

Contribution à l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles

Dina Razafindralandy

▶ **To cite this version:**

Dina Razafindralandy. Contribution à l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Rochelle, 2005. Français. NNT : . tel-00009762

HAL Id: tel-00009762

https://theses.hal.science/tel-00009762

Submitted on 15 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de La Rochelle

Spécialité :
Mécanique

Présentée par

Dina Miarinjaka RAZAFINDRALANDY

———————— ∼ ————————

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE LA SIMULATION DES GRANDES ECHELLES

———————— ∼ ————————

Sous la direction de
Aziz HAMDOUNI

Soutenue publiquement le 29 Avril 2005 devant le jury composé de :

F.	**ALLARD**	Professeur à l'Université de La Rochelle	Président
J-P.	**BRANCHER**	Professeur à l'INPL	Rapporteur
P.	**SAGAUT**	Professeur à l'Université Paris VI	Rapporteur
A.	**HAMDOUNI**	Professeur à l'Université de La Rochelle	Examinateur
E.	**LAMBALLAIS**	Professeur à l'Université de Poitiers	Invité
P.	**LE QUÉRÉ**	Directeur de Recherche CNRS au LIMSI	Examinateur
M.	**POTIER-FERRY**	Professeur à l'Université de Metz	Examinateur
M.	**SOULI**	Professeur à l'Université de Lille 1	Invité

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de La Rochelle

Spécialité :
Mécanique

Présentée par

Dina Miarinjaka RAZAFINDRALANDY

———————— ∼ ————————

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE LA SIMULATION DES GRANDES ECHELLES

———————— ∼ ————————

Sous la direction de
Aziz HAMDOUNI

Soutenue publiquement le 29 Avril 2005 devant le jury composé de :

F.	**ALLARD**	Professeur à l'Université de La Rochelle	Président
J-P.	**BRANCHER**	Professeur à l'INPL	Rapporteur
P.	**SAGAUT**	Professeur à l'Université Paris VI	Rapporteur
A.	**HAMDOUNI**	Professeur à l'Université de La Rochelle	Examinateur
E.	**LAMBALLAIS**	Professeur à l'Université de Poitiers	Invité
P.	**LE QUÉRÉ**	Directeur de Recherche CNRS au LIMSI	Examinateur
M.	**POTIER-FERRY**	Professeur à l'Université de Metz	Examinateur
M.	**SOULI**	Professeur à l'Université de Lille 1	Invité

A mes parents ...

Remerciements

Mes premiers mots vont à mon Directeur de thèse, Aziz Hamdouni, pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet, sujet qui m'a permis de réaliser mon envie de toujours qui est de rallier les mathématiques à la modélisation et la simulation dans le domaine de la mécanique. Je lui suis également reconnaissant pour son encadrement et toutes les connaissances qu'il m'a transmises.

J'exprime ma gratitude envers Francis Allard pour son accueil chaleureux au sein du Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment et d'avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur J-P. Brancher et Monsieur P. Sagaut d'avoir accepté d'être mes rapporteurs malgré les tâches que cela incombe. Je remercie de même Messieurs E. Lambalais, P. Le Quéré, M. Potier-Ferry et M. Souli d'avoir accepté de me faire l'honneur d'être dans mon jury de thèse.

J'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce travail : Claudine et Cyrille pour les aides précieuses qu'ils m'ont apportées, de nouveau M. Potier-Ferry et J-M. Cadou pour leur accueil au LPMM de l'Université de Metz, J-P. Ramis pour ses conseils sur la méthode de resommation et G. Ünal pour les échanges forts sympathiques qu'on a eus. Mille mercis également à tous les membres du LEPTAB pour l'ambiance qui m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie de tout cœur les amis avec qui j'ai vécu des moments de bonheur pendant la durée de ma thèse, en particulier ceux avec qui j'ai partagé des journées d'aventure et celles qui m'ont tenu compagnie au laboratoire durant les nuits froides d'hiver.

Je n'oublie pas ma famille, en France et à Madagascar, qui m'a soutenu coûte que coûte et sur tous les plans pendant ces très longues années d'étude.

Et enfin, mes parents sans qui rien de tout cela ne serait arrivé ...

Table des matières

Nomenclature **7**

Introduction **13**

Partie I : Sur l'invariance des modèles de sous-maille par les groupes de symétrie **19**

1 Analyse de la LES et symétries **21**

1.1 Principe mathématique de la LES 21

1.1.1 Équations de base 21

1.1.2 Filtrage des équations 23

1.1.3 Analyse du filtrage 25

1.1.4 Quelques modèles usuels 35

1.2 Le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes 50

1.2.1 Groupes de symétrie 50

1.2.2 Cas des équations de Navier-Stokes 54

1.2.3 Autres symétries des équations de Navier-Stokes 61

1.3 Analyse des modèles de sous-maille par rapport aux symétries 66

1.3.1 L'invariance par les translations 68

1.3.2 L'invariance par rotation et réflection 69

1.3.3 L'invariance par changements d'échelle 70

1.3.4 L'indifférence matérielle 72

1.3.5 Conséquences sur le filtre test 77

1.4 La LES pour la convection thermique 81

1.4.1 Filtrage des équations 82
1.4.2 Quelques modèles usuels 83
1.4.3 Le groupe de symétrie des équations de la convection thermique 87
1.4.4 Analyse des modèles par rapport aux symétries 94
1.5 Revue des travaux d'autres auteurs sur les symétries 99
1.5.1 Sur le théorème de Nœther 99
1.5.2 Oberlack et les lois d'échelle 100
1.5.3 Gandarias *et al.* et le modèle $\kappa - \varepsilon$ 102
1.5.4 Réduction et solutions exactes des équations de Navier-Stokes 105
1.5.5 Ünal et le spectre de Kolmogorov 106
1.5.6 Ünal et le modèle de Speziale 107

2 Construction de modèles respectant les groupes de symétrie 111
2.1 Sur la procédure dynamique 112
2.2 Construction d'une classe de modèles invariants 113
2.2.1 Invariance par les translations, les rotations et la reflection . . 114
2.2.2 L'invariance par les changements d'échelle 115
2.3 Conséquences du second principe de la thermodynamique 118
2.3.1 Préliminaire 118
2.3.2 Vérification du second principe 122
2.3.3 Stabilité du modèle 126
2.3.4 Quelques remarques sur les modèles 128
2.4 Test numérique 130
2.4.1 Modèles utilisés 130
2.4.2 Le schéma numérique 131
2.4.3 Géométrie et résultats 134
2.4.4 Conclusion 138
2.5 Classe de modèles invariants pour la convection thermique 141
2.5.1 Construction d'une classe de modèles invariants 141

2.5.2 Respect du second principe de la thermodynamique 144

2.5.3 Exemples simples de modèles pour la convection thermique . . 149

Partie II : Mise en œuvre d'une technique de perturbation numérique pour la LES 157

3 Méthode Asymptotique Numérique et LES 159

3.1 La MAN associée à une technique d'homotopie pour la LES 159

3.1.1 Discrétisation spatiale 160

3.1.2 Algorithme de résolution 163

3.1.3 Rayon de convergence et continuation 167

3.2 Tests numériques 168

3.2.1 La configuration de l'écoulement 168

3.2.2 Les paramètres de simulation 169

3.3 Résultats et discussion 170

3.4 Conclusion 172

4 Développement en série temporelle et resommation de Borel-Laplace 177

4.1 Etude du développement en série temporelle 178

4.1.1 Algorithme pour les équations de Navier-Stokes 178

4.1.2 Estimation du rayon de convergence de la série temporelle . . 179

4.1.3 Cas de l'équation de la chaleur 182

4.2 Méthode de resommation de Borel-Laplace 183

4.2.1 Illustration de la méthode 184

4.2.2 Cadre théorique 187

4.2.3 Cadre calculatoire 191

4.2.4 Retour à l'équation (4.7) 194

4.3 Application à un modèle réduit des équations de Navier-Stokes filtrées 198

4.3.1 Description sommaire de la POD 198

4.3.2 Application aux équations de Navier-Stokes 200

4.3.3 Cavité entraînée 200
4.3.4 Application à l'étude de la dispersion de particules dans une cavité ventilée 202
4.4 Conclusion 204

Conclusion générale et perspectives **209**

Annexes **213**

A Les groupes de symétries **213**
A.1 Groupe de transformations à un paramètre 213
A.1.1 Définitions 213
A.1.2 Générateur infinitésimal 215
A.1.3 Condition et groupe de symétrie 217
A.2 Prolongation 218
A.2.1 Formule de prolongation 218
A.2.2 Condition de symétrie 220
A.3 Approche variationnelle des prolongations 222
A.4 Extension aux équations aux dérivées partielles 225

B Extension du théorème de Nœther aux équations de Navier-Stokes **229**
B.1 Le théorème de Nœther 229
B.1.1 Equations d'Euler-Lagrange 230
B.1.2 Action d'un groupe de transformations sur le lagrangien . . . 232
B.1.3 Théorème de Nœther 234
B.2 Démarche d'extension 236
B.2.1 Bilagrangien et équation adjointe 236
B.2.2 Application du théorème de Nœther 237
B.3 Application à quelques équations 238
B.3.1 Equation linéaire de la chaleur 238
B.3.2 Equation de Burgers 239

B.4 Cas des équations de Navier-Stokes 241

Bibliographie **245**

Nomenclature

$\cdot$	Produit scalaire vectoriel : $V \cdot W = \sum_{i=1}^{n} V_i W_i = V^T\ W = \ \mathrm{tr}(V\, W^T)$
:	Produit scalaire matriciel, $M : P = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} P_{ij} = \ \mathrm{tr}(M^T P)$
$< \bullet >$	Moyenne d'ensemble
∇	Opérateur gradient
∇^2	Opérateur laplacien
$\otimes$	Produit tensoriel
$\times$	Produit vectoriel
$\lvert \bullet \rvert$	Norme modifiée d'une matrice, $\lvert M \rvert^2 = 2 \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} M_{ij} = 2 \lVert M \rVert^2$
$\lVert \bullet \rVert$	Norme euclidienne d'une matrice ($\lVert M \rVert = \sqrt{M : M}$) ou d'un vecteur ($\lVert V \rVert = \sqrt{V^T V}$)
$\mathbf{1}_E$	Fonction caractéristique d'un ensemble E
!	Factoriel d'un entier naturel, $i! = i(i-1)(i-2)\ldots 2.1$

β	Coefficient d'expansion thermique
δ	Taille du maillage
$\overline{\delta}$	Longueur de coupure
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinétique

ε_c	Flux ou taux de transfert d'énergie cinétique à travers la coupure
ε_p	Taux de production d'énergie cinétique
ϵ	Un petit paramètre
Γ	Bord du domaine, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$
Γ_σ	Partie du bord du domaine correspondant à une contrainte de Cauchy nulle
Γ_u	Partie du bord du domaine correspondant à une vitesse imposée
Γ_{ad}	Partie du bord du domaine correspondant à une paroi adiabatique
Γ_{is}	Partie du bord du domaine correspondant à une paroi isotherme
κ	Diffusivité thermique
κ_{sm}	Diffusivité thermique de sous-maille
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$
ν_{sm}	Viscosité de sous-maille
Ω	Domaine spatial de l'écoulement
Π	Flux de sous-maille, $\Pi = \overline{Tu} - \overline{\theta}\overline{u}$
θ	Température
$\overline{\theta}$	Température filtrée
ρ	Masse volumique
σ	Tenseur des contraintes de Cauchy : $\sigma = -pI + 2\mu S$
τ	Tenseur des contraintes de sous-maille, $\tau = \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u}$

Adj	Opérateur adjugué, $M(\mathrm{Adj}\, M) = (\det M) I_d$
$B(x, r)$	Boule de centre x et de rayon r

C^q	Classe des fonctions q fois continûment dérivables, $q \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}^*$	L'ensemble des nombres complexes, privé de 0, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$
$\mathbb{C}[[z]]$	Ensemble des séries entières en z et à coefficients dans $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}[[z]] = \left\{\breve{s} = \sum_{k\geq 0} s_k z^k,\ s_k \in \mathbb{C}\right\}$
$\mathbb{C}\{z\}$	Ensemble des séries entières convergentes à coefficients dans $\mathbb{C}$
$\bullet^{\,d}$	Déviateur d'un endomorphisme, $M^d = M - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} M)\mathbb{I}$
$\mathrm{D}^\alpha f$	$= \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
$diag$	Matrice diagonale, $diag(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$
div	Opérateur divergence
DNS	Direct Numerical Simulation ou simulation numérique direct
e_i	Vecteur unitaire dirigeant le $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées
e_g	Le vecteur unitaire vertical ascendant
g	Accélération de la pesanteur
I_d	Opérateur ou matrice identité
L^m	Espace de Lebesgue, $L^m(E) = \left\{f : E \to \mathbb{R}^n, \int_E f^m(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right\}$, $1 \leq m < \infty$
LES	Large-Eddy Simulation ou simulation des grandes échelles
MAN	Méthode Asymptotique Numérique
$\mathbf{n}$	La normale extérieure à Γ
n	Dimension de l'espace physique
p	Champ de pression

$\overline{p}$	Pression filtrée
p'	Pression de sous-maille, $p' = p - \overline{p}$
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes ou Navier-Stokes moyenné
Re	Nombre de Reynolds
rot	Opérateur rotationnel
S	Tenseur de déformation : $S = (\nabla u + \nabla u^T)/2$
$\overline{S}$	Tenseur de déformation filtré : $\overline{S} = (\nabla \overline{u} + \nabla \overline{u}^T)/2$
$\bullet^T$	Transposée (d'une matrice ou d'un vecteur)
t	Temps
$\mathbb{T}$	Gradient de la température, $\mathbb{T} = \nabla T$
$\overline{\mathbb{T}}$	Gradient de la température filtrée, $\overline{\mathbb{T}} = \nabla \overline{\theta}$
tr	Trace d'une matrice, $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$
u	Champ de vitesse, $u = (u_1, \ldots, u_d)^T$
$\overline{u}$	Vitesse filtrée
u'	Vitesse de sous-maille, $u' = u - \overline{u}$
U_{ref}	Vitesse de référence
W	Tenseur de vorticité, $W = (\nabla u - \nabla u^T)/2$
$\overline{W}$	Tenseur de vorticité filtré, $\overline{W} = (\nabla \overline{u} - \nabla \overline{u}^T)/2$
x	Vecteur position, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$

Introduction

Très souvent, dans l'étude du confort dans les espaces habitables (ventilation, transfert de polluants, ...), la simulation numérique directe (DNS) reste encore un outil inapplicable. Ceci est dû au fait que les calculateurs actuels ne possèdent pas la capacité de stockage et la rapidité suffisantes pour représenter toutes les échelles contenues dans un écoulement turbulent, lorsque le domaine possède des dimensions réalistes (chambre, bâtiment, ...). Pour contourner ce problème, une solution est de ne calculer que l'écoulement moyen, en appliquant un moyennage statistique sur les équations de Navier-Stokes (RANS). Cette méthode réduit considérablement le coût de calcul mais empêche l'observation de l'évolution temporelle de l'écoulement. La technique de simulation des grandes échelles (LES) constitue alors un bon compromis entre la DNS et la RANS. Sans passer par un moyennage, la LES consiste à ne représenter que les grandes échelles ou grosses structures de l'écoulement, sachant que, dans la pratique, ces grandes échelles contiennent toutes les informations nécessaires. Les petites échelles ne sont quant à elles prises en compte dans les équations qu'à travers un modèle représentant leur interaction avec les grandes échelles.

A l'heure actuelle, il existe un grand nombre de modèles qui se basent sur des hypothèses diverses et qui ont des fondements mathématiques et physiques plus ou moins bien élaborés (voir [122, 123] pour une bonne synthèse). Par ailleurs, beaucoup parmi ces modèles détruisent les propriétés d'invariance des équations de Navier-Stokes par rapport à certaines transformations. En effet, les équations de Navier-Stokes possèdent des transformations (sur la variable temporelle, la variable spatiale, la vitesse, ...), appelées symétries, qui transforment une solution en une autre. Un exemple de telles transformations est la transformation galiléenne sur laquelle se base toutes les lois de la mécanique classique, mais les équations de Navier-Stokes admettent d'autres symétries. L'introduction du modèle, pour beaucoup d'entre eux, fait alors que les équations finales ne sont plus invariantes par les symétries des équations de départ. C'est par exemple le cas de l'un des modèles les plus courants qui est le modèle de Smagorinsky. La perte de ces symétries peut être très dommageable pour un modèle car, comme on le verra ci-après, chacune d'elles a une grande importance pour la représentation de l'écoulement.

On sait, grâce aux théorèmes de Nœther ([99, 100]), qu'à chaque symétrie laissant le lagrangien invariant[1] correspond une grandeur conservée au cours du temps. Mais l'intérêt des symétries ne se limite pas aux lois de conservation. Elles permettent aussi de réduire l'ordre d'une équation différentielle, voire de trouver une solution analytique ([62]). En outre, dans le domaine de la mécanique des fluides, elles ont permis à Oberlack de déduire des lois d'échelle ([102]). Ünal s'en est également servi pour retrouver le spectre de Kolmogorov ([143]) et le modèle de Speziale ([144, 134]). On verra dans ce document d'autres travaux qui montrent l'intérêt des symétries. Il est donc important que le modèle utilisé (RANS ou LES) respecte les symétries des équations de départ pour espérer que la solution obtenue possède les mêmes propriétés que la solution réelle.

Plusieurs auteurs ([132],[133],[148],[149], [46], ...) ont déjà analysé quelques modèles de turbulence courants et ont essayé de donner des pistes pour construire des modèles mathématiquement consistants du point de vue de l'indifférence matérielle dans la limite de la dimension 2 et de la transformation galiléenne, ces deux transformations étant des symétries des équations de Navier-Stokes. Mais comme ils n'ont pas utilisé la théorie de Lie (voir [105]) qui donne la liste exhaustive des symétries des équations, ils n'ont pas considéré les autres symétries qui ont aussi une importance capitale.

Le but de la première partie de cette thèse est alors, dans un premier temps, de faire une analyse plus systématique de quelques catégories de modèles existants dans la littérature sous l'angle de la symétrie, puis, dans un deuxième temps, de construire des modèles conservant les symétries des équations de Navier-Stokes. Parmi ces nouveaux modèles, on extraira ensuite ceux qui vérifient le second principe de la thermodynamique. Le respect de ce principe est essentiel non seulement pour des raisons physiques (dissipation positive, ...) mais aussi, et on le montrera, parce qu'il assure la stabilité du modèle. On effectuera un test pour évaluer l'efficacité numérique des modèles construits. L'analyse, ainsi que la construction de modèles, seront étendues au cas des équations de la convection thermique.

La deuxième et dernière partie de la thèse sera consacrée à la faisabilité de l'intégration de la LES dans des algorithmes de la famille des méthodes asymptotiques numériques (MAN). La MAN est une méthode de résolution numérique de problèmes non linéaires par une technique de perturbation (voir [10]). Elle consiste donc à chercher une solution sous forme d'un développement en série formelle par rapport à un paramètre de contrôle. En procédant ainsi, le problème initial se transforme en une cascade de problèmes linéaires ayant le même opérateur tangent et

[1] Les équations de Navier-Stokes ne dérivent pas directement d'un lagrangien. Par contre, on montre dans l'annexe B qu'on peut étendre la notion de lagrangien pour pouvoir appliquer le théorème de Nœther aux équations de Navier-Stokes.

dont seul le second membre varie. On obtient alors une partie de la courbe solution correspondant au domaine de validité de la série, au prix d'une seule inversion de matrice. Grâce à une technique de continuation ([26]), on arrive à reconstituer toute la courbe solution.

A l'origine, la MAN a été développée pour l'étude de problèmes non linéaires en mécanique de structure ([31, 33, 38, 17, 35, 16, 19],...). Sa capacité à suivre les branches solutions lui a permis d'être utilisée avec efficacité pour la détection des bifurcations en mécanique du solide. Son champ d'application a été récemment étendu à la mécanique des fluides où elle a été utilisée avec succès pour étudier les bifurcations stationnaires ([140]) et les bifurcations de Hopf ([22, 23]). Elle a aussi permis d'étudier l'effet Coanda qui est un phénomène important dans le domaine du bâtiment (réduction de bruit, dispersion de particule, ...) ([1, 4, 3]). L'étude dans le cas instationnaire est actuellement limité aux nombres de Reynolds modérés à cause des limites informatiques. Le premier objectif de cette deuxième partie de la thèse est alors d'intégrer la LES dans un algorithme basé sur la MAN, de manière à atteindre des valeurs élevées du nombre de Reynolds, cette étape étant indispensable pour étudier les bifurcations instationnaires. Ceci sera fait en utilisant un algorithme proposé par Braikat ([17, 19]) qui utilise une technique d'homotopie. Le paramètre de contrôle de la série est alors le paramètre de chemin.

Comme on le verra plus tard, dans certains cas, l'implémentation de la LES dans la MAN avec l'aide d'une homotopie est très efficace. Dans le meilleur des cas, une seule inversion de matrice est requise pour calculer la solution jusqu'à un temps très grand. Ceci a cependant une limite liée au fait que la technique d'homotopie nécessite que le rayon de convergence de la série par rapport au paramètre de chemin soit supérieur à l'unité. Pour franchir cette limite, on propose d'éviter la technique d'homotopie et d'effectuer un développement en série directement par rapport au temps.

Le dernier objectif de la thèse est d'explorer les potentialités de l'utilisation d'un développement en série temporelle. On montrera alors qu'un tel développement conduit à un algorithme plus simple, le paramètre de contrôle étant le temps mais plus un paramètre externe comme précédemment. Toutefois, grâce à une étude théorique, on mettra en évidence que le rayon de convergence de la série décroît lorsque la taille du problème discrétisé augmente et peut même devenir nul pour un problème continu. Cependant, cela n'est pas forcément un handicap pour la méthode. En effet, il est possible de calculer une approximation asymptotique de la série, même lorsque celle-ci est divergente au voisinage de l'origine. Pour cela, on utilise la méthode de resommation de Borel-Laplace.

