



Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation. Importance de l'aspect ondulatoire

Nathanaël Schaeffer

► To cite this version:

Nathanaël Schaeffer. Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation. Importance de l'aspect ondulatoire. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00009743v1

HAL Id: tel-00009743

<https://theses.hal.science/tel-00009743v1>

Submitted on 6 Aug 2005 (v1), last revised 18 Oct 2005 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE**

Thèse

présentée par

Nathanaël SCHAEFFER

le 10 décembre 2004

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier

spécialité : **Géophysique**

Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation rapide

importance de l'aspect ondulatoire

Composition du jury :

Emmanuel DORMY	Institut de Physique du Globe de Paris	Rapporteur
Annick POUQUET	National Center for Atmospheric Research (Boulder, USA)	Rapporteur
Bérengère DUBRULLE	Centre d'Études Atomiques de Saclay	Examineur
Peter READ	University of Cambridge (Grande Bretagne)	Examineur
Michel CAMPILLO	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Examineur
Philippe CARDIN	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Directeur de thèse

Abstract

Instabilities, turbulence and dynamo action in a rapidly rotating sheared fluid layer.

By averaging the Navier-Stokes equation along the rotation axis, we developed an enhanced Quasi-Geostrophic (QG) model that is able to handle barotropic rotating fluid flows in an axisymmetric container with finite slopes. This QG-model is used to study the instabilities of a shear layer known as the Stewartson layer. We show that the slope is the key parameter to determine the stability threshold. For a flat container, the instability is not much different from a non-rotating shear layer instability. However, when there is a depth-variation, the instability is a Rossby-wave and as a result, the spatial structure as well as the stability threshold depends on the sign of the shear.

In addition to the bulk viscous term, a realistic Ekman friction derived from Greenspan's formula is implemented in our QG-model. This allows us to obtain highly turbulent flows (Reynolds numbers up to $2 \cdot 10^6$) with realistic dissipation at all scales, for a rapidly rotating fluid. We observe some interesting properties of the QG-turbulence generated by a highly unstable Stewartson shear layer. At very large Reynolds number, but with the Coriolis force still dominating ($Ro \ll 1$), the kinetic energy spectrum exhibits an inertial range with a k^{-5} law. This corresponds to the equilibrium of Rossby-waves and turbulence proposed by Rhines in 1975. In addition, when increasing the forcing, time-dependent and chaotic behaviors are observed, and for even stronger forcing a very steady regime sometimes takes place with very large, long-living eddies.

The previous flows produced by the destabilization of a Stewartson shear layer are used as input for a kinematic dynamo study, at moderate to very low magnetic Prandtl numbers (Pm). The main findings are that such flows are actually dynamos, which are quite easy to start; the dynamo action seems to extend to arbitrary low Pm, with a roughly constant critical magnetic Reynolds number (Rm). We obtained a dynamo with parameters much closer to the Earth regime than ever before ($Ek = 10^{-8}$, $Pm = 0.003$, $Re = 2 \cdot 10^6$, $Ro = 0.02$). The quadrupolar threshold is somewhat lower than the dipolar threshold, and many dipolar dynamos exhibit periodic reversals. The induction mechanisms involved are identified and developed, showing the importance of the wave-type motion for the dynamo action whereas the Ekman pumping has no inductive role at such small Ekman numbers.

Finally, we tried to implement the Lorentz force back reaction in the dynamo code. This is not straightforward because the Lorentz force may break the quasi-geostrophy (invariance along the rotation axis) of the flow, required by our QG-model. In addition, we found that the Rossby-wave nature of our turbulent flows does not allow us to use a diffusive approximation at small scales. Fortunately, the very steep kinetic energy spectrum of the turbulence ensures that only the largest scales of the flow are important for magnetic field generation. However when ignoring the induction at small scales, the ohmic dissipation is underestimated and as a result the magnetic energy is overestimated, so that there is still much to be investigated concerning the saturation processes.

Résumé

Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation.

Nous développons un modèle quasi-géostrophique (QG) amélioré en moyennant l'équation de Navier-Stokes le long de l'axe de rotation. Il permet de modéliser des fluides barotropes en rotation rapide dans un récipient axisymétrique de pente finie. Ce modèle QG est utilisé pour étudier les instabilités d'une couche de cisaillement (couche de Stewartson). Nous montrons que la pente est le paramètre clé de l'instabilité, qui prend la forme d'ondes de Rossby.

En plus de la viscosité, nous avons implémenté une friction d'Ekman réaliste (à partir de la formule de Greenspan) à notre modèle QG. Ceci nous permet d'atteindre des régimes d'écoulement tournants très turbulents, avec une dissipation réaliste à toutes les échelles. Nous observons des spectres très raides (loi puissance -5, correspondant à la turbulence d'ondes de Rossby) et des régimes stationnaires.

Ces écoulements sont des dynamos qui sont relativement faciles à démarrer, pour des nombres de Prandtl magnétiques (Pm) modérés à très faibles. l'action dynamo semble s'étendre pour Pm arbitrairement petit, avec un nombre de Reynolds magnétique critique (Rm) approximativement constant. L'aspect ondulatoire de l'écoulement est ici indispensable pour obtenir une dynamo.

Enfin, nous essayons d'ajouter la force de Laplace à notre modèle de dynamo QG. Nous trouvons que la nature ondulatoire de l'écoulement turbulent ne permet pas d'utiliser une approximation diffusive aux petites échelles.

Remerciements

Mes remerciements vont avant tout à l'équipe géodynamo : Henri-Claude, Philippe, Dominique, Daniel, Jean-Paul et Nicolas au tout début, puis Bérangère et Gédéon, et enfin Thierry, Denys, Alex et Céline. C'est cette équipe qui m'a permis de réaliser ma thèse dans de bonnes conditions de travail, en étant bien encadré et écouté tout en restant largement libre dans mes choix. Je remercie en particulier Philippe Cardin pour sa bonne humeur et sa patience envers moi. J'ai pu avoir des discussions scientifiques enrichissantes avec tous, lors des réunions d'équipe, à la cafet' ou bien dans les bureaux. Ce que j'ai également fort apprécié dans cette équipe c'est les nombreux encouragements à participer aux congrès et autres GDR ; participations qui souvent m'ont encouragé, ont amené de l'eau à mon moulin, et ont nourrit mes réflexions.

Je tiens aussi à saluer le travail de Catherine, responsable de l'informatique du labo, pour s'être toujours démenée à trouver rapidement la solution aux problèmes qui ne manquaient pas d'arriver.

Les autres thésards du labo ne sont pas étrangers au caractère agréable de mon séjour au labo, avec une mention spéciale à Muriel, Martin, Clarisse et Olivier pour m'avoir chaleureusement accueillis à mon arrivée. C'est aussi à Martin que je dois mon initiation au surf-alpinisme, qui a ensuite occupé la quasi-totalité de mes loisirs. C'est donc le bon moment pour remercier Eric, pour les nombreuses "réunions au sommet" et les riches discussions scientifiques.

Je voudrais aussi remercier :

- Raul Avalos pour la tequila du Mexique, et pour m'avoir remercié dans sa thèse ;-)
- Franck Plunian pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux et les discussions qui en découlèrent.
- Le BLMS pour avoir étendu l'univers des possibles.
- Jean pour les discussions plus spirituelles.
- JJ et Vu Hung mes éternels colloqs. Ils ont été bien patients envers moi, notamment pour la vaisselle :-/
- Bérangère, Jérôme, François, Cat, David, Muriel, Martin, Eric, JJ, et mes autres compagnons d'aventures montagnardes, pour tous ces moments uniques passés dans un environnement fabuleux.
- Nourdine, Anne, JB, Joelle, Guillaume et IOll pour ces bons moments passés entre amis.
- Bérangère encore, pour tout ce qu'elle a pu me donner, sans toujours s'en rendre compte.
- Ma famille pour toute l'éducation et l'amour qu'elle a su m'offrir et m'offre toujours.
- Dieu, pour tout ce qu'Il m'a donné dans cette vie, et pour Son amour et Son soutien sans failles.

Table des matières

Abstract	3
Résumé	4
1 Introduction	17
1.1 Objet et motivations	17
1.2 Mécanique des fluides incompressibles en rotation	19
1.2.1 Les équations	19
1.2.2 La contrainte de Proudman-Taylor	20
1.2.3 Les couches d'Ekman	21
1.2.4 Les ondes inertielles	22
1.2.5 La turbulence	22
1.3 Magnétohydrodynamique	23
1.3.1 Électrodynamique classique	23
1.3.2 Les métaux et la force de Laplace	23
1.3.3 L'approximation MHD	25
1.3.4 Équations sans dimensions	25
1.4 Observations	27
1.4.1 La structure de la Terre	27
1.4.2 Le champ magnétique terrestre	28
1.4.3 Le noyau de la Terre et la géodynamo	28
1.4.4 L'atmosphère	32
1.4.5 Les autres planètes	34
1.4.6 Et le Soleil	35
2 Le modèle Quasi-Géostrophique (QG)	37
2.1 Moyenne le long de l'axe de rotation	37
2.2 Champ scalaire	39
2.3 Ondes de Rossby	40
2.4 Écoulement axisymétrique	40
2.5 Résumé et discussion	41
3 Instabilités de cisaillement	43
3.1 La couche de Stewartson	43
3.1.1 Généralités	44

3.1.2	Les géométries modélisées	46
3.2	Résumé de l'article	48
3.2.1	“Abstract”	48
3.2.2	Plan de l'article	49
3.3	Article	51
3.3.1	abstract	51
3.3.2	Introduction	51
3.3.3	Quasi-geostrophic model	54
3.3.4	Stewartson layers	58
3.3.5	Spatial structure at the onset	60
3.3.6	Asymptotic laws for the onset	63
3.3.7	Comparison with experiments	69
3.3.8	Conclusion and Discussion	73
3.3.9	A simple model for the radial scaling	74
3.3.10	Stability threshold data	77
3.4	Les instabilités de la couche de Stewartson	79
3.5	Étude expérimentale	81
3.5.1	Seuils d'instabilité	81
3.5.2	Mesures Doppler	81
4	Vers la turbulence QG	83
4.1	Turbulence, bidimensionalité et rotation	83
4.2	Résultats numériques	84
4.2.1	Saturation	85
4.2.2	Évolution de la couche de Stewartson	85
4.2.3	Images	87
4.2.4	Bifurcations	88
4.2.5	Régime “Tache Rouge”	89
4.2.6	Spectres	89
4.2.7	Une turbulence d'ondes de Rossby ?	93
4.2.8	Dissipation	95
4.3	Résumé et discussion	96
5	Instabilité Magnétique : L'effet dynamo	99
5.1	Le concept de dynamo hybride	99
5.1.1	Séparation d'échelle	100
5.1.2	Dipôles et quadripôles	101
5.1.3	Implémentation numérique	101
5.1.4	Séparation d'échelle en pratique	102
5.2	Résumé de l'article	103
5.2.1	“Abstract”	103
5.2.2	Le seuil dynamo	104
5.2.3	Dynamos oscillantes	104

5.3	Article	105
5.3.1	abstract	105
5.3.2	Introduction	105
5.3.3	The equations	106
5.3.4	Hydrodynamics	108
5.3.5	Dynamo action	109
5.3.6	Oscillating solution	113
5.3.7	Conclusion	115
5.4	Inversions	117
5.4.1	Période des inversions	117
5.4.2	Taux de croissance	117
5.4.3	Modèle d'inversion cinématique	118
5.5	Mécanismes	119
5.5.1	Pompage d'Ekman et ondes de Rossby	119
5.5.2	Modèle simplifié	122
5.6	Résumé et discussion	126
6	L'influence du champ magnétique	129
6.1	Avec la force de Laplace : QG-MHD	129
6.1.1	Prise en compte de la force de Laplace	130
6.1.2	Effet des petites échelles du champ magnétique	130
6.1.3	Saturation	131
6.2	Influence d'un champ magnétique imposé	132
6.2.1	Écoulement axisymétrique	132
6.2.2	L'effet de la force de Laplace aux grandes échelles	136
6.2.3	L'effet de la force de Laplace aux petites échelles	136
6.3	Régime dynamo	138
6.3.1	Dépendance avec la troncature	138
6.3.2	Énergie et dissipation	139
6.3.3	Force de Laplace aux petites échelles	142
6.3.4	Inversions	142
6.3.5	Force de Laplace	146
6.4	Résumé et discussion	148
7	Conclusion	149
A	Observations expérimentales	151
A.1	Dispositif expérimental	151
A.2	"Album of rotating shear flow instabilities"	152
A.2.1	Disques	152
A.2.2	Coquille sphérique	153
A.3	Profils de vitesse	156
A.3.1	Simulation numérique	159

B	Le code numérique	161
B.1	Partie hydrodynamique	162
B.1.1	Écoulement de base axisymétrique	162
B.1.2	Seuil d'instabilité	162
B.1.3	Conditions limites	163
B.1.4	Code non-linéaire	164
B.1.5	Grille radiale	165
B.1.6	Géométrie sphérique	165
B.1.7	Grandeurs de sortie	166
B.2	Partie magnétique	168
B.2.1	Décomposition poloïdal/toroïdal	168
B.2.2	Conditions limites	169
B.2.3	Grandeurs de sortie	170
B.3	Partie hybride	171
B.3.1	Note sur les transformées de Fourier	171
B.3.2	Extrapolation du champ de vitesse	171
B.3.3	Force de Laplace	171
C	Quelques calculs	175
C.1	Moyenne verticale	175
C.1.1	Définition	175
C.1.2	Dérivée en z	175
C.1.3	Dérivée en r	176
C.2	Pompage d'Ekman dans une sphère	177
C.2.1	Système de coordonnées sphérique	177
C.2.2	Application à l'écoulement quasi-géostrophique	178
C.2.3	Validité	180
C.3	A propos de vorticité potentielle	180
C.4	Lignes de champ magnétique	181
C.5	Force de Laplace en régime diffusif	182

Table des figures

1.1	Une coupe de la terre montrant les différentes couches.	27
1.2	Champ magnétique de la Terre.	29
1.3	Polarité du champ magnétique de la Terre au cours de l'histoire.	30
1.4	La terre vue de l'espace.	32
1.5	Sillage de vortex produit par une île.	33
1.6	Jupiter et ses aurores boréales.	34
1.7	Champ magnétique du soleil observé par SOHO.	35
1.8	Diagramme papillon des taches solaires.	36
1.9	Moyenne longitudinale du champ magnétique du soleil.	36
3.1	La couche de Stewartson et l'écoulement associé, pour $\Delta\Omega > 0$	44
3.2	Les dispositifs expérimentaux de Fröh & Read (1999) à gauche, et de Niino & Misawa (1984) à droite.	46
3.3	Les profils de base des couches de Stewartson des différentes géométries considérées.	47
3.4	Couche de Stewartson dans le cas d'une coquille sphérique.	47
3.5	Profils de base QG obtenus avec une graine	48
3.6	La géométrie <i>split-sphere</i>	49
3.7	Ro_c vs E avec une graine	53
3.8	La couche de Stewartson et l'écoulement associé	58
3.9	Schéma des systèmes étudiés : <i>split-sphere</i> et graine	59
3.10	Écoulement de base et son évolution avec E	60
3.11	Modes propres hydro au seuil pour différentes géométries	61
3.12	Mécanisme d'instabilité pour $\beta \neq 0$	61
3.13	Profil de vortacité au seuil pour $Ro > 0$	62
3.14	Évolution de la taille radiale du mode instable	63
3.15	Écoulement de base et ses dérivées	65
3.16	Résultat QG pour le seuil d'instabilité hydro dans une sphère	67
3.17	Seuils hydro pour différentes géométries	68
3.18	Comparaison du code QG avec des calculs 3D	70
3.19	Schéma du montage expérimental	71
3.20	Visu des instabilités : graine et disques	72
3.21	Comparaison experimental/QG pour le seuil d'instabilité hydro (graine et disques)	72

3.22	Premier mode instable pour une couche de Stewartson à $Ek = 10^{-6}$ dans une sphère.	79
3.23	Ondulations du seuil d'instabilité due à la nature discrète du nombre d'onde (géométrie <i>split-sphere</i>)	80
4.1	Energies en fonction de Rossby pour des écoulements loin du seuil.	86
4.2	Évolution de la couche de Stewartson avec Ro	86
4.3	Carte de vorticité des régimes turbulents	88
4.4	Vue de Jupiter montrant la grande tache rouge.	89
4.5	Régime "tache rouge"	90
4.6	Spectres d'énergie instantanés pour différents paramètres.	90
4.7	Spectres azimutaux turbulents instantanés et moyens, pour $Ek = 10^{-8}$, $Ro = \pm 0.02$	91
4.8	Densité spectrale d'énergie en fonction du rayon.	92
4.9	Spectres temporels d'énergie cinétique moyennés pour $Ek = 10^{-8}$ et $Ro = -0.02$	93
4.10	Second moment des vitesses en fonction du rayon, montrant l'anisotropie de la turbulence.	94
4.11	Résumé de la turbulence observée.	97
5.1	Effet de la séparation d'échelle numérique sur le seuil dynamo.	103
5.2	Géométrie split-sphere	107
5.3	Cartes de vorticité au seuil et en régime turbulent, pour Ro positif et négatif.	109
5.4	Spectres d'énergie cinétique et magnétique d'une dynamo cinématique	110
5.5	Seuil dynamo : Pm_c vs Re	111
5.6	Champs magnétiques obtenus dans les dynamos cinématiques.	112
5.7	Nombre dynamo Dy^c pour le seuil d'action dynamo	112
5.8	Détail d'une inversion de champ magnétique, pour $E = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$, $Pm = 0.1$	114
5.9	Taux de croissance dynamo d'un modèle à 2 modes	118
5.10	Les 3 comportements dans le modèle à 2 modes	119
5.11	Taux de croissance dynamo : influence du pompage d'Ekman	121
6.1	Le champ de vorticité tiré de Olson <i>et al.</i> (1999). On distingue bien la structure en colonnes de l'écoulement. On a $Ro \sim 10^{-2}$ et $\Lambda \sim 1$	131
6.2	Le champ magnétique imposé.	132
6.3	Force de Laplace axisymétrique dans le modèle <i>lss</i>	133
6.4	Cartes de vorticité en présence d'un champ magnétique imposé à $Rm < 1$	134
6.5	Comparaison des spectres en présence d'un champ magnétique imposé.	135
6.6	Spectres moyennés en présence d'un champ magnétique imposé à $Rm < 1$	135
6.7	Effet de la troncature sur les dynamos saturées	139
6.8	Effet de la troncature sur les dynamos saturées.	140
6.9	Spectres moyennés pour la dynamo saturée $D8_l$ ($Ek = 10^{-8}$, $Ro = -0.02$, $Pm = 0.005$).	142
6.10	Inversions pour des dynamos saturées, dipôle et quadrupole.	143
6.11	énergies magnétique et cinétiques pour l'inversion du dipôle	143

6.12	Inversion quadrupolaire saturée, champs magnétique et vorticité	144
6.13	Inversion dipolaire saturée, champs magnétique et vorticité	145
6.14	Force de Laplace axisymétrique	146
6.15	Composante verticale du rotationnel de la force de Laplace	147
6.16	Coupes méridiennes de la force de Laplace	147
A.1	Schéma du montage expérimental	151
A.2	Profils doppler : pompage pour les disques	156
A.3	Profils doppler : disques	157
A.4	Profils doppler : sphère	158
A.5	Profils dopplers numériques : disques	159

Liste des tableaux

1.1	Propriétés physiques du noyau terrestre	31
3.1	Comparaison du seuil obtenu experimentalement par Früh & Read (1999) et nos résultats numériques	69
3.2	Comparaison du seuil obtenu experimentalement par Niino & Misawa (1984) et nos résultats numériques	69
3.3	Seuil d'instabilité en géométrie <i>split-sphere</i>	77
3.4	Influence des conditions limites et de la viscosité en volume sur le seuil d'instabilité.	78
3.5	Seuil d'instabilité expérimental pour la géométrie <i>spherical-shell</i>	78
3.6	Seuil d'instabilité expérimental pour la géométrie <i>disques</i>	78
4.1	Paramètres des calculs de turbulence	85
4.2	Largeur des couches de cisaillement	87
4.3	Vitesse de phase du mode dominant dans les calculs de turbulence.	94
4.4	Énergies et dissipations pour les calculs de turbulence.	96
5.1	Seuil de l'instabilité magnétique (dynamo) pour des paramètres variés.	113
5.2	Évolution de la période des inversions avec Pm.	117
5.3	Seuil dynamo : Rm_{th} pour des paramètres variés.	126
6.1	Influence d'un champ magnétique imposé sur l'écoulement	133
6.2	Liste des calculs de dynamos saturées.	138
6.3	Résultats des calculs de dynamo saturées	141

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objet et motivations

La motivation de cette thèse était d'étudier les mécanismes fondamentaux de la dynamo terrestre par une approche expérimentale et numérique. Un programme ambitieux qui devait se terminer par l'exploitation des premiers résultats de l'expérience DTS (*Derviche Tourneur Sodium*, voir [Cardin et al., 2002](#)). Cette expérience au sodium liquide utilise la déstabilisation d'une couche de cisaillement produite par une rotation différentielle entre une enveloppe sphérique externe et une graine aimantée, reproduisant la géométrie du noyau terrestre.

Pour préparer cette expérience, nous avons d'abord étudié expérimentalement les instabilités de la couche de Stewartson, dans un montage similaire à DTS mais avec de l'eau. Les résultats de cette étude sont rapportés au chapitre 3 et ont fait l'objet d'un article [Schaeffer & Cardin \(2005b\)](#).

D'une part la mise en route de l'expérience DTS étant sans cesse retardée, et d'autre part le travail exploratoire visant à construire un modèle numérique de dynamo en rotation rapide étant très encourageant, nous avons rapidement changé notre fusil d'épaule. D'ailleurs à l'heure où j'écris ces lignes, DTS ne tourne toujours pas.

Nous avons construit et amélioré un modèle quasi-géostrophique pour étudier les écoulements de Couette sphériques et géostrophiques, et qui est décrit au chapitre 2. Le code numérique qui en découle (voir annexe B) a permis d'atteindre des régimes d'écoulements fortement non-linéaires, que nous étudions au chapitre 4.

Et c'est grâce à ces écoulements turbulents, couplés à un code d'induction magnétique que nous avons obtenu des dynamos à des régimes jamais atteints avec des codes numériques 3D complets. Ces résultats sont en bonne voie d'être publiés ([Schaeffer & Cardin, 2005a](#)). Les mécanismes de ces nouvelles dynamos, ne sont pas du tout ceux qui étaient attendus, et sont détaillés au chapitre 5.

Des calculs de dynamos saturées ont occupé beaucoup de temps processeur sur les machines de l'Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble, sur le *cluster* du LGIT, et sur les super-calculateurs de l'IDRIS, le centre de calcul du CNRS. L'objectif était

d'étudier le régime d'équilibre de ces dynamos, mais la tâche n'est pas facile car l'influence du champ magnétique 3D sur un écoulement quasi-géostrophique n'est pas facile à prendre en compte. Nous discutons de tout cela au chapitre 6.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons rappeler les notions indispensables à l'étude de la dynamique des fluides en rotation rapide. Nous verrons aussi comment champ magnétique et écoulement de fluide conducteur interagissent. Et comme c'est une thèse de géophysique, la motivation en filigrane de tout ce travail est la planète Terre.

1.2 Mécanique des fluides incompressibles en rotation

La dynamique des fluides dans un référentiel en rotation fait apparaître une physique différente. C'est la force de Coriolis qui, lorsqu'elle domine, change le comportement du fluide. Notre expérience quotidienne concernant les fluides en rotation étant très limitée, les phénomènes associés aux fluides en rotation sont surprenants. C'est cette physique qui gouverne les phénomènes étudiés durant cette thèse. Pour *Une introduction à la dynamique des fluides* plus complète, on pourra consulter l'ouvrage de [Rieutord \(1997\)](#) du même nom, et en particulier le chapitre 8 consacré aux fluides en rotation. Les livres de [Greenspan \(1968\)](#) et [Pedlosky \(1987\)](#) développent ce domaine plus en détails.

1.2.1 Les équations

Dans un référentiel en rotation, le principe fondamental de la dynamique doit tenir compte de l'accélération propre due à la rotation. Cette accélération peut être interprétée comme une nouvelle force qui se décompose en force de Coriolis et force centrifuge. Toutes deux rendent compte de la conservation de la quantité de mouvement dans le référentiel galiléen. En effet, pour maintenir un corps en rotation, il faudra fournir une force qui incurve sa trajectoire, rectiligne s'il ne subissait aucune force. Pour conserver les mêmes lois, on rajoute dans un référentiel en rotation la force centrifuge. De même, si un objet change sa distance par rapport à l'axe du repère en rotation, sa quantité de mouvement devant se conserver, il semble s'exercer sur lui une force, qu'on appelle force de Coriolis.

A l'équation de Navier-Stokes qui gouverne la mécanique des fluides, s'ajoutent donc ces deux forces :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (1.1)$$

où ρ est la densité du fluide, $\vec{u}$ est le champ de vitesse, t le temps, $\vec{\Omega}$ la vitesse de rotation du repère tournant, $\vec{r}$ le vecteur position, P la pression et μ la viscosité du fluide. $\vec{f}$ représente les autres forces qui agissent sur le fluide. Pour un liquide conducteur, il faudra par exemple ajouter la force de Laplace.

La force centrifuge dérive du potentiel $1/2 (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2$, et peut donc être incorporée dans la force de pression. De même, pour un fluide incompressible, la densité ρ reste constante, et on peut alors écrire :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{f} \quad (1.2)$$

où $\Pi = P/\rho + 1/2 (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2$ contient la pression et le potentiel centrifuge, et ν est la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$. Pour plus de simplicité, nous ne considérons plus $\vec{f}$ dans la suite.

A cette équation de la dynamique s'ajoute la loi de conservation de la masse, qui s'écrit très simplement pour un fluide incompressible :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.3)$$

On choisit des échelles caractéristiques du problème : une échelle de temps Ω^{-1} et une échelle de longueur R , ce qui nous donne $R\Omega$ comme échelle de vitesse et fait apparaître naturellement le nombre de Rossby $Ro = U/R\Omega$ comme unité de vitesse. En normalisant la vitesse $\vec{u}$ par $R\Omega$, les longueurs par R , et le temps par Ω^{-1} , on obtient une équation sans dimension :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + 2\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi + Ek \nabla^2 \vec{u} \quad (1.4)$$

avec $\vec{e}_z$ le vecteur unité selon l'axe de rotation, et

$$Ek \equiv \nu/R^2\Omega$$

le nombre d'Ekman qui mesure le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis à l'échelle R . Le nombre de Rossby, quant à lui, mesure le rapport entre les forces d'inertie et la force de Coriolis. Ainsi, le nombre de Reynolds qui mesure le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses est alors

$$Re = \frac{UR}{\nu} = \frac{Ro}{Ek}$$

Il faut prendre garde qu'avec ces conventions, *le temps adimensionné est en radians*, c'est à dire que pendant un intervalle de temps unité, le repère a tourné de $1/2\pi$ tours. Il faut donc un intervalle de temps égal à 2π pour effectuer une révolution complète.

1.2.2 La contrainte de Proudman-Taylor

En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation 1.4, nous obtenons l'équation d'évolution de la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$, qui ne contient plus de terme de pression :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \left(\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \right) - 2\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = Ek \nabla^2 \vec{\omega} \quad (1.5)$$

Si $Ek = 0$, $\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = 0$ et si en plus l'écoulement est stationnaire, alors l'écoulement est contrôlé par la contrainte de Proudman-Taylor :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

qui implique l'invariance de l'écoulement le long de l'axe de rotation ! Les écoulements qui respectent cette contrainte sont qualifiés de *géostrophiques* et correspondent à l'équilibre entre force de Coriolis et gradient de pression :

$$2\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi$$

Par extension, si on peut négliger les termes non-linéaires ($Ro \ll 1$), les termes visqueux ($Ek \ll 1$), et pour des écoulements évoluant suffisamment lentement (dont le temps caractéristique serait très grand comparé à la période de rotation), on peut espérer que la force de Coriolis va dominer l'écoulement, et donc que la contrainte de Proudman-Taylor reste pertinente.

En pratique, on observe que pour $Ro < 0.1$ et $Ek < 10^{-4}$, les structures de l'écoulement ont une forte tendance à s'aligner le long de l'axe de rotation, et ce d'autant plus que Ro et Ek sont petits¹. Les photos en annexe A.2 donnent une bonne idée de l'influence de la rotation sur un écoulement.

On peut également remarquer ici que la vorticité ω est un nombre de Rossby local, basé sur une échelle de variation locale des vitesses.

1.2.3 Les couches d'Ekman

Les couches limites dans les systèmes en rotation sont fortement influencées par les forces d'inertie dues à la rotation. L'équilibre entre force de Coriolis et force visqueuse donne leur taille caractéristique $\delta \sim Ek^{1/2}$. Plus précisément

$$\delta = \sqrt{\frac{2 Ek}{\vec{n} \cdot \vec{e}_z}} \quad (1.7)$$

où $\vec{n}$ est la direction normale à la paroi.

Ce sont les couches d'Ekman, dont la particularité est d'aspirer ou de rejeter du fluide : c'est le *pompage d'Ekman*. Ainsi, ces couches limites particulières exercent une influence sur l'écoulement global. Avec les mêmes hypothèses que pour la contrainte de Proudman-Taylor, on obtient (voir Greenspan, 1968) :

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2} Ek^{1/2} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge (\vec{u} - \vec{U}_b) \pm (\vec{u} - \vec{U}_b)}{\sqrt{|\vec{n} \cdot \vec{e}_z|}} \right) \quad (1.8)$$

où $\vec{U}_b$ est la vitesse de la paroi et $\vec{n}$ la normale à la paroi *dirigée du fluide vers la paroi*. On peut remarquer que le pompage est d'ordre $Ek^{1/2}$ et qu'il devient donc très faible lorsque Ek devient petit.

Dans le cas simple où $\vec{n} = \pm \vec{e}_z$ (frontières plates et perpendiculaires à $\vec{\Omega}$, on obtient l'expression

$$\vec{u}_p \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2} Ek^{1/2} \vec{\omega} \cdot \vec{e}_z \quad (1.9)$$

qui ne dépend plus du signe de $\vec{n} \cdot \vec{e}_z$. On voit que lorsque la vorticité est positive ($\vec{\omega} \cdot \vec{e}_z > 0$), la couche d'Ekman éjecte du fluide, tandis que lorsque la vorticité est négative, elle en aspire.

¹Ceci reste *a priori* vrai lorsqu'une autre force intervient dans l'équilibre, comme les forces d'Archimède ou de Lorentz, à condition qu'elles restent petites devant la force de Coriolis.

On remarque également à ce stade que lorsque $\vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0$, le pompage d'Ekman devient singulier. Voir aussi l'annexe C.2.

1.2.4 Les ondes inertielles

Les fluides incompressibles en rotation sont le siège d'ondes. En négligeant la viscosité et les termes non-linéaires dans l'équation 1.2, on obtient

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi \quad (1.10)$$

Pour une onde plane où la pression et la vitesse sont de la forme $A \exp(i\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, et en manipulant un peu l'équation 1.10, on obtient la relation de dispersion des ondes inertielles² :

$$\omega = 2\Omega \left| \frac{k_z}{k} \right|$$

On remarque que $0 \leq \omega \leq 2\Omega$, c'est-à-dire que la période de ces ondes est supérieure à la moitié de période de rotation. De plus, la fréquence est d'autant plus grande que $\vec{k}$ s'approche de l'axe de rotation. La vitesse de groupe $\vec{v}_g$ est perpendiculaire à $\vec{k}$:

$$\vec{v}_g = \frac{\Omega}{k} \vec{e}_k \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_k)$$

où $\vec{e}_k = \vec{k}/k$ est le vecteur unitaire associé au vecteur d'onde $\vec{k}$.

Lorsque $k_z \rightarrow 0$, on a $\omega \rightarrow 0$ et $\vec{v}_g \rightarrow \Omega k^{-1} \vec{e}_z$ et nous avons alors affaire à des écoulements géostrophiques, qui résultent de l'équilibre entre force de pression et force de Coriolis (voir eq. 1.10).

1.2.5 La turbulence

La turbulence développée est un des principaux problèmes de physique encore non résolus. La turbulence est un mécanisme de transfert d'énergie des grandes échelles où la viscosité ne joue presque aucun rôle, vers les petites échelles où la viscosité domine et dissipe l'énergie. Lorsque la rotation entre en scène, ce comportement change radicalement. Ainsi, les mouvements du fluide ont tendance à s'aligner avec l'axe de rotation, ce qui a pour conséquence d'empêcher la cascade d'énergie vers les petites échelles. Au lieu de cela, des structures de grande échelle émergent, et seront éventuellement dissipées par des mécanismes aux grandes échelles, comme le frottement d'Ekman.

Il faut cependant distinguer la turbulence purement 2D (Kraichnan, 1967) de la turbulence en rotation, car la contrainte de Proudman-Taylor peut être partiellement violée et permettre ainsi l'étirement de vortex, qui est à la clé de beaucoup de phénomènes en turbulence 3D.

Le problème de la turbulence est abordé en détail dans le livre de Frisch (1995).

²ici, ω est la pulsation de l'onde et non la vorticité

1.3 Magnétohydrodynamique

Dans cette section, nous voulons montrer comment les fluides conducteurs sont influencés par un champ électromagnétique. Pour plus de détails, on pourra à nouveau se reporter au livre de [Rieutord \(1997\)](#) dont le chapitre 10 est consacré à la MHD.

1.3.1 Électrodynamique classique

Pour décrire les forces qui agissent sur les charges et les courants, il est commode d'introduire le champ électromagnétique, qui peut être séparé en deux composantes vectorielles : le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.

L'évolution du champ électromagnétique est donnée par les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

avec $\mu_0 \varepsilon_0 = c_l^{-2}$ où c_l est la vitesse de la lumière dans le vide. le vecteur courant électrique $\vec{j}$ et la densité de charge électrique ρ_e sont liés par la conservation de la charge :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

La force agissant sur une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Ce jeu d'équations permet de décrire toute l'électrodynamique classique.

1.3.2 Les métaux et la force de Laplace

Dans un métal, les électrons peuvent se déplacer dans la matrice ionique du cristal³. Les électrons (charges négatives) et les ions du cristal (charges positives) sont soumis à la force de Lorentz. Il faut également tenir compte des collisions très fréquentes entre charges, ce qui a deux conséquences :

- apparition d'une force de frottement,
- les charges positives et négatives échangent de la quantité de mouvement.

³C'est une vision simplifiée de la complexité des solides, et d'autres phénomènes électromagnétiques sont ici complètement ignorés. Le lecteur curieux pourra étancher sa soif de connaissances dans le livre de [Ashcroft & Mermin \(1976\)](#). Quoi qu'il en soit nous nous intéresserons dans cette étude aux liquides conducteurs, encore plus difficiles à décrire, et dont la dynamique qui nous intéresse se trouve être correctement décrite par l'approximation MHD

Un champ électrique fournit des quantités de mouvement opposées à des charges positives et négatives

$$\vec{F}_+ = +q \vec{E} \quad \vec{F}_- = -q \vec{E}$$

Ainsi, l'impulsion totale reçue par un corps neutre est nulle :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = (q - q) \vec{E} = 0$$

Le seul effet pour un métal (où les charges sont libres) est l'apparition d'un courant électrique⁴

$$\vec{j} = +q\vec{v}_+ - q\vec{v}_- = q(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$$

avec $m_+\vec{v}_+ + m_-\vec{v}_- = 0$. Sachant que le régime permanent, où les forces de frottement (collisions) sont en équilibre avec la force de Lorentz est atteint très rapidement, on peut écrire :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.11)$$

qui est la loi d'Ohm généralisée, avec σ la conductivité du métal.

Si on ajoute maintenant un champ magnétique, la quantité de mouvement totale fournie à un corps neutre n'est plus nulle. De la force de Lorentz on peut alors déduire la force volumique agissant sur un métal parcouru par un courant électrique :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = +q\vec{v}_+ \wedge \vec{B} - q\vec{v}_- \wedge \vec{B} = q(\vec{v}_+ - \vec{v}_-) \wedge \vec{B}$$

Comme $\vec{j} = q(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$, on retrouve bien la force de Laplace :

$$\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.12)$$

Ainsi, le centre de masse des deux “fluides” de charge opposée est mis en mouvement.

Dans un métal, la masse des porteurs de charge positive et négative est très différente. En effet, la masse du proton est mille fois supérieure à la masse de l'électron, et pour des métaux, le rapport entre la masse de l'électron et de l'ion positif est encore plus favorable à l'approximation courante qui est de négliger complètement l'inertie des électrons ($m_- = 0$), ce qui permet de se ramener à la dynamique d'un seul fluide neutre parcouru d'un courant.

La force de Lorentz, bien qu'agissant sur les porteurs de charge en mouvement (les électrons), est transmise à l'ensemble du matériau par collisions (de la même manière que les électrons atteignent rapidement une vitesse limite). Pour un liquide conducteur soumis à un champ magnétique, il faut donc ajouter la force de Laplace 1.12 à l'équation de Navier-Stokes 1.1.

⁴ $\vec{j}$ est un invariant galiléen.

1.3.3 L'approximation MHD

On se place dans le cas d'un fluide conducteur ohmique, c'est-à-dire qu'il obéit à la loi d'ohm (1.11). En prenant le rotationnel de la quatrième équation de Maxwell (voir §1.3.1), et en utilisant la loi d'Ohm on obtient

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

puis et en remplaçant $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

Pour négliger le terme en dérivée seconde (responsable de la propagation des ondes électromagnétiques) devant la diffusion, il faut que

$$\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \ll \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En notant $\eta \equiv (\mu_0 \sigma)^{-1}$ la diffusivité magnétique, avec la vitesse de propagation c_l des ondes électromagnétiques dans le vide donnée par $c_l^2 \equiv (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$, et f une fréquence caractéristique de l'évolution du champ magnétique, on obtient

$$f \ll \frac{c_l^2}{\eta} \quad (1.13)$$

Dans un métal liquide, la diffusivité magnétique est de l'ordre de $1 \text{ m}^2/\text{s}$, ce qui impose des fréquences caractéristiques plus petites que 10^{17} Hz et ne devrait donc pas poser de problèmes. Ainsi

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (1.14)$$

L'équation 1.14 décrit correctement l'évolution de l'induction magnétique $\vec{B}$ dans un liquide conducteur animé par un champ de vitesse $\vec{u}$, et nous en ferons un usage abondant par la suite.

1.3.4 Équations sans dimensions

Nous choisissons $\sqrt{\mu_0 \rho} R \Omega$ pour unité de champ magnétique, ce qui donne

$$\vec{f}_L = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

pour la force de Laplace dans les dimensions choisies précédemment (§1.2.1). En écrivant que $j \sim \sigma u B$, on peut exprimer le nombre d'Elsasser Λ qui mesure le rapport entre force de Laplace et force de Coriolis comme

$$\Lambda = \frac{\sigma u B^2}{\rho \Omega u} = \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} B^2$$

L'équation de l'induction 1.14 change peu, puisque sa forme adimensionnée revient à changer η en Ek / Pm . On peut également introduire le nombre de Reynolds magnétique, qui compare le terme d'induction au terme de diffusion du champ magnétique :

$$\text{Rm} = \frac{\text{UR}}{\eta} = \text{Pm} \frac{\text{Ro}}{\text{Ek}} = \text{Pm} \text{Re}$$

Ainsi, en résumé, un fluide conducteur d'électricité en rotation est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + 2\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi + \text{Ek} \nabla^2 \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right) \wedge \vec{B} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{B} \right) + \frac{\text{Ek}}{\text{Pm}} \nabla^2 \vec{B} \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.17)$$

Avec

- Ω^{-1} comme unité de temps ($\Rightarrow$ temps adimensionné en radians)
- R comme unité de longueur
- $\sqrt{\mu_0 \rho} R \Omega$ comme unité de champ magnétique.
- Pm / Ek est alors le temps de diffusion magnétique.

Et les nombres sans dimensions

$$\text{Ek} \equiv \frac{\nu}{R^2 \Omega} \quad \text{Pm} \equiv \frac{\nu}{\eta} \quad \text{Ro} \equiv \frac{U}{R \Omega} \quad \Lambda \equiv \frac{\sigma u}{\rho \Omega u} B^2 \quad (1.18)$$

1.4 Observations

On trouvera une bonne introduction à la physique de la Terre dans le livre de [Nataf & Sommeria \(2000\)](#).

1.4.1 La structure de la Terre

Sur la figure 1.1, on a découpé un quartier dans la terre pour voir à l'intérieur : une graine de fer solide occupe le centre sur 1200 km de rayon. Autour de cette graine solide, le noyau est constitué d'un alliage de fer liquide et sa frontière avec le manteau (constitué de roches silicatées qu'on peut considérer comme solides comparées au fer liquide) est à environ 3500 km du centre. Ce qui nous donne un rapport entre le rayon du noyau et celui de la graine d'environ 0.35. Nous habitons sur la croûte terrestre, constituée de plaques tectoniques actives ce qui est à l'origine de la diversité de paysages qu'on y trouve, montagnes et océans.

La connaissance de la structure interne de la Terre est essentiellement due aux sismo-

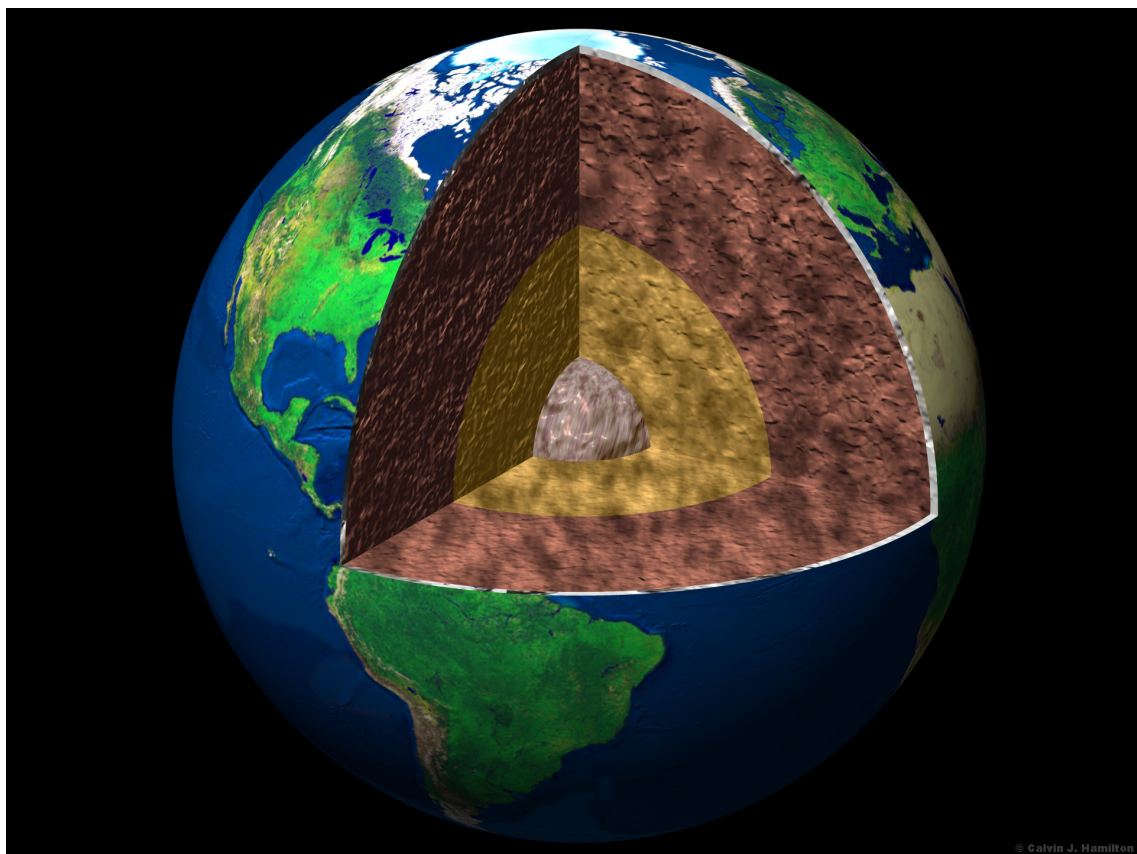


FIG. 1.1 – Une coupe de la terre qui montre les différentes couches : au centre la graine de fer solide, entourée du noyau de fer liquide lui-même enveloppé par le manteau, enfin recouvert par la croûte, les océans, et l'atmosphère.

logues qui ont mesuré et analysé les ondes sismiques parcourant le globe, et en ont déduit les propriétés physiques des milieux traversés par ces ondes. Après de longues années d'hésitations, les sismologues assurent que la graine est en corotation avec le manteau (rotation différentielle inférieure à $1^\circ/\text{an}$; voir [Souriau et al., 2003](#)).

1.4.2 Le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique de notre planète est *principalement dipolaire*, et en moyenne aligné avec l'axe de rotation. On peut montrer que sa source est interne à la Terre. Le manteau et le noyau ne peuvent pas abriter d'aimantation permanente à cause de leur température élevée ($T > T_{\text{curie}}$). La faible conductivité du manteau et ses mouvements très lents (1 cm/an) ne lui permettent pas non-plus d'induire un champ magnétique. Il ne reste plus guère que le noyau pour abriter notre précieux champ magnétique.

Les mesures systématiques et toujours plus précises du champ magnétique terrestre ne se font que depuis les derniers siècles. Les premiers observatoires permanents (répartis sur les terres émergées du globe, et plutôt dans les pays industrialisés) datent de 1840⁵, mais les mesures plus précises n'ont été possibles que depuis les années 1950 avec les progrès de l'instrumentation. Plus récemment, les satellites Magsat (1980) et Oersted (2000) ont permis de mesurer et de décrire toujours plus finement le champ magnétique instantané et ses variations temporelles. Les fluctuations rapides d'origine interne sont difficiles à extraire des contributions externes (vent solaire, courants électriques de haute altitude ...) Les spécialistes sont tout de même capables d'extraire de ces mesures magnétiques le signal très faible induit par les marées !

Ces mesures faites à la surface (observatoires) ou dans l'espace (satellites) peuvent être extrapolées à la surface du noyau, en supposant négligeables et/ou en supprimant les sources d'origine solaire, crustale et mantelliques. (fig 1.2). En plus de ces données d'observatoire, il est possible d'utiliser les carnets de navigation des premiers explorateurs pour obtenir des informations sur le champ magnétique plus anciennes. Aux échelles de temps géologiques, le fond des océans fournit un enregistrement continu du champ magnétique, grâce aux cristaux magnétiques dans les laves issues des dorsales qui se figent dans la direction du champ magnétique. On peut également utiliser des couches sédimentaires et ainsi retracer l'histoire du champ magnétique durant les 115 derniers millions d'années (fig 1.3).

Ainsi, durant l'histoire de la Terre, on a enregistré des variations très importantes, en intensité comme en direction. La dernière inversion (retournement du dipôle) a eu lieu il y a 780 000 ans.

1.4.3 Le noyau de la Terre et la géodynamo

Des variations du champ magnétique existent à toutes les échelles de temps, indications d'un noyau très agité (présence probable de turbulence intense).

⁵ hormis celui de Paris (1668) et Londres (1670)

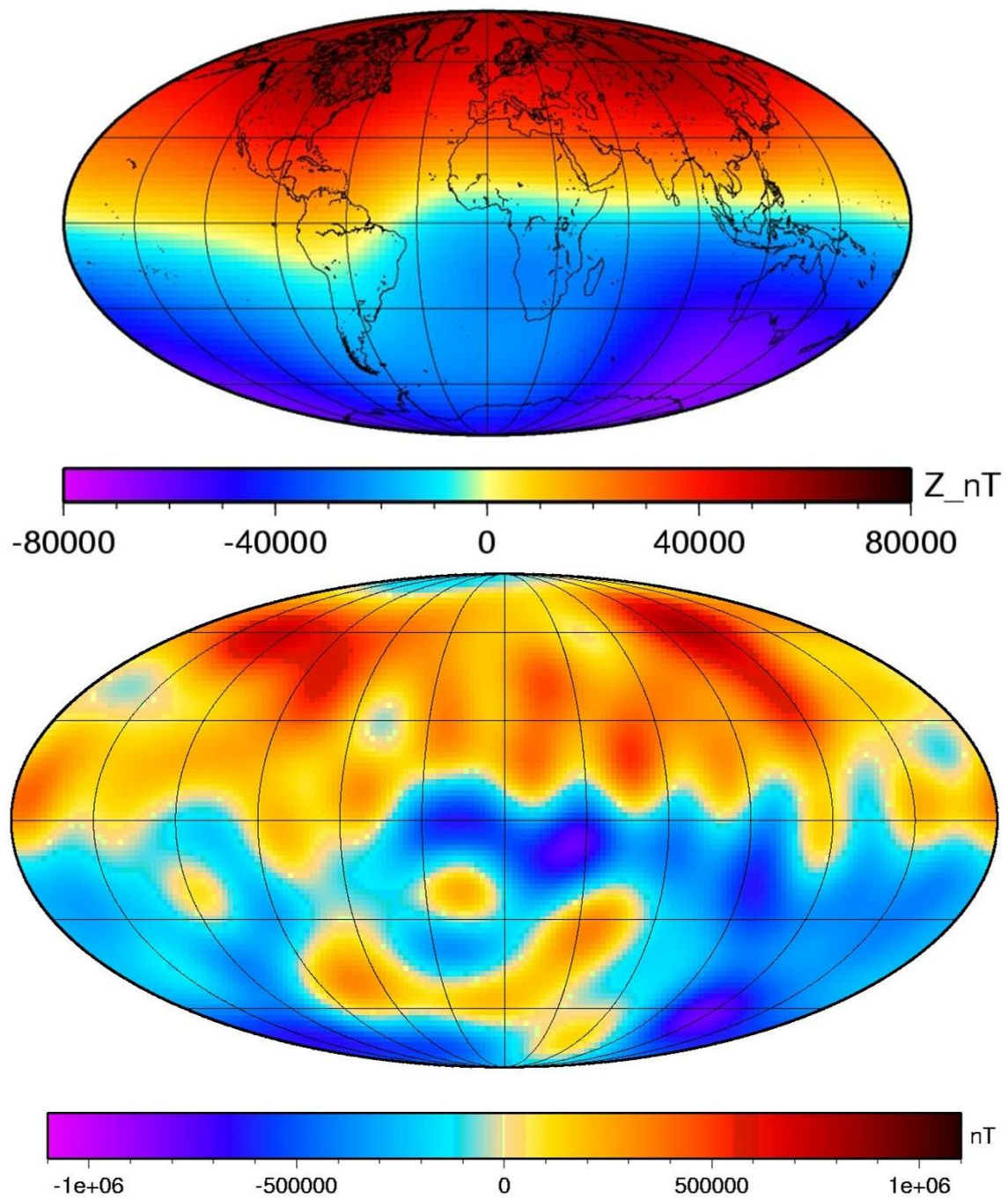


FIG. 1.2 – En haut : champ magnétique à la surface de la Terre ; en bas : champ magnétique à la surface du noyau. Données du satellite Oersted (2000-)

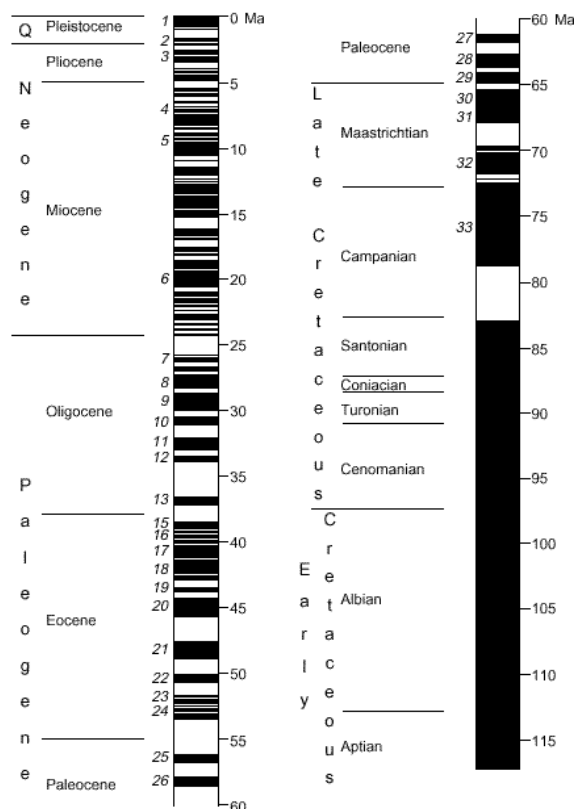


FIG. 1.3 – Polarité du champ magnétique de la Terre au cours de l'histoire. (Pierre Brunhes, 1905)

Le noyau de la Terre est donc constitué essentiellement de fer, liquide dans sa partie externe et solide dans la graine, qui conduit bien l'électricité ($\sigma \sim 5 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$). Le temps caractéristique de diffusion d'un champ magnétique à travers le noyau $\tau_d = R^2 / (\eta \pi^2)$ est de l'ordre de 20 000 ans, ce qui implique que le champ magnétique ne peut pas être fossile, mais doit être entretenu par un mécanisme dynamo.

Le refroidissement de la Terre s'accompagne de la cristallisation de la graine, qui grandit lentement. Cette cristallisation est accompagnée d'une part de la libération d'éléments légers lors de la cristallisation, et d'autre part de la libération d'énergie thermique (chaleur latente). Des études montrent que ces deux phénomènes vont pouvoir mettre le fluide en mouvement, si leur effet est suffisant pour braver l'effet stabilisant de la rotation.

Certains mouvements de métal liquide sont capables d'induire du champ magnétique : c'est l'effet dynamo. Quels types d'écoulement règnent dans le noyau de la Terre ? Quels processus d'induction ? Quels équilibres prennent place entre champ magnétique, rotation et turbulence ? Ce sont toutes ces questions qui motivent l'expérience DTS, et par la même, notre étude.

Les véritables mesures concernant le noyau sont rares, et bien entendu, les mesures *in situ* sont exclues (en tout cas pour l'instant). Cependant, la vitesse et l'atténuation des

ondes sismiques, ainsi que des expériences en haute pression et des calculs de mécanique quantique *ab initio* permettent d'avoir une idée sur les propriétés physiques de noyau terrestre. Il apparaît que les fortes pressions (de 3 GPa à la surface de la graine à 1 GPa à la base du manteau) ne modifient pas énormément les propriétés physique de l'alliage de fer liquide par rapport à la pression ambiante à la surface de la Terre.

Les données fondamentales sont consignées dans la table 1.1, à partir desquelles on peut facilement estimer les nombres de Prandtl magnétiques et thermiques :

$$\text{Pm} = \frac{\nu}{\eta} \sim 10^{-5} - 10^{-7} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \sim 10^{-2}$$

De plus, les satellites de mesure du champ magnétique terrestre permettent de mesurer les dérives des structures magnétiques, desquelles on peut déduire un ordre de grandeur des vitesses à la surface du noyau. On peut ainsi estimer certains paramètres sans dimension fort utiles :

$$\text{Ro} \sim 10^{-6} \quad \text{Ek} \sim 10^{-14} \quad \Lambda \sim 0.1 - 10$$

où l'on a choisi pour échelle de longueur la taille totale du noyau, à défaut de connaître la taille caractéristique du forçage.

Les variations temporelles du champ magnétique suggèrent un Reynolds magnétique $\text{Rm} \sim 100 - 300$ (basé sur les grandes échelles), d'où on peut estimer le nombre de Reynolds de l'écoulement

$$\text{Re} = \frac{\text{Rm}}{\text{Pm}} \sim 10^8$$

ce qui en fait un écoulement *a priori* fortement turbulent⁶.

Propriété physique		Noyau liquide	Graine solide
Rayon	r	3485 km	1221 km
Densité moyenne	ρ	$1.1 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$	$1.3 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$
Conductivité électrique	σ	$5 \cdot 10^5 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$	$5 \cdot 10^5 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$
Diffusivité magnétique	η	$2 \text{ m}^2/\text{s}$	$2 \text{ m}^2/\text{s}$
Diffusivité thermique	κ	$10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosité cinématique	ν	$10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	$10^9 \text{ m}^2/\text{s}$
Dilatation thermique	α_T	10^{-5} K^{-1}	$6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

TAB. 1.1 – Propriétés physiques du noyau terrestre

⁶L'importance des forces de Coriolis et de Lorentz est susceptible de remettre en cause ce raisonnement

1.4.4 L'atmosphère

Dans l'atmosphère, la stratification joue un rôle important, ce qui réduit les écoulements à des couches minces. Cependant, la prédominance de grandes structures et leur temps de vie élevé (voir figure 1.4) est caractéristique d'une turbulence dominée par la rotation de la Terre.



FIG. 1.4 – La terre vue de l'espace. On distingue bien les nuages qui marquent l'écoulement et font apparaître des structures tourbillonnaires, ici les dépressions.

De plus, la prédominance de la force de Coriolis sur l'écoulement, pour les grandes échelles et les longues périodes (supérieures à la journée) impose une contrainte de Proudman-

Taylor et ainsi une certaine invariance de l'écoulement selon la verticale.

La figure 1.5 illustre bien la “rigidification” de l'écoulement : une île dans l'Océan impose au vent de la contourner sur une hauteur importante, ce qui se traduit par le sillage caractéristique de l'allée de Von-Karmàn, matérialisée par la couche nuageuse pourtant à une altitude bien plus élevée que le relief de l'île.

Les ondes de Rossby sont également observées dans l'atmosphère.

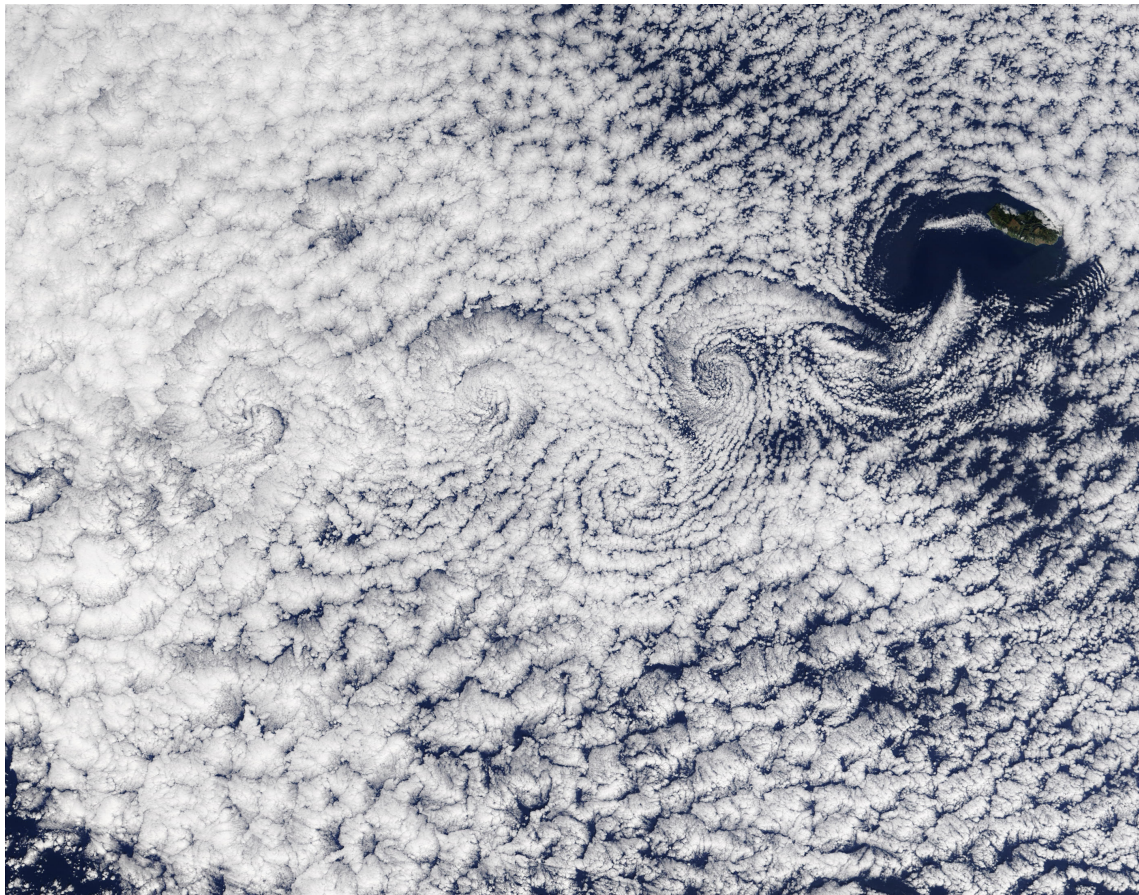


FIG. 1.5 – Un sillage de vortex produit par une île. On voit bien l'effet de bidimensionalisation sur cet exemple : l'île oblige les vents à la contourner sur une très grande hauteur (jusqu'aux nuages au moins).

