modus ponens, instanciation universelle, généralisation universelle	Toutes les corneilles sont des animaux

Ici la distinction de généralité de la prémisse de la règle de validation par rapport à la prémisse de données est moins claire que dans l'exemple précédemment. En effet nous avons deux prémisses universelles.

Il est vrai que la prémisse universelle de la règle de validation a un caractère plus général que la prémisse de données puisque l'ensemble des oiseaux contient l'ensemble des corneilles.

Le plus important est qu'on peut continuer à inférer le passage des données à la conclusion en formulant la règle sous la forme : si « D : x est un oiseau » alors « C : x est un animal » et en appliquant la règle du modus ponens car D est vérifié puisque par substitution, x=corneille est un oiseau, on en conclut que x=corneille est un animal.

Enfin, ce qui joue dans cet exemple ce n'est pas tant la différence de généralité entre données et règle de validation, que le fait que la règle de validation permet de remplir la fonction d'inférence entre données et conclusion.

On pourrait cependant concevoir, pour les deux exemples précédents, une analyse sous les formes suivantes.

Exemple 3 :

Données	Règle de validation	Conclusion
Socrate est un homme Tous les hommes sont mortels	Règle principale : Modus ponens : si p alors q, or p donc q Règles secondaires : instanciation universelle	Socrate est mortel

Données	Règle de validation	Conclusion
Toutes les corneilles sont des oiseaux. Tous les oiseaux sont des animaux.	Règle principale : Syllogisme hypothétique : si p alors q, si q alors r, donc si p alors r Règles secondaires : instanciation universelle, généralisation universelle	Toutes les corneilles sont des animaux

Dans ces deux analyses on privilégie une approche uniquement logique pour la règle de validation. On remarque donc que la distinction « données » et « règle de validation » peut être sujette à interprétation selon le niveau auquel on place le degré de généralité d'une proposition et à quel niveau on situe l'inférence entrée données et conclusion. En suivant l'esprit du schéma de Toulmin, on ne limitera pas la règle de validation au seul niveau logique.

1.1.9 Variation de statut dans un argument pour une même proposition

Observons qu'une même proposition peut avoir différents statuts (donnée, conclusion, ou élément de la règle de validation) selon l'argument dans lequel la proposition apparaît.

Proposition comme conclusion

Le théorème T « si ABCD est un parallélogramme alors $\overline{AB} = \overline{DC}$ » a le statut de *conclusion* au terme de sa propre démonstration.

Proposition comme élément de la règle de validation

Toute application de ce théorème à un parallélogramme particulier XYZT utilise ce théorème comme règle principale de la règle de validation.

Proposition comme données

Données	Règle de validation	Conclusion
si ABCD est un parallélogramme alors $\overline{AB} = \overline{DC}$	si $\overline{AB} = \overline{DC}$ alors $AB=DC$	si ABCD est un parallélogramme alors $AB=DC$

Dans ce cas nous avons choisi de prendre comme règle principale de la règle de validation le théorème : si $\overline{AB} = \overline{DC}$ alors $AB=DC$. Les règles secondaires pourront être constituées par exemple du syllogisme hypothétique, de l'instantiation et de la généralisation universelles. Duval⁵⁰ distingue les règles de validation constituées de seules règles logiques des règles de validation faisant appel à un énoncé-tiers.

1.1.10 Absence de règle de validation

Enfin on notera que la règle de validation n'est pas toujours énoncée explicitement, sauf si le contrat local le demande.

⁵⁰ Nous retrouvons en partie la classification de Duval [1995, p.237] : « Le passage de propositions données à une autre proposition énoncée comme sa conséquence peut s'énoncer directement ou par l'intermédiaire d'un énoncé tiers[...] Ces pas de raisonnements directs sont généralement perçus comme des raisonnements purement « logiques » [...] Dans le second cas, le passage des prémisses à la conclusion s'effectue en utilisant une proposition autre que les seules prémisses : cette proposition est prise dans un domaine particulier de connaissances ou dans un domaine de convictions partagées avec l'interlocuteur ». Pour Duval les règles logiques ne sont pas des énoncés-tiers. C'est pourquoi il classe le syllogisme aristotélicien comme un raisonnement avec des propositions à statut opératoire (prémisses, conclusion) mais sans énoncé-tiers.

Beaucoup de raisonnements de type calcul ou algorithme automatisent les raisonnements sans citation explicite des règles de validation. Beaucoup de pas de raisonnement n'explicitent pas les règles qui sont considérées comme reconnues de manière évidente dans l'institution considérée.

S'il n'est pas possible d'explicitier la règle de validation utilisée dans l'argument, notamment après sollicitation du producteur du discours, alors il n'est pas certain que le discours tenu relève du raisonnement de validation. On comprend que la sollicitation de l'auteur du raisonnement paraît possible dans le contexte d'une séance orale dans une classe : on peut cependant imaginer que pour des raisons psychologiques (image qu'un élève donne à ses pairs ; relation d'autorité élève-professeur) l'explicitation de la règle de validation ne soit pas toujours possible ou fiable. La sollicitation de l'auteur devient plus difficile dans le cas de productions écrites (manuels scolaires, textes écrits par des élèves) où le producteur du texte est absent au moment où le récepteur reçoit le discours. Dans ce cas, pour analyser le raisonnement, il faudra conjecturer des règles de validation.

Il existe des cas où l'énonciateur a relié des données à une conclusion par simple intuition. «Le terme d'intuition désigne la manière d'être d'une connaissance qui comprend directement son objet, par un contact sans médiateurs avec lui, et sans le secours des signes ou des procédés expérimentaux ». [Mouloud 1999, p.1] Dans ces cas de connaissances immédiates, s'il n'est pas possible d'explicitier de règles de validation, nous considérerons que ce type de discours ne relève pas du raisonnement de validation.

Mais nous considérons que le recours à une action, par exemple une observation ou une manipulation, pour justifier une conclusion à partir de prémisses ne relève pas de l'intuition. En effet ce recours est un médiateur : il fonde la règle de validation. En droit, un témoignage visuel permettra d'inférer une culpabilité ; en chimie, les résultats répétés de réactions chimiques valideront une équation chimique ; Martzloff [1990, p.131], à propos des mathématiques chinoises, précise : « la validité des « raisonnements » chinois repose donc crucialement sur le témoignage direct de la vision ».

On pourrait penser que le recours à une action, par exemple une observation ou une manipulation, nous éloigne des opérations discursives⁵¹ qui caractérisent la définition que

⁵¹ Nous donnons un sens très général aux termes « opérations discursives » ou « discours » qui peuvent inclure différentes représentations sémiotiques. On peut par exemple inclure dans le discours des figures codées de géométrie qui peuvent conduire à la production de discours sans mots comme c'est le cas dans les exemples des mathématiques chinoises mis en évidence par [Martzloff 1990]. Le problème de l'historien retrouvant des éléments de discours est qu'il ne peut plus interroger les producteurs de discours pour leur demander de l'explicitier : il n'est pas toujours facile de savoir si des documents retrouvés servaient d'appoint à un discours

nous avons donnée du raisonnement. S'il n'y a pas production d'un discours⁵², alors nous ne pourrions pas parler de raisonnement de validation. Pour avoir un raisonnement de validation, il faut donc un discours, exprimé dans une langue naturelle ou spécialisée (par exemple formelle), avec des règles d'inférence (pas toujours énoncées explicitement) pouvant éventuellement prendre appui sur une observation ou une manipulation. Duval [1995, p.173 à 208] a notamment étudié la coordination entre figures géométriques et discours mathématique. Mais le fait qu'un raisonnement soit « une certaine activité de l'esprit, une opération discursive » pour reprendre les termes de Blanché [1995, p.1-8] n'interdit pas que cette activité de l'esprit puisse recourir à une perception visuelle ou au résultat d'une manipulation.

Enfin, la fréquentation des élèves montre qu'ils sont capables de produire des raisonnements avec des règles de validation non admises dans la théorie considérée (par exemple l'empirisme naïf ou l'expérience cruciale étudiées par Balacheff [1988, p.102-124]) : dans ce cas le raisonnement sera déclaré incorrect dans la théorie considérée alors que l'élève le considère comme correct dans sa théorie (exemple des théorèmes-en-acte⁵³).

L'explicitation de la règle de validation utilisée par un élève peut être riche d'enseignements sur les règles que l'élève utilise : règles logiques, mathématiques, de la vie quotidienne... L'examen de ces règles permettra de corriger celles qui sont fausses ou de rejeter celles qui ne sont pas autorisées dans le contrat.

Les élèves peuvent également produire des discours sans pouvoir justifier de règles de validation permettant le passage d'une proposition à une autre : dans ce cas le discours ne pourra pas constituer un raisonnement de validation, aussi longtemps que les inférences ne sont pas justifiées par des règles de validation. Oléron [1996, p.10-11] propose la définition suivante du raisonnement : « Un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations, respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but [...] Les contraintes auxquelles obéissent les raisonnements peuvent être explicitées sous forme de règles. Les règles les mieux explicitées et systématisées sont celles qu'ont élaborées les logiciens [...] ceci ne concerne qu'un secteur spécialisé et les seuls moules de la logique formelle ne peuvent pas rendre compte des combinaisons qui interviennent dans la plupart des raisonnements ». Dans cette définition générale de Oléron, qui ne se limite pas aux raisonnements de validation, on voit l'impérieuse nécessité que les règles soient susceptibles d'être explicitées, pour que le discours considéré constitue un raisonnement. On retiendra :

oral explicite, ou bien si ces documents se contentaient d'être une compilation de recettes permettant d'obtenir des résultats sans souci d'explicitation des règles de validation.

⁵² Voir note précédente.

⁵³ Propriétés utilisées par un élève mais qu'il n'est pas capable d'énoncer ; cette notion a été développée par [Vergnaud 1981].

Un raisonnement pour lequel les règles de validation ne peuvent pas être explicitées ou conjecturées⁵⁴ ne constitue pas un raisonnement de validation.

Nous allons maintenant proposer deux méthodes d'analyse d'un raisonnement de validation. Nous allons illustrer ces méthodes sur l'exemple suivant.

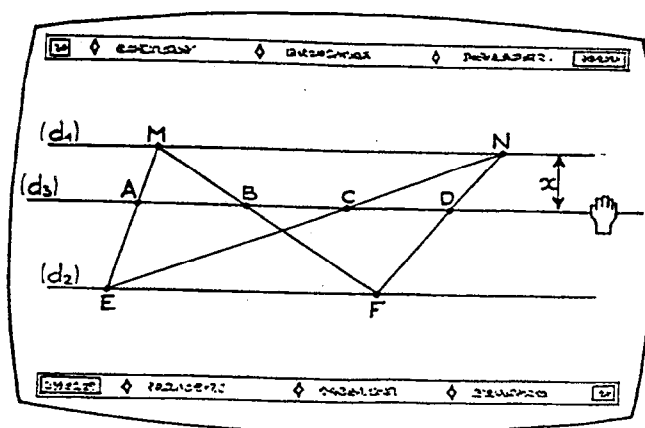
1.1.11 Exemples d'analyses séquentielle et structurelle d'un raisonnement

Nous allons considérer le raisonnement suivant, solution d'un problème proposé à une classe de seconde française. Cet exemple sera suivi des deux types d'analyse, séquentielle et structurelle. Les explications des analyses suivront dans le paragraphe suivant. Nous avons juste produit l'exemple avant les explications pour que le lecteur puisse suivre les explications en les illustrant au fur et à mesure sur l'exemple.

1.1.11.1 Enoncé du problème

Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3) , mais il s'agit de valeurs approchées.

Démontrer que $AB=CD$ quelle que soit la position de (d_3) .



⁵⁴ Conjecturées par le récepteur du raisonnement qui, en l'absence d'explicitation des règles, est en possibilité de conjecturer les règles que l'émetteur du raisonnement n'a pas explicitées. Le récepteur peut avoir une fausse interprétation de la pensée de l'émetteur : on retrouve ici le problème de l'interprétation de toute pensée pas assez explicitée.

Exemple de texte de résolution :

Le parallélisme des droites d_1 , d_2 et d_3 nous incite à appliquer le théorème de Thalès. Comme on a d_1 distinct de d_2 (car ces droites sont distantes de 1 décimètre), et en supposant que la droite d_3 est distinctes des droites d_1 et d_2 , on peut appliquer le théorème de Thalès:

- dans le triangle MEF, où (AB) est parallèle à (EF), ce qui donne : $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$,

- dans le triangle MEN, où (AC) est parallèle à (MN), ce qui donne : $\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$,

- dans le triangle ENF, où (CD) est parallèle à (EF), ce qui donne : $\frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$.

Les trois égalités précédentes permettent d'écrire l'enchaînement d'égalités suivant :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF} \text{ ce qui donne } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \text{ soit } \mathbf{AB = CD.}$$

1.1.11.2 Analyse séquentielle

n°	données du pas	règle de validation du pas	conclusion du pas
1	0 énoncé		d_1 parallèle à d_2
2	0 énoncé		d_1 et d_2 distantes de 1 cm
3	0 énoncé		d_3 parallèle à d_1 et d_2
4	0 figure		M et N points de d_1
5	0 figure		E et F points de d_2
6	0 figure		A, B, C, D points d'intersection respectifs de d_3 avec (ME), (MF), (EN), (NF)
7	3, 5, 6	théorème de Thalès	$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$
8	1, 2, 4, 6	théorème de Thalès	$\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$
9	3, 5, 6	théorème de Thalès	$\frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$

10	7, 8, 9	calcul sur égalités	$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$
11	10	calcul sur égalités	$\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$
12	11	calcul sur fractions	$AB = CD$

Règles de validation utilisées : on se limite à la règle principale

R₇, R₈, R₉: théorème de Thalès dans la formulation suivante de la classe de troisième⁵⁵ (version « unitaire » qui regroupe les égalités de rapport des longueurs de côtés, et de rapport des longueurs des segments transversaux) :

« Soient d et d' deux droites sécantes en A.

Soient B et M deux points de d, distincts de A.

Soient C et N deux points de d', distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \text{ »}.$$

R₁₀, R₁₁: la règle utilisée ici est la règle de transitivité de l'égalité appliquée successivement aux égalités n° 7, 8, 9, 10 : « si a=b et b=c alors a=c »

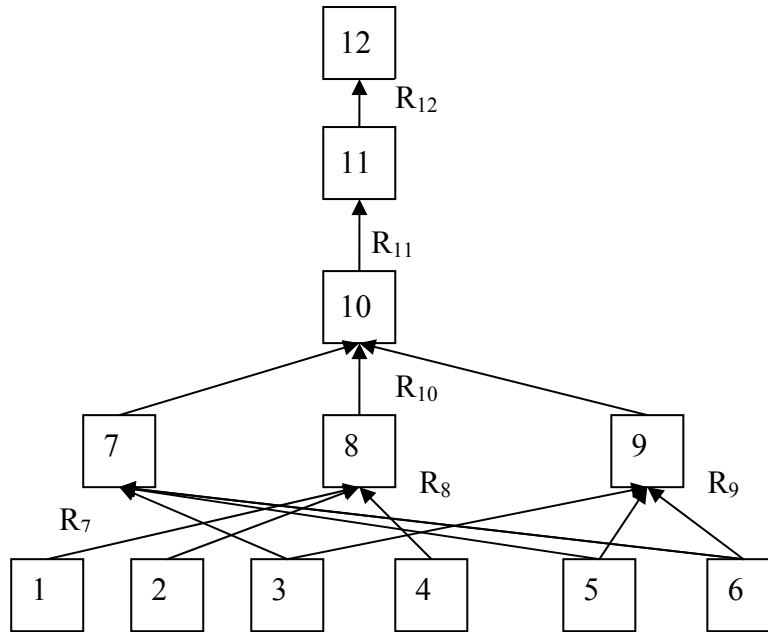
R₁₂: « deux fractions égales de même dénominateur ont même numérateur ».

1.1.11.3 Analyse structurelle

Avec les notations précédentes on obtient le graphe⁵⁶ suivant.

⁵⁵ conformément au programme du Ministère de l'Éducation Nationale, Mathématiques troisième, B.O. n°10, (1998), [Ministère 2002, p 108]

⁵⁶ Inspiré du « Beweisgraph » de [Holland 2001, p.35]



Exemple de structure en graphe

1.1.12 Analyse structurelle d'un raisonnement de validation

Un raisonnement de validation est une structure en graphe (orienté des données initiales vers la conclusion finale) d'arguments. Nous adopterons la présentation de [Holland 2001, p.35] qui place la conclusion finale en haut du graphe, ce qui est une manière de marquer le rôle essentiel⁵⁷ de cette conclusion dans le raisonnement. Nous appellerons *nœud* du graphe une donnée, une conclusion intermédiaire ou la conclusion finale. Un nœud, à l'exception des données initiales et de la conclusion finale, est une proposition qui a un double statut : conclusion intermédiaire d'un argument précédent et données d'un ou plusieurs arguments suivants. On remonte des données premières, que nous appellerons **hypothèses**⁵⁸, à la conclusion par les différentes arêtes. Ceci permet de comprendre que ce qui caractérise principalement un raisonnement de validation est sa conclusion finale et la structure des conclusions intermédiaires. Les mêmes hypothèses peuvent, par des règles de validation

⁵⁷ Nous n'affirmons pas cependant que l'heuristique qui permet de trouver le texte du raisonnement part obligatoirement de la conclusion. Il y a plusieurs heuristiques possibles : descendre de la conclusion vers les données, monter des données vers la conclusion, conduire les deux méthodes précédentes à un point de rencontre intermédiaire et d'autres méthodes heuristiques dont l'étude sort du cadre de notre recherche.

⁵⁸ Nous adoptons cette terminologie très répandue en France mais ambiguë, puisque le terme hypothèse peut désigner également une conclusion non encore démontrée, que l'on appelle parfois conjecture. L'appellation « données premières » ne souffre d'aucune ambiguïté.

différentes, conduire à des conclusions intermédiaires différentes, et donc à un raisonnement différent (un graphe différent) produisant la même conclusion finale. Ces arêtes peuvent se croiser, et une donnée peut être donnée de différentes conclusions, ce qui signifie qu'une donnée première ou qu'une conclusion intermédiaire peuvent être utilisées comme données pour plusieurs arguments différents (et que le graphe peut avoir un cycle). **Il est donc bien clair qu'un raisonnement de validation n'est pas uniquement une succession linéaire d'arguments. Un raisonnement de validation est un graphe orienté d'arguments.**

1.1.13 Analyse séquentielle d'un raisonnement de validation

Nous distinguons clairement la structure d'un raisonnement de son exposé écrit ou oral qui est nécessairement linéaire du fait des contraintes de perception de l'écrit et de l'oral. On ne peut exposer parallèlement mais seulement dans un ordre séquentiel, quitte à faire des retours en arrière, à ouvrir des parenthèses. Dans ce cas, au cours de l'exposé, des retours en arrière pourront se produire pour revenir sur des conclusions intermédiaires que l'on réutilisera comme données d'un nouvel argument.

Nous allons maintenant proposer une analyse séquentielle d'un raisonnement, qui peut prendre en compte cette perception linéaire d'un raisonnement (dont la structure n'est pas nécessairement linéaire). Cette analyse est inspirée de l'analyse séquentielle d'un argument sous la forme (données, règle de validation, conclusion) et inspirée partiellement de [Holland 2001, p.36]. La présentation linéaire constitue un résumé linéaire du raisonnement, précisant les hypothèses et la règle de validation utilisées à chaque pas, ainsi qu'une récapitulation des règles de validation utilisées.

Un raisonnement est décomposé en pas successifs dans un tableau de la forme de l'exemple précédent.

Un pas est une ligne du tableau :

- soit une hypothèse,
- soit un argument.

Dans le cas où un pas est une hypothèse :

- dans la colonne « numéro de pas » on indique le numéro de pas de cette hypothèse,
- dans la colonne « données du pas » on indique hypothèse ou énoncé ou figure pour préciser l'origine de l'hypothèse,

- dans la colonne règle de validation on n'indique rien car une hypothèse n'utilise pas de règle de validation,

- dans la colonne conclusion on indique l'énoncé de l'hypothèse considérée.

Dans le cas où un pas est un argument :

- dans la colonne « numéro de pas » on indique le numéro de pas de cet argument,

- dans la colonne « données du pas » on indique les numéros de pas dont les conclusions correspondent aux données utilisées dans l'argument,

- dans la colonne « règle du pas » on énonce la règle de validation ou on la code R_n où R_n désigne la règle de validation apparaissant au pas numéro n ,

- dans la colonne « conclusion du pas » on énonce la conclusion de l'argument.

On rajoute parfois une colonne supplémentaire pour des commentaires éventuels.

Sous le tableau on peut préciser les différentes règles de validation qui n'auront pas été explicitées en cours de tableau. La plupart du temps on n'énoncera que la règle principale de la règle de validation.

L'exemple précédent illustre un raisonnement constitué d'arguments mathématiques. Nous allons maintenant donner des exemples d'arguments non mathématiques que nous rencontrerons dans la suite de notre étude.

1.1.14 Exemples de types d'arguments non mathématiques

On commence par proposer pour chaque type d'arguments un exemple puis on dégage une forme générale de ce type d'arguments. Nous ne prétendons pas être exhaustif ou disjonctif dans la typologie proposée.

1.1.14.1 Exemple d'argument pragmatique

Tâche : montrer que le périmètre d'un quadrilatère convexe est plus grand que la somme des longueurs de ses diagonales, d'après un exemple de [Kirsch 1979] cité par [Tietze 2000, p.156].

Exemple de texte de la validation :

Représentons le quadrilatère convexe ABCD par quatre clous sur une planche comme suggéré par le dessin ci-dessous.

On enroule un élastique tendu entre D et B et un autre élastique tendu entre A et C.

Le premier élastique tendu fait l'aller-retour entre D et B et a pour longueur $2DB$.

Pour des raisons analogues le second élastique a pour longueur $2AC$.

En conséquences la somme des longueurs des deux élastiques vaut le double des sommes des longueurs des diagonales.

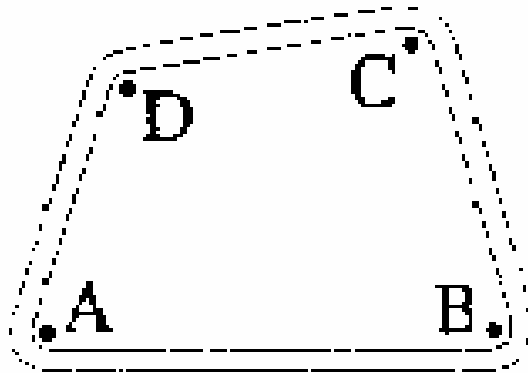
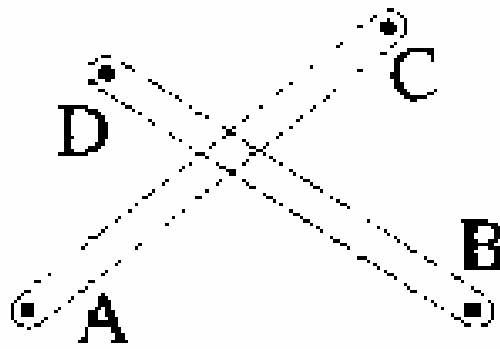
Puis on étire le premier élastique de manière à ce qu'il entoure également A et C comme suggéré par le second dessin. La longueur de l'élastique entourant ABCD devient donc celle du périmètre de ABCD.

De manière analogue on étire le second élastique de manière à ce qu'il entoure D et B comme suggéré par le second dessin. La longueur du second élastique entourant ABCD devient également celle du périmètre de ABCD.

Après étirement, la somme des longueurs des élastiques vaut le double du périmètre du quadrilatère.

En étirant un élastique, il s'allonge. En conséquence la somme des longueurs des élastiques avant étirement est plus courte qu'après étirement, soit en passant à la moitié de ces longueurs, la somme des longueurs des diagonales est inférieure à celle du périmètre.

Figure :



Extrayons de ce texte de validation l'argument pragmatique suivant.

Données	Règle de validation	Conclusion
On réalise l'action suivante : on étire l'élastique tendu entre D et B de manière à ce qu'il entoure également A et C comme suggéré par le second dessin	En étirant un élastique, il s'allonge.	La longueur avant étirement de l'élastique tendu entre D et B est plus courte que la longueur de cet élastique lorsqu'il est étiré de manière à entourer ABCD

Cet argument repose sur l'action d'étirement d'élastique et sur la propriété physique d'allongement des élastiques étirés. Cet argument n'est pas mathématique. Il repose sur une propriété (technologique) des élastiques. Au cours de la démonstration on a utilisé d'autres propriétés (technologiques) des élastiques : un élastique tendu entre deux points a pour longueur le double de la distance de deux points ; un élastique tendu entourant une figure

convexe a pour longueur son périmètre. On aurait pu bien entendu évoquer l'inégalité triangulaire si on avait voulu évoquer un argument mathématique. Nous réfléchissons plus loin à ce que peuvent être les raisons du choix entre différents arguments.

1.1.14.2 Type argument pragmatique

Données	Règle de validation	Conclusion
une action est réalisée dans les conditions D	une action réalisée dans les conditions D permet d'observer le résultat C	C plausible ou vrai

Perelman et Olbrechts-Tyteca appellent « argument pragmatique celui qui permet d'apprécier un acte ou un événement en fonction de ses conséquences [...]. Cependant, hors les cas où cause et effet peuvent être considérés comme la définition l'un de l'autre [...] l'événement à apprécier ne sera qu'une cause partielle, ou une condition nécessaire. Pour pouvoir transposer sur lui tout le poids de l'effet, il faudra diminuer l'importance et l'influence des causes complémentaires, en les considérant comme des occasions, des prétextes, des causes apparentes ». [Perelman Olbrechts-Tyteca 1976, p.358, p.361-362]. On recourt ici à un acte ou un événement, ce qui inscrit cet argument dans le domaine de l'action.

L'argument pragmatique est la base du raisonnement expérimental dans les sciences, où une hypothèse est validée si ses conséquences sont vérifiées expérimentalement.

On peut considérer que la vérification expérimentale d'une affirmation portant sur un objet par la réalisation matérielle de l'objet relève de ce type d'argumentation. On utilise la conséquence suivante : si une proposition portant sur un objet est vraie, alors elle sera vraie sur toute réalisation matérielle de cet objet. C'est le cas en géométrie lorsqu'on construit pratiquement une figure à l'aide d'instruments ou de logiciels de dessin et que l'on vérifie, visuellement ou par mesure, l'affirmation sur l'objet réalisé. C'est également le cas lorsqu'on vérifie une égalité d'aires par manipulation et recombinaison de surfaces. On rejoint ici les preuves pragmatiques de Balacheff [Balacheff 1987 p.157, 1988, p.54].

1.1.14.3 Exemples d'argument inductif et d'argument d'autorité

Tâche : Valider la formule du périmètre d'un cercle en fonction du rayon.

Texte de la validation extrait du livre de sixième [Pythagore 1996, pp.208-209], conforme au programme de 1996.

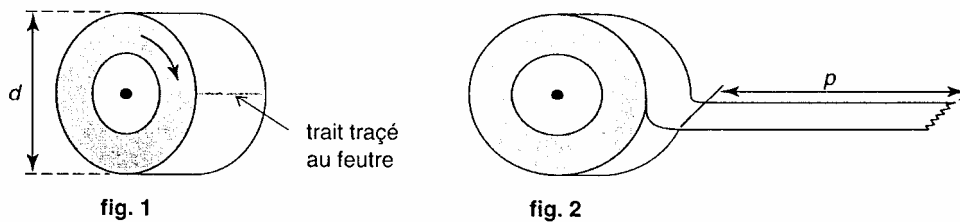
À la recherche de π

Matériel : un rouleau de papier adhésif, feutre, ciseaux, règle graduée...

A. Expériences, mesures et calculs

1. Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif.

Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban (fig. 1).



Dérouler le ruban jusqu'au trait, puis le fixer sur une feuille.

2. Mesurer la longueur p du ruban déroulé (fig. 2).

Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) $p =$					
Diamètre (cm) $d =$					
$p \div d \approx$					

B. Conclusion

1. Que constate-t-on dans ce tableau ?

2. Compléter la phrase :

Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

3. Compléter la formule :

$$p = \pi \times \dots$$

avec

$$\pi \approx \dots$$

Analyse séquentielle de la validation :

n°	données	règles de validation	conclusion
1	0 hypothèse		différents cercles (de rouleaux de rubans adhésifs d'élèves de la classe)

2	1	mesure	pour chaque cercle le périmètre et le diamètre valent...
3	2	calcul	pour chaque cercle mesuré, le rapport périmètre sur diamètre vaut...
4	3	induction et autorité	le rapport précédent est constant pour tous les cercles et est noté π avec $\pi \approx \dots$
5	4	calcul	le périmètre d'un cercle de diamètre D vaut πD

Le pas numéro 4 contient un argument qui est inductif puisque de la vérification de la constance d'un rapport à un nombre fini de cas (correspondant au nombre d'élèves de la classe) on généralise à tous les cas. On remarque que la généralisation n'est pas de l'ordre de la plausibilité : au contraire le livre incite à institutionnaliser la formule de manière autoritaire. C'est pourquoi nous supposons qu'il y a un argument d'autorité implicite pour transformer l'argument de plausibilité en argument de nécessité.

1.1.14.4 Type argument par induction incomplète

Données	Règle de validation	Conclusion
$P(w_1), P(w_2), \dots, P(w_n)$	Si $P(x)$ vrai pour un nombre fini de cas, alors (pour tout x , $P(x)$ davantage plausible ou vrai)	pour tout x , $P(x)$ davantage plausible ou vrai

[Perelman Olbrechts-Tyteca 1976, p.471] analyse « les liaisons qui fondent le réel par le recours au cas particulier. Celui-ci peut jouer des rôles fort divers : comme exemple, il permettra une généralisation ; comme illustration, il étayera une régularité déjà établie ; comme modèle, il incitera à l'imitation ».

On peut se demander quelle est la différence entre une induction incomplète et un argument pragmatique.

L'argument d'induction ne nécessite par le recours à l'action (ou à son évocation) comme l'argument pragmatique **Dans le cas où l'argument d'induction recourt à l'action, il est aussi un argument pragmatique.** Dans l'exemple suivant, pour valider la formule générale concernant la somme des n premiers entiers non nul, $S(n)=n(n+1)/2$, on peut la vérifier par

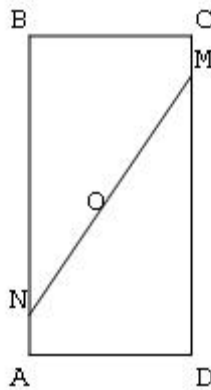
calcul pour quelques entiers et en conclure que la formule générale est plausible. Le choix des entiers et leur nombre dépendra de l'institution dans laquelle on se situe. Dans cet exemple, le calcul n'est pas une action, mais un raisonnement intellectuel.

De même **un argument pragmatique peut ne pas être une induction s'il n'a pas de visée de généralisation.**

Prenons l'exemple suivant.

On considère dans le rectangle ABCD représenté ci-dessous, avec $BC=2\text{cm}$ et $CD=4\text{cm}$. Le point M sur le côté [CD] avec $CM=0,5\text{cm}$ et le point N sur le côté [AB] avec $AN=0,5\text{cm}$.

Montrons que l'aire de ANMD est égale à celle de BCMN.



La validation qui consiste à découper ANMD et à le superposer sur CMNB après retournement est une validation pragmatique. Mais elle n'est pas une induction au sens où elle ne généralise pas une observation particulière. En effet le problème se limite à l'objet particulier ABCD représenté par le dessin précédent.

La validation qui consisterait à calculer les aires des deux trapèzes et à constater leur égalité serait une démonstration mathématique.

1.1.14.5 Type argument d'autorité

Données	Règle de validation	Conclusion
A affirme C	si A affirme C et si A est une autorité alors C	C

D'après, [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p.413] « les autorités invoquées sont fort variables : tantôt ce sera « l'avis unanime » ou « l'opinion commune », tantôt certaines catégories d'hommes, « les savants », « les philosophes », « les Pères de l'Eglise », « les prophètes » ; parfois l'autorité sera impersonnelle : « la physique », « la doctrine », « la religion », « la Bible » ; parfois il s'agira d'autorités nommément désignées ».

Par exemple, en classe de mathématiques, le professeur, le manuel scolaire, le programme officiel sont des autorités et leurs affirmations sur le savoir mathématique sont supposées vraies : c'est une clause du contrat didactique dans la classe. Dans la même classe de mathématiques les élèves pourront invoquer l'autorité du plus grand nombre. Dans ce cas cette autorité n'est pas reconnue dans l'institution *classe de mathématiques* ; par contre elle peut être reconnue dans l'institution *groupe des élèves*. On voit donc que chaque institution possède sa propre logique qui peut conduire à des vérités différentes.

On pourrait penser que l'argument d'autorité est utilisé en mathématiques quand on invoque un théorème. Dans la logique mathématique, un théorème a le statut de théorème dès qu'il est une proposition démontrée et il rejoint la liste des théorèmes. De notre point de vue, nous considérons que le recours à la liste des théorèmes est une simple règle de formation de nouveaux théorèmes (et donc une règle de validation) dans le cadre d'une théorie logique et d'une théorie axiomatique données, et non pas un argument d'autorité. [Hottois 2002, p.63] précise à propos des règles de formation de nouveaux théorèmes : « En fait il s'agit de règles de déduction ou de schémas d'inférence ; seulement ces règles sont souvent éloignées de ce qu'on appelle intuitivement une déduction ou un raisonnement, qu'il est préférable de les appeler abstraitement « règles de transformation » (ou même de manipulation). Elles sont, en somme, les consignes du jeu axiomatique ». Le recours à un théorème de la liste des théorèmes et son application, par exemple dans le cas de règle du modus ponens, relève de ce type de règles et ne saurait constituer un argument d'autorité. Par contre l'argument d'autorité est le recours à une autorité, pour compenser l'absence de règle de validation connue ou pour se dispenser d'utiliser une règle de validation connue. C'est le cas en situation d'enseignement, lorsque le professeur, pour gagner du temps, propose d'admettre une partie d'une démonstration, même si dans le contexte de cette situation les élèves auraient pu démontrer cette partie.

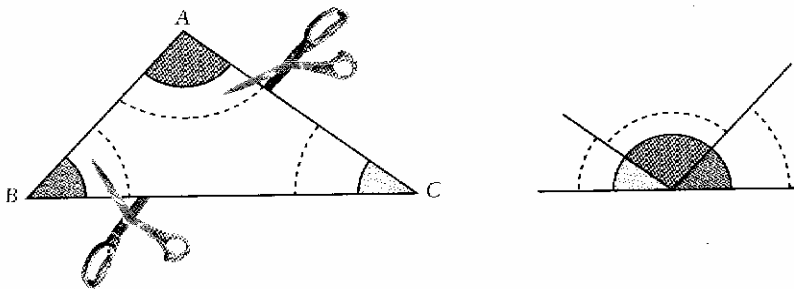
1.1.14.6 Exemple d'argument visuel

Tâche : valider la propriété de la somme des angles d'un triangle

Texte de la validation extrait du livre de cinquième [Transmath 1997, p. 225], conforme au programme de 1997.

① En découpant

- a. Trace sur papier blanc un triangle ABC comme celui dessiné ci-dessous.
- b. Découpe chacun de ses angles, puis « regroupe »-les comme l'indique le dessin ci-dessous.



- c. Quelle semble être la valeur de la somme des angles du triangle ?

Ici l'argument est visuel : on vérifie visuellement que la somme des angles vaut un angle plat. Mais la conclusion est énoncée de manière plausible par le verbe « sembler » qui marque l'absence de certitude et de nécessité. On voit la différence par rapport à l'exemple précédent où la vérité de la conclusion n'était pas qualifiée de plausible.

1.1.14.7 Type argument visuel

Données	Règle de validation	Conclusion
une vision est réalisée dans les conditions D	une vision réalisée dans les conditions D permet d'observer le résultat C	C davantage plausible ou vrai

Si on considère que la vision est une forme d'action⁵⁹, alors nous avons un cas particulier d'argument pragmatique. Mais cet argument étant très utilisé, notamment par le recours à la figure en géométrie et par le développement des logiciels de géométrie dynamique, nous avons souhaité le singulariser. [Elschenbroich 1999] étudie ce phénomène dans l'enseignement des mathématiques sous l'expression « preuves visuelles ».

⁵⁹ [Larousse 1996] définit la vision par : « fait, action de voir, de regarder quelque chose ».

Les arguments précédents ne sont pas des arguments mathématiques, au sens qu'ils ne s'appuient pas sur des règles de validation de la théorie mathématique, ce qui ne veut pas dire que dans la pratique sociale des mathématiques ils ne soient pas utilisés.

1.1.14.8 Arguments visuels ou pragmatiques dans l'histoire mathématique

A propos de la proposition 1 des *Eléments d'Euclide* [Barbin 1997, p.354-355] rappelle que dans la démonstration donnant la construction à la règle et au compas du triangle équilatéral, « Proclus ne rapporte aucune objection concernant [...] la nécessité de démontrer que les deux cercles s'intersectent. L'évidence visuelle de l'intersection des deux cercles s'impose. Mais le géomètre ne doit pas s'en remettre à la seule vue. Ainsi, la proposition 20 du même livre démontre que dans tout triangle la somme de deux quelconques des côtés est supérieure au troisième. Proclus rétorque aux Epicuriens, qui décriaient la proposition 20 en disant qu'elle est *évidente pour un âne*, que « *ce théorème est évident pour les sens, mais ne l'est pas encore par le raisonnement scientifique [...] il appartient à la science de nous dire la manière dont cela se produit* » ». On voit donc que tantôt le mathématicien peut intégrer un argument visuel, parce qu'exprimant l'évidence visuelle et sans l'avoir énoncée sous forme d'axiome admis, tantôt le même mathématicien peut rejeter un argument visuel comme ne relevant pas du raisonnement mathématique.

De même pour les arguments pragmatiques, considérons la démonstration par Archimède de la quadrature de la parabole : l'aire curviligne comprise entre une portion de parabole est un segment est égale à quatre tiers de l'aire d'un triangle rectangle de base ce segment et de troisième sommet le point de tangence avec la parabole de la parallèle à ce segment. La démonstration par exhaustion d'Archimède est une double réduction par l'absurde. Mais comment Archimède avait-il obtenu le rapport $4/3$? Il propose une démonstration par une méthode mécanique. [Ibid. p.355] explique : « Archimède avait une méthode mécanique pour découvrir ce rapport. Cette méthode est présentée dans une lettre à son ami Eratosthène [...] où Archimède explique que sa méthode mécanique⁶⁰ ne peut être considérée comme un moyen légitime de démonstration ». Archimède peut utiliser des arguments pragmatiques (par exemple le recours à des pesées) pour conjecturer des résultats mais pour démontrer mathématiquement il essaie de trouver des démonstrations satisfaisant les principes de la logique mathématique.

1.1.15 Conclusion

Nous avons donc proposé d'étudier les raisonnements de validation :

⁶⁰ On trouvera quelques indications de la méthode mécanique dans [Bettinelli 1989, p. 193-195].

- en les décomposant en raisonnements élémentaires appelés arguments, décrits par un triplet (données, règle de validation, conclusion),
- en distinguant les arguments de nécessité et les arguments de plausibilité ce qui permet de distinguer argumentation et preuve/démonstration,
- en proposant une analyse séquentielle de la suite des arguments dans l'exposé du discours du raisonnement de validation, ou une analyse de structure de l'organisation des arguments : chacune des analyse rend compte des articulations de changement de statuts données/conclusion de différentes propositions structurant le raisonnement. Chacune de ces analyses permet de vérifier la validité d'un raisonnement : s'il y a une rupture ou un enchaînement incorrect dans la séquence des arguments ou dans la structure en graphe, le raisonnement n'est pas valide. L'analyse séquentielle permet d'analyser le raisonnement de validation dans l'ordre séquentiel de sa réception (écrite ou orale). L'analyse structurelle est plus complexe à effectuer, car il faut attendre la production complète de la validation pour pouvoir en analyser sa structure. La structure en graphe est plus une structure théorique qui permet de définir un raisonnement de validation comme un graphe orienté d'arguments, et non comme une structure linéaire d'arguments. Dans l'analyse des productions d'élèves nous essaierons d'observer s'il y a des différences de structures des validations entre la France et l'Allemagne. Pour l'analyse des démonstrations dans les manuels, nous évoquerons le moment venu une difficulté méthodologique à utiliser l'analyse structurelle.

Ces propos précédents ont été relativement généraux pour pouvoir englober à la fois les raisonnements produits en mathématiques ou dans la vie quotidienne. Nous allons maintenant préciser le cadre théorique de l'anthropologie du didactique pour une meilleure prise en compte de ces raisonnements dans le cadre de l'enseignement des mathématiques.

1.2 L'approche anthropologique

Chevallard [1985, 1992] propose une théorie anthropologique du didactique. Elle consiste « à prendre comme objet premier à étudier [...] non pas le sujet apprenant ou le sujet enseignant, mais le savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble » de telle sorte que « l'objet d'étude de la didactique ne puisse se trouver enfermé dans les institutions d'enseignement et qu'il ait fallu le situer dans le cadre plus large des pratiques mathématiques dans l'ensemble des institutions de la société » [Bosch Chevallard 1999 p.1] Ce rapport de l'homme à la connaissance se déroule au sein d'institutions qui jouent un rôle clé dans ce rapport au savoir : sa production, son utilisation, son enseignement et son passage d'une institution à une autre. « Le point crucial à cet égard, dont on découvrira peu à peu les implications, est que la théorie anthropologique du didactique situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en

mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales » [Chevallard 1999 p.223]. « Une institution peut être à peu près n'importe quoi [...]. Une école est une institution de même qu'une classe ; mais il y a aussi l'institution « travaux dirigés », l'institution « cours », l'institution « famille ». La vie quotidienne est une institution ». [Chevallard, 1992, p.88].

Dans le cadre de notre étude nous allons distinguer deux variations institutionnelles relatives au savoir autour du raisonnement de validation : d'une part une variation entre les institutions de la vie quotidienne et les institutions mathématiques avec un point de rencontre dans les institutions d'enseignement des mathématiques comme cela a déjà été évoqué dans le précédent paragraphe, d'autre part une variation dans les institutions d'enseignement des mathématiques entre la France et l'Allemagne. Le choix d'une étude comparée entre deux pays permet cette variation institutionnelle et permet de repérer ce qui est plutôt singulier à une institution d'un pays, en quelque sorte un marqueur culturel, et ce qui est général à un niveau institutionnel de détermination. C'est pourquoi le cadre anthropologique nous a paru bien adapté à la prise en compte de ces variations institutionnelles. Nous allons donc préciser notre problématique dans ce cadre théorique

Dans cette partie nous allons décrire comment le cadre théorique de l'anthropologie du didactique permet l'étude du rapport au savoir mathématique enseigné relatif à la validation. Bien entendu nous nous réserverons le droit de modifier⁶¹ ce cadre théorique si nécessaire. Notre premier questionnement concerne la validation.

1.2.1 La validation : objet de connaissance ? objet de savoir ? objet à enseigner ?

« Connaître un objet O, au sens de la théorie présentée [...] c'est –pour une personne comme pour une institution – avoir un rapport à O [...] Un objet n'existe que parce qu'il est objet de connaissance » [Chevallard 1992, p.87]. La validation est-elle un objet de connaissance ou de savoir en distinguant « la connaissance - et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissances » [ibid. p.4] ? La validation est-elle un objet à enseigner ? Pour répondre à cette question différencions les institutions où la validation existe.

1.2.1.1 La validation mathématique

Considérons d'abord la validation mathématique ou démonstration (mathématique). Nous appellerons institutions mathématiques des institutions dont la fonction est l'élaboration du savoir mathématique⁶², par exemple les départements mathématiques des universités, les

⁶¹ Par exemple en introduisant la terminologie « condition institutionnelle » un peu plus loin.

centres de recherche en mathématiques, mais aussi les institutions qui organisent la communication et les échanges dans la communauté des mathématiciens.

La démonstration est un objet de savoir dans les différentes théories de la démonstration.

Dans l'organisation actuelle des différents domaines mathématiques, le domaine de la logique regroupe les différentes théories logiques développées en mathématiques dans lesquelles on peut élaborer une théorie de la démonstration. « On peut tout aussi bien considérer comme axiomes certaines expressions de la langue formelle et fixer des règles de déduction immédiate telles que toutes les expressions déductibles des axiomes au moyen des règles se traduisent en lois logiques quand on les exprime dans la langue usuelle. La logique se présente alors sous la même forme qu'une théorie mathématique axiomatisée et l'on dit qu'on a construit un système formel. L'étude de ces systèmes est l'objet de la théorie de la démonstration » [Andler 1995] Au sein des théories de la démonstration les différents savoirs relatifs à la démonstration sont organisés. Dans ce cadre-là on peut retenir que « la démonstration est la procédure propre au système axiomatique qui permet de déduire des théorèmes à partir des axiomes. Toute démonstration est une liste finie d'expressions bien formées dont chacune est soit un axiome soit le résultat de l'application de règles de transformation sur une ou plusieurs lignes qui précèdent. La dernière ligne est appelée « théorème » » [Hottois 2002, p. 195]

La démonstration est également un objet de pratique dans les mathématiques. Cette pratique peut s'éloigner du formalisme de la théorie de la démonstration, notamment aux époques ou dans les lieux où l'axiomatisation n'est pas pratiquée. On produit, on communique, on utilise, on étudie des démonstrations. « L'histoire des mathématiques présente à l'enseignant un paysage de la démonstration moins serein que celui qu'il imaginait. Rien de préalable, puisque démonstration et objets des mathématiques se construisent simultanément. Rien d'absolu, puisque les formes de la démonstration changent dans l'histoire » [Barbin 1990, p.387] Dans ce cas la démonstration, comme objet de connaissance à travers une pratique est beaucoup moins organisée que dans la théorie de la démonstration formelle, même si la logique s'est développée sans nécessaire recours à l'axiomatisation.

Dans cette distinction entre la démonstration comme objet de savoir organisé, et la démonstration comme objet de connaissance à travers une pratique, on retrouve en partie la distinction entre mathématiques savantes et mathématiques sociales.

Nous parlerons de mathématiques savantes en nous référant aux mathématiques hors des institutions sociales où elles ont été produites, dans leur fonctionnement propre et autonome, comme corpus de connaissances. Cette conception traverse l'histoire des mathématiques depuis Platon, pour qui les mathématiques existent indépendamment des êtres humains,

⁶² Mathématique : « science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif les propriétés d'êtres abstraits (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux ». [Larousse 1996]

jusqu'aux formalistes pour qui « les mathématiques consistent seulement en axiomes, définitions théorèmes - en d'autres mots des formules » [Davis, Hersh 1985, p.309]. On pourra utiliser comme illustration approximative de ces mathématiques savantes et des démonstrations savantes celles que l'on trouve dans les traités théoriques de Bourbaki.

Nous appellerons mathématiques sociales les mathématiques conditionnées par une institution sociale, conditions par exemple sur la réception, la production ou le traitement de ces mathématiques. On envisage bien entendu les paramètres socioculturels mais aussi des paramètres plus individuels (psychologiques, cognitifs,...). Certains auteurs parlent d'ethnomathématiques [IREM de Montpellier, 1993, p.535 à 580] et se prononcent « pour un questionnement ethnomathématique de la preuve » [Balacheff 1999]. Un débat philosophique pourrait conduire à discuter la position que toutes les mathématiques sont sociales ; en effet les mathématiciens professionnels, les savants mathématiciens, forment une communauté sociale qui valide les connaissances du corpus des mathématiques. L'histoire des mathématiques illustre les variations de conception de cette communauté : Davis et Hersh [1985, p.27-28] montrent les changements de classification des mathématiques entre le « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik » de 1868 et les « Mathematical Reviews » de 1979. Barbin [IREM de Besançon, 1989, p.5] précise à propos de la démonstration : « Situer la démonstration dans l'histoire, c'est aussi se garantir de la « méprise » qui consiste à croire que la démonstration est univoquement définie, c'est être obligé de penser sa diversité. Les fondements de la démonstration se transforment, la signification de la démonstration se modifie, les formes de la démonstration changent, le sentiment de l'évidence varie avec l'histoire ».

La démonstration mathématique est la procédure de validation dans les institutions mathématiques dont elle est un objet de savoir. L'organisation de ce savoir peut varier suivant les institutions mathématiques considérées.
--

1.2.1.2 La validation dans l'enseignement des mathématiques et la transposition didactique

Une institution didactique relativement à un savoir est une institution qui a «vis à vis de ce savoir, une mission d'enseignement, et définissant pour ses membres, relativement à ce savoir, deux positions majeures : celle d'enseignant, celle d'enseigné » [Chevallard 1988, p.102]. Des exemples d'institutions didactiques sont une classe de Gymnasium allemand, une classe lycée français, un Gymnasium allemand, le système éducatif d'enseignement secondaire du Bade-Wurtemberg, un manuel scolaire et ses protagonistes (auteur, professeur lecteur, élève lecteur).

La frontière entre ces institutions n'est pas toujours très claire. Une institution didactique peut être aussi une institution mathématique, comme c'est le cas du département mathématique d'une université qui produit des mathématiques dans ses laboratoires de recherche et enseigne des mathématiques dans les cours universitaires. Doit-on limiter les institutions mathématiques aux institutions où on produit des mathématiques nouvelles ? Dans ce cas une classe de mathématiques de collège ou les formations mathématiques d'un I.U.F.M.⁶³ sont-elles des institutions mathématiques ?

Les institutions d'enseignement des mathématiques varient également dans l'histoire et dans la géographie. Glaeser [1988, p.207] dans son cours sur les racines historiques de la didactique des mathématiques, rappelle que « l'expression enseignement des mathématiques a recouvert au long de l'histoire des contenus bien différents de celui qu'elle évoque aujourd'hui. Les relations entre maîtres et élèves ont rapidement varié. Les connaissances transmises ne dépendaient pas seulement de l'état d'avancement de la science, mais aussi d'une profusion d'idées a priori sur les possibilités d'assimilation des divers types d'élèves, ainsi que des finalités successives assignées à l'enseignement des mathématiques ». Cette variation dans l'histoire se retrouve au niveau de la géographie comme l'a montré l'étude de Howson [1991] sur les curricula de mathématiques dans différents pays.

Dans les institutions d'enseignement des mathématiques, Chevallard [1985 p.49-50] questionne : « Qu'est-ce qu'un « objet de savoir » ? Pour l'enseignant de mathématiques il faut ranger dans cette catégorie certainement les « *notions mathématiques* » : par exemple l'addition, le cercle, la dérivation [...] A côté de ces « notions mathématiques » désignées ci-dessus se rangent des notions qu'on peut dire « *paramathématiques* » : par exemple, la notion de paramètre, la notion d'équation, la notion de démonstration. Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'études pour le mathématicien [...] Seuls les objets de savoir sont pleinement des candidats à être des objets d'enseignement. Les notions paramathématiques, par exemple, ne font pas l'objet d'un enseignement ; ce sont des objets de savoir « auxiliaire » nécessaire à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus »), mais ils ne sont pas « enseignés » selon le plan d'enseignement des notions mathématiques ».

Ce texte a été écrit en 1980 lors de la première école d'été de didactique des mathématiques, c'est-à-dire à partir d'une observation des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques d'une époque. On peut se demander si depuis cette époque la démonstration est devenu un objet à enseigner.

Le passage d'un savoir savant au savoir enseigné a été étudié sous le nom de **transposition didactique** : « un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le

⁶³ Institut Universitaire de Formation des Maîtres

« travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique » [Chevallard, 1985, p.39].

Si la démonstration n'est pas explicitement désignée comme objet à enseigner, elle peut éventuellement être un objet de connaissance, comme notion paramathématique utilisée dans l'enseignement : on rencontre, on produit, on utilise des démonstrations. La démonstration est effectivement fréquentée dans le collège français alors qu'elle n'est pas un objet de connaissance de la petite section maternelle de l'école primaire.

On peut se poser alors les questions suivantes :

Dans l'enseignement des mathématiques, la démonstration est-elle un objet de connaissance? est-elle un objet à enseigner? La réponse à ces questions varie-t-elle selon les époques considérées ? selon les institutions françaises ou allemande considérées ?

Dans l'enseignement des mathématiques, si la démonstration est un objet de connaissance et a fortiori à enseigner, quelles en sont ses caractéristiques? Sous ces hypothèses, parmi les institutions françaises et des institutions allemandes, peut-on observer des similitudes ou des différences ?

1.2.1.3 La validation non mathématique

Les institutions non mathématiques produisent d'autres savoirs non mathématiques. Par exemples les savoirs relatifs aux disciplines de l'enseignement secondaire, comme ceux des sciences expérimentales, de la linguistique ou de la philosophie sont produits dans des institutions universitaires correspondantes mais également les savoirs de la vie quotidienne produits dans les institutions de la vie quotidienne comme la famille, le groupe de camarades d'une même classe,... On peut se poser la question de savoir si pour la vie quotidienne le terme connaissance ne serait pas mieux approprié que le terme savoir, car l'organisation des connaissances est très implicite et peu formalisée et ne donne pas lieu au degré d'organisation que l'on rencontre dans les savoirs scientifiques, comme par exemple les mathématiques ou les sciences expérimentales. On peut estimer cependant que certaines branches de la philosophie, de l'anthropologie, de l'ethnologie, de la sociologie ou de la psychologie peuvent théoriser la vie quotidienne. Rappelons que des chercheurs invoquent même une logique de la vie quotidienne sous différentes dénominations : « logique naturelle » [Grize 1996], « logique en action » [Toulmin 1993 p.181], « logique appliquée » [Toulmin 1993 p.315], « logique pratique » [Toulmin 1993 p.320], « logique de la pratique » [Bourdieu 1980, p.134], « le raisonnement pratique » [Audi,1989].

On peut également étudier d'autres logiques dans d'autres institutions : en droit [Perelman 1963, Haarscher 1994], dans les sciences expérimentales [Carnap 1966, Chalmers 1987, Hempel 1966], en philosophie [Perelman 1952]...

La frontière entre savoir mathématique et savoir non mathématique est délicate et renvoie à la définition même de mathématique. Or « la définition des mathématiques change. Chaque génération, chaque mathématicien porté vers la réflexion à l'intérieur de cette génération énonce une définition correspondant à son point de vue » [Davis, Hersh 1985, p.8]. Par exemple, la logique peut se trouver des territoires communs entre les mathématiques et la philosophie.

Cependant nous parlerons de validation non mathématique pour une validation qui existe dans une institution non mathématique, comme par exemple l'institution de la vie quotidienne ou la classe de seconde de sciences physiques en France.

Il peut exister des validations sujettes à controverses, c'est-à-dire qui, selon l'institution mathématique considérée, sera reconnue ou non : la démonstration du théorème des quatre couleurs par Appel et Haken recourant à l'ordinateur [Davis Hersh 1985, p.373] ou les démonstrations non constructivistes [Lombardi 1990]. Nous n'étudierons pas ces validations.

Par exemple dans l'institution de la vie quotidienne, **l'argument d'autorité** est reconnu alors qu'il n'est pas reconnu dans toute institution mathématique. Soyons bien clair, cela ne signifie pas qu'un savant mathématicien ou qu'un traité mathématique n'ont pas d'autorité. Simplement lorsqu'un argument d'autorité est utilisé par un mathématicien, il n'est pas utilisé au titre de la théorie mathématique à laquelle il se réfère mais du fait que les mathématiques sont plongées dans des institutions sociales, dans lesquelles des arguments sociaux, comme l'argument d'autorité, peuvent être utilisés. La seule référence mathématiquement admissible dans une démonstration mathématique est la référence à un axiome de la liste des axiomes ou à un théorème ou une définition de la liste des théorèmes ou des définitions. La référence à une affirmation d'une autorité mathématique, affirmation qui n'est pas dans la liste reconnue des théorèmes mathématiques, rend la démonstration momentanément mathématiquement incorrecte. Il se pose deux problèmes pratiques : qui garantit qu'une affirmation appartient à la liste des théorèmes ? qui garantit que la démonstration d'un théorème est correcte (c'est-à-dire valide au sens logique du terme, sans erreurs de calcul, sans invocation d'un énoncé qui n'est pas dans liste des théorèmes ou des axiomes,...) ? Dans la réponse pratique à ces deux questions nous utilisons de temps en temps la référence à une autorité, ce qui n'est pas un argument de la théorie mathématique. Il faut donc bien distinguer la pratique sociale du mathématicien, justifié par des considérations sociales voire économiques, et la justification

théorique mathématique. Nous évoquerons plus loin cette distinction dans l'enseignement des mathématiques. C'est pourquoi nous ne développons pas davantage.

Dans la vie quotidienne, **l'argument inductif** est utilisé alors qu'il n'est pas un argument mathématique de validation dans les démonstrations mathématiques. Bien entendu, pour conjecturer ou pour contrôler un résultat, le mathématicien peut utiliser des arguments inductifs ; Mais dans ce cas, ces arguments ne sont pas des arguments de validation mathématique ; le mathématicien ne se place pas dans une situation de validation mais dans une situation de conjecture ou de contrôle.

On peut observer que de nombreuses études sur la validation dans la vie quotidienne font références, par exemple les études auxquelles nous avons eu recours : *Les usages de l'argumentation* [1958, 1992] de Toulmin ou *Traité de l'argumentation, la nouvelle rhétorique* [1958] de Perelman et Olbrechts-Tyteca.

On peut observer enfin que les institutions d'enseignement des mathématiques sont des institutions qui peuvent recourir à des validations mathématiques ou à des validations non mathématiques, comme nous l'avons précédemment⁶⁴ illustré par des exemples de type d'arguments non mathématiques issus de l'enseignement des mathématiques.

Concluons.

Une validation non mathématique est une validation qui existe dans une institution non mathématique.

Quelles sont les validations non mathématiques, qui ne sont pas reconnues comme démonstrations mathématiques mais qui existent dans les institutions d'enseignement des mathématiques ?

Observe-t-on des similitudes ou des différences entre la France et l'Allemagne quant à ces validations non mathématiques présentes dans l'enseignement des mathématiques ?

1.2.1.4 Double transposition de la démonstration mathématique et de la validation non mathématique

Considérons la validation relativement aux différentes institutions suivantes.

types d'institutions	<i>institutions mathématiques produisant</i>	<i>institutions d'enseignement des</i>	<i>autres institutions :</i>
-------------------------	--	--	----------------------------------

⁶⁴ Voir le paragraphe « Exemples de types d'argument non mathématiques » de la partie « Raisonnement, validation, démonstration, argumentation »

productrices de savoirs	<i>le savoir mathématique</i> « savant » : départements de mathématiques des universités, centres de recherches mathématiques,...	<i>mathématiques</i> : classe de mathématiques d'un lycée français ou d'un Gymnasium du Bade-Wurtemberg,...	famille, école, clubs, vie quotidienne ; classe de sciences physique, ; classe de philosophie ;...
savoirs produits par les institutions précédentes	savoirs mathématiques « savants » : théories mathématiques et logiques mathématiques	savoirs mathématiques enseignés	savoirs non mathématiques et connaissances sociales ; logiques « naturelles » ; logiques non mathématiques
exemples de critères de vérité d'une proposition	conformité à la théorie mathématique, non contradiction avec la logique associée	conformité aux méthodes de validation autorisées (perceptives, instrumentées, déductives,...), conformité à l'avis d'une autorité (professeur ou manuel scolaire)	adéquation avec la réalité, adéquation entre les faits et les théories ; succès dans l'action ; convergence des croyances
arguments pour valider	arguments de nécessité	arguments de nécessité ou arguments de plausibilité	
exemples d'éléments des technologies justifiant les raisonnements de validation	définitions, axiomes, théorèmes, règles de logique	définitions, théorèmes et règles d'inférences des mathématiques enseignées, règles des contrats d'enseignement	actions, expériences, définitions, propriétés, principes, lois, règles d'inférences et règles de contrats de la vie sociale
théories organisant des savoirs, des technologies et des règles d'inférence	théories mathématiques et logiques, souvent formalisées et globales, construites de manière systématique	théories peu formalisées, souvent locales (souvent construites autour d'un objet de savoir)	« théories » de la vie sociale ou de la vie quotidienne : en général très peu formalisées, souvent implicites

Si on fait l'hypothèse que la validation peut être un objet de savoir d'institutions mathématiques et d'institutions non mathématiques, alors on peut se poser la question suivante concernant l'enseignement de la validation en classe de mathématiques.

Considérons une proposition à valider. Pour la valider dans une institution non mathématique on procèdera par argumentations ou preuves d'une institution non mathématique. Pour la valider dans une institution mathématique on procèdera par démonstrations. Pour la valider dans une institution d'enseignement des mathématiques, transpose-t-on d'une part les précédentes argumentations ou preuves de l'institution non mathématique, et d'autre part les précédentes démonstrations de l'institution mathématique ?

Les validations utilisées dans cette institution d'enseignement sont-elles le résultat d'une double transposition d'une validation mathématique et d'une validation non mathématique ?

A ce point du questionnement il faut bien distinguer deux problématiques différentes.

La première problématique concerne toute validation réalisée dans une institution d'enseignement des mathématiques. Dans cette validation on recourt à deux types d'arguments :

- des arguments issus du savoir mathématique, par exemple reposant sur des théorèmes ou des définitions mathématiques,
- des arguments issus de savoirs non mathématiques relatifs à différentes institutions (la vie quotidienne, les institutions d'enseignement des sciences physiques, du français,...).

Chacun de ces types d'arguments peut subir une transformation (une transposition) pour s'adapter à l'enseignement des mathématiques, comme par exemple :

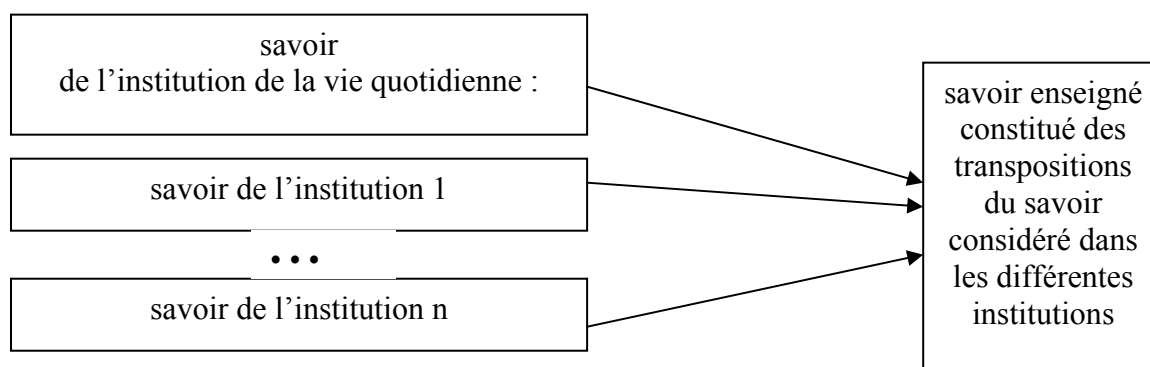
- Un argument de preuve (nécessité) dans la vie quotidienne peut devenir un argument d'argumentation (plausibilité) dans l'enseignement des mathématiques (c'est le cas de notre exemple d'argument visuel précédent relatif à la somme des angles d'un triangle : la vérification visuelle serait une preuve assurée dans la vie quotidienne alors qu'elle est un argument de plausibilité en classe de mathématiques).
- Un argument empirique des sciences expérimentales peut être complété par un argument d'autorité dans l'enseignement des mathématiques. C'est la cas de notre exemple précédent d'argument inductif et d'autorité relatif à la formule de la circonférence du cercle : l'induction à partir de la vérification sur quelques cas qui devrait donner lieu à une conclusion seulement plausible en mathématique est complété par un argument d'autorité qui assure la conclusion.
- Dans une suite d'arguments mathématiques on peut substituer à certains arguments des arguments pragmatiques (recours à l'action) ou visuels lors de la présentation dans

l'enseignement des mathématiques (c'est le cas de notre exemple d'arguments pragmatiques basés sur les propriétés des élastiques étirés en substitution d'arguments mathématiques basés sur l'inégalité triangulaire).

Ces transformations des arguments issus d'institutions autres que celles de l'enseignement des mathématiques pour les apprêter à l'institution d'enseignement des mathématiques seront caractéristiques du phénomène de transposition didactique. Nous parlerons de double transposition dans le sens où deux types d'arguments seront transposés : des arguments mathématiques et des arguments non mathématiques.

On pourrait essayer d'étendre ce concept en transposition multiple concernant la transposition de savoirs multiples pour l'enseignement d'un savoir précis (ici le savoir mathématique à enseigner)

Transposition multiple



Ce phénomène de transposition multiple ne doit pas être confondu avec une autre problématique qui concerne ce que Chevallard [2001 a, 2001 b] appelle les mathématiques mixtes et les mathématiques codisciplinaires. Une distinction est à faire entre d'une part la cohabitation de savoirs différents issus d'institutions différentes dans un même sujet d'étude (ce qui rappelle parfois certaines situations interdisciplinaires), et d'autre part pour un même savoir (dans notre exemple la validation) la possibilité de le considérer du point de vue de deux institutions différentes dans lesquelles il peut être étudié (ce qui rappelle parfois certaines situations transdisciplinaires).

Nous parlerons de double transposition uniquement dans ce dernier cas si le même savoir du point de vue de deux institutions est transformé pour être enseigné dans une institution d'enseignement des mathématiques.

Illustrons par un exemple la première problématique où il n'y a pas de double transposition. Dans le sujet d'étude de la proportionnalité à l'école primaire française, on peut avoir à exécuter une tâche (par exemple calculer le prix de 5 bouteilles connaissant le prix de trois bouteilles) qui nécessite à la fois des connaissances sociales (savoir que le prix total des bouteilles est en général proportionnel au nombre de bouteilles) et des savoirs mathématiques⁶⁵ (pour résoudre un problème de quatrième proportionnelle dans le cas présent). Ici on a cohabitation de deux savoirs issus d'institutions différentes pour réaliser une tâche mathématique. On remarquera que dans les tâches de résolution de problème d'une institution non mathématique impliquant une modélisation mathématique, il est très courant d'utiliser conjointement des savoirs de cette institution et des savoirs mathématiques. Dans ce cas là, à l'instar de Chevallard, nous ne parlerons pas de double transposition mais plutôt de savoirs mixtes ou codisciplinaires.

1.2.2 Analyse des validations

Chevallard [1999] propose une analyse des pratiques sociales, avec comme cas particulier l'activité mathématique, au travers de quatre notions primitives : tâche, technique, technologie et théorie. Nous allons essayer d'adapter cette analyse à notre étude sur la validation.

1.2.2.1 Genre de tâches : valider

Tâche et genre de tâches :

« Toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches relativement bien circonscrites qui se découpent dans le flux de la pratique. Le problème de la délimitation des tâches dans une pratique institutionnelle reste ouvert » [Bosch Chevallard 1999, p.5].

Dans la première partie nous avons analysé une validation comme étant une séquence d'arguments qui permet, partant des données D, de valider la vérité d'une conclusion C. Une telle validation correspond à une réalisation de la tâche « valider la vérité de C sachant D ». Des tâches de cette forme correspondent au genre de tâches « valider » ou aux tâches de validation.

Plus précisément nous allons étudier les tâches de la forme suivante pour laquelle nous allons préciser ci-après les termes.

⁶⁵ On notera que nous avons préféré le terme « connaissance sociale » au terme « savoir social » car la connaissance de la proportionnalité du prix total n'est pas explicitement « organisée ».

Tâche : « valider la vérité d'une proposition mathématique donnée, dans une institution I, dans des conditions institutionnelles données »

Exemples :

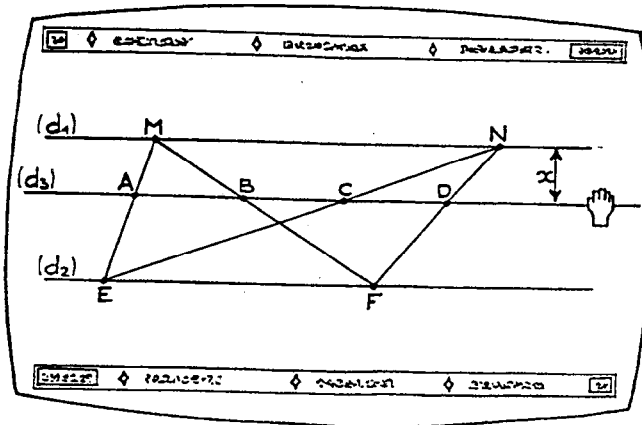
Tâche 1 : Démontrer le théorème de Pythagore en classe de quatrième française dans un manuel de classe donné.

Tâche 2 : Démontrer que l'équation $\frac{2x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ a une solution unique dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 3]$ en classe de première S française⁶⁶.

Tâche 3 : Dans le cadre de la compétition⁶⁷ « mathématiques sans frontières » entre classes de secondes (que nous décrirons plus loin) effectuer la démonstration demandée dans l'énoncé suivant.

Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3) , mais il s'agit de valeurs approchées.

Démontrer que $AB=CD$ quelle que soit la position de (d_3) .



Précisons les termes définissant une tâche.

Dans une institution I

Tout d'abord nous nous limiterons essentiellement soit à des institutions mathématiques, soit à des institutions didactiques dans lesquelles se situe un enseignement des mathématiques.

⁶⁶ énoncé suggéré par le manuel d'analyse de première S, collection Fractales, 1995, p.163.

⁶⁷ Nous décrirons précisément cette compétition ultérieurement.

Nous évoquerons des institutions non liées à l'enseignement des mathématiques uniquement pour éclairer par contrastes celles liées à l'enseignement des mathématiques.

Par exemple l'institution I pourra désigner le système d'enseignement français, ou le système d'enseignement du Bade-Wurtemberg. A un niveau inférieur, I peut désigner le type d'établissements (collège ou lycée, Realschule, Hauptschule, Gymnasium), puis à un niveau encore inférieur une classe... On retrouve ainsi une hiérarchisation en différents niveaux sur un « axe généralité-spécificité », comme proposé par [Chevallard 1999, p. 246].

Dans des conditions institutionnelles données

Nous compléterons la terminologie de Chevallard en définissant le terme « **condition institutionnelle** » qui désignera une ou des circonstances auxquelles sont soumises des personnes ou des choses d'une institution, circonstances liées à l'institution..

Par exemple on parlera de conditions institutionnelles de réalisation d'une tâche.

Dans une classe de seconde française donnée, on évoquera la résolution d'un exercice donné par les élèves en aide individualisée. Le dispositif institutionnel d'aide individualisée, introduit dans le cadre de la réforme des lycées de 2000 [Ministère 1999] constitue des conditions institutionnelles auxquelles est soumise cette classe de seconde.. Dans une classe de quatrième (institution), on étudiera la démonstration du théorème de Pythagore (tâche) dans la manuel de classe «Transmath » édition 1998. Ce manuel, correspondant à la classe de quatrième et s'inspirant des programmes officiels (même s'il n'est pas obligé de les respecter) constitue des conditions institutionnelles de cette classe de quatrième.

La notion de « conditions institutionnelles » permet de limiter les circonstances des études envisagées, compte tenu du fait que la notion d'institution n'est pas définie très clairement (« une institution peut être à peu près n'importe quoi » [loc. cit.]. Par exemple il aurait peut-être été mal perçu de définir un manuel de classe comme une institution ; par contre nous pourrions le définir comme une condition institutionnelle.

Dans la tâche 1, le manuel de classe donné de la classe de quatrième française constitue une condition institutionnelle.

Dans la tâche 2, une séance de classe de première S constitue une autre condition institutionnelle.

Dans la tâche 3, le cadre de la compétition inter classes « mathématiques sans frontières » constitue une condition institutionnelle.

⁶⁸ Nous avons évité les termes milieu et situation qui sont déjà utilisés dans le jargon didactique.

Une *proposition mathématique* est un énoncé susceptible d'être vrai ou faux dans le cadre de la logique mathématique classique⁶⁹ relative au savoir savant mathématique (dans le cadre des institutions mathématiques savantes). Très souvent dans notre étude, une proposition mathématique sera énoncée sous la forme classique : partant des données D, on a la conclusion C. La tâche correspondante sera très souvent énoncée sous la forme : sachant D, démontrer que C est vrai.

Valider la vérité d'une proposition *dans une institution I*, c'est appliquer des raisonnements de validation reconnus dans l'institution I. On a donc deux conceptions de la vérité. La conception mathématique de la vérité qui intervient dans les concepts mathématiques évoqués par la proposition mathématique donnée qui est à valider : cette conception de la vérité est celle des institutions mathématiques. Mais dans la validation, c'est une autre conception de la vérité qui est considérée : celle de l'institution I dans laquelle la proposition est validée.

On voit poindre ici plusieurs difficultés.

En effet il y a des propositions qui ont sens dans l'institution savante et qui peuvent n'avoir aucun sens dans l'institution didactique. Par exemple, la vérité du théorème suivant⁷⁰ « E est une extension finie galoisienne d'un corps K si, et seulement si, E est le corps de décomposition d'un polynôme séparable sur K » n'est pas accessible dans l'enseignement obligatoire.

Au sein d'institutions didactiques, dans un exemple précédent⁷¹ mettant en oeuvre découpage et collage à l'école primaire pour valider une propriété d'aire constante, la procédure de validation sera rejetée en classe de lycée. Cependant dans les deux institutions, le résultat sera vrai.

On peut également appliquer un argument inductif, accepté comme argument de validation dans une institution, conduisant à des résultats faux dans l'institution savante. On peut vérifier que les cinq premiers nombres de Fermat⁷² sont premiers et induire qu'ils sont tous premiers dans un groupe d'élèves : dans ce groupe, ce résultat sera vrai aussi longtemps qu'il n'aura pas été réfuté, par exemple par la production du contre-exemple du sixième nombre de Fermat.

⁶⁹ Un exposé succinct de cette logique est disponible dans [Reinhardt, Soeder 1997, p.15-21]

⁷⁰ Voir [Reinhardt, Soeder 1997, p.107]

⁷¹ Exemple 3 du paragraphe §1.1.3

⁷² $F_n = 2^{2^n} + 1$ est le nombre de Fermat de rang n+1 où n entier.

On voit bien que la relation entre la vérité d'une proposition dans une institution et la vérité de la même proposition dans une autre institution est délicate et que la transposition de la validation d'une institution dans une autre peut rencontrer un obstacle lié à la différence de conception de la vérité entre les deux institutions.

Observons que le mot « valider » désigne le « travail » à effectuer ou à produire, alors que le mot « validation » peut désigner, suivant le contexte du discours, le processus qui valide ou encore le résultat de ce processus.

Type de tâches

Chevallard s'intéresse en fait à la notion de type de tâches : deux tâches relèvent du même type si on peut (mais pas obligatoirement) les réaliser de la même manière (nous dirons plus loin avec la même technique). Par exemple si on considère la tâche : « résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $3x^2 - 2x - 1 = 0$ » et la tâche « résoudre dans l'ensemble des réels de l'équation l'équation $5x^2 - 2x + 1 = 0$ », ces deux tâches peuvent relever du même type de tâches « résoudre dans l'ensemble des réels une équation du second degré » qui peuvent être par exemple réaliser utilisant la technique du discriminant. On peut bien entendu résoudre la première équation par la technique du discriminant ou par la technique de factorisation.

Par contre démontrer le théorème de Pythagore ou démontrer la formule de l'aire d'un disque, bien que relevant du même genre de tâches « démontrer », ne relèvent pas du même type de tâches. Chacune de ces deux démonstrations est singulière par rapport à l'autre : elles ne relèvent pas du même type de tâches parce qu'elles se réalisent de manières très différentes comme nous l'observerons dans une analyse ultérieure. De plus, en général⁷³, on démontre dans un cours le théorème de Pythagore ou la formule de l'aire du disque une seule fois : il n'y a donc a priori pas répétition de ce type de tâches. Par contre on peut résoudre des équations du second degré à différents moments.

Chevallard a bien entendu repéré cette difficulté. « Tout pourtant n'est pas tâche : il existe en toute institution de l'activité non analysée en types de tâches, et dont la mention au moyen de verbes d'action d'acception très large (par exemple « calculer », « démontrer », etc.) laisse le contenu mal défini - on parle alors de genre de tâches » [Bosch Chevallard 1999, p.6]. Chevallard [1999, p.230] remarque que « dans un univers de tâches routinières surgissent à tout instant, ici et là, des tâches problématiques, qu'on ne sait pas – pas encore – accomplir ». Dans nos exemples précédents, la tâche « démontrer le théorème de Pythagore en classe de quatrième » est une tâche problématique alors que le type de tâches

⁷³ Nous verrons que notre propos est à nuancer

« résoudre une équation du second degré en terminale scientifique » est routinier. Nous allons nous distinguer de l'approche en terme de types de tâches puisque l'objet de notre étude est la démonstration, et plus généralement la validation qui est un genre de tâches. On voit donc qu'il va falloir adapter les outils proposés par Chevallard pour nous permettre d'analyser le genre de tâches « valider » dans des institutions très différentes, à des niveaux institutionnels très différents et concernant des domaines différents, ou encore pour pouvoir analyser des tâches qui ne sont pas « pensées » dans l'institution comme type de tâches, notamment lorsque ce sont des tâches problématiques. Cette variété des institutions et des domaines pourrait être accentuée par le fait que notre recherche s'inscrit dans un cadre comparatif franco-allemand. Evoquons cette incidence éventuelle.

Recherche comparative

Citons quelques exemples de travaux comparatifs récents qui se limitent à des institutions bien circonscrites ou à un secteur ou un thème bien délimités.

Par exemple Celi [2002] étudie le domaine de la géométrie dans les institutions d'enseignement des mathématiques en Italie et en France pour les élèves de onze à seize ans.

Knipping [2003a] effectue une analyse comparative d'unités d'enseignement consacrées au théorème de Pythagore dans des classes de quatrième française et des classes de niveau 8/9 allemandes. Le Thi [1997] analyse l'enseignement du vecteur en classe de dixième au Vietnam et en classe de seconde en France, Le Van [2001] s'intéresse à l'enseignement des fonctions et des équations au lycée en France et au Vietnam, et Doan [2001] compare l'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane, en France et au Vietnam.

Notre propos est justement d'étudier le rapport à l'objet « validation » en tenant compte des différences institutionnelles d'un pays à l'autre, ce qui peut entraîner des différences de durée de vie de cet objet dans chaque institution.

Par exemple la formule de la circonférence du cercle se rencontre en première année (classe de sixième) de l'enseignement secondaire en France alors qu'elle se rencontre seulement en sixième année de l'enseignement secondaire (Klasse 10) en Bade-Wurtemberg.

En ne se limitant pas à un domaine circonscrit ou à un niveau institutionnel précis, il sera intéressant d'étudier les différences ou les permanences de rapport à l'objet « validation » suivant les domaines mathématiques ou suivant les classes considérées.

Nous venons de voir la difficulté a priori d'étudier des tâches qui ne relèvent pas du même type. Indiquons précisément comment nous abordons la notion de technique dans ce contexte.

1.2.2.2 Techniques de validation : manières de réaliser une validation

Pour une tâche d'un certain type, une *technique* est « une manière d'accomplir, de réaliser les tâches » de ce type [Chevallard, 1999, p.225].

Nous avons vu précédemment que réaliser ou accomplir une tâche de la forme « sachant D, valider la vérité de C » constitue une validation, qui s'analyse en une séquence d'arguments. Donc réaliser une tâche du genre « valider », c'est-à-dire réaliser une validation de cette tâche, consiste à produire une séquence d'arguments.

On peut considérer une tâche élémentaire réalisée par la production d'un seul argument, c'est-à-dire par la mise en oeuvre d'une seule règle de validation appliquée aux données de l'argument.

Une technique n'est pas une règle ou un ensemble de règles de validation mais leur mise en oeuvre : c'est-à-dire qu'il a dans la technique la dimension pratique, savoir-faire, application qui permet la réalisation de la tâche.

Deux arguments utilisent la même technique s'ils ont la même règle de validation.

Pour une validation on considère l'ensemble des règles de validation mises en oeuvre dans la séquence des arguments qui constituent la validation. Deux validations utilisent la même technique si elles ont même ensemble de règles de validation.

Une technique est constituée par la mise en oeuvre d'un règle de validation (ou d'un ensemble de règles de validation) pour réaliser une tâche.

Deux tâches de validation sont du même type si pour chaque tâche il existe une validation réalisant la tâche et utilisant la même technique que qu'une validation réalisant l'autre tâche.

On voit donc que la différence entre deux validations utilisant la même technique peut être constituée par des variations de données (ce qui signifie que ces variations ne doivent pas affecter l'application de la règle de validation, ce qui est par exemple le cas des valeurs des coefficients d'une équation du second degré qui n'affectent pas l'application des règles du discriminant), des variations dans l'ordre d'application de ces règles de validation (ce qui signifie que le changement d'ordre ne doit pas perturber la réalisation de la tâche ; ce qui n'est pas toujours le cas).

On comprend alors que la tâche « démontrer le théorème de Pythagore » en classe de quatrième a de très fortes chances d'être réalisée par la mise en oeuvre d'une technique spécifique, qui n'apparaîtra plus dans le déroulement de l'année de quatrième. Par contre, certains « ingrédients »⁷⁴ de la technique pourront réapparaître dans la réalisation d'autres tâches.

Notre difficulté est que notre objet d'étude, la validation, est un genre de tâches. Si on étudie des tâches de validations relevant de types très différents, on risque d'observer des techniques différentes. On peut cependant essayer de déterminer s'il y a des « ingrédients » ou des éléments communs ou différenciateurs entre ces différentes techniques qui permettent de les regrouper en différents types de techniques.

On peut essayer d'analyser les techniques suivant plusieurs approches.

La nature ostensive des techniques

La première approche s'intéresse à la forme de présentation de la technique.

On peut alors étudier la nature ostensive⁷⁵ des éléments qui constituent la technique. « Nous parlerons d'objet ostensif – du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance »- pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible » [Bosch Chevallard 1999, p.10]. « Nous caractériserons les différents objets ostensifs par le registre (oral, écrit, graphique, gestuel, matériel) auquel ils appartiennent » [ibid. p.14]. Parmi les registres évoqués par Bosch et Chevallard [Ibid. p.14 -17] , les registres qui interviendront dans notre recherche seront les suivants.

Le registre matériel concerne les techniques qui recourent par exemple à des instruments de mesure ou de dessin, des éléments matériels représentant une surface, des élastiques comme dans notre exemple d'argument pragmatique de la première partie, des calculatrices ou des logiciels de géométrie dynamique...

Le registre graphique concerne les éléments qui recourent par exemple à des dessins en géométrie, des représentations de courbes de fonctions, des représentations en graphes ou en tableaux,...

Les registres langagiers, écrit ou oral, concernent les techniques qui recourent par exemple à une langue naturelle, une langue spécialisée ou encore un langage algébrique, à l'écrit ou à l'oral.

⁷⁴ En empruntant ce terme à [Bosch Chevallard 1999 p.9].

⁷⁵ Ostensif : Log. Se dit d'une procédure de définition ou de vérification qui consiste à expliquer le sens d'un mot ou à justifier une assertion sans utiliser d'autres mots ou assertions, mais par une indication extralinguistique (par ex. montrer l'objet auquel le mot se rapporte) [Larousse 1996]

Bien entendu, on peut imaginer des techniques qui relèvent de plusieurs registres. On pourra alors se demander si un registre est dominant ou déterminant par rapport aux autres.

Bosch et Chevallard évoquent d'autres registres, comme ceux de l'oralité ou de la gestualité, que nous ne prendrons pas en compte du fait que nous n'avons observé que des documents écrits (au sens large : graphismes et écritures). Par contre les recherches de [Knipping 2003], qui a effectué des enregistrements vidéos de séquences de classes, permettraient d'observer dans le registre de l'oralité et de la gestualité.

On rapprochera enfin cette étude des registres de Bosch et Chevallard, des travaux de [Duval 1995] sur les registres sémiotiques.

La nature théorique des techniques.

Une autre manière d'analyser une de validation est d'étudier ce qui justifie ou explique la technique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.2.2.3 Technologies de validation et théories : justifications et explications des techniques

Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, une technique est justifiée ou expliquée par une *technologie*. «On entend par technologie [...] un discours rationnel [...] ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu [...] une deuxième fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique [...] une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la fonction de production de techniques ». [Chevallard 1999, p.226].

Pour une tâche de validation, une technique est justifiée d'abord par les différentes règles de validation mises en oeuvre dans l'exposé des arguments de la validation. Il y a aussi la définition des objets mentionnés dans les règles de validation. On peut aussi expliquer la technique en rendant intelligible le lien entre les données et les conclusions de chaque argument, et entre les données initiales et la conclusion finale. Par exemple pour résoudre une équation du second degré on peut appliquer le théorème d'existence des solutions d'une équation du second degré en fonction du signe du discriminant. Ici le lien entre l'équation donnée et les solutions déterminées dans la conclusion ne sera pas éclairé. Par contre, si on utilise la technique de décomposition sous forme canonique pour éventuellement factoriser, le lien sera éclairé. Une technologie peut produire des techniques. Par exemple, le théorème de caractérisation analytique de la colinéarité de deux vecteurs du plan peut donner lieu à une

technique pour démontrer l'alignement de trois points et une autre technique pour démontrer le parallélisme de deux droites.

Nous distinguerons essentiellement les technologies suivant la théorie auxquelles elles se réfèrent, d'abord les technologies mathématiques et les technologies non mathématiques. A l'intérieur d'une théorie on pourra préciser le domaine, le secteur ou le thème relatif à cette technologie. On pourra éventuellement analyser la nature ostensive de cette technologie.

Revenons à un exemple précédent de tâche évoqué dans la première partie :

Tâche : « montrer que le périmètre d'un quadrilatère convexe est plus grand que la somme des longueurs de ses diagonales ».

Technique :

Une technique est la suivante.

On enroule un élastique tendu entre D et B et un autre élastique tendu entre A et C.

Puis on étire le premier élastique de manière à ce qu'il entoure également A et C comme suggéré par le second dessin. De manière analogue on étire le second élastique de manière à ce qu'il entoure D et B comme suggéré par le second dessin.

En conséquence la somme des longueurs des élastiques avant étirement est plus courte qu'après étirement, soit en passant à la moitié de ces longueurs, la somme des longueurs des diagonales est inférieure à celle du périmètre.

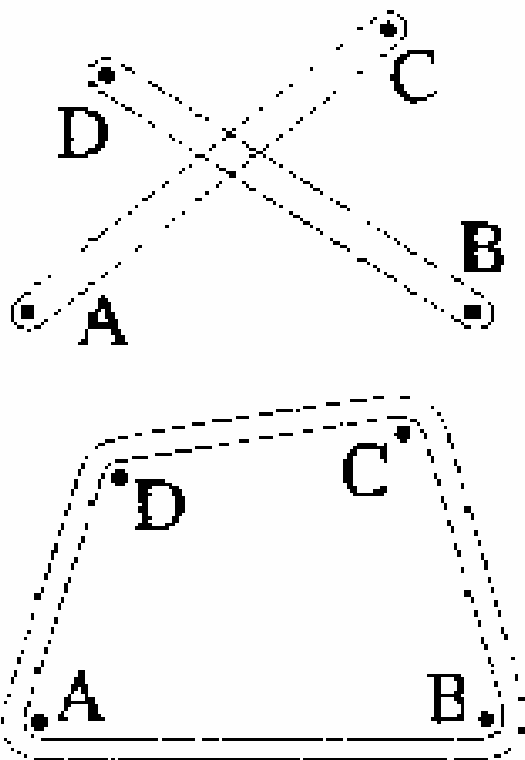


Illustration de [Tietze et al, 2000, p.97]

Technologies :

On peut justifier cette technique par deux technologies relevant de deux théories différentes.

Une première justification repose sur la technologie des élastiques: un élastique tendu entourant extérieurement un objet plan a pour longueur le périmètre de l'enveloppe convexe de l'objet ; un élastique est plus long après étirement qu'avant étirement. Cette théorie des élastiques est essentiellement développée dans la vie quotidienne par la fréquentation des élastiques et les propriétés des élastiques sont une connaissance sociale. On peut cependant théoriser sur les élastiques (en sciences des matériaux ou autres).

Une seconde justification repose sur une technologie mathématique basée sur l'inégalité triangulaire et sur les calculs sur les inégalités.

Pour le premier élastique : $AD+DC \geq AC$ et $AB+BC \geq AC$ donc $AD+DC+AB+BC \geq 2AC$;

Pour le second élastique: $DA+AB \geq DB$ et $DC+CB \geq DB$ donc $DA+AB+DC+CB \geq 2DB$.

Par addition sur les inégalités puis passage à la moitié on obtient la conclusion.

Le recours aux élastiques est le recours à un registre ostensif matériel et visuel pour exprimer de manière brève et « éclairante » ce qu'un discours formel aurait pu exprimer.

Nous parlerons dans ce cas d'une « lecture raisonnée de l'action » pour signifier que le recours à l'action et à un registre matériel n'est qu'une manière de raisonner, en exprimant ce raisonnement dans un registre de représentation matérielle autre que le registre du langage.

Nous empruntons ce qualificatif «lecture raisonnée » à Bkouche [2000, p.620] qui précise à propos du recours au dessin dans la démonstration du premier cas d'égalité du triangle chez Euclide : « la démonstration du premier cas d'égalité des triangles peut être définie comme décrivant une suite d'opérations sur les deux triangles en question. Le discours démonstratif s'appuie explicitement sur les objets (les triangles) représentés par une figure, elle-même matériellement représentée par un dessin⁷⁶; c'est en ce sens que l'on peut parler d'une lecture raisonnée du dessin. C'est alors l'activité de raisonnement qui permet de dépasser le dessin pour en faire d'abord la figure, c'est-à-dire le dessin questionné, ensuite l'objet idéal (l'idéalité mathématique) ».

Nous venons d'illustrer qu'une technique de validation peut être justifiée par deux technologies relevant de théories différentes. Dans la pratique, beaucoup de techniques sont très algorithmiques et ne sont qu'une application directe d'un théorème.

De plus on aurait pu réaliser la tâche précédente en exposant un discours plus précis, dans lequel serait déjà évoquée la justification retenue (soit la technologie des élastiques, soit celle de l'inégalité triangulaire). Dans ce cas le lien avec la technologie est clair et ne souffre pas de l'ambiguïté précédente.

Théories :

« A son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie* ». [Chevallard 1999, p.227]

Nous avons déjà rencontré plusieurs théories justifiant des validations : théories de la vie quotidienne, théorie mathématique, théorie de la logique mathématique. Dans la théorie de la vie quotidienne, dans son modèle d'argument, Toulmin distingue la garantie, qui serait plutôt de l'ordre de la technologie, et le fondement, qui serait plutôt de l'ordre de la théorie. Dans la théorie mathématique, une technique constituée par l'application d'un théorème est justifiée par la technologie constituée du théorème et des définitions et des propriétés des objets mentionnés dans l'énoncé du théorème. Une justification du théorème, c'est-à-dire une de ses

⁷⁶Sur la définition de la figure et sa relation au dessin, nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996 [cette note de bas de page est celle du texte de Bkouche qui est donc l'auteur de l'article mentionné]

démonstrations et une construction axiomatique qui permet cette démonstration constitue une théorie relative à ce théorème.

Enfin dans les institutions didactiques d'enseignement des mathématiques, les théories peuvent utiliser des justifications relatives à l'institution mathématique ou bien des justifications empruntées au contrat, implicite ou explicite, qui règle l'institution didactique, notamment en tant qu'institution sociale, lieu d'interactions sociales. L'objet du paragraphe suivant est l'étude de ce contrat.

1.2.2.4 Contrat⁷⁷

« Un type donné d'interaction sociale est régi par un contrat d'une espèce déterminée. Le contrat règle les échanges entre partenaires qu'il rassemble, en délimitant d'abord la matière et les enjeux « légaux » de l'échange, dont il définit le régime. Il assigne aux différents partenaires leurs droits et leurs devoirs, dans le cadre d'une référence partagée qui, si étroite soit-elle, soutient le « pacte social » auquel le contrat donne son contenu » [Chevallard 1988, p.8]. Bien entendu ce contrat n'est pas toujours explicite. « Nous raisonnons toujours sous contrat, que nous soyons élève ou savant, ou simple citoyen. Mais nous raisonnons différemment selon les différents contrats » [ibid. p.24]. Dans l'institution mathématique il existe un contrat qui règle l'échange scientifique « Le contrat veut ici que « démonstration » égale « démonstration valide ». Proposer dans l'échange scientifique, sous le nom de démonstration, une démonstration fautive, constitue une faute d'une extraordinaire gravité, qui peut perdre une réputation » [ibid. p.24]. Ceci ne signifie pas qu'on ne puisse pas produire des démonstrations incorrectes, comme la preuve de la rationalité de Pi par Nicolas de Cues [Delahaye 1997, p.61] ou plus récemment la démonstration du théorème de Fermat par Wiles, avec son épisode de réfutations et de rectifications⁷⁸. Cependant la règle de contrat veut que le mathématicien, quand il propose sa démonstration, la considère comme valide. Par contre, dans l'institution de la Justice, un avocat peut plaider l'innocence de son client tout en sachant qu'il est coupable : son argumentation repose sur les règles de la rhétorique dont la fonction est de persuader un auditoire et non d'établir la vérité. Dans l'institution didactique les règles sont encore différentes. « Dans l'interaction didactique, contrairement à ce qui prévaut dans l'institution savante, la démonstration proposée par l'élève n'est pas ipso facto réputée juste, et le problème de sa validité est l'enjeu essentiel de l'interaction [...] Il revient alors à l'enseignant, d'un même mouvement, de contrôler, de valider, de sanctionner » [Chevallard 1988, p.26-27]

⁷⁷ Brousseau a longuement développé la notion de contrat et nous renvoyons à deux textes fondamentaux [Brousseau 1986, pp.51-56] et [Brousseau 1988, pp ; 308-336]

⁷⁸ La première version proposée par Wiles en 1993 a du être complétée pour qu'une version finale soit acceptée en 1994 et publiée en mai 1995 dans les « Annals of Mathematics ».

A ce point de notre réflexion nous formulons une hypothèse sur le contrat didactique implicite existant dans une institution didactique.

Hypothèse de travail : règle de non contradiction des vérités⁷⁹

Dans une institution didactique I_D transpositive du savoir mathématique de l'institution I_S , nous supposons qu'on essaie de respecter la **règle de non contradiction⁸⁰ des vérités** suivante :

Soit une proposition P ayant une signification dans I_S et dans I_D . P est vraie dans I_S si, et seulement si, P est vraie dans I_D .

Ce principe signifie qu'on veut éviter les deux écueils suivants :

- avoir une proposition P vraie dans I_D et fausse dans I_S ;
- avoir une proposition P vraie dans I_S et fausse dans I_D .

Nous n'avons pas trouvé d'exemple d'écueil du type précédent, et nous pensons que l'institution didactique souhaite préserver la cohérence entre les deux institutions sur la valeur de vérité des propositions. C'est pourquoi nous faisons cette hypothèse de travail.

Nous renvoyons au paragraphe « Différentes conceptions de la vérité » pour des exemples d'institutions où une même proposition peut avoir des valeurs de vérité différentes.

L'hypothèse de ce principe didactique de non contradiction de la vérité **justifiera le recours à l'argument d'autorité** lorsque les autres arguments disponibles dans l'institution I_D ne permettent pas d'assurer la continuité de la vérité entre les deux institutions. L'argument d'autorité infère la vérité de prémisses à la conclusion par recours à une autorité (professeur, livre,...) reconnue dans l'institution.

⁷⁹ On utilise le pluriel car il y a a priori deux conceptions de la vérité : celle attachée à l'institution I_S et celle attachée à l'institution I_D .

⁸⁰ On peut considérer que dans le cas de transposition non didactique d'une institution I à une institution I' non didactique d'un certain savoir, le principe de non contradiction de la vérité n'existe pas. Prenons par exemple l'institution I formée par un individu, avec le savoir de cet individu (ses connaissances), les règles d'inférence de cet individu (qui seront souvent de nature très psychologique). Alors la valeur de vérité d'une proposition P dans cette institution I est épistémique au sens défini par [Duval 1995, p218-219] : « Dans l'instant même de son appréhension, le contenu d'une proposition apparaît évident, ou certain, ou seulement vraisemblable, ou plausible, ou simplement possible, ou impossible, ou encore absurde [...] Ainsi une proposition peut avoir des valeurs épistémiques différentes selon les interlocuteurs : « vraisemblable » pour l'un et absurde pour l'autre, « certaine » pour l'un et « impossible » pour l'autre ». Plongeons maintenant cet individu (ou ces individus) dans une institution I' (une classe par exemple, qui n'est pas une institution transpositive de I). Alors la proposition aura une valeur de vérité logique selon Duval au sens de la logique de la théorie rattachée à l'institution I' . Alors il est bien clair qu'on peut trouver I où ce qui est vrai dans I peut être faux dans I' : il n'y a pas de principe de non contradiction de la vérité entre I et I' . Par exemple la vérification que les cinq premiers nombres de Fermat sont premiers peut suffire à un élève pour généraliser la propriété - on est dans le cas de l'empirisme naïf de Balacheff - alors que la propriété générale est fautive. Dans cette institution là - l'élève ou le groupe d'élève- la contradiction est possible.

On notera également que des contradictions entre I_S et I_D peuvent n'être qu'apparentes, du fait du manque de précision. Par exemple la proposition « le carré d'un nombre ne peut pas être négatif » est vraie sans besoin de précision dans une classe de troisième ; il suffit de préciser que le nombre est réel pour qu'elle soit incontestable lors de l'étude des nombres complexes en classe de terminale scientifique. La précision est inutile en troisième car le contrat implicite est que tous les nombres considérés sont réels. Cette **régulation de la précision du discours** appartient également au contrat didactique, implicite ou explicite.

On voit donc que des règles de contrat peuvent apparaître comme des règles de justification de la technique, par exemple au niveau de la nature ostensive de la technique (recours à un langage écrit formel pour plus de rigueur ou recours à un dessin suffisamment éclairant), ou par exemple au niveau de la nature théorique de la technique (recours à un argument d'autorité pour justifier un élément de la technique). Une difficulté est que ces règles sont le plus souvent implicites et peuvent varier entre institutions. Balacheff a observé que « deux classes filmées, que nous désignerons par D et E, présentent la particularité d'un très fort contraste des pratiques [...] Ces différences tenaient pour l'essentiel à des règles de fonctionnement social, que nous évoquerons dans ce qui suit, concernant l'activité mathématique qui étaient explicitées dans la classe E et ne l'étaient pas dans la classe D » [Balacheff 1988b, p.21]. Balacheff note « cette différenciation du contrat, auquel nous voyons un caractère local, élément clé du processus de dévolution, et de la coutume, qui régule le fonctionnement social de la classe dans la durée » [ibid. p.21]

1.2.2.5 Analyse des validations

On analysera une validation dans une institution I au travers des quatre notions proposées par Chevallard : tâche, technique, technologie, théorie.

tâche	technique	technologie	théorie
valider une proposition mathématique dans une institution I dans des conditions institutionnelles données	manière d'utiliser des règles de validation pour valider la proposition précédente	règles de validation, définition des objets utilisés, règles de contrat, justification,	justification, explication, production de la technologie

		explication, production de la technique	
routinière, problématique	registres de la technique : matériel, graphique, langagier	mathématique, non mathématique	

On appellera validation mathématique une validation dont la technologie et la théorie sont produites dans une institution mathématique et, à ce titre, peuvent être qualifiées de mathématiques.

On appellera validation didactique (d'une proposition mathématique) une validation effectuée dans une institution didactique.

1.2.3 Fonctions de la validation

« D'une manière générale la problématique écologique – « Pourquoi ceci ? », « Pourquoi cela ? », etc.- conduit à questionner le réel observable pour se déprendre de l'évidence du fait établi, vécu comme naturel. [...] Le questionnement écologique permet de réinterroger l'ordre des choses existant » [Chevallard 1999, p.264]

Pour répondre à la question « pourquoi valider ? » nous nous appuyerons essentiellement sur des travaux qui ont étudié les fonctions de la démonstration : De Villiers [1990] dans l'institution mathématique et Hanna [1995, 2000] dans l'institution didactique.

1.2.3.1 Fonction de vérification

La première fonction de la validation est constitutive de sa définition : valider la nécessité ou la plausibilité de la vérité d'une proposition. C'est la fonction de vérification, terme que nous empruntons à de Villiers, « vérification qui s'intéresse à la vérité de la proposition »⁸¹ [De Villiers 1990, p.18 ; trad. R.C.]. En principe toute validation remplit cette fonction sinon c'est une validation incorrecte ou un autre type de raisonnement, par exemple une explication. C'est pourquoi on pourra distinguer deux sous-fonctions de la fonction de validation, une fonction de preuve, qui valide la nécessité de la vérité et une fonction de plausibilité, qui valide la

⁸¹ « verification (concerned with the truth of a statement) »

plausibilité de la vérité. On peut considérer qu'une démonstration remplit les deux fonctions en considérant qu'une démonstration établit une plausibilité certaine. Par contre une argumentation⁸² qui ne serait pas une preuve (c'est-à-dire n'établirait pas la nécessité de la vérité), ne remplirait que la fonction de plausibilité.

Une vérification est un contrôle de la vérité. Pourtant certains contrôles n'offrent pas une assurance totale mais simplement accroissent la plausibilité de la vérité (par exemple la vérification d'un prédicat pour quelques valeurs de la variable, ou encore la « preuve par 9 »). Notre choix des sous-fonctions de « preuve » et de « plausibilité » évite toute ambiguïté. Pour déterminer si une validation remplit une fonction de preuve ou une fonction de plausibilité il suffira de considérer la nature des arguments utilisés au regard de la théorie considérée. Si dans la structure de la validation constituée d'arguments de nécessité, il manque certains pas et, que l'on remplace ces arguments de nécessité manquant par des arguments de plausibilité, alors la fonction de preuve n'est pas remplie.

Pour Hanna considérant la preuve, « son principal rôle est celui de justification et de vérification »⁸³ [Hanna 1995, p.18, trad. R.C.]. On retrouve cette fonction de justification assignée à la technologie chez Chevallard : le discours technologique justifie la technique.

Chevallard assigne aussi à la technologie une fonction d'explication de la technique: elle doit rendre intelligible la technique. Or justement l'explication est une autre fonction qu'on peut assigner à la validation. [Barbin 1988, p.601] note qu' « au XVII^e siècle, la signification de la démonstration change : la démonstration n'est pas donnée pour convaincre, elle a pour but d'éclairer ». On voit donc là un passage de la fonction de vérification à la fonction d'explication.

1.2.3.2 Fonction d'explication

De Villiers considère « l'explication, qui fournit un aperçu de pourquoi c'est vrai »⁸⁴ [De Villiers 1986, p.18 ; trad. R.C.]. Steiner précise : « une preuve explicative fait référence à la propriété caractéristique d'une entité ou structure mentionnée dans le théorème, telle que de la preuve il est évident que le résultat dépend de la propriété »⁸⁵ [Steiner 1978, p. 135-151 ; trad. R.C.]. Balacheff [1987, p.148] distingue une explication qui est « un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une

⁸² Rappelons que dans notre première partie nous nous sommes restreints aux seuls raisonnements de validation et que les argumentations que nous considérons sont donc des argumentations de validation.

⁸³ « its main role is that of justification and verification »

⁸⁴ « explanation (providing insight into why it is true) »

⁸⁵ « an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such than from the proof it is evident that the result depends on the property

proposition ou d'un résultat » et une preuve qui est « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné ». Donc pour Balacheff toute preuve est une explication.

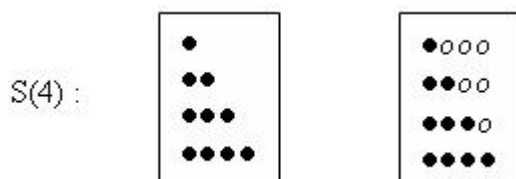
La difficulté est de définir le caractère explicatif, évident ou intelligible dans la validation. Dans certains cas il peut être clair qu'une validation est explicative ou non.

Par exemple pour démontrer que la somme $S(n)$ des n premiers entiers naturels vaut $n(n+1)/2$ on peut appliquer plusieurs techniques.

Une première consiste à vérifier sur certains cas. Cette technique de plausibilité n'explique pas le lien entre la somme et la formule.

Une autre technique peut consister à rédiger formellement une démonstration par récurrence qui remplira la fonction de preuve mais n'éclairera pas le lien. Cependant on peut déjà discuter si la propriété d'hérédité, qu'on peut mettre en évidence par analyse de la formule à l'ordre $n+1$ ($(n+1)(n+2)/2=(n+1)n/2+(n+1) \times 2/2=(n+1)n/2+(n+1)$) ne montre pas un lien « récurrent » entre les données et le résultat. En cela la propriété d'hérédité pourrait être considérée par certains comme une explication.

Une autre technique consiste à utiliser le registre ostensif des nombres triangulaires rectangles. On considère que $S(n)$ peut être représenté par un triangle rectangle de points, de côtés d'angles droits n points et $(n+1)$ points. Le nombre de points du triangles est moitié celui du rectangle de n points par $(n+1)$ points. Ici on peut estimer qu'il y a une explication. On pourrait d'ailleurs considérer qu'il s'agit de la réécriture dans le registre des nombres triangulaires rectangles de la démonstration par récurrence précédente. Il y a alors représentation visuelle de la formule (comme aire du triangle) et représentation visuelle de l'hérédité (qui consiste à border un triangle $S(n)$ par une rangée supplémentaire de $(n+1)$ points).



On peut enfin évoquer la technique de Gauss qui consiste à sommer $S(n)$ écrit comme somme dans l'ordre croissant des nombres puis dans l'ordre décroissant et à sommer terme à terme :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$+ n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

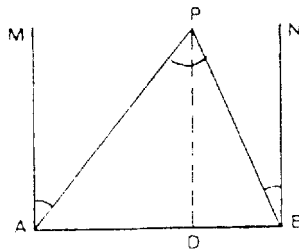
ce qui donne la formule cherchée.

En fait on peut se poser la question de l'idée de la formule. On considère alors qu'une méthode qui permet de trouver la formule « explique » par rapport à une méthode qui utilise la formule (comme la méthode par récurrence). Mais alors la question devient celle de l'idée des deux dernières techniques, et la question de l'explication devient une question d'heuristique.

Cependant on peut s'accorder sur le fait que les deux dernières techniques sont explicatives, dans le sens où elles montrent clairement le lien entre la somme et la formule.

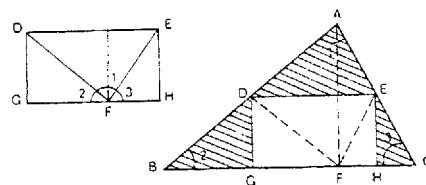
Pour terminer, rappelons un exemple proposé par Fischbein [1982, p.17-18] où il donne deux explications du théorème « la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat » pour lesquelles il y a désaccord sur leur caractère explicatif.

La première technique s'appuie sur la figure suivante.



Soit $[AB]$ et les perpendiculaires (MA) et (NB) au segment. « Les angles MAB et NAB sont droits. On peut « créer » un triangle APB en « inclinant » (MA) et (NB) qui se coupent en P . Ainsi on peut voir que l'angle APB « accumule » ce qui est « perdu » par les angles MAB et NBA quand on « incline » (MA) et (NB) » [Ibid. p.17, trad. R.C.]⁸⁶. Cette explication montre pourquoi la somme des angles reste constante même quand on fait varier P .

L'autre technique s'appuie sur la figure suivante.



On considère le triangle ABC . On considère les milieux D et E des côtés $[AB]$ et $[AC]$. On abaisse sur $[BC]$ les perpendiculaires issues de A , D et E en les points F , G , H . On effectue les pliages proposés par la figure et on voit que la somme vaut un angle plat.

⁸⁶ The angles MAB and NBA are right angles. We can “create” a triangle by “inclining” MA and NB . So, it can be seen that angles APB “accumulates” what is “lost” by angles MAB and NBA when “inclining” MA and NB .

Alors que Fischbein reproche à la seconde explication de ne pas mettre en évidence le phénomène de compensation révélé par la première explication, qui explique la conservation de l'angle plat et de ne montrer la constance de la somme des angles que sur un cas particulier. Les étudiants préfèrent la seconde explication qui montre que la somme vaut un angle plat : ils la trouvent d'une intuition plus saisissante et d'une compréhension plus facile. On voit donc que le caractère explicatif d'une validation a une dimension subjective.

Nous ne pourrions analyser le caractère explicatif d'une validation qu'au cas par cas, et nous voyons que à travers les exemples précédents cette analyse ne sera pas toujours aisée.

1.2.3.3 Fonction de systématisation

En mathématique, pour De Villiers la fonction de systématisation correspond à « l'organisation de résultats variés en un système déductifs d'axiomes, de concepts majeurs et de théorèmes »⁸⁷ [De Villiers 1990, p.18 ; trad. R.C.]. On peut rapprocher cette fonction de la fonction d'« incorporation d'un fait bien connu dans un cadre nouveau et par conséquent en le regardant d'une perspective nouvelle »⁸⁸ [Hanna 2000 ; p.8].

Dans l'enseignement on peut rencontrer cette fonction à deux niveaux.

Soit à un niveau global on essaie de présenter une construction méthodique dans un domaine des mathématiques. Ce fut le cas par exemple en France avec l'essai d'une présentation axiomatique de la géométrie dans l'enseignement, à l'époque des mathématiques modernes. Dans ce cas la fonction de systématisation privilégie l'organisation des connaissances plutôt que la fonction de preuve rigoureuse de ces connaissances. Par exemple « la fonction première de la preuve pour le théorème des valeurs intermédiaires est purement celle de systématisation, comme un simple dessin combiné à un argument informel est suffisant pour les besoins à la fois de la vérification et de l'éclairage »⁸⁹ [De Villiers 1990, p.21].

Soit à un niveau local, où on admet (par justification visuelle) un nombre limité de résultats et définitions à partir desquels on peut effectuer une organisation locale. Ce n'est pas sans rappeler le concept d'îlots déductifs présent dans les programmes français et sur lequel nous reviendrons. « Freudenthal [1973, p.142] parle d'ordre local : « On analyse les notions géométriques jusqu'à une limite véritablement arbitraire, on dira, jusqu'au point où on voit avec ses simples yeux ce que la notion signifie, et que les propositions sont vraies ». Souvent les notions ne seront pas définies explicitement, mais au

⁸⁷ « the organisation of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems »

⁸⁸ « incorporation of a well-known fact into a new framework and thus viewing it from a fresh perspective »

⁸⁹ « the primary function of a proof for the intermediate value theorem for continuous functions is purely that of systematization, as a simple picture combined with informal argument is sufficient for the purposes of both verification and illumination »

contraire on a besoin avec celles-ci d'une explication des notions, qui existe d'après de nombreux exemples relatifs à la notion concernée. Freudenthal voit l'ordre local comme le contraire de l'ordre global (ou également axiomatisation) qui se rapporte à des parties plus vastes des mathématiques. L'axiomatisation est également un processus. Freudenthal ne comprend pas ici comme axiomatisation, comme c'est l'habitude, la présentation d'une théorie mathématique axiomatisée, mais le processus de longue haleine, à la recherche de principes importants et de leur acceptation générale à l'intérieur d'un domaine mathématique, sur lequel la théorie, ou une partie, se laisse construire »⁹⁰ [Tietze 2000, p.157-158]

On pourrait considérer que dans l'enseignement cette fonction est culturelle : appréhender un mode d'organisation de la connaissance très spécifique des mathématiques.

Pour analyser cette fonction il faudra étudier la façon dont s'intègre la proposition validée dans l'organisation locale ou globale. L'étude de la structure en graphe d'une validation permettra d'étudier cette intégration à un niveau local. Pour l'approfondir il suffit d'étudier la validation des règles de validation utilisées dans l'arborescence.

1.2.3.4 Fonction de découverte ou d'invention

« Dans l'enseignement français des mathématiques, la conception traditionnelle [...] oublie que l'objet de la démonstration est aussi d'inventer et de produire des résultats » [Barbin 1997, p.350]. La fonction de découverte ou d'invention concerne aussi bien la découverte de la conclusion de la validation que la technique qui a conduit à cette conclusion. « Il y a de nombreux exemples dans l'histoire des mathématiques où les nouveaux résultats ont été découverts/inventés d'une manière purement déductive [...] (par exemple les géométries non euclidiennes) »⁹¹ [De Villiers 1990, p.21 ; trad. R.C.]. Dans l'enseignement, on peut imaginer cette démarche, où à l'occasion d'une démonstration on observe que la méthode utilisée permet de démontrer un résultat plus général. Il y a aussi, dans le cas de problèmes ouverts, la mise en oeuvre de démonstration permettant la découverte de la solution. Mais la découverte se situe souvent dans la nouvelle technique mise en oeuvre dans la démonstration. On rejoint ici la fonction de production de techniques assignée à la technologie par Chevallard. Cette fonction n'est pas seulement remplie à l'occasion d'activités de résolutions de problèmes où la recherche de techniques de résolution est

⁹⁰ Freudenthal (1973) spricht von lokalem Ordnen: „Man analysiert die geometrischen Begriffe bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem blossen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, dass sie wahr sind“. Begriffe werden dabei oft nicht explizit definiert, sondern man begnügt sich statt dessen mit einer Begriffsklärung, die aus vielen Beispielen zum intendierten Begriff besteht. Freudenthal sieht das lokale Ordnen als Gegensatz zum globalen Ordnen (oder auch Axiomatisieren), das sich auf grössere mathematische Teilgebiete bezieht. Auch das Axiomatisieren ist ein Prozess. Freudenthal versteht dabei unter Axiomatisieren nicht, wie sonst üblich, die Darstellung einer axiomatisierten mathematischen Theorie, sondern den langwierigen Prozess, nach wichtigen Grundsätzen und allgemeinen Annahmen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets zu suchen, auf sich die Theorie oder Teile davon aufbauen lassen.

⁹¹ « there are numerous examples in the history of mathematics where news results were discovered/invented in a purely deductive manner [...] (e.g. the non Euclidean geometries »

centrale, notamment lorsque les tâches sont problématiques et pas encore routinières. Mais nous pensons également aux démonstrations qui ont une fonction de découverte de nouveaux objets et de nouvelles techniques qui n'ont pas à être exigés des élèves ; dans ce cas nous parlerons de fonction propédeutique. Nous étudierons plus loin un exemple concernant l'enseignement des limites : des validations seront utilisées pour découvrir les techniques de passage à la limite.

1.2.3.5 Fonction de communication

En mathématiques la fonction de communication vise « la transmission des connaissances mathématiques [...] La preuve comme une forme d'interaction sociale implique aussi par conséquent la négociation subjective de non seulement la signification des concepts concernés, mais implicitement aussi des critères pour un argument acceptable. Tour à tour une telle filtration sociale de la preuve dans des situations de communications variées contribue à son perfectionnement et à l'identification des erreurs, aussi bien quelquefois à son rejet par découvertes d'un contre exemple »⁹² [ibid. p.22, trad. R.C.]. Cette fonction de communication est tout aussi importante dans l'enseignement où elle peut s'organiser en différents registres : le registre oral avec conduite d'un débat scientifique [Legrand 1988] autour d'une démonstration, le registre de la production d'écrits de démonstration et le registre de la lecture de textes de démonstrations, ces trois registres pouvant se mêler. Dans la production orale et écrite, les contextes d'évaluation et d'entraînement à l'évaluation peuvent occuper une place importante dans les activités de démonstration. Les contrats liés aux registres ou aux contextes d'expression jouent un rôle important dans les démonstrations en situation de communication. « Depuis quelques années, les recherches sur l'apprentissage ont fait apparaître l'importance, en mathématiques comme dans les autres disciplines, des problèmes liés à la lecture et à l'écriture. De ce fait, la question de l'enseignement de la démonstration est devenue peu à peu un objet explicite » [Houdebine 1998, p.5]

Mais qui dit communication, dit importance de l'auditoire auquel s'adresse la démonstration, ce que nous allons étudier dans le prochain paragraphe.

⁹² "Proof as a form of social interaction therefore also involves the subjective negotiation of not only the meanings of concept concerned, but implicitly also of the criteria for an acceptable argument. In turn such a social filtration of a proof in various communications contributes to its refinement and the identification of errors, as well as sometimes to its rejection by the discovery of a counter-example"

1.2.3.6 Persuasion ou conviction

Pour Perelman, « un auditoire sera qualifié d'*universel* parce qu'aucun homme, compétent et raisonnable, ne peut en être écarté sans justification[...]l'efficacité de l'argumentation étant fonction de son adaptation à l'auditoire, des techniques utilisées pour *persuader* un auditoire particulier ne pourront pas servir quand il s'agira de *convaincre* un auditoire universel; une argumentation rationnelle se caractérise par le fait que, visant un auditoire universel, elle parvient à emporter sa conviction » [Perelman 1999, p.1]. Il est clair que la force de plausibilité d'une argumentation est plus subjective (puisque nous n'avons pas rencontré de théorie élaborée de la mesure de la force de plausibilité) et en ce sens semble davantage relever de la particularité de l'auditoire. Par contre la nécessité de la vérité semble plus indépendante de l'auditoire et liée à la théorie et à la logique adoptées.

Comme nous nous inscrivons dans une analyse institutionnelle de la validation, toute validation vit dans une institution à laquelle est rattaché un auditoire, qui est rationnel au sein de l'institution que l'on considère. En conséquence nous ne ferons pas de distinction entre persuasion et conviction. Une des fonctions de la démonstration est de convaincre l'auditoire auquel elle s'adresse de la vérité (plausible ou nécessaire) de la proposition à valider.

On a associé pendant longtemps, démonstration formelle et démonstration convaincante, alors que la conviction peut être acquise par des démonstrations explicatives (voir [Hanna 1996] et [Barbin 1988]). C'est pourquoi nous ne mentionnerons pas les fonctions de persuasion ou de conviction qui est une conséquence des fonctions de vérification ou d'explication des raisonnements de validation. On pourrait considérer que la fonction de persuasion est assurée plutôt par la vérification de la plausibilité de la vérité d'une proposition, alors que la fonction de conviction est assurée par la vérification de la preuve de la vérité, s'appuyant sur des raisonnements de nécessité. On pourrait considérer en effet que les raisonnements de nécessité sont admis par un auditoire plus universel que celui qui admet les raisonnements de plausibilité. Mais cette hiérarchie du caractère universel des auditoires nous paraît délicate voire contestable ; c'est pourquoi nous ne considérerons pas les fonctions de persuasion ou de conviction en considérant qu'elles sont des conséquences des fonctions de vérification ou d'explication. Rappelons qu'en nous limitant aux raisonnements de validation nous écartons les autres raisonnements, notamment ceux pour lesquels les fonctions de persuasion ou de conviction sont essentielles dans un cadre rhétorique et où le rhéteur peut essayer de persuader un auditoire de la vérité d'une proposition alors que le rhéteur lui-même sait que la proposition est fautive. Enfin les notions de persuasion ou de conviction ont parfois une dimension plus individuelle et psychologique : au sein d'une même institution un individu paraîtra plus persuadé ou plus convaincu qu'un autre par une démonstration alors qu'ils

adhèrent tous les deux à la même logique : c'est pourquoi, alors que nous abordons une approche plutôt institutionnelle, il nous semble préférable d'aborder les notions de persuasion ou de conviction dans une approche plus psychologique. Rappelons à ce propos l'expression de Cantor concernant une démonstration qu'il vient de terminer : « Je le vois mais je ne le crois pas »⁹³. Nous avons d'ailleurs déjà signalé que la force de plausibilité était difficilement théorisable et relevait en grande partie de considérations psychologiques.

Dressons le tableau récapitulatif des différentes fonctions d'une validation.

Fonction	Description
vérification (preuve ou plausibilité)	valider la nécessité ou la plausibilité de la vérité d'une proposition
explication	fournir un aperçu de pourquoi la proposition est vraie
systématisation (incorporation)	organiser des connaissances en système déductif, incorporer des connaissances nouvelles, utiliser des connaissances anciennes
découverte	découverte, invention, préparation, production de nouveaux résultats
communication	transmission des connaissances

1.2.4 Questions liées au cadre théorique

Reformulons dans ce cadre théorique les questions abordées dans l'introduction.

Nous situons notre étude et notre questionnement dans des institutions d'enseignement des mathématiques.

Comment et pourquoi sont réalisées des validations didactiques (d'une proposition mathématique) ? Comment sont-elles organisées ?

⁹³ Cité dans [Balacheff 1982, p.263] d'après une lettre du 29 juin 1877 de Cantor à Dedekind, reproduite dans Cavailles J. (1962) *Philosophie mathématique*, Hermann 1962.

Comment et pourquoi une validation didactique (d'une proposition mathématique) peut-elle être une validation mathématique ?

Si une validation didactique (d'une proposition mathématique) n'est pas une validation mathématique, est-elle la transposée d'une validation mathématique ?

Si oui, comment et pourquoi transpose-t-on une validation mathématique ?

Si non, comment et pourquoi réalise-t-on une validation didactique ?

Quelles règles de contrat semblent intervenir dans la validation ?

Observe-t-on des différences ou des permanences dans ces règles de contrat entre les institutions françaises et les institutions allemandes ?

La réponse à aux questions « comment » sera effectuée en analysant les validations en termes de technique, technologie et théorie et en observant les écarts dans les différentes institutions.

Notamment pourra-t-on dresser des listes ou des types de techniques et technologies suivant les institutions (didactique, mathématique, française, allemande,...)?

Pourra-t-on définir des liens entre techniques et technologies d'une validation mathématique ou de sa transposée ? Le phénomène de transposition ou de non transposition est-il lié à un type de techniques ou de technologies ?

Les questions « pourquoi » seront analysées en dégagant des rapports éventuels entre les fonctions d'une validation et les techniques ou technologies mises en oeuvre et en observant les variations institutionnelles.

Pour répondre à ces questions nous allons évoquer les problèmes méthodologiques généraux ce qui nous permettra de préciser nos objets d'étude et nos hypothèses de travail et de recherche.

1.3 Problèmes méthodologiques généraux

1.3.1 Différentes méthodologies comparatives

1.3.1.1 Pourquoi comparer ?

[Clarke 2004, p.1, trad. R.C.] rappelle le « besoin dans la recherche comparative internationale non pas de minimiser les variations, par une agrégation simpliste des données au niveau d'une nation, par l'imposition implicite d'un curriculum international commun à travers des tests internationaux, ou par l'aspiration à « dissiper » la variation à travers l'identification et le plaidoyer des meilleures pratiques applicables internationalement uniformément, mais de documenter et de rendre compte des variations dans la politique et la pratique éducatives de manière à anticiper des variations supplémentaires dans l'adaptation et l'application de telles recherches »⁹⁴. Nous nous placerons dans cette perspective. Notre intention n'est pas de construire un programme d'enseignement de la démonstration commun à la France et à l'Allemagne, ni de proposer une ingénierie didactique relative à l'enseignement de la démonstration. Notre intention est de mieux connaître l'enseignement de la démonstration dans chaque pays pour mieux interroger nos pratiques et pour faciliter des coopérations entre les deux pays, tant du point de vue des échanges entre élèves [Cabassut 1996 a] que des formations d'enseignants [Cabassut 1996 b].

1.3.1.2 Quoi comparer ?

Les comparaisons internationales peuvent porter sur différents sujets :

- analyses de curriculum et des performances des élèves à un niveau donné (par exemple les IMSS (International Mathematics and Science Study) : la troisième étude [TIMSS 1996, 1998] à laquelle la France et l'Allemagne ont participé, compare les performances des élèves de l'école moyenne (13 ans) d'une part et des élèves de dernière année de l'école secondaire d'autre part ;
- études de manuels scolaires de mathématiques et de leur utilisation (par exemple [Pepin 2001] pour ce qui concerne l'Angleterre, la France et l'Allemagne),

⁹⁴ “need in international comparative research not to minimize variation, by the simplistic aggregation of data at the level of nation, by the implicit imposition of a common international curriculum through international testing, or by the aspiration to “remove” variation through the identification and the advocacy of uniform internationally-applicable best practices, but to document and report variation in educational policy and practice in a manner that anticipates further variation in the adaptation and application of such research”

- études des représentations des mathématiques et de leur enseignement chez les élèves (par exemple [Cabassut 1989] entre France et Allemagne),
- comparaisons sur un sujet d'enseignement ([Celi 2002] sur l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans ; [Doan 2001] sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane en classe de seconde en France et la classe 11 au Vietnam ; [Le Thi 1997] sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viet-nam et la classe de seconde en France ;
- études de séquences d'enseignement ([Stigler, Gonzales et al. 1998] sur des enregistrements de séquences de cours en Allemagne, au Japon et aux U.S.A. ; [Knipping 2003] sur la démonstration du théorème de Pythagore en France et en Allemagne).

Pour chacune de ces comparaisons, on adapte la méthodologie aux objets comparés, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Cependant dès la première comparaison internationale (FIMS), [Knipping 2003a, p.8, trad. R.C.] rappelle que « FIMS a été massivement critiqué d'un point de vue méthodologique mais également du point de vue curriculaire. En particulier Freudenthal a fait comprendre que les expressions comparatives sans une prise en compte de l'aspect du curriculum ne sont pas parlantes c'est-à-dire rarement possibles. En réaction à cette critique des analyses supplémentaires des curricula ont été conduites dans les études suivantes SIMS et TIMSS ». [Pepin 1998, p.1, trad. R.C.] affirme que « les résultats de la recherche démontrent que les traditions culturelles nationales en Angleterre, en France et en Allemagne sont un déterminant majeur et influence le système scolaire en général, les curricula nationaux et les principes des professeurs et les pratiques scolaires dans les écoles ».

L'analyse du contexte culturel et des curricula est donc une condition recommandée pour la comparaison des objets. C'est pourquoi nous y consacrerons une partie importante dans notre étude comparative sur l'enseignement de la démonstration.

1.3.1.3 Comment comparer ?

Dialectique différences -similitudes

[Clarke 2004, p.5, trad. R.C.] propose deux alternatives méthodologiques dans la recherche comparative dans l'enseignement des mathématiques :

« Alternative 1 :

Si deux groupes d'objets doivent être comparé alors une approche est de considérer ces deux questions :

Différence - « Quelle est la caractéristique à propos de laquelle la comparaison doit être faite ? »

Similitude - « Comment chaque groupe d'objets peut-il être séparément représenté par rapport à cette caractéristique ? »

[...]

Alternative 2.

Si deux groupes d'objets doivent être comparés, considérons ces deux questions :

Similitude – Pour chaque collection d'objets, séparément, poser la question : « Quelles caractéristiques apparaissent pour représenter cette collection d'objets ? »

Différence – « Quelles comparaisons peuvent être faites entre ces deux groupes d'objets utilisant des caractéristiques identifiées ? » »⁹⁵

Soit on rassemble deux groupes d'objets d'après leurs similitudes par rapport à une caractérisation commune puis on compare ensuite leurs différences qu'on essaie d'interpréter ; soit on différencie les deux groupes d'objets d'après leurs caractéristiques propres puis on interprète les similitudes entre ces groupes.