Comme son nom l'indique, la méthode de resommation de Borel-Laplace se base sur la transformation de Borel et son inverse qui est la transformation de Laplace. A l'heure actuelle, elle est surtout utilisée pour calculer une solution d'un problème théorique lorsqu'on connaît une solution formelle sous forme de série divergente. Notre but est alors d'étudier les possibilités d'exploitation de cette méthode pour résoudre les équations de Navier-Stokes discrétisées. Néanmoins, comme les études numériques sur le sujet manquent encore, on n'appliquera pas la méthode sur les équations de Navier-Stokes complètes mais sur des modèles réduits issus de celles-ci. On s'arrêtera donc dans ce cadre exploratoire dans cette thèse.

Ce document sera scindé en deux grandes parties qui reflètent les deux parties de la thèse. La première correspond à l'étude de la LES par rapport aux symétries et sera composée de deux chapitres. Dans le chapitre 1, on rappellera le principe de base de la LES. On fera alors une étude sur le filtrage qui sert à séparer les grandes et les petites échelles de l'écoulement. Après avoir présenté brièvement la théorie des groupes de symétrie, on effectuera ensuite l'analyse de quelques modèles de sous-maille courants par rapport au groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. Cela sera suivi de l'extension aux cas des équations de la convection thermique. On terminera ce chapitre par une revue des applications des symétries à l'étude des écoulements turbulents. Dans le chapitre 2, on construira une classe de modèles invariants par rapport au groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes et qui respectent le second principe de la thermodynamique. On testera ensuite numériquement un des modèles les plus simples de la classe sur un écoulement qui nous intéresse pour des applications dans l'étude du bâtiment. On construira également des modèles de sous-maille invariants et vérifiant le second principe de la thermodynamique pour la convection thermique.

La deuxième partie du document concerne l'intégration de la LES dans la MAN et regroupera les chapitres 3 et 4. Dans le chapitre 3, on présentera alors un algorithme qui combine la MAN et la LES et qui est basé sur la technique d'homotopie. On effectuera ensuite des tests pour étudier l'efficacité numérique. A la fin, on discutera des avantages et limites de l'algorithme. Dans le chapitre 4, on présentera un algorithme de résolution basé sur un développement en série temporelle. On fera alors une étude sur le rayon de convergence de la série. Puis, on présentera la méthode de resommation de Borel-Laplace, accompagnée de quelques exemples. On l'appliquera ensuite à la résolution d'un modèle réduit des équations de Navier-Stokes.

PARTIE I

SUR L'INVARIANCE DES MODÈLES DE SOUS-MAILLE PAR LES GROUPES DE SYMÉTRIE

Chapitre 1

Analyse de la LES et symétries

Le but principal de ce premier chapitre est d'analyser différents modèles de LES dans la littérature par rapport aux symétries. Cependant, avant d'entamer cette analyse, on va faire quelques études mathématiques préalables sur le filtrage qui est le point de départ de la LES. Nous nous intéresserons particulièrement à l'erreur qui apparaît lorsqu'on commute le filtrage avec les opérateurs de dérivation. Le chapitre sera alors structuré comme suit. Dans la première section, on rappellera le fondement mathématique de la LES. On analysera alors le filtrage et l'erreur de commutation. Dans la deuxième section, on calculera les symétries des équations de Navier-Stokes après avoir fait un rappel de la théorie de Lie sur les groupes de symétrie. Ensuite, dans la section 3, on fera l'analyse des modèles par rapport aux symétries. Puis, dans la section 4, on étendra cette analyse au cas de la convection thermique. Nous terminerons ce chapitre par un aperçu des travaux de quelques auteurs qui montrent l'importance des symétries lors de la modélisation de la turbulence.

1.1 Principe mathématique de la LES

1.1.1 Équations de base

On considère un fluide visqueux newtonien, incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ, s'écoulant dans un domaine régulier Ω, de frontière Γ. Les forces de volume sont supposées négligeables. Ce fluide est alors régi par les équations de Navier-Stokes suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \dfrac{1}{\rho} \nabla p - 2\nu \operatorname{div} S = 0 \\ \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où u est le champ de vitesse, p le champ de pression, S le tenseur des taux de déformation

$$S = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

et $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique. Notons σ le tenseur des contraintes de Cauchy, défini par

$$\sigma = -pI_d + 2\mu S$$

où I_d est le tenseur identité. On suppose que la solution (u, p) possède une régularité suffisante.

Les conditions aux limites associées à (1.1) peuvent être très variées. Pour simplifier l'étude de la permutation, on se place dans le cadre des conditions aux limites naturelles adaptées à une formulation faible. On impose alors une vitesse γ_u sur une partie Γ_u de la frontière et une contrainte normale nulle sur la partie restante Γ_σ :

$$\begin{cases} u(t,x) = \gamma_u(t,x) & \text{sur } \Gamma_u \\ \\ \sigma\,\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\sigma, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$, $\mathbf{n}$ étant la normale extérieure au bord (voir figure Fig. 1.1). La première relation de (1.2) représente soit un non-glissement (ou adhérence à une paroi solide) soit une vitesse imposée (par exemple une condition d'entrée) et la seconde est une condition de sortie.

Enfin, soit

$$u(0,x) = \gamma(x) \qquad \text{sur } \Omega,$$

la condition initiale.

Pour appliquer la LES à ces équations, introduisons la notion de filtrage.

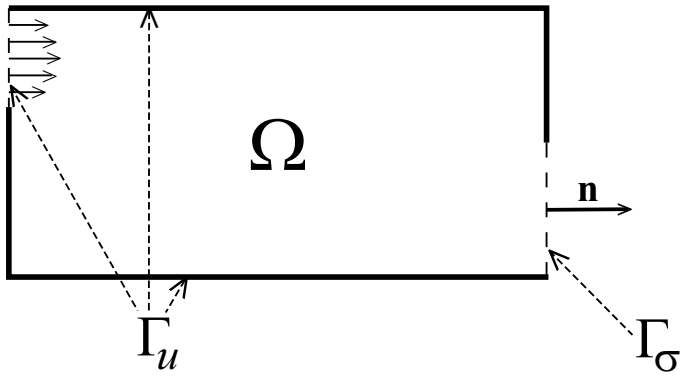


FIG. 1.1 – *Exemple de domaine en dimension 2 et conditions au bord*

1.1.2 Filtrage des équations

La LES se base sur la séparation des grandes et petites échelles. Mathématiquement, cela se traduit par l'application d'un filtre passe-bas à la vitesse et à la pression. Notons $G_{\overline{\delta}}$ le noyau du filtre où $\overline{\delta}$ est sa longueur de coupure. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on définit alors respectivement les champs de vitesse et de pression filtrés $\overline{u}$ et $\overline{p}$ par[1]

$$\begin{aligned} \overline{u}(t,x) &= (G_{\overline{\delta}} * u)(t,x) = \int_\Omega G_{\overline{\delta}}(x-\xi)\ u(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi, \\ \overline{p}(t,x) &= (G_{\overline{\delta}} * p)(t,x) = \int_\Omega G_{\overline{\delta}}(x-\xi)\ p(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{1.3}$$

en s'accordant que u et p appartiennent par exemple à un espace $L^m(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq m < \infty$, et $G_{\overline{\delta}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\overline{u}$ et $\overline{p}$ représentent les grandes échelles ou échelles résolues de l'écoulement, c'est-à-dire les échelles dont la taille est plus grande que $\overline{\delta}$, tandis que les petites échelles ou échelles de sous-mailles sont représentées par les quantités

$$\begin{aligned} u' &= u - \overline{u}, \\ p' &= p - \overline{p}. \end{aligned}$$

Comme la taille du maillage δ ne doit pas être plus grande que la taille de la plus petite échelle résolue, on prend $\overline{\delta} = \delta$ dans la pratique.

[1] On utilisera par abus de langage les mêmes définitions lorsque Ω est un domaine borné.

Si on commute les opérateurs de dérivation et le filtrage en négligeant l'erreur éventuelle engendrée, on obtient à partir de (1.1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla \overline{p} - 2\nu \operatorname{div}\overline{S} + \operatorname{div}\tau = 0 \\ \\ \operatorname{div}\overline{u} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

où

$$\tau = \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u}.$$

Le tenseur τ est le tenseur des contraintes de sous-maille[2]. Physiquement, il représente l'interaction entre les échelles résolues et les petites échelles qui sont absentes. Pour fermer les équations, ce tenseur doit être modélisé.

Le nouveau tenseur de Cauchy dans (1.4) est

$$\overline{\sigma}^* = \overline{\sigma} - \rho\tau.$$

Conditions au bord

Généralement, on déduit les nouvelles conditions au bord en adaptant celles des équations d'origine. Il en est de même pour la condition initiale. Ce qui donne :

$$\overline{u} = \gamma_u \quad \text{sur } \Gamma_u, \tag{1.5a}$$

$$\overline{\sigma}^* \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \tag{1.5b}$$

$$\overline{u}(0, x) = \gamma(x) \quad \text{sur } \Omega. \tag{1.5c}$$

Signalons que le maillage devrait être très fin proche des parois pour que les fortes interactions entre les échelles dans la couche limite soient bien représentées, ce qui engendrerait un coût de calcul élevé. Pour éviter cela, on utilise la plupart du temps une loi de paroi à la place des conditions au bord (On trouve les plus courantes dans [110]). Un autre moyen est de combiner avec la méthode RANS proche de la paroi (voir par exemple [51, 125]).

Par ailleurs, le choix de la condition d'entrée et de la condition initiale à imposer aux équations filtrées sont susceptibles de poser des difficultés lorsque l'écoulement

[2]Ceci est un abus de langage car c'est le tenseur $\rho\tau$ qui est généralement appelé tenseur des contraintes de sous-maille.

est turbulent ([84, 125]). Ici, on suppose que les conditions (1.5a-1.5c) restent acceptables.

Mathématiquement, la LES consiste donc

- à séparer les échelles résolues et les échelles de sous-maille via le filtrage,
- à modéliser les effets des petites échelles sur les grandes à travers τ,
- et à ne calculer que la partie résolue $(\overline{u}, \overline{p})$ à partir des équations filtrées (1.4) et des conditions aux limites (1.5).

Généralement, $(\overline{u}, \overline{p})$ est alors pris directement comme approximation de la solution (u, p) de (1.1). Cette dernière considération pose tout de suite la question de la convergence de $(\overline{u}, \overline{p})$ vers (u, p). De plus, pour établir les équations (1.4), on a supposé que le filtre commute avec les opérateurs de dérivation. Ceci n'est pas toujours le cas dans un domaine borné. Tout ceci nous amène à étudier les propriétés du filtrage.

1.1.3 Analyse du filtrage

Pour qu'on puisse prendre les quantités filtrées $(\overline{u}, \overline{p})$ comme approximation de (u, p), la première condition à exiger du filtre est que pour tout φ appartenant à un certain espace de fonctions E :

$$\lim_{\overline{\delta} \to 0} \| G_{\overline{\delta}} * \varphi - \varphi \|_E = \lim_{\overline{\delta} \to 0} \| \overline{\varphi} - \varphi \|_E = 0. \tag{1.6}$$

Puis, généralement on demande, quitte à faire une normalisation, que

$$\overline{a} = a \tag{1.7}$$

si a est une constante. Cela implique que :

$$\int_\Omega G_{\overline{\delta}}(x) \, \mathrm{d}x = 1. \tag{1.8}$$

On verra dans le paragraphe qui suit deux exemples de filtres.

a) Exemples de filtres

Pour les études théoriques, le filtre le plus utilisé est le filtre gaussien. Son noyau s'écrit :

$$G_{\overline{\delta}}(x) = \left(\frac{\gamma}{\pi\overline{\delta}^2}\right)^{d/2} \exp\left(\frac{-\gamma\|x\|_2^2}{\overline{\delta}^2}\right)$$

où γ est une constante, généralement prise égale à 6. Son allure est représentée sur la figure FIG. 1.2.

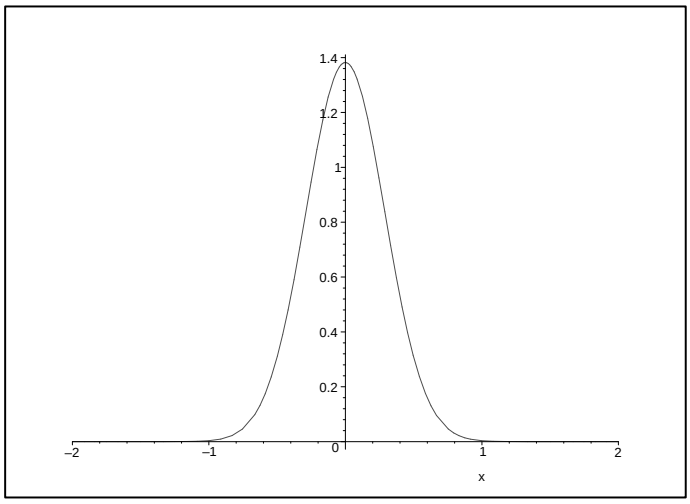


FIG. 1.2 – *L'allure du noyau du filtre gaussien en dimension 1, lorsque* $\overline{\delta} = 1$.

Pour ce filtre on montre ([72]) que si $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$\|\overline{\varphi} - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0, \qquad \overline{\delta} \to 0.$$

Un autre filtre qu'on utilisera aussi dans la suite pour sa compatibilité avec les symétries des équations de Navier-Stokes (voir la section 1.3.5) est le filtre porte. Ce filtre a pour noyau la fonction

$$x \longmapsto P_{\overline{\delta}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathcal{A}_{\overline{\delta}}} & \text{si } x \in B_{\overline{\delta}} \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $B_{\overline{\delta}} = B^n\left(0, \dfrac{\overline{\delta}}{2}\right)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre O (l'origine du repère) et de rayon

$\frac{\overline{\delta}}{2}$. $\mathcal{A}_{\overline{\delta}}$ est le volume de $B_{\overline{\delta}}$. L'allure de $P_{\overline{\delta}}$ en dimension 1 est représentée sur la figure FIG. 1.3.

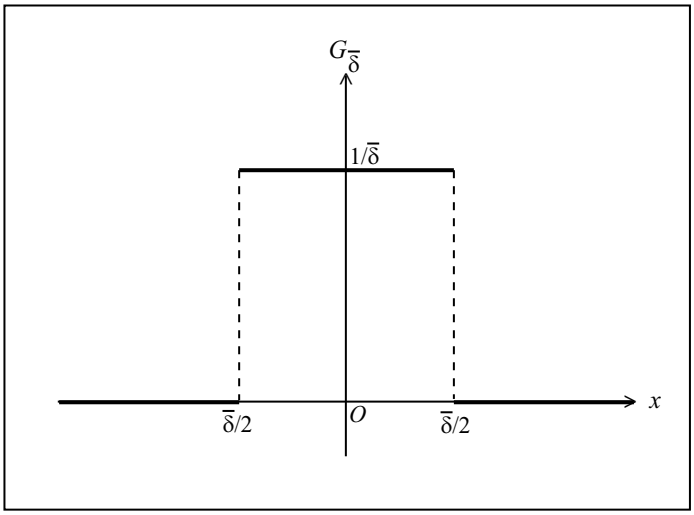


FIG. 1.3 – *Filtre porte en dimension 1*

Le filtre porte vérifie la condition (1.8). On a les deux résultats de convergence suivant :

Proposition 1.1. *Soit φ une fonction continue appartenant à un espace $L^m(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq m < \infty$ et $P_{\overline{\delta}}$ le noyau du filtre porte.*

Alors

$$P_{\overline{\delta}} * \varphi \xrightarrow[\overline{\delta}\to 0]{} \varphi$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

PREUVE

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\epsilon > 0$. Il nous faut montrer qu'il existe un réel $\overline{\delta}_0$ tel que

$$|P_{\overline{\delta}} * \varphi(x) - \varphi(x)| < \epsilon$$

pour tout $\overline{\delta} < \overline{\delta}_0$ et tout x dans K.

Nous avons, pour tout $\overline{\delta} > 0$ et tout $x \in K$:

$$\begin{aligned} P_{\overline{\delta}} * \varphi(x) - \varphi(x) &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \varphi(x-\xi)\ \mathrm{d}\xi\right] - \varphi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \Big[\varphi(x-\xi) - \varphi(x)\Big]\ \mathrm{d}\xi \qquad \text{car } \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \mathrm{d}\xi = 1 \\ &= \int_{B_n\left(0,\overline{\delta}/2\right)} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \Big[\varphi(x-\xi) - \varphi(x)\Big]\ \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Or, comme φ est continue et K est compact, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\big|\varphi(x-\xi) - \varphi(x)\big| < \epsilon \qquad \forall \xi \in B(0,\eta) \ \text{ et } \ \forall x \in K.$$

Soit alors $\overline{\delta}_0 = 2\eta$. On a, pour tout $\overline{\delta} < \overline{\delta}_0$ et tout x dans K :

$$\big|P_{\overline{\delta}} * \varphi(x) - \varphi(x)\big| < \epsilon \int_{B_n\left(0,\overline{\delta}/2\right)} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \epsilon.$$

■

Théorème 1.2. *Soit $\varphi \in L^m(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq m < \infty$. Alors $P_{\overline{\delta}} * \varphi \to \varphi$ dans $L^m(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve
Il suffit d'adapter la preuve du théorème IV.22 de [21]. On utilise alors la densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $L^m(\mathbb{R}^n)$ et la proposition 1.1. ■

Le filtre porte vérifie également les trois propriétés suivantes qu'on utilisera plus tard :

Lemme 1.3. *Si x désigne la variable spatiale alors il existe une matrice constante $\mathbb{A}$ telle que*

$$P_{\overline{\delta}} * (x \otimes x) = (x \otimes x) + \overline{\delta}^2 \mathbb{A}. \tag{1.9}$$

De plus, si u est une fonction continue appartenant à un espace $L^m(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq m < \infty$, alors

$$P_{\overline{\delta}} * (u \otimes x) \xrightarrow[\overline{\delta}\to 0]{} (P_{\overline{\delta}} * u) \otimes x \tag{1.10}$$

uniformément sur tout compact. La vitesse de convergence est en $O(\overline{\delta})$

PREUVE
Démontrons (1.9). On a

$$\begin{aligned} P_{\overline{\delta}}(x \otimes x) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ (x-\xi) \otimes (x-\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= (x \otimes x) - x \otimes \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \xi\ \mathrm{d}\xi \right) - \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \xi\ \mathrm{d}\xi \right) \otimes x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ (\xi \otimes \xi)\ \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Ensuite, on peut montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ \xi\ \mathrm{d}\xi = 0.$$

Cette égalité est vérifié par tout filtre dont le noyau présente une symétrie par rapport à l'origine.

Pour la dernière intégrale, on écrit ξ sous la forme $\xi = re_r$ où e_r est le vecteur unitaire :

$$e_r = \frac{\xi}{\|\xi\|} = (\sin\Phi\cos\Theta)e_1 + (\sin\Phi\sin\Theta)e_2 + \cos\Phi e_3$$

et (r, Θ, Φ) sont les coordonnées sphériques si la dimension est 3, avec $r = \|\xi\|$. Par un calcul direct, on montre alors que si $\mathbb{A}$ désigne la matrice constante suivante

$$\mathbb{A} = \frac{3}{80\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (e_r \otimes e_r) \sin\Phi\ \mathrm{d}\Phi\ \mathrm{d}\Theta,$$

alors on obtient bien (1.9).

La démonstration est analogue si la dimension n'est pas 3.

Prouvons maintenant (1.10).

Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $x \in K$, on a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{\delta}} * (u \otimes x) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ u(x-\xi) \otimes (x-\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ u(x-\xi) \otimes x\ \mathrm{d}\xi - \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ u(x-\xi) \otimes \xi\ \mathrm{d}\xi \\ &= (P_{\overline{\delta}} * u) \otimes x - I(\overline{\delta}, x) \end{aligned}$$

où

$$I(\overline{\delta}, x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_{\overline{\delta}}(\xi)\ u(x-\xi) \otimes \xi\ \mathrm{d}\xi = \frac{1}{A_{\overline{\delta}}} \int_{B_{\overline{\delta}}} u(x-\xi) \otimes \xi\ \mathrm{d}\xi.$$

Supposons qu'on est en dimension 1. Pour tout $\xi \in B_{\overline{\delta}}$, $x - \xi$ appartient à un compact fixe dès que $\overline{\delta}$ est assez petit. La continuité de u entraîne alors l'existence d'un réel $\mathbf{U}$ tel que :

$$|u(x-\xi)| \leq \mathbf{U}.$$

D'où

$$|I(\overline{\delta}, x)| = \frac{1}{\overline{\delta}} \left| \int_{-\overline{\delta}/2}^{\overline{\delta}/2} u(x-\xi)\ \xi\ \mathrm{d}\xi \right| \leq \frac{\mathbf{U}}{\overline{\delta}} \int_{-\overline{\delta}/2}^{\overline{\delta}/2} |\xi|\ \mathrm{d}\xi = \frac{\overline{\delta}\mathbf{U}}{4}.$$

Cela conduit bien à (1.10).

Le résultat s'étend aisément en dimension $n > 1$. ■

Toutefois, dans la plupart des cas, on n'effectue pas explicitement un filtrage pour résoudre (1.4). Dans ce cas, on dit que le filtrage est implicite et on passe directement à la discrétisation. Néanmoins, en procédant ainsi, on ne s'écarte pas de l'idée générale de filtrage, comme le montre le paragraphe suivant.

b) Le filtrage implicite

L'idée du filtrage implicite est de prendre comme filtrage la discrétisation. La question est alors de savoir si la discrétisation peut réellement être considérée comme un filtrage classique.