1.4.5 Les autres planètes

Les planètes gazeuses du système solaire sont également dans un régime où la force de Coriolis domine. De plus certaines d'entre elles (Jupiter et Saturne notamment) possèdent également un champ magnétique.

Saturne est la seule planète dont le champ magnétique dipolaire est exactement aligné avec l'axe de rotation (aux erreurs de mesure près). Jupiter (fig. 1.6) possède un champ magnétique très intense, et on y observe même des aurores boréales. De plus, un tourbillon gigantesque visible depuis toujours, la tache rouge montre également une caractéristique des fluides en rotation : la stabilité dans le temps. Pour les satellites de Jupiter, l'influence du champ magnétique intense issu de la planète semble conduire à des effets d'induction qu'il est parfois difficile de séparer d'une dynamo propre.

Les planètes telluriques (Mercure, Vénus, Mars) et les satellites de Jupiter (Io, Europe) ont également des champs magnétiques qui ont été mesurés par le passage des sondes spatiales. Par exemple, les données concernant Mars semblent indiquer une aimantation crustale témoin d'une dynamo passée sans doute éteinte aujourd'hui (à moins que nous assistions au minimum d'une inversion ?).

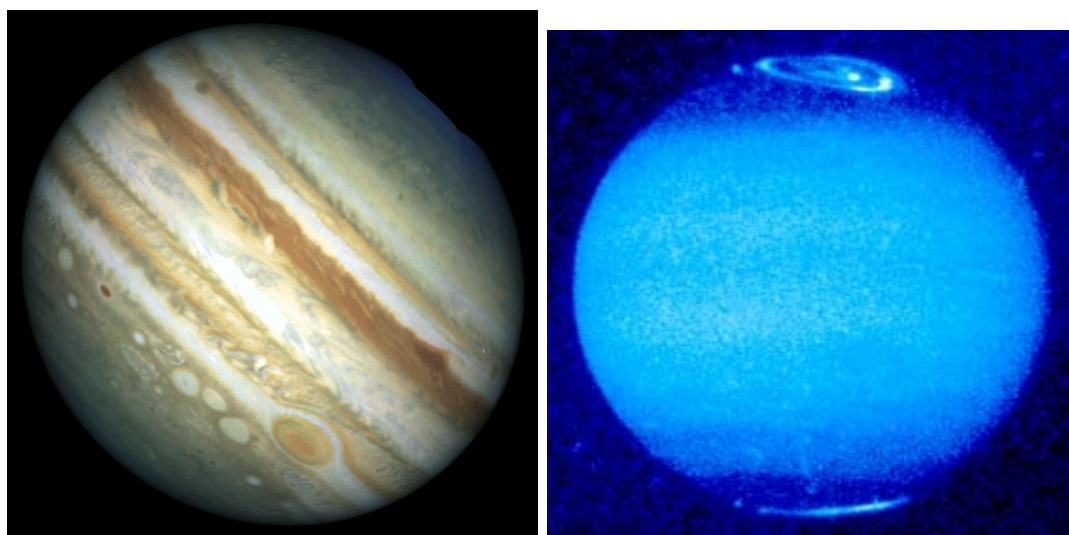


FIG. 1.6 – A gauche : un cliché de Jupiter pris par Hubble (13/2/1995), où l'on voit bien l'immense vortex qu'est la célèbre tache rouge. A droite les aurores boréales de Jupiter. (images NASA)

1.4.6 Et le Soleil

Le soleil porte également de forts champs magnétiques. Celui-ci peut être mis en évidence grâce à l'effet Zeeman, qui influence la polarité de la lumière absorbée par les atomes soumis à un champ magnétique. Grâce au satellite SOHO, nous en avons de belles images (fig. 1.7).

Le champ magnétique solaire oscille de manière périodique, avec des inversions de champ magnétique sur un cycle de 22 ans. La régularité de ces cycles, associés également aux taches solaires est frappante (voir fig. 1.8 et 1.9). Notons également que les taches solaires

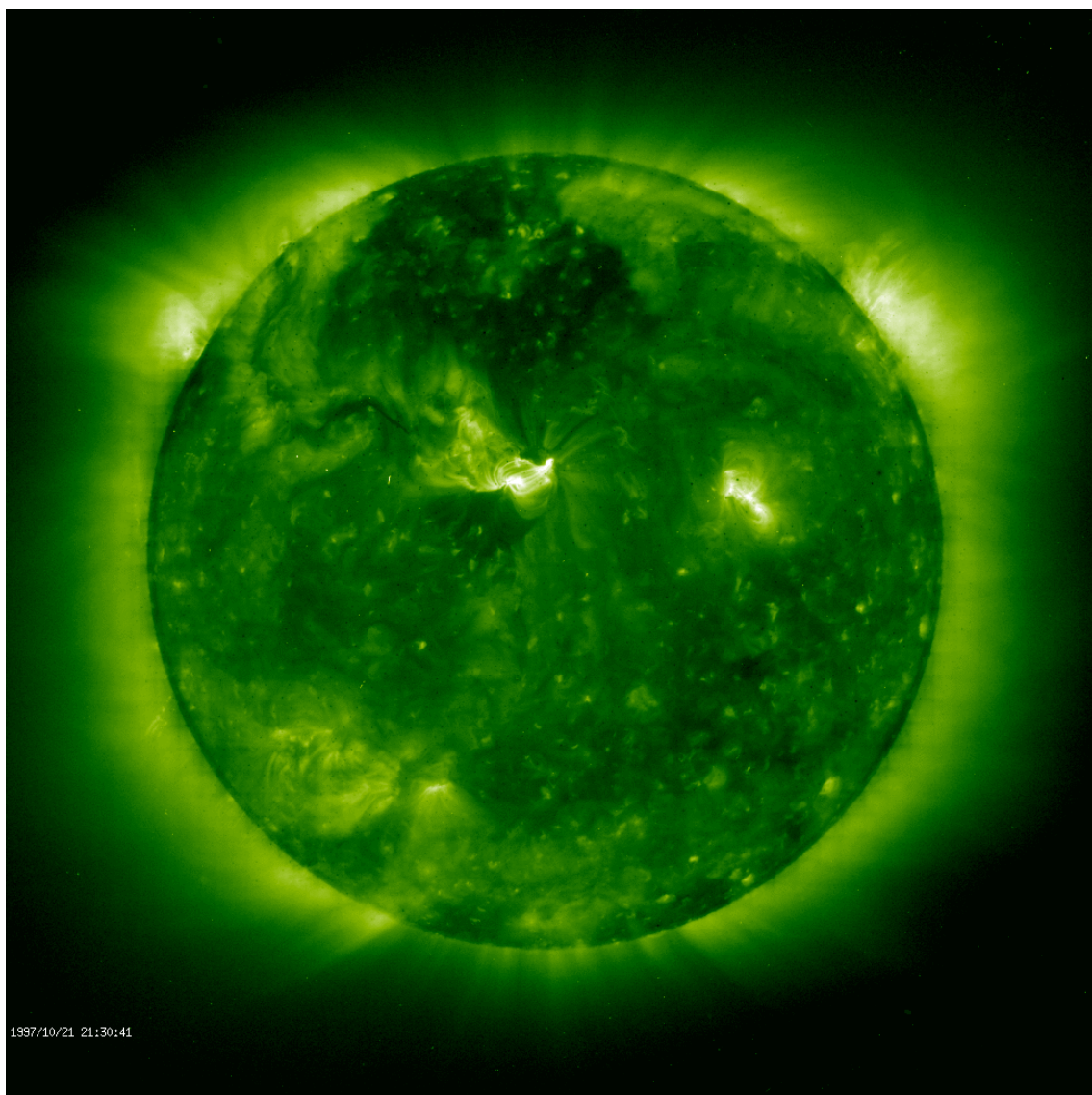


FIG. 1.7 – Image du champ magnétique du soleil tel qu’il est observé par le satellite SOHO. C’est une image EIT Fe XII à 195Å. (NASA/ESA)

qui apparaissent plutôt loin de l'équateur finissent toujours par y migrer. La dynamo solaire est supposée être de type $\alpha\Omega$ à cause de l'importante rotation différentielle observée.

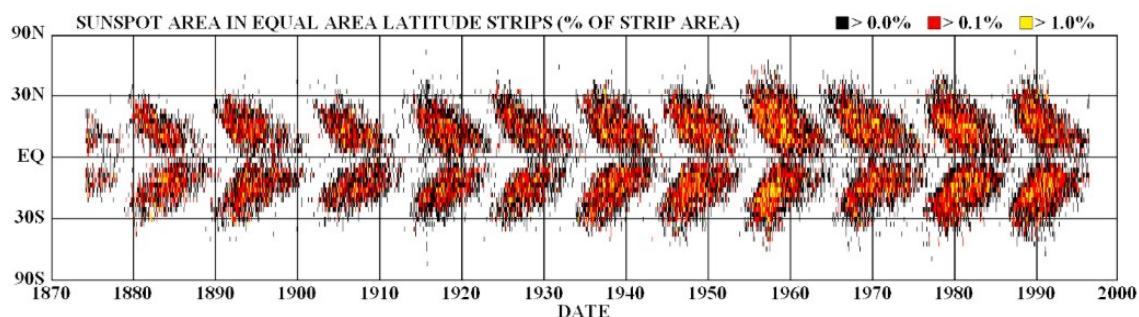


FIG. 1.8 – Position des taches solaires de 1870 à 1995. La ligne centrale horizontale représente l'équateur du Soleil and on remarque que les taches solaires apparaissent au nord et au sud, puis migrent vers l'équateur. C'est le diagramme “papillon” qui montre bien le cycle à 11 ans. (NASA)

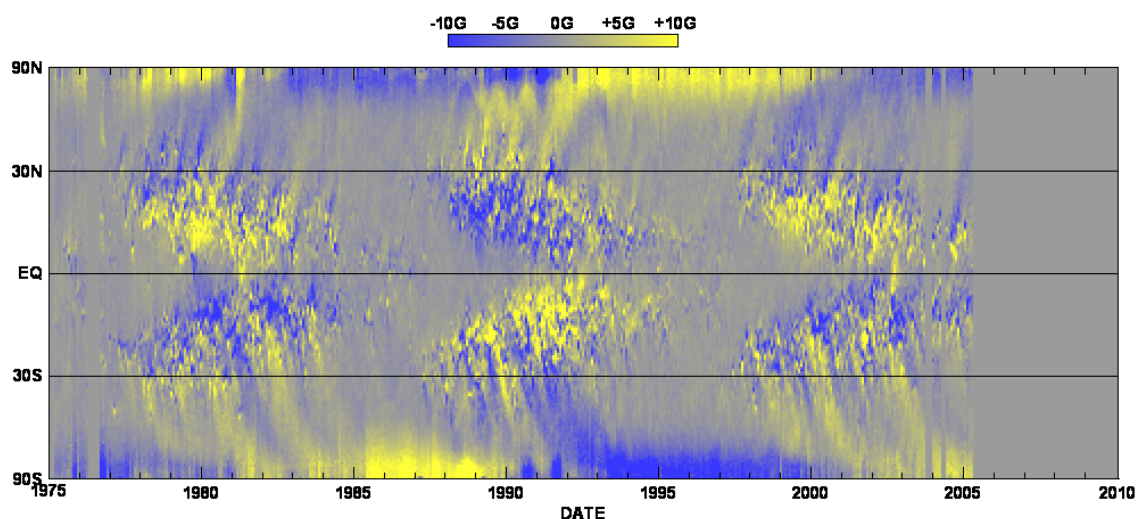


FIG. 1.9 – Moyenne longitudinale du champ magnétique du soleil. On voit bien la tendance du champ magnétique à migrer vers le centre (diagramme papillon). [NASA/NSSTC/Hathaway 2005]

Chapitre 2

Le modèle Quasi-Géostrophique (QG)

Les modèles quasi-géostrophiques sont fréquemment utilisés pour décrire les fluides géophysiques tels que l'océan, l'atmosphère ou le noyau (voir [Pedlosky, 1987](#); [Greenspan, 1968](#)).

Le modèle que nous présentons ici a été développé pour étudier les écoulements en rotation rapide dans un récipient invariant par rotation autour de l'axe de rotation du fluide. Sa spécificité est de ne pas être limité aux faibles pentes (comme c'est le cas des modèles existants, voir [Busse, 1970](#); [Aubert *et al.*, 2003](#); [Kiss, 2003](#)), grâce à la prise en compte de la conservation de la masse en 3D et du pompage pour toutes les échelles de l'écoulement. L'implémentation numérique de ce modèle est présentée dans l'annexe [B](#).

Nous nous plaçons dans un repère en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe z , et nous utilisons le système de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, avec r la distance à l'axe de rotation z , et ϕ , l'angle dans un plan équatorial. Deux fonctions, $z = L_+(r)$ et $z = L_-(r)$, définissent les surfaces qui ferment le récipient en haut et en bas respectivement. Nous nous restreignons au cas symétrique $L(r) = L_+(r) = -L_-(r)$.

2.1 Moyenne le long de l'axe de rotation

Pour des nombres d'Ekman et de Rossby suffisamment faibles, nous espérons que la contrainte de Proudman-Taylor impose de faibles variations suivant l'axe de rotation pour des temps caractéristiques suffisamment long ($\gg \Omega^{-1}$).

L'idée est de moyenner l'équation de la vorticité (eq. [1.5](#)) le long de l'axe de rotation, pour s'affranchir de ces petites variations.

La moyenne d'une grandeur u suivant l'axe de rotation z est définie par :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} u(r, z) dz \quad (2.1)$$

Malheureusement, comme L dépend de r l'opération de moyenne et la dérivation radiale ne commutent pas en général (voir annexe C.1) :

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial r} \left(\frac{u(r, +L) + u(r, -L)}{2} - \langle u(r, z) \rangle \right)$$

Nous devons donc imposer que u_ϕ et u_r soient réellement invariants en z . La composante verticale (z) de la vortacité $\vec{\omega}$ est notée ω et est également invariante en z .

Les termes non-linéaires de l'équation 1.5 projetés sur l'axe z donnent

$$\underbrace{\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \omega_z}_a - \underbrace{\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \right) u_z}_b$$

Le terme a ne pose pas de problèmes : ω_z ne dépendant pas de z , il se résume aux termes équatoriaux, indépendants de z

$$a = u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi}$$

Le terme b mérite plus d'attention :

$$b = \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \right) u_z = \omega_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\omega_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Et comme u_r et u_ϕ sont indépendants de z , on a

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \quad \text{et} \quad \omega_\phi = -\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

et les deux premiers termes s'annulent, laissant

$$b = \omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

La moyenne de l'équation 1.5 donne finalement :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right) - (2 + \omega) \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = \text{Ek} \nabla^2 \omega \quad (2.2)$$

où nous n'avons pas écrit les $\langle . \rangle$ autour des quantités indépendantes de z . Le terme $\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle$ est conservé et tous les autres termes ont disparu, sans aucune condition sur u_z (notamment le terme $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} u_z$).

L'équation de conservation de la masse 1.3 implique que $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ est aussi indépendant de z . Ainsi, dans le cadre de notre modèle quasi-géostrophique, l'écoulement vérifie :

- u_r et u_ϕ sont indépendants de z ,
- u_z est une fonction affine de z ($\frac{\partial u_z}{\partial z}$ est indépendant de z)

La dérivée de la vitesse verticale peut être évaluée. En effet, pour une fonction affine on a

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{u_z(+L) - u_z(-L)}{2L}$$

et la condition limite donnée par le pompage d'Ekman (eq. 1.8) lie u_r , u_ϕ et u_z aux parois. En définissant β

$$\beta \equiv \frac{1}{L} \left. \frac{\partial L}{\partial r} \right|_{z=L} \quad (2.3)$$

on obtient

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{Ek}^{1/2} \cdot P(u_r, u_\phi, r) + \beta u_r \quad (2.4)$$

avec P une fonction spécifique à la géométrie du récipient et qui dépend linéairement du saut de vitesse aux parois ainsi que de ses dérivées premières. On pourra se rapporter à l'appendice C.2 pour l'expression explicite pour un récipient sphérique.

Dans le cas particulier où le récipient a une profondeur constante, l'expression précédente se simplifie pour donner

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\text{Ek}^{1/2}}{2L} (\omega - \Omega_b) \quad (2.5)$$

où Ω_b est la vorticité associée à la vitesse de la paroi $\vec{U}_b$.

Le pompage d'Ekman étant d'ordre $\text{Ek}^{1/2}$, il semble raisonnable de le négliger pour des nombre d'Ekman petits quand $\beta \neq 0$. Cependant, contrairement à l'effet β , le pompage d'Ekman est dissipatif et est donc primordial dans l'évolution de l'énergie, surtout pour les grandes structures pour lesquelles les effets visqueux dans le cœur du fluide sont bien plus faibles.

2.2 Champ scalaire

Soit ψ un champ scalaire de r et ϕ , défini par

$$u_r \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (2.6)$$

Comme u_z est lié à u_r et u_ϕ par l'intermédiaire de la conservation de la masse, on a pour les écoulements *non-axisymétriques*

$$u_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} - \beta \psi \quad (2.7)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) - \frac{d\beta}{dr} \psi \quad (2.8)$$

Ces équations se distinguent de la définition classique d'une fonction courant par les termes supplémentaire en β . Pour $\beta \ll 1$ on retrouve le modèle quasi-géostrophique classique (voir [Busse, 1970](#); [Aubert et al., 2003](#); [Kiss, 2003](#)). Lorsque β est d'ordre 1, on peut évaluer l'importance de ces nouveaux termes, en prenant λ comme longueur caractéristique des variations de l'écoulement.

- $\beta\lambda \ll 1$ c'est-à-dire pour les petites échelles, les corrections sont faibles ;
- $\beta\lambda \gg 1$ c'est-à-dire pour les grandes échelles, les corrections sont importantes.

2.3 Ondes de Rossby

L'équation 2.2 accepte des solutions ondulatoires. En négligeant les non-linéarités et la viscosité, l'équation 2.2 devient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\beta u_r = 0$$

où on a pris $\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = \beta u_r$.

Prenons le cas où ψ est une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation f ; pour simplifier on prend $\omega = -\nabla^2 \psi = k^2 \psi$, $u_r = -ik_\phi \psi$, et on trouve alors

$$ifk^2\psi + 2\beta ik_{\phi}\psi = 0$$

qui se traduit par la relation de dispersion

$$\omega = -2\beta \frac{k_\phi}{k^2} \quad (2.9)$$

Qui est la relation de dispersion des ondes de Rossby, qu'on peut trouver dans l'atmosphère. On voit que :

- pour un récipient plat ($\beta = 0$), ces ondes n'existent pas ;
- leur fréquence est directement reliée à la pente, et inversement proportionnelle au nombre d'onde ;
- elles se propagent dans la direction perpendiculaire à la pente ($\vec{e}_\phi$).

Ces ondes vont être omniprésentes dans les systèmes étudiés ici. Leur vitesse de groupe vaut alors

$$\vec{v}_g = \frac{2\beta}{k^4} (2k_r k_\phi \vec{e}_r + (k_r^2 - k_\phi^2) \vec{e}_\phi) \quad (2.10)$$

2.4 Écoulement axisymétrique

Pour l'écoulement axisymétrique il est plus commode de travailler sur la vitesse, et nous projetons l'équation de Navier-Stokes 1.4 sur $\vec{e}_\phi$, en se souvenant que $(\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_\phi =$

u_r et que $\frac{\partial u_\phi}{\partial z} = 0$. En moyennant alors suivant ϕ pour ne garder que la composante axisymétrique, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial t} + \left(\overline{u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r}} + \frac{\bar{u}_\phi \bar{u}_r}{r} \right) + 2\bar{u}_r = \text{Ek} \left(\nabla^2 \bar{u}_\phi - \frac{\bar{u}_\phi}{r^2} \right) \quad (2.11)$$

où $\bar{u}$ représente la moyenne azimutale de u .

La conservation de la masse (eq. 1.3) donne

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0$$

et en se servant de l'expression du pompage d'Ekman (eq. 2.4), on peut montrer que $\bar{u}_r$ est un terme d'ordre $\text{Ek}^{1/2}$ lié au pompage d'Ekman :

$$\bar{u}_r = \text{Ek}^{1/2} \frac{\alpha}{2L} (\bar{u}_\phi - U_b) \quad (2.12)$$

avec

$$\alpha \equiv \left(1 + \left(\frac{dL}{dr} \right)^2 \right)^{1/4} \quad (2.13)$$

Ainsi l'écoulement axisymétrique est régi par une équation unidimensionnelle :

$$\frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial t} + \left(\overline{u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r}} + \frac{\bar{u}_\phi \bar{u}_r}{r} \right) + \text{Ek}^{1/2} \frac{\alpha}{L} (\bar{u}_\phi - U_b) = \text{Ek} \left(\nabla^2 \bar{u}_\phi - \frac{\bar{u}_\phi}{r^2} \right) \quad (2.14)$$

2.5 Résumé et discussion

L'originalité de notre modèle est de prendre en compte la conservation de la masse en 3D. Toutefois, le pompage d'Ekman introduit lui-aussi des circulations de masse dont nous ne pouvons pas tenir compte, mais elles sont généralement négligeables devant celles qui sont induites par la pente. Ainsi, la masse est conservée à un terme en $E^{1/2}$ près et Nous pouvons modéliser des récipients ayant des pentes finies.

Nous avons aussi introduit la paramétrisation du pompage d'Ekman pour toutes les échelles de l'écoulement, ce qui nous permet une simulation plus réaliste des régimes fortement non-linéaires, en tenant compte de la dissipation importante par frottement d'Ekman.

Cependant, il faut garder à l'esprit les limitations du modèle. D'abord, les pentes doivent rester raisonnables : la vitesse de groupe des ondes inertielles doit être supérieure aux vitesses verticales, pour maintenir la géostrophie de l'écoulement, c'est-à-dire $\Omega/k \gg \beta u_r$, et donc

$$\text{Ro} \beta \ll 1$$

vient compléter la condition $\text{Ro} \ll 1$. Les pentes trop fortes, (ou infinies comme c'est le cas pour une sphère à l'équateur) sont donc à proscrire. Ceci exclut aussi les sauts de hauteur.

Toutefois, utiliser ce modèle dans une sphère reste possible, car le domaine où l'approximation quasi-géostrophique n'est plus valide reste petit et confiné à une extrémité du domaine. Il n'est par contre pas possible de modéliser un saut de hauteur à l'intérieur du domaine, ou encore une coquille sphérique (avec graine).

Notons aussi que les simulations numériques de [Dormy et al. \(2004\)](#) montrent que u_z n'est pas tout à fait affine en z . En fait u_z est solution d'une équation différentielle du second ordre en z ([Roberts, 1968](#); [Busse, 1970](#)) mais est assez bien approchée par une fonction affine, sauf près de la couche d'Ekman.

Notre modèle quasi-géostrophique se résume ainsi :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right) - (2 + \omega) \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = \text{Ek} \nabla^2 \omega \quad (2.15)$$

Fonction scalaire : $u_r \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ et $u_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} - \beta \psi$

$$\omega = -\nabla^2 \psi - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) - \frac{d\beta}{dr} \psi$$

Cas général : $\frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{Ek}^{1/2} \cdot P(u_r, u_\phi, r) + \beta u_r$

avec $\beta \equiv \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial r} \Big|_{z=L}$ et P le pompage d'Ekman (voir annexe [C.2](#)).

Cas plat : $\beta = 0$ et $\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\text{Ek}^{1/2}}{2L} (\omega - \Omega_b)$.

Chapitre 3

Instabilités quasi-géostrophiques d'une couche de cisaillement

Ce chapitre traite des instabilités d'une couche de cisaillement en rotation rapide. L'essentiel de ce travail a été publié dans notre article ([Schaeffer & Cardin, 2005b](#)) qui est reproduit aux pages 51 et suivantes. L'article est aussi disponible sur le site web [ArXiv.org](http://arxiv.org/abs/physics/0312129) : <http://arxiv.org/abs/physics/0312129>.

Avant d'étudier l'instabilité à proprement parler, nous allons étudier les couches de Stewartson et les mécanismes sous-jacents (§3.1). Ensuite nous aborderons les instabilités et l'étude expérimentale.

Une erreur de signe dans notre expression du pompage d'Ekman (voir §C.2) a été corrigée récemment par Chris Jones. Tous les calculs présentés ici sont fait avec une petite erreur (d'ordre $Ek^{1/2}$) : dans l'expression C.12, le signe du terme en 5/2 était faux. Nous avons évalué l'impact de cette erreur sur le seuil pour $Ek = 10^{-6}$:

	Ek	Ro_c	m_c	ω_c	NR
Résultat publié	10^{-6}	$9.505 \cdot 10^{-3}$	10	$5.428 \cdot 10^{-2}$	400
Pompage corrigé	10^{-6}	$9.473 \cdot 10^{-3}$	10	$5.424 \cdot 10^{-2}$	400
Résultat publié	10^{-6}	$-11.08 \cdot 10^{-3}$	8	$-2.060 \cdot 10^{-2}$	400
Pompage corrigé	10^{-6}	$-11.10 \cdot 10^{-3}$	8	$-2.063 \cdot 10^{-2}$	400

Les différences sont inférieures au pourcent.

3.1 La couche de Stewartson

Les couches de cisaillement internes qui apparaissent dans les fluides en rotation rapide ont été étudiées d'abord théoriquement par [Proudman \(1956\)](#). Stewartson résolut la structure d'une telle couche de cisaillement d'abord dans un cylindre ([Stewartson, 1957](#)) puis dans une sphère ([Stewartson, 1966](#)).

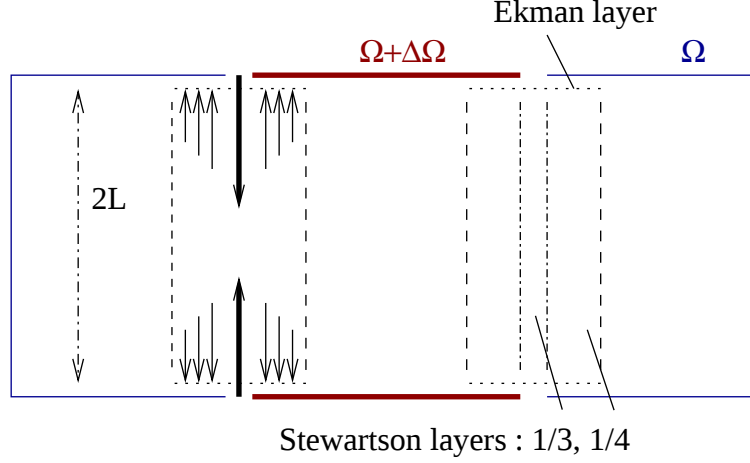


FIG. 3.1 – La couche de Stewartson et l'écoulement associé, pour $\Delta\Omega > 0$. Pour $\Delta\Omega < 0$ il faudrait inverser le sens des flèches.

3.1.1 Généralités

La situation est décrite par la figure 3.1. La partie intérieure du récipient tourne légèrement plus vite ou plus lentement que la partie externe. Le saut de vitesse est accommodé au sein du fluide par une couche de cisaillement : la couche de Stewartson. Elle résulte d'un équilibre entre pompage d'Ekman (qui tend à synchroniser le fluide avec la paroi) et viscosité dans le volume (qui interdit les variations trop brusques de vitesse). L'équation 2.14 décrit cet équilibre, et pour un écoulement stationnaire en négligeant les termes non-linéaires, on obtient :

$$\text{Ek}^{1/2} \frac{\alpha}{L} (\bar{u}_\phi - U_b) = \text{Ek} \left(\nabla^2 \bar{u}_\phi - \frac{\bar{u}_\phi}{r^2} \right)$$

ce qui permet d'obtenir simplement la couche de Stewartson. On peut d'ailleurs en déduire sa taille (voir §3.3.4).

Les couches de cisaillement ont une épaisseur $\Delta \sim \text{Ek}^{1/4}$, dans laquelle la contrainte de Proudman-Taylor (§1.2.2) est partiellement levée, puisqu'on a

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} \neq 0$$

Pour un cylindre plat, on peut résoudre analytiquement le profil de vitesse de la couche de Stewartson. En négligeant la courbure et les termes non-linéaires dans l'équation 2.14 on se ramène à

$$\frac{1}{L} (\bar{u}_\phi - U_b) = \text{Ek}^{1/2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\phi}{\partial r^2}$$

avec $U_b = \text{Ro} \Theta(r)$ où Θ est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 lorsque son argument est négatif, et 0 sinon. On a également introduit le nombre de Rossby Ro qui mesure

l'amplitude relative du forçage dû à l'entraînement des parois, et on a choisi le rayon de coupure r_{split} comme étant l'origine. On obtient alors

$$\bar{u}_\phi = \frac{\text{Ro}}{2} \begin{cases} e^{-r/\Delta} & \text{si } r > 0 \\ 2 - e^{r/\Delta} & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

avec $\Delta = L^{1/2} \text{Ek}^{1/4}$ ou encore, avec des dimensions :

$$\Delta = L^{1/2} \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/4}$$

c'est-à-dire que l'épaisseur de la couche de Stewartson est la moyenne géométrique de la hauteur du récipient et de l'épaisseur de la couche d'Ekman¹.

Des profils de vitesse obtenus numériquement sont représentés sur les figures 3.15 et 3.3. On remarque d'ailleurs sur la figure 3.15 que la dérivée seconde de $\bar{u}_\phi$ est discontinue en $r = 0$:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_\phi}{\partial r^2} = \frac{\text{Ro}}{2} \begin{cases} \Delta^{-2} & \text{si } r = 0^+ \\ -\Delta^{-2} & \text{si } r = 0^- \end{cases}$$

De même, le pompage lié au saut de vortacité est singulier puisque la vortacité au niveau de la coupure est la dérivée de $\text{Ro} \Theta(r)$, soit $\Omega_b = -\text{Ro} \delta(r)$ avec $\delta(r)$ la distribution de Dirac.

On peut maintenant expliquer le sens du pompage indiqué sur la figure 3.1 pour $\text{Ro} > 0$. La vortacité associée à la couche de Stewartson est toujours inférieure à celle des parois, d'où une aspiration (voir §1.2.3) partout dans la couche. Au niveau de la coupure, la vortacité des parois infiniment négative est inférieure à la vortacité de la couche de Stewartson, ce qui explique la présence d'un jet, qui permet d'ailleurs de conserver la matière.

La singularité du pompage d'Ekman au niveau de la coupure que nous venons de décrire se régularise en acceptant de violer encore davantage la contrainte de Proudman-Taylor, en permettant à l'écoulement zonal de dépendre lui aussi de z , dans une couche d'épaisseur $\text{Ek}^{1/3}$: c'est la couche interne de Stewartson (Stewartson, 1957, 1966; Moore & Saffman, 1969).

Notre modèle quasi-géostrophique ne permet pas de tenir compte de cette couche interne, ce qui a plusieurs conséquences :

- une singularité dans la dérivée de la vortacité pour la couche de Stewartson ;
- la matière n'est pas conservée (absence du jet).

On peut évaluer le temps qu'il faut pour renouveler complètement la couche de Stewartson. Le flux de masse à travers la couche d'Ekman peut être estimé, pour une tranche à ϕ constant, par

$$Q_{\text{Ek}} \sim \text{Ek}^{1/2} \frac{\text{Ro}}{\Delta} \Delta = \text{Ek}^{1/2} \text{Ro}$$

¹Nous avons défini notre nombre d'Ekman à partir de la longueur radiale R ce qui est tout à fait légitime. On voit cependant ici que la longueur physiquement pertinente est celle mesurée dans la direction de l'axe de rotation, notée ici L .

tandis que l'aire de la couche de Stewartson vaut $A = L\Delta$, d'où un temps caractéristique pour la renouveler

$$T_S = \frac{A}{Q_{Ek}} = Ek^{-1/4} Ro^{-1} L \quad (3.1)$$

Rappelons que toutes ces grandeurs sont sans dimensions. Au seuil d'instabilité de la couche, on a $Ro \sim Ek^{1/2}$, ce qui nous donne un temps $T_S \sim Ek^{-3/4}$ supérieur au temps de spin-up $T_{\text{spin-up}} \sim Ek^{-1/2}$ nécessaire à atteindre le régime permanent dans une expérience. On peut donc raisonnablement supposer que cet effet sera négligeable au seuil.

3.1.2 Les géométries modélisées

Dans l'article (Schaeffer & Cardin, 2005b), nous utilisons plusieurs géométries dont celles correspondant aux montages expérimentaux de Früh & Read (1999) et Niino & Misawa (1984), que nous avons reproduits sur la figure 3.2. Les profils de vitesse pour diverses configurations sont donnés par la figure 3.3.

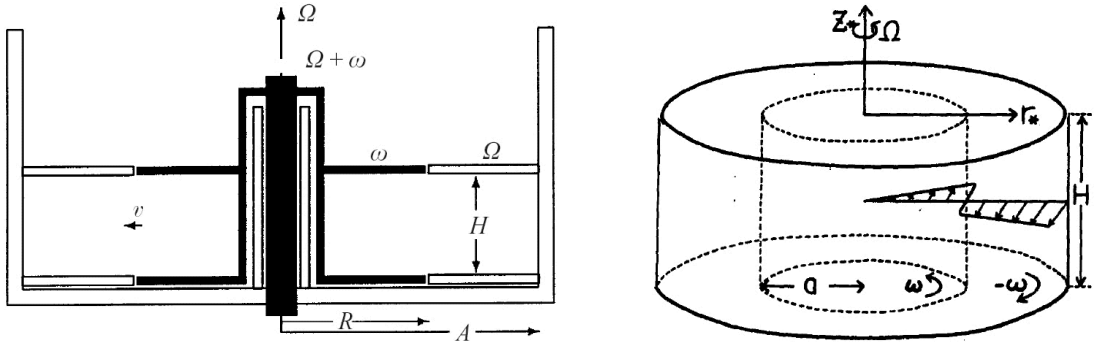


FIG. 3.2 – Les dispositifs expérimentaux de Früh & Read (1999) à gauche, et de Niino & Misawa (1984) à droite.

Ainsi nous avons pu comparer les résultats de notre modèle numérique aux résultats expérimentaux de Früh & Read (1999) et Niino & Misawa (1984) concernant le seuil des instabilités. Les conclusions de cette étude sont discutées par Schaeffer & Cardin (2005b) et au §3.3.7.

On remarque que si le dispositif de Niino & Misawa (1984) respecte une certaine symétrie, il introduit une seconde couche de cisaillement au bord externe. Nous avons vérifié numériquement que cette couche ne devient pas instable avant la couche de Stewartson.

Nous avons également considéré le cas $\beta = -1$ dans tout le récipient, ce qui correspond à une forme en exponentielle : $L(r) = e^{-r}$.

La coquille sphérique (*spherical shell*) est également abordable par notre modèle quasi-géostrophique, pour le profil de base tout au moins. Proudman (1956) avait déjà obtenu le profil asymptotique correct, et Dormy *et al.* (1998) présente des calculs numériques 3D complets, qui incluent donc la couche en $Ek^{1/3}$. La comparaison de nos calculs quasi-géostrophiques avec ces calculs 3D complets montre un bon accord pour $Ek < 10^{-6}$. Les

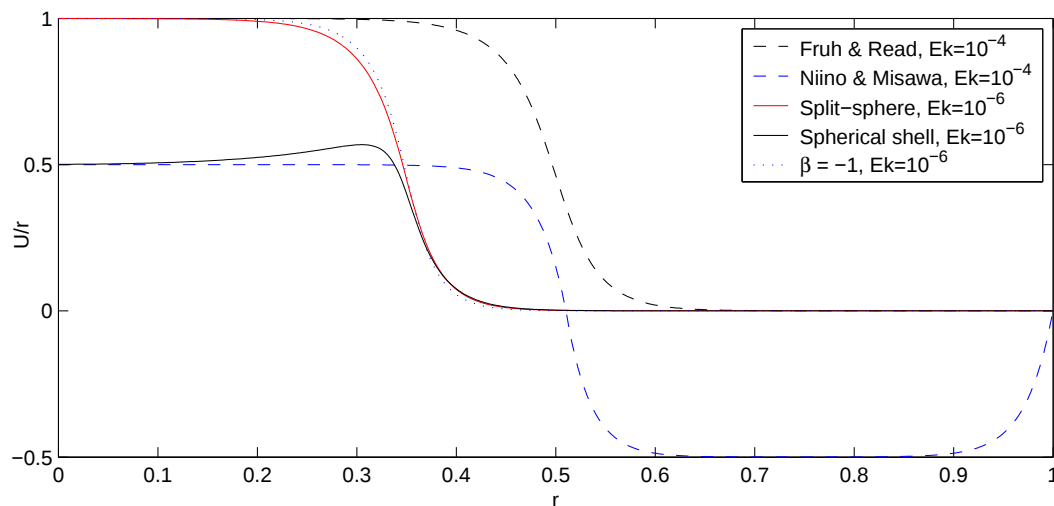


FIG. 3.3 – Les profils de base des couches de Stewartson des différentes géométries considérées.

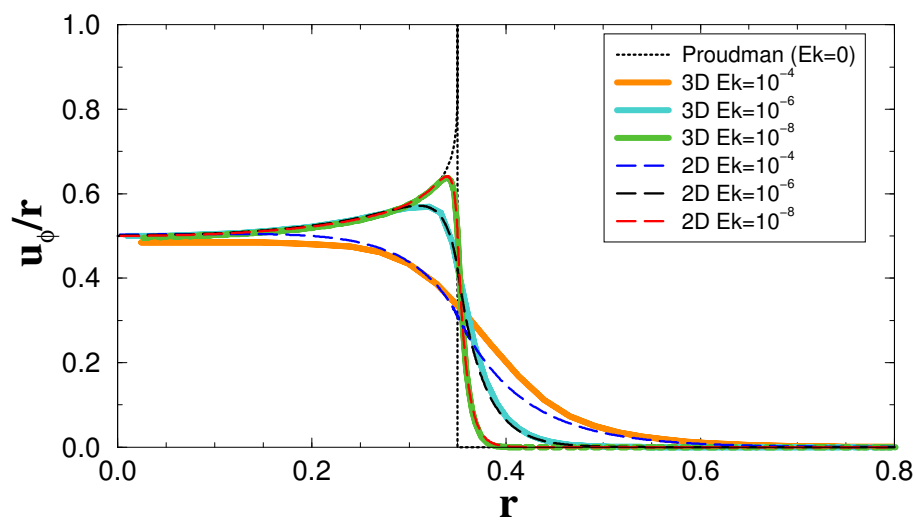


FIG. 3.4 – Couche de Stewartson dans le cas d'une coquille sphérique : comparaison entre le calcul 3D de Dormy *et al.* (1998) et le résultat de notre modèle quasi-géostrophique noté 2D. On a aussi représenté le profil asymptotique obtenu par Proudman (1956).

profils obtenus sont représentés sur la figure 3.4. Nous trouvons que les différences d’amplitude entre les écoulements de base sont toujours plus petit que 0.03 pour $Ek = 10^{-6}$; et pour $Ek = 10^{-8}$ la différence ne dépasse jamais 0.008. Ainsi nous pouvons supposer que la couche en $Ek^{1/3}$ va jouer un rôle négligeable à ces nombres d’Ekman très faibles. La figure 3.5 montre les profils de base pour différents nombre d’Ekman pour la configuration coquille sphérique. On voit progressivement apparaître la “bosse”.

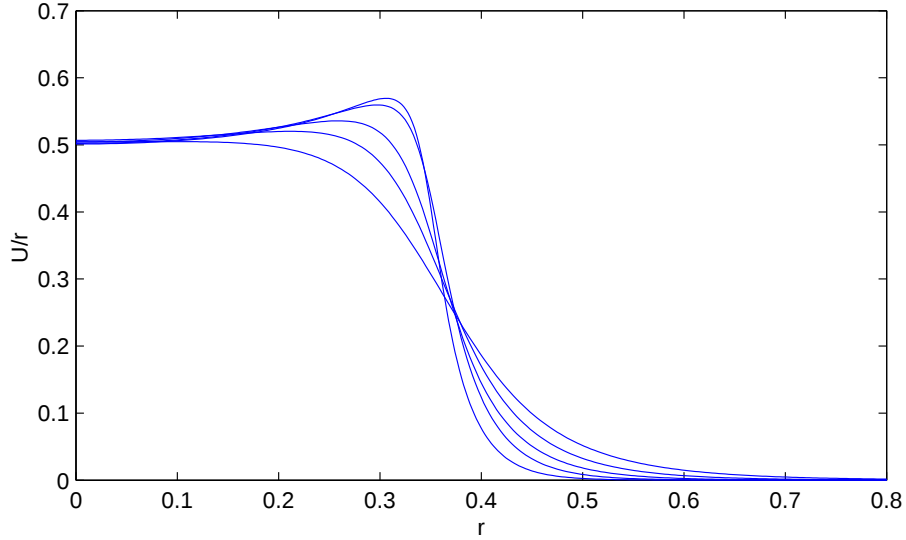


FIG. 3.5 – Profils de base QG obtenus avec une graine ($r_0 = 0.35$). La couche en $Ek^{1/3}$ est absente. Les différents profils correspondent à différents nombres d’Ekman : du plus doux au plus raide : 10^{-4} , $3 \cdot 10^{-5}$, 10^{-5} , $3 \cdot 10^{-6}$, et 10^{-6}

Le cas que nous avons étudié le plus est la configuration *split-sphere*, représentée sur la figure 3.6. Le seuil d’instabilité dans cette configuration a été étudié en détail et est rapporté dans l’article (§3.3.6). On retrouvera cette géométrie dans les chapitres suivants.

3.2 Résumé de l’article

3.2.1 “Abstract”

Nous étudions la déstabilisation d’une couche de cisaillement, produite par la rotation différentielle d’un récipient axisymétrique. À faible forçage, on a une couche de cisaillement (étudiée par [Stewartson, 1957](#)) qui est quasi-invariante par translation le long de l’axe de rotation. Lorsque le forçage augmente, des instabilités apparaissent. Pour étudier le régime asymptotique (très faibles nombres d’Ekman Ek), nous avons développé un modèle bidimensionnel quasi-géostrophique, avec deux particularités : d’une part il prend en compte l’effet de pente dans la conservation de la masse tri-dimensionnelle, de sorte qu’il est cohérent pour n’importe quelle géométrie, tant que les pentes du fond et du couvercle restent

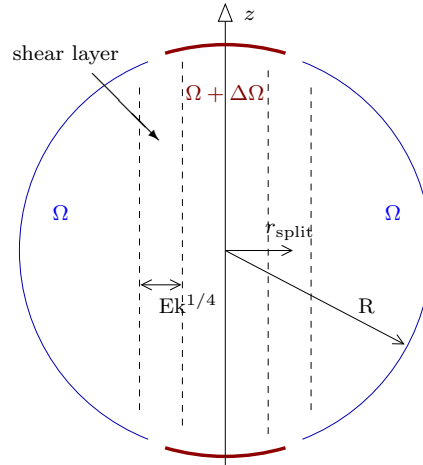


FIG. 3.6 – La géométrie *split-sphere*. La rotation différentielle produit une couche de Stewartson axisymétrique de taille $Ek^{1/4}$. $r_{\text{split}} = 0.35$ dans toute notre étude.

finies ; d'autre part nous prenons en compte le frottement aux parois (pompage d'Ekman) pour les instabilités.

Nous utilisons ce modèle pour établir des lois d'échelles asymptotiques par une théorie linéaire simple. Nous étendons les analyses précédentes à des pentes fortes (comme c'est le cas dans une sphère), pour laquelle nous trouvons des lois d'échelle différentes : Pour un récipient à fond plat, le nombre de Rossby critique pour l'apparition des instabilités se comporte comme $Ek^{3/4}$, et la situation peut être interprétée comme une instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmoltz. Pour un récipient dont la hauteur varie, l'instabilité prend la forme d'une onde de Rossby et le nombre de Rossby critique est proportionnel à $\beta Ek^{1/2}$, où β est lié à la pente.

Nous étudions également l'asymétrie entre rotation différentielle positive et négative, et nous proposons des corrections aux lois d'échelle pour des nombres de Rossby et d'Ekman finis.

Implémenté dans un code numérique, notre modèle quasi-géostrophique nous permet d'étudier le seuil d'instabilité sur une large gamme de paramètres, et de déterminer le seuil ainsi que d'autres caractéristiques de l'instabilité telles que sa structure spatiale. Nous présentons aussi quelques résultats expérimentaux qui confirment la validité de notre modèle et en montrent les limites.

3.2.2 Plan de l'article

Dans l'introduction (§3.3.2), après un bref rappel de la pertinence géophysique des couches de cisaillement en rotation, nous résumons les études précédentes sur ce sujet sur la structure des couches de cisaillement (Proudman, 1956; Stewartson, 1957, 1966; Dormy *et al.*, 1998) et leurs instabilités, aussi bien de manière théorique (Busse, 1968; Kuo, 1949; Moore & Saffman, 1969) qu'expérimentale (Hide & Titman, 1967; Niino & Misawa, 1984; Früh & Read, 1999; van de Konijnenberg *et al.*, 1999) ou numérique (Hollerbach, 2003).

Notre modèle quasi-géostrophique (QG) est détaillé au §3.3.3 (et fait l’objet d’une description encore plus détaillée au chapitre 2 de cette thèse). Le §3.3.4 traite de la couche de Stewartson, et compare le modèle QG avec les résultats existants. Le §3.3.5 étudie la structure radiale des instabilités, ainsi que son évolution asymptotique pour des petits nombre d’Ekman. Lorsqu’on a un effet β (une pente), l’instabilité est une onde de Rossby ce qui entraîne un comportement radicalement différent selon le signe de Ro . Nous pouvons alors expliquer la plupart des différences entre $Ro > 0$ et $Ro < 0$ qui étaient restées incomprises jusqu’alors. Nous montrons également que l’extension radiale de ces instabilités est indépendante du nombre d’Ekman dans certains cas, ce qui est très différent de l’instabilité thermique dans la même situation (voir Dormy *et al.*, 2004).

Dans le §3.3.6 nous établissons les lois d’échelle asymptotiques à partir d’un modèle linéaire simple, notamment pour le nombre de Rossby critique d’apparition des instabilités Ro_c . Pour un récipient à fond plat on a $Ro_c \sim Ek^{3/4}$ (Busse, 1968), tandis que pour un récipient présentant une pente, on a $Ro_c \sim \beta Ek^{1/2}$ où $\beta = 1/L dL/dr$ est la pente logarithmique. C’est ce dernier critère qui s’applique aux récipients sphériques. Nous établissons également un critère de type Rayleigh, qui permet d’évaluer plus quantitativement le seuil d’instabilité et les effets d’asymétrie induit par la propagation de l’onde de Rossby. Des résultats numériques obtenus avec notre modèle QG pour différentes géométries sont également donnés ici.

Dans le §3.3.7, Nous comparons nos résultats avec les expériences précédentes (Hide & Titman, 1967; Niino & Misawa, 1984; Fröh & Read, 1999) ainsi qu’avec nos propres résultats expérimentaux, afin de confronter notre modèle à différentes géométries. Les couches de Stewartson correspondant à ces géométries sont représentées sur la figure 3.3. Le comportement global des instabilités est bien reproduit, malgré un manque d’accord quantitatif.

Enfin, le §3.3.8 ouvre la discussion sur les problèmes encore ouverts.

L’annexe au §3.3.9 développe les calculs aboutissant aux résultats concernant la structure radiale des instabilités, et celle du §3.3.10 donne les seuils d’instabilités expérimentaux et numériques dans diverses configurations. On trouvera également à la fin de ce document (annexe §C.2) la dérivation de l’expression explicite du pompage d’Ekman dans une sphère, dont une version allégée accompagnait l’article.

3.3 Article : Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer

Article ([Schaeffer & Cardin, 2005b](#)) soumis à Phys. Fluids

3.3.1 abstract

We study the destabilization of a shear layer, produced by differential rotation of a rotating axisymmetric container. For small forcing, this produces a shear layer, which has been studied by Stewartson and is almost invariant along the rotation axis. When the forcing increases, instabilities develop. To study the asymptotic regime (very low Ekman number E), we develop a quasi-geostrophic two-dimensional model, whose main original feature is to handle the mass conservation correctly, resulting in a divergent two-dimensional flow, and valid for any container provided that the top and bottom have finite slopes. We use it to derive scalings and asymptotic laws by a simple linear theory, extending the previous analyses to large slopes (as in a sphere), for which we find different scaling laws. For a flat container, the critical Rossby number for the onset of instability evolves as $E^{3/4}$ and may be understood as a Kelvin-Helmoltz shear instability. For a sloping container, the instability is a Rossby wave with a critical Rossby number proportional to $\beta E^{1/2}$, where β is related to the slope. We also investigate the asymmetry between positive and negative differential rotation and propose corrections for finite Ekman and Rossby numbers. Implemented in a numerical code, our model allows us to study the onset over a broad range of parameters, determining the threshold but also other features such as the spatial structure. We also present a few experimental results, validating our model and showing its limits.

3.3.2 Introduction

Background

The destabilization of a shear layer in a rotating system is of general geophysical interest. Shear layers dominated by the Coriolis force, are found in natural systems, as in the atmosphere or in the ocean, as well as on other planets like the jets of Jupiter, which might be unstable and responsible for the observed big eddies.

This work considers the shear layer produced by differential rotation of the boundaries of a fast rotating container, in axisymmetric geometries. The linear problem resulting in cylindrical shear layers aligned with the axis of rotation has been studied by [Stewartson \(1966\)](#) in the spherical shell geometry. He pointed out the nested shear layer structure and their scaling. This problem is closely related to the simpler case of a split cylinder solved earlier by [Stewartson \(1957\)](#) too. In that case, the structure of the shear layer is simpler, but there is still a nested structure. The general structure of these detached shear layers is studied by [Moore & Saffman \(1969\)](#) by focusing on the singularities of the boundary-layer equations. Later, a numerical study has been done by [Dormy et al. \(1998\)](#), recovering the features and scalings predicted by [Stewartson](#).

The linear stability of this kind of layers has been theoretically investigated by [Busse \(1968\)](#) who applied a linear stability theory to the pressure equation in both cases of constant and varying depth. He neglected the bulk viscosity but kept the Ekman friction, recovering some kind of Rayleigh criterion, showing that for the flat case, one should expect a critical Rossby number $Ro_c \sim E^{3/4}$ (where E is the Ekman number). For a varying depth container, he discussed the criterion obtained by [Kuo \(1949\)](#).

One may notice that the difference between flat and varying depth containers has been made explicit by [Busse \(1970\)](#) for thermal instabilities in rapidly rotating systems : for a flat container the instability is of Bénard type (critical Rayleigh number Ra_c independent of Ekman number), whereas for a spherical shell the instability is a thermal Rossby wave ($Ra_c \sim E^{-1/3}$).

The setup of [Hide & Titman \(1967\)](#), with a central horizontal disk rotating differentially in a flat cylindrical tank, gives unexpected results which are not yet well understood. They also observed a strong asymmetry between positive and negative differential rotation. Later, [Niino & Misawa \(1984\)](#) performed a similar experiment but with the differential rotation concentrated on the bottom of their flat tank. They find a critical local Reynolds number for the destabilization of the flow, independent of the Ekman number. Their linear theory which includes both Ekman friction and bulk viscosity is in very good agreement with their results. They point out that the bulk viscosity is very important to reproduce accurately the experimental results. They showed that a critical local Reynolds number (defined for the shear layer) describes the threshold of instability properly.

Later, [Früh & Read \(1999\)](#) reproduced almost exactly the case studied by [Stewartson \(1957\)](#). The stability threshold they found is still governed by a critical local Reynolds number, but the theory of [Niino & Misawa](#) predicts a value much lower than the observed one. They also observed that the behavior of the flow does not depend strongly on the sign of the differential rotation.

The shear-flow instabilities in a parabolic tank and a free surface was investigated by [van de Konijnenberg *et al.* \(1999\)](#). They studied both cases with constant depth or varying depth and pointed out that the varying depth has a stabilizing effect, as predicted by the linear theory. However, their setup uses the centrifugal force to adjust the slope of the free surface, so that the slope is directly related to the rotation rate.

More recently, using a 3D code, [Hollerbach \(2003\)](#) studied the differences between positive and negative differential rotation for the onset of these instabilities, pointing out the importance of the geometry of the container.

[Hollerbach \(2003\)](#) computed numerical solutions for the instability of the Stewartson layer between two rotating spheres. Meanwhile, we ran the corresponding experiment, measuring the threshold. Details of the experimental setup can be found in §3.3.7. The results of these two studies are in agreement, and summarized in figure 3.7. The study of [Dormy *et al.* \(1998\)](#) showed that the asymptotic regime of the Stewartson problem cannot be illustrated numerically for Ekman numbers higher than 10^{-5} . Unfortunately, neither the experimental nor the numerical approaches were able to reach Ekman numbers lower than $10^{-5.5}$. This number should be compared with geophysical flows, where Ekman numbers can be much smaller : for the Jovian atmosphere, the oceans and the Earth core the Ekman

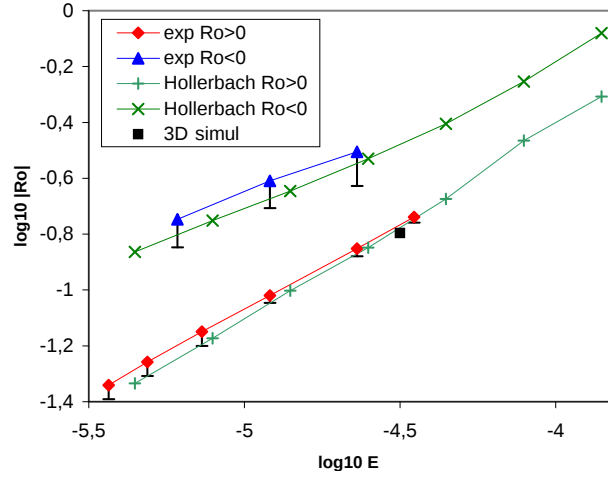


FIG. 3.7 – Critical Rossby number versus Ekman number for the spherical shell geometry. The results obtained numerically by [Hollerbach \(2003\)](#) and our lab experiment are in good agreement. The symbols represent established instability, and the error bars the domain where instability was not always clear. “3D simul” is a run with our own 3D code.

number is smaller than 10^{-10} .

Outline

To study the very low Ekman number regimes we use a quasi-geostrophic (QG) model, detailed in §3.3.3 : we derive the equations of an improved QG-model, that will be used to address the problem in the next sections, through numerical computations and theoretical analysis of the equations. This QG-model is improved over previous ones by taking into account the mass conservation and Ekman friction. The latter is also dynamically important for non-linear regimes because of its dissipative nature. We were able to benchmark this model with some fully 3D computations by [Hollerbach \(2003\)](#) and the results are quite encouraging.

§3.3.4 presents results concerning the Stewartson layer, comparing the QG-model with existing results, showing its ability to reproduce the axisymmetric flow. A numerical code based on the quasi-geostrophic approximation allows us to reach Ekman numbers as low as 10^{-10} which is very likely to lie in the asymptotic regime, from which extrapolations can be made to even lower Ekman numbers.

In §3.3.5, using numerical calculations as well as theoretical arguments, we investigate the spatial structure of the instability and its asymptotic evolution when lowering the Ekman number. When a β -effect is present, the instability is a Rossby wave, and consequently we find that its spatial structure changes dramatically with the sign of the differential rotation. This explains the asymmetric sensitivity to geometry studied by [Hollerbach \(2003\)](#). Another interesting feature is that the radial extent of the instability may be independent of the Ekman number in some particular cases.

In §3.3.6 we derive the scaling laws expected in the asymptotic regime, focusing on the

stability threshold. For a flat container, an $E^{3/4}$ law is recovered for the critical Rossby number. We extend this study to finite slopes, in which case the scaling changes to $\beta E^{1/2}$, where β is related to the slope. This scaling is the one that should be applied to spherical shells. We perform an analysis leading to a Rayleigh-like criterion, which allows us to evaluate quantitatively the effect of the asymmetry induced by the Rossby wave mechanism. Numerical results obtained with our QG-model are also reported here, for various geometries.

§3.3.7 compares our results with previous experiments, as well as with our own, to span a wide range of different geometries. Despite the lack of quantitative agreement between numerical results obtained with the QG-model and the experimental data, the global behaviour of the instability is captured. Finally we conclude in §3.3.8 with a discussion.

3.3.3 Quasi-geostrophic model

The two-dimensional quasi-geostrophic (QG) model we present here has been developed to study the dynamics of a fluid in a rapidly rotating container, invariant by rotation around the rotation axis, without being restricted to the small slope case. We use the cylindrical coordinate system $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, with r the distance to the axis, ϕ the angle in the plane perpendicular to that axis, and z the height. The container is defined by two functions $z = L_+(r)$ and $z = L_-(r)$, for the top and the bottom surfaces respectively. Here, we first restrict to the simpler case where $L(r) = L_+(r) = -L_-(r)$.

In a frame rotating at angular velocity Ω_0 around the vertical axis z , the flow is described by the Navier-Stokes equation for an incompressible fluid with constant density, including the Coriolis force :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.2)$$

where $\vec{u}$ is the fluid velocity field, ν the kinematic viscosity, and Π the reduced pressure field, including centrifugal and gravity potentials. We introduce a velocity scale U , a time scale Ω_0^{-1} and as typical length scale R the radial size of the container. We then rewrite equation 3.2 with non-dimensional quantities :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{Ro} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \Pi + E \nabla^2 \vec{u} \quad (3.3)$$

with $\text{Ro} \equiv U/R\Omega_0$ the Rossby number, $E \equiv \nu/R^2\Omega_0$ the Ekman number, and $\vec{e}_z$ the unit vector along the rotation axis.

In our study, we take for typical velocity the one based on the differential rotation $U = R\Delta\Omega$, which is supposed to dominate. Hence, the Rossby number reduces to $\Delta\Omega/\Omega_0$.

z -averaged vorticity equation

For vanishing Ekman and Rossby number, the Proudman-Taylor theorem ensures that the flow is invariant along the rotation axis direction ($\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$). This suggests that for

small Rossby and Ekman numbers, the z -variations should be weak and we expect the flow to be mainly two-dimensional for long-period motions ($\gg \Omega_0^{-1}$).

We define the z -averaging $\langle \rangle$ by

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} u(r, z) dz \quad (3.4)$$

Keeping in mind that L depends on r , we have

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial r} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial r} \left(\frac{u(r, +L) + u(r, -L)}{2} - \langle u(r, z) \rangle \right)$$

Hence, a sufficient condition for the r -derivative to commute with z -averaging is that u is independent of z , that is $u = \langle u \rangle$.

We now average the z -component of the curl of equation 3.3 with the additional constraint that u_r and u_ϕ are independent of z (so that we can permute r -derivation and z -averaging). The z -component of the vorticity $\vec{\omega}$ is denoted by ω and is also z -invariant. We obtain

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{Ro} \left(u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right) - (2 + \text{Ro} \, \omega) \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = E \nabla^2 \omega \quad (3.5)$$

Note that we keep the vortex stretching term $\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle$. All other terms vanish, without any condition on u_z .

Mass conservation

The local mass conservation equation for an incompressible fluid,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

implies that $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ is independent of z , so that we can now draw a global picture of the flow in the frame of our QG-model.

- u_r and u_ϕ are z -invariant
- u_z depends linearly on z .

Boundary conditions and Ekman pumping

At the boundaries, Ekman layers will smooth out the vorticity jump. Their thickness is supposed to be small ($E \ll 1$), and we will use the asymptotic expression given by Greenspan (1968), equation 2.6.13 :

$$\vec{u}^1 \cdot \vec{n} \Big|_{\pm L} = -\frac{1}{2} E^{1/2} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge (\vec{u} - \vec{U}_b) \pm (\vec{u} - \vec{U}_b)}{\sqrt{|\vec{n} \cdot \vec{e}_z|}} \right) \quad (3.7)$$

where $\vec{U}_b$ is the velocity of the boundary. An important point is that expression 3.7 is valid for time-dependent flows with time scales larger than a few rotation periods. Greenspan used that expression to study the spin-up process in a sphere, which is a time-dependent flow with time scale of order $E^{-1/2}$, and Brito *et al.* (2004) show experimental data in very good agreement with this linear theory. It is the suitable approximation for our study, as we will find typical period of order $E^{-1/4}$ in section 3.3.6. This gives us the appropriate boundary conditions for our problem, allowing us to express the vertical velocity. Defining β

$$\beta \equiv \frac{1}{L} \left. \frac{\partial L}{\partial r} \right|_{z=L} \quad (3.8)$$

we have

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = E^{1/2} \cdot P(u_r, u_\phi, r) + \beta u_r \quad (3.9)$$

where P is a function depending on the geometry of the container and linear with respect to the jump of u_r and u_ϕ at the boundary and to their first order derivatives. See Appendix C.2 for the explicit expression for a spherical container.

In the case of a constant-depth container, equation 3.9 reduces to

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{E^{1/2}}{2L} (\omega - \Omega_b) \quad (3.10)$$

where Ω_b is the vorticity at the boundary.