Par exemple dans une étude des programmes officiels, la première approche peut consister à regrouper des programmes d'enseignement des mathématiques correspondant à des écoles semblables (durée de la scolarité pour ce programme, sociologie des élèves fréquentant ces programmes, niveaux d'exigences de programmes, volume horaire de l'enseignement des mathématiques). Cela peut conduire à comparer les programmes de la filière S de lycée en France avec le programme de Leistungskurs Mathematik en Bade-Wurtemberg⁹⁶. Ensuite on compare ces programmes en observant similitudes et différences.

Dans la seconde approche on peut au contraire caractériser des programmes d'écoles différentes, le collège unique en France ou les trois écoles secondaires (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) du Bade-Wurtemberg⁹⁷, en relevant pour chacun d'eux leurs caractéristiques. Puis on compare ensuite ces caractéristiques en relevant les différences et les similitudes.

⁹⁵ Alternative 1.

If two groups of objects are to be compared then one approach is to consider these two questions :

Difference – “What is the characteristic about the comparison is to be made?”

Similarity – “How might each group of objects be separately typified with respect to that characteristic?”

[...]

Alternative 2.

If two groups of objects are to be compared, consider these two questions:

Similarity – For each collection of objects, separately, ask the question: “Which characteristics appear to typify this collection of objects?”

Difference – “What comparisons can be made between these two groups of objects using the identified characteristics?”

⁹⁶ Nous décrirons plus loin ce pourquoi ces programmes ont des similitudes.

⁹⁷ Nous décrirons plus loin les différences entre ces écoles.

Chacun des termes de l'alternative présente des avantages et des inconvénients.

L'alternative 1 permet de rendre plus facilement comparable les groupes d'objets, en réduisant les variables de contexte. « Poser les questions comme dans l'alternative 2 réduit le danger de contraindre les données à une structure prédéterminée, mais peut conduire à la caractérisation des deux groupes par des caractéristiques émergentes, en restreignant les bases communes sur lesquelles la comparaison des deux groupes pourrait être faite »⁹⁸ [Clarke 2004, p.4 ; trad. R.C.]

Dans cette recherche nous utiliserons les deux termes de l'alternative selon les objets étudiés, par une approche dialectique entre différences et similitudes.

Approche quantitative- approche qualitative

Plusieurs approches sont possibles. On peut adopter une approche quantitative. Dans [Cabassut 1989] nous avons proposé d'analyser les réponses à un questionnaire sur l'image des mathématiques chez des lycéens français et allemands à partir d'une analyse factorielle à correspondances multiples, qui a permis de constituer et de comparer des profils d'images des mathématiques. Les enquêtes de TIMSS comportent également une dimension quantitative comparant les scores nationaux de réussite à des épreuves d'évaluation. Ces méthodes quantitatives ont reçues plusieurs critiques concernant les hypothèses implicites suivantes. L'agrégation des réponses d'une même nation contribue à identifier un corps cohérent de pratique alors que des études plus fines montrent d'importantes fluctuations des scores suivant des variables sociologiques au sein d'un même groupe national. « Les différences sur des mesures particulières des performances mathématiques sont au moins attribuables à l'affiliation culturelle des étudiants qu'au système scolaire particulier suivi. La signification d'une telle variation culturelle interne est perdue dans l'agrégation des données de performance des pays aussi culturellement pluriel que les USA, l'Australie ou le Canada »⁹⁹ [Clarke 2004, p.4, trad. R.C.].

[Knipping 2003a] propose une étude qualitative d'unités d'enseignement consacrées au théorème de Pythagore en France et en Allemagne. Les séquences observées ne prétendent pas être des échantillons représentatifs, comme pour une étude statistique. Mais l'analyse en détail de chaque cas permet de mettre en valeur des observations inattendues et de décrire et comprendre les phénomènes et les processus observés.

⁹⁸ „Posing the questions as in Alternative 2 reduces the danger of constraining the data to a predetermined structure, but may lead to the typification of the two groups by different emergent characteristics, restricting the common bases on which comparison of the two groups might be made“

⁹⁹ „differences on particular measures of mathematical performance are at least attributable to the cultural affiliation of the students as to the particular school system attended. The significance of data for countries as culturally plural as the USA, Australia, or Canada“

Nous pensons que les méthodes qualitatives et quantitatives sont complémentaires. Dans le domaine de la comparaison, compte tenu de la complexité des facteurs culturels et institutionnels de chaque nation, il nous paraît intéressant d'avoir des approches méthodologiques variées, qui se complètent mutuellement, et qui permettent de confirmer, par la convergence des méthodes, les similitudes et les différences observées ainsi que les explications proposées. Notre choix méthodologique est donc celui de la variété de méthodes convergeant autour d'une même problématique.

Avant de préciser plus en détail les différentes méthodologies retenues, nous allons évoquer deux exemples illustrant la complexité des méthodologies comparatives : les langues et les institutions.

1.3.2 Comparaison dans des langues différentes

Nous souhaitons préciser notre cadre terminologique et soulever ainsi le problème méthodologique que pose la traduction.

1.3.2.1 Variété de traductions autour des mots preuve /démonstration /Beweis:

[Balacheff 1999c, p.2] note « la très grande diversité du vocabulaire employé dans diverses langues et dans différents cursus pour parler de la preuve, du vrai ou du valide, et de la réfutation [...] Ces variations [...] peuvent entraîner de sérieuses difficultés dans les échanges internationaux qui impliquent des traductions (un exemple classique en est celui de la distinction entre preuve et démonstration que les langues romanes permettent et qui « passe » si difficilement en anglais) »

Nous avons sélectionné quelques termes qui, de notre point de vue, pouvaient se rapporter à la notion de preuve ou démonstration dans l'enseignement des mathématiques. Les différentes traductions sont proposées, pour quelques substantifs (en indiquant parfois entre parenthèses la forme verbale), d'après les dictionnaires bilingues français et allemand [Pons 1978, 2000] et [Harrap 1999], le dictionnaire bilingue allemand et anglais [Langenscheidt 2001] et le dictionnaire multilingue [Larousse 1996].

du français vers l' allemand :

argumentation (argumenter): Argumentation, Beweisführung, Schlussfolgerung, Dialektik.
führen

démonstration (démontrer): Beweis(führung), Vorführung, Äusserung, Demonstration,

1. (A. MATH) (*preuve*) Beweis

2. (*argumentation*) Beweisführung

3. (*présentation*) Demonstration ; *faire la démonstration de ses talents* seine Talente vorführen [demonstrieren] *tu fais la démonstration de ta bêtise* du stellst deine Dummheit unter Beweis [zur Schau]

démonstration par l'absurde (MATH) Widerspruchsbeweis *m*, indirekter [pädagogischer] Beweis
Fachspr.

justification: Rechtfertigung, Beweis, Nachweis, Justierung.

1. (*d'un acte, d'une conduite*) Rechtfertigung *f*

2. (*preuve*) Beweis *m*, Nachweis *m*;

3. (TYP, INFORM) Justierung *f*

preuve (prouver): Beweis, Beweisstück, Beweismittel,

1. (*indice probant, démonstration*) Beweis *m*; *preuve de qc* Beweis für etw; *la preuve qu'il est coupable* der Beweis [dafür], dass er schuldig ist ; *la preuve... fam* : der [beste] Beweis dafür... ; *preuve en main* anhand von Beweisen ; *jusqu'à preuve du contraire* bis zum Beweis des Gegenteils; *faire la preuve de la culpabilité de qn/que qn est coupable* den Beweis dafür erbringen/beweisen, dass jd schuldig ist; *fournir/établir la preuve de qc* den Beweis für etw erbringen/liefern

2. (*marque*) *une preuve d'amour/de bonne volonté* ein Liebesbeweis *m*/ein Zeichen *nt* des guten Willens; *c'est une preuve de courage* das ist ein Beweis seines/ihres Mutes, das beweist seinen/ihren Mut

3. (MATH) *preuve par neuf* Neunerprobe *f*;

raisonnement : (Urteils)kraft ; Schlussfolgerung; Beweisführung ; Denkweise;; Gedankenführung;

1. (*façon de penser*) Denkweise *f*; (*faculté de penser*) Denkvermögen *nt*

2. (*argumentation*) Schlussfolgerung *f*; *raisonnement analogique/déductif* Analogieschluss *m*/deduktiver Schluss

3. *pl (ergotage)* Debatte *f*, ewige Diskussionen *pl*

de l'allemand vers le français :

Argumentation : argumentation

Begründung (begründen) : fondation, établissement, justification, motivation

Begründung *f*

1. (*Erläuterung, Rechtfertigung*) justification *f*; *etw als Begründung [für seine Entscheidung] anführen* donner qc comme justification [de sa décision]
2. (*Urteilsbegründung*) exposé *m* des motifs

Beweis (beweisen): preuve, justification, démonstration, argument

preuve *f*; *den Beweis [für etw] erbringen/anreten* produire/faire la preuve [de qc]; *als [o zum] Beweis seiner Freundschaft* comme preuve de son amitié ; *etw unter Beweis stellen* prouver qc

Beweisführung : exposé des preuves, démonstration, argumentation, raisonnement,

Darlegung (darlegen): exposé, exposition, démonstration, explication ;

Demonstration : démonstration, manifestation,

1. (*Protestkundgebung*) manifestation *f*
2. (*Bekundung, Veranschaulichung*) démonstration *f*; *eine Demonstration des guten Willens* une marque de bonne volonté.

Remarquons que le mot allemand « Demonstration » signifie plutôt manifestation ou illustration.

Nachweis (nachweisen): preuve, justification,

Nachweis

1. (*Beweis*) preuve *f*; [*jdm*] *den Nachweis für etw erbringen [o führen] [o liefern]* apporter [o fournir] [à qn] la preuve de qc
2. (ÖKOL) (*von Radioaktivität, Giftstoffen*) mise *f* en évidence

Überprüfung (überprüfen) : examen, vérification.

Variété des définitions autour des mots preuve /démonstration /Beweis :

On utilise comme source de définitions le dictionnaire encyclopédique [Hachette 1980], l'encyclopédie [Meyer 1992] et la version électronique du dictionnaire de l'encyclopédie

[Universalis 1999]. On ne retient que les définitions qui peuvent avoir un rapport avec l'enseignement des mathématiques (par exemple on ne cite pas la définition de justification en rapport dans l'imprimerie avec la longueur de la ligne pleine).

En français :

On propose la définition d'Universalis et on complète éventuellement par la définition proposée par Hachette.

Argumentation :

fait d'argumenter, ensemble des arguments

Argument :

preuve, élément servant à démontrer une proposition (pour Hachette : raisonnement tendant à établir la preuve, à fonder une opinion)

Argumenter :

donner des arguments, tirer les conséquences.

Démonstration :

1. fait de prouver la vérité d'une donnée, d'une formule

2. raisonnement qui établit la vérité d'une proposition

Démontrer :

1. prouver la vérité d'une proposition (pour Hachette : établir par un raisonnement rigoureux l'évidence, la vérité de)

2. révéler, mettre en évidence

3. procéder à une démonstration, montrer le fonctionnement d'un produit

Justification

1. fait de justifier, de se justifier, de prouver son innocence

2. fait d'établir la réalité d'une chose, ce qui en résulte

Justifier

fait d'argumenter, ensemble des arguments

Preuve :

1. ce qui démontre la vérité (pour Hachette : information ou raisonnement destiné à établir la vérité (d'une proposition, d'un fait).
2. témoignage, attestation
3. signe, indice
4. démonstration mathématique établissant qu'un calcul est exact

Expressions autour de ce mot:

- a) faire preuve de : montrer
- b) faire ses preuves : démontrer ses capacités, son courage

Prouver :

1. établir, démontrer la vérité
2. révéler, témoigner

Raisonnement :

1. action de raisonner
2. opération de la pensée qui consiste à enchaîner des jugements logiques et en tirer des conclusions (pour Hachette : 1. opération discursive de la pensée, qui consiste à enchaîner des jugements selon des principes déterminés et à en tirer une conclusion, 2. suite des arguments employés quand on raisonne ; enchaînement des raisons préparant une conclusion)

En allemand :

On propose une traduction de la définition de l'encyclopédie Meyer. Pour ces mots nous proposons une citation du texte allemand puis une traduction.

Argumentation :

eine Beweisführung, auch eine Rede mit dem Ziel, die Zustimmung oder den Widerspruch wirkli. oder fiktiver Gesprächspartner zu einer Aussage oder Norm durch den schrittweisen und lückenlosen Rückgang auf bereits gemeinsam anerkannte Aussagen bzw. Normen zu erreichen.

Un exposé des preuves, également un discours avec le but d'atteindre l'accord ou l'opposition d'un interlocuteur fictif ou réel pour une déclaration ou une norme au travers d'un retour progressif et complet à des jugements ou des normes déjà acceptées collectivement.

Begründung :

heisst eine theoret. Behauptung (Aussage) oder prakt. (normative) Orientierung genau dann, wenn sie gegenüber allen vernünftig argumentierenden Gesprächspartnern verteidigt werden kann. Als Beweis wird v.a. die B. von Aussagen, insbes. von mathemat. Ausdrücken bezeichnet.

signifie une affirmation (déclaration) théorique ou une orientation pratique (normative) exactement quand on peut la défendre en face de tous les interlocuteurs argumentant raisonnablement. Comme preuve désignée avant tout la justification de déclarations, en particulier de formulations mathématiques.

Beweis

Darlegung der Richtigkeit (Verification) von Urteilen durch log. oder empiri. Gründe. Als Beweis gilt die Ableitung eines Urteils aus anderen, die als wahr vorausgesetzt sind (Prämissen), oder auch aus Axiomen oder Definitionen. Hierbei gelten bestimmte Schlussregeln.

Exposé de l'exactitude (ou de la vérification) d'un jugement d'après des raisons logiques ou empiriques. Comme preuve (démonstration), il y a la déduction d'un jugement d'autres qui sont supposés vrais (prémisses), ou également d'axiomes ou définitions. A cette occasion certaines règles de conclusion sont valables.

Exemples de choix de traduction :

« Beweis » traduit par « démonstration » ou « preuve »

Par exemple, nous conviendrons de traduire le mot « Beweis » soit par « démonstration », soit par « preuve », suivant le contexte, en ayant conscience d'effectuer une interprétation voire une approximation. En mathématique, Arsac [1987, p.272] précise, à propos de « démonstration » et « preuve », que « ces mots sont souvent employés comme synonymes, en particulier par les mathématiciens ». Par contre, dans l'enseignement des mathématiques, le mot français « démonstration » est davantage associé à la procédure de validation propre aux mathématiques alors que le mot preuve peut être associé à d'autres types de procédures de validation qui n'ont pas la rigueur exigée par la démonstration mathématique. Certes le contexte d'utilisation du mot peut éclairer sur l'interprétation ou l'approximation à faire. Nous

examinerons, pour éclairer notre propos, la terminologie utilisée en didactique des mathématiques.

Steinbring [1991, p.272] propose les traductions suivantes : preuve (*Zeugnis, Zeugenbeweis*), démonstration (formaler, *Regel-geleiteter Beweis*).

« inhaltlich » traduit par « sémantique »

Nous traduirons l'expression « inhaltlicher Beweis » par « preuve sémantique ».

[Larousse 1996] propose « sémantique » mais traduit « sémantique » par « semantisch »

[Pons 2000] propose :

inhaltlich

I. ADJ (*Frage, Problem*) de contenu (*Arbeit*) de fond

II. ADV inhaltlich betrachtet du point de vue du contenu.

L'expression « la forme et le fond » se traduit par « Form und Inhalt ».

Dans les classifications proposées par différents auteurs [Holland 2001 p. 51 ; Tietze 2000, p. 159 ; Wittmann 1987 p.VII] « inhaltlicher Beweis » (« preuve sémantique») vient avant « formaler Beweis » (« preuve formelle »).

L'encyclopédie Meyer [1992, édition Brockhaus] propose à propos de « formal » : en rapport avec la forme (Form), pas avec le contenu [Inhalt] et indique qu'en linguistique « inhaltlich » veut dire signification [Bedeutung] ou côté sémantique [begrifflich Seite].

Wittmann [1987, p. VII] précise : « la compréhension sémantique [inhaltlich] joue un aussi grand rôle que les critères formels [formal] ».

C'est pourquoi nous comprenons « inhaltlicher Beweis » par opposition à « formaler Beweis », et nous proposons de comprendre « preuve sémantique » dans le sens « preuve non formelle ».

On pourrait être tenté de traduire « inhaltlich » par « concret ». Mais le mot « concret » se traduit par « konkret » ou « praxisorientiert ».

Tietze [2000, p. 161] réunit les trois mots qui nous posent problème de traduction dans une même expression : « ein Begriff, der sich auf etwas Konkretes, Inhaltliches oder Anschauliches bezieht » « un terme qui est en rapport avec le concret, le sémantique ou l'intuitif » ou encore (p.166) « zwischen einer eher inhaltlich-konkreten und einer eher formalen Argumentationsbasis » (entre une base d'argumentation plutôt concrète-sémantique et plutôt formelle).

On comprend que le contexte peut parfois éclairer la traduction (ici en proposant « non formel » pour « inhaltlich ») mais ce n'est pas toujours clair.

« Anschauung » traduit par « intuition ».

Anschauung et intuition

Volkert [1986, p. 160 ; trad. R.C.] précise : « Une difficulté doit être signalée en tout premier : la langue allemande est une des langues, qui permet de faire une différence entre « Anschauung » et « Intuition »[...] Cette différenciation disparaît dès qu'on traduit en anglais ou en français »¹⁰⁰. Volkert [1986, p. 176, note 26 ; trad. R.C.] propose la différenciation suivante : « une « Anschauung », qui repose sur un icône, s'appelle « Anschauung » (dans un sens étroit) ; une « Anschauung », qui implique un symbole, s'appelle « Intuition » »¹⁰¹. Volkert précise que ce lien entre « Anschauung » et « Intuition » s'inscrit dans la tradition de l'enseignement de Kant.

[Mouloud 1999] précise à propos du mot intuition : « Le terme d'intuition relève du langage de la «vision ». Étymologiquement, *intueor*, *intuitus* se rapportent à l'acte et à l'attention du regard. Aussi, dans son sens large, sera intuitive une atteinte directe de l'objet qui se présente dans sa pleine patuité¹⁰². En fait, dans le vocabulaire philosophique et culturel, le terme d'intuition a recueilli l'héritage de la notion grecque de la *noësis* (noësis), acte simple de la pensée qui ne se disperse pas dans les moments de la perception ou du discours et évite les détours de la *dianoia*¹⁰³ (*dianoia*). Plus récemment, et sous l'influence de la pensée allemande, le terme a récupéré les valeurs de l'*Anschauung* ou de l'*Erschauung*, c'est-à-dire d'une synthèse opérée par l'imagination sur les bases d'une expérience sensible ».

Le mot « voir » peut être pris au sens premier lié à une perception visuelle comme au sens généralisé lié à une idée ou notion. Volkert [1989, p.9 ; trad. R.C.] souligne d'ailleurs ce lien fort : « dans la suite je partirai de la compréhension naïve de « Anschauung » : est regardé, ce qu'on voit »¹⁰⁴.

L'encyclopédie Meyer propose les définitions suivantes pour Anschauung et Intuition, pour lesquelles on reconnaît des éléments communs.

« Anschauung, in der Psychologie die unmittelbare direkte Wahrnehmung eines einzelnen anwesenden Gegenstandes oder eines Ganzen durch den Gesichtssinn allein (opt., visuelle A.; Sehen) oder unter Beteiligung aller anderen Sinne (sensuelle A.); auch das unmittelbare direkte Erfassen von Gegenständen und Sachverhalten durch Intuition.

in der Philosophie bei Platon v.a. geistige Schau, Erfassen übersinnl. Wesenheiten, Anteilnahme an einer Ideenwelt, bei Kant als äussere A. Raum A-, als innere A. Zeit-A., als empir.A. Wahrnehmung und als reine A.

¹⁰⁰ Auf eine Schwierigkeit sollte von vorneherein hingewiesen werden : die deutsche Sprache ist eine der Sprachen, die es erlaubt, einen Unterschied zwischen „Anschauung“ und „Intuition“ zu machen [...] Diese Differenzierung verschwindet, sobald man ins Englische oder französische übersetzt.

¹⁰¹ eine Anschauung, die auf Ikonen beruht, heisst Anschauung, die Symbole involviert, heisst Intuition.

¹⁰² fait de ressentir par empathie ; en psychologie, faculté de s'identifier à autrui, de ressentir les sensations d'un autre

¹⁰³ pensée discursive, connaissance discursive pour Platon ; en grec raison se dit *dianoia* et en latin se dit *ratio*.

¹⁰⁴ Für das Folgende werde ich von einem naiven Verständnis von Anschauung ausgehen : angeschaut wird das, was man sieht.

die aller Erfahrung vorausliegende Einsicht in Raum und Zeit, die auf Grund der Sinnlichkeit zustande kommt und synthetische Urteile a priori ermöglicht. A. und Begriff müssen nach Kant zusammen gegeben sein, damit Erkenntnis entsteht. In der phänomenolog. Philosophie soviel wie Intuition ».

« Intuition, spontanes geistiges Erfassen, eine auf Wissen und Erfahrung beruhende plötzl. Erkenntnis; ein Moment wiss. Forschens und künstler. Gestaltens. In irrationalist. Erkenntnistheorien (bes. der Lebensphilosophie) ist I. eine nicht auf Erfahrung beruhende Erkenntnis, sondern wird gefühlsmässig, durch „innere Eingebung“ erzeugt. In der phänomenolog. Philosophie bilden I; („Anschauung“) und Evidenz („Einsicht“) der Anfang der Begründung von Wissenschaft ».

Traduction

[Pons 2000] propose :

Anschauung <-, -en> *f*

1. (*Ansicht*) façon *f* de voir; nach unserer Anschauung à notre avis; eine andere Anschauung vertreten concevoir les choses différemment
2. *geh* (*Vorstellung*) idée *f*
3. *geh* (*Erfahrung*) aus eigener Anschauung de ma/sa/... propre expérience

Une technique intéressante est de passer par une autre langue, en l'occurrence l'anglais.

[Langenscheidts 2001] propose :

Anschauung

- 1 (*Ansicht*) view, opinion ; (*Vorstellung*) idea, notion ; (*Auffassung*) conception ; zu der ~ gelangen, dass come to the conclusion that;
- 2 contemplation; in ~ versunken lost in contemplation;
- 3 visual perception; s-e Unterrichtsmethode is auf ~ gegründet the visual element is crucial to his teaching method;

Il semblerait que dans la traduction anglaise le rapport à la vision (view, visual perception) soit plus fort que dans la traduction française.

On peut donc proposer plusieurs traduction pour Anschauung : façon de voir, intuition iconique, conception. Dans la traduction que nous avons adoptée, « Anschauung » est traduit par « intuition ».

« anschaulich » traduit par « intuitif »

[Pons 2000] propose :

I. ADJ (*Unterricht, Beschreibung, Vortrag*) clair(e) (*Beispiel*) parlant(e); [jdm] etw anschaulich machen illustrer qc [pour qn]

II. ADV clairement

[Harrap 1999] propose :

Anschaulich

I adj *Unterricht* vivant ; *Bericht, Beschreibung, Bildmaterial, Informationen, Schilderung, Vortrag* a. évocateur(-trice); *Beispiel* a. parlant(e), suggestif (-ive); *deine Beschreibung des wegs war sehr* ~ t a description du chemin était très claire

jd macht etw ~ qn illustre qc; *so wird der Bericht noch ~ er gemacht* de cette façon l'exposé devient plus vivant; *wie soll ich dir das ~ machen?* comment te rendre ça plus explicite?

II adv de façon évocatrice, clairement

Une technique intéressante est de passer par une autre langue.

[Langenscheidts 2001] propose :

anschaulich :

I adj. graphic ; clear ; ~ *machen* illustrate, explain *s.th.* clearly ; *ich will Ihnen ein ~es Beispiel geben* let me give you an example to illustrate what I mean (*od.* that will make things clear);

II adv. graphically; clearly; ~ *schildern* give a graphic description of;

Il semblerait que dans la traduction anglaise le rapport à la vision (graphic) soit plus fort que dans la traduction française.

Elschenbroich [1999, p.157 ; trad. R.C.]] distingue cependant « preuve intuitive [anschauliches Beweisen]» et «preuve visuelle [Siehe-Beweisen]» : « déjà avec l'apparition des logiciels de géométrie dynamique la preuve intuitive [anschaulicher Beweis] est un thème de la didactique des mathématiques [...] Winter parle également de « preuves visuelles » [Siehe-Beweisen] dans lesquelles se « reflètent des actions pratiques ». Typique pour la preuve intuitive [anschaulicher Beweis] est que les descriptions et les relations sont déduites du dessin et qu'un dessin sert de suggestion et de protocole d'intervention »¹⁰⁵.

Nous adopterons « intuitif » pour traduire « anschaulich » même si la référence à la vision, présente dans « intuitif » ne nous semble pas aussi forte que dans « anschaulich ».

traduction de « plausibel » et de « plausible »

On serait tenter de traduire « plausibel » par plausible ; cependant la notion de « compréhensible » est plus présente dans le mot allemand alors que la notion de vérité est plus présente dans le mot français.

¹⁰⁵ Schon vor dem Aufkommen der Dynamischen Geometriesoftware (DGS) war 'Anschauliches Beweisen' ein Thema in der Mathematikdidaktik [...] Winter spricht auch von "Siehe-Beweisen", in denen sich "praktische Handlungen widerspiegeln". Typisch für anschauliche Beweise ist, dass Bezeichnungen und Beziehungen aus der Zeichnung entnommen werden und eine Zeichnung als Anregung und als Protokoll des Vorgehens dient.

Pour la traduction, [Pons 2000] propose :

plausibel

I. ADJ (*Grund, Erklärung*) plausible; jdm etw plausibel machen faire comprendre qc à qn

II. ADV (*erklären, darstellen*) de façon plausible

plausible [plozibl] ADJ plausibel

et [Larousse 1996] propose :

plausibel

Adjektiv compréhensible ; *Adverb* de manière compréhensible jemandem etwas plausibel machen faire comprendre quelque chose à quelqu'un

plausible

adjectif plausibel

Pour la signification, [Larousse 1996] propose :

plausible *adjectif*

(du latin *plaudere*, applaudir)

1. Qui peut être considéré comme vrai. *Alibi plausible.*
2. Que l'on peut admettre comme valable. *Hypothèse plausible.*

tandis que [Meyer 1992] propose :

plausibel [frz., zu lat. *plaudere* « Beifall klatschen »], einleuchtend, verständlich, begreiflich.

Traduction R.C.: [étymologie: français, latin *plaudere* „applaudir“], éclairant, compréhensible.

Après des avis partagés¹⁰⁶ d'experts, nous traduirons « plausibel » par « plausible » et réciproquement.

¹⁰⁶ Nous avons consulté deux experts, l'un non mathématicien, l'autre mathématicien. Mme Erika Cabassut, professeur agrégé d'allemand, docteur en linguistique allemande, voit une différence de signification entre « plausibel » et « plausible » : l'un évoquerait la caractéristique compréhensible alors que l'autre évoquerait le caractère vraisemblable. Klaus Volkert, professeur d'université en didactique des mathématiques à l'université de Cologne traduirait « plausibel » par « plausible », notamment dans les différents contextes que nous avons rencontrés.

1.3.2.2 Conclusions :

D'une part, on traduit d'une langue à l'autre avec le problème qu'un mot n'a pas toujours exactement la même signification que sa traduction, avec en général des rapports culturels à son environnement différents. Cette traduction peut varier selon les contextes. Cette remarque est une invitation à ne pas adopter une terminologie française trop restrictive, qui accentuerait les problèmes de traduction. Il sera préférable de compléter un terme par un qualificatif ou un groupe nominal plus ample qui précisera la nuance que l'on veut exprimer. Cette remarque est essentielle pour la traduction du mot « démonstration ».

D'autre part, la langue naturelle offre une variété terminologique autour de la même notion qui tranche avec la langue spécialisée mathématique ; on retrouvera cette variété en didactique des mathématiques où la terminologie est moins précise et moins homogène.

Enfin le passage par une langue tierce (par exemple l'anglais) ou par le recours aux conseils d'experts peut aider à la traduction.

Ces remarques rappellent une difficulté de l'élève confronté à différents registres de langue, langue naturelle et langue spécialisée, pour qui le changement de registres peut ne pas être perçu ou donner lieu à des conversions incorrectes.

Comme nous n'avons pas de formation de germaniste nous mesurons la difficulté de traduction.

En conséquence nous formulons l'hypothèse de travail suivante.

Hypothèse de travail :

Nous faisons l'hypothèse de travail que les interprétations, approximations ou erreurs de traduction ne modifieront pas fondamentalement le cours et les conclusions de notre recherche. Pour justifier cette hypothèse nous affirmons notre forte conscience des difficultés de traduction et nous confronterons nos problèmes de traductions à différents experts (linguiste, ou mathématiciens bilingues).

1.3.3 Comparaison dans des institutions différentes

1.3.3.1 Objectivité

L'objectivité est un problème général pour le chercheur. « La familiarité avec son univers social est l'obstacle épistémologique *par excellence*, parce qu'il produit continuellement des conceptions ou des systématisations fictives et, en même temps, les conditions de leur crédibilité [Bourdieu, Passeron, Chamboredon 1991 p.13] ». Le chercheur d'un pays observe son pays, en considérant beaucoup de faits comme allant de soi, comme naturels : « L'illusion de naturalité de l'ordre institutionnel est, dans le registre de l'action, la racine de beaucoup de conservatismes et le fourrier de beaucoup d'impuissances » [Chevallard 1999, p. 265]. Le fait d'observer deux pays si différents quant à l'histoire, la géographie, la culture, l'économie, le social,... favorise le questionnement écologique qui met en question la naturalité : « Pourquoi ceci ? Pourquoi pas cela ? ». Mais il montre également la double difficulté : un chercheur d'un pays regarde l'autre pays avec un regard différent de celui avec lequel il regarde son pays. Par exemple dans un protocole d'observation (d'un livre, d'une situation de classe, ...) nous avons déjà signalé la problématique linguistique, qui peut ne pas permettre de saisir une nuance dans une langue étrangère, qu'on remarquera plus facilement dans sa langue naturelle. De même la moins bonne connaissance des domaines de l'histoire, la géographie, la culture, l'économie, le social,... d'un pays étranger par rapport à son propre pays peut amener à mal comprendre et mal interpréter des informations.

La solution méthodologique idéale est de constituer une équipe de recherche internationale, comprenant des chercheurs de chaque pays et idéalement de pays tiers, ces derniers apportant un regard extérieur. Malheureusement nous n'avons pu mettre en pratique cette solution.

Pour diminuer ce risque, nous avons confronté notre point de vue à celui de quelques enseignants de mathématiques et de quelques chercheurs en didactiques des mathématiques allemands.

1.3.3.2 Les caractéristiques très différentes du système éducatif allemand par rapport au système français.

Du fait des grandes différences d'un pays à l'autre nous allons nous limiter à l'enseignement général, sans prendre en considération l'enseignement technique et l'enseignement professionnel, d'autant plus que nos connaissances de ces types d'enseignements sont très fragmentaires. Extrayons de [Cabassut-Strobel 2000, p. 143] ce tableau comparatif qui compare rapidement les deux pays pour ce qui est l'enseignement général secondaire (collège et lycée d'enseignement général en France, Gymnasium général en Allemagne).

	France	Allemagne
système éducatif	<i>centralisé généraliste</i> (orientation tardive)	<i>décentralisé</i> (par Land) <i>sélectif</i> (orientation dès la fin du primaire entre différents types d'écoles)
différenciation en mathématiques	les deux dernières années différenciation en filières et dans chaque filière différenciation entre mathématiques de base et mathématiques approfondies	pour les deux dernières années, actuellement une différenciation pour tous les élèves entre mathématiques approfondies et mathématiques de base comme assez souvent ailleurs en Allemagne ; pour l'avenir, en Bade-Wurtemberg, tous les élèves auront jusqu'au baccalauréat le même enseignement des mathématiques.
formation des enseignants	unifiée en IUFM, poids de la formation académique en université	différenciée selon le type d'écoles où le professeur enseignera (les professeurs de Gymnasium sont formés à l'université) poids de la formation professionnelle
programmes	avec la réforme des lycées, différenciation en première et Terminale ¹⁰⁷ ; développement des statistiques et de l'arithmétique ; réduction des méthodes vectorielles et des transformations.	dans la prochaine réforme, même programme pour tous, importance des probabilités ; dans les deux dernières années les méthodes vectorielles et les transformations sont moins utilisées en géométrie que la géométrie analytique ; les contenus sont abordés plus tôt qu'en France
évaluation	Devoirs en classe et à la maison. Epreuves d'examen fin de scolarité obligatoire et en fin d'enseignement secondaire	Devoirs en classe et évaluation à l'oral Epreuves d'examen fin de scolarité obligatoire et en fin d'enseignement secondaire
Examen d'accès à l'université (baccalauréat–Abitur)	baccalauréat <i>centralisé</i> importance de l'évaluation terminale sujets indépendants de l'établissement (les mêmes pour toute la France) un seul correcteur par copie	Abitur <i>décentralisé</i> par Land (et éventuellement par établissement : choix du sujet ou choix parmi plusieurs sujets centralisés dans le Land) 2 à 3 correcteurs par copie 2/3 contrôle continu, 1/3 examen terminal les sujets influencés par l'établissement le professeur corrige sa classe et il y a deux autres correcteurs

¹⁰⁷ pas d'analyse en mathématiques de base de série littéraire L, pas de géométrie en mathématiques de base de série économique ES.

Examinons dans le détail quelques différences et les conséquences sur nos choix méthodologiques et nos hypothèses de travail.

Système centralisé/système décentralisé :

En Allemagne le système scolaire primaire et secondaire (organisation : nombre d'année d'études secondaires, horaires par disciplines,..., formation des professeurs, programmes des disciplines, manuels scolaires, examens de fin d'étude ou d'accès à l'université,...) est de la responsabilité de chaque Land alors qu'il est complètement centralisé en France. Pour des raisons d'accessibilité, nous avons choisi de porter notre étude sur le Land de Bade-Wurtemberg pour étudier une ensemble homogène (étude des programmes, des manuels, de productions d'élèves,...) et pour faciliter les conditions pratiques ¹⁰⁸ de notre travail de recherche.

Tronc commun/Filières :

Le début de l'enseignement secondaire se déroule dans des conditions très différentes d'un pays à l'autre. En France la majorité des élèves sont scolarisés dans le collège unique jusqu'à la troisième. En France à la fin du primaire la grande majorité des élèves s'orientent vers le collège unique (à l'exception des élèves d'enseignement spécialisé. Par contre en Allemagne, dès la fin du primaire, les élèves sont orientés dans la majorité ¹⁰⁹ des Länder ¹¹⁰ suivant quatre types d'écoles : la Hauptschule, la Realschule, le Gymnasium, la Gesamtschule. En 1999, la répartition ¹¹¹ des élèves de classe 8 (13-14 ans) suivant le type d'écoles était : 22,5% en Hauptschule, 26,4% en Realschule, 29,3% en Gymnasium, 9,4% en Gesamtschule et le reste dans des écoles spécialisées (Sonderschule (4,6%), Waldorfschule (0,6 %), Schularten mit mehreren Bildungsgängen). Par conséquent, d'une part les classes de collèges français présentent a priori une hétérogénéité plus grande que les classes d'âges comparables d'un Gymnasium allemand ; d'autre part l'homogénéité du public allemand de Gymnasium pourrait permettre d'introduire des concepts et des contenus plus tôt qu'en France et *avec une*

¹⁰⁸ Il me paraît important de souligner l'influence de la pratique sociale de la recherche (recherche pratiquée par un enseignant du secondaire en exercice à plein temps) sur la pratique « savante » de la recherche.

¹⁰⁹ certains Länder proposent la Mittelschule, la Regelschule, la Sekundarschule.

¹¹⁰ unité administrative et géographique correspondant approximativement à nos régions, avec la grande différence que les Länder ont souveraineté en matière d'enseignement secondaire, le niveau fédéral jouant un rôle d'harmonisation qui n'empêche pas les différences d'organisation du système scolaire, notamment en matière d'horaires et de programmes de mathématiques, et de formation des enseignants de mathématiques.

¹¹¹ source : Statistische Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz, n° 151, 2000.

visée propédeutique pour la poursuite de la scolarité, puisque les élèves rentrant en Gymnasium sont plus homogènes quant à leur profil et plus stable dans leur orientation ¹¹² que les élèves français rentrant au collège. Par exemple en Bade-Wurtemberg¹¹³ les fractions, les équations et les fonctions quadratiques sont étudiées plus tôt qu'en France. Il est bien entendu difficile de déterminer quelle est l'influence de l'homogénéité de la filière Gymnasium sur le choix du moment de l'introduction des concepts et des contenus. On notera donc que les conditions d'enseignement sont très différentes d'un pays à l'autre dans le premier cycle de l'enseignement secondaire.

Objet d'étude (O1) :

En application de notre principe méthodologique général de dialectique similitude-différence, nous limitons notre observation à un seul Land, le Bade-Wurtemberg, pour la rendre plus homogène, en supprimant les variables liées à la différence d'organisation entre systèmes éducatifs de chaque Land. Nous étudierons cependant le cas échéant des exemples d'autres Länder pour éclairer le contexte et pour rappeler ces différences.

Nous introduisons ainsi une limitation dans notre observation de l'Allemagne. L'observation que nous ferons ne pourra pas être étendue à l'Allemagne entière sans quelques précautions. Mais notre objectif n'est pas de dresser une image complète de l'Allemagne.

Cette difficulté méthodologique est générale à l'observation de tout pays organisé de manière décentralisée.

¹¹² nous n'avons pas trouvé de statistique sur l'évasion des élèves de la filière Gymnasium.

¹¹³ Land du sud de l'Allemagne, frontalier de l'Alsace.

1.3.3.3 Systèmes éducatifs en Bade-Wurtemberg et en France

Age	classes du Bade-Wurtemberg				classes françaises			
				Fachabitur	Abitur (La classe 13 disparaît dans la filière en 8 ans)			
				Fach-Gymnasium		Baccalauréat		
18-19	13							
17-18	12	éducation professionnelle				Lycée		
						Terminale		
16-17	11					première		
15-16	10			Realschule	Gymnasium	Général		
						Technique	Professionnel	seconde
14-15	9	Hauptschule				collège		
						troisième		
13-14	8					quatrième		
						cinquième		
12-13	7					sixième		
11-12	6	classes	classes	classes d'		CM2		
10-11	5	d'orientation	d'orientation	orientation				
9-10	4	Grundschule					CM1	
8-9	3						école élémentaire	CE2
7-8	2							CE1
6-7	1							CP
5-6		Kindergarten					GS	
4-5							école maternelle	MS
3-4								PS

Remarque : dans le Bade-Wurtemberg, à partir de 2001-2002 le Gymnasium se fait en 8 ans (de classe 5 à 12) au lieu de 9 ans (de classe 5 à 13). A partir de 2008-2009 tous les bacheliers passeront les épreuves de l'Abitur en classe 12 ; la classe 13 n'existera plus.

Ecoles secondaires différenciées dans le Bade-Wurtemberg

Alors que la France propose aux élèves issus de l'école primaire de poursuivre leur scolarité secondaire dans le collège unique, le Bade-Wurtemberg propose de différencier l'orientation après la classe 4 de fin d'école primaire en principalement trois écoles différentes : la Hauptschule, la Realschule et le Gymnasium. En 1999 la répartition des élèves en classe 8 (13-14 ans) dans le Baden-Wurtemberg était la suivante : 33,8% en Hauptschulen, 31,5% en Realschulen et 28,2% en Gymnasium et 6% dans d'autres écoles¹¹⁴. Rappelons que cette répartition peut être complètement différente dans une autre région¹¹⁵ dépendant notamment de l'histoire politique¹¹⁶ de la région.

La Hauptschule correspond à un premier cycle d'école secondaire avec des enseignements en allemand (langue maternelle), en mathématique, en sciences naturelles, en sciences sociales et dans une langue étrangère ainsi que des enseignements d'initiation à la vie professionnelle. L'examen¹¹⁷ de fin de scolarité de la Hauptschule, en classe 9 ou 10, permet d'entreprendre une formation en alternance en entreprise et en école professionnelle. Le Gymnasium, correspondant en France au bloc collège suivi du lycée, prépare en 8 ou 9 ans¹¹⁸ au baccalauréat (Abitur) qui est le diplôme d'accès à l'université. La Realschule est une école intermédiaire entre la Hauptschule et le Gymnasium : elle prépare en 6 ans (de la classe 5 à la classe 10) à un examen (Mittlere Reife) de fin d'étude permettant l'accès à des filières plus valorisées que dans la Hauptschule, comme des écoles professionnelles spécialisées, des lycées techniques ou des passerelles permettant de rejoindre la voie du Gymnasium.

Collège unique en France

La très grande majorité des élèves français fréquentent le collège unique à la sortie du primaire jusqu'à la classe de troisième. La répartition des élèves de 14 ans¹¹⁹ en 2000-2001 était : 4,5% dans l'enseignement adapté¹²⁰, 5,5% en sixième ou cinquième, 30,1% en

¹¹⁴ Ces autres écoles sont les Sonderschulen (4,7% des élèves) pour des élèves ayant des handicaps (physiques ou mentaux), des Freiwaldorfschulen (1,3% des élèves) inspirées par la philosophie de Rudolf Steiner, et des Integrierte Gesamtschulen (0,5 % des élèves) qui ressemblent à la filière du collège unique français prolongé par le lycée. Source : Schule in Deutschland, *Statistische Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz*, N°155, Juli 2001 p.124.

¹¹⁵ La répartition en Allemagne était : 22,6% pour les Hauptschulen, 26,4% pour les Realschulen, 29,3% pour les Gymnasium et 21,7% pour les autres écoles (dont 9,4% pour les Integrierte Gesamtschulen et 6,9% pour les Schulen mit mehreren Bildungsgängen (établissements à plusieurs filières).

¹¹⁶ Forte présence d' Integrierte Gesamtschulen dans les régions longtemps dirigées par le SPD (partie social-démocrate) et forte présence des Schulen mit mehreren Bildungsgängen dans les régions de l'ancienne Allemagne de l'Est.

¹¹⁷ Hauptschulabschluss

¹¹⁸ Le Bade-Wurtemberg connaît une réforme de la durée de scolarité en Gymnasium ramenée de 9 ans à 8 ans à partir du baccalauréat de 2008-2009

¹¹⁹ 14 ans révolus qu 1^{er} janvier 2001.

¹²⁰ réservé aux élèves qui ont des difficultés à suivre la scolarité dans le collège unique.

quatrième, 56,1% en troisième¹²¹, 2,8% en seconde générale ou technologique, et 0,3% en enseignement professionnel court¹²² et 0,4% de jeunes restants. On observe donc que la grande majorité (91,7%) est scolarisée en collège. Par contre à 17 ans¹²³, pour la même année scolaire 2000-2001 la répartition montre que seuls 0,7% restent scolarisés en collège : 1,1% en enseignement adapté, 0,1% en quatrième, 0,6% en troisième, 3,7% en seconde générale ou technologique, 17,8% en première générale et technologique, 29,2% en terminale générale et technologique, 24,8% en enseignement professionnel court LP-LPA, 9,5% en enseignement professionnel court CFA, 0,5% en enseignement professionnel long CFA et 2,2% en post-bac et 8% de jeunes restants. On peut observer que seulement 50,7% des jeunes de 17 ans sont scolarisés en lycée d'enseignement général ou technologique

Seconde partie de l'enseignement secondaire

La scolarité en lycée en France peut se répartir en lycée professionnel, en lycée technique ou en lycée d'enseignement général. La scolarité en Gymnasium peut se répartir en Gymnasium de forme normale ou dans d'autres formes comme le Gymnasium technique. Jusqu'à 1999, les programmes de mathématiques se différenciaient entre Gymnasium linguistique (sprachlicher Zug) et Gymnasium scientifique (mathematisch-naturwissenschaftlich Zug). Depuis 1999, la distinction n'existe plus.

Objet d'étude (O2) :

Nous limitons notre étude au collège- lycée d'enseignement général français et au Gymnasium de forme normale du Bade-Wurtemberg. Nous considérons que cette limitation permet d'atteindre des populations d'élèves relativement comparables, avec cependant une nette différence du point de vue de l'hétérogénéité entre le collège et le début du Gymnasium (Sekundarstufe I)

¹²¹ Y compris les quatrième et troisième technologiques qui proposent à des élèves en difficulté dans l'enseignement général une alternative avec une ouverture à l'enseignement technologique industriel ou tertiaire. En 2001-2002, l'effectif des troisième technologique représentait 4,4% de l'effectif de troisième. Source : [Ministère 2002, p.87]

¹²² en lycée professionnel (LP) ou lycée polyvalent de l'éducation nationale et de l'agriculture (LPA).

¹²³ 17 ans révolus au 1^{er} janvier 2001.

1.3.3.4 Organisation de l'enseignement des mathématiques en Gymnasium et en collège-lycée général :

Observons l'organisation de l'enseignement secondaire en France et au Bade-Wurtemberg du point de vue de l'enseignement des mathématiques. Au cours de notre recherche (1999 à 2005) les deux pays auront connu une réforme de l'enseignement secondaire affectant l'organisation, le volume horaire et les programmes d'enseignement des mathématiques.

âge de l'élève en début d'année	classe française	Nombre d'heures de mathématiques par semaine	classe en Bade-Wurtemberg	nombre hebdomadaire de séquences de 45 mn en Bade-Wurtemberg
10-11 ans	CM 2 (primaire)		5	4 (plus 1 d'approfondissement)
11-12 ans	sixième	4h à titre indicatif (pas d'horaire national, variable selon établissement))	6	5 (plus 1 d'approfondissement)
12-13 ans	cinquième	de 3h30 à 4h30 (variable selon établissement)	7	3
13-14 ans	quatrième	de 3h30 à 4h30 (variable selon établissement)	8	4 (plus 1 de technique de l'information)
14-15 ans	troisième	4h	9	4
15-16 ans	seconde générale	à partir de 2000-2001 : 3h classe entière + 1h en demi-classe	10	4
16-17 ans	première	L littéraire : à partir de 2000-2001 : 1h classe entière + 1h en demi-classe ES économique : à partir de 2001-2002 : 2h30 classe entière + ½ h demi-classe + 2h option S scientifique : à partir de 2001-2002 : 4h classe entière + 1h en groupe	11	4
17-18 ans	terminale	L littéraire : à partir de 2001-2002 : 0h en maths obligatoire ou 3h en option (avant : 2/3 h obligatoire + 4h en option) ES économique : pas de changement 4h obligatoire + 2h en option S scientifique : à partir de 2002-2003 : 4h30 classe entière+ 1h en groupe (avant réforme : 6h + 2h en option)	12	3 en cours de base (Grundkurs) 5 en cours d'approfondissement (Leistungskurs) (4 après la réforme de 2002-2003 qui regroupe Grundkurs et Leistungskurs)

18-19 ans			13	3 en cours de base (Grundkurs) ; 5 en cours d'approfondissement (Leistungskurs) (4 après la réforme de 2002-2003 qui regroupe Grundkurs et Leistungskurs). Cette classe disparaît dans la filière du Gymnasium en 8 ans.
-----------	--	--	----	--

On remarque également que la spécialisation en mathématiques se produit (jusqu'à la réforme de 2002-2003 qui regroupera les Grundkurs et les Leistungskurs), comme en France, lors des deux dernières années. Avec cependant deux différences importantes : d'une part, tous les élèves ont au moins trois périodes hebdomadaires de mathématiques jusqu'à l'Abitur alors que les élèves français de série littéraire peuvent n'avoir pratiquement plus d'enseignement des mathématiques en terminale (40 mn en terminale jusqu'à 2000-2001) ; d'autre part il n'existe pas de filière scientifique en Bade-Wurtemberg puisque l'élève peut choisir de composer ses matières à performance.

De plus, à la fin de la classe 10, les élèves allemands de Gymnasium de Bade-Wurtemberg préparent le Zentrale Klassenarbeit, qui comprend une épreuve en mathématiques. En France, les élèves de troisième ont les épreuves du brevet des collèges en fin d'année. Les élèves français de la filière collège-lycée d'enseignement général ont une orientation en fin d'année de seconde, que l'on retrouve du côté allemand qu'au niveau de la fin de la classe 11, lors des choix entre le cours approfondi (Leistungskurs) et le cours de base (Grundkurs). Cependant dans la filière du Gymnasium en 8 ans, le choix entre Grundkurs et Leistungskurs se fait en classe 10. Rappelons que les mathématiques ne sont plus concernées par cette différenciation depuis la réforme de 2002-2003. Pour les classes de fin d'enseignement secondaire, on retrouve l'examen terminal qui pèse sur l'enseignement des mathématiques, l'Abitur pour la classe 13 (et à partir de 2008 pour la classe 12) et le baccalauréat pour la terminale. Comme on le voit les différences d'environnement modifient les contraintes et les moments de ces contraintes sur l'enseignement des mathématiques.

Objet d'étude (O3) :

Dans le Bade-Wurtemberg il existe jusqu'à la réforme de 2002-2003 une filière conduisant au Leistungskurs de mathématiques, composé d'une cursus indéterminé de la classe 5 à la classe

11, et d'une spécialisation en cours approfondi (Leistungskurs) mathématiques en classe 12 et 13.

Avant les deux dernières années de lycée et de Gymnasium, nous comparerons des classes indifférenciées.

Pour les deux dernières années de lycée et de Gymnasium, nous limiterons notre étude pour la France, à la première scientifique (première S) et à la terminale scientifique (Terminale S) spécialité mathématiques, et pour le Gymnasium au cours approfondi de mathématiques (Leistungskurs) de classes 12 et 13. Nous n'étudierons les autres filières que pour éclairer le contexte.

Nous considérons que c'est dans ces filières mathématiques que nous avons les meilleures chances d'observer les productions de démonstration les plus achevées et les plus approfondies, et donc les plus comparables. Cependant nous pourrions étudier des exemples d'autres filières pour éclairer le contexte.

Le risque méthodologique, compte tenu de toutes les différences évoquées précédemment, est de comparer des situations non comparables, c'est-à-dire des situations où les variables extérieures (liées au système éducatif et non contrôlables) ont plus d'influence que les variables internes (étudiées) de la situation. Il nous faudra donc trouver des protocoles permettant de réduire ce risque.

1.3.3.5 Problème de l'hétérogénéité :

De nombreux travaux attestent de l'hétérogénéité des professeurs et des élèves. Par exemple en France au niveau des pratiques d'enseignement dans le cas du passage de la géométrie de l'observation à la géométrie de la démonstration [Rauscher 1993], ou au niveau des représentations de la démonstration ou de la rigueur [Antibi, 1988, 1996, 1997; IREM de Rennes, 1995 ; Houdebine, 1998, p.69-79]. [Clarke 2004 ; p.4-5 ; trad. R.C.] rappelle par exemple que dans l'évaluation TIMSS concernant les USA les scores triés selon les critères de groupes communautaires blancs, noirs, hispaniques révèlent d'importantes disparités : « Des comparaisons entre secteurs de la communauté à l'intérieur d'un pays donné peuvent être fructueuses, à l'intérieur d'un état donné ou d'un système scolaire même encore plus. De telles comparaisons peuvent au moins mettre en évidence les groupes communautaires qui sont moins égaux quant aux bénéfices qu'ils reçoivent d'un système scolaire dont l'intention est de bénéficier équitablement à tous les étudiants. La politique éducative peut

alors être conçue en direction de la moindre inégalité »¹²⁴. La question est de distinguer dans nos protocoles d'observation ce qui tient de l'hétérogénéité « naturelle », qu'on observe déjà au sein d'un même système scolaire, et ce qui est liée au système et qui tient donc à la différence entre les systèmes. La problématique est grande lorsque les corpus de données sont d'effectifs réduits et lorsque sont essentiellement conduites des études qualitatives, pour lesquelles les méthodes statistiques sont limitées.

Dans cette partie sur les problèmes méthodologiques généraux nous avons dégagé les conclusions suivantes :

- notre méthode comparative s'appuie sur une dialectique similitude - différence entre les objets comparés ;
- l'analyse du contexte culturel et des curricula est importante ;
- l'utilisation de méthodes variées, qualitatives et quantitatives, permet d'étudier la problématique de plusieurs points de vue convergents ;
- le passage d'une langue à l'autre reste problématique malgré les efforts de traduction consentis ;
- les objets d'étude seront essentiellement limités au Bade-Wurtemberg, à la filière normale du Gymnasium, et aux filières Leistungskurs Mathematik pour le cycle supérieur de fin de Gymnasium pour ce qui concerne l'Allemagne ; aux collège et lycée d'enseignement général, aux filières scientifiques pour le cycle terminal de lycée, pour ce qui concerne la France.

Maintenant que nous avons défini notre cadre théorique et notre méthodologie générale, nous allons pouvoir reformuler de manière plus opérationnelle notre problématique de recherche, nos hypothèses de travail, nos hypothèses de recherche, et notre plan de recherche.

¹²⁴ "Comparisons between sectors of the community within a given country may be more fruitful, within a given state or school system even more so. Such comparisons may at least highlight community groups who are less equal in the benefits they accrue from a school system intended to benefit all students equally. Educational policy can be framed to address any inequalities."

1.4 Problématique et objets d'étude.

Nous allons donc reformuler nos questions de recherche, questions auxquelles nous tenterons de répondre en distinguant :

- les « hypothèses » de recherche (qu'il serait préférable de nommer conjectures de recherche) correspondant aux réponses aux questions précédentes, réponses que nous conjecturons et dont le but de la recherche est de les valider (ou invalider) par différents dispositifs de recherche ;
- les hypothèses de travail qui sont des conditions que nous supposerons acquises et qui n'auront pas à être démontrées comme acquises (ce serait l'objet d'autres recherches) ;
- les études qui seront investies pour répondre aux questions et valider les hypothèses de recherche.

1.4.1 Questions de recherche.

La question centrale est :

Q0: Quelles similitudes et quelles différences sont mises en évidence lors d'une comparaison de la place et du statut de la validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques entre la France et l'Allemagne?

Nous distinguerons trois thématiques dans cette question, pour chacune desquelles on observera les similitudes et les différences entre la France et l'Allemagne.

Description des validations (structure, fonction, type, ...) :

Q1 : Quelles sont les types de validations observées ? Quelles sont les fonctions de ces validations ? Quelles règles de contrat semblent intervenir ?

Validations et transposition :

Q2 : Les validations observées sont-elles des transpositions de validations mathématiques ? de validations non mathématiques¹²⁵ ? Si oui, quelles en sont les caractéristiques ?

Position institutionnelle de la validation :

Q3 : Quelles sont la place et le statut de la validation dans l'enseignement secondaire ? Est-elle un objet d'enseignement ?

¹²⁵ Voir le paragraphe 1.2.1.3

Ces thématiques pourront bien entendu se mêler : par exemple si une validation est la transposée d'une autre, cela peut avoir des incidences sur sa structure, ses fonctions ou le contrat en jeu.

1.4.2 Hypothèses de recherche

(H0) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que, pour les mêmes tâches de validation, dans l'enseignement des mathématiques nous pourrions observer des différences ou des similitudes entre la France et le Bade-Wurtemberg. Ces différences pourront être expliquées par les *institutions* étudiées, par les *organisations mathématiques* correspondant aux organisations didactiques étudiées, par les *blocs technologico-théoriques des organisations didactiques* étudiées, par les *fonctions* de ces tâches.

(H1) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que dans les programmes officiels la démonstration est un objet à enseigner¹²⁶ en France en collège, seconde générale et série scientifiques S de lycée d'enseignement général¹²⁷ et en Bade-Wurtemberg dans le Gymnasium de forme normale¹²⁸.

(H2) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que la démonstration apparaît comme objet d'enseignement dans des manuels scolaires de collège ou lycée d'enseignement général français ou de forme normale de Gymnasium du Bade-Wurtemberg.

(H3) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que dans les manuels scolaires la validation didactique est la double transposition didactique de la validation non mathématique et de la validation mathématique.

(H4) : Nous faisons l'hypothèse de recherche que pour les mêmes tâches observées dans des organisations didactiques comparables de France et de Bade-Wurtemberg, c'est-à-dire avec les mêmes fonctions assignées à ces tâches et les mêmes technologies disponibles, on observe des différences dans les techniques utilisées, liées à des différences de contrats.

¹²⁶ Pour cette notion revoir le paragraphe 1.2.1.1

¹²⁷ Nous n'étudierons pas les lycées d'enseignement technique ou professionnel.

¹²⁸ Nous n'étudierons pas les autres formes, notamment les Gymnasium techniques.

1.4.3 Objets d'études

1.4.3.1 Limitation des objets d'étude

Dans notre précédente réflexion sur les problèmes méthodologiques généraux¹²⁹ nous avons été conduits à limiter nos objets d'étude.

(O1) : Nous limitons notre observation principalement à un seul Land, le Bade-Wurtemberg. Nous étudierons cependant des exemples d'autres Länder pour éclairer le contexte et pour rappeler ces différences.

(O2) : Nous limitons notre étude au collège- lycée d'enseignement général français et au Gymnasium de forme normale du Bade-Wurtemberg.

(O3) : Pour les deux dernières années de lycée et de Gymnasium, nous limiterons notre étude, pour la France à la première scientifique (première S) et à la terminale scientifique (Terminale S) spécialité mathématiques, et pour le Gymnasium au cours approfondi de mathématiques (Leistungskurs) de classes 12 et 13 (avant la réforme de 2002-2003). Nous étudierons les autres filières pour éclairer le contexte.

(O4) : Nous limiterons notre étude à des validations produites et présentées institutionnellement comme correctes : validations extraites de manuels de classe ou ouvrages experts¹³⁰, validations produites par des élèves et évaluées comme correctes par des enseignants, ...

On peut certes trouver des manuels de classe avec des validations incorrectes (erreur des auteurs) ou une validation d'élève jugée correcte par un professeur alors qu'elle est incorrecte (erreur de correction). En dehors des erreurs manifestes, on peut imaginer des représentations d'une validation correcte différentes d'un professeur à l'autre (ou d'un auteur de manuel à l'autre). Ceci est mis en évidence par exemple par [Houdebine et al 1998, p.69-79]. On peut alors conjecturer que les fluctuations dans les représentations observées chez les enseignants français augmentent si on considère des enseignants français et des enseignants allemands. Nous n'étudierons pas directement les représentations de la validation chez les enseignants au moyen de questionnaires ou d'entretiens faute de temps : ce serait l'objet de recherches ultérieures. Cependant nous aborderons implicitement ce problème, car examiner des manuels scolaires écrits par des enseignants ou examiner des copies d'élèves corrigées par des enseignants, c'est accéder implicitement aux représentations de la validation chez les auteurs ou les correcteurs.

¹²⁹ Paragraphe 1.3

¹³⁰ produits par exemple par des membres de la noosphère.

Par conséquent ne seront pas objets de cette étude notamment:

- l'étude expérimentale de situations d'enseignement, par exemple dans la perspective d'une ingénierie didactique ou tout simplement dans une perspective comparative comme chez [Knipping 2003a],
- l'étude de difficultés des élèves dans cet apprentissage et l'analyse des fautes des élèves,
- les représentations de la validation chez les élèves,
- les représentations de la validation chez les enseignants, étudiées notamment à l'aide de questionnaires ou d'entretiens cliniques.

Ces objets d'étude complèteraient de manière intéressante nos études mais nous avons dû limiter dans l'espace et le temps nos recherches.

1.4.3.2 Etudes menées

Nous aborderons les différentes études suivantes qui concourent à répondre à nos différentes questions de recherches et à valider l'hypothèse de recherche (H0).

(E0) Comparaison de réflexions et de recherches sur la validation ou sur des comparaisons franco-allemandes

La première étude consiste en la comparaison de quelques réflexions ou recherches françaises et allemandes sur la validation dans l'enseignement des mathématiques. Elle permettra de dégager une typologie des arguments utilisés dans les validations et de dégager éventuellement des éléments culturels dans les conceptions de la validation. Nous observerons si de précédentes réflexions ou recherches valident en partie nos hypothèses de recherches. L'étude des comparaisons franco-allemandes permettra d'avoir des informations méthodologiques sur la comparaison franco-allemande et d'éclairer la comparaison sur la validation par les informations livrées par les autres comparaisons.

(E1) Comparaison de programmes d'enseignement et de textes officiels d'accompagnement

La seconde étude permettra d'observer dans des programmes d'enseignement et textes officiels la place et le statut de la validation, de déterminer si la démonstration est un objet à enseigner. Cette étude vise principalement à valider l'hypothèse de recherche (H1).

Elle doit permettre également de dégager des éléments de description des validations (arguments utilisés, fonctions, technologies, techniques, tâches, ...).

(E2) Comparaison de manuels scolaires

La troisième étude examine des manuels scolaires pour vérifier :

- d'une part si la démonstration apparaît comme objet d'enseignement (hypothèse H2),
- d'autre part si la validation apparaît comme double transposition de la validation mathématique et de la validation non mathématique (hypothèse H3).

(E4) Comparaison de productions d'élèves

La quatrième étude analyse des productions d'élèves pour permettre de valider notamment l'hypothèse (H4).

Pour chacune de ces études nous préciserons :

- la motivation de l'étude,
- le protocole de l'étude,
- la mise en oeuvre de l'étude,
- la conclusion de l'étude.

1.4.4 Hypothèses de travail

Nous appuions nos études sur les hypothèses de travail suivantes.

(T1)¹³¹ : Nous faisons l'hypothèse de travail que les interprétations, approximations ou erreurs de traduction ne modifieront pas fondamentalement le cours et les conclusions de notre recherche.

(T2)¹³² : Dans une institution didactique I_D transpositive du savoir mathématique de l'institution I_S , nous supposons qu'on essaie de respecter la règle de non contradiction de la vérité suivante : soit une proposition P ayant une signification dans I_S et dans I_D , P est vraie dans I_D si, et seulement si, P est vraie dans I_S .

¹³¹ Voir paragraphe 1.3.2.2

¹³² Voir paragraphe 1.2.2.4

2 Comparaison de réflexions et de recherches sur la validation ou sur la comparaison franco-allemande

2 Comparaison de réflexions et de recherches sur la validation ou sur la comparaison franco-allemande	142
Organisation du chapitre 2	143
2.1 Motivation et protocole de l'étude	144
2.2 Conceptions de la validation en France :	145
2.2.1 Balacheff	145
2.2.1.1 Aspect social de la preuve	145
2.2.1.2 Typologie de preuves	146
2.2.2 Duval	148
2.2.2.1 Le problème de l'explicitation dans les argumentations	148
2.2.2.2 Absence de validité des argumentations	148
2.2.2.3 Linguistique et discursif	150
2.2.2.4 Typologie des pas de raisonnement	151
2.2.2.5 Analyse des exemples de pas de raisonnement	151
2.2.2.6 Registres de représentation sémiotique	157
2.2.3 Arsac	158
2.2.4 IREMs de Grenoble et de Rennes	159
2.2.4.1 La démonstration est un texte	159
2.2.4.2 Le rôle de la figure	160
2.2.4.3 Faire exister la phase heuristique	160
2.2.4.4 Construire la rationalité pour enseigner la démonstration	161
2.3 Conceptions de la validation en Allemagne :	162
2.3.1 Stein	162
2.3.1.1 Le niveau abstrait de la théorie logique mathématique	162
2.3.1.2 Le niveau de la théorie mathématique	163
2.3.1.3 Le niveau de la théorie organisée localement	163
2.3.1.4 Le niveau de la théorie quotidienne	164
2.3.1.5 Un exemple de preuve du niveau de la théorie quotidienne :	165
2.3.2 Holland	166
2.3.2.1 La démonstration mathématique	166
2.3.2.2 Trois niveaux de preuves	166
2.3.3 La preuve dans des manuels de didactique	169
2.3.3.1 Analyse de la preuve, de la justification et de l'argumentation	169
2.3.3.2 Base d'argumentation, aspect subjectif de la preuve	173
2.3.3.3 Pratique de la preuve dans l'enseignement	174
2.3.3.4 Argumentation et démonstration	174
2.4 Différentes comparaisons franco-allemandes	175
2.4.1 Image des mathématiques chez les élèves	175
2.4.2 Etude TIMSS	178
2.4.2.1 Un exemple d'effet de structure	178
2.4.2.2 Tâches de raisonnement	180
2.4.3 La démonstration en classe du théorème de Pythagore (Knipping)	181
2.5 Conclusion	186
2.5.1 Typologie des arguments	186
2.5.2 Types d'arguments et fonctions des validations	188
2.5.3 Autres informations	192

Organisation du chapitre 2

Nous commencerons par étudier des conceptions de la validation en France (2.2), d'une part chez quelques chercheurs dont les contributions ont marqué le champ de recherche sur l'enseignement de la démonstration : Balacheff (2.2.1), Duval (2.2.2) et Arsac (2.2.3). D'autre part nous poursuivons par l'étude d'un bilan récent des IREM de Grenoble et de Rennes (2.3.4) sur les contributions de la didactique française à la réflexion sur l'enseignement de la démonstration, ce qui nous permet de citer les travaux et les problématiques d'autres chercheurs français.

Nous étudions ensuite des conceptions de la validation en Allemagne (2.3), d'abord chez quelques chercheurs : Stein (2.3.1) et Holland (2.3.2). Nous poursuivons par l'étude du thème de l'enseignement de la démonstration dans quelques manuels de didactiques récents, qui permettent de rendre compte de différents travaux sur l'enseignement de la démonstration, de la didactique allemande.

Nous nous intéressons enfin à divers travaux de comparaisons franco-allemandes (2.4), soit qu'ils puissent éclairer le contexte de notre recherche (Cabassut 2.4.1), ou la méthodologie comparative (2.4.2), soit qu'ils se sont intéressés au thème de la démonstration (Knipping 2.4.3).

En conclusion nous proposons (2.5) une typologie des arguments (2.5.1), que nous relient suivant les pays aux fonctions des validations (2.5.2), en donnant quelques premiers éclairages à nos questions (2.5.3).

2.1 Motivation et protocole de l'étude

Pour comparer les réflexions et les recherches sur la validation en France et en Allemagne nous allons commencer par examiner de manière approfondie quelques travaux de chercheurs qui nous semblent plus particulièrement intéressants pour éclairer notre problématique ou notre cadre théorique. Ensuite nous essaierons de passer en revue les principales positions dans chaque pays, même s'il est difficile d'être complet en la matière.

Les principales revues que nous avons consultées sont :

- pour la France : *Recherches en Didactique des Mathématiques* (RDM) de l' ARDM¹³³, *Repères- IREM*¹³⁴, le *Bulletin de l'APMEP*¹³⁵
- pour l'Allemagne : *Mathematik Unterricht* de la MNU¹³⁶, *Journal für Mathematik-Didaktik* (JDM),
- des revues internationales : *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), *Educational Studies in Mathematics*, *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*.

Nous avons également consulté des ouvrages traitant de la validation dans l'enseignement des mathématiques.

En principe nous avons consulté les textes récents (dix dernières années) mais nous sommes remontés à des textes plus anciens pour les contributions qui nous paraissaient essentielles.

Enfin la décision de retenir pour une étude plus approfondie un auteur quant à la pertinence de ses travaux par rapport à notre problématique et à notre cadre théorique reste très subjective.

Nous espérons ne pas avoir fait d'oubli important.

Cet examen nous permettra d'observer s'il y a des différences de conceptions d'un pays à l'autre, si des éléments culturels apparaissent et si des typologies de validations sont proposées. Certaines de ces conceptions peuvent être développées par des membres de la noosphère définie par [Chevallard 1985, p.23] : « à la périphérie du système d'enseignement [...] on est ici dans la sphère où l'on pense - selon des modalités parfois différentes- le fonctionnement didactique. Pour cela, j'ai avancé pour elle le nom parodique de noosphère. Dans la noosphère donc, les représentants du système

¹³³ Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

¹³⁴ Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

¹³⁵ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

¹³⁶ Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.[Association allemande pour le soutien de l'enseignement mathématique et scientifique (association enregistrée), traduction R.C.]

d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignant au simple professeur militant), rencontrent, directement ou non (par le libelle dénonciateur, la requête comminatoire, le projet transactionnel, ou les débats assourdis d'une commission ministérielle), les représentants de la société (les parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique)». C'est pourquoi il sera intéressant d'observer si ces conceptions se retrouvent dans les programmes, les textes d'accompagnement, les manuels scolaires ou les validations produites par des élèves.

L'examen des recherches effectuées sur la validation nous permettra d'observer si les résultats de ces recherches valident en partie (ou infirment) nos propres hypothèses de recherche.

Enfin l'examen des réflexions et recherches allemandes pourra contribuer à une meilleure connaissance en France des travaux allemands.

2.2 Conceptions de la validation en France :

2.2.1 Balacheff

Nous retiendrons deux dimensions des travaux de Balacheff : l'aspect social de la preuve et la proposition de typologie des preuves.

2.2.1.1 Aspect social de la preuve

Balacheff [1987, p.148] distingue l'**explication** qui est « un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat », la **preuve** qui est « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » et la **démonstration** qui est la forme de preuve de la communauté mathématique, « suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini ».

Avec ces définitions, une démonstration est une preuve pour la communauté mathématique, mais pas obligatoirement une preuve pour la communauté classe, si la démonstration ne rend pas intelligible à la classe le caractère de vérité. Une démonstration n'est pas toujours une explication (et intervient).

Si on considère que la classe n'est pas une communauté mathématique mais une communauté didactique, alors la forme de preuve adoptée dans l'enseignement des mathématiques n'est pas toujours une démonstration.

Nous intégrons cette dimension sociale en faisant dépendre la validation de l'institution dans laquelle elle se développe. Ensuite la fonction de communication est bien une fonction sociale au sein de cette institution.

2.2.1.2 Typologie de preuves

Balacheff propose une typologie des preuves produites par les élèves, pour des recherches qu'il a menées essentiellement au niveau du collège : preuve pragmatique et preuve intellectuelle. « Nous appellerons preuves pragmatiques ces preuves fondées sur l'action effective mise en œuvre sur des représentations d'objets mathématiques » [Balacheff 1999, p 201]. La **preuve pragmatique** permet l'accès, par l'élève lui-même, à l'expérience (vérification à la règle ou au compas, observation, calculatrice,...) pour réaliser le contenu d'une affirmation. « La preuve pragmatique est hypothéquée par la singularité de l'événement qui la constitue, il faut en accepter le caractère générique. Elle est de plus tributaire d'un contingent matériel : outils imprécis, défaut de fonctionnement » [Balacheff 1987, p 157]. « Lorsque cet accès à la réalisation n'est pas possible alors les validations sont nécessairement intellectuelles. La production de ces **preuves intellectuelles** requiert notamment l'expression langagière des objets sur lesquelles elles portent et de leurs relations » [Balacheff 1987, p 157].

Parmi les preuves pragmatiques, Balacheff [1987, pp. 163-165] distingue **l'empirisme naïf** qui « consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion », **l'expérience cruciale** pour laquelle « l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible », **l'exemple générique** « qui consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus ».

L'expérience mentale¹³⁷ « invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier [...] C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles ».

« A partir de l'expérience mentale, les processus de décontextualisation, détemporalisation, dépersonnalisation pourront se poursuivre, permettant l'expressions de preuves consistant en un « **calcul sur des énoncés** » marquant le passage des actions intériorisées et désignées, à un calcul sur des relations » [Balacheff 1988, p.570]

Pour Balacheff, la **démonstration** se situe au-delà de l'expérience mentale et se caractérise par un formalisme naïf, intégrant langue naturelle et langue symbolique et devenant un outil de calcul sur les énoncés, un corpus de connaissances théoriques, institutionnalisées et reconnues, et une procédure de validation obéissant à des règles de déduction bien précises.

Les premiers travaux de Balacheff [1987, 1988] s'intéressent aux productions de preuves chez les élèves mais également dans le développement historique des mathématiques.

Caractérisons la terminologie de Balacheff avec les critères que nous avons définis dans notre cadre théorique et proposons une extension de sa typologie aux validations.

¹³⁷ Cette expression n'est pas sans rappeler Lakatos dans *Proofs and refutations* (Cambridge University Press, 1976, p. 9) qui définissait la démonstration comme une « expérience mentale ».

Preuve de Balacheff

Explication

« situer l'explication au niveau du sujet locuteur. C'est d'abord pour lui qu'elle établit et garantit la validité d'une proposition, elle prend racines dans ses connaissances et ce qui constitue sa rationalité, c'est-à-dire ses propres règles de décision du vrai » [IREMs de Grenoble et de Rennes 2003, p.101]

Preuve : explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné

Preuve pragmatique : preuve fondée sur l'action effective mise en œuvre sur des représentations d'objets mathématiques

La source de connaissance est dans l'action et l'expression la plus répandue est l'ostension (opérations et objets donnés à voir)

Empirisme naïf : tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion

Expérience cruciale : généralisation en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible

Expérience mentale : invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier

Exemple générique : réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus

Caractéristiques par rapport à notre cadre théorique

Preuve dont la fonction est d'expliquer et de vérifier dans l'institution formée par le locuteur et éventuellement par l'interlocuteur (s'il partage la théorie et la logique de l'institution formée par le locuteur).

Preuve dont la fonction est de vérifier et d'expliquer dans l'institution formée par le locuteur et les interlocuteurs qui partagent la théorie et la logique du locuteur

Preuve comportant un argument pragmatique.

Registre de présentation : graphique, gestuel ou matériel.

Preuve constituée par un argument par induction incomplète (il s'agit bien de preuve et non d'argumentation puisqu'on tire la certitude de la vérité et non sa plausibilité). Le terme « observation » renvoie effectivement à un côté visuel qui est de l'ordre de l'action donc pragmatique ; mais s'il s'agit d'une vérification par le calcul sur un petit nombre de cas, on est dans la preuve intellectuelle : elle ne devrait donc plus être classée dans les preuves pragmatiques tout en recourant à une induction incomplète et ne devrait pas relever de l'empirisme naïf.

Preuve constituée par un argument par induction incomplète.

Nous avons de la difficulté à caractériser ce type de preuve dans notre catégorisation. On peut considérer que la catégorie « expérience mentale » caractérise une technique de preuve plutôt qu'une preuve. Ici la preuve continue à se fonder sur un argument pragmatique, même si l'action est intériorisée. C'est plutôt au niveau des registres de la technique utilisée que se situe le changement : on passe d'une technique de nature matérielle ou gestuelle, qui caractérise l'action à une technique écrite ou orale qui caractérise l'intériorisation et le détachement de l'action.

Tout comme précédemment, on peut considérer que cette catégorie caractérise une technique de preuve plutôt qu'une preuve. Au lieu de formaliser par un discours complexe (par exemple un raisonnement par récurrence) on va traiter un exemple en faisant apparaître le caractère générique de ce traitement : on est bien dans le choix de la technique, manière de réaliser la

Preuve intellectuelle : détachées de l'action, inscrite dans des conduites langagières qui expriment les objets et leurs relations et calculent leurs relations

Formulation : du langage de la familiarité (qui port la marque du contexte de l'action, du temps et du locuteur énonçant la preuve) et au langage fonctionnel (décontextualisé, dépersonnalisé, détemporalisé, outil de calcul intellectuel, avec introduction d'une langue symbolique,)

Démonstration : preuve de la communauté mathématique.

Formulation : formalisme naïf (association de la langue naturelle et de la langue symbolique)

tâche.

Preuve qui n'utilise plus d'arguments pragmatiques.

Registre de présentation : langue naturelle, langue symbolique, représentation graphique.

Preuve dont la fonction est de vérifier et d'expliquer dans l'institution formée par la communauté mathématique

Registre de présentation : formalisme naïf.

Nous pourrions nous inspirer de typologie de Balacheff, en remplaçant le terme preuve par argumentation, on peut définir les arguments d'empirisme naïf, d'expérience cruciale, d'exemple générique également pour les raisonnements de plausibilité.

2.2.2 Duval

[Duval 1995] propose une réflexion approfondie sur le raisonnement, l'argumentation et la démonstration.

2.2.2.1 Le problème de l'explicitation dans les argumentations

Duval pose le problème des raisonnements produits et insuffisamment explicites quant aux raisons qui les constituent. Duval cite Grize : « moins un adulte connaît le sujet dont il parle, plus il se contente d'une juxtaposition de faits dont il a été témoin plus ou moins direct » [Grize, 1982, p. 186]. Pour Duval l'argumentation est une accumulation d'arguments qui n'ont pas de statuts explicite, et qui ne sont pas liés entre eux par une structure d'enchaînement que l'on puisse valider. « En l'absence d'une organisation théorique préalable du champ de connaissances, les propositions qui sont mobilisées dans une argumentation ne peuvent avoir qu'un statut implicite. Et si elles ont un statut explicite, celui-ci ne peut être qu'instable au cours même de la discussion » [Duval, 1992, p.52].

Sa réflexion se veut beaucoup plus générale que notre réflexion, que nous avons limitée au raisonnement de validation pour qui la fonction première est de vérifier (de manière plausible ou nécessaire) la vérité d'une proposition. Nous ne considérerons pas les raisonnements pour lesquels l'émetteur ou le récepteur ne peuvent pas expliciter les règles d'inférence, en se limitant à une juxtaposition d'arguments sans liens explicitables entre eux.

2.2.2.2 Absence de validité des argumentations

« Comme l'explication, le raisonnement avance aussi une ou plusieurs raisons. Mais le rôle des raisons avancées y est tout différent : il est de « communiquer » aux affirmations qui sont à justifier leur force d'argument. Autrement dit, la valeur épistémique¹³⁸ des arguments joue un rôle essentiel dans la démarche d'un raisonnement [...] une argumentation n'est pas une démonstration [...] Pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide¹³⁹. L'argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n'obéit pas à des contraintes de validité mais à des contraintes de pertinence. Cette différence est classiquement exprimée par le fait que l'une aurait pour objectif la vérité et l'autre viserait la vraisemblance et la conviction d'autrui ou de soi-même » [Ibid. pp.41-43]. « Bien qu'elle échappe à tout examen de validité des inférences, l'argumentation est un raisonnement au même titre qu'une démonstration. La différence entre argumentation et démonstration se fait dans le mode d'organisation. L'organisation d'une argumentation ne prend en compte que la valeur épistémique des propositions liée à la compréhension spontanée de leur contenu sémantique. L'organisation d'une démonstration, au contraire, « fait abstraction » de toute valeur épistémique liée à la compréhension spontanée des propositions pour se centrer exclusivement sur la valeur épistémique dérivée du statut théorique, préalablement fixé, de chaque proposition » [Ibid. p.54]

Nous sommes en accord avec Duval sur les points suivants :

- l'argumentation vise la vraisemblance, que nous désignons par plausibilité,
- dans les argumentations spontanées, les statuts des propositions au sens où nous l'avons défini avec le modèle de Toulmin (donnée, règle de validation, conclusion) sont moins explicites que dans une démonstration mathématique formellement bien rédigée,
- dans les argumentations spontanées, la théorie (au sens anthropologique défini précédemment) est moins explicite et moins organisée que la théorie mathématique à laquelle se réfère une démonstration.

Par contre nous sommes en désaccord avec Duval sur les points suivants :

- nous considérons que pour qu'il y ait raisonnement de validation il faut que les arguments puissent être décrits selon le modèle de Toulmin, et donc que les statuts des propositions puissent être explicites dans la théorie adoptée par le producteur du raisonnement de validation ; cette explicitation n'est pas obligatoirement présente mais doit être possible : soit l'émetteur du raisonnement produit l'explicitation à la

¹³⁸ « La valeur épistémique d'un énoncé est le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition. Dans l'instant même de son appréhension, le contenu d'une proposition apparaît évident, ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible, ou simplement possible, ou impossible, ou encore absurde » [Duval 1995, p.219]

¹³⁹ A propos de la validité d'un raisonnement, Duval [1995, p.212] précise : « la validité d'un raisonnement dépend du respect de règles pour l'organisation des propositions entre elles, et non pas du contenu des propositions ».

demande du récepteur, soit le récepteur interprète l'implicite et va le rendre explicite (avec le risque d'une fausse interprétation) ; une simple juxtaposition de propositions entre elles sans lien statutaire entre elles ne peut, de notre point de vue, constituer un raisonnement de validation ;

- nous considérons, dans le cadre théorique développé précédemment, qu'une argumentation est valide au sein d'une théorie adoptée par une institution (avec la terminologie précisée précédemment) dès lors que deux conditions sont remplies : d'une part chaque argument de l'argumentation peut être analysé selon le modèle (données, règles de validation, conclusion), d'autre part l'enchaînement des arguments vérifie les conditions d'une analyse séquentielle ou structurelle. Pour Duval seules les démonstrations valides vérifient ces conditions. Pour notre part une argumentation qui ne vérifie pas ces conditions soit ne constitue pas une argumentation de validation, soit constitue une argumentation de validation qui n'est pas valide au sein de l'institution considérée et qui demande à être corrigée ou complétée pour devenir valide.

2.2.2.3 Linguistique et discursif

Dans son étude du raisonnement Duval distingue le niveau linguistique avec les règles syntaxiques et les réseaux sémantiques, et le niveau discursif qui traite de la transmission des connaissances hors la langue.

« Sous le terme « raisonnement » on désigne généralement des démarches très différentes. D'une part, celles qui consistent en des inférences explicites : d'une proposition donnée (ou de plusieurs) on « dérive » l'affirmation d'une autre proposition [...] [Elles] sont intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage... D'autre part, celles inhérentes à n'importe quel acte d'exploration : on procède par anticipations en sélectionnant celles qui sont confirmées [...] [Elles] ne sont pas intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage » [Duval 1995, p.209].

« Les formes de raisonnement intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage, naturel ou formel, sont très variées. On distingue classiquement le syllogisme aristotélicien, la déduction à partir d'un système d'axiomes et de définitions, le raisonnement par l'absurde, les inférences sémantiques et l'argumentation c'est-à-dire toute justification ou toute réfutation spontanée d'un propos dans une discussion ou un débat » [Ibid. p.211]

Duval ne range par l'induction parmi les formes de raisonnement liées à l'utilisation d'un langage car c'est « une forme de raisonnement étroitement dépendante du domaine d'objets sur lequel elle porte. L'expérience des objets auxquels réfèrent les propositions énoncées (expérience qui se fonde sur l'observation de régularités, sur des constats perceptifs, sur des anticipations ...) compte au moins autant dans la démarche de généralisation, que les règles d'inférence... Il ne peut donc pas être entièrement considéré comme un raisonnement entièrement lié à l'utilisation du langage » [Ibid. p.212]

Duval distingue pour une proposition énoncée, son statut théorique si cette proposition est énoncée dans un cadre théorique – par exemple statut théorique de définition, axiome, règle, hypothèse, ... – et son statut opératoire qui détermine l'organisation interne d'un pas de raisonnement – par exemple statut de prémisse, d'énoncé-tiers ou de conclusion.

L'énoncé-tiers permet le passage des prémisses à la conclusion. Il est différent selon que l'on considère une démonstration ou une argumentation.

Dans une démonstration, il faut vérifier que les conditions que doit vérifier l'énoncé-tiers sont remplies et il faut détacher les conséquences de l'énoncé-tiers en conclusion : la vérification et le détachement portent sur des propositions.

Dans une argumentation, « il faut mobiliser le réseau sémantique pour interpréter les relations d'opposition, d'inclusion ou de synonymie entre les termes [...] La conclusion d'un pas d'argumentation peut affirmer autre chose que ce qui est dit dans l'énoncé-tiers. Elle constitue un apport ou un déplacement de contenu informatif par rapport à l'énoncé-tiers » [Duval 1992, pp.45-46].

2.2.2.4 Typologie des pas de raisonnement

[Duval 1995, p.237-238] propose une classification des pas de raisonnement suivant les critères suivants:

- « la présence ou l'absence de statut opératoire explicitement déterminé avant le raisonnement et neutralisant les valeurs épistémiques sémantiques pouvant être reconnues aux propositions »,
- « le passage de propositions données à une autre proposition énoncée comme sa conséquence peut s'effectuer directement [raisonnements purement « logiques »] ou par l'intermédiaire d'un énoncé-tiers [raisonnements « théoriques » ou argumentations] »,
- le nombre de prémisses.

En combinant les deux premiers facteurs on a quatre organisations des pas de raisonnement :

- sans énoncé-tiers et sans statut opératoire : inférence sémantique,
- avec énoncé-tiers et sans statut opératoire : inférence discursive,
- sans énoncé-tiers et avec statut opératoire : syllogisme aristotélicien ou classique,
- avec énoncé-tiers et avec statut opératoire : déduction.

Par rapport à notre cadre théorique on serait tenter de rapprocher le triplet de Duval (prémisses, énoncé-tiers, conclusion) de notre triplet (données, règle de validation, conclusion). Pourtant il est une différence essentielle : nous considérons que nous pouvons attacher à tout argument une structure (données, règle de validation, conclusion) alors que dans la typologie de Duval le triplet (prémisses, énoncé-tiers, conclusion) n'est attaché qu'au déductions.

Pour mieux comprendre nos différences par rapport à Duval, analysons les exemples proposés par Duval [Ibid.p.240-246] au moyen du modèle de Toulmin (données ; règle de validation ; conclusion).

2.2.2.5 Analyse des exemples de pas de raisonnement

Le premier exemple concerne la déduction : **statut opératoire et recours à un énoncé-tiers.**

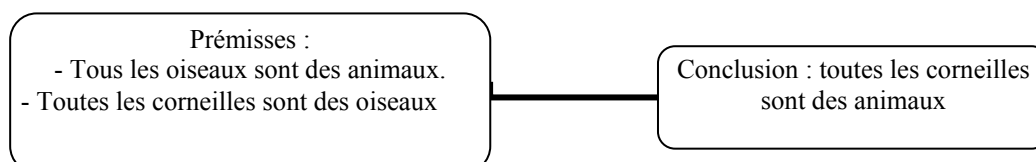
On peut le décrire dans le tableau suivant.

Prémisses	Enoncé-tiers	Conclusion
1) [AC] et [BC] sont parallèles 2) [AB] et [CD] sont de même longueur	Si deux segments sont (1) parallèles et (2) de même longueur alors leurs extrémités sont les sommets d'un parallélogramme	ABCD est un parallélogramme

L'énoncé-tiers a un statut théorique, avant le raisonnement, dans le cadre théorique où on se situe : il s'agit par exemple d'un théorème du cours de mathématique d'une classe de collège. Ce statut théorique d'énoncé-tiers fait que l'énoncé est composés de deux parties : des conditions qu'il faudra vérifier lors du raisonnement et une conséquence qu'il faudra détacher en conclusion lors du raisonnement. C'est son statut théorique avant raisonnement qui donne à l'énoncé-tiers son statut opératoire lors du raisonnement.

Dans le cadre de notre modélisation (données, règle de validation, conclusion) : les prémisses correspondent aux données ; l'énoncé-tiers est la règle principale de la règle de validation et la vérification, le détachement et le modus ponens font partie des règles secondaires de la règle de validation ; les conclusions se correspondent.

L'exemple suivant est le syllogisme aristotélicien : **pas d'énoncé-tiers mais statut opératoire pour les propositions.**



On peut reformuler cet exemple avec le modèle de Toulmin comme nous l'avons fait précédemment¹⁴⁰ en faisant apparaître une règle de validation.

Données	Règle de validation	Conclusion
Toutes les corneilles sont des oiseaux	Règle principale : Tous les oiseaux sont des animaux. Règles secondaires: Modus ponens, instanciation universelle, généralisation universelle	Toutes les corneilles sont des animaux

Etudions un autre exemple proposé par Duval illustrant les inférences sémantiques, liées à la compréhension d'une langue : **pas de statut opératoire et pas d'énoncé-tiers.**

« Il ne prend plus de caviar, donc il prenait du caviar »

Dans cet exemple la règle d'inférence n'est pas donnée. A propos des règles d'inférence implicites, [Ducrot 1972, p.7] précise : « L'énoncé *X, donc Y* est alors destiné à faire entendre une troisième proposition *Z* qui doit être vraie pour que *Y* puisse effectivement se déduire de *X* [...] Dans ce cas la forme de raisonnement utilisé est un syllogisme, dont on formule explicitement une prémisse (la mineure) ainsi que la conclusion, afin de présenter, implicitement, l'autre prémisse (la majeure) ». Comme nous l'avons écrit, un raisonnement de validation doit avoir une règle d'inférence. En l'absence du locuteur ayant produit ce raisonnement et qu'il conviendrait d'interroger pour expliciter la règle d'inférence qu'il utilise, nous allons conjecturer une règle d'inférence possible. « La compréhension des « présupposés » d'un énoncé, c'est-à-dire de cette partie du contenu sémantique qui n'est pas explicitement affirmé, mais qui est conservée par des transformations interrogative ou négative de l'énoncé, peut aussi être considéré comme une inférence sémantique » [Duval 1995, p.239]. Il y a dans la compréhension des « présupposés » d'un énoncé par le récepteur un risque de fausse interprétation, qui peut être levé en demandant à l'émetteur d'explicitement sa pensée. Ce problème de l'implicite et des présupposés existe également dans les démonstrations mathématiques, comme l'a mis en évidence [Houdebine et al 1998, pp.39-41].

1^{ère} interprétation : On peut d'abord supposer que le raisonnement est constitué de deux arguments.

Le premier argument consiste en une reconfiguration des prémisses.

¹⁴⁰ Exemple 2 du paragraphe 1.1.8.4

La proposition C = « Il ne prend plus de caviar » peut se reformuler en deux propositions conjointes : A = « il ne prend pas de caviar » et B = « il prenait du caviar ». La proposition B traduit la nuance introduite par la négation « ne...plus » dans C qui indique l'arrêt de la prise de caviar. On a C = (A et B). Lorsqu'on infère de C à (A et B) on opère une reconfiguration sémantique basée sur le contenu de C.

Lorsqu'on infère, à partir de A et B, la proposition B on opère une simplification¹⁴¹ formelle¹⁴², basée sur la règle formelle (si A et B alors A).

On a donc le schéma suivant :

Données	Règle de validation	Conclusion
Il ne prend plus de caviar	Inférence sémantique : reconfiguration sémantique	Il prenait du caviar et il n'en prend plus
Il prenait du caviar et il n'en prend plus	Simplification formelle : si (A et B) alors A	Conclusion : il prenait du caviar

Ce schéma pourrait traduire le discours suivant :

« Il ne prend plus de caviar, c'est-à-dire qu'il prenait du caviar et qu'il n'en prend pas, donc, en simplifiant, il prenait du caviar. »

2nde interprétation : On peut imaginer que le locuteur explique le passage de la prémisse à la conclusion par une seule règle d'inférence, synthèse immédiate des deux précédentes, et dans ce cas, en l'absence de citation de la règle de simplification formelle, on parlera de simplification sémantique.

Données	Règle de validation	Conclusion
il ne prend plus de caviar	simplification sémantique	il prenait du caviar

Ce schéma pourrait traduire le discours suivant :

« Il ne prend plus de caviar, donc en simplifiant, il prenait du caviar. »

¹⁴¹ Le terme simplification est emprunté à [Hottois 2002, p.85].

¹⁴² On comprend que la règle formelle de simplification est indépendante du contenu des propositions de la règle.

En l'absence de règles d'inférence explicitement formulées on voit la difficulté à analyser le raisonnement.

Duval propose une variante avec le raisonnement suivant.

« Il ne prend plus de caviar. Il est donc capable de s'en priver. »

La proposition C = « Il ne prend plus de caviar » peut se reconfigurer en deux propositions conjointes : A = « il ne prend pas de caviar » et B = « il prenait du caviar ». On peut alors reconfigurer la proposition A en « il se prive de caviar » que l'on simplifie en D = « il est capable de se priver de caviar ». Il s'agit bien d'une simplification sémantique car, quand on est capable de se priver de caviar, cela ne signifie pas qu'on s'en prive actuellement. Donc on est bien dans un travail de reformulation du contenu par simplification. On a donc eu une double simplification : C simplifié en A et A simplifié en D.

On peut supposer que le locuteur opère ces simplifications globalement (sans décomposer) et nous qualifierons ce traitement global d'inférence sémantique.

Le dernier exemple concerne les inférences discursives : **recours à un énoncé-tiers sans statut opératoire.**

« Les inférences discursives sont celles qui utilisent un énoncé tiers n'appartenant pas un corpus théorique. L'énoncé tiers peut être une déclaration, un constat lié à un contexte particulier, un principe s'imposant comme une norme dans un milieu social... C'est dans le cadre de l'argumentation que ces inférences sont effectuées. A la différence des deux types de pas précédents, les inférences discursives ne dépendent donc pas de l'organisation sémantique du lexique d'une langue. Cependant le passage d'une proposition à la conclusion à l'aide d'un énoncé-tiers s'effectue par des rapports sémantiques comme celle d'instanciation, de subsumption, ou d'opposition... » [Duval 1995, p.242].

Il semblerait que Duval veuille dire que il n'y a pas d'opération de vérification des prémisses dans l'énoncé-tiers et de détachement, à partir de l'énoncé-tiers, de la conclusion. Ce sont des relations sémantiques d'instanciation (le fait de créer une instance d'un objet à partir de sa classe), de subsumption (généralisation) ou d'opposition. De plus le statut opératoire n'est pas explicitement déterminé avant le raisonnement et ne neutralise pas les valeurs épistémiques sémantiques pouvant être reconnues aux propositions.

L'argument d'autorité nous semble un bon exemple de principe s'imposant comme une norme dans un milieu social qui reconnaît l'autorité et comme un exemple d'inférence discursive au sens de Duval.

Etudions l'exemple proposé par [Ibid. p.242] extrait des *Mains sales* (Tabl.V, scène V) de Sartre. Même si l'exemple proposé par Duval ne nous semble pas relever du raisonnement de validation, il nous semble intéressant pour illustrer différents points : distinction entre raisonnement de validation et autres raisonnement, différentes interprétations dans l'analyse d'un raisonnement, notion d'inférence discursive développée par Duval.

Extrait :

« Jessica : Hugo tu parles contre ton coeur. Je t'ai regardé pendant que tu discutais avec Hoerderer :

0 il t'a convaincu.

Hugo :

1 Il ne m'a pas convaincu.

2 Personne ne peut me convaincre qu'on doit mentir aux camarades.

3a Mais s'il m'avait convaincu

3b ce serait une raison de plus pour le descendre

4 Parce que ça prouverait qu'il en convaincra d'autres »

« Il y a deux pas de raisonnement : l'un est simple (2-1) et l'autre est une imbrication de deux pas l'un vers l'autre (3a-2-4, 3a-4-3b) [...] « mais » oppose deux propositions, l'une étant la conclusion du premier pas et l'autre la prémisse de l'autre pas » [Ibid. p.249]

Duval voit l'inférence discursive suivante :

Prémisse	Enoncé-tiers	Conclusion
s'il m'avait convaincu	Personne ne peut me convaincre qu'on doit	ça prouverait qu'il en convaincra d'autres

« Organisation d'une inférence discursive fonctionnant selon les opérations sémantiques de subsumption et d'opposition ; il y a une double opposition de quantité (il/personne) et de modalité (fait contingent/impossibilité) entre la prémisse et l'énoncé tiers. L'hypothèse contrefactuelle prise comme prémisse contredit l'énoncé-tiers et entraîne non pas son rejet mais la conclusion « il en convaincra d'autres ! » » [Duval 1995, p.243]. Il semblerait que « il m'avait convaincu » infère par une relation d'inclusion-subsumption « il en convaincra d'autres » sans passer par l'énoncé-tiers.

Ce dernier exemple montre combien en l'absence d'explicitation du producteur du raisonnement les interprétations du récepteur peuvent être multiples. Nous sommes un peu perplexe par l'interprétation de l'inférence discursive ci-dessus. Pour notre part nous

n'interprétons pas de raisonnement avec la structure (3a-2-4). Nous l'interprétons avec la structure (3a-4-3b) – structure envisagée également par Duval - comme suit :

Données	Règle d'inférence	Conclusion
s'il m'avait convaincu	Induction : si quelqu'un convainc une personne alors il peut en convaincre d'autres	ça prouverait qu'il en convaincra d'autres
ça prouverait qu'il en convaincra d'autres	Règle conditionnelle pour descendre quelqu'un : Si quelqu'un peut convaincre de mentir alors il faut le descendre	ce serait une raison de plus pour le descendre

Le premier argument repose sur une induction qui généralise à partir d'un cas particulier à d'autre cas. On peut se demander d'ailleurs si ce ne serait pas plutôt une règle d'analogie : celui qui m'a convaincu de manière analogue convaincrat d'autres.

Le second argument repose sur une règle de validation de l'institution formée par un groupe des communistes illyriens. Dans cette institution on a la règle suivante : si quelqu'un peut convaincre de mentir alors il doit être exécuté. Cette règle n'est bien entendu pas écrite dans un corpus théorique de règles de fonctionnement du groupe. Elle est sous-entendue (c'est notre interprétation) par Hugo comme une règle rencontrant l'assentiment des membres du groupe. On voit d'ailleurs ici une différence entre une théorie mathématique où un axiome est admis explicitement en début de construction axiomatique de la théorie (cependant lors d'une construction « heuristique » de la théorie on peut imaginer l'admettre en cours de construction), alors que dans la « théorie »¹⁴³ du groupe communiste illyrien précédent, la règle se « découvre » dans l'action (ou la conversation).

De plus, l'argumentation développée ici ne nous semble pas relever d'une argumentation de validation de la vérité d'une proposition. L'argumentation développée ici relève du choix d'une décision dans l'action. Quelle est la bonne décision à prendre ? On n'est plus dans la recherche du vrai mais dans la recherche du bien (ou du mal). De ce point de vue, « convaincre de mentir » est mal et justifie d' « être descendu ».

¹⁴³ Au sens général donné dans notre cadre théorique

2.2.2.6 Registres de représentation sémiotique

Dans la description des techniques de validation nous avons souligné leur nature ostensive¹⁴⁴ en référence aux travaux de Chevallard : « Nous caractériserons les différents objets ostensifs par le registre (oral, écrit, graphique, gestuel, matériel) auquel ils appartiennent » [Bosch Chevallard 1999, p.14]. Duval a élaboré une théorie des registres de représentation sémiotique [Duval 1995, chap.1] beaucoup plus complexe, dont nous nous inspirons pour définir deux catégories d'inférence¹⁴⁵ : les inférences au sein d'un même registre, que Duval qualifierait de traitement (par exemple la paraphrase dans la langue naturelle ou le calcul dans la langue symbolique, la reconfiguration des figures géométriques), et les inférences d'un registre à l'autre, que Duval qualifierait de conversion (par exemple l'illustration qui convertit d'une langue dans une figure, la traduction d'une langue en une autre, la description d'une figure dans une langue).

Nous avons repris les exemples proposés par Duval en montrant qu'on pouvait leur associer des règles d'inférences, à partir du schéma proposé par Toulmin. Ceci montre que la notion de règle d'inférence proposée par Toulmin ne correspond pas tout à fait à la notion d'énoncés-tiers proposé par Duval. Et on aura compris que nous nous plaçons dans le cadre théorique proposé par Toulmin et non pas dans celui proposé par Duval.

Cependant la réflexion de Duval sur les raisonnements non mathématiques comme l'inférence sémantique ou l'inférence discursive, nous a permis de définir des règles de validation (reconfiguration sémantique, simplification sémantique, simplification formelle) correspondantes. De la même manière nous avons été amenés à distinguer les inférences intra-registres et inter-registres.

2.2.3 Arzac

Un article d'Arzac propose de « faire le bilan des recherches en didactique des mathématiques concernant l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration » [Arzac 2003, p.203].

Arzac souligne l'aspect social de la démonstration, rencontré déjà chez Balacheff dans les preuves spontanées chez les élèves, et chez [Legrand 1988] à propos du débat scientifique où se discutent collectivement des énoncés essentiellement conjecturaux, principalement dans le registre oral : il est important de définir des règles d'organisation du débat où le doute doit

¹⁴⁴ Paragraphe 1.2.2.2

¹⁴⁵ En adoptant la définition large de [Oléron 1996, p.57] : « l'inférence consiste dans le passage d'un donné ou admis initial à un admis qui est accepté à cause de sa connexion avec celui-ci »

être possible, chacun doit pouvoir émettre ses conjectures, le maître doit accompagner le débat sans le diriger, le droit à l'erreur est reconnu.

Arsac propose une initiation au raisonnement déductif en soumettant un problème aux élèves pour qu'ils s'interrogent sur les thèmes suivants :

- « - Un énoncé mathématique est-il soit vrai soit faux ?
- Des exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai.
- Un contre-exemple suffit-il pour affirmer qu'un énoncé est faux ?
- Un dessin suffit-il pour prouver qu'un énoncé (géométrie) est vrai ? » [Arsac 2003, 209]

Arsac rappelle les propositions de Duval sur l'apprentissage de la rédaction de démonstration qui marque une rupture cognitive par rapport à l'argumentation :

- « - Représenter la structure sous-jacente à une organisation déductive des énoncés.
- Articuler la représentation de la structure sous-jacente et l'expression dans le langage naturel.
- Séparer strictement les tâches propres à une démarche de démonstration et celles liées à une situation de résolution de problèmes.
- Ne donner aux représentations de la structure profonde qu'une fonction d'objet transitionnel » [Ibid. p. 215].

Arsac observe qu' « en géométrie, le problème de la généralité n'est pas soulevé, la démonstration se réduit donc au raisonnement déductif, essentiellement en langue naturelle. En algèbre, le raisonnement déductif en langue naturelle disparaît le plus souvent derrière des automatismes de calcul ; le problème de la généralité est réglé par l'usage de la notation littérale, son traitement n'est donc pas explicite » [Ibid. p.221]

Enfin Arsac évoque les recherches sur les logiciels d'apprentissage de la démonstration qui débouchent sur de nouveaux problèmes : la prise en compte des contraintes spécifiques de l'informatique, les difficultés d'automatisation des implicites présents dans les démonstrations, le risque de changement de contrat : plutôt que résoudre un problème de mathématiques on cherche à résoudre un problème de relation avec la machine.

2.2.4 IREMs de Grenoble et de Rennes

Une publication des IREMs de Grenoble et Rennes a pour objectif de « faire, sur quelques questions essentielles liées à l'enseignement de la démonstration, un recensement des idées exposées ces dernières années dans les ouvrages et les articles à ce sujet » [IREMs de Grenoble et de Rennes 2003, p.5] en France.

2.2.4.1 La démonstration est un texte

On y rappelle, à travers l'évocation des travaux de [Duval 1995] et [Houdebine 1998], que la démonstration, distincte de l'argumentation, est d'abord un texte qui se caractérise par le statut opératoire des propositions qui le compose, alors que pour une argumentation le contenu des propositions et leurs relations sémantiques priment. Les démonstrations peuvent

aussi être constituées de raisonnements par l'absurde ou de généralisations à partir de l'établissement d'une propriété sur un objet quelconque et de dénominations d'objets dont l'existence est connue. La pratique écrite apparaît essentielle dans l'apprentissage de la démonstration. Les enseignants, qui jusqu'au collège considèrent le plus souvent la démonstration comme une argumentation, ont des conceptions très variées de la démonstration quant à sa rédaction (recours ou non aux symboles ou aux schémas, ordre d'exposition, commentaires heuristiques ou non, degré d'explicitation, niveau de rigueur et d'exigence) ce qui conditionne les conceptions des élèves qui les imitent. Par exemple considérer la résolution des équations comme une démonstration ou rédiger une démonstration à rebours¹⁴⁶ sont controversés. Pour apprendre à écrire un texte, il faut intégrer les mots et les propriétés « premiers » par des activités autour de la nomination des objets ou à travers la perception et l'action. Certains mots sont pièges car ils ont des sens différents dans la langue naturelle ou dans d'autres disciplines. Le passage de l'oral et l'écrit¹⁴⁷ conduit l'élève à une « désobjectivité de la pensée » difficile qui oblige l'élève à passer d' « une pratique orale de l'écrit » à une « pratique écrite de l'écrit ».

2.2.4.2 Le rôle de la figure

L'apprentissage de la démonstration est essentiellement basé sur la géométrie.

Une figure géométrique, qui est un objet géométrique, une idée décrite par un texte, est distincte du dessin qui en est une représentation¹⁴⁸. L'élève comprend cette figure d'abord par une perception du dessin. Des activités de manipulations et de dessin permettent à l'élève de distinguer l'exact et l'approché, le certain et l'incertain, ce qu'il est licite d'extraire de la figure (informations codées, informations à deviner) et ainsi d'acquérir le sens des notions mises en jeu. L'élève doit apprendre à distinguer les propriétés données au départ ou décodées sur la figure et celles constatées après construction, pour éprouver le besoin de passer de résultats empiriques, expérimentaux (lus ou construits) à des résultats nécessaires et universaux (obtenus de manière déductive), ce qui marque un changement de contrat didactique¹⁴⁹. Dans le contrat, il faut noter qu' « il est courant et accepté de prendre certaines informations sur la figure sans justification [...] pour calculer une mesure d'angle, on écrira cet angle comme sommes d'angles de mesure connue, sans justifier cette décomposition [...] Ainsi les propriétés d'ordre, de

¹⁴⁶ [Antibi 1988], [Beck 2001]

¹⁴⁷ [Duvall 2001 b]

¹⁴⁸ [Parzysz 1988]

¹⁴⁹ [Noirfalisé 1993]

régionnement, dans certains cas d'intersection, peuvent être généralement admises directement de constatation visuelle sur le dessin » [IREMs de Grenoble et Rennes 2003, p.27]. L'élève doit apprendre à reconnaître des figures-clés et à les évoquer mentalement pour résoudre des problèmes.

2.2.4.3 Faire exister la phase heuristique

Les avis s'accordent sur l'importance de la phase heuristique dans l'élaboration de la démonstration avant sa rédaction, pour donner aux élèves une vraie image des mathématiques en les confrontant à des situations de recherche, pour valoriser l'expérimentation de l'élève, pour permettre la construction des objets mathématiques en leur donnant du sens. Pour que l'élève puisse se former une représentation pertinente des objets mathématiques, plusieurs activités de recherche sont nécessaires, avec des changements de registres de représentation, avec des situations où l'objet est outil¹⁵⁰. Les risques des activités heuristiques sont que l'élève ne distingue pas expérimentation, démonstration et recherche, qu'il ne s'approprie pas une problématique posée par le maître, que les activités heuristiques débouchent sur des exercices algorithmisés formels à reconnaître. Certains auteurs proposent différents dispositifs : des situations-problèmes pour montrer l'insuffisance des connaissances acquises pour résoudre un problème et la nécessité d'acquérir de nouvelles connaissances [Brousseau 1998], des problèmes ouverts pour procéder à une activité heuristique et à un débat de validation des conjectures [Arsac, Germain, Mante 1991], des débats scientifiques où la classe fonctionne comme une communauté scientifique recherchant la vérité d'énoncés conjecturaux [Legrand 1988], des narrations de recherche qui décrivent la phase heuristique [IREM de Paris 7 2002].

2.2.4.4 Construire la rationalité pour enseigner la démonstration

Dans l'apprentissage de la démonstration l'élève doit passer de l'empirisme au rationalisme, des vérités de fait aux vérités de nécessité, d'une mathématique de la pratique à une mathématique déductive, du rationalisme de la vie quotidienne au rationalisme scientifique. [Legrand 1988, pp.377-379] soutient que la rationalisation de la vie quotidienne se distingue de la rationalité scientifique sur les points suivants : « les objets du raisonnement [...] n'ont pas besoin d'être formellement définis puisqu'ils préexistent au raisonnement engagé [...], la règle « un contre-exemple suffit pour invalider une proposition » [...] est très inadaptée ici, car le principe de dichotomie et du tiers exclu indispensable pour donner du sens au contre-exemple y est toujours inutilisable (les objets non idéalisés ne

¹⁵⁰ [Douady 1986]

rentrant qu'exceptionnellement dans une véritable logique de type vrai/faux, zéro ou un, oui/non, etc.) [...] Dans les échanges interpersonnels usuels, la rhétorique du discours se situe davantage au niveau de la recherche du vraisemblable que du vrai d'où la prégnance d'un principe de maximum d'information : pour convaincre l'interlocuteur on donne toutes les informations qui vont dans le sens de l'assertion et la redondance est souvent bien utile. Réciproquement en tant que récepteur d'une argumentation, on suppose que si l'interlocuteur est de bonne foi, il dit tout ce qui est important sur le sujet ; par suite s'il n'est pas ignorant et s'il ne cite pas un fait, c'est que ce fait n'a pas lieu [...] Enfin, dans la vie sociale, bien souvent il importe plus de savoir « qui a fait quoi » que « ce qui a été fait » exactement, de ce fait la causalité est souvent confondue (sans ambiguïté dans cette rationalité) avec l'implication logique et l'implication avec sa réciproque ».

Pour l'élève, les pratiques langagières et le rapport à l'écrit se transforment par « désobjectivité » : décontextualisation, dépersonnalisation, détemporalisation¹⁵¹. Pour accéder aux valeurs épistémiques et aux statuts théorique et opératoire des propositions, il faut pratiquer l'écriture de démonstrations¹⁵², ce qui n'exclut pas une pratique orale du texte ou une pratique écrite de l'oral (exposé).

Dans cette construction de la rationalité mathématique, le manque de distinction de statut entre propriétés admises et propriétés démontrées, entre les différentes évidences (visuelles, internes, du maître, de l'élève, implicites, inévitables pour ce qui concerne les axiomes d'incidence et d'ordre) montrent la difficulté à préciser un contrat clair.

2.3 Conceptions de la validation en Allemagne :

2.3.1 Stein

Stein propose d'analyser la notion de preuve suivant différents niveaux d'explicitation.

« Chaque preuve et chaque chaîne d'argumentation est par principe implantée dans une théorie de base qui règle les caractéristiques des procédures correctes [...] Même si dans notre esprit « preuve » est inséparable de « théorie », cela ne veut cependant pas dire, que cette théorie de base doit être exposée de manière explicite : certes – comme dans la logique mathématique – il y a des exemples dans lesquels chaque détail de la théorie est fixé clairement (« théorie logique mathématique »), cependant dans la majorité des cas sont constamment présentes des « lacunes », lesquelles sont laissées pour être comblées par le lecteur »¹⁵³ [Stein 1986 , p.2, trad. R.C.].

¹⁵¹ Voir le paragraphe précédent sur Balacheff.

¹⁵² Voir le paragraphe précédent sur Duval.

¹⁵³ Prinzipiell ist jeder Beweis und jede Argumentationskette eingebettet in eine zugrundeliegende Theorie, die die Grundzüge „korrekten Vorgehens“ regelt [...] Auch wenn in unserem Sinne „Beweis“ untrennbar mit „Theorie“ verbunden ist, so heißt dies doch nicht, dass diese zugrunde liegende Theorie auch explizit dargelegt sein muss: Es gibt zwar – wie in der mathematischen Logik – Beispiele, in denen jede Einzelheit einer Theorie eindeutig festgelegt ist („mathematisch-logische Theorie“), in der Mehrzahl der Fälle sind jedoch stets „Lücken“ vorhanden, die zu füllen dem Leser überlassen bleibt.

2.3.1.1 Le niveau abstrait¹⁵⁴ de la théorie logique mathématique

où tous les éléments sont clairement fixés.

La langue est construite formellement de manière explicite. Les axiomes sont donnés, logiques (par exemple l'axiome du tiers exclus) ou non logiques (lié à la « couleur » de la théorie, par exemple l'axiome de transitivité de l'égalité). Les définitions sont axiomatiques. Les règles de déduction autorisées sont explicitement données (par exemple le modus ponens) ou dérivent des précédentes règles de déduction.

« A l'intérieur de la théorie logique mathématique la démonstration est une formation construite exactement conformément aux règles de déduction et aux axiomes. Une démonstration ne doit pas contenir un pas qui n'est pas justifié au moyen d'axiomes ou de règles de déduction. De chaque formation linguistique on peut conclure exactement si elle s'avère être une démonstration ou pas »¹⁵⁵ [Ibid. p.7, trad. R.C.].

2.3.1.2 Le niveau de la théorie mathématique

où les éléments considérés comme centraux pour la théorie sont clairement définis.

Par rapport à une théorie logique mathématique, une théorie mathématique a un domaine plus limité dans lequel seuls les notions, axiomes, et démonstrations centraux pour le développement de la théorie sont décrits de manière incontestables. Le langage est le langage de base de la communauté des mathématiciens : il mélange des symboles formels et des objets concrets (éléments d'ensembles).

« Il n'est pas défini explicitement quelles formations linguistiques sont des démonstrations ou non. Il y a pourtant en mathématique un consensus assuré sur la forme d'une démonstration correcte. Ainsi une démonstration doit seulement découler d'axiomes généraux de la théorie ou de propositions déjà démontrées – de plus il (le consensus) aime utiliser des résultats d'autres disciplines mathématiques, également vus comme « triviaux ». Egalement quand tous les pas de démonstrations ne sont pas écrits complets et exacts, ce sera quand même conditionné de manière à ce que tous les « trous » par principe puissent être remplis par des conclusions mathématiques correctes »¹⁵⁶ [Ibid. p.11-12, trad. R.C.].

¹⁵⁴ Stein définit également un niveau concret de la théorie logique mathématique décrit à travers le modèle abstrait. Chaque terme concret (pris dans un ensemble d'objets concrets) est mis en correspondance avec un terme du modèle. Chaque expression formelle du modèle peut être transformée en énoncés constitués d'objets concrets. On pense par exemple à la modélisation d'un ensemble des propositions extraites du langage naturel avec le modèle de la logique des propositions.

¹⁵⁵ Innerhalb der mathematisch-logischen Theorie ist der Beweis ein gemäß den Schlussregeln und Axiomen exakt durchkonstruiertes Gebilde. Ein Beweis darf keine Schritte enthalten, die nicht mittels der Axiome und Schlussregeln zu rechtfertigen sind. Von jedem sprachlichen Gebilde lässt sich exakt entscheiden, ob es einen Beweis darstellt oder nicht.

¹⁵⁶ Es ist nicht explizit definiert, welche sprachlichen Gebilde Beweise sind und welche nicht. Es gibt jedoch in der Mathematik einen gewissen Konsens über die Gestalt korrekter Beweise. So soll ein Beweis nur von den allgemeinen Axiomen der Theorie oder von bereits bewiesenen Sätzen ausgehen – zusätzlich mag er aber auch als „trivial“ angesehene Ergebnisse aus anderen mathematischen Disziplinen „mitbenutzen“. Auch wenn nicht alle Beweisschritte exakt und vollständig aufgeschrieben sind, so wird doch vorausgesetzt, dass alle „Lücken“ prinzipiell mit mathematisch korrekten Schlüssen gefüllt werden können.

2.3.1.3 Le niveau de la théorie organisée localement

où les éléments de la théorie nécessaires pour la conduite de preuve préalablement déterminée sont clairement fixés.

« Dans la théorie mathématique sont exactement déterminés les termes, axiomes, définitions, règles de déduction, et démonstrations, qui sont regardés comme centraux pour le développement de la théorie, autant dans la théorie organisée localement en premier plan se situe davantage la démonstration ou une série de démonstrations. Tous les éléments de base seront développés encore aussi loin que nécessaire pour la conduite des démonstrations ambitionnées [...] Il n'y a pas de détermination formelle explicite pour savoir quelle formation linguistique est une démonstration et laquelle ne l'est pas. En réalité les démonstrations utilisent souvent des « propositions d'aide », qui n'ont pas été démontrées elles-mêmes. En même temps il se peut que soit explicitement mentionnée une proposition utilisée spécifiquement, qui a été introduite précédemment, mais il est également tout à fait possible, qu'un fait déterminé soit implicitement utilisé, sans qu'il soit vraiment mentionné. La démonstration contient pourtant constamment sous forme exacte les pas qui sont pertinents pour l'idée. Tous les faits qui ne sont pas au centre de l'intérêt, peuvent par contre rester non démontrés »¹⁵⁷ [Ibid. p.11-12, trad. R.C.].

2.3.1.4 Le niveau de la théorie quotidienne

où les éléments de la théorie ne sont pas clairement fixés, mais doivent être révélés par le contexte.

« Au contraire des trois niveaux théoriques mathématiques, la théorie quotidienne n'est pas mathématique. Cependant elle est reliée de manière inséparable à un problème précis de justification [...] Le problème fondamental n'est pas considéré dans un premier temps comme mathématique même s'il pourrait être mathématisable. Il en résulte que la théorie de la vie quotidienne est constamment plus ou moins concrète. Une théorie quotidienne « abstraite » est une contradiction en soi, de telle manière qu'au niveau de l'explicitation une séparation entre niveau concret et niveau abstrait n'est pas possible. En opposition à la théorie d'ordre local, toutes les réflexions dans la théorie quotidienne suivent uniquement la logique interne et les caractéristiques du problème. Les règles de déduction utilisées, la signification des termes, etc. résultent seulement implicitement de leur utilisation à l'intérieur d'une chaîne d'arguments (pour cette raison la théorie quotidienne se trouve sur l'échelle d'explicitation au niveau le plus bas). Une séparation entre preuve et théorie n'est plus possible à ce niveau [...] La langue est la langue familière, enrichie des termes pertinents et typiques pour le problème correspondant [...] Explicitement aucun axiome n'est donné. Le problème lui-même implique cependant

¹⁵⁷ Wurden in der mathematischen Theorie diejenigen Begriffe, Axiome, Definitionen, Schlussregeln und Beweise exakt gefasst, die als zentral für die Entwicklung der Theorie angesehen wurden, so steht bei der lokal geordneten Theorie mehr ein Beweis oder eine Reihe von Beweisen im Vordergrund. Alle Grundlegungen werden nur noch soweit entwickelt, wie es für die Führung der angestrebten Beweise notwendig ist [...] Es gibt keine explizite formale Festlegung, welche sprachlichen Gebilde Beweise sind und welche nicht. Tatsächlich benutzen Beweise oft „Hilfssätze“, die selbst nicht bewiesen wurden. Dabei kann es sein, dass explizit ein bestimmter benutzter Satz erwähnt wird, der früher eingeführt wurde (evtl. auf rein induktivem Weg, ohne Beweis), es ist aber durchaus auch möglich, dass ein bestimmter Sachverhalt implizit benutzt wird, ohne dass dies überhaupt erwähnt wird. Der Beweis enthält jedoch stets die für die „Idee“ relevanten Schritte in exakter Form. Alle Sachverhalte, die nicht im Zentrum des Interesses stehen, können dagegen unbewiesen bleiben.

constamment une série d'hypothèses de base qui en général seront utilisés tacitement [...] On ne donnera explicitement aucune règle de déduction. Implicitement on appliquera des déductions logiquement correctes, également éventuellement des déductions « heuristiques » [...] Les « preuves » sont exposées ici comme suite de pas d'argumentation exprimés en langage familier, qui tiennent compte des conditions particulières du problème. Seules sont irrecevables les démonstrations qui enfreignent les conditions spéciales du problème ou qui utilisent des hypothèses avérées fausses »¹⁵⁸ [Ibid. p.14-15, trad. R.C.].

2.3.1.5 Un exemple de preuve du niveau de la théorie quotidienne :

Cet exemple est emprunté à [Bell 1976] et est exposé dans [Stein 1986, p.51-53, trad. R.C.].

Il s'agit d'un jeu de la marelle.

Sur une plaque quadrillée de 3 carreaux sur 3, deux joueurs disposent alternativement un pion (blanc, respectivement noir). Les cases déjà occupées ne peuvent plus l'être. A gagné un joueur qui a réussi le premier à constituer une ligne (horizontale, verticale, ou diagonale) de trois pions.

Soit la situation où on a numéroté les cases et noté B pour le pion blanc et N pour le pion noir.

1 B	2	3
4	5	6
7 N	8	9 B

L'affirmation à prouver est la suivante : le joueur à pion N perd à tous les coups, si dans la suite du jeu les deux partenaires jouent sans faute.

Preuve de la théorie quotidienne :

¹⁵⁸ Im Gegensatz zu den drei mathematischen Theorie-Ebenen ist die Alltagstheorie nicht-mathematisch. Sie ist jeweils untrennbar mit einem bestimmten Begründungsproblem verbunden [...] Das zugrunde liegende Problem wird dabei zunächst nicht-mathematisch gesehen, auch wenn es „mathematisierbar“ sein mag. Daraus ergibt sich auch, dass die Alltagstheorie stets mehr oder weniger konkret ist. Eine „abstrakte“ Alltagstheorie ist ein Widerspruch in sich selbst, so dass auf diesem Explizitheitsniveau eine Trennung zwischen abstraktem und konkretem Niveau nicht möglich ist. Im Gegensatz zur lokal geordneten Theorie folgen bei der Alltagstheorie alle Überlegungen ausschließlich der inneren Logik und den Gegebenheiten des Problems. Die verwendeten Schlussregeln, die Bedeutung der Begriffe, etc. ergeben sich nur implizit aus ihrer Verwendung innerhalb der Argumentationskette (aus diesem Grunde befindet sich die Alltagstheorie auf der Explizitheitsskala an unterster Stelle). Eine Trennung zwischen Beweis und Theorie ist auf diesem Niveau nicht mehr möglich [...] Die Sprache ist die Umgangssprache, angereichert mit den für die jeweilige Problemstellung typischen und relevanten Begriffen [...] Explizit werden keine Axiome gegeben. Das Problem selbst impliziert jedoch stets eine Reihe von Grundannahmen, die i.a. stillschweigend benutzt werden [...] Explizit werden gar keine Schlussregeln angegeben. Implizit werden neben logisch korrekten evtl. auch „heuristische“ Schlüsse verwandt [...] „Beweises“ stellen sich hier dar als Folge umgangssprachlicher Argumentationsschritte, die den speziellen Bedingungen des Problems Rechnung tragen. Unzulässig sind lediglich solche Beweise, die die speziellen Bedingungen des Problems verletzen oder nachweislich falsche Voraussetzungen benutzen.

- 1) N doit être placé sur 5 (pour empêcher la ligne diagonale 1-9)
 - 2) B doit être placé sur 3 (pour empêcher la ligne diagonale 7-3)
 - 3) Alors le joueur à pion B occupe les cases 1, 3, et 9 et le joueur à pion N est coincé.
- Donc le joueur à pion B gagne dans tous les cas.

On voit ici que le langage familier est utilisé avec le terme « coincé ».

On suppose ici implicitement que le lecteur a une représentation de ce que veut dire « jeu sans faute ». On applique implicitement les axiomes suivants :

1. Le joueur à pion noir joue optimalement, c'est-à-dire ne joue pas de manière à perdre la partie,
2. Chaque joueur suit rigoureusement la règle du jeu.

2.3.2 Holland

Dans un livre de didactique sur la géométrie dans l'enseignement secondaire, Holland consacre un chapitre à la démonstration. Bien que la première édition date de 1988, nous avons étudié l'édition de 2001.

2.3.2.1 La démonstration mathématique

Holland précise : « Comme démonstration d'une proposition mathématique S on comprend sa réduction logique à d'autres propositions mathématiques S1, S2, ..., Sn. Si S est démontrée à l'aide de S1, S2, ... Sn, alors il s'en suit la validité de S d'après la validité des propositions S1, S2, ..., Sn. Ce qui signifie :

- si S1, S2, ..., Sn sont des propositions vraies, alors S est une proposition vraie, ou psychologiquement formulé :
- si la validité de S1, S2, ..., Sn est reconnue, alors la validité de S ne pourra pas être contestée »¹⁵⁹
[Holland 2001, p.33, trad. R.C.].

Il distingue la phase de découverte (Beweisfindung) de la démonstration et la phase de présentation de la démonstration (Beweisdarstellung). « Une démonstration trouvée doit être exposée par écrit pour qu'elle soit communicable , c'est-à-dire , qu'elle puisse être complètement déduite et reconnue

¹⁵⁹ Unter einem Beweis eines mathematischen Satzes S versteht man dessen logische Reduktion auf andere mathematische Sätze S1, S2, ...,Sn. Ist S mit Hilfe von S1, S2, ...,Sn bewiesen, so folgt die Gültigkeit des Satzes S aus der Gültigkeit der Sätze S1, S2, ...,Sn. Das bedeutet:

- Wenn S1, S2, ...,Sn wahre Aussagen sind, dann ist auch S eine wahre Aussage, oder psychologisch gewendet
- Wenn man die Gültigkeit der Sätze S1, S2, ...,Sn anerkennt, so wird man die Gültigkeit von S nicht bestreiten können.

comme correcte par d'autres spécialistes (camarades de classe). La proposition est alors reconnue comme vraie »¹⁶⁰ [Ibid. p.33, trad. R.C.].

« Fondamentalement on doit exiger d'une démonstration mathématique qu'elle soit complète, c'est-à-dire :

- chaque pas de démonstration doit suivre comme application de définitions ou propositions supposées se lignes précédentes de démonstrations,
- aucun pas de démonstration ne doit être déduit de la figure de la démonstration.

La figure de démonstration sert uniquement pour cela à illustrer les informations représentées verbalement dans les différents pas de démonstrations »¹⁶¹ [Ibid. p.35, trad. R.C.].

2.3.2.2 Trois niveaux de preuves

On comprend donc que la démonstration ne se limite pas à une communauté de mathématiciens. Holland précise alors les règles de réductions logiques selon trois niveaux.

« Dans la suite nous voulons pour l'enseignement de la géométrie en premier cycle¹⁶² de l'enseignement secondaire distinguer trois niveaux de preuve et de compréhension de démonstration :

- niveau de l'argumentation,
- niveau de la déduction sémantique,
- niveau de la déduction formelle [...]

Le niveau de l'**argumentation** [...] se laisse caractériser comme suit :

- pas de démonstration écrite mais simplement une argumentation orale,
- références illimitées à la figure de la démonstration,
- la chaîne des argumentations est aussi courte que possible, mais aussi détaillée que nécessaire,
- tous les moyens d'aide illustrants (transparent, papier calque, modèle) sont autorisés,
- « rentrer dans le détail » pour un simple pas de démonstration seulement alors si un gain de compréhension apparaît important et si les élèves sont pour cela motivables [...]

Les démonstrations au niveau de l'argumentation sont à cause de cela en particulier adaptées à la Hauptschule. Le niveau de l'argumentation n'a pas pour objectif une véritable compréhension de la démonstration et peut également ne pas atteindre cela. L'élève doit cependant connaître la différence entre une conjecture, qui est acquise seulement en raison de dessin ou mesure, et une prise de conscience, conduisant à une révélation, de la généralité des relations géométriques supposées, pour lequel souvent seulement une argumentation logique minimale est requise. Au niveau de l'argumentation, les activités suivantes peuvent contribuer aux objectifs d'apprentissage de la démonstration :

- donner des arguments pour la validité d'une conjecture,
- saisir les arguments d'autres élèves et les prolonger, ou au contraire s'y opposer,

¹⁶⁰ Ein gefundener Beweis muss schriftlich so dargestellt werden, dass er kommunizierbar ist, d.h., von anderen Fachleuten (Mitschülern) nachvollzogen und als korrekt anerkannt werden kann. Der Satz wird dann als wahr anerkannt.