Prenons la discrétisation par différences finies en dimension 1. Si on note $\dfrac{\Delta}{\Delta x}$ la dérivation par différences finies et x^i l'abscisse du $i^{\text{ème}}$ nœud alors

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}(x^i) = \frac{u^{i+1/2} - u^{i-1/2}}{\delta} = \int_{x^i-\delta/2}^{x^i+\delta/2} \frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}x.$$

δ étant la taille du maillage. D'où

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}(x^i) = G_\delta * \frac{\partial u}{\partial x}$$

où G_δ est la fonction

$$G_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta} & \text{si } |x| < \dfrac{\delta}{2} \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La discrétisation par différences finies peut bien être considéré comme un filtrage dont le noyau est G_δ.

Voyons maintenant le cas d'une discrétisation par éléments finis en dimension 1. Supposons que chaque élément est un élément P1 : trois nœuds de discrétisation et des fonctions d'interpolation polynomiales de degré 1, comme représenté sur la figure Fig. 1.4.

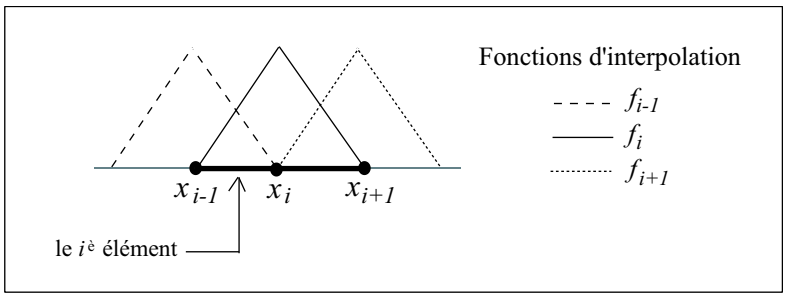


Fig. 1.4 – *Un élément P1*

Avec une telle discrétisation, la solution approchée u^h est à prendre dans un espace V_h, de base $(f_i)_{i=1,\dots,N}$. Remarquons que les f_i peuvent se déduire de la fonction chapeau f_0 par translation :

$$f_i(x) = f_0(x - ih).$$

u^h appartient à V_h et peut donc s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{i=0}^{N} u_i f_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{N} u(ih) f_0(x - ih) \end{aligned}$$

car $u_i = u(ih)$. Cela montre bien que u^h n'est que le résultat de l'application d'un filtrage discret, de noyau f_0, à u. L'utilisation de la discrétisation par éléments finis comme un filtrage implicite est bien justifiée.

Des auteurs ont mené des études sur le filtrage explicite. Certains ont conclut que cela n'améliore pas forcément le résultat ([57, 83]). D'autres ont constaté une amélioration, mais ont aussi déduit que, comparé à un raffinage du maillage, le surcoût du filtrage explicite n'est pas justifié ([150, 58, 82]). De plus, la discrétisation est de toute façon à faire.

Dans nos applications numériques, on considèrera que le filtrage est implicite.

c) <u>Etude de l'erreur de commutation.</u>

Pour déduire les équations filtrées (1.4), on a négligé l'erreur de commutation entre le filtrage et les opérateurs de dérivation. En fait, si le domaine Ω est l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, le filtrage commute avec les opérateurs de dérivation, sans engendrer une erreur :

$$\partial \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)\, \varphi(t, x - \xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)\, \partial\varphi(t, x - \xi)\, \mathrm{d}\xi$$

sous de bonnes conditions sur φ si ∂ représente un opérateur de dérivation $\partial = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ou $\dfrac{\partial}{\partial t}$. La situation est différente lorsque Ω est borné, sauf pour la dérivation par rapport à t, le filtrage ne concernant pas le temps.

Si on note $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et $\mathbf{1}_\Omega$ la fonction caractéristique de Ω, on a (au sens des distributions) :

$$\begin{aligned}\partial_i[G*\varphi](x) &= \partial_i \int_\Omega G(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \partial_i \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathbf{1}_\Omega(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \partial_i \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)\,\varphi(x-\xi)\,\mathbf{1}_\Omega(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

Maintenant qu'on s'est ramené à une intégration sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, on peut intervertir ∂_i avec le signe somme et on a :

$$\begin{aligned}\partial_i[G*\varphi](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)\ \ \partial_i\Big[\varphi(x-\xi)\,\mathbf{1}_\Omega(x-\xi)\Big]\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)\ \ \partial_i\varphi(x-\xi)\ \ \mathbf{1}_\Omega(x-\xi)\ \ \mathrm{d}\xi + \int_\Gamma G(s)\,\varphi(x-s)\,\mathbf{n}_i(x-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_\Omega G(x-\xi)\,\partial_i\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_\Gamma G(s)\,\varphi(x-s)\,\mathbf{n}_i(x-s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

où $\mathbf{n}$ est, rappelons-le, la normale extérieure au bord Γ. Ainsi,

$$\overline{\partial_i\varphi} = \partial_i\overline{\varphi} - \int_\Gamma G(x-s)\,\varphi(s)\,\mathbf{n}_i(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.11}$$

Lorsqu'on applique cela aux équations (1.1) on obtient :

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{u\otimes u}) + \frac{1}{\rho}\,\nabla\overline{p} - 2\nu\operatorname{div}\overline{S} =$$

$$\int_\Gamma G(x-s)\ [u\otimes u](s)\ \mathbf{n}(s)\,\mathrm{d}s - \int_\Gamma G(x-s)\ \sigma(s)\ \mathbf{n}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dans cette relation, le terme de droite est l'erreur de commutation. On voit bien que c'est la présence du bord qui l'engendre. Si G décroît assez vite en s'éloignant de 0, ce qui est généralement le cas, cette erreur est petite loin du bord, tandis que proche du bord, elle se décompose en la différence de deux termes :

– le premier

$$\int_\Gamma G(x-s)[u\otimes u](s)\mathbf{n}(s)\,\mathrm{d}s = \overline{[u\otimes u]\,\mathbf{n}}$$

vaut

$$\overline{[\gamma_u\otimes\gamma_u]\,\mathbf{n}}$$

sur la partie Γ_u du bord, et s'annule sur cette partie si $\gamma_u = 0$ (condition de non-glissement),

– le second

$$\int_\Gamma G(x-s)\sigma(s)\mathbf{n}(s)\,\mathrm{d}s = \overline{\sigma\mathbf{n}}$$

s'annule sur l'autre partie Γ_σ.

Quant à l'équation de continuité, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{div}\overline{u} = \int_\Gamma G(x-s)\ u(s)\,.\,\mathbf{n}(s)\,\mathrm{d}s.$$

L'erreur de commutation est donc $\overline{u\,.\,\mathbf{n}}$. Elle s'annule le long des parois solides ou si on impose une vitesse parallèle à la paroi.

L'erreur de commutation est inévitable. Par contre, des résultats permettent de la négliger. Par exemple, lorsque le filtre est gaussien, on montre ([72]) que, pour tout $\varphi \in L^2(\Gamma)$, il existe une constante C telle que

$$\left\| \int_\Gamma G_{\overline{\delta}}(x-s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\overline{\delta}^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Quelques auteurs ([145, 89]) ont aussi construit des filtres dont l'erreur de commutation est arbitrairement petit (en $O(\overline{\delta}^k)$, k quelconque), mais leur utilisation implique un filtrage explicite.

D'autres analyses d'erreur ont été faites dans la littérature ; par exemple dans [46] pour le cas compressible et [36] pour un calcul dans l'espace L^2.

Après cette étude du filtrage, on va présenter quelques modèles usuels de la littérature. On rappellera brièvement la manière dont ils ont été établis. On pourra

trouver une synthèse plus riche des modèles existants dans les ouvrages de Sagaut dont [122] et [123].

1.1.4 Quelques modèles usuels

Les modèles qu'on rencontrera seront classés en quatre catégories :

- La première sera composée des modèles se basant sur la notion de viscosité de sous-maille.
- La seconde contiendra les modèles de type gradient.
- La troisième rassemblera les modèles de similarité d'échelle et
- la quatrième les modèles du même type que celui de Lund.

On va présenter chacune de ces catégorie.

a) Modèles de viscosité de sous-maille

Les modèles de viscosité de sous-maille partent de l'hypothèse que l'interaction entre les échelles de sous-maille et les échelles résolues se manifeste essentiellement sous forme d'un échange d'énergie. Par ailleurs, un transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles de sous-maille (qui sont absentes de la simulation) peut être vu comme une perte d'énergie, donc comme une dissipation supplémentaire, et le mécanisme inverse comme un gain d'énergie ou une dissipation négative.

A partir de ces considérations, on modélise l'interaction entre les échelles par l'ajout d'une viscosité artificielle (positive ou négative) ν_{sm} à la viscosité réelle ν. Cela donne à τ, ou plus précisément à son déviateur

$$\tau^d = \tau - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\tau) I_d$$

(en dimension 3), l'expression suivante :

$$\tau^d = -2\nu_{sm}\overline{S} \tag{1.12}$$

de telle sorte que les équations finales (1.4) s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{u}\otimes\overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla\overline{P} - 2\operatorname{div}(\nu+\nu_{sm})\overline{S} = 0 \\ \\ \operatorname{div}\overline{u} = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Le déviateur de τ a été introduit de manière à avoir l'égalité des traces dans (1.12). La partie $\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\tau)I_d$ a ensuite été associée à $\overline{p}$ dans (1.13), ce qui a donné la pression modifiée $\overline{P}$:

$$\overline{P} = \overline{p} + \frac{1}{3}\,\rho(\operatorname{tr}\tau)I_d.$$

On notera encore $\overline{p}$ cette pression modifiée. Ce qui reste à évaluer est donc la viscosité artificielle ν_{sm} appelée viscosité de sous-maille.

Dans les exemples de modèles qui suivront, ν_{sm} est une fonction des variables résolues, de ses dérivées spatiales et de $\overline{\delta}$.

Modèle de Smagorinsky

Puisque ν_{sm} représente l'échange d'énergie entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille, il est naturel de considérer que $\nu_{sm} = \nu_{sm}(\overline{\delta}, \varepsilon_c)$ où ε_c est le taux de transfert d'énergie cinétique à travers la coupure. Une analyse dimensionnelle conduit alors à :

$$< \nu_{sm} >= C_1 < \varepsilon_c >^{1/3} \overline{\delta}^{4/3} \tag{1.14}$$

où $C_1 = \dfrac{A}{K_0\pi^{4/3}}$, $A \simeq 0,438$ et K_0 la constante de Kolmogorov. Le symbole $< . >$ désigne une moyenne d'ensemble, qui peut être perçue comme une moyenne spatiale. D'autre part, en se plaçant dans le cas homogène isotrope, on montre que le taux de dissipation ε est telle que

$$< \varepsilon >= C_2\overline{\delta}^2 < 2\ \operatorname{tr}\overline{S}^2 >^{3/2}.$$

où $C_2 = \dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{3K_0}{2}\right)^{-3/2}$.

Grâce à l'hypothèse d'équilibre local, qui permet d'écrire que

$$< \varepsilon >=< \varepsilon_c >,$$

on déduit que

$$< \nu_{sm} >= (C_s\overline{\delta})^2 < 2\ \operatorname{tr}\overline{S}^2 >^{1/2} = (C_s\overline{\delta})^2 < |\overline{S}|^2 >^{1/2} \tag{1.15}$$

où $C_s = \sqrt{C_1 C_2^{1/3}} \simeq 0,148$.

Le modèle de Smagorinsky s'obtient en localisant la relation (1.15) et propose donc que

$$\nu_{sm} = (C_s \overline{\delta})^2 |\overline{S}|.$$

C_s est appelée la constante de Smagorinsky.

Ce modèle est le modèle le plus facile à mettre en œuvre et le plus populaire à cause de sa simplicité. Cependant, la localisation va à l'encontre de la relation de départ (1.14) qui n'est vraie qu'en moyenne. De plus, les simulations numériques et les expériences montrent que la constante C_s doit être ajustée selon la configuration pour maintenir l'équilibre local (qui n'est donc plus vérifié).

Modèle dynamique

Pour une meilleur adaptation à la structure locale, Germano *et al.* ([52]) puis Lilly ([79]) proposent une procédure pour évaluer la constante C_s du modèle de Smagorinsky d'une manière dynamique. La procédure peut d'ailleurs s'appliquer à tout autre modèle où il y a une constante C_d à évaluer, mais dans ce paragraphe, on se limitera au modèle de Smagorinsky. On opère alors comme suit.

Si on effectue un second filtrage, symbolisé par « $\widetilde{.}$ » et associé à la longueur de coupure $\widetilde{\overline{\delta}} > \overline{\delta}$, sur les équations de Navier-Stokes, on se retrouve avec le terme

$$L = \widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}}$$

à modéliser. Ce terme peut s'écrire sous la forme

$$L = \mathcal{T} - \widetilde{\tau}$$

où

$$\mathcal{T} = \widetilde{u \otimes u} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}} \qquad \text{et} \qquad \tau = \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u}.$$

$\mathcal{T}$ étant identique à τ mais avec deux niveaux de filtrage, on suppose qu'il se modélise de la même façon que ce dernier, c'est-à-dire

$$\tau^d = -2 C_d \overline{\delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}$$

$$\mathcal{T}^d = -2C_d\widetilde{\overline{\delta}^2}\,|\widetilde{\overline{S}}|\widetilde{\overline{S}}.$$

En supposant que $\widetilde{\tau^d} = -2C_d(\widetilde{\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S}})$, on obtient l'approximation suivante de L :

$$L^d \simeq -2C_d M \tag{1.16}$$

où

$$M = \widetilde{\overline{\delta}^2}\,|\widetilde{\overline{S}}|\widetilde{\overline{S}} - \widetilde{\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S}}.$$

En minimisant par moindres carrés l'erreur commise en approximant L^d par (1.16), on obtient la valeur de C_d :

$$C_d = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{tr}(LM)}{\mathrm{tr}(M^2)}$$

et le modèle

$$\tau^d = C_d\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S}.$$

Cette procédure dynamique améliore généralement bien le résultat par rapport au modèle original. Toutefois, le calcul de C_d peut engendrer une viscosité totale négative, ce qui brise le second principe de la thermodynamique. Ainsi faut-il la plupart du temps imposer que si à un certain moment et à un certain endroit

$$\nu + \nu_{sm} < 0$$

alors prendre ν_{sm} légèrement plus grand que $-\nu$, c'est-à-dire :

$$\nu_{sm} = -\nu(1-\alpha)$$

où α est un réel positif, petit devant 1. D'autre part, C_d peut avoir une valeur numérique très élevée si le dénominateur est petit. Il est alors nécessaire de lui donner une limite supérieure.

Modèle de fonction de structure

Pour établir le modèle de fonction de structure, ses auteurs ([94]) utilisent la fonction de structure d'ordre 2 définie par (voir figure FIG. 1.5)

$$F_2(x,r) = \int_{\|x'\|=r} \|u(x) - u(x+x')\|^2 \, \mathrm{d}x'$$

et la fonction

$$\mathbf{F}_2(r) = \int F_2(x,r) \, \mathrm{d}x$$

(ces deux fonctions dépendent du temps).

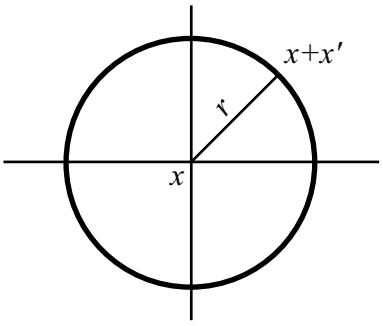


FIG. 1.5 – *Illustration du domaine d'intégration de la fonction de structure*

En se plaçant dans le cas homogène isotrope et en prenant le spectre de Kolmogorov, on montre que

$$\mathbf{F}_2(r) = C_3 \varepsilon^{2/3} r^{2/3},$$

où C_3 est une constante déterminée explicitement en fonction de K_0. Si on admet l'équilibre local, on obtient grâce à (1.14) :

$$< \nu_{sm} >= \frac{C_1}{\sqrt{C_3}} \overline{\delta}^{4/3} r^{-1/3} \sqrt{\mathbf{F}_2(r)}.$$

Appelons $\overline{F}_2$ la partie de F_2 calculable à partir des seules échelles résolues :

$$\overline{\mathbf{F}}_2(r) = \int \overline{F}_2(x,r) \, \mathrm{d}x$$

si

$$\overline{F}_2(x,r) = \int_{\|x'\|=r} \|\overline{u}(x) - \overline{u}(x+x')\|^2 \, \mathrm{d}x'.$$

On montre alors que F_2 peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}_2(r) = f(r/\overline{\delta}) \; \overline{\mathbf{F}}_2(r)$$

pour une fonction connue f (dont on peut trouver l'expression par exemple dans [122]). Cela induit :

$$< \nu_{sm} >= \frac{C_1\sqrt{f(r/\overline{\delta})}}{\sqrt{C_3}} \, \overline{\delta}^{4/3} r^{-1/3} \sqrt{\overline{\mathbf{F}}_2(r)}.$$

Lorsqu'on prend $r = \overline{\delta}$, on a enfin :

$$< \nu_{sm} >= C_{SF}\overline{\delta}\sqrt{\overline{\mathbf{F}}_2(\overline{\delta})}$$

où $C_{SF} \simeq 0,105$. D'une manière similaire au modèle de Smagorinsky, le modèle de fonction de structure s'obtient en localisant cette dernière relation, c'est-à-dire qu'il propose

$$\nu_{sm} = C_{SF}\overline{\delta}\sqrt{\overline{F}_2(x,\overline{\delta})}.$$

Ce modèle prédit assez bien le spectre de Kolmogorov à la coupure. Mais du fait de la localisation, on peut lui faire les mêmes reproches qu'au modèle de Smagorinsky. Les simulations montrent aussi que ces deux modèles sont trop dissipatifs ([78]).

Comme annoncé précédemment, on va également prendre quelques exemples de modèles qui ne font pas intervenir une viscosité de sous-maille. Ces modèles approximent directement τ qui ne se met plus sous la forme $\nu_{sm}\overline{S}$. Commençons par les modèles de type gradient.

b) Modèles de type gradient

Les modèles de cette catégorie partent de considérations plutôt mathématiques. Ils essaient d'écrire directement

$$\tau = \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u}$$

en fonction des échelles résolues seules, à travers la décomposition de Léonard ([76]) :

$$\tau = \mathbf{L} + \mathbf{C} + \mathbf{R}$$

où

$$\mathbf{L} = \overline{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \overline{u} \otimes \overline{u}, \qquad \mathbf{C} = \overline{\overline{u} \otimes u'} + \overline{u' \otimes \overline{u}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R} = \overline{u' \otimes u'}.$$

Pour cela, on se place dans l'espace de Fourier. Si le filtre est gaussien, on a

$$G_{\overline{\delta}} = \left(\frac{6}{\pi \overline{\delta}^2}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{6}{\overline{\delta}^2} \|x\|^2\right),$$

$$\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})(k) = \exp\left(-\frac{\overline{\delta}^2}{24} \|k\|^2\right), \tag{1.17}$$

$\mathcal{F}$ désignant la transformation de Fourier. Par définition, on a, pour une fonction φ :

$$\mathcal{F}(\overline{\varphi}) = \mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})\ \mathcal{F}(\varphi), \tag{1.18}$$

d'où on tire :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})}\ \mathcal{F}(\overline{\varphi}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(\varphi') = \left(\frac{1}{\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})} - 1\right) \mathcal{F}(\overline{\varphi}). \tag{1.19}$$

Il faut ensuite revenir dans l'espace physique pour avoir les expressions de **L**, **C** et **R**. Mais pour cela, on doit faire une approximation de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})$ du noyau du filtre gaussien qui est définie par l'expression (1.17).

Modèle de gradient

Pour avoir les différents termes, le modèle de gradient propose d'utiliser le développement de Taylor de (1.17) et de son inverse par rapport à $\overline{\delta}$:

$$\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})(k) = 1 - \frac{\|k\|^2}{24}\,\overline{\delta}^2 + O(\overline{\delta}^4) \tag{1.20}$$

et

$$\frac{1}{\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})}\,(k) = 1 + \frac{\|k\|^2}{24}\,\overline{\delta}^2 + O(\overline{\delta}^4).$$

Ces développements, associés à (1.18) et (1.19) donnent alors[1] :

$$\mathbf{L} + \mathbf{C} = \frac{\overline{\delta}^2}{12}\,\nabla\overline{u}\;\nabla\overline{u}^T + O(\overline{\delta}^4)$$

$$\mathbf{R} = O(\overline{\delta}^4)$$

D'où, si on se limite à l'ordre 3 :

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12}\,\nabla\overline{u}\;\nabla\overline{u}^T.$$

Modèle de Taylor

Le modèle de gradient n'est pas satisfaisant car pas assez dissipatif et instable ([77, 150, 70]). Ainsi, on le combine généralement avec le modèle de Smagorinsky qui est très dissipatif. En faisant cela, on obtient le modèle de Taylor :

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12}\,\nabla\overline{u}\;\nabla\overline{u}^T - C\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S}.$$

Un autre point de vue consiste à considérer le terme $-C\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S}$ comme une modélisation du tenseur de Reynolds $\mathbf{R}$ qui a été négligé dans le modèle de gradient, ces deux termes étant du même ordre (ordre 4) en $\overline{\delta}$.

A cause de l'approximation polynomiale de la transformation de Fourier, ce modèle ne simule pas correctement les hautes fréquences ([68, 72]). En effet, on

[1] Rappels :

$$\|k\|^2\mathcal{F}(\varphi) = -\mathcal{F}(\nabla^2\varphi), \qquad \|k\|^{-2}\mathcal{F}(\varphi) = -\mathcal{F}((\nabla^2)^{-1}\varphi),$$

$$(1 + c\|k\|^2)^{-1}\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}\left((I - c\nabla^2)^{-1}\varphi\right).$$

constate sur la figure FIG. 1.6 que l'approximation polynomiale a plutôt tendance à accentuer les hautes fréquences qu'à les atténuer. Par conséquent, la constante C doit être élevée pour espérer que le modèle ne diverge pas, bien que le terme de Smagorinsky soit théoriquement négligeable devant le terme de gradient. Malgré tout, la divergence peut survenir si le nombre de Reynolds est élevé ([67, 71]).