In the case of vanishing Ekman number, the Ekman pumping could be neglected compared to the β term (see §3.4). However, the Ekman friction is a dissipative term whereas the β -term is not, it is thus expected to play an important role for the non-linear dynamics of quasi-geostrophic flows.

The problem is now reduced to the determination of two components of the velocity, u_r and u_ϕ , depending only on r and ϕ . We also need to set a boundary condition on the sides of the container, to be consistent with the modeling of $\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle$, we have to use a no-slip boundary condition $u_r = u_\phi = 0$. At the center ($r = 0$) we impose that u_r and u_ϕ remain finite.

Scalar pseudo-stream function

We introduce a scalar field ψ , defined by

$$u_r \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (3.11)$$

u_ϕ is now constrained by the three-dimensional mass conservation equation 3.6, so that for *non-axisymmetric* flows,

$$u_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} - \beta \psi \quad (3.12)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) - \frac{d\beta}{dr} \psi \quad (3.13)$$

With these equations, we can see that the β -terms are negligible for $\beta\lambda \ll 1$, where λ is a typical radial length scale of the velocity field variations. The model then reduces to the widely used small slope approximation (see e.g. Busse, 1970; Aubert *et al.*, 2003; Kiss, 2003). It will be shown later, that at the stability threshold, the typical length scale is of order $E^{1/4}$, so that asymptotically and at the threshold of instability, the small slope approximation may even be valid in a sphere. However, increasing the forcing, large scale structures will eventually appear, with up to order-one scales, so that we cannot neglect the β -terms any more in a fully turbulent computation.

Similar approaches have been developed recently. Kiss (2003) proposed a formulation for ocean modeling but without the mass conservation correction. Zavala Sanson & van Heijst (2002) include the effect of weak topography and Ekman friction. The advantage of their formulation is that the Ekman pumping is considered as a source of horizontal divergence. However the simple expression they used for the Ekman boundary condition implicitly assumes nearly flat topography (small β).

Axisymmetric flow

For the axisymmetric flow, the scalar function formalism cannot be applied. As it is simpler to work with the velocity field rather than with the vorticity, we project the Navier-Stokes equation 3.3 on $\vec{e}_\phi$, noting that $(\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_\phi = u_r$ and remembering that $\frac{\partial u_\phi}{\partial z} = 0$. Averaging over ϕ to keep only the axisymmetric component, we obtain

$$\frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial t} + \text{Ro} \left(\overline{u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r}} + \frac{\bar{u}_\phi \bar{u}_r}{r} \right) + 2\bar{u}_r = E \left(\nabla^2 \bar{u}_\phi - \frac{\bar{u}_\phi}{r^2} \right) \quad (3.14)$$

where $\bar{u}$ stands for the ϕ -average of u .

The mass conservation equation reduces to

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0$$

and using equation 3.9, we can show that $\bar{u}_r$ is only due to the Ekman pumping and is directly related to $\bar{u}_\phi$ so that the axisymmetric part is actually one-dimensional : $\vec{\bar{u}} = \bar{u}_\phi(r) \vec{e}_\phi + O(E^{1/2})$. However, non-linear interactions of non-axisymmetric modes can produce axisymmetric flow, so that we keep the terms involving $\bar{u}_r$. Furthermore, the Ekman pumping flow $\bar{u}_r^1$ of order $E^{1/2}$ cannot be neglected. Equation 3.7 reduces to

$$\bar{u}_r^1 = E^{1/2} \frac{\alpha}{2L} (\bar{u}_\phi - U_b) \quad (3.15)$$

with

$$\alpha \equiv \left(1 + \left(\frac{dL}{dr} \right)^2 \right)^{1/4} \quad (3.16)$$

Numerical implementation

We wrote a numerical code, that solves the equation of the model described above using the pseudo-stream function formulation. We use a finite difference scheme in the radial direction, and a Fourier expansion in azimuth. The time integration is done using the semi-implicit Cranck Nicholson scheme for the linear part, and a simple Adams-Bashforth scheme for the non-linear terms, which are computed in direct space, as in [Aubert *et al.* \(2003\)](#).

Our numerical implementation is able to handle various geometries from flat containers to spherical ones.

When compared to fully 3D computations, our QG-model gives quite good results for the basic state flow (see §3.3.4) as well as for the stability threshold (see fig. 3.18 and §3.3.7 for more details).

3.3.4 Stewartson layers

The linear study of shear layers due to differential rotation of the walls has been done in the case of two concentric co-rotating disks ([Stewartson, 1957](#)), and in the case of two concentric differentially rotating spheres ([Stewartson, 1966](#)).

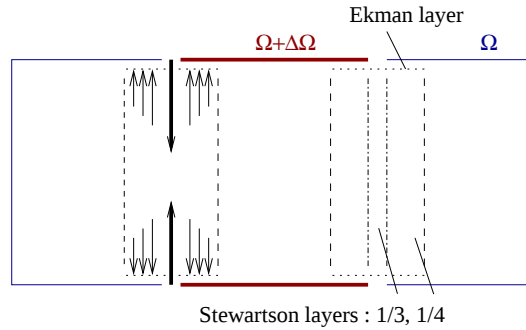


FIG. 3.8 – Sketch of the nested Stewartson layers. The arrows show the Ekman pumping inside these layers.

At first order, the flow is invariant along the direction of the rotation axis, and consists of a shear layer which is smoothing out the velocity discontinuity. There are actually two nested layers (see fig. 3.8) with width scaling like $E^{1/3}$ for the inner layer, and $E^{1/4}$ for the outer one. Note that the $1/3$ layer is not two-dimensional and smoothes out the singularity in the Ekman pumping due to the outer layer. For the spherical shell case, the outer layer width scaling is slightly modified to $E^{2/7}$ for $r < r_0$ only. Thus, we can expect that the destabilization of the shear layer in both cases will be closely related.

QG-model predictions

In the linear and stationary regime, when the Rossby number is small equation 3.14 reduces to a balance between the Ekman pumping term 3.15 and the viscous forces in the

bulk.

$$2E^{1/2} \frac{\alpha}{2L} (\bar{u}_\phi - U_b) = E \left(\nabla^2 \bar{u}_\phi - \frac{\bar{u}_\phi}{r^2} \right) \quad (3.17)$$

which defines the Stewartson layer. Introducing Δ , the width of the Stewartson shear layer we easily recover the scaling obtained by [Stewartson](#).

$$\Delta \sim E^{1/4} \quad (3.18)$$

Note that the neglected non-linear terms are small if $Ro/\Delta \ll 1$. In §3.3.6 we will find that $Ro \sim E^a$ with $a \geq 1/2$, validating this approximation near the threshold.

One of the major issues with the QG-model, is that it cannot model the inner $E^{1/3}$ -layer. However, according to the numerical study of [Dormy et al. \(1998\)](#), the $E^{1/3}$ -layer has a negligible effect on the velocity profile at Ekman numbers smaller than $E = 10^{-6}$.

Numerical results

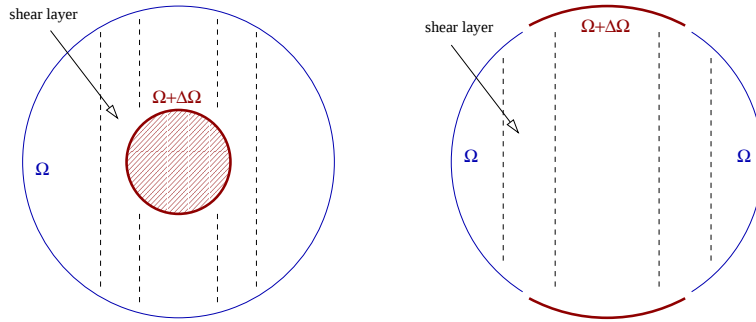


FIG. 3.9 – (a) the spherical shell geometry, studied by [Stewartson \(1966\)](#). (b) the split-sphere geometry this paper focuses on.

The split-sphere geometry consists of a sphere, split at a given cylindrical radius r_0 (see fig. 3.9). We solve equation 3.17 in the frame rotating with the outer part at angular velocity Ω_0 , while the inner part rotates differentially at $\Delta\Omega$ (positive or negative). This linear problem is solved by a simple matrix inversion using a finite difference radial scheme with variable grid spacing. In this case, the boundary velocity U_b is a simple function, $U_b = r$ if $r < r_0$ and $U_b = 0$ if $r > r_0$. The resulting shear layer for $r_0 = 0.35$ is shown on figure 3.10. Properly scaled, all these profiles can be superposed in the asymptotic, small Ekman number, regime. The size of the shear layer scales like $E^{1/4}$, as predicted by [Stewartson \(1957\)](#) and the asymptotic regime seems to be attained for $E < 10^{-6}$.

The spherical shell (see fig. 3.9) geometry is the one studied originally by [Proudman \(1956\)](#), and is also of geophysical relevance because the core of the Earth is composed of a solid iron ball ($r_0 = 0.35$) surrounded by liquid iron. The structure of the Stewartson layer in a spherical shell (including the $E^{1/3}$ -layer), has been modelled numerically by [Dormy et al. \(1998\)](#), with a fully three dimensional code. We have compared their results with the ones obtained with our QG-model for the spherical shell geometry for $Ro = 0$ and find that

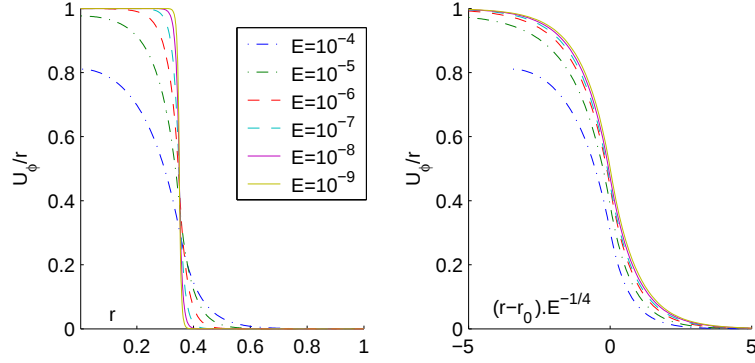


FIG. 3.10 – Basic state flow showing the shear layer which scales with $E^{1/4}$ in the asymptotic low Ekman number regime, for $r_0 = 0.35$ in the split-sphere geometry. (a) shows the raw radial profiles and (b) the same profiles rescaled radially, which merge together when E is sufficiently low ($E \leq 10^{-6}$).

the difference between the two basic state profiles of the angular velocity is always smaller than 0.03 for $E = 10^{-6}$; and for $E = 10^{-8}$ the difference never exceeds 0.008. Hence, we may expect the $E^{1/3}$ -layer to play only a minor role at such small Ekman numbers.

3.3.5 Spatial structure at the onset

Using our QG-model, we obtained numerically the first unstable mode for four geometries : the flat container; a container with an exponential shape ($\beta = -1$ everywhere); the split-sphere geometry (see fig. 3.9); and the disk geometry. The latter is a split-sphere where the polar caps have been replaced by flat disks, to mimic our experimental setup (see fig. 3.19). The first unstable mode is represented on figure 3.11 for all these geometries. Note that in the reference frame chosen for our computations and for small enough Ekman numbers, the mean flow vanishes in the outer region, whereas the inner region is almost in solid body rotation at the angular velocity $\Delta\Omega = \text{Ro} \Omega_0$ (see figure 3.10).

Dependence on the sign of the Rossby number for $\beta \neq 0$

We can observe on figure 3.11 that many features depend on the sign of the Rossby number, for $\beta \neq 0$. The most striking one is the spatial behaviour of the split-sphere arrangement (fig. 3.11b) : for $\text{Ro} > 0$ the instability fills the outer region ($r > r_0$) with spiralling arms, whereas for $\text{Ro} < 0$ the critical mode seems to extend more in the inner region ($r < r_0$), leaving the outer region almost at rest. The constant β case (fig. 3.11a) also shows long range extension in the outer region for $\text{Ro} > 0$, but no spiralling.

To understand all these features, we must turn to the instability mechanism, which is strongly dominated by the slope β . Figure 3.12 sketches this mechanism. For a column of local vorticity ω moved to a deeper region, the conservation of mass and total vorticity ($2\Omega_0 + \omega > 0$) leads to the following behaviour : If $\omega > 0$ the local vorticity is amplified, and if $\omega < 0$ it is damped.

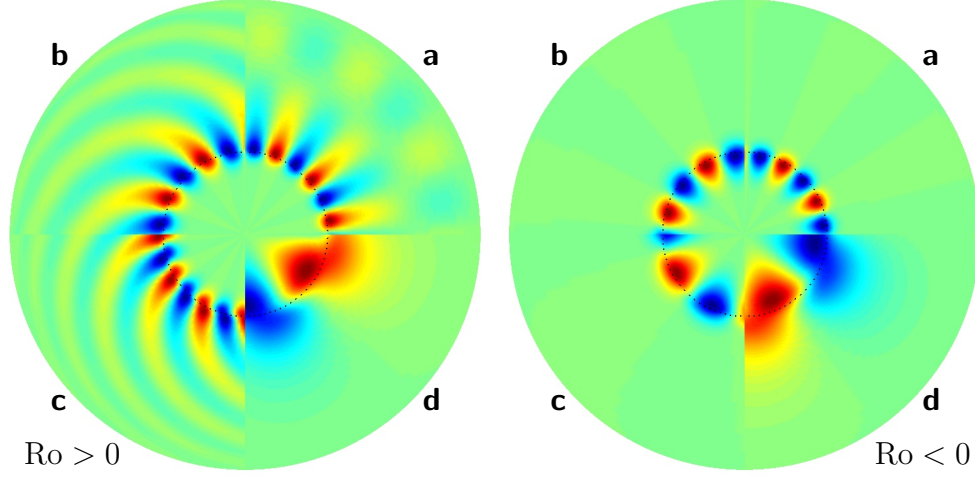


FIG. 3.11 – North-pole views of the radial velocity for the first unstable mode at $E = 10^{-6}$ for various geometries. Red is positive, blue negative, and green zero. The picture on the left is for $Ro > 0$, and the one on the right is for $Ro < 0$. On each picture, (a) shows the constant $\beta = -1$ geometry; (b) shows the split-sphere case; (c) is the disk setup; and (d) is the unstable mode for a flat container ($\beta = 0$).

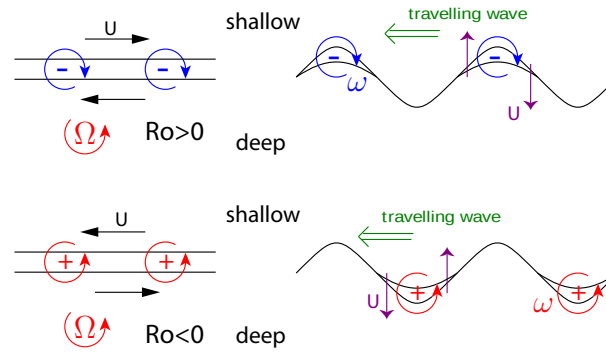


FIG. 3.12 – Instability mechanism showing a different spatial behavior depending on the sign of the Rossby number

Hence, for $Ro > 0$ the vorticity sheet is negative implying that the perturbation is damped in the deeper region, whereas it is amplified in the shallow region. For $Ro < 0$, it is the opposite. In both cases, the amplified vorticity will induce a flow which induces a drift of the pattern in the prograde direction (as for any Rossby wave).

This fundamental asymmetry between positive and negative Rossby numbers partly explains the results obtained by [Hollerbach \(2003\)](#). We will discuss an example in §3.3.7.

Radial scalings

In figure 3.11abc the perturbation of the shear layer spreads across the whole volume whereas in the flat container case (fig. 3.11d) or the thermal convection instability in a sphere (see [Dormy et al., 2004](#)), it is radially localized. This is explained by a simple model detailed in appendix 3.3.9, and the main results obtained are summarized in the following lines.

For small β as in the inner part of the split-sphere arrangement, the critical mode has a radial extension comparable to its azimuthal scale, without oscillations; but for large β as it is the case for the outer part of the split-sphere arrangement, the instability consists of a rapid oscillation of radial length scale λ related to the azimuthal wave-number m by

$$\lambda \sim m \sqrt{|2\beta|} \quad (3.19)$$

This rapid oscillation is contained in an envelope of radial size

$$\Lambda \sim (2|\beta|)^{-1/2} \alpha^{-1} E^0 \quad (3.20)$$

Equation 3.20 implies that the radial extent of the perturbation is independent of E . This spatial structure corresponds to the spiralling of the Rossby wave observed for variable β (see fig. 3.11bc). We may also notice a fundamental difference with the thermal convection case investigated by [Yano \(1992\)](#) and [Jones et al. \(2000\)](#) where the $E^{1/6}$ radial extension decreases with E , so that the instability remains localized for small enough E .

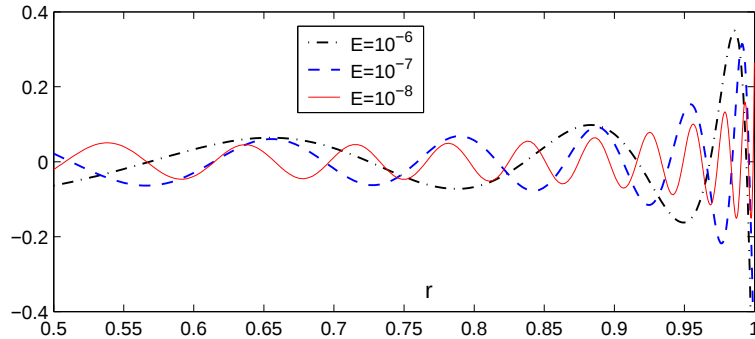


FIG. 3.13 – Vorticity profile at fixed ϕ at the stability threshold for $Ro > 0$ in the outer region.

Numerical results We show in figure 3.13 a radial vorticity profile (at a fixed ϕ) obtained with the split-sphere setup. It shows that the vorticity gets amplified by the decreasing depth as approaching the equator, while the spatial frequency of the oscillations increases, in agreement with equation 3.19. In addition even when decreasing E , the perturbation seems to spread across the whole width of the tank, as predicted by the scaling 3.20. This is not due to the singularity of the QG-model at the equator, because we also observed the same phenomena with a truncated sphere, where the slope remains finite (see §3.3.6).

The scaling 3.19 is observed quantitatively in numerical simulations as shown on figure 3.14. On this curves we can also see the effect of the equatorial boundary, which modifies the scaling near $r = 1$. When β is constant, there is no spiralling but the instability still fills the whole gap, as figure 3.11a shows.

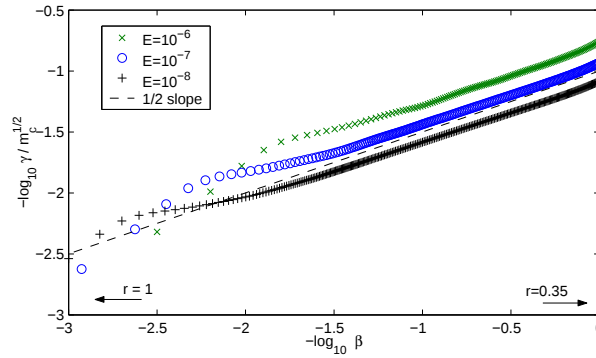


FIG. 3.14 – Evolution of the radial size (evaluated using spatial derivation) of the unstable mode near the equatorial singularity for the split-sphere geometry. All these curves exhibit a wide range of slope 1/2, which is the expected trend to cancel phase-mixing. Near the equatorial boundary ($r = 1$) this scaling is no longer valid.

3.3.6 Asymptotic laws for the onset

Scaling analysis

We perform a linear stability analysis on equation 3.5. Let $U(r) \vec{e}_\phi$ be the basic state velocity profile solution of the linear equation 3.17 (for $Ro = 0$), and $\vec{u}$ the perturbation. With Ω the vorticity associated with $U(r)$:

$$\Omega = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r}$$

we find

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + Ro \left(u_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{U}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right) - 2 \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = E \nabla^2 \omega \quad (3.21)$$

where we have neglected the small local vorticity $Ro \Omega$. We now introduce the frequency f of the disturbance, and its azimuthal wave-number m .

At the stability threshold, we expect the inertial terms to be both of the same magnitude,

$$\Delta^{-2} \sim m^2$$

which implies the wave-number of the perturbation to be comparable to the thickness of the shear layer

$$m \sim \Delta^{-1} \sim E^{-1/4}$$

Without slope When there is no slope equation 3.9 reduces to

$$\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = -\frac{E^{1/2}}{2L} \omega \quad (3.22)$$

so that equation 3.21 gives in terms of order of magnitude :

$$mf + \text{Ro} \Delta^{-2} + \text{Ro} m^2 \sim \frac{E^{1/2}}{L} m + Em^3$$

With $m \sim E^{-1/4}$, the stability threshold is given by a balance between the non-linear forcing and the viscous damping :

$$\text{Ro}_c \sim E^{3/4}$$

which is the result obtained by the linear theory of Busse (1968) and by the critical local Reynolds number ($Re \sim \text{Ro} E^{-3/4}$) theory of Niino & Misawa (1984). It is also consistent with the experimental results of Niino & Misawa (1984) and Früh & Read (1999) and corresponds to a Kelvin-Helmoltz instability of the shear layer.

For an oscillatory instability, the frequency f should be consistent with $mf \sim \text{Ro} m^2$, and so

$$f \sim E^{1/2}$$

This effect, if present, may be very difficult to separate from the advection of the pattern, because they are of similar amplitudes.

With slope When the slope is important, $\frac{\partial u_z}{\partial z} \simeq \beta u_r$, and so equation 3.21 gives the following balance :

$$mf + \text{Ro} \Delta^{-2} + \text{Ro} m^2 + 2\beta \sim Em^3$$

If again $m \sim E^{-1/4}$, the viscosity is negligible and the stabilization is due to the slope : the instability has to overcome the Proudman-Taylor constraint. As a matter of fact, from a balance between slope and forcing, we find

$$\text{Ro}_c \sim 2\beta E^{1/2} \quad (3.23)$$

This is the expected scaling for non-flat containers such as spherical shells, and is quite different from the flat case. This result agrees with the criterion obtained by Kuo (1949) applied to a Stewartson layer.

For a time-dependent instability, the frequency f verifies $mf \sim 2\beta$, and

$$f \sim \frac{2\beta}{m}$$

which is the Rossby wave dispersion relation. At the onset, we may notice that the Ekman pumping is comparable to viscous dissipation in the bulk of the fluid.

Rossby wave asymmetry effect

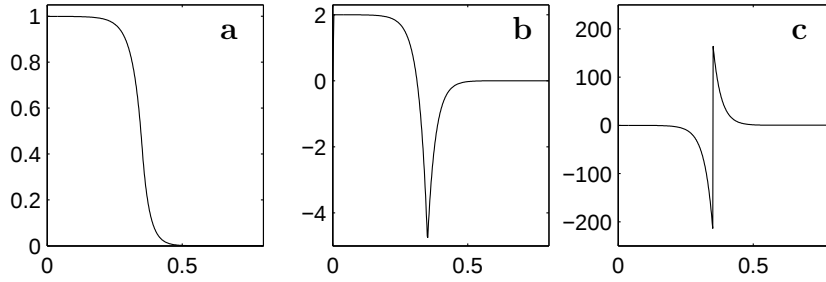


FIG. 3.15 – Basic state axisymmetric flow profiles (solution of eq. 3.17), as a function of radius r for $E = 10^{-6}$ and a split-sphere geometry with $r_0 = 0.35$. (a) rotation velocity U/r ; (b) vorticity Ω ; (c) radial derivative of vorticity $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$.

As stated in §3.3.5, the instability develops as a Rossby wave. Here we give a Rayleigh-like criterion for the onset of instability and use it to evaluate the asymmetry induced by the Rossby wave.

The basic state flow U , represented on figure 3.15 is the solution of the linear equation 3.17. The sign and amplitude of the forcing are both controlled by the parameter Ro in equation 3.21. We are looking for solutions of the form $\psi(r, \phi, t) = e^{im\phi + \lambda t} \psi(r)$. We use the ψ formulation introduced in section 3.3.3, but without the β -terms to keep simpler expressions. Ignoring Ekman friction and viscosity, we obtain from equation 3.21

$$\left(\lambda + \frac{im}{r} Ro U \right) \omega[\psi] = \left(2\beta - Ro \frac{\partial\Omega}{\partial r} \right) \frac{im}{r} \psi \quad (3.24)$$

Multiplying by $\psi^* L(r)r$ and integrating over r we have

$$\int_0^1 \omega[\psi] \psi^* L r dr = \int_0^1 \frac{2\beta - Ro \frac{\partial\Omega}{\partial r}}{\lambda + \frac{im}{r} Ro U} im |\psi|^2 L dr \quad (3.25)$$

Expanding the left hand side of this equation, and integrating by part, we obtain

$$\int_0^1 \psi^* \left(\frac{m^2}{r^2} \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right) L r dr = \int_0^1 \frac{m^2}{r^2} \psi \psi^* L r dr + \left[\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial r} \right]_0^1 - \int_0^1 \left| \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|^2 L r dr$$

and from the boundary conditions the bracketed term vanishes, leading to

$$\int_0^1 \left(\frac{m^2}{r^2} |\psi|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|^2 \right) L r \, dr = \int_0^1 \frac{im |\psi|^2 \left(2\beta - \text{Ro} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \left(\lambda^* - \frac{im}{r} \text{Ro} U \right)}{\left| \lambda + \frac{im}{r} \text{Ro} U \right|^2} L \, dr$$

With $\text{Re}(\lambda)$ the real part of the complex number λ , the imaginary part of this equation gives

$$0 = \text{Re}(\lambda^*) \int_0^1 \frac{|\psi|^2 \left(2\beta - \text{Ro} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)}{\left| \lambda + \frac{im}{r} \text{Ro} U \right|^2} L \, dr \quad (3.26)$$

For a mode to be unstable, we need $\text{Re}(\lambda^*) \neq 0$, which means that there is an r for which

$$2\beta - \text{Ro} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0 \quad (3.27)$$

This is exactly the criterion already obtained by [Kuo \(1949\)](#). Using the complete pseudo-stream function given in section 3.3.3 would lead to the same result. Therefore, the determination of the stability threshold will not be affected by using the small slope approximation, as it is usually done for the thermal convection case (see [Busse, 1970](#)).

The critical Rossby number Ro_c that will satisfy 3.27 will be obtained for the maximum value M of $\left| \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|$. We must now take care of what value of β comes into that expression. Actually, the shear layer samples the values of β about Δ to the left or to the right of the split radius r_0 , depending on the sign of Ro . Then we have

$$|\text{Ro}_c^\pm| = \frac{2 |\beta(r_0 \pm \Delta)|}{M} \quad (3.28)$$

At that point, remembering that the $E^{1/3}$ -layer smoothes out discontinuities in $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$, we can expect that it will reduce the value of M , resulting in an higher Ro_c . Hence, the effect of the $E^{1/3}$ -layer may be essentially to increase the critical Rossby number.

Assuming β is a smooth function and Δ is small enough to use a Taylor expansion

$$|\beta(r_0 \pm \Delta)| = |\beta_0| \pm \Delta \left(\frac{\partial |\beta|}{\partial r} \right)_0$$

we obtain

$$|\text{Ro}^\pm| = 2 \Delta^2 \left(|\beta_0| \pm \Delta \left(\frac{\partial |\beta|}{\partial r} \right)_0 \right)$$

This shows a fundamental asymmetry between positive and negative Ro due to the Rossby-wave nature of the instability.

Numerical results

Split-sphere geometry In the split-sphere geometry, the slope parameter β becomes very large near the equator and the expression of the Ekman pumping we use is no longer valid near the equator as the Ekman layer becomes singular (Roberts & Stewartson (1963); see also §C.2.3). However, this area is very small and so we expect that it will not affect the determination of the stability threshold. To test this we followed the idea of Yano *et al.* (2003) and truncated our container at $r = 0.9$ to prevent the slope from growing to large near the equator. The solutions showed the same features as the untruncated calculation and very similar stability thresholds.

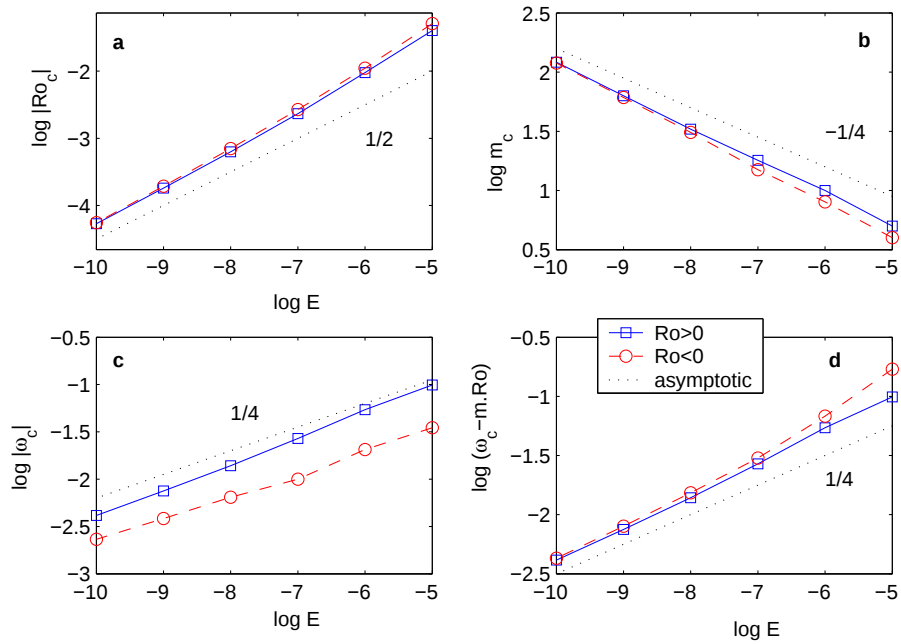


FIG. 3.16 – Stability threshold data (given in table 3.3) as a function of the Ekman number. (a) represents the threshold; (b) shows the critical wave number; (c) is the raw pulsation at the threshold; (d) is the pulsation corrected for advection effects. Dotted lines indicate the asymptotic exponent obtained in §3.3.6.

The results for the stability threshold are given in appendix 3.3 and plotted in figure 3.16. They seem to match the asymptotical scaling obtained previously, especially for small Ekman numbers. We expect the perturbation to be a Rossby wave and in order to compare its pulsation with the asymptotic laws, we need to correct for the advection by the mean flow. Considering that the outer region (where the $Ro > 0$ instability develops) is not advected, we don't correct the $Ro > 0$ data. However the inner region (where the $Ro < 0$ case develops) can be considered as in solid body rotation (for small Ekman numbers) and the simplest way to correct for the advection is then to subtract the rotation rate $\Delta\Omega$ from the phase speed $c = \omega/m$ for $Ro < 0$. The pulsations of the Rossby waves are plotted in figure 3.16d, and they agree quite well with the asymptotic law, for both positive and

negative Ro .

We checked that the difference between critical positive and negative Rossby number is proportional to $E^{1/4}$, in agreement with the findings of §3.3.6.

With our numerical code, we are able to test various boundary conditions. We report that the boundary conditions (free-slip or no-slip) hardly affect the stability threshold, whereas the presence of Ekman friction has a small yet visible effect. The divergence correction we introduced in §3.3.3 seems to be negligible at the threshold. The results of these tests are summarized in table 3.4.

Other geometries We report the results of the numerical computations for the four studied geometries. To compare the flat and non-flat case, we set up different geometries and do all the computation using our numerical implementation of the QG-model described in §3.3.3. For the flat geometry we choose a flat cylindrical container with a height equal to its diameter. We also set up a container with an exponential shape, defined by $\beta = -1$ everywhere. The split-sphere geometry studied in detail in §3.3.6 and finally the disk setup. This latter geometry is a split-sphere where the polar caps have been replaced by flat disks to mimic our experimental setup (see fig. 3.19). However, with the QG-model we are not able to take the height-jump at the edge of the disks into account, so the resulting disk geometry is in fact flat for $r < r_0$ and spherical for $r > r_0$, with no height jump. The results obtained are summarized in figure 3.17. The critical wave-number data shows that

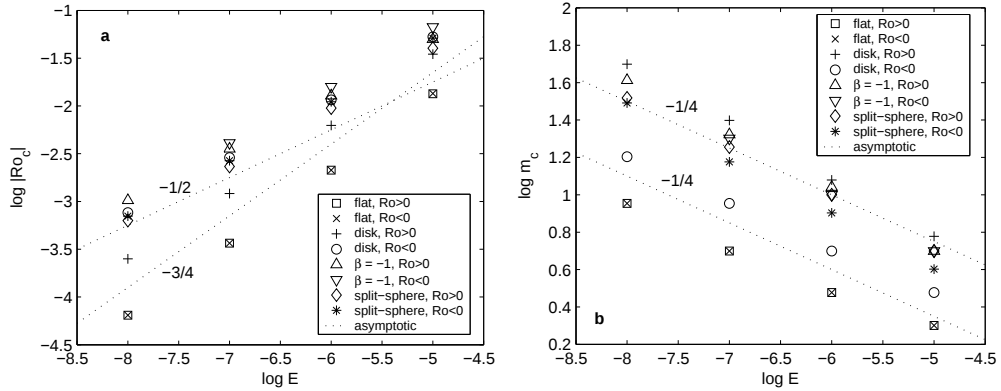


FIG. 3.17 – Critical Rossby number (a) and critical wavenumber (b) for various geometries. Dotted lines indicate the asymptotic exponent obtained in §3.3.6.

the evolution of m_c follows an $E^{1/4}$ law, for both flat and non-flat cases, as expected from the asymptotic study (§3.3.6). For the flat geometry, there is no difference between positive and negative Rossby number. The split-sphere setup, the $\beta = -1$ case and the disk geometry for $Ro > 0$ have comparable critical wave-numbers.

The flat geometry has much lower critical wave-numbers and Rossby numbers. From figure 3.11d we also see that the first unstable mode is totally symmetric when changing the sign of Ro . It is also different from all the other cases (a,b and c) which present important slopes. The disk geometry seem to be a hybrid case between flat and non-flat geometry :

E	Ro_c^F	m_c^F	Ro_c^S	m_c^S
$1.1 \cdot 10^{-5}$	0.044	6-8	0.021	6
$8.3 \cdot 10^{-6}$	0.032	6-8	0.017	6
$5.6 \cdot 10^{-6}$	0.025	6-8	0.013	7

TAB. 3.1 – Comparison between the experimental results of [Früh & Read \(1999\)](#) (denoted by $.^F$) and the numerical results we obtain ($.^S$) for the stability threshold.

E	Ro_c^N	m_c^N	Ro_c^S	m_c^S
$3.0 \cdot 10^{-5}$	0.050	5-6	0.048	5
$6.0 \cdot 10^{-6}$	0.015	7-9	0.0145	8

TAB. 3.2 – Comparison between the experimental results of [Niino & Misawa \(1984\)](#) (denoted by $.^N$) and the numerical results we obtain ($.^S$) for the stability threshold.

From 3.11c, the spatial structure for $Ro > 0$ is very much like the split-sphere setup, whereas for $Ro < 0$ it seems to be somewhere in between split-sphere and flat geometry. The figure 3.17b confirm this, with a critical wave-number between flat and non-flat. This is because the $Ro < 0$ instability develops in the flat inner region. On the other hand, figure 3.17a shows a critical Rossby number for $Ro < 0$ very close to the split-sphere arrangement, whereas the $Ro > 0$ seems to follow rather a slope-like $E^{3/4}$ law, even if the threshold is significantly higher than for the flat container.

3.3.7 Comparison with experiments

Flat container

We reproduce numerically the constant depth experiments done by [Früh & Read \(1999\)](#). The results of our linear calculation for the threshold are significantly lower than the experimental ones, but are in good agreement with the theory of [Niino & Misawa \(1984\)](#). The critical wave-length is in good agreement as shown in table 3.1.

To explain the discrepancy between experiment and theory, [Früh & Read \(1999\)](#) invoke the lack of the inner $E^{1/3}$ layer in the modeling of [Niino & Misawa \(1984\)](#), which is also missing in this QG-model.

We also reproduce numerically the experiments of [Niino & Misawa \(1984\)](#), which has the particularity of having differential rotation only at the bottom of the tank, while the top is rotating at the mean angular velocity. Results are reported in table 3.2 and agree surprisingly well with the original experimental data, as did their numerical calculations.

Spherical shell geometry

The case of a spherical shell is quite singular : β has opposite sign for $r < r_0$ and $r > r_0$, and the magnitude of β is much higher for $r < r_0$. This implies that Rossby waves travel in

opposite directions in these two regions. For positive Ro , the instability may develop either in the $r > r_0$ region or in the $r < r_0$ one (see §3.3.5 and fig. 3.12). In both directions the depth is decreasing, but from eq. 3.23 we know that the instability will appear in the outer region ($r > r_0$) where the magnitude of β is lower. However, for negative Ro there is no deeper region around the shear layer, where the instability may be amplified by β -effect, so that we expect the threshold to be much higher and maybe the instability to be of a different kind, as the very small azimuthal wave-number observed by Hollerbach (2003) may suggest.

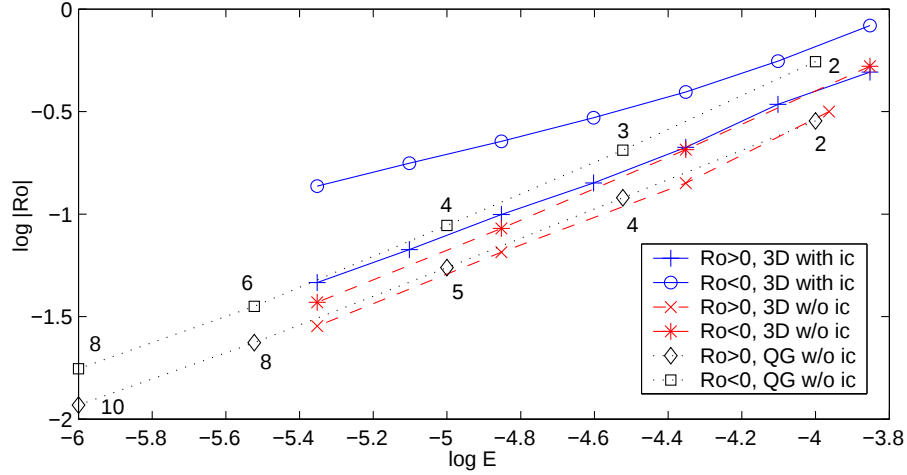


FIG. 3.18 – Critical Rossby numbers obtained by Hollerbach (2003, summary of his fig. 4 and 8a) showing the impact of the slope on the stability threshold. We also plotted the corresponding results obtained with our QG-model (basic state shear layer obtained with an inner core, instabilities computed without) including the critical mode. When removing the inner core (ic), the threshold drops, and positive and negative Rossby numbers get closer. Our QG-model is close to the fully 3D results of Hollerbach

We reported on figure 3.18 the data found in his paper. To check the effect of the geometry, he computed the basic-state shear layer in a spherical shell geometry, then took the profile obtained at mid-depth and extended it to all z , generating a z -invariant profile in a full sphere (see Hollerbach, 2003, §5). He finally computed the instabilities of that flow. By artificially removing the inner sphere (and by that way losing the singular geometrical property described above), Hollerbach recovers stability thresholds very close to the $Ro > 0$ case, which is much less modified by this process, for it is anyway controlled by the moderate slopes of the outer sphere.

We repeated exactly the same procedure with our QG-model : we computed the basic state shear layer with an inner-core ($r_0 = 0.35$), and then computed the stability threshold of this velocity profile in a full sphere geometry (without inner core). The results are compared with the 3D computations of Hollerbach on figure 3.18. For $Ro < 0$, the QG-model gives thresholds about 30% higher, and only 6% higher for $Ro > 0$. The critical modes obtained are also in very good agreement.

This geometrical singularity also prevents any attempt to compute the instabilities of the spherical shell setup with a QG-model. We used the dynamo benchmark code described by Christensen *et al.* (2001) to perform a fully 3D numerical calculation at $E = 10^{-4.5}$. The critical Rossby number we find $Ro_c = 0.16$ is in very good agreement with the experimental one and with the numerical results of Hollerbach (2003) as shown in figure 3.7.

Experimental study

Experimental setup Figure 3.19 shows a sketch of the experimental set-up we use to study the onset of instability of the Stewartson layer. It consists of a plexiglass ellipsoid put in rotation by a brushless motor along its minor axis with a controlled angular velocity Ω_0 . The working fluid is water. On the axis of rotation a shaft associated to a step motor can drive either an inner core or two disks. Exact dimensions are reported in fig. 3.19 and further details can be found in Noir *et al.* (2003).

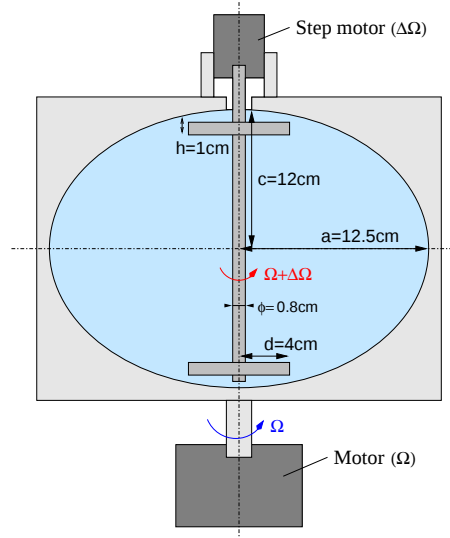


FIG. 3.19 – Sketch of the experimental setup with disks geometry. Spherical shell geometry is obtained by replacing the disks by a sphere (4cm radius) on the inner rotating axis.

To determine the stability threshold, we use a flake solution (Kalliroscope AQ 1000) and illuminate our container with a light sheet in a plane including the rotation axis. Variations of brightness allow us to visualize the shear-field in the illuminated plane. When the shear-field is steady, we assume that the flow is stable, and when the shear becomes unsteady (oscillations in time), the flow is unstable. Two pictures of the observed patterns are shown on figure 3.20, showing that the features of the flow are aligned with the rotation axis. The thin bright and dark columns appear at the onset and are blinking, showing the advection of the pattern of alternating vortices. Our visual determination shown in figure 3.7 is in good agreement with the numerical calculations of Hollerbach (2003). This makes us confident in the reliability of the optical method.

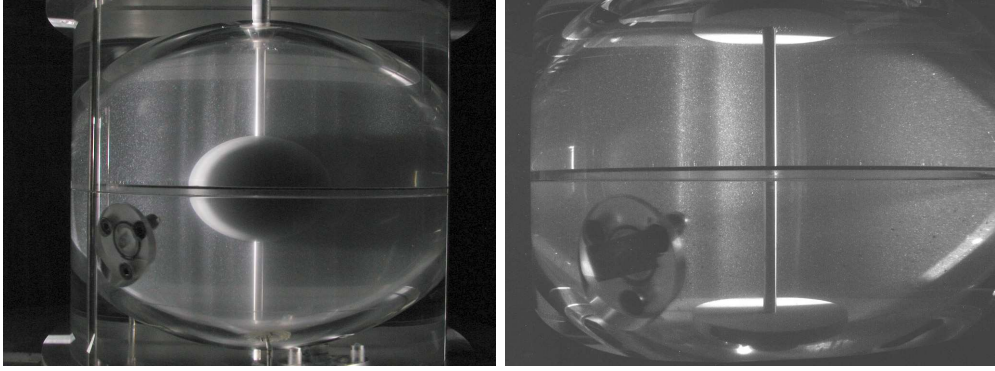


FIG. 3.20 – Instabilities near the threshold as seen in our experiments (for $E \simeq 10^{-5}$). The vertical shaft is along the rotation axis. The features shown by the flakes are vertical, supporting the QG-approximation for our model.

Experimental results The threshold is obtained for different values of the Ekman number with the two geometries (inner core or two disks) for prograde differential rotation. Results for the stability threshold are summarized in figure 3.21 and quantitative data are reported in tables 3.5 and 3.6

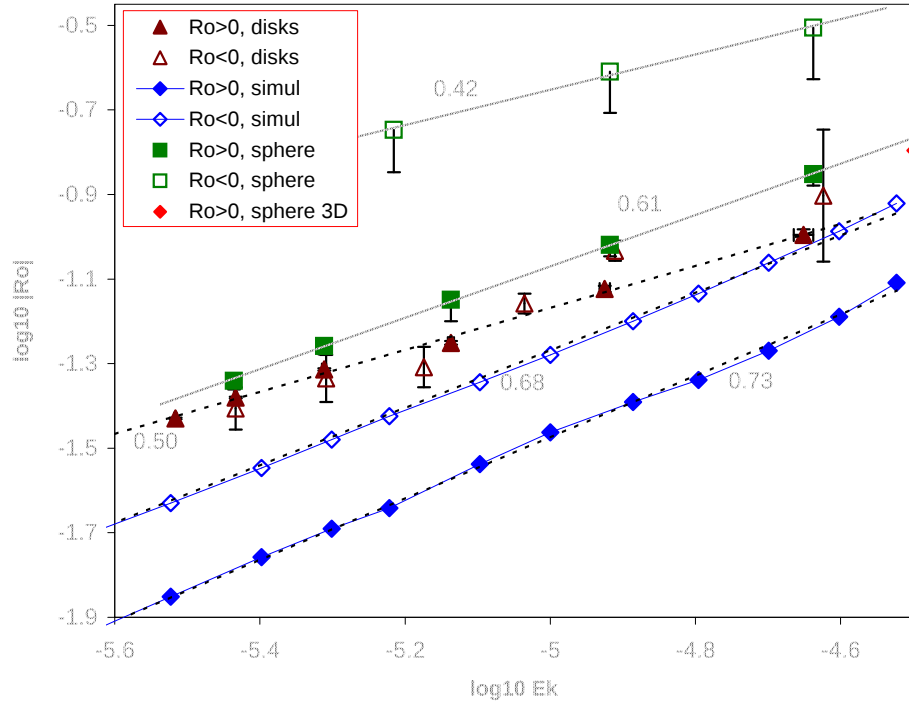


FIG. 3.21 – Experimental determination of the stability threshold for two geometries, compared with the numerical calculations using a quasi-geostrophic model. *sphere 3D* is computed with a fully 3D model. The negative differential rotation data are not well defined. The numbers are the slopes of the linear fits.

Note that in the case of negative differential rotation, we were not able to determine accurately a stability threshold. In some experiments hysteresis appeared, correlated with the apparition of air bubbles in the tank. We have also observed very low frequency oscillation in some cases. We do not completely understand these results. For the disks the data are not even on a straight line. This may be correct, as the numerical simulations also show some oscillations, due to the integer nature of the azimuthal wave number (see fig. 3.21).

The disk case seems to agree with the $E^{1/2}$ scaling, whereas the sphere case is significantly steeper. However with only one decade of data, and for such high Ekman numbers, we do not expect the asymptotic laws to hold.

The numerical calculations for the disk model (see also §3.3.6), also shown in figure 3.21 try to mimic the experimental setup : it is a split-sphere with flat polar caps with no height jump (we cannot model discontinuities in the height of the container).

The spherical-shell experiments are in agreement with the numerical calculations of Hollerbach (2003), as shown on figure 3.7. The strong difference between positive and negative differential rotation is explained by the geometrical properties of this setup, as discussed above.

3.3.8 Conclusion and Discussion

In this study, we give some insight into the instability of a Stewartson shear layer in the very low Ekman regime. The QG-model with the pseudo-stream function formalism is designed for finite slopes as it handles the mass conservation correctly. Despite failing to describe the $E^{1/3}$ -layer, it has proved to be a valuable tool for numerical experiments to study very low Ekman numbers. It can also be used for non-linear calculations as long as the quasi-geostrophic hypothesis stands, and may be thus useful for other ocean and planetary interior models.

At very low Ekman numbers $E < 10^{-6}$, we report an interesting radial structure, comparable to the one exhibited in the thermal instability case by Dormy *et al.* (2004). However, if the global structure of the flow is quite similar to the spiralling thermal convection flow in a rapidly rotating spherical shell, the radial extension of the instability is surprisingly independent of the Ekman number.

Our model allows us to compare flat top and bottom geometries with varying depth containers. Two different stabilizing processes are at work, leading to different balances and scalings for the threshold : for flat containers the Busse (1968) $E^{3/4}$ scaling applies, whereas with a slope a $\beta E^{1/2}$ scaling is predicted. This is supported by numerical simulations for different geometries, and the following table summarizes the different cases for the instability of a Stewartson layer :

geometry	Ro_c	sign of Ro	m_c	f_c	comment
$\beta = 0$	$E^{3/4}$	$Ro_c^+ = -Ro_c^-$	$E^{-1/4}$	0 ?	$Re_c = Cte$, Kelvin-Helmholtz-like
constant $\beta \neq 0$	$\beta E^{1/2}$	$Ro_c^+ \simeq -Ro_c^-$	$E^{-1/4}$	$E^{1/4}$	curvature effect, Rossby wave
variable β	$\beta E^{1/2}$	$Ro_c^+ \neq -Ro_c^-$	$E^{-1/4}$	$E^{1/4}$	spiralized Rossby wave
height jump	?	not symmetric	$E^{-1/4}$	?	QG-model breaks down

Hollerbach (2003) studied the difference between positive and negative Rossby numbers, and pointed out that the geometry is the crucial feature, through the radial derivative of the height of the container. The numerical calculations he made shed some light on the dramatic changes in the critical mode when switching from positive to negative Rossby numbers observed in some real experiments. However, ignoring the Rossby wave processes at work in varying depth containers, he misunderstood his numerical results.

As we demonstrated in this paper, all the geometrical effects are due to a fundamental symmetry breaking in the Rossby wave propagation mechanism : depending on the sign of Ro and β , the instability will develop on one side of the shear layer or the other. This symmetry breaking happens with any geometry, without the need for abrupt changes in the height of the container (even though this asymmetry will be magnified by such discontinuities). Furthermore, the spherical shell setup is singular : when $Ro < 0$, the Rossby wave instability cannot develop on either side of the shear layer, leading to the singular results observed in this configuration. Within this framework, the recent results of Hollerbach (2003) may be interpreted correctly.

What still remains unclear is the nature of the instability in that particular case (spherical-shell and $Ro < 0$). Is it just a Rossby wave that needs much stronger forcing to grow, or another type of instability with significant 3D effects? This is even more annoying because this geometry is of geophysical interest for gaseous planets or planetary interiors. It is also the geometry used in the sodium experiment presented by Cardin *et al.* (2002), aimed at the study of induction processes in this type of flow, which are suspected to be able to drive a dynamo. In addition, the non-linear and turbulent regimes have to be investigated, by means of numerical calculations and quantitative velocity measurement in experiments. It is clear that we need experiments at lower Ekman numbers, especially for spherical shells.

Acknowledgements

Most of the computations presented in this paper were performed at the Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble (SCCI).

We wish to thank Henri-Claude Nataf for stimulating discussions about this work. We are also grateful to Natalia Bezaeva, Daniel Brito and Jean-Paul Masson for their help in running the experiment.

This work was funded by the French Ministry of Research and by the program *Intérieur de la Terre* of the CNRS/INSU.

3.3.9 A simple model for the radial scaling

Approximations and assumptions

In figure 3.11abc the perturbation of the shear layer spreads across the whole volume whereas in the flat container case (fig. 3.11d) or even the thermal convection case in a

sphere (see [Dormy et al., 2004](#)), it is radially localized. In this section we derive a simple heuristic model that predict all these properties *outside the Stewartson shear layer*.

To simplify our study, we make a few approximations :

- we neglect the curvature ;
- we drop the viscous dissipation term, but keep the Ekman friction ;
- we assume small forcing, ignoring the local vorticity term.

The curvature may be negligible if the scales involved are small enough. Looking at the results from section 3.3.6, we expect the scales to shrink while lowering the Ekman number. Thus, we replace the angular variable ϕ by y . Dropping the viscous term lowers the order of the differential equation and makes it easier to handle. Numerical simulations with no viscous term or an artificially weakened viscous term show that the structure stays very similar. In addition, the threshold is expected to be only slightly affected in the asymptotic regime. This is because the Ekman friction is also a dissipative term. Finally, we can neglect the local vorticity term because in the linear stability case it is a higher order effect, as shown in section 3.3.6. We end up with

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{Ro} \left(U \frac{\partial \omega}{\partial y} + u_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = 2 \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle \quad (3.29)$$

The expression of the Ekman friction involves several terms. We will only keep the vorticity contribution, so that

$$\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle \simeq \beta u_r - \alpha E^{1/2} \omega \quad (3.30)$$

where α is the geometrical factor for the Ekman friction term, and for a sphere $\alpha = 1/2(1 - r^2)^{-3/4}$ (see eq. C.12).

We now assume a perturbation of the form

$$\Psi(r, y, t) = \psi(r) e^{i(ky - \omega t)}$$

and we obtain

$$(-i\omega + \text{Ro} U k + E^{1/2} \alpha) \left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \psi + \left(\text{Ro} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - 2\beta \right) i k \psi = 0 \quad (3.31)$$

In a more convenient form, we can write

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = k^2 \left(1 + \frac{1}{k} \frac{\left(2\beta - \text{Ro} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) (\omega - \text{Ro} U k - i E^{1/2} \alpha)}{(\omega - \text{Ro} U k)^2 + E \alpha^2} \right) \psi \quad (3.32)$$

Outer part, large β

In the outer part the basic state velocity profile U is vanishing, as well as $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$. This simplifies the previously established relation 3.32 :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = k^2 \left(1 + \frac{2\beta}{k} \frac{\omega - iE^{1/2}\alpha}{\omega^2 + E\alpha^2} \right) \psi \quad (3.33)$$

In the case of small Ekman number, $E\alpha^2$ is negligible compared to $\omega^2 \sim E^{1/2}$, but we have to keep the small imaginary part. We now set

$$\gamma = k \left| 1 + \frac{2\beta}{k\omega} \right|^{1/2}$$

If $|2\beta| \gg 1$, we can rewrite 3.33 as

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\gamma^2 \left(1 - \frac{2i\beta E^{1/2}\alpha}{k\omega^2 + 2\beta\omega} \right) \psi \quad (3.34)$$

and the solution for constant α and β is of the form

$$\psi = \exp \left(\pm \gamma \frac{\beta E^{1/2}\alpha}{k\omega^2 + 2\beta\omega} r \right) \exp(\pm i\gamma r)$$

This implies a rapid oscillation of typical length scale γ

$$\gamma \sim k \sqrt{|2\beta|} \quad (3.35)$$

modulated by a slow exponential decay with typical length scale δ given by

$$\delta \sim \gamma^{-1} E^{-1/2} \alpha^{-1} \omega \quad (3.36)$$

Inside this envelope, the radial length scale γ^{-1} of the perturbation decreases when β increases. It corresponds to the spiralling of the Rossby wave observed for variable β (see fig. 3.11bc)

Using the scalings for the Stewartson layer instability $k \sim E^{-1/4}$ and $\omega \sim E^{1/4}$, relation 3.36 leads to

$$\delta \sim (2|\beta|)^{-1/2} \alpha^{-1} E^0 \quad (3.37)$$

which implies that the radial extension of the perturbation is independent of E . This is a fundamental difference with the thermal convection case investigated by Yano (1992) and Jones *et al.* (2000) where the scaling $k \sim E^{-1/3}$ and $\omega \sim E^{1/3}$ implies

$$\delta \sim (2|\beta|)^{-1/2} \alpha^{-1} E^{1/6} \quad (3.38)$$

which corresponds to a slowly decaying radial extension when decreasing E .

Inner part, small β

The inner part behaves exactly as the outer one, replacing ω by $\omega - \text{Ro} Uk$. For a spherical shell it corresponds to the small β case.

If $|2\beta| < k\omega$, we can rewrite 3.33 as

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \gamma^2 \left(1 - \frac{2i\beta E^{1/2} \alpha}{k\omega^2 + 2\beta\omega} \right) \psi \quad (3.39)$$

which actually exchanges the length scale of the exponential decay and of the oscillation compared to the outer region. The solution for constant α and β is then

$$\psi = \exp(\pm \gamma r) \exp \left(\mp i \gamma \frac{\beta E^{1/2} \alpha}{k\omega^2 + 2\beta\omega} r \right)$$

which is an exponential decay of characteristic length γ^{-1} , inside which there are much larger length scale oscillations, which cannot be detected.

For the Rossby wave, we have $\omega \sim k^{-1}$, so that $\gamma \sim k$, with a correction independent of E . This shows that in the small β case the critical mode has a radial extension comparable to its azimuthal scale.

3.3.10 Stability threshold data

E	Ro _c	m _c	ω _c	NR
10 ⁻⁵	4.017 10 ⁻²	5	9.886 10 ⁻²	300
	-5.122 10 ⁻²	4	-3.495 10 ⁻²	
10 ⁻⁶	9.505 10 ⁻³	10	5.428 10 ⁻²	400
	-11.08 10 ⁻³	8	-2.060 10 ⁻²	
10 ⁻⁷	2.326 10 ⁻³	18	2.689 10 ⁻²	600
	-2.674 10 ⁻³	15	-0.999 10 ⁻²	
10 ⁻⁸	6.314 10 ⁻⁴	33	1.388 10 ⁻³	800
	-7.018 10 ⁻⁴	31	-6.446 10 ⁻³	
10 ⁻⁹	1.821 10 ⁻⁴	63	7.505 10 ⁻³	1200
	-1.938 10 ⁻⁴	61	-3.844 10 ⁻³	
10 ⁻¹⁰	5.357 10 ⁻⁵	121	4.128 10 ⁻³	1500
	-5.543 10 ⁻⁵	119	-2.317 10 ⁻³	

TAB. 3.3 – Split-sphere stability threshold values for different Ekman numbers E . NR denotes the number of radial grid points used for the calculation. These values were obtained by QG numerical calculations with *no-slip boundary conditions* and including *Ekman friction*.

E	ns, ep	$ns, ep0$	$fs, ep0$	$ns, ep, dv0$	$ns, ep, vs0$	$ns, ep, \times 2$
10^{-6}	1.0	0.86	0.87	0.995	0.64	0.999
10^{-7}	1.0	0.91	0.91	1.001	0.72	1.000
10^{-8}	1.0	0.94	0.94	1.002	0.78	1.000

TAB. 3.4 – Boundary conditions and viscosity dependence. Comparison between Ro_c of different numerical models for the split-sphere geometry. Values are the Ro_c obtained by a model divided by the reference Ro_c (ns, ep) for $Ro > 0$ at a given Ekman number. The models are referenced by ns and fs respectively for no-slip and free-slip boundary conditions, ep for the Ekman pumping, dv for horizontal divergence and vs for bulk viscosity; $\times 2$ stands for calculation with doubled number of radial grid points. A 0 denotes the absence of this feature.

E	stable Ro	unstable Ro
$3.51 \cdot 10^{-5}$	0.175	0.183
$2.30 \cdot 10^{-5}$	0.135	0.141
$1.21 \cdot 10^{-5}$	$9.29 \cdot 10^{-2}$	$9.56 \cdot 10^{-2}$
$7.30 \cdot 10^{-6}$	$6.93 \cdot 10^{-2}$	$7.10 \cdot 10^{-2}$
$4.88 \cdot 10^{-6}$	$5.30 \cdot 10^{-2}$	$5.52 \cdot 10^{-2}$
$3.67 \cdot 10^{-6}$	$4.48 \cdot 10^{-2}$	$4.56 \cdot 10^{-2}$
$2.30 \cdot 10^{-5}$	-0.302	-0.313
$1.21 \cdot 10^{-5}$	-0.232	-0.246
$6.09 \cdot 10^{-6}$	-0.165	-0.179

TAB. 3.5 – Stability threshold experimental data obtained for the spherical shell geometry, in water ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). See §3.3.7 for details about the experimental setup.

E	stable Ro	unstable Ro
$2.23 \cdot 10^{-5}$	$10.1 \cdot 10^{-2}$	$11.1 \cdot 10^{-2}$
$1.19 \cdot 10^{-5}$	$7.53 \cdot 10^{-2}$	$8.06 \cdot 10^{-2}$
$7.30 \cdot 10^{-6}$	$5.61 \cdot 10^{-2}$	$5.94 \cdot 10^{-2}$
$4.88 \cdot 10^{-6}$	$4.86 \cdot 10^{-2}$	$5.08 \cdot 10^{-2}$
$3.68 \cdot 10^{-6}$	$4.17 \cdot 10^{-2}$	$4.33 \cdot 10^{-2}$
$3.04 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-2}$	$3.99 \cdot 10^{-2}$
$2.38 \cdot 10^{-5}$	$-12.5 \cdot 10^{-2}$	$-15.0 \cdot 10^{-2}$
$1.23 \cdot 10^{-5}$	$-9.27 \cdot 10^{-2}$	$-9.53 \cdot 10^{-2}$
$9.21 \cdot 10^{-6}$	$-6.95 \cdot 10^{-2}$	$-7.14 \cdot 10^{-2}$
$6.70 \cdot 10^{-6}$	$-4.92 \cdot 10^{-2}$	$-5.20 \cdot 10^{-2}$
$4.91 \cdot 10^{-6}$	$-4.63 \cdot 10^{-2}$	$-4.93 \cdot 10^{-2}$
$3.68 \cdot 10^{-6}$	$-3.93 \cdot 10^{-2}$	$-4.00 \cdot 10^{-2}$

TAB. 3.6 – Stability threshold experimental data obtained for the disks geometry, in water ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). See §3.3.7 for details about the experimental setup.