¹⁶¹ Grundsätzlich muss man von einem mathematischen Beweis Lückenlosigkeit verlangen d.h.:

- Jeder Beweisschritt muss unter Anwendung vorausgesetzter Definitionen und Sätze aus vorangegangenen Beweiszeilen folgen.
- Kein Beweisschritt darf der Beweisfigur entnommen sein.

¹⁶² Rappelons que le livre de Holland est construit à partir d'un cours destiné à des étudiants pour le professorat de premier cycle du secondaire, comme indiqué dans la préface.

- comprendre une idée de démonstration et la restituer en quelques mots »¹⁶³ [Ibid. pp.51-54, trad. R.C.].

Les démonstrations au niveau de la **déduction sémantique** « sont structurées déjà jusqu'à un certain point de telle façon qu'elles autorisent une notation comme séquence de pas de démonstrations. La plupart du temps on choisira cependant une présentation en langage familier décrivant l'activité de l'élève [...] Cependant on évite les démonstrations d'une présentation détaillée exagérée, on renonce à la formulation complète des théorèmes utilisés, et on laisse la relation avec la figure de la démonstration là où elle traite les énoncés géométriques utilisant la géométrie d'ordre¹⁶⁴. Cette référence à la figure de la preuve n'est cependant pas réfléchie et pour cette raison également n'est pas vécue comme véritablement non autorisée [...] En complément aux activités de preuve du niveau de l'argumentation, les activités suivantes peuvent contribuer aux objectifs d'apprentissage de la démonstration au niveau de la déduction sémantique:

- donner les théorèmes utilisés pour prouver.
- reproduire une preuve à l'écrit.
- conduire des disjonctions de cas.
- trouver soi-même une preuve simple »¹⁶⁵ [Ibid. pp. 54-55, trad. R.C.].

¹⁶³ Im folgenden wollen wir für den Geometrieunterricht in der Sek 1 drei verschiedene Niveaustufen des Beweisens und des Beweisverständnisses unterscheiden:

- Stufe des Argumentierens,
- Stufe des inhaltlichen Schließens,
- Stufe des formalen Schließens [...]

Stufe des Argumentierens [...] lässt sich wie folgt charakterisieren:

- Kein schriftlicher Beweis, sondern lediglich eine mündliche Argumentation.
- Uneingeschränkte Bezugnahme auf die Beweisfigur.
- Die Argumentationskette ist so kurz wie möglich, aber so ausführlich wie nötig.
- Alle veranschaulichenden Hilfsmittel sind zugelassen (Folien, Transparentpapier, Modelle);
- "Tieferbohren" bei einzelnen Beweisschritten nur dann, wenn dieses zur Einsichtgewinnung notwendig erscheint und die Schüler dazu motivierbar sind [...]

Beweise auf der Niveaustufe des Argumentierens sind deshalb insbesondere für die Hauptschule geeignet. Die Niveaustufe des Argumentierens zielt nicht auf ein eigentliches Beweisverständnis ab und kann dieses auch nicht erreichen. Die Schüler sollen jedoch den Unterschied erleben zwischen einer Vermutung, die nur aufgrund von Zeichnen und Messen gewonnen wird, und der zu einem Aha-Erlebnis führenden Einsicht in die Allgemeingültigkeit der vermuteten geometrischen Beziehung, zu der häufig nur eine minimale logische Argumentation erforderlich ist. Folgende Beweisaktivitäten auf der Stufe des Argumentierens können zu Prozesszielen des Beweisens einen Beitrag leisten :

- Argumente für die Gültigkeit einer Vermutung angeben.
- Argumente von Mitschülern aufgreifen und weiterführen, oder gegebenenfalls widerlegen,
- Einen Beweisgedanken verstehen und in eigenen Worten wiedergeben.

¹⁶⁴ On traduit « Anordnungsgeometrie » par « géométrie de l'ordre » mais on aurait pu traduire par « géométrie de position ». On peut faire le lien avec les trois axiomes d'encadrement de la présentation axiomatique de Hilbert [Anordnungsaxiome] : 1) si sur une droite un point R est entre les points P et Q alors R est aussi entre P et Q, 2) étant donné trois points distincts d'une droite, il y en a exactement un entre les deux autres, 3) sur une même droite si R est entre P et Q et Q entre R et S alors R est entre P et S. Ce qui concerne l'orientation d'une droite, d'un plan ou d'un espace, et plus particulièrement la géométrie de position (ou de disposition) avec les relations à droite, à gauche, au-dessus, entre, ... relève de cette « géométrie de l'ordre » qui est bien souvent appréhendée de manière perceptive dans l'enseignement secondaire.

¹⁶⁵ « strukturiert, dass sie eine Notation als Sequenz von Beweisschritten zulassen. Meist wird man jedoch eine eher umgangssprachliche, die Schülertätigkeit beschreibende Darstellung wählen [...] Deshalb vermeiden die Beweise übertriebene Ausführlichkeit, verzichten auf lückenlose Angabe der benutzten Sätze und lassen den Bezug auf die Beweisfigur dort zu, wo es sich um geometrische Aussagen handelt, die der Anordnungsgeometrie zugehören. Diese Bezugnahme auf die Beweisfigur wird jedoch nicht reflektiert und deshalb auch nicht als

Au niveau de la **déduction formelle**, « la démonstration est vue prioritairement ou même exclusivement sous l'aspect de la *Géométrie*¹⁶⁶ *comme exemple d'une théorie déductive*. On aspire à une démonstration présentée en lignes de démonstration, telle que chaque ligne de démonstration est soit une hypothèse, soit la suite de précédentes lignes de démonstration. La référence à la figure sera acceptée (explicitement ou implicitement) si on traite des énoncés relatifs à la géométrie de l'ordre [...] Les activités suivantes peuvent contribuer aux objectifs d'apprentissage de la démonstration :

- noter une démonstration comme séquence de lignes de démonstration,
- vérifier le caractère concluant et le caractère complet d'une démonstration,
- améliorer un peu l'explicitation d'une démonstration par l'ajout de pas supplémentaires de démonstration,
- évaluer deux différentes démonstrations de la même proposition en fonction des moyens utilisées pour la démonstration »¹⁶⁷ [Ibid. pp. 56-57, trad. R.C.]

« Les trois niveaux de preuve discutés se laissent classer comme présentation des objectifs souhaitables dans les trois formes d'école Hauptschule, Realschule et Gymnasium. Pour les Realschule et Gymnasium il faut faire attention à ce que chacun de tous les niveaux de démonstration soit parcourus. Il est également ni important ni souhaitable que le plus haut niveau soit toujours réalisé »¹⁶⁸ [Ibid. p. 58, trad. R.C.].

2.3.3 La preuve dans des manuels de didactique

Nous avons étudié un premier livre, celui de Tietze, Klika et Wolpers : c'est un manuel de didactique sur l'enseignement des mathématiques dans le second cycle de l'enseignement en Gymnasium [Sekundarstufe II], ce qui correspond approximativement au lycée d'enseignement général français. Nous avons étudié l'édition de 2000, mise à jour de la

eigentlich unerlaubt erlebt [...] Zusätzlich zu den Beweisaktivitäten auf der Stufe des Argumentierens können auf der Stufe des inhaltlichen Schließens folgende Aktivitäten einen Beitrag zu Prozesszielen leisten :

- Die zum Beweis benutzen Sätze angeben.
- Einen Beweis schriftlich reproduzieren.
- Fallunterscheidung durchführen;
- Einfache Beweise selber finden.

¹⁶⁶ Rappelons que le livre de Holland traite de la géométrie dans l'enseignement secondaire.

¹⁶⁷ Wird das Beweisen vorrangig oder sogar ausschließlich unter dem Aspekt von Geometrie als Beispiel einer deduktiven Theorie gesehen. Angestrebt wird ein in Beweiszeilen dargestellter Beweis, bei dem jede Beweiszeile entweder eine Voraussetzung ist oder aus vorangehenden Beweiszeilen folgt. Bezugnahme auf die Figur wird (explizit oder stillschweigend) zugelassen, sofern es sich um Aussagen der Anordnungsgeometrie handelt [...] folgende Aktivitäten einen Beitrag zu Prozesszielen des Beweisens:

- Einen Beweis als Sequenz von Beweiszeilen notieren.
- Einen Beweis auf Schlüssigkeit überprüfen.
- Einen weniger ausführlichen Beweis durch Einfügen zusätzlicher Beweisschritte verfeinern.
- Zwei verschiedene Beweise desselben Satzes im Hinblick auf die verwendeten Beweismittel bewerten.

¹⁶⁸ Als wünschenswerte Zielvorstellungen lassen sich die drei besprochenen Niveaustufen des Beweisens der drei Schulformen Hauptschule, Realschule und Gymnasium zuordnen. Für Realschule und Gymnasium ist zu beachten, dass jeweils alle Niveaustufen des Beweisens durchlaufen werden. Auch ist es weder notwendig noch wünschenswert, dass immer höchstes Niveau realisiert wird.

première édition de 1997. Ce livre, en deux tomes, couvre l'ensemble des sujets (préparation et pratique de l'enseignement, contenus, ...). Il contient un chapitre intitulé « Démontrer, justifier, argumenter »¹⁶⁹ qui dresse un intéressant bilan des réflexions et recherches sur ce thème et qui a été rédigé par Tietze.

2.3.3.1 Analyse de la preuve, de la justification et de l'argumentation

2.3.3.1.1 La démonstration en mathématiques

« Les aspects subjectifs dans la démonstration seront complètement mis entre parenthèses dans la spécialité mathématique ; à l'école ils ont une signification centrale »¹⁷⁰[Tietze 2000, trad. R.C. p.151].

Chez les mathématiciens, « la démonstration d'une proposition mathématiques réside dans le fait qu'on déduit d'hypothèses avec l'aide de théorèmes déjà démontrés et d'axiomes d'après des règles logiques déterminées de déduction [...] En règle générale les démonstrations mathématiques sont présentées réduites [...] Seulement les notions centrales pour le développement de la théorie seront décrites sous une forme exacte [...] Dans la recherche fondamentale mathématique de telles réductions ne sont par contre pas autorisées [...] Stein [1986] caractérise cette différence à travers les notions de « théorie mathématique » et « théorie logique mathématique »¹⁷¹ [Ibid. p.151].

Tietze repère les formes et procédures mathématiques de démonstration suivantes : la démonstration directe, la démonstration indirecte (ou par l'absurde), la démonstration par récurrence, la démonstration d'unicité, la démonstration d'existence, et d'autres formes (contraposition, disjonction des cas, par contre exemple).

2.3.3.1.2 La démonstration dans l'histoire

L'intuition a joué trois fonctions importantes pour le mathématicien : la fonction heuristique encore forte aujourd'hui alors que les fonctions de fondation et de délimitation des objets mathématiques raisonnables sont dévalorisées aujourd'hui avec le développement de l'axiomatisation et de la formalisation [Volkert 1986, 1989].

¹⁶⁹ Beweisen, Begründen, Argumentieren

¹⁷⁰ Subjektive Aspekte beim Beweisen werden in der Fachmathematik vollständig ausgeklammert, in der Schule sind sie von zentraler Bedeutung.

¹⁷¹ Der Beweis eines mathematischen Satzes besteht darin, dass man aus gegebenen Voraussetzungen mit Hilfe schon bewiesener Sätze oder Axiome nach bestimmten logischen Schlussregeln die Behauptung herleitet [...] In der Regel sind mathematische Beweise verkürzt dargestellt [...] Nur die für die Theorieentwicklung zentralen Begriffe werden in exakter Weise beschrieben [...] In der mathematischen Grundlagenforschung dagegen sind solche Verkürzungen nicht zulässig [...] Stein (1986, 5ff.) kennzeichnet diesen unterschied durch die Begriffe „mathematische Theorie“ und „mathematisch-logische Theorie“.

L'avènement de l'ordinateur dans les démonstrations a changé radicalement la pratique des mathématiciens : travail expérimental à l'aide de l'ordinateur, changement dans la pratique des vérifications (par exemple contrôle effectif des démonstrations facilité par l'utilisation de l'ordinateur).

2.3.3.1.3 Preuves préformelles et intuitives

Avec la notion de preuve préformelle¹⁷² (**präformaler Beweis**) « Blum/Kirsch (1989, p.202) comprennent sous cette forme de preuve une chaîne de déductions correctes, qui remontent à des prémisses non formelles. « Les déductions doivent se succéder dans leur ordre « naturel psychologique ». Elles doivent à partir de cas concrets obtenu, (a) par l'action (**enaktiv**) ou (b) de manière intuitive-sémantique (**inhaltlich-anschaulich**) être « directement généralisables, à l'occasion de quoi le transfert au cas général doit être reconnu comme intuitif et les prémisses précédentes doivent par la formalisation correspondre à des arguments mathématiques formels ». Pour (a) Blum/Kirsch parlent de démonstrations obtenues par l'action et pour (b) de démonstration intuitive-sémantique. Nous les regrouperons sous la notion de concret-sémantique (**inhaltlich-konkret**) » [Tietze 2000, trad. R.C. p.156]¹⁷³. [Biermann, Blum 2002] évoque la notion de « preuve reliée à la réalité » [Realitätsbezogenes Beweisen]¹⁷⁴ : 1) réalisation : des données mathématiques (objets, relations, ...) sont interprétées dans un contexte réel (par exemple un problème de fraction est interprétée comme un problème de mélanges) ; 2) argumentation : dans le contexte réel le problème est résolu à partir d'arguments et d'actions de la réalité (par exemple le mélange de deux boissons de degré en alcool différents est une boisson de degré intermédiaire) ; 3) mathématisation : la solution ayant recours à la réalité est mathématisée pour être traduite en preuve mathématique. Blum observe que le cycle (réalisation-argumentation-mathématisation) qui caractérise la preuve reliée à la réalité est l'inverse du cycle de modélisation.

2.3.3.1.4 Ordre local-ordre global

Dans la théorie mathématique les démonstrations partent des axiomes, éventuellement par l'intermédiaire de théorèmes déjà démontrés à partir des axiomes. Pour l'enseignement des mathématiques, « Freudenthal [1973, p.142] parle d'ordre local : « On analyse les notions géométriques

¹⁷² Termes utilisés par de nombreux auteurs Wittmann, Müller, Kauschitsch, Metzler, Blum, Kirsch.

¹⁷³ Blum/Kirsch (1908, 202) verstehen unter einem solchen Beweis ein Kette von korrekten Schlüssen, die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen. „Die Schlüsse sollen ihrer ‚psychologisch natürlichen‘ Ordnung aufeinanderfolgen.“ Sie müssen vom konkreten, (a) enaktiv oder (b) inhaltlich-anschaulich gegebenen Fall „direkt verallgemeinerbar sein, wobei diese Übertragbarkeit auf den allgemeinen Fall intuitiv erkennbar sein soll, und müssen bei Formalisierungen der jeweiligen Prämissen korrekten formal-mathematischen Argumenten entsprechen.“ Bei (a) sprechen Blum/Kirsch von einem handlungsbezogenen, bei (b) von einem inhaltlich-anschaulichen Beweis. Wir fassen beides unter dem begriff inhaltlich-konkret zusammen.

¹⁷⁴ En anglais Blum propose les expressions: „reality-related proof“ ou „contextual proof“.

jusqu'à une limite véritablement arbitraire, on dira, jusqu'au point où on voit avec ses simples yeux ce que la notion signifie, et que les propositions sont vraies ». Souvent les notions ne seront pas définies explicitement, mais au contraire on a besoin avec celles-ci d'une explication des notions, qui existe d'après de nombreux exemples relatifs à la notion concernée. Freudenthal voit l'ordre local comme le contraire de l'ordre global (ou également axiomatisation) qui se rapporte à des parties plus vastes des mathématiques. L'axiomatisation est également un processus. Freudenthal ne comprend pas ici comme axiomatisation, comme c'est l'habitude, la présentation d'une théorie mathématique axiomatisée, mais le processus de longue haleine, à la recherche de principes importants et de leur acceptation générale à l'intérieur d'un domaine mathématique, sur lequel la théorie, ou une partie, se laisse construire »¹⁷⁵ [Tietze 2000, p.157-158, trad.R.C].

2.3.3.1.5 Justification et argumentation- forme, exposé et validité

A côté de la forme déductive de la preuve mathématique il y a d'autres justifications. Une proposition est justifiée si elle peut remporter l'adhésion d'interlocuteurs sensés. « Pour les élèves, les mathématiques sont un domaine à côté d'autres, dans lesquels des formes complètement différentes de justifications (Formen des **Begründens**) sont acceptées, comme par exemple en Physique, en chimie, en allemand, en philosophie et en religion. La vérification (**Überprüfen**) spécifiquement mathématique est relativement étrangère à l'élève; d'autres expériences avec la justification (**Begründen**) lui sont familières et importantes dans la vie quotidienne. Nous voulons différencier les formes suivantes de justifications. Dans cette répartition grossière, le point de vue du caractère obligatoire joue parmi d'autres un rôle.

- se référer à une autorité, par exemple parents, professeur, livre, ou également un groupe, une secte, une idole, la télé.

- arguments de plausibilité :

(a) preuve à travers des arguments, qui sans doute accroissent de la plausibilité, mais qui ne présentent pas une justification suffisante : par exemple l'indication d'après des faits analogues ou semblables, déjà reconnus comme vrais, le dessin d'une image ou d'un graphique ;

(b) justification du fait qu'on déduit de déclarations à vérifier des déclarations exactes respectivement acceptées¹⁷⁶ ;

(c) vérification sur des cas isolés (induction incomplète). »

- argument probabiliste

(a) vérification dans le cadre d'une argumentation statistique ;

¹⁷⁵ Freudenthal (1973) spricht von lokalem Ordnen: „Man analysiert die geometrischen Begriffe bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, dass sie wahr sind“. Begriffe werden dabei oft nicht explizit definiert, sondern man begnügt sich statt dessen mit einer Begriffsklärung, die aus vielen Beispielen zum intendierten Begriff besteht. Freudenthal sieht das lokale Ordnen als Gegensatz zum globalen Ordnen (oder auch Axiomatisieren), das sich auf größere mathematische Teilgebiete bezieht. Auch das Axiomatisieren ist ein Prozess. Freudenthal versteht dabei unter Axiomatisieren nicht, wie sonst üblich, die Darstellung einer axiomatisierten mathematischen Theorie, sondern den langwierigen Prozess, nach wichtigen Grundsätzen und allgemeinen Annahmen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets zu suchen, auf sich die Theorie oder Teile davon aufbauen lassen.

¹⁷⁶ On retrouve ici la conception concernant le raisonnement plausible dans [Polya 1958].

(b) vérification au moyen d'un programme graphique [...]; avec le nombre des essais croît la certitude (probabilité) qu'une assertion est correcte – en supposant que le programme respectivement le procédé ne contiennent pas d'erreur systématique.

- argumentation universelle

(a) argument de dialogue pour lequel le contradicteur ne peut rien objecter,

(b) preuve préformelle (par l'action, de manière intuitive-sémantique) ; stratégie isolée transférable, ;

(c) démonstration déductive formelle (devant l'arrière plan d'une théorie mathématique) »¹⁷⁷ [Ibid. p.158-159, trad.R.C].

Les formes d'expositions des justifications peuvent être variées, par exemple « au moyen d'une manipulation, d'un dessin, à travers un argument du langage familier, un argument du langage spécialisé ou une chaîne de symboles formels [...] Ce qui est important pour l'enseignement des mathématiques, c'est qu'on n'admette pas seulement la démonstration mathématiques comme justification, mais qu'on s'expose à de multiples formes de justifications. En outre il doit être exigé que la forme dialoguée de justification se trouve au premier plan»¹⁷⁸ [Ibid. p.159, trad.R.C].

2.3.3.2 Base d'argumentation, aspect subjectif de la preuve

Une base d'argumentation (Argumentationbasis) désigne les relations entre les règles d'inférence autorisées, ce que l'on considère comme correct, suffisamment garanti, convaincant ou évident, le recours à des énoncés reconnus corrects, les définitions. On peut par exemple parler de base d'argumentation de la géométrie du cycle moyen de

¹⁷⁷ Für den Schüler ist Mathematik ein Gebiet neben anderen, in denen gänzlich andere Formen des Begründens akzeptiert werden, wie z.B. in der Physik und der Chemie, in Deutsch, Philosophie und Religion. Das spezifisch mathematische Überprüfen ist dem Schüler relativ fremd; andere Erfahrungen mit dem Begründen sind ihm vertrauter und im Alltagsleben wichtiger. Wir wollen folgende Formen des Begründens unterscheiden. Bei dieser groben Einteilung spielt u. a. der Gesichtspunkt der Verbindlichkeit eine Rolle.

- Berufen auf eine Autorität, z.B. Eltern, Lehrer, Buch, aber auch Gruppe, Sekte, Idol, TV.

- Plausibilitätsargumente

(a) Nachweis durch Argumente, die zwar Plausibilität erhöhen, aber nicht eine hinreichende Begründung darstellen: z.B. der Hinweis auf analoge bzw. ähnliche, bereits als richtig erkannte Sachverhalte; das Zeichnen eines Bildes oder Graphens;

(b) Begründung dadurch, dass man aus der zu überprüfenden Aussage richtige bzw. akzeptierte Aussagen herleitet;

(c) Überprüfung an Einzelfällen (unvollständige Induktion).

- Wahrscheinlichkeitsargumente

(a) Überprüfung im Rahmen einer statistischen Argumentation;

(b) Überprüfung mittels Graphikprogramm [...]; mit der Anzahl der Proben wächst die Gewissheit (Wahrscheinlichkeit), dass die Aussage richtig ist – vorausgesetzt, dass das Programm bzw. das Vorgehen keine systematischen Fehler enthält.

- Allgemeingültige Argumentation

(a) Dialogargument, gegen das der Dialogpartner prinzipiell nichts einwenden kann;

(b) präformaler Beweis (enaktiv, inhaltlich-anschaulich); übertragbare Einzelfallstrategie;

(c) formal-deduktiver Beweis (vor dem Hintergrund einer mathematischen Theorie).

¹⁷⁸ mittels einer Handlung, einer Zeichnung, durch umgangssprachliche Argumente, durch fachsprachliche Argumente oder durch formale Zeichenketten [...] Wichtig für den MU ist es, dass man nicht nur den mathematischen Beweis als Begründung zulässt, sondern sich mit vielfältigen Begründungsformen auseinandersetzt. Zusätzlich ist zu fordern, dass die dialogische Form des Begründens im Vordergrund steht.

l'enseignement secondaire traditionnel des mathématiques. Le choix des énoncés premiers et des différents statuts des énoncés reste arbitraire. « Les bases d'argumentation des professeurs et des élèves se différencient souvent également en ce qui concerne les règles d'inférences et quelques conventions de langages typiques pour les mathématiques. Les élèves utilisent des règles d'inférence qui sont usuelles dans la pensée quotidienne mais qui ne sont pas autorisées en mathématiques, par exemple :

- Si $A \Rightarrow B$ et B valables, alors on a A (faute fréquente).
- Si $A \Rightarrow B$ et $\neg A$ valables, alors on a $\neg B$.
- Pour quelques x on a $P(x) \Rightarrow$ pour tous les x on a $P(x)$. (cf. Walsch 1975, Leppig 1978) »¹⁷⁹ [Ibid. p.163, trad.R.C.].

« Les nombreuses différences dans les bases d'argumentation entre professeurs et élèves et dans la pratique habituelle des démonstrations a pour résultat que les élèves sont confus à propos de quand quelque chose est une preuve, quel degré de précision (relatif à la base d'argumentation, au degré de formalisation) est attendu et combien détaillé doivent être les pas de démonstration »¹⁸⁰ [Ibid. p.164, trad.R.C.].

2.3.3.3 Pratique de la preuve dans l'enseignement

En Allemagne, Tietze distingue d'abord une phase des mathématiques traditionnelles fondée sur différentes bases d'argumentation : les théorèmes d'isométrie des triangles en géométrie, les vecteurs en géométrie analytique, longueurs ou points de la droite réelle en analyse, une base intuitive pour les limites et une compréhension naïve des surfaces pour le calcul intégral. Avec les mathématiques modernes des années 70 l'approche formelle et axiomatique est valorisée, basée sur la logique des propositions et des quantificateurs.

Actuellement dans le second cycle du secondaire les termes semblent introduits par une présentation à partir des contenus et des intuitions vers une présentation plus formelle avec le souci d'une simplicité langagière. L'importance de l'ouverture aux applications et de la différenciation des possibilités est rappelée.

La tentation est forte de renoncer à la démonstration formelle en cours de base (Grundkurs). [Tietze 2000, p.165] repère dans les années 80 trois positions typiques de professeurs concernant l'enseignement de la démonstration:

¹⁷⁹ Die Argumentationbasen von Lehrer und Schüler unterscheiden sich häufig auch hinsichtlich der Schlussregeln und einiger für die Mathematik typischer Sprachkonventionen. Schüler benutzen Schlussregeln, die im Alltagsdenken üblich, in der Mathematik aber nicht zulässig sind, z.B.:

- Wenn $A \Rightarrow B$ und B gültig, dann gilt A (häufiger Fehler).
- Wenn $A \Rightarrow B$ und $\neg A$ gültig, dann gilt $\neg B$.
- Für einige x gilt $P(x) \Rightarrow$ für alle x gilt $P(x)$. (Vgl. Walsch 1975, Leppig 1978)

¹⁸⁰ Die vielfältigen Differenzen in der Argumentationsbasis zwischen Lehrer und Schüler und die übliche Beweispraxis im Unterricht führen dazu, dass sich Schüler im unklaren darüber sind, wann etwas ein Beweis ist, welcher Grad der Exaktheit (zugelassene Argumentationsbasis, Grad der Formalisierung) erwartet wird und wie detailliert die Beweisschritte sein sollen.

- les considérations de plausibilité en introduction et en cours de base (Grundkurs) et la démonstration formelle en cours approfondi (Leistungskurs); souvent la démonstration scolaire conduit à la pratiques de rites vides de sens ;
- des définitions et des démonstrations axiomatiques et formelles pour transmettre une image appropriée des mathématiques,
- le formalisme des définitions et des démonstrations joue un rôle faible, y compris en cours approfondi (Leistungskurs).

Des entretiens avec des professeurs montrent la difficulté à réaliser des travaux et des preuves à partir des contenus et de l'intuition.

2.3.3.4 Argumentation et démonstration

Nous avons étudié un second manuel de didactique [Leuders et al 2003]. Ce manuel concerne l'enseignement secondaire des mathématiques [Sekundarstufe I und II]. Un long paragraphe rédigé par Lisa Hefendehl-Hebeker et Stephan Hussmann sous le titre « Démonstration-Argumentation »¹⁸¹ expose les points suivants.

L'argumentation [Argumentation] y est considérée comme un discours pour ou contre la vérité d'une proposition, ou pour ou contre la validité d'une norme, dans le but d'obtenir l'approbation ou la contestation d'un partenaire fictif ou réel. Une justification [Begründen] d'une proposition ou d'une norme est une argumentation concluante [schlüssig], c'est-à-dire qu'on ne peut réfuter et qui ne se contredit pas. Une justification d'une proposition s'appelle encore une preuve. Les cinq principales fonctions de la preuve proposées par De Villiers, vérification, explication, systématisation, découverte et communication, sont rappelées. Il est notamment indiqué que les preuves avec des procédures de recours à des actions [handlungsbezogene Vorgehen] remplissent souvent la fonction d'explication. Les mathématiques procèdent de manière quasi-empirique, dans le processus de la preuve avec ses réfutations, ses modifications, les essais empiriques pour étayer les arguments. La validité, la vérité ou la rigueur sont définies par chaque communauté sociale.

2.4 Différentes comparaisons franco-allemandes

Pour les comparaisons qui ne sont pas directement en rapport avec le domaine de l'enseignement de la démonstration, on retiendra les informations méthodologiques et les informations de contextes qui pourront éclairer notre recherche.

¹⁸¹ Beweisen-Argumentieren.

2.4.1 Image des mathématiques chez les élèves

Dans [Cabassut 1989] nous avons comparé l'image des mathématiques chez des élèves de lycées français (désignés par F dans l'étude) et chez des élèves de second cycle de Gymnasium allemand (Sekundarstufe II) (désignés par A dans l'étude). Cette comparaison avait mis en évidence des différences d'image des mathématiques entre les deux populations étudiées.

Une analyse multivariée avait dégagé deux axes communs aux analyses : l'axe de la réussite et l'axe de la facilité de début de scolarité.

Pour les élèves allemands (A)

« 1) axe 1 : réussite/échec dans l'enseignement des mathématiques (36% de l'information) :

65 % des variables contribuent à l'échec. On y retrouve les élèves doués, aux bons résultats, choisissant les mathématiques facultatives en opposition à ceux de faibles résultats, non doués et refusant les mathématiques facultatives. Du côté de la réussite on trouve plutôt des élèves fournissant un important travail, ayant des activités supplémentaires, choisissant des études supérieures en mathématiques, sans difficultés à comprendre les mathématiques dans les classes récentes (en classe 10, 9 et 8 soit 2°, 3° et 4°). Les élèves orientés vers l'échec ont des réponses opposées. Les élèves dont la mère est au foyer ou a effectué des études supérieures (plus de deux ans) et les scientifiques sont très bien représentés du côté de la réussite. Les élèves non scientifiques ou indifférenciés sont plutôt représentés du côté de l'échec. Les élèves estimant qu'il n'existe pas de don en mathématiques, que les mathématiques aident à organiser les connaissances, évitent de commettre des erreurs de raisonnement, aident à s'exprimer avec précision, à déceler des contradictions, qui trouvent les mathématiques semblables à un jeu, passionnantes, contrôlables de bout en bout, non exigeantes, et non incompréhensibles, qui considèrent la sélection justifiée, et qui ont des facilités en classe 11 et 12 (1° et Terminale) sont bien représentés du côté de la réussite. Les élèves aux réponses opposées se retrouvent bien représentés du côté de l'échec.

La réussite se comprend au sens de réussite pour l'enseignement des mathématiques dans la série suivie par l'élève, série qui peut être non scientifique.

2) axe 2 : difficultés/facilités de début de scolarité (13% de l'information) :

74% des contributions sont orientées vers la difficulté de début de scolarité, dans l'élémentaire, en classes 6 et 7. Les élèves satisfaits du style du professeur, estimant les programmes faciles, effectuant des activités supplémentaires, ayant eu des difficultés en 4° et 3°, sont médiocrement représentés mais contribuent (au sens analyse des données du terme) à la difficulté précoce. On retrouve les tendances opposées pour la partie orientée vers la facilité de début des scolarités. Les variables d'opinion sont assez mal représentées sur cet axe ».

Pour les élèves français,

« 1) axe 1 : réussite/échec dans l'enseignement des mathématiques (33% de l'information):

Les élèves aux résultats faibles, pas doués et refusant les mathématiques facultatives orientent cet axe vers l'échec. De ce côté on retrouve plutôt des élèves en difficulté récente (4°, 3° et 2°), estimant les exercices et le programme difficiles ou ne s'orientant pas vers des études supérieures en mathématiques. Les filles et les séries

non scientifiques sont également attirées par cette orientation ainsi que les élèves estimant qu'il existe un don en mathématiques ou les mathématiques très vite incompréhensibles. On retrouve pour la partie orientée vers la réussite les significations opposées pour les variables citées précédemment. On retrouve de plus représentés les élèves pensant que les mathématiques évitent de commettre des erreurs de raisonnement.

2) axe 2 : difficultés/facilités de début de scolarité (13% de l'information) :

La difficulté des exercices, du programme et un travail important fourni oriente l'axe dans le sens de la difficulté présente. On trouve également représenté sur cette partie de l'axe la facilité de début de scolarité (élémentaire, classes 6,7,8,9). Les non scientifiques et les élèves de classe 11 en retard sont également bien représentés. On retrouve les caractéristiques inverses sur l'autre partie de l'axe. Cette autre partie attire les élèves estimant les mathématiques non nécessaires dans la formation tandis que l'autre partie attire les élèves supposant l'existence d'un don en mathématiques [...]

Mais ces axes se structurent différemment : le travail important est bien représenté sur l'axe réussite pour A alors qu'il est mal représenté pour F. Inversement en F la difficulté des programmes est bien représentée sur l'axe échec mais n'intervient pas en A. Ceci s'explique-t-il par le niveau d'exigence des séries indifférenciées et scientifiques en F qui les rend plus difficiles qu'en A où un niveau d'exigence moindre et une bonne orientation permettent de garantir, par le travail, le succès ?

Pour l'axe de difficultés en début de scolarité le travail léger contribue (au sens du terme en analyse des données) à la difficulté en A alors qu'il contribue à la facilité en F. Les activités supplémentaires contribuent à la facilité en F mais contribuent à la difficulté en A. Par contre la difficulté des programmes contribue à la facilité. Doit-on y voir l'effet des élèves de A qui, ayant eu des difficultés précoces, choisissent des orientations vers des séries non scientifiques à programmes plus faciles ? » [Ibid. p.13-15].

Concernant les analyses monovariées et bivariées, on observe d'intéressantes inversions dans les variables de situations.

« Q1 : Beaucoup plus d'élèves estimant de bons résultats en A qu'en F ; ils sont majoritaires en série indéterminée en A à l'inverse de F. Après orientation et quelle que soit la série choisie ils estiment à une majorité écrasante leurs résultats bons.

Q2 : On observe comme en Q1 une majorité d'élèves en A estimant en seconde indéterminée les programmes faciles à l'inverse de F, majorité s'amplifiant considérablement après orientation.

En A, les exercices sont majoritairement perçus faciles après orientation. Pour le résultat des sections scientifiques le résultat est inversé par rapport à F.

Les élèves sont satisfaits du nombre d'heures et du style de leur professeur. Les effectifs sont convenables en A à l'inverse de F.

Une classe plutôt homogène paraît majoritairement utile.

Q3 : Les élèves de A s'estiment en majorité doués pour les maths, dans toutes les séries, même chez les « littéraires », à l'inverse de F. Ce résultat s'explique-t-il par l'orientation positive et la sélection par les maths moins importante en RFA qu'en France ?

Q5 : Les élèves de A fournissent un travail important en mathématiques dans toutes les sections, même en section « littéraire » à la différence de F.

Les élèves n'ont pas en majorité d'activités supplémentaires.

Q6 : En A les élèves de section « littéraire » se partagent pour choisir les maths facultatives à l'inverse de F.

Q121 : A l'inverse de F et dans toutes les séries les élèves de A estiment que les mathématiques ne jouent pas un rôle primordial dans la sélection et que ce rôle est justifié ».

On observe également des inversions pour ce qui concerne les variables d'opinions :

« Q5 : A l'inverse de F, et ce dans toutes les séries, les élèves de A estiment excessif d'être arrêté une heure pour traiter une question mathématique en temps libre.

Une majorité encore plus importante en A trouve cela déprimant.

Q7 : En A les mathématiques servent beaucoup moins dans les matières littéraires ou sciences humaines et beaucoup plus dans les matières scientifiques qu'en F. Les mathématiques semblent donc perçues davantage dans comme une discipline de service que comme une discipline de formation intellectuelle.

Q8 : En A, en section indéterminée, les maths ne servent pas à organiser les connaissances à l'inverse de F.

A l'inverse de F, elles n'évitent pas de commettre des erreurs de raisonnement.

La dimension formation intellectuelle des maths semble moins perçue en A qu'en F.

Q11 : Elles sont perçues semblables à la pratique d'un jeu, passionnante, en série scientifique en A, à l'inverse de F, ce qui confirme le choix positif de l'orientation en section scientifique en RFA.

Les maths apparaissent très vite incompréhensibles en section « littéraire » en A, à l'inverse de F » [Ibid. , p.16-17].

2.4.2 Etude TIMSS

Nous n'avons pas trouvé d'étude spécifique sur la démonstration dans la troisième étude internationale sur les mathématiques et les sciences (TIMSS)¹⁸². Nous retiendrons deux éléments concernant l'étude TIMSS.

Le premier élément concerne la méthodologie quantitative dans les études comparatives et la prudence dans les comparaisons. En effet si les deux populations comparées ont des structures différentes, on peut aboutir à des résultats opposés selon qu'on prend en compte ou non ces différences de structure, c'est ce qu'on appelle l'effet de structure. Illustrons cette difficulté sur l'exemple suivant.

2.4.2.1 Un exemple d'effet de structure

L'étude [TIMSS 1998], qui a été réalisée en mai juin 1994-95, et pour les étudiants allemands de Gymnasium en 1996 [Ibid. p.14], concerne en fin de secondaire :

- les élèves français non redoublants de classes de terminale (grade 12) des lycées d'enseignement général et technologique, et de terminale (grade 13) des lycées professionnels, ainsi que de dernière année de BEP¹⁸³ ou de CAP¹⁸⁴ ;

¹⁸² Third international mathematics and science study

¹⁸³ Brevet d'étude professionnelle

¹⁸⁴ Certificat d'aptitude professionnelle

- les élèves allemands du secondaire supérieur ou des programmes professionnels du grade 13 (Klasse 13 ou dernière année) dans les Länder de l'ancienne Allemagne de l'Ouest ou du grade 12 (Klasse 12 ou dernière année) dans les Länder de l'ancienne Allemagne de l'Est.

On continue à désigner par F les populations relatives à la France et par A les populations correspondantes relatives à l'Allemagne.

Résultats des élèves en sciences et en mathématiques							
Pays		programme académique		programme technique		programme professionnel	
	moyenne totale	% de élèves	moyenne des résultats	% de élèves	moyenne des résultats	% de élèves	moyenne des résultats
F	505	54	534	34	486	12	435
A	496	26	567	11	502	63	466

Pour ce qui concerne les items de mathématiques et de sciences réunis, ou de sciences sans les mathématiques, la moyenne des résultats¹⁸⁵ de la dernière année d'enseignement secondaire n'a pas de différence statistiquement significative entre F et A [Ibid. p.33, 49].

Par contre, si on se limite aux items de mathématiques la moyenne des résultats de la dernière année d'enseignement secondaire de F est statistiquement significativement supérieure à celle de A [Ibid. p.47]. On observe d'ailleurs que la moyenne de F est nettement supérieure à celle de A en mathématiques alors que celle de A est légèrement supérieure à celle de F en sciences.

La différence entre les performances¹⁸⁶ en mathématiques et en sciences est faible et non significative pour A, alors qu'elle est importante (en faveur des mathématiques) et significative pour F [Ibid. p.50].

¹⁸⁵ La mesure des résultats de A ou de F essaie de prendre en compte non seulement la correction des réponses aux items mais également la difficulté des items dans le cadre de la théorie IRT [TIMSS 1998, p.31].

Enfin il est intéressant d'observer que les moyennes des résultats en mathématiques pour la dernière année d'enseignement secondaire¹⁸⁷ sont :

- pour F significativement supérieure aux moyennes internationales correspondantes (obtenue à partir des résultats de la quarantaine de pays participants),
- pour A sans différences significatives par rapport aux moyennes internationales correspondantes [Ibid. p.56].

Il est cependant très intéressant de noter dans le tableau ci-avant que la répartition des élèves par programmes d'éducation (académique, technique ou professionnel) est différente d'un pays à l'autre et que **les moyennes de résultats de A sont meilleures dans toutes les catégories que pour celles de F mais la moyenne générale en A est inférieure à celle en F**. Nous avons ici un effet de structure remarquable, qui est un risque important des études comparatives. Malheureusement l'information sur la répartition des résultats suivant le type de programme n'est disponible que pour les résultats de sciences et mathématiques réunis et non pas pour ceux des mathématiques seules [Ibid. p.83]. On voit donc ici que, selon le critère de comparaison retenu (moyenne globale ou moyenne par type d'école), on arrive à des conclusions différentes.

En France les programmes académiques concernent les séries S, ES et L des lycées, les programmes techniques concernent les séries STT et autres séries technologiques, et les programmes professionnels concernent les baccalauréats professionnels, les BEP et les CAP.

En Allemagne, les programmes académiques concernent les Gymnasia ou les écoles généralistes (Gesamtschule ou Integrierte Gesamtschule), les programmes techniques concernent les programmes techniques ou professionnels ou de sciences appliquées des Fachgymnasia ou des Fachoberschulen, les programmes professionnels concernent l'apprentissage (Berufsschulen) et les programmes professionnels à temps plein (Berufsfachschulen) [Ibid. p.84].

Nous rappelons que la mesure de la moyenne des résultats prend en compte non seulement la correction des réponses aux items mais également la difficulté des items dans le cadre de la

¹⁸⁶ Rappelons que dans le cadre théorique IRT, les échelles de mesure de la performance sont ramenées à une moyenne 500 avec une déviation standard de 100.

¹⁸⁷ C'est également le cas pour le grade 8.

théorie IRT¹⁸⁸ et les échelles de mesure de la performance sont ramenées à une moyenne totale (avec tous les pays de l'enquête TIMSS) de 500 avec une déviation standard de 100.

2.4.2.2 Tâches de raisonnement

L'étude [TIMSS 1998], qui a été réalisée en mai juin 1994-95, et pour les étudiants allemands de Gymnasium en 1996 [Ibid. p.14], concerne les classes de mathématiques approfondies correspondant aux élèves

- français : élèves de la classe de terminale S du baccalauréat général,
- allemands de la dernière année (Klasse 12 ou 13 selon les Länder) suivant un cours approfondi de mathématiques (3 à 5 périodes par semaine).

On continue à désigner par F les populations relatives à la France et par A les populations correspondantes relatives à l'Allemagne. Les moyennes de résultats sont calculées conformément au cadre théorique IRT évoqué précédemment.

F et A des classes de mathématiques approfondies sont questionnés sur combien souvent leur est-il demandé de réaliser des tâches d'un certain type dans la leçon de mathématiques, ce qui donne le tableau suivant de réponses, où la colonne « moyenne » correspond à la moyenne des résultats de l'ensemble des élèves ayant donné ce type de réponse.

Pays	moyenne totale	jamais ou presque jamais		quelques leçons		la plupart des leçons		%	
		% de s élève s	moyenne	% de s élève s	moyenne	% de s élève s	moyenne		
tâche de raisonnement									
F	557	0		10	542	56	561	33	
A	465	1		18	459	49	467	31	

¹⁸⁸ Rappelons que dans le cadre théorique IRT, les échelles de mesure de la performance sont ramenées à une moyenne 500 avec une déviation standard de 100.

Les tâches de raisonnement semblent plus présentes en F qu'en A. Il faudrait cependant relier ces fréquences à la fréquence des leçons de mathématiques dans la semaine : alors qu'elle est de 6 périodes hebdomadaires en terminale S française voire 8 périodes si la spécialité est mathématiques (1 période valant 55 min en général), elle n'est , elle n'est que de 5 périodes de 45 min dans le Leistungskurs de Klasse 13 du Bade-Wurtemberg.

2.4.3 La démonstration en classe du théorème de Pythagore (Knipping)

[Knipping 2003] étudie et compare des processus de preuve à partir d'observation de séances d'enseignement portant sur le théorème de Pythagore dans trois classes allemandes (deux Klasse 9 d'un lycée de Hambourg et une Klasse 8 du lycée franco-allemand de Buc) et dans trois classes françaises de quatrième (deux de collèges parisiens et une du collège franco-allemand de Buc).

La méthodologie adoptée est une méthodologie empirique, fondée sur une analyse qualitative approfondie de cas observés (enregistrement audio et prises de photo du tableau). « L'intérêt des études de cas comme celle-ci est bien différent des études statistiques. Les enquêtes statistiques cherchent à obtenir des résultats généraux, sur la base d'échantillons représentatifs. Par contre, dans une étude de cas, les échantillons ne sont pas représentatifs au sens statistique. On travaille sur un nombre de cas beaucoup plus restreint. Dans une étude de cas, chaque cas est analysé en détail pour mettre en évidence des phénomènes inattendus, on cherche à comprendre des phénomènes qui ne sont pas encore étudiés. Dans notre recherche, ce sont les processus de la preuve et de la démonstration en classe qui nous intéressent » [Knipping 2003b, pp.785-786].

Deux types d'analyse sont proposées.

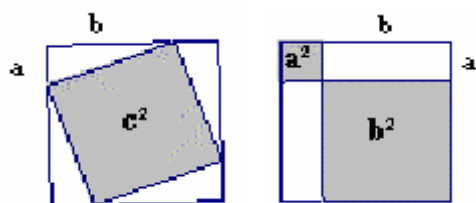
Pour chaque classe une analyse de contexte est constituée d'une description générale de l'unité d'enseignement, d'une analyse didactique des contenus [Stoff-didaktische Analyse] de la démonstration et des exercices. Puis une analyse comparative des processus de preuve permettra de définir des prototypes des processus de preuves d'enseignement issues des cas étudiés, desquels seront déduits des types idéaux de processus de preuve.

Une analyse de l'argumentation s'effectue selon le modèle fonctionnel de Toulmin qui permet une analyse locale (pas par pas) puis une reconstruction de la preuve globale à l'aide d'un schéma arborescent. « Les argumentations reconstruites dans les discours de preuves en situation d'enseignement se caractérisent par le fait qu'elles sont souvent exprimées de manière incomplète, garantie tout

comme fondement ne sont pas énoncés de manière explicite »¹⁸⁹ [Knipping 2002, p.54, trad. R.C.] On effectue une analyse argumentative de la structure globale du discours de preuve avec une partition du discours de preuve en scènes. Une analyse comparative des argumentations, permettra de définir des prototypes des discours de preuve et des idéaux des types de discours de preuve.

Quatre types de preuve du théorème de Pythagore sont repérés.

«

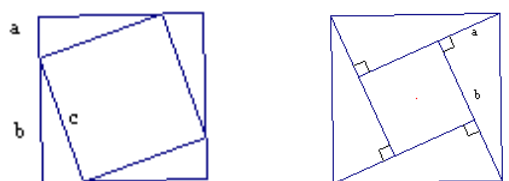


I

Preuve de complémentarité

Figure 1

Dans le premier genre de preuves (figure 1), deux figures – un carré d’aire c^2 et la réunion de deux carrés d’aires respectives a^2 et b^2 - sont complétées par l’adjonction à chacune de quatre triangles rectangles égaux, de façon à former deux carrés égaux, donc bien sûr de même aire. Dans ce genre de preuve, a^2 , b^2 et c^2 sont immédiatement interprétés comme les aires de trois surfaces apparaissant dans les figures et que l’on cherche donc à comparer. Le support visuel est fondamental dans ce genre de preuve. Les preuves de genre II sont au contraire basées sur des calculs algébriques. On obtient le théorème de Pythagore en calculant de deux façons différentes les aires de deux carrés (les carrés de côté respectivement c et $a+b$), chaque carré est astucieusement découpé et son aire est d’une part égale au carré de la longueur du côté, et d’autre part obtenue en sommant les aires des triangles et carrés que le découpage a fait apparaître. Dans les preuves de genre II, tous les éléments apparaissant à un moment de la preuve admettent une interprétation géométrique.



II a

II b

Preuve arithmétique

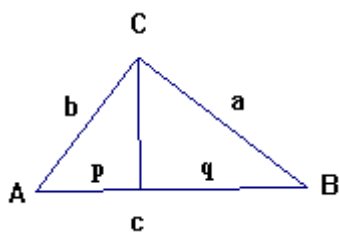
Figure 2

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = c \cdot p$$

$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \rightarrow a^2 = c \cdot q$$

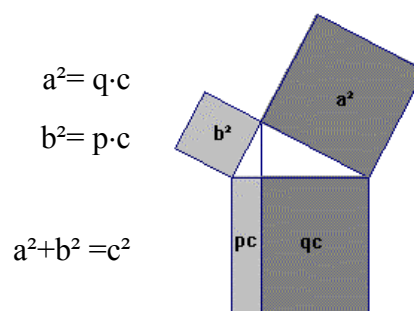
$$a^2 + b^2 = c \cdot q + c \cdot p$$

$$= c \cdot (q + p) = c^2$$



III

Preuve utilisant la similitude



IV

Preuve utilisant le théorème d’Euclide

¹⁸⁹ Die rekonstruierten Argumentationen in den unterrichtlichen Beweisdiskursen zeichnen sich dadurch aus, dass sie häufig unvollständig hervorgebracht werden, Garant bzw. Stützung nicht explizit genannt werden.

Figure 3

Figure 4

Par contre, une telle interprétation n'est plus possible dans les preuves de genre III (figure 3), également basées sur des manipulations algébriques de termes. L'application de la similarité des triangles est essentielle dans cette preuve, qui est donc plus complexe que les preuves précédentes. On utilise des égalités de rapports déduites de la similitude des triangles ABC, ACD et CBD pour démontrer que $a^2+b^2=c^2$. Les termes apparaissant dans les équations représentent ici des longueurs, non pas des aires comme dans les preuves précédentes. Une interprétation géométrique du théorème devient donc plus difficile. Dans le quatrième genre de preuves, le carré construit sur l'hypoténuse est découpé en deux rectangles, dont l'aire est connue grâce au théorème d'Euclide étudié dans les leçons précédentes. La preuve est fondée sur la visualisation de ce théorème qu'on appelle dans l'enseignement allemand « théorèmes des côtés de l'angle droit » [Knipping 2003b, pp.786-787].

Les preuves II, III et IV sont observées dans les classes allemandes et les preuves I et II dans les classes françaises. On peut expliquer que les types de preuves II et IV n'apparaissent pas dans les classes françaises du fait que les similitudes ou le théorème d'Euclide ne sont pas au programme des classes de quatrième françaises.

Deux types de processus de preuves sont dégagés.

Knipping caractérise « les processus de preuve qui sont amorcés par un problème concret de calcul par l'expression « **voir que** ». Dans ce type de processus de preuve, le théorème de Pythagore est présenté comme la solution d'un problème appliqué. Le sens et la justification du théorème général sont développées et comprises à partir du cas particulier étudié, et ce de façon collective par l'ensemble de la classe. La fonction du processus de preuve est dans ce cas de dégager la signification d'un théorème en partant de problèmes appliqués et particuliers. Nous n'avons pu reconstruire ce type de processus de preuve que dans les cours allemands. Un deuxième type, qui sera caractérisé par l'expression « **expliquer pourquoi** » et que nous avons rencontré dans les cours français, commence par la présentation de l'énoncé du théorème. Prouver signifie ici se ramener à des théorèmes, des définitions et des techniques qui ont été déjà validés en classe comme savoir officiel » [Ibid. p.i-ii]. Dans le type « expliquer pourquoi », « la démonstration du théorème se fait à la fois oralement et au tableau. L'établissement d'un nouveau savoir se fait par des justifications explicites et publiques ». Dans l'application du théorème de Pythagore « la résolution du problème s'appuie sur les processus de preuve et est expliquée de la même façon discursive que ces derniers. [...] Des problèmes comme celui-ci font appel non seulement au théorème de Pythagore mais aussi à d'autres notions ou résultats géométriques, par exemple le cercle circonscrit à un triangle ou les propriétés des tangentes à un cercle. Je n'ai pas pu trouver dans des cours allemands des exercices de ce type. Une comparaison des manuels confirme cette observation. Donc, dans les classes allemandes, l'application d'autres théorèmes étudiés en classe ne se trouvaient que dans les preuves du théorème de Pythagore, pas dans les devoirs que les élèves ont eu à faire. Dans l'enseignement allemand l'application de « savoir officiel » est donc de la responsabilité de professeur, qui conduit et structure les processus de preuve. Par contre il est de la responsabilité à la fois des élèves et du professeur dans le prototype Pascal et les autres cas français [...] Une autre différence observée entre les situations d'exercices dans les classes allemandes et françaises est la suivante. Ce qui est important dans la résolution de l'exercice dans les cours français, ce n'est pas le résultat qu'on obtient, mais bien la justification donnée. Au tableau et dans les

cahiers des élèves, on trouve des traces de cette exigence, qui est pour les exercices souvent de la responsabilité des élèves. Par contre, on trouve rarement, au plus oralement, des justifications de ce type dans les cours allemands, où les calculs sont plutôt dominants » [Knipping 2003b, pp.788-792].

« Des analyses locales, c'est-à-dire dans lesquelles chaque pas de l'argumentation est reconstruit (Toulmin 1958), permettent de distinguer des argumentations que nous appellerons respectivement pragmatique, sémantique ou conceptuelle déductive ou abductive » [Ibid. p.ii].

Une argumentation est **conceptuelle déductive** [deduktiv-begrifflich] si les conclusions sont déduites, de manière logiquement correcte, des données à l'aide de garanties, explicites ou implicites, qui correspondent à des conceptions et des relations mathématiques. Les conclusions peuvent être recyclées en données. Une argumentation est **conceptuelle abductive** [abduktiv-begrifflich] si à la différence de l'argumentation précédente on remonte de la conclusion aux données en raisonnant par conditions suffisantes [Knipping 2003a, p.122, 131].

Dans l'analyse du discours, ont été reconstruites les argumentations sémantiques suivantes : intuitive [anschaulich], arithmétique [rechnerisch], métaphorique ou analogique.

Pour les argumentations intuitifs, « indépendamment du fait qu'une proposition géométrique ou algébrique soit justifiée, les argumentations de cette sorte sont marquées par un changement entre les manières de voir géométriques et algébriques [...] En particulier ces changements seront renforcés à travers des représentations visuelles [...] Le recours au dessin est en quelque sorte partie de l'argumentation »¹⁹⁰ [Ibid. p.118].

Dans les argumentations arithmétiques « les propositions sont justifiées par des pas de calcul »¹⁹¹ [Ibid. p.121] mais les pas ne sont pas explicitement justifiés par l'énoncé de la règle utilisée. L'argumentation métaphorique « est substantiellement marquée à travers une image non mathématique de manière à illustrer une notion mathématique »¹⁹² [Ibid. p.121]. Pour l'argumentation analogique « sera fait référence à une autre conclusion et par analogie une conclusion plus large est justifiée »¹⁹³ [Ibid. p.123].

Dans l'analyse du discours, ont été reconstruites les argumentations pragmatiques suivantes : par construction ou métrique. Dans l'argumentation par construction, « des propositions seront interprétées et justifiées à travers la procédure de réalisation d'une figure de démonstration »¹⁹⁴ [Ibid. p.127] et

¹⁹⁰ Unabhängig davon, ob eine geometrische oder algebraische Aussage begründet wird, sind Argumentationen dieser Art durch Wechsel zwischen geometrischer und algebraischer Sichtweise geprägt [...] Insbesondere durch visuelle Repräsentationen werden diese Wechsel unterstützt.

¹⁹¹ werden Aussagen der Rechenschritte begründet.

¹⁹² ist substanzial durch ein nicht mathematisches Bild geprägt, das einen mathematischen Begriff veranschaulichen soll.

¹⁹³ In dem hier diskutierten Beispiel wird auf einen anderen Schluss Bezug genommen und in Analogie eine weitere Konklusion begründet.

¹⁹⁴ Aussagen werden durch den Herstellungsprozess der Beweisfigur gedeutet und begründet.

dans l'argumentation métrique à travers la procédure de mesure. « La manière, comme on en vient au conclusion dans ces argumentations, est liée à des actions, indépendamment du fait que celles-ci soient réalisée concrètement, c'est-à-dire l'« empirisme naïf » ou juste représentée dans une « expérience mentale » »¹⁹⁵ [Ibid. p.128].

« Une analyse globale, c'est-à-dire de la structure d'ensemble de l'argumentation, conduit à distinguer une « structure en source » et une « structure en bassin » » [Ibid. p.ii]. Dans l'argumentation avec une structure en source, plusieurs argumentations sont développées en parallèle, leurs conclusions sont recyclées en données, et ainsi de suite jusqu'à obtenir la conclusion finale. Dans l'argumentation en bassin, des lignes d'argumentations sont développées de manière linéaire en avant (des données vers la conclusion) ou en arrière, pour structurer une prochaine ligne d'argumentation.

L'analyse des argumentations permet de reconstruire deux types de discours de preuve.

« Le leitmotiv du type de discours, que nous avons appelé de « **mise en évidence** » (« *auschauendes Deuten* ») et que nous avons pu reconstruire dans les cours du type « voir que », est le mot voir (« *sehen* »). Les représentations visuelles y sont à la base d'argumentations fondées essentiellement sur la contemplation des figures. Les argumentations y sont constructives, contemplative et calculatoires, les énoncés tiers (« garants ») n'en sont en général pas explicités, l'évidence est obtenue par la manipulation et l'observation. L'argumentation dans sa globalité est marquée par une structure que nous appellerons « structure en source ». Cette structure est tout d'abord très ouverte, des argumentations parallèles y sont développées. Les conclusions contradictoires peuvent apparaître de différents écheveaux provenant de perspectives différentes » [Ibid. p.ii]. On a observé des argumentations intuitifs, arithmétiques et constructives dans ce type de discours.

« À la base d'un deuxième type de discours, que j'ai appelé de « **justification officielle** » (« *öffentliche Begründen* ») et qu'on peut reconstruire dans les cours de type « expliquer pourquoi », il y a l'assertion (« *Aussagen* »). La progression vers l'énoncé-cible, la conclusion, se fait par une chaîne d'assertions nettement énoncées et justifiées. Données, conclusions et énoncé tiers (« garants ») sont explicités. La validité des assertions y est établie et officialisée par l'inscription tableau. Dans ce type de discours, l'argumentation est essentiellement conceptuelle ou bien portée par des calculs algébriques. L'ensemble de l'argumentation présente une « structure en bassin », créée par le fonctionnement abductif de l'argumentation qui est amorcée par énoncé cible intermédiaire. L'énoncé cible final et l'ensemble des énoncés cibles intermédiaires structurent l'ensemble de l'argumentation. L'argumentation peut par ailleurs prendre un caractère algébrique » [Ibid. p.ii]. On a observé des argumentations conceptuelles et arithmétiques dans ce type de discours.

« Le type processus de preuve que j'ai caractérisée par « voir que » et « mise en évidence », peut-être associée à une sorte de compréhension contemplative du savoir, le type « expliquer pourquoi » et « justification officielle » comme une compréhension discursive » [Ibid. p.ii]. La première peut être associée aux cours allemands observés tandis que la seconde est plutôt rencontrée dans les cours français.

¹⁹⁵ Die Art, wie man in diesen Argumentationen zu Schlüssen kommt, ist an Handlungen gebunden, unabhängig davon, ob jene konkret, d.h. "naiv empirisch", vollzogen lediglich in einem "gedankenexperiment" vorgestellt werden.

2.5 Conclusion

2.5.1 Typologie des arguments

Nous allons d'abord essayer de réaliser une synthèse des différentes typologies étudiées et de les situer dans cette synthèse en proposant une typologie des arguments. En effet une preuve pouvant contenir des arguments de types différents il nous semble **plus simple de typer les arguments plutôt que les preuves**. Nous adoptons la typologie de [Knipping 2003a, p.100] en la redéfinissant avec notre terminologie. Nous avons notamment renommé le type « conceptuel déductif ou abductif » pour les raisons suivantes. D'une part la distinction « déductif/abductif » chez Knipping renvoie à l'exposé de la preuve ou au déroulement du processus de preuve et non à la structure¹⁹⁶ de la preuve, c'est-à-dire elle renvoie au niveau de la technique de l'exposé de la preuve. Or la distinction entre la technique abductive chez Knipping qui consiste à remonter de la conclusion vers les données, ou déductive qui consiste à descendre des données vers la conclusion, peut également être produite pour les preuves sémantiques. Dans notre terminologie, distincte de celle de Knipping, la terminologie déductif/abductif¹⁹⁷ renvoie plutôt à la distinction argument de nécessité/argument de plausibilité, donc à une différence de technologie. En effet le terme abductif, introduit par Peirce, désigne les raisonnements de plausibilité. Le terme déductif renvoie au raisonnement de nécessité, par exemple dans le modus ponens de la logique classique, qui est désigné par le raisonnement déductif. Notre typologie concerne aussi bien les arguments de nécessité que ceux de plausibilité.

Nous distinguerons essentiellement les **trois types d'arguments** suivants :

- **formel** (ou syntaxique) : tout argument dont la structure est clairement explicitée (données, règle de validation, conclusion)¹⁹⁸ et dont l'application de la règle de validation repose sur la forme des termes de la règle et des données, et ne nécessite pas une interprétation supplémentaire basée sur la signification ou le contenu de ces termes ou de ces données.

¹⁹⁶ Nous avons bien distingué dans le chapitre 1 la structure d'une validation, structure intemporelle et la séquence des arguments d'une validation, séquence liée au processus de validation c'est-à-dire aux moments d'apparition des arguments successifs soit dans le temps « heuristique » de découverte d'une validation, soit dans le temps de l'exposé d'un texte de preuve.

¹⁹⁷ Rappelons que le terme « abductif » a été introduit par [Peirce 1960, 2.95] : « Argument is of three kinds : Deduction, Induction and Abduction (usually called adopting a hypothesis) » et défini par « An hypothesis in every sense is an inference, because it is adopted for a reason, good or bad, and that reason, in being regarded as lending the hypothesis some plausibility [Peirce 1960, 5.511n]

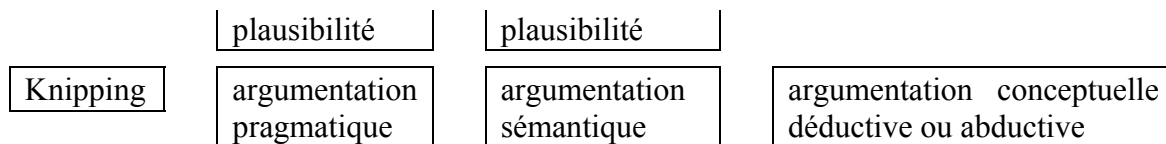
¹⁹⁸ Nous rejoignons ici la position de [Toulmin 1993, p.147] sur la validité formelle des arguments.

- **pragmatique** : tout argument utilisant le succès d'une action comme règle de validation, par exemple avec le recours à une action du type mesure, reconfiguration de surfaces par déplacement, construction d'une figure, lecture directe d'une figure. L'action peut être effectivement réalisée ou pensée. On comprend que le recours à une action ne correspond pas à une règle formelle.
- **sémantique** : tout argument dont la règle de validation est constituée de règles qui ne sont pas formulées de manière formelle mais qui s'appuie sur la signification ou le contenu des objets qu'elles mettent en jeu. C'est le cas des règles qui ne sont pas complètement explicitées ou formalisées, par exemple lorsque le registre de représentation des objets n'est pas une langue formelle comme dans le cas d'un calcul automatique non explicité, ou dans la conversion d'un registre de représentation à un autre.

La frontière¹⁹⁹ entre ces trois types d'argument n'est pas toujours très claire : des types de preuves pourront occuper des cases différentes du tableau ci-dessous si elles peuvent relever de plusieurs types différents d'arguments

Cabassut	argument pragmatique	argument sémantique	argument formel (ou syntaxique)
Balacheff	preuves pragmatiques	preuves intellectuelles	démonstration calcul sur les énoncés
Duval		inférence sémantique inférence discursive	déduction syllogisme
Holland	argumentation	argumentation déduction sémantique	déduction formelle
Tietze	preuve préformelle preuve par l'action argument de	preuve préformelle intuition sémantique argument de	démonstration déductive formelle

¹⁹⁹ Jusqu'à où formaliser pour être sûr qu'il n'y a plus de trace sémantique ? Quelle est la frontière entre une action pensée non réalisée et une inférence sémantique ? Le recours à la figure est-il une validation par la vision (qui est une forme d'action) ou est-il une conversion sémantique d'un registre à un autre ? Nous déciderons en situation en commençant par repérer les typologies de preuves des auteurs précédents dans les typologies que nous venons de proposer.



A propos de la typologie de Balacheff, les preuves pragmatiques relèvent des arguments pragmatiques puisqu'elles sont fondées sur une action effective et sont tributaires d'un contingent matériel.

Dans notre classification on peut se demander où on place l'argument d'autorité et l'argument visuel évoqués précédemment²⁰⁰.

On peut considérer que l'**argument d'autorité** est un argument sémantique dans le sens où il renvoie à la signification de l'autorité dans la théorie (sociale) considérée. Mais on pourrait également le placer dans la catégorie des arguments formels si on adopte le formalisme proposé dans le chapitre 1. Ce débat ne nous paraît pas utile et nous signalerons l'argument d'autorité en tant que tel lorsque nous le rencontrerons.

Pour ce qui concerne l'**argument visuel** la discussion est plus délicate. On peut considérer qu'il s'agit d'un argument pragmatique puisqu'il recourt à la vision, qui est une action. On peut considérer qu'effectivement c'est le cas lorsque la vision sert à valider directement le résultat d'une action, par exemple vérifier visuellement qu'après construction, deux droites se coupent, ou, qu'après déplacement, des surfaces forment un carré. On peut considérer que c'est un argument sémantique lorsque la vision sert à décoder une figure, donc à tirer du contenu ou de la signification de la figure des conclusions par des inférences sémantiques. La frontière n'est pas très claire. Les travaux de Houdement, Kuzniak ou Parzys les ont développés en montrant l'importance de la théorie, c'est-à-dire du type de géométrie dans lequel on se place. [Parzys 2003, p.111] a proposé une classification suivant le type de géométrie (concrète, spatio-graphique, proto-axiomatique, axiomatique), la nature des objets (physique, théorique) et le type de validation (perceptive, déductive). Plutôt que de nous engager dans un débat complexe, nous évoquerons l'argument visuel en tant que tel lorsque nous le rencontrerons, en précisant en situation ses caractéristiques.

2.5.2 Types d'arguments et fonctions des validations

Concernant la comparaison des types de validations et leurs fonctions (question Q1), quelques éléments de réponses peuvent déjà être suggérés

²⁰⁰ Voir §1.1.14

Un premier examen des réflexions et recherches sur la validation en France et en Allemagne semble indiquer que les **arguments de plausibilité**, les **arguments pragmatiques** [enaktiv, handlungsbezogen, konstruktiv, metrisch...] et les **arguments sémantiques** [inhaltlich, anschaulich, metaphorisch, analogisch ...] sont **davantage pris en compte du côté allemand** (Stein, Holland, Blum, Tietze). Bien entendu cela ne veut pas dire qu'il n'y pas prise en compte des arguments formels, bien mis en évidence dans [Holland 2001]. [Straesser 2002, pp.2-5] rappelle que « la « Stoffdidaktik » est l'analyse du contenu mathématique d'un projet d'enseignement Par le développement de produits pour l'enseignement des mathématiques, elle est l'identification de la « voie royale » pour l'enseignement d'un contenu donné – y compris les méthodes d'enseignement – ce qui implique souvent (situations d'enseignement vs. modèles mathématiques) une élémentarisation du savoir mathématique. Cette élémentarisation a une longue tradition ». Straesser signale que le livre de Holland est « prototypique de la « Stoffdidaktik » ». Nous interprétons cette tendance à la valorisation des arguments de plausibilité et des arguments pragmatiques **dans le cours allemand** par la valorisation des fonctions suivantes de la validation.

La première fonction est celle de **systématisation élémentaire**. On souhaite valider en cours très tôt des résultats, quitte à utiliser des arguments de plausibilité ou pragmatiques qui seront en quelques sortes des versions élémentaires des arguments mathématiques formels encore inaccessibles. [Knipping 2003b, p.793] précise : « La fonction de systématisation [...] mérite ici notre attention [Villiers 1990]. Chaque preuve, fondée sur d'autres concepts et théorèmes, permet de revoir des savoirs et connaissances. Une telle révision peut être l'accès à une systématisation des savoirs en place. L'application des savoirs déjà vus en classe donne de la valeur à ces savoirs et montre leur pertinence. Mon interprétation de la raison pour laquelle on observe deux preuves dans ces cas dans les classes en Allemagne est donc que les preuves, dans ce cas, ont aussi une fonction de systématisation des savoirs ».

La seconde fonction est celle de **d'explication élémentaire** à travers les arguments intuitifs [anschaulich] et sémantiques [inhaltlich] : « « rentrer dans le détail » pour un simple pas de démonstration seulement alors si un gain de compréhension apparaît important et si les élèves sont pour cela motivables » [Holland 2001, p.54]. La précision est au service de la compréhension et non de la rigueur. [Knipping 2003b, p.792] observe : « Le sens et la justification du théorème général sont développés et compris à partir du cas particulier étudié, et ce de façon collective par l'ensemble de la classe. La fonction du processus de preuve est dans ce cas de dégager la signification d'un théorème en partant de problèmes appliqués et particuliers ».

La troisième fonction est celle de **découverte « contemplative »** en reprenant l'expression de [Knipping 2002, p.ii] : « Le leitmotiv du type de discours, que nous avons appelé de « mise en évidence » (« auschauendes Deuten ») et que nous avons pu reconstruire dans les cours du type « voir que », est le mot voir (« sehen »). Les représentations visuelles y sont à la base d'argumentations fondées essentiellement sur la contemplation des figures [...] Le type processus de preuve que j'ai caractérisée par « voir que » et « mise en

évidence », peut-être associée à une sorte de compréhension contemplative du savoir ». Cette contemplation n'est pas seulement celle d'une figure. Knipping observe **dans les cours allemands que la preuve du théorème de cours ne sera pas un exemple à suivre pour la résolution des exercices** ou des problèmes à venir ; ce sera une preuve à contempler pour mieux comprendre, pour découvrir le sens du théorème mais qui ne servira pas dans l'application du théorème : « un enseignement de type Nissen²⁰¹, partant des problèmes appliqués et particuliers dans les processus de preuve, peut offrir aux élèves des significations et des motivations pour étudier un théorème. Tandis que la preuve même et son caractère démonstratif peuvent être « perdus » ou pas reconnu dans une telle démarche. En particulier, l'appui sur des problèmes d'application et des calculs dans les exercices à résoudre peut affaiblir l'effort de l'enseignement de la preuve en classe. La valeur communicative de la preuve peut même rester totalement inconsciente ou être ignorée » [Knipping 2003b, p.795]. On voit poindre dans cette contemplation de la preuve un trait de la Stoffdidaktik décrit par [Straesser 2003, p.5] : « La « Stoffdidaktik » parle surtout/presque exclusivement du savoir (à enseigner), les acteurs du système didactique sont absents ».

On terminera en évoquant la fonction de communication. Cette fonction, longuement évoquée dans [Holland 2001, p.33] n'a pas été observée par [Knipping 2003b, p.793] dans les classes allemandes : « nous n'avons rencontré cette fonction discursive de preuve que dans les cours faits en France ».

En France, « l'ingénierie didactique a toujours inclus la réflexion sur les structures cognitives de l'apprenant » [Straesser 2002, p.5]. Certes on étudie les preuves pragmatiques des élèves (Balacheff) mais c'est pour mieux produire « des créations didactiques pour améliorer l'enseignement » [Ibid. p.4] qui placent la production de l'argument formel comme un de ses objectifs. Pour ces créations didactiques développées par exemple dans [Duval, Egret 1993], [Houdebine et al, 1998], [IREMs de Grenoble et Rennes 2003], **la démonstration est un texte** et apprendre à écrire des démonstrations est fondamental. On voit l'importance de la **fonction de communication à l'écrit** en France. Comme Knipping l'a observé, le processus de preuve du théorème de cours en classe sera un des moments d'apprentissage de l'écriture d'arguments formels, en langage familier voire dans le formalisme naïf. La résolution d'exercices sera un autre moment, car ils ne se réduisent pas à une simple application du théorème de cours comme dans les classes allemandes observées. « C'est la fonction discursive ou communicative qui est importante ici. Cette fonction correspond au fait qu'une preuve doit être expliquée aux autres ». Du fait de l'importance du discours dans cette communication, par rapport aux registres de l'action ou

²⁰¹ le type Nissen est le prototype de cours allemand que dégage Knipping.

du dessin davantage valorisés dans les classes allemandes, nous parlerons de **fonction de communication discursive**.

On aborde donc également une autre fonction, la fonction explicative. Pour les classes françaises observées, Knipping caractérise le « type « expliquer pourquoi » et « justification officielle » comme une compréhension discursive » [Knipping 2002, p.ii]. Même dans la **fonction explicative**, la dimension **discursive** apparaît, alors qu'il y avait une dimension contemplative dans les cours allemands.

Cette différence entre les classes allemandes observées où l'élève est contemplateur, et les classes françaises où « où l'on attend des étudiants qu'ils soient capables d'élaborer d'expliquer la solution de problèmes » [Knipping 2003b, p.792] évoque la **fonction de découverte** mais dans sa dimension **heuristique**, alors que chez les élèves allemands la fonction découverte avait une dimension explicative : les processus de preuve développés dans les classes françaises observées doivent être des moments où on apprend à découvrir la solution des problèmes. Cette dimension heuristique était présente dans notre évocation précédente des travaux didactiques français. Cela rejoint les conclusions d'une comparaison de [Pepin 1998, p.11] : en France « la pratique de l'approche par les activités était basée sur les idées de Piaget [...] L'idée que les élèves devaient découvrir par eux-mêmes était vue comme la stratégie d'apprentissage et d'enseignement prédominante [...] en Allemagne [...] l'invention de nouvelles solutions ou procédures n'était pas encouragée et les leçons apparaissaient relativement formelles et traditionnelles en ce qui concerne leurs contenus mathématiques »²⁰².

On peut aussi remarquer que l'approche discursive encourage le fait que les pas de démonstration soient justifiés par un énoncé tiers déjà rencontré en cours. En conséquence on a une fonction de systématisation locale car elle mobilise localement les énoncés-tiers disponibles. Dans l'approche allemande des arguments pragmatiques ou sémantiques sont mobilisés en cas d'absence d'énoncé tiers disponibles.

Dans l'approche française, Knipping souligne le risque « d'ignorer l'aspect de la motivation et le besoin des élèves. Même si les devoirs en classe soutiennent la fonction communicative de preuves, cette fonction n'est pas nécessairement vécue comme telle par les élèves, qui perçoivent les preuves comme des activités que l'on doit faire pour le professeur. Il en est de même de la fonction explicative des preuves [...] qui n'est pas nécessairement claire pour les élèves » [Ibid. p.795].

En résumé les différences suivantes semblent apparaître après l'étude de réflexions et des réflexions sur la validation en France et en Allemagne.

²⁰² The practice of the 'activity' approach was based on Piagetian ideas and the development of those over the decades. The idea that pupils had to discover for themselves was seen as the predominant learning and teaching strategy. [...] in Germany [...] the invention of new solutions or procedures was not encouraged, and lessons appeared relatively formal and traditional in terms of their mathematical content.

comparaison sur :	France	Allemagne
types d'arguments valorisés ²⁰³	argument formel	argument pragmatique, argument sémantique
qualités valorisées des fonctions :	discursive	contemplative
communication	discursive	élémentaire et contemplative
explication	heuristique	contemplative
découverte	locale et	élémentaire et contemplative
systématisation	discursive	

Nous avons donc observé une première différence entre la France et l'Allemagne sur le type d'argument valorisé. Nous avons expliqué ces différences par la valorisation de fonctions différentes selon les pays, en partie du fait des considérations culturelles et des projets didactiques différents.

2.5.3 Autres informations

Concernant les **contrats** mis en place (question Q1), Holland (§2.3.2.2) propose un contrat quant aux registres utilisés, au recours à la figure²⁰⁴, au niveau d'explicitation dans la formulation. Pour la France, « il est courant et accepté de prendre certaines informations sur la figure sans justification [...] pour calculer une mesure d'angle, on écrira cet angle comme sommes d'angles de mesure connue, sans justifier cette décomposition [...] Ainsi les propriétés d'ordre, de régionnement, dans certains cas d'intersection, peuvent être généralement admises directement de constatation visuelle sur le dessin » [IREMs de Grenoble et Rennes 2003, p.27] et [Arsac et al 1992, p.13-14, 17-18] propose des règles pour le débat mathématique, et la gestion de la classe pendant ce débat. On notera que la règle « en mathématiques une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai » rentre en contradiction avec les constats visuels admis précédemment pour les propriétés d'ordre ou de régionnement.

²⁰³ Nous rappelons que valorisation d'un terme ne signifie pas que les autres termes ne sont pas pris en compte.

²⁰⁴ Dans le §2.3.2.2 concernant la déduction sémantique : « on laisse la relation avec la figure de la démonstration là où elle traite les énoncés géométriques utilisant la géométrie d'ordre. Cette référence à la figure de la preuve n'est cependant pas réfléchie et pour cette raison également n'est pas vécue comme véritablement non autorisée » [Holland 2001, 54-55]

Pour ce qui concerne la transposition des validations (question Q2), les validations didactiques observées par Knipping correspondent dans les deux pays toutes à des transpositions des validations mathématiques correspondant à l'une des quatre démonstrations mathématiques du théorème de Pythagore précisée précédemment. Par contre nous avons rencontré au chapitre 1 (§1.1.14.3) un exemple de validation didactique qui n'est pas la transposée d'une validation mathématique.

Concernant la place et le statut de la validation dans l'enseignement secondaire (question Q3), pour l'Allemagne, nous pouvons remarquer le point de vue de [Holland 2001, p. 58, trad. R.C.] : « Les trois niveaux de preuve discutés se laissent classer comme présentation des objectifs souhaitables dans les trois formes d'école Hauptschule, Realschule et Gymnasium. Pour les Realschule et Gymnasium il faut faire attention à ce que chacun de tous les niveaux de démonstration soient parcourus. Egalement il est ni important ni souhaitable que le plus haut niveau soit toujours réalisé »²⁰⁵. A propos du cycle supérieur de Gymnasium [Tietze 2000, pp 165] remarque « la situation dans le cours de mathématiques est en gros marquée par le fait que les professeurs dans le cours de base renoncent quelques détails près et à la démonstration formelle et aux définitions formelles, dans le cours approfondi les considèrent toutes les deux comme nécessaires [...] de tandis que dans le cours de base de l'ordre local et la justification plausible se place au premier plan le cours approfondi a également le rôle de faire ressortir la démonstration formelle comme exemplaire dans le cadre d'une théorie axiome simple »²⁰⁶.

L'importance des travaux didactiques sur l'enseignement de la **démonstration** dans l'enseignement secondaire semble indiquer qu'elle soit un **objet à enseigner**.

Concernant la méthodologie, les précédentes études montrent la complexité des variables en jeu. Nous avons rencontré quelques variables : le facteur institutionnel (avec par exemple la différence des systèmes éducatifs à l'organisation de l'enseignement secondaire ou quant aux différences de programmes d'enseignement), les facteurs culturels dans les représentations des mathématiques chez les élèves, les approches didactiques (Stoffdidaktik allemande/ingénierie didactique française), les pratiques d'enseignement dans les classes (étude de Knipping).

²⁰⁵ Als wünschenswerte Zielvorstellungen lassen sich die drei besprochenen Niveaustufen des Beweisens der drei Schulformen Hauptschule, Realschule und Gymnasium zuordnen. Für Realschule und Gymnasium ist zu beachten, dass jeweils alle Niveaustufen des Beweisens durchlaufen werden. Auch ist es weder notwendig noch wünschenswert, dass immer höchste Niveau realisiert wird.

²⁰⁶ Die Situation im MU ist grob dadurch gekennzeichnet, dass die Lehrer in Grundkursen weitgehend auf formales Beweisen und formale Definitionen verzichten, in Leistungskursen dagegen beides für notwendig erachten [...] Während im Grundkurs das Lokale Ordnen und plausible Begründungen im Vordergrund stehen, hat der Leistungskurs auch die Aufgabe, exemplarisch das formale Beweisen im Rahmen einer einfachen axiomatisierten Theorie herauszuarbeiten.

Nous avons signalé quelques difficultés, aussi bien dans les analyses quantitatives (par exemple l'effet de structure dans l'analyse quantitative évoqué au §2.4.2.1) que dans les analyses qualitatives (non représentativité statistique des échantillons étudiés²⁰⁷ et représentativité subjective des prototypes dégagés).

Ces premières réponses à nos questions de recherches restent subjectives car liées à une sélection partielle de réflexions ou de recherches sur la validation. Observons maintenant si elles sont confirmées par l'étude des programmes d'enseignement.

²⁰⁷ [Knipping 2003b, p.785-786] : « Dans une étude de cas, les échantillons ne sont pas représentatifs au sens statistique [...] Les cas que j'analyse ne sont pas nécessairement représentatifs de l'enseignement en France et en Allemagne [...] Les types de processus de preuve décrits dans cet article ne se retrouvent pas exactement dans la réalité, ni dans les cas observés dans cette étude ».

3 Comparaison des programmes d'enseignement et des textes officiels

3	Comparaison des programmes d'enseignement et des textes officiels	196
	Organisation du chapitre 3	197
3.1	Motivation et protocole de l'étude	198
3.2	Etude des programmes du Bade-Wurtemberg	199
3.2.1	Etude des programmes de Gymnasium de forme normale à partir de 1971 ..	199
3.2.1.1	Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1971	199
3.2.1.2	Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1984.....	203
3.2.1.3	Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1994.....	207
3.2.1.4	Programmes à venir.....	219
3.2.2	Etude des programmes de Realschule et Hauptschule de 1984 et 1994	222
3.2.2.1	Programmes de Hauptschule.....	222
3.2.2.2	Programmes de Realschule	223
3.2.2.3	Comparaison des occurrences des mots relatifs à la validation	224
3.3	Etude des programmes français.....	225
3.3.1	Programme français des années 1968 à 1971.....	226
3.3.1.1	Premier cycle.....	226
3.3.1.2	Second cycle.....	229
3.3.2	Programme français des années 1977 à 1983.....	230
3.3.2.1	Premier cycle.....	231
3.3.2.2	Second cycle.....	232
3.3.3	Programme français des années 1985 à 1992.....	234
3.3.3.1	Premier cycle.....	234
3.3.3.2	Second cycle.....	235
3.3.4	Programme français des années 1996 à 2001.....	237
3.3.4.1	premier cycle	237
3.3.4.2	2 nd cycle.....	245
3.4	Conclusions	257
3.4.1	La démonstration en Bade-Württemberg	257
3.4.2	La démonstration en France	259
3.4.3	Comparaison franco-allemande.....	260

Organisation du chapitre 3

Après avoir examiné la motivation et le protocole d'étude des programmes d'enseignement et des textes officiels (3.1), nous étudions d'abord les programmes du Bade-Wurtemberg (3.2).

Nous abordons les programmes de Gymnasium (3.2.1) correspondant à différentes périodes de renouvellement (1971, 1984, 1994, 2000).

Nous étudions également les programmes de Realschule et de Hauptschule de 1984 et 1994 (3.2.2).

Nous continuons avec les programmes français, correspondant à différentes périodes de renouvellement (1968, 1977, 1985, 1996).

Pour chacune de ces études, nous approfondissons la période récente correspondant aux éditions des manuels observés et aux programmes en vigueur dans les classes où nous avons analysé des productions d'élèves.

Nous concluons en mettant en évidence que la démonstration est un objet d'enseignement en Gymnasium en Bade-Wurtemberg et en collège et lycée d'enseignement général français.

3.1 Motivation et protocole de l'étude

[Balacheff 1982, p.266] souligne à propos des textes officiels que « du fait de l'organisation du système éducatif français ces textes déterminent la transposition didactique. Ils sont la référence de la plupart des autres discours sur les contenus d'enseignement, en particulier de leur explication, de leur approbation ou de leur critique ».

Nous proposons d'étudier la place de la démonstration, de la validation et du raisonnement dans les programmes allemands et les programmes français. Nous souhaitons déterminer si la démonstration ou la validation sont des objets d'enseignement, quelles techniques et quelles technologies de validation sont proposées, et éventuellement quelles théories sous-tendent ces techniques et ces technologies. Nous souhaitons également déterminer si des indications de contrat ou de fonctions relativement à la validation sont précisées. Il nous a paru intéressant d'étudier l'évolution de ces programmes, ce qui permettra de mettre en évidence les changements concernant la démonstration ou la validation.

Nous effectuons une **analyse diachronique des programmes** de Gymnasium et de collège-lycée depuis les années 70 jusqu'à aujourd'hui. Nous repérons dans les programmes les références au raisonnement, à la validation, à la preuve ou à la démonstration, et nous observons l'évolution de ces références. Cette observation nous permettra de déterminer si, officiellement, la démonstration est un objet d'enseignement et quelles techniques, technologies et fonctions sont préconisées par les programmes.

Nous effectuons une **analyse synchronique des programmes** de Haupschule, Realschule Gymnasium, de collège et de lycée en vigueur au moment où nous effectuons notre recherche dans les manuels et chez des élèves.

Nous observons avec plus de détails les programmes pour lesquels nous avons étudié les manuels de classe ou les productions d'élèves, c'est-à-dire les programmes mis en place en 1994 pour le Gymnasium du Bade-Wurtemberg, et mis en place en 1996 pour le collège et le lycée français. Cette étude approfondie sera utilisée pour justifier éventuellement, à partir des programmes officiels, des techniques ou technologies développées dans des validations d'élèves ou de manuel de classe. Nous examinerons également si des indications sont données quant aux fonctions et aux contrats de la validation. Nous examinerons rapidement les programmes dans les filières non scientifiques.

Lorsque les extraits de programmes relatifs à la validation renvoient aux programmes de langue maternelle (allemand ou français) nous étudierons les extraits correspondants.

Pour les programmes du Bade-Wurtemberg nous étudions les programmes de Gymnasium depuis 1971, ainsi que ceux de Realschule et Hauptschule depuis 1984. L'accès à ces programmes s'est fait au moyen de trois sources : la bibliothèque de didactique de l'université de Freiburg, la bibliothèque de la Pädagogische Hochschule de Heidelberg et le site internet du Oberschulamt de Karlsruhe.

Pour les programmes français nous étudions les programmes depuis 1968 à partir des éditions de l'INRDP, du CNDP, et de la direction de l'enseignement scolaire accessibles à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg ou sur le site du Ministère de l'éducation nationale.

3.2 Etude des programmes du Bade-Wurtemberg

Nous caractérisons les programmes par la première date d'entrée en vigueur des programmes au niveau de la classe 5. En principe, avant que ces programmes soient en vigueur en classe 13, il faut attendre en général 9 ans.

3.2.1 Etude des programmes de Gymnasium de forme normale à partir de 1971

3.2.1.1 Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1971

Extraits de Lehrplan für das Fach Mathematik, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1971, pp. 1081-1109.

Ces programmes édités en 1971, commencent à être appliqués lors de l'année scolaire 1971-1972 et concernent le Gymnasium der Normalform.

Nous assurons les traductions des programmes allemands, sans le préciser à chaque citation pour éviter d'alourdir les références.

3.2.1.1.1 Organisation du programme

La présentation des programmes de mathématiques de Gymnasium est répartie en 27 pages :

- Ces pages sont insérées dans l'édition normale du journal du Ministère de l'éducation (Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport) du Bade-Wurtemberg.
- Une présentation générale (une page) rappelle que ces programmes s'inscrivent dans une modernisation de l'enseignement des mathématiques, prenant en compte la nouvelle mathématique notamment la théorie des ensembles, l'algèbre (lois logiques, groupes, corps, espace vectoriel, ...) ; cette présentation insiste sur les contenus mais n'évoque pas de

compétences générales (raisonner, communiquer, avoir l'esprit critique, ...) ; la seule référence lointaine au raisonnement est la mention des opérateurs logiques (logische Verknüpfungen) dans une liste de contenus.

- Puis se succèdent les programmes des classes 5 à 8 (huit pages), puis des classes 9 à 13 des lycées scientifiques (sept pages), puis des thèmes au choix (trois pages), puis des classes 9 à 13 des lycées linguistiques (sept pages). Pour les classes 7, 8 et 9 on propose deux programmes de géométrie au choix: un programme de géométrie élémentaire classique (sans construction axiomatique) ou un programme de construction déductive de la géométrie affine plane (avec des axiomes). Le second programme est l'illustration de la période des « mathématiques modernes ».

- Les classes 12 et 13 ont un programme regroupé sur deux ans. Il n'y a pas encore de distinction entre cours de base (Grundkurs) et cours approfondi (Leistungskurs) : un seul cours est proposé (mais distinct selon qu'on est dans un lycée scientifique ou un lycée linguistique).

Chaque programme de classe est suivi d'un commentaire ; les commentaires des classes 11 à 13 de lycée scientifique sont regroupés. Il en est de même pour les lycées linguistiques. Les commentaires occupent 8 pages sur 26 pages.

3.2.1.1.2 Références à la démonstration suivant les classes

La première allusion explicite à la justification ou à la démonstration apparaît dans le commentaire de la classe 6 : « On placera déjà tôt des réflexions à caractère probant [beweisartigen Characters] là où le besoin de justification peut être réveillé et conforté d'une façon simple, comme par exemple dans l'enseignement de la divisibilité. On ne pense pas encore à la démonstration au sens propre »²⁰⁸ [p.1087].

En classe 7, à propos des transformations de termes dans les équations ou inéquations, on évoque le contenu : « détermination de l'ensemble des solutions par des transformations équivalentes ». On évoque ainsi une technique (par équivalence) de résolution des équations, sans évoquer explicitement un théorème justifiant cette technique.

On évoque également les contenus : « Proposition et forme d'une proposition. Implication (\Rightarrow) en lien avec la relation d'inclusion dans un ensemble. Equivalence (\Leftrightarrow) en relation avec l'égalité des ensembles. Négation (\neg) en relation avec le complémentaire d'un ensemble. Les connecteurs « et » (\wedge) et « ou » (\vee) de

²⁰⁸ Wo das Bedürfnis nach Begründungen in einfacher Weise geweckt und gefördert werden kann, sollten Überlegungen beweisartigen Charakters schon früh angestellt werden, z.B. in der Teilbarkeitslehre. An Beweise im eigentlichen Sinn ist dabei zunächst noch nicht gedacht.

propositions et formes de propositions en relation avec l'intersection et la réunion »²⁰⁹ [p.1088]. Ici on voit apparaître des éléments d'une technologie fondée sur la logique des propositions qui permettraient de justifier des techniques de raisonnement ou de résolution (par implication, par équivalence, ...).

La classe 7 voit également les premiers contenus en termes de théorèmes (théorème du triangle inscrit dans un cercle et de côté un diamètre du cercle²¹⁰, théorème de Thalès et sa réciproque) et d'axiomes (en géométrie affine, ...), qui fournissent ainsi une technologie dans le cadre d'une théorie axiomatique locale (de la géométrie affine par exemple).

Le commentaire du programme du programme de classe 7 précise qu' « un traitement déductif de toute la géométrie euclidienne est, comme chacun sait, impossible au cycle moyen. Cependant une telle construction déductive pour des parties de domaines de la géométrie affine plane, compte tenu de la simplicité de son système axiomatique, est accessible à cette tranche d'âge »²¹¹[p.1090].

L'utilisation des théorèmes et axiomes pour un traitement déductif de la géométrie est affirmée dans le cadre d'une théorie mathématique locale limitée à des parties de la géométrie plane. La complexité d'une axiomatisation de la géométrie euclidienne ne serait pas accessible à cet âge.

La classe 8 annonce les premiers contenus explicites relatifs à la démonstration :

« Traitement exemplaire des notions techniques de la démonstration : définition, axiome et théorème, hypothèse et conclusion, démonstration directe et indirecte, réfutation d'une conjecture à travers un contre-exemple. Conditions nécessaires, suffisantes ainsi que nécessaires et suffisantes »²¹²[p.1091].

Ces contenus portent à la fois sur des types de démonstration mathématique (démonstration directe et indirecte, réfutation d'une conjecture à travers un contre-exemple, par conditions nécessaires, par conditions suffisantes, par équivalence, ...) et sur des éléments technologiques (axiome, théorème, définition...).

²⁰⁹ Aussage und Aussageform. Implikation(\Rightarrow) im Zusammenhang mit der Teilmengenbeziehung. Äquivalenz (\Leftrightarrow) im Zusammenhang mit der Gleichheit von Mengen. Negation (\neg) im Zusammenhang mit der Komplementmenge. Die Verknüpfung « und » (\wedge) und « oder » (\vee) von Aussagen und Aussageform im Zusammenhang mit Durchschnitt und Vereinigung.

²¹⁰ Rappelons que ce théorème est appelé « Satz des Thales » [théorème de Thalès]. **Nous désignerons en français un théorème par sa dénomination dans le système scolaire français. Nous ne conserverons la dénomination allemande que dans les textes allemands.** Le « théorème de Thalès » en France est appelé en Allemagne « Strahlensatz » [théorème des rayons (parallèles)].

²¹¹ Eine deduktive Behandlung der vollen euklidischen Geometrie ist bekanntermaßen in der Mittelstufe nicht möglich. Dagegen ist ein solcher deduktiver Aufbau für das Teilgebiet der ebenen affinen Geometrie wegen der Einfachheit seines Axiomensystems dieser Alterstufe zugänglich.

²¹² Exemplarische Behandlung beweistechnischer Begriffe : Definition, Axiom und Satz, Voraussetzung und Behauptung. Direkter und indirekter Beweis, Widerlegung einer Vermutung durch ein Gegenbeispiel. Notwendig, hinreichende sowie notwendige und hinreichende Bedingung.

Des théorèmes sont cités : sur les points fixes des isométries et sur les isométrie des triangles. Il est précisé en commentaire que le traitement des termes techniques de la démonstration doit être effectué en algèbre comme en géométrie. Il est également indiqué que « le théorème d'isométrie des triangles doit être retiré comme moyen de démonstration au profit des méthodes de transformations géométriques »[p.1092]²¹³. Cette remarque indique une technologie (celle des transformations) à préférer à une autre (celle des triangles isométriques). Il en est de même pour les propriétés de conservation des surfaces basées sur le découpage et l'égalité par recomposition à préférer aux propriétés des aires, non mobilisables pour les rectangles de dimensions irrationnelles.

Les programmes des classes suivantes introduisent :

des techniques de résolution : par exemple en classe 9 méthode de résolution d'une équation du second degré),

des technologies sous forme de théorèmes ou axiomes : par exemple en classe 9 : théorèmes d'Euclide, de Pythagore, ... ou axiome de continuité.

des techniques ou technologies logiques : par exemple en classe 10 une introduction à l'algèbre des connecteurs est proposée et le commentaire du programme signale qu'on peut l'interpréter comme une algèbre des valeurs de vérités avec l'ensemble des valeurs « vrai » et « faux » ; il existe d'autre part comme thème au choix « l'algèbre de Boole » pour laquelle il est explicitement demandé de donner des indications sur le rapport avec la logique des propositions (par exemple loi de contraposition comme fondement du raisonnement indirect), une technique et une technologie de raisonnement : en classe 11 (de lycée scientifique) le raisonnement par récurrence.

Il est parfois indiqué des techniques et des technologies intuitives ou pragmatiques :

- en classe 8 les découpages et recompositions de surfaces pour la conservation des surfaces.
- en classe 10 (de lycée scientifique) le prolongement par continuité des rationnels au réels de la fonction exponentielle de base a se fait par intuition [anschaulicher Weise].
- en classe 12 et 13 les démonstrations de théorèmes sur les fonctions continues ou sur le théorème des valeurs intermédiaires doivent au moins être abordées par intuition [anschaulicher Weise]; au moins l'un de ces théorèmes doit être démontré.

²¹³ Die Kongrenzsätze sollten als Beweismittel zugunsten abbildungsgeometrischer Methoden zurücktreten.

En résumé, la démonstration apparaît clairement comme objet d'enseignement dans un paragraphe du programme de classe 8, entre un paragraphe sur les dénombrements et un paragraphe sur la géométrie.

La démonstration est évoquée pour ses fonctions de vérification (preuve des théorèmes) et pour ses fonctions de systématisation dans le cadre de théories locales de géométrie. La référence à la logique montre que ce sont les arguments formels qui sont valorisés. On observe de rares évocations d'arguments pragmatiques ou sémantiques et la fonction d'explication n'est pas explicitement évoquée à cette occasion. Beaucoup d'éléments de techniques ou technologies mathématiques sont indiqués, avec notamment des axiomes.

3.2.1.2 Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1984

Extraits de Lehrplanheft 8/1984, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1984 pp. 774-829.

3.2.1.2.1 Organisation du programme

La présentation des programmes de mathématiques de Gymnasium est répartie en 54 pages:

- Un cahier spécial est édité (Lehrplanheft 8/1984) qui contient uniquement les programmes du Gymnasium (Gymnasium der Normalform). Les programmes sont présentés par discipline. Les programmes de mathématiques des classes 5 à 13 sont donc rassemblés dans un même chapitre.
- Une présentation générale (3 pages) rappelle les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques, par exemple « comparaison critique, vérification et jugement d'un résultat d'un raisonnement ou d'un calcul, jugement de l'adéquation d'une méthode »²¹⁴ [p.774]. Un passage explicite fait référence à la démonstration : « Les nouveaux termes et théorèmes doivent être préparés à travers des exemples ou contre-exemples motivants ou des réflexions heuristiques. Le besoin, après une construction conséquente, de définition précise de terme et de conduite de démonstration rigoureuse peut être éveillé seulement progressivement et en fonction de l'âge. De manière générale seulement doivent être démontrés des théorèmes pour lesquels la démonstration sert la compréhension des faits démontrant ; également des considérations de plausibilité [Plausibilitätsbetrachtungen] sont recommandées. Fondamentalement la compréhension de problèmes, idées fondamentales et méthodes typiques, la compréhension du contenu d'un théorème et de l'idée de base d'une démonstration doit conserver la priorité par rapport à l'exactitude formelle et au caractère complet [...] Dans l'enseignement des mathématiques on doit avoir recours à la déduction

²¹⁴ kritisches Vergleichen, Überprüfen und Beurteilen der Ergebnisse von Gedankengängen und Rechnungen, Beurteilen der Angemessenheit von Verfahren.

progressivement et en fonction de l'âge »²¹⁵ [p.775]. La priorité donnée à la compréhension sur l'exactitude formelle valorise les arguments sémantiques. Ce passage important évoque les arguments de plausibilité (« Plausibilitätsbetrachtung ») qui justifient des techniques moins rigoureuses et incomplètes au profit de la compréhension (« Verständnis ») et de la motivation (« motivierende Beispiele »). Ce sont les fonctions d'explication et de vérification de la plausibilité qui sont valorisées par rapport à la fonction de vérification de la nécessité : « la démonstration sert la compréhension ». On voit également apparaître ici **un principe didactique de renoncement au formalisme** : un argument formel, rigoureux et complet permettant une construction déductive, risquant d'amoindrir la compréhension suivant l'âge considéré, est remplacée par un argument de plausibilité ou sémantique. Ici il n'est pas indiqué que c'est l'absence de technologie mathématique mobilisable qui motive la substitution. L'utilisation d'argument non formel permet de mieux remplir cette fonction d'explication qu'un argument formel mathématique (mobilisable ou non). Enfin on notera dans cet extrait l'apparition de la fonction de découverte de la validation par l'évocation de réflexions heuristiques (« heuristische Überlegungen »). La priorité donnée à la compréhension sur l'exactitude formelle valorise les arguments sémantiques.

- la succession des programmes des classes 5 à 13 (51 pages) se présente classe par classe ; pour chaque classe on a :

- une répartition du programme en unités d'enseignement (Lehrplaneinheit), 3 à 6 selon les classes, chaque unité représentant un thème d'enseignement (exemples : « mesurer, évaluer, calculer » unité 3 de classe 5, « fonctions exponentielles » en unité 1 de classe 10) ;
 - chaque unité d'enseignement est introduite par au maximum une dizaine de lignes de présentation centrées essentiellement sur les capacités attendues de l'élève,
 - le programme de chaque unité est présenté en deux colonnes : à gauche une colonne détaille les contenus, à droite une colonne commente brièvement ces contenus avec notamment des indications limitatives, ou historiques, ou des connexions avec des unités d'enseignements de programmes d'autres disciplines (physique, chimie, histoire, latin,...) ;
- à partir de la classe 9 on distingue les programmes de lycée scientifique et de lycée linguistique,

²¹⁵ Neue Begriffe und Lehrsätze sollen durch motivierende Beispiele und Gegenbeispiele oder heuristische Überlegungen vorbereitet werden. Das Bedürfnis nach konsequentem Aufbau, präzisen Begriffsdefinitionen und strenger Beweisführung kann nur schrittweise und altersangemessen geweckt werden. In allgemeinen sollen nur solche Sätze bewiesen werden, bei denen der Beweis zum Verständnis des zu beweisenden Sachverhalts dient; auch Plausibilitätsbetrachtungen sind empfehlenswert. Grundsätzlich muss das Verständnis typischer Probleme, Grundgedanken und Methoden, das Verständnis des Inhalts eines Satzes und der Grundidee eines Beweises Vorrang behalten vor formaler Exaktheit und Vollständigkeit [...] Im Mathematikunterricht soll die Deduktion nur behutsam und altersgerecht eingesetzt werden.

- on regroupe les programmes des classes 12 et 13,
- en classe 12 et 13 on distingue le cours de base (Grundkurs) et le cours approfondi (Leistungskurs).

3.2.1.2.2 Références à la démonstration suivant les classes

Jusqu'à la classe 8 certaines techniques ou technologies sont évoquées, par exemple en classe 7 : transformation de termes dans les équations, théorème des propriétés angulaires du parallélisme (avec sa réciproque), théorème de la somme des angles d'un triangle et d'un quadrilatère, théorème du triangle inscrit dans un cercle et de côté un diamètre du cercle. En classe 7, en introduction à l'unité sur la proportionnalité, il est précisé : « L'élève est formé à une formulation linguistique claire, qui restitue le déroulement intellectuel de la méthode de solution »²¹⁶ [p.785]. Ici semble affirmée la fonction de communication de la validation. Dans l'unité sur les constructions de base en géométrie, la démonstration est évoquée pour la première fois de manière explicite : « progressivement devrait être éveillée la prise de conscience de la nécessité de la démonstration [...] Le passage d'un traitement propédeutique à un traitement déductif local de la géométrie doit être effectué avec précaution »²¹⁷[p.785]. La fonction de vérification avec la nécessité de démontrer, et la fonction de systématisation, avec le traitement déductif local de la géométrie, sont progressivement mises en valeur.

C'est en classe 8 qu'apparaît la première mention explicite dans le corps du programme de la démonstration comme objet d'enseignement. Dans l'unité 1 « termes, équations et inéquations», l'introduction précise : « La conduite régulière d'essai peut renforcer chez l'élève la volonté de vérifier ses propres résultats »²¹⁸ [p.790] La colonne de droite précise dans un encadré : « Les notions techniques de la démonstration comme définition, hypothèse et conclusion, démonstration, théorème et théorème réciproque, proposition universelle et sa négation, démonstration directe et indirecte, sont à partir de la classe 8 à développer lors d'exemples adaptés»²¹⁹ [p.790]. Il est à noter que ce paragraphe apparaît dans une unité sur les équations et les inéquations, unité qui permet avec la langue symbolique, un traitement plus formel des démonstrations qu'en géométrie.

En commentaire de l'unité 2 sur les figures et la congruence (isométrie), à propos des quadrilatères et de leurs propriétés il est indiqué : « ici peuvent être abordés notamment définition,

²¹⁶ Der Schüler ist zu einer klaren sprachlichen Formulierung, die den gedanklichen Ablauf des Lösungsweges wiedergibt, zu erziehen.

²¹⁷ Allmählich sollte die Einsicht in die Notwendigkeit von Beweisen geweckt werden [...] Der Übergang von der propädeutischen zu einer lokal-deduktiven Behandlung der Geometrie soll behutsam erfolgen.

²¹⁸ Das regelmäßige Durchführen der Probe kann beim Schüler die Bereitschaft stärken, die eigenen Ergebnisse zu überprüfen.

²¹⁹ Beweistechnische Begriffe wie Definition, Voraussetzung, Behauptung, Beweis, Satz und Umkehrsatz, Verallgemeinerung eines Satzes, All-Aussage und ihre Verneinung, direkter und indirekter Beweis sind ab Klasse 8 an geeigneten Beispielen zu entwickeln.

théorème réciproque, démonstration »²²⁰ [p.791]. On voit apparaître ici la fonction de systématisation locale.

En classe 9, en introduction à l'unité sur la notion de similitude, il est précisé qu'« avec les propriétés des figures semblables on peut venir à bout de tâches de constructions ou de démonstrations difficiles. Ici la capacité de l'élève à trouver de manière autonome une méthode de construction et une démonstration doit être entraînée davantage »²²¹ [p.793].

En classe 10, à propos des fonctions exponentielles à exposants réels, les considérations de plausibilité [Plausibilitätsbetrachtungen] suffisent.

En classe 11, en introduction à l'unité d'études de fonctions rationnelles, on indique que «pour des exemples adaptés on peut montrer à l'élève l'échec possible de l'intuition et avec cela la nécessité de faire clairement une démonstration d'un résultat acquis par intuition » [805]²²².

En classe 12 et 13, à propos des fonctions racines n-ième ou des limites de formes indéterminées où interviennent des produits de fonctions logarithme, exponentielle ou puissance les considérations de plausibilité [Plausibilitätsbetrachtung] suffisent [pp. 822, 823].

En classe 12 et 13 on précise qu'il faut démontrer quelques théorèmes de géométrie affine et de géométrie euclidienne.

On remarque que les programmes des classes suivantes proposent différentes techniques ou technologies :

- résolution de problèmes, par exemple en classe 9 méthode de résolution d'une équation du second degré, des algorithmes itératifs (algorithmes de dichotomie ou de Newton) en classe 11.
- théorèmes, par exemple en classe 9 les théorèmes d'Euclide et de Pythagore,
- raisonnement, en classe 11 (de lycée scientifique) le raisonnement par récurrence,
- validation intuitive ou pragmatique, par exemple en classes 10, 12 et 13 utilisation de considérations de plausibilité.

On observe que le mot « axiome » a disparu (par rapport au programme de 1971) des termes introduits en classe 8 à propos de la démonstration. Sa première apparition est dans une partie au choix (et donc non obligatoire).

²²⁰ Hier kann besonders auf Definition, Satz, Umkehrsatz und Beweis eingegangen werden.

²²¹ Mit den Eigenschaften ähnlicher Figuren kann er schwierigere Konstruktions – und Beweisaufgaben bewältigen. Dabei soll eine Fähigkeit, Konstruktionswege und Beweise selbständig zu finden, weiter ausgebildet werden.

²²² Anschauung zu zeigen und damit die Notwendigkeit eines Beweises anschaulich gewonnener Ergebnisse deutlich zu machen.

Dans le cadre d'un thème au choix (unité 5) de la classe 11 de lycée scientifique, il est proposé le thème « algèbre de Boole ». Dans l'introduction à cette unité, on fait mention du système axiomatique de l'algèbre de Boole il est précisé « l'élève reçoit un aperçu d'une construction axiomatique d'une partie appréciable et fait l'expérience du sens et de la signification d'un système d'axiomes »²²³. On y propose des techniques ou technologies logiques qui permettront la résolution de problèmes simples de la logique des propositions. Un système axiomatique de l'algèbre de Boole est présenté. On voit donc apparaître ici une fonction de systématisation plus globale.

Les seules autres mentions d'axiomes sont dans le programme de classe 12 et 13 du cours approfondi (Leistungskurs) sur les conséquences simples des axiomes d'espace vectoriel et sur une introduction axiomatique du produit scalaire. Ici on peut estimer la fonction de systématisation sollicitée à un niveau plutôt local.

On observe que l'utilisation de techniques et technologies pragmatiques et inductives se prolongent jusqu'en classe 12 et 13.

En résumé, la démonstration apparaît clairement comme objet d'enseignement dans l'unité sur les équations et les inéquations du programme de classe 8.

Toutes les fonctions de la démonstration sont évoquées, notamment la fonction de vérification de la plausibilité et la fonction d'explication

On note l'importance des techniques ou technologies de plausibilité, pragmatiques, ou sémantiques qui cohabitent avec des techniques ou technologies mathématiques (théorèmes, axiomes, méthodes de résolution, algorithmes, ...).

La référence à la technologie des axiomes reste limitée au cours au choix (wahlpflichtgebiet) ou au cours approfondi (Leistungskurs).

3.2.1.3 Programmes de Gymnasium du Bade-Wurtemberg de 1994

Extraits de Lehrplanheft 4/1994, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1994.

Ces programmes mis en place en 1994 concernent les manuels de classe et les productions d'élèves que nous avons observés, c'est pourquoi nous développons davantage leur étude.

²²³ Der Schüler erhält Einblick in den axiomatischen Aufbau eines überschaubaren Teilgebietes und erfährt exemplarisch Sinn und Bedeutung eines Axiomensystems.

3.2.1.3.1 Organisation du programme

La présentation des programmes de mathématiques de Gymnasium est organisée comme suit :

- Un cahier spécial est édité (Lehrplanheft 4/1994) qui contient uniquement les programmes du Gymnasium (Gymnasium der Normalform). Les programmes sont présentés classe par classe. Les programmes de mathématiques des classes 5 à 13 sont donc répartis par classe, par exemple en Klasse 5 entre le programme de latin et celui de biologie. Les programmes de mathématiques ne sont plus rassemblés en un seul chapitre comme en 1984. Ce changement symbolique nous semble illustrer la position sociale des mathématiques : savoir parmi les savoirs. Ce changement est aussi pratique puisque, pour faciliter les activités interdisciplinaires au sein d'une même classe, il est plus pratique de disposer des programmes d'une même classe dans un même chapitre.

- Une présentation générale rappelle les missions générales de l'éducation et de la formation en Gymnasium, commun à toutes les disciplines et précisent les tâches et objectifs généraux. On note que le traitement des thèmes et perspectives actuels dans les sciences et les domaines de travail interdisciplinaire sont pertinents [p.10]. Puis se succèdent les missions spécifiques, discipline par discipline. Pour les mathématiques, on reformule un des objectifs du programme de 1984 : « comparaison critique, vérification et jugement conscient de ses responsabilités d'un résultat d'un raisonnement, d'un calcul, et d'une méthode »²²⁴. Le terme rajouté par apport au programme de 1994 concerne le « jugement » qui doit être « conscient de ses responsabilités ». On inscrit, avec cette notion de responsabilité, le jugement dans un **jeu social**. On voit donc renforcer ici la prise en compte des interactions sociales bien mise en évidence dans [Balacheff 1987, p.153] : « une des caractéristiques qui apparaît ainsi déterminante pour la production d'une preuve, est la dimension sociale de la situation ». Le programme précise : « La conclusion et la démonstration mathématique ont une signification spéciale. On doit placer ici au premier plan moins l'exactitude formelle et le caractère complet que le contenu d'un théorème ou d'une idée de démonstration. Les considérations de plausibilité montrent aux élèves souvent davantage qu'une démonstration scientifiquement irréprochable. Malgré tout on doit placer clairement à un endroit adapté la construction systématique et déductive de la Mathématique [...] Au cycle inférieur²²⁵ [...] les nouvelles connaissances doivent être acquises d'abord par des procédures inductives et par intuition [induktive und anschauliche Verfahren]. Le passage à une intervention plus déductive doit avoir lieu progressivement et en fonction de l'âge»²²⁶ [p.28]. Ce passage est essentiel pour la justification de techniques et technologies non

²²⁴ kritisches Vergleichen, Überprüfen und verantwortungsbewusstes Beurteilen der Ergebnisse von Gedankengängen und Rechnungen.

²²⁵ Le cycle inférieur est constitué des classes 5, 6, 7.

²²⁶ Besondere Bedeutung hat das mathematische Folgern und Beweisen. Dabei sollen weniger die formale Exaktheit und die Vollständigkeit im Vordergrund stehen als der Inhalt eines Satzes oder die Beweisidee.

déductives. Les techniques/technologies inductives et pragmatiques sont justifiées par le **principe didactique de renoncement au formalisme**, évoqué²²⁷ dans le programme de 1984. De plus on voit clairement donner la **priorité à la fonction d'explication** par rapport à la fonction de vérification, et c'est la vérification de la plausibilité plutôt que la vérification de la nécessité qui est valorisé, en signalant les limites de la rigueur formelle. La **fonction de systématisation** est également évoquée dans « la construction systématique et déductive ».

La fonction de communication est explicitement mentionnée dans sa dimension langagière à propos de l'argumentation : « Le cours de mathématiques constitue également une importante contribution à la formation générale à la langue. Il favorise la capacité d'abstraction langagière et pousse à la prise de conscience des diverses formes d'argumentation »²²⁸ [p.28].

La fonction de communication est également évoquée dans sa **dimension sociale** à propos du travail collectif, en groupe ou équipe lors du développement de stratégies de résolution, du dialogue pertinent, de la critique constructive ou du traitement de nouveaux problèmes [p. 28]²²⁹.

- Pour chaque classe, le programme est présenté comme suit :
 - les idées directrices pédagogiques, communes à toutes les disciplines mais spécifiques à la classe considérée,
 - les thèmes interdisciplinaires, où les disciplines impliquées sont précisées, ce qui explique la nouvelle présentation des programmes et ce qui souligne la volonté d'interactions entre les disciplines, ce qui signifie que les élèves pourront rencontrer des types de validation différents lors d'activités interdisciplinaires impliquant les mathématiques ;

Plausibilitätsbetrachtungen zeigen den Schülerinnen und Schülern oft mehr als ein wissenschaftlich einwandfreier Beweis. Dennoch soll an geeigneten Stellen der systematische und deduktive Aufbau der Mathematik deutlich werden [...] In der Unterstufe ist der Unterricht durch besondere Vielgestaltigkeit der Aufgabenstellungen gekennzeichnet. Neue Erkenntnisse sollen zunächst durch induktive und anschauliche Verfahren gewonnen werden. Der Übergang zu mehr deduktivem Vorgehen muß behutsam und altersgemäß erfolgen.

²²⁷ Voir § 3.2.1.2.1.

²²⁸ Der Mathematikunterricht leistet auch einen wichtigen Beitrag zur allgemeinen Spracherziehung. Er fördert die sprachliche Abstraktionsfähigkeit und rückt unterschiedliche Formen der Argumentation ins Bewußtsein. Eindeutigkeit, Knappheit und dennoch Vollständigkeit sind bei mündlichen und schriftlichen Darlegungen anzustreben. Deshalb sollen die Schülerinnen und Schüler in allen Klassenstufen zu zusammenhängenden Äußerungen, zu Referaten und zunehmend auch zu mathematischen Aufsätzen und Facharbeiten angehalten werden.

²²⁹ Gruppen- und Teamarbeit beeinflussen das Sozialverhalten positiv. Dazu gehören die Fähigkeit, die eigene Rolle in der Lerngruppe zu erkennen und bei der Entwicklung von Lösungsstrategien wahrzunehmen, die Bereitschaft zum sachbezogenen Dialog, zu konstruktiver Kritik und zum gemeinsamen Anpacken von neuen Problemen.

- pour chaque discipline, le programme est présenté ; il est réparti en unités d'enseignement ;
- chaque unité d'enseignement est introduite par au maximum une dizaine de lignes de présentation centrées essentiellement sur les capacités attendues de l'élève,
- le programme de chaque unité est présenté en deux colonnes : à gauche les contenus (Inhalte), à droite les indications (Hinweis), notamment des indications limitatives, ou historiques, ou des connexions avec des unités d'enseignement de programmes d'autres disciplines (physique, chimie, histoire, latin,...) ou des références à des thèmes interdisciplinaires ;
- pour les mathématiques, à partir de la classe 9 on distingue les programmes de lycée scientifique [naturwissenschaftlich] et de lycée linguistique [sprachlich],
- on regroupe les programmes des classes 12 et 13,
- en classe 12 et 13 on distingue le cours de base (Grundkurs) et le cours approfondi (Leistungskurs) ;
- une nouvelle unité d'enseignement « mathématiques dans la pratique » [Mathematik in der Praxis] est introduite ; elle ne doit pas être traitée isolée mais intégrée aux autres à d'autres unités ; cette liaison avec la pratique illustre à nouveau la dimension sociale des mathématiques.

3.2.1.3.2 Références à la démonstration suivant les classes

Commentons classe par classe ces programmes, du point de vue de la place de la démonstration.

En classe 5 « les problèmes à résoudre doivent ainsi être présentés concrètement et traités par intuition »²³⁰[p.43].

En classe 6, dans l'unité « entiers naturels », à propos de la divisibilité, « l'accès à la pensée algorithmique et à la justification mathématique sera proposé »²³¹ [p.137]. A propos des fractions, « par la transformation de l'écriture fractionnaire en écriture décimale les élèves obtiennent la possibilité de développer des hypothèses »²³² [p.137].

Les premières initiations à la justification se font donc dans un thème d'arithmétique.

La technologie mise à disposition distingue :

²³⁰ Probleme zu lösen, so müssen diese konkret vorgegeben und anschaulich gemacht werden.

²³¹ Dabei wird ihnen der Zugang zu algorithmischem Denken und zum mathematischen Begründen eröffnet.

²³² in die Dezimalschreibweise erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Hypothesen zu entwickeln.

- les lois de divisibilité (Teilbarkeitsgesetze) sur la divisibilité de la somme et d'un multiple,
- les règles de divisibilité (Teilbarkeitsregeln) sur les critères de divisibilité,
- les règles de calcul sur les fractions qui sont à justifier [p.137]²³³.

En géométrie, « les consignes de construction sont tirées du bricolage et les propriétés sont tirées de l'intuition »²³⁴ [p.138]. Ici les **arguments pragmatiques** sont valorisés.

En classe 7, « la résolution de problèmes à un niveau abstrait devient possible »²³⁵ [p.155]. Dans l'unité « construction de base de la géométrie » il est précisé : « La raison de la nécessité de démontrer est progressivement éveillée »²³⁶ [p.214]. Pour les mathématiques dans la pratique « les résultats seront déterminés avec une précision intéressante et le cas échéant leur plausibilité vérifiée par des calculs d'estimation »²³⁷[p.215].

A propos d'angle et parallélisme, on peut parler de « réciproque d'un théorème », et aborder « l'indépendance logique de théorèmes (ordre local) ». Ici on se place clairement dans une **théorie locale** en travaillant la **fonction de systématisation**.

En classe 8 : Les objectifs généraux précisent que « de plus en plus d'élèves acquièrent à cet âge la capacité d'abord de passer de cas simples au plan de la pensée abstraite, de traiter avec plus d'assurance des termes et des généralisations abstraites, de tirer des conséquences logiques, et de travailler des problèmes

²³³ Rechengesetze und ihre Begründung.

²³⁴ Die Konstruktionsvorschriften werden aus dem Hantieren, die Eigenschaften aus der Anschauung gewonnen.

²³⁵ Problemlösungen auf abstrakter Ebene werden möglich.

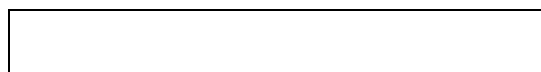
²³⁶ Die Einsicht in die Notwendigkeit von Beweisen wird allmählich geweckt.

²³⁷ Die Ergebnisse werden mit sinnvoller Genauigkeit bestimmt und gegebenenfalls durch Überschlagsrechnungen auf ihre Plausibilität hin überprüft.

hypothétiques »²³⁸[p.231]. Nous reproduisons complètement l'unité 2 dans laquelle des développements abondants sur la démonstration sont précisés. [p.283]²³⁹

« Unité d'enseignement 2 : Isométrie et figures.

Les élèves filles et garçons apprennent à connaître la notion d'isométrie (Kongruenz) comme principe géométrique de classification et l'appliquent pour déduire les propriétés géométriques des triangles. Ils entraînent avec les problèmes de construction leur habileté dans la résolution de problèmes et développent des idées de résolutions autonomes. Ils apprennent à connaître toujours davantage les formes rigoureuses de justifications mathématiques jusqu'à la démonstration et font ainsi l'expérience de l'interaction entre la conclusion logique et la compréhension perceptive de relations géométriques comme mobile de la pensée mathématique ».



*Notions, techniques de démonstration comme
définition hypothèse, conclusion,*

²³⁸ Immer mehr Schülerinnen und Schüler erwerben in diesem Alter die Fähigkeit, in zunächst einfachen Fällen auf die Ebene des abstrakten Denkens überzuwechseln, sicherer mit abstrakten Begriffen und verallgemeinerungen umzugehen, logische Folgerungen zu ziehen und hypothetische Fragestellungen zu bearbeiten.

²³⁹

Lehrplaneinheit 2: Kongruenz und Figuren

< 40 >

Die Schülerinnen und Schüler lernen den Kongruenzbegriff als geometrisches Ordnungsprinzip kennen und verwenden ihn zum Erschließen von geometrischen Eigenschaften bei Dreiecken. Bei Konstruktionsaufgaben schulen sie ihre Fertigkeit im Problemlösen und entwickeln dabei selbständig Lösungsideen. Sie lernen zunehmend strengere Formen mathematischen Begründens bis hin zum Beweis kennen und erfahren dabei die Wechselwirkung zwischen logischem Schließen und anschaulichem Erfassen geometrischer Zusammenhänge als Triebfeder mathematischen Denkens.

<p>Kongruenzabbildungen und ihre Eigenschaften [Erzeugung von Parallelverschiebung und Drehung aus Achsenspiegelungen] [Darstellung einer gegebenen Kongruenzabbildung durch Achsenspiegelungen] Kongruenz von Figuren Kongruenzsätze für Dreiecke Umkreis, Inkreis Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt des Dreiecks Dreieckskonstruktionen und ihre Beschreibung Das Viereck und seine Sonderfälle [Viereckskonstruktionen und ihre Beschreibung] Inhalte von Parallelogramm, Dreieck und Trapez [Problemlösen in der Geometrie]</p>	<p>Beweistechnische Begriffe wie Definition, Voraussetzung, Behauptung, Beweis, Satz und Umkehrsatz, Verallgemeinerung eines Satzes, All-Aussage und ihre Verneinung, direkter und indirekter Beweis sind ab Klasse 8 an geeigneten Beispielen zu entwickeln. → D, ARB 1: Argumentieren</p> <p>Hier ist eine günstige Gelegenheit für die Schülerinnen und Schüler, selbständig Beweisideen zu entwickeln.</p> <p>Hier kann besonders auf Satz, Umkehrsatz und Beweis sowie auf die logische Abhängigkeit von Sätzen eingegangen werden (lokales Ordnen).</p> <p>[Auch umfangreichere Fragestellungen]</p>
--	--

Isométries et leurs propriétés

(Réalisation de translations et de rotations à partir de symétries axiales)

Isométries de figures

(Présentation d'une isométrie donnée au moyen de symétries axiales.)

Théorèmes d'isométrie du triangle

Cercle, disque.

Centre de gravité et orthocentre d'un triangle

Constructions de triangles et leurs descriptions

Le quadrilatère et ses cas particuliers

démonstration, théorème et théorème réciproque, généralisation d'un théorème, proposition universelle et sa négation, démonstrations directes et indirectes sont à partir de la classe 8, à développer comme exemples adaptés.

→ Allemand, domaine 1 : argumenter

Il y a ici une occasion intéressante pour les élèves de développer l'idée de preuve de manière autonome.

On peut ici s'occuper en particulier de théorème réciproque, de démonstration tout comme de la dépendance logique des propositions. (ordre local)

Étudions à ce propos l'extrait de **programme d'Allemand sur l'argumentation**²⁴⁰ [p.246].

« Argumenter :

Préparation, conduite et évaluation d'une discussion.

Présentation et justification orale et écrite d'un point de vue d'un fait.

Structures intellectuelles et argumentatives simples (affirmation²⁴¹ - justification - conclusion)

Forme simple du débat²⁴² :

Explication d'un fait, justification d'un point de vue, également en relation avec le comportement de personnages littéraires ».

Par rapport au programme de 1984, on observe que le module sur la démonstration est introduit dans une unité de géométrie (et non plus à propos des équations et inéquations). Ce changement peut être interprété comme suit : alors que l'unité sur les équations et les inéquations, par la présence du langage symbolique, favorise les arguments formels, l'unité sur les isométries favorise le registre visuel, le recours à la figure et donc les arguments sémantiques intuitifs. Ici, ce serait donc la fonction explicative qui serait valorisée. De plus, il apparaît une référence interdisciplinaire à l'argumentation en langue maternelle (allemand) qui valorise la fonction de communication. On observe également une référence au travail autonome de l'élève pour développer d'idée de preuve à propos du centre de gravité ou de l'orthocentre.

Mais la grande nouveauté du programme de 1994 est **l'apparition d'une unité d'enseignement sur le thème de la démonstration en classe 9.**

Classe 9 (filiale scientifique) [p.381]²⁴³.

²⁴⁰

Argumentieren

Vorbereitung, Durchführung und Auswertung von Diskussionen

Mündliche und schriftliche Darstellung und Begründung eines Standpunktes, Sachverhaltes

Einfaches gedankliches und argumentatorisches Strukturieren (Behauptung - Begründung - Folgerung)

Einfache Form der Erörterung

Erklärung eines Sachverhalts, Begründung eines Standpunktes, auch im Bezug auf das Verhalten literarischer Figuren

► 5 Themen aus dem eigenen Erfahrungsbereich bzw. anknüpfend an Lektüre, Theater- und Kinobesuch

Sammeln von Informationsmaterial, Stichwortzettel; Verfahrensregeln für eine Diskussion, Diskussionsleitung

Veranschaulichung durch Beispiele

"Steigernde Erörterung"

(noch keine "dialektische Erörterung"); Gliederung Übung auch in Hausaufgaben (Teilaufgaben und vollständige Aufsätze)

²⁴¹ On traduit Behauptung par « conclusion » dans le contexte mathématique ; dans un contexte argumentatif de langue naturelle, on peut traduire par « affirmation » moins chargé mathématiquement. D'autant plus que dans la suite Behauptung – Begründung – Folgerung qu'on pourrait traduire par affirmation – justification – conclusion, le mot Folgerung est traduit clairement par « conclusion ». Dans cette suite « affirmation – justification – conclusion » le mot affirmation aurait même une connotation de conjecture ou hypothèse.

²⁴² Le mot Erörterung a plusieurs traductions possibles dans ce contexte : dissertation, discussion ou débat.

«unité 5 : découverte et démonstration

Dans le champ des problèmes intéressants les élèves prennent conscience des méthodes mathématiques. Par l'expérimentation créative - individuelle ou en groupe - ils découvrent de nouvelles propriétés, recherchent des arguments pour les démontrer et sont stimulés pour rechercher la portée des propositions par rapport aux généralisations possibles ou des cas particuliers. Rétrospectivement, ils découvrent des heuristiques et des stratégies typiques de résolution de problèmes mathématique. Par la fréquentation de domaines complets de problèmes ils s'entraînent à aller droit au but et à maintenir le cap. Ainsi ils seront conduits à travailler de manière autonome des textes mathématiques »

Théorème de l'angle inscrit	<p>Etude de thèmes en rapport avec les théorèmes sur les angles dans le cercle, le théorème de Pythagore et les théorèmes de Ceva.</p> <p>Egalement utilisation d'un calculateur.</p> <p>(Relation avec la nature et l'art)</p> <p>Penser également à des textes historiques.</p> <p>Devoir à la maison en mathématiques</p>
Expérimenter, conjecturer, <i>démontrer</i> , généraliser.	
<p>Stratégie de résolution de problèmes et de <i>démonstration</i>.</p> <p>(Le nombre d'or)</p> <p>Travailler avec des textes mathématiques</p>	

Im Umfeld von interessanten Problemen werden sich die Schülerinnen und Schüler mathematischer Methoden bewußt. Bei kreativem Experimentieren - selbständig wie auch im Team - entdecken sie neue Eigenschaften, suchen nach Argumenten, sie zu begründen, und werden angeregt, die Tragweite der Aussagen im Blick auf mögliche Verallgemeinerungen und Spezialfälle zu erforschen. Im Rückblick erkennen sie typische Heuristiken und Strategien mathematischen Problemlösens. Beim Erkunden ganzer Problemfelder schulen sie Zielstrebigkeit und Durchhaltevermögen. Dabei werden sie auch angeleitet, selbständig mit mathematischen Texten zu arbeiten.