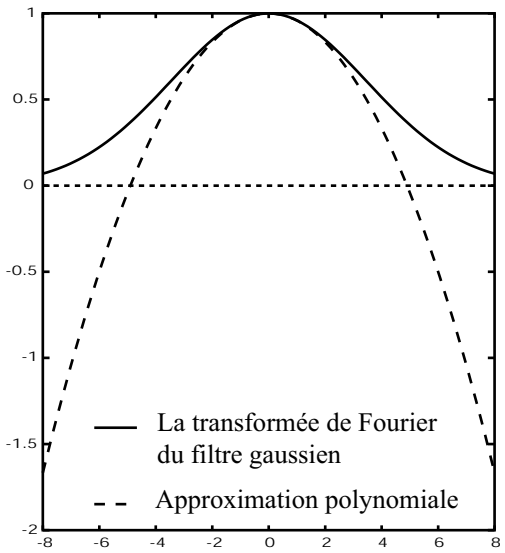


FIG. 1.6 – *La transformée de Fourier du filtre gaussien avec $\delta = 1$ et son approximation polynomiale*

Modèle rationnel

Pour éviter l'accentuation des hautes fréquences dans le modèle précédent, le modèle rationnel propose de remplacer l'approximation polynomiale de $\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})(k)$ par une approximation rationnelle (voir figure FIG. 1.7 et [71, 72, 14]). On obtient alors :

$$\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})(k) = \frac{1}{1 + \dfrac{\|k\|^2}{24}\,\overline{\delta}^2} + O(\overline{\delta}^4)$$

et

$$\frac{1}{\mathcal{F}(G_{\overline{\delta}})}\,(k) = 1 + \frac{\|k\|^2}{24}\,\overline{\delta}^2 + O(\overline{\delta}^4).$$

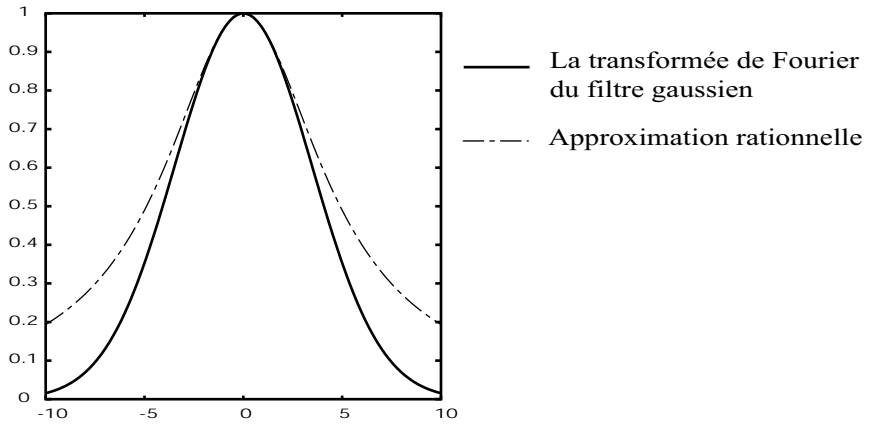


FIG. 1.7 – *La transformée de Fourier du filtre gaussien avec* $\delta = 1$ *et son approximation par une fonction rationnelle*

De la même façon que pour le modèle de gradient, on déduit (voir note de bas de page ([1]) de la page 42) :

$$\mathbf{L} + \mathbf{C} = \frac{\overline{\delta}^2}{12}\left(I_d - \frac{\overline{\delta}^2}{24}\nabla^2\right)^{-1}[\nabla\overline{u}\ \nabla\overline{u}^T] + O(\overline{\delta}^4)$$

$$\mathbf{R} = O(\overline{\delta}^4)$$

Le modèle rationnel s'obtient en se limitant à l'ordre trois, et en combinant avec le modèle de Smagorinsky :

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12}\left(I_d - \frac{\overline{\delta}^2}{24}\nabla^2\right)^{-1}[\nabla\overline{u}\ \nabla\overline{u}^T] - C\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S}$$

L'inversion de l'opérateur $\left(I_d - \frac{\overline{\delta}^2}{24}\nabla^2\right)$ implique la résolution d'un problème auxiliaire. On peut éviter ce problème auxiliaire car, en utilisant (1.18) et (1.20), on montre que

$$G_{\overline{\delta}} * \varphi \simeq \left(I_d - \frac{\overline{\delta}^2}{24}\nabla^2\right)^{-1}\varphi.$$

Dans ce cas, le modèle s'écrit

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12} G_{\overline{\delta}} * [\nabla \overline{u} \ \nabla \overline{u}^T] - C\overline{\delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}.$$

C'est cette dernière forme qu'on retiendra pour la suite. Comme pour le modèle de gradient, l'absence du terme de Smagorinsky peut faire diverger les simulations.

La famille suivante de modèles qu'on rencontrera est composée par les modèles de similarité d'échelles.

c) Modèles de similarité d'échelles

Les modèles de cette catégorie reposent sur l'hypothèse de similarité d'échelles qui stipule que le tenseur τ calculé avec les échelles de sous-maille a la même structure statistique que son équivalent calculé avec les plus petites échelles résolues. C'est par un second filtrage ou filtrage test, symbolisé par « $\widetilde{.}$ » , que les petites échelles résolues sont définies. Elles sont déterminées par

$$\overline{u} - \widetilde{\overline{u}}$$

(voir aussi la figure FIG. 1.8).

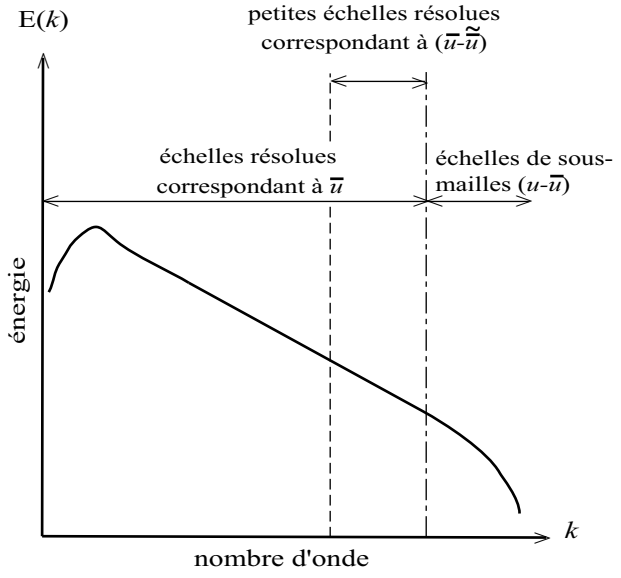


FIG. 1.8 – *Echelles de sous-mailles et petites échelles résolues dans l'espace spectral*

Grâce à l'hypothèse de similarité d'échelles, on modélise alors simplement le tenseur de sous-maille par :

$$\tau = \widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}}. \tag{1.21}$$

Cette hypothèse peut être interprétée comme suit d'un point de vue du transfert d'énergie : l'interaction entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille est similaire à l'interaction entre les plus grandes échelles résolues et les plus petites échelles résolues.

A partir de la forme générique (1.21), plusieurs modèles peuvent être déduits, soit en jouant sur le filtre test (son noyau ou sa longueur de coupure), soit en multipliant par un coefficient, soit en ajoutant un dernier niveau de filtrage. Les simulations montrent que le modèle (1.21) représente bien le tenseur de sous-maille réel. Cependant, il n'est pas assez dissipatif. Pour y remédier, on le combine alors avec le modèle de Smagorinsky ([151, 90, 93]).

La dernière catégorie de modèles qu'on considèrera est celle composée par les modèles dérivés de celui de Lund et Novikov. Ces modèles ne sont pas parmi les plus courants mais la démarche empruntée se rapproche de celle qu'on utilisera dans le chapitre 2 pour construire des nouveaux modèles. La présence du tenseur de vorticité dans le modèle le rend aussi intéressant du point de vue des symétries (on verra cela dans la section 1.3).

d) Modèle de Lund et Novikov

Le modèle de Lund et Novikov suppose que le tenseur de sous-maille est de la forme :

$$\tau = \mathcal{F}(\overline{S}, \overline{W}, \overline{\delta}^2)$$

$\overline{W} = (\nabla\overline{u} - \nabla\overline{u}^T)/2$ étant le tenseur de vorticité filtré. Le théorème de Cayley-Hamilton permet alors d'écrire :

$$\tau^d = C_1\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S} + C_2\overline{\delta}^2(\overline{S}^2)^d + C_3\overline{\delta}^2(\overline{W}^2)^d + C_4\overline{\delta}^2(\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S}) + C_5\overline{\delta}^2\frac{1}{|\overline{S}|}(\overline{S}^2\overline{W} - \overline{S}\,\overline{W}^2)$$

où les C_i sont fonctions des invariants issus de $\overline{S}$ et $\overline{W}$. La forme de ces C_i est cependant très complexe et certains auteurs ont préféré les calculer avec des techniques statistiques. Ils sont généralement pris constants. Par ailleurs, le coût algorithmique du modèle est élevé.

Modèle de Kosovic

Pour réduire le coût du modèle précédent, Kosovic simplifie le modèle et propose :

$$\tau^d = -(C\overline{\delta})^2 \left[2|\overline{S}|\overline{S} + C_1(\overline{S}^2)^d + C_2(\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S}) \right].$$

Les coefficients C, C_1 et C_2 sont calculés à partir de la théorie de la turbulence homogène isotrope. Puis, en partant d'exemples de turbulence homogène anisotrope, l'auteur propose

$$C_2 \simeq C_1.$$

Ici, on s'est limité aux modèles de sous-maille basé sur les échelles résolues. Beaucoup d'autres types de modèles existent. On peut citer le modèle d'échelles mixtes qui fait intervenir l'énergie cinétique à la coupure (Ta Phuoc et Sagaut [121]). On peut également mentionner les modèles incluant l'énergie cinétique de sous-maille et qui nécessitent une équation de transport supplémentaire.

Le tableau qui suit résume les modèles décrits précédemment.

Modèle de Smagorinsky

$$\tau^d = (C_s\overline{\delta})^2|\overline{S}|\overline{S}$$

Modèle dynamique

$$\tau^d = C_d\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S} \qquad \text{où} \quad C_d = \frac{\mathrm{tr}\left[(\widetilde{\overline{u}\otimes\overline{u}} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}})(\widetilde{\overline{\delta}}^2|\widetilde{\overline{S}}|\widetilde{\overline{S}} - \overline{\delta}^2\widetilde{|\overline{S}|\overline{S}})\right]}{\mathrm{tr}\left[(\widetilde{\overline{\delta}}^2|\widetilde{\overline{S}}|\widetilde{\overline{S}} - \overline{\delta}^2\widetilde{|\overline{S}|\overline{S}})^2\right]}$$

Modèle de fonction de structure d'ordre 2

$$\tau^d = C_{SF}\overline{\delta}\sqrt{\overline{F}_2(x,\overline{\delta})}\;\overline{S} \qquad \text{où} \quad \overline{F}_2(x,\overline{\delta}) = \int_{\|x'\|=\overline{\delta}} \|\overline{u}(x) - \overline{u}(x+x')\|^2\,\mathrm{d}x'$$

Modèle de gradient

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12} \nabla \overline{u} \ \nabla \overline{u}^T$$

Modèle de Taylor

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12} \nabla \overline{u} \ \nabla \overline{u}^T - C\overline{\delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}$$

Modèle rationnel

$$\tau = \frac{\overline{\delta}^2}{12} \, G_{\overline{\delta}} * [\nabla \overline{u} \ \nabla \overline{u}^T] - C\overline{\delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}$$

Modèle de similarité d'échelles

$$\tau = \widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}}$$

Modèle de Lund et Novikov

$$\tau^d = C_1 \overline{\delta}^2 |\overline{S}| \overline{S} + C_2 \overline{\delta}^2 (\overline{S}^2)^d + C_3 \overline{\delta}^2 (\overline{W}^2)^d + C_4 \overline{\delta}^2 (\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S})$$

$$+ C_5 \overline{\delta}^2 \frac{1}{|\overline{S}|} (\overline{S}^2 \overline{W} - \overline{S}\,\overline{W}^2)$$

Modèle de Kosovic

$$\tau^d = -(C\overline{\delta})^2 \left[2|\overline{S}|\overline{S} + C_1 (\overline{S}^2)^d + C_2 (\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S}) \right]$$

Face au nombre élevé de modèles, qui sont basés sur des hypothèses plus ou moins bien fondées et qui sont numériquement plus ou moins efficaces, il est nécessaire de se doter d'outils simples pour évaluer *a priori* la qualité des modèles. Les outils qu'on a choisis ici sont les symétries, c'est-à-dire les transformations qui, à une solution d'une équation, fait correspondre une autre solution. Pour les raisons qu'on va évoquer ci-dessous, le respect de ces symétries semblent être une qualité importante, sinon indispensable, que le modèle doit avoir si on veut espérer bien représenter l'écoulement.

Les équations de Navier-Stokes (1.1) admettent un certain nombre de symétries (par exemple la transformation galiléene, la rotation et la translation temporelle). On

dira alors que (1.1) sont invariantes par ces symétries. Ces symétries ont une grande importance dans la description des phénomènes physiques liés aux équations, au moins pour les quelques raisons suivantes :

- D'après le théorème de Nœther ([99, 105]), chacune des symétries d'un lagrangien traduit la conservation d'une grandeur physique. Les lois de conservation ne sont donc qu'une conséquence des propriétés de symétrie.
- La connaissance des symétries donne des informations sur la solution des équations. En effet, les travaux d'Oberlack (dont [102, 104]) montrent qu'à travers ces symétries, on peut calculer des lois d'échelle.
- La théorie des groupes de symétrie fournit une méthode pour réduire les équations aux dérivées partielles, et même pour calculer des solutions exactes dans certaines situations ([62, 61]). Fushchych et ses collaborateurs ([49, 47, 48, 111]) ont alors utilisé les symétries des équations de Navier-Stokes pour calculer des solutions exactes.
- Gandarias *et al.* ([50]) ont utilisé les symétries pour réduire les équations d'évolution de l'énergie cinétique et du taux de dissipation dans le modèle $\kappa - \epsilon$. Grâce à cela, ces auteurs ont pu calculer des solutions et prouver l'existence de solutions sous forme de fronts progressifs décroissants et bornés.
- Ünal a montré que, grâce aux symétries, on peut trouver des solutions ayant le spectre de Kolmogorov ([143]). Ces symétries lui ont en outre permis de retrouver le modèle de Speziale ([144, 134]).
- Citons enfin que les solutions auto-similaires (c'est-à-dire qui ne changent pas lorsqu'on applique la transformation correspondante) par rapport à la dilatation d'échelle, qui est une symétrie des équations de Navier-Stokes, ont une relation avec le comportement asymptotique de la solution lorsque $t \to \infty$ ([24]). Ces solutions auto-similaires ont d'ailleurs fait l'objet de quelques études depuis que Leray a soulevé la question de leur existence ([24, 97, 141, 142, 91]).

On reviendra sur ces différents travaux dans la section 1.5 et dans l'annexe B où plus de précisions seront données.

Lors de la modélisation de la turbulence, par approche RANS ou LES, il est donc important que le modèle ne détruise pas les symétries des équations de Navier-Stokes si on veut retrouver les lois de conservation et les propriétés de la solution exacte. Autrement dit, lorsqu'on introduit le modèle dans les équations moyennées (RANS) ou filtrées (LES), il faut que les symétries des équations d'origine soient aussi symétries des équations finales (moyennées ou filtrées).

Le but de la suite de ce chapitre est d'analyser les modèles cités plus haut par rapport aux symétries des équations de Navier-Stokes. Pour cela, on va d'abord calculer lesdites symétries, à partir de la théorie des groupes de symétrie.

1.2 Le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes

La théorie des groupes de symétrie est d'usage assez répandu en physique théorique, en particulier en physique quantique. En revanche, malgré les avantages qu'elle offre, elle est pratiquement ignorée dans le domaine de la mécanique. Pour cette raison, on va faire un bref rappel de la théorie avant de l'appliquer aux équations de Navier-Stokes, en évitant le formalisme mathématique qui rend son apprentissage difficile. De détails complémentaires peuvent être trouvés dans l'annexe A.

1.2.1 Groupes de symétrie

Nous allons faire ici une présentation sur les équations différentielles, la généralisation aux équations aux dérivées partielles ne posant pas de problème particulier.

Soit $(\mathcal{E})$ une équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad : \qquad F\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k}\right) = 0. \tag{1.22}$$

Une transformation

$$T : (t, y) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{y}) \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} \widehat{t} = \widehat{t}(t, y) \\ \widehat{y} = \widehat{y}(t, y). \end{cases} \tag{1.23}$$

est appelée une *symétrie* de $(\mathcal{E})$ si

$$(\mathcal{E}) \qquad \Longrightarrow \qquad F\left(\widehat{t}, \widehat{y}(\widehat{t}), \frac{\mathrm{d}\widehat{y}(\widehat{t})}{\mathrm{d}\widehat{t}}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k \widehat{y}(\widehat{t})}{\mathrm{d}\widehat{t}^k}\right) = 0. \tag{1.24}$$

Cela veut dire que T transforme toute solution de $(\mathcal{E})$ en une autre solution[3]. Dans ce cas, on dira aussi que $(\mathcal{E})$ est *invariante* par la transformation T.

Une équation différentielle peut posséder plusieurs type de symétries, mais ce qu'on se propose de calculer ce sont les symétries à un paramètre, c'est-à-dire les symétries de la forme :

[3]On ne prend pas en compte ici les éventuelles conditions au bord et initiale

$$T_a : (t, y) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{y}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \widehat{t} = \widehat{t}(t, y, a) \\ \widehat{y} = \widehat{y}(t, y, a) \end{cases} \tag{1.25}$$

où a est un paramètre local, appartenant à un certain intervalle centré en 0, et T_a dépend continûment de a.

On définit alors un *groupe de transformations* (à un paramètre) comme étant un ensemble de transformations T_a vérifiant localement les axiomes d'un groupe, l'élément neutre étant $T_0 = I_d$. Enfin, un *groupe de symétrie* d'une équation différentielle $(\mathcal{E})$ est un groupe de transformations dont chaque élément est une symétrie de $(\mathcal{E})$.

Supposons maintenant qu'on a un groupe de transformations G. Ces éléments sont de la forme (1.25). Notons

$$\begin{aligned} \xi(t, y) &= \left. \frac{\partial \widehat{t}(t, y, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, \\ \eta(t, y) &= \left. \frac{\partial \widehat{y}(t, y, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

puis

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le champ de vecteur X est appelé *générateur infinitésimal* de G. Il est défini plus rigoureusement par

$$X \ : \ f \mapsto X.f = \xi \frac{\partial f}{\partial t} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

où f est une fonction de t et de $y(t)$. Ce générateur infinitésimal détermine complètement le groupe. En effet, connaissant X, on peut retrouver les transformations appartenant à G à partir du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{t}}{\mathrm{d}a} = \xi(\widehat{t}, \widehat{y}), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}a} = \eta(\widehat{t}, \widehat{y}), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \widehat{t}(a=0) = t \\ \widehat{y}(a=0) = y. \end{cases}$$

Si on appelle $q = (t, y)$, ce système s'écrit plus simplement :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{q}}{\mathrm{d}a} = X.\widehat{q} \\ \\ \widehat{q}(a=0) = q \end{cases} \tag{1.27}$$

Le générateur infinitésimal décrit comment t et y se transforment lorsqu'on applique le groupe à l'équation différentielle. Mais cette dernière faisant également intervenir des dérivées de y jusqu'à l'ordre k, il est nécessaire de savoir comment ces dérivées se transforment. On définit alors

$$\eta^m(t,y) = \left.\frac{\partial \widehat{y}^{(m)}(t,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}$$

où

$$\widehat{y}^{(m)} = \frac{\mathrm{d}^m \widehat{y}(\widehat{t}\,)}{\mathrm{d}\widehat{t}^{\,m}}, \qquad m = 2, \ldots, k.$$

Cela conduit à un nouveau champ de vecteurs

$$X^{(k)} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^k \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}.$$

Le champ de vecteurs $X^{(k)}$ est le *prolongement* de X à l'ordre k. On peut exprimer les η^m en fonction de ξ et η selon la formule de récurrence

$$\eta^m = \mathrm{D}_t \eta^{m-1} - y^{(m)} \mathrm{D}_t \xi. \tag{1.28}$$

D_t désigne la dérivation totale par rapport à t.

On montre alors que pour que le groupe de transformation G soit un groupe de symétrie de $(\mathcal{E})$, il faut et il suffit que

$$(\mathcal{E}) \quad \Longrightarrow \quad X^{(k)}.F = 0. \tag{1.29}$$

En résumé, pour calculer les groupes de symétrie de $(\mathcal{E})$,

- on exprime le champ de vecteur $X^{(k)}$ en fonction de ξ et de η,
- on pose la condition (1.29) pour avoir des équations différentielles vérifiées par ξ et η,
- on calcule les différentes solutions (ξ, η) et on forme les générateurs infinitésimaux,
- on déduit les groupes de symétrie en résolvant (1.27).

On trouve quelques exemples dans l'annexe A.

Cette procédure fournit une liste exhaustive des symétries à un paramètre de l'équation différentielle. De plus, tous les calculs peuvent être effectués de manière formelle. Ils peuvent donc être automatisés avec l'aide de l'ordinateur et d'un logiciel de calcul symbolique (voir l'annexe A pour plus de précision). Cela est indispensable la plupart du temps car le calcul est généralement très fastidieux à faire à la main.