3.4 Les instabilités de la couche de Stewartson

Les instabilités de la couche de Stewartson font l'objet de notre article (Schaeffer & Cardin, 2005b). On y discute de leur structure spatiale et de leurs mécanismes (§3.3.5).

- Dans le cas d'un récipient plat, l'instabilité est de type Kelvin-Helmoltz, et se déclenche lorsque la couche de Stewartson atteint un nombre de Reynolds critique.
- Dans le cas d'un récipient pentu (comme pour une sphère), l'instabilité doit vaincre la contrainte de Proudman-Taylor, et se développe alors sous forme d'une onde de Rossby.

Nous avons montré que cette différence permet d'expliquer la plupart des phénomènes observés lors de la déstabilisation de ces couches de cisaillement.

La figure 3.22 montre le mode instable au seuil pour la géométrie *split-sphere* (fig. 3.6).

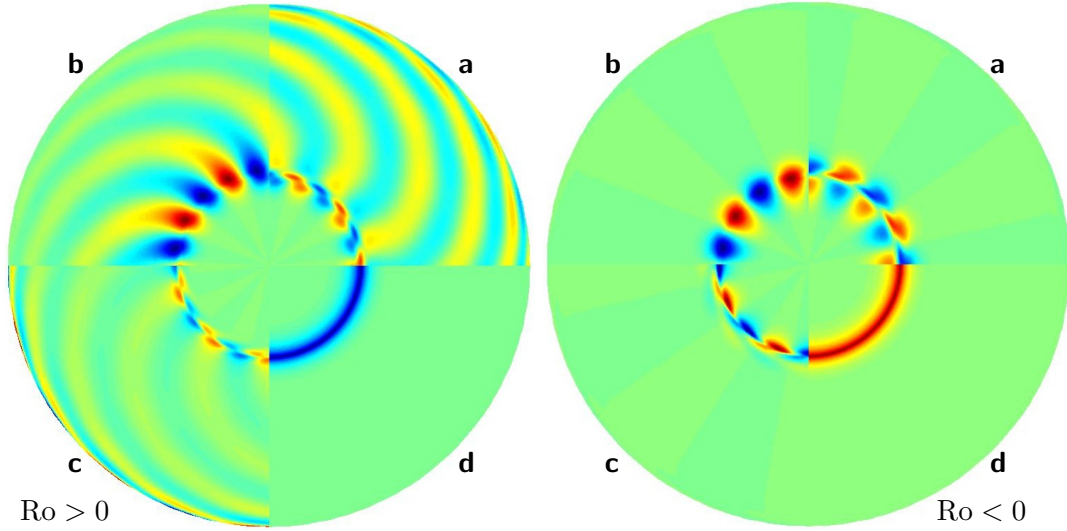


FIG. 3.22 – Premier mode instable pour une couche de Stewartson à $Ek = 10^{-6}$ dans une sphère, pour Ro positif et négatif. Différentes quantités sont représentées dans les quartiers : u_ϕ (a), u_r (b), ω (c), $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ (d).

On peut voir sur cette figure l'amplification de la vorticité dans le cas $Ro > 0$ par l'effet β . On pourrait croire qu'elle devient infinie au bord (l' quateur), mais ce n'est pas le cas comme le montre la figure 3.13.

En plus des données sur le seuil (§3.3.10), nous avons également réalisée une étude précise sur le seuil à grand nombre d'Ekman (fig. 3.4), qui montre que la nature discrète du nombre d'onde se fait sentir, comme les calculs 3D de Hollerbach (2003) l'avaient déjà montré. Nous avons également comparé nos calculs quasi-géostrophique aux calculs 3D de Hollerbach (2003) et l'accord est bon (voir §3.3.7).

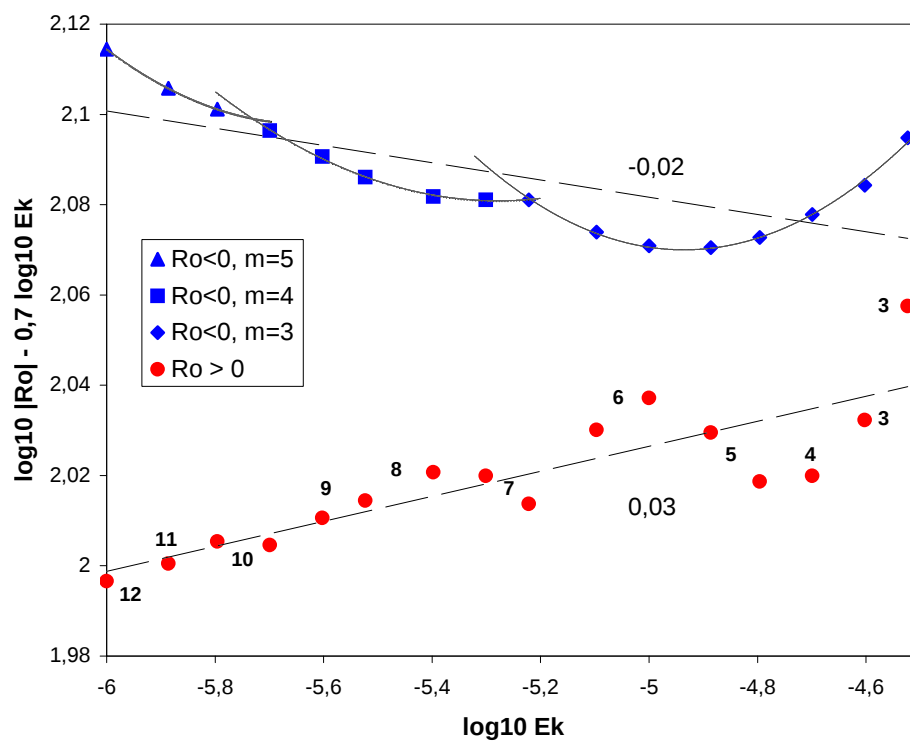


FIG. 3.23 – Ondulations du seuil d'instabilité due à la nature discrète du nombre d'onde (géométrie *split-sphere*)

3.5 Étude expérimentale

3.5.1 Seuils d'instabilité

Nous avons déterminé les seuils d'instabilités expérimentalement dans le cas des disques et le cas de la coquille sphérique. Ils sont donnés dans notre article ([3.3.10](#)). Le cas $Ro < 0$ pose problème : l'instabilité se développant à l'intérieur, elle semble très sensible aux bulles qui apparaissent inévitablement à cet endroit. Ainsi nous avons eu beaucoup de mal à déterminer le seuil dans ce cas. De plus, des phénomènes étranges apparaissent dans le cas $Ro < 0$ (voir photos de l'annexe [A.2.2](#))

3.5.2 Mesures Doppler

Nous avons réalisé quelques mesures de profils de vitesse Doppler (voir [A.3](#)). Cependant la difficulté de faire des mesures longues et précise dues à la centrifugation rapide des particules de pollen ne nous a pas encouragé à poursuivre dans cette voie. . .

On peut tout de même remarquer sur ces profils la structure spiralée attendue pour une sphère (voir figures de la section [A.3](#)) à l'extérieur des disques ou de la graine, et une structure droite entre les disques (hauteur constante). La différence entre $Ro > 0$ et $Ro < 0$ est également visible sur la figure [A.3](#) : pour $Ro < 0$ les perturbations pénètrent plus vers le centre, et disparaissent rapidement à l'extérieur des disques, tandis que pour $Ro > 0$ on voit les instabilités envahir la région externe. Comme l'intérieur entre les disques est plat, dans les deux cas rien ne s'oppose vraiment à l'établissement de l'instabilité au centre. C'est d'ailleurs un des problèmes de cette configuration : c'est une géométrie hybride entre fond plat et pentu ce qui complique beaucoup son étude.

Chapitre 4

Vers la turbulence quasi-géostrophique

Dans ce chapitre, l'intensité du forçage de la couche de Stewartson est augmenté loin au-dessus du seuil, mais toujours pour des nombres de Rossby très faibles. Quelques caractéristiques de ces écoulements turbulents fortement dominés par la force de Coriolis y sont décrites.

4.1 Turbulence, bidimensionalité et rotation

En turbulence 3D, homogène et isotrope, on s'attend à ce que dans la zone inertielle (gamme d'échelles situées entre le forçage à grande échelle et la dissipation à petite échelle) le spectre d'énergie cinétique se comporte comme $E_u \sim k^{-5/3}$ avec k le nombre d'onde. C'est le célèbre spectre de Kolmogorov. D'autres résultats ont été obtenus sur la turbulence et on pourra consulter le livre de [Rieutord \(1997\)](#) pour une introduction rapide ou à celui de [Frisch \(1995\)](#) ou de [Lesieur \(1990\)](#) pour plus de détails.

La turbulence 2D au sens strict (2 dimensions d'espace, 2 composantes de vitesse) a été étudiée par [Kraichnan \(1967\)](#). Une rapide revue est faite à la fin du livre de [Frisch \(1995\)](#). La principale différence avec la turbulence 3D est que le terme d'étirement de vortex $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ disparaît, ce qui implique que la vorticité est matériellement conservée le long de la trajectoire d'une particule fluide (si on néglige la dissipation et le forçage). [Kraichnan \(1967\)](#) propose que si on injecte de l'énergie à une échelle donnée ℓ_0 , celle-ci va peupler les grandes échelles. Le spectre d'énergie cinétique dans ce cas est également en $E_u \sim k^{-5/3}$. Mais d'autres cas de figure peuvent être envisagés, avec d'autres exposants pour le spectre. De l'autre côté de l'échelle d'injection, c'est l'enstrophie qui cascade vers les petites échelles, et la théorie de [Kraichnan \(1967\)](#) prédit un spectre $E_u \sim k^{-3}$ (avec une correction logarithmique), mais les simulations numériques montrent plutôt d'autres comportements.

Mais cette turbulence 2D au sens strict n'existe pas (ou très peu) dans la réalité, comme en témoigne le peu d'expériences sur le sujet. Dans un contexte géophysique, nous avons vu

que la contrainte de Proudman-Taylor (§1.2.2) impose la bidimensionalité à l'écoulement, d'autant plus fortement que le nombre de Rossby est faible. Ainsi on peut introduire un nombre de Rossby local

$$\text{Ro}_\ell = \frac{u(\ell)}{\ell\Omega}$$

et le rayon de Rossby ℓ telle que $\text{Ro}_\ell = 1$, en dessous de laquelle l'écoulement ne sentira plus l'effet de la rotation. $\ell/u(\ell)$ est aussi connu comme le temps de retournement (d'un vortex). Ainsi Ro_ℓ compare la période de rotation avec le temps de retournement. Si ce dernier est plus petit que la première, l'écoulement sera peu sensible à la force de Coriolis¹.

Nous avons déjà mis en évidence au chapitre précédent (§3.3.5) que la dynamique était profondément différente selon la pente que présente le récipient. En fait, l'effet β lié à la pente, ré-introduit un terme d'étirement de vortex, et c'est pourquoi la turbulence qu'on peut obtenir dans des systèmes comportant un effet β est différente de la turbulence 2D au sens strict.

Rhines (1975) propose pour le cas de la turbulence influencée par un effet β (pente) un équilibre entre non-linéarités et terme en β (voir équation 2.15) donne ce qui se traduit par l'apparition d'un nombre d'onde, dit de Rhines :

$$k_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{2U}} \quad (4.1)$$

Ce nombre d'onde est une limite inférieure qui bloque la cascade inverse d'énergie. Remarquons que pour une sphère, β varie avec r , et on peut se demander quelle longueur va être pertinente. Si cet équilibre est réalisé sur une gamme d'échelle, on obtient un spectre de la forme²

$$E_u \sim 4\beta^2 k^{-5} \quad (4.2)$$

Danilov & Gurarie (2004) font une revue détaillée de la turbulence en présence d'effet β , dont nous donnons ici seulement quelques éléments. Les spectres en k^{-5} qui sont longtemps restés inobservés, sont maintenant mis en évidence. Galperin *et al.* (2001) montrent un comportement en n^{-5} pour les écoulements zonaux des planètes géantes (n est le degré d'harmonique sphérique). Un travail expérimental important a été réalisé par Baroud *et al.* (2002). Ils présentent des résultats expérimentaux de turbulence en rotation, et notamment des analyses statistiques, sur de longues séries temporelles de film chaud.

4.2 Résultats numériques

Notre code numérique quasi-géostrophique, utilisé pour déterminer les instabilités de la couche de Stewartson permet d'étudier également le régime fortement non-linéaire. En effet, la prise en compte du frottement d'Ekman assure la dissipation de l'énergie aux grandes échelles, et la prise en compte de la pente du récipient dans l'équation de conservation de

¹ Ainsi le lavabo ou la baignoire qui se vide n'est absolument pas sensible à cet effet

² Pour un spectre $E(k) \sim k^{-\alpha}$, l'amplitude des vitesses $u(k)$ peut être estimée par $u(k) \sim \sqrt{kE(k)}$.

la masse permet de simuler ces grandes échelles de manière plus réaliste. L'implémentation numérique est abordée dans l'annexe B.1.

Tous les calculs présentés ici ont été réalisés dans la géométrie *split-sphere* (fig. 3.6). La table 4.1 montre les régimes extrêmes atteints avec le code numérique pour différents nombres d'Ekman. Pour des forçages (Ro) plus importants, nous n'avons pas retenu les résultats car le spectre semblait mal résolu, ou, tout simplement, le code finissait par exploser (NaN).

id	Ek	NR	$m_{\max}$	dt_U	Ro	Ro / Ro _c	Re _{rms}	k_β
e6 ⁺	10 ⁻⁶	400	64	0.1	0.04	4.2	1.85 10 ³	6
e6 ⁻	10 ⁻⁶	400	64	0.1	-0.08	7.3	1.85 10 ³	4
e7 ⁺	10 ⁻⁷	500	170	0.05	0.015	6.5	7 10 ³	9
e8 ⁺	10 ⁻⁸	600	170	0.01	0.02	31.7	60 10 ³	8
e8 ⁻	10 ⁻⁸	600	170	0.05	-0.02	28.5	40 10 ³	7

TAB. 4.1 – Les calculs les plus extrêmes pour différents nombres d'Ekman. Le nombre de Reynolds Re_{rms} est ici calculé à partir des vitesses *rms* non-zonales. Le calcul de k_β est donné par l'expression (B.6).

Ainsi, on remarque que notre code semble être limité par $Ro \sim 0.1$ plutôt que par Ro / Ro_c . Nous parvenons ainsi à atteindre des nombre de Reynolds (rms) très grands : 6 10⁴, pour un forçage correspondant à $Re = Ro / Ek = 2 \cdot 10^6$.

4.2.1 Saturation

L'ensemble des calculs non-linéaires a été utilisé pour étudier comment l'énergie sature au-dessus du seuil. Les résultats sont représentés sur la figure 4.1.

L'énergie axisymétrique comprend la couche de Stewartson. Elle semble dépendre assez peu du nombre d'Ekman, et du signe de la rotation différentielle. Une couche de cisaillement qui garderait la même forme verrait son énergie évoluer comme Ro^2 ; au lieu de ça on observe $Ro^{1.8}$, qui témoigne de l'élargissement de la couche. Ce qui est plus intéressant c'est que le comportement de l'énergie semble peu dépendre du nombre d'Ekman.

Pour l'énergie non-axisymétrique c'est plus compliqué. Pour $Ro > 0$ on observe une évolution de l'énergie proche de $Ro^{2.8}$ sur toute la gamme étudiée, sans grande influence du nombre d'Ekman. Cette courbe d'énergie va croiser la courbe d'énergie axisymétrique vers $Ro \sim 1$.

Par contre, pour $Ro < 0$ les choses sont moins claires et on manque de points, mais il semble que le comportement soit différent.

4.2.2 Évolution de la couche de Stewartson

On a représenté sur la figure 4.2 l'évolution de l'écoulement axisymétrique pour différents forçages à $Ek = 10^{-6}$. La table 4.2 donne les largeurs des couches de cisaillement

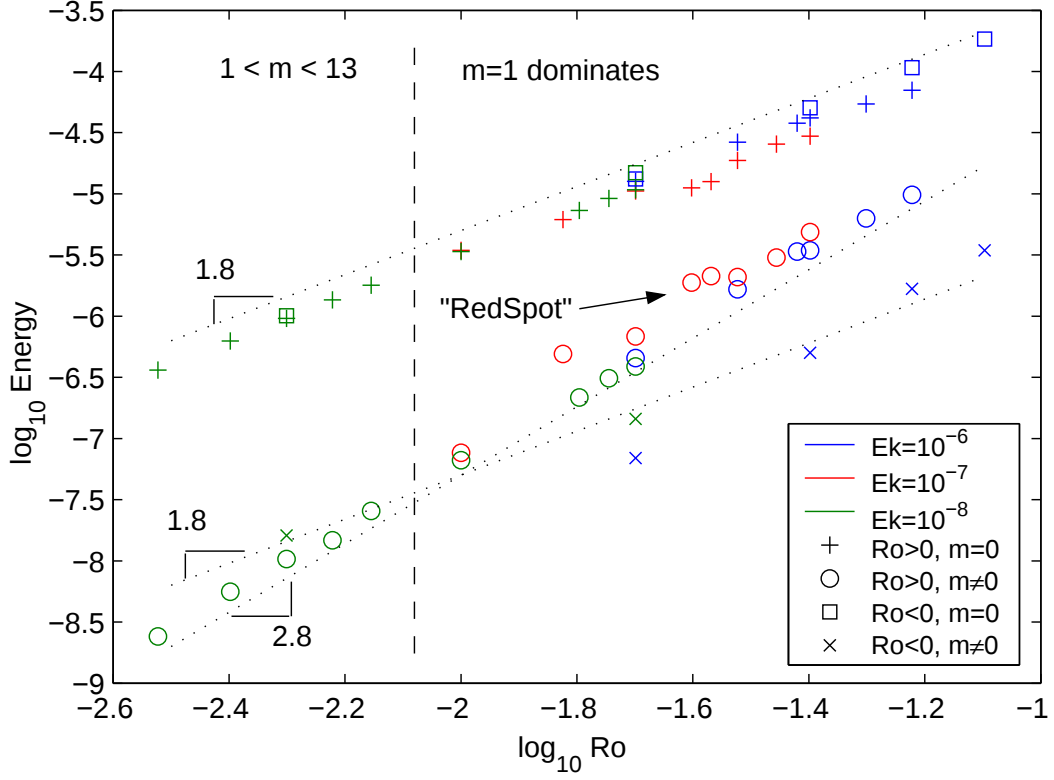


FIG. 4.1 – Energies en fonction du nombre de Rossby pour des écoulements loin du seuil. *RedSpot* désigne un régime quasi-stationnaire (voir §4.2.4).

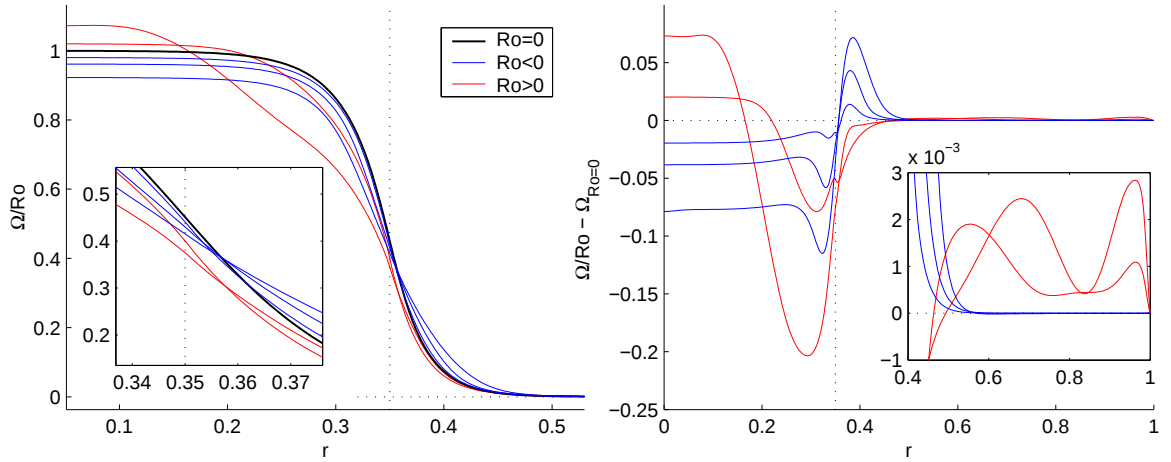


FIG. 4.2 – Couche de Stewartson (écoulement axisymétrique $\Omega = U/s$) pour $Ek = 10^{-6}$ et différents forçage : $Ro = 0$ (cas linéaire), $Ro = -0.02, -0.04, -0.08$ et $Ro = 0.02, 0.04$. À gauche on a représenté les profils de vitesse angulaires normalisés Ω/Ro , et à droite la différences entre ces profils et le profil linéaire ($Ro = 0$).

$Ek = 10^{-6}$	Ro	0	0.02	0.03	0.04	-0.02	-0.04	-0.06	-0.08
	$\Delta Ek^{-1/4}$	1.002	1.08	1.23	1.52	1.04	1.52	1.83	2.06
$Ek = 10^{-8}$	Ro	0	0.005	0.02	-0.005	-0.02			
	$\Delta Ek^{-1/4}$	0.957	1.4	2.8	2.43	3.8			

TAB. 4.2 – Largeurs de la couche de Stewartson calculées par la formule B.7 et normalisé par $Ek^{1/4}$, pour différents Ro et Ek.

axisymétriques calculées par la formule B.7. Il faut garder à l’esprit que cette formule est valable pour une couche de cisaillement *simple* et exponentielle, ce qui n’est pas toujours le cas, comme le montre les profils visibles sur les figures 4.2 et 4.3. C’est donc une mesure quantitative mais qui ne peut pas remplacer un examen direct du profil.

On remarque plusieurs choses :

- La couche de cisaillement s’élargit lorsque $|Ro|$ augmente
- Au centre, de la vorticité positive s’accumule et s’ajoute au profil de base, indépendamment du signe de Ro. Ce n’est pas l’effet des instabilités, mais plutôt des non-linéarités axisymétriques (courbure), puisqu’on observe cet effet avant l’apparition des instabilités (non-représenté ici).
- Pour $Ro > 0$ on observe des ondulations pour $r > 0.5$, qui sont des jets progrades dues aux interactions non-linéaires des “bras spirales”. Elles sont aussi présentes pour $Ro < 0$, progrades également, mais beaucoup plus atténuées. Le fait que ces *jets* soient progrades provient du sens de spiralisation, identique pour $Ro > 0$ et $Ro < 0$.

4.2.3 Images

Les plus grands nombres de Reynolds sont atteints pour $Ek = 10^{-8}$ et $Ro = \pm 0.02$. Nous avons représenté le champ de vorticité dans le plan de l’ quateur pour ces deux écoulement sur la figure 4.3. Pour chaque régime, c’est une photo instantanée de la vorticité qui est montr e, avec ou sans l’écoulement zonal (c’est-à-dire axisymétrique).

On constate de profondes différences entre les cas $Ro > 0$ et $Ro < 0$ comme c’était déjà le cas pour le mode marginalement stable (fig. 3.22). Dans les deux cas, on observe de fins filaments de vorticité, produits au niveau du cisaillement, et une amplification de la vorticité près des bords externes ( quateur), qui sont en fait les couches limites visqueuses observées dans les calculs 3D. Le cas $e8^+$ semble plus chahut  que le cas $e8^-$, ce qui est en accord avec les nombres de Reynolds rms affichés par la table 4.1.

Le profil de vitesse angulaire semble également montrer qu’une structure prograde axisymétrique apparaît dans les deux cas au centre.

Pour $Ro < 0$, le mode $m = 5$ domine clairement, et constitue l’échelle d’injection d’énergie, qui est voisine de l’échelle de Rhines k_β , calculée comme dans l’annexe B.1.7.

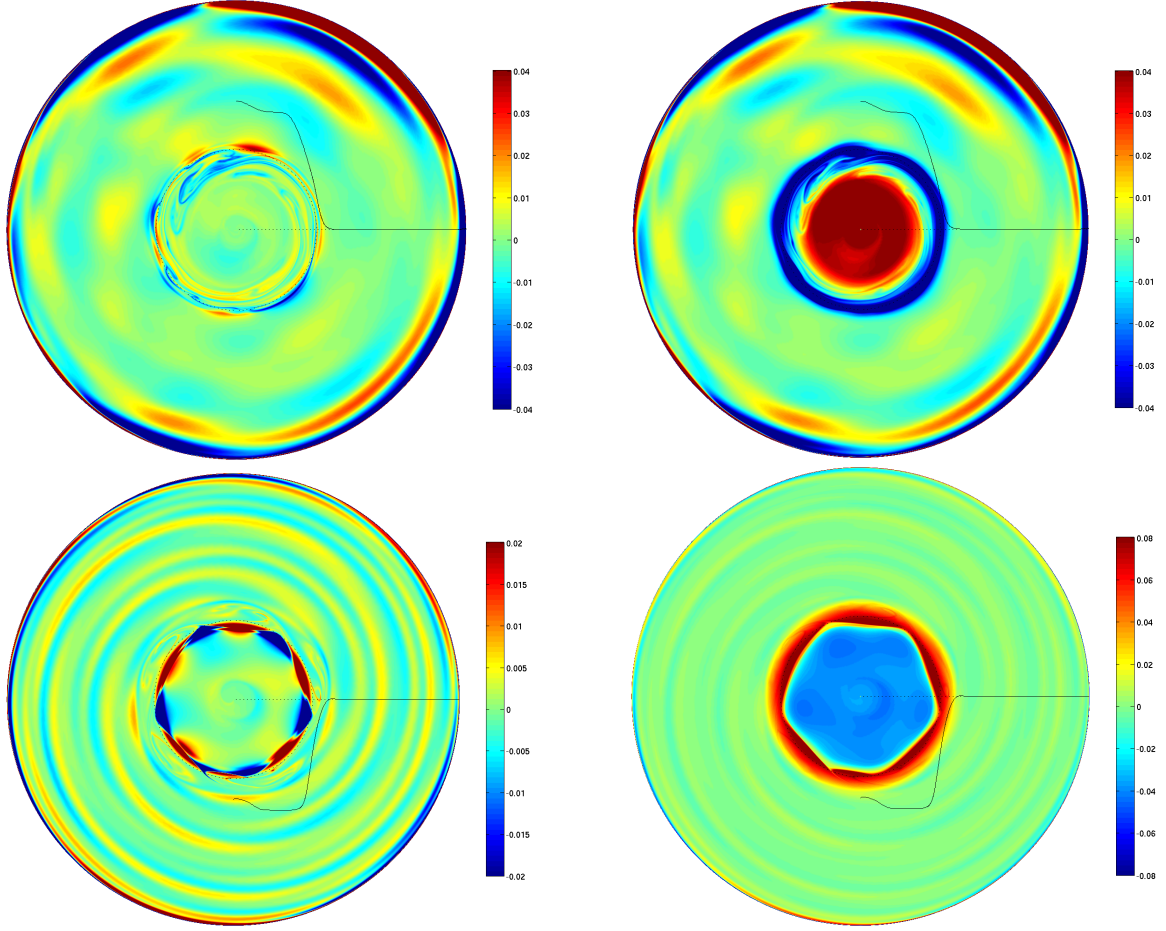


FIG. 4.3 – Les cartes de vorticité (non-zonale à gauche, totale à droite) pour $E = 10^{-8}$ et $Ro = 0.02$ (en haut) et $Ro = -0.02$ (en bas). La résolution spatiale est $NR=600$ et $M_{max}=170$ (cas $e8^+$ et $e8^-$). Le profil de vitesse angulaire est représenté par un trait noir. Il est normalisé par $2Ro$

4.2.4 Bifurcations

Lorsqu'on augmente le forçage (Ro) au-delà du seuil, on observe des changements de comportements (bifurcations). Prenons l'exemple de $Ek = 10^{-6}$, et augmentons progressivement $Ro > 0$ au dessus du seuil. Tout d'abord, l'énergie augmente avec Ro et se stabilise à une valeur bien définie. Le nombre d'onde azimutal m qui domine l'écoulement décroît avec Ro . C'est le *régime faiblement non-linéaire* ($Ro_c < Ro < 0.02$). Le fait que la taille des structure augmente correspond à la coalescence des tourbillons, une caractéristique de la turbulence 2D (Sommeria *et al.*, 1988; Robert & Sommeria, 1991).

Ensuite, d'une simple onde de Rossby dérivant avec le temps et ayant une énergie constante, on passe à des régimes où l'énergie cinétique oscille régulièrement (régime quasi-périodique). Encore plus loin du seuil, l'évolution de l'énergie en fonction du temps devient imprévisible, et on peut parler alors de régime chaotique ($Ro \sim 0.03$). Et puis, curieuse-

ment, pour des très forts forçages ($Ro = 0.04$ par exemple) on retrouve un écoulement dont l'énergie varie très peu au cours du temps, avec des modes dominants de l'ordre de quelques unités ($m = 1$ dans le cas $e6^+$, $Ek = 10^{-6}$, $Ro = 0.04$). Ces écoulements présentant un spectre très étalé mais montrant une grande stabilité ne sont pas sans rappeler la tache rouge de Jupiter. C'est pourquoi on parlera de régime *Tache rouge*.

4.2.5 Régime “Tache Rouge”

Dans une gamme étroite de paramètres, nous avons observé la mise en place d'un régime turbulent dont l'énergie et la topologie sont stationnaires. Ainsi, le mode $m = 1$ domine l'écoulement, faisant apparaître un tourbillon unique qui rappelle les caractéristiques de la tache rouge de Jupiter (fig. 4.4) qui existe depuis aussi longtemps que les observations de Jupiter ont commencé : depuis les années 1660, avec Hooke et Cassini. Bien que la pertinence de nos calculs pour la tache rouge de Jupiter ne soit pas établie, il est intéressant de mentionner cette ressemblance, d'autant plus que [Yano et al. \(2003\)](#) étudient les vents zonaux des planètes géantes à l'aide d'un modèle quasi-géostrophique.

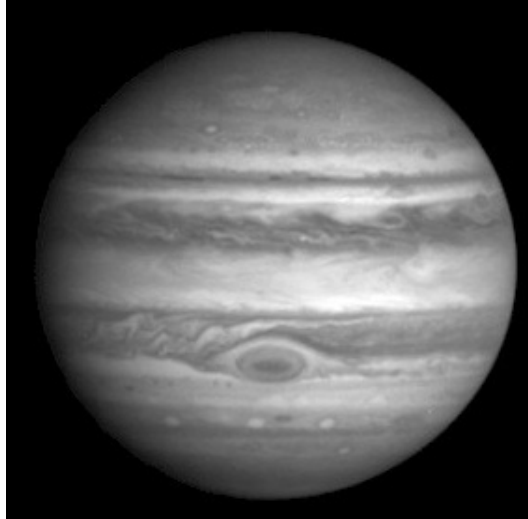


FIG. 4.4 – Vue de Jupiter montrant la grande tache rouge.

La figure 4.5 montre ce régime : l'écoulement ne ressemble pas vraiment à un écoulement turbulent, bien que le spectre (fig. 4.6) soit très étendu. En effet, sa raideur $E_u \sim m^{-5}$ fait que les petites échelles sont rapidement insignifiantes. Le mode $m = 1$ qui constitue la tache rouge a une vitesse de phase $c = 0.032$, à comparer avec $Ro = 0.04$. Il est donc difficile de trancher entre advection ou propagation.

4.2.6 Spectres

Quelques spectres de turbulence quasi-géostrophique résultant de nos calculs numériques sont représentés sur la figure 4.6. Ce sont des spectres spatiaux instantanés (non-

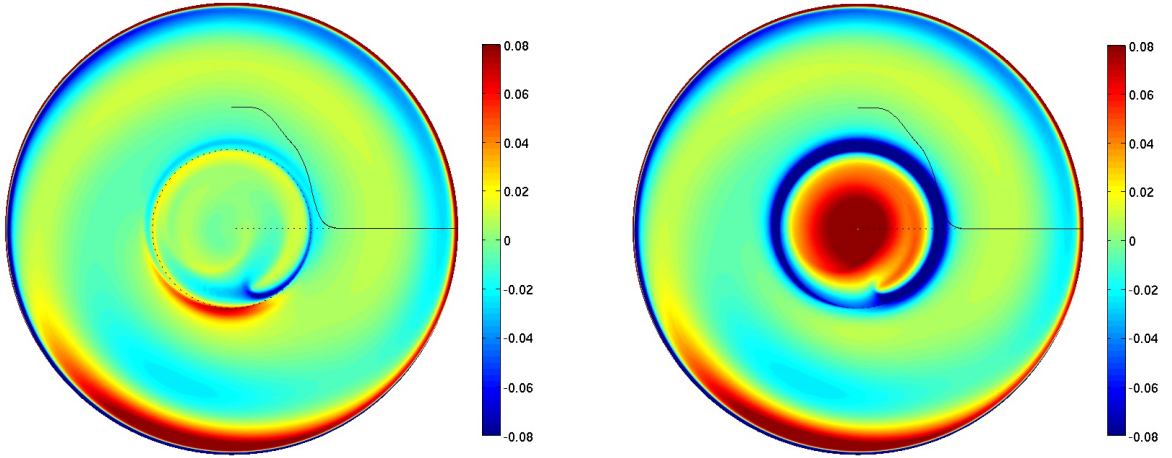


FIG. 4.5 – Cartes de vorticité non-axisymétrique à gauche et totale à droite, pour $Ek = 10^{-6}$, $Ro = 0.04$ (calcul $e6^+$).

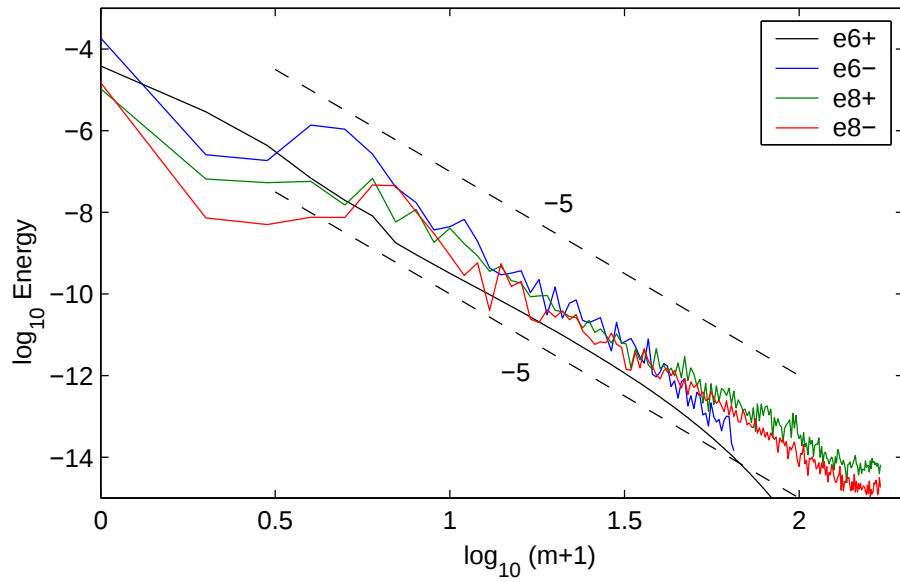


FIG. 4.6 – Spectres d'énergie instantanés pour différents paramètres. Le détail des paramètres est donnée par la table 4.1.

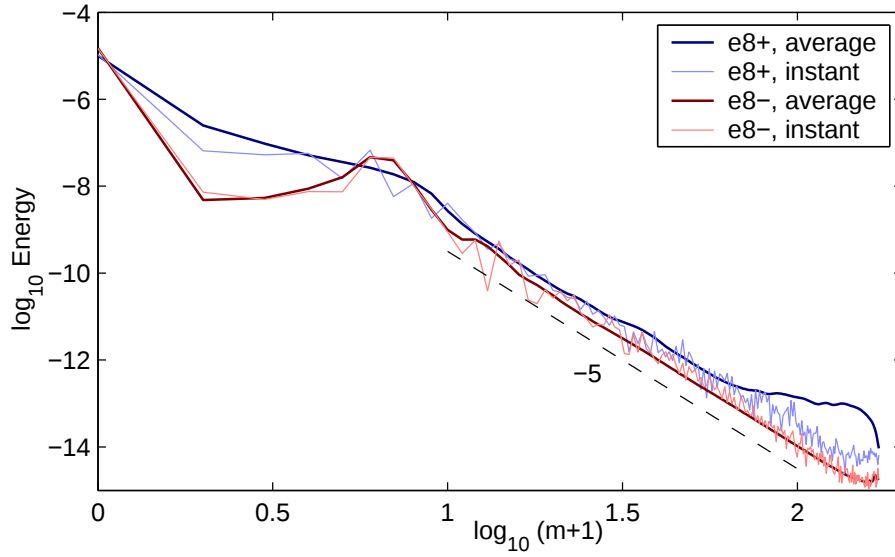


FIG. 4.7 – Spectres azimutaux turbulents moyennés sur les rayons, instantanés et moyennés dans le temps pour $Ek = 10^{-8}$, $Ro = \pm 0.02$.

moyennés dans le temps) moyennés sur tous les rayons. On remarque que le régime *tache rouge* est très régulier, et les autres (instationnaires) sont plus chahutés, mais tous présentent une gamme où $E_u = C_\beta m^{-5}$ est une bonne approximation, et il semble même que toutes les courbes tendent vers une constante unique $C_\beta \sim 1.5 \cdot 10^{-4}$ (à un facteur 3 près). On peut supposer que l'échelle d'injection de l'énergie est la “bosse” présente vers les grandes échelles. Le comportement en m^{-5} pour les échelles plus petites que l'échelle d'injection semble être une caractéristique très robuste. De l'autre côté de l'échelle d'injection, une cascade inverse vers les grandes échelles permet à l'énergie d'être dissipée de manière efficace par frottement d'Ekman.

La figure 4.7 montre les spectres spatiaux instantanés et moyennés, pour les cas $e8^+$ et $e8^-$. On y retrouve toujours un régime important où $E_U \sim m^{-5}$. Un rapide coup d'œil à la structure spatiale de nos écoulements (fig. 4.3) suffit pour remarquer la forte inhomogénéité de l'écoulement, et les densités spectrales d'énergie en fonction du rayon (fig. 4.8) le montrent également.

D'autres travaux ont mis en évidence des spectres aussi raides, mais dans des situations différentes. Galperin *et al.* (2001) observe, pour une coquille sphérique mince (atmosphère), des spectres $E_u \sim n^{-5}$, où n est le degré de l'harmonique sphérique. Il en va de même pour l'atmosphère des planètes géantes. Les situations étudiées dans tous ces travaux semblent être toutes différentes, et Danilov & Gurarie (2004) met en évidence l'importance des mouvements zonaux et du frottement d'Ekman.

Nous avons également accumulé des données de type “fil chaud”. Seule une série est suffisamment longue pour permettre une analyse spectrale correcte. La figure 4.9 montre ces spectres temporels. Les statistiques d'ordre supérieur ne sont pas significatives. La zone

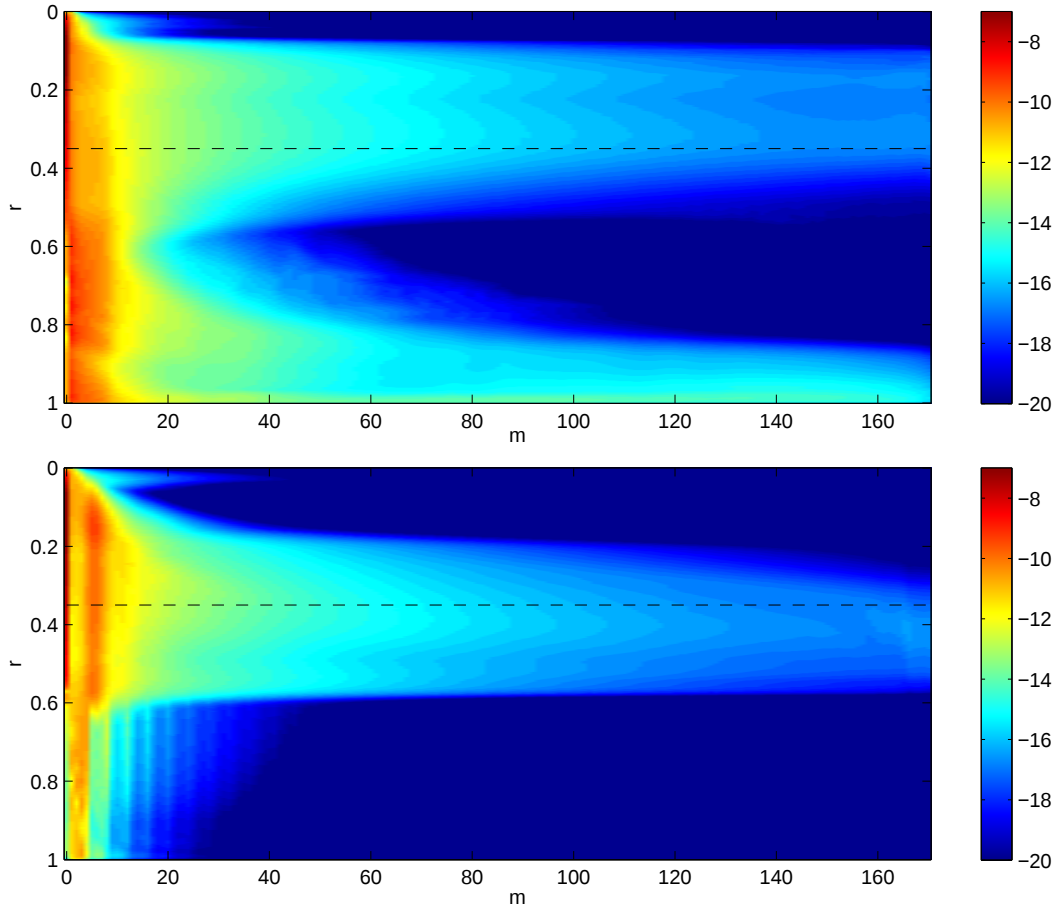


FIG. 4.8 – Moyenne temporelle de la densité spectrale d'énergie en fonction du rayon pour $Ek = 10^{-8}$, $Ro = 0.02$ ($e8^+$, en haut) et $Ro = -0.02$ ($e8^-$, en bas).

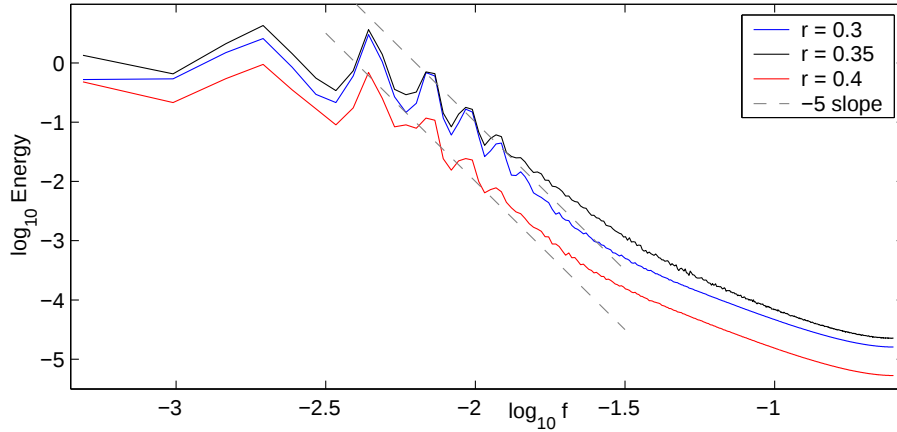


FIG. 4.9 – Spectres temporels d'énergie cinétique pour $E = 10^{-8}$ et $Ro = -0.02$ ($e8^-$) à plusieurs rayons, moyennés sur 301 fenêtres temporelles. f est la pulsation adimensionnée par Ω .

en f^{-5} est beaucoup moins visible sur ces spectres temporels que sur les spectres spatiaux. Pourtant l'hypothèse de Taylor de la turbulence gelée et advectée semble valable : les vitesses zonales de l'ordre de Ro sont bien supérieures aux fluctuations (voir fig. 4.10).

Sur les spectres de fil chaud, on peut aussi voir une série de pics qui ne correspondent pas à des harmoniques simples. Cependant, comme β varie, ça ne suffit pas pour rejeter l'hypothèse des ondes de Rossby.

Si les données temporelles ne suffisent pas pour faire une étude statistique poussée, nous pouvons tout de même calculer le second moment des vitesses radiales et azimutales en plusieurs points. Les résultats reportés sur la figure 4.10 permettent de quantifier l'anisotropie de la turbulence.

On remarque la forte anisotropie, et toujours la forte inhomogénéité. L'effet β est fort, puisque les fluctuations de vitesse radiale sont beaucoup plus faibles que les fluctuations de vitesse azimutales au même point, et ce d'autant plus que l'on s'approche de l'équateur ($r = 1$) où β devient très grand. Pour $r = 0.1$ où β est faible, on constate une quasi-isotropie. La différence entre $Ro > 0$ et $Ro < 0$ est considérable : les deux courbes n'ont rien à voir. Ces différences ressemblent fort aux différences entre les modes instables pour $Ro > 0$ et $Ro < 0$ (voir 3.22), et poussent à penser que nous sommes toujours en présence d'ondes de Rossby. Les oscillations radiales pour $Ro > 0$ dans les amplitudes des fluctuations de la vitesse azimutale restent cependant incomprises.

4.2.7 Une turbulence d'ondes de Rossby ?

Les spectres en m^{-5} comme les cartes spatiales montrant des structures spiralées (fig. 4.3) suggèrent une turbulence formée d'ondes de Rossby. Pour essayer de trancher, nous avons calculé la vitesse de phase c du mode de Fourier dominant m_d . Avant de nous pencher sur les résultats, il faut bien comprendre ce que l'on mesure par la vitesse angulaire de phase c (voir §B.1.7 pour le détail numérique). La mesure est faite dans le référentiel

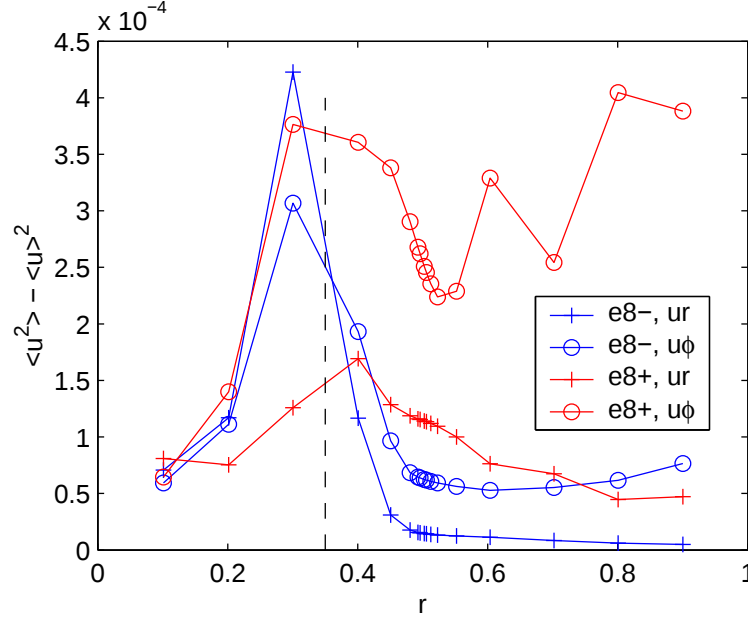


FIG. 4.10 – Second moment des vitesses en fonction du rayon, montrant l'anisotropie de la turbulence. La ligne pointillée indique le rayon de coupure $r = 0.35$.

lié à l'enveloppe externe (tournant à Ω , voir fig. 3.6). Comme on a un écoulement zonal axisymétrique fort (la couche de Stewartson), toutes les structures sont advectées. Ainsi $c \neq 0$ ne signifie pas forcément qu'une onde se propage. À l'inverse, $c = 0$ signifie qu'on est en présence d'une onde qui se propage en compensant l'advection de manière à paraître stationnaire dans le repère de mesure. De plus, si c est une constante indépendante du rayon, cela signifie que la vitesse de phase dépend du rayon de telle sorte que la propagation compense exactement les effets de l'advection là où il y en a. C'est ce dernier cas qu'on observe au seuil, où la spiralisaiton des ondes de Rossby permet d'ajuster la phase de l'onde. (voir §3.4 et §3.3).

id	$e6^+$	$e6^-$	$e7^+$	$e8^+$	$e8^-$
Ro	0.04	-0.08	0.015	0.02	-0.02
r	0.44	0.44	0.40	0.38	0.38
m_d	1	3	2	2	5
$c(r)$	0.032	-0.013	0.012	0.02	-0.003
$\Omega(r)$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	-0.0026	$3.6 \cdot 10^{-5}$	0.0014	-0.0037

TAB. 4.3 – Vitesse (angulaire) de phase c du mode dominant m_d dans les calculs de turbulence, à un rayon r fixé.

La table 4.3 donne les vitesses de phase mesurées dans les calculs de turbulence. Pour $Ro > 0$, il est clair que les vitesses de phases c sont supérieures à l'advection locale $\Omega(r)$. La situation est moins claire pour $Ro < 0$ mais il semblerait qu'on ait également une onde

prograde qui se propage donc à contre-sens de l'advection (cas $e8^+$). On peut retenir que les vitesses de phase c sont inférieures à Ro tout en restant du même ordre.

4.2.8 Dissipation

Définitions

Pour évaluer la dissipation dans les couches d'Ekman et la dissipation visqueuse dans le volume intérieur, on sépare l'écoulement en la partie motrice $m = 0$ et la partie dissipative $m > 0$. Cette séparation n'est pas exacte, car il y a des composantes $m = 0$ issues des interactions non-linéaires, et qui ne sont pas motrices.

La dissipation visqueuse est reliée à l'enstrophie $\langle \omega^2 \rangle$:

$$D_\nu = Ek \int_V \langle \omega^2 \rangle dV \sim Ek \langle \omega^2 \rangle$$

La dissipation par frottement d'Ekman est liée au gradient de vitesse dans la couche d'Ekman d'épaisseur $\delta_{Ek} = \sqrt{2Ek/L}$ (voir eq. 1.7). La dissipation volumique dans la couche peut être estimée par

$$D_{Ek} = Ek \frac{(\vec{n} \wedge \vec{u})^2}{\delta_{Ek}^2}$$

Pour intégrer cette quantité sur tout le volume de la couche d'Ekman, on multiplie par δ_{Ek} puis par l'élément de surface correspondant à une intégration selon r , c'est-à-dire $dS = 2\pi r dr / \cos \theta = 2\pi r / L(r) dr$. Et donc par l'ensemble on obtient :

$$D_{Ek} = \sqrt{2Ek} \int_0^1 L^{-1/2} (u_\phi^2 + L^{-2} u_s^2) r d\phi dr \sim Ek^{1/2} \langle u^2 \rangle$$

Le rapport des dissipations permet d'évaluer laquelle est la plus importante

$$\frac{D_\nu}{D_{Ek}} \sim Ek^{1/2} \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\langle u^2 \rangle} \sim Ek^{1/2} m^2$$

Ainsi

- $m < Ek^{-1/4}$, c'est le frottement aux parois qui domine la dissipation
- $m > Ek^{-1/4}$, c'est les effets visqueux en volume qui dominent

On retrouve ici l'équilibre qui a donné la taille de la couche de Stewartson. Ainsi, au seuil, la dissipation visqueuse dans le volume et le frottement d'Ekman aux parois sont du même ordre de grandeur.

id	E_U^0	E_u	D_ν^0	D_{Ek}^0	D_ν	D_{Ek}
$e6^+$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$6.0 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$
$e6^-$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$
$e7^+$	$5.7 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-11}$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$9.3 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$
$e8^+$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$2.2 \cdot 10^{-11}$	$3.0 \cdot 10^{-11}$
$e8^-$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-11}$	$7.4 \cdot 10^{-11}$	$2.3 \cdot 10^{-12}$	$8.0 \cdot 10^{-12}$

TAB. 4.4 – Énergies et dissipations pour les calculs de turbulence. Les paramètres des différents calculs sont donnés par la table 4.1. E_U^0 est l'énergie zonale ($m = 0$), E_u est l'énergie non-zonale ($m \neq 0$), D_{Ek} est la dissipation due au frottement d'Ekman et D_ν la dissipation due à la viscosité dans le volume. L'exposant 0 signifiant une grandeur zonale, et son absence une grandeur non-zonale. Toutes ces grandeurs sont moyennées dans le temps et on trouvera leurs définition à l'annexe B.1.7.

Résultats

Les dissipations et les énergies pour les calculs présentés dans la table 4.1 sont donnés dans la table 4.4. L'annexe B.1.7 détaille le calcul de ces grandeurs.

C'est toujours la dissipation par frottement d'Ekman qui domine sur la dissipation visqueuse, axisymétrique ou non. La dissipation par frottement d'Ekman non-zonal est d'ailleurs très importante et c'est bien sa prise en compte par notre modèle qui nous permet d'atteindre ces régimes très turbulents (plusieurs dizaines de fois critiques).

On remarque que pour $Ro > 0$, la dissipation visqueuse $m \neq 0$ est nettement plus élevée (comparaison $e8^+$ et $e8^-$) : c'est sans-doute que plus d'énergie est dissipée dans les couches limites équatoriales (où la vorticité est forte, voir fig. 4.3).

4.3 Résumé et discussion

Grâce à la prise en compte du frottement d'Ekman et de la conservation de la masse, nous parvenons à un régime très turbulent ($Re_{rms} > 10^4$) dans nos simulations numériques à très faibles Ro et Ek . La turbulence observée est fortement anisotrope et inhomogène ; le spectre des vitesses semble s'organiser comme $E_u \sim m^{-5}$ de manière systématique pour des nombres d'ondes supérieurs à ceux correspondant à l'injection de l'énergie, et ceci quel que soit le signe de Ro . Ce type de spectre suggère une turbulence d'ondes de Rossby, vision qui semble cohérente avec tous les phénomènes observés. La pente du récipient joue donc un rôle prépondérant dans cette turbulence via un effet β omniprésent.

La figure 4.11 résume la phénoménologie de cette turbulence. La forte influence de la rotation empêche la cascade d'énergie vers les petites échelles où elle pourrait être dissipée. Au lieu de ça, l'énergie envahit les grandes échelles et elle y est dissipée par frottement d'Ekman. Vers les petites échelles, seules quelques ondes de Rossby (sans doute excitées de la même manière que le sont les instabilités primaires de cisaillement, voir §3.3.5) atteignent les échelles les plus petites.

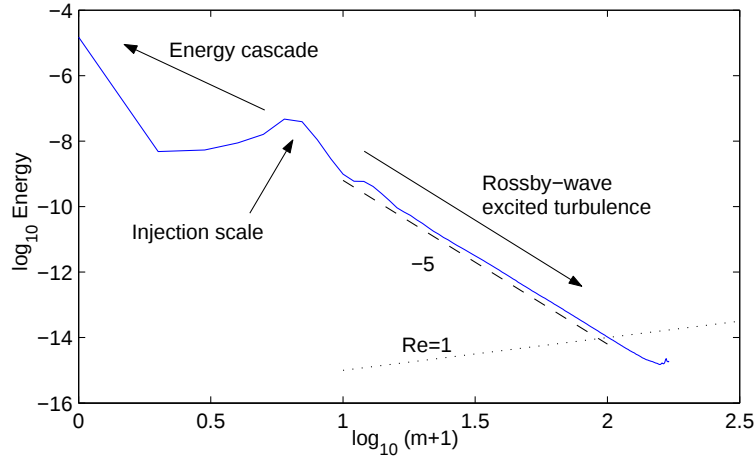


FIG. 4.11 – Un spectre typique (cas $e8^-$) sur lequel on a rajouté un peu de phénoménologie, pour résumer le comportement des écoulements turbulents observés.

La turbulence quasi-géostrophique est un sujet très riche où beaucoup de questions restent actuellement sans réponse, et notre code numérique pourrait permettre d'étudier plus en profondeur ces phénomènes de turbulence à faibles Ro et Ek , après une confrontation avec les expériences de [Baroud *et al.* \(2002\)](#), qui permettrait de le valider ou pas.

En effet, nous avons montré que notre code numérique quasi-géostrophique peut permettre d'atteindre des régimes turbulents pour des fluides en rotation rapide, mais la question de la validité de cette approche est évidemment cruciale. On peut déjà se faire une idée à ce propos en comparant les figures [A.3a](#) et [A.5](#) : on a un accord qualitatif entre expériences et calcul numérique, mais le quantitatif fait défaut.

[Baroud *et al.* \(2002\)](#) considèrent leur écoulement expérimental comme étant quasi-bidimensionnel pour des nombres de Rossby $Ro \sim 0.1$, en s'appuyant sur des corrélations entre deux sondes situées à la verticale l'une de l'autre. Nos expériences montrent également que visuellement, l'écoulement reste bidimensionnel jusqu'à $Ro \sim 0.2$. Les régimes explorés satisfont ces conditions.

La singularité équatoriale dans la sphère pose également des questions. Comme nous l'avons mentionné dans [Schaeffer & Cardin \(2005b\)](#), dans le cas des instabilités, l'effet peut être négligé. Cependant, la vorticité (équivalent à un nombre de Rossby local) vers l'équateur devient souvent très grande, sans qu'il faille forcément y attacher une réalité physique. Le modèle n'est plus valable lorsqu'on est proche de l'équateur (voir §2.5 et §C.2.3). C'est ce qui a amené [Yano *et al.* \(2003\)](#) à tronquer ces calculs quasi-géostrophiques dans la zone équatoriale.

Un autre effet qui pourrait briser la bidimensionalité est le temps de propagation de la colonne de Taylor sur toute la hauteur du récipient. La vitesse de groupe des ondes inertielles (voir §1.2.4) $v_g \sim \Omega/k$ diminue lorsque k augmente. Ainsi le temps mis par la colonne de Taylor pour se propager dans tout le domaine est $t = R/v_g \sim kR/\Omega$. Il faudrait alors comparer ce temps de propagation à un temps caractéristique du cisaillement vertical,

seul cisaillement qui pourrait s'opposer à la propagation de la colonne de Taylor. Ce temps n'est pas disponible dans notre modèle car il n'y a pas de cisaillement vertical : toute la colonne de fluide est advectée en bloc. La question reste donc ouverte, et ce temps semble devoir jouer un rôle important.

Chapitre 5

Instabilité Magnétique : L'effet dynamo

Le seuil de l'action dynamo pour les écoulements étudiés précédemment est déterminé, dans une gamme de paramètres proche des métaux liquides et du noyau terrestre. Les mécanismes mis en jeu sont décrits.

Olson *et al.* (1999) montrent que dans certains cas, les simulations numériques de la géodynamo présentent des régimes “en colonnes”, et que l'écoulement est symétrique par rapport à l'équateur. Il y a également une dérive de ces colonnes qui n'est pas liée à l'advection, mais plutôt une propagation d'onde. L'hélicité est négative dans l'hémisphère nord, et positive dans l'hémisphère sud.

Une grande partie des résultats présentés dans ce chapitre a fait l'objet d'un article (Schaeffer & Cardin, 2005a), reproduit au §5.3, et qui est aussi disponible en ligne : <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00003095>

Après une partie (§5.1) développant les concepts de cette approche, un rapide résumé de l'article (§5.2) suivi de ce dernier (§5.3), nous nous pencherons plus attentivement sur les mécanismes mis en jeu dans nos dynamos (§5.5).

Dans tout ce qui suit, nous travaillons avec deux systèmes de coordonnées ayant la même origine. Ainsi au repère cylindrique $(\vec{e}_s, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ s'ajoute le repère sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. r est le rayon sphérique qui mesure la distance au centre, tandis que s est le rayon cylindrique qui mesure la distance à l'axe de rotation. Les coordonnées naturelles pour le champ de vitesse sont (s, ϕ, z) et celles du champ magnétique (r, θ, ϕ) .

5.1 Le concept de dynamo hybride

Ces dernières années on a pu voir de nombreuses expériences (Gailitis *et al.*, 2001; Stieglitz & Müller, 2001; Cardin & Brito, 2004) et calculs numériques (Glatzmaier & Roberts, 1995; Kageyama & Sato, 1997; Kuang & Bloxham, 1997; Christensen *et al.*, 1999) dont le but était d'étudier l'auto-induction de champ magnétique, dans des contextes à pertinence plus ou moins géophysiques. Si les simulations numériques de la géodynamo ont réussi à

reproduire des champs magnétiques proches de celui de la Terre, dont certains présentent même des inversions de polarité, elles utilisent des paramètres très éloignés de la réalité, à cause des limitations des ordinateurs. Ainsi le nombre de Prandtl magnétique est souvent de l'ordre de l'unité, et toujours supérieur à 0.1 tandis qu'il serait de 10^{-5} dans les métaux liquides, y compris aux conditions qui règnent dans le noyau (Poirier, 1994). Mais pour obtenir une dynamo avec de tels nombres de Prandtl magnétique, il faut que l'écoulement atteigne des hauts nombres de Reynolds, ce qui implique l'apparition de turbulence et donc d'une large gamme d'échelles spatiales, qui va nécessiter des moyens informatiques qui sont hors de portée pour encore un bon moment.