<p>Satz vom Umfangswinkel</p> <p>Experimentieren, Vermuten, Beweisen, Verallgemeinern</p> <p>Strategien des Problemlösens und des Beweisens</p> <p>[Der Goldene Schnitt]</p> <p>Arbeiten mit mathematischen Texten</p>	<p>Geeignete Themenkreise im Umfeld der Sätze über Winkel am Kreis, des Satzes von Pythagoras und des Satzes von Ceva</p> <p>Auch Rechnereinsatz</p> <p>[Bezüge zu Natur und Kunst]</p> <p>Gedacht ist auch an historische Texte.</p> <p>Mathematische Hausarbeit</p>
--	---

On observe également que cette unité sur la démonstration n'apparaît pas dans la classe 9 des filières linguistiques. Elle valorise bien entendu la fonction de découverte. Comme cette unité est nouvelle, on peut y voir la volonté de renforcer cette fonction, notamment dans sa composante heuristique. Il s'agit d'un des rares endroits où est évoqué le travail individuel ou en groupe des élèves pour produire une démonstration.

En classes 10 et 11 (filiale scientifique), il n'y a plus de mentions explicites de la démonstration.

On mentionne des technologies (par exemple en classe 10 : propriétés du logarithme, théorème d'addition en probabilité, formule de l'aire d'un cercle, formule des volumes de solides) ou des techniques (méthodes de modélisation, méthode des arbres en probabilité, méthode de Cavalieri).

En classe 11, on continue à évoquer le recours à l'intuition, pour l'approximation de la loi binomiale (« accès par intuition [anschaulicher] par exemple avec l'aide du calculateur »²⁴⁴[p.568] ainsi que pour les notions liées à la différentiabilité « acquises par intuition »²⁴⁵[p.568].

En classe 10 on évoque une fonction propédeutique des démonstrations : « Les problèmes de détermination de la circonférence et de l'aire du cercle tout comme du volume de solides particuliers, deviennent compréhensibles aux élèves. Ils reçoivent un aperçu sur la façon dont une considération propédeutique des limites permet le calcul »²⁴⁶[p.481]. Les démonstrations des formules d'aire et de volume permettraient de préparer, de découvrir les limites. On signale que ce travail est « adapté pour une élaboration autonome d'extraits du manuel de classe »²⁴⁷ [p.481]. On retrouve cette fonction propédeutique en classe 11, à propos de l'examen des branches infinies de fonctions à partir de leurs courbes. Dans les deux cas, solides ou courbe, le registre visuel du dessin ou du graphique permet des arguments sémantiques intuitifs. Mais il faudra attendre les classes 12 et 13 pour avoir une définition formelle (avec des « ϵ ») qui permettra des arguments formels. Nous avons donc ici une valorisation de la **fonction découverte dans sa dimension propédeutique**. Ces démonstrations illustrent également la fonction de systématisation élémentaire : on valide de manière élémentaire les différentes formules sur les aires et les volumes par des techniques (ici par passage à la limite) qui ne seront pas appliquées dans la

²⁴⁴ Anschaulicher Zugang z.B. mit Hilfe des Rechners.

²⁴⁵ anschaulich gewonnen.

²⁴⁶ Den Schülerinnen und Schülern werden die Probleme bei der Bestimmung von Umfang und Inhalt des Kreises sowie des Rauminhalts bestimmter Körper verständlich. Sie bekommen Einblick, wie eine propädeutische Grenzwertbetrachtung die Berechnung ermöglicht.

²⁴⁷ Geeignet für selbständiges Erarbeiten von Lehrbuchabschnitten.

résolution des exercices d'application du cours (validation contemplative). Ceci confirme la mise en valeur d'une fonction **de systématisation élémentaire et contemplative** proposée au chapitre précédent.

Classes 12 et 13 du cours approfondi (Leistungskurs):

Dans l'unité sur les suites et les limites [p.737], on introduit la démonstration par récurrence et à propos de la règle de l'Hospital « une déduction par intuition suffit »²⁴⁸ [p.737].

En géométrie, on évoque précisément les méthodes de démonstration de théorèmes classiques de géométrie affine (théorèmes du centre de gravité, de Thalès, de Ceva, de Ménélaus,...) : les élèves « connaissent, avec l'exemple des théorèmes de la géométrie affine, l'élégance des méthodes vectorielles de démonstration et apprennent à trouver et à conduire de manière autonome de telles démonstrations »²⁴⁹ [738]. On indique également chez les élèves que « leurs capacités à conduire des démonstrations autonomes sera étendue aux théorèmes de géométrie métrique »²⁵⁰[741]. On évoque l'application du produit scalaire pour les démonstrations de théorèmes de géométrie métrique (par exemple les théorèmes des triangles comme le théorème d'Euclide, les théorèmes des quadrilatères (losange, rectangle,...),...). La reprise de la démonstration de théorèmes déjà démontrés par des arguments sémantiques ou pragmatiques dans les classes précédentes, permet de montrer l'élégance des **arguments formels** basées sur le calcul vectoriel ou de coordonnées, mais aussi de valoriser la fonction de vérification de la nécessité (alors que les démonstrations des classes précédentes pouvaient parfois ne vérifier que la plausibilité), ainsi que la fonction de systématisation.

Enfin une première mention aux axiomes se trouve dans l'unité sur les espaces vectoriels : « Avec l'exemple des notions d'espace vectoriel, les élèves apprennent comment on peut généraliser et, à travers l'axiomatisation d'un modèle intuitif résoudre des problèmes mathématiques »²⁵¹[740]. On y précise les règles d'addition interne et de multiplication externe. Mais l'étude des conclusions simples à tirer des axiomes vectoriels reste facultative. De même, une introduction axiomatique du produit scalaire reste facultative.

²⁴⁸ Anschauliche Herleitung genügt.

²⁴⁹ erleben am Beispiel von Sätzen aus der affinen Geometrie die Eleganz vektorieller Beweismethoden und lernen, solche Beweise selbst zu finden und zu führen.

²⁵⁰ Ihre Fähigkeiten, selbständig Beweise zu führen, werden auf Sätze der metrischen Geometrie erweitert.

²⁵¹ Am Beispiel des Vektorraumbegriffs lernen die Schülerinnen und Schüler, wie man mathematische Fragestellungen verallgemeinern und durch Axiomatisierung von einem anschaulichen Modell lösen kann.

Parmi les thèmes au choix figure la logique, mais ce thème n'est pas explicité.

Des techniques, par exemple la méthode d'élimination de Gauss, ou des technologies, par exemple le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, sont proposées.

Dans le cours de base (Grundkurs) les contenus sont moins ambitieux, par exemple pas de raisonnement par récurrence, pas de théorie des espaces vectoriels, affines ou euclidiens, et beaucoup de démonstrations sont facultatives, laissées à l'appréciation du professeur.

Tableau synthétique des contenus des programmes par classe et par domaine :

Pour pouvoir comparer les différents moments où sont introduits les différents éléments des programmes nous produisons le tableau suivant qui ne concerne, pour les classes 9 à 11, que les filières scientifiques (mathematisch-naturwissenschaftlicher Zug), et pour les classes 12 et 13 que les classes de cours approfondi. Ce tableau pourra être comparé à son équivalent français²⁵².

	Nombres et analyse	Géométrie	Autre
5	Règles de calcul sur les entiers naturels.	Symétrie, parallélisme, distance, triangle, quadrilatère, cercle, solide.	Grandeurs.
6	Règles et critères de divisibilité. Fraction et règles de calcul.	Angle, cercle, réflexion, rotation, translation. Médiatrice, bissectrice et leurs propriétés.	Calcul numérique (précision, arrondi). Règle de trois.
7	Règles de calcul sur les relatifs et les rationnels, transformation de termes.	Orthogonalité, parallélisme. Théorème des angles formés par deux parallèles et une sécante ; propriétés réciproques. Théorème de la somme des angles d'un triangle et d'un quadrilatère. Théorème du triangle inscrit dans un cercle et de côté un diamètre (<i>Satz des Thales</i>).	Calcul sur les pourcentages. .
8	Linéarité : Fonction, équation linéaire et inéquation linéaire, transformation par équivalence.	Figures isométriques, théorèmes d'isométries des triangles. Cercle, disque, centre de gravité	Applications des mathématiques (physique,... ;

²⁵² Voi §3.3.4.2.3

	<p>Calcul littéral avec des parenthèses et la formule du binôme, factorisation, calcul sur les fractions, inéquations quotient et transformation par équivalence.</p>	<p>et orthocentre. Le quadrilatère et ses cas particuliers.</p>	<p>interprétation de graphiques. Informatique de base.</p>
9	<p>Nombres réels, incomplétude de l'ensemble des nombres rationnels, Racine carrée, approximation par itération de la racine carrée par dichotomie et par la méthode de Héron</p> <p>Fonction, équation, [inéquations] quadratiques.</p> <p>Fonction racine carrée, équations avec radicaux.</p> <p>Systèmes linéaires d'équations et d'inéquations à deux variables.</p>	<p>Géométrie :</p> <p>Symétrie centrale et propriétés.</p> <p>Théorèmes de Thalès (<i>Strahlensätze</i>)</p> <p>Similitudes et leurs propriétés</p> <p>Similitude des figures, notamment les triangles.</p> <p>Théorème de Pythagore et sa réciproque.</p> <p>Théorème de l'angle inscrit.</p>	
10	<p>Fonctions : Puissance, racine n-ième, logarithme.</p> <p>Processus dynamiques, exponentielle : croissances linéaire et logistique. Propriété du logarithme.</p>	<p>Géométrie : formules de la circonférence et de l'aire d'un cercle, des volumes des solides usuels. Projection parallèle. Perspective.</p>	<p>Probabilité : théorème d'addition, loi des grands nombres, combinatoire, indépendance, théorème d'indépendance, règle des représentations en arbre.</p> <p>Trigonométrie : théorèmes du sinus et du cosinus.</p>
11	<p>Fonctions : Pente d'une droite, orthogonalité. Fonctions rationnelles (zéro, limites à l'infini, parité, courbe), domaine de définition. Limites aux bornes de l'ensemble de définition, continuité.</p> <p>Différentiabilité : interprétation géométrique, tangente, dérivée, règles de dérivation, monotonie, extremum, inflexion, courbe. Etude de fonctions.</p>		<p>Probabilité : loi de probabilité, variable aléatoire, loi binomiale, tests d'hypothèse.</p> <p>Etude de fonctions dans des situations réelles. Optimisation.</p>
12-13	<p>Suites et limites : suites récurrentes, raisonnement par récurrence, théorèmes de limites, théorème des zéros d'une fonction (cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires), règle de l'Hospital.</p> <p>Calcul intégral : Primitive, intégrale, propriétés, théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, fonction composée, intégration par substitution, par parties,</p> <p>Etude des fonctions rationnelles, exponentielles, logarithmes et trigonométriques. Méthodes de Newton, de Simpson, Calcul d'aire et de volume avec axe de révolution.</p> <p>Systèmes linéaires : représentation matricielle, transformation par</p>	<p>Espaces vectoriels : bases et dimension.</p> <p>Géométrie affine : représentations paramétriques de droites et plans, parallélisme, perspective, démonstration des théorèmes du centre de gravité, de Thalès, de Ceva, de Menelaus.</p> <p>Géométrie métrique : produit scalaire, équation normale d'un plan, calculs de distance et d'angle, équations de tangente, intersection, théorème du cosinus, démonstration des théorèmes du triangle, du quadrilatère, puissance d'un point par rapport à un cercle.</p>	<p>Thèmes au choix : loi normale, intervalles de confiance, chaîne de Markoff, transformations affines, sections de la sphère, cryptographie, chaos et fractales, équations différentielles usuelles, nombres complexes, courbes algébriques, théorie élémentaire des nombres, logique, structures algébriques, éléments d'histoire des mathématiques, sujets de compétitions mathématiques.</p>

équivalence, méthode d'élimination
de Gauss, multiplication de matrices.

Nous traduisons les termes allemands « Kongruenz » par isométrie et « Ähnlichkeit » par similitude. Cependant il semblerait que la géométrie des isométries et des similitudes soit davantage celles des transformations en France alors qu'en Allemagne on étudie davantage les figures statiques en comparant longueurs, angles avec les théorèmes sur les triangles isométriques ou de même forme, et en utilisant beaucoup le théorème de Thalès (Strahlensatz), les agrandissements ou les réductions.

Résumé :

La démonstration apparaît clairement comme objet d'enseignement dans l'unité de classe 8 consacrée aux figures isométriques.

Toutes les fonctions sont mises en valeur, notamment la fonction de communication, dans ses dimensions discursive et sociale, et la fonction découverte, dans ses dimensions heuristique et propédeutique.

Les arguments pragmatiques ou sémantiques sont valorisés, jusque dans les classes du cycle supérieur.

Les arguments formels, eux aussi, sont valorisés, plus particulièrement dans la filière scientifique et dans le cours approfondi.

Différentes technologies sont abordées, parmi lesquelles des technologies de plausibilité ou pragmatiques. La technologie des axiomes a pratiquement disparu des programmes, sauf de manière facultative en classes 12 et 13.

3.2.1.4 Programmes à venir

Deux réformes sont actuellement en cours.

3.2.1.4.1 Expérimentation depuis 1997 d'une filière Gymnasium en 8 ans au lieu de 9 ans actuellement

Les programmes correspondants sont extrait de:

pour les classes 5 à 10 :

(2001) *Bildungsplan für das Allgemein Bildende Gymnasium mit Achtjährigem Bildungsgang*, Lehrplanheft 6/2001 , Neckar-Verlag,

pour les classes 11 et 12:

(2001) *Bildungsplan für die Kursstufe des Gymnasiums*, Lehrplanheft 3/2001 , Neckar-Verlag.

Cette réforme, introduite à titre expérimental en 1997 est généralisée en 2001 en classe 5, ce qui aboutit en 2008 au baccalauréat en 8 ans étendu à tous.

Par rapport à la durée de scolarité en lycée français, la scolarité actuelle en Gymnasium du Bade-Wurtemberg dure deux ans de plus, commençant un an plus tôt et finissant un an plus tard. Il y a donc une expérimentation avec une scolarité réduite de un an en supprimant la dernière classe, la classe 13. Observons les effets sur la place de la démonstration dans les programmes.

Il y a juste un ordonnancement nouveau des unités, avec parfois regroupement d'unités et allègement à la marge. Pour ce qui concerne la classe 8, elle contient toujours une unité «congruence et triangle » avec le même développement sur les notions techniques de démonstration, avec le même libellé que dans le programme de 1994. Mais l'unité «découverte et démonstration » de classe 9 apparaît maintenant en classe 8 sous le titre «découverte, démonstration et classification des théorèmes géométriques », avec quasiment le même libellé que dans l'ancienne classe 9.

Mais il y a également une modification des objectifs avec un passage des « mathématiques comme produit » aux « mathématiques comme processus ». Il est précisé que dans les «mathématiques comme produit » les notions sont données et les théorèmes sont démontrés formellement²⁵³ [p.190] alors qu'avec les « mathématiques comme processus » les notions sont développées et les théorèmes sont trouvés et prouvés de façon plausible²⁵⁴ [p.190].

3.2.1.4.2 Programme unique de mathématiques dans toute la filière Gymnasium à partir de 1999

Les programmes correspondants sont extraits de:

(2000) *Bildungsplan für das Gymnasium, Lehrplan Mathematik, Klasse 5-11, Amtlicher Teil, Heft 17 vom 9.Oktober 2000.*

²⁵³ Begriffe vorgeben, Sätze formal beweisen.

²⁵⁴ Begriffe entwickeln, Sätze finden, plausible begründen.

On a, d'une part la suppression de la distinction entre Gymnasium linguistique et Gymnasium scientifique (pour les classes 9, 10, et 11 à partir de 1999) qui se caractérisait par un programme plus approfondi en mathématiques en Gymnasium scientifique par rapport au Gymnasium linguistique, et d'autre part la suppression de la distinction en mathématiques entre cours de base et cours approfondi (pour les classes 12 et 13 à partir de 2002-2003). On peut donc retenir qu'il y a un programme unique de mathématiques sur toute la filière Gymnasium à partir de 1999.

Rappelons qu'un des objectifs de cette réforme est d'améliorer le niveau mathématique des élèves de Gymnasium, notamment après les résultats de l'Allemagne dans les évaluations de la troisième étude internationale sur l'enseignement des mathématiques (TIMSS) et après l'expertise de la commission fédérale pour « une amélioration de l'efficacité de l'enseignement scientifique » et compte-tenu de l'introduction des nouvelles technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement. L'ancien horaire hebdomadaire de 3 périodes de 45min pour le cours de base et de 5 fois 45min pour le cours approfondi devient un horaire hebdomadaire de 4 fois 45mn pour tout le monde.

Le programme de classe 9 reprend l'ancien programme de classe 9 de Gymnasium scientifique, excepté l'abandon de l'optimisation linéaire, et la méthode Héron pour les racines carrées.

En classes 10 et 11 on reprend les anciens programmes de Gymnasium scientifique, sauf pour la partie sur les probabilités, allégé des dénombrements, de l'indépendance et des variables aléatoires et où on adopte les programmes de Gymnasium linguistique.

Les classes 12 et 13 conservent le programme de cours approfondi, avec la suppression des espaces vectoriels et des matrices, un allègement du calcul différentiel et intégral, de la géométrie analytique (cercle et sphère sont renvoyés en thème au choix). Le raisonnement par récurrence, absent du cours de base, est maintenant enseigné à tous les élèves. Les spécifications sur les méthodes de démonstration en géométrie affine et euclidienne sont maintenues, même si on ne précise plus des exemples de théorèmes classiques. Les méthodes vectorielles de démonstration en géométrie affine sont à connaître.

Il apparaît un nouveau thème au choix : « méthodes mathématiques de démonstration : schéma de démonstration, principes de la vérification mathématique ».

On notera la préférence de la preuve plausible par rapport à la démonstration formelle. Il faudra observer à partir de 2002 l'influence de ces programmes sur les manuels de classe, les pratiques en classe et les évaluations.

En résumé :

Un seul programme de mathématique de la classe 5 à la classe 12, en 8 ans, continue à proposer la démonstration comme objet d'enseignement à partir de la classe 8, essentiellement en lien avec la géométrie.

La préférence pour les justifications plausibles des théorèmes est fortement affirmée par rapport aux démonstrations formelles.

3.2.2 Etude des programmes de Realschule et Hauptschule de 1984 et 1994

3.2.2.1 Programmes de Hauptschule

Les programmes de 1984 sont extraits de Lehrplanheft 6/1984, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1984. La seule mention à la démonstration se trouve dans l'introduction au programme : « Les termes et les théorèmes doivent être développés à propos de faits adaptés et concrets, et être clarifiés. De tels éclaircissements seront approfondis à travers l'usage de matériels, qui renforcent l'illustration. Fondamentalement, on renoncera à la démonstration formelle des théorèmes. A sa place on utilise des considérations de plausibilité »²⁵⁵ [p.212].

On lit ici un renoncement explicite à la démonstration formelle. Seule la validation par plausibilité est retenue. Aucune autre mention à la démonstration n'est faite dans les contenus de programme. Nous considérons que **la démonstration n'est pas un objet d'enseignement de la Hauptschule de 1984.**

²⁵⁵ Begriffe und Lehrsätze sollen an geeigneten und konkreten Sachverhalten entwickelt und einsichtig gemacht werden. Solche Einsichten werden vertieft durch den Umgang mit Materialien, die die Veranschaulichung stützen. Grundsätzlich wird auf den formalen Beweis von Sätzen verzichtet. An seine Stelle treten Plausibilitätsbetrachtungen.

Les programmes de 1994 sont extraits de Lehrplanheft 2/1994, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1994. Dans les objectifs généraux il est précisé : la *Hauptschule* «s'adresse aux élèves qui ont l'essentiel de leurs talents, intérêts et performances dans une pensée concrète-intuitive et une fréquentation des choses par l'action. En même temps les formes de cours orientées vers l'action sont, globalement, particulièrement pertinentes »²⁵⁶ [p.10], ce qui valorise les validations pragmatiques. Dans les missions de l'enseignement des mathématiques il n'y a plus de référence explicite au renoncement à la démonstration formelle en faveur des considérations de plausibilité ; on signale pour les cours supplémentaires²⁵⁷ et pour la classe 10 facultative que «les élèves seront amenés progressivement à la pensée abstraite formelle »²⁵⁸[p.23] ce qui sous-entend que les arguments formels ne sont pas exigibles pour la formation de base. En classe 7, dans l'unité de géométrie, on rappelle que « la manipulation expérimentale, la mesure et la réflexion plausible offrent des occasions d'entraîner l'argumentation mathématique [mathematisches Argumentieren] »²⁵⁹. On propose de développer les formules d'aires des quadrilatères par intuition [anschaulich entwickeln]. En classe 8, dans l'unité de géométrie, on propose des « traitement et preuve expérimentaux »²⁶⁰ [p.225] pour le théorème du triangle inscrit dans un cercle de côté un diamètre²⁶¹, qui n'est à traiter qu'en cours supplémentaire et de manière facultative. On suggère pour le calcul des volumes le recours à des « considérations de plausibilités, essai par remplissage, découpage »²⁶²[p.225].

On peut considérer que **la démonstration n'est pas un objet d'enseignement de la Hauptschule de 1994**. Ce sont éventuellement les preuves pragmatiques – plausibilité, intuition ou manipulation - qui sont considérées.

3.2.2.2 Programmes de Realschule

Les programmes de 1984 sont extraits de Lehrplanheft 7/1984, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1984. On y lit : « Les termes et les théorèmes doivent être

²⁵⁶ Sie spricht Schülerinnen und Schüler an, die den Schwerpunkt ihrer Begabungen, Interessen und Leistungen im anschaulich-konkreten Denken und im handelnden Umgang mit den Dingen haben. Dabei sind ganzheitliche, handlungsorientierte Unterrichtsformen von besonderer Bedeutung.

²⁵⁷ Les élèves peuvent suivre des cours de soutien ou des cours supplémentaires, dépendant de leurs aptitudes. Les cours supplémentaires facultatifs et la classe 10 volontaire facultative sont particulièrement recommandés aux élèves qui veulent préparer le diplôme « Mittlere Bildungsabschluss » [p.10].

²⁵⁸ werden die Schülerinnen und Schüler zunehmend an das formal-abstrakte Denken herangeführt.

²⁵⁹ Experimentelles Handeln, Messen und plausible Überlegungen bieten Anlässe, mathematisches Argumentieren zu üben.

²⁶⁰ Experimentelles Erarbeiten und Beweisen.

²⁶¹ désigné par « Satz des Thales » [théorème de Thalès]

²⁶² Plausibilitätsbetrachtungen. Füllversuche, Zerlegungen.

développés à propos de faits adaptés et être clarifiés. Ne seront prouvés seulement de tels théorèmes pour lesquels la preuve est absolument importante pour une meilleure compréhension. Les considérations de plausibilité sont une méthode de travail recommandée»²⁶³ [p.115]. La première phrase est identique à celle de la Hauptschule , à l'exception du mot « concret » qui a été écarté. On peut en déduire que la dimension «concrète » est moins présente dans la validation dans la Realschule que dans la Hauptschule. Pour la suite de la citation, la preuve est autorisée dès lors qu'elle remplit sa fonction d'explication et les arguments de plausibilité sont valorisés.

En classe 9, dans l'unité d'enseignement sur homothétie et similitude, il est précisé : « On mettra en place les bases [...] de procédures de démonstration à venir»²⁶⁴ [p.327]. On propose le théorème de Thalès, les théorèmes de Pythagore, la formule de la circonférence et de l'aire du cercle, les formules des volumes des solides usuels. Nous interprétons les fondements pour l'avenir comme destinés aux élèves qui souhaitent réintégrer la filière du Gymnasium.

On peut considérer que **la démonstration n'est pas un objet d'enseignement de la Realschule de 1984**. En effet il n'apparaît pas explicitement d'extraits du programme l'instituant comme objet d'enseignement.

Les programmes de 1994 sont extraits de Lehrplanheft 1994, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Bade-Wurtemberg, 1994. Comme pour le Gymnasium, les programmes sont présentés en réunissant toutes les disciplines, classe par classe.

En classe 6, les propriétés de la symétrie centrale sont acquise par intuition [Anschauung, p.121]. En classe 7, les théorèmes des triangles isométriques sont appris à travers le dessin et la comparaison [p.176]. Les formules sur les aires sont élaborées en classe 8 à partir de découpages et recompositions [p.240], et pour les aires et les volumes en classe 9 d'après des considérations de plausibilité [p.314]. En classe 9, le calcul de grandeurs s'effectue à partir des constructions [p.313]

Pour ce qui concerne la démonstration les programmes de 1994 semblent en retrait par rapport à ceux de 1984 et il n'y a aucune mention explicite à propos de la démonstration : **seules des considérations de plausibilité et des arguments pragmatiques sont valorisés ; la démonstration n'est donc pas un objet d'enseignement de la Realschule de 1994**. En effet

²⁶³ Begriffe und Lehrsätze sollen an geeigneten Sachverhalten entwickelt und einsichtig gemacht werden. Es sollen nur solche Sätze bewiesen werden, bei denen der Beweis zum besseren Verständnis unbedingt notwendig ist. Plausibilitätsbetrachtungen sind eine empfehlenswerte Arbeitsweise.

²⁶⁴ Es wird die Grundlage [...] für spätere Beweisverfahren geschaffen.

il n'apparaît pas explicitement d'extraits du programme l'instituant comme objet d'enseignement.

3.2.2.3 Comparaison des occurrences des mots relatifs à la validation

Pour comparer la place de la démonstration dans les programmes de mathématiques des trois écoles, pour les périodes comparables, c'est-à-dire jusqu'à la classe 10 (qui est la dernière classe en Hauptschule et Realschule), nous avons comparé le nombre des occurrences des mots de la même famille que Argument [argument], Beweis [preuve/demonstration], Begründen [justifier], Überprüfen [verifier]. Le tableau montre à l'évidence que les références à la validation sont plus nombreuses en Gymnasium que dans les autres écoles, ce qui confirme les analyses précédentes.

Occurrence des mots de la famille de :	Gymn. jusqu'à Kl.10	Realschule	Hauptschule
Argument [argument]	5	2	1
Beweis [preuve/demonstration]	12	0	1
Begründen [justifier]	4	1	2
Überprüfen [verifier]	4	7	1

3.3 Etude des programmes français

Par apport aux programmes du Bade-Wurtemberg, les sources de documentation n'ont pas permis de trouver pour les programmes anciens un document unique rassemblant les programmes du collège et du lycée mis en place pour une cohorte donnée. En effet ces programmes sont conçus généralement en deux moments distincts, le premier concernant le collège ou premier cycle, le second, généralement trois à quatre ans plus tard, concernant le

lycée d'enseignement général ou second cycle, qui accueillera en général²⁶⁵ quatre ans plus tard la cohorte des élèves ayant commencé un nouveau programme en sixième. En général nous indiquons comme date des programmes la fourchette de parution des premiers textes concernant ces nouveaux programmes. On voit dans cette caractéristique la différence entre le Gymnasium qui permet de penser les programmes en filière unique, et le système français où après le collège le système scolaire propose une orientation diversifiée. Rappelons qu'en Bade-Wurtemberg une partie de cette orientation a déjà été faite à la fin de l'école primaire.

Par rapport aux programmes de Bade-Wurtemberg, les textes français sur les programmes sont en général composés de deux textes distincts :

- un descriptif des programmes avec peu de commentaires,
- un ou des textes de commentaires appelés instructions, circulaire, documents d'accompagnement, ... qui contiennent des commentaires plus amples.

3.3.1 Programme français des années 1968 à 1971

Les références des programmes²⁶⁶ sont :

Mathématiques classes du premier cycle, Ministère de l'Education, édition INRDP, brochure 6059, non daté [classes de sixième et 5^{ème} : arrêté du 29 juillet 1968 ; classes de quatrième et troisième : arrêté du 22 juillet 1971] ;

Mathématiques classes du second cycle, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 6061, non daté [classes de seconde : arrêté du 30 mai 1973 ; classes de première : arrêté du 19 mars 1970 ; classes de Terminales : arrêté du 14 mai 1971].

On observera que ces brochures ne sont pas datées.

Comme précédemment, la pagination indiquée dans ce paragraphe renvoie à ces documents, dépendant du cycle considéré.

Les instructions du 1 octobre 1946, rappelées en préliminaire des programmes de premier et second cycles, énoncent dans le paragraphe sur l'esprit de l'enseignement du second degré : «L'idée que la « méthode d'autorité est absolument étrangère à l'esprit de l'enseignement du second degré », que cet enseignement « ne peut qu'être foncièrement libéral », trouve une interprétation évidente dans le domaine des mathématiques. Car – une fois admis les axiomes, les postulats et les définitions, qui sont, du reste, acceptées facilement, au moins pour les éléments, parce qu'ils tirent leur origine de l'expérience concrète –, les faits n'y sont pas imposés, mais se démontrent par un enchaînement logique auquel l'esprit donne son adhésion»

²⁶⁵ pour les élèves non redoublants et s'orientant vers le lycée

²⁶⁶ consultés à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg

[Brochure 6061, p.58]. On y trouve postulé que l'esprit adhère à l'enchaînement logique et que les axiomes et postulats sont acceptés facilement. Si ce point de vue peut paraître raisonnable pour un mathématicien, il demande à être vérifié pour un élève. En attendant les deux fonctions valorisées dans ce préambule sont celle de vérification de la nécessité et celle de systématisation.

3.3.1.1 Premier cycle

Classes de sixième et 5ème : arrêté du 29 juillet 1968 ; classes de quatrième et troisième : arrêté du 22 juillet 1971 in Mathématiques classes du premier cycle, Ministère de l'Education, édition INRDP, brochure 6059.

Seul le programme de quatrième contient une mention à la démonstration dans son « chapeau » introductif : « A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique ; c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes). Mais il est absolument indispensable que de nombreuses manipulations, des exercices pratiques utilisant les instruments de dessin aient précédé à la fois l'énoncé des axiomes et tout raisonnement. Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger ; les prémisses devront être précisées avec soin» [p.11]. Il est énoncé clairement que le but de l'enseignement des mathématiques pour les élèves est de leur faire comprendre et apprendre à rédiger des démonstrations. **La démonstration est donc clairement désignée comme objet à enseigner.** Il est précisé en troisième , dans le « chapeau » introductif : « Les élèves ont déjà appris, en Quatrième, ce qu'est une démonstration. Cet effort sera poursuivi, à propos des questions d'algèbre et de géométrie propre à cette classe, dans le même esprit qu'en Quatrième » [p.13]. Dans ces programmes de premier cycle le terme « théorème » n'est pas prononcé ; on parle d'« énoncé de Thalès » en quatrième ou de « Pythagore » sans qualificatif en troisième. Les instructions particulières pour les classes de sixième et 5ème (28 février 1969) énoncent : « C'est en quatrième que commencera l'apprentissage méthodique du raisonnement déductif ; dans les classes du cycle d'observation, on pourra présenter et mettre en forme des raisonnements courts, qui s'énoncent en une phrase simple, mais on se bornera le plus souvent, en partant de constatations expérimentales ou familières, à organiser et à ordonner une recherche constructive, où l'analyse précédera toujours une synthèse éventuelle. On observera aussi que, dès cet âge, la langue mathématique a ses exigences particulières pour la propriété des termes et pour la correction de la syntaxe ; le plus souvent, une erreur dans l'expression révèle ou provoque une erreur dans la pensée ; on apportera donc un grand soin à cultiver chez les élèves en toute circonstance ce souci de l'expression et à associer toujours, autant que le recommande l'ancien

programme, à une « leçon de mathématiques » une « leçon de français » » [p.39]. On notera une méthode conseillée dans le processus de démonstration : une analyse suivie d'une synthèse. On notera l'importance de la **fonction de communication dans sa dimension discursive**, voire syntaxique. Pour la sixième et la 5^{ème} c'est plus le raisonnement déductif qui est objet d'enseignement que la démonstration.

La circulaire du 19 février 1973 précise : « il est donc recommandé de ne pas donner les démonstrations de tous les théorèmes concourant à la construction de l'édifice ; ces théorèmes doivent être énoncés ; on dira qu'on peut les déduire des énoncés antérieurs, mais qu'on ne le fera pas (certains élèves pourront souhaiter le faire, le professeur facilitera leur tâche au moyen d'exercices dont l'énoncé guiderait leur recherche).

Il est légitime d'admettre ainsi des théorèmes importants, si leur démonstration apporte peu en elle-même, ce qui est parfois le cas ; un théorème important est un théorème qui est une pièce essentielle à la construction (ainsi la transitivité de l'équipollence des bipoints) ou encore, qui a de nombreuses applications (ainsi le fait que les symétries centrales ou orthogonales sont des isométries). De tels théorèmes doivent être compris des élèves ; cette compréhension s'acquiert parfois en les démontrant, parfois en les commentant, toujours en les appliquant ; il peut être plus important de savoir utiliser un théorème pour résoudre une classe de problèmes que d'en connaître une démonstration [p.99-100]».

Ici on voit apparaître le **principe du théorème admis** : un théorème est admis si la démonstration apporte peu, c'est-à-dire si elle ne permet pas à l'élève de comprendre le théorème, donc si elle ne remplit pas la fonction d'explication. Cependant, comprendre un théorème est défini comme l'appliquer, puisque la compréhension s'obtient toujours en appliquant le théorème. Il est bien entendu qu'il ne s'agit pas de la même compréhension que celle que nous avons définie dans la fonction d'explication qui explique pourquoi le théorème est vrai. La compréhension de l'application du théorème relève de la **fonction de systématisation** : il faut savoir réutiliser le théorème comme règle de validation dans un pas de raisonnement déductif. Donc ce passage semble ambigu car il pourrait être interprété comme suit : une démonstration est admise lorsqu'elle n'aide pas à savoir appliquer le théorème. Ensuite la validation de ce théorème utilise **l'argument d'autorité** pour pouvoir assurer la fonction de preuve du théorème : le théorème est nécessairement vrai car le professeur a déclaré que le théorème est vrai. On est loin de « l'esprit libéral » des instructions de 1946.

Du point de vue des technologies développées, on notera la forte influence des « mathématiques modernes », avec des éléments de la théorie des ensembles, la structure algébrique de groupe et une présentation axiomatique de la géométrie. **La technologie des axiomes** est présente dans les programmes, même si le texte du programme ne les fait pas

apparaître explicitement. Le programme de quatrième précise « On pourra adopter comme axiomes ceux qui sont indiqués dans les commentaires ; mais d'autres choix demeurent légitimes » [p.11]. On a ici une explication du caractère vague du statut des énoncés dans le programme: suivant le point de vue adopté par l'enseignant, qui garde sa liberté, un énoncé peut avoir le statut d'axiome ou de théorème. Ceci est d'ailleurs explicitement rappelé : « On prendra garde, en adoptant un choix d'axiomes différent de ceux que formulait, plus ou moins explicitement, la géométrie élémentaire d'autrefois, que certains théorèmes anciens deviennent des axiomes et vice versa » [p.62].

Il est mentionné une construction axiomatique de la géométrie : « Nous partons donc de la réalité physique [...] Nous étudions expérimentalement [...] Le point de départ ainsi une fois choisi, nous définissons des êtres mathématiques comme des ensembles d'éléments ayant les propriétés précédentes que nous énonçons sous forme d'axiomes. De l'ensemble des axiomes choisis seront alors déduites d'autres relations entre les êtres mathématiques ainsi définis et entre leurs combinaisons ; ces relations démontrées sont énoncés sous formes de théorèmes » [p.62] ou encore « Sur le plan théorique, fonder la géométrie euclidienne exige des axiomes : faute de les expliciter tous, on ne pouvait éviter des pseudo-raisonnements [...] cette annexe et le commentaire [...] ont eu pour dessein de mettre à la disposition personnelle des professeurs un schéma déductif complet, exemple de cercle vicieux » [p.99].

La démonstration est désignée comme objet d'enseignement à partir de la quatrième.

Comme nous l'avons rappelé précédemment, le statut des énoncés du programme n'est pas défini clairement, ce qui peut gêner : un professeur peut leur donner des statuts différents de ceux que donnerait un autre professeur ; l'élève qui change de professeur rencontre alors des statuts différents. Les indications précédentes sur comment enseigner la démonstration restent limitées : mise en place de raisonnements déductifs courts, méthode d'analyse-synthèse et recours à des manipulations, des instruments de dessin ou des constatations expérimentales qui marquent l'empreinte des technologies pragmatiques. Cependant avec le poids de l'axiomatique et du raisonnement déductif, dans l'environnement des mathématiques modernes, **les arguments formels sont valorisés.**

3.3.1.2 Second cycle

Classes de seconde : arrêté du 30 mai 1973; classes de première : arrêté du 19 mars 1970 ; classes de Terminales : arrêté du 14 mai 1971 in Mathématiques classes du second cycle, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 6061.

Rappelons la structure du second cycle, puisqu'elle présente des différences importantes par rapport à la situation actuelle.

La classe de seconde est une classe différenciée en deux sections, une section « littéraire » (seconde A) et une section « scientifique » (seconde C et T). Chaque section a un horaire et un programme particuliers en mathématiques. Nous étudierons le programme de seconde C et T. Les classes de première et terminale scientifiques sont également différenciées en deux sections. Dans la section D, les mathématiques ne sont pas dominantes, en horaire et en coefficient au baccalauréat, par rapport aux deux autres disciplines scientifiques : sciences physiques et sciences de la vie et de la terre. Par contre, dans la section C, les mathématiques sont dominantes, en horaire et en coefficient au baccalauréat, par rapport aux deux autres disciplines scientifiques : sciences physiques et sciences de la vie et de la terre.

Seuls deux programmes de série scientifique font des allusions à la démonstration ou au raisonnement. L'introduction du programme de seconde C précise : « A l'occasion des divers énoncés rencontrés, les élèves auront leur attention attirée sur le rôle joué en mathématiques par les principaux «connecteurs » (et, ou, non, si...alors et ses synonymes, équivaut et ses synonymes) et « quantificateurs » (quel que soit, il existe). Ils noteront leurs règles d'emploi, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements» [p.18].

Les commentaires de classe de première rappellent l'ambition d'une construction axiomatique de la géométrie [p.86].

Le programme de Terminale C propose à propos, des nombres entiers, « le raisonnement par récurrence » et précise en de nombreux points, en calcul différentiel et en calcul intégral, qu'on admettra ou qu'on énoncera sans démonstration des théorèmes ou propriétés. Il est rappelé dès la classe de seconde que « les professeurs sauront ce qu'il est en général opportun de rappeler, d'admettre, de démontrer ou de taire » [p.68].

Les instructions, du 6 février 1970, commentant les programmes de seconde, rappellent dans un long développement dans le paragraphe sur le « langage des ensembles » quelques éléments de logique : « Les élèves qui arrivent en seconde ont déjà fait bien des raisonnements et appliqué ainsi des règles de logique, d'une manière plus spontanée que réfléchie ; il convient de leur apprendre désormais, sur des exemples, à exprimer des raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique [...] Le raisonnement mathématique donne le plus souvent de l'implication les deux usages suivants :

(a) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors B est vrai ;

(b) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si B est faux, alors A est faux.

(a) est parfois nommé inférence, (b) est lié au raisonnement par l'absurde [...]

De cette longue étude on retiendra que l'essentiel, est de donner aux élèves un moyen de reconnaître la légitimité de certaines déductions et d'en dresser l'organigramme : à cet effet, les mots de théorème et de démonstration, d'hypothèse et de conclusion, de réciproque, de condition nécessaire ou suffisante, d'analyse et de synthèse, gardent leur sens et leur emploi» [p.71]. On développe ici le vocabulaire autour de la démonstration.

On a bien ici le développement d'une **technologie basée sur la logique** des propositions et des prédicats. Ici ne semble **valorisée que la fonction de vérification de la preuve**.

En résumé, la **démonstration** est **désignée comme objet à enseigner** ; beaucoup de théorèmes de cours sont admis et il n'y a pas d'indication sur la façon dont s'effectue cet enseignement. Les technologies basées sur la logique sont valorisées.

3.3.2 Programme français des années 1977 à 1983

Ces programmes sont un amendement de la réforme des mathématiques modernes sujette à de nombreuses critiques.

3.3.2.1 Premier cycle

Classes de sixième : arrêté du 14 mars 1977 ; classes de cinquième : arrêté du 25 janvier 1978 ; classes de quatrième et troisième : arrêté du 22 décembre 1978 in Mathématiques classes du premier cycle, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 6093.

La circulaire du 29 avril 1977 précise le rôle de l'enseignement des mathématiques dans les collèges et notamment : « entraîner l'élève à la pensée déductive, l'inciter à la rigueur logique, lui apprendre à bâtir une chaîne de déductions, à déceler éventuellement une faille dans un raisonnement : développer – de façon constructive – son esprit critique : lui montrer par exemple les incertitudes que comporte une induction non contrôlée» [p.12]. Un objectif fondamental est « la participation à la formation intellectuelle générale – et notamment au développement de la pensée logique [...] il faut éviter que l'élève de collège ne perçoive l'élaboration d'une théorie déductive comme une activité intellectuelle gratuite, et même sans signification, donc dépourvue d'intérêt à ses yeux [...] Les axiomes de départ devront, bien entendu, être simples et « naturels », et les raisonnements courts. Or de nombreuses notions mathématiques d'apparence élémentaire se prêtent malaisément, au niveau des collèges, à une approche axiomatique qui ne soit pas factice, ou ne permettant guère des enchaînements déductifs simples» [p.12-13]. L'importance de la signification, et donc de la **fonction d'explication**, est signalée pour tempérer l'usage de la méthode axiomatique, parfois malaisée. Seul le programme de troisième fait mention au raisonnement déductif ou à la démonstration: « en algèbre comme en géométrie certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises: elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive» [p.21]. On retrouve la possibilité d'admettre des théorèmes. En quatrième et troisième, « il est souhaitable que durant les deux années les professeurs mènent de front l'étude du calcul et celle de la géométrie [...] l'une et l'autre peuvent de façon égale concourir à

la formation du raisonnement » [p.29]. C'est plus **le raisonnement déductif**, que la démonstration, qui est désigné **comme objet à enseigner**.

Pour les types d'activité, « l'ambition d'un enseignement de mathématiques ne peut se mesurer à l'étendue du contenu des programmes, mais à l'usage qui en est fait [...] Il est donc essentiel que les élèves de collège soient exercés à résoudre des exercices ou des problèmes nombreux et variés » [p.14].

La circulaire du 29 avril 1977 relative aux classes de sixième et cinquième est plus précise «L'initiation au raisonnement. A ce niveau, elle ne peut émaner que des exemples qui y incitent:

- Dédutions élémentaires à partir de résultats constatés (aire du trapèze déduite de l'aire du triangle) ;
- Situations nées de difficultés de l'expérimentation (exercices de dénombrements). On montrera déjà, à ces occasions, la différence entre une démonstration et une simple constatation expérimentale [...] l'enseignement s'appuiera constamment sur l'activité des élèves» [p.26]. On voit donc que l'élève doit produire des déductions au cours d'activités. Il est invité à faire la **distinction entre un argument formel et un argument pragmatique**, ce que souligne encore la circulaire du 16 novembre 1978 relative aux classes de quatrième et troisième rappelant une citation de l'Académie des Sciences « Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de quatrième et de troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en sixième et cinquième par l'usage expérimental des instruments de dessin (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner [...] Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève. Ensuite le raisonnement doit être rigoureux, il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non explicitement formulées et a fortiori doit se garder de cercles vicieux. Enfin il faut éviter qu'une propriété évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car alors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est la règle du jeu» [p.30]. On voit poindre ici la tension entre la rigueur, dans la **fonction de vérification de la nécessité** et dans **la fonction de communication discursive**, et l'intuition qui valorise les fonctions d'explication ou de découverte.

3.3.2.2 Second cycle

Classes de seconde, première et Terminale : arrêtés des 26 janvier 1981, 30 août 1985, et notes de service des 10 octobre 1984 et 5 septembre 1985 in Mathématiques classes de seconde, première et terminale, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 001F6010, réédition 1987.

Une réforme importante affecte la structure du second cycle.

La seconde devient une classe indifférenciée à l'issue de laquelle l'élève sera orienté vers différentes séries de classes de première : technique, littéraire, économique et scientifique.

Pour la série scientifique, il y a une seule classe, la première S et E, qui regroupe les anciennes séries C et D de lycée général et E de lycée technique.

En terminale, trois séries sont proposées : E (en lycée technique), D (où les mathématiques ne sont pas dominantes, en horaire et en coefficient au baccalauréat, par rapport aux deux autres disciplines scientifiques : sciences physiques et sciences de la vie et de la terre) et C (où les mathématiques sont dominantes, en horaire et en coefficient au baccalauréat, par rapport aux deux autres disciplines scientifiques : sciences physiques et sciences de la vie et de la terre).

Nous étudierons les programmes de seconde indifférenciée, première S et terminale C.

En seconde, les lignes directrices précisent : « Il convient de souligner les formes diverses de raisonnement mathématique mises en jeu dans les situations étudiées ; mais on évitera tout exposé de logique mathématique. De même, c'est à travers les activités qu'on mettra en lumière les différentes phases de la démarche mathématique : conjectures, mise en oeuvre d'arguments, élaboration d'une stratégie de démonstration et rédaction de la démonstration ». On évoque explicitement que la capacité de l'élève à élaborer une stratégie de démonstration est mise en jeu sans indiquer explicitement qu'elle est un objet d'enseignement. Différentes fonctions sont évoquées : découverte et communication. La technologie de la logique est moins mise en valeur.

A propos de la géométrie dans l'espace, « toute étude axiomatique est exclue ; on admettra les propriétés nécessaires à la conduite des activités (propriétés d'incidence, orthogonalité d'une droite et d'un plan, propriété de Thalès, validité des théorèmes de géométrie plane dans les plans de l'espace). L'objectif essentiel est que les élèves connaissent des situations de base, sachent les utiliser pour raisonner et calculer et acquièrent une meilleure maîtrise des solides usuels ». On renonce à la construction axiomatique avec sa fonction de systématisation globale. Des propriétés de cours sont admises. Par contre on continue à évoquer la fonction de systématisation dans l'utilisation des théorèmes admis pour produire de nouveaux résultats.

En première scientifique S « la mention « admis » signifie que la démonstration est hors programme. Pour les démonstrations indiquées comme « non exigibles », le professeur est laissé juge de l'opportunité de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat, tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités ».

A propos des dérivées d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient « les démonstrations de ces règles ne sont pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit à ces résultats : on néglige en cours de calculs les termes d'ordre supérieur à 1 ».

En terminale, on reprend la remarque précédente de première concernant les démonstrations admises et la liberté du professeur relative aux démonstrations non exigibles. On précise : «Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, évaluer la pertinence des résultats obtenus en fonction du problème posé, ne sont que des moments d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs majeurs». On continue à valoriser de pair **la fonction de découverte, notamment dans sa dimension heuristique, et la fonction de communication, dans sa dimension discursive.** Les arguments empiriques (expérimentation) ou intuitifs (imagination) sont encouragés dans la phase heuristique. Le raisonnement par récurrence est introduit comme suit : « Sur des exemples significatifs, on amènera les élèves à conduire et à rédiger des raisonnements par récurrence (passage de n à $n+1$, passage de $1,2,\dots, n$ à $n+1,\dots$). Mais on évitera la mise en forme de récurrence dans les cas intuitivement évidents et on s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence». On accepte ici les **arguments sémantiques ou intuitifs** et on n'exige pas d'**arguments formels**.

En résumé,

Le raisonnement déductif est explicitement cité comme **objet d'enseignement**. **La démonstration** apparaît plutôt comme un **objet paramathématique**, fréquenté, pratiqué sans que soit indiqué comment l'enseigner. On indique certes que la pratique d'activités permet de mettre en jeu les différentes phases du processus de démonstration « conjectures, mise en oeuvre d'arguments, élaboration d'une stratégie de démonstration et rédaction de la démonstration ». Les technologies de logique sont moins mises en valeur alors que des **techniques/technologies intuitives, pragmatiques, et sémantiques** sont prises en considération dans la phase heuristique. La fonction de **systématisation** qui consiste à savoir appliquer des théorèmes admis ou démontrés, ainsi que la fonction de **découverte** qui consiste à savoir utiliser des théorèmes admis ou démontrés pour résoudre des problèmes, sont valorisées.

La fonction de vérification de la nécessité reste très valorisée par l'importance donnée au **raisonnement déductif**, même si elle est remplacée par l'argument d'autorité pour certaines propriétés de cours.

3.3.3 Programme français des années 1985 à 1992

3.3.3.1 Premier cycle

Classes de sixième, cinquième, quatrième et troisième : arrêté du 14 novembre 1985 in Mathématiques classes des collèges sixième, cinquième, quatrième et troisième, Ministère de l'Éducation, édition CNDP, réimpression 1995.

Les orientations et objectifs précisent que « le développement de la pensée logique fait comprendre aux élèves la nécessité, en tout domaine, de recourir à des principes, d'observer des règles, de suivre un ordre. Il est donc inséparable de l'acquisition de méthodes adaptées aux objets considérés et aux fins poursuivies».

Dans « nature et objectifs » des programmes, on énonce que la démarche du programme doit notamment « développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive [...] Ainsi l'enseignement des mathématiques au collège favorise le développement des capacités de travail personnel de l'élève et son aptitude à chercher, à communiquer et à justifier ses affirmations».

Dans les « méthodes » on rappelle qu'« une approbation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées, et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes [...] on peut : Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer, donc d'entraîner à chercher ; Ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficultés progressives au long des quatre années du collège [...] Le professeur sait identifier et prévoir les subtilités qu'il est préférable de taire, les démarches rigoureuses qui sont à remplacer par des arguments accessibles aux élèves, les exigences prématurées de formulation qui entravent une bonne progression». Plusieurs fonctions sont évoquées : découverte dans sa dimension heuristique, communication sans excès de formulation exigeante, vérification, explication dans recherche du sens. On envisage donc **des arguments intuitifs ou sémantiques plus accessibles que des arguments formels rigoureux pour la phase de preuve.**

En classe de sixième, aucune mention du raisonnement déductif ou de la démonstration n'est faite dans le programme.

Dans le programme de classe de cinquième, dans la partie « compléments » sur les « travaux géométriques » relatifs aux figures simples ayant centre(s) ou axe(s) de symétrie, il est précisé: « Les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer. Elles permettront la mise en œuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme».

Dans le programme de classe de quatrième, dans la partie « compléments » il est remarqué que les travaux mathématiques « accentuent progressivement, sans rupture avec l'esprit des classes antérieures, l'entraînement au raisonnement déductif, tout en évitant les exigences prématurées de formulation ; en particulier, les propriétés caractéristiques seront formulées à l'aide de deux énoncés séparés». Il revient au

professeur « de déterminer selon le niveau de sa classe les résultats qui seront démontrés et ceux qui seront admis».

En classe de troisième on rappelle que « le travail effectué doit permettre à l'élève [...] de s'entraîner constamment au raisonnement déductif [...] L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits [...] de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration». Ici on a une des rares mentions explicites où la capacité à démontrer doit être développée chez l'élève.

En continuité avec le précédent programme de premier cycle, **le raisonnement déductif est un objet d'enseignement** où les fonctions de découvertes et de vérification sont développées. Les arguments intuitifs ou sémantiques peuvent remplacer des arguments formels pour remplir la fonction de vérification.

3.3.3.2 Second cycle

Classes de seconde, première et Terminale : arrêtés des 25 avril 1990, 27 mars 1991, 10 juillet 1992 in Mathématiques classes de seconde, première et terminale, Ministère de l'Education, édition CNDP, réédition 1997.

Une réforme de structure intervient en terminale S. Tous les élèves reçoivent un enseignement obligatoire de mathématiques. Ceux qui choisissent une spécialité mathématique ont un enseignement supplémentaire de mathématiques. Alors qu'auparavant les élèves de terminale C et terminale D avaient un enseignement de mathématiques différencié (classes, horaires et programmes distincts), maintenant les élèves de terminale S ont un même enseignement obligatoire, même horaire, même programme et même classe.

En seconde, les intentions majeures rappellent qu' « on a voulu entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique » [p.13] et les objectifs veulent « développer les capacités de communication : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement) » [p.15]. Dans la présentation du texte du programme on reprend les indications du précédent programme : « pour les démonstrations, le professeur est laissé seul juge de l'opportunité » de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat, tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités. La mention « admis » signifie que la démonstration est hors programme» [p.136].

A propos du vocabulaire et des notations on précise : « Certaines questions (traitement des équations, emploi des propriétés caractéristiques en géométrie...) amènent à utiliser des équivalences logiques ; on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme. L'emploi de symboles n'est pas un objectif du programme. Tout exposé de logique mathématique est exclu » [p.18]. Il n'est plus fait référence à la démonstration ou au raisonnement dans la suite du programme.

En série scientifique, l'exposé des motifs reprend les termes du programme de seconde sur le développement conjoint des capacités d'expérimentation et de raisonnement, sur le développement des capacités de communication pour la mise au point d'un raisonnement, sur l'attitude du professeur vis à vis des démonstrations non exigibles ou admises. Un paragraphe sur « raisonnement, vocabulaire et notations » précise : « On entraînera les élèves à la pratique des modes usuels de raisonnement ; équivalence logique, implication, contraposition [...] Les élèves doivent connaître et peuvent utiliser les symboles \Rightarrow et \Leftrightarrow , mais il convient d'éviter tout recours systématique à ces symboles. Tout exposé de logique mathématique est exclu. L'étude de certaines situations peut comporter un raisonnement par récurrence. En classe de Première, on se bornera à des cas très simples et aucune capacité n'est exigible des élèves dans ce domaine ; en Terminale S, on amènera les élèves à conduire et à rédiger des raisonnements par récurrence (passage de n à $n+1$, passage de $1,2,\dots, n$ à $n+1,\dots$). On évitera la mise en forme de récurrences dans les cas évidents et on s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence» [p.138].

En première scientifique S, en algèbre et probabilités « il convient d'exploiter conjointement les aspects graphiques, numériques et algébriques, ainsi que l'étude de variations de fonctions : les activités doivent combiner les expérimentations (graphiques et numériques) et les justifications adéquates». On voit ici une référence appuyée au registre graphique et aux changements de registres. La notion de démonstration n'est pas mentionnée, sauf pour préciser ce qui n'est pas à démontrer (énoncés usuels sur les limites, règles de dérivation, comportement local et global des fonctions,...). «Sur quelques exemples simples, on pourra utiliser le raisonnement par récurrence pour établir une croissance ou obtenir une majoration, mais aucune connaissance des élèves n'est exigible à ce propos».

De même, en terminale scientifique S, la notion de démonstration n'est pas mentionnée, sauf pour préciser ce qui n'est pas à démontrer (énoncés usuels sur les limites, dérivation d'une fonction composée,...).

En résumé, on remarque une continuité avec le programme précédent : le raisonnement déductif est objet d'enseignement et la démonstration est un objet paramathématique. Le recours aux arguments non formels (graphiques, intuitifs, sémantiques) est plus fréquent, non seulement en phase heuristique mais également en phase de validation, y compris en terminale. Des résultats sont admis.

3.3.4 Programme français des années 1996 à 2001

Références :

pour les programmes de sixième à quatrième :

extraits de la brochure "Enseigner au collège Mathématiques Programmes et accompagnement", Ministère de l' Education, CNDP 1998;

pour le programme de troisième :

bulletin officiel de l'éducation nationale, hors série n° 10, 15 octobre 1998, pages 106 à 114.

pour les classes de lycée

CD ROM, Mathématiques, accompagnement des programmes, CNDP 2002

Ces programmes, mis en place en 1996 au collège et en 2000 au lycée, concernent les manuels de classe et les productions d'élèves que nous avons observés, c'est pourquoi nous développons davantage leur étude.

3.3.4.1 premier cycle

La réforme des programmes de collège semble se faire dans la continuité des structures des programmes précédents, avec quelques adaptations pour tenir compte des modifications des programmes de l'école primaire et des modifications des volumes horaires en collège

3.3.4.1.1 classe de sixième

Finalités et objectifs :

« L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen. À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et **l'apprentissage progressif de la démonstration**, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié [p.15]». La démonstration est désignée explicitement comme objet d'apprentissage. La dimension sociale de la formation est affirmée. L'activité de résolution des problèmes est mise en valeur. L'expérimentation et l'argumentation sont évoquées comme composantes de l'activité mathématique ; ce sont également des composantes essentielles de la vie sociale.

« Au collège, on vise la maîtrise des techniques mathématiques élémentaires de traitement (organisation de données, représentations, mises en équation) et de résolution (calculs et équations bien sûr, mais aussi constructions). Leur emploi dans la prévision et l'aide à la décision est précieux dans de multiples circonstances,

de la gestion familiale à l'activité professionnelle [p.16] ». Les techniques mathématiques sont des aides dans la prévision et dans l'aide à la décision, c'est-à-dire dans deux activités de la vie sociale où c'est plus l'argumentation que la démonstration qui permet de prévoir ou de décider. « Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation [p.16] ». La **fonction de communication** de la démonstration est donc abordée dans sa **dimension sociale**.

Les travaux géométriques permettent de « passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés » et de « "prendre contact" avec des théorèmes et apprendre à les utiliser » [p.16]. On voit donc le passage **d'une géométrie du constat** (dans une pratique sociale de l'observation) à **une géométrie déductive** (dans une théorie mathématique locale puis globale de la géométrie).

Programme de la classe de sixième:

Un des objectifs généraux est de « développer les capacités de raisonnement: observation, analyse, pensée déductive [p.18] ». Le travail doit permettre à l'élève « de s'initier très progressivement au raisonnement déductif [p.19] » « Les travaux géométriques permettent aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant, par exemple, sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme. On prendra garde, à ce sujet, de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes [p.21] ». Les arguments mathématiques ne sont pas privilégiés lorsque des arguments intuitifs assurent l'évidence. On voit apparaître les premières technologies mathématiques s'appuyant sur le cercle, l'orthogonalité et le parallélisme.

« On pourra faire déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillage et d'encadrements. Ces travaux permettront de retenir sous forme d'images mentales, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle [p.22] ». Des techniques pragmatiques sont autorisées, avec des manipulations et des observations sur des représentants particuliers. Le recours aux images mentales rappelle l'expérience mentale de Balacheff. « L'usage d'outils informatiques (logiciels de géométrie dans l'espace...) peut permettre de mieux visualiser les différentes représentations d'un objet [p.22] ». Ce recours à l'outil informatique permet également d'élargir les technologies pragmatiques basées sur la perception visuelle.

« L'effort portera sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant des figures à partir desquelles se dégagent de façon progressive les propriétés conservées par la symétrie axiale [p.23] ». On continue donc à utiliser des arguments pragmatiques. Cependant il

existe des arguments mathématiques basés par exemple sur la symétrie axiale conduisant à «la mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires [p.23] ». Comme arguments mathématiques, on utilise aussi la reconnaissance de configurations de référence, comme les parallélogrammes, les figures à axe de symétrie (triangle isocèle, rectangle, losange, médiatrice, bissectrice, ...) conduisant à « l'énoncé et l'utilisation de propriétés caractéristiques des figures précédentes. On veillera à toujours formuler ces propriétés à l'aide de deux énoncés séparés [p.23] ». Il y a donc une contrainte didactique : le recours aux techniques par équivalence est à éviter. On peut émettre l'hypothèse que cette technique est jugée trop difficile à acquérir pour cette classe.

Le document d'accompagnement du programme de sixième comprend un paragraphe intitulé «autour du raisonnement (déduction, argumentation...) » qui précise : « Dès la classe de sixième un point de vue différent de celui de l'enseignement élémentaire est porté sur la géométrie. "Les élèves commencent à se familiariser avec les propriétés d'une figure et c'est dans cette classe que se mettent en place un certain nombre d'éléments et de relations qui se développent ultérieurement dans des situations de validation et de preuve". Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction, il est nécessaire de développer des apprentissages qui initient les élèves à la démonstration. Dans une géométrie d'observation, les figures ne sont pas porteuses d'informations clairement annoncées et les observations résultent de la perception visuelle. Dans une géométrie déductive, c'est à partir d'informations explicitées (les hypothèses) et des propriétés apprises qu'il s'agit de prouver des conséquences qui n'étaient pas annoncées au départ. En classe de sixième, des activités géométriques appropriées peuvent préparer le raisonnement déductif, notamment en amenant les élèves à prendre en compte les mêmes informations sous diverses formes. Cette richesse est offerte par toutes les tâches combinant tracé, langage, mesure ou calcul. Les travaux « géométrico-numériques » peuvent en particulier constituer un terrain privilégié pour aborder le raisonnement sur des îlots déductifs bien circonscrits, notamment à propos de comparaisons de longueurs et d'aires [p.32]».

On voit clairement que l'on se situe **entre une géométrie du constat (observation) et une géométrie déductive**, qui rappelle la classification de [Parzysz 2003]. Et qu'il y aura passage progressif des arguments pragmatiques de validation à des arguments mathématiques de démonstration. Le traitement des situations où les propriétés sont perçues comme évidentes reste problématique. La théorie didactique propose de procéder par « **îlots déductifs** » ce qui est à mettre en relation avec le concept de « théorie locale » présent dans les programmes allemands. On propose également de changer de registres.

3.3.4.1.2 Cycle central: classes de 5^{ième} et de 4^{ième}

« L'élargissement des domaines étudiés et l'enrichissement des outils acquis au fur et à mesure, alliés à une plus grande maturité des élèves, permettent de les initier davantage à l'activité mathématique. À ce propos, les études expérimentales (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves ne les confondent avec des démonstrations : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré [p.41] ». Il est clairement demandé de **distinguer les arguments de plausibilité des arguments de nécessité** sans toutefois proposer ici une solution au problème des propriétés perçues comme évidentes ; il est proposé **un contrat distinguant explicitement ce qui est admis de ce qui est démontré**.

Le texte poursuit : « On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes. Elle seule permet, par exemple, l'appropriation du raisonnement ; il s'agit, en poursuivant l'initiation très progressive au raisonnement déductif commencée en sixième, de passer de l'utilisation consciente d'une propriété mathématique au cours de l'étude d'une situation à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples[...]. Le programme de cycle central du collège a pour objectif de permettre [...] l'apprentissage progressif de la démonstration. [...] En particulier, les travaux individuels de rédaction concourent efficacement [...] au développement des capacités de raisonnement [p.41-42]» La **démonstration est clairement un objet d'enseignement du collège**.

Classe de 5^{ième}

Travaux géométriques :

« En classe de cinquième, l'étude des figures planes se poursuit. Un nouvel outil, la symétrie centrale, permet d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés pourront être démontrées; le parallélogramme est une figure fondamentale du programme. Dans l'espace, les études expérimentales s'amplifient ; elles fournissent un terrain pour dégager quelques propriétés élémentaires du parallélisme et de l'orthogonalité [p.43] ». De nouvelles technologies mathématiques sont mobilisables avec la symétrie dans un cadre de théorie locale où seulement certaines propriétés sont démontrées. Les techniques pragmatiques sont encore utilisées dans l'espace.

« Les diverses activités de géométrie habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettront progressivement de s'entraîner à des justifications au moyen de courtes séquences déductives mettant en oeuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en sixième, notamment la symétrie axiale. Il importe de faire peu à peu percevoir aux élèves ce qu'est l'activité mathématique, tout en veillant à ne pas leur demander de prouver des propriétés perçues comme évidentes [p.43] ». On travaille ici la fonction de systématisation à l'ordre local. Des technologies mathématiques pour le calcul des aires et volumes (parallélépipède rectangle, cylindre de révolution) prolongent le travail commencé en sixième. On propose de nouvelles technologies mathématiques reposant sur la symétrie centrale ou sur la caractérisation angulaire du parallélisme.

« Le travail entrepris sur le parallélogramme et la symétrie centrale aboutit à des énoncés précis que les élèves doivent connaître. Des séquences déductives pourront s'appuyer sur ces énoncés [p.44]». Par exemple, « la symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme qui en découle permettent de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés [p.45]». Ou encore, « la caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance a déjà été rencontrée en sixième. Elle permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction d'un cercle circonscrit à un triangle [p.45]». On est bien dans le cas d'îlots déductifs ou de la théorie locale.

Classe de quatrième

Travaux géométriques:

Trois nouvelles configurations de référence enrichissent les technologies mathématiques : «celle de triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes. À ce nouvel outil et à ceux des classes antérieures s'ajoutent le théorème de Pythagore et la translation. Ces enrichissements doivent favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration [p.51]». On voit donc évoquée **la fonction de découverte et la fonction de systématisation** (pour démontrer de nouveaux résultats).

Il faut « connaître et utiliser les théorèmes [...] relatifs aux milieux des côtés d'un triangle [...] La symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer ces théorèmes [p.51] ». Il faut « connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés de deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes [...] L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers [p.51] ». Ici on admet la démonstration (**argument d'autorité**) après avoir éventuellement vérifié sur des cas particuliers (**argument d'induction**).

« L'inégalité triangulaire et la symétrie axiale, vues en cinquième, permettent de démontrer le résultat relatif à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore [p.52] » : on donne ici des indications de technologies mathématiques mobilisables.

« La translation est définie à partir du parallélogramme. Elle pourra donner lieu à des manipulations expérimentales, notamment sur les quadrillages. On pourra ainsi, après un travail expérimental conduisant à mettre en évidence la conservation des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires, justifier certaines de ces conservations [p.53] ». A nouveau, le passage de la validation pragmatique à la validation déductive est laissé au libre choix du professeur.

Accompagnement des programmes du cycle central cinquième -quatrième

« Le calcul littéral au sens de transformation d'écritures se développe en classe de quatrième. Les tests proposés dans ce cadre mettent alors en jeu les notions d'exemples, de contre-exemples, de cas particulier en opposition au cas général; ce sera l'occasion d'initier les élèves au **raisonnement par contre-exemple** [p.63] » qui complète

le raisonnement déductif, tout comme « l'examen de la compatibilité entre l'ordre et la multiplication, qui oblige à procéder par **disjonction des cas** » [p.64] ».

«C'est ainsi que les élèves sont conduits à formuler des raisonnements dont certains prendront progressivement, au cours du cycle central, la forme de démonstrations. Par exemple, en classe de cinquième, pour établir le résultat sur la somme des angles d'un triangle, on mobilise deux fois le même pas de démonstration, qui consiste à utiliser une symétrie centrale pour établir une égalité d'angles. Dans le cas du concours des médiatrices d'un triangle, c'est la caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance qui intervient. Elle est mobilisée deux fois dans un sens et une fois dans l'autre sens. En classe de quatrième, on demande de façon plus systématique de repérer et de mettre en oeuvre les théorèmes appropriés. Le recours, si besoin est, à plusieurs pas de démonstration amène à comprendre le changement de statut d'une assertion au fil d'une démonstration : un résultat intermédiaire est une conclusion dans un pas de démonstration et une hypothèse dans un pas ultérieur » [p.65]. On voit que les programmes commencent à détailler des situations d'apprentissage de la démonstration, objet d'enseignement, avec ici le travail sur le statut des énoncés. La situation suivante marque la rupture entre la géométrie du constat, avec l'évidence visuelle, et la géométrie déductive, qui démontre malgré l'évidence visuelle.

« Par exemple, à propos des "triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes", l'étude d'un cas particulier de "l'égalité des rapports" (valeur $1/3$) repose sur une telle démarche. On a coupé un des côtés d'un triangle ABC en trois segments de même longueur : $AI = IK = KB$. Par I et K, on a mené les parallèles au côté [BC], qui coupent [AC] en J et L respectivement. À l'aide des résultats sur les milieux de deux côtés d'un triangle, on souhaite établir que le côté [AC] se trouve lui aussi coupé en trois régulièrement : $AJ = JL = LC$.

On pourra remarquer que, contrairement aux deux cas évoqués pour la classe de cinquième, l'évidence « visuelle » du résultat ne fait ici guère de doute ; la question qui se pose est donc celle de l'établir au moyen des résultats déjà acquis ». Ce changement de contrat qui n'autorise plus des arguments pragmatiques traduit un changement de paradigmes géométriques, théorisé par [Parzys 2003] ou [Houdement, Kuzniak 1999]. Suit une proposition de démonstration accessible en quatrième à l'issue de laquelle « les compétences mises en jeu par la recherche d'une démonstration et par sa rédaction se trouvent ainsi bien mis en évidence » [p.65]. On distingue la fonction de découverte de la fonction de communication discursive.

« L'activité intellectuelle procurée par les mathématiques développe également des habitudes de pensée. Les mathématiques, école de la rigueur, sont aussi une discipline qui apprend à se poser des questions. Et répondre ne pourra résulter de pétitions de principe ou d'arguments d'autorité, mais obligera à énoncer ses présupposés, à justifier les traitements entrepris et les résultats atteints. Pour la formation du citoyen, de telles attitudes sont fondamentales. [p.68] » On retrouve l'importance de la fonction de communication dans sa dimension sociale qui est réaffirmée en classe de troisième dans le passage suivant.

3.3.4.1.3 Classe de troisième

La classe de troisième synthétise les acquis du collège en matière d'apprentissage de la démonstration : «Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit. On poursuivra les études expérimentales (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) en vue d'émettre des conjectures et de donner du sens aux définitions et aux théorèmes. On veillera, comme par le passé, à ce que les élèves ne confondent pas conjecture et théorème ; ils seront le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer et de rédiger des démonstrations »[p.106]. On voit aborder ici la fonction de **communication discursive** de la démonstration dans la rédaction des démonstration et la **fonction d'explication** que les arguments pragmatiques ou intuitifs remplissent dans le fait de « donner du sens aux définitions et aux théorèmes »..

Accompagnement troisième

Les élèves « ont rencontré et ont eu l'occasion d'élaborer, au cours de démonstrations, différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction des cas lors de l'examen de l'effet de la multiplication sur l'ordre, infirmation par mise en évidence de contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle [p.14] ».

En résumé :

Les programmes de 1968 faisaient débiter l'apprentissage de la démonstration en quatrième. Les programmes de 1985 invitaient à introduire dès la cinquième de courtes séquences déductives. Cette tendance est amplifiée dans les programmes de 1996 où de courtes séquences déductives sont mises en place dès la sixième et où la progressivité de l'apprentissage est clairement affirmée tout au long du collège. **La démonstration est explicitement un objet d'enseignement dès le début du collège.**

Les arguments de plausibilité ou pragmatiques sont admis en début de collège et remplissent la fonction de preuve en début de collège pour se limiter par la suite à la fonction de plausibilité dans le cadre des conjectures (fonction de découverte). La technologie mathématique prend de l'ampleur et assure la fonction de systématisation, par le recyclage des théorèmes démontrés comme règles de validation, et la fonction de découverte, en permettant la résolution des problèmes. Les théorèmes sont admis ou démontrés déductivement. La technologie de raisonnement se diversifie avec les raisonnements déductifs, par contre-exemple, par l'absurde, par disjonctions des cas.

Le programme donne beaucoup d'informations sur une progression de l'apprentissage : de séquences déductives courtes à des séquences enchaînées, de la géométrie de constat à la géométrie déductive, des arguments pragmatiques, de plausibilité, intuitifs ou sémantiques aux arguments formels. Le statut des énoncés et les changements de registres sont travaillés. Toutes les fonctions de la démonstration sont abordées, avec cependant la fonction d'explication peu mise en valeur. Des exemples de démonstrations accessibles aux élèves sont proposés ou suggérés.

3.3.4.2 2nd cycle

(2002) *Mathématiques accompagnement des programmes*, Ministère de l'Éducation, édition CNDP, 2002 [sixième : arrêté du 22/11/1995 ; cinquième et quatrième : arrêté du 21/1/1997 ; troisième : BOEN n°10 du 15/10/1998, seconde : BOEN n°2 du 30/8/2001, première S : BOEN n°7 du 31/8/2000 ; première ES : BOEN n°8 du 30/8/2000 ; première L BOEN n°7 du 31/8/2000 et n°3 du 30/8/2001, Terminale S et ES : BOEN n°4 du 30/8/2001 et Terminale L BOEN n°3 du 30/8/2001]

Les paginations indiquées correspondent à celles du document du CDROM, dans ses différentes sections, par classe, par programme ou accompagnement.

Une introduction à la réforme mise en place affirme :

« L'expérimentation est une démarche essentielle des sciences. Elle consiste à imaginer, à inventer des situations reproductibles permettant d'établir la réalité d'un phénomène ou d'en mesurer les paramètres. Cette démarche qui appartient à toutes les sciences envahit aujourd'hui du fait de l'ordinateur, les mathématiques. Il faut enseigner à l'élève cette démarche, en acceptant les tâtonnements, les erreurs, les approximations. Pour ce faire, il vaut mieux faire réaliser quelques expériences, en petit nombre mais bien choisies et bien comprises, plutôt que de multiplier les expériences rapides [...] Les mathématiques sont aujourd'hui dans une situation particulière. Science des formes et des nombres, la mathématique est amenée à sortir de son style et de ses pratiques traditionnelles grâce au développement et à la généralisation de l'ordinateur. Elle se rapproche des sciences expérimentales, grâce à l'expérimentation numérique, à la simulation, et à ce que l'on peut appeler la démonstration empirique » [Ministère 2001, p.8]

On y voit revaloriser l'expérimentation en mathématiques et apparaître l'expression paradoxale « **démonstration empirique** », paradoxale puisque la démonstration est attachée aux arguments de nécessité tandis que l'empirisme est attaché aux arguments de plausibilité. En cela, cette introduction annonce un important changement de position dans la réforme des lycées vis-à-vis de la démonstration.

3.3.4.2.1 classe de seconde

Programme :

L'expérimentation informatique permet d'« ouvrir largement la dialectique entre l'observation et la démonstration [...] Le développement de l'**argumentation** et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences de classes de lycée » [p.29]. A l'issue de la seconde l'élève doit « commencer à détacher les principes de la **logique formelle** de ceux de la **logique du langage courant**, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité » [p.29]. On doit donc distinguer la **fonction de plausibilité**,

avec des arguments pragmatiques par exemple, parfois fondée sur la logique du langage courant, qui permet d'argumenter ou de conjecturer, et la **fonction de preuve**, qui repose sur la logique formelle, et qui permet de démontrer. L'enseignement de la démonstration est donc le lieu de la **rencontre entre argumentation et démonstration**.

Tous les domaines sont concernés par la démonstration : « Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer [...] A l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule ». [p.34]

En géométrie, « les problèmes seront choisis de façon:[...] - à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive, - à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque) » [p.35]. Les nouvelles technologies mathématiques concernent trois secteurs : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des propriétés d'aires. Enfin l'étude de démonstrations historiques permet de valoriser la fonction de communication, dans sa dimension culturelle.

Document d'accompagnement :

« La rédaction est l'occasion pour l'élève de réorganiser en démonstration son raisonnement originel, de choisir des notations qui facilitent la pensée et de dégager des arguments essentiels de ceux qui peuvent être considérés comme évidents à son niveau. Pour éviter le recours systématique à des rédactions obéissant à un protocole rigide, on variera le type de rédaction (rédiger les grandes idées d'une démonstration, une partie d'une démonstration, rédiger en les justifiant des pistes possibles pour résoudre une question, rédiger une partie d'un cours ou une démonstration expliquée par un voisin) » [p.4]. Ce passage est intéressant car il valorise la **fonction de communication discursive à l'écrit** et propose une série de tâches d'enseignement, qui ne correspondent pas toujours à des transposées de tâches mathématiques, et qui montrent clairement que la démonstration est devenu un **objet d'enseignement, avec des tâches spécifiques**.

On observe un **retour de la logique mathématique**, qui avait été écartée dans les précédents programmes : « les problèmes de logique mathématique concernent essentiellement l'implication et l'équivalence, la manipulation de contre-exemple, le ou et le et. Il ne s'agit pas bien sûr de faire des cours de logique formelle, mais on n'hésitera pas à aborder les problèmes de logique lorsqu'ils se présentent notamment lors du travail écrit. On n'oubliera pas qu'au collège, seule l'implication est utilisée: toute équivalence logique y est formulée en deux énoncés séparés en termes de si... alors... ; en seconde, on abordera le si et seulement si [...] on insistera sur le fait que la seule exhibition d'un contre exemple suffit à démontrer qu'une propriété est fausse et que si elle porte sur un ensemble infini, aucune liste finie de cas où elle est vraie n'en constitue une démonstration ». [p.4-5] Les quantificateurs ne sont cependant pas au programme. On note la mise en garde contre l'argument d'induction qui n'est pas un argument de nécessité. A propos du cahier de statistique, il est noté que le travail sur l'argumentation en mathématiques **contribue au travail sur l'argumentation en français** : « la production d'un texte écrit est en soi un élément

formateur ; un tel cahier, où se mêlent texte écrit et représentations graphiques, présentant des éléments narratifs et des argumentations, s'inscrit de plus dans le cadre du nouveau programme de français des élèves de seconde » [p.13]. En géométrie il faut « *prendre du temps* pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes - en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration) » [p.11]

3.3.4.2 classe de première S

Programme :

Observation, abstraction, expérimentation, démonstration sont les quatre composantes essentielles de toute pratique mathématique et entretiennent entre elles des rapports dialectiques.

L'expérimentation permet « de trouver d'éventuels contre-exemples; de comprendre comment la question se résout dans des cas particuliers et en quoi les arguments valables se généralisent ou non ; de faire des conjectures sur des questions voisines » [p.168].

L'élève doit concevoir la globalité d'une démonstration avant d'entrer dans les détails, ce qui semble valoriser la **fonction d'explication globale** qui rend intelligibles les liens entre les données et la conclusion alors que l'analyse des détails, étape par étape, ne permet pas d'entrer dans l'aperçu global des liens : « Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes, a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France » [p.168].

La **fonction de vérification**, avec le choix entre arguments sémantiques ou arguments formels, et la **fonction de communication discursive à l'écrit** sont également mises en valeur, en précisant que le degré de rigueur exigée est variable selon les classes, selon les domaines, ou selon le contexte de l'activité (conception ou rédaction), ce qui montre l'existence d'un contrat didactique : « Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe: ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées: la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes [...] La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction $x \rightarrow x^2 + 1$ est à valeurs positives). C'est à l'enseignant de

guider au coup par coup cette évolution délicate. Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important d'une formation scientifique. La rédaction est l'occasion de revenir sur un raisonnement, de le remodeler, de le rendre plus rigoureux et esthétique, de chercher les meilleures notations, de dégager les idées essentielles de l'aspect technique; c'est ainsi que pour l'élève, des connaissances éparses se fondent en un ensemble cohérent de savoirs, et que se développent des compétences mathématiques fines. Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques » [p.168]

Le **recours à différents registres de représentation** est encouragé, en mettant en valeur clairement le **statut des énoncés** : « Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde: repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,...) » [p.168].

« La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale » [p.168], ce qui montre l'enseignement de **nouveaux types de raisonnement**.

En géométrie, les technologies des vecteurs, des transformations et des configurations du plan et de l'espace sont mobilisées. « La géométrie élémentaire est une école de pensée: on veillera à allier observations (à l'aide de logiciels de géométrie dynamique notamment) et mise en évidence des démarches et des propriétés des objets étudiés permettant de confirmer ou d'infirmer ces observations; on prendra soin aussi de construire des îlots déductifs consistants et d'aborder divers types de raisonnements formateurs; on incitera à la réflexion sur différents niveaux d'explicitation d'une démonstration » [p.171]. On voit ici la valorisation de la **fonction de systématisation dans le cadre de théories locales**.

En analyse, les arguments intuitifs ou utilisant le registre graphique sont recommandés : « on se contentera donc d'une approche intuitive des limites finies en un point à travers la notion de dérivée. Pour les autres types de limites (limite infinie, limite à l'infini), on gardera de même une vision intuitive. Par contre, un travail plus approfondi est proposé sur la notion de limite d'une suite, plus facile à aborder que celle de limite d'une fonction en un point: l'objectif est ambitieux, il convient cependant de rester raisonnable dans sa mise en oeuvre et de privilégier les raisonnements à support graphique » [p.173].

Des théorèmes sont à démontrer (par exemple la formule d'Al Kashi²⁶⁷, le théorème de la médiane, le théorème des « gendarmes »²⁶⁸) ou admis (par exemple les théorèmes sur la somme, le produit ou le quotient des suites convergentes).

²⁶⁷ Pour tout triangle ABC : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AC \times \cos(A)$.

²⁶⁸ Une suite encadrée par deux suites convergeant vers la même limite, converge vers cette limite.

Document d'accompagnement :

Ce document contient un long paragraphe de quatre pages « à propos de la démonstration » dans lequel sont développés des exemples de situation d'enseignement relatifs à la démonstration.

Un lien appuyé avec les autres formes d'argumentation est effectué : « Observons tout d'abord que les moyens d'expression de la pensée mathématique sont variés. D'ailleurs, un certain nombre d'entre eux ne sont pas propres aux mathématiques : argumenter, convaincre, etc. et se retrouvent aussi bien dans la dissertation en français, en philosophie ou en histoire que lors de travaux en sciences expérimentales. Par ailleurs, dans toutes les disciplines, c'est la même langue que l'on utilise, avec ses règles syntaxiques, ses mots de liaison logique » [p.50]. L'enseignement de la démonstration participe à l'enseignement de l'argumentation, et remplit une fonction de communication dans sa dimension sociale.

La **fonction d'explication** dans l'accès à la compréhension est également évoquée, avec une mise en valeur des arguments visuels ou graphiques : « notamment en analyse, on se contentera d'argumentations visuelles ou graphiques, convaincantes et révélatrices d'une bonne compréhension du problème posé » [p.50].

La fonction de communication discursive dépend d'un contrat de rédaction : « Démontrer, c'est aussi calculer en respectant des règles. En analyse [...] on peut ensuite dégager un certain nombre de règles opératoires qui seront directement mises en oeuvre dans les calculs de limite. S'il convient de dire aux élèves que ces règles correspondent à des théorèmes démontrables dans un cadre formel qui sera développé ultérieurement, **il n'y a pas lieu d'en justifier systématiquement l'emploi**²⁶⁹ » [p.50].

Trois exemples sont proposés pour illustrer des registres différents de rédaction. Un premier exemple développe une démonstration linéaire achevée, exprimée dans le **registre de la langue** naturelle mêlée de quelques éléments de langue symbolique [p.51]. On y observe que les théorèmes appliqués ne sont pas explicitement cités, y compris quand ils ne sont pas des règles opératoires. Par exemple considérons l'extrait suivant : « le triangle DEF (lorsqu'il existe) est donc rectangle en D ; on en déduit que [EF] est un diamètre de C » [p.51] où E, F et D sont des points d'un cercle C. Le théorème « dans un triangle rectangle l'hypoténuse est diamètre du cercle circonscrit au triangle » n'est pas cité bien qu'appliqué. On voit donc que l'achèvement de la démonstration est un concept relatif.

Un second exemple utilise le **registre graphique des tableaux**.

« Supposons que l'étude des variations d'une fonction permette d'aboutir au tableau de variations suivant.

²⁶⁹ Nous avons mis en gras ce passage.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f(x)$	1	-1	$+\infty$	5	$-\infty$

On convient que le tableau de variations est une forme stylisée de représentation graphique : le plus souvent, elle pourra suffire au niveau des productions des élèves, sauf cas particuliers mettant en jeu des tangentes, asymptotes ou autres courbes indispensables pour la bonne réalisation de l'étude. La calculatrice graphique donnera un tracé plus précis. On suppose par cette convention qu'il n'y a pas de « sauts » dans la courbe représentative sur un intervalle donné (notion intuitive de continuité qui sera précisée en terminale) et qu'une flèche inclinée correspond à une stricte monotonie. On pourra alors en déduire sans discours supplémentaire :

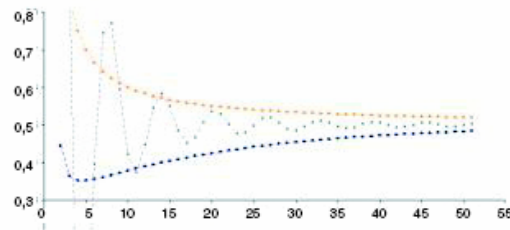
- des encadrements d'images ; - le nombre de zéros de f » [p.51-52].

On notera la mise en place d'un contrat implicite : la fonction représentée dans le tableau est une fonction continue, et la flèche inclinée représente une stricte monotonie. On voit ici le développement de techniques reposant sur le registre des tableaux de variations. Ici l'élève ne dispose pas encore de notion de continuité. Cette absence était remplacée, par exemple pour résoudre une équation fonctionnelle, par un théorème admis du type : « si f est dérivable sur $[a,b]$ avec $a < b$, si f' est de signe constant sur $[a,b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors pour tout élément m de $[f(a) ; f(b)]$, l'équation $f(x)=m$ admet une solution et une seule sur $[a ; b]$ ». Le programme de première S précise d'ailleurs : « À propos du théorème "Si f est dérivable sur $[a;b]$, , l'équation $f(x) = m$ admet une solution et une seule dans $[a; b]$ ": sur chacun des intervalles où une fonction f est définie et dérivable, ce théorème permettra de déduire directement d'une lecture du tableau de variations, l'existence et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = l$. On pourra faire remarquer aux élèves la "continuité" de la fonction sur chaque intervalle concerné (au sens intuitif d'absence de trou) ». La technique de recours au tableau ne masque pas une absence de technologie disponible, puisqu'il existe un théorème disponible que nous venons de citer. Cette technique vise à simplifier la formulation habituelle dans le registre du langage naturel ou symbolique. Ceci rappelle le recours au registre des arbres dans le domaine des probabilités.

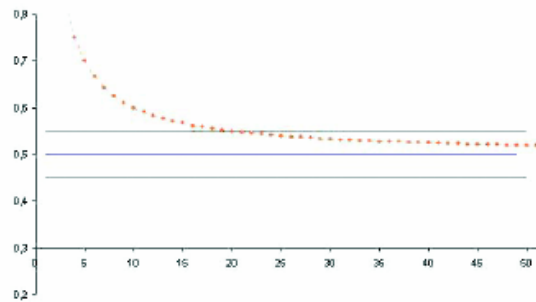
Le troisième exemple illustre la « démonstration graphique » du théorème des gendarmes.

« On sait que (u_n) et (v_n) ont une même limite l (ici $l = 0,5$) et que, à partir d'un certain rang, w_n est encadré par u_n et v_n (ici $u_n < w_n < v_n$ à partir du rang 14). On veut prouver que (w_n) a aussi pour limite l , c'est-à-dire que, quel que soit le « tuyau » centré sur la droite d'équation $y = l$, tous les w_n finissent par rentrer dans ce « tuyau ». Ce qui suit (textes et dessins associés) peut être considéré comme une «**démonstration graphique**» (cela constitue une première approche de la définition en termes de N et ε qui sera amenée dans l'enseignement post-baccalauréat) : une telle démonstration suffit à ce niveau. *Les dessins réalisés ici à l'aide d'un tableur peuvent être remplacés par des croquis faits à la main (on pourrait se contenter d'un seul des deux dessins 2 et 3).*

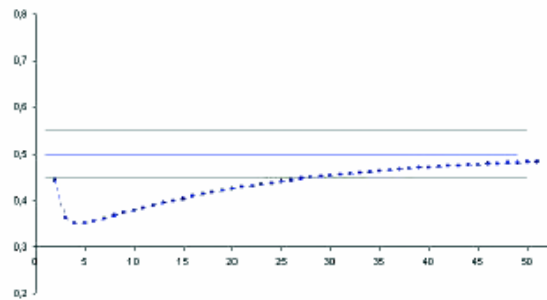
1 – La suite (w_n) — en noir — est encadrée à partir d'un certain rang (le rang 14) par la suite (u_n) — en orange — et par la suite (v_n) — en bleu.



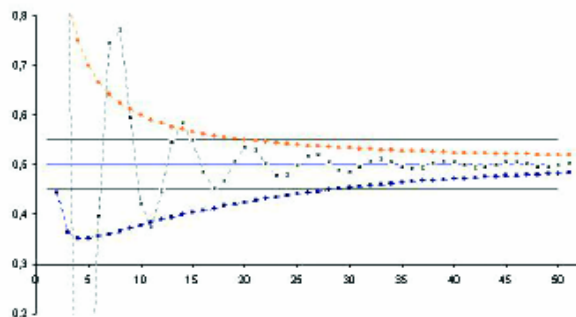
2 – On se donne un « tuyau » centré sur $l = 0,5$ (ici c'est le « tuyau » $]0,45 ; 0,55[$).
À partir d'une certain rang (ici 20), tous les u_n rentrent dans le tuyau (car (u_n) converge vers l).



De même, à partir d'un certain rang (ici 30), tous les v_n rentrent dans le tuyau (car (v_n) converge vers l).

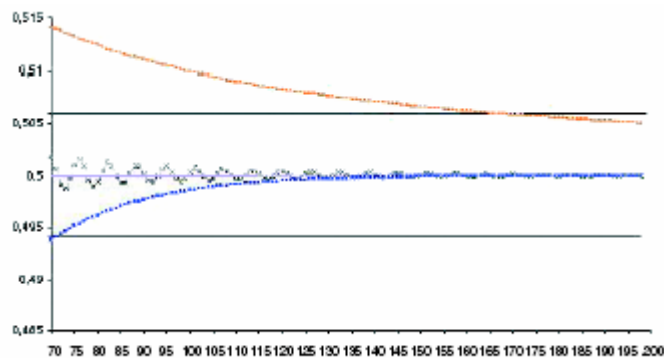
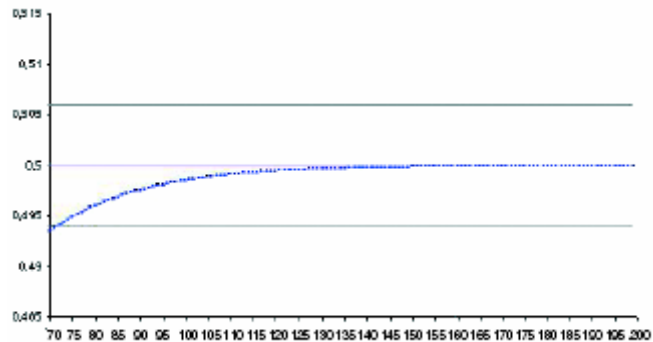
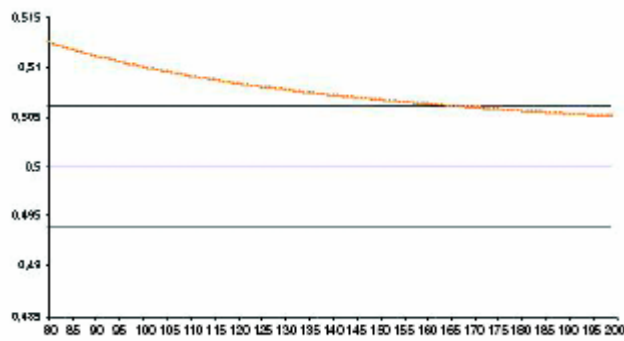


D'où, à partir d'un certain rang (le rang 30), tous les w_n rentrent dans le tuyau.



3 – Ceci marche pour n'importe quel « tuyau », par exemple pour le « tuyau plus fin » $]0,495 ; 0,505[$.

Remarque : l'intérêt de ce deuxième tuyau est bien sûr heuristique et non logique.



... » [p.53].

Dans le dernier exemple, la fonction d'explication est valorisée au détriment de la fonction de preuve. Le recours au graphique dans une démonstration peut rencontrer une opposition chez certains enseignants comme l'a mis en évidence [Antibi 1997, p.492]. On peut considérer que cet exemple tente d'illustrer la mise en place d'un nouveau contrat implicite dans lequel le recours au graphique est autorisé sous les conditions suivantes:

- l'enseignant sait qu'il existe une démonstration formelle et les élèves font confiance sur ce point à l'enseignant ; la validation graphique est une conversion, dans le registre graphique, de la validation formelle.
- la représentation graphique est une préparation à un formalisme ultérieur (ici l'approche ultérieure des limites en N et ϵ) ; on retrouve une fonction propédeutique de la validation.

Par rapport à l'exemple précédent où un théorème justificatif était disponible chez les élèves, ce n'est pas le cas ici. Ceci explique le recours momentané aux arguments graphiques.

Pour ce qui concerne les situations d'évaluation, le recours au graphique ne fait pas encore l'objet d'un contrat clair suggéré par les textes officiels alors que pour les arbres de probabilité les textes²⁷⁰ autorisent clairement ce recours dans les situations d'évaluation.

3.3.4.2.3 classe de terminale S

Programme :

Le contrat sur les **théorèmes admis ou démontré**, ainsi que sur les **règles opératoires** est à nouveau précisé : « Certains théorèmes du programme sont admis. Il convient alors d'en faire assimiler le contenu en montrant comment ils s'appliquent, et en considérant éventuellement des cas particuliers dont on peut faire la démonstration. Certaines propriétés sont considérées comme règles opératoires (par exemple, si deux fonctions admettent une limite en un point, la limite de leur somme est la somme de leurs limites). Dire qu'une propriété est utilisée comme règle opératoire signifie qu'on n'est pas tenu d'en justifier l'usage dans une démonstration ou dans un calcul » [p.65].

Par exemple le théorème « des gendarmes » pour les fonctions est démontré, le théorème des valeurs intermédiaires est démontré ou admis, et les propriétés générales de l'intégrales ou la formule de l'espérance sont admises.

Concernant le registre graphique des arbres, « un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve » [p.70].

En géométrie, « on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique) » [p.69], ce qui valorise la **fonction de systématisation** (application des théorèmes connus) et la **fonction de découverte** (savoir utiliser pour prouver nouveau résultat).

Les **arguments intuitifs** continuent d'être évoqués à propos des limites ou pour l'interprétation des propriétés des intégrales en terme d'aire.

²⁷⁰ Le Bulletin Officiel hors série n°4 du 30 août 2001 précise dans le programme de Terminale S : « un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve » [p.70].

Document d'accompagnement :

La **fonction d'explication** est signalée : « L'objectif premier de la démonstration est d'amener à l'évidence et de rendre nécessaire la proposition que l'on veut énoncer. À ce niveau d'enseignement, la démonstration est toujours un compromis : compromis entre les impératifs logiques du discours formalisé (décrits par N. Bourbaki dans son introduction à la théorie des ensembles) et le souci de rendre compréhensible et claire la marche des idées. C'est à un tel compromis que fait référence la diversité des mots utilisés dans le programme pour décrire les modalités de mise en oeuvre. Que l'on *démontre, montre, justifie...*, il s'agit toujours d'entraîner l'adhésion intellectuelle par une voie du type démonstration, donc avec rigueur, mais avec des degrés de formalisation adaptés aux élèves. Dans certains cas, le compromis amènera à admettre certains théorèmes : cela sera alors dit clairement ; mais énoncer et admettre un théorème supposent toujours que celui-ci soit expliqué et que les élèves en comprennent le sens et la portée » [p.28].

Tableau synthétique des contenus des programmes par classe et par domaine :

Pour pouvoir comparer les différents moments où sont introduits les différents éléments des programmes nous produisons le tableau suivant qui ne concerne, pour les classes de première et terminale, que la filière scientifique, avec spécialité mathématiques pour la terminale. Ce tableau pourra être comparé au tableau correspondant du Bade-Wurtemberg²⁷¹.

²⁷¹ Voir §3.2.1.3.2

	Nombres et analyse	Géométrie	Autre
sixième	<p>Nombres et calcul numérique. Écriture décimale et opérations. Division par un entier et valeur approchée. Écritures fractionnaires du quotient de 2 entiers. Calcul littéral. Substitution de valeurs numériques dans une formule. Application d'un pourcentage. Étude de situations relevant ou non de la proportionnalité. Lecture et réalisation de tableaux, de graphiques.</p>	<p>Parallélepède rectangle : description, représentation et patrons. Dans le plan, transformation de figures par symétrie axiale : construction d'images, construction de figures simples ayant un axe de symétrie, énoncé de propriétés. Reproduction de figures planes simples. Abscisses positives sur une droite graduée. Repérage dans le plan par des entiers relatifs.</p>	<p>Statistiques : Exemples conduisant à lire et établir des relevés statistiques sous forme de tableaux ou de représentations graphiques, éventuellement en utilisant un ordinateur.</p>
cinquième	<p>Expressions numériques. Produit de deux fractions. Comparaison, somme et différence de deux fractions. $k(a + b)$; $k(a - b)$ Test par substitution de valeurs dans une expression littérale Mouvement uniforme. Reconnaissance et mise en oeuvre de la proportionnalité.</p>	<p>Prismes droits, cylindres de révolution : description, représentation et patrons. Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale. Parallélogramme ; caractérisation angulaire du parallélisme. Cercle circonscrit. Repérage sur une droite graduée et dans le plan. Somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire. Aire du parallélogramme, du triangle, du disque.</p>	<p>Statistiques : Lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques. Diagrammes à barres, diagrammes circulaires. Classes, effectifs. Fréquences.</p>
quatrième	Opérations sur les relatifs en écriture décimale ou	Pyramide et cône de révolution. Translation.	Statistiques : Effectifs cumulés, fréquences

fractionnaire.
 Puissance d'un exposant entier ou relatif.
 Touches , cos, 1/x de la calculatrice.
 Développement d'expressions.
 Effets sur l'ordre de + et de _.
 Équations du premier degré.
 Vitesse moyenne.
 Applications de la proportionnalité.
 Initiation à l'usage de tableursgraphes.

Milieux et parallèles dans un triangle, triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes ; droites remarquables.
 Cercle et triangle rectangle.
 Alignement de points et proportionnalité.
 Distance d'un point à une droite et tangente à un cercle.
 Pythagore et sa réciproque.
 Cosinus d'un angle aigu.

cumulées.
 Moyennes pondérées.
 Initiation à l'usage des tableurs graphes.
 Valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.

troisième

Calculs comportant des radicaux.
 Exemples d'algorithmes simples ; application numérique sur ordinateur.
 Fractions irréductibles.
 Factorisation (identités)
 Problèmes se ramenant au premier degré
 Systèmes d'équations à 2 inconnues
 Effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des aires et des volumes.
 Fonctions linéaires et affines.

Sections d'une sphère ; d'un cube,
 d'un parallélépipède rectangle,
 d'un cône de révolution, d'une pyramide dans des cas simples.
 Polygones réguliers.
 Transformation de figures par rotation ; composition de symétries centrales ou de translations.
 Théorème de Thalès et réciproque.
 Vecteurs : somme de 2 vecteurs.
 Coordonnées du milieu d'un segment, d'un vecteur ; distance de deux points à partir de leurs coordonnées.
 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle.

Statistiques :
 Caractéristiques de position d'une série statistique.
 Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique.
 Initiation à l'utilisation des tableurs graphes en statistique.

Nombres et analyse

Géométrie

Autre

seconde

Nature et écriture de nombres.

Géométrie dans l'espace : positions relatives de plans et

Statistiques :

	<p>Nombres premiers.</p> <p>Ordre des nombres, valeur absolue.</p> <p>Fonctions : Croissance, extremum. Fonctions de référence : linéaire, affine, carrée, inverse, sin, cos.</p> <p>Mise en équation : résolution graphique et algébrique.</p>	<p>droites. Orthogonalité.</p> <p>Configurations du plan.</p> <p>Triangles isométriques, de même forme.</p> <p>Repérage dans le plan. Multiplication d'un vecteur par un réel.</p> <p>Equations de droite.</p> <p>Système d'équations linéaires.</p>	<p>résumé numérique (moyenne, médiane, mode, étendue).</p> <p>Distribution de fréquences.</p> <p>Simulation et fluctuation d'échantillonnage.</p>
première scientifique	<p>Opérations sur les fonctions, polynômes, variations, composée.</p> <p>Equation du 2nd degré. Signe d'un trinôme.</p> <p>Dérivation en un point, d'une fonction ; tangente ; dérivées usuelles ; opérations sur les dérivées, lien avec les variations.</p> <p>Asymptotes.</p> <p>Suites, arithmétique, géométrique.</p> <p>Limite infinie d'une suite, convergence.</p>	<p>Sections planes</p> <p>Sections planes d'un cube, d'un tétraèdre.</p> <p>Repérage</p> <p>Repérage polaire dans le plan et trigonométrie; mesure principale, relation de Chasles, lignes trigonométriques des angles associés.</p> <p>Repérages cartésiens dans l'espace. Distance entre deux points dans un repère orthonormal.</p> <p>Applications du produit scalaire.</p> <p>Transformation : translation, homothéties, effets sur barycentres, alignements, angles, grandeurs, figures.</p> <p>Lieux géométriques dans le plan.</p>	<p>Statistiques :</p> <p>Statistiques :</p> <p>ariance, écart-type, diagrammes en boîte, interquartiles.</p> <p>Probabilités sur un ensemble fini : loi, espérance, variance, écart-type, événements, probabilité d'une réunion ou d'une intersection d'événements. Modélisation.</p>
Terminale scientifique	<p>Rappel de la définition de la limite d'une suite. Extension à la limite finie tend vers $+\infty$, $0-\infty$.</p> <p>Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a.</p> <p>Théorème "des gendarmes" pour les fonctions.</p> <p>Limites de la somme, du produit, du quotient de deux suites ou de deux fonctions ; limite de la composée de deux de la composée d'une suite et d'une fonction.</p> <p>Continuité. Théorème des valeurs intermédiaires.</p> <p>Dérivée : application à l'étude des tangentes. Dérivation d'une fonction composée.</p> <p>Fonctions exponentielle, logarithme, comportement</p>	<p>Le plan complexe. Coordonnées polaires.</p> <p>Produit scalaire dans l'espace. Equation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormal. Distance. Caractérisation barycentrique des droites et plans : représentation paramétrique. Intersection.</p>	<p>Probabilité :</p> <p>conditionnement et indépendance.</p> <p>Combinaisons. Lois de binomiale.</p> <p>Loi uniforme, loi de durée de vie sans vieillissement.</p> <p>statistiques et simulation.</p>

asymptotique, croissance comparée des exponentielles, logarithmes et puissances. Racine n-ième.

Suites : raisonnement par récurrence.

Suites monotone, majorée, minorée.

Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.

Théorème de convergence des suites croissantes majorées.

Intégration : valeur moyenne, linéarité, inégalité de la moyenne.

Primitive, existence, intégration par parties,.

Equation différentielle linéaire.

spécialité

Arithmétique : divisibilité, pgcd, ppcm, nombres premiers, théorèmes de Bezout et Gauss.

Similitudes planes.
Sections planes de surfaces.

En résumé :

La démonstration est un objet d'enseignement dans tout le lycée. La fonction de communication est valorisée dans ses dimensions sociale et discursive, principalement à l'écrit. Les technologies mathématiques se développent, notamment dans le domaine de la logique, pour servir la fonction de preuve, alors que les technologies de plausibilité servent la fonction de découverte notamment en seconde. Cependant en première et terminale S, des arguments intuitifs sont utilisés dans les domaines où le formalisme de la technologie mathématiques est insuffisant ou trop lourd (par exemple pour les limites). Les arguments sémantiques, avec notamment recours au registre graphique, sont parfois utilisés pour alléger la rédaction. Un important travail sur le statut des énoncés et sur les différents registres de représentation, est demandé. La fonction d'explication est considérée dans l'accès à la globalité d'une démonstration et dans la valorisation des arguments intuitifs. Des règles de contrats sont proposées (rapport à la rigueur, exigences de rédaction, registres graphique, des tableaux, ...). La résolution de problèmes permet de travailler la fonction de systématisation, ainsi que la démonstration des théorèmes de cours, dans le cadre de théories locales, quand ils ne sont pas admis.

3.4 Conclusions

3.4.1 La démonstration en Bade-Würtemberg

On observe que **la démonstration n'est pas un objet d'enseignement de la Hauptschule et de la Realschule**. Les élèves y rencontrent des validations utilisant principalement des arguments de plausibilité et des arguments pragmatiques. Les arguments formels sont apparemment absents. **La preuve est un objet paramathématique de la Realschule** au sens de Chevallard [1985 p.49-50]: « A côté de ces « notions mathématiques » désignées ci-dessus se rangent des notions qu'on peut dire « *paramathématiques* » : par exemple, la notion de paramètre, la notion d'équation, la notion de démonstration. Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'études pour le mathématicien [...] Seuls les objets de savoir sont pleinement des candidats à être des objets d'enseignement. Les notions paramathématiques, par exemple, ne font pas l'objet d'un enseignement ; ce sont des objets de savoir « auxiliaire » nécessaire à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus »), mais ils ne sont pas « enseignés » selon le plan d'enseignement des notions mathématiques ». Il n'y a pas d'indication sur le fait que l'élève doit apprendre à produire des preuves. Il semblerait que seul le professeur produise des preuves en situation de classe, éventuellement dans un travail collectif avec les élèves. Mais aucune indication ne le précise.

Par contre **la démonstration est un objet d'enseignement de Gymnasium** dès les programmes de 1971. La référence à cet enseignement apparaît explicitement en classe 8 sous la forme d'un paragraphe dans le corps du programme et en classe 9 sous la forme d'une unité d'enseignement. De plus, des références ponctuelles apparaissent à l'occasion dans l'exposé des contenus du programmes ou des objectifs, de la classe 5 à la classe 13.

On observe une explicitation et un discours plus expansif²⁷² accordé à la preuve et à la démonstration. **L'étude diachronique**, des programmes de 1971 aux programmes à venir, montre un déplacement de la preuve dans l'enseignement des mathématiques, transposée de la démonstration mathématique, centrée sur ses fonctions de vérification et de systématisation, à la preuve dans l'enseignement des mathématiques, élément d'une formation sociale qui intègre d'autres formes de validation comme l'argumentation, et d'autres formes de raisonnement comme le raisonnement de plausibilité, centrée sur ses **fonctions d'explication**

²⁷² Nous songeons à l'expansion, à une même période, dans les programmes de Gymnasium par rapport à ceux de Realschule ou Hauptschule. Pour ce qui est de l'expansion dans le temps, celle-ci ne peut préjuger d'une importance croissante de la preuve. On remarque en effet une expansion générale des programmes dans le temps, avec des considérations générales et des commentaires plus abondants, peut-être liée à l'importance de la communication dans un enseignement de masse.

et de communication. Dans ce déplacement les arguments formels ne sont pas toujours les arguments préférables : **les arguments de plausibilité, les arguments pragmatiques et les arguments sémantiques sont valorisés**, y compris dans le cycle supérieur (Oberstufe).

Un principe didactique semble mis en évidence : **le principe de renoncement au formalisme** qui consiste à renoncer à un argument formel dans les cas suivants. Soit la limitation est cognitive : par exemple la complexité d'une axiomatisation de la géométrie euclidienne ne serait pas accessible à un certain âge. Soit l'argument formel n'est pas mobilisable pour des raisons de constitution du programme qui l'a rejeté à plus tard²⁷³. Soit pour des raisons didactiques : l'argument formel est mobilisable, mais ne sert pas la fonction d'explication de la validation. Dans ce cas on lui substitue un autre argument estimé remplir la fonction d'explication. La plupart du temps, il s'agit d'arguments de plausibilité, d'arguments pragmatiques ou d'arguments sémantiques, utilisant souvent les registres matériels ou graphiques.

Il n'y a aucune indication de théorèmes à admettre. Quitte à utiliser des arguments de plausibilité ou sémantiques, une validation s'opère pour remplir sa fonction de systématisation, parfois dans une dimension élémentaire ou contemplative.

Les indications sur les activités dans lesquelles l'élève produit des démonstrations sont assez rares :

- travail autonome de l'élève pour développer l'idée de preuve sur le centre de gravité ou l'orthocentre en classe 8,
- travail, individuel ou en groupe, pour chercher des arguments et démontrer dans l'unité correspondante de classe 9,
- exploitation autonome du livre à propos des démonstrations sur les aires et volumes en classe 10,
- conduite autonome de démonstrations pour les théorèmes de géométrie métrique en classe 12 et 13.

3.4.2 La démonstration en France

Dans les programmes de 1996 la démonstration apparaît explicitement comme objet d'enseignement au cycle central (cinquième-quatrième) du collège.

Au collège, l'analyse diachronique montre que c'est d'abord la démonstration qui est désignée comme objet d'enseignement, ensuite c'est le raisonnement déductif qui devient l'objet

²⁷³ Par exemple parce qu'on ne peut pas traiter tout en même temps.

d'enseignement tandis que la démonstration est un objet paramathématique, enfin la démonstration redevient objet d'enseignement. Mais entre les deux moments, elle passe d'objet transposée de la démonstration mathématique savante, basé sur la logique et l'axiomatique, à un objet d'enseignement, basé sur des arguments divers : pragmatiques, intuitifs, sémantiques, formels.

Alors qu'au début ce sont essentiellement les fonctions de vérification de la preuve, de communication discursive et de systématisation locale qui étaient valorisées, maintenant les **fonctions de découverte, d'explication et de vérification de la plausibilité sont également valorisées.**

Les arguments pragmatiques ou intuitifs, au début limités à la phase d'initiation au raisonnement déductif, ou à la fonction de découverte heuristique, aident maintenant à remplir les **fonctions d'explication globale et de vérification de la plausibilité.**

De même, alors qu'au début la fonction de communication discursive était soutenue essentiellement par des arguments formels, maintenant des **arguments sémantiques ou intuitifs et des registres non linguistiques** y participent. On va jusqu'à parler de « démonstration graphique » ou de « démonstration empirique ».

La fonction de systématisation est assurée dans les activités de résolutions de problèmes, par utilisation des théorèmes déjà démontrés ou admis, plus que dans la démonstration des théorèmes de cours, qui est à éviter si elle n'aide pas à la compréhension du théorème ou pour laquelle une démonstration intuitive peut remplacer une démonstration formelle. Concernant les théorèmes admis, ils peuvent l'être d'après le **principe du théorème admis** : un théorème est admis si sa démonstration apporte peu.

Le contrat précisant les normes de rédaction d'une démonstration est très variable suivant le contexte : classe, domaine, fonction de la démonstration (par exemple explication globale ou vérification de la nécessité).

3.4.3 Comparaison franco-allemande

Alors que le Bade-Wurtemberg s'oriente vers une filière unique en Gymnasium pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, la France parle de différencier sa filière collège et différencie les programmes de mathématiques en trois séries, à leur tour différenciées en enseignement de base et enseignement optionnel. **On va donc vers un enseignement unique**

de la preuve en Bade-Wurtemberg et, au contraire, vers un enseignement différencié en France.

Dans les deux pays **la démonstration commence à être un objet d'enseignement à la même période, en classe 8 allemande et au cycle central français.** Cette apparition est progressive.

Par contre **la première apparition d'une technologie mathématique donnée peut varier considérablement d'un pays à l'autre.**

Thème technologique	Première validation en France	Première validation en Bade-Wurtemberg	Domaine et commentaire
Somme des angles d'un triangle	Cinquième	7	Géométrie Avant la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles
Périmètre et aire du cercle	Sixième et cinquième	10	Grandeurs Avant en France
Théorème de Pythagore	Quatrième (puis seconde)	9	Géométrie Après la leçon sur la démonstration avant en France
Théorème de Thalès	Troisième (puis seconde)	9 (puis 12-13)	Géométrie Après la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles
Variation des fonctions	Seconde	11	Fonctions Après la leçon sur la démonstration avant en France

Equations du second degré	Première S	9	Equations Après la leçon sur la démonstration Après en France
Triangles isométriques	Seconde	8	Géométrie Après la leçon sur la démonstration après en France
Triangles semblables	Seconde	9	Géométrie Après la leçon sur la démonstration Après en France
Formules de volume	Collège (puis terminale)	10 (puis 12-13)	Grandeurs avant en France
Différentiabilité	Première S	11	Analyse Après la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles

Quelques éléments de contrat apparaissent :

- le principe de renoncement au formalisme, appliqué dans chaque pays pour mieux servir la fonction d'explication,
- le principe du théorème admis, qui semble énoncé seulement en France.

Pour ce qui concerne les différentes fonctions de la démonstration, concernant le contexte actuel, **la filière unique de Gymnasium permet d'aborder la fonction de systématisation dans sa dimension globale, alors que la fonction de systématisation est évoquée, dans les programmes français dans sa dimension locale (« îlots déductifs, application d'un théorème »).** Ceci confirme les conclusions du chapitre précédent.

La fonction découverte peut être propédeutique en Bade-Wurtemberg, alors qu'elle est plutôt heuristique en France, ce qui confirme la conclusion du chapitre précédent. On peut

remarquer cependant l'apparition de cette fonction propédeutique en France, par exemple à propos de la validation du théorème des gendarmes en première S.

La fonction de **communication** discursive est très importante et motive une part importante des activités en **France**, donnant une **importance à la rédaction écrite**. On retrouve partiellement la conclusion du chapitre précédent concernant la fonction de communication discursive en France.

Cependant les conclusions du chapitre précédent sur les fonctions de la démonstration doivent être nuancées à la lecture des programmes récents : en effet nous avons observé que toutes les fonctions sont évoquées dans les programmes de chaque pays.

Il est vrai que les **arguments pragmatiques ou sémantiques** semblent plus valorisés que les arguments formels **en Bade-Wurtemberg**, notamment compte tenu des nouveaux programmes à partir de 1999. Par contre **en France** on observe une évolution quant à la valorisation des arguments formels. Alors que dans la progression du collège vers le lycée, les arguments pragmatiques très présents en début de collège étaient progressivement abandonnés dans les précédents programmes au profit d'arguments plutôt formels, on voit dans les programmes de lycée de 2000 un **renouveau des arguments sémantiques** (avec recours à différents registres non langagiers : tableau, graphique, arbre, figure). Il est possible d'une part que ce fait récent au lycée n'ait pas pu être observé par les chercheurs cités précédemment. Il est également possible que la distance entre le curriculum officiel et le curriculum réel fasse qu'aucune observation de cette évolution récente des textes officiels ne soit encore observable.

Nous allons maintenant examiner, au travers de manuels scolaires, si nos analyses de programmes sont mises en œuvre, et si oui, comment.

4 Etude de la validation dans des manuels de classe.

4	Etude de la validation dans des manuels de classe.....	264
	Organisation du chapitre 4	265
4.1	Motivation et protocole de l'étude	266
4.2	La démonstration comme thème d'étude	268
4.2.1	Protocole particulier d'étude	268
4.2.2	En France.....	269
4.2.3	En Bade-Wurtemberg.....	278
4.2.4	Comparaison.....	283
4.3	La validation de théorèmes de cours	286
4.3.1	Motivation et protocole d'étude	286
4.3.2	La somme des angles d'un triangle	288
4.3.3	La mise en garde contre le recours à la figure.....	300
4.3.4	Le périmètre et l'aire du cercle	304
4.3.5	Le théorème de Pythagore.....	315
4.3.6	Autres rencontres avec des preuves du théorème de Pythagore.....	323
4.3.7	Variation de la fonction élévation au carré	328
4.3.8	Equations et inéquations du second degré.....	332
4.3.9	Théorème de Thalès	336
4.3.10	Volumes de solides usuels.....	341
4.4	Conclusion.....	342

Organisation du chapitre 4

Après avoir précisé la motivation et le protocole de l'étude (4.1) nous étudions dans des manuels la démonstration comme thème d'étude (4.2), en France (4.2.2) et en Bade-Wurtemberg (4.2.3).

Nous étudions ensuite dans des manuels de classe la validation de théorèmes de cours (4.3). Différents théorèmes de cours sont sélectionnés et, pour chaque pays, une validation issue d'un manuel de classe, est proposée. Ces validations sont alors comparées.

Nous concluons (4.4) en comparant chaque pays sur les deux niveaux d'étude précédents.

4.1 Motivation et protocole de l'étude

[Balacheff 1982, p.266] rappelle que, si les textes officiels déterminent la transposition didactique, « les manuels scolaires, quant à eux, constituent autant de réalisations de cette transposition, ils peuvent de ce fait introduire de nouvelles transformations en particulier de par leur double finalité d'exemple pour l'enseignant, et d'outil pour l'élève ». [Pepin 2001, p.158, trad. R.C.] rappelle que l'étude des manuels scolaires permet de « soulever d'importantes questions à propos des manuels scolaires comme représentations du curriculum et à propos de leur rôle comme lien entre curriculum et pédagogie »²⁷⁴. Les résultats des recherches de Pepin montrent que les structures des manuels de classe « en France et en Allemagne sont assez différentes. Par exemple, les manuels de classe français sont structurés d'une manière très particulière. Premièrement, ils sont habituellement divisés en trois parties en accord avec la structure des programmes : nombres et algèbre ; statistiques ; et géométrie. Chaque chapitre est alors divisé en trois parties : activités ; l'essentiel ; exercices. Les activités sont de petites recherches, des activités pratiques ou collectives (quelquefois à la frontière des exercices) dont l'intention est d'introduire les élèves à une notion. L'essentiel correspond à la partie essentielle qui a besoin d'être enseignée et comprise, avec des mots ou sur des exemples traités. Ceci est souvent mentionné comme le cours. La troisième partie concerne les exercices, quelquefois gradués par de ordre de difficulté [...] Dans les manuels scolaires allemands, après une courte partie avec des exercices introductifs sélectionnés et le principal message ou formule suivi par des exemples traités, la majorité des parties consistent en des exercices [...] Les professeurs français, par exemple, utilisaient le manuel pour des explications, mais « insistaient » pour donner les règles et le contenu de la leçon (cours) sans le livre, et de façon différente. Les professeurs allemands ont délibérément utilisé des exemples traités différents de ceux du livre, de manière à enclencher une discussion de classe sur les problèmes qui pourraient être rencontrés [...] La plupart des professeurs français et allemands disaient utiliser leur livre à chaque leçon, et déclaraient que les manuels scolaires étaient l'une de leurs principales ressources, en comparaison avec des fiches et la technologie de l'information, par exemple [...] Les professeurs de Gymnasium avait une perception claire des différentes phases d'une leçon : (1) Erarbeitungsphase (phase d'acquisition) ; (2) Festigungsphase (phase de consolidation) et (3) Übungsphase (phase d'exercices). [...] Les professeurs français ont aussi beaucoup utilisé leurs livres. Leur leçon apparaissait divisée en trois parties : activités (activités cognitives ou exercices introductifs) ; cours (déclaration écrite contenant l'essentiel des productions mathématiques de la leçon) ; exercices (exercices d'entraînement). Les activités étaient destinées à introduire la notion. Le livre était utilisé par différents professeurs dans différentes parties, mais tous voulaient faire le cours par eux-mêmes, sans le livre. La plupart des professeurs français affirmaient qu'ils utilisaient leur livre [Ibid. pp.167-170] »²⁷⁵.

²⁷⁴ raises important question about textbooks as representations of the curriculum and about roles as a link between curriculum and pedagogy.

²⁷⁵ in France and Germany are quite different. For example, French mathematics textbooks are structured in a very particular way. Firstly, they are usually divided into three sections according to the structure of the programmes (the curriculum): numbers and algebra,; statistics; and geometry. Every chapter is then divided into three parts: activités; l'essentiel; exercices (activities-essential- exercises). The activities are small investigations, practical or cognitive activities (sometimes bordering on exercises) which are intended to introduce pupils to a notion. L'essentiel corresponds to the essential part that needs to be taught and understood, in words and in worked examples. This is often referred to as the cours. The third part accommodates exercises, sometimes

L'utilisation des manuels de classe est importante dans chaque pays, mais diffère fortement d'un pays à l'autre. Ceci motive notre étude des manuels de classe.

Nous allons les analyser à deux niveaux :

- L'étude de l'apparition de la démonstration comme thème d'étude, en conformité avec les programmes qui la désignent comme objet d'enseignement. Dans cette étude on distinguera les différentes tâches développées dans cet enseignement. On observera notamment si on peut différencier, d'une part des tâches transposées de tâches mathématiques, et d'autre part des tâches didactiques non transposées de tâches mathématiques.
- L'étude de la validation des théorèmes de cours dans le manuel de classe. Cette étude permettra d'examiner les types d'arguments utilisés, les techniques et technologies utilisées, les fonctions de la validation qui sont valorisées et les contrats qui sont apparemment mis en œuvre.

Au point de vue méthodologique nous opérons comme suit :

- nous choisissons la collection de manuels de classe la plus répandue en Gymnasium du Bade-Wurtemberg, d'après les avis convergents des experts consultés : il s'agit de la collection de Lambacher-Schweizer aux éditions Klett, composée des 9 livres des classes 5 à 13, les classes 12 et 13 ayant en commun deux livres, l'un d'analyse et l'autre de géométrie ;
- nous sélectionnons un objet à étudier (par exemple une leçon sur la démonstration ou la validation d'un théorème de cours donné) et nous étudions cet objet dans les livres où il apparaît ;

graduated in order of difficulty. [...] In German textbooks, after a short section with selected introductory exercises and the main "message" or formula followed by worked examples, the majority of the sections consists of exercises. English textbooks also offer mainly exercises, interspersed with some points of explanation and worked examples [...] French teachers, for example, used the books for explanations, but "insisted" on providing the rules and essence of the lesson (cours) without and in a different way than the book. German teachers deliberately used different worked examples from those in the textbooks, in order to initiate class discussion about the problems that might be encountered [...] Most French and German teachers said they used textbooks every lesson, and they claimed that textbooks were one of their main resources, compared with worksheets and information technology, for example [...] in particular Gymnasium teachers had a clear perception of the different phases of a lesson: (1) Erarbeitungsphase (acquisition phase); (2) Festigungsphase (consolidation phase) and (3) Übungsphase (exercise phase) [...] French teachers also heavily used the textbooks. Their lesson appeared to be divided into three parts: activité (cognitive activity or introductory exercise); cours (written statement containing the essential mathematical outcomes of the lesson); exercices (practice exercises). The activities were meant to introduce the notion. The textbook was used by different teachers for different parts, but they all wanted to do the cours by themselves, without the book. Most French teachers asserted that they used textbooks.

- puis en application du principe de dialectique différences-similitudes²⁷⁶ nous cherchons une étude semblable dans un manuel français de collège ou lycée.
 - o Si nous trouvons le même objet traité de manière semblable dans un manuel pour chaque pays, nous comparons ces traitements en essayant de dégager et d'expliquer les éléments de similitudes. Mais nous essayons également de les contraster et d'essayer de faire apparaître des différences que nous pourrions expliquer notamment à partir de la composante nationale.
 - o Si nous ne trouvons pas de traitement semblable du même objet, nous comparons alors les deux traitements en essayant d'expliquer les différences et de relever éventuellement des points communs permanents.

La solution consistant à partir de la collection allemande la plus répandue est une solution de confort, car il nous était plus facile d'accéder à différentes collections en France qu'en Allemagne. On pourrait réaliser la même étude en partant de la collection française la plus répandue, et observer s'il y a des différences par rapport à nos conclusions.

4.2 La démonstration comme thème d'étude

4.2.1 Protocole particulier d'étude

Nous commençons par lire systématiquement tous les livres de la collection Lambacher-Schweizer à partir de la classe 5 et à relever les occurrences des mots en rapport avec les tâches du genre « démontrer » et à identifier une leçon sur la démonstration. Nous avons trouvé une leçon sur la démonstration dans le manuel de **Klasse 8**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1999 (première édition 1995).

Ensuite nous cherchons parmi les manuels français un manuel qui propose une leçon sur la démonstration. Nous trouvons dans le manuel de la **classe de quatrième**, collection triangle, Hatier, 1998, une leçon sur la démonstration. Ce manuel est un manuel assez répandu en France. Nous n'avons pas trouvé d'autres manuels proposant une leçon sur la démonstration parmi les autres manuels consultés.

Nous allons donc étudier et comparer ces leçons en étudiant éventuellement dans les manuels du niveau précédent si ce thème était préparé. L'étude portera sur le genre de tâche, la

²⁷⁶ Décrit dans le 1.3.1.3 d'après les analyses de Clarke

technologie et les techniques proposés et les fonctions remplies. Nous essaierons de mettre en évidence des règles de contrat.

Pour la facilité de l'exposé, nous commençons par décrire le manuel français où le thème est décrit avec le plus de détail, ce qui permettra d'introduire de manière complète les termes de l'étude et de la comparaison.

4.2.2 En France

4.2.2.1 Premières rencontres avec la démonstration

La première rencontre²⁷⁷ s'effectue dans le manuel de **classe de cinquième**, collection triangle, édition Hatier, 1997. Elle est essentiellement constituée par une leçon « initiation au raisonnement déductif » [p.123-1134] dont la structure est la suivante.

- un exercice introductif de type logique,
- des exercices introductifs mettant en œuvre différentes technologies (calcul d'aire, divisibilité, calcul littéral, énoncés conditionnels) pour prouver ou réfuter une affirmation donnée soit par un calcul, soit par l'application d'un énoncé conditionnel acquis,
- une partie « connaissances » que nous détaillons ci-dessous,
- une partie « exercices ».

Le terme « démonstration » n'est pas cité ; on utilise les expressions : déterminer un résultat, préciser...si vrai ou faux, calculer, justifier, prouver.

En fait la leçon de quatrième va reprendre les types de tâche envisagés dans cette leçon, en les approfondissant ou en les complétant. C'est pourquoi nous n'analysons pas précisément cette leçon. Nous allons seulement détailler la partie « connaissances » [pp.127-128].

²⁷⁷ Nous empruntons à [Chevallard 2002] certains éléments de terminologie: thème d'étude, moment de l'étude, première rencontre, ... qui se définissent clairement dans le contexte.

1 Les règles du débat mathématique

En mathématiques, pour savoir si un énoncé est vrai ou faux, on utilise certaines règles. En voici quelques-unes :

- (1) Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.
- (2) Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé* est vrai.
- (3) Un exemple qui ne vérifie pas cet énoncé suffit pour prouver que cet énoncé est faux. Cet exemple est appelé « contre-exemple ». (Voir, page suivante, le paragraphe 3.)
- (4) Une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.

Une illustration des règles (2) et (3) :



2 Énoncé et réciproque

- En mathématiques, on utilise très souvent des énoncés de la forme « si... alors... ».

Exemple : Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont sécantes.

(condition)

(conclusion)

La condition de l'énoncé ci-dessus est : « deux droites sont perpendiculaires » ;
sa conclusion est : « elles sont sécantes ».

- La réciproque de l'énoncé ci-dessus est :

~~Si deux droites sont sécantes alors elles sont perpendiculaires.~~ Cet énoncé est faux

On trouve la réciproque d'un énoncé en inversant la condition et la conclusion de cet énoncé¹.