Remarques 1.4.

- *Dans le cas où une même équation possède plusieurs groupes de symétrie, on désigne aussi le groupe engendré par la réunion de ces groupes le groupe de symétrie de l'équation.*
- *Les générateurs infinitésimaux d'une même équation engendrent une algèbre de Lie. On peut donc en déduire d'autres à partir des combinaisons linéaires et des crochets de Lie.*

La théorie s'adapte aisément au cas des équations aux dérivées partielles où un générateur infinitésimal s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, w) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(x, w) \frac{\partial}{\partial w_j}$$

si la variable indépendante est $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et la variable dépendante est $w = w(x) = (w_1, \ldots, w_m)$. Dans cette expression,

$$\xi_i(x, w) = \left. \frac{\partial \widehat{x}_i(x, w, a)}{\partial a} \right|_{a=0},$$

$$\eta_j(x,w) = \left.\frac{\partial \widehat{w}_j(x,w,a)}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

En notation vectorielle, X s'écrit :

$$X = \xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial u}.$$

La théorie fournit une méthode pour réduire l'ordre d'une équation aux dérivées partielles et même pour trouver une solution exacte en ne cherchant que les solutions auto-similaires, c'est à dire les solutions telles que

$$w(x) = \widehat{w}(\widehat{x}).$$

On verra quelques applications dans la section 1.5.

Remarque 1.5. *L'imposition des conditions aux limites peut détruire certaines symétries. Cependant, les modèles sont construits indépendamment de ces conditions aux limites. On se placera alors dans les zones où l'effet de ces conditions aux limites est négligeable lorsqu'on fera l'analyse des modèles.*

1.2.2 Cas des équations de Navier-Stokes

Appliquons maintenant la procédure ci-dessus au calcul des symétries à un paramètre des équations de Navier-Stokes (1.1). On va abréger (1.1) comme suit :

$$F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla u, \nabla p, \nabla^2 u\right) = 0. \tag{1.30}$$

Pour l'instant, on ne prend pas en compte les conditions aux limites.

Si on considère que les variables qui sont transformées sont t, x, u et p, alors les symétries sont de la forme[4] :

$$T_a \ : \ (t,x,u,p) \mapsto (\widehat{t},\widehat{x},\widehat{u},\widehat{p}) \qquad \text{avec}$$

[4]Il existe des transformations qui dépendent explicitement des dérivées, elles sont dénommées transformations de Bäcklund. Ce type de transformations ne sera pas considéré ici.

$$\begin{cases} \widehat{t} = \widehat{t}(t, x, u, p, a) \\ \widehat{x} = \widehat{x}(t, x, u, p, a) \\ \widehat{u} = \widehat{u}(t, x, u, p, a) \\ \widehat{p} = \widehat{p}(t, x, u, p, a). \end{cases}$$

Supposons que la dimension spatiale est 3. Le générateur infinitésimal d'un groupe de symétrie de (1.30) sera de la forme

$$X \;=\; \xi_t \,\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \sum_{i=1}^{3} \xi_{x_i} \,\frac{\partial}{\partial x_i} \;+\; \sum_{i=1}^{3} \eta_{u_i} \,\frac{\partial}{\partial u_i} \;+\; \eta_p \,\frac{\partial}{\partial p}.$$

Il nous faut donc calculer les composantes de X. Mais pour cela, comme (1.30) fait intervenir des dérivées, on a besoin de prolonger X en le générateur X' défini par

$$\begin{aligned} X' \;=\;& \xi_t \,\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \sum_{i=1}^{3} \xi_{x_i} \,\frac{\partial}{\partial x_i} \;+\; \sum_{i=1}^{3} \eta_{u_i} \,\frac{\partial}{\partial u_i} \;+\; \eta_p \,\frac{\partial}{\partial p} \\ &+ \sum_{i=1}^{3} \eta_i^t \,\frac{\partial}{\partial u_{i,t}} \;+\; \sum_{i,j=1}^{3} \eta_i^j \,\frac{\partial}{\partial u_{i,j}} \;+\; \sum_{j=1}^{3} \eta_p^j \,\frac{\partial}{\partial p_{,j}} \;+\; \sum_{i,j=1}^{3} \eta_i^{jj} \,\frac{\partial}{\partial u_{i,jj}} \end{aligned}$$

où

$$u_{i,t} = \frac{\partial u_i}{\partial t},\; u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\; p_{,j} = \frac{\partial p}{\partial x_j},\; u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}.$$

Les composantes $\eta_\bullet^\bullet$ peuvent s'écrire en fonction des $\xi_\bullet$ et $\eta_\bullet$ selon des relations de même type que (1.28).

Lorsqu'on applique la condition de symétrie

$$X'.F = 0 \qquad \text{sachant que} \qquad F = 0,$$

on obtient un système d'équations sur les $\xi_\bullet$ et $\eta_\bullet$ dont la résolution conduit aux générateurs infinitésimaux suivants :

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
Y_0 &= \zeta(t)\,\frac{\partial}{\partial p} \\
X_{ij} &= x_j\,\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i\,\frac{\partial}{\partial x_j} + u_j\,\frac{\partial}{\partial u_i} - u_i\,\frac{\partial}{\partial u_j}, \qquad i=1,2,\ j>i \\
X_i &= \alpha_i(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_i'(t)\,\frac{\partial}{\partial u_i} - \rho\, x_i\,\alpha_i''(t)\,\frac{\partial}{\partial p}, \qquad i=1,2,3 \\
Y_1 &= 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3} u_j\,\frac{\partial}{\partial u_j} - 2p\,\frac{\partial}{\partial p}.
\end{aligned}
$$

Dans ces expressions, ζ et les α_i sont des fonctions C^∞ arbitraires. C'est Pukhnachev ([114]) qui a découvert en premier ces générateurs. On les a recalculés ici avec le programme DESOLV écrit par Vu et Carminati ([147]). On peut aussi les retrouver dans [62].

Rappelons que dans ces calculs, les variables transformées étaient t, x, u et p. On peut également laisser la viscosité cinématique ν se transformer. Dans ce cas, les symétries prennent la forme

$$
T_a \ : \ (t,x,u,p,\nu) \mapsto (\widehat{t},\widehat{x},\widehat{u},\widehat{p},\widehat{\nu}) \qquad \text{avec}
$$

$$
\begin{cases}
\widehat{t} = \widehat{t}(t,x,u,p,\nu,a) \\
\widehat{x} = \widehat{x}(t,x,u,p,\nu,a) \\
\widehat{u} = \widehat{u}(t,x,u,p,\nu,a) \\
\widehat{p} = \widehat{p}(t,x,u,p,\nu,a) \\
\widehat{\nu} = \widehat{\nu}(t,x,u,p,\nu,a).
\end{cases}
$$

Laisser ν évoluer est intéressant car, à vitesse de référence fixe, sa variation équivaut à la variation du nombre de Reynolds. En faisant ainsi et en utilisant de nouveau le programme DESOLV, on retrouve tous les générateurs précédents (avec toutefois quelques légères différences) mais aussi un générateur tout à fait nouveau :

$$
Y_2 = \beta(\nu)\left[\sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} u_j\,\frac{\partial}{\partial u_j} + 2p\,\frac{\partial}{\partial p} + 2\nu\,\frac{\partial}{\partial \nu}\right]
$$

β étant une fonction arbitraire de ν, généralement pris égal à 1.

Signalons que c'est grâce à la combinaison des deux générateurs Y_1 et Y_2 que Ünal a retrouvé le spectre de Kolmogorov ([143]).

Avec ces générateurs infinitésimaux, on reconstruit enfin les groupes de symétrie des équations de Navier-Stokes :

Le groupe des translations temporelles

Le groupe engendré par X_0 est le groupe des translations temporelles. En effet, on a :

$$\xi_t = 1, \qquad \xi_{x_i} = 0, \qquad \eta_{u_i} = 0, \qquad \eta_p = 0.$$

Donc, si on appelle $q = (t, x, u, p)$, le système (1.27) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{t}}{\mathrm{d}a} = \xi_t(\widehat{q}) = 1, & \dfrac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}a} = \xi_x(\widehat{q}) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}a} = \eta_u(\widehat{q}) = 0, & \dfrac{\mathrm{d}\widehat{p}}{\mathrm{d}a} = \eta_p(\widehat{q}) = 0 \\ \widehat{q}(a=0) = q \end{cases}$$

Cela conduit à

$$\widehat{t} = t + a, \qquad \widehat{x} = x, \qquad \widehat{u} = u, \qquad \widehat{p} = p.$$

D'où la translation temporelle

$$(t, x, u, p) \mapsto (t + a, x, u, p).$$

On vérifie aisément que l'application de telles transformations n'a aucun effet sur les équations de Navier-Stokes (1.1). Concrètement, l'invariance de (1.1) par ces translations se traduit par ceci :

$$\text{Si } \big(u(t,x), p(t,x)\big) \text{ est solution de (1.1)}$$

$$\text{alors } \big(u(t+a,x), p(t+a,x)\big) \text{ est aussi solution de (1.1).}$$

Cela signifie simplement que le choix de l'instant initial n'influence pas la solution.

Le groupe des translations par rapport à la pression

De la même façon que précédemment, on montre que Y_0 engendre le groupe des translations par rapport à la pression qui sont les transformations de la forme :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, x, u, p + \zeta(t)).$$

On en conclut que, si on ne tient pas compte des conditions aux limites, les équations de Navier-Stokes ne définissent la pression qu'à une fonction du temps près. Ceci est bien sûr dû au fait que la pression n'intervient qu'à travers son gradient.

En fait, en toute rigueur, p devrait se transformer en $p + a\zeta(t)$ mais ζ étant arbitraire, le paramètre a a été inclus dans ζ.

Le groupe des rotations

Pour avoir le groupe engendré par un des X_{ij}, $j > i$, on résoud :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{q}}{\mathrm{d}a} = \Sigma^{ij}\widehat{q} \\ \\ \widehat{q}(0) = q \end{cases}$$

où $q = (x, u)$ et Σ^{ij} est l'une des matrices

$$\Sigma^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Sigma^{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve alors (voir également l'exemple A.3 de l'annexe A) :

$$\widehat{y} = \exp(a\Sigma^{ij})y.$$

La matrice $R^{ij} = \exp(a\Sigma^{ij})$ est la matrice de rotation d'angle fixe a et de direction e_k, $k \notin \{i, j\}$. Le générateur X_{ij} engendre donc le groupe des rotations dans la direction e_k. La combinaison des trois X_{ij} forme alors le groupe (à trois paramètres) des rotations :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, Rx, Ru, p)$$

où R est une matrice de rotation (ne dépendant pas du temps), c'est-à-dire :

$$R\,R^T = I_d,\ \det R = 1.$$

L'invariance par rotation des équations signifie que la solution ne dépend pas de l'orientation du repère.

Le groupe des transformations galiléennes généralisées

Chacun des X_i engendre le groupe des transformations telles que, si $k \neq i$ alors

$$\begin{cases} \widehat{t} = t \\ \\ \widehat{x}_i = x_i + \alpha_i(t), \\ \widehat{x}_k = x_k \\ \\ \widehat{u}_i = u_i + \alpha_i'(t), \\ \widehat{u}_k = u_k \\ \\ \widehat{p} = p - \rho x_i \alpha_i''(t) \end{cases}$$

où α_i est une fonction arbitraire du temps. La combinaison des trois générateurs X_i engendre alors le groupe (à trois paramètres) des transformations

$$(t, x, u, p) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = (t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), p - \rho\, x \cdot \alpha''(t))\,.$$

où α est une fonction vectorielle arbitraire. Si la fonction α est constante, on obtient la translation spatiale, tandis que si α est linéaire en t, on a la transformation galiléenne classique.

L'invariance par de telles transformations signifie que si le repère est en translation (dépendante du temps), on peut retrouver la solution en appliquant une compensation adéquate à la pression.

Le premier groupe de changements d'échelle

Le générateur Y_1 engendre (voir l'exemple A.2 de l'annexe A) le groupe de changements d'échelle défini par

$$(t, x, u, p) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = (e^{2a}t, e^{a}x, e^{-a}\,u, e^{-2a}, p)$$

Il est plus pratique de noter les éléments de ce groupe sous la forme équivalente suivante :

$$(t, x, u, p) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = (a^2 t, ax, \frac{1}{a}u, \frac{1}{a^2}p). \tag{1.31}$$

Ces changements d'échelle montrent de quelle manière doivent varier la vitesse et la pression si on modifie l'échelle spatio-temporelle selon les proportions respectives a et a^2.

Le second groupe de changements d'échelle

Le dernier groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes est le groupe engendré par Y_2. Chacun de ses éléments représente aussi un changement d'échelle :

$$(t, x, u, p, \nu) \mapsto (t, ax, au, a^2 p, a^2 \nu). \tag{1.32}$$

Il décrit ce qu'un changement d'échelle spatiale (mais pas temporelle) induit sur la vitesse, la pression et la viscosité (ou le nombre de Reynolds).

D'autre part,

$$\frac{\widehat{u}}{\widehat{\nu}} = \frac{1}{a}\,\frac{u}{\nu}.$$

Cette relation montre que les petites échelles (correspondant à a petit) sont plus affectées par la viscosité que les grandes échelles puisque le rapport $\dfrac{\widehat{u}}{\widehat{\nu}}$ augmente par rapport à la référence $\dfrac{u}{\nu}$ lorsque a diminue. D'une manière équivalente, on peut aussi comprendre que les petites échelles sont moins dépendantes du nombre de Reynolds.

Ces changements d'échelle sont aussi appelés « equivalence transformations » car ils transforment les solutions des équations de Navier-Stokes avec une valeur de ν

en les solutions d'autres équations de Navier-Stokes avec une nouvelle valeur de ν ([65]).

Grâce à la théorie des groupes de symétrie, on a donc pu trouver tous les groupes à un paramètre des équations de Navier-Stokes, et, par composition, tous les groupes à un nombre fini de paramètres.

1.2.3 Autres symétries des équations de Navier-Stokes

A part les symétries qui viennent d'être évoquées, les équations de Navier-Stokes possèdent deux autres propriétés d'invariance connues : l'invariance par réflection et l'indifférence matérielle qu'on va décrire ci-dessous. Les transformations correspondantes n'ont pas pu être obtenues à partir de la théorie des groupes de symétrie car elles ne sont pas des transformations à un paramètre.

L'invariance par réflection

Les trois réflections (si la dimension est $n = 3$) dans les trois directions spatiales sont

$$(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, p) \longmapsto (t, -x_1, x_2, x_3, -u_1, u_2, u_3, p),$$

$$(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, p) \longmapsto (t, x_1, -x_2, x_3, u_1, -u_2, u_3, p),$$

$$(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, p) \longmapsto (t, x_1, x_2, -x_3, u_1, u_2, -u_3, p).$$

Examinons l'invariance des équations de Navier-Stokes, qu'on va abréger comme suit

$$F'(t, x, u, p) = 0,$$

par la réflection dans la direction 1. En notation matricielle, cette dernière s'écrit :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, \Lambda_1 x, \Lambda_1 u, p)$$

où Λ_1 est la matrice symétrique

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui vérifie :

$$\Lambda_1^2 = I_d.$$

Si $\widehat{\nabla}$ et $\widehat{\mathrm{div}}$ désignent respectivement les opérateurs de gradient et de divergence dans l'espace transformé alors les règles de dérivation et les formules de changement de base habituelles conduisent à :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{t}} + \widehat{\mathrm{div}}(\widehat{u} \otimes \widehat{u}) + \frac{1}{\rho}\,\widehat{\nabla}\widehat{p} - 2\nu\,\widehat{\mathrm{div}}\widehat{S} = \Lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho}\,\nabla p - 2\nu\,\mathrm{div} S \right)$$

et

$$\widehat{\mathrm{div}}\widehat{u} = \mathrm{div} u.$$

Ainsi,

$$F'(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = \Lambda_1 F'(t, x, u, p).$$

Par conséquent,

$$F'(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F'(t, x, u, p) = 0,$$

Les équations de Navier-Stokes sont donc invariantes par la réflection dans la direction 1. Il en est de même pour les deux autres réflections. Ces trois réflections engendrent un groupe par lequel les équations de Navier-Stokes sont invariantes. Chaque élément de ce groupe peut être représenté par une matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \iota_1 & 0 & 0 \\ 0 & \iota_2 & 0 \\ 0 & 0 & \iota_3 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \iota_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

L'invariance par le groupe des réflections signifie l'indépendance par rapport au sens des axes de coordonnées.

L'indifférence matérielle

Supposons que l'écoulement évolue parallèlement à un plan, dans un domaine simplement connexe. L'invariance par rotation nous permet de supposer que ce plan est le plan (x_1Ox_2) où O est l'origine du repère. Dans ce cas, la condition d'incompressibilité assure l'existence d'une fonction de courant $\psi(x_1, x_2)$ vérifiant

$$u = \mathrm{rot}(\psi e_3)$$

où e_3 est le vecteur unitaire de l'axe (Ox_3). Prouvons alors que les équations de Navier-Stokes sont invariantes par la transformation suivante :

$$(t, x, u, p) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) \qquad \text{avec}$$

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{x} = R(t)\, x, \qquad \widehat{u} = R(t)\, u + R'(t)\, x, \qquad \widehat{p} = p - 3\omega\psi + \frac{1}{2}\omega^2\|x\|^2$$

où $R(t)$ est la matrice de rotation plane d'angle ωt :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve
Soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R et J vérfient les relations suivantes :

$$R'R^T + RR'^T = 0, \qquad R^TR' = \omega J, \qquad R' = \omega RJ \qquad \text{et} \qquad J^2 = -I_d.$$

D'autre part, si f est une fonction scalaire, V un vecteur et M une matrice alors

$$\widehat{\nabla} f = R\nabla f$$

$$\frac{\partial V}{\partial \widehat{t}} = \frac{\partial V}{\partial t} - (\nabla V)(R^TR'x),$$

$$\widehat{\nabla} V = (\nabla V) R^T, \qquad \nabla(RV) = R \nabla V.$$

$$\widehat{\mathrm{div}} M = \mathrm{div}(MR) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}(RM) = R\,\mathrm{div} M.$$

Cela donne, entre autres, que

$$\widehat{\nabla}\widehat{u} = R \nabla u R^T + R' R^T,$$

$$\widehat{\nabla}\widehat{u}^T = R \nabla u^T R^T + R'^T R = R \nabla u^T R^T - R' R^T$$

et

$$\widehat{S} = R S R^T.$$

Ainsi

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{t}} + (\widehat{\nabla}\widehat{u})\widehat{u} + \widehat{\nabla}\widehat{p} - 2\nu \widehat{\mathrm{div}} \widehat{S} =$$

$$\left[2R'u + R\frac{\partial u}{\partial t} - \omega R \nabla u J x \right] + \left[R(\nabla u)u + \omega R \nabla u J x + R'u - \omega^2 R x \right]$$

$$+ R\left[\nabla p - 3\omega J u + \omega^2 x \right] - \left[2\nu R\, \mathrm{div} S \right].$$

En utilisant les relations entre R, R' et J, on en déduit que

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{t}} + (\widehat{\nabla}\widehat{u})\widehat{u} + \widehat{\nabla}\widehat{p} - 2\nu \widehat{\mathrm{div}} \widehat{S} = R \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u + \nabla p - 2\nu\, \mathrm{div} S \right).$$

Pour l'équation de continuité, on a :

$$\widehat{\mathrm{div}}\widehat{u} = \mathrm{div} u + \mathrm{div} R^T R' x = \mathrm{div} u + \mathrm{div} J x = \mathrm{div} u.$$

Par conséquent

$$F'(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F'(t, x, u, p) = 0.$$

D'où l'invariance des équations de Navier-Stokes. ■

L'indifférence matérielle traduit l'invariance de (1.1) par rotation dépendante du temps du repère, moyennant une compensation au niveau de la pression.

Le tableau suivant résume les symétries des équations de Navier-Stokes avec les générateurs infinitésimaux qui les ont engendrées. Le nom de chaque transformation est suivi de son abréviation.

Translations temporelles ($\mathbf{Trans_t}$)

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$(t, x, u, p) \mapsto (t + a, x, u, p)$$

$$a \in \mathbb{R}$$

Translations de pression ($\mathbf{Trans_p}$)

$$Y_0 = \zeta(t)\frac{\partial}{\partial p}$$

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, x, u, p + \zeta(t))$$

ζ est une fonction scalaire arbitraire

Rotations (Rot)

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial u_i} - u_i \frac{\partial}{\partial u_j}, \qquad i = 1, 2,\ j > i$$

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, Rx, Ru, p)$$

R est une matrice de rotation : $RR^T = I_d$, $\det R = 1$

Transformations galiléennes généralisées ($\mathbf{Trans_g}$)

$$X_i = \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_i'(t) \frac{\partial}{\partial u_i} - \rho\, x_i\, \alpha_i''(t) \frac{\partial}{\partial p}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$(t, x, u, p) \mapsto \big(t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), p - \rho x \cdot \alpha''(t)\big)$$

α est une fonction vectorielle arbitraire

Premiers changements d'échelle ($\mathbf{Ech_1}$)

$$Y_1 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3} u_j\,\frac{\partial}{\partial u_j} - 2p\,\frac{\partial}{\partial p}$$

$$(t, x, u, p) \mapsto (a^2 t, ax, \frac{1}{a}u, \frac{1}{a^2}p)$$

Seconds changements d'échelle ($\mathbf{Ech_2}$)

$$Y_2 = \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} u_j\,\frac{\partial}{\partial u_j} + 2p\,\frac{\partial}{\partial p} + 2\nu\,\frac{\partial}{\partial \nu}$$

$$(t, x, u, p, \nu) \mapsto (t, ax, au, a^2 p, a^2 \nu)$$

Réflections (Refl)

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, \Lambda x, \Lambda u, p)$$

Λ est une matrice diagonale de la forme
$\Lambda = diag(\iota_1, \iota_2, \iota_3)$ où $\iota_i = \pm 1$

Indifférence matérielle (Mat)

$$(t, x, u, p) \mapsto \left(t, R(t)x, R(t)u, p - 3\omega\psi + \frac{1}{2}\omega^2\|x\|^2\right)$$

$R(t)$ est une matrice de rotation plane, d'angle ωt,
ψ est la fonction de courant
Ecoulement plan

Dans la section suivante, nous allons examiner les modèles de LES usuels décrits dans le paragraphe 1.1.4 sous l'angle de la préservation du groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes.