Pour atteindre des régimes plus réalistes, nous avons voulu tirer parti des symétries du problème afin d'alléger les calculs. En effet, la rotation forte tend à aligner les structures selon l'axe de rotation, ce qui peut permettre l'utilisation d'un modèle quasi-géostrophique. De plus, avec une diffusivité magnétique très élevée (Pm petit), on peut s'attendre à ce que les échelles de temps et d'espace du champ magnétique soient principalement grandes tandis que le champ de vitesse peut aussi se développer aux petites échelles spatiales et temporelles.

5.1.1 Séparation d'échelle

Le champ magnétique n'étant pas soumis à une bidimensionnalisation, nous devons le résoudre complètement, sur une grille 3D. Cependant, il semble raisonnable de penser que pour $Pm \ll 1$, l'échelle de coupure pour le champ magnétique est plus grande que pour le champ de vitesse. Ce type d'approche a déjà permis à Ponty *et al.* (2004) de calculer des dynamos cinématiques pour Pm petit en ne calculant que les grandes échelles de la turbulence par un code LES¹.

Considérons que les principales interactions non-linéaires sont locales (interaction à même vecteur d'onde). On peut alors définir l'échelle de coupure ℓ_u du champ de vitesse telle que le nombre de Reynolds local soit d'ordre 1 :

$$Re(\ell_u) = \frac{u(\ell_u) \cdot \ell_u}{\nu} = 1$$

De même, l'échelle de coupure du champ magnétique ℓ_B est définie telle que le nombre de Reynolds magnétique local soit d'ordre 1 :

$$Rm(\ell_B) = \frac{u(\ell_B) \cdot \ell_B}{\eta} = 1$$

Le champ magnétique aux échelles plus petites que ℓ_B est forcé par le champ de vitesse, mais le temps caractéristique de diffusion en dessous de cette échelle ℓ_B^2/η est inférieur au temps de retournement $\ell_B/u(\ell_B)$, de sorte que le champ magnétique est en équilibre avec le forçage et peut être évalué explicitement (voir §C.5).

¹Large Eddy Simulation

Avec un spectre d'énergie cinétique $E(k) \sim k^{-\alpha}$, on peut estimer $u(\ell_u) \sim \ell_u^{\frac{\alpha-1}{2}}$. En substituant cette expression dans le rapport des échelles obtenues ci-dessus, on trouve

$$\frac{\ell_u}{\ell_B} \sim Pm^{\frac{2}{\alpha+1}} \quad (5.1)$$

Ainsi, pour un spectre de Kolmogorov $E(k) \sim k^{-5/3}$, on a $\ell/L \sim Pm^{3/4} \simeq 10^{-4}$ pour des métaux liquides. Et pour un spectre très raide $E(k) \sim k^{-5}$ qu'on peut observer en turbulence en rotation, on a encore $\ell/L \sim Pm^{1/3} \simeq 10^{-2}$ pour ces mêmes métaux liquides.

Nous avons donc montré que pour des Pm suffisamment petits, le champ magnétique évolue à des échelles bien plus grandes que l'échelle de coupure visqueuse. Dans les métaux liquides, $Pm \sim 10^{-5}$, et donc le champ magnétique vivra à des échelles au moins 100 fois plus grandes que l'échelle de coupure visqueuse.

En conséquence, dans nos simulations numériques, nous pouvons limiter le calcul du champ magnétique aux grandes échelles et ne pas résoudre les plus petites échelles, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul.

5.1.2 Dipôles et quadrupoles

Notre champ de vitesse quasi-géostrophique possède une symétrie par rapport au plan de l'équateur :

$$\begin{aligned} u_s(s, -z, \phi) &= u_s(s, z, \phi) \\ u_\phi(s, -z, \phi) &= u_\phi(s, z, \phi) \\ u_z(s, -z, \phi) &= -u_z(s, z, \phi) \end{aligned}$$

qu'on note $S_{eq}u = u$, et on dira que u est symétrique par rapport au plan de l'équateur.

Soit deux champs magnétiques B_{dip} et B_{quad} tels que $B_{dip} = -S_{eq}B_{dip}$ (anti-symétrique) et $B_{quad} = S_{eq}B_{quad}$ (symétrique). $\vec{u} \wedge \vec{B}$ est de symétrie contraire à $\vec{B}$ et $\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})$ est de même symétrie que $\vec{B}$. Le terme de diffusion $\nabla^2 \vec{B}$ est quant à lui, de même symétrie que $\vec{B}$. Ainsi en partant d'un champ symétrique (respectivement anti-symétrique) par rapport à l'équateur, on ne peut obtenir que cette même symétrie par diffusion et par induction avec notre écoulement quasi-géostrophique (voir par exemple [Roberts, 1972](#)).

On a donc deux familles de solutions à l'équation d'induction, qui sont disjointes : les quadrupoles (symétriques) et les dipôles (anti-symétriques).

5.1.3 Implémentation numérique

Le code utilisé pour l'induction magnétique est décrit dans l'annexe [B.2](#) et est basé sur le code dynamo benchmark ([Christensen et al., 2001](#)). En considérant les arguments ci-dessus, on va pouvoir calculer le champ magnétique uniquement sur les plus grandes échelles. On travaille alors sur une grille 3D sphérique avec NR points de grille radiaux, et

une décomposition spectrale sur les coquilles sphériques tronquée à $l = l_{\max}$ et $m = m_{\max}^B$, où m désigne le nombre d'onde azimutal et l le degré de l'harmonique sphérique.

De même le pas de temps pour l'équation d'induction dt_B peut être plus grand que celui pour l'équation de vortacité dt_U . Il n'existe pas vraiment de règle ici, mais en pratique on cherchera toujours à avoir des pas de temps le plus grand possible, et souvent $dt_B/dt_U = 6$ à 20.

Grille 3D

Le champ de vitesse calculé en 2D avec le modèle quasi-géostrophique (dont le code numérique est décrit dans l'annexe B.1) va être transposé sur la grille 3D (L'annexe B.3 décrit la méthode numérique utilisée). Pour que les structures verticales soient bien représentées par les harmoniques sphériques, il faut garder un grand nombre de ces harmoniques, et en pratique nous utiliserons $l_{\max} \geq 59$. Des calculs effectués avec $l_{\max} = 79$, et les spectres obtenus montrent que $l_{\max} = 59$ suffit à bien décrire les structures verticales.

De même la relative finesse des structures radiales contraint NR, et en pratique nous utilisons NR = 100. Là encore des calculs pour NR = 150 montrent que NR = 100 est largement suffisant.

La dépendance azimutale étant assurée par des séries de Fourier, la précision reste grande même pour des $m_{\max}^B$ petits. Un test de convergence (§5.1.4) montre que $m_{\max}^B$ peut être très petit sans perdre le taux de croissance dynamo. Il suffit de s'assurer qu'on capture toute l'action dynamo. En pratique nous choisissons souvent $m_{\max}^B = 21$.

Test : Décroissance du dipôle

Pour s'assurer que le code magnétique est juste², nous avons effectué plusieurs tests, dont le calcul de la "diffusion libre du dipôle". Nous avons vérifié que nous retrouvions bien le bon taux de décroissance de l'énergie magnétique pour des temps long, à partir d'une superposition d'harmoniques sphériques. En effet le mode propre qui décroît le plus lentement a un taux de croissance de $-\pi^2$ (Gubbins & Roberts, 1987). Après 6 temps de diffusion, nous obtenons un taux de croissance très satisfaisant pour l'énergie :

$$\lambda = -19.7402 = -2 \times 3.1417^2$$

Ce calcul a été réalisé avec une grille radiale de 50 points seulement. A noter que dans toute notre étude nous parlerons du taux de croissance de *l'énergie*, qui est le double du taux de croissance de l'amplitude.

5.1.4 Séparation d'échelle en pratique

Sur la figure 5.1 on a représenté le taux de croissance obtenu pour les mêmes paramètres par deux modèles numériques qui diffèrent par la résolution avec laquelle est calculée le

²ce test a permis de déceler une erreur dans les conditions limites magnétiques

champ magnétique. La simulation la moins résolue est démarrée avec le résultat de la simulation pleine résolution. On constate dans ce cas que calculer jusque $m = 16$ et tous les 6 pas de temps hydro suffit à reproduire le bon taux de croissance, ce qui justifie *a posteriori* notre hypothèse de séparation d'échelles pour l'advection et la diffusion du champ magnétique (§5.1.1).

On remarque que pour $Pm = 0.3$ la séparation d'échelle est déjà bien marquée. Ceci est dû à la raideur du spectre d'énergie cinétique, qui rend les petites échelles de vitesse insignifiantes.

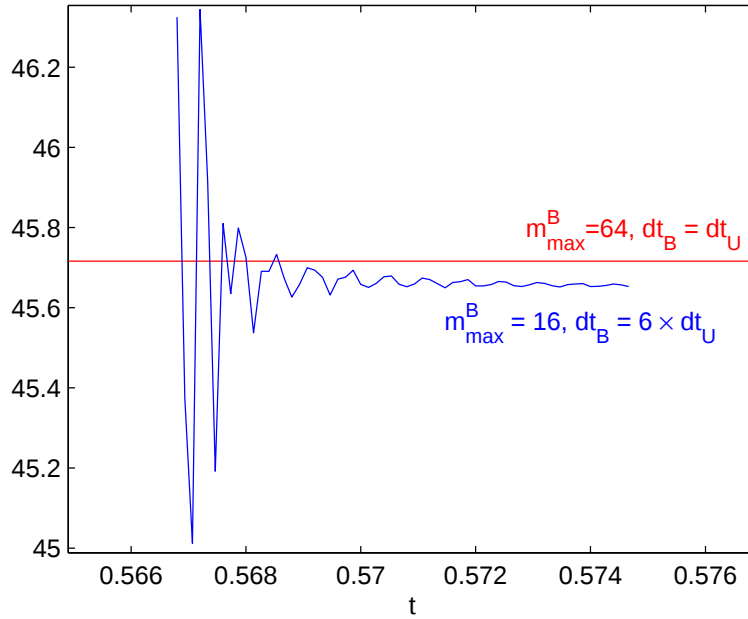


FIG. 5.1 – Effet de la séparation d'échelle numérique sur le seuil dynamo : taux de croissance de l'énergie magnétique en fonction du temps pour $Ek = 10^{-6}$, $Ro = 0.04$, $Pm = 0.3$ et deux modèles numériques.

5.2 Résumé de l'article

5.2.1 “Abstract”

Grâce à un modèle quasi-géostrophique d'écoulement et un code d'induction classique, nous avons obtenu des dynamos cinématiques dans une sphère en rotation rapide. D'une part, l'écoulement quasi-géostrophique est calculé dans le plan équatorial d'une sphère et correspond aux instabilités d'une couche de cisaillement interne, produite par rotation différentielle. D'autre part, l'équation d'induction est résolue dans toute la sphère, après avoir étendu le champ de vitesse par continuité dans la direction de l'axe de rotation.

La rotation différentielle et la propagation d'ondes de Rossby sont les ingrédients essentiels du mécanisme dynamo mis en jeu, et qui peut être interprété en terme de dynamo

$\alpha\Omega$.

En utilisant la quasi-géostrophie de l'écoulement pour augmenter la résolution spatiale et temporelle, nous avons pu calculer des dynamos à très petit nombre d'Ekman (rotation rapide) et très faibles nombre de Prandtl (métaux liquides) qui sont pertinentes pour la modélisation des noyaux planétaires.

5.2.2 Le seuil dynamo

Le §5.3.5 traite du seuil d'action dynamo. La figure 5.5 montre tous les seuils d'action dynamo obtenus. Les valeurs numériques sont également reportées dans le tableau 5.1. Quelques constatations essentielles :

1. Lorsqu'on fige l'écoulement (c'est-à-dire qu'on prend une photo à un instant donné, et qu'on ne fait plus évoluer le champ de vitesse), nous n'avons jamais pu observer d'action dynamo.
2. Avec ou sans pompage d'Ekman, le seuil dynamo reste pratiquement le même.
3. Les dipôles ont un seuil d'apparition toujours plus élevé que les quadrupoles.
4. Le seuil est plus bas pour $Ro < 0$ que pour $Ro > 0$.

5.2.3 Dynamos oscillantes

Un autre aspect remarquable des dynamos obtenues, est la présence d'inversions. En effet, beaucoup d'entre elles sont en fait des solutions oscillantes, dont le champ magnétique s'inverse très régulièrement. Le §5.3.6 et la figure 5.8 décrivent ces solutions. Il faut souligner que ces inversions sont obtenues dans un système purement linéaire, sans avoir de rétroaction de la force de Laplace. Le tracé du taux de croissance en fonction du temps fait apparaître plusieurs échelles de temps :

1. des fluctuations de faible amplitude et de courte période : elles sont le reflet de la turbulence de l'écoulement ;
2. la période propre de l'inversion, qui est lié au temps de diffusion magnétique, et qui est très bien décrite par un modèle à deux niveaux.
3. un temps d'inversion (ou de relaxation) plus court, qui correspond à l'élimination de l'ancien champ magnétique central.

Bien sûr, nous avons vérifié que ce n'était pas dû à un problème de résolution : en augmentant considérablement la résolution ($NR \times 2$, $m_{\max}^B \times 2$, $l_{\max} + 33\%$) ces propriétés restent inchangées. Ce comportement ressemble aux ondes verticales décrites par Parker (1955) dans un milieu infini et repris par Roberts (1972) dans une sphère. Nous le décrivons au §5.4.3.

5.3 Article : Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number

Article ([Schaeffer & Cardin, 2005a](#)) soumis à Earth Planet. Sci. Lett.

5.3.1 abstract

Rapidly rotating spherical kinematic dynamos are computed using the combination of a quasi geostrophic (QG) model for the velocity field and a classical spectral 3D code for the magnetic field. On one hand, the QG flow is computed in the equatorial plane of a sphere and corresponds to Rossby wave instabilities of a geostrophic internal shear layer produced by differential rotation. On the other hand, the induction equation is computed in the full sphere after a continuation of the QG flow along the rotation axis. Differential rotation and Rossby-wave propagation are the key ingredients of the dynamo process which can be interpreted in terms of $\alpha\Omega$ dynamo. Taking into account the quasi geostrophy of the velocity field to increase its time and space resolution enables us to exhibit numerical dynamos with very low Ekman (rapidly rotating) and Prandtl numbers (liquid metals) which are asymptotically relevant to model planetary core dynamos.

5.3.2 Introduction

The magnetic field of the Earth is produced by a dynamo effect in the metallic liquid core of our rotating planet. Many efforts have been made successfully in the last decade to describe the mechanism of a self induced magnetic field either with experimental models ([Gailitis et al., 2001](#); [Stieglitz & Müller, 2001](#); [Cardin & Brito, 2004](#)) or numerical simulations ([Glatzmaier & Roberts, 1995](#); [Kageyama & Sato, 1997](#); [Kuang & Bloxham, 1997](#); [Christensen et al., 1999](#)). Both approaches have limitations. No experiment has been done in rotation while rotation is seen as a key ingredient by geophysicists to explain the geometry and the amplitude of the geomagnetic field ([Gubbins & Roberts, 1987](#)). All numerical models ([Dormy et al., 2000](#); [Kono & Roberts, 2002](#)) have introduced the Coriolis force in solving the Navier-Stokes equation and the quasi geostrophy (two dimensionality imposed by the Taylor Proudman theorem ([Greenspan, 1968](#))) of the flow participates in the generation of the magnetic field. Thermal convective vortices aligned with the rotation axis are associated to surface patches of magnetic field ([Christensen et al., 1999](#)) and spatio-temporal behaviors of magnetic and vorticity field are similar. This effect is a direct consequence of the prescribed magnetic Prandtl number ($P_m = \nu/\eta$, where ν is the kinematic viscosity and η the magnetic diffusivity) in the simulations. The current computer capacities limit the computation to magnetic Prandtl number of the order of unity ([Dormy et al., 2000](#)) while liquid metals exhibit magnetic Prandtl number lower than 10^{-5} , even in the planetary core conditions ([Poirier, 1994](#)).

In this paper, we propose an approach that aims at computing very low magnetic Prandtl number dynamos taking advantage of the quasi-geostrophic behavior of the velocity

field. For very low Ekman number ($E = \nu/\Omega R^2$, where Ω is the rotation rate of the spherical container, and R its radius), a quasi-geostrophic (QG) approach models correctly the flow in a rapidly rotating sphere (Busse, 1970; Cardin & Olson, 1994). It consists of the integration of the flow equations along the rotation axis. Even if the numerical resolution is done with a stream function in the equatorial plane (2D), the top and bottom boundary conditions are taken into account through slope (β) and Ekman pumping effects. In the context of the study of thermal convection in rapidly rotating spherical shells, Aubert *et al.* (2003) have compared successfully their QG results with 3D calculations (Dormy *et al.*, 2004) and experimental measurement (Aubert *et al.*, 2001). Low value of P_m may imply a separation in term of scales and frequencies, between the velocity and magnetic fields in a metallic dynamo. This idea has already been applied to kinematic dynamo computations at low P_m (Ponty *et al.*, 2004).

In this work, we compute the QG flow in the equatorial plane with a fine spatio-temporal resolution and the velocity is extrapolated to a coarse 3D spherical grid where the induction equation is solved.

In order to demonstrate the validity of this approach, we have decided to apply it to a simple case. Instead of a thermal convective flow for which heat transport has to be modeled, we model the instabilities of an internal geostrophic shear layer. This layer, known as the Stewartson layer, is produced by a differentially rotating inner core in a rotating sphere and consists of two nested viscous shear layers (Stewartson, 1966; Dormy *et al.*, 1998). For a critical Ro number ($Ro = \Delta\Omega/\Omega$, where $\Delta\Omega$ is the differential rate of rotation of the inner core), the Stewartson layer becomes unstable (Hollerbach, 2003) and generates Rossby waves (Schaeffer & Cardin, 2005b).

As we will show in this paper, such kind of flow can generate and sustain a magnetic field. The QG-model allows us to compute dynamos at very low Ekman (down to 10^{-8}) and Prandtl numbers (as low as $3 \cdot 10^{-3}$).

5.3.3 The equations

Hydrodynamics

Let us consider a sphere of radius R filled with an incompressible liquid metal of viscosity ν and magnetic diffusivity η . The sphere is rotating at Ω along the z -axis of a cylindrical reference frame ($\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$). The sphere is split at the colatitude $\pm \sin^{-1}(R_s/R)$ (R_s/R is set to 0.35). The two polar caps are differentially rotating at $\Delta\Omega$ as shown in figure 5.2. Ω^{-1} is chosen to scale the time, R the length, $(\mu_0\rho)^{1/2}R\Omega$ the magnetic field. For low Ekman and Rossby numbers, the flow is quasi geostrophic (Greenspan, 1968). Taking the curl of the Navier-Stokes equation and averaging along the rotation axis z (noted by an overbar), we get the QG equation for the z -component of the vorticity $\omega = \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \mathbf{u}$, provided that u_s and u_ϕ are independent of z (Schaeffer & Cardin, 2005b).

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_s \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{u_\phi}{s} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} - (2 + \omega) \frac{\overline{du_z}}{dz} = \overline{\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z} + E\Delta\omega \quad (5.2)$$

Induction equation

The velocity field computed with equations (5.2, 5.5) in the equatorial plane is extrapolated to a spherical grid (on Gauss collocation points) in the physical space. This is a straightforward process because u_s and u_ϕ are independent of z and u_z is a linear function of z . Then, the velocity field is changed into spherical coordinates $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ to compute the non linear induction term. The dimensionless equation of evolution of the magnetic field is :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + P_m^{-1} \mathbf{E} \Delta \mathbf{B} \quad (5.6)$$

Changes of magnetic Prandtl number P_m^{-1} would change directly the magnetic Reynolds number $R_m = Re P_m = Ro E^{-1} P_m$ which is more commonly used in dynamo modeling. This equation is solved using spherical harmonics where the magnetic boundary conditions are easy to write (Gubbins & Roberts, 1987). The induction part of the code has been checked using kinematic dynamo results (Dudley & James, 1989) and the dynamo benchmark (Christensen *et al.*, 2001).

Numerical implementation

A finite difference scheme is used on an irregular radial grid (denser in the Stewartson and Ekman layers). A semi implicit Crank-Nicholson scheme is used for linear terms in time whereas an Adams-Bashforth procedure is implemented for non linear terms. For low P_m , cylindrical and spherical radial grid steps may differ by a factor 20. Similarly, time steps for the induction equation may be much longer than the velocity time steps (as much as 20 times). For a run at $E = 10^{-8}$, the stream function is computed on a cylindrical mesh made of 600 radial points and expanded in Fourier series up to degree $m = 170$ while the magnetic field is expanded in spherical harmonics ($L_{max} = 79, M_{max} = 32$) with an irregular radial grid of 150 points for $P_m = 10^{-2.5}$. By increasing M_{max} and reducing the time step factor, we checked that such truncatures do not influence the onset of dynamo action.

5.3.4 Hydrodynamics

For low Rossby numbers, the split at the spherical boundary produces an internal shear layer in the fluid on a cylinder of radius R_s aligned with the rotation axis. This geostrophic viscous layer consists of two nested layers of different widths as revealed by the asymptotic study of Stewartson (Stewartson, 1966) and illustrated later by a numerical study of Dormy *et al.* (1998); a larger one of size $E^{1/4}$ which accommodates the jump in azimuthal velocity geostrophically and a narrower one of size $E^{1/3}$, ageostrophic, which corresponds to an axial jet insuring the mass conservation.

In our previous study (Schaeffer & Cardin, 2005b), we presented the QG model, which can reproduce only the $E^{1/4}$ layer, and we studied the linear perturbations of this geostrophic internal viscous layer. It becomes unstable when the Rossby number exceeds a critical value Ro^c which varies as $\beta E^{1/2}$ (Schaeffer & Cardin, 2005b). At the onset, the instability

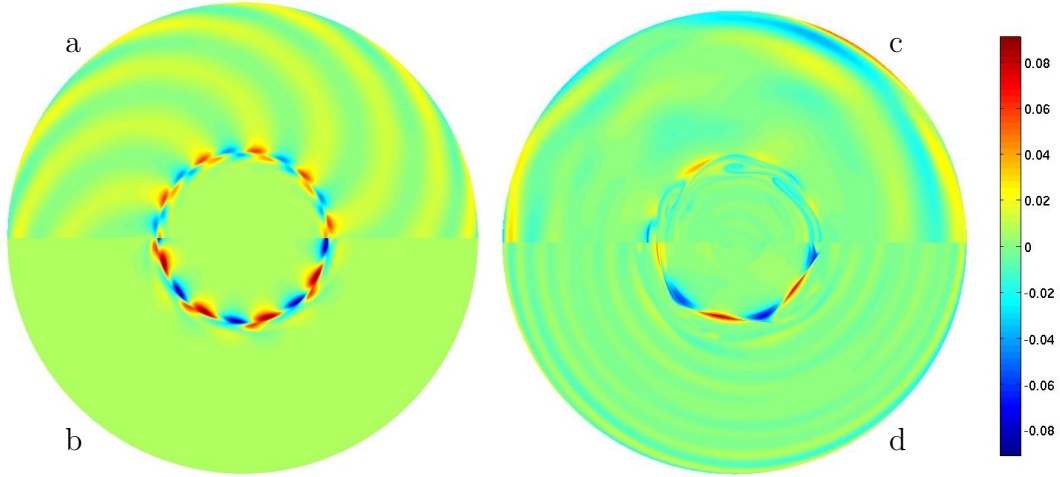


FIG. 5.3 – z -vorticity maps in the equatorial plane. (a) and (b) : $E = 10^{-6}$, $Ro = 0.0096$ and $Ro = -0.0111$ respectively. It shows the flow at the onset of hydrodynamic instabilities for both signs of the Rossby number. (c) and (d) : $E = 10^{-8}$, $Ro = 0.02$ and $Ro = -0.02$ respectively. It shows a typical view of the "turbulent" regime for Rossby numbers about 30 times critical. The color bar gives the local vorticity scale for (c) and (d) only.

is a Rossby wave, azimuthal necklace of cyclones and anticyclones of size $E^{1/4}$ which propagates in the prograde direction as shown in figure 5.3ab. Super rotation ($Ro > 0$) generates a spiraling flow outside the shear layer while the flow is mainly located inside the shear layer for $Ro < 0$. For supercritical Ro , the flow exhibits larger vortices (fig. 5.3cd) which are time dependent but still drifting as Rossby waves. The flow stays mainly concentrated in the shear layer. Figure 5.4 shows the kinetic energy spectra $E(k)$ of this QG turbulent flow. It is very steep : $E(k) \sim k^{-5}$ which is the spectrum predicted by Rhines (1975) for turbulence in presence of Rossby waves. This steep spectrum suggests that the small scales of the flow may be neglected in the induction equation.

5.3.5 Dynamo action

For a given Ekman number ($E = 10^{-6}$ to 10^{-8}), we vary the Rossby number Ro from critical to a few times critical and we find the critical magnetic Prandtl number P_m of the onset of dynamo action by trial and error tests. As the flow is time dependent, we detect dynamo criticality on long term time variations of the magnetic energy. Unlike most of the kinematic dynamo models (Gubbins *et al.*, 2000), a critical magnetic Prandtl number was found for every set of dimensionless numbers (E, Ro) we have computed. In figure 5.5, we plot the calculated critical magnetic Prandtl number P_m^c as function of the Reynolds number $Re = Ro/E$. As expected, we found that an increase of the forcing (Ro) for a given E reduces the critical magnetic Prandtl number. A decrease of the critical magnetic Prandtl number is also observed as we lower the Ekman number. These two effects may be summarised by the use of the magnetic Reynolds number R_m . The data points in figure 5.5

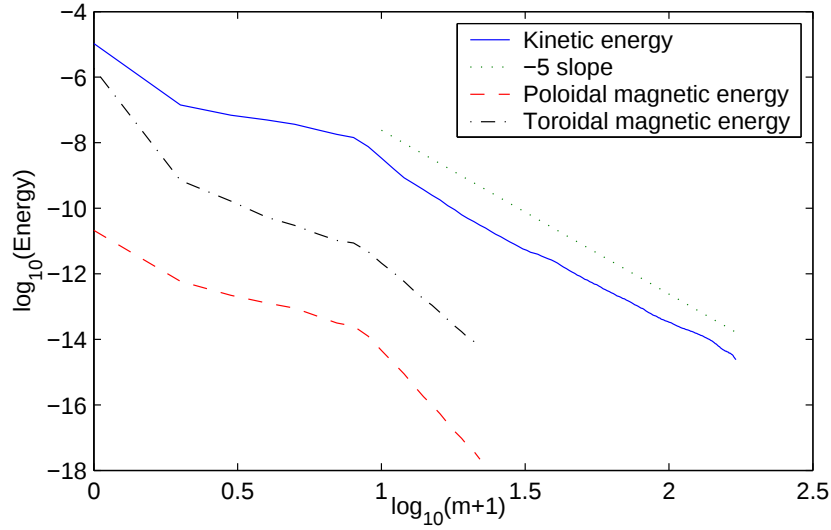


FIG. 5.4 – Spectra of the kinetic energy, and both toroidal and poloidal magnetic energy for $E = 10^{-8}$, $Ro = 0.02$ (30 times critical) and $P_m = 5 \cdot 10^{-3}$ (equivalent to $Re = 2 \cdot 10^6$).

are roughly compatible with the line $R_m = 10^4$. A critical magnetic Reynolds number R_m^c of 10^4 is only indicative because the details of the flow generate large deviations (factor 3) from this simple law. The minimum critical magnetic Prandtl number of 0.003 has been found for $E = 10^{-8}$ and $Ro = 0.02$.

The critical magnetic Prandtl number is not independent of the sign of the differential rotation (sign of Ro). This is expected because the flow is quite different in the two cases as shown in figure 5.3. A negative differential rotation seems to lead to slightly lower dynamo thresholds.

Antisymmetric axial velocities ($u_z(z) = -u_z(-z)$) and symmetric orthoaxial velocities ($u_{s,\phi}(z) = u_{s,\phi}(-z)$) generate two independent families of growing magnetic field in kinematic dynamos known as the dipole and quadrupole families (Roberts, 1972). The geometry of the two families are shown in figure 5.6a and 5.6b : the dipole family is dominated by an axial dipole, whereas the quadrupole family exhibit a strong axial quadrupole. Each family has a different critical magnetic Prandtl number. As shown in figure 5.5, we found that the dipole family has always a larger critical magnetic Reynolds number than the quadrupole family. This result is quite different from the conclusion of the work of Sarson & Busse (1998). Using Kumar and Roberts kinematic dynamos, they found that prograde spiraling of columns and prograde zonal flows favor dipole magnetic fields.

In both families, the strongest magnetic fields are produced in the Stewartson shear layer deep inside the sphere. The typical spectra given in figure 5.4 show that the computed magnetic fields are dominated by both toroidal and axisymmetric components. At the surface of the sphere (figure 5.6c), the radial magnetic field is also mostly axisymmetric, and the non-axisymmetric part is clearly associated to the geostrophic vortices produced in the Stewartson shear layer.

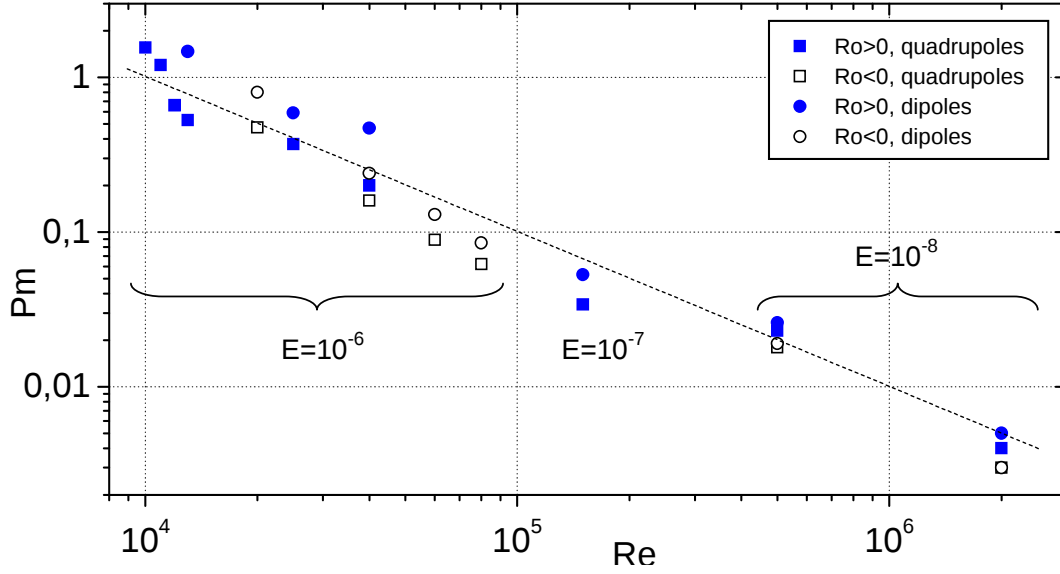


FIG. 5.5 – Dynamo onset for different parameters : Critical magnetic Prandtl number P_m^c versus the absolute Reynolds number $Re = |Ro| E^{-1}$. Dipole and quadrupole thresholds are respectively denoted by circles and squares while solid and open symbols represent positive and negative differential rotation. All the points lie around the $R_m = 10^4$ line.

The geometry of the magnetic field may be understood in term of $\alpha\Omega$ effects (Roberts, 1972; Gubbins & Roberts, 1987). A very large toroidal magnetic field compatible with the azimuthal flow is converted to a poloidal magnetic field by the columnar flow through an α effect. Any non azimuthal component of the magnetic field is transformed into an azimuthal component by the strong differential rotation in the Stewartson layer by Ω effect.

If we consider the magnetic Reynolds number associated to the shear flow $R_m^\Omega = Ro P_m E^{-1}$ and the magnetic Reynolds number based on the vertical velocity $R_m^\alpha = u_z P_m E^{-1} k^{-1}$ where u_z is deduced from the calculation, as well as the Rhines wave number k (Rhines, 1975). We may compute the dynamo number $Dy = \sqrt{R_m^\Omega R_m^\alpha}$ (Roberts, 1972). Figure 5.7 shows that Dy stays roughly constant (between 200 and 300) as the flow becomes more and more vigorous for the quadrupole family. The dipole family seems more easy to excite for negative Rossby number. As proposed by Roberts (1972), this feature may indicate that we have $\alpha\Omega' < 0$ (where Ω' is the radial derivative of Ω) in the northern hemisphere for $Ro < 0$.

Both the geometry and the onset in term of dynamo number Dy indicate that we may look the Stewartson QG dynamo as an $\alpha\Omega$ dynamo where the Ω effect is produced by the azimuthal shear layer and the α effect by the vortex necklace.

Busse (1975) suggested that the Ekman pumping is important for the dynamo process : although the β -effect produces axial velocities, they are out of phase with the axial vorticity at the onset of thermal convection in a rapidly rotating annulus and cannot contribute to the mean helicity, whereas axial velocities due to Ekman pumping are in phase with the

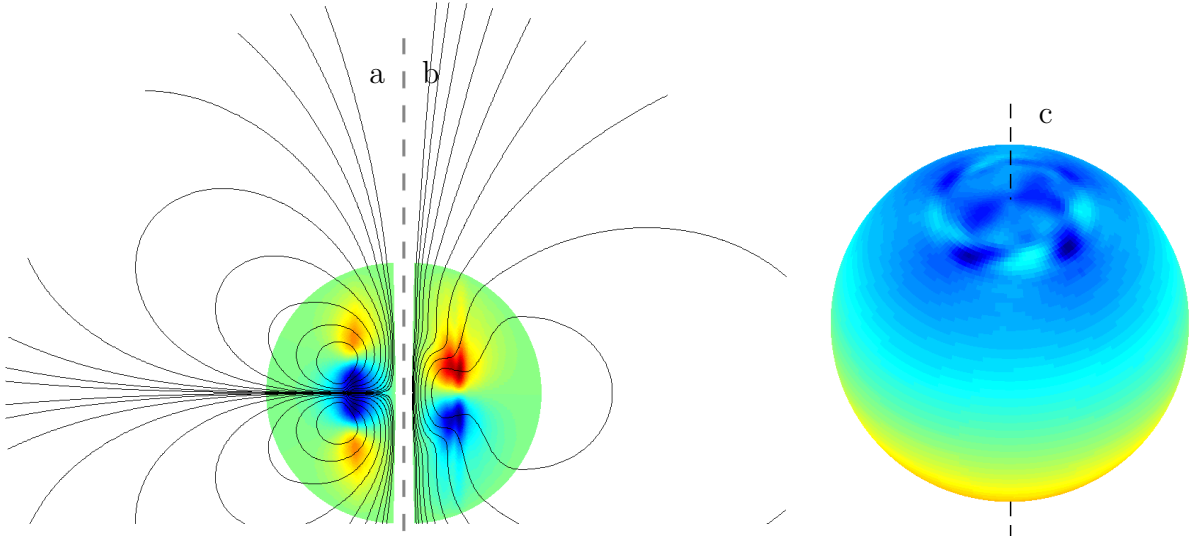


FIG. 5.6 – Growing magnetic field in kinematic dynamos for $E = 10^{-8}$. (a) and (b) are meridian cut of the sphere showing the axisymmetric part of the magnetic field. The solid lines are the poloidal field lines and the color map represent the azimuthal field. (a) shows a quadrupole field obtained at $Ro = 0.02$ and $P_m = 0.005$. (b) shows a dipole field obtained at $Ro = -0.02$ and $P_m = 0.003$. (c) is a spherical map of the radial magnetic field at the surface of the core, corresponding to case (b), the dashed line being the rotation axis. The corresponding vorticity fields are given in figure 5.3cd.

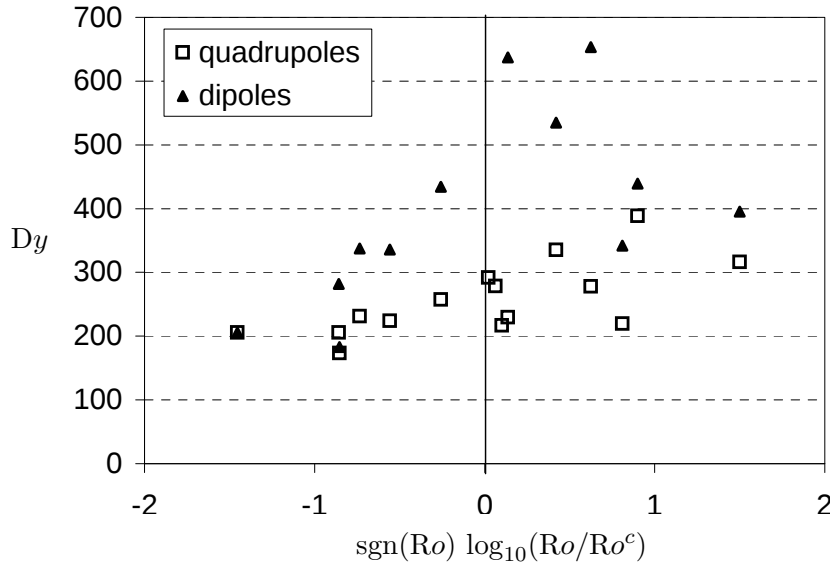


FIG. 5.7 – Onset of the dynamo instability for $E = 10^{-6}$ to 10^{-8} . The critical dynamo number Dy^c is plotted versus $\log_{10}(Ro/Ro^c) \cdot \text{sgn}(Ro)$.

E	Ro	quadrupole P_m^c	dipole P_m^c
10^{-6}	$1.0 \cdot 10^{-2}$	1.56	
10^{-6}	$1.1 \cdot 10^{-2}$	1.2	
10^{-6}	$1.2 \cdot 10^{-2}$	0.66	
10^{-6}	$1.3 \cdot 10^{-2}$	0.53	1.47
10^{-6}	$2.5 \cdot 10^{-2}$	0.37	0.59
10^{-6}	$4.0 \cdot 10^{-2}$	0.2	0.47
10^{-6}	$-8.0 \cdot 10^{-2}$	0.062	0.085
10^{-6}	$-6.0 \cdot 10^{-2}$	0.089	0.13
10^{-6}	$-4.0 \cdot 10^{-2}$	0.16	0.24
10^{-6}	$-2.0 \cdot 10^{-2}$	0.475	0.8
10^{-7}	$1.5 \cdot 10^{-2}$	0.034	0.053
10^{-8}	$5.0 \cdot 10^{-3}$	0.023	0.026
10^{-8}	$-5.0 \cdot 10^{-3}$	0.018	0.019
10^{-8}	$2.0 \cdot 10^{-2}$	0.004	0.005
10^{-8}	$-2.0 \cdot 10^{-2}$	0.003	0.003

TAB. 5.1 – Table of the critical magnetic Prandtl numbers for the different calculations.

axial vorticity. However, the Ekman pumping flow is of order $E^{1/2}$, so that the dynamo process proposed by Busse becomes very weak when lowering the Ekman number. In addition, when artificially removing the Ekman pumping flow in our dynamo simulations, we still observe dynamo action with nearly the same threshold. It seems to indicate that the β -effect alone may produce an efficient α effect, without requiring an Ekman pumping flow.

Furthermore, we have not been able to find a critical magnetic Prandtl number with a steady flow (either a time averaged flow or a flow with its time evolution stopped at a given time). It implies that the time evolution of the flow is a key ingredient for dynamo action in these quasi-geostrophic dynamos. The propagation of the Rossby waves is required to put in phase the non axisymmetric magnetic fields and velocities in order to produce a axisymmetric poloidal magnetic field. This type of α effect was proposed in the model of Braginsky (1964). Currently, many dynamo experiments are designed with the help of numerical simulations (kinematic dynamos). Even if the flow is highly turbulent ($Re > 10^6$), mean flow approaches are used for simplicity purposes to find the dynamo onset (Gailitis *et al.*, 2001; Tilgner, 2002; W. Dobler & Stepanov, 2003; L. Marié & Léorat, 2003). This method would fail in the case of Stewartson dynamos.

5.3.6 Oscillating solution

As in many $\alpha\Omega$ dynamo (Roberts, 1972), we sometimes obtain a time oscillating solution for the Stewartson dynamo. Dipole solutions for $E = 10^{-6}$ do exhibit such a behavior. The growth rate of one of these dynamos is plotted on figure 5.8, showing three time scales :

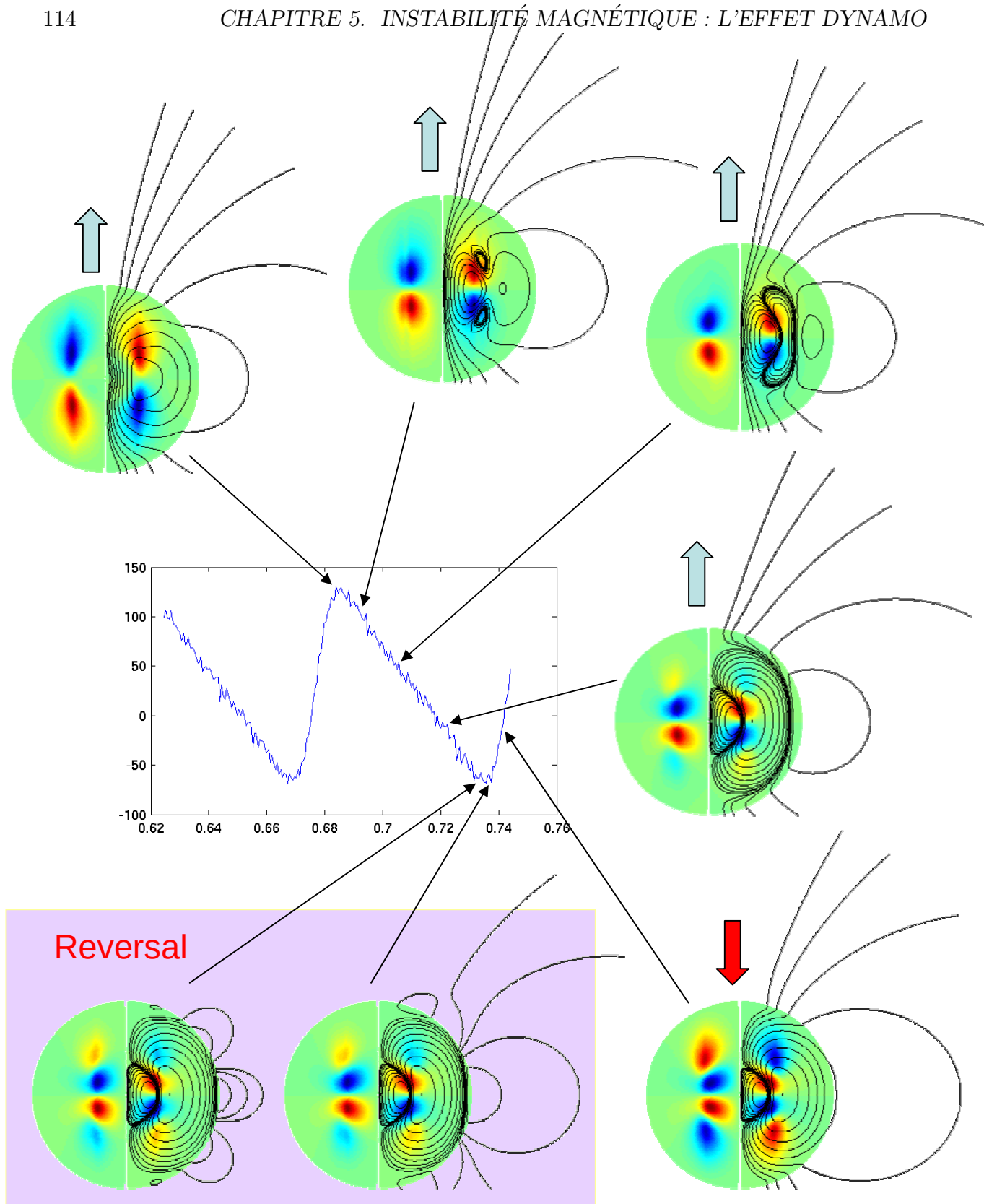


FIG. 5.8 – Magnetic field reversal observed at $E = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$ and $P_m = 0.1$. The graph shows the evolution of the growth rate of the magnetic energy as a function of time (in magnetic diffusion time units).

the smallest one is the time scale of the velocity fluctuations. The intermediate time scale is the time needed for the growth rate to go from its minimum value to its maximum. The large time scale is the period of oscillation, not linked to any time scale of the flow.

In the context of kinematic dynamos, this behavior correspond to a complex eigenvalue of the linear set of equation (Roberts, 1972; Gubbins & Roberts, 1987; Dudley & James, 1989). We use the same formalism to explain our result. It may be explained by two coupled magnetic modes B_1 and B_2 . Let assume that the induction equation may be approximated by the following system :

$$\frac{dB_1}{dt} = \lambda_1 B_1 + K_{12} B_2 \quad (5.7)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = \lambda_2 B_2 - K_{21} B_1 \quad (5.8)$$

with all real values. For low coupling ($K_{12}K_{21} < (\lambda_1 - \lambda_2)^2/2$) the eigenvalues of this system are real, so that the growing solution is a combination of B_1 and B_2 . This is the case for the quadrupole family at $Ro < 0$. However, when the coupling $K_{12}K_{21}$ is sufficiently strong, the eigenvalues are complex and as a result the growing magnetic field oscillates periodically between B_1 and B_2 . The intermediate time scale (time for the growth rate to go from its minimum to its maximum) is very close to the phase shift between B_1 and B_2 , and one of the two modes is dominant near the minimum of the growth rate cycle, while the other one is dominant near the maximum, with growth rate close to λ_1 and λ_2 .

The reversal process at work in our simulations is a smooth periodic evolution of the magnetic field, but at the surface it appears to be a sudden sign reversal. In fact, a reversed poloidal magnetic field is slowly growing inside the Stewartson layer, moving away the initial poloidal magnetic field until it reaches the outer boundary. Then, the reversed dipole magnetic field suddenly appears at the surface and ultimately the poloidal field reverses at the center. During the time oscillation, the axisymmetric toroidal magnetic field patches in the Stewartson layer migrate toward the equator as reversed polarity toroidal fields are formed at higher latitudes. This migration could be understood in terms of Parker dynamo waves (Parker, 1955; Roberts, 1972).

5.3.7 Conclusion

In summary, we have computed a quasi-geostrophic dynamo based on a Stewartson shear layer flow. The scale separation approach works because the small scales of the flow in our rotating sphere are negligible (very steep kinetic energy spectrum $E(k) \sim k^{-5}$). Our preliminary results may be interpreted in terms of $\alpha\Omega$ dynamo. The Ω effect is done by the shear of the Stewartson layer itself whereas the α effect is produced by vortices associated with the Rossby waves due to the instability of the shear layer. These understandings are very encouraging for our on-going experimental modeling of the geodynamo. As described in Cardin *et al.* (2002), we are building a spherical Couette experiment using liquid sodium which may validate and enlarge our present numerical findings.

For the first time, we have computed a spherical dynamo with a very low magnetic Prandtl number ($< 10^{-2}$) and a very low Ekman number (10^{-8}) (corresponding to a very high Reynolds number $Re > 10^6$). Even if our dimensionless parameters stay far away from parameters of planetary cores, our calculations use dimensionless numbers which are in the correct asymptotic regime for the modeling of the geodynamo. The key ingredients of our approach is to take into account a specific property of the rotating fluid (QG) which allows us to use a 2D model to compute the flow evolution, and the separation of scales between the magnetic field and the velocity field, allowing us to use a coarse 3D mesh for the magnetic field.

We also showed that in the case studied in this paper, the mean flow or the static flow fails to produce a dynamo while the fully resolved time-dependent flow succeeds. Indeed, the time evolution of the flow and the β effect are key ingredients for dynamo action in our models, while the Ekman pumping can be neglected without losing the dynamo effect.

The next step will be to add the Lorentz force in the QG equation to compute saturated dynamos. One of the difficulty is to compute the action of the large magnetic field on the small scale motions of the fluid. Preliminary results are encouraging and exhibit saturated dynamos very close to the kinematic dynamos described here.

A quasi geostrophic approach could also be used to build thermal convective dynamos. A zonal geostrophic flow is produced by the Reynolds stress of the thermal columns ([Aubert et al., 2001](#); [Christensen, 2002](#)) but its amplitude is much lower compared to the differential rotation imposed in the Stewartson problem. Would it be enough to start an Stewartson dynamo type? for what forcing? Would it work for very low Ekman and magnetic Prandtl numbers?

Aknowledgements : Calculations were performed at SCCI (Observatoire de Grenoble) and at IDRIS (CNRS). This work has been supported by the programme "DyETI" of CNRS/INSU. We wish to thank Dominique Jault and Henri-Claude Nataf for very useful comments.

5.4 Inversions

5.4.1 Période des inversions

Aux observations décrites au §5.3.6 et sur la figure 5.8, s'ajoute l'évolution de la période des inversions avec P_m , qui est donnée par la table 5.2.

P_m	0.2	0.18	0.16	0.14	0.12	0.1	0.09	0.08	0.07
T_{oscill}	0.0135	0.0164	0.0206	0.0273	0.0394	0.0665	0.095	0.1524	0.3282

TAB. 5.2 – Évolution de la période des inversions avec P_m , pour la dynamo dipolaire obtenue avec $E_k = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$ et $P_{m_c} = 0.085$. L'unité de temps est le temps de diffusion magnétique.

L'évolution de la fréquence des inversions $f_{\text{oscill}} = T_{\text{diff}}/T_{\text{oscill}}$ (où T_{diff} est le temps de diffusion magnétique) de la table 5.2 est très bien ajustée par une loi de type transition de phase :

$$f_{\text{oscill}} = f_0 \left(\frac{P_m - P_{m_o}}{P_{m_o}} \right)^\gamma$$

avec $f_0 = 22$, $\gamma = 4/3$ et $P_{m_o} = 0.057$. Ceci montre l'existence de P_{m_o} , nombre de Prandtl magnétique critique pour l'apparition des solutions oscillantes. On remarque qu'ici, et c'est toujours le cas pour la famille dipolaire, $P_{m_o} < P_{m_c}$, c'est-à-dire qu'au seuil dynamo on observe toujours des inversions de champ magnétique. Pour la famille quadrupolaire nous n'avons observé de dynamos oscillantes qu'au-delà du seuil dynamo, c'est-à-dire qu'on a $P_{m_o} > P_{m_c}$.

5.4.2 Taux de croissance

Le comportement d'inversion décrit dans l'article au §5.3.6 peut être obtenu en considérant deux modes spatiaux de champ magnétique, B_1 et B_2 , qui seraient couplés par l'équation d'induction (par exemple $B_1 = \sin(\pi z)$ et $B_2 = \sin(2\pi z)$).

Ainsi, en notation complexe on peut écrire

$$B_{\text{tot}} = (B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{i\omega t + \phi}) e^{\lambda t} \quad (5.9)$$

et pour l'énergie

$$E = (E_1 \cos^2(\omega t) + E_2 \cos^2(\omega t + \phi)) e^{2\lambda t}$$

et pour le taux de croissance de l'énergie

$$tx = \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = 2\lambda - \omega \frac{E_1 \sin(2\omega t) + E_2 \sin(2\omega t + 2\phi)}{E_1 \cos^2(\omega t) + E_2 \cos^2(\omega t + \phi)} \quad (5.10)$$

Si les deux composantes ont la même intensité (c'est-à-dire $E_1 = E_2$), alors on a l'un des 2 modes pratiquement pur aux temps où le taux de croissance est maximum ou minimum, ce qui permet de les identifier sur la figure 5.8.

On a représenté sur la figure 5.9 le taux de croissance (eq. 5.10). On retrouve bien la forme des taux de croissance obtenus dans les calculs numériques (fig. 5.8 et 5.11).

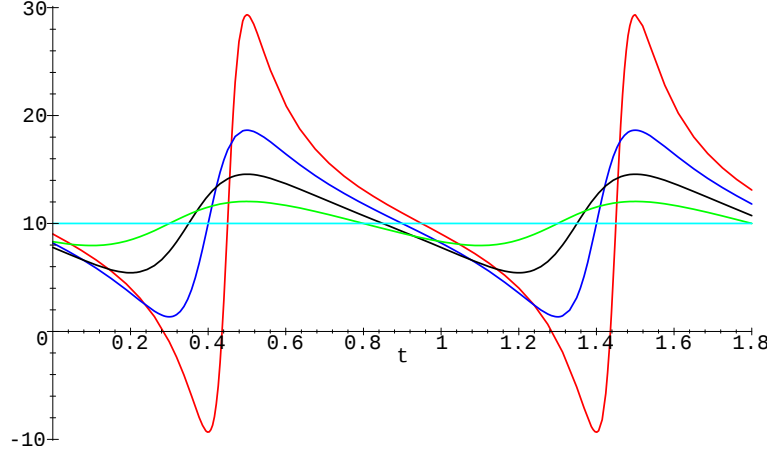


FIG. 5.9 – Taux de croissance pour un modèle à 2 modes, avec $E_1 = E_2 = 1$, $\lambda = 5$, $\omega = \pi$, et un déphasage $\phi = 0.1\pi$ pour la courbe rouge, 0.2π (bleue), 0.3π (noire), 0.4π (verte), $\pi/2$ (cyan).

5.4.3 Modèle d'inversion cinématique

Un système réel qui donne de telles solutions est

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \lambda_1 B_1 + K_{12} B_2 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = \lambda_2 B_2 - K_{21} B_1 \quad (5.12)$$

où K_{ij} est un terme de couplage entre les 2 modes. On peut aussi l'écrire sous forme matricielle

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (5.13)$$

avec $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ définis par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & K_{12} \\ -K_{21} & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les solutions λ de

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) + K_{12}K_{21} = 0$$

Il faut distinguer deux cas selon que $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4K_{12}K_{21}$ est positif ou négatif.

Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres réelles dont la plus grande est $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 + \sqrt{\Delta}/2$. Le vecteur propre est réel, et une superposition des modes B_1 et B_2 est mode propre du problème d'induction, et croît donc avec un taux de croissance $\lambda > (\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $K_{12}K_{21} > (\lambda_1 - \lambda_2)^2/2$ alors les valeurs propres sont complexes, et on a donc une solution oscillante pour le champ magnétique. Le taux de croissance est alors $\lambda_r = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, tandis que la fréquence vaut

$$\omega = \sqrt{K_{12}K_{21} - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2}$$

Le taux de croissance de l'énergie est représenté sur la figure 5.10 pour les 3 cas ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$), ce qui correspond bien au comportement donné par la table 5.2.

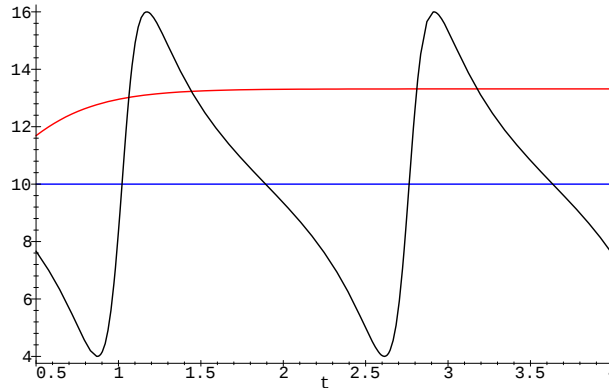


FIG. 5.10 – Taux de croissance de l'énergie pour le modèle à 2 modes couplés (eq. 5.11) pour $B_1 = B_2 = 1$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$, $K_{12} = K_{21} = K$ avec $K = 2.5$ pour la courbe rouge (sous-critique), $K = 3$ pour la bleue (critique) et $K = 3.5$ pour la noire (sur-critique). On voit les inversions apparaître lorsque $4K^2 > (\lambda_1 - \lambda_2)^2$

Dans le cas $\Delta < 0$, les vecteurs propres associés sont complexes, ce qui veut dire que B_1 et B_2 n'évoluent pas en phase. On obtient

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{K_{12}} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} + i\omega \right) = re^{i\varphi}$$

avec

$$r^2 = \frac{K_{21}}{K_{12}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{2\omega}{\lambda_2 - \lambda_1} = \sqrt{\frac{4K_{12}K_{21}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - 1}$$

On voit que près de la transition oscillante, on a $\omega \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow 0$, ce qui est en accord avec les données de la table 5.2.

5.5 Mécanismes

5.5.1 Pompage d'Ekman et ondes de Rossby

Il est clair que notre écoulement moyen, purement axisymétrique et toroïdal, n'est pas capable d'entretenir un champ magnétique, axisymétrique ou non.

L'écoulement qui brise la bidimensionalité est l'écoulement axial u_z qui a deux composantes : l'une est associée à la pente (effet β) et l'autre est due au pompage d'Ekman (voir §2.5).

Hélicité

Pour caractériser l'efficacité d'un éventuel effet α associé à l'écoulement non-axisymétrique, Olson *et al.* (1999) introduisent l'hélicité relative

$$H_{\text{rel}} = \frac{\langle \vec{u} \cdot \vec{\omega} \rangle}{\langle u^2 \rangle^{1/2} \langle \omega^2 \rangle^{1/2}}$$

dont les valeurs tournent autour de 0.2 pour les dynamos convectives qu'ils décrivent.

Nous nous inspirons de ces travaux et calculons la quantité

$$\tilde{H} = \frac{\langle \omega u_z \rangle}{\langle u^2 \rangle^{1/2} \langle \omega^2 \rangle^{1/2}}$$

En plus, nous introduisons H' qui mesure les fluctuations spatiales autour de cette moyenne :

$$H' = \frac{\langle \omega^2 u_z^2 - \langle \omega u_z \rangle^2 \rangle^{1/2}}{\langle u^2 \rangle^{1/2} \langle \omega^2 \rangle^{1/2}}$$

Ek	Ro	$\tilde{H}$	H'
10^{-6}	0.04	10^{-3}	0.2
10^{-8}	0.005	10^{-4}	0.1

Les résultats obtenus sont concluants : Le pompage d'Ekman en phase avec la vortacité participe à $\tilde{H}$ qui évolue donc comme $\text{Ek}^{1/2}$, tandis que l'effet β hors phase entraîne un fort H' .

Efficacité du pompage d'Ekman

Busse (1975) propose que le pompage d'Ekman associé à l'écoulement non-axisymétrique joue un rôle dominant dans les processus de la géodynamo du fait de sa contribution à l'hélicité moyenne, et ce malgré sa très faible amplitude. En effet, les vitesses axiales u_z induites par la pente (effet β) sont en phase avec u_r (voir §2.5) et en quadrature de phase avec la vortacité axiale ω et ne contribuent donc pas à l'hélicité moyenne.

Cependant, le pompage d'Ekman est trop faible pour être efficace. En effet, par un simple calcul d'ordre de grandeur à partir de l'équation du pompage axisymétrique 2.12, on peut évaluer le nombre de Reynolds Re_{Ek} associé au pompage :

$$\text{Re}_{\text{Ek}} \sim \frac{\text{Ek}^{1/2} \text{Ro}}{\text{Ek}} = \text{Ek}^{-1/2} \text{Ro}$$

Or au seuil d'instabilité hydrodynamique $Ro \sim Ek^{1/2}$ et donc on a $Re_{Ek} \sim 1$ au seuil. Pour l'écoulement non-axisymétrique, le nombre de Reynolds associé au pompage est encore plus faible, et même loin du seuil hydro, les nombres de Reynolds obtenus ne permettent pas l'action dynamo à faible Pm ($Rm \sim Pm Re$).

Pour conclure sur l'efficacité du pompage d'Ekman dans le processus dynamo, nous avons calculé une dynamo en supprimant le pompage d'Ekman dans le terme d'induction. La figure 5.11 montre que le taux de croissance de l'énergie magnétique n'est absolument pas affecté par la présence ou l'absence du pompage d'Ekman dans le terme d'induction (le pompage d'Ekman étant toujours présent dans l'équation du champ de vitesse où son rôle dynamique n'est pas remis en cause).