! Attention. La réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vraie. Par exemple, l'énoncé ci-dessus est vrai mais sa réciproque est fautive.

1. Parfois il est nécessaire de modifier légèrement la phrase obtenue pour qu'elle soit plus facilement compréhensible.

La page suivante définit dans un **paragraphe (3)** la notion de « contre-exemple » : « Pour un énoncé de la forme « si...alors ... », un contre-exemple est un cas qui vérifie la condition et qui ne vérifie pas la conclusion » [p.128].

Un exemple illustrant cette définition est donné.

Puis dans un **paragraphe (4)** suit une liste de onze propriétés de géométrie à connaître, énoncées sous forme conditionnelle, concernant les droites, la médiatrice, le losange, le rectangle et le carré.

On voit donc apparaître trois types de technologies de validation :

- des technologies mathématiques formées des théorèmes et des définitions, illustrées par le paragraphe (4),
- des technologies de logique et de raisonnement illustrées par les paragraphes (1), (2), (3),
- des technologies de validation non acceptées en mathématiques évoquées dans le paragraphe (1) :
 - o (2) argument d'induction : « des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai »,
 - o (4) argument pragmatique : « une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé géométrique est vrai ».

Dans le livre de quatrième, l'activité de statistique [p.73] « Justifier la réponse » précise dans le dernier exercice du chapitre statistique, les dernières questions : « Que pensez-vous des affirmations de Julie et de Jacques ? Sont-elles exactes ou fausses ? Vous justifierez votre réponse ? »

La première apparition du mot « démontrer » ou « démonstration » se trouve dans le chapitre 6 « initiation à la démonstration » que nous précisons dans le paragraphe suivant.

4.2.2.2 La leçon sur la démonstration

Cette leçon se situe dans le manuel de **classe de quatrième**, collection triangle, édition Hatier, 1998 [pp. 85-104]. Elle constitue le chapitre 6, intitulé « initiation à la démonstration ».

L'**introduction** [p.85] rappelle l'existence d'autres types de validation :

- en physique et en biologie : observation, hypothèses, confirmation expérimentale qui procède du raisonnement inductif ;
- les techniques de recours à des mesures, à des exemples, à l'observation de figures qui ne garantissent pas toujours la conclusion.

« Le mathématicien, pour savoir si un énoncé est vrai, ne fait pas appel à l'expérience ni aux mesures [...] Démontrer c'est déduire de nouvelles propriétés à partir de propriétés connues et de règles logiques » [p.85].

Proposons d'analyser les genres de tâches proposées dans le manuel à partir des catégories suivantes.

4.2.2.2.1 Genres de tâche et types de technologie

On distingue les différents genres de tâche suivants.

On appelle « **découvrir** » le genre de tâche qui correspond aux différents genres de tâche suivants. Le premier genre est « **conjecturer** » qui consiste à affirmer sans certitude une proposition. La démonstration que la conjecture est vraie correspond au genre de tâche « démontrer ». Le second genre « **reconnaître** » correspond à la reconnaissance d'indices permettant éventuellement de démontrer : reconnaissance de données correspondant à des conditions de théorèmes ou de théorèmes dont les conditions correspondent aux données ou dont la conclusion correspond à la proposition à démontrer, reconnaissance de configuration de référence (en géométrie, en algèbre)...

Le genre de tâche « **démontrer** » correspond à tous les textes qui indiquent **explicitement la proposition à démontrer**. On met dans cette catégorie les exercices du type « est-ce que cette proposition est vraie ? » qui concluent généralement avec « la proposition est vraie » ou « la proposition est fautive » et pour lesquels la tâche à réaliser est la production d'une démonstration. Parfois on distinguera parmi les tâches du genre « démontrer » celles qui se réalisent par la technique **imposée** du calcul et que l'on désignera par « calculer ». En principe pour pouvoir exécuter la tâche « démontrer » il faut reconnaître les indices qui vont permettre la démonstration, à moins que l'énoncé ne contienne que des questions enchaînées fermées, qui ne laissent aucune initiative à l'élève²⁷⁸, qui n'a plus qu'à appliquer la technique suggérée par la question. Le genre de tâche « **étudier** » correspond à une tâche du genre « découvrir » suivi d'une tâche du genre « démontrer » correspondant à la démonstration de la conjecture. La proposition à démontrer n'est pas formulée dans l'énoncé de l'exercice.

Le genre de tâche « **contrôler** » consiste à vérifier dans une démonstration, ce qui manque (démonstration incomplète) ou ce qui est faux ou à confirmer ce qui est juste. On place dans cette catégorie les exercices de vérification du statut des énoncés, de reconnaissance des formes de raisonnement (forme conditionnelle, forme réciproque).

Le genre de tâche « **changer de registre** » consiste à savoir exprimer dans un registre un discours ou une représentation déjà produits dans un autre registre. On place dans cette catégorie les exercices suivants :

- **tracer** : passer du registre écrit (programme de construction) au registre du dessin,
- **encoder** : passer du dessin et de l'écrit (propriétés) à la figure (représentant les propriétés),

²⁷⁸ Comme c'est souvent avec les sujets de baccalauréat

- **décoder** : passer de la figure à l'écrit,

Le genre de tâche « **construire** » se réalise par la technique **imposée**, d'utilisation (conceptuelle puis pratique) d'instruments (conceptuels puis réels) de géométrie, pour laquelle il faut justifier la construction. Ce dernier genre de tâche peut être formulée sous la forme « démontrer qu'il existe au moins un objet géométrique A vérifiant les conditions C, en proposant un programme de construction de A avec les instruments suivants que l'on réalisera pratiquement ». On peut considérer que « construire » réalise les tâches du genre « tracer » et « démontrer ».

On observera que des exercices peuvent mettre en œuvre des tâches de plusieurs genres.

On distingue les différents types d'éléments du bloc technologico-théorique²⁷⁹ suivants :

- logique : schéma de raisonnement²⁸⁰, règles de logiques, définitions (éventuellement à partir d'un exemple) à propos de raisonnement ou de logique ; on y trouve les définitions d'énoncé conditionnel, d'énoncé réciproque, de condition, de conclusion, de contre-exemple, de modus ponens.
- mathématique : définition et théorèmes de mathématique concernant les différents domaines : nombres, fonctions, géométrie, ...
- didactique : règles de débat, règles de rédaction, ...
- non mathématique : argument pragmatique, argument d'induction, argument d'autorité.

4.2.2.2 Analyse des tâches et des technologies proposées

La première partie [Annexe 8.1.1.1] de la leçon est constituée d'exercices sous le titre « **repérer les obstacles** » : « Des exercices que votre professeur vous proposera pour repérer vos connaissances et vos difficultés » [p.4]

Voici le tableau d'analyse des exercices dans l'ordre croissant de leurs numéros.

²⁷⁹ Ce bloc regroupe la technologie justifiant les techniques, et les éléments de théorie nécessaire pour définir la technologie, comme des définitions. Par exemple la règle logique du « modus ponens » nécessite la définition préalable d'un « énoncé conditionnel ».

²⁸⁰ Une forme de raisonnement peut être interprétée, dans un premier cas, comme élément de technologie. Considérons la technique qui consiste à appliquer la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle. La technologie justifiant cette technique est la réciproque du théorème de Pythagore (règle principale) et parmi les règles secondaires, le modus ponens, qui est une forme de raisonnement valide dans la logique classique.

Si maintenant, dans un second cas, on ne se place plus au niveau de la démonstration du fait que le triangle est rectangle, mais que l'on se place dans la théorie de la démonstration. Alors dans cette théorie, le modus ponens peut apparaître comme une technique de démonstration, au même titre qu'une autre technique, comme le raisonnement par récurrence. Ces deux types de techniques sont alors à justifier par des technologies de la théorie de la démonstration.

Nous choisissons de nous placer dans le premier cas et d'interpréter un schéma de raisonnement, sous entendu valide, comme un élément de technologie.

n°	genre de tâche	analyse (type d'argument, technologie, technique, contrat, ...)	domaine
1,4	conjecturer	argument visuel ; mesure et calcul	géométrie grandeurs et mesures
1, 4	tracer, construire	changement de registres ; définitions ou théorèmes de géométrie, argument visuel	géométrie
2, 5	calculer	calcul littéral	nombres
3, 4, 5, 6	démontrer	calcul numérique - contre-exemple ; décomposition de surfaces – calcul d'aire ; calcul littéral ;	grandeurs géométrie nombres
3, 5, 6	démontrer	calcul littéral contre-exemple	nombres
6, 7	contrôler	règles de logique (modus ponens) statuts des énoncés, énoncé réciproque	géométrie nombres

La seconde partie [Annexe 8.1.1.2] est constituées d'activités « **franchir un obstacle** » : « choisies par le professeur pour faire acquérir les nouvelles connaissances de ce chapitre » [p.4]. Voici le tableau d'analyse des activités dans l'ordre croissant de leurs numéros.

n°	genre de tâche	analyse	domaine
1, 2, 3, 4	démontrer	énoncés conditionnels de géométrie contre exemple	géométrie
3, 7	contrôler	argument visuel avec technique instrumentée argument de plausibilité (condition nécessaire vérifiée) statuts des énoncés, organigramme	géométrie
5, 6	encoder/décoder	changement de registres	géométrie
8	étudier	calcul littéral	nombres
7	étudier		géométrie
5, 6, 8	découvrir	reconnaître les conditions de théorèmes ; reconnaître les figures de théorèmes ; calcul littéral ; argument de plausibilité	nombres

La troisième partie [Annexe 8.1.1.3] expose des « **connaissances** » : « ce que vous devez savoir » [p.4]. Cette partie correspond à la **technologie** mobilisable. Voici un tableau d'analyse de ces éléments de technologie dans l'ordre croissant de leurs numéros

n°	technologie	analyse	domaine
1	logique	énoncé conditionnel : si ... alors ... statuts : condition, conclusion,	logique
2	logique	énoncé réciproque un énoncé vrai peut avoir une réciproque fausse,	logique
3	logique	démonstration en géométrie : succession de chaînons déductifs chaînon déductif : donnée ou conclusion précédente, propriété, conclusion du chaînon démonstration sur les nombres : utilise le calcul littéral	logique géométrie nombres
4	mathématique	propriétés de géométrie de cinquième : propriété de géométrie sous forme d'implication (classées par configurations de référence) et définition (« il faut connaître les définitions » [p.93] (la note de bas de page précise une liste des définitions à connaître).	géométrie

La quatrième partie [Annexe 8.1.1.4] propose des « **méthodes** » : « ce que vous devez savoir faire ». Une méthode correspond à des indications sur la manière de réaliser une tâche, ce qui correspond à des indications sur la **technique**. Voici un tableau d'analyse de ces genre de tâches dans l'ordre croissant de leurs numéros.

n°	genre de tâche	analyse	domaine
1	« découvrir » par conditions suffisantes (ou en remontant de la conclusion vers les données))	reconnaissance des théorèmes à utiliser à partir de leur conclusion, registre graphique du graphe d'une démonstration ;	
2	« contrôler » par vérification des statuts « contrôler » par vérification du modus ponens	vérification des statuts et des applications des propriétés	géométrie

A propos de la méthode 1, on observe que le manuel propose de « découvrir » par une technique remontant de la conclusion vers les données et de rédiger par une technique descendant des données vers la conclusion. On remarquera qu'en mathématiques rien n'oblige à rédiger par une technique descendante. **On peut voir ici une règle de contrat, qui n'est pas une règle mathématique, et qui illustre dans le phénomène de transposition l'ajout de règles non mathématiques.**

La cinquième partie [Annexe 8.1.1.5] est constituée d' « **exercices** » répartis dans différentes catégories : exercices fondamentaux (répartis en « figures et propriétés », « contrôler les démonstrations », « démonstrations en géométrie »), faire le point à mi-parcours, exercices complémentaires (répartis en « s'échauffer », « s'entraîner, devenir un champion »). Illustrons la première et la dernière catégorie.

n°	genre de tâches	analyse	domaine
2, 8, 24, 25, 26, 37	tracer (sans justifier)	changement de registres	géométrie
63 à 65	construire	changement de registres	géométrie
1, 18, 22, 23, 3, 35, 36, 24, 25, 26, 63, 64, 65	changer de registre	changement de registres,	géométrie
1, 18, 3, 35, 36	découvrir	reconnaître des configurations de référence	géométrie
4, 19, 8, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41, 42	contrôler : compléter ce qui manque, trouver les erreurs, réordonner les propositions,	argument visuel sur figure particulière technique de rédaction : préciser les données de chaque argument argument faux : règle de validation mal appliquée contre exemple règle du modus ponens, statut : données, règle, conclusion structure d'une démonstration	géométrie
28	contrôler : trouver ce qui est faux ou qui manque dans une démonstration	argument inductif contre-exemple règle du modus ponens, statut : données, règle, conclusion	nombres
9, 51, 53	étudier : inventer une démonstration (un énoncé d'exercice et une démonstration)	application d'une règle de validation statut : données, règle, conclusion	géométrie
4, 5, 10 à 15, 20 a à c, 30, 31, 38, 43 à 48, 52, 54 à 62,	démontrer	propriétés de géométrie contre exemple	géométrie
6, 7, 62,	étudier		géométrie
6, 7, 22, 23, 30, 53	conjecturer	argument visuel pour conjecturer	géométrie
16, 17, 21, 29, 31, 49, 50, 66 à 68	démontrer	calcul littéral contre exemple	nombres
16, 17, 21, 29, 68	conjecturer	argument inductif pour conjecturer	nombres
17, 21, 27	calculer		nombres
31	contrôler	reconnaître le statut dans un énoncé conditionnel énoncé réciproque	géométrie nombres

On remarquera que le genre de tâche « démontrer » peut impliquer d'autres genres de tâches :

- découvrir : pour démontrer il faut découvrir les arguments à mettre en oeuvre,
- rédiger : la règle de contrat implicite est que, sauf mention explicite du contraire, toute démonstration doit être rédigée,
- contrôler : avant de rendre sa rédaction finale, on contrôle cette rédaction.

Le genre de tâche « contrôler » est souvent un travail sur la rédaction de démonstration.

On remarquera que certains exercices présentent la démonstration dans le registre oral : bande dessinée avec bulles (document ci avant), extraits d'échange de conversations (n° 28).

4.2.2.3 Introduction de la démonstration dans la partie exercices

Comme nous l'avons précédemment signalé, le manuel « Triangle » est le seul trouvé dans lequel existe toute une leçon sur la démonstration. Dans les autres manuels, le contenu de cette leçon est réparti dans la partie exercices de plusieurs leçons. En ce sens on pourrait parler de « notions **transversales** ».

A titre de complément, nous proposons une analyse d'un extrait du manuel de classe quatrième, collection Nouveau Transmath, édition Nathan, 1998, dans lesquels la démonstration est introduite dans la partie « exercices ». L'exemple est extrait de la première leçon de géométrie [Annexe 8.1.1.6] sur « parallélogrammes et translations » mais se poursuit dans les autres leçons.

Analysons les genres de tâche proposés dans cet extrait.

n°	genre de tâches	analyse	domaine
35 1) 46 1)	tracer	changement de registres	géométrie
35 2)	contrôler : compléter ce qui manque	argument visuel	géométrie
35 3) a) 36	démontrer, contrôler	calculs d'aire (piège de l'argument visuel si décomposition) propriétés de géométrie	géométrie
35 3) b)	démontrer	possibilité de raisonnement par l'absurde avec disjonction des cas	géométrie
37, 38, 39 40 41 45	contrôler	utiliser une définition ou une propriété comme règle de validation statut des énoncés recyclage d'une conclusion intermédiaire en donnée du pas suivant organisation arborescente d'une démonstration corriger une rédaction	géométrie
42 43	reconnaître	reconnaître un parallélogramme à partir d'une translation, et réciproquement reconnaître la signification d'une propriété	géométrie
44 42 46	changer de registre	d'un texte à une figure d'une figure à un texte du deductogramme à un texte	géométrie

Par rapport à la leçon précédente il est normal que les tâches soient moins représentées (puisqu'il va se poursuivre dans d'autres leçons).

Cependant on notera que pour le genre de tâche « reconnaître », dans les exercices n°42 et n°43, il s'agit d'apprendre à reformuler une propriété, pour sans doute apprendre à trouver des indices dans une éventuelle résolution. Ceci est effectué en dehors de tout contexte de résolution de problèmes : c'est une tâche didactique qui apparaît parce que la démonstration est devenue un objet d'enseignement.

On pourrait penser que tous les genres de tâche se rapportent à la géométrie car nous sommes dans une leçon de géométrie. En fait, dans ce manuel, la rubrique « apprendre à démontrer » n'apparaît que dans les leçons de géométrie.

4.2.3 En Bade-Wurtemberg

4.2.3.1 Premières rencontres avec la démonstration

Les premières rencontres s'effectuent dans le manuel de **Klasse 7**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 2000 (première édition 1994).

On observe:

- La première apparition du terme « Satz [théorème] » [p.103] (énonçant l'égalité des angles alternes-internes équivalente à un parallélisme des droites associée) dans le dernier chapitre du livre sur les angles et les côtés d'un triangle. A cette occasion une petite explication sur ce terme est donnée : « De telles relations importantes, qu'on peut démontrer sur la base de résultats antérieurs, sont regroupés en mathématiques en « Lehrsätzen » [théorèmes] (en abrégé : « Sätze ») (« Satz » a ici le sens de Satzung [statut], Gesetz [loi]) » [p.103]. La partie directe, s'il y a parallélisme alors les angles sont égaux, est démontrée. La réciproque ne l'est pas.

„Satz“ hat hier den Sinn von *Satzung, Gesetz*.

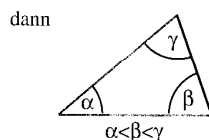
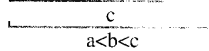
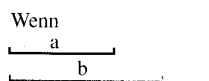
Sind also g und h parallel, so können wir – ohne nachzumessen – daraus folgern, dass Stufenwinkel (Wechselwinkel) gleich groß sind. Umgekehrt können wir anhand von Stufenwinkeln (Wechselwinkeln) entscheiden, ob Geraden parallel sind. Solche wichtigen Zusammenhänge, die man aufgrund früherer Ergebnisse beweisen kann, fasst man in der Mathematik zu „Lehrsätzen“ (kurz: „Sätze“) zusammen.

Satz von den Stufen- und Wechselwinkeln:

Wenn $g \parallel h$ ist, das sind **Stufenwinkel (Wechselwinkel)** an g und h **gleich groß**.

Wenn **Stufenwinkel (Wechselwinkel)** an g und h **gleich groß** sind, dann ist $g \parallel h$.

- L'utilisation d'autres termes à la place de « démontrer » avec la même signification [« zeige » p.47, p.114 ; « begründe » p.48 ; « Schliessen auf... » p.110,...].
- Une illustration de la forme « Wenn... dann... [si... alors...] » [p.116] en marge de deux exercices (document ci-après).



3 Ein Dreieck hat die folgenden Seiten bzw. Winkel.

a) $a = 38,0 \text{ cm}$; $b = \frac{2}{5} \text{ m}$; $c = 4,2 \text{ dm}$

b) $a = 17,0 \text{ cm}$; $c = 0,21 \text{ m}$; $b = \frac{1}{5} \text{ m}$

c) $\alpha = 48^\circ$; $\beta = 67^\circ$

d) $\gamma = 53^\circ$; $\beta = 63^\circ$.

Gib die Reihenfolge der Winkel (Seiten) an, wenn man diese der Größe nach ordnet.

4 In einem Dreieck HPK ist α der Winkel bei P, γ der Winkel bei K und δ der Winkel bei H. Ordne die Seiten (Winkel) nach der Größe.

a) $\gamma = 59^\circ$; $\delta = 74^\circ$

b) $\delta = 67^\circ$; $\alpha = 52^\circ$

c) $\delta = 60^\circ 40'$; $\gamma = 59^\circ 50'$

d) $\alpha = 58^\circ 45'$; $\gamma = 61^\circ 55'$

e) $\overline{HK} = 6,0 \text{ cm}$; $\overline{PK} = 5,5 \text{ cm}$; $\overline{HP} = 7,0 \text{ cm}$

f) $\overline{PK} = 0,45 \text{ m}$; $\overline{HP} = \frac{2}{5} \text{ m}$; $\overline{HK} = 4,3 \text{ dm}$

5 Ordne die Seiten und die Winkel nach der Größe.

a) $b = 2a$; $c = 3a$

b) $c = \frac{2}{3}b$; $a = \frac{4}{5}b$

c) $a = 3b$; $b = 2c$

d) $c = \frac{1}{3}a$; $a = \frac{2}{3}b$

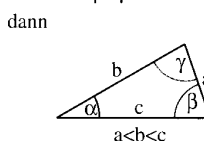
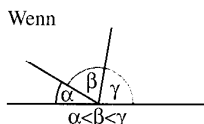
e) $a = \frac{3}{4}b$; $c = \frac{2}{3}b$

f) $b = \frac{4}{5}a$; $a = \frac{5}{6}c$

g) $\alpha = 2\beta$; $\gamma = \frac{1}{3}\alpha$

h) $\beta = \frac{2}{3}\alpha$; $\gamma = \frac{3}{4}\alpha$

i) $\gamma = \frac{3}{2}\alpha$; $\beta = \frac{4}{3}\alpha$



6 Konstruiere ein Dreieck ABC, bei dem $\beta > \gamma$ und $\gamma > \alpha$ ist. Überlege zunächst, wie das am einfachsten zu erreichen ist.

7 In einem Dreieck ist $\alpha = 57^\circ$ und $\beta = 66^\circ$ ($\beta = 72^\circ 30'$; $\gamma = 53^\circ 45'$). Um was für ein besonderes Dreieck handelt es sich?

8 In einem Dreieck liegt der kürzesten Seite stets ein spitzer Winkel gegenüber. Ist diese Aussage wahr? Begründe die Antwort.

- Un groupe de cinq exercices regroupés sous le titre « Zum Beweisen [A démontrer] » [Annexe 8.1.2.1] sans que nous ayons trouvé d'autres citation de ce mot dans des exercices ou des démonstrations (document ci-après).
- Les dernières pages du livre concluent sur le thèmes « Nachmessen ist gut – Nachdenken ist besser [mesurer est bien – réfléchir est mieux] » [p.124-126]. L'histoire de la naissance de la démonstration en Grèce y est évoquée. Le thème se termine par cette affirmation : « Ainsi commence une Mathématique complètement neuve, complètement différente de

celle d’Egypte ou de Mésopotamie. Elle reconnaît seulement ce qui se laisse fonder logiquement à travers la réflexion – ce que nous appelons aujourd’hui : démontrer »²⁸¹ [p.129]

Les rencontres suivantes s’effectuent dans le manuel de **Klasse 8**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1999 (première édition 1995)

On observe :

- La première apparition du mot « Satz [théorème] » [p.48] énonçant la conservation des longueurs et des angles par une isométrie lors du premier chapitre consacré à la géométrie. Ce théorème n’est pas démontré.
- La premier emploi d’un mot de la famille de « Beweisen [démontrer] » [p.50] lors d’un exemple de démonstration utilisant une isométrie.
- Plusieurs apparitions du mot « Beweisen [démontrer] » soit accompagnant une démonstration proposée dans le livres [p.53, 58,...], soit demandant la production de démonstrations dans le domaine de la géométrie [p.64 ; p.111, p.118] ou des nombres [p.90 ; 99].
- L’utilisation d’autres termes à la place de démontrer avec la même signification [« begründe » p.75 ; « zeige » p.133 ;...]

Avant le chapitre 7 sur les quadrilatères il n’y a pas de réflexion organisée sur le thème de la démonstration, à quelques exceptions près :

- des exemples de démonstration [« Beispiel » p.53 ; 58 ;...] ;
- des indications pour démontrer [« Anleitung » p.99 ; « Hinweis » p.164] ;
- un long développement sur une démonstration fautive (tout triangle est isocèle) [p.120].

4.2.3.2 La leçon sur la démonstration

Dans le chapitre « Quadrilatères » le paragraphe 5 [pp. 160-162] est consacré à la démonstration.

Il est constitué de trois pages, que nous reproduisons ci-après, constituées de treize parties numérotées de 1 à 13. Nous y rajoutons la page 164, partie du chapitre suivant constitué d’exercices variés : en effet le titre de cette page est « à démontrer » [zum Beweisen].

²⁸¹ Damit anerkennt nur das, was sich durch Nachdenken logisch begründen-wir sagen heute: beweisen-lässt.

La leçon correspond au prototype suggéré précédemment par [Pepin 2001], p.167] : « Dans les manuels scolaires allemands, après une courte partie avec des exercices introductifs sélectionnés et le principal « message » ou formule suivi par des exemples traités, la majorité des parties consistent en des exercices »²⁸².

La partie 1 est constituée d'un exercice introductif, d'un exemple de démonstration traitée. Puis suivent les premières définitions, notamment la forme « si ... alors » et de deux exemples les illustrant. Un exemple introduit une seconde définition, celle d'énoncé conditionnel réciproque, suivi d'un exemple illustrant cette définition.

Les autres parties (2 à 17) sont constituées d'exercices.

On trouvera les extraits correspondant en [Annexe 8.1.2.2].

On analyse les tâches proposées dans le tableau suivant, en adoptant la typologie utilisée pour la leçon française. Pour la partie 1, on examine paragraphe par paragraphe.

n°	genre de tâche ou type de technologie	analyse	domaine
1	démontrer (exercice de logique)	règles de logique organisation des données	logique
1	exemple de démonstration		géométrie
1	définition d'énoncé conditionnel, des statuts, de théorème.	technologie de la logique et du raisonnement : forme « si... alors... » statut : conditions, conclusion, théorème.	logique
1	exemple 1 de reformulation d'un théorème sous la forme « si... alors... »	reconnaissance de forme	
1	exemple 2 de contre-exemple pour réfuter	technologie de la logique et du raisonnement : notion de contre-exemple.	logique
1	définition d'énoncé réciproque	technologie de la logique et du raisonnement : énoncé réciproque	logique
1	exemple 3 d'énoncés réciproques	un énoncé réciproque d'un énoncé vrai peut être vrai ou faux.	
2	contrôler	reformuler sous forme « si... alors »	géométrie
3	contrôler	préciser hypothèses et conclusions	géométrie
4	contrôler	réordonner des hypothèses et des conclusions	géométrie
5 à 8	démontrer	géométrie ; contre-exemple ;	géométrie
9	conjecturer		géométrie
9	étudier		géométrie
9	tracer	changer de registre	géométrie
10 à 13	démontrer	énoncé réciproque (statuts) contre exemple	géométrie nombres logique vie quotidienne
10, 11	contrôler	formuler un énoncé réciproque reformuler un énoncé sous forme conditionnelle	géométrie nombre

²⁸² In German textbooks, after a short section with selected introductory exercises and the main “message” or formula followed by worked examples, the majority of the sections consists of exercises. English textbooks also offer mainly exercises, interspersed with some points of explanation and worked examples

Les exercices à démontrer du dernier du chapitre « quadrilatères » [p.164] font partie d'un chapitre constitué uniquement d'exercices variés sur les quadrilatères, parmi lesquels une section intitulée « à démontrer ». C'est le seul chapitre qui contient une section d'exercices intitulée « à démontrer ». Nous les reproduisons en [Annexe 8.1.2.3] et analysons les tâches proposées dans le tableau suivant.

n°	genre de tâche ou type de technologie	analyse	domaine
11 à 17	démontrer	propriétés de géométrie contre exemple	géométrie
11, 12, 13	découvrir	recours à un codage pour découvrir décodage changement de registres	géométrie
12,13, 16, 17	tracer/encoder/décoder	changement de registres	géométrie
16, 17	conjecturer		géométrie
16, 17	construire		géométrie

Chaque chapitre se termine par une « excursion mathématique » et par un « résumé de cours ».

L'excursion mathématique intitulée « logique quotidienne» [Logik im Alltag] [Annexe 1.2.4] est constituée d'une scène devant le juge pour laquelle sont posées des questions de logique.

Le résumé de cours, pour la partie concernant la démonstration, est le suivant [p.167].

Satz und Umkehrung

Bei einem Satz und seiner Umkehrung sind Voraussetzung und Behauptung vertauscht.

Aus der Gültigkeit eines Satzes folgt nicht die Gültigkeit der Umkehrung. Diese muss gesondert bewiesen oder widerlegt werden.

Der Satz „Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann ist es ein Trapez“ ist wahr.

Die Umkehrung lautet: „Wenn ein Viereck ein Trapez ist, dann ist es ein Parallelogramm“. Die Umkehrung ist falsch.

Théorème et réciproque :

Entre un théorème et sa réciproque conditions et conclusions sont échangées.

De la validité d'un théorème ne se déduit pas la validité de sa réciproque.

Celle-ci doit être démontrée séparément ou réfutée.

Le théorème « si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un trapèze » est vrai.

La réciproque s'énonce « si un quadrilatère est un trapèze, alors c'est un parallélogramme ». La réciproque est fausse.

Il n'y a pas d'autres rencontres avec la démonstration que celles que nous avons évoquées.

Dans le manuel de classe 9, la leçon « découverte, démonstration, déduction » ne comporte pas de partie « cours » et est constituée de quatre pages présentant des exercices de géométrie, plus ardues que la moyenne, avec des indications de solutions. Nous reproduisons cette partie en [Annexe 8.1.2.5]. Le premier exemple traité est constitué des parties suivantes bien séparées : énoncé, figure, découverte, conjecture et démonstration.

4.2.4 Comparaison

4.2.4.1 Eléments de similitude entre les leçons

On observe donc, dans chaque manuel, l'apparition de la démonstration comme **objet d'enseignement**. Dans les deux pays cette apparition est progressive.

Nous avons identifié et illustré les **genres de tâche** suivants : découvrir (conjecturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les statuts, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditionnels), changer de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, construire, étudier). Alors que démontrer est un genre de tâche mathématique, par contre changer de registre, contrôler, découvrir ne sont pas des genres de tâches isolées en mathématiques mais sont intégrés au processus de démonstration. La pratique isolée de ces tâches, par exemple changer de registre de manière isolée, découvrir de manière isolée, contrôler de manière isolée au lieu d'être intégré à une activité de résolution de problème correspond à un exercice scolaire lié au phénomène de transposition didactique et au passage, pour la démonstration, du statut d'objet paramathématique à celui d'objet d'enseignement. On comprend que cet isolement peut être nécessaire pour bien identifier les tâches de ce genre et apprendre à la réaliser. Mais on comprend aussi le risque de dérive si ce travail isolé a trop d'ampleur.

La **technologie** mobilisable pour réaliser les tâches de ce genre fait cohabiter :

- une technologie logique ou de raisonnement, présentée de manière assez sommaire,
- une technologie mathématique avec une emphase particulière sur la géométrie,
- une technologie non mathématique, constituée essentiellement par les arguments visuels (observations), pragmatiques (mesure sur des figures) ou inductifs (vérification sur quelques exemples).

Cette dernière technologie non mathématique est sollicitée dans les tâches du genre « conjecturer », « tracer » ou « construire »... Les élèves sont habitués à fréquenter cette

technologie, depuis l'école primaire avec la géométrie perceptive et la géométrie instrumentée, jusqu'à la géométrie de constat du début de collège. C'est ce que [Parzysz 2003] désigne sous le nom de « géométrie concrète » (G0) et « géométrie spatio-graphique (G1).

Les types de **techniques** sont peu décrites même si l'on voit apparaître quelques types de technique : démontrer la fausseté à l'aide d'un contre-exemple, démontrer la vérité en appliquant un théorème de forme conditionnelle, découvrir en reconnaissant une configuration particulière dans une figure. Dans le manuel français on évoque deux autres types de techniques : démontrer par le calcul et découvrir par conditions suffisantes.

La fonction de vérification est prise en compte dans le cas des tâches du genre « démontrer » pour vérifier la vérité et dans le cas des tâches du genre « conjecturer » pour vérifier la plausibilité. On peut supposer les fonctions de communication et de systématisation locale prises en compte dans les tâches du genre « contrôler », « changer de registre » et « démontrer », qui permettent de vérifier l'application des énoncés conditionnels, de formuler d'un registre dans l'autre, de corriger éventuellement la rédaction d'une démonstration. La fonction de découverte, associée naturellement aux tâches du genre « découvrir », et la fonction de communication peuvent également être remplies par des tâches du genre « changer de registre » qui peuvent déboucher sur une idée plus claire dans un registre que dans un autre et qui permettent de communiquer en ayant recours à la figure.

Cependant, les fonctions d'explication ou de systématisation globale semblent absentes de cette leçon.

4.2.4.2 Différences

Les différences observées entre les deux manuels sont les suivantes :

- la leçon du manuel français est beaucoup plus développée que la leçon du manuel allemand,
- les tâches du genre « découvrir », « conjecturer », « contrôler » ainsi que le domaine « nombres » sont peu représentées dans le manuel allemand,
- des exercices du type « reformulation d'un énoncé en énoncé de la forme « si...alors... » », par exemple « un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu » se reformule en « si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu », existent dans le manuel allemand mais pas dans le manuel français,

- des exemples issus de situations de la vie quotidienne sont traités dans le manuel allemand mais pas dans le manuel français ;
- des règles de contrat et des techniques sont évoquées dans le manuel français sans l'être dans le manuel allemand, par exemple la règle selon laquelle « les arguments basés sur les mesures et l'observation des figures ne sont pas des arguments mathématiques permettant de conclure » ou la technique par condition suffisante pour découvrir ;
- l'apparition de la démonstration se fait progressivement dans le manuel allemand, en conservant un statut important d'objet paramathématique : la démonstration est fréquentée mais le discours sur la démonstration reste réduit ; par contre l'apparition de la démonstration dans le manuel français comme objet d'enseignement est précédée par celle du raisonnement déductif comme objet d'enseignement en cinquième et traduit ce passage du raisonnement déductif à la démonstration.

Il est difficile de conclure si ces différences observées sont caractéristiques d'un pays ou ne sont que des fluctuations de manuel à manuel. Même dans ce dernier cas, il est intéressant d'observer ces fluctuations. On notera que le manuel allemand choisi est le plus utilisé en Bade-Wurtemberg.

Nous allons maintenant observer comment des théorèmes de cours sont validés dans des manuels.

4.3 La validation de théorèmes de cours

4.3.1 Motivation et protocole d'étude

La précédente étude des leçons sur la démonstration ne nous a pas permis d'étudier des démonstrations. Le seul corpus de démonstration accessible dans les manuels scolaires est constitué des démonstrations de théorèmes de cours ou des exercices corrigés. Or les exercices de démonstration corrigés sont pratiquement absents des manuels de classe allemands. Nous avons donc décidé d'étudier les démonstrations de théorèmes de cours.

Nous allons étudier la validation des théorèmes suivants, en tenant compte des informations de notre étude des programmes dans laquelle nous avons mis en évidence que les mêmes éléments de technologie pouvaient être introduits à des moments différents d'un pays à l'autre.

1. Choix des théorèmes validés

Dans le tableau ci-après nous considérons les variables suivantes : positions relatives, selon le pays, du moment de première validation du théorème, position relative de première validation du théorème par rapport à la classe de quatrième ou à la classe 8 où la démonstration est introduite, domaine mathématique du théorème.

Thème du théorème	Première validation en France	Première validation en Bade-Wurtemberg	Domaine et position par rapport à la leçon sur la démonstration
somme des angles d'un triangle	cinquième	7	Géométrie. Dans des classes parallèles. Avant la leçon sur la démonstration.
périmètre et aire du cercle	sixième et cinquième	10	Grandeurs. Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg.
théorème de Pythagore	quatrième (puis seconde)	9	Géométrie. Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg.
théorème de Thalès	troisième (puis seconde)	9	Géométrie. Dans des classes parallèles. Après la leçon sur la démonstration.
variation de la fonction élévation au	seconde	11	Fonctions.

carré			Après la leçon sur la démonstration.
équations et inéquations du second degré	première S	9	Equations. Après la leçon sur la démonstration.
formules de volume des solides usuels	collège (puis Terminale)	10 (puis 12-13)	Grandeurs. Après la leçon sur la démonstration.

2. Localisation du théorème dans un manuel allemand.

Du point de vue méthodologique, une fois le théorème choisi, on repère et on étudie sa première validation dans un manuel correspondant de la collection Lambacher-Schweizer du Bade-Wurtemberg.

3. Choix d'un manuel français où le théorème est validé

On recherche alors dans les collections de manuels scolaires français une première validation du même théorème qui ressemble « le plus » à la validation allemande. Ce pourra être le cas si la technologie utilisée dans le manuel allemand est également mobilisable dans le manuel français.

4. Présentation des validations du théorème choisi.

Successivement pour chaque pays, d'abord on cite le texte du manuel.

Ensuite on propose des indications de traduction pour les textes allemands.

Puis on analyse la validation. Pour une analyse fine, pour distinguer argumentation ou preuve, ou pour mettre en évidence les recours à la figure, on analyse linéairement la validation, par la méthode exposée dans la partie théorique, dans un tableau dont chaque ligne est du type suivant.

n° argument ou prémisses premières	données utilisées (ou hypothèse ou figure pour une prémisses première)	règles de validation	conclusion de l'argument (ou prémisses premières)	commentaire éventuel
------------------------------------	--	----------------------	---	----------------------

Enfin on commente la validation étudiée en terme de techniques et de technologies utilisées et on essaie d'interpréter les fonctions de cette validation.

5. Comparaison des validations

Une fois les deux validations analysés et commentés, on les compare.

Reconstruction des validations incomplètes

Ici une difficulté se présente si le manuel pose des questions sans donner les réponses ou si les conclusions d'argument ne sont pas assez explicites. On conjecture alors une réponse ou la partie non explicitée de l'argument, ce qui sera indiqué par la mention « **interprétation** ». Cette interprétation réduit à l'objectivité du travail : la plupart du temps nous formulerons la réponse attendue dans la question. Par exemple à la question « que peut-on dire de la somme $\alpha+\beta+\gamma$ si AC et BC s'approchent de plus en plus de la position de AB ? » nous conjecturons la réponse « il semble que $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ». Nous y sommes contraints car si nous avons choisi d'éliminer les validations pour lesquelles on recourt à une interprétation, le reliquat aurait été trop réduit. Ce problème d'interprétation du corpus de données, avec essai de reconstruction, est un problème méthodologique plus général qui distingue les méthodes qualitatives des méthodes quantitatives : « la recherche interprétative vise à réfléchir sur les propres reconstructions de ces interprétations » [Knipping 2003, p.48].

4.3.2 La somme des angles d'un triangle

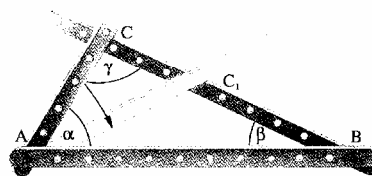
4.3.2.1 Dans un manuel allemand

Tâche : Valider la proposition « la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat ».

Livre de mathématiques, classe 7 (12-13 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.105), première édition 1994.

Texte du livre : Somme des angles d'un triangle Klasse 7 LS 1994 p.105

- 1 a) Welche Winkel des Dreiecks ABC ändern sich, wenn man den Stab AC nach rechts schwenkt und der Stab BC seine Richtung beibehält? Welcher Winkel wird größer, welcher kleiner? Vergleiche die Zunahme des einen Winkels und die Abnahme des anderen mit dem Winkelmesser.
b) Was lässt sich über die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ sagen, wenn sich AC und BC mehr und mehr der Lage von AB nähern?



In Fig. 1 sind g und h parallel. In diesem Fall ist $\alpha + \delta = 180^\circ$.
Ist – wie in Fig. 2 – h nicht parallel zu g, so entsteht ein Dreieck ABC. Der Winkel γ bei C hat gegenüber Fig. 1 um eine Winkelweite β abgenommen; gleichzeitig ist bei B ein neuer Winkel derselben Weite β entstanden (Wechselwinkel an Parallelen).
Jetzt gilt daher: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

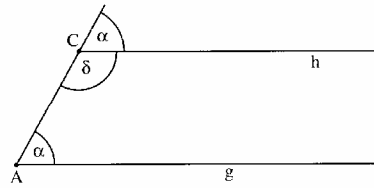


Fig.1

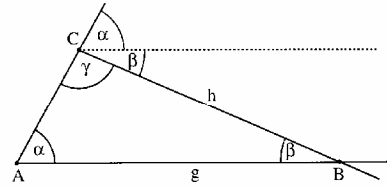
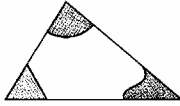


Fig.2



Satz von der Winkelsumme im Dreieck:
In jedem Dreieck ergeben die drei Innenwinkel zusammen 180° .
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



Damit können wir aus zwei bekannten Winkeln eines Dreiecks den dritten **berechnen**.

Beispiel 1: (Winkelberechnung)

a) In einem Dreieck mit $\alpha = 87^\circ$ und $\beta = 28^\circ$ gilt: $87^\circ + 28^\circ + \gamma = 180^\circ$, also $\gamma = 65^\circ$.

b) In einem gleichschenkligen Dreieck (Fig. 3) sind die Basiswinkel gleich, weil m die Symmetrieachse ist. Beträgt $\alpha = 52^\circ$, so ist $52^\circ + 52^\circ + \gamma = 180^\circ$, also $\gamma = 76^\circ$.

c) In gleichseitigen Dreiecken (Fig. 4) sind alle drei Winkel gleich groß; daher beträgt jeder Winkel 60° .

d) In einem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 5) mit $\gamma = 90^\circ$ ist $\alpha + \beta = 90^\circ$.

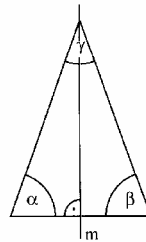


Fig.3

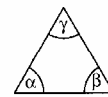


Fig.4

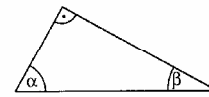


Fig.5

Éléments de traduction :

1^{ère} partie.

« 1) a) Quel angle du triangle ABC change lorsque la barre AC tourne vers la droite et que la barre BC conserve sa direction ? Quel angle augmente ? Lequel diminue ? Compare l'augmentation de l'un avec la diminution de l'autre avec le rapporteur.

b) Que peut-on dire de la somme $\alpha + \beta + \gamma$ si AC et BC s'approchent de plus en plus de la position de AB ? »

2^{nde} partie.

« Dans la figure 1, g et h sont parallèles. Dans ce cas $\alpha + \delta = 180^\circ$.

Pour h non parallèle à g – comme dans la figure 2, alors il se forme un triangle ABC. L'angle γ en C a par rapport à la figure 1 diminué d'un angle β ; en même temps il s'est formé en B un nouvel angle de même mesure (écart) β (angles alternes-internes de parallèles).

C'est pourquoi maintenant $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ est valable²⁸³. »

Analyse linéaire de la validation :

²⁸³ Le dictionnaire Pons propose même la traduction : **jetzt gilt's!** maintenant, c'est pour de bon!

Argumentation

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		différents triangles ABC d'angles α , β , γ codés sur figure	
2	1	constat visuel, comparaison	quand AC tourne à droite autour de A, α diminue et γ augmente en compensation (interprétation)	explication et découverte du pas n°3
3	1, 2	constat visuel (mesure), addition, induction	il semble que $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (interprétation)	plausibilité

Commentaires :

Justifions notre interprétation de la réponse attendue au pas n° 3 : « il semble que $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ». La conclusion explicite de la 2^{nde} partie est : « C'est pourquoi **maintenant** $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ est valable ». Nous mettons en gras (ce qui n'est pas le cas dans le texte original) pour montrer que le terme « maintenant » suggère qu'auparavant la réponse avait été donnée mais n'était pas encore valable. On a là un passage du plausible (1^{ère} validation : argumentation) au nécessaire (2^{nde} validation : démonstration). En effet les mesures d'angles effectuées par manipulation du rapporteur sont approchées et ne permettent pas d'affirmer avec certitude que la somme $\alpha+\beta+\gamma$ vaut 180° . D'autre part ces mesures sont effectuées sur des cas particuliers : on généralise le résultat à tous les cas où AC et BC s'approchent de plus en plus de la position de AB. C'est pourquoi l'égalité finale est plausible ou probable, mais n'est pas nécessaire. Cette validation est donc une **argumentation**. [Balacheff 1991] montre que, pour des élèves²⁸⁴, la formulation d'une telle conjecture, après mesure, n'est pas toujours évidente.

On utilise deux types de techniques :

- pragmatique avec des actions de rotation sur le mécano et de mesure des angles avec un rapporteur,
- mathématique : application des règles de calcul avec la comparaison des mesures d'angle et le calcul de la somme des mesures des angles ; il est difficile de préciser les techniques de calcul en l'absence d'explicitation de la réponse.

Ces techniques sont justifiées :

- par constat visuel pour l'augmentation et la diminution des angles, et pour les mesures,
- par les règles de comparaison et d'addition de nombres mobilisables en classe 7,

²⁸⁴ Dans le cas de l'étude de Balacheff, il s'agissait d'élèves de classe de cinquième (12-13 ans)

- par un raisonnement inductif visant à généraliser (ici sous forme de conjecture) les observations faites sur des triangles particuliers.

Une première fonction de cette validation est de **conjecturer** (fonction de découverte) le résultat. De plus, des mesures répétées en b) permettent d'induire le résultat et de renforcer la **plausibilité** (fonction de vérification) que le résultat est vrai. Dans le pas n°2 on évoque la compensation de la diminution de α par l'augmentation de γ : c'est une fonction d'**explication** que nous détaillerons dans la démonstration suivante.

2^{de} partie.

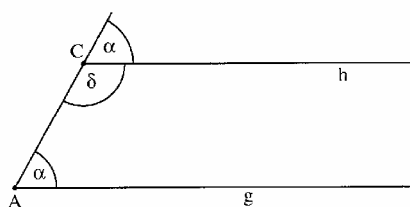


Fig.1

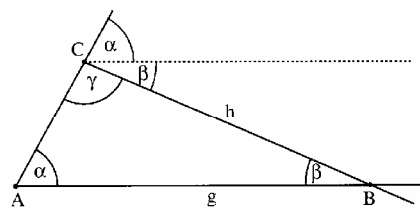


Fig.2

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse figure 1		g et h sont parallèles avec A, C, α , δ codés sur figure 1	
2	figure 1	définition	Les angles notés α sont correspondants (interprétation)	
3	1, 2	théorème des angles correspondants	Les angles notés α sont égaux	
4	figure 1	définition angles supplémentaires	$\alpha + \delta = 180^\circ$ (interprétation)	
5	0 hypothèse figure 2		g et sa parallèle passant par C, A, B, α , β , γ codés sur la figure h désigne (BC),	
6	figure 2	définition des angles alternes-internes	les angles notés β sont alternes internes	
7	5, 6	théorème des angles alternes-internes	les angles notés β sont égaux	
8	0 hypothèse figure 2	relation de Chasles	$\gamma = \delta - \beta$ (γ vaut δ diminué de β)	explication
9	4, 8	calcul	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	

Commentaire :

Cette validation constitue une **preuve** puisque la conclusion est affirmée comme conclusion nécessaire d'une suite de déductions.

Il y a recours un visuel à la figure pour la vérification de certaines définitions (angles correspondants, angles alternes internes).

Pour ce qui concerne la justification du recours à la figure, on peut remarquer d'une part, que de manière surprenante, la technologie des angles correspondants n'est pas explicitement évoquée et que l'égalité des angles notés α est **simplement codée sur la figure**. Nous avons déjà observé dans la leçon sur la démonstration du manuel allemand que le codage des figures était fréquent, et qu'il remplissait une fonction heuristique. L'auteur considère-t-il que le résultat est évident ? La lecture de la figure suffit-elle ?

D'autre part, si le théorème des angles alternes-internes (« si deux angles sont alternes-internes dans une configuration de droites parallèles alors ils sont égaux »²⁸⁵) semble évoqué au pas 6, l'hypothèse de ce théorème affirmant que les angles sont alternes-internes est affirmée, sans doute par **recours à la figure**.

En effet, parmi les technologies mobilisables dans le cours de la classe 7, les définitions des angles correspondants et des angles alternes-internes utilisent les **positions relatives d'objets**. « Deux angles, qui se situent du même côté d'une droite s , et des mêmes côtés des droites g et h , s'appellent angles correspondants [...] Deux angles, qui se situent de part et d'autre de s et de part et d'autre de g et de h , s'appellent angles alternes »²⁸⁶. Ces notions de positions relatives d'objets s'illustrent très bien par des figures et sont donc validées par constat visuel dans le cas de la démonstration ci-dessus. Un **contrat didactique** implicite consisterait, dans ces cas-là, à **recourir à la figure** pour la vérification par **constat visuel** des positions de part et d'autre et du même côté des définitions précédentes. Il semblerait que ce soit un **principe didactique** de la géométrie de l'ordre, dont la technologie est délicate à justifier rigoureusement sans recours à la figure : « les démonstrations tolèrent la relation avec la figure de la démonstration là où elle traite les énoncés géométriques utilisant la géométrie de l'ordre »²⁸⁷ [Holland 2001, p.54, trad. R.C.]. Dans le modèle de [Parzys 2003] cela correspond au fait de se placer dans une géométrie proto-axiomatique (G2) qui est incomplètement axiomatisée.

²⁸⁵ théorème évoqué dans [Lambacher Schweizer Kl.7, 1994, p.103]

²⁸⁶ [Lambacher Schweizer Kl.7, 1994, p.102]: „Zwei Winkel, die auf der gleichen Seite von s und auf den gleichen Seiten von g und h liegen, nennt man Stufenwinkelpaar [...] Zwei Winkel, die auf verschiedenen Seiten von s und auf verschiedenen Seiten von g und h liegen, nennt man Wechselwinkelpaar“.

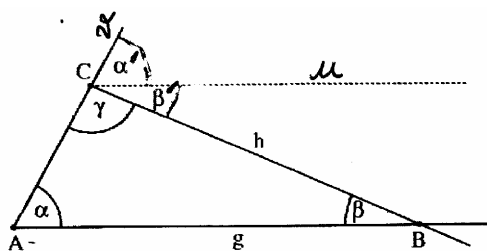
²⁸⁷ „die Beweise [...] lassen den Bezug auf die Beweisfigur dort zu, wo es sich um geometrische Aussagen handelt, die der Anordnungsgeometrie zugehören“

Cette démonstration est analogue à la preuve d'Euclide proposée dans la traduction de [Kayas 1978, p.20-21], où l'angle est considéré comme inclinaison d'une droite sur une autre droite sans orientation des angles.

Dans le pas 8, la diminution de γ est compensée par l'apparition de β . On retrouve ici une **explication** de Fischbein [1982, p.18, trad. R.C] proposée à ses étudiants: « le problème est de saisir intuitivement pourquoi l'effet constant est nécessairement conservé, imposé, dans les conditions variables d'un triangle non déterminé. C'est pourquoi la question n'est pas de montrer pratiquement que dans un exemple particulier les angles s'accordent comme le théorème le prévoyait. Ce qu'on doit « voir » c'est que, dans des conditions variables, par une manière de compenser, la somme doit être conservée »²⁸⁸. Fishbein précise qu'en créant le triangle par l'inclinaison de ce qui correspond ici à la droite h, l'angle \hat{B} « accumule ce qui est perdu » dans l'angle γ . Ce principe de compensation était déjà suggéré de manière pragmatique dans le pas 2. On retrouve historiquement chez Clairaut²⁸⁹ (1753) la même explication.

Démonstration formelle sans recours à la figure:

Voici une version sans recours à la figure inspirée de [Holland 2001, p.56] que nous pourrions qualifier de démonstration formelle, qui correspondrait dans le modèle de [Parzysz 2003] à la géométrie axiomatique (G3). La figure ci-dessous n'est proposée que pour faciliter la lecture des notations. Dans cette version on suppose qu'on a défini les angles comme angles orientés de demi-droites et que les définitions d'angles alternes-internes ou correspondants sont données à partir de cette notion d'angle.



Preuve formelle ou démonstration

n°	données	règles	conclusion
1	0 hypothèse		ABC triangle d'angles codés $\alpha = ([AB], [AC]), \beta = ([BC], [BA]),$ $\gamma = ([CA], [CB])$

²⁸⁸ «The problem is to grasp intuitively why that constant effect is necessarily conserved, imposed, in the variable conditions of a non-determined triangle. Intuitively it must be a problem of compensation. Therefore the matter is not of showing practically that in a particular the angle fit as the theorem predicted. What we have to see is that, in variable conditions, by way of compensation, the sum must be conserved»

²⁸⁹ Clairaut Alexis-Claude, *Eléments de géométrie*, David, Paris, 1763, pp.63-64, cité par [Balacheff 1991, p.210].

2	0 hypothèse		u est la demi-droite d'origine C, parallèle à g, et de même sens contraire à celui de la demi-droite [BA)
3	0 hypothèse		v est la demi-droite d'origine C, complémentaire à la demi-droite [CA)
4	0 hypothèse		$\alpha' = \text{angle}(u, v)$
5	0 hypothèse		$\beta' = \text{angle}([CB], u)$
6	1, 2, 3, 4	définition angles correspondants	α et α' sont correspondants
7	1, 2, 5	définition angles alternes	β et β' sont alternes internes
8	2, 6	théorème angles correspondants	$\alpha = \alpha'$
9	2, 7	théorème angles alternes	$\beta = \beta'$
10	3	définition angle plat	$([CA], v) = 180^\circ$
11	1, 2, 3, 4, 5	relation de Chasles	$([CA], v) = ([CA], [CB]) + ([CB], u) + (u, v) = \alpha' + \beta' + \gamma$
12	8, 9, 11	calcul	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Pourquoi cette seconde démonstration n'a-t-elle pas été retenue ?

Plusieurs **justifications didactiques** sont possibles :

- la technologie mathématique des angles orientés n'est pas au programme de la classe considérée,
- le formalisme alourdit la démonstration : il risque de noyer l'explication dans la précision ; la notion d'angle géométrique y est remplacée par celle d'angle orienté de demi-droites ; les objectifs généraux du Gymnasium indiquent : « on doit placer au premier plan moins l'exactitude formelle et le caractère complet que le contenu d'un théorème ou d'une idée de démonstration. Les considérations de plausibilité montrent aux élèves souvent davantage qu'une démonstration scientifiquement irréprochable » [Ministerium Lehrplanheft 4/1994, p.28, trad. R.C.]. On retrouve le principe de renoncement au formalisme évoqué²⁹⁰ dans le chapitre précédent.
- le recours à la figure est autorisé aussi longtemps qu'il n'est pas source d'erreur, notamment dans les premières années de Gymnasium. Les objectifs généraux du programme du Gymnasium précisent : « Au cycle inférieur [...] les nouvelles connaissances doivent être acquises d'abord par des procédures inductives et intuitives [induktive und anschauliche Verfahren] » [Ministerium Lehrplanheft 4/1994, p.28, trad. R.C.].

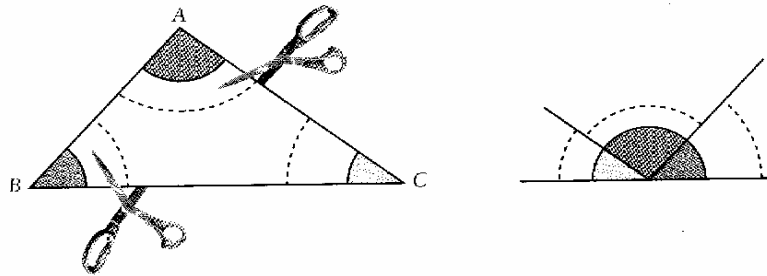
²⁹⁰ Par exemple au § 3.4.1.

4.3.2.2 Dans un manuel français

Livre de mathématiques, classe de cinquième (âge 12-13 ans), en France, édition Nathan, collection « Nouveau Transmath », 1997, p. 225, conforme au programme de 1997.

① En découpant

- Trace sur papier blanc un triangle ABC comme celui dessiné ci-dessous.
- Découpe chacun de ses angles, puis « regroupe »-les comme l'indique le dessin ci-dessous.



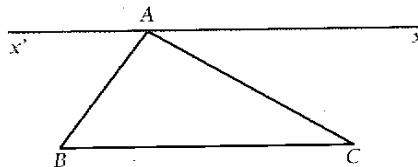
- Quelle semble être la valeur de la somme des angles du triangle ?

② En mesurant avec ton rapporteur

- Trace trois triangles.
- Mesure les angles de chacun de ces triangles à l'aide d'un rapporteur, puis calcule la somme des angles de chaque triangle.
- Quelle semble être la valeur de cette somme ?

③ Une démonstration à présent

La droite $(x'x)$ est parallèle à la droite (BC) et passe par A .



- Compare les angles \widehat{ABC} et $\widehat{BAx'}$, puis \widehat{ACB} et \widehat{CAx} .
- Explique alors pourquoi la somme des trois angles du triangle ABC est égale à 180° .

④ Applications

- Quelle est la mesure de chaque angle d'un triangle équilatéral ?
- ABC est un triangle rectangle en A .
Explique pourquoi les angles \widehat{B} et \widehat{C} sont complémentaires.

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180° .

Analyse linéaire.

1^{ère} argumentation

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		ABC triangle	
2	1	constat visuel	quand on découpe les angles et qu'on les assemble, la valeur de la somme des mesures des angles semble être 180° (interprétation)	découverte plausibilité

Commentaire :

L'imprécision du découpage ne garantit pas la coïncidence parfaite. En conséquence le résultat est plausible : la validation est donc une argumentation.

La technique de découpage et regroupement est une **technique pragmatique**.

Cette technique est justifiée par **constat visuel**.

La fonction de cette validation est de conjecturer le résultat : **fonction de découverte**.

La vérification sur un cas particulier persuade-t-elle ?

2^{nde} argumentation

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse	hypothèse	trois triangles	
2		constat visuel	pour chaque triangle, les mesures des angles sont...	
3	1,2	addition	pour chaque triangle, la valeur de la somme des angles semble être 180°(interprétation)	découverte plausibilité

Commentaire :

Ici l'imprécision des mesures ne garantit pas l'égalité du pas 3, c'est pourquoi on a une argumentation. La technique utilisée, mesure des angles, est une **technique pragmatique justifiée par constat visuel**. Elle est complétée par une technique de calcul justifiée par les règles de calcul de l'addition

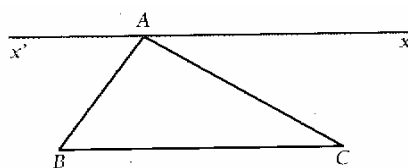
On **découvre** le résultat. Le fait d'effectuer plusieurs mesures, conséquence de l'aspect collectif du travail, renforce la **plausibilité** et pourrait suggérer une induction généralisant le résultat.

On notera enfin l'importance de l'ordre de ces deux argumentations. La seconde argumentation est une confirmation de la première.

Si on avait commencé par la seconde argumentation la conjecture aurait pu être autre (par exemple la somme des angles semble être égale à 179°) et, dans ce cas, la 1^{ère} argumentation ne l'aurait pas confirmée.

Analysons maintenant la preuve proposée.

Preuve



n°	données	règles	conclusion
1	0 hypothèse		ABC triangle
2	0 hypothèse		(x'x) est parallèle à (BC) et passe par A
3	1,2 figure	angles alternes internes	$\angle ABC = \angle BAx'$
4	1,2, figure	angles alternes internes	$\angle ACB = \angle CAx$
5	2, figure	relation de Chasles	$\angle x'Ax = \angle x'AB + \angle BAC + \angle CAx$ (interprétation)
6	2	définition angle plat	$\angle x'Ax = 180^\circ$ (interprétation)
7	3,4,5,6	calcul	$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$ (interprétation)

Commentaire :

Cette validation constitue une preuve puisque la conclusion est affirmée comme conclusion nécessaire d'une suite de déductions.

En l'absence de texte de démonstration, nous avons interprété la réponse au 3a avec recours à la figure. Cette interprétation est justifiée par le fait que la définition d'angles correspondants et d'angles alternes-internes est donnée dans le livre²⁹¹ uniquement à partir d'une figure codée et coloriée, sans aucune définition discursive. On voit là une différence par rapport à la définition allemande. La technologie justifiant la technique de recours à la figure est mathématique : définitions et propriétés des angles. On remarquera qu'un élément de cette technologie, la définition des angles alternes-internes, est défini par recours à la figure. En situation de classe, le rôle du professeur est déterminant dans la phase d'institutionnalisation de la preuve et c'est lui qui gèrera ce recours ou non à la figure.

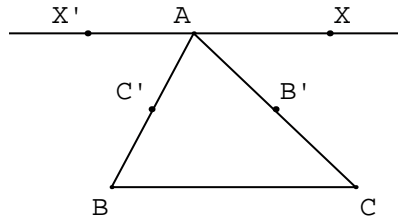
[Balacheff 1991, p.211] précise que cette idée de preuve serait attribuée à l'école pythagoricienne.

Démonstration suggérée par les programmes [Ministère 1998, p.65] :

« En classe de cinquième, pour établir le résultat sur la somme des angles d'un triangle, on mobilise deux fois le même pas de démonstration, qui consiste à utiliser une symétrie centrale pour établir une égalité d'angles »

On note B' et C' milieux respectifs de [AC] et de [AB], $s_{B'}$ la symétrie de centre B' et $s_{C'}$ la symétrie de centre C', $s_{B'}([CB]) = [Ax]$ et $s_{B'}([BC]) = [Ax']$

²⁹¹ Nathan cinquième, 1997, collection Transmath, p.184



Avec les notations précédentes on démontre que $s_{B'}(\angle ACB) = \angle CAx$ et $s_{C'}(\angle CBA) = \angle x'AB$. Une difficulté est de démontrer que $\angle xAB + \angle BAC + \angle CAx = \angle x'Ax$ sans recours à la figure. En effet la relation de Chasles avec des angles non orientés pose problème. De même pour démontrer que $\angle x'Ax \neq 0$. On retrouve le problème des angles orientés.

4.3.2.3 Comparaison

Similitudes :

- Dans les argumentations, les techniques pragmatiques utilisées sont des manipulations (articulation meccano de la figure, découpages), des observations (d'une figure ou liée à l'usage d'instruments) ; les techniques non pragmatiques sont mathématiques : applications de règles de calcul (en général exprimé en langage symbolique) ; les technologies non mathématiques mobilisées sont le constat visuel et l'induction et les technologies mathématiques mobilisées sont celle des angles et des règles de calcul.
- Dans les preuves, la technique pragmatique utilisée est le recours à la figure, il n'y a plus de manipulation ; les autres techniques sont des techniques mathématiques : applications de définitions ou théorèmes sur les angles.
- On observe donc la présence de techniques pragmatiques aussi bien dans les argumentations que dans les preuves. Des techniques et des technologies mathématiques sont présentes dans les argumentations. Par contre il y a au moins un éléments de technologie non mathématique (dans nos exemples, constat visuel ou induction) dans chaque argumentation. Dans les preuves, des technologies mathématiques sont complétées par des constats visuels pour les parties relatives à la géométrie de l'ordre, en l'absence de technologie mathématique sur les angles orientés.
- Les technologies mobilisées dans le manuel français et dans le manuel allemand sont semblables, à l'exception de la définition des angles correspondants sollicitée dans le seul manuel allemand.

- Les fonctions sont analogues, avec une nuance pour la fonction d'explication davantage mise en évidence dans l'exemple allemand (pas n°2 de l'argumentation et pas n° 8 de la démonstration).

Différences

- Les structures des validations sont légèrement différentes, ce qui est bien représenté par des figures différentes. La validation allemande utilise les angles correspondants, ce qui n'est pas nécessaire dans la validation française.
- Les argumentations et la démonstration apparaissent dans une section intitulée « activités » distincte de la section « cours » dans le livre français, alors que cette distinction n'existe pas dans le livre allemand.
- On notera au niveau des validations des figures une technique de codage des figures plus développée dans le manuel allemand (ici avec le codage des angles). Ceci semblerait répandu (comme le montrerait l'observation d'autres manuels, de situations de classe [Knipping 2003, p.134] ou notre expérience de correcteur du baccalauréat franco-allemand).
- La définition des angles alternes-internes est définie par recours à la figure dans le manuel français et par un texte en langue naturelle dans le manuel allemand.

Cet exemple montre l'existence de validations semblables dans les deux institutions quant à l'utilisation des arguments pragmatiques, du recours à la figure et des arguments mathématiques. On peut donc affirmer ces similitudes malgré la différence d'institutions. Par contre, pour les différences observées, il est difficile de savoir si elles sont le fait de la différence entre pays ou simplement de la fluctuation entre manuels.

Il est important de distinguer argumentation et preuve. Si on utilise les démarches précédentes d'argumentation comme démarches de preuve (par exemple dans le cadre d'un groupe d'élèves) alors on est dans le cas des preuves pragmatiques de Balacheff. Cette « démarche, qui relève de l'empirisme naïf, consiste à réaliser les mesures et les calculs utiles pour quelques triangles et à conclure que la propriété observée sur ces quelques cas sera **toujours**²⁹² vérifiée. Cette démarche est facilement disqualifiée en mettant en évidence l'inévitable incertitude sur les mesures ». Pour ce qui concerne le découpage, « cette preuve relève comme la précédente d'un empirisme naïf et est susceptible d'erreurs pratiques tout autant que le recours à la mesure » [Balacheff 1991, p.206-207].

²⁹² C'est nous qui soulignons ce mot qui fait passer de l'argumentation pragmatique qui affirme la plausibilité à la preuve pragmatique qui affirme la certitude.

Comparaison entre argumentation et preuve :

On a observé dans les deux manuels la répartition suivante des validations de la propriété de la somme des angles d'un triangle.

validation	arguments	fonction de la validation
argumentation	argument visuel, argument pragmatique, arguments mathématiques	découverte, plausibilité, explication
preuve	constat visuel, arguments mathématiques	preuve, explication

On observe que le seul argument pragmatique qui subsiste dans la preuve par apport à l'argumentation, est l'argument visuel avec le recours à la figure. Les autres arguments pragmatiques présents dans (découpage, recours à la figure articulée, recours aux mesures) ont été remplacés par des arguments mathématiques ou des recours à la figure sont utilisés. Le recours à la figure peut remplacer un argument mathématique non mobilisable.

On observe que dans les deux pays on peut mettre en garde contre le recours à la figure (cas particulier ou figure fausse) comme le montre le paragraphe suivant.

4.3.3 La mise en garde contre le recours à la figure

Le recours à la figure peut intervenir comme une technique (manière de valider) qui évite le formalisme lourd d'une écriture qui ne recourt pas à la figure (justification didactique). On codifie sur la figure un discours en langue naturelle. Dans ce cas, le recours à la figure (technique) est justifié par des considérations didactiques (technologie didactique). Si la technologie (définition ou propriétés) est définie sans recours à la figure, l'utilisation de la technologie (vérification de la définition pour l'appliquer, vérification des hypothèse d'un théorème pour l'appliquer) peut s'effectuer par recours à la figure. Dans l'exemple allemand où les angles correspondants ou alternes-internes sont définis en langue naturelle, le recours à la figure permet, par constat visuel, de vérifier les notions « de part et d'autre » ou « du même côté ». On a ici un changement de registre.

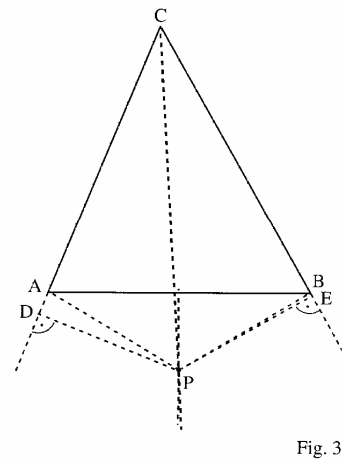
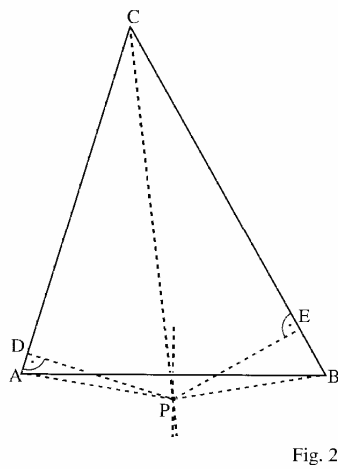
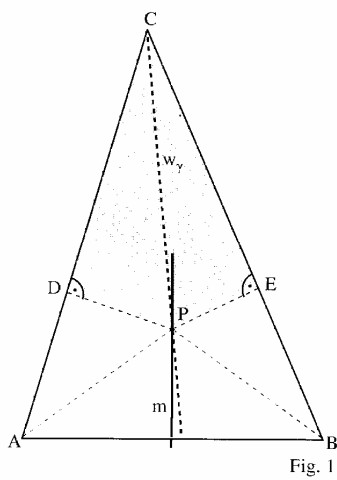
Mais ce recours à la figure peut se justifier autrement:

- un argument visuel permet de remplacer une autre technologie non mobilisable (dans notre exemple celle des angles orientés),

- le recours à la figure est présent dans la technologie (si les éléments de technologies que sont les définitions ou les propriétés sont énoncés par recours à la figure comme c'est le cas dans l'exemple français pour les angles alternes internes ou correspondants).

4.3.3.1 Dans un manuel allemand : figure fausse.

Par exemple dans le livre ²⁹³de classe 8 on propose de prouver que tout triangle est isocèle.



²⁹³ livre de mathématiques, en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), Klasse 8, p.120, première édition 1995, programme encore appliqué en 2000.

Zum „Beweis“ betrachten wir Fig. 1. In einem beliebigen Dreieck ABC schneiden sich die Winkelhalbierende von γ und die Mittelsenkrechte m von AB in P. Die Punkte D und E sind die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten AC und BC.

- 1 a) In welchen Stücken stimmen in Fig. 1 die Dreiecke PDC und PEC überein? Was folgt also für diese Dreiecke?
- b) Untersuche entsprechend die Dreiecke APD und BPE.
- c) Welcher letzte Schritt fehlt noch zum „Beweis“ unserer Behauptung?

Geht man den „Beweis“ noch einmal durch, so entdeckt man keinen Fehler in den Überlegungen zur Kongruenz der Dreiecke. Aber: Schneiden sich überhaupt die Winkelhalbierende und die Mittelsenkrechte? Doch, dies ist der Fall! Denn wenn kein Schnittpunkt P existieren würde, so wären w_γ und m parallel. Dann würde also auch die Winkelhalbierende senkrecht auf AB stehen. Dies ist aber nur bei gleichschenkligen Dreiecken möglich. Der Fehler muss also woanders liegen.

Vielleicht liegt der Schnittpunkt P gar nicht innerhalb des Dreiecks. Richtig! Wir erinnern uns an folgenden Sachverhalt: In einem nichtgleichschenkligen Dreieck ist jede Seitenhalbierende länger als die zur gleichen Ecke gehörende Winkelhalbierende (vgl. S. 118, Aufg. 32). Aus dieser Tatsache folgt, dass der Schnittpunkt P außerhalb des Dreiecks liegen muss. Wir fertigen also eine neue Zeichnung an, in der der Schnittpunkt P außerhalb des Dreiecks liegt (Fig. 2).

- 2 Führe die Gedankengänge aus Aufgabe 1 anhand der Fig. 2 durch. Klappt der „Beweis“ auch jetzt?
- 3 Könnte es nicht sein, dass die Lote die Dreiecksseiten nicht innerhalb des Dreiecks, sondern außerhalb treffen (Fig. 3)? Führe erneut den „Beweis“ durch. Wie muss der Gedankengang aus Teilaufgabe 1c) geändert werden?
- 4 Zeichne selbst ein nichtgleichschenkliges Dreieck. Konstruiere die Winkelhalbierende von γ und die Mittelsenkrechte m von AB. Wo steckt also der Fehler?

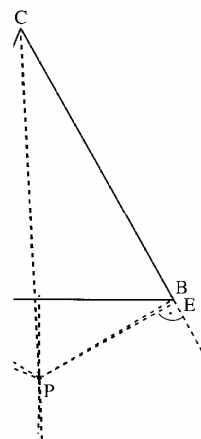


Fig. 3

Traduction :

« Pour la « démonstration » on considère la figure 1. Dans un triangle ABC quelconque, la bissectrice de l'angle γ [codage de l'angle de sommet C] et la médiatrice m du segment [AB] se coupent en P. Les points P et E sont les pieds des hauteurs abaissées de P sur les côtés respectifs [AC] et [BC].

- 1)
 - a) Quels sont les éléments isométriques entre PDC et PEC ? Qu'en déduire pour ces triangles ?
 - b) Etudier de façon adéquate les APD et BPE.
 - c) Quel dernier pas de démonstration manque encore pour conclure affirmation.»

On peut proposer l'analyse linéaire suivante d'une preuve que ABC est isocèle en C.

n°	données	règles	conclusion
1	0 hypothèse		ABC triangle
2	0 hypothèse		w_γ bissectrice de γ
3	0 hypothèse		m la médiatrice de [AB] et I le milieu de [AB]
4	0 hypothèse		P le point d'intersection de w_γ et m
5	0 hypothèse		D le pied de la hauteur abaissée de P sur [CA]
6	0 hypothèse		E le pied de la hauteur abaissée de P sur [CB]
7	1, 2, 5, 6	somme des angles d'un triangle	CPD et PEC ont leurs angles respectivement égaux
8	7, 2	triangles isométriques	CPD et PEC sont isométriques (un côté commun

			[CP] compris entre deux angles respectivement égaux)
9	8	triangles isométriques	$DP=PE$ et $CD=CE$
10	3, 4	médiatrice	$AP=PB$
11	5, 6	théorèmes de Pythagore (dans DPA et DEB)	$DA^2=AP^2-DP^2$ $EB^2=PB^2-PE^2$
12	9, 10,11	calcul	$DA=EB$
13	5, 6		$D \in [AC]$ et $E \in [BC]$
14	9, 12, 13	relation de Chasles	$AC=AB$
15	14	triangle isocèle	ABC isocèle en A

Commentaire:

L'erreur se situe dans le pas 13 qui recourt à la figure, laquelle est incorrecte.

Plusieurs recours à la figure sont implicitement effectués : l'hypothèse que la médiatrice et la bissectrice se coupent en un seul point P (ce qui n'est pas le cas lorsque le triangle est isocèle), l'hypothèse que les projetés de P sur les côtés soient à l'intérieur des segments ; pour ce dernier point on est bien dans un problème de géométrie de l'ordre pour lequel le recours à la figure est courant.

Si on avait utilisé le logiciel « Cabri géomètre » pour tracer la figure, on n'aurait pas obtenu cette erreur de dessin.

4.3.3.2 Dans un manuel français : figure cas particulier.

Exemple issu d'un livre²⁹⁴ de quatrième.

²⁹⁴ Mathématiques quatrième, Hatier, collection triangle, 1998, p.97

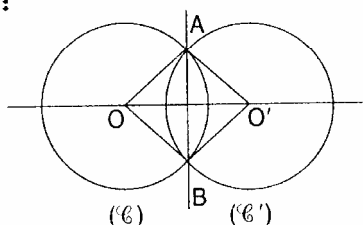
4

Voici un énoncé de problème :
Soit (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') deux cercles de centres O et O' qui se coupent en A et B . Démontrer que (OO') est perpendiculaire à (AB) .

a/ Effectuer cette démonstration.

b/ Voici des démonstrations rédigées par des élèves. Préciser pour chacune d'elles ce qui est faux et/ou ce qui manque.

Vincent :



- $OAO'B$ est un losange.
Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
Donc (OO') et (AB) sont perpendiculaires.

Commentaire :

La figure de Vincent est un cas particulier, les deux cercles ayant été dessinés de même rayon. Dans ce cas particulier : $OA=O'A=O'B=OB=$ rayon commun aux deux cercles. « $OAO'B$ est un losange » se déduit par recours à cette figure particulière. Dans le cas général il n'y a aucune raison de supposer que les cercles soient de même rayon et donc que $OAO'B$ soit un losange.

L'intention didactique est de mettre en garde contre une figure particulière, tout comme l'exemple allemand mettait en garde contre une figure incorrecte. Dans les deux cas, le recours à la figure produit une validation incorrecte, car une conclusion intermédiaire fautive (ici « $OAO'B$ est un losange ») est obtenue par recours à la figure.

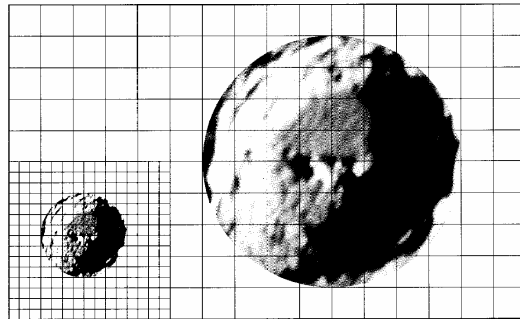
Examinons la validation d'un autre théorème énonçant les formules du périmètre et de l'aire d'un cercle.

4.3.4 Le périmètre et l'aire du cercle

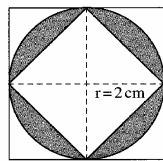
4.3.4.1 Dans un manuel allemand

4.3.4.1.1 Aire du disque

Livre de mathématiques, classe 10 (15-16 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.74), première édition 1996, programme encore appliqué en 2000.

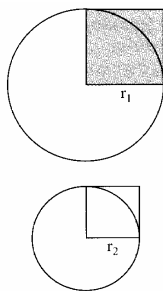


- 1** Die beiden Bilder zeigen den Mondkrater „Kopernikus“ auf zwei verschiedenen Mondkarten.
- Kann man den Bildern entnehmen, wie groß die Fläche des Kraters in Wirklichkeit ist?
 - Wie viele der eingezeichneten Quadrate liegen ganz in der Kraterfläche? Warum sind es auf beiden Karten gleich viele?
 - Gib für den Flächeninhalt des Kraters einen Näherungswert in der Flächeneinheit „1 Quadratfläche“ an.
 - Wie lautet der Näherungswert in der Einheit „1 Radiusfläche“?



Bisher haben wir Flächeninhalte von Vielecken berechnet. Nun versuchen wir, Flächeninhalte von krummlinig begrenzten Flächen zu bestimmen. Die wichtigste derartige Figur ist der Kreis.
Der Flächeninhalt des Kreises auf dem Rand ist kleiner als 16 cm^2 , aber größer als 8 cm^2 .
Vergleicht man den Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Flächeninhalt r^2 des Radiusquadrates, so stellt man fest: Bei allen Kreisen ist

$$2r^2 < A < 4r^2 \quad \text{oder} \quad 2 < \frac{A}{r^2} < 4.$$



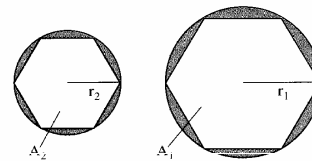
Die Schranken 2 und 4 hängen nicht von r ab; wir können daher vermuten: Bei allen Kreisen ist der Quotient $\frac{A}{r^2}$ die **gleiche** (zwischen 2 und 4 gelegene) Zahl, bzw: Bei allen Kreisen ist der Flächeninhalt **dasselbe** Vielfache von r^2 .

Um die Vermutung zu überprüfen, denken wir uns regelmäßige Vielecke derselben Eckenanzahl n in zwei Kreise einbeschrieben. Da diese n -Ecke ähnlich sind, gilt für ihre Flächeninhalte A_1 und A_2 :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}.$$

D. h.: Bei festem n ist der Quotient aus n -Eck-Inhalt und Inhalt des Radiusquadrates bei allen Kreisen gleich.

Da sich der Inhalt eines n -Ecks bei hinreichend großer Eckenanzahl vom zugehörigen Kreisinhalt nur beliebig wenig unterscheidet, muss in gleicher Weise auch für die Kreisinhalte gelten:



Satz: Der Quotient $A : r^2$, d. h.:
(Flächeninhalt des Kreises) : (Flächeninhalt des Radiusquadrates)
ist bei allen Kreisen gleich.

Indications de traduction :

Argumentation

L'auteur commence par une activité d'approche autour d'évaluation par quadrillage d'aires.

Il poursuit en proposant la conjecture suivante, qui correspond à une argumentation.

« L'aire du disque dans la marge est plus petite que 16 cm^2 , mais plus grande que 8 cm^2 . On compare l'aire A d'un disque avec l'aire r^2 du carré de côté r , on constate ainsi que : pour tous

les cercles on a : $2 r^2 < A < 4 r^2$ ou $2 < \frac{A}{r^2} < 4$.

Les bornes 2 et 4 ne dépendent pas de r . On peut **conjecturer** que pour tous les cercles le

quotient $\frac{A}{r^2}$ est le même (compris entre 2 et 4) »

Intéressons-nous à la validation de cette conjecture dans le manuel.

Preuve

« Pour vérifier notre conjecture, nous considérons deux polygones réguliers de même nombre n de sommets inscrits dans deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 . Comme ces deux polygones sont semblables, leur aires A_1 et A_2 sont dans le rapport :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \text{ ou } \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}.$$

Cela signifie que, pour un n fixé, le quotient de l'aire d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle de rayon r et l'aire d'un carré de côté r est le même pour tous les cercles.

Comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques :

Théorème : Le rapport $\frac{A}{r^2}$ est le même pour tous les disques ».

Analyse linéaire.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		deux polygones réguliers à n sommets respectivement inscrits dans deux cercles d rayons respectifs r_1 et r_2	
2	1	triangles semblables	les deux polygones sont semblables dans le rapport des rayons	règles vues en classe 9
3	2	aire des polygones semblables	le rapport de l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un cercle au carré du rayon de ce cercle est constant	règles vues en classe 9 ; explication
4	0 figures du carré et de l'hexagone inscrits dans un cercle	Induction visuelle	pour n suffisamment grand, l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un disque diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque	explication ; propédeutique aux limites
5	3, 4	passage à la limite - autorité	le rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon est constant	preuve

Commentaire :

Cette validation n'est pas une argumentation puisque la conclusion est affirmée avec certitude, avec notamment un statut de théorème.

Etudions les deux pas contenant des arguments non mathématiques.

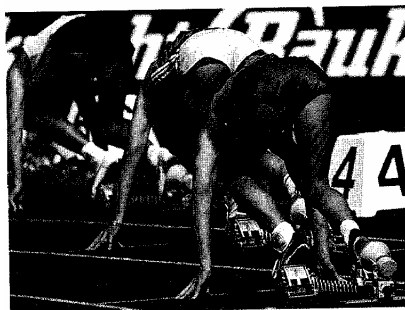
Le pas n°4 contient un argument d'induction. En effet après avoir vérifié (visuellement) que du carré à l'hexagone, l'aire du polygone régulier inscrit dans le cercle se rapproche de l'aire du cercle, il est induit que pour n suffisamment grand, l'aire d'un polygone régulier inscrit

dans un disque diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque. Il n'est pas produit ici de justification mathématique de cette affirmation. C'est pourquoi nous évoquons un **argument d'induction**, qui n'est pas un argument mathématique.

Dans le pas n°5, partant du rapport de l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un cercle au carré du rayon de ce cercle constant, on effectue un passage à la limite. A la limite, l'aire du polygone inscrit dans le cercle est égale à celle du cercle. Donc Le rapport de l'aire de ce polygone au carré de son rayon est égal au rapport de l'aire du disque au carré de son rayon. Comme ce rapport est constant pour tous les polygones, il est constant pour tous les cercles. Ce passage à la limite est affirmé sans qu'aucune justification mathématique ne soit donnée. C'est pourquoi nous parlerons d'**argument d'autorité** exprimant un **passage à la limite**. Cet argument d'autorité n'est pas un argument mathématique.

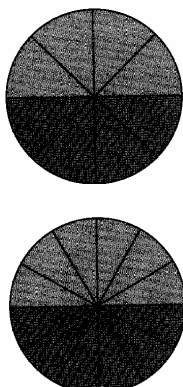
Livre de mathématiques, classe 10 (15-16 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.78), première édition 1996, programme encore appliqué en 2000. Il s'agit du même livre que l'exemple précédent.

Périmètre du cercle

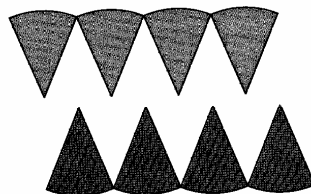


1 Die Abbildung zeigt die Startsituation bei einem 400-m-Lauf. Warum liegen die Startpunkte der Sportler auf den einzelnen Bahnen zueinander versetzt?

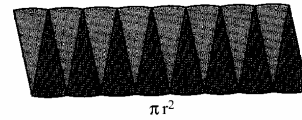
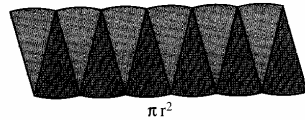
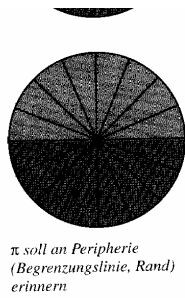
2 Ermittle mit Hilfe einer Schnur Näherungswerte für den Umfang und den Radius kreisrunder Gegenstände (Konservendosen, Kochtopf usw.). Berechne jeweils, wie viel Radiuslängen zusammen den Umfang ergeben.



Wir versuchen nun, vom Flächeninhalt A eines Kreises auf seinen Umfang zu schließen. Dazu denken wir uns die Kreisfläche wie einen Kuchen in gleiche Teile zerschnitten und die Teile wie folgt angeordnet:



Wählt man nun die Zahl der Kreisteile hinreichend groß, dann unterscheidet sich die so entstandene Fläche um beliebig wenig von einem Rechteck mit der Länge $\frac{1}{2}u$ und der Breite r . Da ihr Inhalt stets πr^2 ist, muss daher $\frac{1}{2}ur = \pi r^2$ gelten und somit $u = 2\pi r$.



Satz: Ein Kreis mit dem Durchmesser d (dem Radius r) hat den Umfang
 $u = \pi \cdot d$ ($u = 2\pi r$).

Beispiel 1:

- a) Hat ein Kreis den Radius $r = 0,75$ m, so gilt $u = \pi \cdot 1,50 \text{ m} \approx 4,71$ m.
 - b) Bei einem Fahrrad hat jedes Rad einen Durchmesser von 80 cm; also gilt für den Radumfang $u = \pi d \approx 3,14 \cdot 80 \text{ cm} \approx 2,51$ m.
- Legt das Fahrrad z. B. 1 km zurück, so ist die Anzahl der Radumdrehungen ungefähr $(1000 : 2,51)$, also etwa 398.

Indications de traduction :

Après la validation de la formule de l'aire A d'un disque de rayon r indiquant que le rapport A sur r^2 est constant, le livre définit le nombre π comme étant ce rapport constant.

Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de π (méthode d'Archimède,...)²⁹⁵.

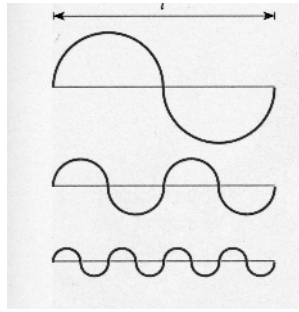
On établit ensuite le théorème ci-dessus sur le périmètre du cercle.

On décompose le disque en secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former un figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure ci avant.

« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre et de largeur un rayon ». Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment établi que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que le périmètre du cercle vaut π fois le diamètre.

On signale cependant par la figure ci-dessous qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment

²⁹⁵ pages 75, 83, 84



Analyse linéaire.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		3 disques découpés respectivement en 8, 12, 16 secteurs identiques	
2	1	constat visuel	l'aire de la surface reconfigurée se rapproche de plus en plus de celle d'un rectangle de hauteur le rayon r du disque et de base un demi-périmètre de cercle	explication
3	2	induction	on peut choisir un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre ($\frac{1}{2} u$) de cercle et de largeur un rayon r	explication, propédeutique
4	3	autorité (passage à la limite)	l'aire du disque vaut l'aire du rectangle précédent (interprétation)	
5	2	formules de l'aire du disque et de l'aire du d'un rectangle	l'aire du disque vaut : πr^2 ; l'aire du rectangle vaut : $\frac{1}{2} u \times r$	aire du disque vue précédemment, aire du rectangle vue en classe 5.
6	4, 5	calcul	le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$.	

Commentaire :

Cette validation n'est pas une argumentation puisque la conclusion est affirmée avec certitude, avec notamment un statut de théorème.

Etudions les pas contenant des arguments non mathématiques.

Le pas n°2 est un constat visuel avec 8 secteurs puis 16 secteurs de l'apparition d'une figure se rapprochant d'un parallélogramme. Ici la recombinaison des secteurs en espèce de parallélogramme pourrait se montrer avec les propriétés géométriques disponibles en classe 10. Le recours au constat visuel permet de simplifier l'exposé.

Par contre le pas n°3 contient un argument d'induction. En effet après l'avoir vérifié sur quelques cas, on conclut qu'on peut choisir un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre ($\frac{1}{2}u$) de cercle et de largeur un rayon r . Il n'est pas produit ici de justification mathématique de cette affirmation. C'est pourquoi nous évoquons un **argument d'induction**, qui n'est pas un argument mathématique.

Dans le pas n°4, par passage à la limite, on déduit que l'aire du disque vaut l'aire du rectangle précédent. Ce passage à la limite est affirmé sans qu'aucune justification mathématique ne puisse être donnée à ce niveau de classe. C'est pourquoi nous parlerons d'**argument d'autorité** exprimant un **passage à la limite**. Cet argument d'autorité n'est pas un argument mathématique.

4.3.4.2 Dans un manuel français

4.3.4.2.1 Périmètre du cercle

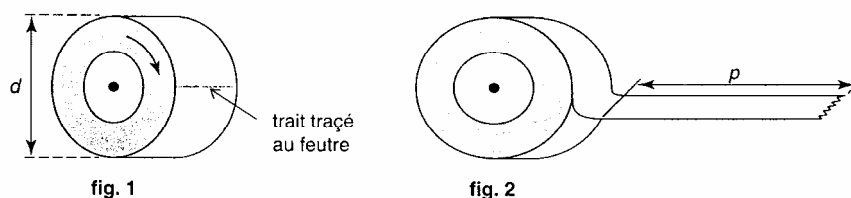
Livre de mathématiques, classe de sixième (âge 11-12 ans), en France, édition Hatier, collection « le nouveau Pythagore », 1996, pp.208-209, conforme au programme de 1996.

Périmètre du cercle.

Matériel : un rouleau de papier adhésif, feutre, ciseaux, règle graduée...

A. Expériences, mesures et calculs

- Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif.
Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban (fig. 1).



Dérouler le ruban jusqu'au trait, puis le fixer sur une feuille.

- Mesurer la longueur p du ruban déroulé (fig. 2).
Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) $p =$					
Diamètre (cm) $d =$					
$p \div d \approx$					

B. Conclusion

- Que constate-t-on dans ce tableau ?
- Compléter la phrase :

Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

- Compléter la formule : $p = \pi \times \dots$ avec $\pi \approx \dots$

Analyse linéaire.

On propose de reconstruire une validation attendue à partir des questions posées et du contexte.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		différents cercles (de rouleaux de rubans adhésifs d'élèves de la classe)	
2	1	constat visuel (mesure)	pour chaque cercle le périmètre et le diamètre valent...	
3	2	calcul	pour chaque cercle, le rapport périmètre sur diamètre vaut environ...	découverte/ plausibilité (calcul approché)
4	3	induction (autorité)	pour tout cercle le rapport précédent est constant et est noté π avec $\pi \approx \dots$	plausibilité
5	4	calcul	le périmètre d'un cercle de diamètre D vaut πD	

Commentaires :

Cette validation constitue une preuve puisque la conclusion est affirmée comme conclusion nécessaire d'une suite de déductions.

La technique de mesure du pas n°2 est **pragmatique** car justifiée par le constat visuel. Elle remplit une fonction de **découverte** de la constance du rapport périmètre/diamètre.

Elle pourrait mener, à l'aide d'un raisonnement inductif, à une argumentation affirmant le résultat probable. En l'absence de démonstration mathématique possible dans cette classe compte tenu des technologies mobilisables, on préfère utiliser l'**autorité** du livre (et éventuellement du professeur) qui impose le résultat comme vrai, s'appuyant sur l'induction à partir des mesures. En imposant le résultat comme vrai, le recours à l'argument d'autorité remplit la **fonction de preuve** qui ne peut être remplie par une démonstration mathématique en l'absence de technologie mobilisable adéquate permettant le passage à la limite. Le résultat serait imposé comme vrai car utilisé par la suite comme élément de technologie justifiant des calculs de périmètre de cercle.

Il y a un **principe didactique du théorème admis** qui consiste à utiliser l'argument d'autorité pour valider des théorèmes à mobiliser pour la suite de la scolarité, qu'on retrouve dans les programmes parfois sous la mention « preuve admise » lorsque l'absence de technologie mobilisable ou les contraintes de la situation d'enseignement (manque de temps, difficultés de la classe, manque d'intérêt...) ne le permettent pas : « À ce propos, les *études expérimentales* (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves *ne les confondent avec des démonstrations* : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, *on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré* » [Ministère 1998, p.43]. On pourra regretter ici que la distinction entre conjecturer et démontrer ne soit pas aussi claire dans l'énoncé de l'activité ci-dessus, et qu'il n'apparaisse pas clairement que le résultat est admis.

4.3.4.2 Aire du disque

Livre de mathématiques, classe de cinquième(12-13 ans), en France, édition Hatier, collection « le nouveau Pythagore », 1997, p.172, conforme au programme de 1997. Ce livre suit le précédent livre dans la même collection.

Aire du disque

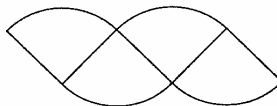
Entre nous

- Objectifs :
- Utiliser la formule du périmètre du cercle
 - Découvrir la formule de l'aire d'un disque.

- Remarques :
- Un peu de patience : la formule est au bout.
 - Les collages sont plus aisés et plus propres avec du papier autocollant.

A. Découpage et collage

1. Dessiner et découper 4 disques de mêmes dimensions.
2. Couper le premier disque en 4 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 4 secteurs.



3. Couper le second disque en 8 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 8 secteurs.
4. Même travail avec 16 secteurs (et avec 32 si vous voulez).

B. Formule

1. À quoi ressemble la figure obtenue en collant tête-bêche des secteurs nombreux et très fins ?
En déduire une formule pour calculer l'aire d'un disque.
2. Un disque compact fait 12 cm de diamètre.
Peu importe son air ! Calculer son aire.

Analyse linéaire.

On propose de reconstruire une validation attendue à partir des questions posées et du contexte.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		4 disques découpés respectivement en 4, 8, 16, 32 secteurs identiques	
2	1	constat visuel, induction	la surface reconfigurée ressemble de plus en plus à un parallélogramme de hauteur le rayon R du disque et de base un demi périmètre de cercle	explication/ découverte/ persuasion
3	2	autorité	l'aire du disque vaut l'aire du parallélogramme précédent	vérification
4	4	formules de l'aire d'un parallélogramme et périmètre d'un cercle	le parallélogramme précédent est d'aire : πR^2	
5	3, 4	calcul	l'aire du disque de rayon R vaut : πR^2	

Commentaire :

Cette validation constitue une preuve puisque la conclusion est affirmée comme conclusion nécessaire d'une suite de déductions.

La technique du pas n°2 est **pragmatique** (découpage, reconfiguration). Cette technique est une **explication** puisqu'elle montre, par reconfiguration, le lien entre l'aire du

parallélogramme et celle du disque. Elle est justifiée par **constat visuel** et une induction à partir des 4 découpages.

Le pas n°3 utilise l'**autorité** du livre (et éventuellement du professeur) qui impose le résultat comme vrai mais en s'appuyant également sur les résultats des techniques pragmatiques.

Une démonstration mathématique ne nous apparaît pas possible compte tenu de la technologie mobilisable en cinquième qui ne permet pas, par exemple, le passage à la limite implicite dans le pas n°2.

Enfin on notera que pour passer de l'argumentation à la démonstration on utilise un argument d'autorité. Mais cet argument à lui seul pourrait ne pas suffire à persuader les élèves, c'est pourquoi on a recours un argument pragmatique, plus persuasif.

Enfin la technologie mathématique utilise les formules d'aire du parallélogramme (mobilisable en cinquième) et de périmètre du cercle (mobilisable en sixième).

4.3.4.3 Comparaison

- Les technologies non mathématiques sont analogues : une technique pragmatique de découpage/recomposition des secteurs est justifiée par constat visuel et un argument d'autorité.
- Dans l'institution française, on n'a pas formulé l'induction du passage à la limite sous forme générique (comme dans le cas allemand). Plusieurs hypothèses peuvent être formulées : difficulté cognitive pour des élèves de classe de cinquième à recevoir un raisonnement de passage à la limite, absence de fonction préparatoire à l'enseignement des limites du fait de l'éloignement des classes de sixième et cinquième par rapport à la classe de première où sont introduites les limites. Par contre, dans l'institution allemande la fonction préparatoire à l'enseignement des limites (**fonction propédeutique de la fonction découverte**), explicitement mentionnée dans les programmes de classe 10, peut expliquer cette formulation. Le programme précise en effet : « Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle ainsi que du volume de solides déterminés. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul »²⁹⁶ [Ministerium 4/1994, p.481]

²⁹⁶ „Den Schülerinnen und Schülern werden die Probleme bei der Bestimmung von Umfang und Inhalt des Kreises sowie des Rauminhalts bestimmter Körper verständlich. Sie bekommen Einblick, wie eine propädeutische Grenzwertbetrachtung die Berechnung ermöglicht“

- Les technologies mathématiques sont différentes : dans l'institution française, formule de l'aire d'un parallélogramme, calcul ; dans l'institution allemande, triangles semblables, formule de l'aire d'un rectangle et calcul.
- Dans l'institution française, on a commencé par valider la formule du périmètre en sixième et c'est cette formule qu'on utilise pour valider la formule de l'aire ; sans doute parce que, ne disposant pas de la technologie sur le rapport des aires de figures semblables utilisée dans la validation allemande, il n'était pas aisé de mettre en place un argument pragmatique pour mesurer les aires (à l'exception des techniques de quadrillage assez inconfortables ou des techniques utilisant des logiciels de géométrie plane avec calcul d'aires) ; par contre cet argument paraît plus facile à mettre en place pour mesurer les périmètres ; on voit donc que la disponibilité de technologies mathématiques peut influencer l'ordre de présentation des validations.

validation	arguments	fonction de la validation
argumentation	constat visuel, induction,	découverte, plausibilité, explication
preuve	constat visuel, induction, argument d'autorité, arguments mathématiques	explication, propédeutique, preuve

On observe la coexistence d'arguments mathématiques et d'arguments pragmatiques, visuels, d'induction, ou d'autorité. On aurait pu se contenter d'un seul argument d'autorité admettant le résultat. La volonté de remplacer les arguments mathématiques non mobilisables par d'autres types d'arguments vise à remplir des fonctions de la validation (explication, propédeutique, plausibilité) que le seul argument d'autorité remplit mal.

Parmi les démonstrations mathématiques de ces résultats on peut noter :

- celles d'Archimède évoquées dans [Carmati, Delbreil 1982, pp.113], [Deledicq 2003, pp'-5] et qui utilise le raisonnement par l'absurde qui ne correspond pas à l'esprit des démonstrations précédentes,
- celles de Clairaut rapportées dans [Lamande 1990, pp.428-440] qui utilise le passage à la limite : « Lacroix évite complètement le raisonnement par l'absurde. On voit ici l'utilisation de la méthode analytique – passage du connu (aire et périmètre des polygones réguliers) à l'inconnu (aire et périmètre des cercles) grâce à la notion de limite dont les présupposés sont clairement dégagés » [Ibid p429].

Signalons enfin le passage implicite des grandeurs aux nombres dans les validations des manuels.

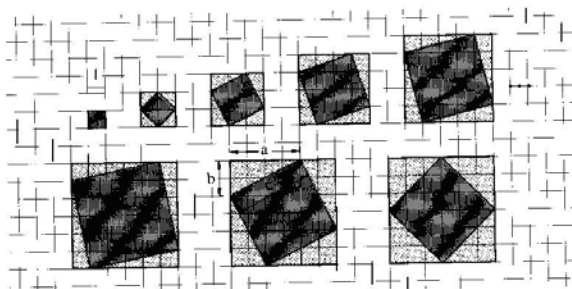
Etudions maintenant la validation d'un autre théorème, le théorème de Pythagore.

4.3.5 Le théorème de Pythagore

4.3.5.1 Dans un manuel allemand

Livre de mathématiques, classe 9 (14-15 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.70), édition 1997, programme encore appliqué en 2000.

Théorème de Pythagore



I Bei den auf das Gitternetz gezeichneten Quadraten kann man jeweils durch Abschneiden von 4 kongruenten (blauen) Dreiecken ein neues (rotes) Quadrat erhalten.
 a) Berechne jeweils den Flächeninhalt des roten Quadrates als Differenz aus dem Inhalt des großen Quadrates und dem Inhalt der 4 blauen Dreiecke.
 b) Wie hängt jeweils der Flächeninhalt des roten Quadrates mit den Längen der auf dem Gitternetz liegenden Seiten der Dreiecke zusammen?

hypothéinusa (griech.): die sich darunter hinziehende Linie

kathetos (griech.): senkrechte Linie



PYTHAGORAS
 (580 (?) v. Chr. – 500 (?) v. Chr.) wurde auf der Insel Samos geboren, wanderte aber in das süditalienische Kroton aus. Dort gründete er einen Geheimbund, der sich mit philosophischen, mathematischen und physikalischen Fragen beschäftigte.

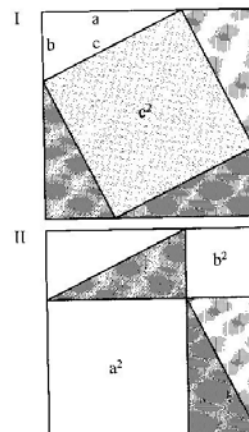
In jedem rechtwinkligen Dreieck nennt man die größte und stets dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die **Hypotenuse**.

Die beiden anderen, kleineren Seiten sind die beiden **Katheten** des rechtwinkligen Dreiecks.

In Fig. I wurden an den Ecken eines Quadrates vier kongruente Dreiecke abgeschnitten. Das verbleibende Viereck ist dann wiederum ein Quadrat mit dem Flächeninhalt c^2 .

In Figur II wurden die abgeschnittenen Dreiecke anders in das ursprüngliche Quadrat eingeordnet. Die beiden verbleibenden Quadrate haben zusammen den Flächeninhalt $a^2 + b^2$. Es gilt also:

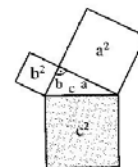
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Satz des PYTHAGORAS:

In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Bemerkung: Bei einem beliebigen Dreieck kann man aus zwei Winkeln den dritten Winkel berechnen (Winkelsummensatz). Dagegen lässt sich aus zwei Seiten die dritte nicht ermitteln. Der Satz des PYTHAGORAS zeigt, dass dies möglich ist, wenn das Dreieck einen rechten Winkel hat.

Indications de traduction.

« Dans les carrés dessinés sur le quadrillage après découpage des 4 triangles isométriques (bleus)²⁹⁷ on peut obtenir respectivement un nouveau carré (rouge)²⁹⁸.

- a) Calculer respectivement l'aire du carré rouge comme différence des aires du grand carré et des 4 triangles bleus.
- b) Quel est alors le rapport entre l'aire du carré rouge et les longueurs des côtés des triangles reposant sur le quadrillage ?

Dans chaque triangle rectangle on appelle hypoténuse le plus grand côté opposé à l'angle droit.

Les deux autres petits côtés sont appelés les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle.

Dans la figure I, quatre triangles isométriques ont été découpés aux coins d'un carré. Le quadrilatère restant est alors de nouveau un carré d'aire c^2 .

Dans la figure II, les triangles découpés ont été arrangés autrement dans le carré d'origine.

Les deux carrés restants ont ensemble une aire de $a^2 + b^2$. On a donc : $a^2 + b^2 = c^2$. »

Théorème de Pythagore :

Pour chaque triangle rectangle, les carrés élevés sur les côtés de l'angle droit ont même aire que le carré élevé sur l'hypoténuse.

Remarque : Pour un triangle déterminé, on peut, à partir de deux angles, déterminer le troisième (théorème de la somme des angles). Par contre à partir de deux côtés, le troisième côté ne se laisse pas déterminer. Le théorème de Pythagore montre que c'est possible si le triangle a un angle droit ».

Analyse linéaire.

La première partie de l'activité permet de conjecturer la relation $a^2 + b^2 = c^2$ dans le cas de huit carré particulier. L'énoncé admet, sans doute conforté par une vérification visuelle, que dans chaque carré le quadrilatère inscrit est un carré. Nous ne nous intéresserons pas à cette première partie, si ce n'est pour avoir remarqué que le quadrilatère inscrit dans le carré est admis comme étant un carré sans arguments.

Nous analysons la preuve suivante du théorème de Pythagore.

²⁹⁷ En gris clair sur le document reproduit.

²⁹⁸ En gris foncé sur le document reproduit.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 hypothèse		dans un grand carré, quatre triangles rectangles isométriques inscrits aux coins du carré, codage de a,b,c sur la figure 1	
2	1 figure 1	constat visuel	le quadrilatère inscrit dans le carré (figure 1) est un carré	
3	2	calcul	l'aire du carré inscrit est c^2	
4	1, figure 1	décomposition des surfaces (constat visuel ?)	la surface du grand carré se décompose en surface du petit carré et quatre surfaces des triangles isométriques (interprétation)	
5	1, 4	aires (triangles isométriques, décomposition)	$c^2 = \text{aire du grand carré} - 4 \text{ fois aire d'un triangle}$ (interprétation)	
6	1, figure 2	constat visuel	la surface précédente se réarrange en la figure 2 avec deux nouveaux quadrilatères et les quatre triangles précédents inscrits dans le grand carré (interprétation)	explication
7	6	constat visuel	les deux nouveaux quadrilatères sont des carrés	
8	7	formule aire d'un carré	ces carrés ont pour aires respectives a^2 et b^2	
9	6, 8	aires (reconfiguration)	aire du grand carré = $a^2 + b^2 + 4 \text{ fois aire d'un triangle}$ (interprétation)	
10	5, 9	calcul	$a^2 + b^2 = c^2$	

Commentaire :

Analysons les interprétations possibles des justifications de quelques pas.

En hypothèse la figure apparaît comme une figure générique. Le fait que les quatre triangles isométriques bordent exactement le grand carré est constaté visuellement. On aurait pu le préciser par des considérations de longueurs et d'angles des quatre triangles et du grand carré.

Pas n°2 : La conclusion est affirmée par un argument d'autorité sans autres justifications. On aurait pu imaginer une justification par constat visuel par utilisation de l'équerre. Mieux encore on aurait pu mobiliser les propriétés angulaires des 4 triangles isométriques pour démontrer que le quadrilatère central a ses quatre angles droits et est donc un rectangle. Comme les quatre triangles isométriques ont des hypoténuses de même longueur, ce rectangle est carré. La technologie des triangles isométriques, des angles et des quadrilatères est mobilisable en classe 9. Donc cet argument d'autorité aurait pu être évité.

Pas n°4 : Les propriétés de décomposition/recomposition des surfaces sont pratiquées de manière pragmatique (par des manipulations et des observations) dès l'école primaire, mais ne font pas l'objet d'un exposé précis de règles (du type « l'aire d'une surface obtenue par recollement de

deux surfaces est égale à la somme des aires de ces deux surfaces» [Mathématiques, cycle des approfondissements, CNDP, 2002, p.38]). Il n'y a pas d'exposé élémentaire de la théorie des surfaces, des aires ou de l'équidécomposabilité à part la tentative lors de l'exposé du calcul intégral. Il semblerait que ces règles soient utilisées implicitement comme règles de la « géométrie naturelle » [Houdement, Kuzniak 1999]. C'est pourquoi il est difficile de dire si la justification du pas n°4 relève du constat visuel ou des règles de décompositions/recompositions des surfaces, règles rarement explicitées à l'écrit.

Pas n°6 : La bonne reconfiguration de la figure semble justifiée visuellement (**argument pragmatique**).

On pourrait la démontrer en utilisant par exemples les propriétés métriques des quatre triangles isométriques et les propriétés angulaires liées au parallélisme, mobilisables en classe 9.

Pas n°7 : De même, on retrouve de manière surprenante un **argument d'autorité**, alors que la technologie mobilisable en classe 9 permet la justification.

Les autres pas sont justifiés par des formules sur les aires et des règles de calcul.

Rappelons que d'autres démonstrations de ce même théorème seront proposées dans les pages suivantes du manuel de classe. Ces autres démonstrations permettront éventuellement de travailler l'explicitation des justifications (fonction de preuve).

4.3.5.2 Dans un manuel français

Livre de mathématiques, classe de quatrième, édition Hatier, collection « le nouveau Pythagore », 1998, p.165, conforme au programme de 1997.

A. Découpage et constructions

1. Construire et découper, dans du carton, un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires mesurent par exemple : $a = 4 \text{ cm}$ et $b = 7,5 \text{ cm}$. Ce triangle est une équerre.

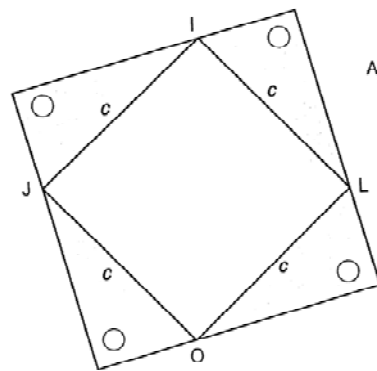
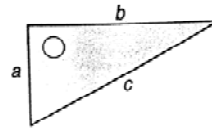


fig. 1

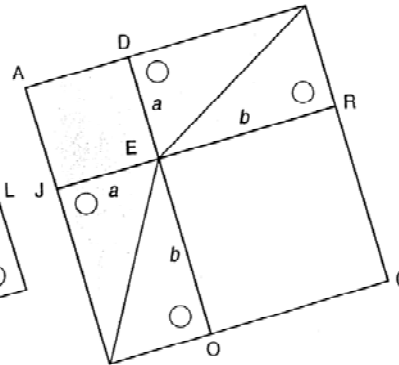


fig. 2

B. Observations, calculs et conclusion

1. En observant les figures 1 et 2, expliquer pourquoi : $\text{aire}(\text{JOLI}) = \text{aire}(\text{JADE}) + \text{aire}(\text{OCRE})$.
2. Exprimer, en fonction de a , b ou c , les aires des carrés JOLI, JADE et OCRE.
3. Compléter par les lettres a , b ou c l'égalité suivante (qui résulte de ce qui précède) :

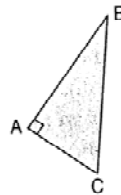
$$\boxed{\dots}^2 = \boxed{\dots}^2 + \boxed{\dots}^2$$

4. Nous venons de découvrir la propriété de Pythagore. Compléter le cadre et les bulles avec le contenu du sac.

PROPRIÉTÉ

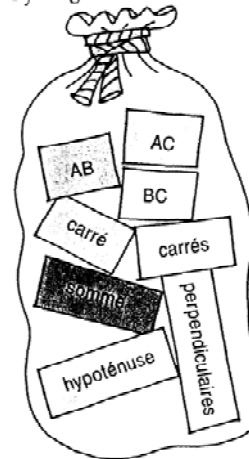
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\dots^2 = \dots^2 + \dots^2$$



..... de l'.....

..... des des côtés



Analyse linéaire.

On propose de reconstruire une validation attendue à partir des questions posées et du contexte.

La partie A est constituée par des activités de découpages puis recompositions en deux figures différentes. Nous sommes dans le registre de l'action, propice aux arguments pragmatiques, notamment aux arguments visuels.

Nous nous intéressons maintenant à la partie B qui constitue un épreuve du théorème de Pythagore dont nous allons essayer de reconstruire une validation attendue, d'après les questions posées.

Preuve

n°	données	règles	conclusion	commentaire
1	0 figure 1	décomposition-recomposition des surfaces (constat visuel)	aire (JOLI)=aire du grand carré – 4 fois l'aire des triangles rectangles (interprétation)	argument pragmatique
2	0 figure 2	décomposition-recomposition des surfaces (constat visuel)	aire (JADE)+aire(OCRE)=aire du grand carré – 4 fois l'aire des triangles rectangles (interprétation)	argument pragmatique
3	1,2	calcul	aire (JOLI)= aire (JADE)+aire(OCRE)	transitivité de l'égalité
4	0 énoncé		JOLI, JADE et OCRE sont des carrés	argument d'autorité de l'énoncé
5	4 0 codage figure	formule de l'aire d'un carré	aire (JOLI)= c^2 aire (JADE)= a^2 aire(OCRE)= b^2	
6	3, 5	calcul	$c^2 = a^2 + b^2$	

4.3.5.3 Commentaires

On retrouve les mêmes caractéristiques que pour la preuve du manuel allemand.

Les pas 1 et 2 s'appuient sur les manipulations de la partie A : on utilise donc des **arguments pragmatiques**.

Dans le **pas 4**, on s'appuie sur l'énoncé qui déclare que les quadrilatères sont carrés alors que des considérations sur les parallélogrammes auraient permis de montrer que JOLI est un losange. Des considérations angulaires auraient permis de montrer que JOLI possède un angle droit, donc que JOLI est carré. On retrouve comme pour l'exemple allemand un **argument d'autorité** de l'énoncé, sans doute conforté par une vérification visuelle.

4.3.5.4 Comparaison

Les preuves du manuel français et du manuel allemand utilisent les mêmes types d'arguments non mathématiques aux mêmes endroits.

Comment expliquer cette absence de justification mathématique par recours à des arguments pragmatiques et à un argument d'autorité?

On peut se poser la question de savoir si le recours à la figure ou à l'action (manipulation par recomposition-décomposition) est une simple technique utilisant le registre de la figure ou de l'action, pour formuler ce qui serait lourd à formuler dans la langue naturelle (et éventuellement symbolique). La justification de cette technique resterait mathématique. Il suffirait de faire une « lecture raisonnée »²⁹⁹ du dessin ou de l'action (manipulation par décomposition puis recomposition), pour la transformer d'action (ou de dessin) questionnée en discours démonstratif.

Considérons dans l'exemple précédent la justification que JOLI est un losange, puis par des considérations angulaires de montrer que JOLI possède un angle droit, et enfin donc que JOLI est un carré. La mobilisation des connaissances d'un élève est possible pour ce pas-là, comme le montrent les transcriptions de séances de classe de [Knipping 2003, p.110, 113, 124-128].

En l'absence de cette mobilisation des connaissances, pour l'élève, la justification des techniques de manipulation ou de recours à la figure sera basée sur une technologie non mathématique reposant sur des arguments pragmatiques, avec en particulier des arguments visuels qui se situent dans la géométrie concrète (G0).

Pour le professeur la justification des techniques de manipulation ou de recours à la figure sera basée sur une technologie mathématique (dans l'exemple du carré JOLI basé sur les propriétés des angles et des quadrilatères) qui se situe dans la géométrie proto-axiomatique (G2).

La même technique peut être justifiée par deux technologies différentes : le seul principe didactique à respecter est celui de non-contradiction des vérités³⁰⁰. Il ne faut pas arriver à des vérités contradictoires. Ici dans notre cas, le théorème de Pythagore est validé dans les deux géométries.

Ce qui nous a paru intéressant dans ces exemples extraits de manuels de chaque pays, c'est le recours à un argument d'autorité conforté par un argument visuel pour affirmer que le quadrilatère inscrit est un carré, alors même qu'une technologie mathématique était mobilisable de manière relativement simple.

Il semblerait que la fonction assignée à cette validation soit une *fonction d'explication*. Dans ce cas on mettrait en valeur, dans la démonstration, les techniques sur les aires (décomposition/recomposition) qui expliquent l'énoncé final du théorème de Pythagore, formulé comme un énoncé sur les aires. Nous faisons l'hypothèse qu'on ne souhaite pas

²⁹⁹ en adaptant l'expression de Bkouche qui évoquait une « lecture raisonnée du dessin » [Bkouche 2000, p.620].

³⁰⁰ Voir §1.2.2.4 sur le contrat.

détailler la justification que le quadrilatère obtenu après découpage des quatre triangles isométriques est carré, pour ne pas distraire de l'explication forte, qui repose sur les techniques sur les aires, en détaillant des justifications jugées lointaines par rapport aux techniques sur les aires. Dans le même ordre d'idées, une grande partie de la rédaction de la démonstration dans le registre figural, avec un codage coloré de la figure, permet d'expliquer les propriétés de décomposition et de recomposition des aires d'une manière plus claire qu'une rédaction dans le registre de la langue écrite. Cette fonction d'explication de la démonstration justifierait donc une moindre explicitation de certaines justifications et de la rédaction. Ce principe didactique est exposé dans les programmes allemands : « On doit placer ici au premier plan moins l'exactitude formelle et le caractère complet que le contenu d'un théorème ou d'une idée de démonstration. Les considérations de plausibilité montrent aux élèves souvent davantage qu'une démonstration scientifiquement irréprochable. [...] Au cycle inférieur³⁰¹,[...] les nouvelles connaissances doivent être acquises d'abord par des procédures inductives et par intuition [induktive und anschauliche Verfahren] »³⁰² [Ministerium 4/1994 p.28].

[Knipping 2003a, p.84] appelle cette preuve, preuve par complémentarité et rappelle qu'elle était connue des anciens Hindous. Dans les six cours étudiés, elle apparaît dans un cours allemand (cas Lüders) et dans deux cours français (cas Petit et Dupont) [Ibid. p.82].

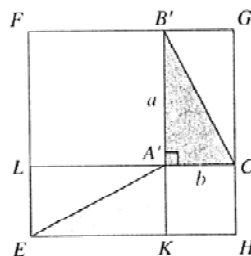
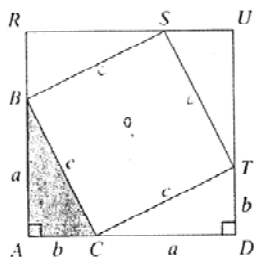
Observons qu'on peut trouver, bien entendu, des livres qui proposent de démontrer que JOLI est un carré., par exemple dans le livre de mathématiques, classe de quatrième, édition Bordas, Math quatrième, 1998, p.203.

³⁰¹ Le cycle inférieur est constitué des classes 5, 6, 7.

³⁰² Dabei sollen weniger die formale Exaktheit und die Vollständigkeit im Vordergrund stehen als der Inhalt eines Satzes oder die Beweisidee. Plausibilitätsbetrachtungen zeigen den Schülerinnen und Schülern oft mehr als ein wissenschaftlich einwandfreier Beweis[...] In der Unterstufe ist der Unterricht durch besondere Vielgestaltigkeit der Aufgabenstellungen gekennzeichnet. Neue Erkenntnisse sollen zunächst durch induktive und anschauliche Verfahren gewonnen werden. Der Übergang zu mehr deduktivem Vorgehen muß behutsam und altersgemäß erfolgen.

1° Découper huit triangles rectangles superposables dans du papier de couleur. On désigne par a et b les longueurs des côtés de l'angle droit, par c la longueur de l'hypoténuse.

2° a) Construire par report des longueurs a et b deux carrés de côté $a + b$.
 b) Coller quatre des triangles dans chacun des carrés comme sur les figures ci-dessous :



c) Prouver que le quadrilatère $BSTC$ est un carré. Calculer son aire en fonction du nombre c .

En déduire l'aire du carré $ARUD$ en fonction des nombres a , b et c .

d) Démontrer que les quadrilatères $FB'A'L$ et $KA'C'H$ sont des carrés.

Exprimer l'aire du carré $EFGH$ en fonction des nombres a et b .

3° Les carrés $ARUD$ et $EFGH$ ont la même aire. En déduire que $a^2 + b^2 = c^2$.

Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

Commentaire :

On voit ici qu'il est explicitement demandé en question c) de démontrer que le quadrilatère inscrit $BSTC$ est un carré. Ici la fonction de preuve est tout aussi privilégiée que celle d'explication.

Par contre, pour ce qui constitue la justification de la décomposition-recomposition des surfaces, on reste dans les techniques pragmatiques.

4.3.6 Autres rencontres avec des preuves du théorème de Pythagore.

4.3.6.1 Dans un manuel allemand

Nous avons précédemment étudié comment dans un livre³⁰³ de classe 9, la première rencontre avec la démonstration du théorème de Pythagore s'était effectuée. Il est intéressant d'observer que, deux pages plus loin, le même livre propose d'autres démonstrations du même théorème. Cela montre que **la seule fonction d'une démonstration n'est pas la fonction de preuve** : si

³⁰³ livre de mathématiques, classe 9 (14-15 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.70), édition 1997

c'était le cas, la présentation d'autres démonstrations ne présenterait pas d'intérêt puisque le théorème a déjà été démontré. Examinons ces différentes démonstrations.

Für den Satz des PYTHAGORAS gibt es viele Beweise. Allein das Buch „The Pythagorean Proposition“ von Elisha S. Loomis enthält 370 Beweise.

Der Beweis von Aufgabe 11a) stammt von dem indischen Mathematiker und Astronomen BHASKARA II (1114–1185).



Der Beweis in Aufgabe 11b) stammt von JAMES A. GARFIELD (1831–1881), der 1881 Präsident der USA war.



Der Beweis in Aufgabe 13 soll von dem italienischen Universalgelehrten LEONARDO DA VINCI (1452–1519) stammen.

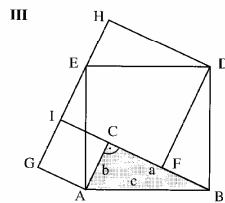
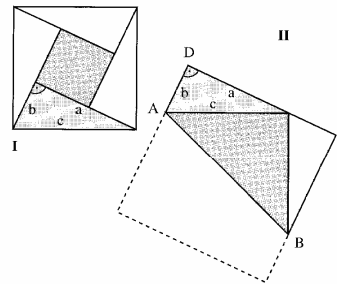


Wird ein Satz eigentlich durch viele Beweise sicherer? Wozu sind so viele Beweise wohl nützlich?

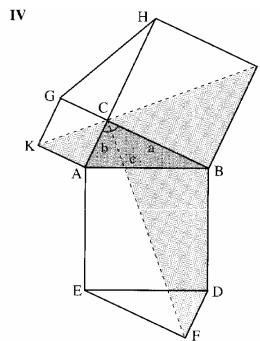
Ein Satz mit vielen Beweisen

11 Man kann den Satz des PYTHAGORAS beweisen, indem man eine Fläche auf zwei verschiedene Arten berechnet. Die gelben und braunen Dreiecke in Figur I und II sind jeweils kongruent und rechtwinklig.

- Berechne in Figur I den Inhalt des blauen Quadrats auf zwei Arten und zeige so, dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
- Berechne in Figur II den Inhalt des Trapezes ABCD auf zwei verschiedene Arten und zeige damit $a^2 + b^2 = c^2$.



12 Bei dem Beweis des Satzes des PYTHAGORAS in Figur III werden nur zwei Dreiecke gedreht. Dazu zeichnet man über der Hypotenuse AB eines rechtwinkligen Dreiecks ABC das Quadrat ABDE und das Lot DF von D auf BC. Nun dreht man das Dreieck ABC um A im Gegenuhrzeigersinn und das Dreieck BDF um D im Uhrzeigersinn um jeweils 90° . Beweise damit den Satz des PYTHAGORAS.



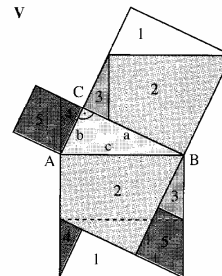
13 In Figur IV geht man von dem rechtwinkligen Dreieck ABC und den Quadraten über den Seiten aus.

Diese Figur wird durch die kongruenten gelben Dreiecke ergänzt.

- Untersuche die Sechsecke ABIHGK und AEFDBC auf Symmetrie.
- Zeige, dass eine Drehung das Viereck ABIK auf das Viereck RCFD abbildet.
- Vergleiche die Flächeninhalte der Sechsecke ABIHGK und AEFDBC und beweise so den Satz des PYTHAGORAS.

14 Man kann die Quadrate über den Katheten und das Quadrat über der Hypotenuse in kongruente Drei- und Vierecke zerlegen. Die einfachste Möglichkeit zeigt Figur V. Dabei sind alle auftretenden Strecken zu einer Seite der ursprünglichen Quadrate parallel.

- Zeige, dass die Vielecke mit der gleichen Nummer jeweils kongruent sind.
- Beweise mit a) den Satz des PYTHAGORAS.



Éléments de traduction et commentaires :

« 11) On peut démontrer le théorème de Pythagore, en calculant une aire de deux façons différentes. Les triangles jaune et brun des figures I et II sont respectivement congruents et rectangles.

- Calculer dans la figure I le contenu du carré bleu de deux façons et montre que : $c^2 = a^2 + b^2$.
- Calculer dans la figure II l'aire du trapèze ABCD de deux façons et montre que : $c^2 = a^2 + b^2$.

12) Dans la démonstration du théorème de Pythagore de la figure III on tourne deux triangles

Examinons ces différentes preuves. On trace alors sur l'hypoténuse de ABC un carré ABDE et la hauteur DF de [BC] issue de D. Maintenant on tourne de 90° ABC autour A dans le sens contraire et BDF autour de D dans le sens horaire. Démontrer alors le théorème de Pythagore.

13) Dans la figure IV on considère le triangle rectangle ABC et les carrés posés sur les côtés extérieurement. Cette figure est complétée par les triangles isométriques jaunes.

a) Etudier les éléments de symétrie du polygone ABIHGK et AEFDBC.

b) Montrer qu'une rotation envoie ABIK en BCFD.

c) Comparer les aires de ABIHGK et AEFDBC et démontre ainsi le théorème de Pythagore.

14) On partage les carrés extérieurs sur les côtés de l'angle droit et le carré extérieur sur l'hypoténuse en triangles et quadrilatères isométriques. La manière la plus simple est illustrée par la figure V. [...]

a) Montrer que les polygones de même numéro sont isométriques.

b) Démontrer avec a) le théorème de Pythagore ».