1.3 Analyse des modèles de sous-maille par rapport aux symétries

Pour rappel, récrivons les équations de Navier-Stokes et les équations filtrées

$$\text{Navier-Stokes} \ : \ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \ \mathrm{div}(u \otimes u) + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\nu \, \mathrm{div} S = 0 \\ \\ \mathrm{div} u = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

$$\text{Navier-Stokes filtrées} \ : \ \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \ \mathrm{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla \overline{p} - 2\nu \, \mathrm{div} \overline{S} + \ \mathrm{div} \tau = 0 \\ \\ \mathrm{div} \overline{u} = 0 \end{cases} \tag{1.34}$$

Formellement, la seule différence entre (1.33) et (1.34) est la présence du terme $\mathrm{div}\tau$. Le modèle et lui seul est donc susceptible de détruire les symétries des équations d'origine (1.33). Ainsi, si une transformation

$$T : (t, x, u, p, \nu) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}, \widehat{\nu})$$

est une symétrie de (1.33) alors un modèle consistant est tel que la même transformation, appliquée aux champs filtrés,

$$T : (t, x, \overline{u}, \overline{p}, \nu) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{\overline{u}}, \widehat{\overline{p}}, \widehat{\nu}),$$

est une symétrie de (1.34). Notre but ici est d'analyser les modèles, selon qu'ils respectent ou non les symétries.

On a déjà signalé que quelques études dans ce sens ont déjà été effectuées par des auteurs, par exemple par Speziale ([132, 133, 134]) et Spalart ([131]) ou Fureby et Tabor ([46]). Cependant, ces études n'ont pris en compte que quelques symétries (la transformation galiléenne, la translation temporelle et de pression ainsi que l'indifférence matérielle). On n'y trouve pas par exemple les changements d'échelle qui pourtant, comme on le verra dans la suite, impose des conditions très contraignantes et ont une importance capitale dans l'élaboration de modèles invariants (voir chapitre 2). A notre connaissance, le seul auteur à avoir effectué une analyse en tenant compte de tous les groupes de symétrie des équations de Navier-Stokes est Oberlack ([101, 103]). Notre but est ici d'enrichir son analyse en l'étendant à des modèles autres que ceux qu'il a considérés.

Dans nos analyses, on supposera que le filtre test éventuel ne détruit pas les symétries des équations, c'est-à-dire qu'il est tel que

$$G_{\widetilde{\overline{\delta}}} * \widehat{\varphi} = \widehat{G_{\widetilde{\overline{\delta}}} * \varphi} \qquad \text{ou} \qquad \widetilde{\widehat{\varphi}} = \widehat{\widetilde{\varphi}}$$

pour toute quantité transformée φ, si $G_{\widetilde{\overline{\delta}}}$ est le noyau et $\widetilde{\overline{\delta}}$ la longueur de coupure. On étudiera les conséquences de cette hypothèse une fois que les analyses seront faites.

On va prendre les symétries par catégories :

- la catégorie des translations formée par la translation temporelle, la transformation de pression et la transformation galiléenne généralisée,
- la rotation et la réflection,
- les changements d'échelle, et
- l'indifférence matérielle

1.3.1 L'invariance par les translations

Il est clair que les équations (1.34) ne sont pas modifiées par les translations temporelle et de pression

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}) \mapsto (t + a, x, \overline{u}, \overline{p})$$

et

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}) \mapsto (t, x, \overline{u}, \overline{p} + \zeta(t))$$

du moment que le modèle τ ne fait pas intervenir directement le temps et la pression filtrée. Ce qui est le cas de tous les modèles.

Considérons maintenant la transformation galiléenne généralisée

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}) \mapsto (t, x + \alpha(t), \overline{u} + \alpha'(t), \overline{p} - x \cdot \alpha''(t)) .$$

Prenons alors les modèles.

- Tous les modèles qui ne font intervenir x et $\overline{u}$ qu'à travers $\nabla\overline{u}$ ou à travers $\overline{S}$ sont invariants car

$$\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}} = \nabla\widehat{\overline{u}} = \nabla\overline{u}.$$

- Les modèles qui restent, c'est-à-dire le modèle dynamique et le modèle de similarité d'échelles, sont également invariants car

$$\widetilde{(\overline{u}+\alpha')\otimes(\overline{u}+\alpha')}-\widetilde{(\overline{u}+\alpha')}\otimes\widetilde{(\overline{u}+\alpha')}=\widetilde{\overline{u}\otimes\overline{u}}-\widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}},$$

α' n'étant pas affecté par le filtre puisqu'il ne dépend pas de x.

1.3.2 L'invariance par rotation et réflection

La rotation et la réflection peuvent être rassemblées en la transformation :

$$(t,x,u,p)\mapsto(t,\Upsilon x,\Upsilon u,p) \tag{1.35}$$

où Υ est la matrice (indépendante du temps) égale à R ou à Λ. Les équations de Navier-Stokes filtrées (1.34) sont invariantes par cette transformation si et seulement si

$$\widehat{\tau}=\Upsilon\tau\Upsilon^T. \tag{1.36}$$

Considérons alors les modèles.

- Pour le modèle de Smagorinsky, on a :

  $$\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}}=[\nabla(\widehat{\overline{u}})]\Upsilon^T=[\nabla(\Upsilon\overline{u})]\Upsilon^T=\Upsilon[\nabla\overline{u}]\Upsilon^T.$$

  D'où :

  $$\widehat{\overline{S}}=\Upsilon\overline{S}\Upsilon^T,\qquad|\widehat{\overline{S}}|=|\overline{S}|,$$

  ce qui conduit à (1.36) et démontre l'invariance.
- Pour le modèle de similarité d'échelle, il suffit de remarquer que

  $$\widehat{\overline{u}}\otimes\widehat{\overline{u}}=(\Upsilon\overline{u})\otimes(\Upsilon\overline{u})=(\Upsilon\overline{u})(\Upsilon\overline{u})^T=\Upsilon(\overline{u})(\overline{u})^T\Upsilon^T=\Upsilon(\overline{u}\otimes\overline{u})\Upsilon^T$$

  pour déduire l'invariance.
- Il en est de même pour le modèle dynamique car la trace est invariante par changement de repère.
- Le modèle de fonction de structure est invariant car la fonction $\overline{\mathbf{F}}_2$ ne change pas par la transformation (1.35).
- Pour les modèles du type gradient, on a :

  $$(\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}})\ (\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}})^T=(\Upsilon\nabla\overline{u}\Upsilon^T)\ (\Upsilon\nabla\overline{u}^T\Upsilon^T)=\Upsilon[\nabla\overline{u}\ \nabla\overline{u}^T]\Upsilon^T.$$

Cela conduit à (1.36), et donc à l'invariance.

- Et enfin, pour les modèles du type Lund et Novikov, comme on a :

$$\widehat{\overline{S}^k}\ \widehat{\overline{W}^m} \;=\; \Upsilon\ \overline{S}^k\ \overline{W}^m\ \Upsilon^T$$

et

$$\widehat{\overline{W}^m}\ \widehat{\overline{S}^k} \;=\; \Upsilon\ \overline{W}^m\ \overline{S}^k\ \Upsilon^T$$

pour tous entiers naturels k et m et qu'il en est de même pour les déviateurs, on a l'invariance.

Tous les modèles présentés sont donc invariants par rotation et par réflection.

1.3.3 L'invariance par changements d'échelle

On va rassembler les deux changements d'échelle qui sont

$$(t, x, u, p) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}) = (a^2 t, ax, \frac{1}{a} u, \frac{1}{a^2} p).$$

et

$$(t, x, u, p, \nu) \mapsto (t, bx, bu, b^2 p, b^2 \nu)$$

en une seule transformation à deux paramètres pour les équations filtrées :

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}, \nu) \;\longmapsto\; (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{\overline{u}}, \widehat{\overline{p}}, \widehat{\nu}) = (a^2 t,\ ab\ x, \frac{b}{a}\ \overline{u}, \frac{b^2}{a^2}\ \overline{p}, b^2 \nu).$$

Le premier changement d'échelle correspond donc à $b = 1$ tandis que le second correspond à $a = 1$.

Les équations de Navier-Stokes filtrées conservent l'invariance par les deux changements d'échelle si et seulement si

$$\widehat{\tau} = \frac{b^2}{a^2} \tau. \tag{1.37}$$

Comme $\widehat{\overline{S}} = \dfrac{1}{a^2}\ \overline{S}$, cette condition est équivalente à :

$$\widehat{\nu}_{sm} = b^2 \nu_{sm}. \tag{1.38}$$

dans le cas d'un modèle de viscosité de sous-maille.

- Pour le modèle de Smagorinsky, on a :

$$\widehat{\nu}_{sm} = C_s\overline{\delta}^2|\widehat{\overline{S}}| = \frac{1}{a^2}C_s\overline{\delta}^2|\overline{S}| = \frac{1}{a^2}\nu_{sm}.$$

  Ce qui signifie que le modèle n'est invariant ni par le premier ni par le second changement d'échelle. Signalons que $\overline{\delta}$ ne varie pas lorsqu'on applique la transformation parce que c'est une grandeur externe à l'écoulement et qu'il n'a aucune dépendance en les variables de l'écoulement.
- La procédure dynamique répare la non-invariance par changement d'échelle car

$$\widehat{C}_d = a^2b^2C_d$$

  et que donc

$$\widehat{\nu}_{sm} = \widehat{C}_d\overline{\delta}^2|\widehat{\overline{S}}| = b^2C_d\overline{\delta}^2|\overline{S}|.$$

  La relation (1.38) est bien vérifiée.
- Pour le modèle de fonction de structure, on a :

$$\widehat{\nu}_{sm} = C_{SF}\overline{\delta}\sqrt{\widehat{\overline{\mathbf{F}}_2}} = \frac{b}{a}C_{SF}\overline{\delta}\sqrt{\overline{\mathbf{F}}_2} = \frac{b}{a}\nu_{sm},$$

  Ce qui montre que le modèle n'est pas invariant.
- Pour le modèle de gradient, on a :

$$\widehat{\tau} = \frac{\overline{\delta}^2}{12}\left(\frac{1}{a^2}\nabla\overline{u}\right)\left(\frac{1}{a^2}\nabla\overline{u}\right)^T = \frac{1}{a^4}\tau.$$

  Aucun modèle du type gradient ne vérifie donc (1.37) et n'est invariant par aucun des deux changement d'échelle.
- Le modèle de similarité d'échelle est, quant à lui, invariant car

$$\widehat{\tau} = \widetilde{\widehat{\overline{u}}\otimes\widehat{\overline{u}}} - \widetilde{\widehat{\overline{u}}}\otimes\widetilde{\widehat{\overline{u}}} = \frac{b^2}{a^2}\left(\widetilde{\overline{u}\otimes\overline{u}} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}}\right) = \frac{b^2}{a^2}\,\tau.$$

- Enfin, les modèles du type Lund et Novikov ont un terme similaire au modèle de Smagorinsky. Cela suffit pour conclure qu'ils ne sont pas invariants par changements d'échelle.

En fait, aucun des modèles faisant explicitement intervenir la longueur de coupure $\overline{\delta}$ ne respecte l'invariance d'échelle. Ceci est dû au fait que $\overline{\delta}$ est une grandeur externe à l'écoulement. En effet, si $\overline{\delta}$ était une échelle de longueur interne qui se

transformerait comme x, les modèles vérifieraient (1.37). La procédure de calcul dynamique des constantes des modèles permet de retrouver l'invariance comme on le montrera dans le chapitre 2. La raison est que lorsqu'on applique cette procédure, il n'y a plus de grandeur externe. Par exemple, le modèle de Smagorinsky dynamique peut s'écrire :

$$\tau = \frac{(\widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}}) : M'}{M' : M'} \, |\overline{S}|\overline{S}$$

où

$$M' = \left[\, (\widetilde{\overline{\delta}}/\overline{\delta})^2 |\widetilde{\overline{S}}|\widetilde{\overline{S}} - \widetilde{|\overline{S}|\overline{S}} \, \right].$$

C'est donc le rapport $(\widetilde{\overline{\delta}}/\overline{\delta})$ qui est présent dans le modèle mais pas $\widetilde{\overline{\delta}}$ seul ni $\overline{\delta}$ seul.

A part le modèle dynamique, seul le modèle de similarité, qui ne fait pas intervenir $\overline{\delta}$, est invariant par les changements d'échelle parmi les modèles cités dans la section 1.1.4.

Le non-respect de l'invariance d'échelle peut être très dommageable pour un modèle car cela l'empêche de vérifier les lois d'échelle. Oberlack a aussi montré ([101]), à travers les corrélations, qu'un modèle faisant intervenir une longueur externe comme $\overline{\delta}$ ne peut pas capter toutes les lois d'échelle. Pour un modèle non invariant, l'utilisation d'une fonction de paroi s'impose donc.

Il nous reste maintenant l'indifférence matérielle.

1.3.4 L'indifférence matérielle

L'indifférence matérielle correspond à la rotation plane à vitesse angulaire constante ω suivante, appliquée à un écoulement qu'on suppose bidimensionnel :

$$\widehat{\ } \ : \ (t, x, \overline{u}, \overline{p}) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{\overline{u}}, \widehat{\overline{p}}) \quad \text{avec :}$$

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{x} = R(t) \; x, \qquad \widehat{\overline{u}} = R(t) \; \overline{u} + R'(t) \; x, \qquad \widehat{\overline{p}} = \overline{p} - 3\omega\overline{\psi} + \frac{1}{2}\omega^2 \|x\|^2,$$

$\overline{\psi}$ étant défini par $\overline{u} = \text{rot}(\overline{\psi} e_3)$. Elle est conservée par les équations de Navier-Stokes filtrées si le modèle vérifie la relation (on n'écrira plus la dépendance de R à t) :

$$\widehat{\tau} = R\tau\, R^T. \tag{1.39}$$

- L'objectivité de $\overline{S}$ (voir section 1.2.3) conduit à l'invariance du modèle de Smagorinsky.
- Pour le modèle de similarité, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\widehat{\overline{u}}\otimes\widehat{\overline{u}}} - \widetilde{\widehat{\overline{u}}}\otimes\widetilde{\widehat{\overline{u}}} &= R(\widetilde{\overline{u}\otimes\overline{u}} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}})R^T + R(\widetilde{\overline{u}\otimes x} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{x})R'^T \\ &+ R'(\widetilde{x\otimes\overline{u}} - \widetilde{x}\otimes\widetilde{\overline{u}})R^T + R'(\widetilde{x\otimes x} - \widetilde{x}\otimes\widetilde{x})R'^T.\end{aligned}$$

  Donc, si le filtre test vérifie les conditions suivantes, le modèle de similarité est invariant :

$$(\widetilde{\overline{u}\otimes x} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{x}) = 0,$$

$$(\widetilde{x\otimes\overline{u}} - \widetilde{x}\otimes\widetilde{\overline{u}}) = 0,$$

$$(\widetilde{x\otimes x} - \widetilde{x}\otimes\widetilde{x}) = 0.$$

  Tous les filtres n'ont pas ces propriétés là. Par exemple, pour le filtre porte, on a (voir section 1.1.3) :

$$(\widetilde{\overline{u}\otimes x} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{x}) = O(\widetilde{\overline{\delta}}),$$

$$(\widetilde{x\otimes\overline{u}} - \widetilde{x}\otimes\widetilde{\overline{u}}) = O(\widetilde{\overline{\delta}}),$$

$$(\widetilde{x\otimes x} - \widetilde{x}\otimes\widetilde{x}) = O(\widetilde{\overline{\delta}}^2).$$

- Sous les mêmes conditions sur le filtre test, le modèle dynamique est également invariant.
- Le modèle de fonction de structure est invariant si et seulement si ν_{sm} reste inchangé lorsqu'on applique la transformation. Cela est équivalent à demander à ce que la fonction $\overline{F}_2$ soit inchangée.
  Notons $\overline{u}_{x'}$ la fonction : $x \mapsto \overline{u}(x + x')$. La fonction de structure vaut alors :

$$\overline{F}_2 = \int_{||x'||=\overline{\delta}} \|\overline{u} - \overline{u}_{x'}\|^2 \,\mathrm{d}x'.$$

  D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{\overline{F}}_2 &= \int_{||x'||=\overline{\delta}} \left\| \left[R\overline{u} + R'x\right] - \left[R\overline{u}_{x'} + R'x + R'x'\right] \right\|^2 \, \mathrm{d}x' \\ &= \int_{||x'||=\overline{\delta}} \|\overline{u} - \overline{u}_{x'} - R^T R'x'\|^2 \, \mathrm{d}x'.\end{aligned}$$

En développant, il suit :

$$\begin{aligned}\widehat{\overline{F}}_2 &= \overline{F}_2 + \omega^2 \int_{||x'||=\overline{\delta}} \|x'\|^2 \, \mathrm{d}x' - 2\omega \int_{||x'||=\overline{\delta}} [\overline{u} - \overline{u}_{x'}]^T \, [e_3 \times x'] \, \mathrm{d}x' \\ &\quad \text{sachant que } R^T R'x' = \omega J x' = e_3 \times x', \\ &= \overline{F}_2 + 2\pi\omega^2 \overline{\delta}^3 - 2\omega \int_{||x'||=\overline{\delta}} [\overline{u} - \overline{u}_{x'}]^T \, [e_3 \times x'] \, \mathrm{d}x'.\end{aligned}$$

On n'a donc pas l'égalité entre $\widehat{\overline{F}}_2$ et F_2 pour tout $\overline{u}$ (le cas particulier $\overline{u} = 0$ le témoigne). Cela prouve que le modèle de fonction de structure n'est pas invariant à cause de la non-objectivité de la fonction de structure.

- Pour le modèle de gradient, on a :

$$\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}} = R\nabla\overline{u}R^T + R'R^T = R\nabla\overline{u}R^T - \omega J$$

$$\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}}^T = R\nabla\overline{u}^T R^T + RR'^T = R\nabla\overline{u}^T R^T + \omega J$$

D'où

$$\widehat{(\nabla\overline{u}\ \nabla\overline{u}^T)} = R(\nabla\overline{u}\ \nabla\overline{u}^T)R^T + \omega R\nabla\overline{u}R^T J - \omega J R\nabla\overline{u}^T R^T + \omega^2 I_d.$$

La commutativité entre J et R entraîne finalement que

$$\widehat{\tau} = R\tau R^T + \omega R(\nabla\overline{u}J - J\nabla\overline{u}^T) + \omega^2 I_d.$$

Cela prouve que le modèle de gradient n'est pas invariant.

- Les autres modèles du type gradient héritent du défaut d'invariance du modèle de gradient.
- Il reste alors à analyser les modèles du même type que celui de Lund et Novikov. On va commencer par le modèle de Kosovic. Le tenseur de vorticité se transforme comme suit :

$$\widehat{\overline{W}} = \frac{\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}} - \widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}}^T}{2} = R\overline{W}R^T - \omega J.$$

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{\overline{S}}\,\widehat{\overline{W}} - \widehat{\overline{W}}\,\widehat{\overline{S}} &= (R\overline{S}\,\overline{W}R^T - \omega R\overline{S}\,R^T J) - (R\overline{W}\,\overline{S}R^T - \omega JR\overline{S}R^T) \\ &= R(\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S})R^T - \omega R(\overline{S}J - J\overline{S})R^T\end{aligned}$$

toujours par commutativité entre J et R. Par contre, $\overline{S}$ et J ne sont pas commutatifs. En effet, la symétrie de $\overline{S}$ permet d'écrire que

$$J\overline{S} + \overline{S}J = \mathrm{tr}(\overline{S})J.$$

D'où, $\overline{S}J = -J\overline{S}$. Donc

$$\widehat{\overline{S}}\,\widehat{\overline{W}} - \widehat{\overline{W}}\,\widehat{\overline{S}} = R(\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S})R^T - 2\omega R\overline{S}JR^T.$$

Le modèle de Kosovic n'est donc pas invariant.

- Enfin, rappelons que le modèle de Lund et Novikov s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau^d = C_1\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S} + C_2\overline{\delta}^2(\overline{S}^2)^d + C_3\overline{\delta}^2(\overline{W}^2)^d + C_4\overline{\delta}^2(\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S}) \\ +C_5\overline{\delta}^2\frac{1}{|\overline{S}|}(\overline{S}^2\overline{W} - \overline{S}\,\overline{W}^2).\end{aligned}$$

On a alors :

$$\widehat{\overline{W}}^2 = R\overline{W}^2R^T - \omega R(J\overline{W} + \overline{W}J)R^T - \omega^2 I_d.$$

Comme $\overline{W}$ est anti-symétrique et que l'écoulement est parallèle à un plan, $\overline{W}$ est forcément de la forme

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{w} \\ -\overline{w} & 0 \end{pmatrix}$$

(on a abandonné la troisième coordonnée qui n'a pas d'importance). Par suite,

$$J\overline{W} = \overline{W}J = -\overline{w}I_d.$$

Le tenseur $\overline{W}^2$ se transforme donc comme suit :

$$\widehat{\overline{W}}^2 = R\overline{W}^2R^T + (2\overline{w} - \omega)\omega I_d.$$

Voyons maintenant comment chaque terme du modèle qui contient $\overline{W}$ se transforme.