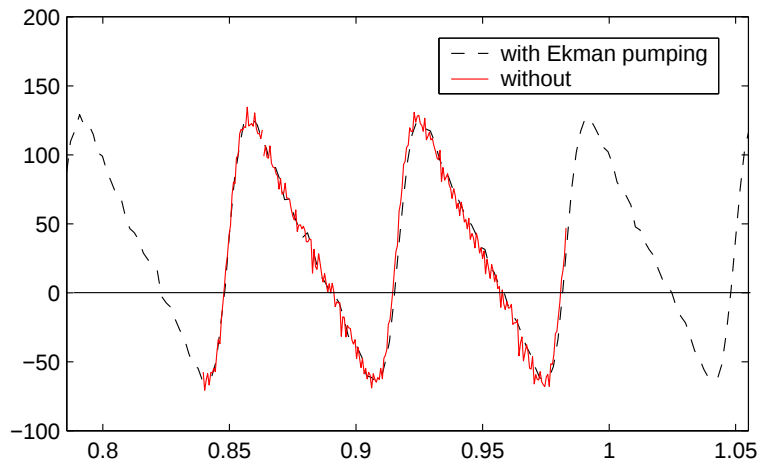


FIG. 5.11 – Taux de croissance de l'énergie magnétique en fonction du temps (magnétique), avec $Ek = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$ et $Pm = 0.1$. Il n'y a pas de réelle différence entre le calcul incluant le pompage d'Ekman dans l'induction (*with Ekman pumping*) et celui où le pompage d'Ekman n'agit que sur la dynamique de l'écoulement (*without*).

À l'inverse, lorsqu'on fige artificiellement l'écoulement (c'est-à-dire qu'on ne fait plus évoluer le champ de vitesse dans le temps), il nous a été impossible d'obtenir une dynamo. Il faut se rendre à l'évidence : le pompage d'Ekman n'a pas d'utilité pour la dynamo, alors que l'instation

Trajectoire de particules

Pour comprendre pourquoi l'instation Ainsi nous observons que dans les deux cas (figé ou dynamique), la trajectoire des particules est sinusoïdale

$$r(t) = r_0 + \delta r(r_0) \sin(2\pi t/\tau) \quad \text{et} \quad \phi(t) = \phi_0 + \delta\phi(r_0) \cos(2\pi t/\tau) + \Omega(r_0)t$$

Par contre, les amplitudes (δr et $\delta\phi$) et la période τ sont différents. On trouve pour $r_0 = 0.25$:

	δr	$\delta \phi$	τ
statique	$16 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	55.5
dynamique	$37 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-5}$	130

On voit que la période et l'amplitude sont plus grandes dans le cas dynamique, où l'onde de Rossby se propage. La vitesse étant la même dans les deux cas, on voit que le nombre de Reynolds local ($u\ell/\nu$) associé à ces écoulements n'est pas le même. Et par conséquent, l'induction peut être plus efficace pour le cas dynamique.

Ainsi nous avons montré que la propagation de l'onde de Rossby est un élément important pour l'action dynamo. L'écoulement moyen axisymétrique n'est pas capable d'entretenir la dynamo, mais en y ajoutant une onde de Rossby, la dynamo peut démarrer.

C'est une situation remarquable, car dans la plupart des cas ([L. Marié & Léorat, 2003](#)), l'écoulement moyen est une dynamo, mais l'écoulement turbulent réel ne l'est pas !

5.5.2 Modèle simplifié

Pour mieux comprendre le mécanisme d'induction de nos dynamos, nous allons examiner sur un modèle simplifié, quels sont les termes et donc les phénomènes qui dominent dans nos dynamos. Ce modèle n'est pas un calcul exact.

Considérons un écoulement composé d'un cisaillement axisymétrique $\vec{U} = U(s) \vec{e}_\phi$, et d'un écoulement non-axisymétrique $\vec{u}(s, \phi, z)$. De même le champ magnétique se décompose en :

- un champ toroïdal axisymétrique $B_T(s, z) \vec{e}_\phi$,
- un champ poloïdal axisymétrique $\vec{B}_P(s, z)$,
- et un champ non-axisymétrique $\vec{b}(s, \phi, z)$.

On suppose aussi $u_z = z\beta u_s$, et on suppose une forme ondulatoire

$$\begin{aligned} \vec{u}(s, \phi, z) &= \vec{u}(s, z) e^{i(m\phi - \omega_R t)} \\ \vec{B} &= B_T(s, z) e^{\lambda t} \vec{e}_\phi + \vec{B}_P(s, z) e^{\lambda t} + \vec{b}(s, z) e^{i(m\phi - \omega_R t) + \lambda t} \end{aligned}$$

et en plus

$$u \ll U \quad B_P \ll B_T \quad b \ll B_T$$

L'équation d'induction se sépare alors ainsi ([Gubbins & Roberts, 1987](#), p. 223), avec λ le taux de croissance du champ magnétique :

$$\lambda B_T = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{U} \wedge \vec{B}_P \right)_T + \vec{\nabla} \wedge \left(\overline{\vec{u} \wedge \vec{b}} \right)_T + \eta \nabla^2 B_T \quad (5.15)$$

$$\lambda \vec{B}_P = \vec{\nabla} \wedge \left(\overline{\vec{u} \wedge \vec{b}} \right)_P + \eta \nabla^2 \vec{B}_P \quad (5.16)$$

$$(\lambda - i\omega_R) \vec{b} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{U} \wedge \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \wedge \left(\vec{B}_T + \vec{B}_P \right) \right) + \eta \nabla^2 \vec{b} \quad (5.17)$$

On voit tout de suite (eq. 5.16) que le champ poloïdal ne peut provenir que de l'induction moyenne petite échelle $\vec{\nabla} \wedge (\overline{u \wedge b})$.

L'équation 5.17 projetée sur $\vec{e}_s$ donne alors, en négligeant B_P devant B_T , une relation³ entre b_s et u_s :

$$\left(\lambda - i\omega_R + im\frac{U}{s} - \eta\nabla^2 \right) b_s = i\frac{m}{s} B_T u_s \quad (5.18)$$

On appelle $c = \omega_R/m - U/s$ la célérité de l'onde dans le repère advecté par le fluide. Pour une onde de Rossby on a alors $c \sim -\beta/m^2$, tandis que pour un écoulement non-propagatif, on a $c = 0$. Remarquons que U dépend de s , de même que ω_R . Au seuil, c ne dépend pas de s (accord de phase), mais en régime non-linéaire rien n'est moins sur.

Dans la suite, nous ne tenons plus compte d'éventuelles variations radiales (approche locale).

Cas d'une onde

Dans le cas d'une onde, on peut négliger le terme diffusif dans l'expression 5.18 si

$$c/(m\eta) \gg 1$$

ce qui est toujours le cas dans nos dynamos. Ainsi on peut écrire pour le mode marginalement stable ($\lambda = 0$) :

$$b_s(s, z) = -\frac{B_T u_s}{c} \sim -\frac{u}{c} B_T \quad (5.19)$$

où u est une vitesse caractéristique non-zonale. On remarque que b_s et u_s sont en phase (on a négligé la diffusion), et que plus l'onde est rapide (c grand), plus b_s est atténué.

b_z est lié à u_z , par la même relation⁴ qui lie b_s à u_s (eq. 5.18). S'il n'y avait pas le terme diffusif $\eta\nabla^2$, on aurait la relation exacte $b_z = z\beta b_s$, mais le terme diffusif en fait une relation approchée :

$$b_z \sim z\beta b_s$$

Le terme d'induction dans l'équation (5.16)_s, une fois moyenné suivant ϕ ne fait plus intervenir que $u_z b_s - u_s b_z$:

$$\eta\nabla^2 B_P s = \frac{\partial}{\partial z} (u_z b_s - u_s b_z)$$

En formant $z\beta(5.17)_s - (5.17)_z$ on peut évaluer

$$u_z b_s - u_s b_z = u_s \frac{\eta}{\lambda - imc} (z\beta\nabla^2 b_s - \nabla^2 b_z)$$

et en utilisant l'approximation $b_z \sim z\beta b_s$ dans le membre de droite, on trouve

$$u_z b_s - u_s b_z \sim \frac{\eta}{\lambda - imc} \frac{m}{s} \beta u_s b_s$$

³on a négligé les termes de courbure du laplacien vectoriel.

⁴sauf que le terme de courbure qu'on a négligé pour b_s n'existe pas pour b_z .

où on voit que la pente du récipient intervient à travers β dans ce processus. On peut alors écrire, pour le mode marginalement stable :

$$B_{Ps} \sim -i\beta \left(\frac{u_s}{c}\right)^2 B_T \sim \beta \frac{u^2}{c^2} B_T \quad (5.20)$$

Enfin, l'équation 5.15 permet de régénérer le champ magnétique toroïdal de départ, soit à partir du champ poloïdal, soit à partir des composantes non-axisymétriques. Le terme issu des composantes non-axisymétriques s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial z} (u_\phi b_z - u_z b_\phi) - \frac{\partial}{\partial s} (u_s b_\phi - u_\phi b_s) \quad (5.21)$$

or tous ces produits sont composés de termes en quadrature de phase, qui ne contribuent donc pas (ou peu en tenant compte d'une diffusion faible) à la composante axisymétrique. Nous négligeons donc ce terme et il reste alors

$$(\lambda - \eta \nabla^2) B_T = U \frac{\partial B_{Pz}}{\partial z} + \frac{\partial U B_{Ps}}{\partial s} \sim \frac{\partial U}{\partial s} B_{Ps}$$

En remplaçant alors B_{Ps} par son expression (5.20), on peut former un nombre de Reynolds magnétique spécifique :

$$\widetilde{\text{Rm}} \sim \frac{1}{\eta} \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial U}{\partial s} \sim \frac{u^2 U}{\eta c^2 \Delta}$$

où Δ est la taille caractéristique de la couche de cisaillement turbulente $U(s)$. En terme de nombres adimensionnés, on a donc

$$\widetilde{\text{Rm}} \sim \frac{\text{Pm Ro}}{\text{Ek}} \frac{u^2}{c^2 \Delta} \quad (5.22)$$

où on a séparé les paramètres de contrôles (Ek , Ro , Pm) des paramètres de sorties (u^2 , c^2 et Δ) qui ne sont *a priori* pas connus. Dans nos dynamos au seuil, on a toujours $\widetilde{\text{Rm}} > 50$.

Pour résumer, nous avons le mécanisme suivant :

$$B_T \xrightarrow{u} b \sim \frac{u}{c} B_T \xrightarrow{u} B_P \sim \frac{u}{c} b \xrightarrow{U} B_T \sim \frac{1}{\eta} \frac{\partial U}{\partial s} B_P$$

Il paraît donc naturel de parler de dynamo $\alpha\Omega$.

Écoulement non-propagatif

Dans le cas où l'écoulement n'est pas propagatif, on a $c = 0$ et donc l'expression 5.18 se réduit à

$$b_s = i \frac{B_T u_s}{\eta m}$$

en quadrature de phase avec u_s , ce qui ne permet pas de générer un champ poloïdal axisymétrique, et donc $B_P = 0$.

Cependant, l'équation 5.15 fait intervenir également les termes non-axisymétriques. Dans ce cas, le cisaillement à grande échelle $U(s)$ n'intervient pas, c'est plutôt un mécanisme de type α^2 . L'induction issu des termes non-axisymétriques (eq. 5.21) ne se moyenne pas à zéro dans le cas où b_s et u_ϕ sont en phase. Par contre la différence est là aussi uniquement due aux effets diffusifs et on peut l'évaluer comme :

$$\eta \nabla^2 B_T \sim \eta m^2 b_s u_\phi$$

D'où on tire un nombre de Reynolds magnétique spécifique

$$\widetilde{\text{Rm}} \sim m \frac{u^2}{\eta} \sim \text{Pm} \frac{u^2}{\text{Ek}}$$

qui est toujours petit dans notre cas (entre 0.04 et 2 au seuil de nos dynamos). Ainsi si on voulait faire des dynamos non-propagatives à partir de nos écoulements propagatifs, il faudrait prendre des Pm environ 100 fois supérieurs à ceux de nos dynamos... C'est un mécanisme de type α^2 , qui ne profite donc pas du tout de notre fort écoulement zonal.

Vérification du modèle

On peut vérifier la pertinence de ce modèle en calculant divers grandeurs à partir des simulations numériques. Ainsi les expressions 5.19 et 5.20 est très bien vérifiée dans tous nos calculs dynamos, et on trouve, pour les dynamos saturées (voir §6.3) :

$$\frac{b/B_T}{u/U} = 1.26 \pm 0.3 \quad \text{et} \quad \frac{B_P/B_T}{u^2/U^2} = 3.0 \pm 1.3$$

où on a remplacé c par U car ils sont du même ordre de grandeurs pour les écoulements loin du seuil (d'instabilité hydrodynamique) que nous avons choisis.

De plus, ces équations sont compatibles avec le modèles à 2 modes pour l'inversion décrit au §5.4.3. En effet, l'expression 5.20 montre que le champ magnétique poloïdal B_P contient une forte composante en quadrature de phase avec le champ toroïdal B_T . Si on prend le cas d'une variation verticale sinusoïdale, on obtient ainsi notre deuxième mode (voir §5.4.3).

La table 5.3 montre les seuils dynamos et le nombre de Reynolds magnétique théorique obtenu avec notre modèle simplifié. Comme il est difficile de mesurer c , nous l'avons remplacé par Ro pour obtenir

$$\text{Rm}_{\text{th}} = \frac{\text{Pm}}{\text{Ro Ek}} \frac{u^2}{\Delta} \quad (5.23)$$

S'il y a une certaine dispersion, les valeurs données semblent être pertinentes, et ne remettent pas en cause notre modèle. Une estimation de $\widetilde{\text{Rm}}$ en utilisant $c \sim \beta/m^2$ ne donne pas de bons résultats, sans doute parce que cette relation de dispersion n'est pas valable pour des ondes de Rossby non-linéaires (voir aussi 4.2.7).

Ek	Ro _c	Ro	Pm ^c quad	Pm ^c dip	Rm _{th} quad	Rm _{th} dip
10 ⁻⁶	9.5 10 ⁻³	1.0 10 ⁻²	1.56		50	
10 ⁻⁶	9.5 10 ⁻³	1.1 10 ⁻²	1.2		59	
10 ⁻⁶	9.5 10 ⁻³	1.2 10 ⁻²	0.66		154	
10 ⁻⁶	9.5 10 ⁻³	1.3 10 ⁻²	0.53	1.47	175	486
10 ⁻⁶	9.5 10 ⁻³	2.5 10 ⁻²	0.37	0.59	400	638
10 ⁻⁶	9.5 10 ⁻³	4.0 10 ⁻²	0.2	0.47	359	845
10 ⁻⁷	2.3 10 ⁻³	1.5 10 ⁻²	0.034	0.053	285	444
10 ⁻⁸	6.3 10 ⁻⁴	0.5 10 ⁻²	0.023	0.026	329	371
10 ⁻⁸	6.3 10 ⁻⁴	2.0 10 ⁻²	0.004	0.005	264	330
10 ⁻⁶	-11.1 10 ⁻³	-2.0 10 ⁻²	0.475	0.8	42	70
10 ⁻⁶	-11.1 10 ⁻³	-4.0 10 ⁻²	0.16	0.24	42	62
10 ⁻⁶	-11.1 10 ⁻³	-6.0 10 ⁻²	0.089	0.13	43	62
10 ⁻⁶	-11.1 10 ⁻³	-8.0 10 ⁻²	0.062	0.085	41	57
10 ⁻⁸	-7.9 10 ⁻⁴	-0.5 10 ⁻²	0.018	0.019	239	252
10 ⁻⁸	-7.9 10 ⁻⁴	-2.0 10 ⁻²	0.003	0.003	57	57

TAB. 5.3 – Seuil dynamo : Rm_{th} (expression 5.23) pour des paramètres variés.

5.6 Résumé et discussion

Notre approche hybride 2D/3D nous a permis de calculer des dynamos pour des nombres de Prandtl très faibles et des nombres de Reynolds très élevés. Nous avons montré que des écoulements quasi-géostrophiques sont capables d'auto-induire du champ magnétique, et ce pour des paramètres qui représentent asymptotiquement bien les métaux liquides et les fluides en rotation rapides géophysiques (noyau de la terre).

Des solutions oscillantes sont fréquemment observées, pour toute la gamme de nombres d'Ekman balayée ($Ek = 10^{-6}$ à 10^{-8}). Ces inversions sont interprétées par un couplage entre deux modes de champ magnétique, entre lesquels la solution oscille, sans faire appel à la force de Laplace. Ainsi, contrairement à ce qui est souvent admis, les inversions du champ magnétique terrestre ne sont pas forcément liées à un changement important dans la structure de l'écoulement.

Nous avons également montré que le mécanisme d'induction repose entièrement sur la nature ondulatoire de l'écoulement et ne fait pas appel au pompage d'Ekman, qui est asymptotiquement faible.

Enfin, il faut signaler les similitudes de ce modèle avec la dynamo solaire, qui est supposée être de type $\alpha\Omega$ à cause de la rotation différentielle importante observée à la surface du soleil (l'équateur tourne plus vite que les pôles). Bien que les mécanismes et les forçages n'aient pas grand chose en commun avec le soleil, notons tout d'abord que la dynamo solaire présente un cycle à 22 ans, durant lequel le champ magnétique change de signe. De plus, la dérive des tâches solaires qui apparaissent durant ce cycle se fait vers l'équateur, ce qui correspond à ce que l'on peut voir sur la figure 1.9 qui montre que le

champ magnétique dérive également vers le centre pour les dynamos oscillantes.

Chapitre 6

L'influence du champ magnétique : La force de Laplace

Après l'étude linéaire précédente, nous ajoutons la force de Laplace. Malgré les problèmes liés à son introduction dans un modèle quasi-géostrophique, que nous discutons au §6.1, nous parvenons à établir un modèle numérique. Dans un premier temps nous examinons les effets du champ magnétique sur les écoulements turbulents du chapitre 4. Ensuite nous examinerons quelques cas de dynamos complètes, où la force de Laplace enraye la croissance de l'énergie magnétique. Énergies et dissipations sont données pour divers paramètres. Quels sont les mécanismes de saturation ? La contrainte de Proudman-Taylor est-elle brisée ?

Cette étude n'est pas complète. Son aspect exploratoire a pris beaucoup de temps (développement des idées et du code), et elle n'a été entreprise que tardivement.

À cause d'une erreur dans le code numérique découverte à l'écriture de ces pages, la force de Laplace axisymétrique est fautive dans presque tous les calculs présentés ici : elle est sous-estimée au centre. Heureusement les conséquences ne sont pas dramatiques, comme le montre la comparaison faite avec un code corrigé (fig. 6.11).

6.1 Avec la force de Laplace : QG-MHD

Supposons maintenant que le fluide puisse être le siège de courants électriques importants comme c'est le cas d'un métal liquide. Nous devons donc tenir compte de la force de Laplace (ou de Lorentz pour les anglophones). Cette tâche n'est pas aisée, car le champ magnétique n'a aucune raison d'être bidimensionnel !

Notons ici que les deux familles dipôles et quadrupoles identifiées au chapitre 5 restent indépendantes.

6.1.1 Prise en compte de la force de Laplace

En partant de l'équation de Navier-Stokes avec la force de Laplace (eq. 1.15), l'équation 2.15 devient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right) - (2 + \omega) \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{Ek} \nabla^2 \omega + \left\langle \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \wedge \vec{B} \right) \right\rangle \quad (6.1)$$

Pour résoudre cette équation nous devons évaluer la moyenne selon z du rotationnel de la force de Laplace. L'annexe §B.3 détaille les méthodes numériques utilisées.

Pour que l'approximation quasi-géostrophique soit encore valide, il faut s'assurer que la force de Laplace reste petite comparée à la force de Coriolis. C'est le nombre d'Elsasser qui mesure ce rapport, mais il peut prendre plusieurs formes (voir par exemple Cardin *et al.*, 2002). En régime diffusif ($\text{Rm} \ll 1$) on a $\vec{j} = \sigma \vec{u} \wedge \vec{B}$, et on trouve le nombre d'Elsasser déjà introduit au §1.3.4 :

$$\Lambda = \frac{\sigma u B^2}{\rho \Omega u} = \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} B^2$$

En régime dynamo ($\text{Rm} > 1$), on calcule explicitement $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, et dans ce cas on obtient

$$\Lambda_0 = \frac{B^2}{L \mu_0 \rho \Omega u} = \frac{B^2}{L u} = \frac{\Lambda}{\text{Rm}}$$

où L est une échelle caractéristique de l'induction. On remarque alors que si $\Lambda \ll 1$ et $\text{Rm} > 1$, alors $\Lambda_0 \ll 1$.

Ainsi, dans le cas d'un champ magnétique imposé, il faudra se limiter à $\Lambda \ll 1$. Dans le cas d'un calcul dynamo, comme on a toujours des petites échelles pour lesquelles on atteint le régime diffusif, il faudra vérifier *a posteriori* que $\Lambda \ll 1$, ce qui assure également que $\Lambda_0 \ll 1$.

Pour avoir une idée des effets d'un champ magnétique fort, on a reporté sur la figure 6.1 le champ de vorticit   donn   par Olson *et al.* (1999). Avec un nombre de Rossby $\text{Ro} \sim 10^{-2}$ bas   sur la vitesse *rms*, et un nombre d'Elsasser $\Lambda \sim 1$, on a un   coulement qui est loin d'  tre invariant selon l'axe de rotation, bien qu'on ait toujours cette tendance    l'  longation suivant cet axe.

6.1.2 Effet des petites   chelles du champ magn  tique

Une estimation rigoureuse de la force de Laplace aux petites   chelles (c'est-  dire en r  gime diffusif) est donn  e    l'annexe C.5. L'impl  mentation num  rique correspondante n  cessiterait beaucoup d'efforts et de temps de calcul (transform  e de Fourier, filtrage).

Une approche plus simple consiste    consid  rer qu'en r  gime diffusif

$$\vec{j} \simeq \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} \vec{u} \wedge \vec{B}$$

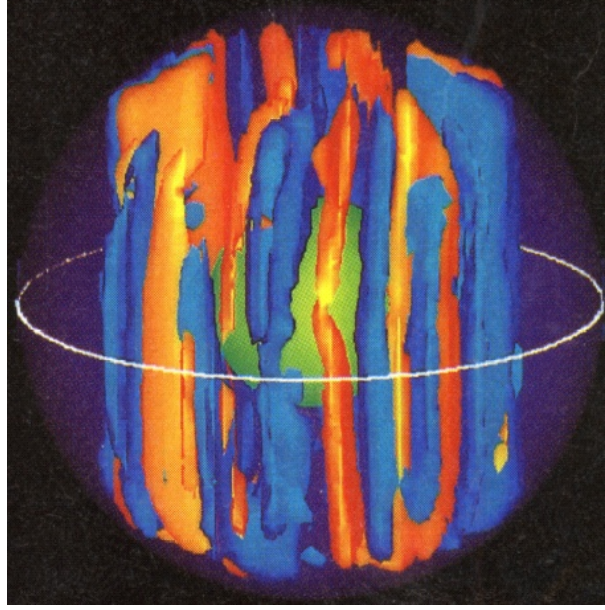


FIG. 6.1 – Le champ de vorticité tiré de [Olson *et al.* \(1999\)](#). On distingue bien la structure en colonnes de l'écoulement. On a $Ro \sim 10^{-2}$ et $\Lambda \sim 1$.

où on néglige le champ électrique associé à la contrainte $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, qui est donc ici relâchée. On obtient dans ce cas, pour la force de Laplace à petite échelle

$$\vec{F}_{LSS} = -\frac{Pm}{Ek} B^2 \vec{u}_\perp$$

où $\vec{u}_\perp$ est la vitesse perpendiculaire à $\vec{B}$.

Pour nos dynamos quasi-géostrophiques, on a vu au chapitre 5 que pratiquement toute l'énergie magnétique se trouve dans le mode toroïdal axisymétrique, et on va donc négliger toutes les autres composantes pour le calcul de la force de Laplace à petite échelle. Ainsi

$$\vec{F}_{LSS} = -\frac{Pm}{Ek} B_{\phi,0}^2 (u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z) \quad (6.2)$$

L'implémentation numérique correspondante est décrite dans l'annexe [B.3.3](#).

6.1.3 Saturation

A partir de l'équation [1.15](#), on peut imaginer deux mécanismes de saturation. Le régime magn tostrophique pour lequel $\Lambda \sim 1$ par définition, où la force de Laplace est équilibrée par la force de Coriolis.

L'autre possibilité est que la force de Laplace soit équilibrée par les forces d'inerties, auquel cas on aurait $E_B \sim E_U$.

6.2 Influence d'un champ magnétique imposé

Pour étudier l'influence d'un champ magnétique sur nos écoulements à petits Rm , nous avons imposé un champ magnétique purement toroïdal (parce que c'est celui qui domine les dynamos cinématiques obtenues au chapitre 5) tel que $\Lambda \sim 1$ pour $Ek = 10^{-8}$, $Ro = -0.02$, et $Pm = 10^{-5}$. Le champ magnétique imposé est représenté sur la figure 6.2. Les résultats des trois calculs avec trois modèles différents (sans force de Laplace, force de Laplace grande échelle, et force de Laplace grande et petite échelles)¹ tous aux mêmes paramètres, sont donnés par le tableau 6.1. Les cartes de vorticité des écoulements sont représentées sur la figure 6.4.

On a tracé sur les spectres (fig. 6.5) les lignes correspondant à $Re = 1$ et $Rm = 1$. La partie du spectre sous ces lignes correspond à des échelles pour lesquelles la dissipation visqueuse ou par effet Joule est supposée être importante. On voit par exemple que le nombre de Reynolds magnétique Rm est petit, sauf pour le mode axisymétrique.

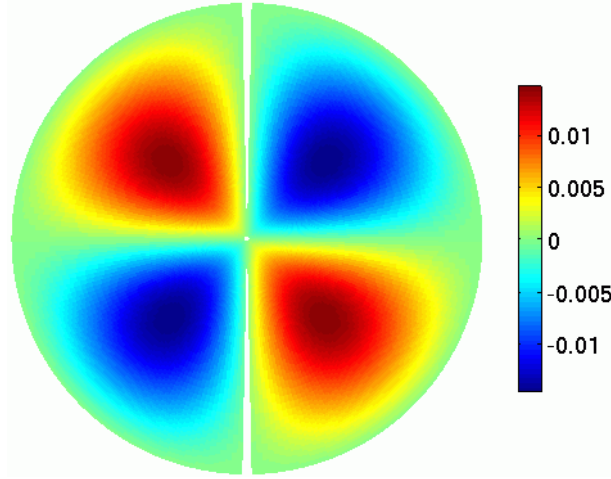


FIG. 6.2 – Le champ magnétique imposé, purement toroïdal, représenté ici dans un plan méridien. Son énergie est $B^2 = 4.25 \cdot 10^{-5}$, et les intensités lues sur la figure donnent $\Lambda \sim 1$ pour $Ek = 10^{-8}$ et $Pm = 10^{-5}$.

6.2.1 Écoulement axisymétrique

Sur la figure 6.3, on compare la force de Laplace et la vitesse angulaire. Ce qui surprend d'abord c'est l'intensité du "freinage axisymétrique". En effet, comme $\vec{B}$ et $\vec{U}_0$ sont colinéaires, on pourrait s'attendre à une force nulle. Cependant l'interaction non-linéaire de $\vec{j}$ et $\vec{b}$ à petites échelles peut tout à fait agir sur l'écoulement axisymétrique. C'est ce que semble confirmer la comparaison entre la force de Laplace axisymétrique ($\sim 10^{-6}$) et les autres composantes de cette force (10^{-4} , non représentées).

¹La force de Laplace axisymétrique dans ces modèles a été calculée après correction de l'erreur mentionnée au début de ce chapitre.

	cin	hyb	lss
E_U^0	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$
E_u	$14.1 \cdot 10^{-8}$	$6.14 \cdot 10^{-8}$	$7.31 \cdot 10^{-8}$
E_b	$3.84 \cdot 10^{-9}$	$0.79 \cdot 10^{-9}$	$1.15 \cdot 10^{-9}$
D_ν^0	$0.19 \cdot 10^{-10}$	$0.21 \cdot 10^{-10}$	$0.20 \cdot 10^{-10}$
D_{Ek}^0	$0.74 \cdot 10^{-10}$	$1.07 \cdot 10^{-10}$	$1.10 \cdot 10^{-10}$
D_ν	$2.31 \cdot 10^{-12}$	$0.95 \cdot 10^{-12}$	$1.01 \cdot 10^{-12}$
D_{Ek}	$8.07 \cdot 10^{-12}$	$3.22 \cdot 10^{-12}$	$3.85 \cdot 10^{-12}$
D_J	$15.4 \cdot 10^{-10}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$3.0 \cdot 10^{-10}$
D_{lss}	—	—	$0.65 \cdot 10^{-12}$
Δ	0.04	0.15	0.16

TAB. 6.1 – Influence d'un champ magnétique imposé sur l'écoulement à $Ek = 10^{-8}$, $Ro = -0.02$, $Pm = 10^{-5}$, $\Lambda \sim 1$, pour différents modèles : *cin* désigne un modèle sans aucune rétro-action de la force de Laplace ; *hyb* tient compte de la force de Laplace aux grandes échelles ; *lss* tient comprend une paramétrisation de la force de Laplace aux petites échelles. Les grandeurs données sont moyennées dans le temps : E_U^0 et E_u sont l'énergie cinétique axisymétrique et non-axisymétrique respectivement, E_b est l'énergie magnétique non-axisymétrique ; D_ν , D_{Ek} , D_J et D_{lss} sont les dissipations visqueuse en volume, par frottement d'Ekman, par dissipation ohmique, et par la force de Laplace aux petites échelles respectivement. L'exposant 0 indique une grandeur axisymétrique, et son absence indique une grandeur non-axisymétrique. Enfin, Δ mesure l'épaisseur de la couche de Stewartson. Le détail du calcul de ces grandeurs est donné au §B.1.7 et §B.2.3.

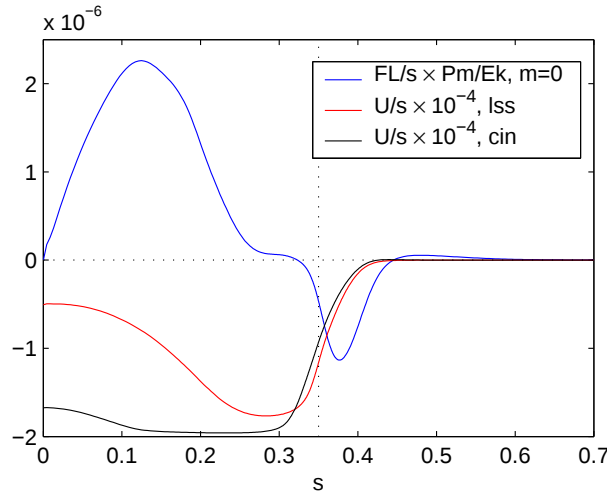


FIG. 6.3 – Force de Laplace axisymétrique dans le modèle *lss*, normalisée par Pm / Ek et comparée à la vitesse angulaire avec et sans force de Laplace.

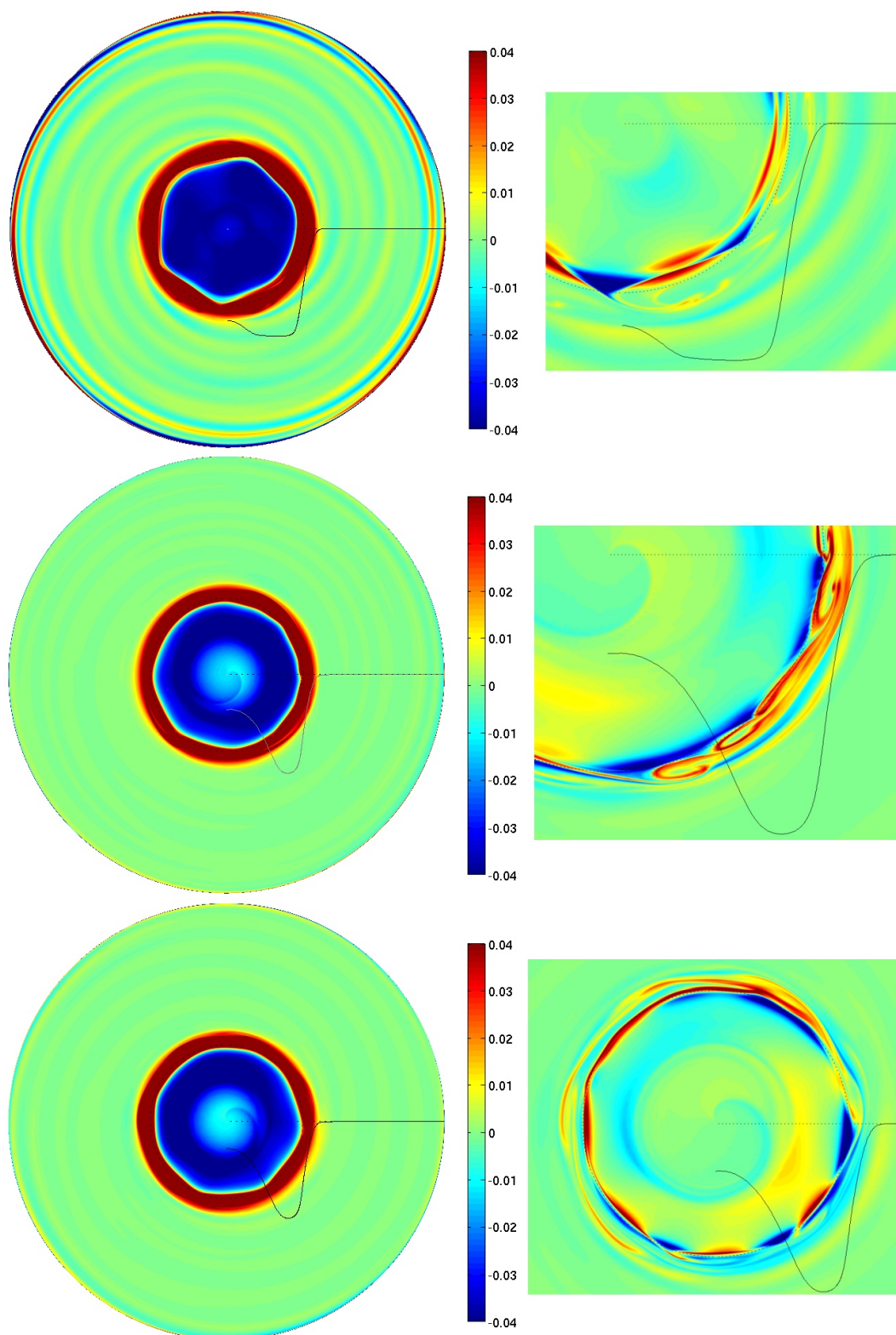


FIG. 6.4 – Cartes de vorticité. De haut en bas on a les cas *cin*, *hyb*, *lss* (voir table 6.1). À gauche c'est la vorticité totale qui est représentée, et à droite c'est un zoom sur la vorticité non-zonale, avec la même échelle. Le tracé donne la vitesse angulaire zonale.

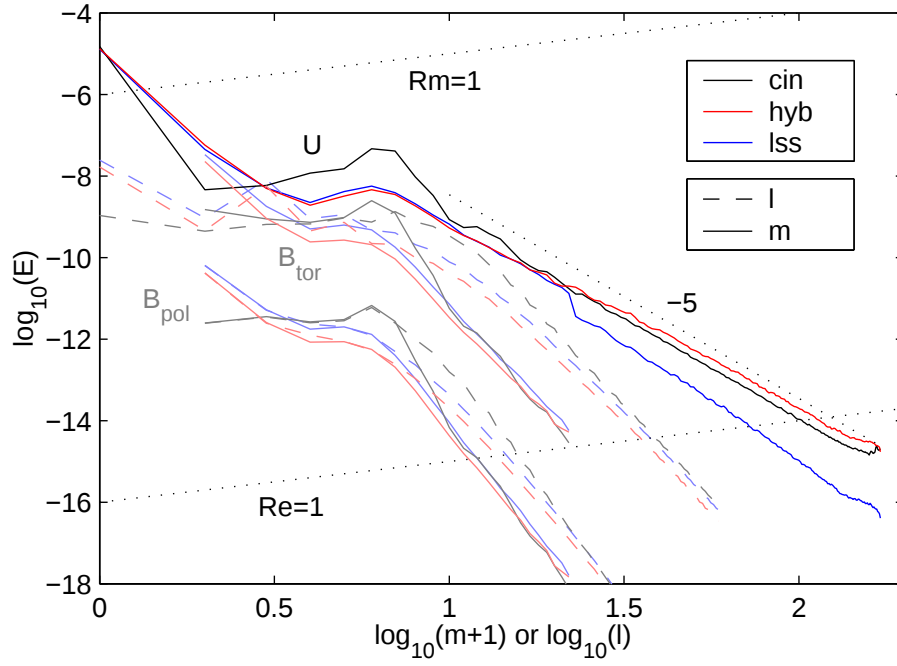


FIG. 6.5 – Spectres cinétiques et magnétiques moyennés en présence d'un champ magnétique imposé $\Lambda = 1$, pour différents modèles *cin*, *hyb* et *lss* (voir table 6.1).

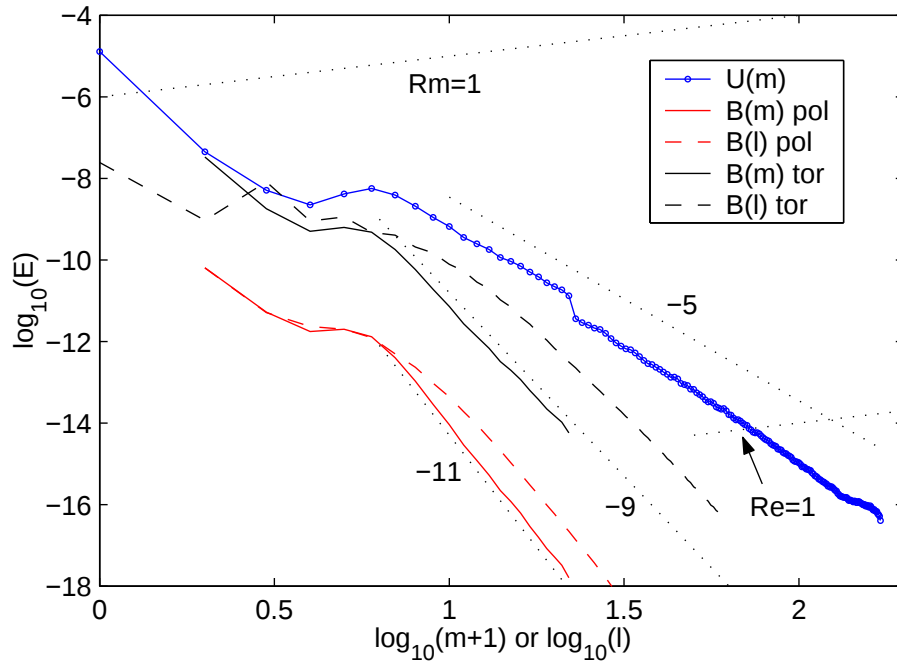


FIG. 6.6 – Spectres cinétiques et magnétiques moyennés en présence d'un champ magnétique imposé $\Lambda = 1$, pour le cas *lss*.

Si on compare les effets moteurs du pompage d'Ekman (de l'ordre de $\text{Ro Ek}^{1/2} \sim 10^{-6}$) avec la force de Laplace axisymétrique ($\sim 10^{-9}$), on se rend compte que la force de Laplace ne peut pas *freiner* l'écoulement axisymétrique. C'est donc vraisemblablement l'œuvre de l'effet qui creuse la couche au centre pour le modèle *cin*, à savoir les non-linéarités.

Sur la table 6.1, on voit aussi une augmentation de Δ , qui traduit l'élargissement de la couche de cisaillement lorsque la force de Laplace est présente. Cette force s'oppose donc au cisaillement du champ magnétique. On voit aussi que l'énergie du champ magnétique induit est considérablement réduite lorsque la force de Laplace est présente, de même que l'énergie des vitesses non-zonales. Ceci traduit le fait que le champ magnétique s'oppose fortement à l'apparition de vitesses qui lui sont perpendiculaires. On remarque aussi que c'est la dissipation par effet Joule qui domine toutes les autres. Rien d'étonnant à cela vu le très faible Pm et l'intensité du champ magnétique appliqué.

6.2.2 L'effet de la force de Laplace aux grandes échelles

Sur les cartes de vorticité (fig. 6.4), on voit bien l'atténuation des bras spirales à l'extérieur de la couche de cisaillement. On voit aussi l'allongement des structures de vorticité de la couche de cisaillement dans la direction du champ magnétique ($\vec{e}_\phi$). Dans le spectre (fig. 6.5), il est assez clair que la dissipation aux petites échelles est sous-estimée, puisque la queue du spectre d'énergie cinétique pour le modèle *hyb* passe au-dessus du niveau de ce spectre sans force de Laplace (modèle *cin*). Cet effet est aussi visible sur les cartes de vorticité.

6.2.3 L'effet de la force de Laplace aux petites échelles

Sur les figures 6.5 et 6.6 qui représentent les spectres, on voit bien l'effet de l'introduction de la force de Laplace aux grandes et petites échelles. Si l'introduction de la force de Laplace aux grandes échelles seulement n'est pas suffisante (on oublie la dissipation aux petites échelles), lorsqu'on inclut la force de Laplace aux petites échelles c'est pire : on surestime beaucoup la dissipation aux petites échelles, comme en témoigne la baisse brutale du niveau d'énergie des petites échelles dans le spectre du modèle *lss*.

On remarque également les pentes très raides des spectres magnétiques. En régime diffusif (pour $\text{Rm} \ll 1$, comme c'est le cas ici), pour un spectre de vitesse en $E_u(m)$, on attend des spectres d'énergie magnétique en $E_b(m) \sim m^{-2}E_u(m)$ soit ici m^{-7} , ce qui est loin d'être le cas.

Plusieurs hypothèses pour expliquer cela peuvent être avancées :

1. L'hypothèse d'équilibre instantané (régime diffusif) qui consiste à négliger $\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$ est-elle justifiée pour notre écoulement (voir 6.1.2) ?
2. En utilisant l'approximation $\vec{F}_{\text{LSS}} = \vec{j} \wedge \vec{B}$, on oublie aussi le terme $\vec{J} \wedge \vec{b}$ et les courants dus au champ électrique, qui tout en étant plus faibles ne sont pas forcément négligeables pour autant.

A priori l'hypothèse 2 ne devrait pas aboutir à une surestimation de la dissipation, et ne devrait pas altérer la pente des spectres d'énergie magnétique. Par contre, les courants de l'hypothèse 1 sont ceux qui vont s'opposer à la variation rapide des courants.

Pour tester l'hypothèse 1, on peut comparer le temps de diffusion du champ magnétique pour un nombre d'onde m , avec le temps de propagation des ondes de Rossby. Le temps de diffusion est

$$T_{\text{diff}} = \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} m^{-2}$$

et le temps que mettrait une onde se propageant à c pour traverser la longueur correspondant à m est

$$T_{\text{cin}} = \frac{1}{cm}$$

Pour que l'approximation de diffusion instantanée soit valable, il faut $T_{\text{diff}}/T_{\text{cin}} \ll 1$ soit

$$\frac{T_{\text{diff}}}{T_{\text{cin}}} = \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} \frac{c}{m} = \text{Rm}^c$$

Si on estime la vitesse de propagation des ondes par $c \sim \text{Ro}$, et qu'on calcule Rm^c avec les paramètres employés ici : $\text{Pm} = 10^{-5}$, $\text{Ek} = 10^{-8}$, $\text{Ro} = -0.02$, $m_{\text{max}}^{\text{B}} = 21$, on trouve $\text{Rm}^c(m_{\text{max}}^{\text{B}}) \sim 1$, ce qui semble effectivement un peu juste pour utiliser l'approximation du régime diffusif²

On ne peut donc pas négliger $\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$ dans l'équation d'induction, même pour $\text{Rm}_{\text{local}} \ll 1$: Il faut aussi avoir $\text{Rm}^c \ll 1$. Dans notre cas, pour pouvoir utiliser légitimement notre paramétrisation de la force de Laplace aux petites échelles, il faudrait prendre $m_{\text{max}}^{\text{B}}$ beaucoup plus grand, ce qui diminue fortement l'intérêt d'une telle approche. En plus, avec les paramètres dynamo du style $\text{E} = 10^{-8}$ et $\text{Pm} = 10^{-2}$, ce n'est plus du tout possible : il faudrait prendre $m_{\text{max}}^{\text{B}} \sim m_{\text{max}}^{\text{U}}$.

Pour $\text{Rm}^c > 1$, le passage rapide de l'onde ne laisse pas aux courants électriques le temps de s'établir, limitant ainsi leur intensité et réduisant la dissipation Joule. Ainsi on réduit nettement la dissipation aux petites échelles, ce qui pourrait expliquer les spectres d'énergie magnétique raides observés.

On remarque ici une fois encore que c'est le comportement ondulatoire de notre écoulement qui le rend particulier : avec une advection pure on n'aurait pas de problèmes.

²Si on estime la vitesse des ondes par celle des ondes de Rossby $c \sim \beta/m^2$, qui n'est *a priori* plus valable pour l'écoulement non-linéaire utilisé ici, on trouve $\text{Rm}^c(m_{\text{max}}^{\text{B}}) \sim 0.1$ ce qui reste tout de même important.

6.3 Régime dynamo

De nombreux calculs de dynamos ont été lancés, de manière exploratoire, afin de voir ce qu'on pourrait tirer de ces dynamos saturées. Beaucoup de ces calculs ont explosé (NaN), à cause d'une troncature excessive ou d'un pas de temps trop ambitieux. Cependant, des dynamos saturées ont été obtenues à $Ek = 10^{-8}$ et $Ek = 10^{-6}$, et certaines d'entre elles présentent même des inversions. La table 6.2 donne les paramètres de ces dynamos.

id	dt_B / dt_U	NR	$l_{\max}$	$m_{\max}^B$	Ek	Ro	Pm_c	Pm	Λ
Q6 _f	1	101	64	64	10^{-6}	-0.08	0.062	0.1	1 – 4
Q6 _h	6	101	59	21	10^{-6}	-0.08	0.062	0.1	1 – 4
D6 _f	1	100	64	64	10^{-6}	-0.08	0.085	0.1	~ 1
D6 _h	6	100	59	21	10^{-6}	-0.08	0.085	0.1	~ 1
D6 _l	6	100	59	21	10^{-6}	-0.08	0.085	0.1	~ 1
D6 _{ok} ^a	6	100	59	21	10^{-6}	-0.08	0.085	0.1	~ 1
Q6 _f ⁺	6	101	64	64	10^{-6}	0.04	0.2	0.3	$1.5 \cdot 10^{-2}$
D8 _l	10	101	59	21	10^{-8}	-0.02	0.003	0.005	0.65
Q8 ₇₉	20	149	79	32	10^{-8}	0.02	0.004	0.005	2.925
Q8 ₃₂	10	149	59	32	10^{-8}	0.02	0.004	0.005	2.9
Q8 ₄₂	10	149	59	42	10^{-8}	0.02	0.004	0.005	2.1
Q8 ₅₃	10	149	59	53	10^{-8}	0.02	0.004	0.005	1.61
Q8 ₆₄	10	149	64	64	10^{-8}	0.02	0.004	0.005	1.3
Q8 ₈₅	10	149	85	85	10^{-8}	0.02	0.004	0.005	1

^aSeule dynamo saturée avec la force de Laplace axisymétrique juste.

TAB. 6.2 – Liste des calculs de dynamos saturées. D ou Q pour famille dipôle ou quadrupole ; 6 ou 8 pour $Ek = 10^{-6}$ ($NS = 400, m_{\max}^U = 64$) ou $Ek = 10^{-8}$ ($NS = 600, m_{\max}^U = 170$) ; _f pour *full résolution*, un calcul où la résolution de B est celle de U ; _h pour *hybrid*, force de Laplace grandes échelles ; _l pour *Lorentz Small Scale*, inclut la paramétrisation de la force de Laplace aux petites échelles.

6.3.1 Dépendance avec la troncature

Nous avons montré au chapitre 5.1.4 qu'on pouvait calculer le champ magnétique avec un pas de temps plus grand et avec une grille plus fine. Lorsqu'on rajoute la force de Laplace, sans tenir compte des petites échelles du champ magnétique, la dissipation d'énergie est sous-estimée (voir §6.2). La figure 6.7 montre l'évolution de l'énergie magnétique en fonction du temps pour différents modèles de dynamo. On constate que l'énergie magnétique décroît lorsqu'on augmente la résolution. En effet, en augmentant la résolution, on augmente aussi la dissipation d'énergie par les petites échelles et on arrive ainsi à un nouvel équilibre. À noter que dans ce cas, on a $Rm_{\text{loc}} < 1$ pour $m > 20$.

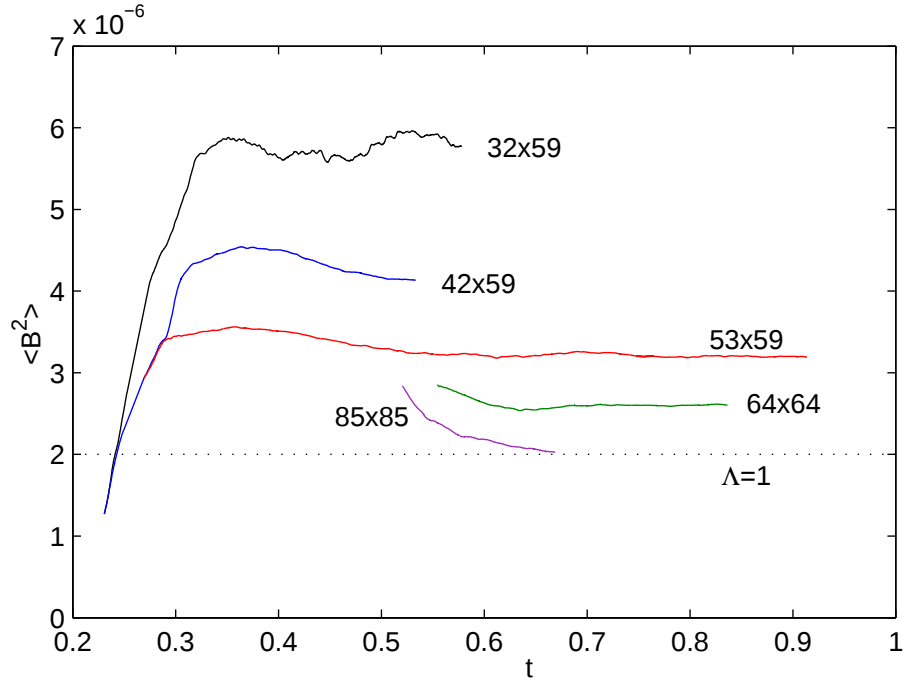


FIG. 6.7 – Évolution de l'énergie magnétique en fonction du temps pour les modèles Q8_{xx}. Les courbes sont marquées par $m_{\max}^B \times l_{\max}$. $\Lambda = 1$ correspond donc à $\langle B^2 \rangle = 2 \cdot 10^{-6}$.

Cependant, les formes générales du champ magnétique et du champ de vorticité sont très peu affectées pour des résolutions supérieures à ($m_{\max}^B = 42, l_{\max} = 59$), comme l'illustre la figure 6.8. Pour la plus basse résolution présentée ici, le champ magnétique devient trop intense et l'écoulement en ressent davantage les effets.

On peut donc raisonnablement penser que même si l'énergie magnétique n'est pas correcte, les formes des champs restent bonnes, pour des résolutions raisonnables, ce que semble aussi confirmer le temps de dissipation défini comme $T_{\text{diss}} = E_B/D_J$.

Le critère établi au §6.1.1, n'est pas vérifié : on a $\Lambda > 1$, bien que l'écart ne soit pas très grand (voir figure 6.7).

6.3.2  nergie et dissipation

La table 6.3 donne les énergies et les dissipations obtenues avec quelques dynamos saturées. Les grandeurs sont moyennées dans le temps et calculées comme indiqué dans les annexes §B.1.7 et §B.2.3. On constate que les Λ moyens indiqués ici sont plus faibles que les maximums donnés dans la table 6.2.

On remarque que la dissipation liée à la force de Laplace aux petites échelles $D_{l_{ss}}$ est relativement faible comparée aux autres dissipations, bien que son effet soit important comme l'a montré l'étude de la dépendance avec la troncature (voir §6.3.1).

Si la dissipation par effet Joule D_J domine clairement pour D8_l, ce n'est pas du tout le cas pour D6_l et D6_{ok}, où les dissipations visqueuses axisymétriques dominent. Il ne semble

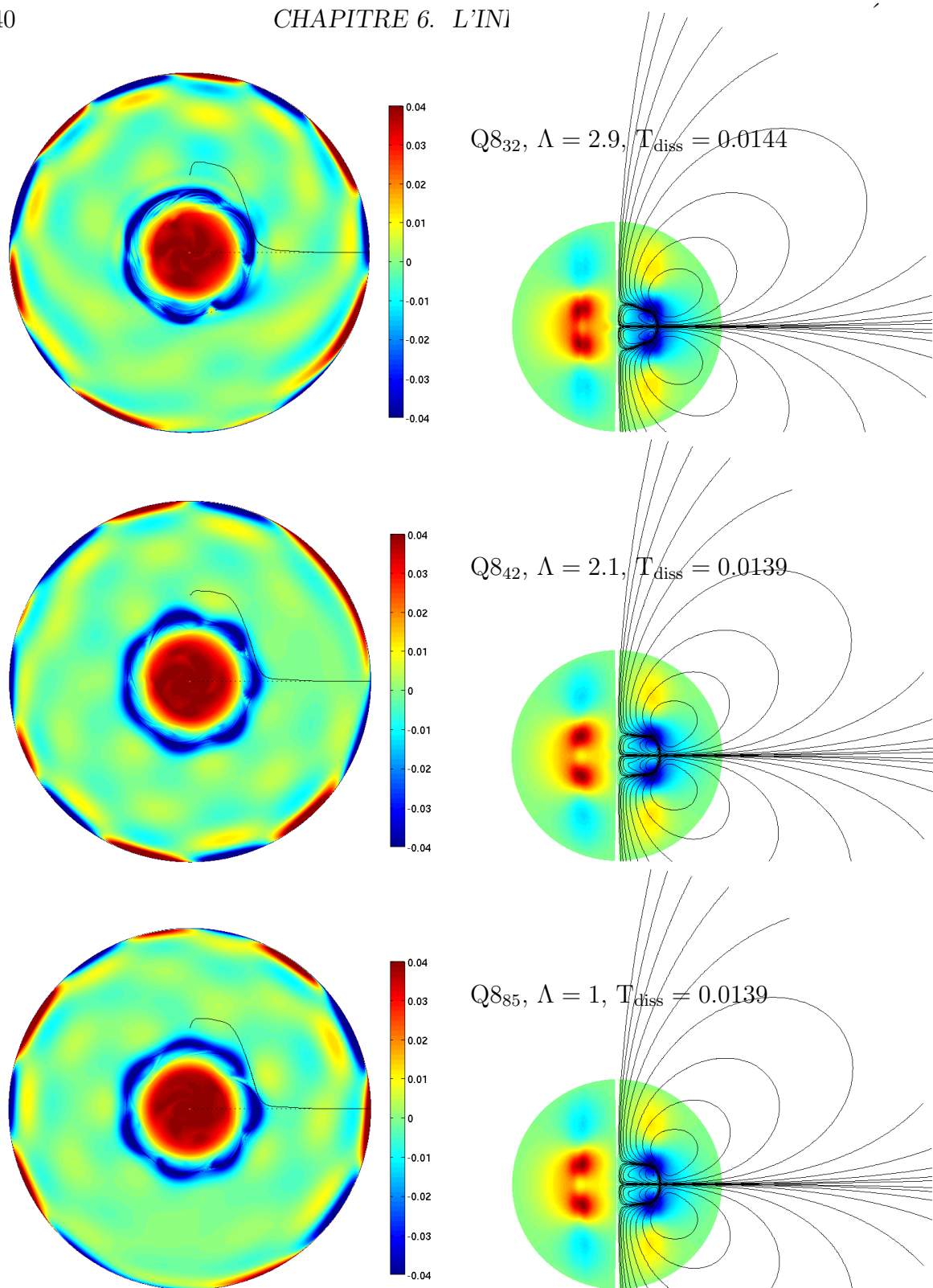


FIG. 6.8 – Effet de la troncature sur les dynamos saturées. Champ de vorticité totale et vitesse angulaire zonale (à gauche), et champ magnétique (à droite) pour des dynamos saturées $Q8_{xx}$ (avec $E = 10^{-8}$, $Ro = 0.02$, $Pm = 0.005$).

id	D8 _l	D6 _l	D6 _{ok}	Q6 _h	Q8 ₅₃
E _U	1.36 10 ⁻⁵	1.84 10 ⁻⁴	1.80 10 ⁻⁴	1.75 10 ⁻⁴	9.5 10 ⁻⁶
E _u	1.0 10 ⁻⁷	2.60 10 ⁻⁶	2.66 10 ⁻⁶	2.67 10 ⁻⁶	1.39 10 ⁻⁷
E _B	1.3 10 ⁻⁶	5.5 10 ⁻⁶	2.73 10 ⁻⁶	1.76 10 ⁻⁵	3.22 10 ⁻⁶
Rm	1840	1360	1340	1320	1540
Λ	0.65	0.55	0.27	1.8	1.61
T _{dissip}	4.0 10 ⁻⁴	1.2 10 ⁻³	8.6 10 ⁻³	8.2 10 ⁻³	1.37 10 ⁻²
D _J	4.44 10 ⁻¹⁰	6.26 10 ⁻⁹	3.16 10 ⁻⁹	2.13 10 ⁻⁸	
D _U	1.7 10 ⁻¹¹	1.58 10 ⁻⁸	1.53 10 ⁻⁸	1.41 10 ⁻⁸	
D _u	1.5 10 ⁻¹²	1.1 10 ⁻⁹	1.11 10 ⁻⁹	1.20 10 ⁻⁹	
D _{Ek} ⁰	8.94 10 ⁻¹¹	2.17 10 ⁻⁸	2.24 10 ⁻⁸	2.40 10 ⁻⁸	
D _{Ek}	5.8 10 ⁻¹²	1.44 10 ⁻⁹	1.48 10 ⁻⁹	1.52 10 ⁻⁹	
D _{lss}	3 10 ⁻¹²	3.0 10 ⁻¹¹	6.43 10 ⁻¹²		

TAB. 6.3 – Résultats des calculs de dynamo saturées. voir table 6.2 pour les paramètres d'entrée. Toutes les grandeurs sont moyennées dans le temps.

pas y avoir de règle, si ce n'est que le champ magnétique semble presque toujours s'ajuster de manière à avoir $\Lambda \sim 1$. C'est vrai pour toutes les dynamos de la table 6.2, sauf Q6_f⁺ qui reste cependant la seule dynamo calculée avec la même résolution pour le champ magnétique et le champ de vitesse, assurant la bonne prise en compte de la dissipation à toutes les échelles.

6.3.3 Force de Laplace aux petites échelles

Comme on l'a vu au §6.2, l'approximation employée pour paramétriser les forces de Laplace aux petites échelles n'est pas satisfaisante. Le problème est encore plus prononcé pour les dynamos, comme on peut le voir sur la figure 6.9, où le saut dans le spectre, localisé au nombre d'onde pour lequel on introduit la force de Laplace aux petites échelles (ici $m_{\max}^B = 21$), est très important. On a $Rm^c(m_{\max}^B) \simeq 500$ et $Rm^c(m_{\max}^U) \simeq 50$.

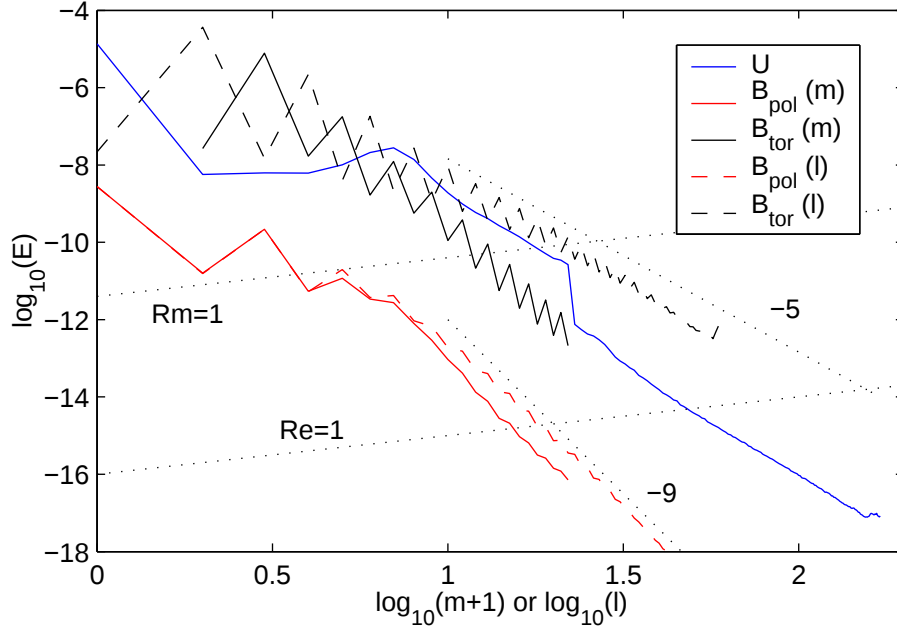


FIG. 6.9 – Spectres moyennés pour la dynamo saturée $D8_l$ ($Ek = 10^{-8}$, $Ro = -0.02$, $Pm = 0.005$).