On remarque le rôle primordial de la figure dans ces différents exercices tant du point de vue du registre de formulation que des indices heuristiques. Ces différentes démonstrations mettent en jeu différentes techniques et technologies synthétisées dans le tableau ci-dessous.

référence de la preuve	techniques technologies mises en oeuvre
11 a) 11 b)	décomposition/recomposition de surfaces, propriétés de figures planes (carré, trapèze ou triangle rectangle) formules sur les aires, calcul algébrique
12	décomposition/recomposition de surfaces, rotations, figures planes (carré, trapèze ou triangle rectangle), aires
13	décomposition/recomposition de surfaces, rotations, symétrie centrale, symétrie axiale figures planes (carré, trapèze ou triangle rectangle), aires
14	décomposition/recomposition, triangles isométriques, angles, isométries

Nous n'avons pas trouvé toutes ces démonstrations dans le livre français correspondant. Au niveau de la classe de quatrième, la rotation n'est pas fréquentée ni l'étude des triangles isométriques (en dehors des cas de symétrie ou translation) : il faut attendre la classe de troisième. De même les techniques de démonstration par les aires (par décomposition-recomposition ou par l'utilisation de formules) sont explicitement mentionnées dans le programme de seconde. Pour les livres de quatrième, nous avons repéré une démonstration du

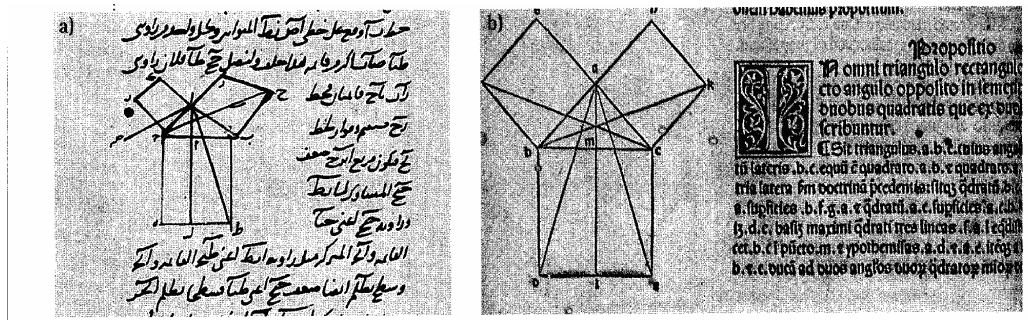
type de celle du n° 11b)³⁰⁴. En classe de seconde nous avons repéré une démonstration du type de celle du n° 13 que nous détaillons dans le paragraphe suivant.

4.3.6.2 Dans un manuel français

On observe effectivement dans la classe de seconde française, une autre démonstration du théorème de Pythagore qui est explicitement proposée comme thème au choix de géométrie au programme de seconde³⁰⁵ : « exemples de démonstrations classiques par les aires : théorème de Pythagore, théorème de Thalès ... »

Citons un exemple issu de : Maths seconde, collection Déclic, Hachette, 2000.

A la page 224, on présente un document proposant des extraits du manuscrit arabe (avant 1284) et de la première édition (Venise, 1484) du théorème de Pythagore dans la géométrie d'Euclide.



La page 239 propose des travaux dirigés inspirés par la démonstration d'Euclide.

³⁰⁴ Par exemple : quatrième, 1998 : Hatier, collection « Triangle », p.141 ; Hachette collection « Tout simplement », p.49 ;

³⁰⁵ Bulletin officiel n°2, 30 août 2001, p.35 : dans les objectifs « proposer aux élèves des problèmes [...] éclairages nouveaux proposés : [...] problèmes d'aires » et dans les capacités attendues « résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires ».

La démonstration du théorème de Pythagore par les aires (Thème d'étude)

On se propose de démontrer ce théorème, comme l'indiquent les figures de l'Activité 1, p. 224.

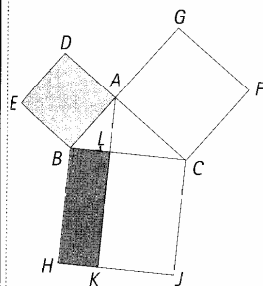


Figure initiale

• Rappel des hypothèses :

ABC est un triangle rectangle en A ;
 $ABED$, $ACFG$ et $BCJH$ sont des carrés ;
 (AL) est perpendiculaire à (BC) .

1 On va montrer que l'aire du carré $ABDE$ est égale à l'aire du rectangle $BHLK$.

a) Pourquoi est-on sûr que les droites (DC) et (EB) sont parallèles ? Justifier que les triangles BED et BEC ont même aire (fig. 1).

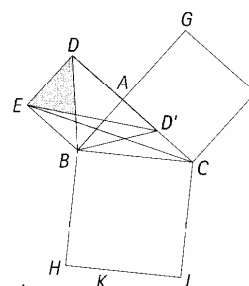


Fig. 1 : D' se déplace sur $[DC]$.

b) Comparer les angles \widehat{EBC} et \widehat{ABH} .

En déduire que les triangles BEC et ABH ont même aire (fig. 2 et 3).

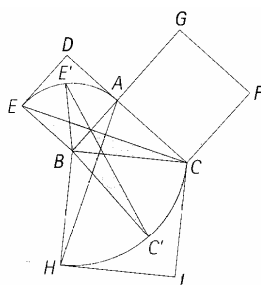


Fig. 2 :
 E' se déplace sur un arc de cercle.

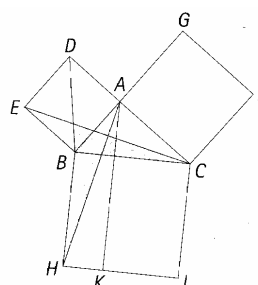


Fig. 3

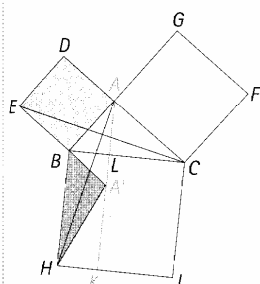


Fig. 4 : A' se déplace sur $[AK]$.

c) En remarquant que l'aire de $ABDE$ est le double de l'aire du triangle BED , conclure pour les aires du carré $ABED$ et du rectangle $BHLK$ (fig. 4).

2 Recommencer le raisonnement pour le carré $ACGF$ et le rectangle $CJKL$.

3 Conclure.

4.3.6.3 Comparaison

On observe que la **technologie** mise en œuvre, non mobilisable en quatrième, se rapproche de celle mise en œuvre dans les exemples allemands précédents : techniques par les aires justifiées par les formules (triangle, carré), les décompositions/recompositions de surfaces, les rotations (conservation des aires), les triangles isométriques (de même aire).

On peut considérer que la fonction de communication de la validation est mise en œuvre : transmettre des connaissances mathématiques, ici de nouvelles **techniques** (méthodes des aires) justifiées par de nouvelles technologies qui n'étaient pas mobilisables en quatrième. On peut estimer également que la **dimension historique** est valorisée dans cette fonction de

communication. Nous pensons que la **fonction de systématisation** est assumée par l'utilisation d'autres technologies pour prouver ce théorème. Cette systématisation est locale : à propos du théorème de Pythagore déjà validé en quatrième. Elle vise à entraîner à la technique des aires, qui sera par ailleurs utilisée comme technique de résolution de problèmes.

4.3.7 Variation de la fonction élévation au carré

Ce thème a le double avantage d'illustrer une validation dans un domaine non géométrique et pour laquelle la première rencontre en Bade-Wurtemberg se situe après la première rencontre en France.

A partir de maintenant, nous ne procéderons plus à une analyse détaillée des validations, moins pertinente pour les validations suivantes. Nous signalerons seulement les éléments qui nous paraissent significatifs.

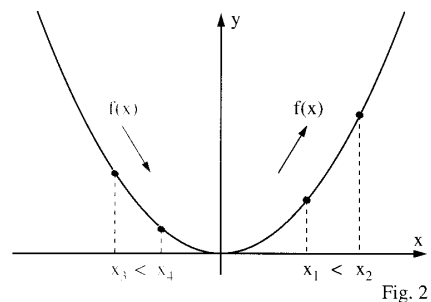
4.3.7.1 Dans un manuel allemand

Livre de classe 11 (16-17 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), [p.158-160], édition 1998.

1)

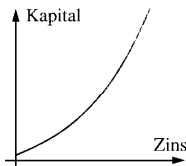
Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^2$ zeigt, dass für $x > 0$ die Funktionswerte $f(x)$ zunehmen, wenn die x -Werte größer werden. Dafür schreibt man kurz:
Für $0 < x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$.

Dagegen nehmen für $x < 0$ die Funktionswerte mit wachsenden x -Werten ab. Dafür schreibt man:
Aus $x_3 < x_4 < 0$ folgt $f(x_3) > f(x_4)$.



2)

Definition: Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert. Wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$, dann heißt f **streng monoton zunehmend** in I . Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$, dann heißt f **streng monoton abnehmend** in I .



Ein streng monotonen Verhalten kann sehr erfreulich sein.

Gilt statt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ nur $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$, so nennt man f **monoton** zunehmend bzw. abnehmend in I .

Die Ermittlung von Intervallen, in denen eine Funktion streng monoton zu- oder abnimmt, ist mit Hilfe der Definition oft nicht einfach, da hierzu Ungleichungen betrachtet werden müssen. Ist die Funktion f aber differenzierbar, liefert der anschauliche Zusammenhang (Fig. 1) zwischen der Monotonie von f und den Tangentensteigungen das folgende Kriterium für strenge Monotonie:

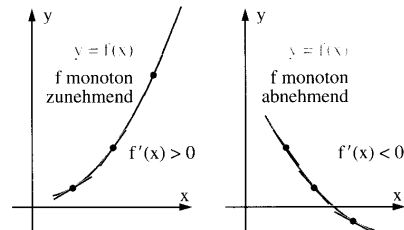


Fig. 1

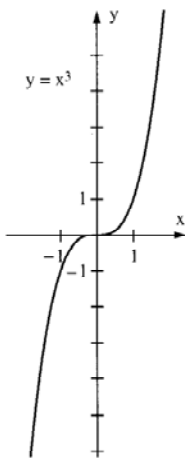


Fig. 2

Satz: (Monotoniesatz)

Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. Wenn für alle x aus I gilt:

$f'(x) > 0$,

$f'(x) < 0$,

dann ist f streng monoton zunehmend in I .

dann ist f streng monoton abnehmend in I .

Am Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^3$ (Fig. 2) erkennt man, dass die Umkehrung des Satzes nicht richtig ist. Obwohl f eine streng monoton zunehmende Funktion ist, gilt $f'(0) = 0$. Für eine differenzierbare Funktion kann man deshalb die Randstellen zum Monotonieintervall hinzunehmen, wenn für alle inneren Stellen $x \in I$ die Bedingung $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ erfüllt ist.

Beweisidee: (für den Fall $f'(x) > 0$ für $x \in I$)
Nach Voraussetzung ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

Für die Steigung m_s der Sekante durch zwei Punkte $P_1(x_1 | f(x_1))$ und $P_2(x_2 | f(x_2))$ des Schaubilds mit $x_1 < x_2$ gilt (vgl. Fig. 3)

$$m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(z).$$

Dabei ist z eine Stelle mit $x_1 < z < x_2$.

Wegen $x_2 - x_1 > 0$ und $f'(z) > 0$ gilt auch $f(x_2) - f(x_1) = f'(z) \cdot (x_2 - x_1) > 0$.

Damit gilt $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ aus I . Also ist f streng monoton zunehmend in I .

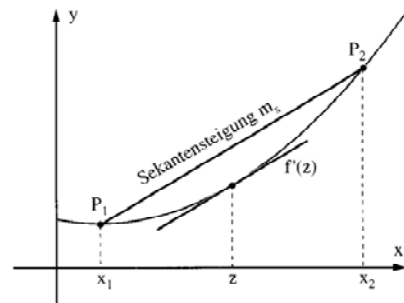


Fig. 3

3) Exercice n° 5 suivant le paragraphe précédent :

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Berechnen Sie entsprechend dem Beweis des Monotoniesatzes zu den Werten $0 < x_1 < x_2$ eine Stelle z so, dass $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(z)$ gilt.

b) Führen Sie die Beweisidee des Monotoniesatzes für den Fall $f'(x) < 0$ für $x \in I$ durch.

Eléments de traduction et commentaires :

La démarche adoptée est la suivante (en conservant la numérotation de l'extrait :

- 1) définition formelle de la croissance d'une fonction à partir d'une induction visuelle à partir d'une représentation graphique de la courbe de la fonction carrée,
- 2) énoncé du théorème reliant les variations d'une fonction dérivable sur un intervalle au signe de sa dérivée. Une idée de la démonstration est proposée qui s'appuie,

visuellement, sur l'existence d'un nombre z de $[x_1 ; x_2]$ tel que $f'(z)$ égale le taux de variation entre x_1 et x_2 . Ceci revient à admettre visuellement le théorème des accroissements finis qui n'est pas au programme. Une fois cet **argument visuel** utilisé, il est facile d'en déduire que l'accroissement des images entre x_1 et x_2 est positif lorsque f' est positive et donc $f'(z)$ positif.

- 3) Dans l'exercice n°5 on se propose de reprendre l'idée de la démonstration dans le cas de la fonction carrée en calculant précisément z . On montre alors que

$$f'(z) = 2z = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 \text{ d'où } z.$$

La notion de variation des fonctions n'est pas abordée jusqu'à la classe 11. En effet l'idée est d'aborder cette notion en lien avec le signe de la dérivée, dans le cas des fonctions dérivables qui sont en fait les seules fonctions étudiées. On est dans la même situation que les formules usuelles sur les aires et les volumes, qui sont repoussées jusqu'à la classe 10 pour pouvoir aborder dans leur démonstration une propédeutique aux limites. Ici il semblerait qu'on attende la mise à disposition d'une technique efficace, le signe de la dérivée, pour aborder les variations d'une fonction. Faut-il y voir un **principe didactique d'économie** : attendre pour l'introduction d'une notion qu'on dispose d'une technologie efficace permettant de l'étudier ? Ce point de vue peut être discuté : on pourra estimer qu'aborder un problème par différentes techniques (de plus en plus performantes) permet une maturation du problème et une justification des techniques plus performantes. L'économie de temps ne serait qu'apparente car l'élève aurait moins fréquenté le problème. Ces éléments de discussion sur l'économie didactique, dans le choix du moment d'introduction d'une technique et d'un objet de savoir, sont très importants dans un contexte de réduction des horaires d'enseignement. En tout cas cette possibilité est offerte par l'organisation institutionnelle du Gymnasium avec une filière unique de la sortie du primaire au baccalauréat. Cette possibilité n'existe pas dans l'institution française où d'importants paliers d'orientation se situent en fin de troisième et en fin de seconde.

4.3.7.2 Dans un manuel français

Livre de classe de seconde, collection Déclic, [p.112], Hachette, 2000.

Définition et propriétés

La fonction carré est définie sur l'ensemble des réels \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

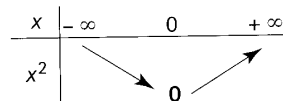
Un carré est toujours positif ou nul : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$.

Un nombre et son opposé ont le même carré : pour tout réel x , $(-x)^2 = x^2$.

Sens de variation

Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction carré est croissante.

Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, la fonction carré est décroissante.



démonstration

• Soit a et b deux réels quelconques de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, vérifiant $0 \leq a \leq b$.

En multipliant cette inégalité par a , positif, et la même par b , positif, on obtient :

$$0 \leq a^2 \leq ba \text{ et } 0 \leq ab \leq b^2 ;$$

d'où $a^2 \leq ab \leq b^2$.

On en déduit que $a^2 \leq b^2$; ainsi la fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

• Soit a et b deux réels quelconques de l'intervalle $]-\infty ; 0]$, vérifiant $a \leq b \leq 0$.

En multipliant cette inégalité par a , négatif, et la même par b , négatif, le sens change :

$$a^2 \geq ab \geq 0 \text{ et } ab \geq b^2 \geq 0 ;$$

d'où $a^2 \geq ab \geq b^2$.

On en déduit que $a^2 \geq b^2$; ainsi la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

Dans le manuel français on se contente de la technologie mobilisable en seconde, les inégalités sur les nombres réels, pour démontrer le théorème.

4.3.7.3 Comparaison

Dans cette comparaison on voit clairement que ce n'est pas l'absence de technologie mobilisable qui a orienté la démonstration allemande. En effet la technologie des inégalités sur les nombres était mobilisable en classe 11 et bien avant. Nous interprétons ce choix comme la volonté de valoriser deux fonctions :

- la fonction d'explication en faisant appel au registre visuel qui « fait voir » la relation d'égalité entre le taux de variation et une pente de la tangente,
- la fonction de systématisation en déduisant les variations de la fonction d'un théorème plus général liant signe de la dérivée et variations de la fonction.

Dans le manuel français, c'est la fonction de preuve qui est valorisée, avec l'utilisation d'une technique formelle de calcul sur les inégalités, et la fonction de systématisation par utilisation de technologies acquises pour déduire un nouveau résultat.

Alors que les technologies mobilisables pourraient être les mêmes, ce sont les différences de fonctions assignées à la validation qui expliquent les différences de technologies utilisées.

4.3.8 Equations et inéquations du second degré

4.3.8.1 Dans un manuel allemand

Livre de mathématiques, classe 9 (14-15 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), [141, 149], édition 1997.

Es ist ziemlich aufwendig, für jede gemischt quadratische Gleichung eine quadratische Ergänzung durchzuführen. Wir versuchen daher, dieses Verfahren auf die **allgemeine Form** der Gleichung anzuwenden und so auf eine „Lösungsformel“ zu kommen.

<p><i>Gegebene Gleichung:</i> <i>Durchdividieren:</i> <i>Variabel isolieren:</i> <i>Quadratisch ergänzen:</i> <i>Binomische Formel anwenden:</i> <i>Gleichung lösen:</i></p>	<p>Beispiel: $4x^2 - 8x - 1 = 0$ $x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$ $x^2 - 2x = \frac{1}{4}$ $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4} + 1$ $(x - 1)^2 = \frac{5}{4}$ $x - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ oder $x - 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ $x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ oder $x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$</p>	<p>Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2 a }$ oder $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2 a }$ Für $a > 0$ ist $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; für $a < 0$ ist $2 a = -2a$, und wir erhalten ebenfalls diese beiden Lösungen.</p>
---	---	--

Mitternachtsformel



discriminare (lat.): unterscheiden

Satz: Für eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) gilt:
 Ist $b^2 - 4ac > 0$, so gibt es genau zwei Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ist $b^2 - 4ac = 0$, so gibt es genau eine Lösung: $x_1 = -\frac{b}{2a}$.
 Ist $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösung.

Der Term $b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante D**. Mit ihrer Hilfe kann man entscheiden, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung besitzt.

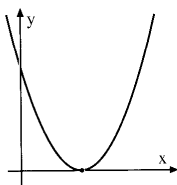
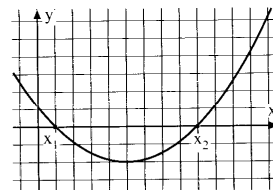
- 1** a) Die Gleichung $5x^2 - 3x + 1 = 0$ hat keine Lösung. Was folgt daraus für die Werte, die der Term $5x^2 - 3x + 1$ annehmen kann? Sind diese positiv oder negativ?
 b) Welche Werte nimmt der Term $2x^2 + 7x - 4$ für $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0$ und $x_3 = -4$ an? Gib weitere x -Werte an, für die der Term negativ bzw. positiv wird.

Das Schaubild einer quadratischen Funktion mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a > 0$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Schneidet diese die x -Achse bei x_1 und x_2 (mit $x_1 < x_2$), dann ist

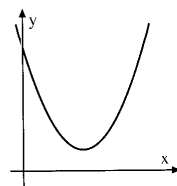
$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ für } x_1 < x < x_2 \text{ und } ax^2 + bx + c > 0 \text{ für } x < x_1 \text{ oder } x > x_2.$$

Mit den Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)

kennen wir also auch die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen $ax^2 + bx + c < 0$ und $ax^2 + bx + c > 0$.



$L = \{ \}$ bzw. $L = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$



$L = \{ \}$ bzw. $L = \mathbb{R}$

Um eine quadratische Ungleichung zu lösen, bringen wir diese auf die Form $ax^2 + bx + c < 0$ bzw. $ax^2 + bx + c > 0$ mit $a > 0$ und lösen die zugehörige Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Hat diese zwei Lösungen x_1, x_2 (mit $x_1 < x_2$), dann ist die Lösungsmenge $L = \{x | x_1 < x < x_2\}$ bzw. $L = \{x | x < x_1 \text{ oder } x > x_2\}$, hat sie nur eine Lösung x_1 , so ist $L = \{ \}$ bzw. $L = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, hat sie keine Lösung, so ist $L = \{ \}$ bzw. $L = \mathbb{R}$.

Eléments de traduction et commentaire :

1^{ère} partie : équation du second degré.

Le théorème sur l'équation est démontré de manière classique avec mise sous forme canonique. On notera la présentation en deux colonnes : un exemple est traité dans la colonne de gauche tandis que la démonstration algébrique générale est traité dans la colonne de droite. On notera que le cas $b^2-4ac < 0$ est traité de manière implicite dans la rédaction, comme s'il était sous entendu que lorsqu'on écrit la racine carrée de b^2-4ac , c'est que ce nombre est positif ou nul. L'énoncé final du théorème (partie encadrée) rappelle bien explicitement tous les cas. On remarquera à cette occasion la notation « \pm » peu habituelle³⁰⁶ en France.

2^{nde} partie : inéquation du second degré

Par contre le théorème sur l'inéquation est uniquement validé dans le registre graphique. Comme nous l'avons illustré dans le paragraphe précédent, les variations de fonction, y compris la fonction du second degré, ne sont abordées qu'en classe 11. Les études précédentes sur les fonctions du second degré ont concerné le registre graphique. Donc, il est acquis que la représentation graphique d'une fonction du second degré a une forme parabolique, ouverte vers le haut si le coefficient du terme carré est positif, vers le bas sinon. Les éléments de symétrie et l'extremum sont acquis. Ces éléments ont été acquis dans le registre graphique et dans le registre algébrique³⁰⁷. Ce recours au registre graphique n'est pas systématique. Par exemple les inéquations du premier degré sont abordées dans le registre algébrique, par traitement par formes équivalentes³⁰⁸. Ce recours au registre graphique reste cependant assez fréquent, en comparaison avec les usages français. Pour la précision de la lecture des extrémités des intervalles solutions, il suffit alors d'appliquer le théorème précédent sur l'équation du second degré, qui donnera avec exactitude ces valeurs. Ici le recours au registre graphique apparaît comme une technique, qui prend appui sur une technologie mathématique acquise (représentation graphique des fonctions du second degré, résolution de l'équation du second degré, ...).

4.3.8.2 Dans un manuel français

Livre de classe de première S, [p.40, 42], collection Transmath, Nathan, 2001.

³⁰⁶ Il en est de même pour la notation $\sqrt{-1}$ à propos des nombres complexes.

³⁰⁷ Notamment on montre que en démontrant que la représentation graphique de la fonction du second degré se déduit de la fonction élévation au carré par des translations et une affinité.

³⁰⁸ Voir par exemple le livre de Klasse 8, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), [pp.36-37].

11 Définition, vocabulaire

Une **équation du second degré**, à une inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont trois réels donnés, $a \neq 0$.

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est trouver tous les nombres u tels que $au^2 + bu + c = 0$. Un tel nombre u est dit solution ou encore **racine** de l'équation.

12 Résolution de l'équation du second degré

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1^{re} étape : Écriture de $f(x)$ sous forme canonique

Puisque $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$; or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ car $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Donc :

NOTE

L'écriture en bleu de $f(x)$ est appelé **forme canonique** du trinôme.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

2^e étape : Résolution de l'équation $f(x) = 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, ainsi $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

• Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. Le nombre entre crochets est strictement positif donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

• Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Puisque $a \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule, $x = -\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Si l'on pose $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Donc puisque $a \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

Définition 1

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ou du trinôme $ax^2 + bx + c$. On le note Δ (lire « delta »).

Théorème 1

Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine.

Lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une racine, $-\frac{b}{2a}$ (dite « racine double »).

Lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

21 Factorisation du trinôme

Nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème 1 page 40, que lorsque Δ est strictement positif, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Théorème 2

NOTE

Lorsque $f(x) = 0$ a deux racines x_1 et x_2 , on dit que le trinôme se factorise en un produit de deux polynômes du premier degré.

Factorisation du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Lorsque l'équation $f(x) = 0$ a deux racines x_1 et x_2 (c'est-à-dire dans le cas où $\Delta > 0$), alors pour tout x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Dans le cas $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ qui est également une forme factorisée de $f(x)$. Enfin, si $\Delta < 0$, la factorisation n'est pas possible.

22 Signe du trinôme

Théorème 3

NOTE

Par définition, un trinôme du 2nd degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La condition $a \neq 0$ fait partie de la définition et ne sera plus rappelée.

- Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a .
- Lorsque $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a (sauf lorsque $x = -\frac{b}{2a}$, auquel cas $f(x) = 0$).
- Lorsque $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a , **sauf** lorsque x est entre les racines auquel cas $f(x)$ et a sont de signes contraires.

Démonstration :

Reprenons la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- **Cas $\Delta < 0$** : le nombre entre crochets est strictement positif, donc $f(x)$ est du signe de a pour tout x .
- **Cas $\Delta = 0$** : $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- **Cas $\Delta > 0$** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est un produit de trois facteurs, l'un a est constant, les deux autres sont des binômes du premier degré dont il est facile d'étudier le signe selon x .

En notant x_1 la plus petite des racines, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a	
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0
$f(x)$	signe de a		signe de $-a$	

Application.

Pour résoudre une inéquation du second degré, on détermine le signe du trinôme associé (voir Pour mieux comprendre, *ci-contre*).

Commentaires :

La résolution de l'équation du second degré recourt à la mise sous forme canonique.

La résolution de l'inéquation utilise la technique du tableau des signes, très répandue en France.

4.3.8.3 Comparaison

Concernant la résolution de l'équation du second degré, on remarque que dans les deux pays on utilise la même technique de mise sous forme canonique. On observe cependant une différence importante quant au **contrat de rédaction** :

- la rédaction allemande utilise un **registre dominé par la langue symbolique**,
- la rédaction française utilise un registre où langue symbolique et langue naturelle se mêlent. Les phrases en français sont complètes et utilisent des marqueurs de statut : puisque, « : », donc, si...alors...

Concernant la résolution de l'inéquation du second degré, il faut reconnaître que la technique des tableaux de signes, très répandue en France, n'est, à notre connaissance, pas répandue en Allemagne. Alors qu'en France, le tableau des variations d'une fonction débute souvent par un rituel tableau des signes de la dérivée, en Allemagne ce tableau de variation

n'est bien souvent pas établi : on étudie les extrema (et non pas des variations) d'après le signe de la dérivée seconde³⁰⁹. Les discussions dans les inéquations s'effectuent par disjonction des cas ou en prenant appui sur une représentation graphique, comme c'est le cas ici.

On voit donc ici, que disposant de la même technologie, **les différences observées sont au niveau du contrat de rédaction ou des techniques**. Ces techniques utilisent des registres de représentation différents. Dans le manuel allemand le manuel allemand on observe des **changements de registre** entre le registre graphique et la langue naturelle et symbolique. Dans le manuel français, le changement s'opère entre le registre des tableaux de signes et la langue naturelle et symbolique.

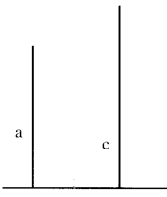
Etudions maintenant la validation d'un autre théorème : le théorème de Thalès.

4.3.9 Théorème de Thalès

On rappelle qu'en Allemagne le théorème de Thalès s'appelle le « théorème des rayons³¹⁰ » [Strahlensatz] alors que le « Thalesatz » désigne le théorème affirmant qu'un triangle rectangle a le sommet de l'angle droit sur le cercle de diamètre son hypoténuse. Nous avons convenu en français de conserver la signification française.

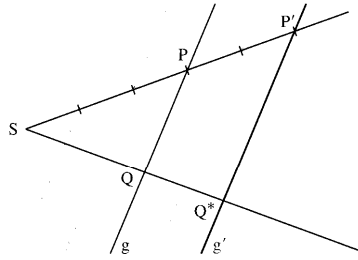
4.3.9.1 Dans un manuel allemand

Livre de mathématiques, classe 9 (14-15 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), [p.110, 114] édition 1997.



Bestimme die Längenverhältnisse:
 $a : b$
 $a : c$
 $b : a$
 $b : c$

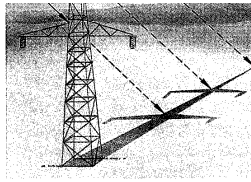
Eine wichtige Eigenschaft der zentrischen Streckung
 Wir untersuchen nun, was mit Geraden geschieht, die nicht durch S gehen.
 Es sei P' das Bild von P und $\overline{SP'} = \frac{5}{3} \cdot \overline{SP}$.
 Die eingezeichnete Streifenschar zeigt, dass dann auch $\overline{SQ^*} = \frac{5}{3} \cdot \overline{SQ}$ gilt. Also muss Q^* das Bild von Q sein. Entsprechendes gilt für jeden Punkt auf der Parallelen zu g durch P' . Also muss diese Parallele das Bild von g sein. In gleicher Weise kann man bei jedem rationalen Streckfaktor $k = \frac{p}{q}$ schließen.
 Dagegen ist dies bei irrationalem Streckfaktor (z. B. $k = \sqrt{2}$) nicht möglich, weil es dann jene Streifenschar nicht gibt. Man kann jedoch zeigen, dass auch in diesem Fall gilt:



Satz von der zentrischen Streckung:
 Bei einer zentrischen Streckung ist das **Bild einer Geraden g** eine zu g **parallele Gerade g'**.

³⁰⁹ En utilisant le théorème : si la dérivée première est nulle en a et si la dérivée seconde est négative il y a un minimum en a.

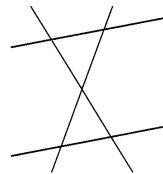
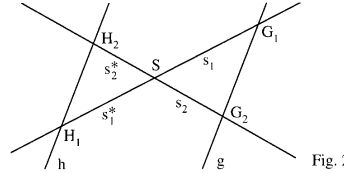
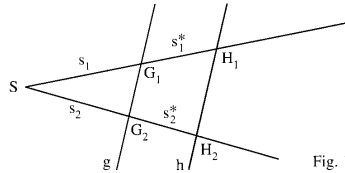
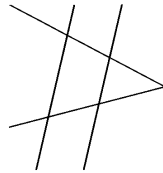
³¹⁰ Songeons aux rayons de soleil qui peuvent être considérés comme parallèles.



2 Zeichne eine Strecke PQ mit der Länge 5,6 cm. Teile PQ zeichnerisch im Verhältnis 2:3. Wie lang sind die Teilstücke?

Der Satz von der zentrischen Streckung schließt von der Gleichheit von Längenverhältnissen auf die Parallelität einer Geraden g und ihrer Bildgeraden g'. Wir untersuchen nun, ob man auch umgekehrt schließen kann.

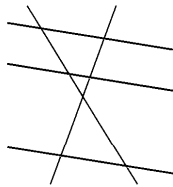
Solche Figuren heißen Strahlensatzfiguren.



In Fig. 1 ist $g \parallel h$. Die zentrische Streckung mit dem Zentrum S und dem Streckfaktor $k = \frac{SH_1}{SG_1}$ bildet G_1 auf H_1 ab. Jede Gerade durch G_1 geht bei dieser Streckung in eine zu ihr parallelen Geraden durch H_1 über. Da es zu g genau eine Parallele durch H_1 gibt, ist h das Bild von g. Folglich ist H_2 das Bild von G_2 , und es gilt auch: $k = \frac{SH_2}{SG_2}$.

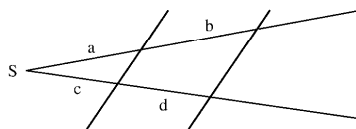
Somit ist $\frac{s_1 + s_1^*}{s_1} = \dots$; also $1 + \frac{s_1^*}{s_1} = 1 + \frac{s_2^*}{s_2}$ oder $\frac{s_1^*}{s_1} = \frac{s_2^*}{s_2}$.

Mit Hilfe einer Punktspiegelung an S erkennt man, dass dies auch in Fig. 2 gilt. Damit erhalten wir den folgenden Kehrsatz zum Satz von der zentrischen Streckung:

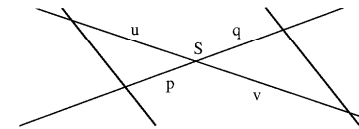


Satz: (1. Strahlensatz)

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die **Abschnitte** auf dem einen Strahl wie die **entsprechenden Abschnitte** auf dem anderen Strahl.



$a : b = c : d$ oder auch $a : (a + b) = c : (c + d)$



$u : v = p : q$ oder auch $u : (u + v) = p : (p + q)$

Éléments de traduction et commentaires :

Le théorème de Thalès est démontré avec les étapes suivantes :

1) on vérifie la propriété de l'homothétie [zentriscche Streckung] selon laquelle l'homothétique d'une droite est une droite parallèle, dans le cas du rapport rationnel particulier où le rapport d'homothétie est 5/3 [p.111] : on utilise les théorèmes du milieu vus en classe 7³¹¹ dans le cadre du registre figural. On étend les résultats à tout rapport rationnel puis à tout rapport réel (argument d'induction) [p.111].

2) on applique [p.114] la propriété précédente de l'homothétie dans la configuration de Thalès pour démontrer le théorème de Thalès. On remarquera qu'on évoque le « premier » théorème de Thalès [1. Strahlensatz]. En effet dans la terminologie allemande il existe plusieurs théorèmes de Thalès. Nous n'évoquons ici que le premier théorème.

« 1^{er} théorème de Thalès : Deux sécantes en un point S sont coupées par deux parallèles. Alors les rapports des longueurs de segments formés sur une droite sont égaux aux rapports correspondants sur l'autre droite.

³¹¹ Manuel de Klasse 7, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS) [p.43-44]

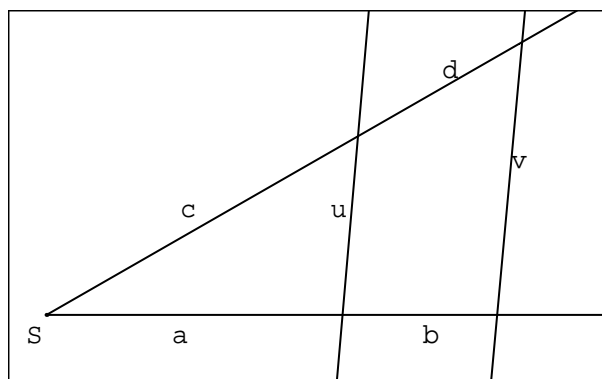
Avec les notations des figures ci avant :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et également : } \frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)} \text{ (figure de gauche)}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{p}{q} \text{ et également : } \frac{u}{(u+v)} = \frac{p}{(p+q)} \text{ (figure de droite).}$$

Le second théorème de Thalès a pour énoncé :

Deux sécantes en un point S sont coupées par deux parallèles. Alors le rapport des longueurs de segments formés sur les parallèles est égal au rapport correspondant sur une des sécantes.



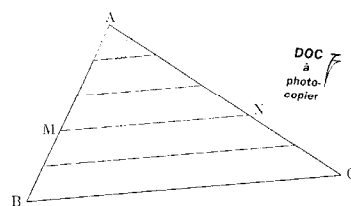
$$\frac{u}{v} = \frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)}$$

4.3.9.2 Dans un manuel français

Livre de classe de troisième, collection décimale

1 Propriété de Thalès

1 Parallèles et proportions



① Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième en son milieu.

② Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

③ Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

Sur la figure ci-dessus, le côté [AB] du triangle ABC a été partagé en cinq segments de même longueur et on a placé le point M de ce segment tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$.

On a tracé les droites vertes parallèles à la droite (BC) et les droites orange parallèles à la droite (AB).

• Reproduire cette figure sur une feuille non quadrillée (on peut l'agrandir) et marquer les égalités de longueurs obtenues en appliquant les propriétés P₁, P₂, P₃.

• En déduire que $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$ et que $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$.

NOTE
Utiliser par transparence les lignes du cahier pour partager le segment [AB] et tracer les parallèles.

[p.172]

On démontre le théorème de Thalès dans le cas du rapport particulier $AC/AN=5/3$ ³¹² en utilisant les théorèmes des milieux vu en quatrième.

On généralise (argument d'induction) à tout rapport réel.

4.3.9.3 Comparaison

Nous avons souhaité utiliser cet exemple pour montrer qu'une comparaison superficielle aurait pu nous conduire à estimer que la démonstration allemande utilisait des arguments formels basés sur la technologie des homothéties et les calculs de fractions, et que la validation française utilisait le théorème des milieux dans un registre figural particulier et un argument d'induction. On voit donc ici l'influence de l'organisation déductive de la théorie locale utilisée : l'**argument d'induction et le registre figural** sont seulement utilisées au niveau précédent dans l'organisation déductive de la théorie locale allemande par rapport à la théorie locale française.

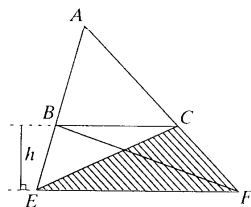
On remarque que dans les deux manuels le points de vue adopté est le point de vue des « lignes proportionnelles » dans la tradition de Lacroix et d'Arnauld³¹³.

On trouve cependant dans le livre de troisième, collection Cinq sur Cinq, Hachette, 1999, [p.160], une démonstration par la méthode des aires.

Le théorème : « Un triangle inscrit dans un cercle et ayant pour côté un diamètre du cercle est rectangle » est à attribuer à Thalès (VI^e siècle avant J.-C.).

En revanche, celui cité à la page 145, appelé en France « Théorème de Thalès », pourrait aussi bien s'appeler « Théorème d'Euclide ». C'est en effet Euclide qui, au III^e siècle avant J.-C., démontra ce théorème dans *Les Éléments*, livre VI. Mais, à la fin du XIX^e siècle, c'est au grand mathématicien grec Thalès que la France décida de rendre hommage. Dans d'autres pays, il n'en est pas de même.

Voici, ci-dessous, dans une notation moderne, la démonstration que fit Euclide.



$$(BC) \parallel (EF) \text{ d'où :}$$

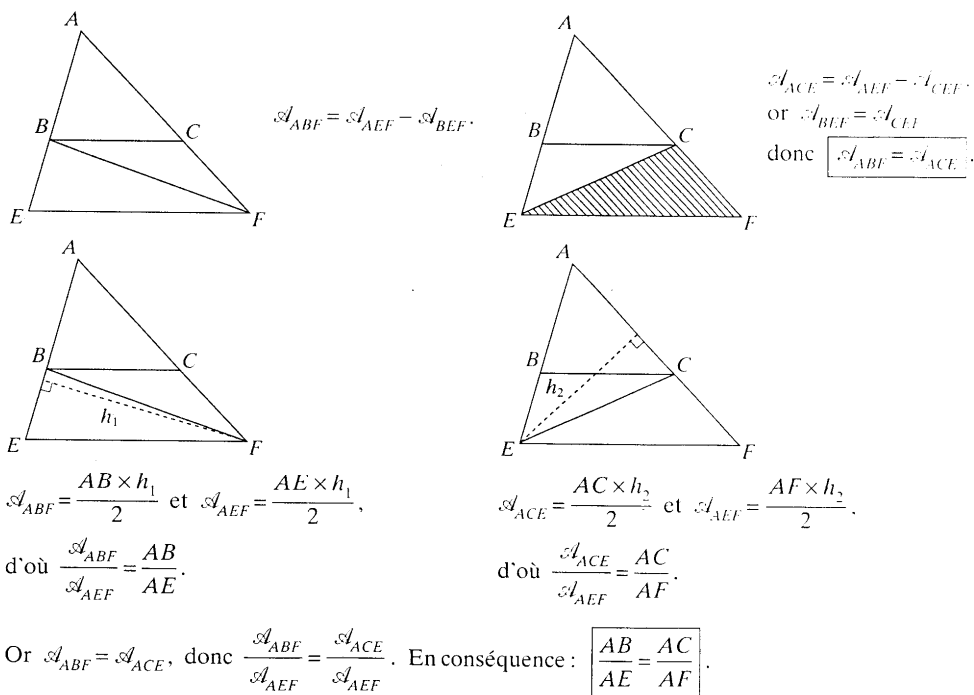
$$A_{BEF} = A_{CEF} = \frac{EF \times h}{2}$$



Euclide (IV^e-III^e s. av. J.-C.), mathématicien grec. Il rassembla, dans son célèbre ouvrage *Les Éléments*, toutes les connaissances acquises en géométrie plane à son époque, ainsi que ses propres découvertes.

³¹² On remarquera que le hasard fait que c'est le même cas particulier dans les deux manuels.

³¹³ Voir à ce sujet [Bkouche 1995, p.9-67].



Cette démonstration permet d'utiliser les technologies suivantes :

- décompositions et recompositions de surfaces à partir du registre de la figure,
- formules d'aire du triangle,
- calcul.

En cela, la fonction de systématisation est mise en valeur. De plus, avec la **dimension historique** de cette démonstration, la fonction de communication est aussi évoquée.

Le programme de seconde prévoit dans la liste des thèmes au choix, l'étude de la démonstration du théorème de Thalès par la méthode des aires. On trouve une proposition dans le livre de seconde Déclic, Hachette, 2000, [p.333].

Dans la figure ci-contre, A , B et D sont alignés dans cet ordre et A , C et E dans le même ordre, et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

a) Démontrer que les triangles BCD et BCE ont la même aire.

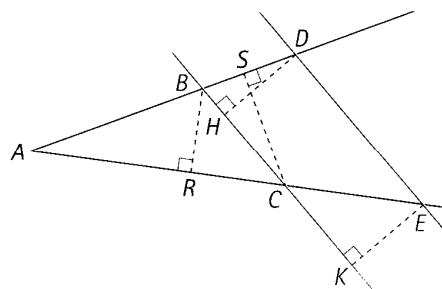
b) Montrer les égalités :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\text{aire}(ACD)}{\text{aire}(ACB)} = 1 + \frac{\text{aire}(BCD)}{\text{aire}(ACB)}$$

c) Montrer de même :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\text{aire}(ABE)}{\text{aire}(ABC)} = 1 + \frac{\text{aire}(EBC)}{\text{aire}(ABC)}$$

d) En déduire le théorème de Thalès.



4.3.10 Volumes de solides usuels

Nous avons montré, dans [Cabassut 2002], que les formules des volumes des solides usuels, tétraèdre, pyramide, prisme, cylindre, cône et sphère, sont validées dans le manuel de classe 10 de la collection Lambacher-Schweizer, 1996.

La technologie utilisée repose en partie sur le théorème de Cavalieri, admis. On a donc une tentative de construction déductive des formules de volumes des solides usuels. Puis, en fin de parcours, le calcul intégral permet alors de démontrer le théorème de Cavalieri, ce qui permet de donner une cohérence à l'organisation déductive, en valorisant la puissance de l'outil du calcul intégral. Ici la fonction de systématisation est valorisée.

En France, les validations de ces formules ne sont effectuées que par des arguments pragmatiques (comparaison des volumes d'eau remplissant des solides creux, décomposition de solides, ...). C'est essentiellement la fonction de plausibilité qui est valorisée. En classe terminale, l'outil intégral permet éventuellement de revenir sur la validation de ces formules. On notera que ces méthodes pragmatiques sont celles utilisées par la Hauptschule qui, dans son programme de classe 9, propose de valider des formules de volume par exemple par remplissage [Ministerium Lehrplanheft 2/1994, p.294].

On peut voir ici l'influence institutionnelle, le Gymnasium, filière unique déjà filtrée par une orientation qui la rend plus homogène, permettant de valoriser la fonction de systématisation. En France, dans le collège unique, qui connaît un palier d'orientation en fin de troisième, suivi d'un nouveau palier en fin de seconde, et en Allemagne dans la Realschule et la Hauptschule qui connaissent également des orientations précoces par rapport à la filière Gymnasium, ces formules sont introduites plus tôt dans le cursus, avec des validations essentiellement pragmatiques, plus adaptés au public de ces filières, et pour permettre aux élèves s'orientant vers d'autres filières de disposer de ces connaissances.

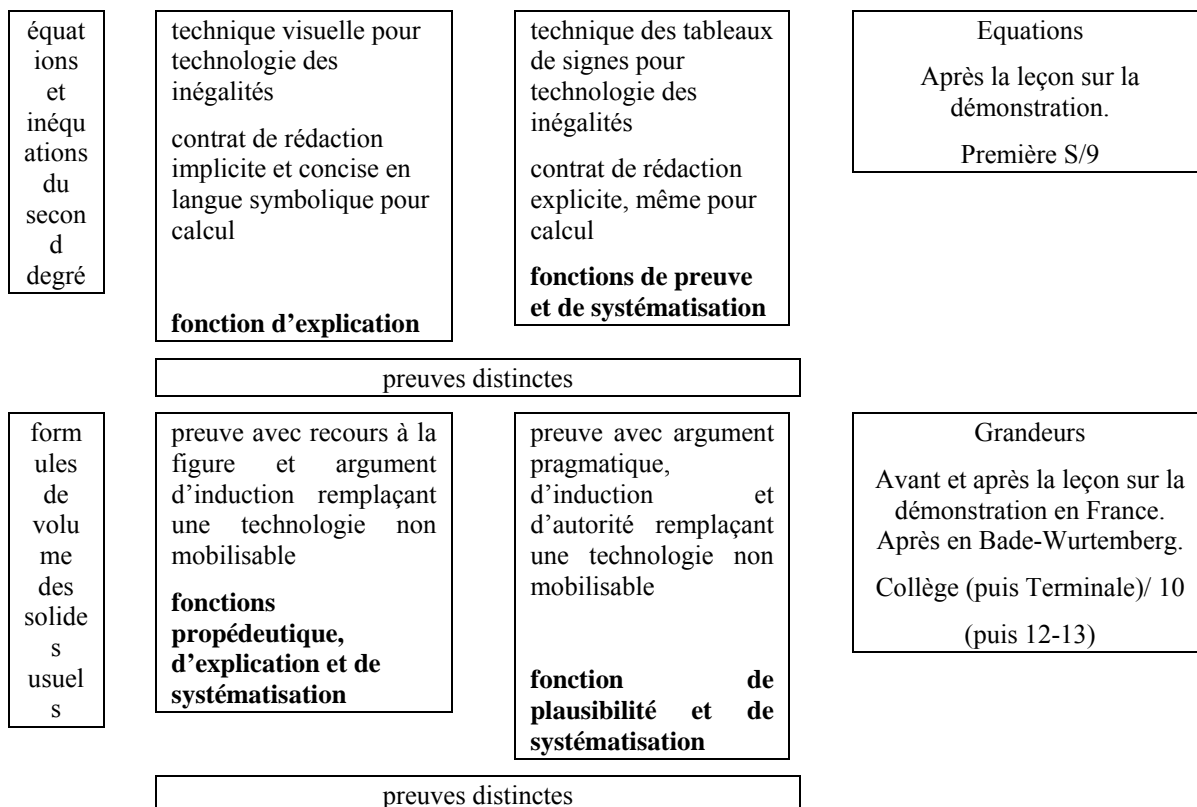
4.4 Conclusion

On observe que la démonstration est un **objet d'enseignement** dans les deux pays.

La synthèse des informations sur les leçons sur la démonstration et sur les validations de théorèmes de cours donne les tableaux schématiques suivants qui révèlent des similitudes et des différences.

	leçon allemande	leçon française
genre de tâches	découvrir (conjecturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les statuts, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditionnels), changer de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, construire, étudier)	
	découvrir, conjecturer, contrôler sont peu présents	
technologie	<ul style="list-style-type: none"> - une technologie logique ou de raisonnement, présentée de manière assez sommaire, - une technologie mathématique avec une emphase particulière pour la géométrie, - une technologie non mathématique, constituée essentiellement par les arguments visuels, pragmatiques (mesure sur des figures) ou inductifs (vérification sur quelques exemples). 	
	les technologies non mathématiques sont sollicitées dans les tâches du genre « conjecturer », « tracer » ou « construire ».	
technique	démontrer la fausseté à l'aide d'un contre-exemple, démontrer la vérité en appliquant un théorème de forme conditionnelle,	
		découvrir en reconnaissant une configuration particulière dans une figure, démontrer par le calcul découvrir par conditions
fonction	découvrir, systématisation locale, vérifier (preuve ou plausibilité), communication	

Thème du thème	Analyse		Domaine et commentaire
somme des angles d'un triangle	argumentation : plausibilité, explication, preuve avec recours à la figure (géométrie de l'ordre) le recours à la figure est un élément de technologie validations semblables fonction d'explication		Géométrie. Avant la leçon sur la démonstration. Dans des classes parallèles. Cinquième/7.
périmètre et aire du cercle	preuve avec recours à la figure et argument d'induction remplaçant une technologie non mobilisable fonctions d'explication, propédeutique	preuve avec argument pragmatique, d'induction et d'autorité remplaçant une technologie non mobilisable fonctions de plausibilité, découverte	Grandeurs. Avant la leçon sur la démonstration. Sixième et cinquième/10.
validations distinctes			
théorème de Pythagore	technique visuelle en substitution à technique formelle mais technologie mathématique mobilisable argument visuel pour la décomposition/recomposition dans surfaces fonction d'explication preuves semblables		Géométrie Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Quatrième (puis seconde)/9
théorème de Thalès	technique visuelle pour technologie du théorème des milieux argument d'induction technologie mathématique absente (passage à la limite) une organisation déductive différente déplace le moment d'intervention d'un argument d'induction preuves semblables		Géométrie. Après la leçon sur la démonstration. Dans des classes parallèles : Troisième (puis seconde)/9
variation de la fonction carrée	technologie formelle mobilisable mais une autre technologie permet de remplir une fonction de systématisation argument visuel en l'absence de technologie mobilisable fonctions d'explication et de systématisation	technologie formelle mobilisable et mobilisée fonctions de preuve, de systématisation	Fonctions. Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Seconde/11
preuves distinctes			



Parmi les **technologies** didactiques mises en évidence on note :

- le principe en Bade-Wurtemberg comme en France de recours à la figure (par exemple dans la somme des angles du triangle),
- le principe en Bade-Wurtemberg comme en France du renoncement au formalisme (en Bade-Wurtemberg comme en France par exemple dans le théorème de Pythagore)
- en Bade-Wurtemberg le principe de rédaction implicite et concise (recours à codage, recours à figure, implicite dans calcul algébrique, ...) (par exemple dans la somme des angles d'un triangle, l'équation du second degré, ...)
- en France le principe français de rédaction explicite (marqueurs de statuts, explication de démarche, ...) (par exemple dans les équations et inéquations du second degré),
- en France le principe du théorème admis (que nous n'avons pas observé en Bade-Wurtemberg).

Les **technologies** non mathématiques du type arguments visuels, pragmatiques, d'induction, d'autorité, apparaissent :

- lorsque la technologie mathématique n'est pas complètement mobilisable (géométrie de l'ordre pour la somme des angles d'un triangle, passage à la limite pour le périmètre et l'aire d'un cercle ou pour le théorème de Thalès, théorème des accroissements finis pour les variations de la fonction carrée) ou lorsque l'on veut réaliser certaines fonctions de la validation (explication pour la somme des angles d'un triangle, propédeutique pour le périmètre et l'aire d'un cercle, explication pour le théorème de Thalès, systématisation pour les formules de volumes ou pour les variations de la fonction élévation au carré)
- lorsque des technologies mathématiques mobilisables ne sont pas mobilisées pour des raisons didactiques (principe du renoncement au formalisme (théorème de Pythagore, inéquation du second degré) ou à cause des fonctions assignées à la validation (système de validation pour la variation de la fonction carrée dans le manuel allemand, explication pour le théorème de Pythagore).

Dans les exemples ci-dessus, on voit que les situations relèvent de différents domaines (géométrie, grandeur, fonction, équation, ...), aussi bien avant la classe d'introduction de la démonstration ou après, dans des classes parallèles ou différentes.

Les technologies non mathématiques précédentes cohabitent avec des technologies mathématiques, c'est ce qui illustre le phénomène de **double transposition**.

D'une part on adapte (on transpose) la démonstration mathématiques en remplaçant des arguments mathématiques mobilisables (exemple du théorème de Pythagore) ou non (exemple de la formule de l'aire et du périmètre en Bade-Wurtemberg, exemple de la somme des angles d'un triangle) par des arguments non mathématiques. On transpose une validation mathématique en validation didactique.

D'autre part on ne se contente pas d'arguments non mathématiques (par exemple du seul argument d'autorité, ou encore d'un seul argument pragmatique de mesure, ou encore d'un seul argument visuel). On complète ces arguments non mathématiques par des arguments mathématiques (par exemple dans les formules de l'aire et du périmètre du cercle, dans le théorème de Thalès), qui assurent à l'argumentation une qualité mathématique : on transpose une validation non mathématique en une validation didactique.

C'est le phénomène de double transposition qui constitue **la validation didactique comme lieu de la cohabitation d'arguments mathématiques et d'arguments non mathématiques**.

Concernant les **techniques** mises en œuvre on observe :

- **différentes registres** (figure, graphique, tableau, ...) pour alléger le formalisme alors que la technologie mathématique est mobilisable (dans le théorème de Pythagore avec la technologie des angles mobilisable ; dans l'inéquation du second degré avec la technologie des inégalités et avec la technique de disjonction des cas par lecture graphique),
- **différentes techniques mathématiques** justifiant une démonstration (méthode des aires pour le théorème de Pythagore, méthode du tableau des signes pour l'inéquation du second degré en France, recours à la figure pour l'inéquation du second degré en Bade-Wurtemberg).

Il peut arriver qu'une même technique puisse être justifiée au choix, par des arguments mathématiques, ou par des arguments non mathématiques (induction, argument visuel, argument pragmatique, argument d'autorité) (exemple du théorème de Pythagore).

Dans les observations faites il est difficile de déterminer le rôle des différentes variables : domaine mathématique concerné, technologies mathématiques mobilisables, techniques mobilisables, rang de la classe, pays concerné, thème étudié, ...

Nous avons cependant montré que les fonctions de la validation pouvaient, en partie, expliquer le type d'arguments, de technologie ou de technique mis en œuvre. Nous avons observé que la **fonction d'explication** était plus fréquente dans les validations observées dans les manuels allemands, ce qui s'accompagnait d'un recours à des registres figuratifs, graphiques ou pragmatiques plus fréquents (exemple de l'inéquation du second degré, des variations de la fonction élévation au carré). Il reste cependant délicat de discerner si les différences observées correspondent à des fluctuations de manuels ou reposent sur des différences entre pays. On peut juste remarquer que ces observations corroborent nos observations des textes officiels : plus de poids à la fonction d'explication dans le Bade-Wurtemberg, et plus de poids à la fonction de communication discursive notamment dans la rédaction écrite en France.

Nous allons maintenant nous intéresser aux validations produites avec une technologie commune aux deux pays, avec une même fonction assignée à la validation dans chaque pays et dans des conditions institutionnelles de production de la validation assez semblables, dans le but de comparer les techniques mises en œuvre et les contrats les accompagnant.

5 Etude de validations de copies

5	Etude de validations de copies	348
	Organisation du chapitre 5	349
5.1	Motivation et protocole d'étude	350
5.1.1	Motivation	350
5.1.2	Protocole d'étude.....	350
5.1.2.1	Choix du dispositif d'étude	350
5.1.2.2	Contexte institutionnel	351
5.1.2.3	Choix d'un exercice pour notre étude	353
5.1.3	Analyse de la correction proposée	354
5.1.3.1	Un exemple de résolution possible.....	354
5.1.3.2	Analyse séquentielle.....	355
5.1.3.3	Analyse structurelle.....	356
5.1.3.4	Commentaire de la solution proposée :	356
5.1.3.5	Corrigé officiel	360
5.1.3.6	Consignes de correction	362
5.2	Corpus de l'étude	362
5.2.1	Quelques caractéristiques des copies du centre de Haute Alsace	362
5.2.2	Répartition des notes selon le pays dans l'ensemble des copies étudiées.	363
5.2.2.1	Constitution du corpus d'étude	363
5.2.3	Etude qualitative.....	364
5.2.3.1	Illustration d'arguments non mathématiques	365
5.2.3.2	Illustration d'arguments mathématiques	367
5.2.3.3	Illustration de copies prototypiques	370
5.2.3.4	Commentaires et conjectures de recherche	373
5.2.3.5	Prudence dans les conjectures	373
5.3	Grille et protocole de saisies des données.....	375
5.3.1	Grille de saisie des Extrait du tableau des données saisies	376
5.3.2	Données	376
5.3.3	Variables générales	376
5.3.4	Variables d'analyse du texte de démonstration :	377
5.3.4.1	Complexité d'une démonstration	377
5.3.4.2	Mesure de l'expansion du texte.....	380
5.3.4.3	Structure d'un argument :	382
5.3.4.4	Marquage des unités démonstratives.....	383
5.3.5	Convention de saisie de donnée	383
5.4	Analyse des résultats de l'étude	384
5.4.1	Statistiques descriptives	384
5.4.2	Interprétations et comparaisons statistiques	386
5.4.2.1	Complexité de la démonstration.....	386
5.4.2.2	Expansion de la démonstration	388
5.4.2.3	Structure des arguments	390
5.4.2.4	Règles d'argument utilisées	391
5.4.2.5	Ajout d'une figure	392
5.4.2.6	Ajout de données.....	392
5.5	Conclusion.....	392

Organisation du chapitre 5

Nous commençons par présenter la motivation et le protocole général de l'étude (5.1).

Nous donnons ensuite quelques éléments descriptifs des productions d'élèves (5.2). Nous précisons quelques éléments statistiques concernant les copies avant dépouillement. Nous donnons quelques premiers résultats qualitatifs sur les productions d'élèves, constitués de différents exemples (5.2.3) ce qui nous permet de préciser nos conjectures.

Nous décrivons alors la grille et le protocole de saisie des données (5.3), notamment la pris en compte des différentes variables.

Nous indiquons alors les résultats statistiques (5.4.2) de cette étude et proposons différentes interprétations et comparaisons statistiques (5.4.3), ce qui nous permet de conclure (5.5).

Motivation et protocole d'étude

5.1.1 Motivation

La distance entre le programme officiel et le programme réel tel qu'il est appliqué, entre le manuel scolaire et le manuel tel qu'il est utilisé, entre la validation telle qu'elle est imaginée en théorie et la validation dans la pratique de la classe, est bien souvent importante. Aussi est-il intéressant d'étudier des productions d'élèves.

Mais nous ne nous intéresserons pas aux difficultés ou aux erreurs des copies, non pas que le sujet soit sans intérêt mais il nous est difficile d'embrasser toutes les questions sur la validation. Nous allons **nous intéresser aux « bonnes » productions d'élèves, c'est-à-dire aux copies dont la représentation par le professeur, est celle d'une copie correcte.** L'objectif est donc d'étudier les validations, correctes du point de vue du professeur, pour mettre en évidence les arguments qu'on a considérés comme corrects, la technologie, les techniques, les contrats acceptés.

5.1.2 Protocole d'étude

5.1.2.1 Choix du dispositif d'étude

Il existe une compétition annuelle « mathématiques sans frontières » qui s'est déroulée le 14 mars 2000 en Alsace et en Bade-Wurtemberg. Dans cette compétition nous avons sélectionné un exercice qui correspondait à une tâche du genre : « démontrer un résultat donné dans le temps limité de la compétition ». Avant de décrire cette compétition, expliquons les raisons de notre choix.

Ce dispositif d'étude a retenu notre attention car il présentait les avantages suivants :

- beaucoup de similitudes entre les deux pays :
 - o même contexte institutionnel de compétition pour les deux pays : conditions de passations semblables (même jour, même texte d'épreuve dans la langue maternelle).
 - o mêmes fonctions assignées aux démonstrations : les élèves doivent démontrer le résultat par des arguments mathématiques qui sont donc des arguments de nécessité, ce qui correspond à la fonction de preuve ; les élèves doivent rédiger leur démonstration pour la communiquer au correcteur, ce qui correspond à la fonction de communication ; les autres fonctions (explication, systématisation, découverte) ne sont pas des objectifs du contrat implicite.

- pour démontrer le résultat, des technologies disponibles chez les élèves sont communes aux deux pays (même s'il peut exister éventuellement d'autres technologies propres à un pays).
- dans les deux pays l'enjeu de la compétition pour la scolarité des élèves n'existe pas puisque les copies ne sont pas individuelles : il n'y a pas de notes pour le bulletin. La compétition donne lieu à l'attribution de prix (pour chaque élève de la classe : T-shirt, sac de sport, entrée à la patinoire, à un parc d'attraction, voyage à Paris ou Berlin, ...). Il y a des prix de participation par tirage au sort, ce qui permet à des classes faibles de pouvoir gagner.
- le facteur « professeur » est minimisé car il y a autant de professeurs que de copies. Nous avons vu, par exemple dans les travaux de [Knipping 2003] ou [Rauscher 1993], la grande hétérogénéité des professeurs. En variant les professeurs, ceci permet ne pas introduire un biais trop fort lié au professeur, ce qui est le cas lorsqu'on considère les productions d'élèves d'un même professeur.
- l'organisation de la compétition (préparation, déroulement, collecte et correction des copies) est prise en charge³¹⁴ par l'équipe d'organisation.
- la date de la compétition : l'année 2000 permettait d'avoir des classes françaises où les nouveaux programmes avaient été mis en place (en 1999 pour la troisième et en 2000 pour la seconde) et des classes allemandes non encore affectées par la réforme des programmes mis en place en début de cursus en 1999. Ces niveaux de classe correspondaient aux programmes et aux manuels étudiés dans notre recherche.

Dans les deux pays, on étudie les « **bonnes** » **copies**, produites dans des conditions comparables, c'est-à-dire avec la **même tâche** à résoudre, dans des conditions institutionnelles semblables, avec les mêmes fonctions, avec un **bloc technologico-théorique disponible semblable**. Nous allons essayer de **comparer les techniques et les contrats**, en mettant en évidence éventuellement des différences.

5.1.2.2 Contexte institutionnel

Présentons cette compétition.

- Il s'agit d'une compétition interclasses : troisième ou classe 10: 10 exercices à résoudre en 1h30 ; seconde ou classe 11: les 10 exercices précédents auxquels

³¹⁴ Ce qui est un avantage indéniable pour un enseignant à plein temps.

s'ajoutent 3 exercices supplémentaires dans la même durée de 1h30. Le choix des classes parallèles a été fait par l'équipe qui organise cette compétition depuis plus de quinze ans. Les classes 11 et seconde correspondent (à la date de la compétition observée) dans les deux pays à la troisième année avant le baccalauréat, dernière année avant une spécialisation. Les classes 10 et de troisième correspondent à la quatrième année avant le baccalauréat, une année à la fin de laquelle, dans les deux pays, les élèves passent un examen national (brevet des collèges en France, Mittlerereife en Bade-Wurtemberg).

- Chaque classe rend une copie composée d'une seule feuille réponse par exercice : donc la résolution est en « interaction sociale »³¹⁵ pendant 1h30 ; en général les copies se répartissent les exercices par groupe de 2 ou 3 élèves ; chaque groupe résout son exercice en situation d'interaction (discussion possible, correction possible). Puis chaque groupe rédige sa feuille de réponse. D'autres membres de la classe peuvent relire la réponse et demander des explications ou des corrections.
- En général autant de classes sont attachées à autant de professeurs, ce qui minimise le biais du professeur particulier.
- Les sujets sont choisis par une équipe comprenant des professeurs français et allemands qui s'assurent de la conformité et de la faisabilité des sujets par rapport aux programmes nationaux et au moment de l'année.
- Il existe un sujet d'entraînement pour les classes participantes, ce qui permet de ne pas être surpris par les conditions de la compétition, et de s'entraîner à se répartir le travail en classe, et éventuellement à travailler à groupe.
- Chaque sujet est proposé dans la langue du pays participant, pour ce qui nous concerne en français et en allemand.
- Les copies sont corrigées par au moins deux correcteurs du même pays. L'un des correcteurs au moins n'est pas professeur de la classe. Il existe divers centres de corrections regroupant les copies d'une même zone géographique. Le binôme de correcteurs corrige seulement un seul exercice dans le centre de correction (ce qui permet une certaine homogénéisation de la correction au niveau de l'exercice dans le centre).
- La compétition jouit d'une bonne image de marque en Alsace et en Allemagne. Pour la compétition de 1999/2000, 3150 classes de par le monde ont participé représentant

³¹⁵ En empruntant de terme à [Balacheff 1988b, p.16].

plus de 81291 copies. Les classes s'y inscrivent de manière volontaire et les copies y participent avec plaisir, sans la tension qui peut accompagner une épreuve d'évaluation individuelle.

-

5.1.2.3 Choix d'un exercice pour notre étude

Nous avons choisi un exercice présentant les caractéristiques suivantes :

- la résolution de l'exercice consiste en la rédaction d'une démonstration ;
- la démonstration n'est pas immédiate et ne consiste pas en la simple application immédiate d'un théorème ;
- la méthode de résolution n'est pas indiquée dans le problème (problème ouvert³¹⁶) ;
- le résultat à démontrer est indiqué dans le sujet (ce n'est pas un problème d'étude ou une situation-problème où le résultat à montrer est d'abord à conjecturer), en effet nous nous intéressons moins à l'heuristique (qui vise en partie à conjecturer un résultat) qu'aux arguments développés dans une démonstration ;
- la démonstration peut être réalisée avec des technologies disponibles et accessibles dans les deux pays : les théorèmes de Thalès et le calcul sur les fractions (pour plus de détail voir l'analyse a priori qui suit) ;
- la démonstration comprend une partie géométrique et une partie algébrique, ce qui permet de représenter deux grands domaines mathématiques.

L'exercice choisi est le suivant :

³¹⁶ Pour les notions de problème ouvert et de situation-problème nous renvoyons à [Arsac et al 1991].

**Aufgabe 10
15 Punkte**

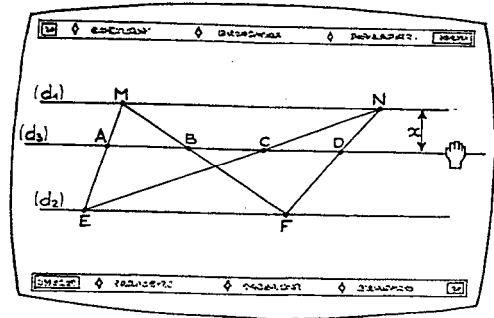
**GEOMETRIE
BEWEGLICH**

Mit einem Geometrieprogramm hat Hans-Jürgen die abgebildete Figur mit den Parallelen (d_1) , (d_2) und (d_3) konstruiert. (d_1) und (d_2) haben einen Abstand von 1 dm. Als er (d_3) zwischen (d_1) und (d_2) parallel verschiebt, stellt er fest, dass die vom Computer angezeigten Längen der Strecken AB und CD stets gleich sind. Da die angezeigten Längen jedoch gerundet sind, hat er Zweifel.

Zeige, dass die Strecken AB und CD wirklich gleich lang sind, in welcher Position zwischen den beiden anderen Geraden sich (d_3) auch befindet.

Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3) , mais il s'agit de valeurs approchées.

Démontrer que $AB = CD$ quelle que soit la position de (d_3) .



5.1.3 Analyse de la correction proposée

5.1.3.1 Un exemple de résolution possible

Ce texte est la démonstration personnelle proposée par un professeur correcteur, avant qu'il ait pris connaissance du corrigé officiel. Il considère la rédaction complète et accessible à des élèves.

Le parallélisme des droites d_1 , d_2 et d_3 nous incite à appliquer le théorème de Thalès. Comme on a d_1 distinct de d_2 (car ces droites sont distantes de 1 décimètre), et en supposant que la droite d_3 est distincte des droites d_1 et d_2 , on peut appliquer le théorème de Thalès:

- dans le triangle MEF, où (AB) est parallèle à (EF) , ce qui donne : $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$,

- dans le triangle MEN, où (AC) est parallèle à (MN) , ce qui donne : $\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$,

- dans le triangle ENF, où (CD) est parallèle à (EF) , ce qui donne : $\frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$.

Les trois égalités précédentes permettent d'écrire l'enchaînement d'égalités suivant :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF} \text{ ce qui donne } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \text{ soit } \mathbf{AB = CD} .$$

5.1.3.2 Analyse séquentielle

n°	données du pas	règle de validation du pas	conclusion du pas
1	0 énoncé		d_1 parallèle à d_2
2	0 énoncé		d_1 et d_2 distantes de 1 cm
3	0 énoncé		d_3 parallèle à d_1 et d_2
4	0 figure		M et N points de d_1
5	0 figure		E et F points de d_2
6	0 figure		A, B, C, D points d'intersection respectifs de d_3 avec (ME), (MF), (EN), (NF)
7	3, 5, 6	théorème de Thalès	$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$
8	1, 2, 4, 6	théorème de Thalès	$\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$
9	3, 5, 6	théorème de Thalès	$\frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$
10	7, 8, 9	calcul sur égalités	$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$
11	10	calcul sur égalités	$\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$
12	11	calcul sur fractions	$AB = CD$

Règles de validation utilisées : on se limite à la règle principale

R_7, R_8, R_9 : théorème de Thalès dans la formulation suivante de la classe de troisième ³¹⁷ (version « unitaire » qui regroupe les égalités de rapport des longueurs de côtés, et de rapport des longueurs des segments transversaux) :

« Soient d et d' deux droites sécantes en A .

Soient B et M deux points de d , distincts de A .

Soient C et N deux points de d' , distincts de A .

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \text{ »}.$$

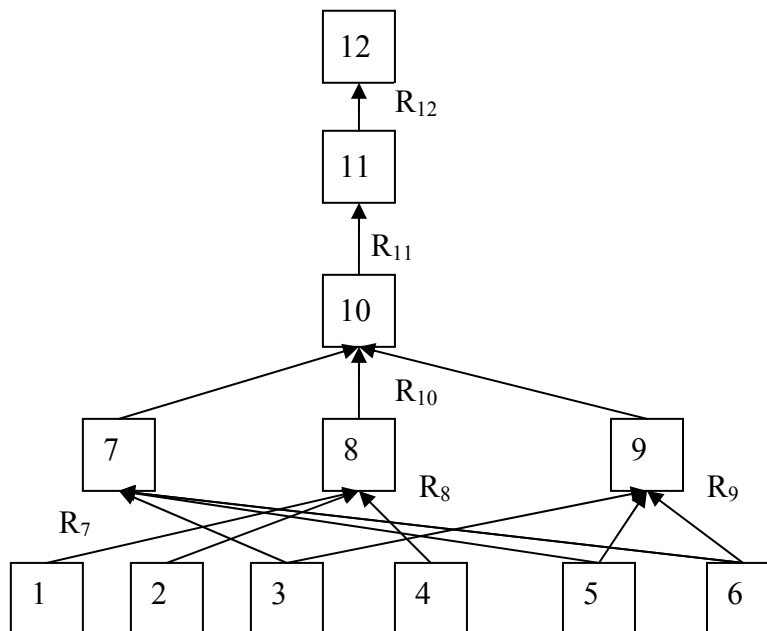
R_{10}, R_{11} : la règle utilisée ici est la règle de transitivité de l'égalité appliquée successivement aux égalités n° 7, 8, 9, 10 : « si $a=b$ et $b=c$ alors $a=c$ »

R_{12} : « deux fractions égales de même dénominateur ont même numérateur ».

³¹⁷ conformément au programme du Ministère de l'Éducation Nationale, Mathématiques troisième, B.O. n°10, (1998), [Ministère 2002, p 108]

5.1.3.3 Analyse structurelle

Avec les notations précédentes on obtient le graphe³¹⁸ suivant.



5.1.3.4 Commentaire de la solution proposée :

Existence d'informations superflues dans l'énoncé :

Remarquons que l'énoncé contient une information a priori superflue : le nombre x à côté du segment terminé par des pointes de flèches représente la distance entre les droites d_1 et d_3 . Il est évident que l'utilisation de cette distance n'est pas nécessaire à la résolution du problème : nous ne l'avons pas utilisée dans la solution proposée a priori. On peut peut-être s'attendre que cette indication superflue oriente les copies vers l'utilisation de hauteurs. De même la précision de la distance 1 dm entre d_1 et d_2 est inutile, ce qui est important c'est que ces droites soient distinctes.

Structure de la démonstration :

Cette démonstration n'a pas une structure simple linéaire. Sa structure est au contraire complexe.

1ère partie : traitement géométrique

Elle comprend une première partie que nous avons qualifiée de géométrique car elle nécessite trois fois de suite la reconnaissance d'une configuration de Thalès.

Cette partie est constituée de **trois arguments de démonstration (7, 8, 9)**.

³¹⁸ Inspiré du « Beweisgraph » de [Holland 2001, p.35]

Chaque argument a une structure classique³¹⁹ :

- le rappel du contexte d'argument : un triangle,
- les données de l'argument le parallélisme de deux droites coupant un triangle,
- le théorème utilisé (ici le théorème de Thalès),
- l'énoncé de la conclusion (l'égalité de deux rapports).

On pourra remarquer qu'on ne précise pas l'énoncé du théorème de Thalès et qu'on utilise la version du théorème de Thalès de la classe de troisième³²⁰ (version « unitaire » qui regroupe les égalités de rapport des longueurs de côtés, et de rapport des longueurs des segments transversaux) :

« Soient d et d' deux droites sécantes en A.

Soient B et M deux points de d, distincts de A.

Soient C et N deux points de d', distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} . »$$

Par contre le programme allemand du Bade-Wurtemberg indique³²¹ « théorèmes de Thalès »³²². Le pluriel de « théorèmes » montre que plusieurs versions sont attendues (le programme ne les énonce pas explicitement). Cependant la consultation d'un livre de classe³²³ montre deux versions :

« 1^{er} théorème de Thalès :

Deux sécantes en un point S sont coupées par deux parallèles. Alors les rapports des longueurs de segments formés sur une droite sont égaux aux rapports correspondants sur l'autre droite.

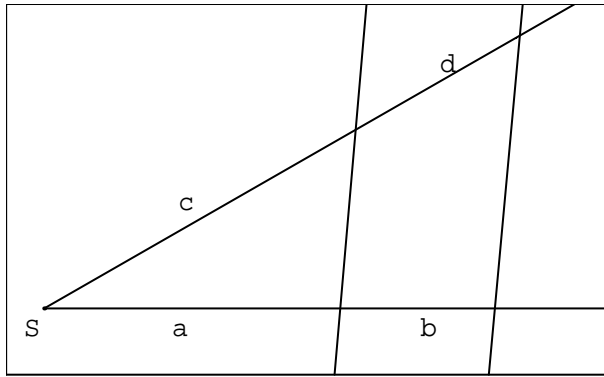
³¹⁹ Nous reprenons les quatre éléments proposés par HOUDEBINE (1998), page 10.

³²⁰ conformément au programme du Ministère de l'Education Nationale, Mathématiques troisième, B.O. n°10, (1998), p 108.

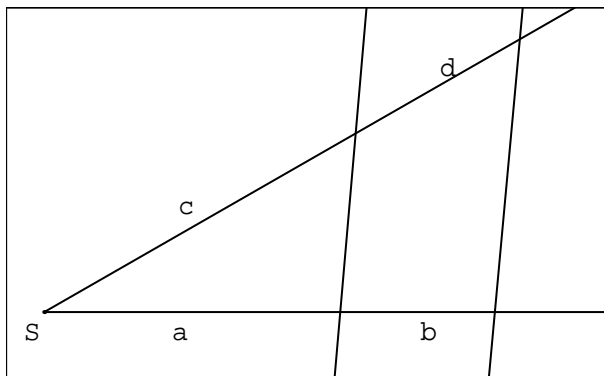
³²¹ Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg, Bildungsplan für das Gymnasium, Lehrplanheft 4/1994 et Lehrplanheft/1999

³²² Nous rappelons que le théorème de Thalès s'appelle en Allemagne « Strahlensatz » et ne fait pas référence à Thalès dans sa dénomination.

³²³ Lambacher Schweizer, 1997, LS 9, p114 à 117



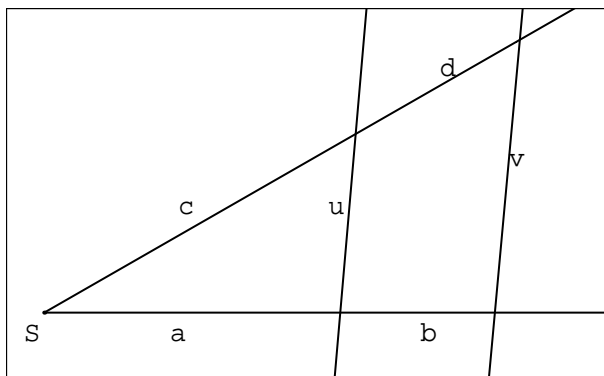
On a : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et également : $\frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)}$.



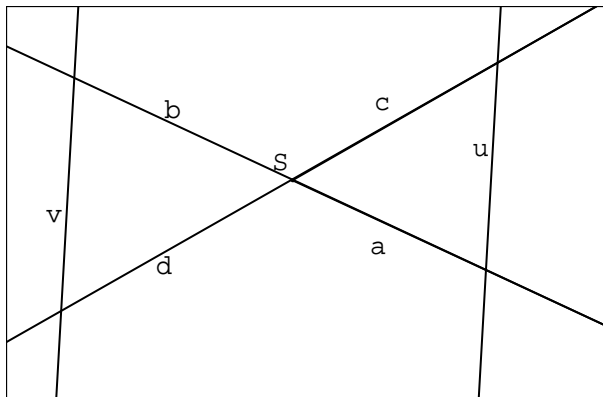
On a : $\frac{u}{v} = \frac{p}{q}$ et également : $\frac{u}{(u+v)} = \frac{p}{(p+q)}$ ».

« Second théorème de Thalès :

Deux sécantes en un point S sont coupées par deux parallèles. Alors le rapport des longueurs de segments formés sur les parallèles est égal au rapport correspondant sur une des sécantes.



$$\frac{u}{v} = \frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)}$$



$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \gg.$$

Ces différences de formulation des théorèmes de Thalès d'un pays à l'autre pourraient expliquer des différences entre les copies concernant l'évocation de ces théorèmes.

Pour ce qui concerne la complexité cognitive de cette partie, elle nécessite un changement de registres avec le passage du registre figuratif au registre algébrique des rapports de longueurs. Du point de vue de la complexité heuristique, il est nécessaire de reconnaître plusieurs configurations de Thalès.

2^{ème} partie : traitement algébrique :

Si on veut détailler on peut considérer qu'on a les arguments de démonstration suivants :

argument utilisant la transitivité de l'égalité (10, 11):

- le contexte des égalités rapports des situations de Thalès précédentes,
- en donnée les trois égalités de rapports, $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$, $\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$, et $\frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$.
- le théorème utilisé: si $a=b$ et si $b=c$ alors $a=c$ et son application deux fois de suite qui donne : si $a=b$, si $b=c$ et si $c=d$ alors $a=d$,
- l'énoncé de la conclusion : $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$.

La complexité cognitive de cet argument tient au fait qu'il mobilise plusieurs conclusions d'arguments précédents, qui étaient indépendants entre eux. Il demande donc une capacité de synthèse.

Du point de vue de la complexité heuristique, il faut reconnaître la configuration algébrique de transitivité de l'égalité.

argument utilisant des propriétés des fractions (12):

- le contexte de la conclusion précédente,

- en donnée la conclusion d'argument précédent : $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$,

- le théorème d'égalité de fractions de même dénominateur : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ alors $a = c$,

- l'énoncé de la conclusion : $AB = CD$.

Très souvent, ces arguments sont traités sous forme de calculs automatiques. Les théorèmes précédemment cités (transitivité de l'égalité et égalité de fractions) ne sont pas explicitement énoncés. D'ailleurs nous n'avons pas trouvé de trace explicite de ces théorèmes dans les programmes. On a par exemple, au programme de cinquième, la comparaison de fractions de même dénominateur³²⁴, mais dans un livre de classe de cinquième³²⁵ on trouve l'énoncé « si deux fractions ou deux écritures fractionnaires ont le même dénominateur, alors la plus grande est celle qui a le plus grand dénominateur ». Mais aucune référence à l'égalité n'est précisée.

De même dans le programme³²⁶ de classe 6 du Bade-Wurtemberg, l'unité d'enseignement 2, relative aux fractions, énonce « égalité, comparaison » sans plus de précision. On trouve dans un livre³²⁷ de classe 6 on trouve l'énoncé : « Pour des fractions de même dénominateur, la fraction de plus grand numérateur est la plus grande ».

C'est pourquoi nous nous attendons à des traitements algébriques très calculatoires et peu explicites.

5.1.3.5 Corrigé officiel

Le corrigé suivant a été proposé **aux professeurs français** dont les classes ont participé à la compétition.

³²⁴ Ministère de l'Éducation Nationale, Enseigner au collège (1998), page 47.

³²⁵ Dimathème, cinquième, Editions Didier, Paris, 1997, page 45

³²⁶ Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg, Bildungsplan für das Gymnasium, Lehrplanheft 4/1994

³²⁷ Lambacher Schweizer, 1994, LS 6, p56

« En appliquant successivement, dans les triangles MEF puis MEH, le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MI}{MH} = \frac{x}{1} = x.$$

De même (en considérant la hauteur h issue de N dans le triangle NEF), on a : $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{x}{1} =$

x.

De $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} = x$, on déduit **AB=CD**.

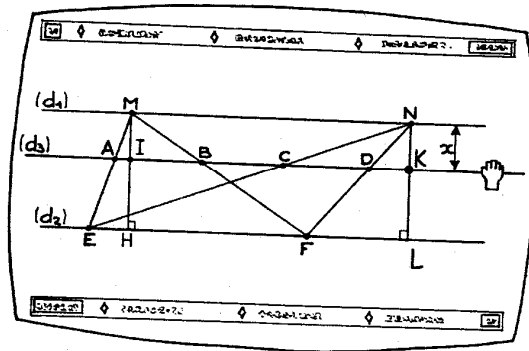
Les professeurs allemands ont reçu les indications de corrigé (Lösungshinweise) suivantes :

Aufgabe 10 (15 Punkte):

Im Dreieck EFM gilt $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MI}{MH} = \frac{x}{1}$.

Im Dreieck EFN gilt $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{NK}{NL} = \frac{x}{1}$.

Es ist also $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$ und damit $AB = CD$.



Traduction :

Dans le triangle EFM on a :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MI}{MH} = \frac{x}{1}.$$

Dans le triangle EFN on a :

$$\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{NK}{NL} = \frac{x}{1}.$$

On a aussi $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$ et de ce fait $AB = CD$.

Comparaison :

On observe que les indications du corrigé allemand ne citent pas le théorème de Thalès [Strahensatz].

On notera que les deux corrigés proposent la technologie du théorème de Thalès.

Nous verrons à l'examen des copies si d'autres technologies sont utilisées.

5.1.3.6 Consignes de correction

Voici un extrait des consignes données aux professeurs français d'un centre de correction.

« La correction se fait par équipe de 2 collègues. Il faut que toutes les copies³²⁸ aient été corrigées par les deux correcteurs (double correction) [...] Vous définirez en binôme votre propre barème pour cet exercice. Vous avez entière liberté de corriger selon les critères que vous définirez ensemble [...] Le soin, la présentation, la précision des tracés et des constructions seront pris en compte, particulièrement pour les exercices ne nécessitant pas de justification. Quant aux explications, il faudra juger de leur exactitude et/ou de leur cohérence ».

Voici un exemple de barème de correction d'un centre français.

«

- | | |
|----------|---|
| 0 | non répondu ou réponse sans aucun intérêt. |
| 1 | une allusion à une situation de Thalès. |
| 4 | évocation correcte de 2 situations de Thalès. |
| 5 | 4 points précédents + une autre information vraie mais insuffisante |
| 12 ou 13 | 3 situations de Thalès correctes mais avec une erreur dans un rapport (de Thalès) |
| 14 | 3 situations de Thalès correctes mais avec un lien entre les 3 situations pas assez explicite |
| 15 | 3 situations de Thalès correctes + une conclusion correcte ». |

Les consignes pour les professeurs allemands d'un centre de correction sont semblables aux consignes françaises précédentes³²⁹.

Nous n'avons hélas pas pu avoir accès à une grille de correction d'un centre allemand.

5.2 Corpus de l'étude

Nous allons extraire de l'ensemble des copies qui nous ont été communiquées une population à étudier. Certains centres n'ont pas répondu à nos demandes.

Tout d'abord, nous procéderons à une étude qualitative rapide de la totalité des copies pour étudier quelques exemples d'arguments non mathématiques exprimés et pour pouvoir, ensuite, constituer le corpus de l'étude.

5.2.1 Quelques caractéristiques des copies du centre de Haute Alsace

Un centre d'organisation (le secteur de Haute Alsace) nous a transmis ses statistiques.

³²⁸ du même centre

³²⁹ - Die Handhabung der Korrekturzeichen bleibt dem Korrektor überlassen.

- Die Punktbewertung der Aufgaben bei vollständiger und richtiger Lösung ist dem Aufgabenblatt zu entnehmen.

- Unvollständig bzw. fehlerhaft gelöste Aufgaben ergeben entsprechenden Punktabzug ; Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit und/oder gegen eine unangemessene Darstellungsform können auch zu einem Punktabzug führen.

On obtient les statistiques suivantes sur ce centre, sachant que le nombre de points affectés à l'exercice était 15:

	troisième	seconde	ensemble
moyenne sur 15	2,22	2,54	2,32
moyenne sur 20	2,96	3,38	3,10
% de 0 point ou non traité	51,4%	57,7%	53,4%
% de copies notées 15 /15	4,1%	5,6%	4,6%

On observe :

- un taux de réussite assez faible et un taux d'échec assez important,
- des meilleurs indicateurs en seconde par rapport à la troisième concernant la moyenne et la fréquence de copies notées 15/15.

Nous n'avons pas eu de statistiques concernant les copies allemandes.

Nous allons indiquer comment sélectionner les meilleures copies.

5.2.2 Répartition des notes selon le pays dans l'ensemble des copies étudiées.

Indiquons la répartition du nombre de classes par notes. Nous n'indiquons que les meilleures notes puisque notre objectif est de constituer une population de « bonnes copies » permettant d'étudier des démonstrations correctes.

notes sur 15	10	11	12	13	14	15	total
troisième	6		2	1	2	5	
seconde	9		3		2	8	
classes françaises	15	0	5	1	4	13	37
Klasse 10	3			1	5	10	
Klasse 11	6		9	0	2	10	
classes allemandes	9	0	9	1	7	20	46

On observe donc que notre collecte ne nous permet pas de rassembler beaucoup de « bonnes » copies.

5.2.2.1 Constitution du corpus d'étude

Nous allons donc constituer la population des copies françaises, notée **F**, avec les 23 copies dont les notes sont toutes comprises entre 12 et 15. Ceci donne les 13 meilleures copies de seconde (soit les copies notées entre 14 et 15) et les 10 meilleures copies de troisième (soit les copies notées entre 12 et 15). On note que les copies de secondes sont plus nombreuses que celle de troisièmes (57% de copies de seconde contre 43% de copies de troisième) et en moyenne meilleure que celles de troisième (14,15 contre 14,00).

Pour la population des copies allemandes, notée **A**, nous adopterons la même répartition des 2 classes que dans F, avec les 13 meilleures copies de la classe 11 et les 10 meilleures copies de classe 10.

Ceci donne la répartition suivante :

notes sur 15	12	13	14	15	moyenne	écart-type
troisième	2	1	2	5		
seconde	3		2	8		
classes françaises	5	1	4	13	14,09	1,2
Klasse 10		1	5	10		
Klasse 11		0	2	10		
classes allemandes		1	7	20	14,78	0,7

Rappelons que la comparaison de moyennes établies par des correcteurs différents, notamment de nationalités différentes, est délicate. Retenons que, avec la double correction, nous avons une procédure qui nous permet de sélectionner des démonstrations jugées comme « bonnes » pour le pays dans laquelle elles ont été corrigées..

Le fait que la population des copies françaises que collectées a de moins « bonnes » copies que celles des copies allemandes collectées nous a obligé à prendre des copies en descendant jusqu'à la note 12. Ceci explique la moyenne plus faible de F en comparaison avec celle de A. Nous n'avons pas souhaité prendre les copies françaises suivantes notées 10 : dans ce cas nous aurions pu introduire des variations plus importantes liées à la moins bonne qualité des copies et obtenir alors un autre biais sur la population.

(T3) Nous faisons l'**hypothèse de travail** que la constitution des populations A et F n'affecte pas les résultats de notre recherche.

5.2.3 Etude qualitative

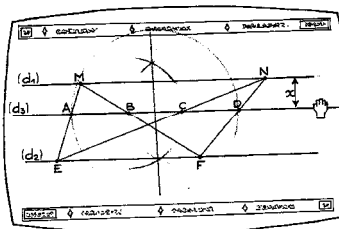
Les reproductions de copies figurent avec les annotations des deux correcteurs ou du chercheur. Dans un premier examen des copies nous allons illustrer qualitativement sur des exemples de copies nos premières observations.

5.2.3.1 Illustration d'arguments non mathématiques

On peut trouver des exemples (rares) de copies utilisant :

- un argument pragmatique :

Une copie propose de vérifier, à l'aide du compas, sur la figure de l'énoncé de l'égalité.



On trace le milieu de $[BC]$
donc nous avons $[AB]$ ou $[CD]$
plus le milieu de $[BC]$. non?
C'est pour cela que je trace
un cercle qui montre bien que
 $[CD] = [AB]$.

Exemple 1: argument pragmatique (troisième)

- un argument inductif :

Une copie vérifie l'égalité pour deux cas : $x=4\text{cm}$ et $x=5\text{cm}$ et en déduit l'égalité.

Après mesure sur le dessin, j'en déduis que l'échelle est $\frac{1}{5}$.

Comme les triangles TAB et TEF sont dans la situation de Thalès, alors, on a:

$$\frac{TA}{TE} = \frac{AB}{EF}$$

On a pour $x = 4$ cm.

$$\frac{3}{10} = \frac{AB}{18}$$

$$\text{d'où } AB = \frac{4 \times 18}{10} = 7,2 \text{ cm.}$$

$$\text{d'où } AB = \frac{5 \times 18}{10} = 9 \text{ cm.}$$

Comme les triangles MCD et NEF sont dans la situation de Thalès, alors on a:

$$\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$$

On a pour $x = 4$ cm

Exemple 2: argument inductif (troisième)

- un argument de plausibilité :

On trouve le texte suivant dans une copie allemande.

Aufgabe 10:

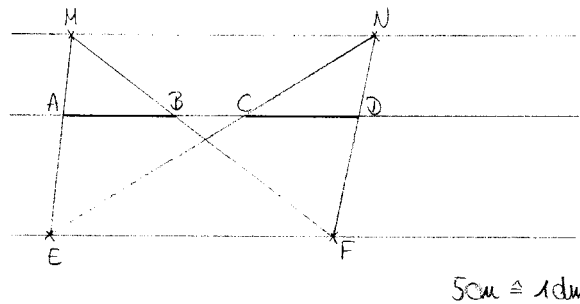
Es handelt sich bei $\triangle EFM$ und $\triangle EFN$ um Dreiecke.

Diese Dreiecke haben dieselbe Grundseite \overline{EF} und dieselbe Höhe 1 dm (gegeben). Dadurch haben die beiden Dreiecke denselben Flächeninhalt (Flächenformel = $\frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$)

Der Satz von Cavalieri besagt, dass, wenn man zwei Flächen in beliebiger Höhe, die aber bei beiden Flächen die gleiche ist, parallel zur Grundseite schneidet und diese Schnittstreifen gleich sind, der Flächeninhalt derselbe ist.

Da hier der Flächeninhalt derselbe ist, hat auch jede beliebige Schnittstrecke (die parallel zur Grundseite ist) dasselbe Maß wie die Schnittstrecke der anderen Fläche.

▷ daher gilt immer $\overline{AB} = \overline{CD}$



5 cm $\hat{=}$ 1 dm

Exemple 3: argument de plausibilité (10)

Eléments de traduction et commentaires :

« On considère les triangles EFM et EJM.

Ces triangles ont la même base EF et la même hauteur 1 dm (donné). C'est pourquoi les triangles ont la même aire (formule d'aire = $1/2 \times \text{base} \times \text{hauteur}$).

Le théorème de Cavalieri dit que, si deux surfaces à une certaine hauteur, la même pour les deux surfaces, sont coupées parallèlement à la base et que ces deux segments d'intersection sont égaux, alors les aires sont égales.

Comme ici les aires sont égales, chaque segment d'intersection (qui est parallèle à la base) aura la même longueur que celui de l'autre surface.

D'où on a toujours : $AB=CD$ »

Dans une copie allemande on considère le théorème de Cavalieri : si deux surfaces planes ont deux bases sur une même droite et de même longueur, et si toute parallèle à la droite des bases coupe les surfaces (ici des triangles) en des segments de même longueur alors les aires des surfaces sont égales. Après avoir énoncé le théorème correctement (sous la forme si H alors C), on vérifie que les aires des triangles sont égales (C est vérifié) et on en déduit que les segments sont égaux (H est vrai).

On peut considérer que ce n'est pas tout à fait un argument de plausibilité car on en a déduit « H vrai » et non pas « H plausible ». Si on ne souhaite pas interpréter cet argument comme argument de plausibilité, il s'agit en tout cas d'un argument incorrect d'un point de vue mathématique, dans lequel un énoncé conditionnel (qui est théorème) est confondu avec sa réciproque.

Nous avons cité ces exemples pour montrer que l'emploi d'arguments non mathématiques est encore présent dans des copies des deux pays. Mais ces arguments ne sont pas dans les « bonnes » copies qui sont l'objet de notre étude. En effet, dans les « bonnes » copies on observe uniquement des arguments mathématiques, formels ou sémantiques, comme l'illustreront les exemples suivants.

Comparaison :

Les arguments non mathématiques sont très rares : nous n'avons trouvé que trois copies recourant à des arguments de mesure sur une centaine de copies examinées pour chaque pays. Ces trois copies sont françaises mais nous ne pouvons en tirer de conclusion générale vu la

faiblesse de l'effectif. De même nous avons observé trois copies allemandes recourant au théorème de Cavalieri, pour lequel la conclusion est vérifiée. Il est normal de ne pas trouver cette évocation dans les copies françaises puisque ce théorème ne figure pas dans les programmes. En fait, la majorité des copies insuffisantes sont des copies blanches ou proposent des arguments incomplets (absence de règle de validation) ou incorrect (application incorrecte de la règle de validation : la conclusion n'est pas celle de la règle invoquée). Mais, comme nous l'avons rappelé précédemment, **l'objet de cette recherche n'est pas l'analyse des fautes de copies.**

5.2.3.2 Illustration d'arguments mathématiques

Dans les « bonnes » copies, la technologie la plus utilisée dans la partie géométrique est le théorème de Thalès. Nous l'illustrerons dans les prochains paragraphes.

5.2.3.2.1 En géométrie :

Illustrons ici d'autres technologies présentes dans certaines copies :

- **arguments sur les aires et sur les réductions-agrandissements :**

$$\begin{aligned}
 & \text{le triangle NCD est une réduction de NEF à} \\
 & \text{à l'échelle } \frac{1}{2} \quad 4 \\
 & \text{le triangle HAE est une réduction de HEF à} \\
 & \text{à l'échelle } \frac{1}{2} \quad 5 \\
 & t(NCD) = t(NFE) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 6 \\
 & = \frac{EF}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{EF}{2 \times 2^2}
 \end{aligned}$$

Exemple 4: aires- réduction (copie 31)

Cette copie est une copie de troisième. Effectivement les réductions et la formule d'aire du triangle sont des technologies disponibles en troisième.

Nous avons trouvé que 3 copies sur 46 utilisant la technologie des aires, et uniquement des copies françaises de troisième.

- **argument sur les homothéties**

$\overline{EF} \cdot k = \overline{AB}$; $\overline{EF} \cdot k = \overline{CD}$ k = Streckfaktor
 k ist gleich, weil bei beiden Dreiecken (EFM; EFN) die Seite EF zentrisch gestreckt wird und die Höhe gleich ist (d₁ zu d₂).
 Wenn d₃ verschoben wird, dann ändert sich der Streckfaktor k, aber der Rest bleibt trotzdem gleich.

Exemple 5: homothétie (copie 40)

Eléments de traduction et commentaires :

« $EF \times k = AB$; $EF \times k = CD$ $k =$ rapport d'homothétie

k est égal, car dans les deux triangles (EFM ; EFN) le côté EF est transformé par une homothétie et la hauteur est égale (d₁ à d₂).

Si d₃ est translaté, le rapport d'homothétie k change, mais le reste se conserve malgré tout ».

Le commentaire du correcteur est : « zu knapp » qui signifie « trop concis »

Avec cet extrait, notre intention est de montrer que, dans certaines copies, on a pu proposer des arguments de géométrie ne s'appuyant pas sur le théorème de Thalès³³⁰. Nous avons indiqué une critique du correcteur mais il ne s'agit pas ici de recorriger la copie.

- **argument sur les projections:**

$\overline{N}, \overline{C}, \overline{A}, \overline{E}$ sont les projections respectives de Π, A, C, E parallèlement
 $\overline{A} (d_1)$ et (d_3) donc $\frac{\overline{NA}}{\overline{NE}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{CE}}$

Exemple 6: projection parallèle (copie 6)

Sans cette copie de classe seconde française, les élèves mobilisent la technologie des projections parallèles.

5.2.3.2.2 En algèbre :

Différentes règles de calcul peuvent être évoquées, éventuellement à l'aide d'une technique d'exposition particulière.

³³⁰ Même s'il y a un lien mathématique entre des arguments s'appuyant sur les homothéties ou sur le théorème de Thalès ou sur les aires ou sur les projections parallèles.

donc $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$ | on multiplie les deux membres
par EF.
 donc $AB = CD$

Exemple 7: calcul algébrique (copie 26)

Ici le commentaire « on multiplie les deux membres par EF » semble relever de la technique puisqu'il explique « comment on fait ». Cependant implicitement, il y a l'utilisation d'un théorème de calcul « on obtient une égalité équivalente en multipliant les deux termes d'une égalité par le même nombre non nul ». La plupart du temps ces règles de calcul ne donne lieu à aucun commentaire lors de l'exécution, tout est implicite.

$\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \quad \cdot (EF)$
 $\underline{AB = CD} \quad \text{q.e.d.}$

Exemple 8: calcul algébrique (copie 12)

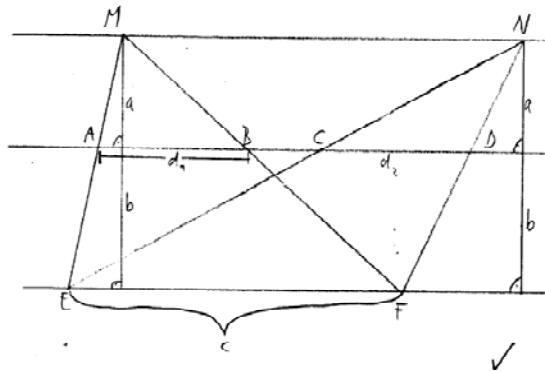
Dans cette copie allemande, la seule différence par rapport à la copie française précédente, est le registre dans lequel est exprimé la justification du passage d'une ligne à la suivante. Alors que dans la copie française on utilise le registre de la langue naturelle, ici on utilise le registre de la langue symbolique en utilisant le schéma suivant :

«) » au regard de la ligne dont l'égalité va être traitée. Le « . » désigne le signe multiplicatif. Donc à droite de «) » on indique que l'on va multiplier les termes de l'égalité par EF. Nous développerons cette technique de présentation des calculs plus loin.

5.2.3.3 Illustration de copies prototypiques

Nous indiquerons, dans la partie qui suivra les exemples ci-après, en quoi ils semblent illustrer des copies prototypiques. Ces prototypes ne décrivent que des « bonnes » copies et n'entendent pas être le prototype d'une copie « générale ». Nous avons choisi un exemple dans chaque niveau de classe.

Exemple de copie allemande concise de classe 11 avec figure :



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\left[\frac{d_1}{c} = \frac{a}{a+b} \quad \text{und} \quad \frac{d_2}{c} = \frac{a}{a+b} \right] \quad 1,2$$

$$d_1 = \frac{ac}{a+b}$$

$$d_2 = \frac{ac}{a+b} \quad 3,4$$

Exemple 9: prototype de copie allemande (copie 2)

Éléments de traduction et commentaires :

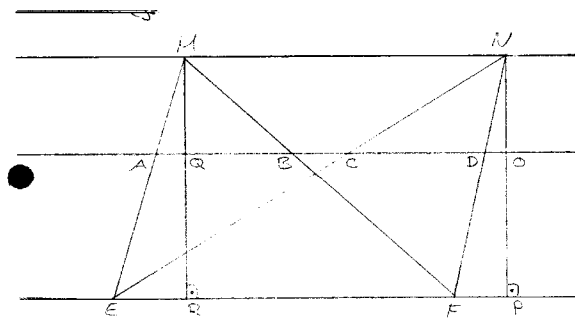
« D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{d_1}{c} = \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{d_2}{c} = \frac{a}{a+b}$$

$$d_1 = \frac{ac}{a+b} \quad d_2 = \frac{ac}{a+b}$$

$$d_1 = d_2$$

Exemple de copie allemande concise de classe 10 avec figure :



Lösung:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MQ}{MR} \quad ; \quad \frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{NO}{NP}$$

3
Begr.:
Strahlensatz

$$NO = MQ \quad ; \quad MR = NP$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \quad | \cdot EF$$

$$\underline{\underline{AB = CD}}$$

Exemple 10: prototype de copie allemande (copie 13)

Éléments de traduction et commentaires :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MQ}{MR} \quad ; \quad \frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{NO}{NP} \quad \text{Justification : Théorème de Thalès}$$

NO = MQ ; MR = NP

$$\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \Big) \times EF$$

$$\underline{\underline{AB = CD}}$$

Exemple de copie française de seconde, expansive et sans figure :

$\left. \begin{array}{l} M, A \text{ et } E \text{ sont alignés} \\ N, B \text{ et } F \text{ sont alignés} \end{array} \right\}$ dans la même ordre
 Dans le triangle MEF , les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.
 Donc $\frac{MA}{ME} = \frac{NB}{NF} = \frac{AB}{EF}$ 1
 $\left. \begin{array}{l} N, C \text{ et } E \text{ sont alignés} \\ M, D \text{ et } F \text{ sont alignés} \end{array} \right\}$ dans la même ordre
 Dans le triangle NEF , les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle NEF est lui aussi en situation de Thalès.
 Donc $\frac{NC}{NE} = \frac{MD}{NF} = \frac{CD}{EF}$ 2
 $\left. \begin{array}{l} N, C \text{ et } E \text{ sont les points respectifs de } M, A \text{ et } E \text{ parallèlement à } (d_1) \text{ et } (d_2) \end{array} \right\}$ donc $\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$ 3
 Donc $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$ 4
 C'est pourquoi, quelle que soit la position de (d_3) ,
 $AB = CD$ 5

Exemple 11: prototype de copie française (copie 6)

Exemple de copie française de troisième, expansive et sans figure :

Dans les triangles CND et ENF , les droites (CD) et (EF) sont parallèles
 $C \in (EN)$ et $D \in (NF)$
 Donc $\frac{CD}{EF} = \frac{CN}{EN}$ 5
 Dans les triangles $πEN$ et AEC , les droites (AC) et $(πN)$ sont parallèles
 $A \in (πE)$ et $C \in (EN)$ donc $\frac{CN}{EN} = \frac{πA}{πE}$ 7
 Dans les triangles $πEF$ et $πAB$, les droites (AB) et (EF) sont parallèles
 $A \in (πE)$ et $B \in (πF)$
 Donc $\frac{πA}{πE} = \frac{AB}{EF}$ 10
 On sait que $\frac{CD}{EF} = \frac{CN}{EN} = \frac{πA}{πE} = \frac{AB}{EF}$ donc $\frac{CD}{EF} = \frac{AB}{EF}$ 16
 donc $CD = AB$

Exemple 12: prototype de copie français (copie 10)

5.2.3.4 Commentaires et conjectures de recherche

Une première comparaison rapide des productions de F et de A nous amène à formuler les conjectures suivantes :

1. les copies de F recourent davantage à une rédaction en langue naturelle³³¹,
2. les copies de F ont un discours plus expansif, les copies de A sont plus concises,
3. les copies de F ont un discours plus précis dans la partie géométrie (citation des théorèmes, vérification des hypothèses, ...), les copies de A sont moins précises,
4. les copies de A recourent davantage à une langue symbolique : graphies mathématiques avec des notations géométriques ou algébriques, graphie usuelle (accolade, flèche),
5. les copies de A codent davantage la figure,
6. les copies de F utilisent des registres de langue différents selon qu'ils travaillent dans le cadre géométrique ou dans le cadre algébrique, la différence semble moins nette pour les copies de A.

On peut se demander si des éléments de technologie (théorèmes de Thalès, propriétés des aires, ...), des techniques (calculs sur les égalités, sur les fractions, ...) sont plus présents dans une population que dans l'autre.

5.2.3.5 Prudence dans les conjectures

Exemple de copie allemande sans figure :

Zu zeigen $\overline{AB} = \overline{CD}$

Strahlensätze:

$$\left[\overline{MA} : \overline{ME} = \overline{MB} : \overline{MF} \right] \quad \left[\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{MA} : \overline{ME} \right]$$

$$\left[\overline{ND} : \overline{NF} = \overline{NB} : \overline{NF} \right] \quad \left[\overline{CD} : \overline{EF} = \overline{ND} : \overline{NF} \right]$$

$$\Rightarrow \overline{MA} : \overline{ME} = \overline{ND} : \overline{NF} \quad \left[\overline{MA} : \overline{ME} = \overline{AB} : \overline{EF} \right]$$

Exemple 13; copie allemande sans figure (copie 4)

Commentaire :

On a donc ici une copie qui n'est pas accompagnée par une figure.

³³¹ nous adoptons la terminologie de Duval, même si certains linguistes préféreront « langue standard » car le qualificatif « naturel » est déjà connoté. Dans notre étude la langue naturelle est le français ou l'allemand selon le groupe de copies.

Exemple de copie allemande expansive :

$MW_2 = NW$, da d_2 parallel zu d_1 und MW_2 bzw. NW sind Höhe x
 $MX_2 = NX$, da d_1 parallel zu d_3 und MX_2 bzw. NX sind Höhe $x+y$
 Die Strecken MA, ME, MW_2, MX_2 und ND, NF, NW, NX
 verhalten sich ^{daher} nach Strahlensatz folgend:
 $\frac{MA}{ME} = \frac{MW_2}{MX_2} = \frac{ND}{NF} = \frac{NW}{NX}$ oder $\frac{MA}{MW_2} = \frac{ME}{MX_2} = \frac{ND}{NW} = \frac{NF}{NX}$
 und nach Strahlensatz gilt auch: $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$ und $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF}$
 $\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \quad | \cdot (EF)$
 $\underline{AB = CD} \quad \text{q.e.d.}$
 Lösung: Also ist Strecke AB gleich lang wie Strecke CD!
 Dabei spielt der Wert von x keine Rolle!

Exemple 14: copie allemande expansive (copie 12)

Eléments de traduction et commentaire :

« $MW_2 = NW$, car d_2 est parallèle à d_1 et MW_2 respectivement NW sont la hauteur x .

$MX_2 = NX$, car d_1 est parallèle à d_3 et MX_2 respectivement NX sont la hauteur $x+y$.

les segments $[MA], [ME], [MW_2], [MX_2]$ et $[ND], [NF], [NW], [NX]$ sont, d'après le théorème de Thalès, dans les rapports suivants :

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MW_2}{MX_2} = \frac{ND}{NF} = \frac{NW}{NX} \quad \text{ou} \quad \frac{MA}{MW_2} = \frac{ME}{MX_2} = \frac{ND}{NW} = \frac{NF}{NX}$$

et d'après le théorème de Thalès on a également : $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$ et $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \times EF$$

$AB = CD$ q.e.d.

Solution : ainsi $[AB]$ a même longueur que $[CD]$!

Aussi la valeur de x ne joue aucun rôle!

»

Exemple de copie française concise:

1
[J'utilise le théorème de Thalès]
dans le triangle MEF
on a les rapports $\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$

4
Dans le triangle NEF
on a les rapports $\frac{ND}{NF} = \frac{NE}{NF} = \frac{CD}{EF}$

6
Dans le triangle NMF
on a les rapports $\frac{MB}{MF} = \frac{ND}{NF} = \frac{BN}{MN}$

• $\frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$ 8
• $\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$ 9
• $\frac{MB}{MF} = \frac{ND}{NF}$ 10

11
On obtient les rapports $\frac{AB}{EF}$ qui est égal à $\frac{CD}{EF}$
12
(donc) $AB = CD$. ✓

Exemple 15: copie française concise (copie 9)

Pour cette dernière copie on remarque que le degré de concision n'est pas du même niveau que celui des exemples allemands précédents. Il y a citation du théorème et des triangles, ainsi que des phrases de liaison en langue naturelle. On pourrait conjecturer que les « bonnes copies » sont des copies qui justement sont explicites et que les copies trop concises ont été écartées. D'une part, si c'était le cas, cela montrerait que la représentation d'une « bonne » copie varie d'un pays à l'autre, et que cette représentation est bien liée à des techniques de rédaction et à des contrats de rédaction. D'autre part nous n'avons pas trouvé dans les « mauvaises » copies françaises des copies qui avaient le degré de concision des précédents exemples allemands.

Nous allons donc définir avec précision quel protocole d'analyse nous mettons en place pour vérifier la validité de nos conjectures.

5.3 Grille et protocole de saisies des données

Nous allons proposer un extrait de la grille de saisie de données pour permettre de mieux suivre les commentaires expliquant la composition de cette grille.

5.3.2 Données

Nous commentons la grille de saisie des données qui est constituée d'une feuille de tableau Excel. Le nombre entre parenthèses désigne la ligne correspondant aux données saisies commentées. **Les lignes ou colonnes non citées correspondent en général à des titres pour rendre la grille plus claire ou à des espaces vides pour aérer le tableau.**

Nous souhaitons comparer les textes de démonstration écrits dans les copies.

Pour confirmer ou infirmer nos conjectures nous proposons d'introduire les outils d'analyse des données qui suivent. Cette partie est cruciale car le choix de la méthode d'analyse des données va influencer sur les résultats que nous trouverons. Il y a bien entendu un côté très subjectif, dans le sens qu'un autre observateur peut proposer une autre méthode d'analyse. Nous essaierons d'indiquer les justifications de nos choix et de décrire le protocole d'analyse des données. Pour homogénéiser cette analyse, une seule personne saisit les données. Cependant on peut envisager, que si les critères de classification des données ne sont pas suffisamment précis, une fluctuation subsiste dans la saisie des données.

Le protocole de saisie des données est le suivant.

5.3.3 Variables générales

On choisit une copie. On alternera par groupes de cinq copies (un groupe allemand et un groupe français), pour pouvoir observer subjectivement les différences entre copies allemandes et françaises, et affiner ainsi la grille d'analyse.

On numérote la copie, pour pouvoir la consulter après archivage.

On renseigne les variables générales de la copie :

- (3) le numéro de la copie,
- (4) la classe de la copie, parmi troisième et seconde pour la France et classe 10 ou 11 pour l'Allemagne,
- (5) l'établissement de la copie, pour vérifier la diversité des établissements,
- (6) la note finale attribuée par les correcteurs et (7) l'autre note éventuelle avant harmonisation entre correcteurs.

5.3.4 Variables d'analyse du texte de démonstration :

Analyse de la structure de la démonstration :

En nous inspirant des travaux de Houdebine³³² et de notre partie théorique, nous proposons une grille qui dénombre le nombre d'arguments³³³ de la démonstration (répartis entre la partie algébrique et la partie géométrique), qui indique l'ordre d'exposition global de la démonstration (*hypothèse vers conclusion, conclusion vers hypothèse, mixte*), le statut de chaque argument (*contexte³³⁴, entrée, théorème ou règle de calcul, sortie*) en indiquant si l'élément de structure est cité et/ou marqué.

5.3.4.1 Complexité d'une démonstration

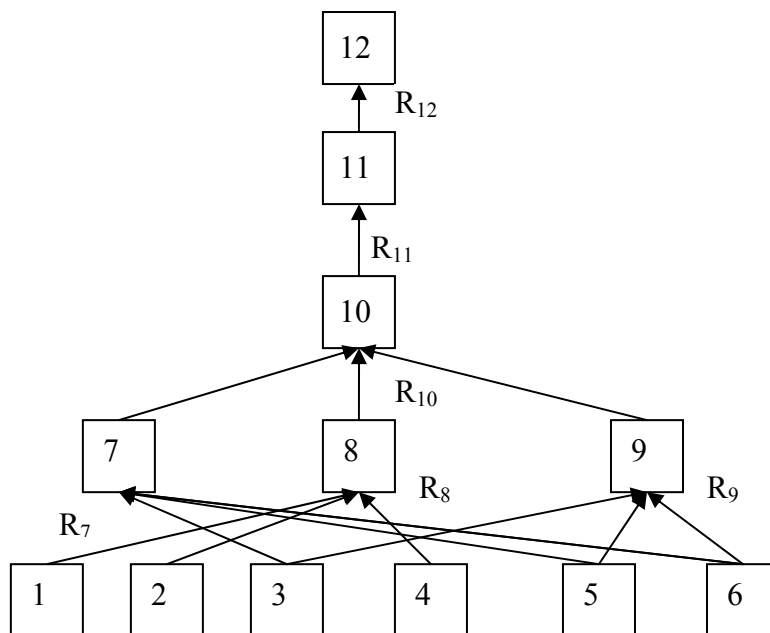
Exemple : au début du chapitre nous avons dressé la structure en graphe de la démonstration suivante proposée par un professeur correcteur.

n°	données du pas	règle de validation du pas	conclusion du pas
1	0 énoncé		d_1 parallèle à d_2
2	0 énoncé		d_1 et d_2 distantes de 1 cm
3	0 énoncé		d_3 parallèle à d_1 et d_2
4	0 figure		M et N points de d_1
5	0 figure		E et F points de d_2
6	0 figure		A, B, C, D points d'intersection respectifs de d_3 avec (ME), (MF), (EN), (NF)
7	3, 5, 6	théorème de Thalès	$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$
8	1, 2, 4, 6	théorème de Thalès	$\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$
9	3, 5, 6	théorème de Thalès	$\frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$
10	7, 8, 9	calcul sur égalités	$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$
11	10	calcul sur égalités	$\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$
12	11	calcul sur fractions	$AB = CD$

³³² Houdebine (1998) page 54

³³³ Un argument est un triplet (données, règle d'inférence, conclusion) dont les éléments ne seront pas toujours explicités, notamment la règle d'inférence ou les données qui sont de précédentes conclusions « recyclées », sont souvent implicites.

³³⁴ Nous reprenons la terminologie de Houdebine.



Pour analyser la complexité de cette démonstration, nous allons commencer par définir cinq premières variables.

(12) nombre d'arguments de géométrie.

(13) nombre d'arguments d'algèbre.

Pour le comptage des arguments de démonstration on pourra remarquer que des copies peuvent exposer un résultat en un seul argument de démonstration³³⁵ en regroupant des égalités de rapports concernant trois parallèles coupées par des sécantes et en invoquant le théorème de Thalès, alors que d'autres copies distingueront en autant d'arguments de démonstrations que d'égalités de rapports³³⁶. On pourra estimer que le nombre d'arguments est un indicateur du caractère expansif du discours. Une copie qui a tendance à regrouper les arguments de démonstration a tendance à être concise, alors que si elle les multiplie, elle a tendance à s'étendre.

Pour mesurer la complexité de la démonstration, nous considérons sa structure en graphe précisée dans la partie théorique. A partir de la conclusion finale, on descend vers les conclusions intermédiaires, jusqu'aux hypothèses initiales (progression par conditions suffisantes) ; dans cette descente, un nœud est une sortie d'argument ou conclusion d'argument. Un nœud de sortie d'argument (au départ ce nœud est la conclusion finale du graphe) est relié à tous les nœuds d'entrée de cet argument ; on aligne tous ces nouveaux nœuds sur un même niveau ; à chaque création de branches issues de nœuds de même niveau on aligne les nouveaux nœuds sur un même niveau ; on indique en **(14)** le *nombre de niveaux* qui indique en quelque sorte la « hauteur du graphe ».

³³⁵ copie n° 12

³³⁶ copie n° 9 et 11

On appelle feuille un nœud qui n'est relié qu'à des hypothèses initiales. **(15)** le *nombre de feuilles*³³⁷ indique en quelque sorte la « largeur »³³⁸ du graphe. Les *feuilles* sont les premiers arguments validés uniquement à partir des données initiales : ils n'utilisent pas encore de conclusion intermédiaire comme donnée. Une démonstration qui n'a qu'une seule feuille est linéaire simple. Si par contre elle a beaucoup de feuilles elle est complexe. Dans ce cas, la copie a fait la synthèse de plusieurs résultats intermédiaires pour produire un argument de démonstration. Les trois indicateurs (nombre d'arguments, nombre de niveaux, nombres de feuilles) mesurent une complexité de la démonstration produite par la copie.

(16) imbrication des parties algèbre et géométrie :

On appelle « partie géométrique » de la démonstration l'ensemble constitué des arguments géométriques et « partie algébrique » l'ensemble constitué des arguments algébriques. Dans l'exposition de la démonstration, on peut choisir :

- soit d'exposer d'abord la partie géométrique, suivie de la partie algébrique. C'est l'exemple de la correction proposée par le professeur et que nous avons analysé en début de chapitre.
- soit de mêler les arguments : dans ce cas nous indiquerons dans la variable **(16)** que les parties sont imbriquées (nous citerons un exemple ci-après).

Application de l'analyse à l'exemple précédent :

L'exemple précédent, pour lequel nous avons dessiné le graphe de la démonstration, a les caractéristiques suivantes :

- **(12)** nombre d'arguments de géométrie : 3 (correspondant aux 3 règles de validations (R₁ à R₃),
- **(13)** nombre d'arguments d'algèbre : 3 (correspondant aux 3 règles de validations (R₄ à R₆),
- **(14)** nombre de niveaux : 4,
- **(15)** nombre de feuilles : 3,
- **(16)** pas d'imbrication des parties géométrie et algèbre.

Autre exemple :

Nous reproduisons ici un exemple de copie où les parties géométrie et algèbre sont imbriquées.

³³⁷ Cet indicateur peut être rapproché des structures de démonstration « en bassin » ou « en source » évoquées par [Knipping 2003 pp.151, 157]. Pour Knipping une structure « en source » [Quelle-Struktur] correspond à un discours démonstratif où plusieurs justifications sont traitées. Il s'y développe des argumentations parallèles. On peut considérer qu'un nombre important de feuilles caractérise plutôt une argumentation en « source », les feuilles étant des arguments qui se sont développés parallèlement. Knipping donne d'autres caractéristiques, au niveau du type d'argument mis en œuvre (argument sémantique) ou des fonctions de l'argumentation, que le nombre de feuilles ne peut pas décrire. De même, pour Knipping, la structure en « bassin » correspond à des écheveaux d'argumentation [Argumentationsstränge] qui se développent linéairement en avant et abductivement en arrière. La structure linéaire favorise un nombre de feuilles réduit. Cependant ces descriptions s'éloignent de notre conception qui n'est que structurelle : le nombre de feuilles et le nombre de niveaux décrivent la structure d'une démonstration indépendamment des types d'argument qui la composent, des fonctions qui la motivent, de la méthode heuristique (descendante ou ascendante) ou de l'ordre d'exposition (en avant ou en arrière).

³³⁸ Nous n'avons pas pris comme largeur le nombre d'hypothèse initiales qui en principe est le même pour toutes les démonstrations.

Tous démontrons ce problème sur les principes du théorème de Thalès.

(Soit h la distance entre (D_1) et (D_2) : $\frac{x}{h} = \alpha$

D'après le théorème de Thalès : $\frac{NB}{NF} = \frac{x}{h} = \alpha \stackrel{?}{=} \frac{CD}{EF}$

donc $CD = EF \times \alpha$ oui mériterait une explication

De plus $\frac{TA}{TE} = \frac{x}{h} = \alpha$

Et d'après le théorème de Thalès $\frac{AB}{EF} = \alpha$

donc $AB = EF \times \alpha$

Conclusion: $CD = \alpha \times EF$ et $AB = \alpha \times EF$ entra de plus

donc $CD = AB$

Exemple 16: imbrication algèbre et géométrie (copie 32)

Un autre indicateur est :

(21, 47) ordre d'exposition des arguments (1 : hypothèse vers conclusion, 2 : conclusion vers hypothèse, 3 : mixte, autre).

Tous les textes observés avaient un ordre d'exposition des hypothèses vers la conclusion. Il est vrai que ceci est plus facilement observable en phase heuristique, comme le montrent les observations de [Knipping 2003].

5.3.4.2 Mesure de l'expansion du texte.

On distinguera un texte en langue naturelle qui utilise des mots en français ou allemand, et un texte en langue symbolique qui utilise des symboles algébriques ou des graphies du type flèche, accolade, symboles d'implication ou d'équivalence. Ces deux types de textes peuvent bien entendu interagissent dans le texte global de la démonstration, comme l'a mis en évidence [Laborde 1982, p.18].

Pour analyser l'expansion du discours, pour savoir si un discours est expansif ou concis, nous allons définir des unités de mesure de la longueur du discours. Cette définition des unités de mesure est très subjective et peut donner lieu, d'une part à des résultats différents selon les définitions choisies, et d'autre part à des fluctuations selon la précision de ces définitions.

Difficulté d'une analyse grammaticale mot par mot :

Un texte en langue naturelle va être décomposé en unités lexicales. On pourrait effectuer une analyse grammaticale en prenant le mot comme unité. Mais la différence de structure des langues ferait que « le

théorème de Thalès » compterait pour quatre mots alors que la traduction allemande « der Strahlensatz » compterait pour deux mots.

Difficulté d'une analyse grammaticale fonctionnelle :

On pourrait opter pour une analyse fonctionnelle en prenant comme unité les groupes fonctionnels suivants : groupe nominal sujet (avec son éventuel complément de nom compris dans le groupe sujet), groupe nominal complément de verbe, groupe verbal hors groupe nominal complément de verbe.

Par exemple la phrase « damit ist die obrige Behauptung bewiesen »³³⁹ est analysée en deux unités « damit ist...bewiesen » groupe verbal et « die obrige Behauptung » groupe nominal.

La phrase « Ainsi est démontrée l'affirmation ci-dessus » est également analysée en deux unités : le groupe verbal « ainsi est démontrée » et le groupe nominal « l'affirmation ci-dessus ». « Le théorème de Thalès » ou « der Strahlensatz » comptent également pour une unité.

Dans le registre de langue symbolique l'extrait « $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$ » compte trois unités fonctionnelles : « $\frac{MA}{MB}$ » qui joue le rôle d'un groupe nominal (sujet), « = » qui joue le rôle d'un groupe verbal (« est égal à ») et « $\frac{MC}{MD}$ » qui joue le rôle d'un groupe complément de verbe.

Cependant on peut observer le caractère délicat de ce comptage puisque :

- « A et B sont égaux » compte pour deux unités fonctionnelles : « A et B » groupe nominal et « sont égaux » groupe verbal alors que « A est égal à B » ou « A=B » compte pour trois unités fonctionnelles ; de même « j'utilise le théorème de Thalès »³⁴⁰ compte trois unités avec « je » pour groupe nominal sujet, « utilise » pour groupe verbal, « le théorème de Thalès » pour groupe nominal complément, alors que « d'après la propriété de Thalès »³⁴¹ compte pour une unité,
- dans les propositions avec verbe d'état dans le groupe verbal on exclut tout groupe nominal du groupe verbal. Par exemple « la droite d_1 est parallèle à la droite d_2 »³⁴² compte pour trois unités : « la droite d_1 » groupe nominal sujet, « est parallèle » groupe verbal, « à la droite d_2 » groupe nominal complément ; par contre le groupe nominal « la droite d_1 parallèle à la droite d_2 »³⁴³ compte pour une unité.

Ceci montre la difficulté d'un tel dénombrement.

Analyse par unités démonstratives :

La terminologie suivante s'inspire des travaux de [Houdebine 1998, p.10].

On appelle **unité démonstrative** un ensemble de mots ou symboles ou graphies exprimant :

- soit le contexte d'un argument de démonstration : par exemple « dans le triangle MEF »³⁴⁴ compte pour une unité. Houdebine [Ibid.] précise : « cette indication, que nous appellerons le contexte du pas, peut être très explicite avec des expressions du genre : « dans le triangle ABC ». Mais elle peut être assez

³³⁹ copie n° 1

³⁴⁰ copie n° 9

³⁴¹ copie n° 7

³⁴² copie n° 8

³⁴³ copie n° 12

³⁴⁴ copie n° 9

implicite : simplement les propriétés P et Q du théorème sont explicitées dans le texte pour l'objet particulier choisi. Par exemple : « comme le triangle ABC est rectangle en A, on a $AB^2+AC^2=BC^2$ »².

- soit une entrée d'argument : « Les points M,A,E et M,B,F sont alignés. De plus $(AB)/(EF)$ »³⁴⁵ compte pour deux unités, « la droite d_1 parallèle à la droite d_2 »³⁴⁶ compte pour une unité,
- soit une citation explicite de la règle d'argument ; le nom d'un théorème, d'une règle de calcul ou d'une définition : « d'après la propriété de Thalès »³⁴⁷ ou « j'utilise le théorème de Thalès »³⁴⁸ compte pour une unité,
- soit une sortie d'argument : « on a les rapports $MA/ME = MB/MF=AB/EF$ » compte une unité,
- soit un ajout de données « on trace une droite perpendiculaire à d_2 et qui passe par M »³⁴⁹.

(18, 44) désigne le *nombre d'unités démonstratives* de géométrie, respectivement d'algèbre.

Analyse des textes exprimés dans le registre symbolique :

Dans le cas d'extraits où cohabitent plusieurs registres de langues, le registre en langue naturelle ou le registre symbolique (notations algébriques, flèche d'implication se côtoient dans le même texte), on indiquera en **(19, 45)** le *nombre d'unités démonstratives écrites dans le registre symbolique* (de géométrie, respectivement d'algèbre parmi le nombre total d'unités démonstratives. Si une unité démonstrative n'est composée que d'un marqueur en langue naturelle (« donc », « alors », ...) et tout le reste est en écriture symbolique alors on comptera l'unité démonstrative comme symbolique. Par contre l'unité démonstrative de sortie d'argument « alors $AB=CD$ quelque soit x et la position de d_3 »³⁵⁰ ne sera pas considérée comme unité démonstrative symbolique.

On indiquera également en **(20, 46)** le *nombre d'unités fonctionnelles* exprimées dans le registre symbolique (de géométrie, respectivement d'algèbre): « $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$ » compte trois unités fonctionnelles ; une flèche d'implication ou d'équivalence, une accolade ou une flèche compteront chacun pour une unité fonctionnelle (ces notations remplaçant souvent l'unité : « on en déduit que »).

5.3.4.3 Structure d'un argument :

On s'intéresse ici aux différents statuts des éléments d'un argument (contexte, entrée d'argument, règle de validation, sortie d'argument). Pour chacun on s'intéresse à trois aspects: la citation de l'élément, puis le marquage³⁵¹ de ce statut par un élément de langue naturelle (dans, or, donc, comme, ...), ou le marquage de cet élément par un signe symbolique (flèche, implication, égalité, accolade, ...).

On distingue pour chaque argument les éléments suivants :

(23, 24, 25, 49, 50, 51)³⁵² *contexte* : il s'agit du rappel de la configuration dans laquelle se situe l'argument (en géométrie : un triangle donné pour appliquer le théorème de Thalès, en algèbre : une série d'égalités algébriques

³⁴⁵ copie n° 7

³⁴⁶ copie n°12

³⁴⁷ copie n° 7

³⁴⁸ copie n° 9

³⁴⁹ copie n°7

³⁵⁰ copie n°7

³⁵¹ Nous développons cette notion plus loin.