De la dernière équation, on obtient que

$$\widehat{(\overline{W}^2)^d} = R(\overline{W}^2)^d R^T$$

Ensuite, nous avons déjà vu que

$$\widehat{\overline{S}}\,\widehat{\overline{W}} - \widehat{\overline{W}}\,\widehat{\overline{S}} = R(\overline{S}\,\overline{W} - \overline{W}\,\overline{S})R^T - 2\omega R\overline{S}JR^T.$$

Et en dernier,

$$\widehat{\overline{S}}^2\widehat{\overline{W}} - \widehat{\overline{S}}\,\widehat{\overline{W}}^2 = R(\overline{S}^2\overline{W} - \overline{S}\,\overline{W}^2)R^T - \omega R\overline{S}^2R^TJ - (2\overline{w} - \omega)\omega R\overline{S}R^T.$$

En rassemblant tout cela, on arrive à

$$\widehat{\tau}^d = R\tau R^T - \omega\overline{\delta}^2 R\left[2C_4\overline{S}J + C_5\frac{1}{|\overline{S}|}\left(\overline{S}^2J - (2\overline{w} - \omega)\omega\overline{S}\right)\right]R^T.$$

On conclut que le modèle de Lund et Novikov n'est invariant que si C_4 et C_5 sont nuls.

A part le modèle de Smagorinsky, le modèle de similarité d'échelle et le modèle dynamique, aucun modèle ne respecte donc l'indifférence matérielle.

Remarque 1.6. *Les calculs ci-dessus ont montré au passage que le tenseur* $(\overline{W}^2)^d$ *est objectif même si le tenseur de vorticité* $\overline{W}$ *ne l'est pas.*

Cette remarque termine notre analyse de modèles.

Le tableau suivant résume les résultats de la précédente analyse. « Oui » signifie que le modèle est invariant par la transformation et « ***Non*** » signifie le contraire. Le nom des modèles et des transformation sont abrégés.

	$\mathbf{Trans_t}$	$\mathbf{Trans_p}$	**Rot**	$\mathbf{Trans_g}$	$\mathbf{Ech_1}$	$\mathbf{Ech_2}$	**Refl**	**Mat**
Smagorinsky	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	Oui
Dynamique	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui*
Structure	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	***Non***
Gradient	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	***Non***
Taylor	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	***Non***
Rationnel	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	***Non***
Similarité	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui*
Lund	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	***Non***
Kosovic	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui	***Non***

* *Sous réserve d'une bonne condition sur le filtre test.*

Ainsi, seuls le modèle dynamique et le modèle de similarité d'échelle gardent toutes les invariances des équations de départ parmi les modèles cités.

Pour effectuer les analyses précédentes, on a supposé que le filtre test ne détruit pas les invariances. Intéressons nous maintenant aux conséquences de cette hypothèse.

1.3.5 Conséquences sur le filtre test

On va reconsidérer les symétries par catégories et examiner les conséquences de l'hypothèse

$$\widetilde{\widehat{u}} = \widehat{\widetilde{u}}. \tag{1.40}$$

a) Les translations

Les filtres ne font pas intervenir le temps et la pression. Les translations temporelle et de pression n'interagissent donc pas avec le filtrage.

Pour la transformation galiléenne généralisée, x et u se transforment comme suit :

$$\widehat{x} = x + \alpha(t), \qquad \widehat{u}(\widehat{x}) = u(x) + \alpha'(t).$$

Si $\widehat{\Omega}$ est l'espace transformé, on a :

$$\widetilde{\widehat{u}}(\widehat{x}) = \int_{\widehat{\Omega}} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x} - \widehat{\xi}\,)\ \widehat{u}(\widehat{\xi}\,)\ \mathrm{d}\widehat{\xi} = \int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x} - \xi\ - \alpha)\ \widehat{u}(\xi\ + \alpha)\ \mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(x - \xi\,)\ \big[u(\xi\,) + \alpha'\big]\ \mathrm{d}\xi\ = \widetilde{u}(x) + \alpha' = \widehat{\widetilde{u}}(\widehat{x}).$$

Cela montre que la relation (1.40) est toujours vérifiée par la transformation galiléenne généralisée.

Les translations n'imposent donc aucune condition sur le filtrage test.

b) <u>La réflection et la rotation</u>

x et u se transforment de la manière suivante par une rotation ou réflection de matrice Υ :

$$\widehat{x} = \Upsilon x, \qquad \widehat{u}(\widehat{x}) = \Upsilon u(x).$$

Ensuite,

$$\widetilde{\widehat{u}}(\widehat{x}) = \int_{\widehat{\Omega}} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x} - \widehat{\xi}\,)\ \widehat{u}(\widehat{\xi}\,)\ \mathrm{d}\widehat{\xi} = \int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x} - \Upsilon\xi\,)\widehat{u}(\Upsilon\xi\,)\ \mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}\big[\Upsilon(x - \xi\,)\big]\Upsilon u(\xi\,)\ \mathrm{d}\xi\ = \Upsilon \int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}\big[\Upsilon(x - \xi\,)\big] u(\xi\,)\ \mathrm{d}\xi\,.$$

Ainsi, pour avoir (1.40), il faut et il suffit que

$$G_{\overline{\delta}}\big[\Upsilon(x - \xi\,)\big] = G_{\overline{\delta}}\big[x - \xi\,\big]. \tag{1.41}$$

Si Υ est une matrice de réflection, cette condition est équivalente à la symétrie de $G_{\overline{\delta}}$ par rapport aux axes de coordonnées. Et si Υ est une matrice de rotation, elle équivaut à l'isotropie du noyau. Cela est vérifié si et seulement si $G_{\overline{\delta}}(\xi\,)$ ne dépend de ξ que par sa norme. Comme c'est généralement le cas, on suppose qu'il en est ainsi dans toute la suite.

c) L'indifférence matérielle

La transformation correspondant à l'indifférence matérielle transforme x et u comme suit :

$$\widehat{x} = Rx, \qquad \widehat{u}(\widehat{x}) = Ru + R'x$$

où R est une matrice de rotation dépendante du temps. Calculons $\widetilde{\widehat{u}}$.

$$\widetilde{\widehat{u}}(\widehat{x}) = \int_{\widehat{\Omega}} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x} - \widehat{\xi}\,)\ \widehat{u}(\widehat{\xi}\,)\ \mathrm{d}\widehat{\xi} = \int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}\big[R(x - \xi\,)\big]\big(Ru(\xi\,) + R'\xi\,\big)\ \mathrm{d}\xi$$

En tenant compte de (1.41), il vient :

$$\widetilde{\widehat{u}}(\widehat{x}) = R\widetilde{u}(x) + R'\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(x - \xi\,)\ \xi\ \mathrm{d}\xi = Ru(x) + R'\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(\xi\,)\ (x - \xi\,)\ \mathrm{d}\xi$$

$$= Ru(x) + R'x - R'\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(\xi\,)\ \xi\ \mathrm{d}\xi\,.$$

Toujours grâce à (1.41), la dernière intégrale est nulle. Donc, sans condition supplémentaire sur le filtre, on a toujours :

$$\widetilde{\widehat{u}} = \widehat{\widetilde{u}}.$$

d) Les changements d'échelle

Les deux changements d'échelle transforment x et u de la manière suivante

$$\widehat{x} = ab\ x, \qquad \widehat{u} = \frac{b}{a}\ u.$$

On va chercher les filtres de qui vérifient toujours la condition de normalisation (1.8) lorsqu'on applique les changements d'échelle. Supposons alors qu'après avoir normalisé G dans l'espace transformé, on obtienne un filtre dont le noyau est $\check{G}$. Pour avoir (1.40), il faut que

$$\check{G} * \widehat{u} = \widehat{\check{G} * u} \tag{1.42}$$

Cela signifie que

$$\int_{\widehat{\Omega}} \check{G}(\widehat{x}-\widehat{\xi}\,)\,\widehat{u}(\widehat{\xi}\,)\,\mathrm{d}\widehat{\xi} = \frac{b}{a}\int_{\Omega} \check{G}(x-\xi\,)\,u(\xi\,)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

ou encore

$$\frac{\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x}-\widehat{\xi}\,)\,\widehat{u}(\widehat{\xi}\,)\,\mathrm{d}\widehat{\xi}}{\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}} G_{\overline{\delta}}(\widehat{x}-\widehat{\xi}\,)\,\mathrm{d}\widehat{\xi}} = \frac{b}{a}\;\frac{\displaystyle\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(x-\xi\,)\,u(\xi\,)\,\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(x-\xi\,)\,\mathrm{d}\xi\,.}$$

En calculant le premier membre, on peut récrire cette condition comme suit

$$\frac{b}{a}\;\frac{\displaystyle\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(ab\big[x-\xi\,\big]\,)\,u(\xi\,)\,\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(ab\big[x-\xi\,\big]\,)\,\mathrm{d}\xi} = \frac{b}{a}\;\frac{\displaystyle\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(x-\xi\,)\,u(\xi\,)\,\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_{\Omega} G_{\overline{\delta}}(x-\xi\,)\,\mathrm{d}\xi\,.}$$

Pour la vérifier, il suffit que ab puisse sortir de l'argument de $G_{\overline{\delta}}$. Autrement dit, il suffit que $G_{\overline{\delta}}$ soit homogène. Cela conduit à :

$$G_{\overline{\delta}}(x-\xi\,) = A\|x-\xi\,\|^s$$

où A et s sont des constantes. Inversement, un filtre de la forme (1.3.5) vérifie également (1.42).

Un exemple de tel filtre a pour noyau :

$$G_{\widetilde{\overline{\delta}}}(x) = \frac{s+3}{4\pi\widetilde{\overline{\delta}}^{\,s+3}}\,\|x^s\|\;\mathbf{1}_{B(0,\widetilde{\overline{\delta}})}(x), \tag{1.43}$$

où s est un réel tel que $s > -3$ si la dimension est $n = 3$ et $B(0,\widetilde{\overline{\delta}})$ est la boule de centre O et de rayon $\widetilde{\overline{\delta}}$ au sens de la norme euclidienne. Le filtre porte en est un exemple. Il correspond au cas $s = 0$.

Si un nombre assez important d'études théoriques ont été menées sur l'application de la LES aux équations de Navier-Stokes, peu d'auteurs se sont penché sur le cas de la convection thermique qui, pourtant, a aussi son importance dans l'étude de la turbulence. A notre connaissance, aucun auteur n'a par exemple effectué d'analyse de modèles par rapport à ces symétries. Cette constatation nous pousse à étendre

l'analyse faite sur les équations de Navier-Stokes aux équations de la convection thermique. Ainsi, la section suivante de ce chapitre sera consacrée à l'application de la LES à la convection thermique. Une étude de l'erreur de commutation sera alors faite. Puis, on donnera quelques exemples de modèles de sous-maille. On calculera ensuite le groupe de symétrie des équations de la convection thermique et on terminera sur l'analyse des modèles.

1.4 La LES pour la convection thermique

Considérons un écoulement de fluide newtonien dans un domaine régulier Ω, de frontière Γ. Appelons β le coefficient d'expansion thermique, et κ la diffusivité thermique. Puis, notons g l'accélération de la pesanteur. L'écoulement est alors régi par les équations de la convection thermique suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\nu \operatorname{div} S - \beta g \theta \, e_g = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\theta u) - \kappa \operatorname{div}(\nabla \theta) = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{1.44}$$

où θ la température (ou plus précisément, la différence entre la température absolue et une température de référence T_{ref}) et e_g le vecteur unitaire vertical ascendant qui, selon le repère choisi, peut être le vecteur e_3 ou le vecteur e_2.

Supposons que le bord du domaine se décompose en une partie (ou un ensemble de parties) isotherme Γ_{is} et une partie adiabatique Γ_{ad}. Sur ce bord et à l'instant initial, on imposera par exemple des conditions du type suivant :

$$\begin{aligned} &\triangleright \text{ sur } \Gamma_{is} && : \quad u(t,x) = \gamma_{is}(t,x), \quad \theta(t,x) = \vartheta_{is} \\ &\triangleright \text{ sur } \Gamma_{ad} && : \quad u(t,x) = \gamma_{ad}(t,x), \quad \nabla\theta(t,x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \\ &\triangleright \text{ sur } \Omega \text{ à } t = 0 : && \quad u(0,x) = \gamma(x). \end{aligned}$$

Selon ces conditions, on peut être en présence de convection thermique naturelle, de convection thermique forcée ou de convection thermique mixte.

On va appliquer le filtrage à ces équations.

1.4.1 Filtrage des équations

Comme ce qui a été fait pour la vitesse et la pression dans (1.3), on définit la température filtrée par

$$\overline{\theta}(t,x) = (G_{\overline{\delta}} * \theta)(t,x) = \int_\Omega G_{\overline{\delta}}(x-\xi)\ \theta(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

Si on néglige l'erreur de commutation entre le filtre et les opérateurs de dérivation, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \ \mathrm{div}(\overline{u}\otimes\overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla\overline{p} - 2\nu\,\mathrm{div}\overline{S} + \ \mathrm{div}\tau - \beta g\overline{\theta}\, e_g = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \ \mathrm{div}(\overline{\theta}\overline{u}) - \kappa\,\mathrm{div}(\nabla\overline{\theta}) + \ \mathrm{div}\,\pi = 0 \\ \mathrm{div}\overline{u} = 0. \end{cases} \tag{1.45}$$

$\tau = \overline{u\otimes u} - \overline{u}\otimes\overline{u}$ est toujours le tenseur de sous-maille et $\pi = \overline{\theta u} - \overline{\theta}\overline{u}$ est le flux de sous-maille. Pour les conditions au bord et initiales on a :

$$\begin{cases} \overline{u} = \overline{\gamma}_{is}, \quad \overline{\theta} = \vartheta_{is} & \text{sur } \Gamma_{is}, \\ \overline{u} = \overline{\gamma}_{ad}, \quad \nabla\overline{\theta}\,.\,\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{ad}, \\ \overline{u} = \overline{\gamma} \qquad \text{sur } \Omega \text{ à } t = 0. \end{cases}$$

Les erreurs de commutation sont les mêmes que dans le cas des équations de Navier-Stokes (1.4) pour les première et dernière équations de (1.45). Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, l'erreur est :

$$\overline{[u\otimes u]n} + \overline{\sigma\mathbf{n}}.$$

Etant donné le type de condition au bord qu'on a pris, la contribution de la pression au second terme ne s'annule pas, tandis que les autres termes s'annulent sur les parois solides. Pour l'équation de continuité, l'erreur est

$$\overline{u\,.\,\mathbf{n}}$$

Elle s'annule sur les parois solides ou si la vitesse imposée est parallèle à la paroi. Enfin pour l'équation de la température, l'erreur vaut :

$$\int_\Gamma G(x-s)\,\theta(s)\,u(s)\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}(s)\;\mathrm{d}s + \int_\Gamma G(x-s)\,\nabla\theta(s)\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}(s)\;\mathrm{d}s = \overline{\theta u\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}} + \overline{\nabla\theta\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}}.$$

Cette expression s'annule sur les parois solides adiabatiques (où $\gamma_{ad} = 0$). Par contre, sur les parois isothermes, le dernier terme peut subsister.

Dans la suite de ce document, on négligera ces erreurs de commutation.

Pour pouvoir les résoudre, il nous faut maintenant fermer les équations (1.45). Pour cela, il faut modéliser τ et π. Contrairement au cas des équations de Navier-Stokes, il y a relativement peu de modèles disponibles pour la convection thermique. Il n'existe donc pas encore d'ouvrages qui, comme ceux de Sagaut [122, 123] dans le cas de Navier-Stokes, offre un éventail de modèles. Ainsi, on va exposer ici les quelques modèles courants dans la littérature pour en faire une synthèse.

1.4.2 Quelques modèles usuels

La plupart des modèles de sous-maille en convection thermique se basent sur la notion de viscosité et de diffusivité de sous-maille. Nous verrons deux catégories de tels modèles : ceux inspirés du modèle de Smagorinsky et ceux dérivant du modèle d'Eidson. Après cela, on donnera aussi un exemple de modèle qui n'utilise pas le concept de viscosité et de diffusivité de sous-maille, fondé sur l'hypothèse de similarité d'échelle de Bardina.

a) Modèles de type Smagorinsky

Les modèles de viscosité et de diffusivité de sous-maille supposent que le tenseur de sous-maille représente une certaine dissipation,

$$\tau^d = -\nu_{sm}\overline{S},$$

puis, par l'hypothèse de gradient-diffusion généralisée , que le flux de sous-maille peut se mettre sous la forme :

$$\pi = -\kappa_{sm}\nabla\overline{\theta}.$$

Dans ce cas, les équations (1.45) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla \overline{p} - 2\operatorname{div}(\nu + \nu_{sm})\overline{S} - \beta g \overline{\theta}\, e_g = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\theta}\overline{u}) - \operatorname{div}(\kappa + \kappa_{sm})\nabla \overline{\theta} = 0 \\ \operatorname{div}\overline{u} = 0 \end{cases} \tag{1.46}$$

Ce sont donc ν_{sm} et κ_{sm} qu'il faut modéliser.

Des simulations numériques ([73]) montre que le rapport

$$Pr_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{\kappa_{sm}}$$

appelé nombre de Prandtl de sous-maille peut être pris constant (entre 0.3 et 0.5). Si on utilise donc le modèle de Smagorinsky pour approximer τ, on obtient

$$\begin{aligned} \nu_{sm} &= C_s \overline{\delta}^2 |\overline{S}| \\ \kappa_{sm} &= \frac{C_s \overline{\delta}^2}{Pr_{sm}} |\overline{S}|. \end{aligned}$$

C_s étant la constante de Smagorinsky.

Modèle dynamique

On peut évaluer les constantes du modèle de Smagorinsky par la procédure dynamique de Germano-Lilly. Cela donne les expressions suivantes de ν_{sm} et de κ_{sm} :

$$\begin{aligned} \nu_{sm} &= \frac{\operatorname{tr}(LM)}{\operatorname{tr}(M^2)} \overline{\delta}^2 |\overline{S}| \\ \kappa_{sm} &= \frac{\operatorname{tr}(\mathcal{LM})}{\operatorname{tr}(\mathcal{M}^2)} \overline{\delta}^2 |\overline{S}| \end{aligned}$$

où $\mathcal{L} = \widetilde{\overline{u}\overline{\theta}} - \widetilde{\overline{u}}\widetilde{\overline{\theta}}$ et $\mathcal{M} = \overline{\delta}^2 \widetilde{\overline{S}\,\nabla\overline{\theta}} - \widetilde{\overline{\delta}}^2 \widetilde{\overline{S}}\,\nabla\widetilde{\overline{\theta}}$. Le symbole « $\widetilde{.}$ » désigne un filtrage test.

b) <u>Modèles d'Eidson</u>

Pour le modèle d'Eidson ([37, 107]) , on prend ν_{sm} et κ_{sm} comme fonctions du taux de dissipation ε et de la longueur de coupure $\overline{\delta}$, ce qui donne après analyse dimensionnelle :

$$\nu_{sm} = C_E \varepsilon^{1/3} \overline{\delta}^{4/3}, \qquad \kappa_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{Pr_{sm}}.$$

Eidson inclut alors la poussée thermique dans le calcul de la production d'énergie qui prend la forme suivante :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\tau^d \overline{S}) + \beta g \ \pi_g.$$

où π_g est la composante de π selon l'axe dirigé par e_g. En admettant l'hypothèse d'équilibre local qui suppose que $\varepsilon_p = \varepsilon$, ces relations conduisent à l'expression de ν_{sm} puis de κ_{sm} :

$$\begin{aligned} \nu_{sm} &= C_E \overline{\delta}^2 \left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_g} \right)^{1/2}, \\ \kappa_{sm} &= \frac{C_E \overline{\delta}^2}{Pr_{sm}} \left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_g} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

x_g étant la composante de x selon l'axe dirigé par e_g.

Des études théoriques et numériques ont conduit à l'évaluation de C_E (voir [37]). Par rapport à celui de Smagorinsky, ce modèle a plus de capacité à prendre en compte le couplage entre la vitesse et la température. En revanche, il nécessite un traitement particulier lorsque

$$|\overline{S}|^2 < \frac{\beta g}{Pr_{sm}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_g}.$$

On met généralement ν_{sm} à zéro dans ce cas.

Modèle d'Eidson modifié

Pour éviter la mise à zero de ν_{sm} dans le modèle d'Eidson, Peng et Davidson ([106]) propose la modification suivante :

$$\nu_{sm} = C_E\overline{\delta}^2\frac{1}{|\overline{S}|}\left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_g}\right),$$

$$\kappa_{sm} = \frac{C_E\overline{\delta}^2}{Pr_{sm}}\frac{1}{|\overline{S}|}\left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_g}\right).$$

Les auteurs n'ont pas jugé nécessaire l'hypothèse d'équilibre local, qui n'est plus satisfaite ici. Notons que ce modèle comporte une partie correspondant au modèle de Smagorinsky.

D'autres modèles se basant sur le concept de viscosité et diffusivité de sous-maille ont été construits. On trouve par exemple d'autres modèles de Peng et Davidson dans [106] et [108], qui sont du même type que le modèle d'Eidson modifié. On peut aussi mentionner les modèles mixtes de Sergent *et al.* ([127, 129, 128]) développés en partie au LEPTAB, qui s'inspire du modèle d'échelle mixte ([121]) et qui fait intervenir l'équation d'évolution de l'énergie cinétique de sous-maille.

Peu sont les modèles n'utilisant pas ce concept de viscosité et diffusivité de sous-maille. La plupart de tels modèles se basent sur l'hypothèse de similarité d'échelles.

c) Modèles de similarité d'échelles

En effectuant une simple transposition du modèle de Bardina, on obtient le modèle suivant :

$$\tau^d = C_1(\widetilde{\overline{u}\otimes\overline{u}} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}}),$$

$$\pi = C_2(\widetilde{\overline{\theta}\,\overline{u}} - \widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{\overline{u}}).$$

Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, il existe des variantes en évaluant par exemple les constantes d'une manière dynamique pour améliorer les performances, ou bien en combinant avec le modèle de Smagorinsky pour plus de dissipation ([127, 92]).