6.3.4 Inversions

Certaines dynamos saturées présentent également des inversions. Les modèles $D6_x$ et $Q6_x$ (mais pas $Q6^+$) s'inversent, tout comme les dynamos cinématiques correspondantes (voir §5.3.6). Les oscillations de l'énergie magnétique pour différents modèles sont données par la figure 6.10. La période des inversions a cependant changé : par exemple on passe de $T_{\text{cin}} = 0.0665$ pour la dynamo cinématique aux mêmes paramètres à $T_{\text{sat}} = 0.115$ pour $D6_h$ et $T_{\text{sat}} = 0.10$ pour $D6_{ok}$. Grâce aux grandes variations de l'intensité du champ magnétique, on voit bien l'effet de ce dernier sur les vitesses du fluide : les fluctuations de vitesse et l'énergie cinétique sont plus faibles lorsque le champ magnétique est le plus fort.

Notons que la géométrie du champ magnétique reste la même qu'au seuil. On a représenté sur les figures 6.12 et 6.13 le champ magnétique et le champ de vorticité pour les minima et maxima de l'énergie magnétique au cours des inversions $Q6_h$ et $D6_l$. Pour $D6_l$, on retrouve le même aspect que dans le cas de l'inversion visible sur la figure 5.8, à peu près au voisinage des zéros du taux de croissance (correspondant aux extremums de l'énergie).

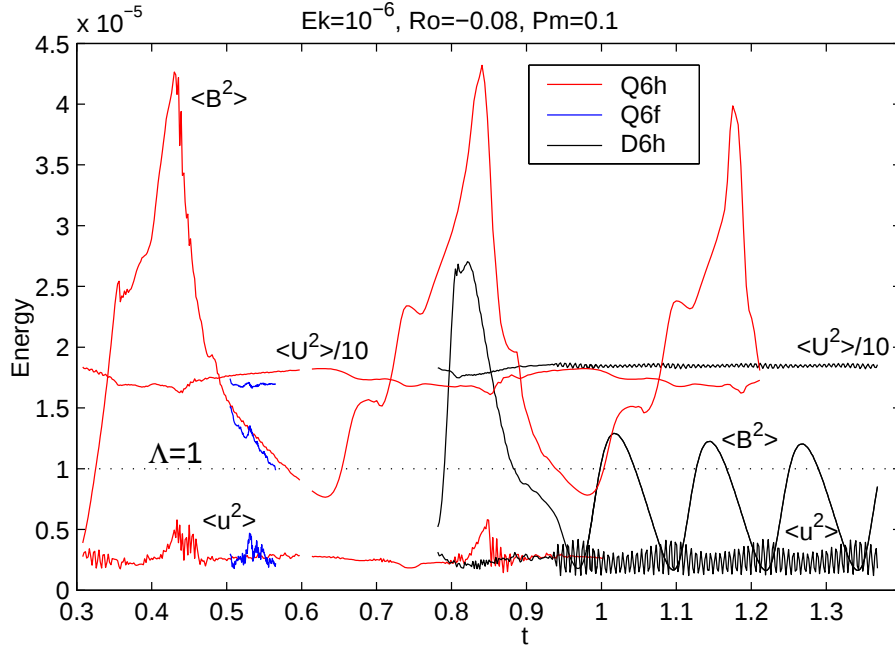


FIG. 6.10 – Énergie magnétique et cinétique en fonction du temps D6_h, Q6_f et Q6_h (voir tableau 6.2)

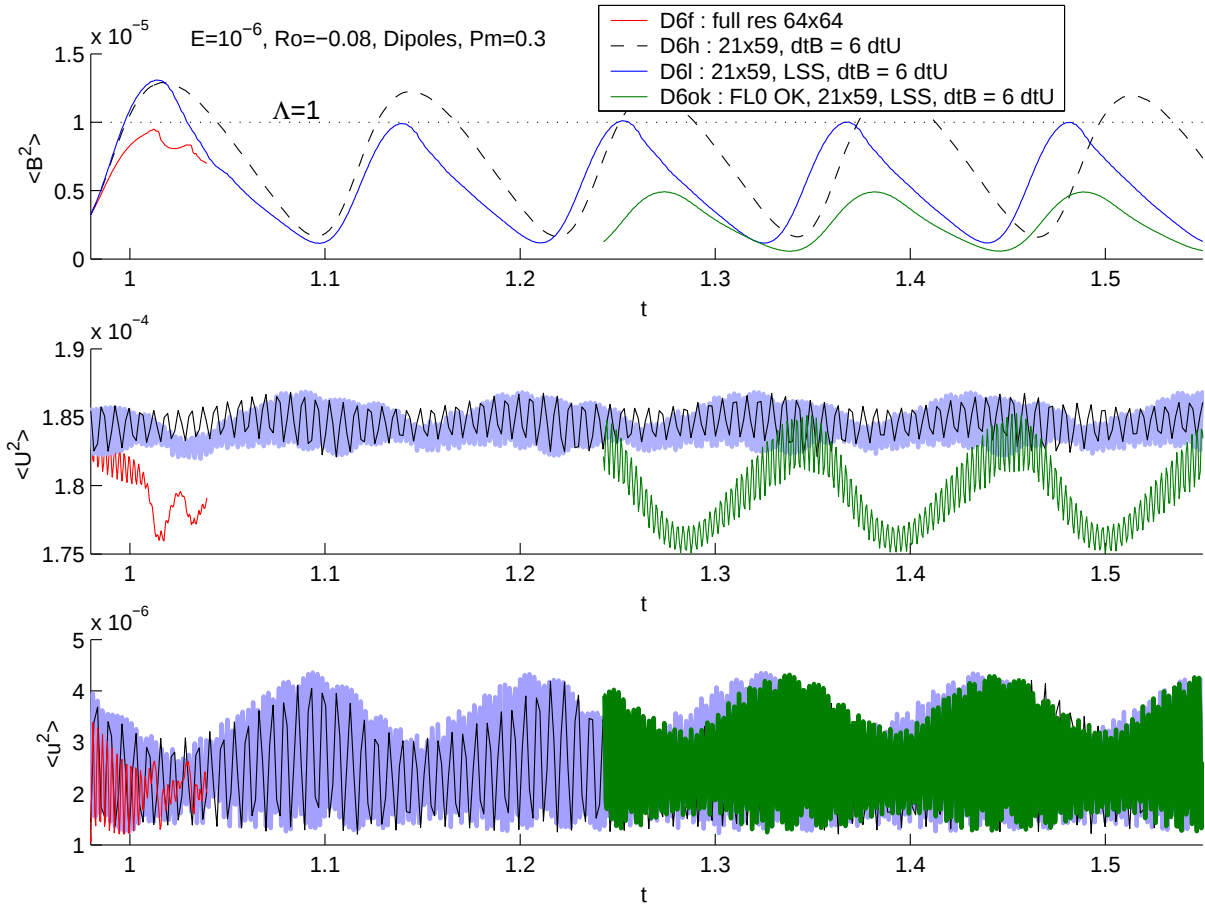


FIG. 6.11 – Énergie magnétique et cinétique en fonction du temps pour les quatre dynamos saturées de la famille D6_x ($E = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$, $Pm = 0.1$).

Enfin pour évaluer les effets des diverses approximations, on a représenté les 4 modèles $D6_x$ sur la figure 6.11. On voit que la force de Laplace corrigée a un effet non-négligeable, mais que le comportement global reste le même. Le cas $D6_{ok}$ présente le plus faible Λ , et une forte influence de la force de Laplace axisymétrique sur l'écoulement zonal, bien plus importante que dans les autres cas.

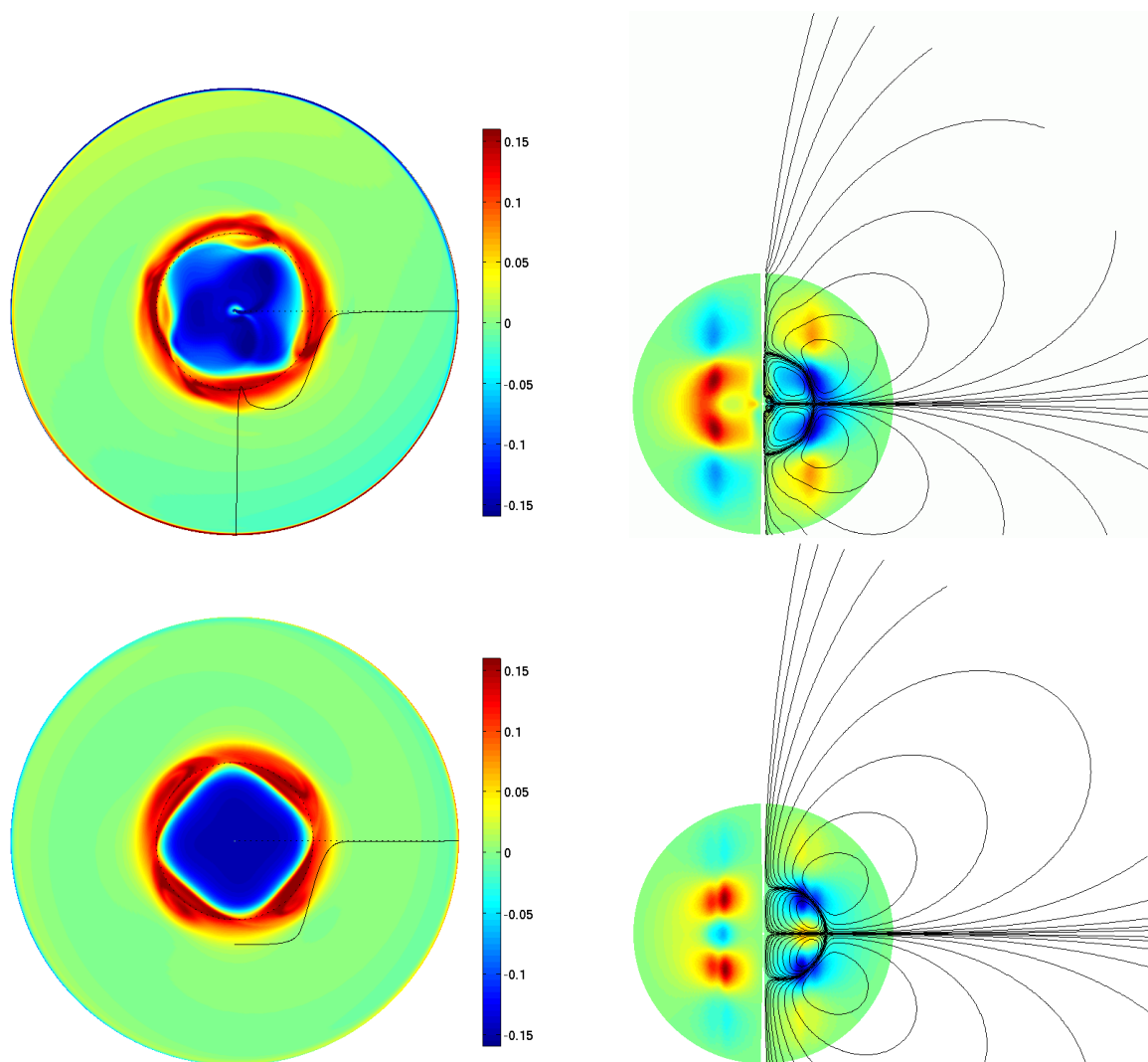


FIG. 6.12 – Vorticité (à gauche), et champ magnétique (à droite) pour la dynamo quadrupolaire saturée $Q6_h$ ($E = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$, $Pm = 0.1$) qui s'inverse. La ligne du haut présente l'état pour le maximum du champ magnétique, et la ligne du bas pour le minimum (voir fig. 6.10).

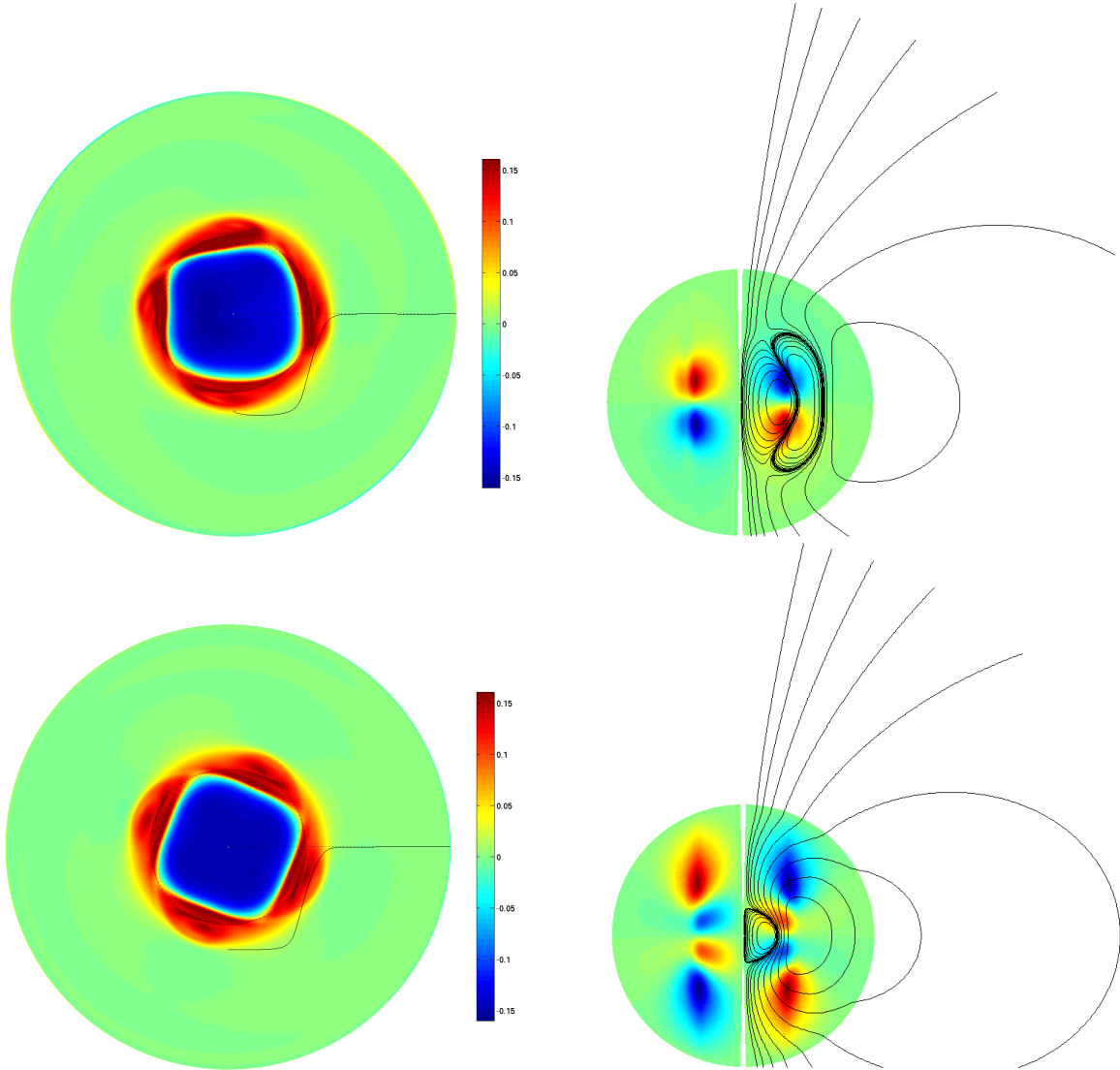


FIG. 6.13 – Vorticité (  gauche), et champ magnétique (  droite) pour la dynamo dipolaire saturée $D6_l$ ($E = 10^{-6}$, $Ro = -0.08$, $Pm = 0.1$), avec force de Laplace à petite échelle) qui s'inverse. La ligne du haut présente l'état pour le maximum du champ magnétique, et la ligne du bas pour le minimum (voir fig. 6.10).

6.3.5 Force de Laplace

Nous comparons dans cette section les forces de Laplace obtenues dans les deux dynamos saturées nommées D6_{ok} et Q8₅₃. Rappelons que dans D6_{ok} la force de Laplace axisymétrique est calculée correctement alors qu'elle est fausse dans Q8₅₃.

Nous avons représenté sur la figure 6.14 la force de Laplace axisymétrique. On peut voir qu'elle s'oppose à l'écoulement axisymétrique. En la comparant avec le pompage d'Ekman, on voit tout de même que ces deux forces sont comparables en dehors de la couche de cisaillement (où le frottement d'Ekman est le moteur).

Les figures 6.15 et 6.16 représentent la force de Laplace non-axisymétrique pour D6_{ok} pris au maximum du champ magnétique, et celle obtenue dans la dynamo Q8₅₃. La figure 6.15 représente le rotationnel de cette force, terme qui agit sur l'équation de la vorticité axiale (eq. 2.15).

Les composantes susceptibles de briser la contrainte de Proudman-Taylor sont représentées sur la figure 6.16 et sont bien plus grandes que la force de Coriolis (par rapport à laquelle la force de Laplace est normalisée), bien que $\Lambda \sim 1$. Pour ces situations, il semble donc peu probable que notre modèle quasi-géostrophique puisse rendre compte de la réalité.

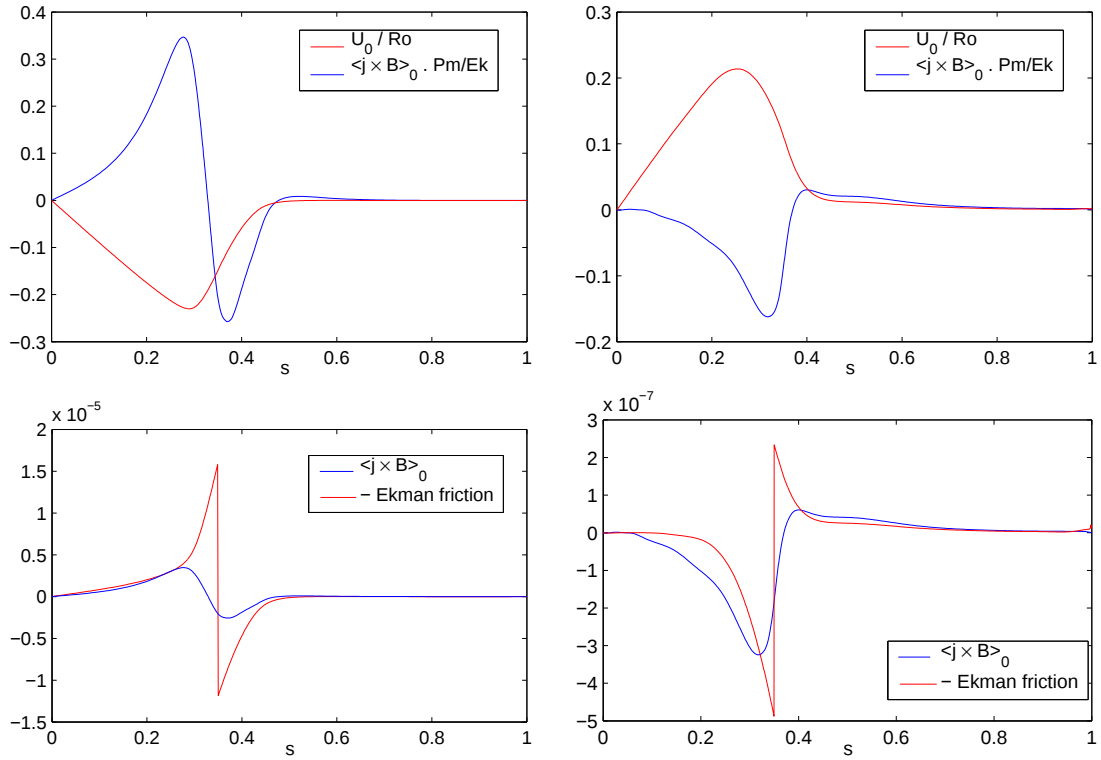


FIG. 6.14 – Force de Laplace axisymétrique pour D6_{ok} (pour le maximum de E_B) à gauche et Q8₅₃ à droite. La ligne du haut compare la force de Laplace à l'écoulement axisymétrique, tandis que celle du bas la compare au frottement d'Ekman.

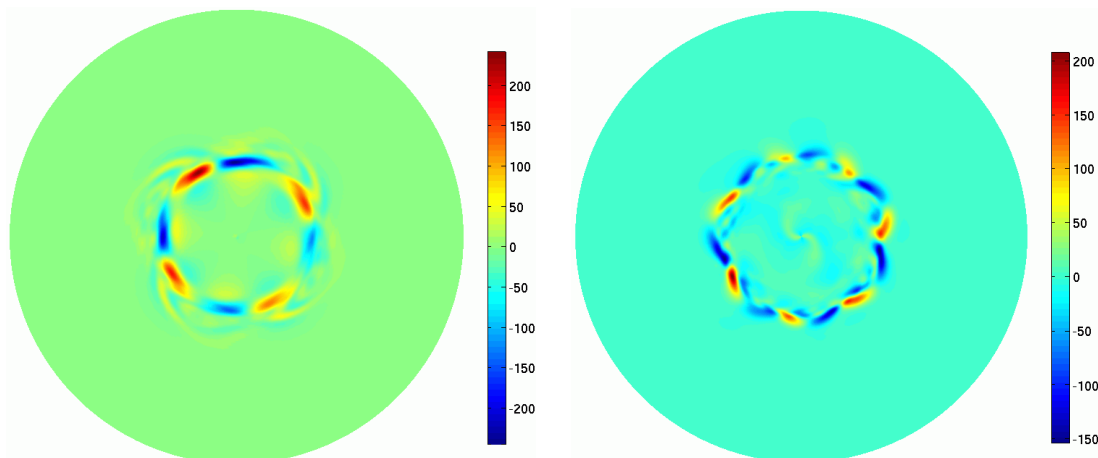


FIG. 6.15 – Composante verticale du rotationnel de la force de Laplace normalisée par E_k / P_m , pour $D6_{ok}$ (pour le maximum de E_B) à gauche et $Q8_{53}$ à droite.

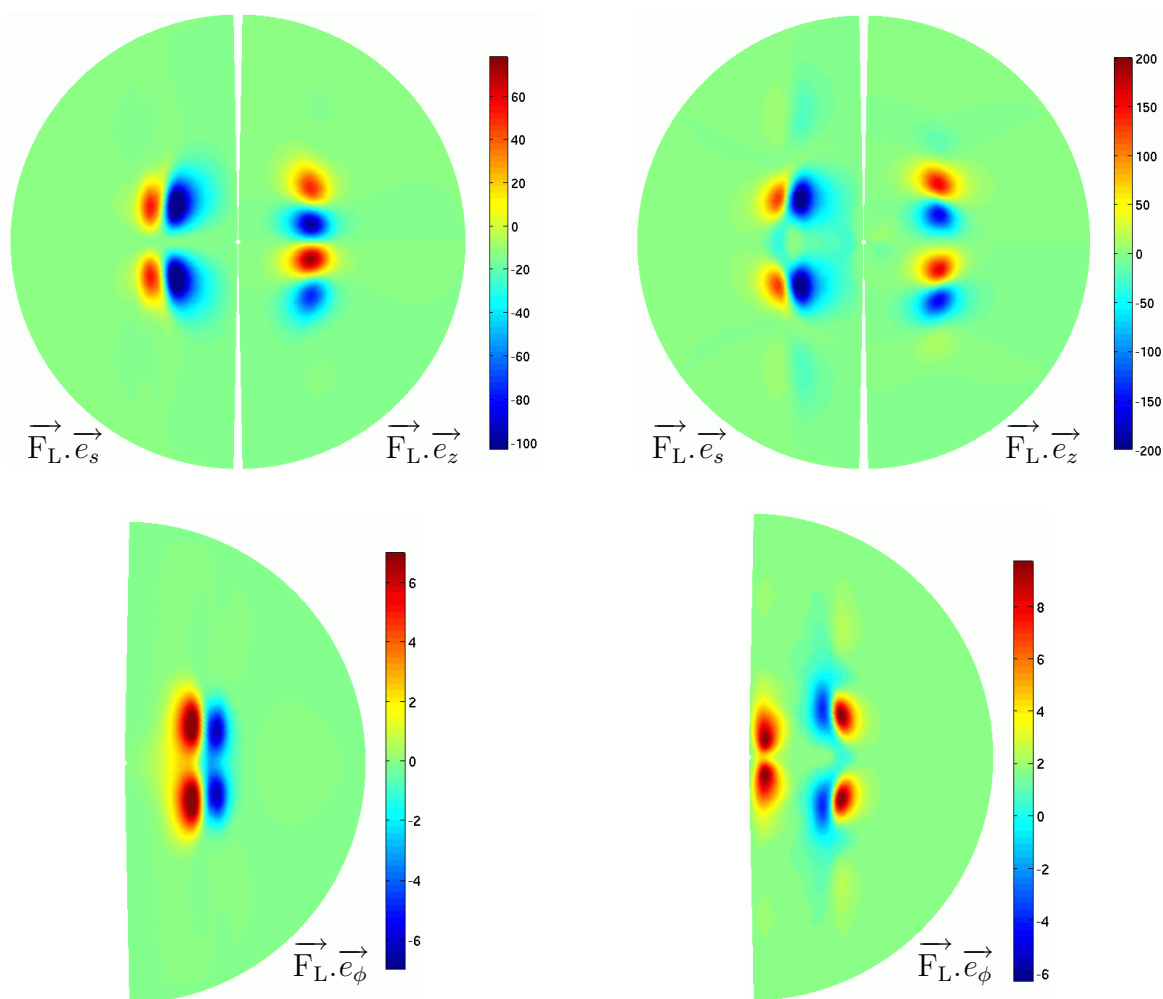


FIG. 6.16 – Coupes méridiennes de la force de Laplace normalisée par E_k / P_m , pour $D6_{ok}$ (pour le maximum de E_B) à gauche et $Q8_{53}$ à droite.

6.4 Résumé et discussion

Nous avons vu qu'il y a des problèmes fondamentaux à intégrer la force de Laplace dans les modèles quasi-géostrophiques : à cause de l'aspect ondulatoire, on doit tenir compte de la dépendance temporelle dans l'équation d'induction pour des échelles bien plus petites que prévues initialement.

En plus, les champs magnétiques obtenus sont presque toujours trop forts pour que l'hypothèse d'écoulement quasi-géostrophique reste valable.

Toutefois, les dynamos quasi-géostrophiques calculées montrent des régimes d'écoulement proches de ceux qu'on observe en l'absence de champ magnétique, et la géométrie du champ magnétique est celle obtenue avec nos dynamos cinématiques (voir chapitre 5). La géométrie du champ magnétique se montre également peu sensible au détail des petites échelles, par ailleurs très peu énergétiques.

Les dynamos calculées saturent presque toujours de manière à vérifier $\Lambda \sim 1$. Est-ce une coïncidence ? Qu'en est-il de celle qui n'obéit pas à cette règle ? Il serait également intéressant de savoir ce qui se passe lorsque le nombre de Prandtl magnétique varie : nous pouvons explorer une assez grande gamme de P_m , comparée à celle qui est accessible avec des calculs 3D.

Les questions des dynamos sous-critiques et de la possibilité d'abaisser le seuil des instabilités hydrodynamiques en présence d'un champ magnétique n'ont pas été abordées. Pour obtenir une dynamo sous-critique il faudrait que la force de Laplace change complètement la topologie de l'écoulement³, ce qui est difficilement concevable dans la limite des dynamos quasi-géostrophiques, puisqu'il faut en même temps que $\Lambda \ll 1$.

Dans le cas de la convection thermique, un tel phénomène existe (Soward, 1977). Il y a cependant une différence fondamentale : les instabilités thermiques utilisent les forces visqueuses pour équilibrer la force de Coriolis. Lorsque le champ magnétique devient important, les forces d'Archimède s'équilibrent avec les forces de Laplace ce qui entraîne un changement de régime. L'instabilité de la couche de Stewartson est, quant à elle, de nature complètement différente : il s'agit d'une instabilité non-visqueuse.

Notons enfin que nous n'avons pas décelé la présence d'ondes de torsion : le freinage d'Ekman est plus important que la force de Laplace axisymétrique, et les non-linéarités ne sont pas négligeables.

³Nous avons observé un tel phénomène accompagné effectivement d'une dynamo sous-critique, mais le calcul n'était pas bon

Chapitre 7

Conclusion

En fin de compte, cette thèse nous aura mené loin des idées de départ. En effet, l'idée à l'origine de l'expérience DTS était que le forçage thermique qui entretenait la dynamo terrestre nécessite trop d'énergie pour réaliser une dynamo à l'échelle du laboratoire. Le forçage mécanique par une rotation différentielle, bien plus efficace, était censé produire un écoulement très semblable à la convection thermique.

Notre étude a montré qu'au seuil d'instabilité, l'écoulement issu de la déstabilisation de la couche de Stewartson s'organisait à des échelles bien plus importantes ($\lambda_{\text{stew}} \sim Ek^{1/4}$) que la convection thermique ($\lambda_{\text{conv}} \sim Ek^{1/3}$). De plus lorsqu'on augmente le forçage et qu'on va vers des régimes turbulents, l'échelle dominante augmente rapidement dans le cas d'un forçage par rotation différentielle, alors que [Gillet \(2004\)](#) montre que ce n'est pas du tout le cas en convection thermique (en tout cas dans la gamme qu'il a explorée). Ainsi le forçage par rotation différentiel semble n'être qu'un piètre ersatz de convection thermique.

Cependant nous avons également montré qu'un écoulement géostrophique issu d'un tel forçage est capable d'action dynamo. Il est même très facile de démarrer une dynamo avec un tel écoulement : Pour des régimes quasi-géostrophiques, quels que soient les paramètres Ek et Pm , on arrive toujours à démarrer une dynamo numériquement, sans même avoir à choisir un champ magnétique initial particulier.

Le modèle quasi-géostrophique que nous avons étendu aux pentes finies et aux régimes turbulents (introduction du frottement d'Ekman), associé à des approches théoriques nous ont permis de mieux comprendre les instabilités de la couche de Stewartson, leur géométrie, et l'influence du signe de la rotation différentielle, restée auparavant très obscure.

C'est aussi grâce ce modèle quasi-géostrophique amélioré que nous avons pu atteindre des régimes turbulents, jamais atteints numériquement dans ce type de configuration, et par la même occasion des dynamos pour des paramètres hors de portée d'un calcul 3D : $Re = 2 \cdot 10^6$ et $Pm = 10^{-2.5}$. Les inversions que nous avons observées, bien que déjà connues pour des dynamos paramétrisées $\alpha\Omega$, laissent penser que les inversions du champ magnétique terrestre ou encore celles du soleil, ne sont pas liées à l'action de la force de Laplace.

La relative simplicité de notre modèle (comparé à un calcul 3D complet), nous a permis de comprendre le détail des mécanismes d'induction à l'origine des dynamos quasi-géostrophiques observées. Contrairement aux idées avancées jusqu'à présent par la com-

munauté scientifique, ce n'est pas le pompage d'Ekman qui est à l'origine de l'effet α , mais un mécanisme subtil lié à la nature propagative de l'écoulement.

Et c'est encore la nature propagative de l'écoulement qui fait échouer la paramétrisation des forces de Laplace aux petites échelles, là où on n'attendait qu'un simple régime diffusif.

Il est maintenant clair que le comportement ondulatoire des écoulements étudiés ici est très important et qu'il faut en tenir compte. En effet, les instabilités au seuil, la turbulence, le mécanisme d'action dynamo, et la rétro-action du champ magnétique sur l'écoulement sont fortement marqués par cet aspect ondulatoire.

Il reste encore beaucoup à faire. En ce qui concerne les instabilités, les pentes infinies et les sauts de hauteur du récipient jouent sans aucun doute un rôle particulier qu'il reste à élucider. Les nombreuses différences entre l'écoulement obtenu par la déstabilisation d'une couche de Stewartson et celui produit par la convection thermique posent la question de la pertinence de ces résultats pour le noyau terrestre en particulier et pour les dynamos convectives en général. Par exemple, le cisaillement zonal fort n'est pas une caractéristique de la convection thermique, alors qu'il s'est montré très important pour nos dynamos. La modélisation du champ de température dans notre code numérique, en 3D tout comme le champ magnétique, devrait pouvoir répondre à ces questions.

Comme le champ toroïdal domine fortement les champs magnétiques dynamos observés, il peut être judicieux d'essayer de paramétriser les autres composantes, pour augmenter encore l'efficacité du code. Ce ne sera pas chose facile vu les difficultés rencontrées pour modéliser la force de Laplace aux petites échelles.

Pour les dynamos saturées, l'avenir semble peu sur : bien que l'outil soit puissant, de nombreux problèmes y compris la validité de l'hypothèse quasi-géostrophique semblent compromettre leur pertinence physique, sauf pour les régimes à $\Lambda \ll 1$.

Enfin nous avons à peine effleuré le vaste sujet de la turbulence en rotation, qui touche aussi bien les atmosphères des planètes géantes (comme Jupiter et sa tache rouge) que les courants océaniques. La modélisation de l'expérience de turbulence en rotation d'Austin au Texas ([Baroud *et al.*, 2002](#)), serait un bon test pour notre modèle quasi-géostrophique, et s'il s'avère pertinent, il constituerait un outil intéressant permettant d'étudier ces phénomènes.

Annexe A

Observations expérimentales

A.1 Dispositif expérimental

La figure A.1 montre un schéma de notre montage expérimental. C'est un ellipsoïde de plexiglas qui peut être mis en rotation rapide autour de son axe principal. Toute notre étude est faite avec de l'eau. Sur l'axe de rotation de l'ellipsoïde, un axe est entraîné par un petit moteur (pas-à-pas ou moteur à courant continu avec démultiplicateur). Sur l'axe on peut fixer des disques de plastique comme sur la figure A.1, ou une sphère de 4cm de diamètre. Nous avons en fait adapté l'expérience de précession utilisée par [Noir *et al.* \(2003\)](#). On se reportera donc à cette étude pour plus de détails sur le montage expérimental.

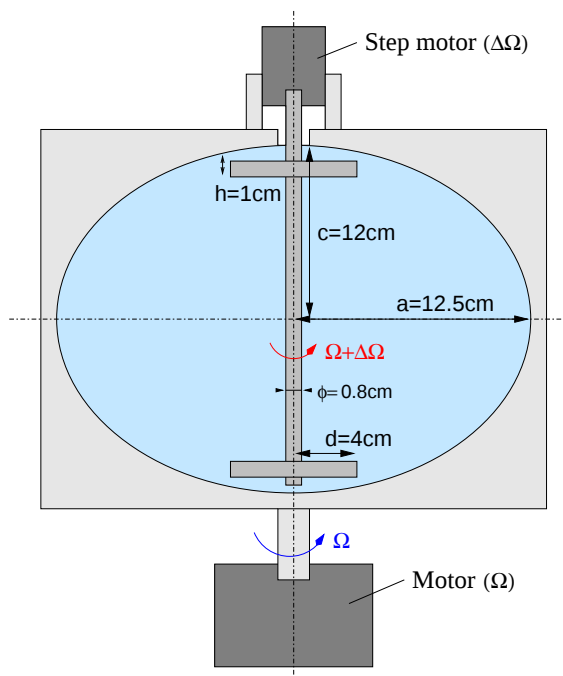


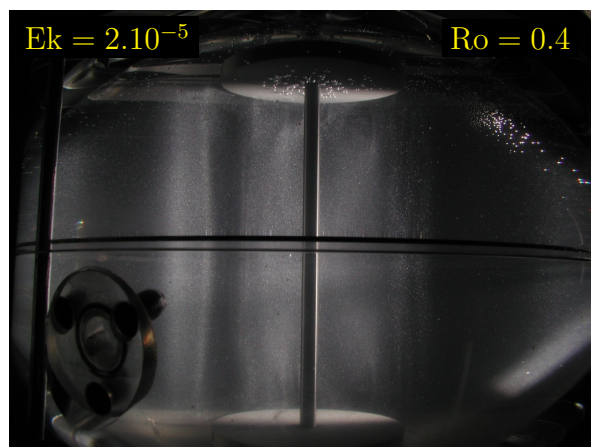
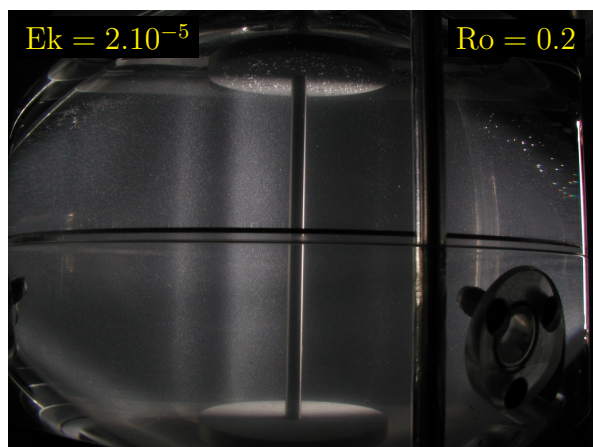
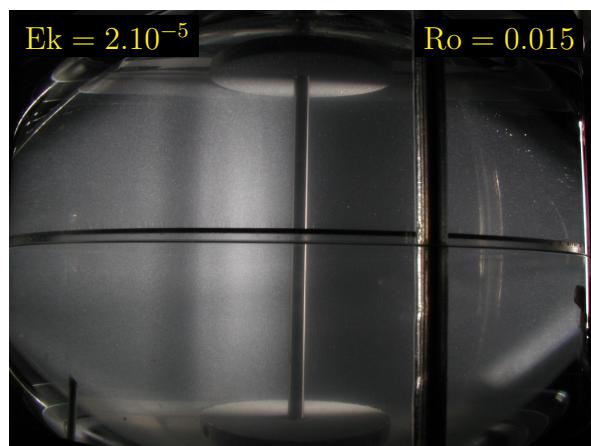
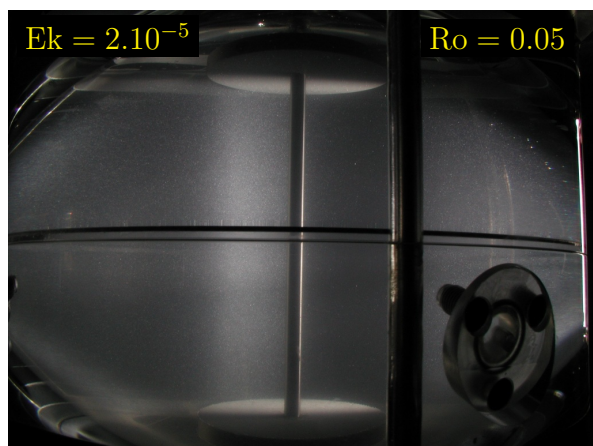
FIG. A.1 – Montage expérimental avec des disques. On peut remplacer les disques par une sphère (diamètre 4cm) pour faire des expériences en coquille sphérique.

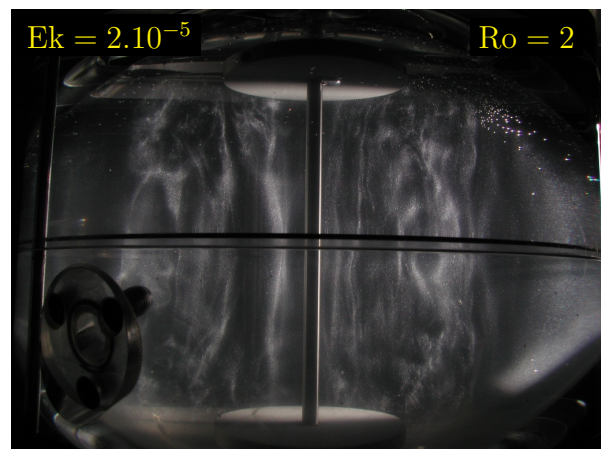
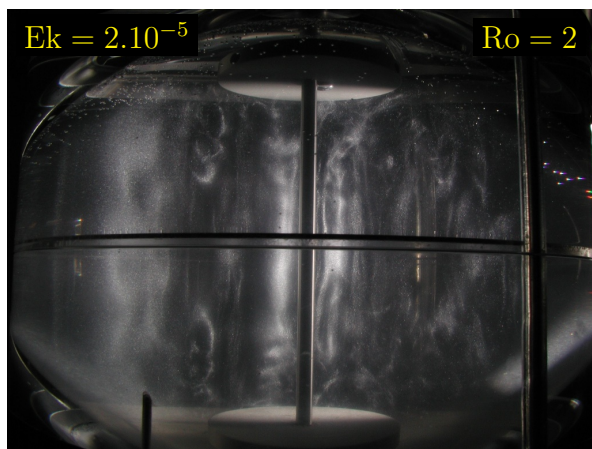
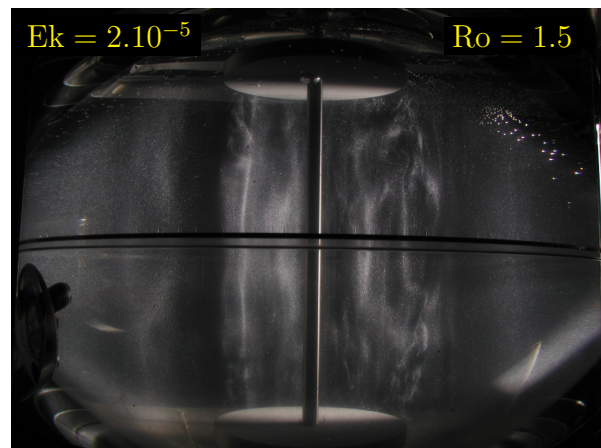
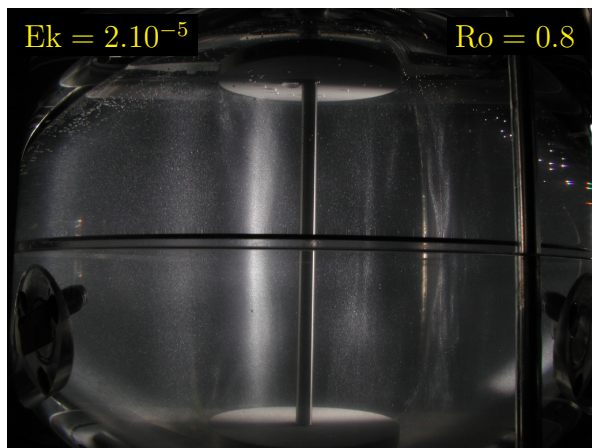
A.2 “Album of rotating shear flow instabilities”

Pour observer les instabilités dans notre ellipsoïde en rotation nous utilisons une suspension de particules “Kalliroscope AQ 1000”. Ces particules ont la forme de disque et réfléchissent la lumière. Elles vont donc s’aligner avec le cisaillement du fluide et renvoyer plus ou moins de lumière selon leur orientation. Nous éclairons une tranche de fluide avec un projecteur à diapo et une fente, ou une lampe flash colimatée par une succession de deux fentes. On peut alors visualiser les cisaillements de l’écoulement, et déterminer le seuil d’instabilité : lorsque les motifs dépendent du temps.

A.2.1 Disques

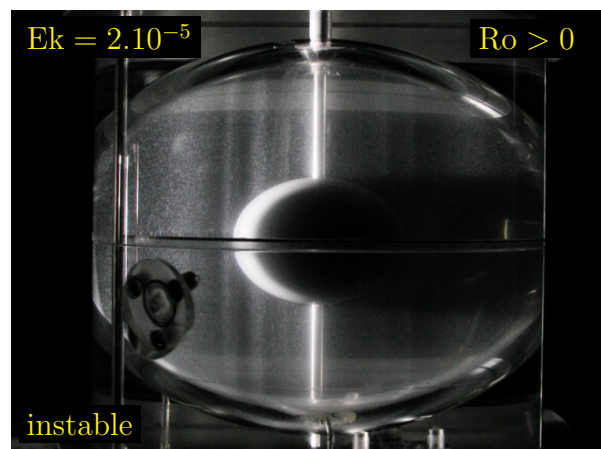
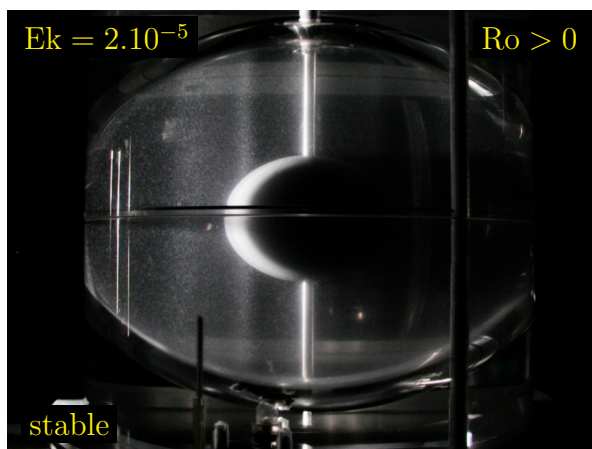
Les 8 photos ci-dessous montrent l’évolution de l’écoulement avec le forçage Ro , pour $Ek = 2 \cdot 10^{-5}$ dans le cas des disques.

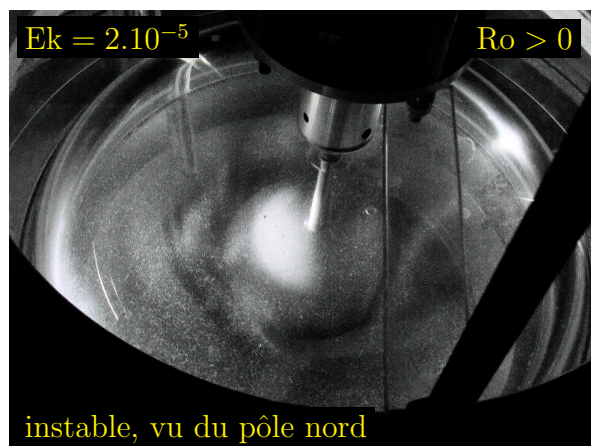
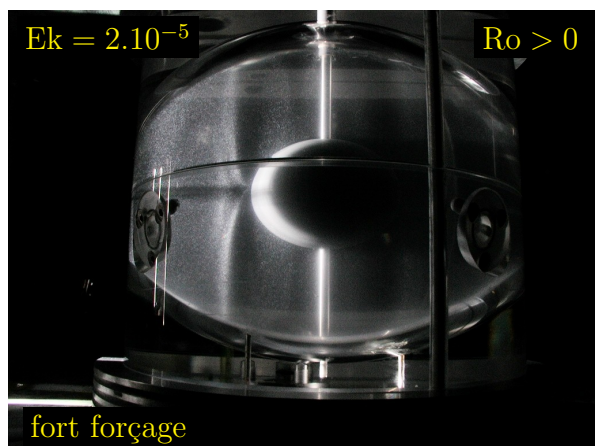




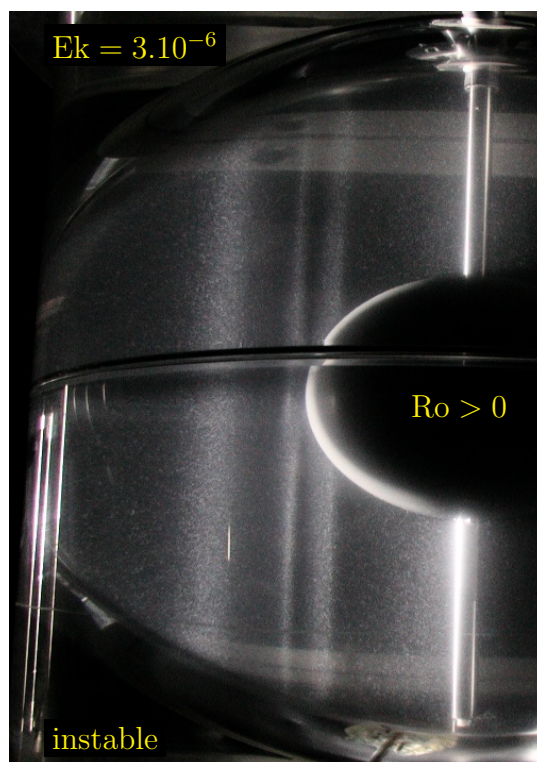
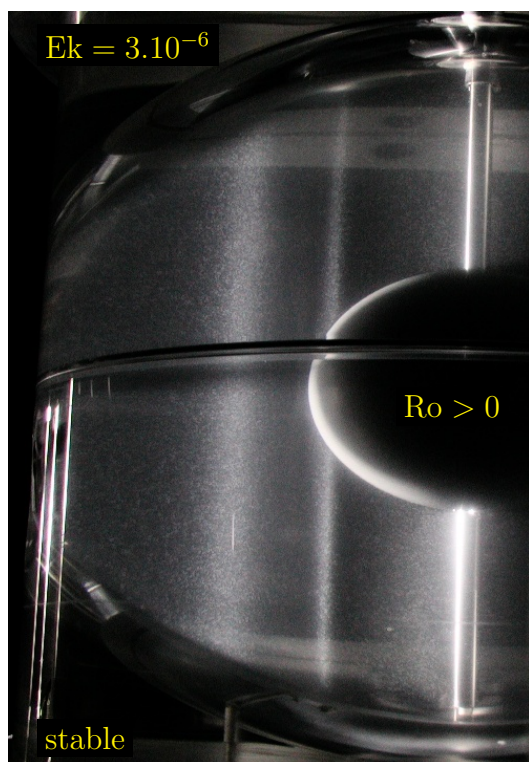
A.2.2 Coquille sphérique

Les 4 clichés suivants montrent la déstabilisation de la couche de Stewartson dans le cas sphérique avec une graine (coquille sphérique) et $Ro > 0$ pour $Ek = 2.10^{-5}$.





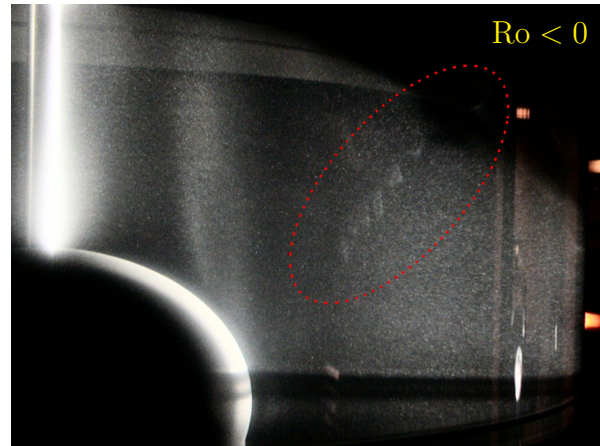
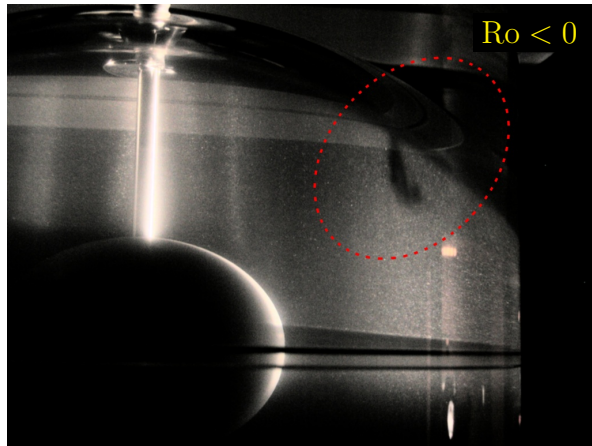
Même chose pour $Ek = 3.10^{-6}$ sur les 2 images suivantes :



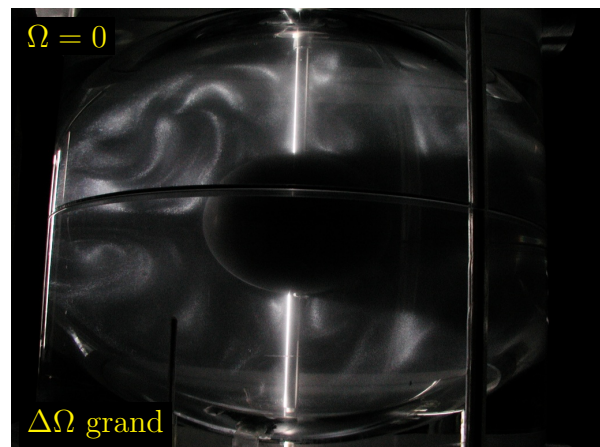
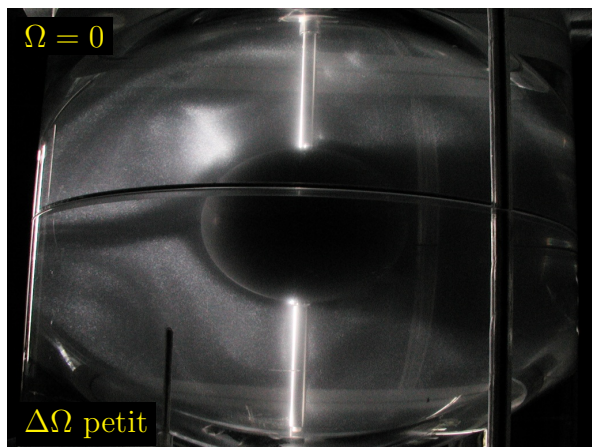
Il semble également que pour $Ek = 3.10^{-6}$ on distingue la profil caractéristique de la couche de Stewartson dans une coquille sphérique par la ligne blanche verticale tangente à la graine (voir §3.1.2). En effet pour des nombres d'Ekman suffisamment petits on voit que le cisaillement change de signe au voisinage de l'équateur.

Les 2 photos ci-dessous montrent les phénomènes étranges visibles pour $Ro < 0$ et qui échappent encore à toute explication : on observe en effet ce qui ressemble à un décollement de la couche d'Ekman : du fluide "noir" semble être injecté par les couches limites dans le volume. Sur une des photos on voit même des petits tourbillons qui suivent une ligne

diagonale. Lors de l’expérience, on a pu les voir défiler vers le centre. Ces phénomènes sont parfaitement reproductibles et apparaissent systématiquement dans la géométrie de la coquille sphérique et pour $Ro < 0$.



Enfin sur les 2 derniers clichés, seule la sphère interne tourne. On voit alors ce qu’est l’écoulement en l’absence de rotation globale : la force centrifuge éjecte du fluide accéléré par la graine au niveau de l’équateur de cette dernière. Des recirculations méridiennes se mettent en place. En comparant avec les photos précédentes, on peut se rendre compte de l’effet de la contrainte de Proudman-Taylor.



A.3 Profils de vitesse

Voici quelques profils radiaux de vitesse radiale obtenus par écho Doppler. Pour ces profils, $r = 0$ correspond à l'équateur externe, $r = r_0 = 85$ mm correspond à la localisation du saut de vitesse (disques ou graine), et $r = 125$ mm est le centre, qui comporte un axe de 4 mm de rayon.

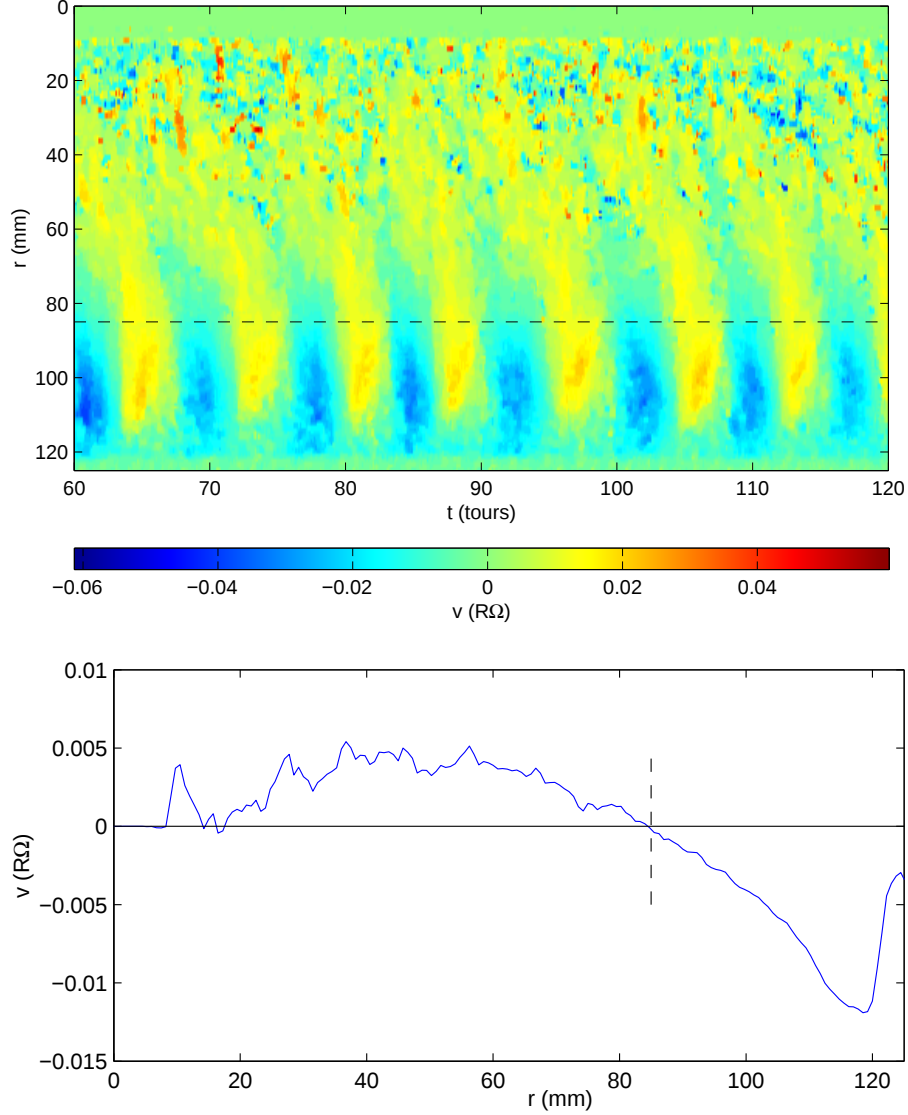


FIG. A.2 – En haut : Profil radial des vitesses radiales en fonctions du temps, obtenu par écho Doppler pour des disques avec $Ek = 4.4 \cdot 10^{-5}$ et $Ro = 0.4$. Le rayon des disques est indiqué par les pointillés. En bas : moyenne sur la deuxième moitié (90 à 120 tours) du profil radial précédent. On voit apparaître l'effet du pompage d'Ekman, dont le signe change au niveau du rayon du disque (à $r = 85$ mm).