³⁵² (23, 49) désigne la citation du contexte, (24, 50) indique que le marquage du contexte est en langue naturelle (par exemple avec la préposition « dans », (25, 51) indique que le marquage du contexte est symbolique (par exemple avec une accolade.

trouvées précédemment dont on déduit, d'une partie de ces égalités, après calcul, une nouvelle égalité). Nous reprenons la terminologie de [Houdebine 1998, p.10] comme précédemment indiqué.

(27, 28, 29, 53, 54, 55) *entrée d'argument* : il s'agit des données qui vérifient les hypothèse du théorème (ici le théorème de Thalès) ou la règle de calcul (transitivité de l'égalité, traitement des égalités) et qui en permettront ainsi l'application. Alors que le contexte est général et imprécis (un triangle sans préciser ses propriétés ou au contraire un triangle avec toutes ses propriétés y compris celles qui sont inutiles), l'entrée de l'argument doit être précise et en principe ne rappeler que les propriétés nécessaires. On sait que ce n'est pas toujours le cas. Parfois le contexte et l'entrée de l'argument sont évoqués dans une même formulation qui correspond à la notion de donnée que nous avons étudiée dans le premier chapitre.

(31 à 38, 57 à 63) *règle d'argument* : théorème, règle de calcul ou définition utilisés, avec une citation du nom du théorème ou de la règle, ou même une énonciation explicite du théorème et de la règle appliquée, avec toutes ses hypothèses vérifiées, ou encore aucune citation (l'application étant implicite),

(40, 41, 42, 65 à 67) *sortie d'argument* : conclusion de l'application du théorème, de la règle de calcul, ou de la définition appliquée.

5.3.4.4 Marquage des unités démonstratives

Pour les unités démonstratives de contexte d'argument, d'entrée d'argument, de règle d'argument et de sortie d'argument, nous distinguerons les marquages suivants :

(23, 27, 31, ...) *citation de l'unité démonstrative*,

(24, 25, 28, 29, ...) *marquage du statut* : les travaux de Duval³⁵³ et d'Houdebine³⁵⁴ ont signalé l'importance du statut des propositions pour comprendre la structure d'une démonstration. C'est pourquoi nous indiquerons le marquage du statut en précisant le type de marquage :

- en langue naturelle : par exemple «dans ... » pour le contexte, «d'après.. » ou « j'utilise.. » pour la règle d'argument, « comme.. » ou « car... » pour l'entrée d'argument, « donc... » pour la sortie d'argument,
- en langue symbolique : par exemple utilisation de flèches d'implication ou d'équivalence, d'accolade, de flèches.

5.3.5 Convention de saisie de donnée

Les conventions suivantes ont du être arrêtées en cours de codage, lors de la rencontre d'une ambiguïté. Le choix d'une convention est bien souvent arbitraire et répond à la seule nécessité du choix pour pouvoir poursuivre son codage.

- Nous convenons que les marqueurs de déduction (« donc », « par conséquent », flèche d'implication, « « folgend » [il en résulte], « da gilt » [cela donne] ...) sont des marqueurs de sortie d'argument. On aurait pu convenir qu'ils marquent également l'entrée d'argument (dans « A donc B » A est entrée d'argument) et implicitement il marque une règle logique de déduction (cachant éventuellement un théorème implicite). Cependant nous ne considérerons pas cette dernière interprétation et les marqueurs de déduction seront

³⁵³ DUVAL, 1993, « introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif » e

³⁵⁴ Houdebine (1998) page 11

considérés uniquement comme des marqueurs de sortie d'argument. Il est évident qu'avec une autre convention on pourrait observer d'autres résultats.

- Nous convenons également de ne pas compter la reformulation finale du résultat de l'exercice dans le comptage des unités démonstratives ni le rappel de l'énoncé en tête de copie.
- Lors d'un calcul, le calcul correspondant au remplacement d'une variable par sa valeur ne compte pas comme unité démonstrative.³⁵⁵
- Nous renonçons à coder les marquages liés à la disposition car il est parfois difficile de distinguer si la disposition est l'effet de la simple écriture linéaire ou d'une volonté de marquer explicitement par la disposition. Ce serait cependant un intéressant objet d'étude.
- Pour le théorème de Thalès, dans le cas où les conditions de parallélisme sont rappelées explicitement, on l'indiquera (34).
- Pour la partie géométrique on indiquera la nature de la règle invoquée : théorèmes de Thalès (35), propriétés des aires (hauteurs, calcul d'aires) (36), propriétés de la distance entre deux parallèles (37), propriétés des projections ou des homothéties (38).
- Pour la partie algèbre on indiquera la nature de la règle invoquée : transitivité de l'égalité (61), traitement des équations (62), égalité de fractions (63).
- On conduit en (69 à 72) une brève analyse des *insuffisances ou des erreurs de la copie* (inférence non prouvée, inférence fausse, argument inutile).
- On indique en (68) s'il y a un *dessin joint*.
- Pour l'ajout de données nous distinguerons l'ajout de données sur la figure (73) et l'ajout de données dans le texte de la démonstration (74).

5.4 Analyse des résultats de l'étude

5.4.1 Statistiques descriptives

Extraits des résultats statistiques :

N°		Population	français (F)	allemand (A)		français (F)	allemand (A)
6	note	moyenne	14,0870	14,7826	écart-type	1,2400	0,6713
11	Structure de la démonstration:						
12	Nombre d'arguments de géométrie	moyenne	3,8261	3,4348	écart-type	1,7491	0,8435
13	Nombre d'arguments d' algèbre	moyenne	3,2609	3,7391	écart-type	1,4555	2,1366
14	Nombre de niveaux	moyenne	3,7826	4,0000	écart-type	0,9980	1,3143
15	Nombre de feuilles	moyenne	3,5217	3,2174	écart-type	1,5036	0,9514
16	Imbrication algèbre et géométrie	effectif	8	13	fréquence	34,78%	56,52%
17	partie géométrique						
18	nombres d'unités démonstratives	moyenne	14,1739	5,9565	écart-type	8,7316	2,2254
19	nombres d'unités démonstratives symboliques	moyenne	4,8261	3,8696	écart-type	2,4800	1,3917
20	nombre d'unités fonctionnelles symboliques	moyenne	21,8696	13,0435	écart-type	12,0992	4,9679
22	marqueur du contexte d'argument						
23	indication de contexte d'argument	effectif	16	4	fréquence	69,57%	17,39%
27	indication d'entrée d'argument	effectif	14	7	fréquence	60,87%	30,43%
31	indication de règle d'argument	effectif	21	19	fréquence	91,30%	82,61%

³⁵⁵ copie 31

34	indication de parallélisme dans théorème de Thalès	effectif	14	3	fréquence	60,87%	13,04%
35	utilisation du théorème de Thalès	effectif	23	22	fréquence	100,00%	95,65%
37	autre théorème utilisé (aires, distance de parallèles, ...)	effectif	17	13	fréquence	73,91%	56,52%
40	indication de sortie d'argument	effectif	23	23	fréquence	100,00%	100,00%
43	partie algébrique						
44	nombre d'unités démonstratives	moyenne	5,5455	4,9565	écart-type	3,5014	2,5132
45	nombre d'unités démonstratives symboliques	moyenne	4,8636	4,5217	écart-type	3,1667	2,6089
46	nombre d'unités fonctionnelles symboliques	moyenne	17,4545	14,3043	écart-type	12,0346	8,7565
49	indication de contexte d'argument	effectif	2	3	fréquence	8,70%	13,04%
53	indication d'entrée d'argument	effectif	14	9	fréquence	60,87%	39,13%
57	indication de règle d'argument	effectif	2	13	fréquence	8,70%	56,52%
65	indication de sortie d'argument	effectif	22	23	fréquence	95,65%	100,00%
68	figure	effectif	7	14	fréquence	30,43%	60,87%
73	ajout de données sur la figure	effectif	7	11	fréquence	30,43%	47,83%
74	ajout de données dans le un texte	effectif	10	5	fréquence	43,48%	21,74%

On observe les résultats suivants :

- La moyenne d'indication des règles d'argument en géométrie est supérieure pour les copies françaises; c'est le contraire pour la moyenne d'indication des règles d'argument d'algèbre, qui est supérieure pour les copies allemandes.
- Les moyennes de nombre d'unités démonstratives, de nombre d'unités démonstratives symboliques, de nombre d'unités fonctionnelles symboliques sont supérieures pour les copies françaises ; les écarts sont cependant plus réduits en algèbre qu'en géométrie
- La fréquence des copies comportant une figure est environ le double dans les copies allemandes par rapport aux copies françaises.
- La fréquence de recours à une figure pour ajouter des données est supérieure dans les copies allemandes par rapport aux copies françaises ; c'est le contraire pour la fréquence de recours à un texte pour ajouter des données qui est supérieure pour les copies françaises.
- En géométrie, le marquage d'un contexte d'argument, d'une entrée d'argument, d'une vérification d'un théorème sont des attitudes très minoritaires dans les copies allemandes alors qu'elles sont très majoritaires dans les copies françaises.
- Le marquage d'une règle d'argument en algèbre est plus fréquent dans les copies allemandes.

Analysons plus finement ces résultats, afin de prendre en compte les fluctuations d'échantillonnage.

5.4.2 Interprétations et comparaisons statistiques

Opérons nos observations du tableau précédent ligne après ligne. Le numéro entre parenthèses indique le numéro de la ligne commentée.

5.4.2.1 Complexité de la démonstration

5.4.2.1.1 Nombre d'arguments en géométrie et en algèbre :

(4) Nous avons signalé que les 23 copies de F étaient moins bien notées et avec une plus grande dispersion que les 23 copies de A. Nous avons adopté l'hypothèse de travail que ceci n'a pas d'influence importante sur les résultats de notre recherche.

(12) La moyenne du nombre d'arguments dans les raisonnements géométriques est supérieure pour F;

(13) :c'est le contraire pour le nombre d'argument de raisonnements algébriques.

Mais les moyennes ne sont pas très différentes.

L'hypothèse que la différence des moyennes pourrait être expliquée par le hasard de l'échantillonnage est à rejeter avec un test de Student³⁵⁶, avec un risque de 34% pour (12) et de 36% pour (13). Nous voyons donc la difficulté à concevoir cette différence comme significative.

On observe d'autre part une dispersion plus grande du nombre d'arguments en géométrie en F, et le contraire en algèbre, sans que nous soyons en mesure d'interpréter cette observation.

On observe les effectifs de F et de A dans lesquels le nombre d'arguments est inférieur ou égal à trois. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-eux³⁵⁷ montre que cette hypothèse a une probabilité de 76% en géométrie et de 76% en algèbre. On prend donc trop de risques à la rejeter.

Nous indiquons à titre d'information le détail du calcul du test de chi-deux qui nous a permis de vérifier les conditions sur le tableau théorique (pas d'effectifs inférieur à 5, et si possible des effectifs supérieurs à 10). **Si l'une de ces conditions n'était pas vérifiée, nous le mentionnerons explicitement.** Nous ne mentionnerons plus ces calculs pour la suite.

³⁵⁶ Nous appliquons le test de Student sur des échantillons indépendants (puisque A et F ne sont pas appariés), en effectuant un test bilatéral et avec des variances d'échantillon différentes. On réalise ce test à l'aide de la fonction « test.student » du tableur Excel. Nous avons choisi les tests de Student et de Chi-deux qui permettent de traiter des échantillons de faibles effectifs.

³⁵⁷ Nous appliquons le test du chi-deux en nous assurant que l'effectif total est supérieur à 30 (ici 46), en vérifiant que les éléments du tableau théorique sont supérieurs à 5 et si possible supérieur à 10. On calcule ce test à l'aide de la fonction « test.khideux » du tableur Excel.

Élément observé: Nombre d'arguments de géométrie inférieur ou égal à 3

Tableau observé :

	A	F	effectif total	Fréquence
effectif observé	10	11	21	0,45652174
effectif complémentaire	13	12	25	0,54347826
effectif total	23	23	46	
Fréquence	0,5	0,5		

Tableau théorique :

	A	F
effectif théorique	10,5	10,5
effectif complémentaire	12,5	12,5

Nombre de degrés de liberté 1
Chi 2 calculé = 0,087619048
Probabilité de 0,76722615 que la différence soit aussi élevée que la valeur du Chi-deux calculé.

L'écart entre A et F du nombres d'arguments de géométrie (respectivement algèbre) n'est pas significatif.

5.4.2.1.2 Nombre de niveaux, nombre de feuilles.

On observe que le nombre de niveaux a une moyenne supérieure dans F alors que c'est le contraire pour le nombre de feuilles.

L'hypothèse que la différence des moyennes pourrait être expliquée par le hasard de l'échantillonnage est à rejeter avec un test de Student, avec un risque de 53% pour le nombre de niveaux (14) et de 41% pour le nombre de feuilles (15).

On observe les effectifs de F et de A pour lesquels le nombre de niveaux est inférieur ou égal à trois³⁵⁸ (14) (respectivement le nombre de feuilles). Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-eux montre que cette hypothèse aune probabilité de 100% (respectivement 38%).

L'écart entre A et F du nombre de feuilles (respectivement de niveaux) n'est pas significatif.

5.4.2.1.3 Imbrication algèbre et géométrie

³⁵⁸ Ce seuil nous permet de remplir les conditions de validités de l'application du test.

Concernant l'imbrication des parties algèbre et géométrie, on observe qu'il est existedans 8 cas dans F contre 13 en A. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-eux montre que cette hypothèse aune probabilité de 14%.

Nous n'avons notamment pas pu mettre en évidence les structures prototypiques d'argumentations en bassin (dont le nombre de feuilles est important) et en source (dont le nombre de niveaux est important) attachées spécifiquement à F ou A : chaque population contient des cas des deux espèces. Une hypothèse serait que le phénomène observé par [Knipping 2003] pourrait être lié à des fluctuations d'échantillonnage importantes compte tenu de la faiblesse des effectifs observés (3 cas français et 3 cas allemands). Dans ce cas les variations de structure observées ne seraient pas liées à un facteur « pays » mais plutôt à un facteur « professeur ».

Nous n'avons pas vu apparaître de différences significatives quant à la structure de la démonstration entre A et F.

5.4.2.2 Expansion de la démonstration

5.4.2.2.1 En géométrie

On observe que le **nombre d'unités démonstratives en géométrie** est en moyenne plus du double en F qu'en A.

L'hypothèse que la différence des moyennes pourrait être expliquée par le hasard de l'échantillonnage est à rejeter avec un test de Student avec un risque de 0,02%. Cependant l'importance de la dispersion, avec une variance 15 fois plus importantes pour F que pour A est gênante pour l'application du test de Student.

On observe les effectifs de F et de A où le nombre d'unités démonstratives de géométrie est inférieur ou égal à 7. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse aune probabilité de 0,1% .

L'écart entre A et F du nombres d'unités démonstratives **en géométrie** est significatif : les copies de F ont tendance à utiliser plus d'unités démonstratives en géométrie que celles de A.

On montrerait que l'écart entre A et F sur le nombre d'**unités démonstratives symboliques en géométrie** n'est pas significatif (test de Student avec un risque de 12% et test du chi-deux pour un nombre inférieur ou égal à 4 avec risque de 6% avec deux cases du tableau théorique égales à 8 et donc inférieures à 10 ; le choix d'un nombre inférieur ou égal à 3 conduit à un risque de 76%).

Par contre l'écart entre A et F sur le nombre d'**unités fonctionnelles symboliques en géométrie** est significatif (test de Student avec un risque de 0,3% et test du chi-deux pour un nombre inférieur ou égal à 9 avec risque de 1,7%).

Nous commentons les résultats statistiques:

- Le recours aux unités démonstratives symboliques correspond essentiellement en géométrie à l'égalité des rapports du théorème de Thalès ; les possibilités d'écart entre F et A sont plus réduites car « on n'a pas tellement le choix » pour exprimer l'égalité des rapports.
- Par contre pour une même unité démonstrative, alors que une copie allemande va se limiter aux deux seuls rapports utiles du théorème de Thalès pour le calcul suivant, une copie française pourrait indiquer tous les rapports y compris ceux qui ne seront pas utilisés pour la suite. On en a une illustration dans la copie prototypique de classe de seconde (copie n°6) présentée précédemment : la copie indique l'égalité de trois rapports alors qu'elle n'utilise que l'égalité de deux rapports pour la suite. Ceci peut expliquer pourquoi il y a davantage d'unités fonctionnelles. Enfin la moyenne d'unités symboliques étant légèrement supérieure en F, cet écart est démultiplié pour le nombre d'unités fonctionnelles car une unité démonstrative symbolique contient plusieurs unités fonctionnelles.
- On observe également une importante dispersion en F, ce qui est gênant pour la fiabilité des tests de Student.

5.4.2.2 En algèbre

On observe que le **nombre d'unités démonstratives en algèbre** est en moyenne comparable en F et en A.

L'hypothèse que la différence des moyennes pourrait être expliquée par le hasard de l'échantillonnage est à rejeter avec un test de Student avec un risque de 52,24%.

On observe les effectifs de F et de A dans lesquels le nombre d'unités démonstratives d'algèbre est inférieur ou égal à 4. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit

expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 38% .

La différence entre A et F du nombre d'unités démonstratives **en algèbre** n'est pas significative.

Il est de même pour le nombre d'unités démonstratives symboliques et fonctionnelles symboliques où les écarts observés ne sont pas significatifs.

On remarquera que les dispersions sont comparables.

5.4.2.3 Structure des arguments

5.4.2.3.1 En géométrie

Le contexte d'argument est cité dans 70% des copies de F contre 17% dans A.

On observe les effectifs de F et de A où le contexte est cité en géométrie. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 0,04%.

La citation du contexte en géométrie est significativement plus fréquente en F qu'en A.

L'entrée d'argument est citée dans 61% des copies de F contre 30% dans A.

On observe les effectifs de F et de A où l'entrée d'argument est citée en géométrie. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 3,82%.

La citation de l'entrée d'argument en géométrie est significativement plus fréquente en F.

La règle d'argument est citée dans 91% des copies de F contre 83% dans A.

On observe les effectifs de F et de A où la règle est citée en géométrie. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 38%.

La règle d'argument est massivement citée en F et en A, sans que la différence de fréquences apparaisse significative.

La sortie d'argument est citée dans toutes les copies de F et de A.

5.4.2.3.2 En algèbre

Le contexte d'argument est cité dans 2 copies de F et 3 copies de A.

La différence n'est bien entendue pas significative.

L'entrée d'argument est citée dans 14 copies de F contre 9 dans A.

On observe les effectifs de F et de A dans lesquels l'entrée est citée en algèbre. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 14%. La différence observée n'est pas significative.

La règle d'argument est citée dans 2 copies de F contre 13 dans A.

On observe les effectifs de F et de A où le contexte est cité en géométrie. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 0,05 %. Cependant on notera que deux cases du tableau théorique ont pour effectif 7,5.

La règle d'argument est davantage citée en A qu'en F, avec une différence significative.
--

La sortie d'argument est citée dans pratiquement³⁵⁹ toutes les copies de F et de A.

5.4.2.4 Règles d'argument utilisées

Le théorème de Thalès intervient dans toutes les copies, à l'exception d'une copie allemande (n°40) qui utilise une homothétie.

Dans l'utilisation du théorème de Thalès, la vérification de la condition du parallélisme fait l'objet d'une citation dans 14 copies de F contre 3 de A.
--

On observe les effectifs de F et de A où le contexte est cité en géométrie. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 0,08 %. Cependant on notera que deux cases du tableau théorique ont pour effectif 8,5.

D'autres règles sont utilisées en complément du théorème de Thalès : propriétés des aires, propriété de la distance de deux droites parallèles, propriétés des projections, propriétés des homothéties. 17 copies de F utilisent une autre propriété en géométrie contre 13 pour A. Le test de chi-deux montre que cet écart est expliqué par le hasard de l'échantillonnage avec une probabilité de 22% avec deux cases théoriques d'effectif 8, ce qui nous amène à considérer cet écart comme non significatif.

En algèbre les règles citées concernent la simplification des fractions, les transformations d'égalités, l'égalité de fractions.

Les sorties d'argument sont quasiment toujours citées aussi bien en algèbre qu'en géométrie.

³⁵⁹ A l'exception d'une copie de F qui raisonne sur les aires et les hauteurs sans faire de raisonnement algébrique.

5.4.2.5 Ajout d'une figure

On observe qu'une figure est dessinée sur la copie dans 7 cas pour F contre 14 pour A.

On observe les effectifs de F et de A où une figure est présente. Supposons que l'écart entre l'effectif de F et celui de A soit expliqué par le hasard de l'échantillonnage. Le test du chi-deux montre que cette hypothèse a une probabilité de 0,038 %.

L'ajout d'une figure est significativement plus fréquent en A qu'en F.
--

5.4.2.6 Ajout de données

L'ajout de données apparaît sur la figure dans 7 copies de F contre 11 copies de A, ce qui n'apparaît pas significatif comme écart (risque de 23% dans un test de chi-deux, avec deux cases théoriques d'effectif 9).

L'ajout des données se traduit par un texte dans 10 copies de F contre 5 copies de A, ce qui n'apparaît pas significatif comme écart (risque de 12% dans un test de chi-deux, avec deux cases théoriques d'effectif 7,5).

5.5 Conclusion

L'examen des productions d'élèves a permis de mettre en évidence les éléments suivants.

Fonctions semblables :

Les productions de démonstration étudiées semblent remplir les mêmes fonctions : **fonction de preuve** de la conclusion demandée et **fonction de communication** de cette preuve, dans sa dimension d'évaluation. Les copies devaient transmettre au correcteur la preuve qu'elles proposaient. Les autres fonctions nous semblent moins présentes : la fonction de plausibilité n'est pas, dans le contrat habituel d'une situation d'évaluation, prise en compte. D'ailleurs nous n'avons observé aucun argument de plausibilité dans les « bonnes » copies étudiées. La fonction d'explication n'est pas non plus privilégiée dans cette situation d'évaluation : il s'agit moins de produire une démonstration rendant intelligible les raisons de la véracité de la conclusion est vraie, que de montrer au correcteur qu'on sait appliquer correctement des théorèmes ou des règles de calcul pour prouver la conclusion. Nous n'avons pas observé de différence dans les fonctions de cette tâche de démonstration dans les copies françaises et dans les copies allemandes étudiées, alors que nous avons vues dans des manuels scolaires des fonctions différentes suivant le pays, pour une même tâche de démonstration.

Eléments semblables de technologie disponible :

En géométrie, nous avons observé que toutes les copies utilisaient le théorème de Thalès sauf une qui utilisait les homothéties. Les autres éléments de technologies viennent en appoint et nous n'avons pas observé de différences significatives dans leur emploi.

En algèbre, nous avons observé que ce sont les mêmes règles de calculs qui sont utilisées dans le traitement des fractions et des égalités.

Dans l'ensemble nous avons observé une grande similitude dans les éléments de technologie employés.

Éléments semblables dans la structure des démonstrations.

Nous n'avons pas observé de différences significatives quant à la structure des démonstrations. On observe en fait dans chaque population, une grande hétérogénéité des structures de démonstration, tant pour le nombre d'arguments utilisés, que pour le nombre de niveaux ou celui du nombre de feuilles, l'imbrication des parties algèbre et géométrie. Les démonstrations sont exposées des hypothèses vers la conclusion.

Différences de contrats et de techniques

En géométrie, nous avons mis en évidence des différences de contrat dans l'exposition des arguments. **Le discours est plus expansif en F** (nombre d'unités démonstratives plus important, nombre d'unités fonctionnelles plus important, moindre ajout d'une figure au texte de la démonstration). **Le discours est également plus précis en F** : marquage du statut des unités démonstratives par une citation plus fréquente du contexte de la démonstration, de l'entrée de l'argument, vérification plus fréquente de la condition de parallélisme dans l'application du théorème de Thalès.

En algèbre, par contre, **la règle d'argument est plus fréquemment citée en A qu'en F**, alors qu'il n'y a pas de différences significatives pour la citation du contexte, de l'entrée ou de la sortie des arguments. **L'expansion du discours paraît semblable en F et en A** (nombre d'unités démonstratives, nombre d'unités démonstratives symboliques, nombre d'unités fonctionnelles symboliques).

On observe enfin des écarts qui, même s'ils ne sont pas statistiquement significatifs, convergent vers la même direction et mériterait peut-être des investigations plus poussées.

On observe que l'ajout de données se fait davantage dans un texte en F qu'en A, alors qu'il se fait davantage sur la figure en A qu'en F.

On observe une différence entre géométrie et algèbre entre F et A

Alors qu'en F, le nombre³⁶⁰ d'arguments est légèrement plus important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 1,17), le nombre d'unités démonstratives est nettement plus important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 2,55).

En A on observe le contraire : le nombre d'arguments est légèrement moins important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 0,91), le nombre d'unités démonstratives est semblable en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 1,09).

La géométrie donne lieu à un discours plus expansif en F qu'en A.

On observe bien une différence de contrat :

- en F la langue naturelle est le registre privilégié d'expression pour les démonstrations de géométrie qui sont expansives et précises ; par contre en algèbre les règles de calcul ou opératoires³⁶¹ sont plutôt utilisées de manière concise et sans citation explicite de la règle.
- en A la langue symbolique, le registre graphique, la non explicitation des contextes ou des entrées d'arguments participent à un discours moins expansif, plus concis et moins précis, aussi bien en algèbre qu'en géométrie. Les règles d'arguments sont très souvent citées en géométrie (19 copies sur 23) et un peu moins citées en algèbre (13 copies sur 23).

Comme chaque copie représente une classe différente, et donc un professeur différent, on peut penser que ces différences de contrat ne sont pas attachées au contrat mis en place chez un professeur particulier mais ont bien une dimension culturelle plus large.

On observe également, dans les techniques utilisées, des différences entre F et A qui peuvent être illustrées à l'aide des copies prototypiques reproduites dans le paragraphe précédent sur les illustrations d'arguments mathématiques.

³⁶⁰ Il est bien évident que ce nombre est lié au problème proposé : cependant pour le même problème proposé il est intéressant de noter les différences entre F et A.

³⁶¹ Rappelons que les nouveaux programmes évoquent les règles opératoires en ces termes : « Dire qu'une propriété est utilisée comme règle opératoire signifie qu'on n'est pas tenu d'en justifier l'usage dans une démonstration ou dans un calcul » [Ministère de l'Éducation 2002, p.65].

En géométrie : la présentation rituelle d'un argument dans F, illustrée par la copie prototypique n°6, pourrait être : « Dans le contexte ..., comme ... est vérifié, d'après le théorème ..., on a la conclusion ... ». Dans A la présentation rituelle, illustrée par la copie prototypique n°2 serait : « D'après le théorème ..., on a la conclusion ... ».

En algèbre, la présentation rituelle d'un argument dans F, illustrée par la copie prototypique n°10, pourrait être une suite d'égalités exprimant un calcul. Dans A la présentation rituelle, illustrée par la copie prototypique n°13, serait une présentation ligne par ligne d'un calcul, avec une codification de la règle de passage d'une ligne à la suivante (comme indiquée dans les copies n°12 et 13).

Alors qu'en géométrie il est important dans F de marquer les différents statuts des énoncés (contexte, entrée, règle, sortie) et en algèbre d'effectuer les calculs, en A c'est le marquage de la règle qui est essentiel, aussi bien en géométrie qu'en algèbre.

Illustrons notre propos pour la technique de marquage de la règle d'inférence en algèbre.

Dans le cadre du groupe Europe de l'IREM de Strasbourg nous avons rendu compte, dans [Cabassut 1998, p.17-26], d'une visite dans une classe 9 allemande où nous avons assisté à la résolution d'une équation. Voici une traduction de l'affichage au tableau de cette résolution.

Extrait de la résolution au tableau :

$$\begin{array}{l}
 2 \times \frac{x-2}{5} + \frac{5}{x-2} = 3 \quad \left. \vphantom{\frac{x-2}{5}} \right) \text{ DP} = 5(x-2) \quad (\text{DP pour Dénominateur Principal}) \\
 \text{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad (\text{D pour Ensemble de définition de l'équation}) \\
 2 \times \frac{(x-2)(x-2)}{5(x-2)} + \frac{25}{5(x-2)} = 3 \quad \left. \vphantom{\frac{(x-2)(x-2)}{5(x-2)}} \right) \times \text{DP} \\
 2 \times (x^2 - 4x + 4) + 25 = 15x - 30 \quad \left. \vphantom{x^2} \right) - 15x \quad \left. \vphantom{x^2} \right) + 30 \\
 2x^2 - 23x + 63 = 0 \\
 x_{1/2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{4} = \frac{23 \pm 5}{4}
 \end{array}$$

On retrouve la même technique dans un livre³⁶² de Klasse 8 :

³⁶² Livre édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.47), édition 1995

$$\begin{array}{l|l}
7(2x - 5) = 3x - 2 & \text{Klammer auflösen} \\
14x - 35 = 3x - 2 & - 3x \\
11x - 35 = -2 & + 35 \\
11x = 33 & : 33 \\
x = 3 & \\
\text{Lösungszahl: } 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
2(5 - 3x) + 2x < 8 & \text{Klammer auflösen} \\
10 - 6x + 2x < 8 & \text{zusammenfassen} \\
10 - 4x < 8 & - 10 \\
-4x < -2 & : (-4) \\
x > \frac{1}{2} & \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{x \mid x > \frac{1}{2}\} &
\end{array}$$

On retrouve ici des différences de technique que nous avons observés dans les manuels scolaires à propos de l'étude des variations d'une fonction : tableau de signes de la dérivée dans le manuel français, étude de cas dans le manuel allemand.

Nous avons donc bien mis en évidence des différences de contrat et de technique pour ce qui concerne des démonstrations auxquelles les mêmes fonctions sont assignées, utilisant les mêmes éléments technologiques et situées dans un même cadre institutionnel.

Ces différences concernent le domaine étudié (géométrie, algèbre), le registre utilisé (langue naturelle, langage symbolique, registre graphique), les techniques développées (application d'un théorème de géométrie, application de règles de calcul ou opératoires). Ces différences ont été expliquées par des différences de contrats relatifs à la rédaction d'une démonstration.

Ces différences ne semblent pas affecter la structure des démonstrations, ni la nature des arguments qui les composent.

Nous rappelons cependant que nous nous sommes intéressés uniquement aux démonstration correctes, ou plus exactement aux représentations, chez les enseignants, de ce qu'est une démonstration correcte.

Les observations faites ne concernent pas les démonstrations incorrectes ou les erreurs d'élèves.

6 Conclusion

6	Conclusion.....	401
6.1	Conclusions méthodologiques.....	402
6.2	Questions et hypothèses de recherche.....	403
6.2.1	La double transposition et les différents types de validation.....	403
6.2.2	Place de la démonstration : la démonstration objet d'enseignement.....	406
6.2.3	Comparaison franco-allemande sur la validation.....	408
6.3	Perspectives de recherche.....	412
6.3.1	Représentation de la démonstration.....	412
6.3.2	Différences avec les autres Länder et les autres formes d'école.....	413
6.3.3	Pratiques de la démonstration.....	413
6.3.4	Apprentissage des élèves.....	413
6.3.5	Cadre théorique.....	414
6.4	Conclusion.....	415

6.1 Conclusions méthodologiques

Dans cette étude comparative nous avons voulu tout d'abord montrer la complexité de la comparaison. Pour cela nous avons jugé utile de mettre à la disposition du lecteur des informations recouvrant différents champs : des réflexions et des recherches sur la validation, les programmes et les textes officiels, une étude de manuels scolaires, une étude de production d'élèves.

Nous pensons en effet que dans une étude où les variables sont difficiles à maîtriser, une approche multiple permet de construire des points de convergence pour étayer des hypothèses. Nous avons signalé longuement les difficultés linguistiques et culturelles de ces comparaisons ; c'est pourquoi nous avons proposé les textes originaux en notes de bas de page.

Nous avons également développé une méthode d'analyse de l'expansion des discours qui a pris en compte ces difficultés linguistiques.

Nous avons enfin développé une méthode dialectique similitudes- différences, aussi bien dans l'analyse des programmes et des textes officiels, dans celle des manuels scolaires, et dans celle des productions d'élèves. Nous avons rassemblé deux groupes d'objets d'après leurs similitudes par rapport à une caractérisation commune puis comparé leurs différences.

Nous avons plusieurs fois indiqué qu'il était difficile de savoir si certaines différences observées de manière qualitatives³⁶³ sur des exemples sont liées à des fluctuations normales ou bien à des différences caractéristiques entre la France et le Bade-Wurtemberg. Rappelons quelques intérêts de ces études qualitatives. Elles permettent de formuler des conjectures que l'on pourra essayer de conforter par des méthodes quantitatives. Elles démontrent l'existence des phénomènes observés, même lorsqu'ils ne sont pas liés à un pays donné : ces phénomènes peuvent être moins visibles ou moins explicites dans un pays par rapport à un autre. Par exemple la fonction propédeutique de la validation, explicite dans le programme de Bade-Wurtemberg à propos de la notion de limite dans le cadre de la validation des formules d'aires et de volumes, reste très diffuse pour cette même notion de limite dans le cadre de la validation du théorème des gendarmes en première S.

³⁶³ Par exemple en examinant seulement quelques manuels ou quelques démonstrations.

6.2 Questions et hypothèses de recherche

6.2.1 La double transposition et les différents types de validation

Dans notre étude théorique, nous avons décrit des arguments non mathématiques : les arguments d'autorité, de plausibilité, pragmatiques, visuels, inductifs ; ce sont des arguments relevant de ce que nous appellerons **la validation sociale**, celle qui est utilisée par l'élève lorsqu'il est hors de la classe de mathématique, dans les institutions autres que celle de la classe de mathématiques : dans la vie quotidienne, dans les classes de sciences expérimentales, de langue maternelle, de philosophie, ...

Les arguments mathématiques sont les arguments des institutions mathématiques et sont caractéristiques de **la validation mathématique**. On peut bien entendu, dans certains domaines où les mathématiques sont appliquées, utiliser des arguments mathématiques. Mais on ne peut pas utiliser dans la validation mathématique d'arguments d'autorité, de plausibilité, pragmatiques, visuels, inductifs...

Les arguments logiques peuvent être présents aussi bien dans la validation sociale que dans la validation mathématique.

Nous parlerons de **validation didactique** pour désigner la validation d'un énoncé mathématique dans l'enseignement des mathématiques.

Nous avons montré que les programmes actuels français du collège et du lycée d'enseignement général et les programmes de 1994 de Gymnasium du Bade-Wurtemberg, proposent des validations dans l'enseignement des mathématiques dans laquelle cohabitent des arguments mathématiques, sémantiques ou syntaxiques, et des arguments non mathématiques parmi lesquels on trouve des arguments de plausibilité ou encore des arguments d'autorité. On retrouve cette cohabitation dans des manuels scolaires, correspondant à ces programmes, à propos de la démonstration des théorèmes de cours ou dans la phase heuristique de recherche d'une démonstration. Le recours aux arguments de plausibilité est affirmé avec de plus en plus de force dans ces programmes allemands dans un **projet global** qui marque le passage des « mathématiques comme produit » aux « mathématiques comme processus ». En France, ce recours aux arguments de plausibilité n'est pas affirmé aussi fortement : ce recours se fait **localement**, souvent d'après une décision de l'enseignant de la classe, en l'absence de technologie mobilisable, ou parce qu'il est jugé plus important de savoir utiliser un théorème pour résoudre une classe de problèmes que d'en connaître une démonstration.

Nous avons ainsi montré que la validation didactique est le lieu d'une double transposition, celle de la validation sociale et celle de la validation mathématique, aussi bien en France que dans le Bade-Wurtemberg.

Sur différents exemples, issus des programmes ou de manuels scolaires, nous avons montré que :

- les arguments de plausibilité utilisés dans la validation didactique marquent le passage de la fonction de preuve dans la validation sociale (par exemple « je le vois donc c'est vrai ») à la fonction de plausibilité dans la validation didactique (par exemple « je le vois donc c'est plausible »). Ces arguments sont souvent accompagnés par des arguments d'autorité ou par des arguments mathématiques. C'est pourquoi nous parlerons de transposition de la validation sociale en validation didactique, du fait de ces transformations transpositives invoquées à l'instant.
- les arguments mathématiques utilisés dans la validation didactique peuvent cohabiter avec des arguments non mathématiques. C'est le cas lorsque ces derniers se substituent à des arguments mathématiques non mobilisables. C'est aussi le cas lorsque la validation didactique doit remplir des fonctions, comme par exemple la fonction d'explication, dont on pense qu'elles ne pourraient être assurées par la validation mathématique. En ce sens, nous parlerons de transposition de la validation mathématique en validation didactique.

Types de validation didactique

Nous avons mis en évidence deux grands types de validation didactique :

- les argumentations, à l'issue desquelles la conclusion n'était que plausible,
- les preuves, à l'issue desquelles la conclusion était nécessaire ou certaine.

Les validations peuvent être caractérisées, soit par les types d'arguments qu'elles mobilisent (pragmatique, sémantique, syntaxique), soit par les types de fonctions qu'elles remplissent. Une grande variété de combinaisons est possible, comme l'ont montré nos nombreux exemples : notamment on peut trouver des types d'arguments ou des types de fonctions illustrés à différents niveaux de classe ou dans différents domaines (géométrie, grandeurs, équations, ...). Nous avons montré que **des fonctions** assignées à la validation **permettent d'expliquer le type d'argument utilisé**. Nous avons également observé **l'influence de l'institution** (organisation de l'enseignement secondaire) sur le type de technologie mobilisable, sur le type de fonction mise en œuvre. Par exemple, le Gymnasium permet

d'introduire ultérieurement des théorèmes de cours avec un certain type de validation, ou d'introduire des fonctions propédeutiques dans le cadre du projet **global** d'une filière **homogène**, alors que le collège unique gère **localement** la démonstration de théorèmes de cours, sachant qu'une importante orientation est effectuée en fin de collège.

Différentes **difficultés didactiques** ont été repérées du fait de cette double transposition :

- La première difficulté se situe au **niveau théorique**. Cette double transposition entraîne en général une cohabitation de deux théories différentes, une théorie sociale et une théorie mathématique. Une des grandes difficultés est que ces théories reposent en général sur des conceptions de la vérité différentes, voire incompatibles. La conception pragmatique de la vérité s'accommode mal d'une conception logique. Les objets, les technologies seront également différents. Ici un **contrat implicite** va essayer de négocier la cohabitation de ces deux théories au sein d'une théorie didactique qui essaiera de synthétiser ces deux théories. Dans le domaine de la géométrie, les travaux de Parzys, Houdement et Kuzniak proposent différents niveaux théoriques intégrant cette double transposition. Nous avons également vu comment les programmes officiels suggèrent cette cohabitation : progressivité, passage du local au global, distinction entre validations de théorèmes de cours et démonstrations lors de la résolutions d'exercices ou de problèmes.
- Une seconde difficulté se situe au **niveau de la distinction entre technologie et technique**. Nous avons montré que certaines techniques pragmatiques, visuelles voire inductives ne sont qu'une manière moins formelle d'appliquer des éléments de technologie mathématique. Comment savoir si le recours à la figure repose sur une justification visuelle non mathématique, sur une justification mathématique mobilisable mais non formalisée, sur une justification mathématique non mobilisable ? C'est à nouveau le recours au **contrat implicite** qui est sensé régler cette cohabitation. Nous avons vu des recours à la figure aussi bien pour le théorème de Pythagore en 4^{ème}/Klasse 9, qu'à propos de la démonstration graphique du théorème des gendarmes en première S ou de la démonstration du théorème sur les variations d'une fonction dérivable d'après le signe de sa dérivée en Klasse 11.
- La troisième difficulté concerne **les contrats** implicites. D'une part ces contrats implicites ne sont pas explicités clairement aux enseignants, par exemple les programmes officiels ne précisent pas clairement que le recours à la figure est toléré

dans la géométrie de l'ordre ou quel niveau de rigueur est exigible dans une rédaction. Il s'en suit une grande hétérogénéité des conceptions chez les enseignants, relevée par différents auteurs [Houdebine et al 1998 p.69], [Antibi 1996, p.356]. En conséquence la perception du contrat par l'élève sera elle aussi d'une grande variabilité. Faut-il expliciter ces contrats ? Est-ce possible ? Est-ce souhaitable ?

6.2.2 Place de la démonstration : la démonstration objet d'enseignement

Nous avons montré clairement que la démonstration apparaissait explicitement comme **objet d'enseignement** dans les programmes, **à partir de la classe 8** en Bade-Wurtemberg et **à partir du cycle central** en France.

Nous l'avons illustré dans deux manuels scolaires par l'étude de **leçons sur la démonstration** où apparaissaient des genres de **tâches liées à la transposition** de la démonstration mathématique en objet d'enseignement. Nous avons montré que les tâches « découvrir », « contrôler » ou « changer de registre » faisaient l'objet d'exercices d'entraînement hors de tout contexte de résolution de problèmes, ce qui caractérise la transposition didactique de la démonstration comme objet d'enseignement. Nous avons montré que ces tâches mettaient en jeu des technologies non mathématiques (argument d'induction, argument visuel, ...), cohabitant avec des technologies mathématiques.

La démonstration apparaît également comme **objet d'enseignement dans la démonstration des théorèmes de cours.**

En France, la démonstration d'un théorème de cours peut constituer un exercice pour s'entraîner à démontrer, et participe ainsi à une **fonction de systématisation**. Une démonstration est intéressante si elle peut être un exemple prototypique pour résoudre un type de problèmes. On peut considérer alors que dans ce cas, où la démonstration d'un théorème particulier de cours est prototypique, elle est un objet d'enseignement, et que l'élève doit apprendre cette démonstration, être capable de la reproduire et éventuellement de l'adapter à des situations analogues. On peut considérer également que la compréhension de la raison de la véracité d'un théorème est un élément important de l'éducation mathématique d'un élève : dans ce cas, la **fonction d'explication** est valorisée. Pour vérifier que l'élève a compris la démonstration, on peut lui demander de la reproduire. Les épreuves du baccalauréat français vont être modifiées dans ce sens, et la prochaine session 2005 verra apparaître dans l'épreuve une question de restitution organisée des connaissances (ROC). L'élève devra produire la

démonstration d'un théorème de cours. Dans la liste³⁶⁴ des théorèmes de cours dont la démonstration est exigible, on observe que les théorèmes proposés disposent de démonstrations linéaires achevées au niveau de la Terminale S. Dans la liste, il y a le théorème des gendarmes pour lesquels les documents d'accompagnement (cités dans le chapitre 3) proposent en première S une « démonstration graphique ». Il sera intéressant d'observer quel niveau de rigueur dans la rédaction et quels registres de rédaction les instructions et le contrat implicite autoriseront pour l'épreuve du baccalauréat. Le fait de se limiter, pour l'épreuve du baccalauréat, à des démonstrations achevées valorisera la fonction de systématisation au détriment de la fonction d'explication. Le fait d'autoriser des démonstrations qui ne sont pas achevées et qui recourent à des registres autres que la langue naturelle (graphique de courbe, arbre de probabilités, tableau de variations, tableau de valeurs numériques, ...) valorisera la **fonction d'explication**. Dans les deux cas, cette nouvelle épreuve de baccalauréat valorise la **fonction de communication**, et notamment dans le **registre de l'écrit**, puisque cette épreuve de baccalauréat reste une épreuve écrite. On retrouve ici le « type « expliquer pourquoi » et « justification officielle » comme une compréhension discursive » [Knipping 2002, p.ii].

En Bade-Wurtemberg il n'y a pas, à notre connaissance, d'exigence de reproduction par l'élève de démonstration de théorèmes de cours. On trouve cependant deux références³⁶⁵ du programme sur la reprise de démonstration de théorèmes. La première référence est dans l'unité 5 de classe 9, « découverte et démonstration », qui propose, à travers l'étude de démonstrations de théorèmes de cours, comme les théorèmes sur les angles inscrits dans le cercle, le théorème de Pythagore et les théorèmes de Ceva et également l'utilisation des calculateurs, d'étudier les **heuristiques** et les **stratégies typiques de résolution de problèmes mathématiques**. La seconde référence concerne la géométrie des classes 12 et 13. On évoque précisément **les méthodes vectorielles de démonstration** de théorèmes classiques de géométrie affine (théorèmes du centre de gravité, de Thalès, de Ceva de Ménélaus,...). On évoque l'**application du produit scalaire** pour les démonstrations de théorèmes de géométrie métrique (par exemple les théorèmes des triangles comme le théorème d'Euclide, les théorèmes des quadrilatères (losange, rectangle,...),...). La reprise de la démonstration de

³⁶⁴ « Une suite croissante non majorée converge vers l'infini ». Théorème des gendarmes pour les fonctions. Dérivation de la fonction composée. Existence et unicité de la solution de $f' = kf$, avec conditions initiales. Limite en l'infini de $(\exp x)/x$ et $(\ln x)/x$. Écriture décimale d'un réel. Pour f continue et croissante, sa primitive F est définie par... Existence et unicité de la solution de $y' = ay + b$ avec conditions initiales. Expressions analytiques à redémontrer. En spécialité : « L'ensemble des nombres premiers est infini ». Similitude (soient quatre points...). Similitude à 2 points fixes.

³⁶⁵ Nous renvoyons au paragraphe 3.2.1.3.2 où cette unité est détaillée.

théorèmes déjà démontrés par des arguments sémantiques ou pragmatiques dans les classes précédentes, permet de montrer l'élégance des **arguments formels** basés sur le calcul vectoriel ou de coordonnées. On retrouve ici la fonction de systématisation évoquée précédemment dans le cas français. Ici la dimension heuristique est valorisée par rapport à la dimension discursive.

6.2.3 Comparaison franco-allemande sur la validation

6.2.3.1 Les fonctions de la validation

La filière unique du Gymnasium permet d'aborder la fonction de systématisation dans sa dimension globale, alors que la fonction de systématisation est évoquée, dans les programmes français, dans sa dimension locale (« îlots déductifs, application d'un théorème »).

La fonction d'explication est davantage mise en valeur en Bade-Wurtemberg, ce qui explique la valorisation des arguments de plausibilité alors qu'en France, ce sont plutôt les arguments sémantiques (c'est-à-dire des arguments non complètement formalisés ou pouvant recourir à des registres de représentation non linguistiques) qui sont utilisés à défaut d'arguments formels pour expliquer. En France les arguments de plausibilité sont plutôt utilisés pour remplir la fonction de découverte dans sa dimension heuristique.

La fonction découverte peut être propédeutique en Bade-Wurtemberg, alors qu'elle est plutôt heuristique en France.

La fonction de communication discursive est très importante et motive une part importante des activités en France, donnant une importance particulière à la rédaction écrite, alors que c'est plutôt la fonction de communication sociale qui est privilégiée en Bade-Wurtemberg.

6.2.3.2 Les technologies

La première apparition de **technologies mathématiques** peut varier considérablement d'un pays à l'autre.

Les **technologies non mathématiques**, du type arguments visuels, pragmatiques, d'induction, d'autorité, apparaissent :

- lorsque la technologie mathématique n'est pas complètement mobilisable (géométrie de l'ordre pour la somme des angles d'un triangle, passage à la limite pour le périmètre et l'aire d'un cercle ou pour le théorème de Thalès, théorème des

accroissements finis pour les variations de la fonction carrée) et que l'on veut réaliser certaines fonctions de la validation (explication pour la somme des angles d'un triangle, propédeutique et explication pour le périmètre et l'aire d'un cercle ou pour le théorème de Thalès, systématisation pour les variations de la fonction carrée)

- lorsque des technologies mathématiques mobilisables ne sont pas mobilisées, à cause de technologies didactiques (principe du renoncement au formalisme (théorème de Pythagore, inéquation quadratique) ou à cause des fonctions assignées à la validation (système de notation pour la variation de la fonction élévation au carré dans le manuel allemand, explication pour le théorème de Pythagore).

Aussi bien dans les programmes officiels que dans les manuels scolaires apparaissent des éléments d'une **technologie didactique** qui justifient dans les validations didactiques le recours aux arguments non mathématiques ou la cohabitation des deux types d'argument : principe du recours à la figure, principe du renoncement au formalisme, principe de rédaction implicite et concise, principe de la rédaction explicite et précise, principe du théorème admis. Ces principes peuvent se recouper entre eux ; ils sont rarement explicités ; ils règlent les contrats.

Le principe de renoncement au formalisme justifie le renoncement à un ou plusieurs arguments formels: une technique mathématique rigoureuse et achevée, permettant une construction déductive à l'aide d'arguments formels, risquant d'amoindrir la compréhension suivant l'âge ou la situation considérés, est remplacée par une technique moins rigoureuse, prenant en compte des arguments de plausibilité ou sémantiques.

Le principe de recours à la figure justifie le recours au dessin dans une validation.

Ce principe peut intervenir pour justifier une technique qui évite le formalisme lourd d'une écriture qui ne recourt pas à la figure. On codifie sur la figure un discours en langue naturelle.

Le recours à la figure peut aussi être un élément de technologie dans la mesure où :

- le recours à la figure permet de se substituer une autre technologie non mobilisable (dans notre exemple celle des angles orientés),
- le recours à la figure est présent dans la technologie (si les éléments de technologie que sont les définitions ou les propriétés sont énoncés par recours à la figure comme dans l'exemple français pour les angles alternes internes ou correspondants),
- dans le cas où la technologie (définition ou propriété) est définie sans recours à la figure, l'utilisation de la technologie (vérification de la définition pour l'appliquer, vérification des hypothèses d'un théorème pour l'appliquer) s'effectue par recours à la

figure. Dans l'exemple allemand où les angles correspondants ou alternes-internes sont définies en langue naturelle, le recours à la figure permet, par constat visuel, de vérifier les notions « de part et d'autre » ou « du même côté ».

Le principe de rédaction implicite et concise justifie une rédaction où certains éléments qui constituent les arguments (données, règle, vérification des conditions de la règle, ...) ne sont pas évoqués explicitement ou sont évoqués de manière concise, sémantique ou inachevée : recours à un codage, recours à la figure, implicites dans calcul algébrique, ... Nous avons rencontré cette situation dans les théorèmes de cours sur la somme des angles d'un triangle, sur l'équation du second degré ou dans productions d'élèves. La rédaction peut également être formelle ou en langue symbolique mais elle contient des implicites, elle est incomplète du point de vue de la théorie. On convient que l'application de ce principe permet de remplir les fonctions de la validation qu'on veut mettre en œuvre : communiquer, expliquer, systématiser, ... Nous avons montré dans le chapitre 3, que même dans un exemple³⁶⁶ du programme français de première S, exemple illustrant une « démonstration linéaire achevée », la citation d'un théorème de géométrie utilisé dans la démonstration, n'était pas explicite.

Le principe de rédaction explicite, au contraire du précédent, vise à rendre la rédaction explicite, par l'usage d'arguments formels, avec des marqueurs de statuts des données, de la règle et de la conclusion de chaque argument. Dans l'application de la règle, la vérification des conditions est en partie explicite.

Le principe du théorème admis: un théorème est admis si sa démonstration apporte peu. Ce principe apparaît clairement dans les programmes français ou dans les programmes de la Hauptschule ou de la Realschule.

L'application de ces principes didactiques se rencontre dans les deux pays, dans différents domaines, à différents niveaux de classe. Il est très difficile de décrire des conditions d'application de ces principes : elles sont très liées au contexte, à la situation de la validation, et aux fonctions assignées à la validation. Tantôt la fonction de systématisation, dans sa dimension propédeutique, rencontre le renoncement au formalisme lorsqu'on veut préparer la notion de limite à l'occasion des démonstration des formules des volumes en classe 10. Tantôt cette même fonction de systématisation s'appuie sur le principe de rédaction explicite, par exemple lorsque dans les programmes allemands de classe 13 on redémontre les théorèmes du triangle à l'aide du produit scalaire. De même, dans une copie française, la fonction de

³⁶⁶ voir paragraphe 3.3.4.2.2

communication dans sa dimension d'évaluation rencontre une rédaction explicite en géométrie et une rédaction implicite avec des règles opératoires en algèbre.

On voit donc la très grande complexité d'application de ces principes didactiques qui influencent le type de technologie utilisé (recours ou non à des arguments de plausibilité) et le type de technique utilisé (recours à certains registres, à la langue naturelle, à la langue symbolique, précision du discours, ...) mais qui restent la plupart du temps implicites, et souvent de la responsabilité locale du manuel scolaire étudié ou du professeur considéré.

6.2.3.3 Les techniques et les contrats

Concernant les **techniques** mises en œuvre dans les manuels scolaires on observe dans les deux pays:

- différentes techniques visuelles (recours à une figure, recours à un graphique, ...) pour alléger le formalisme, alors que la technologie mathématique est mobilisable (théorème de Pythagore pour les deux pays avec la technologie des angles mobilisable ; inéquation du second degré avec la technologie des inégalités et avec la technique de disjonction des cas par lecture graphique),
- différentes techniques mathématiques justifiant une démonstration (méthode des aires pour le théorème de Pythagore, méthode du tableau de signes pour l'inéquation du second degré).

Dans les observations faites, il est difficile de déterminer le rôle des différentes variables : domaines mathématiques concernés, technologies mathématiques mobilisables, techniques mobilisables, rang de la classe, pays concerné, thème étudié, ...

Nous avons étudié des copies produisant des démonstrations jugées comme correctes.

Dans les copies françaises, la langue naturelle est le registre privilégié d'expression pour les démonstrations de géométrie qui sont expansives et précises ; par contre, en algèbre les règles de calcul ou opératoires³⁶⁷ sont utilisées de manière concise et sans citation explicite de la règle.

Dans les copies allemandes la langue symbolique, le registre graphique, la non explicitation des contextes ou des entrées d'arguments participe à un discours moins expansif, plus concis

³⁶⁷ Rappelons que les nouveaux programmes évoquent les règles opératoires en ces termes : « Dire qu'une propriété est utilisée comme règle opératoire signifie qu'on n'est pas tenu d'en justifier l'usage dans une démonstration ou dans un calcul » [Ministère de l'Éducation 2002, p.65].

et moins précis, aussi bien en algèbre qu'en géométrie. Les règles d'arguments sont très souvent citées en géométrie et un peu moins citées en algèbre.

On observe dans notre étude des différences de techniques entre les copies françaises et les copies allemandes pour l'application des théorèmes.

En géométrie, l'application d'un théorème reproduit souvent le schéma « Dans le contexte ..., comme ... est vérifié, d'après le théorème ..., on a la conclusion ... ». Dans une copie allemande le schéma est plutôt « D'après le théorème ..., on a la conclusion ... ».

En algèbre, pour les copies françaises, la technique la plus fréquente est constituée d'une suite d'égalités exprimant un calcul. Dans les copies allemandes, la présentation d'un calcul se fait ligne par ligne, avec une codification de la règle de passage d'une ligne à la suivante.

Alors qu'en géométrie, il est important, dans les copies françaises, de marquer les différents statuts des énoncés (contexte, entrée, règle, sortie) et en algèbre d'effectuer les calculs, dans les copies allemandes c'est le marquage de la règle qui est essentiel, aussi bien en géométrie qu'en algèbre

6.3 Perspectives de recherche

6.3.1 Représentation de la démonstration

Nous avons étudié des représentations de la démonstration dans les programmes officiels, dans des manuels scolaires et dans des copies d'élèves corrigées par des professeurs. Il serait intéressant d'étudier les représentations de la validation et de la démonstration chez les enseignants et chez les élèves, pour observer la distance éventuelle entre ces différentes représentations. Comment les différentes fonctions de la démonstration sont-elles perçues par les enseignants ? par les élèves ? Les différents types de validation et d'arguments sont-ils reconnus par les enseignants ? par les élèves ? Il serait également intéressant d'interroger des enseignants et des élèves sur leur perception des différences dans l'enseignement de la démonstration entre la France et le Bade-Wurtemberg. Par exemple comment est perçue en France la place que les arguments de plausibilité ont en Bade-Wurtemberg ? Comment est

perçue en Bade-Wurtemberg la place de l'écrit dans la démonstration en France ? Qu'est qu'une « bonne » démonstration dans chaque pays ?

6.3.2 Différences avec les autres Länder et les autres formes d'école

Nous avons étudié l'enseignement de la démonstration en Bade-Würtemberg. Quelles différences et quelles similitudes rencontre-t-on avec les autres Länder ? Notamment la Gesamtschule, qui se rapprocherait du collège à filière unique de France, et qui n'existe pas dans le Bade-Würtemberg, présente-t-elle des similitudes et des différences par rapport au collège-lycée français ?

6.3.3 Pratiques de la démonstration

Nous n'avons pas étudié les situations d'enseignement dans les classes.

Il serait intéressant d'observer comment la démonstration est traitée comme objet d'enseignement dans les classes. Comment les validations de théorèmes de cours sont effectuées ? Les travaux de Knipping ont étudié la validation du théorème de Pythagore dans différentes classes. Il serait intéressant d'examiner le cas d'autres théorèmes.

Y a-t-il une distance entre l'enseignement de la démonstration qui est pratiqué et celui qui est prescrit par les programmes et des manuels ?

Est-il intéressant de mettre en place une ingénierie didactique visant à réduire les distances entre le curriculum officiel et le curriculum réel ? Si oui, comment ?

Avec le développement dans la formation initiale³⁶⁸ d'enseignants français de mathématiques avec des stages de pratiques professionnelles en Allemagne, le développement des échanges entre classes entre la France et l'Allemagne, et plus généralement le développement de la mobilité des élèves et des enseignants entre la France et l'Allemagne, décrit dans [Cabassut 1996 a,b], est-il souhaitable de proposer des ingénieries de formation des enseignants, d'échanges des classes, ... qui permettent de mieux appréhender ces évolutions ?

6.3.4 Apprentissage des élèves

Après avoir étudié et comparé, du point de vue de la démonstration, le curriculum à enseigner et le curriculum enseigné, il serait intéressant d'étudier le curriculum appris par les élèves, et

³⁶⁸ Notamment dans les IUFM d'Alsace et de Lorraine.

notamment leurs performances dans ce domaine. Des études sur une comparaison des difficultés d'apprentissage des élèves, sur les erreurs rencontrées et sur les moyens d'y remédier seraient dignes d'intérêt. Nous avons notamment montré la difficulté à distinguer technique et technologie. Par exemple le recours à la figure peut être une technique justifiée par un argument mathématique, ou bien justifiée par un argument visuel. Ou bien un argument de plausibilité peut devenir un argument de nécessité dans la logique de la vie quotidienne, comme dans le cadre de l'empirisme naïf décrit par Balacheff. Comment s'affranchir de ces difficultés ? Le point crucial n'est-il pas une explicitation de la règle de validation qui indiquera la nature de l'argument utilisé ? Sous cette hypothèse, le registre oral n'est-il pas préférable au registre écrit, car il permet plus facilement de faire expliciter ce que le contrat habituel dispense d'explicitier ?

6.3.5 Cadre théorique

Nous avons mis en place un cadre théorique se proposant d'intégrer la théorie anthropologique du didactique pour l'étude de la démonstration.

Ce cadre théorique peut-il s'étendre à l'étude d'autres objets paramathématiques, comme par exemple la notion de modélisation ?

Le cadre théorique de la transposition multiple, dans lequel dans une version simplifiée nous avons distingué trois grands types d'institutions, mathématiques, d'enseignement des mathématiques et autres, peut-il être développé et appliqué à d'autres savoirs enseignés ?

La référence à la formation à la citoyenneté et à l'esprit critique, la liaison avec les autres disciplines³⁶⁹, le lien avec l'argumentation dans la langue maternelle renforcent la dimension sociale de la preuve dans les deux pays dans ses fonctions de vérification, d'explication et de communication. Ce cadre théorique permet-il de décrire cette dimension sociale de la preuve, et de manière plus générale la dimension sociale de l'enseignement des mathématiques ?

³⁶⁹ En Allemagne : thèmes interdisciplinaires et références dans le programme de mathématiques aux programmes des autres disciplines ; en France itinéraires de découvertes ou travaux personnels encadrés, références aux autres disciplines dans le nouveau programme de collège. Le nouveau programme de 6^{ème} applicable à la rentrée 2005 est consultable au 1/9/2004 sur http://www.eduscol.education.fr/D0015/MATH_6.pdf et devrait être publié au BO HS du 26 août 2004.

6.4 Conclusion

Notre étude a montré l'importance des fonctions de la validation et des institutions d'enseignement pour éclairer les théories, les technologies, les techniques et les contrats mis en œuvre dans les validations de l'enseignement secondaire des mathématiques, en France et en Bade-Wurtemberg.

La connaissance des institutions est difficile, parce que les institutions sont souvent des organismes complexes, qui évoluent constamment, et pas toujours dans la direction prévue. Comparer des institutions de différents pays est encore plus difficile, du fait notamment que ces institutions différentes évoluent dans des temps différents.

Pourtant, la question du pourquoi, rattachée à l'étude des fonctions d'un savoir, à enseigner, enseigné ou appris, reste commune à ces différentes institutions et reste simple dans sa formulation.

La question du sens, de ce qu'on apprend ou de ce qu'on enseigne, reste primordiale pour motiver, et l'élève, et l'enseignant.

Pourquoi démontrer ? Pourquoi enseigner la démonstration ? Pourquoi apprendre à démontrer ? Les réponses sont difficiles mais ces questions demeurent essentielles.

Se poser ces questions pour rompre avec l'apparence naturelle des faits, pour retrouver le chemin du sens et de la motivation, pour s'ouvrir aux différences et aux découvertes.

7 Bibliographie³⁷⁰

7	Bibliographie.....	417
7.1	Articles, livres.....	417
7.2	Manuels scolaires.....	422
7.3	Textes ministériels.....	423
7.4	Ouvrages de référence (dictionnaires, encyclopédies).....	424

Traduction: Chaque fois que nous avons eu connaissance de la traduction³⁷¹ en langue anglaise d'une référence bibliographique française, nous avons indiqué cette référence anglaise pour le lecteur non francophone ou non germanophone. Cependant les citations ont été extraites de l'œuvre française (avec notamment la pagination correspondante). Lorsque la traduction n'existait pas nous avons indiqué, lorsque c'était possible, un article en langue anglaise pouvant reprendre la pensée de l'auteur.

Dans le cas d'une œuvre en langue étrangère (essentiellement allemande ou anglaise) nous avons traduit dans nos citations directement en français la citation, renvoyant le lecteur au texte original dans la référence bibliographique.

7.1 Articles, livres

- (1) ANDLER Daniel (1999) Logique mathématique, in CDROM encyclopédie *Universalis*.
- (2) ANTIBI André (1988) *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. enseignement de la notion de limite. Réflexions. Propositions*. Thèse, université Paul Sabatier de Toulouse, 1988.
- (3) ANTIBI André (1996) Les niveaux de rigueur dans les programmes: un exemple d'ensemble vide?, *bulletin APMEP N°410*
- (4) ANTIBI André (1997) Graphique, démonstration et rigueur, *bulletin APMEP N°411*, juillet 1997.
- (5) ARMENGAUD Françoise (1999) Inférence, in *Encyclopédie UNIVERSALIS*, CDROM.
- (6) ARSAC Gilbert (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 8, n°3, pp.267-312, 1987
- (7) ARSAC Gilbert (2003) Que peuvent retirer les enseignants des travaux didactiques sur la démonstration ?, in *Didactique des mathématiques*, Publications de l'Université de Saint-Etienne, 2003.
- (8) ARSAC Gilbert et al (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presse universitaire de Lyon, IREM de Lyon, 1992.
- (9) ARSAC Gilbert, GERMAIN Gilles, MANTE Michel (1991) *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.
- (10) AUDI Robert (1989) *Practical Reasoning*, Routledge, London.
- (11) BALACHEFF Nicolas (1982) Preuve et démonstration en mathématique au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 3(3), p. 261-304. La pensée Sauvage.
- (12) BALACHEFF Nicolas (1987) Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* p.147-176.
- (13) BALACHEFF Nicolas (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse, université Joseph Fourier de Grenoble
- (14) BALACHEFF Nicolas (1988b) Le contrat et la coutume deux registres des interactions didactiques, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, pp.15-26, La pensée Sauvage.
- (15) BALACHEFF Nicolas (1991) The benefits and limits of social interaction : the case of mathematical proof, *Mathematical knowledge: its growth through teaching*, pp.175-192, Kluwer Academic Publishers, Alan J. Bishop et al. (eds).
- (16) BALACHEFF Nicolas (1991b) *Construction et analyse d'une situation didactique. Le cas de « la somme des angles d'un triangle »*, *Journal für Mathematik-Didaktik*. n° 12, pp.199-264.
- (17) BALACHEFF Nicolas (1999) Apprendre la preuve, *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Presse Universitaire de France, Paris, pp.197-236
- (18) BALACHEFF Nicolas (1999c) Pour un questionnement ethnomathématique de l'enseignement de la preuve, *La lettre de la Preuve*, Septembre.

³⁷⁰ Les abréviations suivantes sont utilisées :

APMEP : Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

CDROM disque compact support de mémoire morte auxiliaire utilisé en informatique

³⁷¹ la traduction anglaise pouvant être l'original de l'œuvre qui a été traduite en français par la suite, ou inversement.

- (19) BARBIN Evelyne (1988) La démonstration mathématique: signification épistémologiques et questions didactiques, in *bulletin APMEP* n° 366.
- (20) BARBIN Evelyne (1990) Histoire de la démonstration et enseignement des mathématiques, in *La démonstration mathématiques dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon, p.387.
- (21) BARBIN Evelyne (1997) La démonstration géométrique acte d'invention et critère de vérité, in *Les maths en collège et lycée*, Hachette éducation, Paris.
- (22) BECK Isabelle (2001) Une approche linguistique des textes de raisonnement, in *Produire et lire des textes de démonstrations*, Edition Ellipses, Paris
- (23) BELL A.W. (1976) *The learning of General Mathematical Strategies*, Ph. Dissertation , Nottingham
- (24) BETTINELLI Bernard (1989) Intuition et démonstration chez Archimède, in *La démonstration mathématiques dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon, p.181-196.
- (25) BIERMANN M., BLUM W. (2002) Realitätsbezogenes Beweisen – Der „Schorle-Beweis“ und andere Beispiele, *Mathematik Lehren* (110), 19-22
- (26) BKOUCHE Rudolph (1995) Autour du Théorème de Thalès variations sur les liens entre le géométrie et le numérique, in *Autour de Thalès*, Commission Inter-Irem premier cycle, pp. 9-67.
- (27) BLANCHE Robert (1995) Raisonnement, in Encyclopédie *Universalis*, CDROM.
- (28) BLANCHE Robert (1996) *Introduction à la logique contemporaine* Armand Colin-Masson, Paris, 1968.
- (29) BLANCHE Robert (1999) Vérité (logique), in Encyclopédie *Universalis*, CDROM.
- (30) BLUM Werner, KIRSH Arnold (1989) *Warum haben nicht-triviale Lösungen von $f'=f$ keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum „inhaltlich-anschaulichen Beweisen“* , Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, band 18, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
- (31) BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Editions La Pensée Sauvage , 19/1, 77-124, disponible sur <http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/dfd/topos2.html> [référence du 1/1/04]
- (32) BOURDIEU Pierre (1980) *Le sens pratique*. Les éditions de Minuit. Paris.
- (33) BOURDIEU P., PASSERON J.-C., CHAMBOREDON J.-C. (1991) *The craft of the sociology : Epistemological preliminaries* , B. Kraus Edition, Walter de Gruyter.
- (34) BROUSSEAU Guy (1988) Le contrat didactique : le milieu ; *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Editions la pensée sauvage , vol.9 n°3, pp.309-336.
- (35) BROUSSEAU Guy (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage , Grenoble, 1998
- (36) CABASSUT Richard (1982) *Automorphismes d'anneaux de polynômes*, thèse de 3^{ème} cycle de mathématiques pures et appliquées, U.S.T.L, Montpellier.
- (37) CABASSUT Richard (1988) L'enseignement des mathématiques en RFA, *bulletin de l'APMEP*, numéro 362.
- (38) CABASSUT Richard (1989) *Comparaison de l'enseignement et de l'image des mathématiques chez des lycéens français et allemands*, mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Strasbourg (ULP).
- (39) CABASSUT Richard (1989) L'enseignement des mathématiques et la construction de l'Europe, dans « *Un trésor est caché dedans* », édition APMEP Régionale Ile de France.
- (40) CABASSUT Richard (1996a) Comment impliquer les mathématiques dans les échanges scolaires ?, *bulletin de l'APMEP*, numéro 404, juin 1996.
- (41) CABASSUT Richard (1996b) Dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques, journal « *L'ouvert* », numéro 84, septembre 1996, IREM de Strasbourg.
- (42) CABASSUT Richard (1998) Mathématiques dans un lycée allemand, journal « *L'ouvert* », numéro 91, juin 1998, IREM de Strasbourg, pp.17-26.
- (43) CABASSUT Richard (2000) L'enseignement des mathématiques et l'Europe, *bulletin de l' APMEP* n° 428.
- (44) CABASSUT Richard (2000b) La place de la démonstration en France et en Allemagne, *bulletin de l'APMEP* n° 428.
- (45) CABASSUT Richard (2002) Pourquoi démontrer ? un exemple allemand sur les aires et les volumes pour entrer dans le processus de preuve et d'explications, in revue *Repères* n°47, pp.17-39.
- (46) CABASSUT Richard (2003) Enseigner la démonstration en mathématiques c'est quoi ? pourquoi ? pour qui ? comment ? Eléments de réponses à partir de l'étude des programmes des premières années de l'enseignement secondaire en France et en Bade-Wurtemberg, in *bulletin de l' APMEP* n° 449, pp. 757-770

- (47) CABASSUT Richard (2004) Argumenter ou démontrer : continuité ou rupture didactique ? les effets d'une double transposition, in *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 9, p.153-174, IREM de Strasbourg, 2004
- (48) CABASSUT Richard, MOLARD Annette (1996) Dans nos groupes IREM, journal « *L'ouvert* », numéro 82, mars 1996, IREM de Strasbourg
- (49) CABASSUT Richard, STROEBEL Erich (2000) Objectifs et méthodes de l'enseignement des mathématiques en Allemagne et en France, in Actes du Colloque Européen Mathématiques sans Frontières, Académie d'Aix-Marseille.
- (50) CARAMATIE Marie-Catherine, DELBREIL Brigitte (1982) Sur les pas d'Archimède... Archimède pas à pas in *La rigueur et le calcul*, par le Groupe inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Cedic, Paris, 1982
- (51) CARNAP R. (1966) *Philosophical Foundations of Physics*, Martin Gardner, Basic Books, New York
- (52) CELI Valentina (2002) *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effet sur la formation*, Thèse de l'Université Paris 7.
- (53) CHALMERS Alan (1982) *What is this thing called science ?* University Of Queensland Press, Sta Lucia, 1976.
- (54) CHALMERS Alan (1987) *Qu'est-ce que la science ?* (traducteur : Biezunski Michel) La découverte, Paris.
- (55) CHEVALLARD Yves (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, Grenoble.
- (56) CHEVALLARD Yves (1986) *Sur l'analyse didactique : deux études sur les notions de contrat et de situation*, Publication n°14 de l'IREM de Marseille, IREM de Marseille.
- (57) CHEVALLARD Yves (1988) On didactic transposition theory: Some introductory notes. Paper presented at the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, Czechoslovakia.
- (58) CHEVALLARD Yves (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12 n°1, pp.73-112.
- (59) CHEVALLARD Yves (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Editions la pensée sauvage, vol.19 n°2, pp.221-266.
- (60) CHEVALLARD Yves (2002) Organiser l'étude : 1 Structures et fonctions. *Actes de la 11^è école d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage.
- (61) CLARKE David (2004) Issues of Voice and Variations : The Problematics of International Comparative Research in Mathematics Education, paper submitted to discussion group 11: International comparisons in mathematics education (ICME 10), Copenhagen, Denmark, July 4-11, 2004
- (62) COPPE Sylvie (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez des élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse, université Claude Bernard de Lyon.
- (63) DAVIS Philip J. et HERSH Reuben (1982) *The mathematical experience*, Birkhäuser, Boston.
- (64) DAVIS Philip J. et HERSH Reuben (1985) *L' univers mathématique*, (trad. Chambadal Lucien) Gauthier-Villars.
- (65) DELAHAYE Jean-Paul (1997) *Le fascinant nombre Pi*, Bibliothèque pour la science, Belin.
- (66) DE VILLIERS Michael (1990) The role and the function of proof in mathematics, *Pythagoras* n°24, pp.17-24.
- (67) DOAN Huu Hai (2001) *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane. Une étude comparative de la classe de seconde en France et la classe 11 au Vietnam*, Thèse de l'Université de Grenoble I.
- (68) DOUADY Régine (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Editions la pensée sauvage, vol.7 n°2, pp.5-31.
- (69) DOUADY Régine (1999) Didactique des mathématiques, in CDRom encyclopédie *Universalis*.
- (70) DUCROT Oswald (1972) *Dire et ne pas dire*, Herrmann, Paris.
- (71) DURAND-GUERRIER Viviane (1996) *Logique et raisonnement mathématique Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, thèse de doctorat, Université Lyon.
- (72) DUVAL Raymond (1992) Argumenter, Démontrer, Expliquer: continuité ou rupture cognitive?, revue *Petit x*, n°31, pp.37-61.
- (73) DUVAL Raymond (1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.
- (74) DUVAL Raymond (2001) Généalogie cognitive des textes, in *Produire et lire des textes de démonstration*, Editions Ellipses, Paris 2001.
- (75) ELSCHENBROICH Hans-Jürgen (1999) *Visuelles Beweisen*, in Beiträge zum Mathematikunterricht, pp. 157-160.

- (76)ERMEL Equipe de didactique des mathématiques (1999) *Vrai ? Faux ?...On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle3*, INRP Paris.
- (77)FISCHBEIM Efraim (1982) Intuition and Proof, *For the learning of Mathematics*, 3.2, pp.9-18.
- (78)FREUDENTHAL Hans (1973) *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1, 2. Stuttgart, Klett.
- (79)GLAESER Georges (1988) *Racines historiques de la didactique des mathématiques*, IREM de Strasbourg, brochure n° S132.
- (80)GRAS Régis, BARDY Philippe, PARZYSZ Bernard, PECAL Michèle, RICHTON Jean-Pierre (2003)*Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée*, tome 2, édition APMEP, brochure n°154.
- (81)GRIZE J.B. (1996) *Logique naturelle et communications*, Paris , PUF.
- (82)HAARSCHER Guy (1994) *Chaïm Perelman et la pensée contemporaine* Bruylant, Bruxelles, 1994.
- (83)HANNA Gila (1995) The role of proof in mathematics education, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, pp. 14-21, 1995
- (84)HANNA Gila (1996) The ongoing value of proof, *Proceedings of the 20th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 1, pp.21-34, Valence, Espagne.
- (85)HANNA Gila (2000) Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics* 44 : 5-23.
- (86)HEMPEL Carl (1966) *Philosophy of Natural Science*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (87)(1996) *Eléments d'épistémologie*, Armand Colin/Massson, Paris, 1972.
- (88)HOLLAND Gerhard (2001) *Geometrie in der Sekundarstufe*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- (89)HOTTOIS Gilbert (2002) *Penser la logique*, De Boeck Université, Bruxelles.
- (90)HOUDEBINE Jean (1990) Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question, in revue *Repères* n°1.
- (91)HOUDEBINE Jean et al.(1998) *La démonstration: écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette éducation.
- (92)HOUEMENT Catherine, KUZNIAK Alain (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, in *Educational Studies in Mathematics*, 40 : 283-312.
- (93)HOWSON Geoffrey (1991) *National Curricula in Mathematics*, The Mathematic Association, Leicester.
- (94)IREM de BESANCON (1990) *La démonstration mathématiques dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon.
- (95)IREMs de Grenoble et de Rennes (2003) *Preuve et démonstration : quelques questions essentielles*, Ministère, Direction de l'enseignement scolaire, Paris.[en ligne]. Disponible le 7/12/2003 sur http://www.eduscol.education.fr/index.php?/D0124/greco_preuve.htm
- (96)IREM de MONTPELLIER (1993) Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique, *Actes de la première université d'été européenne* , IREM de Montpellier.
- (97)IREM de MONTPELLIER (1998) *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée*, brochure IREM de Montpellier.
- (98)IREM de Paris 7 (2002) *Expériences de narration de recherches en mathématiques*, IREM Paris 7/ ACL- Editions Kangourou, Paris.
- (99)IREM de RENNES (1995) *La démonstration en seconde*, brochure IREM de Rennes.
- (100) IREM de STRASBOURG (1999) *Outils mathématiques pour élèves non francophones ou en difficulté*, brochure IREM de Strasbourg.
- (101) JAFFE Arthur, QUINN Frank (1993) "Theoretical mathematics": toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *American mathematical society*, volume 29, number 1, july 1993, pages 1-13.
- (102) KAYAS Georges, traducteur (1978) *Les éléments d'Euclide*, Editions du CNRS, Paris.
- (103) KIRSCH A. (1979) Beispiele für "prämathematische" Beweise, in *Dörfler/Fischer*, p.261-274.
- (104) KNIPPING Christine (2002) *Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement - Analyses comparatives de l'enseignement des mathématiques en Allemagne et en France*, Thèse, Université de Grenoble 1.
- (105) KNIPPING Christine (2003a) *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*, Verlag Franzbecker
- (106) KNIPPING Christine (2003b) *Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement - Analyses comparatives des classes allemandes et françaises en quatrième*, in *bulletin de l' APMEP*, n° 449, pp784-796
- (107) KNUTH Eric (2000) The rebirth of proof in school mathematics in the United-States, in *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof* , mai-juin.
- (108) LABORDE Colette (1982) [Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique](#), thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

- (109) LEGRAND Marc (1988) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique, in *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 9, n° 3, pp.365-406.
- (110) LEUDERS Timo et al (2003) *Mathematik Didaktik Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, Cornelsen Verlag, Berlin.
- (111) LE THI Hoai Chau (1997) *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viet-nam et la classe de seconde en France*. Thèse de l'Université de Grenoble I.
- (112) LE VAN Tien (2001) *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viet-nam*. Thèse de l'Université de Grenoble I.
- (113) LOMBARDI Henri (1990) Mathématiques constructives : hier et demain, in IREM de BESANCON, *La démonstration mathématiques dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon, pp.233-249.
- (114) MARGOLINAS Claire (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La pensée sauvage. Grenoble.
- (115) MARTZLOFF Jean-Claude (1988) *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris.
- (116) MARTZLOFF Jean-Claude Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in IREM de BESANCON, *La démonstration mathématiques dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon, 1990, pp. 131-153
- (117) MOLARD Annette (1996) *Echange en immersion entre un lycée français et un lycée allemand*, journal « L'ouvert », numéro 82, IREM de Strasbourg, mars 1996
- (118) MOULOUD Noël (1999) Intuition, in CD ROM *Universalis*.
- (119) NCTM (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS) (1989) Curriculum and evaluation standards for schools mathematics, *Commission on Standards for School Mathematics, Reston, USA*.
- (120) NCTM (2000) Curriculum and evaluation standards for schools mathematics, *Commission on Standards for School Mathematics, Reston, USA*.
- (121) NOIRFALISE Robert (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration, in *Recherche en didactique des Mathématiques*, vol. 13/3, La pensée sauvage.
- (122) NOSS Richard (1994) Mathematics and ideology, in *Didactics of Mathematics as a Scientific Disciplin*, Kluwer Academic Publishers, vol. 13, p. 431-441.
- (123) OLERON Pierre (1996) *Le raisonnement*, Presse Universitaire de France, Paris, 1977.
- (124) PARZYSZ Bernard (1988) « Knowing » vs « seeing ». Problems of the plane representation of space geometry figures, in *Educational Studies in Mathematics*, 19, p.79-82, 1988
- (125) PARZYSZ Bernard (1988) Voir et savoir, la représentation du “perçu” et du “su” dans les dessins de la géométrie de l'espace, in *Bulletin APMEP*, n°364, pp.339-350, juin 1988
- (126) PARZYSZ Bernard (2003) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, in *Carnets de route de la Copirelem, Concertum*, tome 2, éditeur ARPEME, Paris, 2003
- (127) PEDEMONTE Bettina (2001) Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics, in *Proceedings of the 25th conference of the international group of the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, vol.4, pp.33-40, 20.
- (128) (2002) *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, thèse Université Joseph Fourier, Grenoble.
- (129) PEIRCE Charles Sanders (1960) *Collected papers*, Cambridge, MA: Harward University Press.
- (130) PEPIN Birgit (1998) Curriculum, cultural traditions and pedagogy: understanding the work of teachers in England, France and Germany, in Paper presented at the European Conference for Educational research, University of Ljubljana, Slovenia, 17-20 septembre 1998, consulté le 23/08/04 sur le site: <http://www.leeds.ac.uk/educol/documents/000000872.htm>
- (131) PEPIN Birgit (2001) Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures, in *ZDM 2001* vol. 33/5 pp;158-175.
- (132) PERELMAN Chaïm (1952) *De la preuve en philosophie* in *Mélanges G. Smeth*, Librairie encyclopédique, Bruxelles.
- (133) PERELMAN Chaïm (1963) *Ethique et droit ; justice et raison*, Editions de l'Université de Bruxelles.
- (134) PERELMAN Chaïm (1982) *The realm of Rhetoric* University of Notre Dame Press, London, 1982
- (135) PERELMAN Chaïm (1999) *Argumentation*, Encyclopédie *Universalis*, CDROM.
- (136) PERELMAN Chaïm, OLBRECHTS-TYTECA Lucie (1976) *Traité de l'argumentation, la nouvelle rhétorique* Editions de l'Université de Bruxelles, 1970.
- (137) PERELMAN Chaïm (1969) *The New Rhetoric : A Treatise on Argumentation*, *University of Notre Dame Press, London*.
- (138) PLANTIN Christian (1996) *L'argumentation*, Edition du Seuil, Paris, 1996.

- (139) PLUVINAGE François (1989) Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, pp. 5-24, vol.2.
- (140) POLYA Georges (1958) *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthiers-Villars, Paris
- (141) POLYA Georges (1990) *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton University Press, 1954.
- (142) POLYA Georges (1957) *Comment poser et résoudre un problème ?* Dunod.
- (143) POLYA Georges (1957) *How to solve it ?*, Princeton University Press, Princeton.
- (144) RAUSCHER Jean-Claude (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes* Thèse de doctorat, Université des Sciences Humaines de Strasbourg.
- (145) REINHARDT Fritz, SOEDER Heinrich (1997) *Atlas des Mathématiques*, Librairie Générale Française, 1997
- (146) RICHARD Jean-François (1998) *Les activités mentales comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Armand Colin, Paris, 1^{ère} édition 1990
- (147) ROBERT Aline, ROBINET Jacqueline (1993) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Cahier Didirem* n°21. IREM Paris 7.
- (148) ROSS Kenneth (1998) Doing and proving : the place of algorithms and proof in school mathematics, *American Mathematical Monthly*, 252-255.
- (149) SOULEZ Antonia (1999) Vérité, in Encyclopédie *Universalis*, CDROM.
- (150) STEIN Martin (1986) *Beweisen*, Texte zur mathematische-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre, Band 19, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth
- (151) (1988) Beweisfaehigkeiten und Beweisvorstellungen von 11-13 jaehrigen Schueler, *Journal Math. Didakt.* n°9, pp.31-53, 1988.
- (152) STEINBRING Heinz (1991) Zur Arbeit von Nicolas Balacheff: Construction et analyse d'une situation didactique – Le cas de la « somme des angles d'un triangles », in *Journal Math. Didakt.*, n°12, 1991, 265-274.
- (153) STIGLER J.W., GONZALES P. et al (1998) *Methods and Findings of the TIMSS Videotape Classroom Study*. Washington D.C.. U.S. Government Printing Office.
- (154) STRÄßER Rudolf (2002) « Ingénierie didactique » française et « Stoffdidaktik » allemande : une comparaison, in *Actes de la 11ième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, La pensée Sauvage, Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds), version électronique du cederom d'accompagnement
- (155) TIETZE Uwe-Peter, KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F. (2000) *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band I*, Vieweg.
- (156) TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) (1996) *Mathematics Achievement in the Middle School Year*, Boston College, USA, 1996.
- (157) TIMSS (1998) *Mathematics and Achievement in the final Year of Secondary School*, Boston College, USA.
- (158) TOULMIN Stephen .E. (1958) *The Uses of Arguments*, Cambridge, University Press
- (159) TOULMIN Stephen .E. (1993) *Les usages de l'argumentation*, (traducteur : Philippe de Brabanter), Presses universitaires de France, Paris
- (160) VERGNAUD Gérard (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, in *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 2, n° 2.
- (161) VOLKERT Klaus (1986) *Die Krise der Anschauung*, Göttingen.
- (162) (1989) Die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik. In *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18, Anschauliches Beweisen*, Kautschitsch/Metzler 9-31, 1989.
- (163) WITTMANN Erich Christian (1987) *Elementargeometrie und Wirklichkeit*, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- (164) WRIGHT David (1981) On the Jacobian conjecture, *Illinois Journal of Mathematics*, 25(3):423-440.

7.2 Manuels scolaires

- (165) BORDAS (1998) *Mathématiques quatrième*, p.203, Bordas.
- (166) CINQ sur CINQ (1999) *Mathématiques troisième*, p.145, 160, Hachette.
- (167) DECIMALE (1998) *Mathématiques quatrième*, p.182, Belin.
- (168) DECIMALE (1999) *Mathématiques troisième*, pp. 172, 173, Belin.
- (169) DECLIC (2000) *Maths seconde*, théorème de Pythagore p.239, de Thalès p.333, Hachette, Paris.
- (170) DELAGRAVE (2000) *Mathématiques 2^{nde}*, 358 à 360, Delagrave, Paris.
- (171) FRACTALE (1998) *Terminale S obligatoire*, pp191, 192, 194, Bordas, Paris.
- (172) HACHETTE (1980) Dictionnaire encyclopédique français, édition Hachette.

- (173) LAMBACHER SCHWEIZER (1994-2000), *Mathematik, Baden-Wurtemberg*, Ernst Klett, Stuttgart. Klasse: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, GK (Grundkurs), LK (Leistungskurs).
- (174) PYTHAGORE (1996) *Sixième*, Hatier
- (175) PYTHAGORE (1998) *Quatrième*, Hatier.
- (176) PYTHAGORE (1999) *Troisième*, Hatier.
- (177) TOUT SIMPLEMENT (1998) *Mathématiques quatrième*, programme 1998, p49, Hachette.
- (178) TRANSMATH (1997) *Cinquième*, Nathan.
- (179) TRANSMATH (1998) *Quatrième*, Nathan.
- (180) TRANSMATH (1998) *Terminale S obligatoire, programme 1998*, Nathan.
- (181) TRIANGLE (1998) *Quatrième*, Hatier.
- (182) TRIANGLE (1999) *Troisième*, Hatier.

7.3 Textes ministériels

MINISTERE de l'Education Nationale et de la Recherche (France)

- (183) (non daté) *Mathématiques classes du premier cycle*, Ministère de l'Education, édition INRDP, brochure 6059, [classes de 6^{ème} et 5^{ème} : arrêté du 29 juillet 1968 ; classes de 4^{ème} et 3^{ème} : arrêté du 22 juillet 1971]
- (184) (non daté) *Mathématiques classes du second cycle*, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 6061 [classes de 2^{nde} : arrêté du 30 mai 1973; classes de 1^{ère} : arrêté du 19 mars 1970 ; classes de Terminales : arrêté du 14 mai 1971]
- (185) (non daté) *Mathématiques classes du premier cycle*, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 6093 [classes de 6^{ème} : arrêté du 14 mars 1977 ; classes de 5^{ème} : arrêté du 25 janvier 1978 ; classes de 4^{ème} et 3^{ème} : arrêté du 22 décembre 1978]
- (186) (1987) *Mathématiques classes de seconde, première et terminale*, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 001F6010, réédition 1987 [classes de 2^{nde}, 1^{ère} et Terminale : arrêtés des 26 janvier 1981, 30 août 1985, et notes de service des 10 octobre 1984 et 5 septembre 1985]
- (187) (1995) *Mathématiques classes des collèges 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème}*, Ministère de l'Education, édition CNDP, réimpression 1995 [classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème} : arrêté du 14 novembre 1985]
- (188) (1997) *Mathématiques classes de seconde, première et terminale*, Ministère de l'Education, édition CNDP, réédition 1997 [classes de 2^{nde}, 1^{ère} et Terminale : arrêtés des 25 avril 1990, 27 mars 1991, 10 juillet 1992, 10 juin 1994, 15 mai 1997]
- (189) (1998) *Enseigner au collège Mathématiques Programmes et accompagnement*, Direction de la Documentation, C.N.D.P.
- (190) (1999) *Un lycée pour le XXI^e siècle*, Mission de la communication.
- (191) (2000) *Mathématiques classe de seconde, accompagnement des programmes*, Ministère de l'éducation, CNDP
- (192) (2001) L'enseignement des sciences qu lycée, in BOEN HS n°2 du 30/8/2001, Ministère de l'éducation
- (193) (2002) *Mathématiques accompagnement des programmes*, Ministère de l'Education, édition CNDP, 2002 [6^{ème} : arrêté du 22/11/1995 ; 5^{ème} et 4^{ème} : arrêté du 21/1/1997 ; 3^{ème} : BOEN n°10 du 15/10/1998, 2^{nde} : BOEN n°2 du 30/8/2001, 1^{ère} S : BOEN n°7 du 31/8/2000 ; 1^{ère} ES : BOEN n°8 du 30/8/2000 ; 1^{ère} L BOEN n°7 du 31/8/2000 et n°3 du 30/8/2001, Terminale S et ES : BOEN n°4 du 30/8/2001 et Terminale L BOEN n°3 du 30/8/2001]
- (194) (2002a) *Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche*, Ministère de l'éducation.
- (195) (2002b) *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?*, CNDP / XO Éditions.

MINISTERIUM für Kultus und Sport Baden-Württemberg

- (196) (1971) *Vorläufiger Lehrplan für das Fach Mathematik*, Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Baden-Wurtemberg, 1971, pp. 1081-1109
- (197) (1984/6) *Bildungsplan für die Hauptschule*, Lehrplanheft 6/1984, Neckar-Verlag, 6/1984.
- (198) (1984/7) *Bildungsplan für die Realschule*, Lehrplanheft 7/1984, Neckar-Verlag, 7/1984.
- (199) (1984/8) *Bildungsplan für das Gymnasium*, Lehrplanheft 8/1984, Neckar-Verlag, 8/1984.
- (200) (1994/2) *Bildungsplan für die Hauptschule*, Lehrplanheft 2/1994, Neckar-Verlag, 2/1994.
- (201) (1994/8) *Bildungsplan für die Realschule*, Lehrplanheft 3/1994, Neckar-Verlag, 1994
- (202) (1994/4) *Bildungsplan für das Gymnasium*, Lehrplanheft 4/1994, Neckar-Verlag, 4/1994.
- (203) (2000) *Bildungsplan für das Gymnasium, Lehrplan Mathematik, Klasse ç-11, Amtlicher Teil, Heft 17 vom 9. Oktober 2000*
- (204) (2001) *Bildungsplan für die Kursstufe des Gymnasiums*, Lehrplanheft 3/2001, Neckar-Verlag,

- (205) (2001) *Bildungsplan für das Allgemein Bildende Gymnasium mit Achtjährigem Bildungsgang*, Lehrplanheft 6/2001 , Neckar-Verlag,

7.4 Ouvrages de référence (dictionnaires, encyclopédies)

- (206) HARRAP (1999) Dictionnaire français-allemand/allemand-français, édition Klett.
- (207) LANGENSCHIEDT (2001) Wörterbuch Englisch-Deutsch/Deutsch-Englisch. Dictionnaire bilingue allemand et anglais, Berlin.
- (208) LAROUSSE (1996) Dictionnaire français, anglais, allemand, version électronique bibliorum, CDROM.
- (209) MACMILLAN (1979) Macmillan contemporary dictionary, édition Macmillan.
- (210) MEYER (1992) Meyers grosses Taschen Lexikon, Encyclopédie, édition Brockhaus.
- (211) PONS (2000) Dictionnaire français-allemand/allemand-français, édition Klett, 1978, version électronique Ifinger.
- (212) UNIVERSALIS (1999) Encyclopédie, CDROM.

8 Annexes

8	Annexes.....	425
8.1	La démonstration comme thème d'étude.....	426
8.1.1	en France.....	426
8.1.1.1	Annexe.....	426
8.1.1.2	Annexe.....	427
8.1.1.3	Annexe.....	431
8.1.1.4	Annexe.....	434
8.1.1.5	Annexe.....	436
8.1.1.6	Annexe.....	444
8.1.2	En Bade-Wurtemberg.....	449
8.1.2.1	Annexe.....	449
8.1.2.2	Annexe.....	450
8.1.2.3	Annexe.....	453
8.1.2.4	Annexe.....	454
8.1.2.5	Annexe.....	455
8.2	Copies d'élèves.....	460

8.1 La démonstration comme thème d'étude

8.1.1 en France

Les extraits suivants se situent dans le manuel de **classe de quatrième**, collection triangle, édition Hatier, 1998 [pp. 85-104].

8.1.1.1 Annexe

Une première partie [p.86-86] de la leçon est constituée d'exercices sous le titre « repérer les obstacles » : « Des exercices que votre professeur vous proposera pour repérer vos connaissances et vos difficultés » [p.4]

1

Effectuer, si possible, les constructions suivantes :

a/ Tracer un triangle quelconque ABC. Tracer la parallèle à (BC) qui passe par A et la parallèle à (AB) qui passe par C. Ces deux droites se coupent en D. Tracer la médiatrice de [AC]. Tracer la demi-droite (BD).

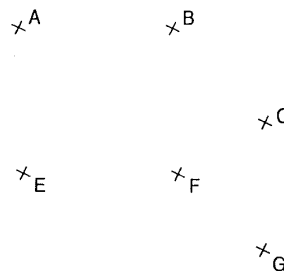
b/ Tracer un cercle de centre O. Soit [OA] un rayon de ce cercle. Soit (*d*) la médiatrice de [OA] (tracer cette médiatrice en utilisant le compas) ; elle coupe le cercle en E et F. Soit (*d'*) la droite perpendiculaire à (OA) qui passe par A. La droite (OE) coupe (*d'*) en G et le cercle en H. La droite (OF) coupe (*d'*) en I et le cercle en J. En utilisant les points de cette figure, nommer :

- un quadrilatère qui semble être un losange,
- un quadrilatère qui semble être un rectangle,
- deux quadrilatères qui semblent être des parallélogrammes (sans être des losanges ou rectangles),
- deux droites qui semblent être des médiatrices. (On précisera les segments dont elles semblent être les médiatrices.)

c/ Tracer un rectangle EFGH tel que EF = 3 cm et EG = 6 cm. Tracer le point L, symétrique de F par rapport à (EG), et le point M, symétrique de L par rapport à G.

d/ Tracer un losange IJKL tel que IK = 6 cm et JL = 4 cm.

e/ Placer 3 points A, B et C comme ci-contre. Placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Faire cet exercice trois fois en utilisant chaque fois une méthode différente pour placer D.



f/ Placer 3 points E, F, et G comme ci-contre. Placer le point H tel que EFHG soit un parallélogramme.

2

Voici une formule qui permet de calculer le poids théorique d'un homme, où P est le poids en kilogramme et *x* la taille en centimètre :

$$P = x - 100 - \frac{(x - 150)}{4}$$

a/ Calculer le poids théorique d'un homme qui mesure 165 cm.

b/ Calculer le poids théorique d'un homme qui mesure 180 cm.



3

Dans l'expression $\frac{60}{x} + x$, si on remplace *x* par n'importe quel nombre entier (1 ; 2 ; 3 ; ...), obtient-on toujours un nombre entier ?

4 Tracer un triangle BOD rectangle en O tel que $OB = 17,5$ cm et $OD = 10,5$ cm. Sur [OB] placer le point A tel que $AB = 7,5$ cm. Sur [OD] placer le point C tel que $CD = 4,5$ cm. Tracer les segments [AD] et [BC]. Ils se coupent en I. Quel est, des deux triangles AIB et ICD, celui qui a l'aire la plus grande ?

5 Pour chacun des cas ci-dessous préciser si $A = B$.

a/ $A = 3x - x$ et $B = 3$; b/ $A = 2x + 1$ et $B = x \times x + 1$;
c/ $A = (2x - 3)(x + 2)$ et $B = 2x \times x - 6$; d/ $A = 4 \times (2x - 7)$ et $B = 8x - 28$.

6 a/ Préciser pour chacune des phrases ci-dessous si elle est vraie. Justifier les réponses.

- (1) Quel que soit l'entier n , si n est un multiple de 3 alors $n + 1$ est pair.
 - (2) Quelle que soit la droite choisie, si elle est la médiatrice d'un segment [AB] alors elle est perpendiculaire à (AB).
 - (3) Quel que soit le quadrilatère choisi, s'il a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.
 - (4) Quel que soit le quadrilatère choisi, s'il a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle.
- b/ Énoncer les réciproques des phrases (2) à (4). Préciser si ces réciproques sont vraies ou non. Justifier les réponses.

7 Compléter les chaînons déductifs suivants :

- a/ – On sait que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que (EF) est perpendiculaire à (CD).
– Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.
– Donc ...
- b/ – On sait que la droite (AB) est parallèle à (CD) et que (CD) est parallèle à (MN).
– Si ... alors ...
– Donc (AB) est parallèle à (MN).
- c/ – On sait que I est le milieu de [MN] et de [PQ].
– Si ... alors ...
– Donc ...
- d/ – On sait que ...
– Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
– Donc (AB) est parallèle à (GH).
- e/ – On sait que $IO = IB$ et $JO = JB$.
– Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment.
– Donc ...

8.1.1.2 Annexe

La seconde partie [p.88-91] est constituées d'activités « franchir un obstacle » : « choisies par le professeur pour faire acquérir les nouvelles connaissances de ce chapitre » [p.4]

Nous extrayons des activités illustrant le genre de tâche « contrôler », « changer de registre », « découvrir » et « étudier ».

1. Ma première démonstration...

On rappelle les propriétés suivantes :

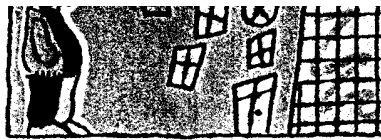
- ① Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
- ② Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
- ③ Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.
- ④ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- ⑤ Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.
- ⑥ Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.
- ⑦ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.

Soit ABCD et CDEF deux parallélogrammes.

Les droites (AB) et (EF) sont-elles toujours parallèles quels que soient les parallélogrammes choisis au départ ? Justifier la réponse en utilisant certaines des propriétés ci-dessus.

2. D'autres démonstrations

En utilisant certaines des propriétés ci-dessus, chercher et rédiger les démonstrations suivantes :



a/ ABCD est un parallélogramme. Soit (d) la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par A.

Démontrer que, quel que soit le parallélogramme choisi au départ, (d) est perpendiculaire à (CD) .

b/ Soit ANC un triangle. Soit K le milieu de [AC] et M un point de [NC]. Soit L le symétrique de M par rapport à K.

Démontrer que, quel que soit le point M, la droite (AM) est parallèle à (LC).

c/ Soit EFG un triangle. Soit (d) la droite parallèle à (EG) qui passe par F et (d') la droite parallèle à (EF) qui passe par G. (d) et (d') se coupent en K.

Soit I le milieu de [FG].

Démontrer que, quel que soit le triangle EFG choisi au départ, I est le milieu de [EK] .

3. Chercher les erreurs

Voici un énoncé de problème :

ABC est un triangle. Soit (d) la droite perpendiculaire à (BC) qui passe par A ; elle coupe (BC) en H. Soit (d') la droite perpendiculaire à (BC) qui passe par C. La droite parallèle à (AC) qui passe par H coupe (d') en E. Démontrer que ACEH est un parallélogramme.

a/ Effectuer cette démonstration.

b/ Cinq élèves ont effectué cette démonstration. Préciser pour chacune d'elles ce qui est faux et/ou ce qui manque.

Loïc :

J'ai vérifié avec ma règle et mon équerre que les droites (AH) et (CE) sont parallèles. Comme (AC) et (HE) sont parallèles, ACEH est un parallélogramme.

Florent :

(AH) et (CE) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (BC).
Donc ACEH est un parallélogramme.

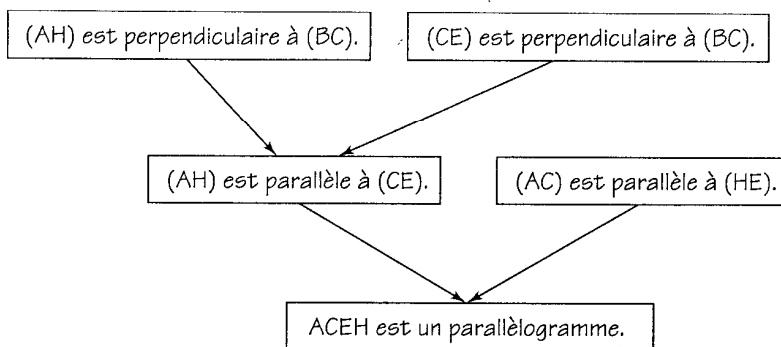
Estelle :

- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (AH) est parallèle à (CE)
- De plus (AC) est parallèle à (HE).
Donc ACEH est un parallélogramme (car si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux).

Pascale :

- On sait que (AH) est perpendiculaire à (BC) et que (CE) est perpendiculaire à (BC) (données).
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (AH) est parallèle à (CE).
- De plus (AC) est parallèle à (HE) (données).
Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.
Donc ACEH est un parallélogramme.

Hélène :



4. Une nouvelle boîte à outils

On considère les propriétés D3, C'1, et M1 à M6 (voir p. 93 et 94).

En utilisant certaines de ces propriétés, effectuer les démonstrations suivantes :

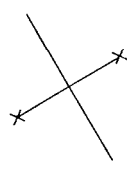
a/ Soit un cercle de centre O . Soit $[AB]$ une corde de ce cercle. Soit I le milieu de $[AB]$. Démontrer que (OI) est perpendiculaire à (AB) .

b/ ABC est un triangle rectangle en A . Soit M le milieu de $[AB]$. La droite parallèle à (AC) qui passe par M coupe $[BC]$ en D . Démontrer que $DA = DB$.

c/ $MNPQ$ est un quadrilatère tel que $MN = MQ$ et $PN = PQ$. Démontrer que (MP) est perpendiculaire à (NQ) .

5. Une aide pour chercher des démonstrations : des fiches méthodes

a/ Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

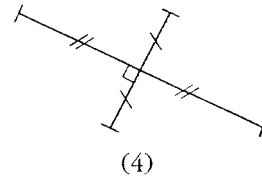
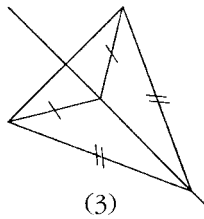
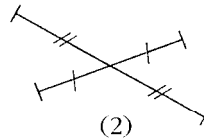
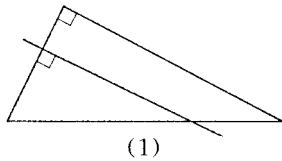
Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser les propriétés suivantes :		
Propriété	Conditions	Figure
Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.	Avoir la médiatrice d'un segment.	
...		

b/ Faire un tableau analogue pour démontrer que deux droites sont parallèles.

c/ Faire un tableau analogue pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment.

6. Une aide pour chercher des démonstrations : des figures typiques

Sur les figures ci-dessous les données sont codées. Énoncer pour chacune d'elles une propriété que l'on peut appliquer.

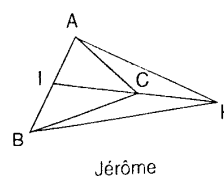
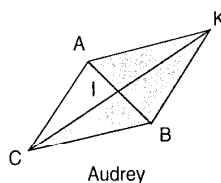
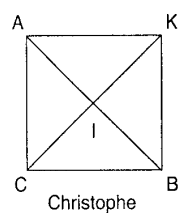
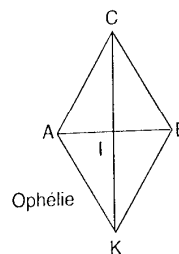
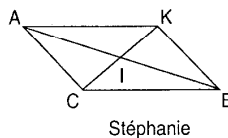
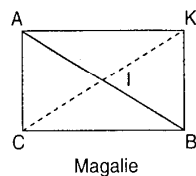


7. Attention aux figures particulières !

Voici un énoncé de problème :

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AB]$. Soit K le symétrique de C par rapport à I . Quel que soit le triangle ABC , quelle est la nature de $ACBK$?

Voici des figures réalisées par des élèves.



a/ À vue d'œil, dire quelles sont les figures fausses.

b/ Magalie dit : « Quel que soit le triangle ABC , le quadrilatère $AKBC$ est un rectangle. » A-t-elle raison ?

c/ On dit que la figure réalisée par Magalie est une figure particulière. Y a-t-il d'autres figures particulières ? Si oui lesquelles ?

d/ Résoudre l'exercice.

8. Retour au point de départ

Penser à un nombre,
ajouter 3 à ce nombre,
multiplier le résultat par 2,
retrancher le nombre choisi au départ,
enfin retrancher 6.



a/ Effectuer cette suite d'opérations pour plusieurs nombres. Que remarque-t-on ?

b/ Cette remarque est-elle vraie pour tous les nombres choisis au départ ?

8.1.1.3 Annexe

La troisième partie [p.92-94] expose des « connaissances » : « ce que vous devez savoir » [p.4].

1 Si ... alors ...

En mathématiques on utilise souvent des énoncés de la forme « Si ... alors ... » :
Dans ces énoncés, l'expression qui est entre « Si » et « alors » est appelée la condition de l'énoncé et l'expression qui suit « alors » est appelée la conclusion.

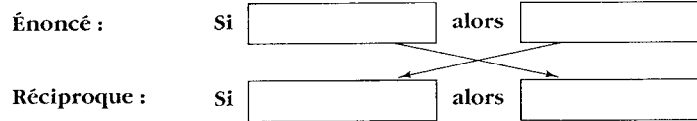
Exemple : si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.

Condition

Conclusion

2 Réciproque

On obtient la **réciproque** d'un énoncé de la forme « Si ... alors ... » en *permutant* conclusion et condition .



Exemple : la réciproque de l'énoncé du paragraphe 1 est : « Si un quadrilatère est un losange alors ses quatre côtés sont de même longueur. ».

► **Attention ! Un énoncé vrai peut avoir une réciproque fausse.**

3 Démonstration

En mathématiques on ne peut pas prouver en constatant sur un dessin, ni en mesurant, ni en prenant des exemples. **Pour prouver, on utilise des démonstrations.**

• Une **démonstration en géométrie est une succession de chaînons déductifs** qui *partent* des données et *arrivent* à la conclusion. Un chaînon déductif est un enchaînement de phrases qui peut se présenter sous la forme :

- On sait que ... (Donnée ou conclusion précédente)
- Si ... alors ... (Propriété)
- Donc ... (Conclusion du chaînon)

Une démonstration utilise donc des propriétés. Vous trouverez au paragraphe 4 les propriétés que vous devez connaître en géométrie en début de 4^e.

- Une démonstration d'un énoncé sur les nombres utilise généralement le calcul littéral.

Exemple : démontrer que, si on choisit n'importe quel nombre, si on ajoute 3 à ce nombre, si on multiplie le résultat par 2, et enfin si on retranche le double du nombre choisi au départ, on obtient toujours 6 comme résultat final.

Démonstration :

Soit x le nombre choisi.

On ajoute 3 à ce nombre : $x + 3$

On multiplie le résultat par 2 : $2 \times (x + 3)$

On retranche le double du nombre : $2 \times (x + 3) - 2 \times x$

En appliquant la propriété de la distributivité on obtient, quel que soit le nombre x choisi :

$$2 \times (x + 3) - 2 \times x = 2 \times x + 2 \times 3 - 2 \times x$$

$$2 \times (x + 3) - 2 \times x = 2 \times x - 2 \times x + 2 \times 3$$

$$\text{donc } 2 \times (x + 3) - 2 \times x = 6$$

4 Les propriétés de géométrie de 5^e à connaître¹

Droites

- D1** Si deux droites sont parallèles à une même troisième **alors** elles sont parallèles entre elles.
- D2** Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième **alors** elles sont parallèles entre elles.
- D3** Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une **alors** elle est perpendiculaire à l'autre.

Médiatrice

- M1** Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu **alors** c'est la médiatrice de ce segment.
- M2** Si une droite est la médiatrice d'un segment **alors** elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
- M3** Si un point est sur la médiatrice d'un segment **alors** il est équidistant des extrémités de ce segment.
- M4** Si un point est équidistant des extrémités d'un segment **alors** il est sur la médiatrice de ce segment.
- M5** Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment **alors** c'est la médiatrice de ce segment.
- M6** Si une droite passe par un point équidistant des extrémités d'un segment et est perpendiculaire à ce segment **alors** c'est la médiatrice de ce segment.

1. Il faut connaître en plus les définitions qui ne sont pas citées ici : définition du milieu d'un segment, d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle, d'une hauteur d'un triangle, du symétrique d'un point par rapport à une droite, du symétrique d'un point par rapport à un point, du diamètre d'un cercle, de la bissectrice d'un angle.

Parallélogramme

- P1** Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux **alors** c'est un parallélogramme.
- P2** Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- P3** Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu **alors** c'est un parallélogramme.
- P4** Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses diagonales ont le même milieu.
- P5** Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses côtés opposés sont de même longueur.
- P6** Si un quadrilatère (non croisé) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur **alors** c'est un parallélogramme.

Losange

- L1** Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur **alors** c'est un losange.
- L2** Si un quadrilatère est un losange **alors** ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et ses quatre côtés sont égaux.
- L3** Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont même milieu et qui sont perpendiculaires **alors** c'est un losange.
- L4** Si un quadrilatère est un losange **alors** ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
- L5** Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux **alors** c'est un losange.

Rectangle

- R1** Si un quadrilatère a trois angles droits **alors** c'est un rectangle.
- R2** Si un quadrilatère est un rectangle **alors** ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et ses quatre angles sont droits.
- R3** Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu et sont de même longueur **alors** c'est un rectangle.
- R4** Si un quadrilatère est un rectangle **alors** ses diagonales ont le même milieu et sont de même longueur.
- R5** Si un parallélogramme a un angle droit **alors** c'est un rectangle.

Carré

- C2** Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur et un angle droit **alors** c'est un carré.
- C3** Si un quadrilatère est un carré **alors** il a quatre côtés de même longueur, quatre angles droits et ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- C4** Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur **alors** c'est un carré.
- C5** Si un quadrilatère est un carré **alors** ses diagonales ont le même milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur.

Cercle

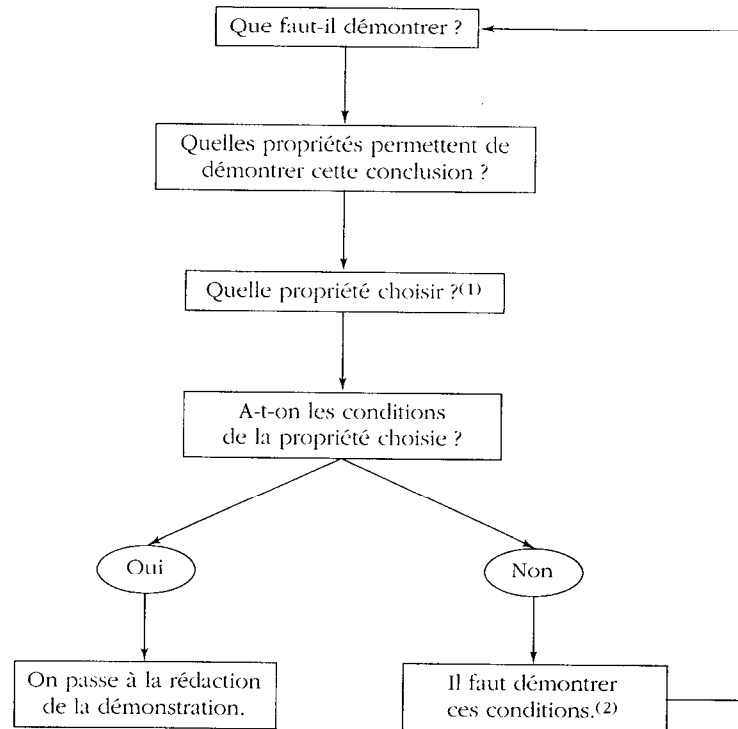
- C1** Si deux points sont sur un cercle **alors** le centre de ce cercle est équidistant de ces deux points.

8.1.1.4 Annexe

La quatrième partie [p.95-96] propose des « **méthodes** » : « ce que vous devez savoir faire ».

Une méthode correspond à des indications sur la manière de réaliser une tâche, ce qui correspond à indication sur la **technique**.

Pour chercher une démonstration on peut partir des données et essayer d'en déduire des conséquences à partir de propriétés, mais souvent il est utile d'appliquer le schéma suivant qui *part* de la conclusion.



- (1) Le choix de la propriété à utiliser se fait généralement à partir du repérage de la (ou des) condition(s) d'utilisation de cette propriété et de la présence de la figure qui lui est associée.
(2) Si on n'arrive pas à démontrer ces conditions il faut changer de propriété.

Figure 1 : chercher par conditions suffisantes



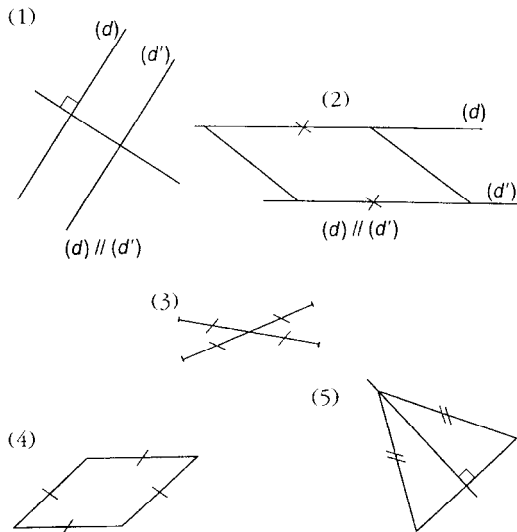
2 Contrôler la rédaction d'une démonstration

- Pour contrôler la rédaction d'une démonstration on peut se poser les questions suivantes :
- Les affirmations sont-elles bien des données de l'énoncé, ou des conclusions de chaînon précédents ?
 - Les propriétés utilisées existent-elles bien ?
 - Dans chaque chaînon déductif y a-t-il bien correspondance entre les données et la condition de la propriété, ainsi qu'entre la conclusion de la propriété et la conclusion du chaînon ?
 - On sait que ...
 - Si ... alors ...
 - Donc ...

8.1.1.5 Annexe

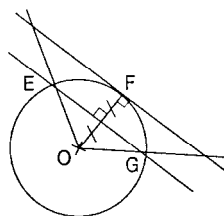
La cinquième partie [p.97-104] est constituée d' « exercices » répartis dans différentes catégories : exercices fondamentaux (répartis en « figures et propriétés », « contrôler les démonstrations », « démonstrations en géométrie »), faire le point à mi-parcours, exercices complémentaires (répartis en « s'échauffer », « s'entraîner, devenir un champion »). Illustrons la première et la dernière catégorie.

1 Pour chacune des figures ci-dessous, dont les données sont codées, énoncer une propriété que l'on peut appliquer.



2 Dessiner différentes figures dans lesquelles on peut utiliser la propriété : « Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ».

3 a/ Reproduire un dessin analogue au dessin ci-dessous et repasser en rouge une partie de la figure associée à la propriété : « Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ».



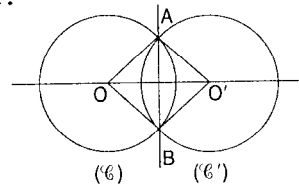
b/ Repasser en vert sur le dessin une figure associée à la propriété : « Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu alors c'est la médiatrice de ce segment ».

4 Voici un énoncé de problème :
Soit (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') deux cercles de centres O et O' qui se coupent en A et B . Démontrer que (OO') est perpendiculaire à (AB) .

a/ Effectuer cette démonstration.

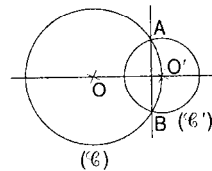
b/ Voici des démonstrations rédigées par des élèves. Préciser pour chacune d'elles ce qui est faux et/ou ce qui manque.

Vincent :



- $OAO'B$ est un losange.
- Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
- Donc (OO') et (AB) sont perpendiculaires.

Roxane :



- Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment.
- Donc (OO') est la médiatrice de $[AB]$.
- Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
- Donc (OO') et (AB) sont perpendiculaires.

Estelle : (Elle a exécuté le même dessin que Roxane.)

- A et B sont sur le cercle de centre O .
- Donc $OA = OB$, donc O est équidistant de A et B .
- De même A et B sont sur le cercle de centre O' .
- Donc $O'A = O'B$, donc O' est équidistant de A et B .
- Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment.
- Donc (OO') est la médiatrice de $[AB]$.
- Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu alors c'est la médiatrice de ce segment.
- Donc (OO') est perpendiculaire à (AB) .

Démonstrations en géométrie

5 Soit un cercle de centre O . Soit $[MN]$ et $[PQ]$ deux diamètres de ce cercle tels que (MN) et (PQ) sont perpendiculaires. Démontrer que $MPNQ$ est un carré.

6 TRI est un triangle isocèle en T . Soit I' le symétrique de I par rapport à T et R' le symétrique de R par rapport à T . Quelle est la nature du quadrilatère $I'R'TR$? Démontrer la réponse.

7 D est un point d'un cercle de centre O . La médiatrice de $[OD]$ coupe le cercle en K . Quelle est la nature du triangle OKD ? Démontrer la réponse.

8 Voici un énoncé de problème :
Soit EFG un triangle rectangle en E . Soit (d) la perpendiculaire à (EF) qui passe par F ; elle coupe la parallèle à (FG) qui passe par E en H . Soit M le milieu de $[FE]$. Démontrer que M est le milieu de $[HG]$.

a/ Réaliser la figure.

b/ Remettre les phrases ci-dessous dans l'ordre pour obtenir une démonstration correcte du problème posé.

- (1) Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
- (2) Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.
- (3) Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.
- (4) On sait que (HE) et (FG) sont parallèles (donnée).
- (5) On sait que M est le milieu de $[FE]$.
- (6) On sait que (EG) est perpendiculaire à (EF) (car EFG est un triangle rectangle en E).
- (7) On sait que (HF) est perpendiculaire à (EF) (donnée).
- (8) Donc M est le milieu de $[HG]$.
- (9) Donc $HFGE$ est un parallélogramme.
- (10) Donc (HF) et (EG) sont parallèles.


9 Inventer un énoncé de démonstration qui utilise deux propriétés dont la propriété suivante :
« Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ».

10  Démontrer que deux droites sont parallèles


$ABCD$ est un parallélogramme. Soit M un point de (AB) . Soit (d) une droite parallèle à (AD) qui passe par M ; elle coupe (DC) en N . Démontrer que (MN) est parallèle à (BC) .

11  Démontrer que deux droites sont parallèles


$RSTV$ est un rectangle de centre O . Soit F un point tel que $OSFT$ est un losange. Démontrer que (OF) est parallèle à (RS) .

12  Démontrer que deux droites sont perpendiculaires


$PQRS$ est un losange. Soit (d) la droite parallèle à (PR) qui passe par S . Démontrer que (d) est perpendiculaire à (QS) .

13  Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

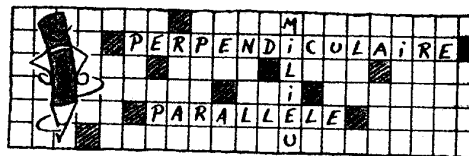
Soit un cercle de centre O . Soit $[AB]$ et $[CD]$ deux diamètres. Démontrer que (AC) est perpendiculaire à (BC) .

14  Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

Soit un cercle de centre O et $[MP]$ une corde de ce cercle. Soit (d) la droite perpendiculaire à (MP) qui passe par O ; elle coupe (MP) en K . Démontrer que K est le milieu de $[MP]$.

15  Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

$EFGH$ est un parallélogramme. Soit K un point de (HG) différent de H tel que $GK = EF$. Démontrer que G est le milieu de $[HK]$.



Démonstrations avec des nombres

16 La phrase suivante est-elle vraie ou fausse? Le démontrer.

« Quels que soient les nombres a et b , si $a < b$ alors $a \times a < b \times b$. »

17 Voici un énoncé :

Choisir un nombre entier, multiplier ce nombre par le nombre entier qui le suit dans la liste des entiers et retrancher au produit obtenu le nombre choisi au départ.

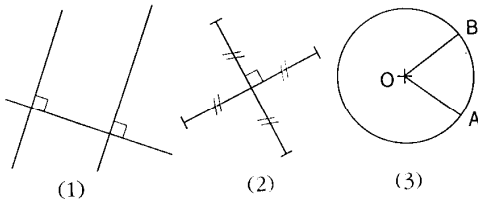
a/ Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on?

b/ Cette remarque est-elle toujours vraie? Justifier la réponse.

c/ Inventer un exercice analogue à cet exercice.

18 - Savez-vous associer des figures aux propriétés de géométrie ?

Pour chacune des figures ci-dessous, dont les données sont codées, énoncer une propriété que l'on peut appliquer.



19 - Savez-vous contrôler la rédaction d'une démonstration ?

Voici l'énoncé d'un problème :

ABCD est un parallélogramme et (d) la droite parallèle à (DB) qui passe par C. Elle coupe (AB) en E. Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que I est le milieu de [DE].

a/ Effectuer cette démonstration.

b/ Voici trois rédactions de démonstrations. Préciser pour chacune d'elles ce qui est faux et/ou ce qui manque.

Julien :



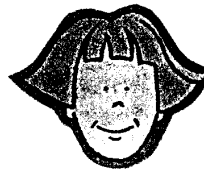
DBEC est un parallélogramme, donc [BC] et [DE] ont le même milieu I.

Paulo :



- On sait que (DB) et (CE) sont parallèles et que (DC) et (BE) sont également parallèles. Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme. Donc DBEC est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu. Donc [DE] a même milieu que [BC], c'est-à-dire I.

Aurélié :



- On sait que ABCD est un parallélogramme. Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme. Donc (AB) et (DC) sont parallèles. E est sur (AB) donc (BE) et (DC) sont parallèles.
- On sait également que (DB) et (CE) sont parallèles (données). Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. Donc DBEC est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu. Donc [DE] et [BC] ont le même milieu. I est le milieu de [BC] donc I est aussi le milieu de [DE].

20 - Savez-vous effectuer des démonstrations en géométrie ?

a/ EFGH est un parallélogramme de centre P. Soit M un point quelconque et N le symétrique de M par rapport à P. Démontrer que (EM) est parallèle à (NG).

b/ Soit ABCD un rectangle de centre O. Soit (d) la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par O ; elle coupe (AB) en K. Démontrer que K est le milieu de [AB].

c/ Soit ABC un triangle ; la hauteur issue de C coupe (AB) en H. Soit J le milieu de [AC] et K le symétrique de B par rapport à J. Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (CK).

21 - Savez-vous effectuer des démonstrations avec des nombres ?

Voici un énoncé :

*Choisir un nombre,
ajouter 5 à ce nombre,
multiplier le résultat par 2,
retrancher le double du nombre choisi au départ,
retrancher 9.*

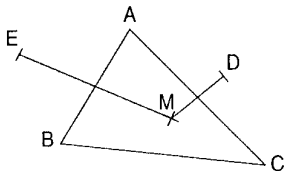
a/ Effectuer ce programme avec des nombres différents.

Que remarque-t-on ?

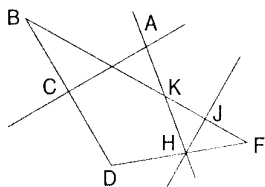
b/ Cette remarque est-elle toujours vraie ? Justifier la réponse.

S'échauffer

22 Nommer, à vue d'œil, à l'aide des points de la figure ci-dessous le plus grand nombre possible de quadrilatères qui semblent être des parallélogrammes.



23 Nommer à vue d'œil parmi les droites tracées celles qui semblent être des médiatrices de segments. Nommer ces segments.



24 Tracer un cercle de centre O et de diamètre [BC]. Soit A et D deux points de ce cercle. Tracer la parallèle à (AB) qui passe par D ; elle coupe le cercle en E. Tracer la parallèle à (AC) qui passe par D ; elle coupe le cercle en F. Tracer la droite (EF).

25 Tracer, si possible, les figures suivantes :

a/ Un rectangle ABCD tel que $AB = 5 \text{ cm}$ et $AC = 8 \text{ cm}$.

b/ Un losange EFGH tel que $EF = 3 \text{ cm}$ et $EG = 2 \text{ cm}$.

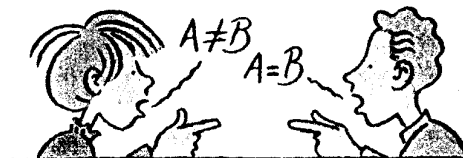
c/ Un carré IJKL tel que $IK = 3 \text{ cm}$.

26 Tracer un parallélogramme GTDP, puis placer le point K tel que GTKD soit un parallélogramme. Placer le point L tel que GDPL soit un parallélogramme, et le point I tel que TDGI soit un parallélogramme.

27 **a/** $A = 3x \times x - 4x + 3$. Calculer A pour les valeurs suivantes de x : 3 ; 0,5 ; 0.

b/ Même question pour $B = (2x - 1)(5 - x)$.

28 Soit $A = 3x \times x + x$ et $B = 4x$. Stéphane dit : « Ces deux expressions sont égales puisque pour $x = 0$, A et B valent toutes les deux 0 et pour $x = 1$ elles valent toutes les deux 4 ». Estelle lui répond : « Non, elles ne sont pas égales car pour $x = 3$, A vaut 30 et B vaut 12 ». Qui a raison ?



29 « Quel que soit le nombre choisi, si on le multiplie par 10, on obtient toujours un résultat plus grand que 10 ».

Que peut-on dire de cette affirmation ? Justifier la réponse.

30 La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? « Tout quadrilatère qui a deux angles droits a forcément deux côtés parallèles ». Justifier la réponse.

31 **a/** Préciser pour chaque phrase ci-dessous si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses.

- (1) Quelle que soit la droite choisie, si c'est la médiatrice d'un segment alors elle coupe le segment en son milieu.
- (2) Quel que soit le quadrilatère choisi, si ses diagonales sont de même longueur et sont perpendiculaires alors c'est un carré.
- (3) Quel que soit le quadrilatère choisi, si ses diagonales se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
- (4) Quel que soit le nombre choisi, si c'est un nombre entier alors il peut s'écrire sous forme d'une fraction (quotient de deux nombres entiers).

b/ Écrire la réciproque de chacune de ces phrases et préciser si elle vraie ou fausse. Justifier les réponses.

32

Compléter les énoncés suivants afin qu'ils soient vrais.