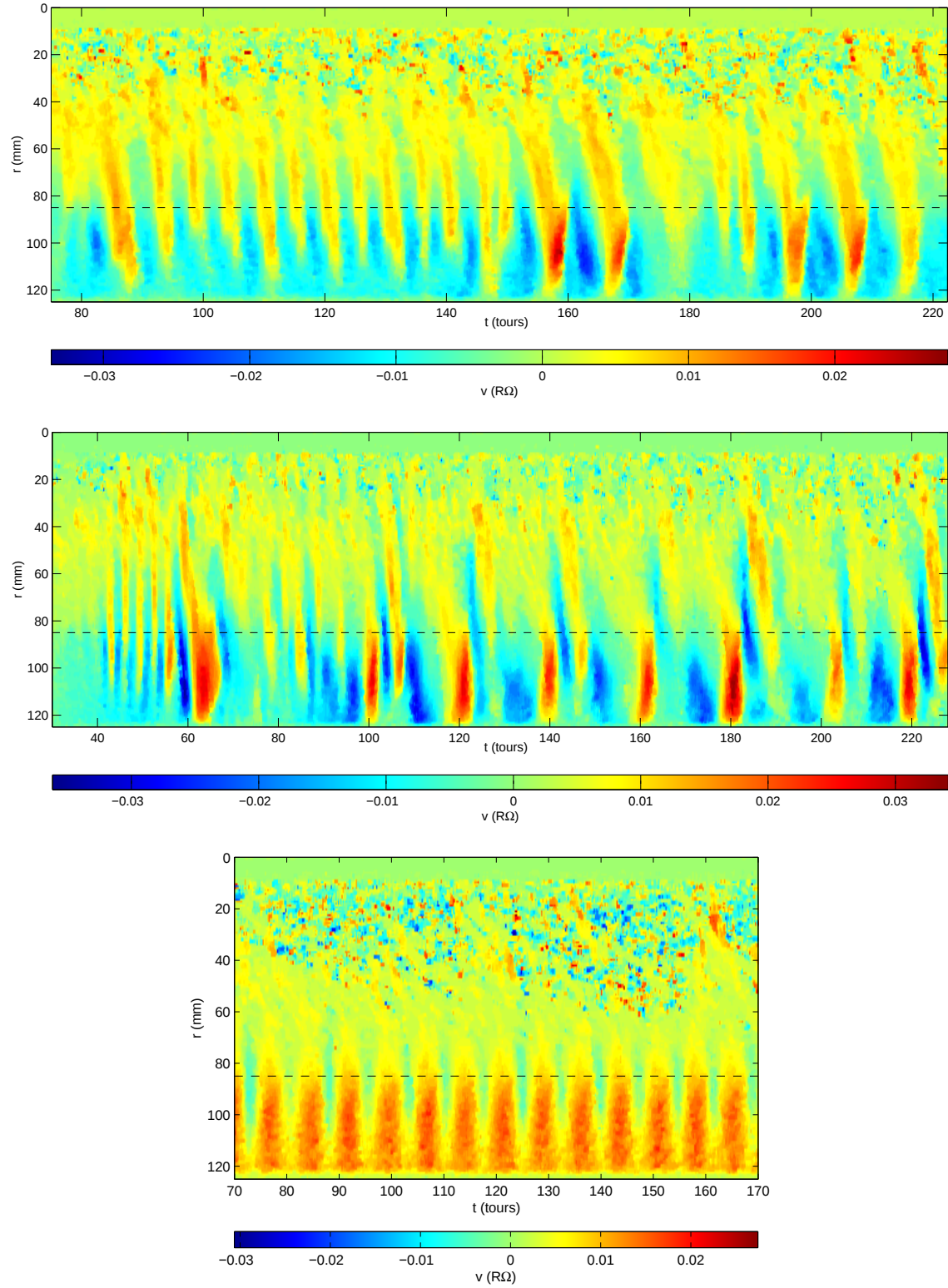


FIG. A.3 – Profil radial des vitesses radiales obtenues par écho Doppler pour des disques avec $Ek = 2.2 \cdot 10^{-5}$. Le rayon des disques est indiqué par les pointillés. De haut en bas : $Ro = 0.3 \sim 2Ro_c$, $Ro = 0.45 \sim 3Ro_c$, $Ro = -0.3 \sim 2Ro_c$

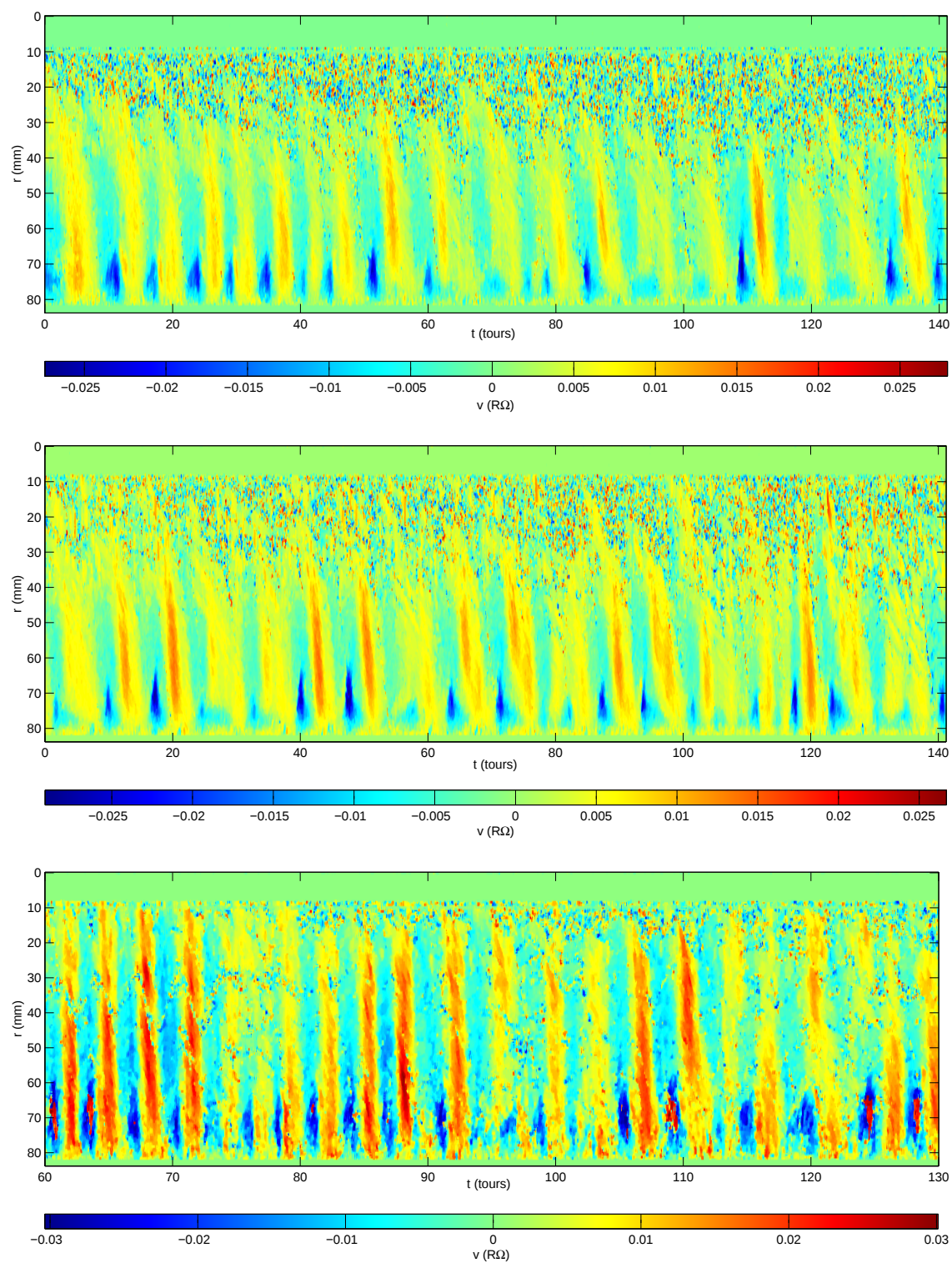


FIG. A.4 – Profil radial des vitesses radiales obtenues par écho Doppler pour la configuration en coquille sphérique, avec $Ek = 2.1 \cdot 10^{-5}$. De haut en bas : $Ro = 0.17$, $Ro = 0.39$, $Ro = 0.68$

A.3.1 Simulation numérique

La figure A.5 montre l'équivalent des profils doppler obtenus par simulations numériques, pour des paramètres voisins de ceux de la figure A.3a et sur une durée similaire. Ainsi on s'aperçoit que, entre simulation numérique et expérience :

- l'amplitude des vitesses diffère d'un facteur 2,
- la période des ondes est plutôt bien restituée,
- La spiralisation des structures est sous-estimée.

Mais il faut garder à l'esprit que si les nombres de Rossby sont identiques, le nombre de Rossby critique pour l'apparition des instabilités n'est pas le même dans les simulations numériques et dans l'expérience.

Comme pour le seuil d'instabilité, on a un accord qualitatif mais pas quantitatif.

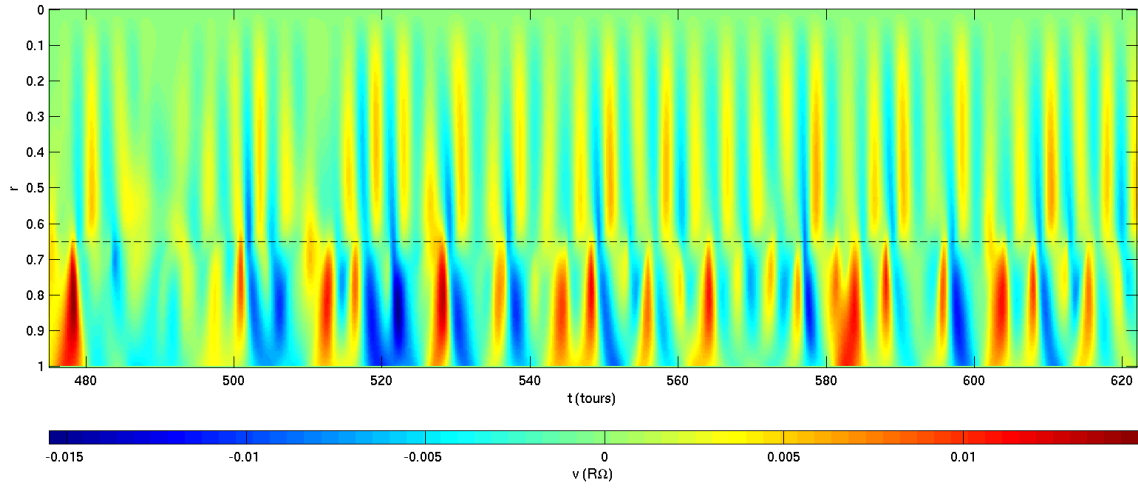


FIG. A.5 – Profil radial des vitesses radiales obtenues par simulation numérique dans la géométrie DTO (intérieur plat, extérieur sphérique) avec $Ek = 2 \cdot 10^{-5}$ et $Ro = 0.3$. Le rayon des disques est indiqué par les pointillés.

Annexe B

Le code numérique

Le code numérique utilisé à été développé par l'auteur à partir de codes de Philippe Cardin. Il est écrit en [Fortran 90](#), et a été exécuté sur machines [IBM](#) (Power3 et Power4) et [Intel](#) (Pentium IV). La parallélisation du code avec l'interface [OpenMP](#), permet un gain considérable en temps d'exécution. Pour les transformées de Fourier, nous utilisons la librairie [FFTW](#) (sur Intel) ou ESSL (sur IBM) qui offrent les meilleures performances sur ces machines.

De plus la structure modulaire permet une adaptation et une évolution aisée. Le support des versions successives pour les fichiers de données (en entrée et en sortie) permet de réutiliser des données anciennes avec toutes les fonctionnalités de la dernière version des programmes. Les fonctions sont réparties dans 3 fichiers :

- `com.F` contient les parties communes ainsi que les routines pour passer de l'univers 2D du champ de vitesse à l'univers 3D du champ magnétique ;
- `vit2D.F` contient tout ce qui concerne l'évolution du champ de vitesse ;
- `ind3D.F` contient tout ce qui concerne l'évolution du champ magnétique.

B.1 Partie hydrodynamique

La méthode de résolution des équations hydrodynamiques dans un système de coordonnées polaire (r, ϕ, z) est la suivante :

- décomposition en série de Fourier azimutale
- calcul sur la fonction scalaire (voir §2.2) pour $m \neq 0$
- calcul sur $W_0 = u_\phi/r$ pour $m = 0$.
- différences finies au 2ème ordre pour la direction radiale,

Le développement en série de Fourier est tronqué à l'ordre $m_{\max}^U$. Pour les termes non-linéaires, nous repassons dans l'espace physique pour faire le produit des termes concernés à l'aide d'une transformée de Fourier rapide (FFT), puis nous repassons dans l'espace spectral (FFT inverse). La grille cylindrique comporte NS points en rayon et au moins¹ $N_{\text{FFT}}^U \geq 3 m_{\max}^U$, afin de nous affranchir des problèmes de repliement (aliasing). Le pas radial n'est pas forcément constant mais peut être densifié dans les zones correspondant aux couches de cisaillement (Stewartson et à la paroi externe).

B.1.1 Écoulement de base axisymétrique

L'écoulement de base est la solution stationnaire de l'équation 2.14 linéarisée :

$$\frac{\alpha}{L} u_\phi - E^{1/2} \left(\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} \right) = \frac{\alpha}{L} U_b$$

qui se résout numériquement par une simple inversion de matrice. La routine `CalcW0` qui effectue cette opération travaille avec $W_0 = u_\phi/r$ pour des raisons de précision au centre ($r = 0$).

B.1.2 Seuil d'instabilité

Pour l'étude de stabilité linéaire, on linéarise l'équation 2.15 autour de l'écoulement de base U obtenu précédemment. Avec Λ la vorticité associée à U , on a au premier ordre :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left(E \nabla^2 - \frac{U}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \omega + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \left((2 + \Lambda) \eta - \frac{d\Lambda}{dr} \right)$$

Pour résoudre numériquement cette équation, nous utilisons un schéma aux différences finies selon r , et un développement en séries de Fourier selon ϕ :

$$u(r, \phi) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r) e^{-im\phi}$$

¹en fait le premier entier correspondant éligible pour la FFT

Pour l'intégration temporelle, nous utilisons le schéma de Cranck-Nickolson. Pour une équation linéaire

$$\frac{\partial A\psi}{\partial t} = B\psi$$

on a

$$\underbrace{\left(\frac{1}{dt}A - \frac{1}{2}B\right)}_{A2} \psi^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{1}{dt}A + \frac{1}{2}B\right)}_{B2} \psi^n$$

et en identifiant avec notre équation en ψ , on trouve

$$\begin{aligned} A2 &= \underbrace{\left(\frac{1}{dt} - \frac{1}{2}\left(E\nabla^2 + \frac{im}{r}U\right)\right)}_{A1} \omega - \underbrace{\frac{im}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{d\Lambda}{dr} - \eta(2 + \Lambda)\right)}_C \\ B2 &= \frac{2}{dt}\omega - A2 \end{aligned}$$

En remplaçant $\Lambda = \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r}$ et $\frac{d\Lambda}{dr} = \nabla^2 U - \frac{U}{r^2}$, on a

$$C = -\frac{\eta}{r} \left(2 + \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r}\right) + \frac{1}{r} \left(\nabla^2 U - \frac{U}{r^2}\right)$$

B.1.3 Conditions limites

Non-glissement : pour $m \neq 0$, la vitesse s'annule à la paroi, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_r = 0 &\implies \psi = 0 \\ u_\phi = 0 &\implies \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

et nous avons alors $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$.

Stress-free : la contrainte tangentielle s'annule à la paroi ($\sigma_{r\theta} = 0$). En plus on impose la non-pénétration ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$). Pour $m \neq 0$, on a alors

$$\begin{aligned} u_r = 0 &\implies \psi = 0 \\ \sigma_{r\theta} = 0 &\implies \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{u_\theta}{r} \end{aligned}$$

et donc $\omega = -\frac{2}{s} \frac{\partial \psi}{\partial r}$.

Au centre $r = 0$ il n'y a pas vraiment de condition limite. Cependant, u_r et u_ϕ doivent rester finies, de sorte que

$$\psi(r = 0) = 0 \quad \text{pour } m \neq 0$$

De plus, pour un système de coordonnées cylindrique, il y a une contrainte géométrique pour un tenseur A d'ordre n :

$$A^m = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

Ainsi, la vorticité étant un scalaire, on a

$$\omega(r = 0) = 0 \quad \text{pour } m \neq 0$$

Nous avons donc suffisamment de conditions au centre sans imposer $\vec{u} = 0$. Nous autorisons donc l'écoulement à croiser l'axe de rotation du système.

Pour l'écoulement axisymétrique, on a simplement $U(0) = 0$ et $U(r = 1) = 0$.

B.1.4 Code non-linéaire

Équation de ψ pour $m \neq 0$

En introduisant la fonction scalaire définie au §2.2 dans l'équation 2.15, on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = E \nabla^2 \omega + (2 + \omega) \eta \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}}_{u_r} - \left(u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right)$$

On peut séparer les termes linéaires et non-linéaires :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \underbrace{E \nabla^2 \omega + 2\eta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}}_{B\psi} + \underbrace{u_r \left(-\frac{\partial \omega}{\partial r} + \eta \omega \right) - \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi}}_{NL}$$

Le terme NL est calculé dans l'espace direct, après avoir calculé la Transformée de Fourier rapide (FFT) des quatre quantités concernées.

Équation de u_ϕ pour $m = 0$

Pour $m = 0$, l'évolution de l'écoulement est donnée par l'équation 2.14. Les moyennes résultent de l'interaction entre termes de même ordre m . Ainsi le premier terme s'écrit

$$u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} = \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left(\frac{-im}{r} \psi^m \right) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_\phi^m}{\partial r} \right) = \sum_{m=1}^M \frac{m}{r} \operatorname{Im} (\psi^m) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_\phi^m}{\partial r} \right)$$

et le second

$$\frac{u_\phi u_r}{r} = \sum_{m=1}^M \frac{m}{r^2} \operatorname{Im} (\psi^m) \operatorname{Re} (u_\phi^m)$$

Qui tous deux impliquent le produit de la partie réelle et de la partie imaginaire de deux fonctions complexes Ψ et Φ de même m :

$$(\operatorname{Re} \Psi \operatorname{Im} \Phi)_{m=0} = \frac{\operatorname{Re} \Psi \operatorname{Im} \Phi - \operatorname{Im} \Psi \operatorname{Re} \Phi}{2} \quad (\text{B.1})$$

En posant

$$\alpha^m = \frac{\partial u_\phi^m}{\partial r} + \frac{u_\phi^m}{r} \quad \text{pour } m \neq 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi^0}{\partial t} = & \underbrace{\operatorname{E} \left(\nabla^2 u_\phi^0 - \frac{u_\phi^0}{r^2} \right)}_{\operatorname{Bu}_\phi^0} - 2u_r^0 - u_r^0 \left(\frac{\partial u_\phi^0}{\partial r} + \frac{u_\phi^0}{r} \right) \\ & - \sum_{m=1}^M \frac{m}{2r} (\operatorname{Im} \Psi^m \operatorname{Re} (\alpha^m) - \operatorname{Re} \Psi^m \operatorname{Im} (\alpha^m)) \end{aligned}$$

B.1.5 Grille radiale

Nous utilisons une discrétisation par différences finies au 2ème ordre dans la direction radiale. Le choix de la grille est très important. Elle doit être suffisamment fine pour résoudre la couche de Stewartson, ainsi qu'une éventuelle couche limite au bord. Si le nombre de points NS de grille est suffisant, une simple grille régulière est utilisée. Dans le cas contraire, elle est construite comme suit :

- NS/4 points sont réservés à la couche de Stewartson,
- NS/12 points sont réservés à la couche limite externe.

La couche de Stewartson ayant une taille $\Delta = 5 \operatorname{E}^{1/4}$, nous en déduisons le pas à utiliser dans cette zone : $4\Delta/\text{NS}$. Ce même pas est utilisé dans la couche externe. Le raccord est fait par des polynômes de degré 3.

B.1.6 Géométrie sphérique

La géométrie sphérique est beaucoup utilisée dans ce travail, et nous donnons ici les principaux facteurs géométriques dans le cas d'une sphère.

Dans la sphère de rayon 1, on a $L^2 + r^2 = 1$ et donc

$$L = \sqrt{1 - r^2} \quad \text{et} \quad \frac{dL}{dr} = \frac{-r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

Le vecteur normal

$$\vec{n}|_{\pm L} = \alpha^{-2} \left(-\frac{dL}{dr} \vec{e}_r \pm \vec{e}_z \right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(1 + \left(\frac{dL}{dr} \right)^2 \right)^{1/4}$$

et pour la sphère

$$\alpha = \left(1 + \left(\frac{dL}{dr} \right)^2 \right)^{1/4} = (1 - r^2)^{-1/4}$$

qui entre aussi dans l'expression du pompage axisymétrique 2.12.

Le paramètre de pente β vaut quant à lui

$$\beta = \frac{1}{L} \frac{dL}{dr} = \frac{-r}{1 - r^2}$$

B.1.7 Grandeurs de sortie

Le code numérique produit le champ de vitesse. On peut à partir de celui-ci calculer divers grandeurs de sortie (énergie, dissipation, Re , ...) que nous définissons comme suit.

L'énergie cinétique E_u est calculée en intégrant u^2 sur tout le *volume* :

$$E_u(m) = \int_0^1 (u_r^2(s, m) + u_\phi^2(s, m)) 2L(s) 2\pi s ds = \int_0^1 E_u(m, s) ds \quad (B.2)$$

c'est donc une énergie *équatoriale* puisqu'on a négligé la contribution de u_z . Il faut noter aussi qu'il manque un facteur 1/2 pour que ce soit l'énergie cinétique habituellement définie.

Le nombre de Reynolds rms est défini à partir de l'énergie :

$$Re_{rms} = E^{-1} \sqrt{E_u(m \neq 0)}$$

Les dissipations sont discutées au §4.2.8 : La dissipation dans le volume du fluide D_ν est liée à l'enstrophie (énergie de la vorticité) :

$$D_\nu(m) = E \int_0^1 \omega^2(s, m) 2L(s) 2\pi s ds \quad (B.3)$$

où nous n'avons gardé que la vorticité axiale (projetée sur l'axe de rotation), car c'est effectivement elle seule qui dissipe de l'énergie dans notre modèle (eq. 2.15).

Pour la dissipation par frottement d'Ekman D_{Ek} liée au cisaillement dans la couche limite, une erreur s'est glissée dans le code numérique, et nous avons calculé

$$D_{Ek} = \sqrt{Ek} \int_S (L^{1/2} u_\phi^2 + L^{-3/2} u_s^2) r d\phi dr \quad (B.4)$$

dans laquelle il aurait fallu diviser par L l'expression intégrée, pour tenir compte de la pente...

Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse maximale non-zonale, sans tenir compte d'une échelle de longueur :

$$Re = \max(u) \cdot E^{-1} \quad (B.5)$$

Le nombre de Rossby local est mesuré directement par la vorticité locale.

L'échelle de Rhines est donnée par

$$k_{\text{Rhines}} = \sqrt{\frac{\beta}{2U_{\text{rms}}}} \quad (\text{B.6})$$

Nous avons choisi d'estimer β par sa valeur à la coupure, à savoir 0.4, et $U_{\text{rms}} = \sqrt{E_u}$

La taille de la couche de Stewartson Δ est mesurée à partir du saut de vitesse angulaire axisymétrique $\Omega(s) - \Omega_p(s)$, où Ω_p est la vitesse angulaire de la paroi.

$$\Delta = \frac{1}{\text{Ro}} \int_0^1 |\Omega(s) - \Omega_p(s)| \, ds \quad (\text{B.7})$$

La vitesse angulaire de phase c est mesurée en prenant la partie imaginaire du taux de croissance du mode dominant m_d , entre deux pas de temps dt_U . On divise la pulsation obtenue par m_d pour obtenir la vitesse de phase. Tout ceci est fait à un rayon donné en supposant que c varie peu avec le rayon. (on a choisi le rayon comme $s(\text{NS}/2)$, soit un peu à l'extérieur de la couche de Stewartson).

$$c = \frac{1}{m_d} \text{Im} \left(\frac{\Psi_{m_d}(t) - \Psi_{m_d}(t + dt_U)}{\Psi_{m_d}(t)} \right) \quad (\text{B.8})$$

B.2 Partie magnétique

Nous voulons résoudre l'équation 1.16 dans une sphère de rayon unité. On se place naturellement en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , et les vecteurs peuvent s'exprimer dans la base locale canonique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. Les fonctions propres de l'opérateur Laplacien sont les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$, et les fonctions de Bessels radiales. On décompose les champs scalaires sur les harmoniques sphériques :

$$S(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} S_m^l(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

La méthode de résolution de l'équation d'induction est donc la suivante :

- décomposition poloïdale/toroïdale,
- différences finies au 2ème ordre pour la direction radiale,
- décomposition en harmoniques sphérique pour les coquilles sphériques.

Pour le terme d'induction, nous repassons dans l'espace physique pour faire le calcul du produit vectoriel, puis nous retournons dans l'espace spectral (Harmoniques sphériques généralisées) pour calculer le rotationnel.

La grille radiale comportant NR points est régulière sauf aux bords, où le pas est raffiné exponentiellement pour améliorer la résolution d'éventuelles couches limites. La base d'harmoniques sphériques est tronquée à $l = l_{\max}$ et $m = m_{\max}^B$.

La grille correspondante dans l'espace physique est suréchantillonnée de manière à éviter les problèmes de repliement de spectre (aliasing). Ainsi en latitude (θ) nous prenons N_{lat} points de Gauss (voir ...) avec $N_{\text{lat}} = 2l_{\max} + 2$, et en longitude (ϕ) nous avons $N_{\text{FFT}}^B \geq 3m_{\max}^B$ points de collocation.

B.2.1 Décomposition poloïdal/toroïdal

Comme on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, il est avantageux d'écrire le champ magnétique comme

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla} \wedge (T \vec{r})}_{\vec{B}_T} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (P \vec{r})}_{\vec{B}_P} \quad (\text{B.9})$$

où P est le scalaire poloïdal, et T le scalaire toroïdal. $\vec{r}$ est le rayon en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Au lieu des 3 composantes du champ $\vec{B}$, nous n'avons plus que les deux composantes poloïdales et toroïdales.

On a explicitement

$$\vec{B}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \\ -\frac{\partial T}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \vec{B}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} L_2(P) \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

avec

$$S = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{P}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r P}{\partial r} \quad \text{et} \quad L_2(\cdot) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial \phi^2}$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} L_2 \nabla^2 &= \nabla^2 L_2 \\ T_{\text{rot } B} &= -\nabla^2 P_B & P_{\text{rot } B} &= T_B \\ T_{\Delta B} &= \nabla^2 T_B & P_{\Delta B} &= \nabla^2 T_B \end{aligned}$$

Équations scalaires

En projetant 1.16 sur $\vec{r}$, on obtient l'équation poloïdale :

$$\frac{\partial P_B^l}{\partial t} = \frac{1}{l(l+1)} \left[\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) \right]^l + \eta \nabla^2 P_B^l$$

et en prenant le rotationnel de 1.16 avant de projeter sur $\vec{r}$, on trouve

$$\frac{\partial T_B^l}{\partial t} = \frac{1}{l(l+1)} \left[\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) \right]^l + \eta \nabla^2 T_B^l$$

Le produit $\vec{u} \wedge \vec{B}$ est formé dans l'espace physique puis est projeté dans l'espace spectral sur les harmoniques sphériques généralisées.

B.2.2 Conditions limites

On se sert de l'expression B.10 pour relier les conditions sur $\vec{B}$ et $\vec{j}$ à des conditions sur P_B et T_B . Notons que pour $l = 0$, on a simplement $\vec{B} = 0$, de sorte qu'il n'existe pas de champ magnétique à $l = 0$ (monopole magnétique interdit par $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

Au centre ($r = 0$) : $\vec{B}$ et $\vec{j}$ doivent être finis, et donc

$$P_B = 0 \quad \text{et} \quad T_B = 0$$

À l'extérieur ($r > 1$) : on a isolant, et donc $\vec{j} = 0$ c'est-à-dire $T_B = 0$ et $\nabla^2 P_B = 0$. Grâce aux harmoniques sphériques, cette équation se réduit simplement à

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial r^2} - l(l+1) \right) P_B^l = 0$$

dont les solutions sont de la forme

$$P_B^l(r) = C_- r^l + C_+ r^{-(l+1)}$$

La solution devant tendre vers 0 à l'infini, on a donc $C_- = 0$ et on a

$$\frac{\partial P_B^l}{\partial r} = -\frac{l+1}{r} P_B^l \quad \text{pour } r > 1 \quad (\text{B.11})$$

Au bord ($r = 1$) : $\vec{j} \cdot \vec{e}_r$ est continu et donc $T_B = 0$ pour $r = 1$. On a aussi continuité de $\vec{B}$, et donc P_B et $\frac{\partial P_B}{\partial r}$ sont continus, ce qui permet d'étendre la relation [B.11](#) à $r = 1$. Pour résumer, on a

$$T_B = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_B^l}{\partial r} = -\frac{l+1}{r} P_B^l$$

On est donc capable de résoudre l'équation de l'induction dans la sphère seulement, le raccord à un champ potentiel à l'extérieur se faisant pour chaque harmonique sphérique séparément, et se traduit en une condition limite simple.

B.2.3 Grandeurs de sortie

Le code magnétique étant 3D, nous n'avons pas de problème particulier pour définir et calculer les diverses grandeurs de sortie.

L'énergie magnétique E_B est calculée dans l'espace physique par l'intégrale de B^2 sur toute la boule, et normalisé par le volume de la sphère :

$$E_B = \frac{3}{4\pi} \int_V B^2 dV \quad (\text{B.12})$$

La dissipation magnétique par effet Joule $D_J = \frac{1}{\sigma} J^2$, est calculée comme suit :

$$D_J = \frac{Ek}{Pm} \frac{3}{4\pi} \int_V J^2 dV \quad (\text{B.13})$$

B.3 Partie hybride

Le jeu consiste à assembler le code hydro et le code magnétique. Il va falloir passer continuellement du système de coordonnées cylindrique propre au champ de vitesse (s, ϕ, z) aux coordonnées sphériques propres au champ magnétique (r, θ, ϕ) , et vice-versa. Comme notre objectif est de calculer pour $Pm \ll 1$, on peut séparer les échelles spatiales (en choisissant correctement les paramètres des grilles) mais aussi les échelles temporelles, en calculant l'évolution du champ magnétique tous les `modB` pas de temps.

B.3.1 Note sur les transformées de Fourier

On a rabouté un code dynamo et un code hydro. La convention de signe pour la TF n'était pas la même.

Code hydro :

$$\psi(\phi) = \sum_m \psi_m e^{-im\phi} \implies \frac{\partial}{\partial \phi} = -im$$

Code magnétique :

$$\psi(\phi) = \sum_m \psi_m e^{im\phi} \implies \frac{\partial}{\partial \phi} = im$$

Comme les termes croisés sont toujours calculés dans l'espace réel, il n'y a pas de précaution particulière à prendre.

B.3.2 Extrapolation du champ de vitesse

Pour calculer le terme d'induction dans l'équation 1.16, nous avons besoin de connaître le champ de vitesse sur la grille 3D, dans l'espace physique. Pour cela, le champ de vitesse est calculé sur une grille intermédiaire, composée de la grille radiale 2D (NS points) mais avec seulement (N_{FFT}^B) points en azimuth. Ceci est obtenu en tronquant la série de Fourier à m_{max}^B avant de faire la transformée de Fourier inverse. Le champ de vitesse est alors simplement interpolé linéairement (selon le rayon cylindrique) pour évaluer sa valeur sur la grille 3D.

Cette opération est effectuée par la routine `Vit2Dto3D`.

B.3.3 Force de Laplace

Pour évaluer la contribution moyenne sur une colonne de fluide de la force de Laplace, on commence par la calculer sur la grille 3D spatiale. Seules les composantes suivant s et ϕ sont retenues, car elles seules interviennent dans la composante verticale (z) du rotationnel cylindrique.

Pour obtenir la moyenne verticale de ces deux composantes dans un temps raisonnable, on pré-calcule au début du programme et pour chaque point de la grille cylindrique, la liste des points de la grille sphérique nécessaires à l'interpolation, ainsi que les coefficients correspondants à l'opération de moyennage (routine `PrepInterp3Dto2D`). C'est la manière optimale de faire, puisque les opérations d'interpolation et de moyennage sont effectuées en une seule étape où les points sphériques ne sont lu qu'une seule fois pour chaque point cylindrique, et seulement si leur coefficient est non-nul. La direction azimutale échappe à cette opération coûteuse grâce à la correspondance exacte des points de collocation des deux grilles.

Ensuite, on effectue la transformée de Fourier de ces deux composantes moyennées (qui sont donc définies sur la grille cylindrique 2D) avant de calculer le rotationnel, qui peut directement être ajouté aux autres termes non-linéaires de l'équation pour la fonction scalaire ψ .

Cependant, le calcul du rotationnel nécessite des conditions aux limites, puisqu'il fait intervenir une dérivée radiale d'une quantité moyennée en z (voir C.1). Nous tenons compte de ceci en calculant également les termes de bords.

On procède de même pour la composante axisymétrique, qui ne pose pas de problème particulier.

Toutes ces opérations sont effectuées par la routine `Lorentz2D`.

Interpolation/moyennage 3D vers 2D

Pour préparer l'opération d'interpolation/moyennage afin qu'elle s'effectue le plus rapidement possible, on procède comme suit.

On crée une grille virtuelle en z qui prolonge la grille cylindrique 2D dans tout le volume de la sphère. Pour chaque point de cette grille cylindrique 3D (s, z) , on cherche alors les points $P(s, z)$ de la grille sphérique les plus proches, et on calcule le poids $w(P)$ de ces points pour une interpolation bilinéaire.

La deuxième étape consiste à calculer le poids $A(s, z)$ des points de la grille cylindrique dans une moyenne verticale. On crée alors pour chaque point de la grille cylindrique, la liste $P_i(s)$ de tous les points de la grille sphérique qui apparaissent dans le calcul de l'interpolation sur la ligne verticale correspondante, et on leur assigne un poids $W_i(s) = A(s, z) * w(P_i)$ correspondant à la moyenne verticale.

Ainsi, pour calculer la moyenne en z d'un champ 3D défini sur la grille sphérique, il suffira de lire pour chaque point de la grille cylindrique 2D la liste des points sphériques $P_i(s)$ correspondant et d'en faire la somme pondérée par leur poids respectif $W_i(s)$.

Tout ceci est effectué par la routine `PrepInterp3Dto2D`.

Force de Laplace aux petites échelles

Aux petites échelles (en régime diffusif), pour lesquelles nous ne calculons pas le champ magnétique, la force de Laplace peut s'exprimer simplement en fonction du champ magnétique grande échelle et de la vitesse locale (voir §6.1.2) par l'expression 6.2. Dans l'équation

de vorticité, on a besoin de la composante verticale du rotationnel de cette force moyennée suivant z c'est-à-dire

$$\left\langle \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_{\text{LSS}} \right) \cdot \vec{e}_z \right\rangle = \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} \langle B_{\phi,0}^2 \rangle \frac{1}{s} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} \quad (\text{B.14})$$

L'implémentation numérique de cette force est simple : comme on calcule la moyenne de la Force de Laplace à grande échelle, il suffit de calculer la moyenne de $B_{\phi,0}^2$, et de l'utiliser pour les échelles où ne calcule pas $\vec{B}$, c'est-à-dire pour $m > m_{\text{max}}^B$, où m_{max}^B est le nombre d'onde maximal pour lequel on calcule le champ magnétique (séparation d'échelle, voir §5.1.1).

  chaque pas de temps magnétique, `LorentzLSS` calcule le préfacteur

$$\text{LSS} = \frac{\text{Pm}}{\text{Ek}} \langle B_{\phi,0}^2 \rangle$$

qui pourra être utilisé par `Add_LorentzLSS` à chaque pas de temps cinétique pour ajouter la force de Laplace petite échelle (*Lorentz Small Scale*) aux autres termes non-linéaires avant de résoudre l'équation de vorticité.

Découverte tardive d'un bug à l'écriture de ces pages

Une erreur s'était glissée dans le programme et la Force de Laplace axisymétrique était fausse : il fallait la diviser par s pour pouvoir l'appliquer à l'écoulement axisymétrique qui est représenté numériquement avec U/s , et non U . Le programme est corrigé, mais pratiquement tous les calculs présentés ici ont ce défaut : la force de Laplace est sous-estimée au centre. Heureusement, les conséquences ne sont pas dramatiques, car il ne se passe pas grand chose au centre. Nous nous en sommes assuré en comparant des calculs avec la force de Laplace fausse et l'erreur corrigée (voir fig. 6.11).

Annexe C

Quelques calculs

C.1 Moyenne verticale

C.1.1 Définition

On définit la moyenne en z d'une fonction $u(r, z)$ sur la hauteur $L(r)$ par

$$\langle u(r, z) \rangle = \frac{1}{2L(r)} \int_{-L(r)}^{+L(r)} u(r, z) dz \quad (\text{C.1})$$

Pour moyenner l'équation de Navier-Stokes 2.15, on a besoin de calculer la moyenne de dérivées spatiales.

C.1.2 Dérivée en z

La moyenne en z et la dérivée en z ne commutent pas.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \right\rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} dz \\ &= \frac{1}{2L} [u(r, z)]_{-L}^{+L} \\ &= \frac{1}{2L} (u(r, +L) - u(r, -L)) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Il faut maintenant utiliser les conditions limites pour évaluer $u(r, z)$ à la frontière inférieure et supérieure. Dans l'équation de vorticité 2.15 ainsi que dans l'équation de conservation de la masse 1.3, $\partial_z u_z$ est la seule dérivée en z . La condition limite permet de la relier aux autres composantes de la vitesse, de sorte qu'on peut l'estimer à partir de grandeurs moyennes.

C.1.3 Dérivée en r

Comme L dépend de r , la dérivée radiale ne commute pas non-plus avec la moyenne en z . Si on introduit la variable $\zeta = z/L(r)$ telle que $dz = L(r) d\zeta$ à r constant, on a

$$\begin{aligned}\langle u(r, z) \rangle &= \frac{1}{2L(r)} \int_{-1}^{+1} u(r, z = L\zeta) L(r) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(r, z = L\zeta) d\zeta\end{aligned}\tag{C.3}$$

Et avec la nouvelle expression, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle u(r, z) \rangle}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(r, z = L\zeta) d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dr} \right) d\zeta \\ &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial u}{\partial z} z \frac{L'}{L} dz \\ &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle + \frac{L'}{L} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial u}{\partial z} z dz\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial u}{\partial z} z dz &= \frac{1}{2L} \left([u(r, z)z]_{-L}^{+L} - \int_{-L}^{+L} u(r, z) dz \right) \\ &= \frac{u(r, +L) + u(r, -L)}{2} - \langle u(r, z) \rangle\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{\partial \langle u(r, z) \rangle}{\partial r} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial r} \right\rangle + \frac{L'}{L} \left(\frac{u(r, +L) + u(r, -L)}{2} - \langle u(r, z) \rangle \right)\tag{C.4}$$

À nouveau, nous avons besoin des conditions aux limites. Si $u(r, \pm L) = \langle u(r, z) \rangle$ alors la dérivation radiale et la moyenne verticale commutent. Cependant, quand L'/L devient grand, une faible déviation à la bidimensionalité casse cette propriété, et l'équation moyennée n'est alors plus valide. C'est le cas par exemple dans une sphère, où L'/L n'est pas borné, et devient très grand près de l'équateur.

C.2 Pompage d'Ekman dans une sphère

Le pompage d'Ekman (voir Greenspan, 1968) est donné¹ par

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \big|_{\pm L} = -\frac{\text{Ek}^{1/2}}{2} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{u} \pm \vec{u}}{\sqrt{|\vec{n} \cdot \vec{e}_z|}} \right) \quad (\text{C.5})$$

avec $\vec{n}$ la normale aux parois dirigée vers *l'extérieur* (du fluide vers le solide).

Cet écoulement est la suite d'un développement en $\text{Ek}^{1/2}$, et est déduit de l'écoulement quasi-géostrophique (ordre 0). Il est important car il a une action dynamique sur l'écoulement géostrophique. De plus il produit de l'hélicité, et peut être un bon ingrédient pour l'action dynamo (Busse, 1975).

C.2.1 Système de coordonnées sphérique

Séparons l'expression C.5 en deux termes :

$$-\frac{1}{2} \text{Ek}^{1/2} \left(\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{u}}{\sqrt{|\vec{n} \cdot \vec{e}_z|}} \right)}_a \pm \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{|\vec{n} \cdot \vec{e}_z|}} \right)}_b \right)$$

On utilise maintenant le système de coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ pour développer cette expression, car c'est le système de coordonnées naturel pour la couche limite dans une sphère ($\vec{n} = \vec{e}_r$). Ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{2}{r} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta \quad (\text{C.7})$$

terme a :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{u}}{\sqrt{\pm \cos \theta}} \right) = \vec{\nabla} (\pm \cos \theta)^{-1/2} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}) + (\pm \cos \theta)^{-1/2} \vec{\nabla} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u})$$

Pour le premier terme, on a besoin de

$$\vec{\nabla} (\pm \cos \theta)^{-1/2} = \pm \frac{1}{2r} (\pm \cos \theta)^{-3/2} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

¹cette expression a en fait une longue histoire. Je remercie Chris Jones pour avoir vérifié mon calcul, corrigé une erreur, et mis tout le monde d'accord. Dans l'expression de Gubbins & Roberts (1987), le signe devant $\vec{n} \wedge \vec{u}$ est faux.

et ensuite

$$\vec{e}_\theta \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{u}) = u_\theta \vec{e}_r$$

Le second terme peut être développé

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}) &= \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{n} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}) &= -\frac{2}{r} u_r - \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{aligned}$$

et enfin on trouve

$$a = |\cos \theta|^{-1/2} \left(\pm \frac{|\tan \theta|}{2r} u_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r} u_r \right)$$

term b :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{\pm \cos \theta}} \right) = \pm \frac{1}{2r} (\pm \cos \theta)^{-3/2} \sin \theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{u} + (\pm \cos \theta)^{-1/2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$$

et

$$b = |\cos \theta|^{-1/2} \left(\pm \frac{|\tan \theta|}{2r} u_\phi + \omega_r \right)$$

Résultat : A la frontière on a $r = 1$, et donc

$$\vec{u} \cdot \vec{n} |_{\pm L} = \frac{Ek^{1/2}}{2 |\cos \theta|^{1/2}} \left(\frac{|\tan \theta|}{2} (\pm u_\theta - u_\phi) \pm \omega_r - 2u_r - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \quad (C.8)$$

C.2.2 Application à l'écoulement quasi-géostrophique

Si on utilise notre modèle quasi-géostrophique, il faut transformer C.8 en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) . On a

$$\begin{aligned} r \sin \theta &= s & r \cos \theta &= z \\ u_\theta &= u_s \cos \theta - u_z \sin \theta & u_r &= u_s \sin \theta + u_z \cos \theta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}$$

De plus, u_s and u_ϕ sont indépendant de z et u_z est une fonction linéaire de z :

$$u_z = z \frac{-s}{1-s^2} u_s(s, \phi) \quad (C.9)$$

Pour obtenir cette expression, on a utilisé la condition de non-pénétration $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ pour l'écoulement quasi-géostrophique d'ordre 0.

Il faut exprimer $\partial_r u_r$ dans le système de coordonnées (s, z) . On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta u_s + u_z \cos \theta) = \sin \theta \frac{\partial u_s}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial u_s}{\partial s} + \cos^2 \theta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u_z}{\partial s}\end{aligned}$$

En utilisant C.9, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial s} &= -z \left(\frac{s}{1-s^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1+s^2}{(1-s^2)^2} u_s \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= s^2 \frac{\partial u_s}{\partial s} + z^2 \frac{-s}{1-s^2} u_s + z s \frac{-z}{1-s^2} \left(s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_s \frac{1+s^2}{1-s^2} \right) \\ &= \frac{-2s}{1-s^2} u_s\end{aligned}$$

Il faut aussi développer ω_r :

$$\omega_r = \omega_z \cos \theta + \omega_s \sin \theta$$

où ω_s est donné par

$$\omega_s = \frac{1}{s} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} = \frac{-z}{1-s^2} \frac{\partial u_s}{\partial \phi}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\pm L} &= \frac{Ek^{1/2}}{2(1-s^2)^{1/4}} \left(\frac{-s}{2(1-s^2)^{1/2}} u_\phi - \frac{5}{2} \frac{s}{1-s^2} u_s \right. \\ &\quad \left. - (1-s^2)^{1/2} \left(\omega_z - \frac{s}{1-s^2} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} \right) \right)\end{aligned}\tag{C.10}$$

Cette expression peut être traitée comme la condition limite de non-glissement d'ordre 0 :

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\pm L} = s u_s \pm \sqrt{1-s^2} u_z$$

de laquelle on déduit u_z aux frontières supérieures et inférieures :

$$\pm u_z|_{\pm L} = (1-s^2)^{-1/2} \left(\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\pm L} - s u_s \right)$$

En supposant que u_z est une fonction linéaire en z , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{2L} (u_z|_{+L} - u_z|_{-L}) \\ &= \frac{1}{1-s^2} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}|_{+L} + \vec{u} \cdot \vec{n}|_{-L}}{2} - \frac{s}{1-s^2} u_s\end{aligned}\tag{C.11}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial z} = & \frac{\text{Ek}^{1/2}}{2(1-s^2)^{3/4}} \left(-\omega_z + \frac{s}{1-s^2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial \phi} - \frac{1}{2} u_\phi \right) - \frac{5s}{2(1-s^2)^{3/2}} u_s \right) \\ & + \underbrace{\frac{-s}{1-s^2}}_{\beta} u_s \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Il faut garder à l'esprit que tous ces résultats proviennent d'un développement à l'ordre $\text{Ek}^{1/2}$, qui n'est plus valable lorsqu'on se rapproche de l'équateur externe.

C.2.3 Validité

Dans l'expression C.12, on a à la fois l'ordre 0 et l'ordre 1. Le développement n'est plus valide lorsque ces deux termes sont du même ordre. Ainsi, avec $s = 1 - \varepsilon$, on a $1 - s^2 \sim 2\varepsilon$. En ne gardant que les termes dominants en $1/\varepsilon$, la limite de validité est donnée par

$$\frac{\text{Ek}^{1/2}}{2(2\varepsilon)^{3/4}} \frac{5}{2} \frac{1}{(2\varepsilon)^{3/2}} u_s \sim \frac{1}{2\varepsilon} u_s$$

d'où on tire

$$\varepsilon \sim \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \right)^{4/5} \text{Ek}^{2/5} \quad (\text{C.13})$$

qui montre la singularité en $\text{Ek}^{2/5}$ à l'équateur. L'extension angulaire est alors obtenue par des considérations géométriques

$$s = \cos \delta\theta \sim 1 - \delta\theta^2/2 \sim 1 - \varepsilon$$

et donc $\delta\theta = (2\varepsilon)^{1/2}$ ou encore

$$\delta\theta \sim \left(\frac{5}{4} \right)^{2/5} \text{Ek}^{1/5} \quad (\text{C.14})$$

C.3 A propos de vorticité potentielle

Dans le contexte géophysique, les gens utilisent souvent le concept de vorticité potentielle. Quand il n'y a pas de dissipation, la vorticité est une quantité conservée le long des lignes de courants. Dans un repère *galiléen* :

$$\omega_{\text{gal}} = \omega + 2\Omega$$

Comme suppose que l'écoulement ne dépend pas de z , on a

$$\omega_{\text{tot}}(r, \phi) = 2L(r)\omega(r, \phi) + 4L(r)\Omega$$

Et on peut définir une nouvelle quantité conservée en enlevant $4L_0\Omega$ puis en divisant par $2L_0$ de sorte que :

$$q(r, \phi) = \frac{L(r)}{L_0} \omega(r, \phi) + 2 \frac{L(r) - L_0}{L_0} \Omega$$

Quand $L(r) \sim L_0 + r \partial_r L(r)$, $\omega \ll \Omega$ et $r \partial_r L(r) \ll L_0$ on peut définir une quantité conservée approximativement (au premier ordre) :

$$q(r, \phi) \sim \omega(r, \phi) + 2r \underbrace{\frac{1}{L_0} \frac{\partial L}{\partial r}}_{\beta} \Omega$$

C'est l'approximation dite du plan β . Il faut garder à l'esprit que lorsque la pente varie fortement, comme c'est le cas pour une sphère, on ne peut pas écrire ce type d'approximation !

Si $\omega \ll \Omega$, on peut introduire une autre quantité

$$\lambda(r, \phi) = \omega(r, \phi) + 2\Omega \ln L(r)$$

qui est presque conservée :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \omega + 2\Omega u_r \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial r}$$

On a alors négligé le terme $\omega u_r \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial r}$ (voir eq. 2.15)

De plus, pour notre étude des couches de cisaillement, on a un réservoir de vorticit   toujours aliment   par le for  age, de sorte que la vorticit   potentielle n'est pas un concept pertinent.

C.4 Lignes de champ magn  tique

A partir de l'expression B.9, on peut   crire le champ magn  tique polo  dal axisym  trique (m  ridien) :

$$\vec{B}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

En posant

$$U = -r \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \tag{C.15}$$

on obtient

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial U}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \perp \vec{\nabla} U$$

Ainsi les iso-valeurs de U sont les lignes de champ poloïdales axisymétriques.

C.5 Force de Laplace en régime diffusif

[Braginsky \(1990\)](#) a montré qu'un champ magnétique uniforme imposé à un fluide conducteur agit sur le fluide comme une force de freinage anisotrope. Nous étendons cette idée à notre modèle, pour évaluer l'effet du champ magnétique de grande échelle sur la dynamique des petites échelles du champ de vitesse ($< L$).

Pour étudier l'influence des grandes échelles de champ magnétique sur les petites, les champs sont décomposés comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \langle \vec{u} \rangle = \overline{\vec{u}} + \vec{v} = \langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{v} \rangle \\ \vec{B} &= \langle \vec{B} \rangle + \vec{B}' = \overline{\vec{B}} + \vec{b} = \langle \vec{B} \rangle + \overline{\vec{B}'} + \langle \vec{b} \rangle + \vec{b}' \end{aligned}$$

avec $\langle . \rangle$ la moyenne en z et $\overline{.}$ un filtre passe bas (qui ne conserve que les grandes échelles spatiales). Le $'$ indique les écarts à la bidimensionalité, tandis que $\vec{v}$ et $\vec{b}$ sont les champs de petite échelle.

Afin de résoudre l'équation d'induction filtrée, nous devons estimer

$$\overline{\vec{u} \times \vec{B}} = \overline{\vec{u}} \times \overline{\vec{B}} + \overline{\vec{v} \times \vec{B}} + \overline{\vec{u} \times \vec{b}} + \overline{\vec{v} \times \vec{b}} \quad (C.16)$$

Il faut remarquer que $\overline{\vec{u} \cdot \vec{B}} \neq \overline{\vec{u}} \cdot \overline{\vec{B}}$ et $\overline{\vec{v} \cdot \vec{B}} \neq 0$ car $\overline{.}$ n'est pas une moyenne, mais un filtre. Cependant, si on suppose qu'il n'y a pas de corrélation de phase entre les grandes et les petites échelles, on peut négliger les produits croisés et les termes restants sont alors

$$\overline{\vec{u} \times \vec{B}} = \overline{\vec{u}} \times \overline{\vec{B}} + \overline{\vec{v} \times \vec{b}} \quad (C.17)$$

Le dernier terme $\overline{\vec{v} \times \vec{b}}$ nécessite de résoudre $\vec{b}$ à l'aide de l'équation d'induction

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \times \vec{B} - \overline{\vec{u} \times \vec{B}} \right) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (C.18)$$

Les termes dominants sont alors (pour $Rm \ll 1$)

$$\left(\overline{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}} \right) \vec{v} = -\eta \nabla^2 \vec{b} \quad (C.19)$$

et après une transformée de Fourier,

$$\vec{b} = \frac{i \vec{k} \cdot \vec{B}}{\eta k^2} \vec{v} \quad (\text{C.20})$$

La force de Laplace $\vec{J} \times \vec{B}$ s'écrit alors :

$$\vec{J} \times \vec{B} \simeq \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right) \times \vec{B} + \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{b} \right) \times \vec{B} \quad (\text{C.21})$$

et de C.20 on peut obtenir l'effet de la force de Laplace associée aux courants de petite échelle.

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{b} \right) \times \vec{B} = - \frac{\left(\vec{B} \cdot \vec{k} \right)^2}{\eta k^2} \vec{v} + \frac{\left(\vec{B} \cdot \vec{v} \right) \left(\vec{B} \cdot \vec{k} \right)}{\eta k^2} \vec{k} \quad (\text{C.22})$$

qui *ne dépend pas de l'échelle* ! Elle peut être vue comme une force de freinage magnétique anisotrope $-\gamma \vec{u}$ et une force de pression magnétique. La force de freinage est exactement celle obtenue par Braginsky (1990). Cette expression montre que

- si $\vec{B}$ est parallèle à $\vec{v}$ (ce qui implique que $\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{k}$) il n'y a pas de friction ;
- pour $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$, la pression magnétique est nulle ;
- et pour $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{k}$, la force de Laplace s'annule, même si $\vec{v}$ croise des lignes de champ.

Comme nous travaillons avec l'équation de vorticité, nous avons besoin du rotationnel de cette force, qui est simplement

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{b} = - \frac{\left(\vec{B} \cdot \vec{k} \right)^2}{\eta k^2} \vec{\omega} \quad (\text{C.23})$$

Bibliographie

- ASHCROFT, N. W. & MERMIN, N. D. 1976 *Solid State Physics*. Saunders College.
- AUBERT, J., BRITO, D., NATAF, H.-C., CARDIN, P. & MASSON, J.-P. 2001 A systematic experimental study of spherical shell convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Int.* **128**, 51–74.
- AUBERT, J., GILLET, N. & CARDIN, P. 2003 Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **4**(7), 1052 doi :10.1029/2002GC000456.
- BAROUD, C. N., PLAPP, B. B., SHE, Z.-S. & SWINNEY, H. L. 2002 Anomalous self-similarity in a turbulent rapidly rotating fluid. *Phys. Rev. Letters* **88**, 114501.
- BRAGINSKY, S. 1964 Self excitation of a magnetic field during the motion of a highly conducting fluid. *Soviet Phys. JETP* **20**, 726–735.
- BRAGINSKY, S. I. 1990 Local turbulence in the earth’s core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **55**, 71–87.
- BRITO, D., AURNOU, J. & CARDIN, P. 2004 Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core mantle dynamics. *Phys. Earth Planetary Interiors* **141**, 3–8.
- BUSSE, F. H. 1968 Shear flow instabilities in rotating systems. *J. Fluid Mech.* **33**, 577–589.
- BUSSE, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441–460.
- BUSSE, F. H. 1975 A model of geodynamo. *Geophys. J. Roy. Astron.* **42**, 437–459.
- CARDIN, P. & BRITO, D. 2004 *Survey of experimental dynamos*. in press Presse Universitaire de Grenoble.
- CARDIN, P., BRITO, D., JAULT, D., NATAF, H.-C. & MASSON, J.-P. 2002 Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics* **38**, 177–189.
- CARDIN, P. & OLSON, P. 1994 Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.* **82**, 235.

- CHRISTENSEN, U. 2002 Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **470**, 115–133.
- CHRISTENSEN, U., AUBERT, J., CARDIN, P., DORMY, E., GIBBONS, S., GLATZMAIER, G., GROTE, E., HONKURA, Y., JONES, C., KONO, M., MATSUSHIMA, M., SAKURABA, A., TAKAHASHI, F., TILGNER, A., WICHT, J. & ZHANG, K. 2001 A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planetary Interiors* **128**, 25–34.
- CHRISTENSEN, U., OLSON, P. & GLATZMAIER, G. 1999 Numerical modelling of the geodynamo : a systematic parameter study. *Geophys. J. Int.* **138**, 393.
- DANILOV, S. & GURARIE, D. 2004 Scaling, spectra and zonal jets in beta-plane turbulence. *Phys. Fluids* **16**, 2592–2603.
- DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth. Planet. Sc. Lett.* **160**, 15–30.
- DORMY, E., SOWARD, A., JONES, C., JAULT, D. & CARDIN, P. 2004 The onset of thermal convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **501**, 43–70.
- DORMY, E., VALET, J.-P. & COURTILLOT, V. 2000 Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *G-cubed* **1**, 62.
- DUDLEY, M. & JAMES, R. 1989 Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **425**, 407–429.
- FRISCH, U. 1995 *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- FRÜH, W.-G. & READ, P. L. 1999 Experiments on a barotropic rotating shear layer. part 1. instability and steady vortices. *J. Fluid Mech.* **383**, 143–173.
- GAILITIS, A., LIELAUSIS, O., PLATACIS, E., DEMENTÉV, S., CIFERSONS, A., GERBETH, G., GUNDRUM, T., STEFANI, F., CHRISTEN, M. & WILL, G. 2001 Magnetic field saturation in the riga dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024–3027.
- GALPERIN, B., SUKORIANSKY, S. & HUANG, H.-P. 2001 Universal n^{-5} spectrum of zonal flows on giant planets. *Phys. Fluids* **13**, 1545–1548.
- GILLET, N. 2004 Magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide : Approches numérique et expérimentale de la convection dans les noyaux planétaires. PhD thesis, Université Joseph Fourier.
- GLATZMAIER, G. & ROBERTS, P. 1995 A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* **377**, 203.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press.

- GUBBINS, D., BARBER, C. N., GIBBONS, S. & LOVE, J. J. 2000 Kinematic dynamo action in a sphere. i) effects of differential rotation and meridional circulation on solutions with axial dipole symmetry. *Proc. R. Soc. Lond. A* **456**, 1333–1353.
- GUBBINS, D. & ROBERTS, P. H. 1987 Geomagnetism. , vol. 2, pp. 1–303. Academic Press.
- HIDE, R. & TITMAN, C. W. 1967 Detached shear layers in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **29**, 39–60.
- HOLLERBACH, R. 2003 Instabilities of the Stewartson layer part 1. The dependence on the sign of Ro . *J. Fluid Mech.* **492**, 289–302.
- JONES, C. A., SOWARD, A. M. & MUSSA, A. I. 2000 The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.* **405**, 157–179.
- KAGEYAMA, A. & SATO, T. 1997 Generation mechanism of a dipole field by a magneto-hydrodynamic dynamo. *Phys. Rev. E* **55**, 4.
- KISS, A. E. 2003 A modified quasigeostrophic formulation for weakly nonlinear barotropic flow with large-amplitude depth variations. *Ocean Model.* **5**, 171–191.
- VAN DE KONIJNENBERG, J. A., NIELSEN, A. H., RASMUSSEN, J. J. & STENUM, B. 1999 Shear-flow instability in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **387**, 177–204.
- KONO, M. & ROBERTS, P. 2002 Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field. *Rev. Geophys.* **40**, 1013.
- KRAICHNAN, R. H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417–1423.
- KUANG, W. & BLOXHAM, J. 1997 A numerical dynamo model in an earth-like dynamical regime. *Nature* **389**, 371–374.
- KUO, H. L. 1949 Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteor.* **6**, 105–122.
- L. MARIÉ, J. BURGUETE, F. D. & LÉORAT, J. 2003 Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von kármán type flows. *Eur. Phys. J. B* **33**, 469–485.
- LESIEUR, M. 1990 *Turbulence in fluids*. Kluwer.
- MOORE, D. W. & SAFFMAN, P. G. 1969 The structure of free vertical shear layers in a rotating fluid and the motion produced by a slowly rising body. *Phil. T. R. Soc. Lond. A* **264**, 597–634.
- NATAF, H.-C. & SOMMERIA, J. 2000 Belin - CNRS Editions.

- NIINO, H. & MISAWA, N. 1984 An experimental and theoretical study of barotropic instability. *J. Atmos. Sci.* **41**, 1992–2011.
- NOIR, J., CARDIN, P., JAULT, D. & MASSON, J.-P. 2003 Experimental evidence of nonlinear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid. *Geophys. J. Int.* **154**, 407–416.
- OLSON, P., CHRISTENSEN, U. & GLATZMAIER, G. A. 1999 Numerical modeling of the geodynamo : Mechanisms of field generation and equilibration. *J. Geophys. Res.* **104**, 10383–10404.
- PARKER, E. 1955 Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.* **122**, 293.
- PEDLOSKY, J. 1987 *Geophysical fluid dynamics*, 2nd edn. Springer, New York.
- POIRIER, J.-P. 1994 Physical properties of the earth's core. *C. R. Acad. Sci. Paris* **318**, 341–350.
- PONTY, Y., PINTON, J.-F. & POLITANO, H. 2004 Simulation of induction at low magnetic prandtl number. *Phys. Rev. Letters* **92**, 144503.
- PROUDMAN, I. 1956 The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid Mech.* **1**, 505–516.
- RHINES, P. B. 1975 Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.* **69**, 417–443.
- RIEUTORD, M. 1997 *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson.
- ROBERT, R. & SOMMERIA, J. 1991 Statistical equilibrium states for 2-dimensional flows. *J. Fluid Mech.* **229**, 291–310.
- ROBERTS, P. H. 1968 On the thermal instability of a self-gravitating fluid sphere containing heat sources. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **263**, 93–117.
- ROBERTS, P. H. 1972 Kinematic dynamo models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **272**, 663–698.
- ROBERTS, P. H. & STEWARTSON, K. 1963 On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophys. J.* **137**, 777–790.
- SARSON, G. R. & BUSSE, F. H. 1998 The kinematic dynamo action of spiralling convective flows. *Geophys. J. Int.* **133**, 140–158.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005a Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic prandtl number. *submitted to Earth Planet. Sci. Lett.* ?, ?
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005b Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer. *Phys. Fluids* ?, ?

- SOMMERIA, J., MEYERS, S. D. & SWINNEY, H. L. 1988 Laboratory simulation of Jupiter's Great Red Spot. *Nature* **361**, 689.
- SOURIAU, A., GARCIA, R. & POUPINET, G. 2003 The seismological picture of the inner core : structure and rotation. *Comptes rendus Géosciences* **335** (1), 51–63.
- SOWARD, A. M. 1977 On the finite amplitude thermal instability of a rapidly rotating fluid sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **9**, 19–74.
- STEWARTSON, K. 1957 On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.* **3**, 17–26.
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. part 2. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.
- STIEGLITZ, R. & MÜLLER, U. 2001 Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids* **13**, 561–564.
- TILGNER, A. 2002 Numerical simulation of the onset of dynamo action in an experimental two-scale dynamo. *Phys. fluids* **14**, 4092–4094.
- W. DOBLER, P. F. & STEPANOV, R. 2003 Screw dynamo in a time-dependent pipe flow. *Phys. Rev. E* **67**, 056309.
- YANO, J.-I. 1992 Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **243**, 103–131.
- YANO, J.-I., TALAGRAND, O. & DROSSART, P. 2003 Outer planets : Origins of atmospheric zonal winds. *Nature* **421**, 36.
- ZAVALA SANSON, L. & VAN HEIJST, G. J. F. 2002 Ekman effects in a rotating flow over bottom topography. *J. Fluid Mech.* **471**, 239–255.