- (1) Quel que soit le quadrilatère choisi, s'il a quatre angles droits alors ...
- (2) Quel que soit le quadrilatère choisi, si ses diagonales se coupent en leur milieu alors ...
- (3) Quels que soient les nombres a , b et c , si $a = b$ et $b = c$ alors ...
- (4) Quel que soit ..., si ... alors ses diagonales sont de même longueur et ont le même milieu.

33

Compléter les chaînons déductifs suivants :

- (1) On sait que ABCD est un parallélogramme.
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont de même longueur.
Donc ...
- (2) On sait que (AB) est parallèle à (CD) et que (CD) est parallèle à (MN).
Si ... alors ...
Donc (AB) est parallèle à (MN).
- (3) On sait que I est le milieu de [MN] et de [PQ].
Si ... alors ...
Donc ...
- (4) On sait que ...
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (AB) est parallèle à (GH).
- (5) On sait que (AB) est perpendiculaire à (CD) et que (AB) coupe [CD] en son milieu.
Si ... alors ...
Donc ...
- (6) On sait que ABCD est un losange.
Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
Donc ...

34

Déterminer les erreurs dans les chaînons déductifs ci-dessous. (Ces erreurs ne portent pas sur les premières affirmations « On sait que ... ».)

- (1) On sait que ABCD est un parallélogramme.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.
Donc [AC] et [BD] ont le même milieu.
- (2) On sait que (AB) est parallèle à (CD) et que (CD) est perpendiculaire à (EF).
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (AB) est perpendiculaire à (EF).
- (3) On sait que (AB) est perpendiculaire à (CD).
Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont même milieu et qui sont perpendiculaires alors c'est un losange.
Donc ACBD est un losange.

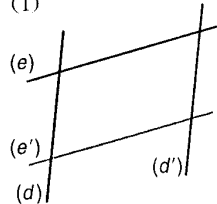
S'entraîner

Figures et propriétés

35

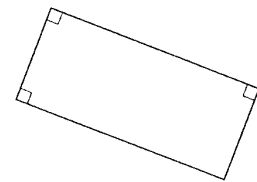
Pour chacune des figures ci-dessous, dont les données sont codées, énoncer une propriété que l'on peut appliquer.

(1)

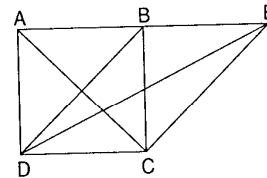


$(d) \parallel (d')$
 $(e) \parallel (e')$

(2)

**36**

a/ Reproduire la figure ci-dessous.



ABCD est un carré
 $(DB) \parallel (CE)$

b/ Repasser en rouge une partie de la figure qui pourrait être associée à la propriété : « Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ».

c/ Repasser en bleu une partie de la figure qui pourrait être associée à la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu. »

37

Tracer plusieurs figures qui correspondent à la propriété : « Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment ».

Contrôler des démonstrations

38

Voici un énoncé de problème :

Soit A et B deux points d'un cercle de centre O .
Soit I le milieu de $[AB]$. Démontrer que (OI) est perpendiculaire à (AB) .

a/ Effectuer cette démonstration.

b/ Voici trois rédactions de démonstration. Préciser pour chacune d'elles ce qui est faux et/ou ce qui manque.

Rédaction de Sophie :

- (OI) est la médiatrice de [AB].
Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
Donc (OI) est perpendiculaire à (AB).

Rédaction de Guillaume :

- A et B sont deux points d'un cercle de centre O.
Si deux points sont sur un cercle alors le centre du cercle est équidistant de ces deux points.
Donc O est équidistant de A et B.
- De plus I est équidistant de A et B.
Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment.
Donc (OI) est la médiatrice de [AB].
- Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par son milieu alors c'est la médiatrice de ce segment.
Donc (OI) est perpendiculaire à (AB).

Rédaction de Monique :

- Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment alors c'est la médiatrice de ce segment.
Donc (OI) est la médiatrice de [AB].
- Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
Donc (OI) est perpendiculaire à (AB).



Démonstrations en géométrie

39

Vrai ou faux ?

a/ Pour démontrer que deux droites sont parallèles on peut utiliser la propriété : « Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme ».

b/ Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser la propriété : « Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu ».

c/ Pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment on peut utiliser la propriété : « Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme ».

40

a/ Parmi les propriétés apprises en 5^e, énoncer celles que l'on peut utiliser pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

b/ Même question pour démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment.

41

Le texte ci-dessous est la rédaction incomplète d'une démonstration.

- On sait que ABCD est un losange (donnée).
Si ... alors ...
Donc (AC) est perpendiculaire à (BD).
- De plus, on sait que (KI) est parallèle à (AC) (donnée).
Si ... alors ...
Donc (KI) est perpendiculaire à (BD) et donc à (OD).
- De plus, on sait que I est le milieu de [OD] (donnée).
Si ... alors ...
Donc (KI) est la médiatrice de [OD].
- Si ... alors ...
Donc KO = KD.

a/ Recopier et compléter ce texte.

b/ Rédiger l'énoncé correspondant à cette démonstration, sachant de plus que K est sur [AD] et que O est le centre du losange ABCD.

42

Voici un énoncé de problème :

ABCD est un carré. Soit E un point de [AB]. La parallèle à (AC) qui passe par E coupe (BC) en F. Démontrer que (EF) est perpendiculaire à (BD).

a/ Réaliser la figure correspondant à ce texte.

b/ Remettre les six phrases ci-dessous dans l'ordre pour obtenir une démonstration correcte du problème posé.

- (1) Donc (EF) est perpendiculaire à (BD).
- (2) On sait que (EF) est parallèle à (AC).
- (3) Donc (AC) est perpendiculaire à (BD).
- (4) Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.
- (5) On sait que ABCD est un carré.
- (6) Si un quadrilatère est un carré alors ses diagonales ont le même milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur.

43

CAR est un triangle. La hauteur (h) de ce triangle issue de C coupe (AR) en H. La médiatrice (d) de [AR] coupe (AR) en I. Démontrer que (h) et (d) sont parallèles.

44

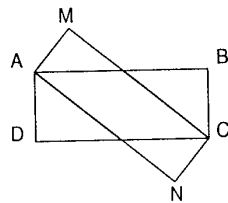
BUS est un triangle. Soit I le milieu de [BU]. Soit S' le symétrique de S par rapport à I. Démontrer que BS'US est un parallélogramme quel que soit le triangle BUS choisi au départ.

45 Deux cercles de même rayon et de centre respectif O et O' se coupent en A et B . Démontrer que $OAO'B$ est un losange.

46 BAL est un triangle isocèle en B et MAL est un triangle isocèle en M . Démontrer que (BM) est perpendiculaire à (AL) .

47 ABC est un triangle rectangle en A . Soit M le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à M . Démontrer que (BD) est perpendiculaire à (CD) .

48 $ABCD$ et $AMCN$ sont deux rectangles. Démontrer que $BD = MN$.



Démonstrations avec des nombres

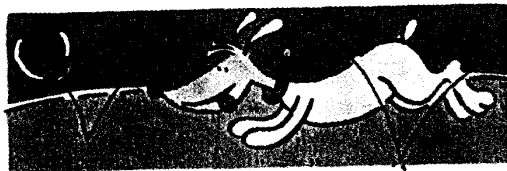
49 La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Démontrer la réponse.
 « Quels que soient les nombres a , b et c non nuls, si $a < b$ alors $a \times c < b \times c$ »

50 Voici un énoncé :

Choisir un nombre, ajouter 7 à ce nombre, multiplier le résultat par 3, retrancher le double du nombre choisi au départ et retrancher ensuite 20.

Démontrer que l'on obtient toujours le nombre choisi au départ augmenté de 1.

51 Inventer un exercice analogue à l'exercice ci-dessus.



Devenir un champion

Démonstrations en géométrie

52 $EFGH$ est un losange de centre K . Soit I le symétrique de E par rapport à H . Démontrer que (GI) est perpendiculaire à (EG) .

53 $MNPQ$ est un losange de centre O . Le cercle de centre O et de rayon OM coupe (NQ) en K et L . Quelle est la nature du quadrilatère $MKPL$? Démontrer la réponse.

54 ABC est un triangle rectangle en A . Soit (d) la droite parallèle à (BC) passant par A . Soit (d') la droite parallèle à (AC) qui passe par B et (d'') la droite parallèle à (AB) qui passe par C . (d) et (d') se coupent en M . (d') et (d'') se coupent en L . Démontrer que (AB) est la médiatrice de $[ML]$.

55 $ABCD$ est un parallélogramme. Soit I le milieu de $[AB]$ et (d) la droite parallèle à (DI) qui passe par B . (d) coupe (DC) en J .

a/ Démontrer que J est le milieu de $[DC]$.

b/ Démontrer que les droites (AC) , (BD) et (IJ) sont concourantes (c'est-à-dire se coupent en un même point).

56 CAR est un triangle et I le milieu de $[CA]$. Soit (d) la droite parallèle à (AR) passant par I ; elle coupe (CR) en J . Soit (d') la droite parallèle à (CA) passant par J ; elle coupe (AR) en K . Démontrer que (IK) est parallèle à (CR) .

57 $KLMN$ est un parallélogramme. Soit N' le symétrique de N par rapport à K . Soit K' le symétrique de K par rapport à L . Soit L' le symétrique de L par rapport à M . Soit M' le symétrique de M par rapport à N . Le but de cet exercice est de démontrer que $K'L'M'N'$ est un parallélogramme.

a/ Démontrer que $KK'MM'$ est un parallélogramme.

b/ Démontrer que $NN'LL'$ est un parallélogramme.

c/ Conclure.

58 Soit $[AB]$ un segment et (d) la médiatrice de $[AB]$. Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout point M situé dans le demi-plan délimité par (d) et contenant A on a $MA < MB$. Pour cela placer le point P intersection de (MB) et (d) .

a/ Démontrer que $MB = MP + PA$.

b/ Conclure. (On pourra utiliser l'inégalité triangulaire.)

59 Soit (AB) et (d) deux droites qui se coupent en K . Soit A' le symétrique de A par rapport à (d) et B' le symétrique de B par rapport à (d) . Démontrer que $(A'B')$ passe par K .

Pour cet exercice, on pourra utiliser les propriétés : « Le symétrique d'une droite par rapport à une droite est une droite » et « Si un point est sur l'axe de symétrie il est son propre symétrique ».

60 $ABCD$ est un carré. Soit F le symétrique de A par rapport à B . Démontrer que (AC) et (CF) sont perpendiculaires.

61 $RSTU$ est un carré de centre O . Soit M le milieu de $[OS]$ et V le symétrique de R par rapport à M . Démontrer que (VS) est perpendiculaire à (VT) .

62 Tracer un triangle PQR tel que $PR = 5$ cm et $PQ = 8$ cm.

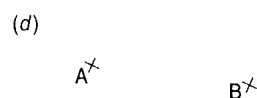
a/ Combien y a-t-il de triangles vérifiant ces conditions ?

b/ Soit (d) la médiatrice de $[QR]$; elle coupe (PQ) en S . Est-il possible de tracer un triangle PQR vérifiant les conditions ci-dessus tel que le périmètre du triangle PRS soit le plus grand possible ?

Les exercices 63 à 65 sont appelés problèmes de construction. L'objectif de ces exercices est de trouver une méthode pour construire un point, une droite, ou un cercle autrement que par tâtonnement. Dans ces exercices on demande de décrire cette méthode, de l'exécuter et de la justifier.

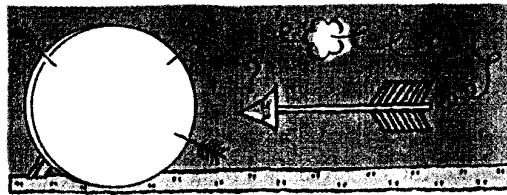
63 Construction

Reproduire un dessin analogue au dessin ci-dessous. Construire un cercle passant par A et B et dont le centre soit sur la droite (d) .



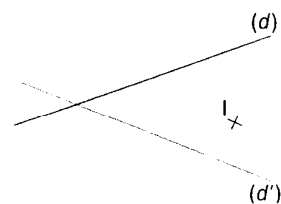
64 Construction

Tracer un cercle sans utiliser le compas (avec une pièce de monnaie par exemple). Construire le centre de ce cercle.



65 Construction

Reproduire un dessin analogue au dessin ci-dessous. Construire un parallélogramme de centre I et dont deux côtés sont sur (d) et (d') .



Démonstrations avec des nombres

66 On admettra dans cet exercice que tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $2 \times x$ où x est un nombre entier (par exemple 6 est un nombre pair car $6 = 2 \times 3$) et que tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2 \times x + 1$ (par exemple 15 est un nombre impair car il peut s'écrire sous la forme $15 = 2 \times 7 + 1$).

a/ Démontrer que la somme de deux nombres pairs est toujours paire.

b/ Démontrer que la somme de deux nombres impairs est toujours paire.

67 On admettra qu'un nombre est un multiple de 3 s'il peut s'écrire sous la forme $3 \times x$ où x est un entier (par exemple 12 est un multiple de 3 car $12 = 3 \times 4$).

Démontrer que la somme de 3 nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.

68 Choisir un nombre autre que 1, le multiplier par lui-même et ajouter le nombre choisi au départ. Est-il possible de trouver un nombre pour lequel le résultat ainsi obtenu ait seulement deux diviseurs ?

8.1.1.6 Annexe

A titre de complément, nous proposons une analyse d'un extrait du manuel de classe quatrième, collection Nouveau Transmath, édition Nathan, 1998, dans lesquels la démonstration est introduite dans la partie « exercices ». L'exemple est extrait de la première

leçon de géométrie [p.167-169] sur « parallélogrammes et translations » mais se poursuit dans les autres leçons.

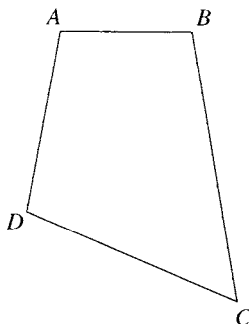




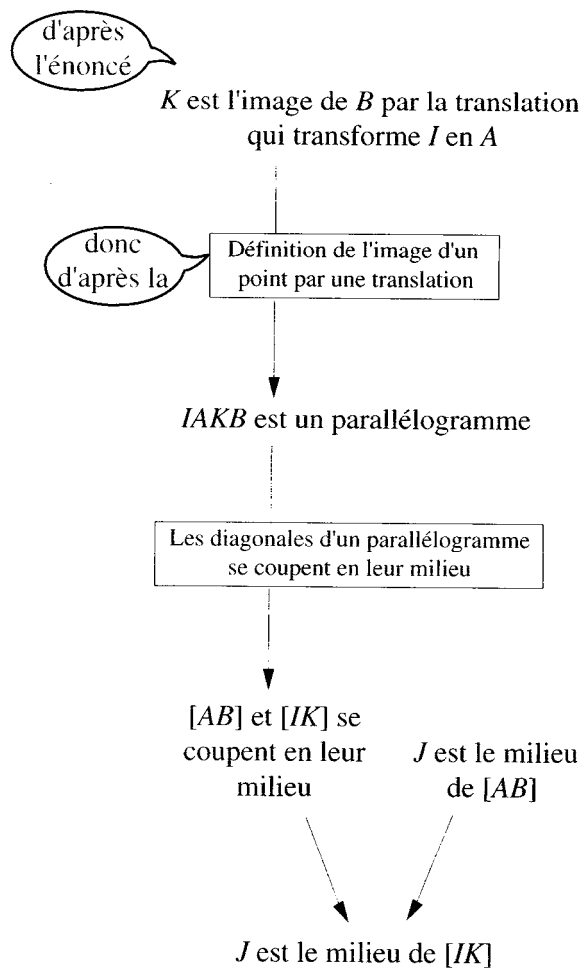


46 Rédiger une démonstration

1. Dessine le quadrilatère $ABCD$ ci-dessous. Marque le milieu I de $[CD]$ et le milieu J de $[AB]$. Construis l'image K de B par la translation qui transforme I en A .



2. Voici un réseau de déductions pour démontrer que J est le milieu de $[IK]$. Rédige cette démonstration en rajoutant des « petits mots » comme nous avons commencé à le faire (en rouge) et en faisant attention à la ponctuation, aux majuscules...



8.1.2 En Bade-Wurtemberg

8.1.2.1 Annexe

Les premières rencontres s'effectuent dans le manuel de **Klasse 7**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 2000 (première édition 1994).

Un groupe de cinq exercices regroupés sous le titre « Zum Beweisen [A démontrer] » [p.119-120].

Zum Beweisen

*Überlege:
Was geschah mit Absicht?
Was ergab sich dabei
„von selbst“?*

17 a) Zeichne einen beliebigen (spitzen) Winkel mit dem Scheitel S und den Schenkeln g und h . Konstruiere die Winkelhalbierende w und durch einen beliebigen Punkt $P \in g$ die Parallele zu h . Der Schnittpunkt der Parallelen mit w sei Q .
b) Warum muss bei dieser Konstruktion das entstehende Dreieck SPQ stets gleichschenkelig sein?

18 a) Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 4,5 \text{ cm}$; $b = 7,0 \text{ cm}$; $c = 6,0 \text{ cm}$. Fülle von B das Lot auf AC , der Fußpunkt des Lotes sei F . Halbiere AB , die Mitte von AB sei M (Fig. 2).
b) Warum wird bei dieser Konstruktion die Strecke MF halb so lang wie AB ?
c) Was folgt daraus für die Winkel α und ϵ (für die Winkel β_1 und δ)?

19 Es soll bewiesen werden, dass die Winkel α und β im Rechteck $ABCD$ von Fig. 3 gleich groß sind. M ist die Mitte von AD .
a) Übertrage Fig. 3 ins Heft. Verlängere EM und CD bis zum Schnittpunkt in F . Warum wird dabei EM gleich lang wie MF ?
b) Welche Bedeutung hat MC für das Dreieck ECF ? Was folgt daraus für α und β ? Was folgt daraus für die Strecken EC und FC ?

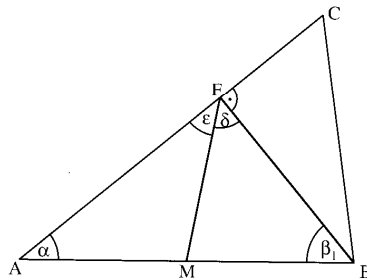


Fig.2

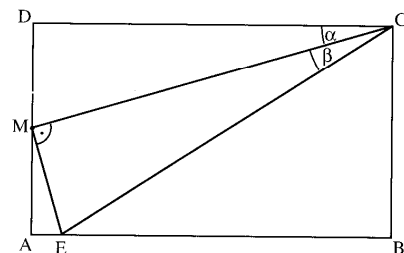


Fig.3

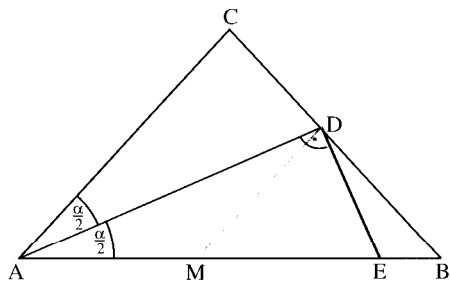


Fig.1

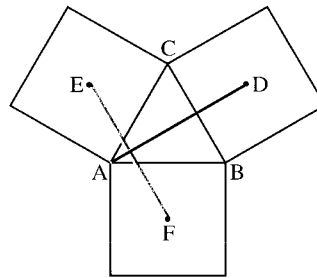


Fig.2

20 Das Dreieck ABC in Fig. 1 ist gleichschenkelig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$; w halbiert den Innenwinkel bei A; M ist die Mitte von AE.

- Übertrage Fig. 1 ins Heft. Warum wird die Strecke AE doppelt so lang wie MD?
- Berechne $\sphericalangle BMD$ in Abhängigkeit von α .
- Vergleiche $\sphericalangle BMD$ und $\sphericalangle DBM$. Was folgt aus dem Ergebnis für das Dreieck MBD?
- Vergleiche die Längen der Strecken AE und BD.

21 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den Seitenlängen 4 cm und über seinen Seiten Quadrate (Fig. 2), deren Mittelpunkte seien D, E und F. Es soll bewiesen werden, dass die Strecken AD und EF gleich lang sind.

- Zeichne das Dreieck DEF sein. Warum sind die Strecken EF und FD gleich lang?
- Berechne $\sphericalangle FAD$ und $\sphericalangle DFA$. Was folgt aus dem Ergebnis für die Strecken AD und FD? Was ergibt sich hieraus für die Strecken AD und EF?
- Wie erkennt man, dass die Strecken AD und EF orthogonal sind?

8.1.2.2 Annexe

Les extraits suivants concernent le manuel de **Klasse 8**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1999 (première édition 1995) [p.160-162].

5 Vom Beweisen



1 Kommissar Holmes weiß, dass eine der abgebildeten Personen der Täter sein muss. Zuverlässige Zeugen machen die folgenden Aussagen.

„Der Täter trug mindestens zwei Kleidungsstücke.“

„Der Täter trug keine Mütze.“

„Wenn einer mit drei Kleidungsstücken nicht der Täter gewesen sein kann, dann war es einer mit kurzer Hose.“

Wer ist der Täter?

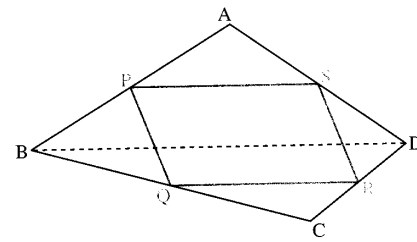
Verbinden wir die Seitenmitten PQRS eines Vierecks ABCD der Reihe nach miteinander, so scheint ein Parallelogramm zu entstehen.

Wir vermuten:

„**Wenn** man die Seitenmitten eines Vierecks der Reihe nach miteinander verbindet, **dann** entsteht ein Parallelogramm.“

Um sicher zu sein, dass die Vermutung stimmt, müssen wir sie beweisen: PS ist Mittellinie im Dreieck ABD, also $PS \parallel BD$. QR ist Mittellinie im Dreieck BCD, also auch $QR \parallel BD$. Somit ist $QR \parallel PS$.

Ganz entsprechend zeigen wir $PQ \parallel SR$.



Einen mathematischen Satz kann man in der Form: „**Wenn** . . . , **dann** . . .“ schreiben. Der Wenn-Teil heißt **Voraussetzung**, der Dann-Teil **Behauptung** des Satzes. Die Gültigkeit eines Satzes muss man beweisen.

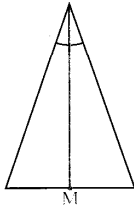
Beispiel 1: (Wenn-Dann-Form)

a) Der Satz „In einem punktsymmetrischen Viereck halbieren sich die Diagonalen“ lautet in der Wenn-Dann-Form:

Wenn ein Viereck punktsymmetrisch ist, dann halbieren sich die Diagonalen.

b) Der Satz „Ein rechtwinkliges Dreieck hat keinen stumpfen Winkel“ lautet in der Wenn-Dann-Form:

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann hat es keinen stumpfen Winkel.



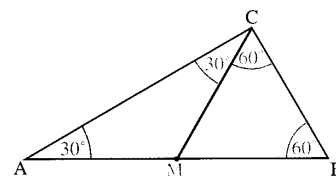
Hier halbiert die Seitenhalbierende den Winkel γ . Warum ist die Vermutung von Beispiel 2 trotzdem falsch?

Beispiel 2: (Widerlegen einer Vermutung)

Stimmt die folgende Vermutung?

„Wenn man in einem Dreieck die Ecke C mit der Mitte M von AB verbindet, dann wird der Winkel γ halbiert.“

Die Vermutung ist falsch, weil sie durch das abgebildete **Gegenbeispiel** widerlegt wird.



Vertauscht man in dem Satz

Wenn ein Viereck gleich lange Seiten hat, dann sind die Diagonalen orthogonal
den Wenn-Teil mit dem Dann-Teil, so ergibt sich

Wenn in einem Viereck die Diagonalen orthogonal sind, dann sind die Seiten gleich lang.
Wir nennen ihn die **Umkehrung** des ursprünglichen Satzes.

*Satz: Wenn es regnet,
dann ist die Straße nass.
Umkehrung: Wenn die
Straße nass ist, dann regnet
es.*

Bei einem Satz und seiner Umkehrung sind der Wenn-Teil und der Dann-Teil vertauscht.
Die Umkehrung eines Satzes kann falsch sein.

Beispiel 3:

a) Satz: Wenn ein Viereck punktsymmetrisch ist, dann ist es ein Parallelogramm.
Der Satz ist wahr.

Umkehrung: Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann ist es punktsymmetrisch.
Die Umkehrung ist auch wahr. (Man nennt die Umkehrung in diesem Fall auch **Kehrsatz**.)

b) Satz: Wenn ein Viereck gleichseitig ist, dann ist es achsensymmetrisch.
Der Satz ist wahr.

Umkehrung: Wenn ein Viereck achsensymmetrisch ist, dann ist es gleichseitig.
Die Umkehrung ist falsch.

2 Bringe die folgenden Sätze in die Wenn-Dann-Form.

- a) In einem gleichwinkligen Viereck sind die Diagonalen gleich lang.
- b) Ein Dreieck mit drei gleichen Winkeln ist gleichseitig.
- c) Jedes Quadrat ist eine Raute.
- d) Die Halbierenden von Nebenwinkeln sind orthogonal.

3 Formuliere die Voraussetzung und die Behauptung des Satzes.

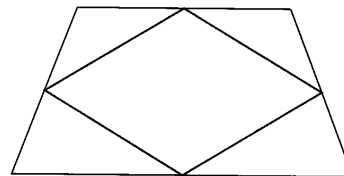
- a) In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich weit.
- b) Bei einer Geradenspiegelung an g ist die Verbindungsstrecke eines Punktes $P \notin g$ und seines Bildpunktes orthogonal zur Spiegelachse.
- c) Jedes Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen ist ein Rechteck.

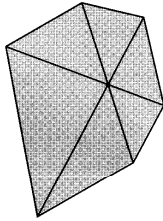
4 Bilde aus einer Voraussetzung und einer Behauptung wahre Wenn-Dann-Sätze.

Voraussetzung	Behauptung
Die Diagonalen des Vierecks halbieren sich.	Das Viereck ist ein Rechteck.
Das Viereck ist achsensymmetrisch zu einer Diagonalen.	Das Viereck besitzt mindestens zwei gleich lange Seiten.
Ein Viereck hat keine stumpfen Winkel.	Die Diagonalen sind orthogonal.

5 Beweise: Wenn ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel 60° besitzt, ist die kürzeste Seite halb so lang wie die längste.

6 Beweise: Wenn man in einem gleichschenkligen Trapez die Seitenmitten verbindet, dann entsteht eine Raute.

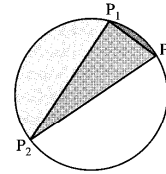




- 7** Widerlege durch ein Gegenbeispiel:
- Bei allen Vierecken schneiden sich die Diagonalen im Innern des Vierecks.
 - Bei Sechsecken schneiden sich die Diagonalen in einem Punkt.
 - Wenn ein Viereck gleich lange Diagonalen hat, dann ist es ein Rechteck.

- 8** Untersuche, ob die Vermutung wahr ist.
- Hat ein Viereck gleich lange Diagonalen, dann teilen diese das Viereck in gleichschenklige Dreiecke auf.
 - Wenn man die Quadratzahlen von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen addiert, so erhält man eine Primzahl oder wieder eine Quadratzahl.

- 9** Zeichne einen Kreis und verbinde zwei Punkte P_1 und P_2 der Kreislinie durch eine Strecke. Die Kreisfläche wird dadurch in zwei Teile geteilt. Nimm einen dritten Punkt P_3 der Kreislinie dazu und verbinde P_1, P_2, P_3 auf alle möglichen Weisen durch Strecken. Wie viel Teile der Kreisfläche ergeben sich?



Fertige eine Tabelle und formuliere eine Vermutung. Fahre entsprechend fort. Trifft die Vermutung zu?

Punkte	1	2	3	4	5
Kreisteile	1	2			

Satz und Umkehrung

Wie lautet die Umkehrung zur Umkehrung eines Satzes?

- 10** Schreibe zu jedem Satz die Umkehrung auf. Prüfe für den Satz und die Umkehrung, ob sie wahr oder falsch sind.
- Wenn ein Viereck gleichwinklig ist, dann sind die Diagonalen gleich lang.
 - Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und zwei Winkeln übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
 - Wenn zwei natürliche Zahlen durch dieselbe Zahl teilbar sind, dann ist auch ihre Summe durch diese Zahl teilbar.

- 11** Formuliere den Satz zunächst in der Wenn-Dann-Form und bilde dann die Umkehrung. Ist der Satz (die Umkehrung) wahr?
- Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.
 - Eine Gerade, die ein Viereck in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, ist Symmetrieachse des Vierecks.
 - Achsensymmetrische Vierecke sind Trapeze.
 - Es gibt keine Trapeze mit genau einem rechten Winkel.

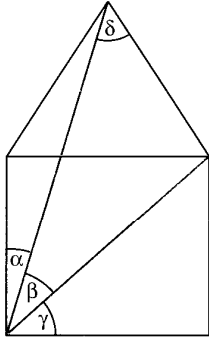
- 12** Ist die folgende Wetterregel und ihre Umkehrung wahr?
- Wenn's am Freitag regnet, regnet's die ganze Woche.
 - Wenn's zu Mittag schneit, ist der Winter nicht weit.
 - Fallen Regentropfen in den Sand, ziehen Wolken über's Land.

- 13** Ilse klagt morgens: „Bei Regenwetter schlafe ich schlecht.“ Ihre Mutter ist anderer Meinung und antwortet: „Gestern war klares Wetter, und du hast auch schlecht geschlafen.“ Ist Ilse damit widerlegt?

160

8.1.2.3 Annexe

Voici les exercices à démontrer du dernier du chapitre « quadrilatères » [p.164].



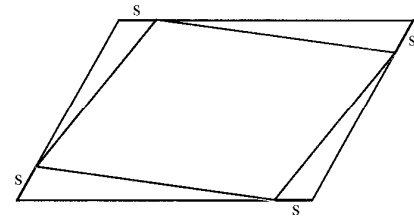
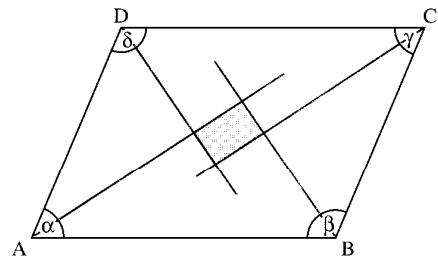
Zum Beweisen

11 Über die Seite eines Quadrats wurde ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.
Zeige: $\beta = 2\alpha$; $\gamma = 3\alpha$; $\delta = \gamma$.

12 Zeichne ein Parallelogramm samt den vier Winkelhalbierenden.
Beweise: Die Winkelhalbierenden eines Parallelogramms begrenzen ein Rechteck.
Hinweis: Drücke die Innenwinkel des entstehenden Vierecks mit α und β aus.

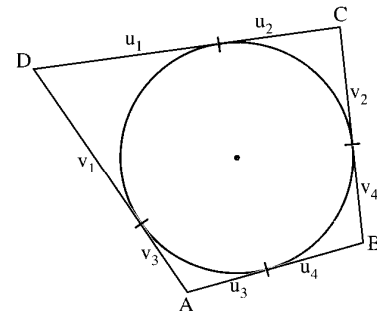
13 Beweise: Trägt man auf den Seiten eines Parallelogramms von den Ecken aus in gleicher Umlaufrichtung dieselbe Strecke s ab, so erhält man wieder die Ecken eines Parallelogramms.
(Anleitung: Zeige zunächst, dass die gleich gefärbten Dreiecke kongruent sind.)

14 Untersuche, ob der Satz von Aufgabe 13 entsprechend für
a) Rechtecke b) Rauten c) Drachen
gilt. Beweise oder widerlege jeweils.

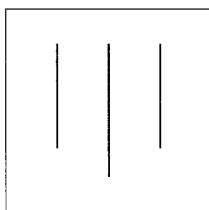
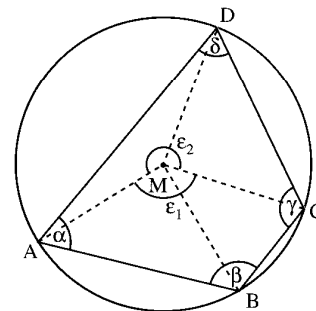


15 a) Beweise: Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann besitzt es einen Umkreis.
b) Gilt auch die Umkehrung von a)?
Beweise oder widerlege.

16 Vierecke, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißen **Tangentenvierecke**.
a) Zeichne einige Tangentenvierecke und vergleiche die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten. Formuliere eine Vermutung.
b) Beweise: Bei Tangentenvierecken ist die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten gleich.



17 Vierecke, deren Ecken auf einer Kreislinie liegen, heißen **Schnenvierecke**.
a) Zeichne einige Schnenvierecke und miss die Weite gegenüberliegender Winkel. Was fällt auf?
Formuliere eine Vermutung.
b) Beweise: Bei Schnenvierecken ist die Summe gegenüberliegender Winkel 180° .
(Anleitung: Zeige zunächst $2 \cdot \delta = \varepsilon_1$ und entsprechend $2 \cdot \beta = \varepsilon_2$. Beachte, dass M auch außerhalb des Vierecks liegen kann.)



8.1.2.4 Annexe

L'excursion mathématique intitulée « logique quotidienne » [Logik im Alltag] [p.166] est constituée d'une scène devant le juge pour laquelle sont posées des questions de logique.

Logik im Alltag



Kalle und Pit stehen wegen einer Beleidigungsklage vor dem Richter.

Kalle: „Er hat mich einen Dummkopf genannt.“

Pit: „Nein, das habe ich nicht.“

Richter zu Pit: „Ein verlässlicher Zeuge gibt an, dass Sie gesagt haben: Wenn Weihnachten auf Neujahr fällt, dann bist du gescheit.“

Kalle: „Sehen Sie, da haben wir den Beweis.“

Richter: „Wieso?“

Kalle: „Weil Weihnachten nie auf Neujahr fällt. Also bin ich nach seiner Meinung nie und nimmer gescheit.“

Richter zu Pit: „Was sagen Sie zu dem Vorwurf?“

Pit: „Den zitierten Satz habe ich gesagt. Das gebe ich zu. Allerdings bin ich der Meinung, dass man mir daraus keinen Vorwurf machen kann; ich habe nur die Wahrheit gesagt.“

Richter: „Wie soll ich das verstehen?“

Pit: „Ich will es Ihnen erklären. Jemand sagt zu seinem Freund: Wenn ich beim Lotto gewinne, dann bekommst du Geld von mir. Er gewinnt nun aber gar nicht, schenkt seinem Freund jedoch trotzdem Geld. Kann man ihn dann einen Lügner nennen?“

Richter: „Ich glaube, das genügt. Es ergeht folgendes Urteil: . . .“

- 1** a) Der Satz von Pit, um den es geht, heißt: Wenn Weihnachten auf Neujahr fällt, dann bist du gescheit. Wie lautet die Voraussetzung, wie die Behauptung des Satzes?
b) Wie lauten bei der Aussage des Lottospielers Voraussetzung und Behauptung?

- 2** Hat der Lottospieler gelogen, wenn er
a) gewinnt, dem Freund aber nichts gibt
b) gewinnt und dem Freund einen Teil des Gewinns gibt
c) nicht gewinnt und der Freund leer ausgeht
d) nicht gewinnt, dem Freund aber trotzdem Geld gibt?

In welchen dieser Fälle ist seine Wenn-Dann-Aussage also wahr?

- 3** Warum ist Kalle so erbost, welche Behauptung unterstellt er Pit?

Kann man aus der von Pit verwendeten falschen Voraussetzung auf diese Behauptung schließen? ~



- 4** Schreibe die auf dem Verkehrsschild angezeigte Vorschrift als Wenn-Dann-Satz auf.

Welche Gründe könnten die Polizei bewegen haben, ein solches Verkehrsschild aufzustellen?

- 5** Wer macht sich strafbar?

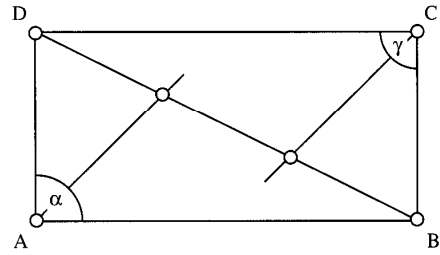
- a) Frau May lässt das Schild bei trockener Straße unbeachtet.
b) Herr Dürr fährt bei Regen weiter.
c) Frau Kunz hält trotz trockener Straße an.
d) Es regnet, Herr Mau kehrt um.

8.1.2.5 Annexe

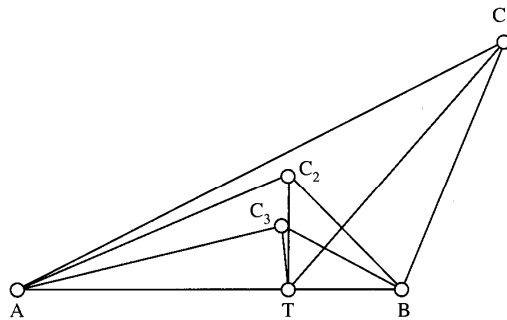
Dans le manuel de **Klasse 9**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1997, la leçon « découverte, démonstration, déduction » ne comporte pas de partie « cours » et est constituée de quatre pages [pp.124-127] reproduites ci-après.

6 Entdecken – Beweisen – Folgern

- 1** a) Zeichne (wenn möglich mit einem „Geometrieprogramm“) ein Rechteck ABCD mit $a = 6\text{ cm}$ und $b = 3\text{ cm}$. Zeichne die Diagonale BD sowie die Winkelhalbierenden von α und γ ein. Betrachte die sich ergebenden Teilstrecken auf der Diagonalen. Fällt dir etwas auf?
- b) Wiederhole die Konstruktion für Rechtecke mit den Seiten 6 cm und 2 cm bzw. mit den Seiten 6 cm und 4 cm .
- c) Betrachte in den drei Konstruktionen jeweils nur das Dreieck BCD und die Winkelhalbierende von γ . Vermutest du eine Gesetzmäßigkeit? Versuche, sie in Worte zu fassen.



Entdecken!
Der Computer hilft.



Eine Entdeckung:

Über der Strecke AB sind drei Dreiecke gezeichnet, bei denen jeweils eine Seite doppelt so lang ist wie die andere. In jedem dieser Dreiecke ist die Winkelhalbierende von γ eingezeichnet. Die drei Winkelhalbierenden scheinen überraschenderweise durch denselben Punkt auf AB zu gehen. Stellt man sich nun vor, der Winkel γ wird immer größer, so wandert die Ecke C auf den Teilpunkt T zu. Dann müsste also dieser Punkt die Strecke AB im Verhältnis 2 : 1 teilen. Wählt man für die beiden Seiten des Dreiecks über AB ein anderes Verhältnis, so ergibt sich die

Vermuten!

Vermutung:

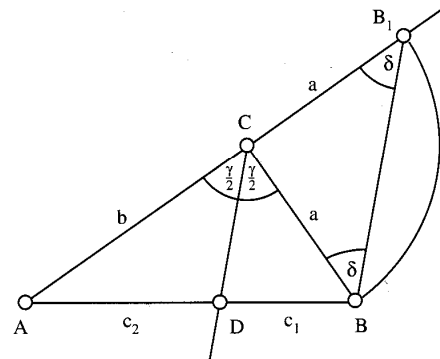
In einem Dreieck teilt jede Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweisen!

Beweis:

Nachgewiesen werden soll, dass die Längenverhältnisse $\overline{AD} : \overline{DB}$ und $\overline{AC} : \overline{CB}$ gleich sind. Dies ist eine typische Situation, wo die Strahlensätze weiterhelfen. Um eine Strahlensatzfigur herzustellen, übertragen wir BC durch einen Kreis um C auf die Verlängerung von AC.

Das Dreieck BB_1C ist also gleichschenkelig, d. h., die Basiswinkel sind gleich groß. In diesem Dreieck gilt: $180^\circ - \gamma + 2\delta = 180^\circ$. Also ist $\delta = \frac{1}{2}\gamma$ und somit $DC \parallel BB_1$ (Stufenwinkel). Der 1. Strahlensatz liefert nun: $a : b = c_1 : c_2$.

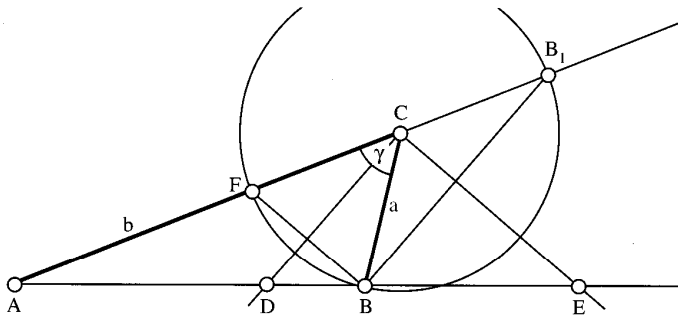


Die Vermutung hat sich also bestätigt. Damit können wir formulieren:

Satz von der Winkelhalbierenden im Dreieck:

In einem Dreieck teilt jede **Winkelhalbierende** die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Betrachtet man noch einmal die Figur zum Beweis, so stellt man fest, dass der Kreis um C auch AC selbst schneidet. Hieraus ergibt sich eine wichtige



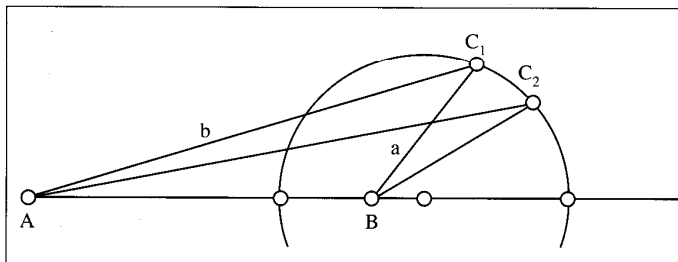
Folgerung:

Durch den zweiten Schnittpunkt F des Kreises um C ergibt sich das Dreieck FBC. Dieses Dreieck ist ebenfalls gleichschenkelig. Wie beim obigen Beweis ergeben entsprechende Überlegungen am Dreieck FBC: Die Grundseite FB ist parallel zur Winkelhalbierenden des Außenwinkels von γ : $BF \parallel CE$.

Der 1. Strahlensatz liefert dann:
 $\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{AC} : \overline{FC} = b : a$.

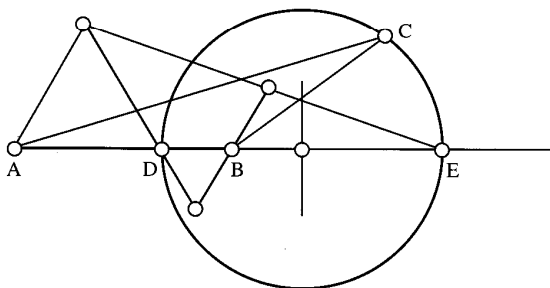
Insgesamt erhalten wir also: Die Strecke AB wird durch D innen und durch E außen im Verhältnis $b : a$ geteilt. Die Punkte D und E sind also durch AB und das Verhältnis $b : a$ eindeutig bestimmt. Da die Winkelhalbierende von γ und die Halbierende des Nebenwinkels von γ orthogonal sind, liegt C auf dem Thaleskreis über DE. Deshalb folgt:

*APOLLONIUS von Perge
 (um 200 v. Chr.):
 griech. Mathematiker, der
 in Alexandria tätig war.*



Satz des APOLLONIUS:

Alle Punkte C der Ebene, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B **das gleiche Abstandsverhältnis** $b : a$ haben, liegen auf einem Kreis (**Kreis des APOLLONIUS**). Man findet diesen Kreis durch Teilung der Strecke AB innen und außen im Verhältnis $b : a$.

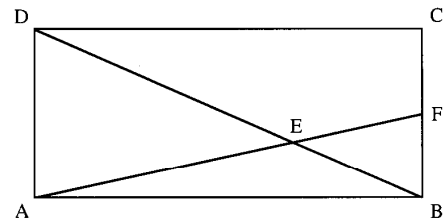


Beispiel:

Gegeben sind die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$. Wo liegen alle Punkte, die von A doppelt so weit entfernt sind wie von B? Um den „geometrischen Ort“ der gesuchten Punkte zu finden, teilen wir AB innen und außen im Verhältnis $2 : 1$ und zeichnen über der Strecke DE der Teilpunkte den Kreis des APOLLONIUS. Alle Punkte dieses Kreises (und nur sie) sind von A doppelt so weit entfernt wie von B.

Entdeckungen bei Teilverhältnissen

2 a) In dem Rechteck ABCD ist F die Mitte von BC. Zeichne die Figur in dein Heft. Durch welchen Satz wird das Verhältnis $\overline{BF} : \overline{AD}$ auf die Diagonale bzw. auf AF übertragen? Wie teilen sich diese?



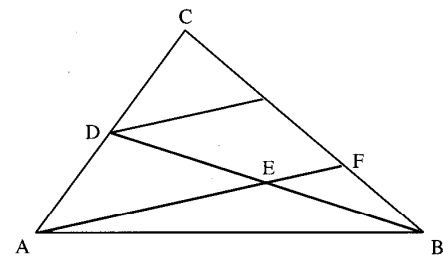
b) Markiere die Mitte G von CD und verbinde A mit G. Wie teilen AF und AG die Diagonale BD?

c) Untersuche die entsprechende Situation bei einem Parallelogramm. Ändert sich etwas in der Beweisführung? Formuliere einen Satz über die Teilung der Diagonalen eines Parallelogramms durch „Querstrecken“.

d) Zeichne erneut ein Rechteck ABCD und die Diagonale BD. Teile BC von B aus im Verhältnis 1 : 2. Verbinde den Teilungspunkt F mit A. Wie teilt jetzt AF die Diagonale BD? Formuliere einen allgemeinen Zusammenhang zwischen einer Einteilung auf BC und der sich ergebenden Einteilung auf der Diagonalen BD.

3 In dem Dreieck ABC ist D die Mitte von AC und E die Mitte der Seitenhalbierenden BD. Zeichne die Figur in dein Heft.

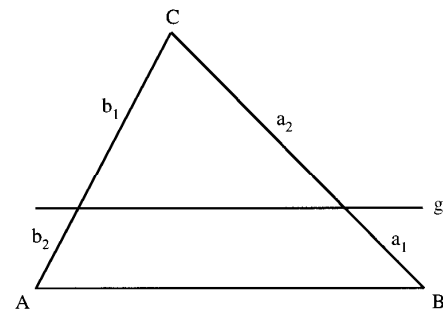
a) Zieht man die Parallele zu AF durch D, so ergeben sich zwei Strahlensatzfiguren; nenne die Streckentrennen. In welchem Verhältnis wird also die Seite BC durch F geteilt?



b) In welchem Verhältnis teilt der Punkt E die Strecke AF?

Der Satz von MENELAOS

4 a) In der Figur ist $g \parallel AB$. Nach dem 1. Strahlensatz gilt also: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$. Schreibe diese Gleichung so um, dass eine Seite der Gleichung aus dem Produkt zweier Verhältnisse besteht.

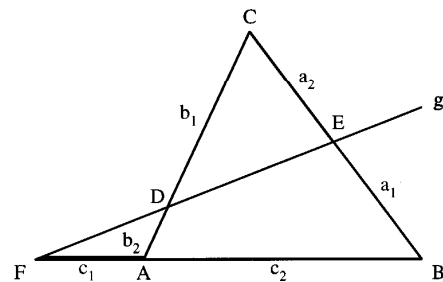


b) Jetzt ist g etwas geneigt: D teilt AC im Verhältnis 1 : 3, E ist die Mitte von BC. Es gilt also $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$ und $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{1}$. Gesucht ist zunächst das Verhältnis $\frac{c_1}{c_2}$. Stelle hierzu eine Strahlensatzfigur mit Zentrum F her. Welche Gleichung ergibt sich, wenn man alle drei Verhältnisse multipliziert?

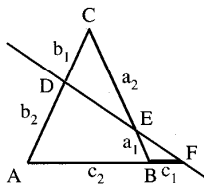
c) Zeige, dass diese Gleichung allgemein gilt, d. h. unabhängig von der Lage von D und E.

d) Den betrachteten Sachverhalt hat schon MENELAOS bewiesen. Formuliere den Satz des MENELAOS.

e) Beweise den Satz für den Fall, dass die Gerade g außerhalb des Dreiecks liegt.



MENELAOS (um 100 n. Chr. in Alexandria), griechischer Mathematiker und Astronom. Er lebte zur Zeit des römischen Kaisers Trajan.



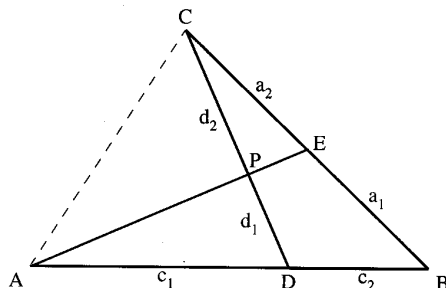
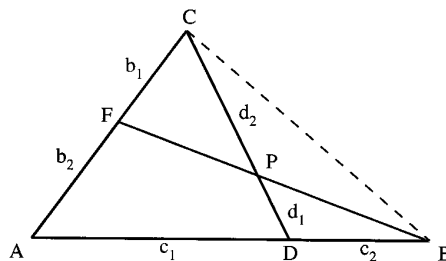
Wie lautet hier die Gleichung zum Satz von MENELAOS?

126

GIOVANNI CEVA
(1647–1734),
ital. Mathematiker.
In seinem 1678 veröffent-
lichten Buch „De lineis
rectis se invicem secan-
tibus, statica constructio“
verwendet er eine ganz
spezielle Schwerpunkt-
methode, um „seinen“
Satz zu beweisen.

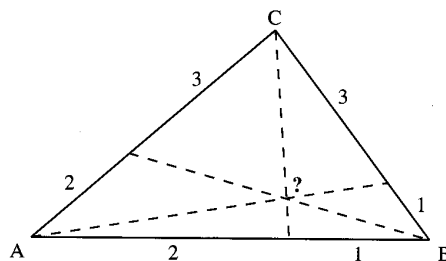
Der Satz von CEVA

- 5** a) In der Figur wird das Dreieck ADC von der Strecke BF geschnitten. Wende den Satz von MENELAOS an und notiere die zugehörige Gleichung.
b) Auch auf das Dreieck DBC mit der Strecke AE ist der Satz von MENELAOS anwendbar. Notiere ebenfalls die Gleichung.
c) „Zusammenfügen“ der Dreiecke ADC und DBC ergibt das Dreieck ABC. Die Verbindungsstrecken der Ecken mit dem jeweiligen Teilungspunkt der Gegenseite gehen durch den gemeinsamen Punkt P. Multipliziere die Gleichungen aus a) und b) „seitenweise“. Welche Gleichung ergibt sich?
d) Merkwürdigerweise war der betrachtete Sachverhalt in der Antike nicht bekannt. Er wurde erst 1678 von CEVA bewiesen. Formuliere den Satz von CEVA.

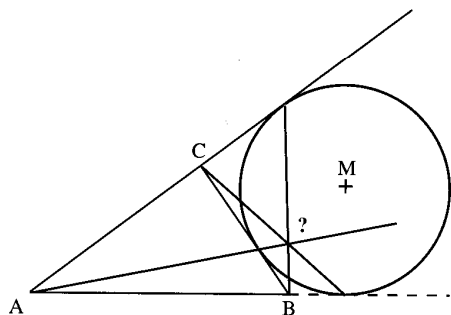


Umkehrung des Satzes von CEVA

- 6** Auch die Umkehrung des Satzes von CEVA ist richtig. Dieser Kehrsatz ist von großem Nutzen, wenn man nachweisen will, dass drei Strecken durch einen Punkt gehen.
a) Formuliere den Kehrsatz.
b) Gehen die drei „Ecktransversalen“ in dem Dreieck ABC durch einen Punkt?



- 7** Zeige mit dem Kehrsatz des Satzes von CEVA: Die drei Seitenhalbierenden (drei Winkelhalbierenden) eines Dreiecks gehen durch einen Punkt (schneiden sich in einem Punkt).
8 Zeichne ein Dreieck ABC und konstruiere die Berührungspunkte des Inkreises. Verbinde einen Berührungspunkt jeweils mit der gegenüberliegenden Ecke. Verlaufen die drei Ecktransversalen durch einen Punkt?



- 9** Beim Satz von CEVA und dessen Kehrsatz kann der Schnittpunkt der drei Ecktransversalen außerhalb des Dreiecks liegen.
a) Zeichne ein Dreieck ABC. Konstruiere den Mittelpunkt des Ankreises der Seite a als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von α und der Halbierenden der Außenwinkel von β und γ . Zeichne den Ankreis.
b) Verbinde einen Berührungspunkt des Ankreises jeweils mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks. Schneiden sich die Ecktransversalen in einem Punkt?

8.2 Copies d'élèves

Copie 1

nach Strahlensatz:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} \quad \checkmark$$

genau so:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \quad \checkmark$$

Behauptung:

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

wenn gilt: $\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$, dann $\overline{AB} = \overline{CD}$ (noch zu zeigen)

nach Strahlensatz:

$$\frac{\overline{JD}}{\overline{JF}} = \frac{\overline{JB}}{\overline{JF}}$$

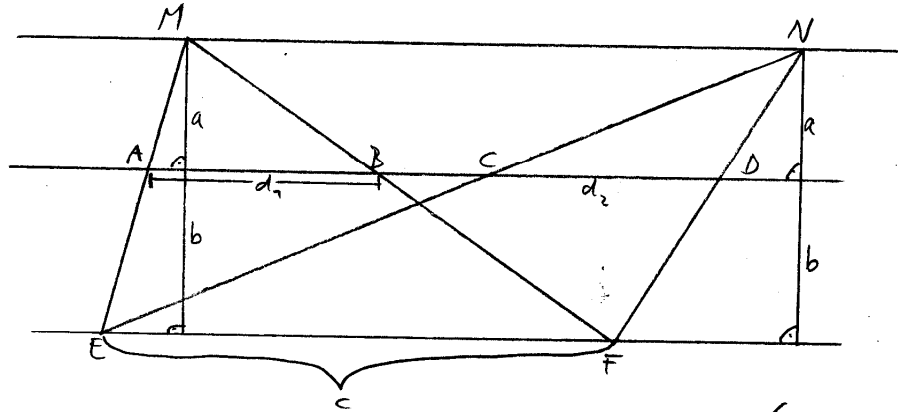
$$\text{und } \frac{\overline{JA}}{\overline{JE}} = \frac{\overline{JB}}{\overline{JF}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{JA}}{\overline{JE}} = \frac{\overline{JD}}{\overline{JF}}$$

daher ist die obige Behauptung bewiesen:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad \checkmark$$

15 Punkte



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\left[\frac{d_1}{c} = \frac{a}{a+b} \right] \text{ und } \left[\frac{d_2}{c} = \frac{a}{a+b} \right] \quad 1,2$$

$$d_1 = \frac{ac}{a+b} \quad d_2 = \frac{ac}{a+b} \quad 3,4$$

$$d_1 = d_2 \quad \checkmark$$

✓
 2
 3
 3
 2
 3
 2
 6
 3
 3
 10

15 Punkte

1 → 3
 2 → 1

1

Copie 3

1
 [Nach Strahlensatz: $\frac{|MA|}{|ME|} = \frac{|MM_{d_3}|}{|MM_{d_2}|}$ ✓

2
 $\frac{|NN_{d_3}|}{|NN_{d_2}|} = \frac{|ND|}{|NF|}$ ✓

da $|MM_{d_3}| = |NN_{d_3}|$ (1) \wedge $|NN_{d_2}| = |MM_{d_2}|$ (2)

folgt

3
 $\frac{|MA|}{|ME|} = \frac{|ND|}{|NF|}$

4
 [des Weiteren gilt:
 (nach Strahlensatz)

5
 $\frac{|MA|}{|ME|} = \frac{|AB|}{|EF|}$ ✓

6
 $\frac{|ND|}{|NF|} = \frac{|CD|}{|EF|}$

~~$\frac{|MA|}{|ME|} = \frac{|ND|}{|NF|}$~~
 $|AB| = |CD|$ ✓

Wichtigste Geometrie M_{d_i} ~~EN~~ } Lotfußpunkte von M bzw. N auf d_2, d_3
 N_{d_i}

15 Punkte

Copie 4

zu zeigen $AB = CD$

Strahlensätze:

$$\left[\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} \right] \quad 1 \quad \left[\overline{AB} \cdot \overline{EF} = \overline{MA} \cdot \overline{ME} \right] \quad 4$$

$$\left[\frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{MF}} \right] \quad 2 \quad \left[\overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{ND} \cdot \overline{NF} \right] \quad 5$$

$$\Rightarrow \overline{MA} \cdot \overline{ME} = \overline{ND} \cdot \overline{NF} \quad 3 \quad \left[\overline{AB} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \cdot \overline{EF} \right] \quad 6$$

$$\left[\overline{CD} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} \cdot \overline{EF} \right] \quad 7$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \cdot \overline{EF} \quad 8$$

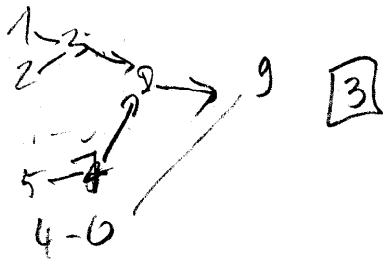
$$\left[\overline{AB} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \cdot \overline{EF} \right] \quad 9$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \text{ q.e.d.} \quad \checkmark$$

14
5
4
12
6
6
22

✓

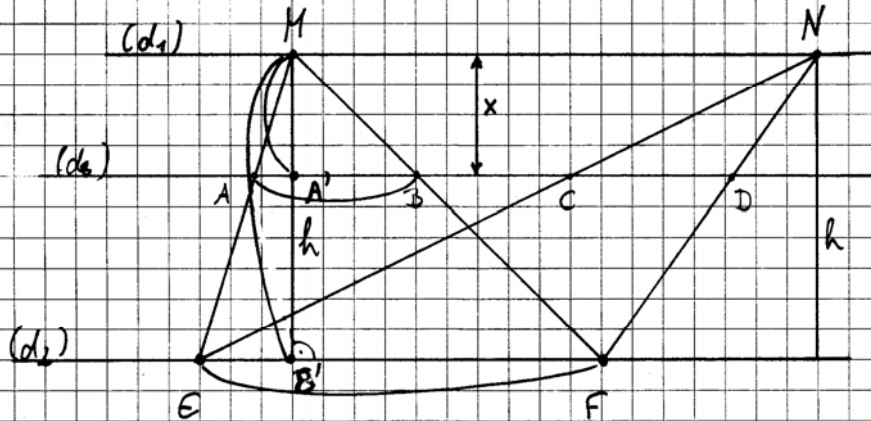
15 Punkte



Aufgabe 10

Punkte

14
zu



2
3
3
2
6
4
13
2
2
6

gegeben: Abstand zwischen (d_1) und (d_2) = 10 cm
 hier: $h = 10$ cm
entfernung
gleich

Abstand zwischen (d_1) und (d_3) ist $x (= 10 \text{ cm} - y)$

Nach dem Strahlensatz folgt: Anteil zu pos partien gleich gleich

$$h : x = \overline{AB} : \overline{EF}$$

$$\overline{AB} = \frac{h \cdot \overline{EF}}{x} \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{weil: } MA : ME = x : h \\ \rightarrow AA' : EE' = A'B : E'F \end{array} \right]$$

$$h : x = \overline{CD} : \overline{EF}$$

$$\overline{CD} = \frac{h \cdot \overline{EF}}{x} \quad (2)$$

Daraus folgt, dass \overline{AB} und \overline{CD} gleich lang sind.

M, A et E sont alignés } dans le même ordre
 N, B et F sont alignés }

Dans le triangle MEF, les droites (d_3) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.

Donc $\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$

N, C et E sont alignés } dans le même ordre
 N, D et F sont alignés }

Dans le triangle NEF, les droites (d_3) et (d_1) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle NEF est lui aussi en situation de Thalès.

Donc $\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$

N, C et E sont les projections respectives de N, A et E parallèlement à (d_1) et (d_3) donc $\frac{NA}{NE} = \frac{NC}{NE}$

Donc $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$

C'est pourquoi, quelle que soit la position de (d_3) , $AB = CD$.



Copie 7

$$\left\{ \frac{MI}{MG} = \frac{MA}{ME} = \frac{AI}{EG} \right.$$

$$\frac{MI}{MG} = \frac{MA}{ME}$$

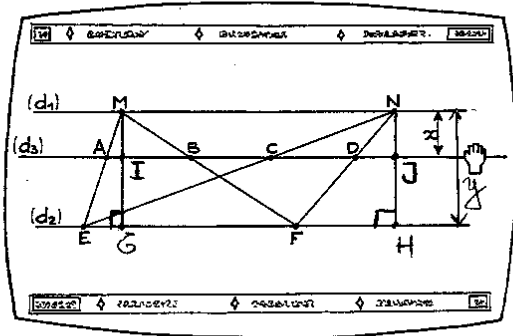
$$\frac{x}{4} = \frac{MA}{ME}$$

Les points N, D, F et N, E, H, sont alignés } de plus (DE) // (FH)
 donc, d'après la propriété de Thalès:

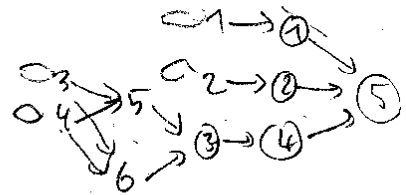
$$\left\{ \frac{ND}{NF} = \frac{NE}{NH} = \frac{DE}{FH} \right.$$

$$\frac{NE}{NH} = \frac{ND}{NF} \quad 23$$

$$\frac{x}{4} = \frac{ND}{NF}$$



$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{x}{4} = \frac{MA}{ME} \right] \\ \left[\frac{x}{4} = \frac{ND}{NF} \right] \end{aligned} \right\} \text{ donc } \frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF} \quad 26$$



Conclusion: $AB = \frac{MA}{ME} \times EF$
 $CD = \frac{ND}{NF} \times EF$ *inutile*

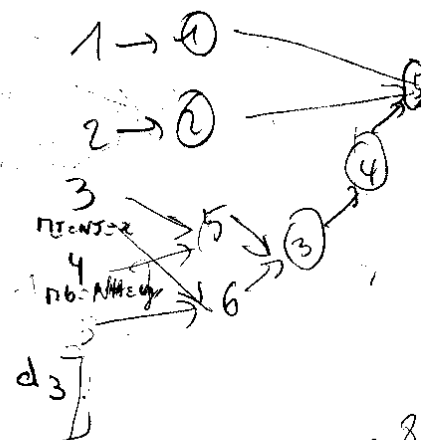
$$\left[\frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF} \right]^{26}$$

$$\left\{ \text{Donc } EF \times \frac{MA}{ME} = EF \times \frac{ND}{NF} \right\}^{30}$$

$$\left\{ \text{Alors } AB = CD \right\}^{31}$$

quelque soit x et la position de d_3 .

*si ce n'est pas complétement symbolique
 car les qd de texte*



*31 / 19 als symbolique / car 8
 12 qd*

Faire dessin

[La droite (d_1) est parallèle à la droite (d_2) , la droite (d_1) est parallèle à la droite (d_3)] et [la droite d_2 est parallèle à la droite (d_3)]
 [Les points M et N sont sur la droite (d_1)] [les points A, B, C, D sont sur la droite (d_3)] [ils sont donc alignés] [les points E et F sont sur la droite (d_2)]
 [On trace la perpendiculaire à (d_2) passant par N et qui coupe (d_3) en Z et (d_2) en G]
 [On trace la perpendiculaire à (d_2) passant par M et qui coupe (d_3) en Y et (d_2) en H]
 [Dans le triangle NGF] $(NZ) \parallel (FG)$, les points N, D, F et N, Z, G sont alignés dans le même ordre ; On sait que $NZ = \alpha$ et $NG = 1$, donc d'après le théorème de Thalès $\frac{ND}{NF} = \frac{DZ}{FG} = \frac{NZ}{NG} = \frac{\alpha}{1}$
 [Dans le triangle MHE] $(MY) \parallel (EH)$, les points E, A, M et H, Y, M sont alignés dans le même ordre ; On sait que $MY = \alpha$ et $MH = 1$, donc d'après le théorème de Thalès $\frac{MA}{ME} = \frac{AY}{EH} = \frac{MY}{MH} = \frac{\alpha}{1}$

Comme ²¹ [Dans le triangle NEF] ²² $(AB) \parallel (EF)$ ²⁵ [les points E, A, N et F, B, N]
²³ [sont alignés dans le même ordre], ²⁴ [donc d'après le théorème de Thalès]:

$$\left[\frac{NA}{NE} = \frac{NB}{NF} = \frac{AB}{EF} \right]$$

Dans le triangle NEF, ²⁷ $(CD) \parallel (EF)$, ²⁸ les points E, C, N et F, D, N
²⁹ sont alignés dans le même ordre, donc d'après le théorème de Thalès:

$$\left[\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF} \right]$$

Comme ³¹ $\frac{NA}{NE} = \frac{x}{1}$ et ³² $\frac{NA}{NE} = \frac{AB}{EF} = \frac{x}{1}$ ³³ $\frac{AB}{EF} = \frac{x}{1}$

Comme ³⁴ $\frac{ND}{NF} = \frac{x}{1}$ et ³⁵ $\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF} = \frac{x}{1}$ ³⁶ $\frac{CD}{EF} = \frac{x}{1}$

Comme ³⁷ $\frac{AB}{EF} = \frac{x}{1}$ et ³⁸ $\frac{CD}{EF} = \frac{x}{1}$, ³⁹ [donc $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$], par conséquent

$$\underline{AB = CD}$$

40

exercice
réduction

{ 30 } { 10 }

1
 [On utilise le théorème de Thalès]
 dans le triangle MEF
 on a les rapports $\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$
 4
 Dans le triangle NEF
 on a les rapports $\frac{ND}{NF} = \frac{NE}{NE} = \frac{CD}{EF}$
 5
 Dans le triangle MNF
 on a les rapports $\frac{MB}{MF} = \frac{ND}{NF} = \frac{BN}{MN}$
 2

- $\frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$ 8
- $\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$ 9
- $\frac{MB}{MF} = \frac{ND}{NF}$ 10

11
 On obtient les rapports $\frac{AB}{EF}$ qui est égal à $\frac{CD}{EF}$
 12
 (donc) $AB = CD$. ✓

Copie 10

Dans les triangles CND et ENF , les droites (CD) et (EF) sont parallèles
 $C \in (EN)$ et $D \in (NF)$

$$\text{Donc } \frac{CD}{EF} = \frac{CN}{EN}$$

Dans les triangles $πEN$ et AEC , les droites (AC) et $(πN)$ sont parallèles
 $A \in (πE)$ et $C \in (EN)$ donc $\frac{CN}{EN} = \frac{πA}{πE}$

Dans les triangles $πEF$ et $πAB$, les droites (AB) et (EF) sont parallèles
 $A \in (πE)$ $B \in (πF)$

$$\text{Donc } \frac{πA}{πE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\text{On sait que } \frac{CD}{EF} = \frac{CN}{EN} = \frac{πA}{πE} = \frac{AB}{EF} \text{ donc } \frac{CD}{EF} = \frac{AB}{EF}$$

$$\text{donc } CD = AB$$

18

Aufgabe 10 Geometrie Beweglich

1
Strahlensätze:

$$1. \quad \frac{|ME|}{|MA|} = \frac{|EF|}{|AB|} \quad \text{nach } |EF| \text{ auflösen:}$$

$$|EF| = \frac{|ME| \cdot |AB|}{|MA|}$$

$$2. \quad \frac{|CD|}{|EF|} = \frac{|NC|}{|NE|} \quad \text{nach } |EF| \text{ auflösen:}$$

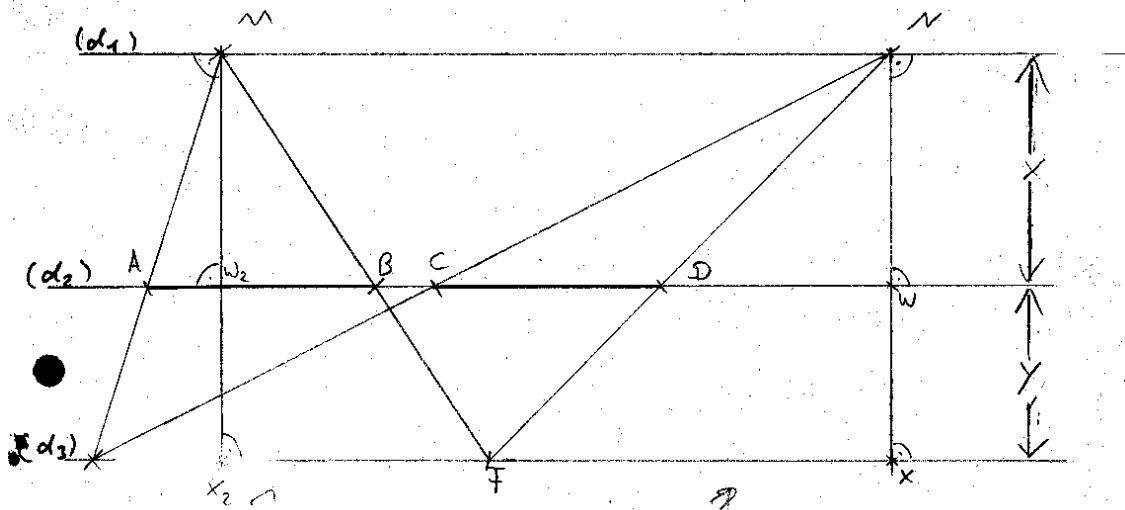
$$|EF| = \frac{|CD| \cdot |NE|}{|NC|} \quad \text{gleichsetzen:}$$

$$\Rightarrow \frac{|ME| \cdot |AB|}{|MA|} = \frac{|CD| \cdot |NE|}{|NC|}$$

$$\Rightarrow \frac{|ME| \cdot |AB|}{|MA|} = \frac{|NE| \cdot |AB|}{|NC|}, \text{ da gilt}$$

$$\frac{|ME|}{|MA|} = \frac{|NE|}{|NC|}$$

$$\Rightarrow \frac{|NE| \cdot |AB|}{|NC|} = \frac{|CD| \cdot |NE|}{|NC|} \quad \text{gekürzt: } |AB| = |CD|$$



$\overline{MW_2} = \overline{NW}$, da d_2 parallel zu d_1 und $\overline{MW_2} \perp \overline{NW}$ sind Höhe x .
 $\overline{MX_2} = \overline{NX}$, da d_1 parallel zu d_3 und $\overline{MX_2}$ bzw \overline{NX} sind Höhe $x+y$

Die Strecken \overline{MA} , \overline{ME} , $\overline{MW_2}$, $\overline{MX_2}$ und \overline{ND} , \overline{NF} , \overline{NW} , \overline{NX} verhalten sich ^{daher} nach Strahlensatz folgend:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MW_2}}{\overline{MX_2}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{NW}}{\overline{NX}} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MW_2}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{MX_2}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NW}} = \frac{\overline{NF}}{\overline{NX}}$$

und nach Strahlensatz gilt auch: $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$ und $\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad / \cdot (\overline{EF})$$

$$\underline{\underline{\overline{AB} = \overline{CD}}} \quad \text{q.e.d.}$$

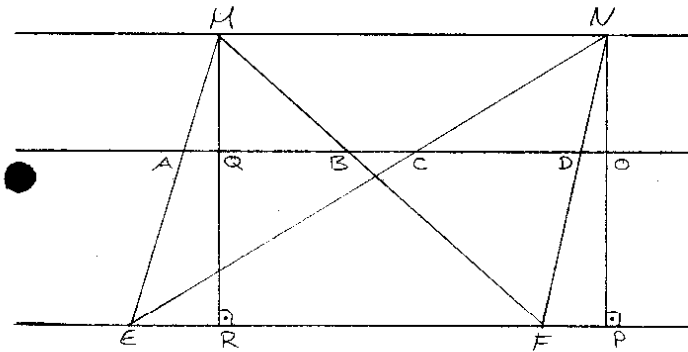
Lösung: Also ist Strecke AB gleich lang wie Strecke CD.
 Dabei spielt der Wert von x keine Rolle!

Copie 13

Aufgabe:

Zeige, dass, bei beliebigem x , die Strecken \overline{AB} und \overline{CD} gleichlang sind.

Zeichnung:



Lösung:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MR}} \quad ; \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NE}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{NP}}$$

3
Begr.:
Strahlensatz

$$\overline{NO} = \overline{MQ} ; \overline{MR} = \overline{NP}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad | \cdot \overline{EF}$$

$$\underline{\underline{\overline{AB} = \overline{CD}}}$$



Copie 14

Aufgabe 10:

Beweis: Die Beweise erhält man durch die Strahlensätze:

Rechenweg:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad | \cdot \overline{EF}$$

Lösung: $\underline{\underline{\overline{AB} = \overline{CD}}}$

Die Strecken \overline{AB} und \overline{CD} sind immer gleich lang.

Nr. 10

$$\frac{x}{10\text{cm}} = \frac{DU}{FU} \checkmark \Rightarrow \frac{DU}{FU} = \frac{CU}{EU} \checkmark$$

$$\frac{x}{10\text{cm}} = \frac{CD}{EU} \checkmark$$

$$\frac{x}{10\text{cm}} = \frac{AM}{EM} \checkmark \Rightarrow \frac{AM}{EM} = \frac{BM}{FM} \checkmark$$

$$\frac{x}{10\text{cm}} = \frac{BM}{FM} \checkmark$$

$$\frac{BM}{FM} = \frac{AB}{EF} \checkmark$$

$$\frac{DU}{FU} = \frac{CD}{EU} \checkmark$$

$\Rightarrow \frac{BM}{FM} = \frac{x}{10\text{cm}} = \frac{DU}{FU} \checkmark$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \checkmark$$

$$\Rightarrow AB = CD \checkmark$$

Die Gerade d_3 kann beliebig verschoben werden, muß immer parallel zu d_1 und d_2 sein. Da beim Verschieben von d_3 bleibt das Streckenverhältnis gleich zueinander.

(D'après Thalès) (appliqué à MAB et MEF) et (puisque $(d_3) \parallel (d_2)$)
 on a : $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$

(D'après Thalès) (appliqué à NCD et NEF), on a :
 $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF}$

Il s'agit de montrer que $\frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF}$

ajout de donné / On trace la perpendiculaire (d_4) à (d_2) passant par M.
 Soit H le point d'intersection de cette droite et de (d_2) .
 Soit H' le point d'intersection de la droite et (d_3) .

Par hypothèse on a : $MH = 1 \text{ dm}$; et $MH' = x$
 d'où (d'après Thalès appliqué) à $(MAH'$ et $MEH)$, on a :

$$\frac{MA}{ME} = \frac{x}{1} \text{ dm}$$

ajout de donné / On trace la perpendiculaire (d_5) à (d_2) passant par N.
 $I = (d_2) \cap (d_5)$
 $I' = (d_3) \cap (d_5)$

Par hypothèse on a $NI = 1 \text{ dm}$ et $NI' = x$
 (D'après Thalès) (appliqué à NDI' et NFI), on a :

$$\frac{ND}{NF} = \frac{NI'}{NI} = \frac{x}{1} \text{ dm} \quad \text{Donc} \quad \frac{MA}{ME} = \frac{x}{1} = \frac{ND}{NF}$$

alors $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = EF \times \frac{x}{1}$ \rightarrow écrivons

et $\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} \Rightarrow CD = EF \times \frac{x}{1}$

Donc, quelle que soit la position de (d_3) , on a
 $AB = CD$

Copie 17

à partir des données
(On trace la perpendiculaire à (d_1) issue de N qui coupe (d_2) en U
et (d_3) en G.
(On trace la perpendiculaire à (d_1) issue de M qui coupe (d_2) en O
et (d_3) en V.)

hypothèse: (d_1) est parallèle à (d_2)

$$NU = MO = 1 \text{ dm.}$$

$$NG = MV = x$$

Par hypothèse (les triangles NUF et NGD) sont en situation de Thalès on a donc :

$$8 \left(\frac{NU}{NG} = \frac{NF}{ND} = \frac{UF}{GD} \right) \checkmark$$

$$9 \left(\frac{1}{x} = \frac{NF}{ND} \right)$$

(les triangles MEO et MAV) sont en situation de Thalès, on a donc :

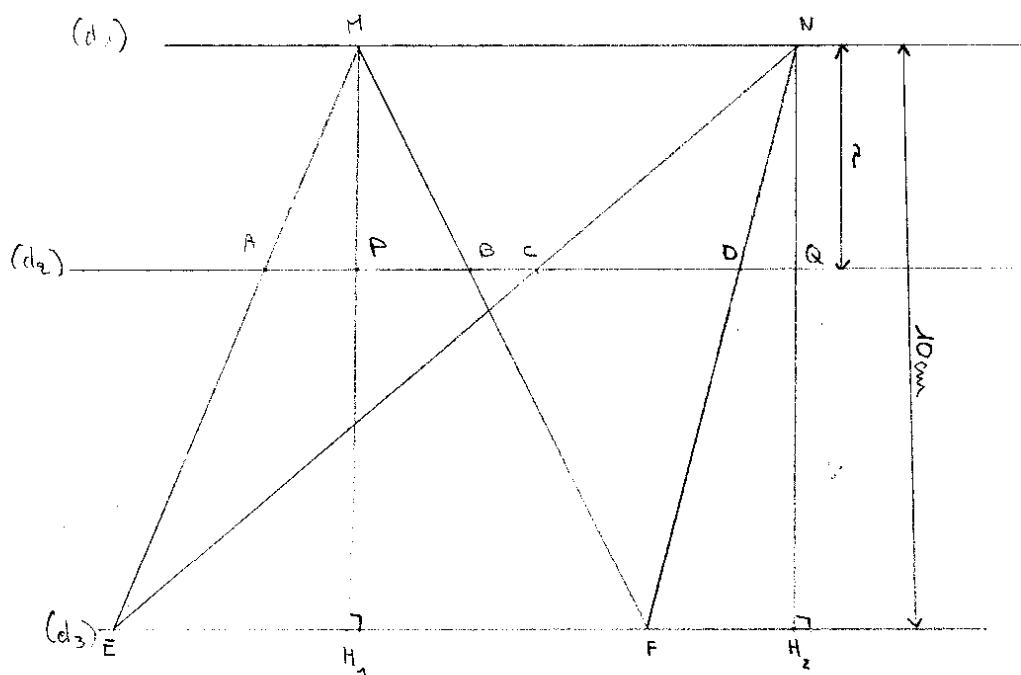
$$\left(\frac{ME}{MA} = \frac{MO}{MV} = \frac{EO}{AV} \right) | 12$$

$$\left(\frac{1}{x} = \frac{ME}{MA} \right) | 13$$

On peut en déduire que $\left(\frac{NF}{ND} = \frac{ME}{MA} = \frac{1}{x} \right)$

(SUITE AU DOS)





- hypothèses:
- $(d_1) \parallel (d_2) \parallel (d_3)$ 1
 - A, B, C, D sont alignés sur (d_2) 2
 - M et N sont sur (d_1) 3
 - E et F sont sur (d_3) 4
 - A, E, H_1 sont alignés 5
 - H_1, B, F sont alignés 6
 - N, B, E sont alignés 7
 - N, D, F sont alignés 8
 - (d_1) et (d_3) sont distantes de 10cm et (d_1) et (d_3) de 20 9

* Dans le triangle HEF, comme (d_2) et (d_3) sont parallèles, et comme H, A, E sont alignés et M, B, F sont alignés, j'applique le théorème de Thalès :

$$\text{on a : } \frac{AB}{EF} = \frac{MB}{MF}$$

ajout de données : soit H_1 sur d_2 est tel que (MH_1) est la hauteur de HEF, d'où MH_1 est égale à 10 cm, soit P appartenant à $[MH_1]$ sur (d_3) .

* Dans le triangle MH_1F , comme (d_2) et (d_3) sont parallèles, et comme M, B, F sont alignés et H, P, H_1 sont alignés, j'applique le théorème de Thalès :

$$\text{on a : } \frac{x}{10} = \frac{MB}{MF}$$

$$\text{* Comme } \frac{AB}{EF} = \frac{MB}{MF} = \frac{x}{10}, \text{ AB} = \frac{EF \cdot x}{10}$$

* Dans le triangle NEF, comme (d_2) et (d_3) sont parallèles, et comme N, D, F sont alignés et comme N, C, E sont alignés, j'applique le théorème de Thalès :

$$\text{on a : } \frac{NC}{NE} = \frac{CD}{EF}$$

ajout de données : soit H_2 sur d_2 est tel que (NH_2) est la hauteur de NEF, d'où NH_2 est égale à 10 cm. Soit Q de l'intersection de (NH_2) et (d_3) .

* Dans le triangle NH_2E , comme (d_2) et (d_3) sont parallèles et comme N, C, E sont alignés et N, Q, H_2 sont alignés, j'applique le théorème de Thalès :

$$\text{on a : } \frac{NC}{NE} = \frac{x}{10}$$

$$\text{comme } \frac{CD}{EF} = \frac{NC}{NE} = \frac{x}{10}, \text{ CD} = \frac{x \cdot EF}{10}$$

Or, $AB = \frac{x \cdot EF}{10}$ et $CD = \frac{x \cdot EF}{10}$, on a donc :

$AB = CD$ quelle que soit la position de (d_3) .

justif. données
 * (Trçons la perpendiculaire à (d_1) passant par N: (d_4))
 comme " si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre."

on en déduit donc que (d_4) est perpendiculaire à (d_2) et (d_3)

justif. des
 Appelons P le point d'intersection entre (d_4) et (d_3)
 et Q le point d'intersection entre (d_4) et (d_2)

→ la distance la plus courte entre 2 points se situant sur (d_1) et (d_2) est 10, or cette distance est celle entre les extrémités sur (d_1) et (d_2) de la perpendiculaire, ici N et Q.

↳ d'où $NQ = 10 \text{ cm}$

→ la distance la plus courte entre 2 points se situant sur (d_1) et (d_3) est x, or cette distance est représentée par la perpendiculaire passant par N, ici (d_4)

↳ d'où $NP = x$

• Comme les triangles NDP et NFQ sont en situation de Thalès (N, P, Q et N, D, F alignés dans cet ordre)

alors $\frac{ND}{NF} = \frac{NP}{NQ}$

↳ $\frac{ND}{NF} = \frac{x}{10}$

justif. données
 * (Trçons la perpendiculaire à (d_1) passant par M: (d_5))

comme " si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre"

on en déduit donc que (d_5) est perpendiculaire à (d_2) et (d_3)

justif. données
 Appelons S le point d'intersection entre (d_5) et (d_3)
 et R le point d'intersection entre (d_5) et (d_2)

→ la distance la plus courte entre 2 points se situant sur (d_1) et (d_2) est 10 or cette distance est celle entre les extrémités (d_1) et (d_2) de la perpendiculaire, ici

↳ d'où $MR = 10 \text{ cm}$ 22

→ la distance la plus courte entre deux points se situant sur (d_1) et (d_2) est x , cette distance est représentée par la perpendiculaire passant par M , ici (d_2)

↳ d'où $MS = x$ 25

• Comme les triangles MSA et MRE sont en situation de Thalès (26) (M, S, A et M, R, E étant alignés dans cet ordre et $(AS) \parallel (ER)$) 28

alors $\frac{MA}{ME} = \frac{MS}{MR}$ 27

$$\boxed{\frac{MA}{ME} = \frac{x}{10}} \quad 2 \checkmark$$

** Comme les triangles NDC et NFE sont en situation de Thalès: 30

alors $\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$ 31

$$\boxed{\frac{x}{10} = \frac{CD}{EF}} \quad 3$$

Comme les triangles NAB et NFE sont en situation de Thalès, 32

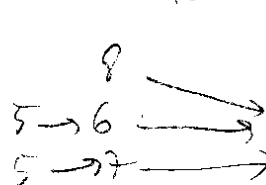
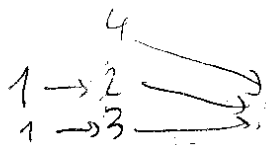
alors $\frac{NA}{NF} = \frac{AB}{EF}$ 33

$$\boxed{\frac{x}{10} = \frac{AB}{EF}} \quad 4 \checkmark$$

⇒ Puisque $\frac{CD}{EF} = \frac{x}{10}$ et que $\frac{AB}{EF} = \frac{x}{10}$ 5

alors $\frac{CD}{EF} = \frac{AB}{EF}$ 7

$$\boxed{\text{donc } CD = AB} \quad 8 \checkmark$$



après un coup

On a les inconnus :

- x : distance entre (d_1) et (d_2)
 - y : distance entre (d_2) et (d_3)
- avec le segment de distance $x+y$, perpendiculaire à (d_1) , (d_2) et (d_3) .

- Puisque (CD) et (EF) sont parallèles on peut utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{CD}{EF} = \frac{CN}{NE} = \frac{DN}{FN} = \frac{x}{x+y}$$

- Puisque (AB) et (EF) sont parallèles on peut aussi utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BM}{FM} = \frac{AM}{EM} = \frac{x}{x+y}$$

$$\text{donc } \frac{AB}{EF} = \frac{x}{x+y} = \frac{CD}{EF}$$

$$\text{donc } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$$

on multiplie les deux membres par EF .

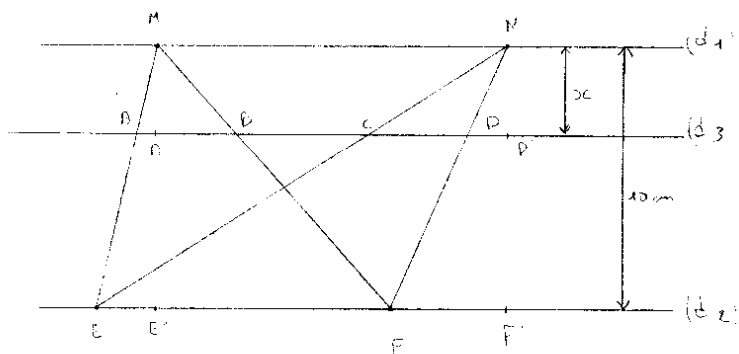
$$\text{donc } AB = CD$$

$$AB = \frac{x \times EF}{10} \quad 17$$

$$CD = \frac{x \times EF}{10} \quad 18$$

Conclusion $AB = CD$, $\left. \begin{array}{l} 19 \\ \end{array} \right\}$ ✓

Quel que soit la position de (d_3) qui depend de x .



Aufgabe 10:

(gegeben: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$) ✓

zu zeigen: $\overline{AB} = \overline{CD}$ ✓

(nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\text{I } \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MB}} \quad \text{II } \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{NF}}{\overline{ND}}$$

$$\overline{EF} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MB}} \cdot \overline{AB} \quad ; \quad \overline{EF} = \frac{\overline{NF}}{\overline{ND}} \cdot \overline{CD}$$

$$\text{I } \frac{\overline{MF}}{\overline{MB}} \cdot \overline{AB} = \frac{\overline{NF}}{\overline{ND}} \cdot \overline{CD} \quad \checkmark$$

Der Abstand (d_1, d_2) wird mit y bezeichnet. ✓

$y = 1 \text{ dm}$

Demnach gilt nach dem 1. Strahlensatz:

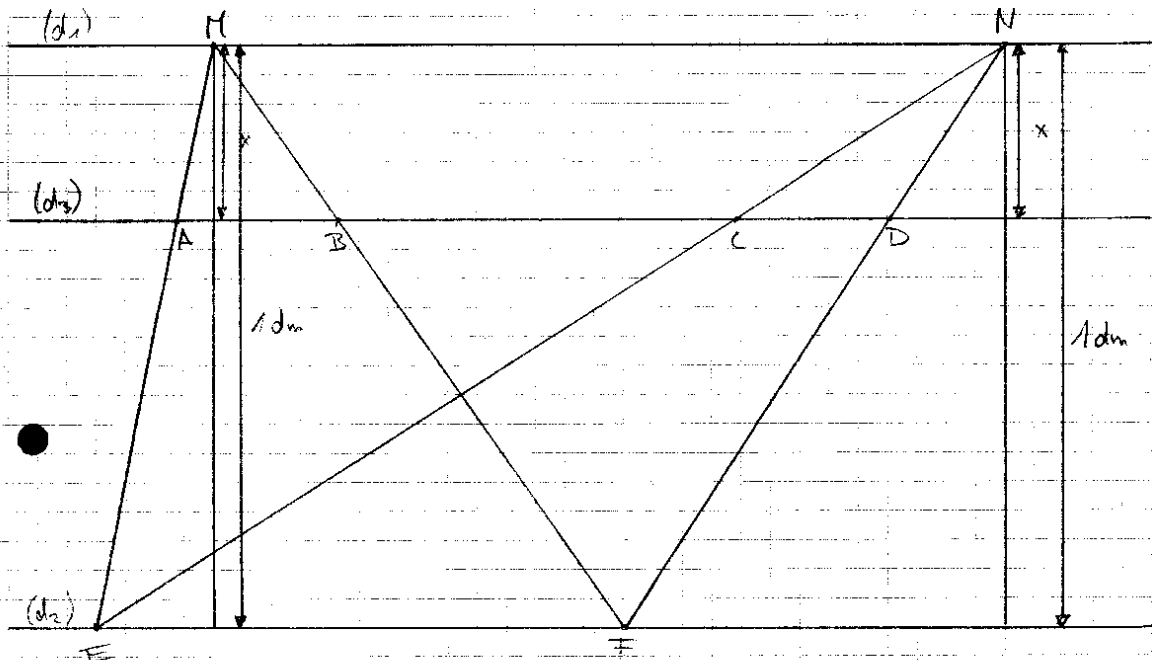
$$\text{III } \frac{y}{x} = \frac{\overline{NF}}{\overline{ND}} \quad ; \quad \text{IV } \frac{y}{x} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MB}}$$

(III) und (IV) (in I) vertauschen

$$\frac{y}{x} \cdot \overline{AB} = \frac{y}{x} \cdot \overline{CD} \quad | : \frac{y}{x}$$

$$\underline{\underline{\overline{AB} = \overline{CD}}}$$

Die Strecken \overline{AB} und \overline{CD} sind gleich lang. 15P ✓



$$\frac{CD}{EF} = \frac{NC}{NE} \Rightarrow EF = \frac{CD \cdot NE}{NC}$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MB}{MF} \Rightarrow EF = \frac{AB \cdot MF}{MB}$$

$$\frac{CD \cdot NE}{NC} = \frac{AB \cdot MF}{MB}$$

$$CD \cdot NE \cdot MB = AB \cdot MF \cdot NC$$

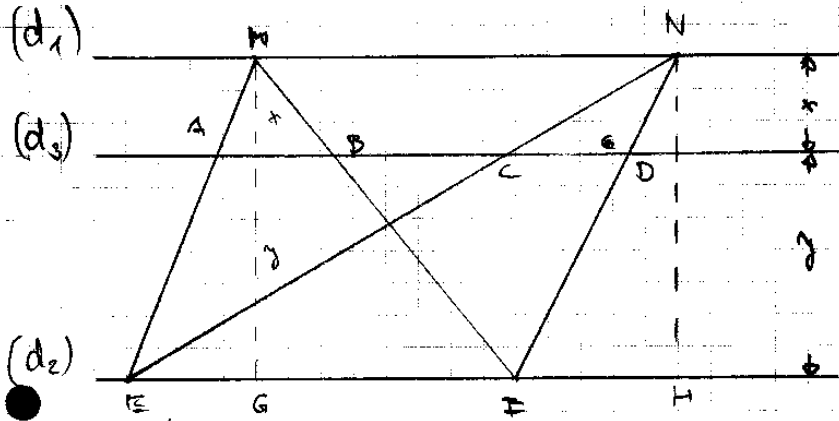
$$\Downarrow$$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{MF}{MB} \cdot \frac{NC}{NE} = \frac{1dm}{x} \cdot \frac{x}{1dm} = 1$$

29 → 21

Da das Verhältnis von CD zu AB gleich 1 ist, bedeutet das, dass die Strecken gleich lang sind. ✓

Aufgabe: 10



$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$

Anwendung des Strahlensatzes in

ΔEGH :

$$\text{I) } \frac{x}{x+y} = \frac{AM}{EM}$$

in ΔFHN :

$$\text{II) } \frac{x}{x+y} = \frac{DN}{FN}$$

in ΔEFH :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AM}{EM}$$

8

$$\frac{AB}{EF} = \frac{1}{x+y} \cdot AM \cdot EF$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{x}{x+y} \cdot EF$$

12

$$\frac{CD}{EF} = \frac{DN}{FN}$$

9

8

$$\frac{CD}{EF} = \frac{3}{x+y} \cdot EF$$

$$\frac{CD}{EF} = \frac{x}{x+y} \cdot EF$$

13

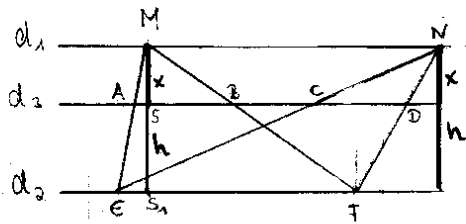
$$\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$$

17

18 19 20

+ Gleichung I verwendet
+ Gleichung II verwendet

Aufgabe 10 Geometrie beweglich ¹⁰⁻¹⁷



Behauptung:

$\overline{AB} = \overline{CD}$, unabhängig von x !

Beweis:

$$\overline{MA} : \overline{ME} = x : h \quad \wedge \quad \overline{MA} : \overline{ME} = \overline{AB} : \overline{EF}$$

$$\Rightarrow (1) \quad x : h = \overline{AB} : \overline{EF}$$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{x} \quad (2)$$

$$\bullet \quad \overline{NC} : \overline{NE} = x : h \quad \wedge \quad \overline{NC} : \overline{NE} = \overline{CD} : \overline{EF}$$

$$\Rightarrow (3) \quad x : h = \overline{CD} : \overline{EF}$$

$$(2) \quad \overline{EF} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{x} \quad \Rightarrow \quad x \cdot h = \overline{CD} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot h}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{x \cdot \overline{CD}}{h \cdot \overline{AB}}$$

$$1 = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{CD}}$$

qed. ✓

gesucht: $\overline{AB} = \overline{CD}$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$

1

weil d_3 alle Strecken, deren Endpunkte auf d_1 und d_2 liegen im gleichen Verhältnis (v) teilt.

2

Strecken teilt!

Also:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = v$$

3

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = v$$

4

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = v$$

5

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = v$$

6

Verhältnis =

(Streckensatz)

Terme gleichsetzen:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$$

2

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

3

regle

1/2

q.e.d.

après de donné

On a les inconnus:

- x : distance entre (d_1) et (d_3)
 - y : distance entre (d_3) et (d_2)
- avec le segment de distance $x+y$, perpendiculaire à (d_1) , (d_2) et (d_3) .

- Puisque (CD) et (EF) sont parallèles on peut utiliser le théorème de Thalès:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{CN}{NE} = \frac{DN}{FN} = \frac{x}{x+y}$$

- Puisque (AB) et (EF) sont parallèles on peut aussi utiliser le théorème de Thalès:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BM}{FM} = \frac{AM}{EM} = \frac{x}{x+y}$$

$$\text{donc } \frac{AB}{EF} = \frac{x}{x+y} = \frac{CD}{EF}$$

$$\text{donc } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$$

$$\text{donc } AB = CD$$

on multiplie les deux membres par EF.

✓

Copie 27

Dans le triangle EFN , d'après la relation de Thalès

$$\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF}$$

Dans le triangle EFM :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME}$$

Soit I le projeté orthogonal de N sur (EF) et J le projeté orthogonal de E sur (MN) (donc d'après Thalès) (dans MEI et FNJ)

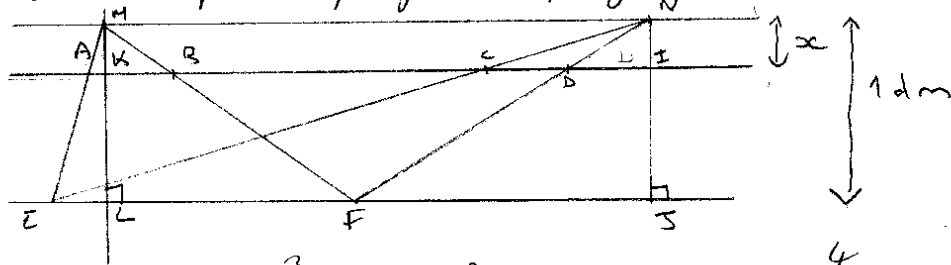
$$\frac{MA}{ME} = \frac{x}{10} \quad \text{et} \quad \frac{ND}{NF} = \frac{x}{10}$$

Donc \textcircled{A}

$$AB = CD$$

après ce donné

On trace les perpendiculaires à d_2 et d_3 passant par M et N.
 On obtient les points respectifs k, l, i, j) de M et N



D'après le théorème³ de Thalès dans le triangle MLE et MAK⁴,
 on a $\frac{MK}{ML} = \frac{MA}{ME}$ rapport des côtés

Dans les triangles MAB et NEF,
 on a $\frac{MA}{ME} = \frac{AB}{EF}$, or $\frac{MA}{ME} = \frac{MK}{ML}$, donc $\frac{MK}{ML} = \frac{AB}{EF} = \frac{x}{1}$ (3 obtenu à partir de (1) et (2))

Dans les triangles NID et NJF,
 on a $\frac{NI}{NJ} = \frac{ND}{NF}$

Dans les triangles NCD et NFE,
 on a $\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$, or $\frac{ND}{NF} = \frac{NI}{NJ}$, donc $\frac{CD}{EF} = \frac{NI}{NJ} = \frac{x}{1}$

on a $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} = \frac{x}{1}$, donc $AB = CD = x \times EF$ ✓

donc $AB = CD$ quelque soit la position de (d_3)

Contexte de p. 29

Soit les droites (AB) et (EF) sécantes en M telles que $(AB) \parallel (EF)$ (car $d_3 \parallel d_2$ et $A \in d_3$ et $B \in d_3$ et $E \in d_2$ et $F \in d_2$)

voir bonne
les
x k
x k/2
site 1
site positif

(D'après le théorème de Thalès):
 $\left(\frac{AB}{EF}\right)^2 = \frac{\text{Aire de } MAB}{\text{Aire de } MEF}$
 $ME \times AB$
 $MF \times EF$

Soit les droites (DF) et (CE) sécantes en N telles que $(CD) \parallel (EF)$ (car $d_3 \parallel d_2$ et $C \in d_3$ et $D \in d_3$ et $E \in d_2$ et $F \in d_2$)

(D'après le théorème de Thalès)
 $\left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \frac{\text{Aire de } NCD}{\text{Aire de } NEF}$

Soit oc la hauteur des triangles NDC et MAB et la distance entre d_1 et d_3

Calcul des aires:
 Aire de $NFE = \frac{\text{distance } d_1 d_2 \times EF}{2}$
 Aire de $MAB = \frac{oc \times AB}{2}$
 Aire de $NDC = \frac{oc \times DC}{2}$
 Aire de $MEF = \frac{\text{distance } d_1 d_2 \times EF}{2} = \frac{10EF}{2}$ (voir la page)

ajout de données

on note M' la projection orthogonale de M sur d_3
 M'' la projection orthogonale de M sur d_2
 N' la projection orthogonale de N sur d_3
 N'' la projection orthogonale de N sur d_2 ✓

d_3 et d_2 sont parallèles donc on applique le théorème de Thalès aux triangles $MM'A$ et $MM''E$:

$$\frac{MM'}{MM''} = \frac{MA}{ME} = \frac{AM'}{EM''} \quad \checkmark$$

De même pour les triangles $NN'D$ et $NN''F$:

$$\frac{NN'}{NN''} = \frac{ND}{NF} = \frac{DN'}{FN''} \quad \checkmark$$

Comme d_1 est parallèle à d_3 , on a $MM' = NN'$ et
 comme d_1 est parallèle à d_2 , on a $MM'' = NN''$

D'où:

$$\frac{MM'}{MM''} = \frac{NN'}{NN''} \quad \checkmark$$

D'où:

$$\frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF} \quad \checkmark$$

Comme d_3 est parallèle à d_2 , on applique le théorème de Thales aux triangles MAB et NEF :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} \quad \checkmark$$

De même pour les triangles NCD et NEF :

$$\frac{CD}{EF} = \frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} \quad \checkmark$$

$$\text{D'où } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$$

D'où $AB = CD$ quelque soit la position de d_3

$$A(MFE) \overset{1}{=} \frac{MH \times EF}{2} = \frac{1 \times EF}{2} = \frac{EF}{2}$$

$$A(NFE) \overset{2}{=} \frac{FH \times EF}{2} = \frac{1 \times EF}{2} = \frac{EF}{2}$$

~~2~~ ^{reformuler} donc les deux triangles ont la même aire, la même base et la même hauteur. ³

¹ ^{reformulation} le triangle NCD est une réduction de NEF à l'échelle $\frac{1}{\alpha}$. ⁴

le triangle HAS est une réduction de HEF à l'échelle $\frac{1}{\alpha}$. ⁵

$$\begin{aligned}
 A(NCD) &= A(NFE) \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 & 6 \\
 &= \frac{EF}{2} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{EF}{2\alpha^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\text{MBA}) &= \mathcal{A}(\text{MEF}) \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \quad 7 \\
 &= \frac{\text{EF}}{2} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{\text{EF}}{2\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Les triangles NCD et HAB ont la même hauteur α et la même aire, en l'occurrence, ils ont aussi la même base. CQFD.

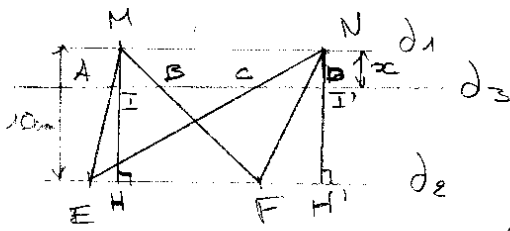
Tous démontrons ce problème sur les principes du théorème de Thalès.

(Soit h la distance entre (D_1) et (D_2) : $\frac{x}{h} = \alpha$
 D'après le théorème de Thalès : $\frac{NB}{NF} = \frac{x}{h} = \alpha = \frac{CD}{EF}$
 donc $CD = EF \times \alpha$
 De plus $\frac{TA}{TE} = \frac{x}{h} = \alpha$
 Et d'après le théorème de Thalès $\frac{AB}{EF} = \alpha$
 donc $AB = EF \times \alpha$
 Conclusion: $CD = \alpha \times EF$ et $AB = \alpha \times EF$
 donc $CD = AB$

ajouté dans ce

qui mériterait une explication

entra de plus



4
3
14
3
9

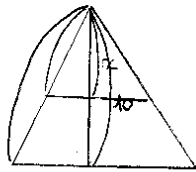
On sait que ¹ d_1 est parallèle à d_2 / donc la distance ² qui sépare le point M de la droite (EF) est la même que celle qui sépare N de (EF) / ces distances sont ³ les mesures des hauteurs de EFM et EFN / Les deux triangles ⁴ ayant la même base et des hauteurs égales, leurs aires sont égales. ou

- Les triangles ⁶ EFM et ⁷ ABM sont en situation de Thalès donc $\frac{AB}{EF} = \frac{MB}{MF}$
- De même pour les triangles ⁹ MHF et MIB donc $\frac{MI}{MH} = \frac{MB}{MF}$ donc $\frac{AB}{EF} = \frac{MI}{MH} = \frac{MB}{MF}$
- On peut ¹⁰ appliquer la même méthode pour EHF et NDC ; ¹³ NH'E et ¹⁴ NI'C : $\frac{NI'}{NH'} = \frac{CD}{EF}$
- ¹² Tous ses résultats nous montrent que $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$ d'où $AB = CD$ un peu rapide!

Il y a 4 fois Thalès.

Le triangle NFE : $\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$

Le triangle MEF : $\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$



$$\frac{NC}{NE} = \frac{MA}{ME} = \frac{\alpha}{10}$$

Donc $\frac{CD}{EF} = \frac{AB}{EF} \left(= \frac{\alpha}{10} \right)$

Donc $CD = AB$

Copie 35

On considère le triangle PEF

Puisque $(d_2) \parallel (d_3)$ on peut utiliser le théorème de Thalès

et donc on a : $\frac{PA}{PE} = \frac{PB}{PF} = \frac{AB}{EF}$

De même, on considère le triangle PEN.

Comme $(d_3) \parallel (d_1)$ d'après le théorème de Thalès

on a : $\frac{PA}{PE} = \frac{NC}{NE} = \frac{AC}{AN}$

→ erreur dans la

On considère aussi le triangle NEF

Puisque $(d_2) \parallel (d_3)$ on utilise le théorème de Thalès et on a :

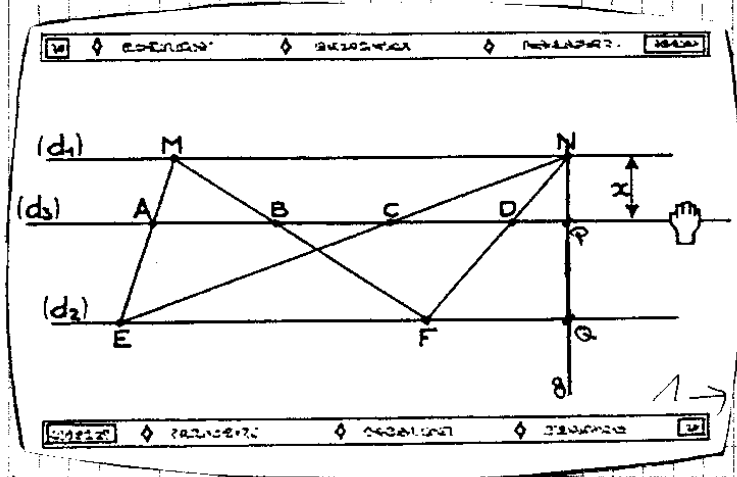
$$\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$$

erreur de pas

On constate que dans les triangles PEF et PEN on a $\frac{PA}{PE}$
de même dans les triangles NEF et NEF on a $\frac{NC}{NE}$
On peut donc dire que tous les quotients sont égaux et donc
 $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$ c'est à dire $AB = CD$
th. inégalité

réduction impossible

Zeige, dass die Strecken AB und CD wirklich gleich lang sind, in welcher Position zwischen den beiden anderen Geraden sich (d_3) auch befindet.



erhält die d-mitten

Wir fügen eine Orthogonale g zu d_1 bzw. d_2 durch N hinzu. Die Schnittpunkte von g mit d_3 bzw. d_2 bezeichnen wir mit P bzw. Q .

Anwendung des 1. Strahlensatzes: Es gilt:

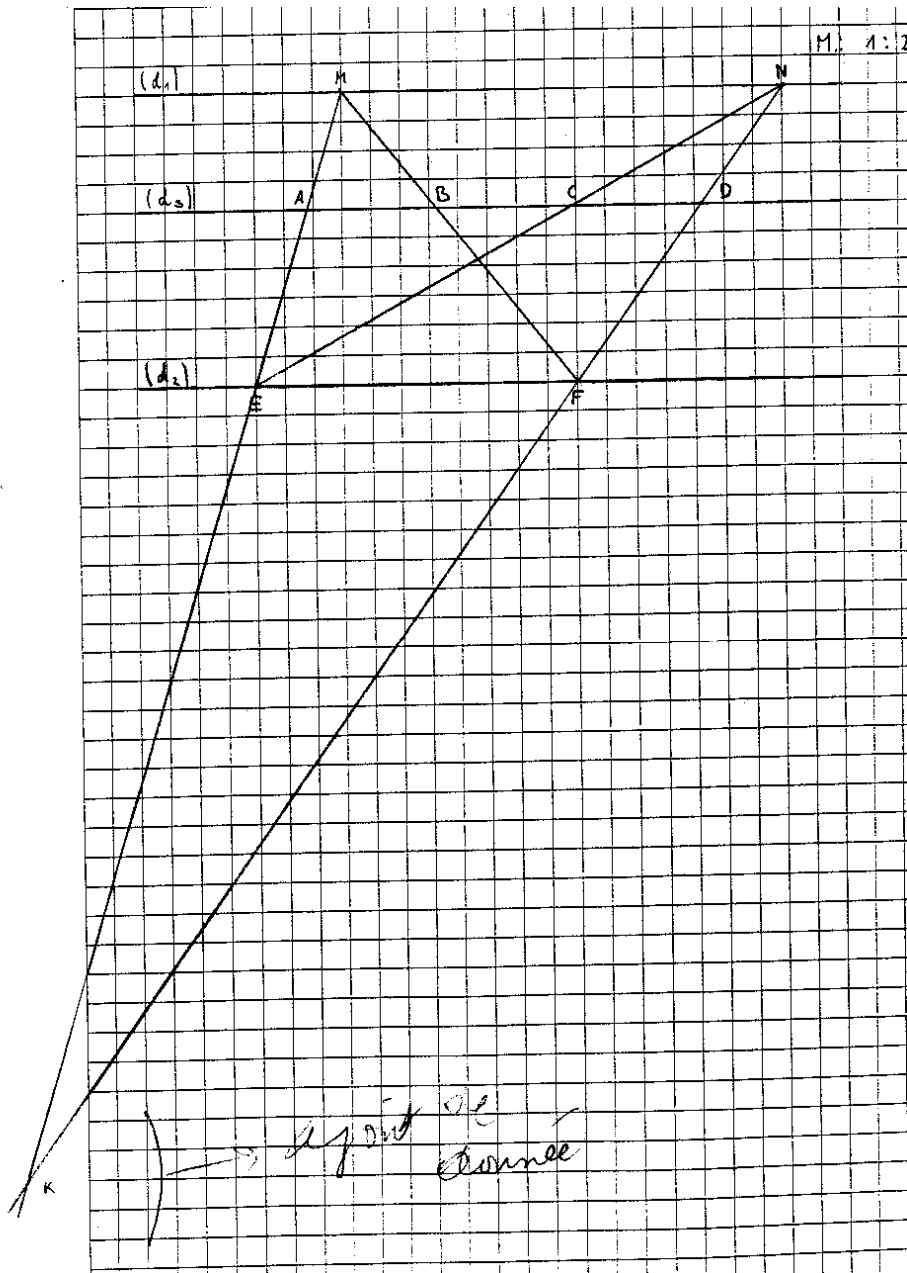
$$\frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} \Rightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{x}{10\text{cm}} \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{x}{10\text{cm}}$$

Anwendung des 2. Strahlensatzes:

$$\frac{x}{10\text{cm}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad \text{und} \quad \frac{x}{10\text{cm}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$$

durch Gleichungsumformung ergibt sich:

$$\overline{EF} \cdot \frac{x}{10\text{cm}} = \overline{AB} \quad \text{und} \quad \overline{EF} \cdot \frac{x}{10\text{cm}} = \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \quad (15 P)$$



Der Beweis lässt sich mit dem Strahlensatz durchführen. Da

$$\overline{MA} \ \& \ \overline{ME} \ \text{und} \ \overline{ND} \ \& \ \overline{NF}$$

jeweils Teile zweier gedachter Strahlen mit Mittelpunkt B sind, ergibt sich durch das

Strahlengesetz $\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$ ✓

Desweiteren folgt:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \ \& \ \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \ \text{und} \ \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \ . \ \checkmark$$

Wegen $\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$ ist auch

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \ . \ \text{Diesen Term}$$

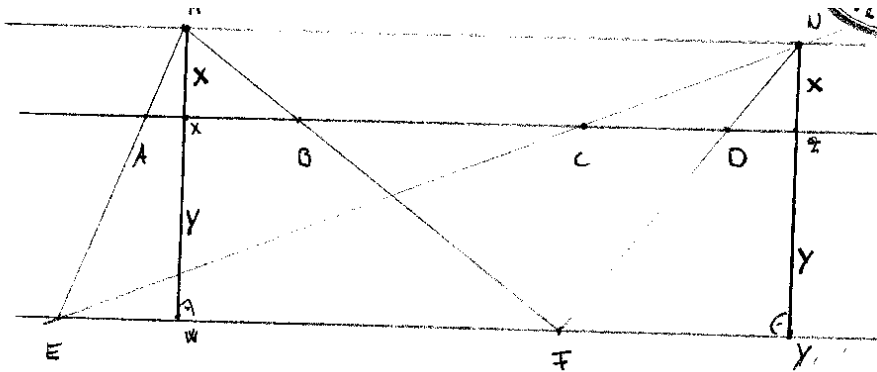
vereinfacht mit \overline{EF} multipliziert ergibt $\underline{\underline{\overline{AB} = \overline{CD}}}$ ✓

antice de pas

druck!
ajout de
omé

égle

15 Punkte



10. Aufgabe: Aus der Skizze ergibt sich folgende
Wegen Strahlensatz:

$$\frac{|ME|}{|MA|} = \frac{X+Y}{X} \quad \text{und} \quad \frac{|NF|}{|ND|} = \frac{X+Y}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{|ME|}{|MA|} = \frac{|NF|}{|ND|} \Rightarrow \frac{|MA|}{|ME|} = \frac{|ND|}{|NF|}$$

Aus der ursprünglichen Figur erfolgt:

$$\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|MA|}{|ME|} \quad \text{und} \quad \frac{|CD|}{|EF|} = \frac{|ND|}{|NF|}$$

$$1. |AB| = \frac{|MA|}{|ME|} \cdot |EF|$$

$$2. |CD| = \frac{|ND|}{|NF|} \cdot |EF|$$

Aus dem Unterstrichenen folgt, dass

$$\frac{|MA|}{|ME|} \cdot |EF| = \frac{|ND|}{|NF|} \cdot |EF|$$

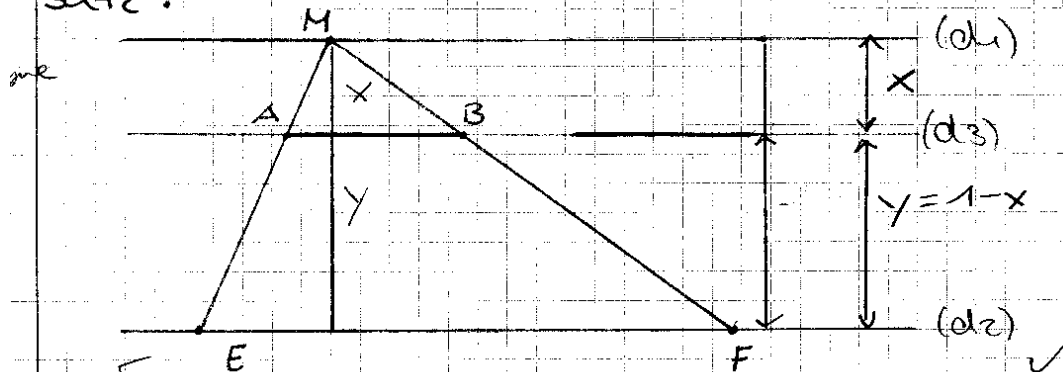
deshalb muss die Strecke AB gleichlang
Strecke CD sein. reformulieren

Beweise mit den Strahlensätzen:

Wird ein Zweistrahl von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich entsprechende Abschnitte auf den beiden Strahlen gleich.
(1. Strahlensatz) ✓

Wird ein Zweistrahl von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich entsprechende Abschnitte auf den beiden Parallelen gleich.
(2. Strahlensatz) ✓

Unser Beweis erfolgt über den 2. Strahlensatz:



Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

~~$$\frac{AB}{EF} = \frac{MB}{MF} \quad (1.)$$~~

$$\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} \quad (2.)$$

Man zeichne nun 2 Senkrechten zu den Parallelen durch die Punkte M und N, sodass man

(1. Strahlensatz):

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} \quad (1.)$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} \quad (2.)$$

Es folgt nun:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} \left[= \frac{x}{x+y} \right]$$

Daraus ergibt sich nun:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$$

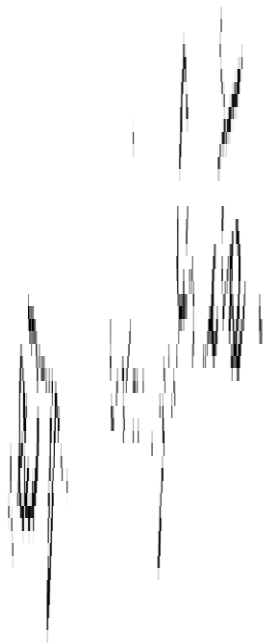
Also gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad | \cdot \overline{EF}$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad \text{q. e. d.}$$

Copie 40

|



Aufgabe 10

1. Strahlensatz zu:

$$\frac{1 \text{ dm} - x}{x} = \frac{FD}{DM} = \frac{EC}{CN} = \frac{AE}{AM} = \frac{BF}{MB} \checkmark$$

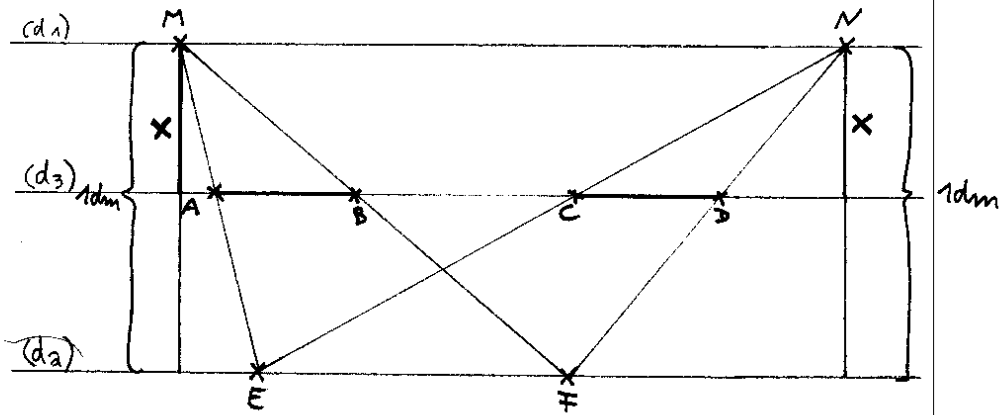
2. Strahlensatz
 da EF konstant ist und die Verhältnisse $\frac{EF}{AB}$ und $\frac{EF}{CD}$ bei jeder Verschiebung von E zueinander gleich bleiben sind, folglich auch AB u. CD gleich lang (\checkmark)

3. $\frac{EF}{AB}$ und $\frac{EF}{CD}$ zueinander gleich
 da EF konstant ist und die Verhältnisse $\frac{EF}{AB}$ und $\frac{EF}{CD}$ bei jeder Verschiebung von E zueinander gleich bleiben sind, folglich auch AB u. CD gleich lang (\checkmark)

12 Punkte

2
 1
 2
 2
 4
 2
 8

1



Strahlensatz: 2

$$\text{I} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$$

$$\overline{ME} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{MA}}{\overline{AB}} \quad (1)$$

$$\text{II} \quad \frac{x}{1\text{dm}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$$

$$\overline{ME} = \frac{\overline{MA} \cdot 1\text{dm}}{x} \quad (2)$$

reife

$$\text{I} = \text{II}: \quad \frac{\overline{EF} \cdot \overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MA} \cdot 1\text{dm}}{x}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{EF} \cdot x}{1\text{dm}} \quad (3)$$

$$\text{III} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$

$$\overline{NF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{ND}}{\overline{CD}} \quad (4)$$

$$\text{IV} \quad \frac{x}{1\text{dm}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$

$$\overline{NF} = \frac{\overline{ND} \cdot 1\text{dm}}{x} \quad (5)$$

reife

$$\text{III} = \text{IV}: \quad \frac{\overline{EF} \cdot \overline{ND}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ND} \cdot 1\text{dm}}{x}$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{EF} \cdot x}{1\text{dm}} \quad (6)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad \text{q.e.d.}$$

15 Dec

Aufgabe 10

Der Strahlensatz ¹ besagt, daß ² im $\triangle MEF$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \quad \checkmark$$

sowie im $\triangle NEF$ ⁴

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad \checkmark$$

Da durch die Parallelität von d_1, d_2, d_3 ⁶

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} \quad \text{zusammen!} \quad \text{muss auch} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \quad \text{sein.} \quad \checkmark$$

(Und da \overline{EF} konstant ist) ⁸ folgt daraus ⁷ $\overline{AB} = \overline{CD}$ ⁹

Wp

M
K

3
2
3
2

Copie 50

Données: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$

d_1 et d_2 sont distants de J dm = α

Dans le triangle NEF , la propriété de Thalès s'écrit:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{NA}{NE}$$

donc $EF = \frac{AB \times NE}{NA}$

Dans le triangle NEF , la propriété de Thalès s'écrit:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF}$$

donc $EF = \frac{CD \times NF}{ND}$

EF est commun aux 2 triangles donc

$$\frac{AB \times NE}{NA} = \frac{CD \times NF}{ND}$$

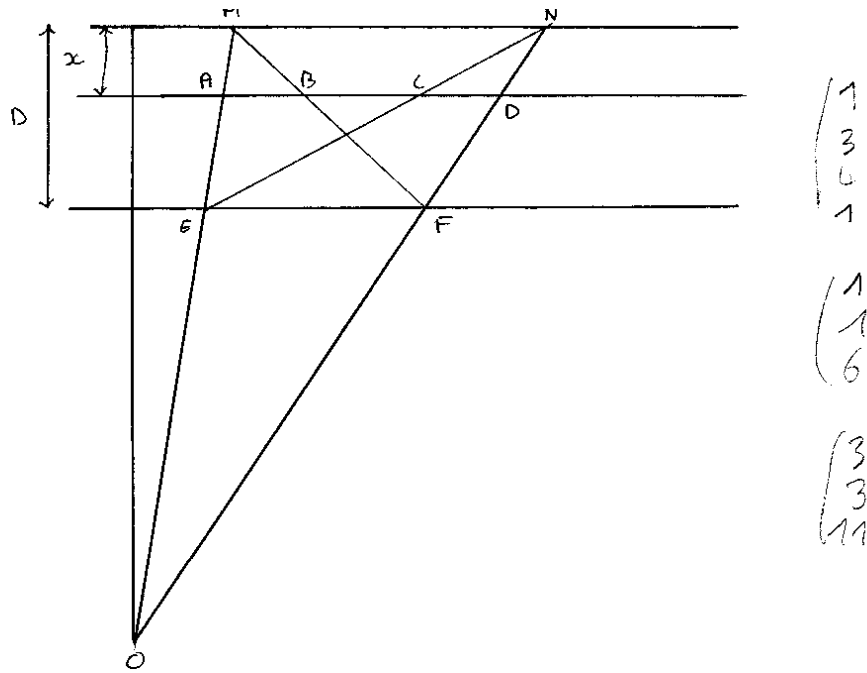
$$\frac{AB \times J}{\alpha} = \frac{CD \times J}{\alpha} \quad AB = \frac{CD \times \alpha}{\alpha \times 1} \times \alpha$$

Donc $AB = CD$ quelque soit α donc quelque soit la position de d_3 .

feuille	2
de	7
	2
	6
de	7
	5
	18

$$\frac{NE}{NA} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{NF}{ND} = \frac{1}{\alpha}$$

Copie 56



D'après le théorème de Thalès, si deux triangles sont $2 \hat{=} 2$, alors

$$\frac{MA}{ME} = \frac{x}{D} \text{ et } \frac{ND}{NF} = \frac{x}{D}.$$

Donc $\frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF} = \frac{x}{D}$.

Par le même raisonnement, $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$, donc $AB = CD$, qu'importe la droite d_3 .

Copie 68

$d_1 \parallel d_2$: j'utilise la propriété de Thalès :

$$\frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF}$$

$d_1 \parallel d_3$: j'utilise la propriété de Thalès :

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF} \quad \checkmark$$

$$\text{et } \frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF} \quad \checkmark$$

Sachant que $\frac{MA}{ME} = \frac{ND}{NF}$ et que $\frac{MA}{ME} = \frac{AB}{EF}$ et $\frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$: $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} \quad (1)$$

$$AB = CD \quad (2)$$

Ainsi, quel que soit x , $AB = CD$

RESUME

Pour étudier la démonstration nous adaptons le cadre théorique de Toulmin, sur les arguments de plausibilité et de nécessité, à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard. Les validations de l'enseignement des mathématiques sont la double transposition des démonstrations de l'institution mathématique (qui produit le savoir) et des validations, argumentations ou preuves, d'autres institutions (comme la « vie quotidienne »). L'étude diachronique des programmes du collège-lycée en France, et du Gymnasium en Bade-Württemberg, confirmée par l'étude de manuels, montre que la démonstration est devenue explicitement un objet à enseigner, contrairement aux cas des Hauptschule et Realschule. Ces programmes recommandent l'usage de différents types de validation (argumentation, preuve) et d'arguments (pragmatiques, sémantiques, syntaxiques) suivant leurs fonctions et les moments ; on retrouve dans des leçons sur la démonstration l'influence des fonctions de la validation dans les différents genres de tâche (découvrir, contrôler, changer de registres, ...). Malgré les difficultés linguistiques, institutionnelles et culturelles liées à la comparaison, l'examen des validations de théorèmes de cours dans les manuels et de démonstrations produites par des élèves montre des similitudes quant à la cohabitation des différents types d'arguments et différentes fonctions de la validation. On observe des différences sur les types de technologie ou de technique mis en œuvre et sur le poids donné aux types d'arguments et aux registres utilisés, avec une explication liée aux conditions institutionnelles (moment considéré, contrat, fonction privilégiée, organisation de l'enseignement ...)

1696 caractères

For the study of the proof we adapt Toulmin's theoretical frame on arguments of plausibility and arguments of necessity to Chevallard's anthropological theory of didactics. The validations of mathematic teaching are the double transposition of proofs from the mathematical institution (producing the knowledge) and validations (argumentations and proofs) from other institutions (like the "daily life"). The diachronic study of curricula of French 'collège-lycée' and of German Gymnasium (in Baden-Württemberg), confirmed by the study of textbooks shows that proof is explicitly taught as opposed to the cases of Realschule and Hauptschule. These curricula advise the use of different types of validation (argumentation, proof) and arguments (pragmatic, semantic, syntactic) depending on the functions and when they are introduced. The influence of the functions of validation on the different types of tasks (discovering, controlling, changing registers, ...) are also observed in lessons on proof. In spite of linguistic, institutional, and cultural difficulties in comparing France and Germany, the study of validations, of class theorems in textbooks, and of proofs produced by students, shows similarities about combining different types of arguments as well as different types of functions. Differences are observed on the types of technology and technique involved in the validation and on the weight given to different types of arguments and registers used, with an explanation related to the institutional conditions (moment of introduction, didactical contract, function, educational system, ...).

TITRE:

DEMONSTRATION, RAISONNEMENT ET VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES MATHÉMATIQUES EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE

Proof, reasoning and validation in mathematical teaching of French and German secondary schools.

MOTS CLES

Transposition, - théorie anthropologique du didactique - collège – lycée – Gymnasium - enseignement secondaire des mathématiques - manuels scolaires – France - Allemagne - franco-allemand - programme scolaire – curriculum – démonstration – preuve – argumentation - raisonnement - validation - productions d'élèves dans compétition