Résumons alors ces différents modèles dans le tableau suivant.

Modèle de Smagorinsky

$$\tau^d = C_s\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S} \qquad \pi = \frac{C_s\overline{\delta}^2}{Pr_{sm}}|\overline{S}|\nabla\overline{\theta}$$

Modèle dynamique

$$\tau^d = \frac{\mathrm{tr}(LM)}{\mathrm{tr}(M^2)}\overline{\delta}^2|\overline{S}|\overline{S} \qquad \pi = \frac{\mathrm{tr}(\mathcal{LM})}{\mathrm{tr}(\mathcal{M}^2)}\overline{\delta}^2|\overline{S}|\nabla\overline{\theta}$$

Modèle d'Eidson

$$\tau^d = C_E\overline{\delta}^2\left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_g}\right)^{1/2}\overline{S} \qquad \pi = \frac{C_E\overline{\delta}^2}{Pr_{sm}}\left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_g}\right)^{1/2}\nabla\overline{\theta}$$

Modèle d'Eidson modifié

$$\tau^d = C_E\overline{\delta}^2\frac{1}{|\overline{S}|}\left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_g}\right)\overline{S} \qquad \pi = \frac{C_E\overline{\delta}^2}{Pr_{sm}}\frac{1}{|\overline{S}|}\left(|\overline{S}|^2 - \frac{\beta g}{Pr_{sm}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_g}\right)\nabla\overline{\theta}$$

Modèle de similarité d'échelles

$$\tau^d = C_1(\widetilde{\overline{u}\otimes\overline{u}} - \widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}}) \qquad \pi = C_2(\widetilde{\overline{\theta}\,\overline{u}} - \widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{\overline{u}}).$$

Pour les raisons déjà évoquées, on va analyser ces différents modèles selon qu'ils respectent ou non l'invariance par les symétries. Avant cela, calculons le groupe de symétrie des équations de la convection thermique.

1.4.3 Le groupe de symétrie des équations de la convection thermique

Si on cherche les symétries à un paramètre

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{p}, \widehat{\theta})$$

des équations de la convection thermique (1.44), alors les générateurs prennent la forme suivante :

$$X \;=\; \xi_t \,\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \sum_{i=1}^{3} \xi_{x_i} \,\frac{\partial}{\partial x_i} \;+\; \sum_{i=1}^{3} \eta_{u_i} \,\frac{\partial}{\partial u_i} \;+\; \eta_p \,\frac{\partial}{\partial p} + \;\eta_\theta \,\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Pour simplifier les écritures, on va supposer dans ce paragraphe que l'axe vertical correspond à la troisième coordonnée, c'est-à-dire

$$e_g = e_3 \qquad \text{et} \qquad x_g = x_3.$$

En utilisant toujours le programme DESOLV, on trouve les générateurs infinitésimaux de (1.44) qui sont :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
Y_0 &= \zeta(t)\frac{\partial}{\partial p} \\
X_{12} &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2} \\
X_i &= \alpha_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_i'(t)\frac{\partial}{\partial u_i} - \rho\, x_i\, \alpha_i''(t)\frac{\partial}{\partial p}, \qquad i = 1,2,3 \\
Y_1' &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} x_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial}{\partial u_j} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - 3\theta\frac{\partial}{\partial \theta} \\
Z &= \beta g\, x_3\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Si on permet aussi à ν et κ de varier lors de la transformation alors on obtient un générateur infinitésimal indépendant supplémentaire :

$$Y_2' = x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial}{\partial u_j} + 2p\frac{\partial}{\partial p} + \theta\frac{\partial}{\partial \theta} + 2\nu\frac{\partial}{\partial \nu} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial \kappa}.$$

Avec ces générateurs, on déduit les groupes de symétrie (à un ou un nombre fini de paramètres) des équations (1.44).

Le groupe des translations temporelles

Les équations (1.44) sont invariantes par rapport aux translations temporelles

$$(t, x, u, p) \mapsto (t + a, x, u, p)$$

dont le groupe est engendré par X_0.

Le groupe des translations par rapport à la pression

Les translations par rapport à la pression s'écrivent :

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, x, u, p + \zeta(t), \theta).$$

où ζ est une fonction C^∞ arbitraire. Ici aussi, la pression n'est définie qu'à une fonction du temps près.

Le groupe des rotations horizontales

X_{12} engendre le groupe des rotations d'angle fixe a dans le plan horizontal :

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, Rx, Ru, p, \theta)$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par rapport au cas des équations de Navier-Stokes, on a perdu l'invariance par toute rotation non horizontale. Mathématiquement, ceci est dû au fait qu'ici, on ne néglige plus l'effet de la gravité et que le terme correspondant à la poussée thermique empêche l'invariance ; mais intuitivement, ceci s'explique par le fait que la force de gravité ne peut être que verticale, et que toute rotation affectant l'axe verticale ne préserve donc pas les équations.

Le groupe des transformations galiléennes généralisées

Comme les équations de Navier-Stokes, les équations de la convection thermique sont invariantes par les transformations galiléennes généralisées

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), p + \rho\, x \cdot \alpha''(t), \theta),$$

qui forment le groupe à trois paramètres engendré par les X_i, $i = 1, 2, 3$.

Le premier groupe de changements d'échelle

Y_1' génère le premier groupe de changements d'échelle :

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (a^2 t, ax, \frac{1}{a} u, \frac{1}{a^2} p, \frac{1}{a^3}\, \theta),$$

qui est simplement l'extension du premier groupe de changements d'échelle des équations de Navier-Stokes.

Le groupe des translations pression-température

En plus de l'invariance par rapport aux translations temporelles et de pression, les équations de la convection thermique sont invariantes par rapport à aux translations suivantes qui font intervenir la pression et la température

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, x, u, p + a\, \beta g\, x_3, \theta + a\frac{1}{\rho}).$$

Ces transformations sont générées par le champ de vecteur Z qui n'a pas de correspondant dans le cas des équations de Navier-Stokes.

Cette invariance signifie que si on augmente la température en tout point de l'écoulement d'une constante alors la vitesse ne change pas, tandis que la pression se trouve augmentée (ou diminuée) d'une fonction linéaire de la coordonnée verticale.

Enfin, il nous reste les transformations acceptant des variations de ν et de κ :

Le second groupe de changements d'échelle

Le second groupe de changements d'échelle est formé des transformations :

$$(t, x, u, p, \theta, \nu, \kappa) \mapsto (t, ax, au, a^2 p, a\theta, a^2 \nu, a^2 \kappa)$$

Si on associe ce groupe avec le premier groupe de changements d'échelle, on obtient le groupe de changements d'échelle à deux paramètres composé des transformations suivantes :

$$(t, x, u, p, \theta, \nu, \kappa) \mapsto (a^2 t, ab\, x, \frac{b}{a} u, \frac{b^2}{a^2} p, \frac{b}{a^3} \theta, b^2 \nu, b^2 \kappa)$$

où a et b sont des réels.

La théorie de Lie nous a donc permis de trouver tous les groupes de symétrie à un (nombre fini de) paramètre(s) des équations de la convection thermique (1.44). Voyons maintenant si, parmi les autres symétries des équations de Navier-Stokes, il y en a qui sont aussi symétries de (1.44). On va commencer par la réflection.

L'invariance par réflection

Si on applique la réflection telle qu'elle est définie pour les équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire comme étant la transformation :

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, \Lambda_i x, \Lambda_i u, p, \theta), \qquad i = 1, 2 \text{ ou } 3,$$

on obtient :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{t}} + \widehat{\mathrm{div}}(\widehat{u} \otimes \widehat{u}) + \frac{1}{\rho} \widehat{\nabla} \widehat{p} - 2\nu \widehat{\mathrm{div}} \widehat{S} - \beta g \widehat{\theta}\, e_3 =$$

$$\Lambda_i \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\nu\, \mathrm{div} S \right] - \beta g \theta\, e_3.$$

La matrice Λ_i peut être mis en facteur dans tout le second membre si $i = 1$ ou 2 car $\Lambda_1 = diag(-1, 1, 1)$ et $\Lambda_2 = diag(1, -1, 1)$ ne modifient pas la troisième composante du terme entre crochets. Par contre, lorsqu'on applique $\Lambda_3 = diag(1, 1, -1)$, le signe de cette troisième composante change. Donc, pour que Λ_i puisse se mettre en facteur lorsque $i = 3$, il faut que θ change aussi de signe. Pour avoir l'invariance des équations de la dynamique, les trois réflections doivent donc être définies par :

$$\begin{aligned}
(t, x, u, p, \theta) &\longmapsto (t, \Lambda_1 x, \Lambda_1 u, p, \theta), \\
(t, x, u, p, \theta) &\longmapsto (t, \Lambda_2 x, \Lambda_2 u, p, \theta), \\
(t, x, u, p, \theta) &\longmapsto (t, \Lambda_3 x, \Lambda_3 u, p, -\theta).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, ces trois transformations laissent invariantes les équations de la température et de l'incompressibilité. Les équations de la convection thermique sont

donc invariantes par le groupe des réflections dont les éléments sont les transformations :

$$(t, x, u, p, \theta) \longmapsto (t, \Lambda x, \Lambda u, p, \iota_3 \theta)$$

où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \iota_1 & 0 & 0 \\ 0 & \iota_2 & 0 \\ 0 & 0 & \iota_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \iota_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

L'indifférence matérielle

Les équations (1.44) ne sont pas invariantes par la transformation matérielle qui, rappelons-le, est une rotation plane dépendante du temps, appliquée à un écoulement évoluant parallèlement au même plan. En effet, comme la composante verticale a une importance particulière à cause de la gravité, alors, si l'écoulement évolue parallèlement à un plan, ce plan est nécessairement vertical (penser à une représentation de la cavité différentiellement chauffée, voir figure FIG. 1.9). Les seules rotations planes qu'on peut considérer sont donc les rotations planes verticales. Or, comme on l'a signalé précédemment, les équations (1.44) ne sont pas invariantes par rotation non horizontale. D'ailleurs, si on calcule les symétries d'un écoulement en deux dimensions, on retrouve toutes les symétries citées précédemment (adaptées à la dimension 2), sauf la rotation. On conclut que les équations de la convection thermique ne satisfont pas l'indifférence matérielle.

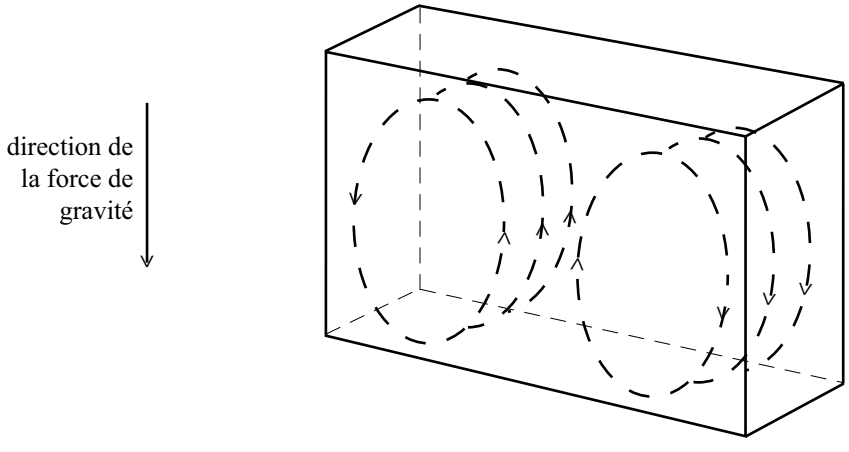


FIG. 1.9 – *Représentation d'une cavité différentiellement chauffée*

Le tableau suivant résume les symétries des équations de la convection thermique, avec éventuellement le générateur infinitésimale correspondant.

Translations temporelles ($\mathbf{Trans_t}$)

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t + a, x, u, p, \theta)$$

Translations de pression ($\mathbf{Trans_p}$)

$$Y_0 = \zeta(t)\frac{\partial}{\partial p}$$

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, x, u, p + \zeta(t))$$

Translations de pression-température ($\mathbf{Trans_{p\theta}}$)

$$Z = \beta g\, x_3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, x, u, p + a\,\beta g\, x_3, \theta + a\frac{1}{\rho})$$

Rotations ($\mathbf{Rot_3}$)

$$X_{12} = x_2\ \frac{\partial}{\partial x_1}\ -\ x_1\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ +\ u_2\ \frac{\partial}{\partial u_1}\ -\ u_1\ \frac{\partial}{\partial u_2}$$

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, R_3 x, R_3 u, p, \theta)$$

R_3 est la matrice de rotation dans le plan $(x_1 0 x_2)$

Transformations galiléennes généralisées ($\mathbf{Trans_g}$)

$$X_i = \alpha_i(t)\ \frac{\partial}{\partial x_i}\ +\ \alpha_i'(t)\ \frac{\partial}{\partial u_i}\ -\rho\, x_i\, \alpha_i''(t)\ \frac{\partial}{\partial p}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto \big(t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), p - \rho x \cdot \alpha''(t), \theta\big)$$

Premier changements d'échelle ($\mathbf{Ech_1}$)

$$Y_1' = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - 3\theta\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (a^2 t, ax, \frac{1}{a}u, \frac{1}{a^2}p, \frac{1}{a^3}\theta)$$

Second changements d'échelle ($\mathbf{Ech_2}$)

$$Y_2' = x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial}{\partial u_j} + 2p\frac{\partial}{\partial p} + \theta\frac{\partial}{\partial \theta} + 2\nu\frac{\partial}{\partial \nu} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial \kappa}$$

$$(t, x, u, p, \theta, \nu, \kappa) \mapsto (t, ax, au, a^2 p, a\theta, a^2\nu, a^2\kappa)$$

Réflections (Refl)

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, \Lambda x, \Lambda u, p, \iota_3\theta)$$

Λ est une matrice diagonale de la forme
$\Lambda = diag(\iota_1, \iota_2, \iota_3)$ et $\iota_i = \pm 1$

Toutes ces symétries vont maintenant nous permettre d'analyser la qualité des modèles.

1.4.4 Analyse des modèles par rapport aux symétries

On va ici compléter l'analyse qu'on a faite pour les équations de Navier-Stokes.

Comme on l'a déjà mentionné, pour le modèle de similarité d'échelles, τ possède toutes les propriétés du terme qu'il représente, c'est-à-dire de $(\overline{u \otimes u} - \overline{u}\otimes\overline{u})$, du point de vue des symétries. Il en est de même pour Π. Le modèle de similarité d'échelles est donc invariant par toutes les symétries. Il nous reste donc à analyser les autres modèles.

a) Invariance par les translations temporelle, de pression et galiléenne

Généralement, les modèles n'incluent ni le temps ni la pression. L'invariance par la translation temporelle

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}, \overline{\theta}) \mapsto (t + a, x, \overline{u}, \overline{p}, \overline{\theta})$$

et la translation de pression

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}, \overline{\theta}) \mapsto (t, x, \overline{u}, \overline{p} + \zeta(t), \overline{\theta})$$

ne pose donc pas de problème.

Ensuite, la transformation galiléenne généralisée modifie les variables de la manière suivante :

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}, \overline{\theta}) \mapsto (t, x + \alpha(t), \overline{u} + \alpha'(t), \overline{p} + \rho x \cdot \alpha''(t), \overline{\theta})$$

- Pour le modèle de Smagorinsky et les modèles d'Eidson, $\overline{u}$ n'intervient que par son gradient. Or,

  $$\widehat{\nabla}\widehat{\overline{u}} = \nabla\overline{u}.$$

  D'autre part, $\overline{\theta}$ n'est pas modifié par la transformation. Ces modèles sont donc invariants.
- Pour le modèle de similarité d'échelle, on a :

  $$\widetilde{\widehat{\overline{u}} \otimes \widehat{\overline{u}}} - \widetilde{\widehat{\overline{u}}} \otimes \widetilde{\widehat{\overline{u}}} = \widetilde{(\overline{u} + \alpha') \otimes (\overline{u} + \alpha')} - \widetilde{(\overline{u} + \alpha')} \otimes \widetilde{(\overline{u} + \alpha')} = \widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}}$$

  et

  $$\widetilde{\widehat{\overline{\theta}}\,\widehat{\overline{u}}} - \widetilde{\widehat{\overline{\theta}}}\,\widetilde{\widehat{\overline{u}}} = \widetilde{\overline{\theta}\,(\overline{u} + \alpha')} - \widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{(\overline{u} + \alpha')} = \widetilde{\overline{\theta}\,\overline{u}} - \widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{\overline{u}}.$$

  Le modèle est donc invariant.
- En rassemblant les résultats précédents, on montre enfin que le modèle dynamique est également invariant par la transformation galiléenne généralisée.

b) Invariance par la translation pression-température

Les équations filtrées (1.45) sont invariantes par la translation pression-température

$$(t, x, u, p, \theta) \mapsto (t, x, u, p + a\,\beta g\,x_3, \theta + a\frac{1}{\rho})$$

si et seulement si

$$\widehat{\tau} = \tau, \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Pi} = \Pi. \tag{1.47}$$

- Le modèle de Smagorinsky et les modèles d'Eidson ne font intervenir la température filtrée que par l'intermédiaire de ses dérivées et vérifient donc (1.47).
- D'autre part :

$$\widetilde{\widehat{\overline{\theta}}\,\widehat{\overline{u}}} - \widehat{\widetilde{\overline{\theta}}}\,\widehat{\widetilde{\overline{u}}} = (\widetilde{\overline{\theta}\,\overline{u}} + a\frac{1}{\rho}\widetilde{\overline{\theta}}) - (\widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{\overline{u}} + a\frac{1}{\rho}\widetilde{\overline{\theta}}) = \widetilde{\overline{\theta}\,\overline{u}} - \widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{\overline{u}}.$$

  Le modèle de similarité d'échelle, ainsi que le modèle dynamique sont donc invariants.

c) Invariance par réflexions et par rotation

Considérons d'abord les réflections dans les deux premières directions et la rotation. Le cas de la troisième réflection, qui transforme aussi θ sera traité à part.

Notons Υ l'une des matrices Λ_1, Λ_2 et R_3. Les équations filtrées (1.45) sont invariantes par les deux réflections et la rotation si et seulement si

$$\widehat{\tau} = \Upsilon\tau\Upsilon^T \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Pi} = \Upsilon\Pi. \tag{1.48}$$

- Puisque

$$\widehat{\overline{S}} = \Upsilon\overline{S}\Upsilon^T \qquad \text{et} \qquad \widehat{\nabla}\widehat{\overline{\theta}} = \Upsilon\nabla\overline{\theta}$$

  et que $\overline{\theta}$ n'est pas modifié, le modèle de Smagorinsky et les modèles d'Eidson vérifient (1.48) et sont donc invariants.
- De plus,

$$\widehat{\overline{u}} \otimes \widehat{\overline{u}} = \Upsilon(\overline{u} \otimes \overline{u})\Upsilon^T \qquad \text{et} \qquad \widehat{\overline{\theta}\overline{u}} = \Upsilon(\overline{\theta}\overline{u}).$$

  Cela conduit à l'invariance du modèle de similarité d'échelle puis du modèle dynamique.

Pour la troisième réflection, les équations filtrées sont invariantes si et seulement si

$$\widehat{\tau} = \Lambda_3\tau{\Lambda_3}^T = \tau \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Pi} = -\Lambda_3\Pi.$$

- Pour cette troisième réflection, on a :

$$\widehat{\overline{S}} = \overline{S}, \qquad \widehat{\nabla}\widehat{\overline{\theta}} = -\Lambda_3 \nabla\overline{\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\widehat{\overline{\theta}}}{\partial\widehat{x}_3} = \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_3}.$$

  Avec ces relations, on montre que les modèles de Smagorinsky et les modèles d'Eidson vérifient bien (1.4.4).
- Pour le modèle de similarité d'échelles et le modèle dynamique, on a :

$$\widehat{\overline{u}} \otimes \widehat{\overline{u}} = \overline{u} \otimes \overline{u} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\overline{\theta}}\widehat{\overline{u}} = -\Lambda_3 \overline{\theta}\overline{u}.$$

  Cela conduit à l'invariance des modèles.

d) Invariance par changements d'échelle

Les équations filtrées sont invariantes par les changements d'échelle

$$(t, x, \overline{u}, \overline{p}, \overline{\theta}, \nu, \kappa) \mapsto (a^2 t,\ abx,\ \frac{b}{a}\overline{u},\ \frac{b^2}{a^2}\overline{p},\ \frac{b}{a^3}\,\overline{\theta},\ b^2\nu,\ b^2\kappa)$$

si

$$\widehat{\tau} = \frac{b^2}{a^2}\,\tau \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Pi} = \frac{b^2}{a^4}\,\Pi.$$

- Comme

$$\widehat{\overline{S}} = \frac{1}{a^2}\,\overline{S} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\nabla}\widehat{\theta} = \frac{1}{a^4}\,\nabla\theta,$$

  on a, pour le modèle de Smagorinsky :

$$\widehat{\tau} = \frac{1}{a^4}\,\tau \qquad \text{et} \qquad \widehat{\nabla}\widehat{\theta} = \frac{1}{a^6}\,\Pi.$$

  Que ce soit par le premier changement d'échelle (correspondant à $b = 1$) ou par le second (correspondant à $a = 1$), ni τ ni Π n'est donc invariant.
- Les modèles d'Eidson possèdent un terme similaire à celui au modèle de Smagorinsky. Ils ne sont donc pas invariants.
- Le modèle de similarité d'échelle est invariant car

$$\widetilde{\widehat{\overline{u}} \otimes \widehat{\overline{u}}} - \widetilde{\widehat{\overline{u}}} \otimes \widetilde{\widehat{\overline{u}}} = \frac{b^2}{a^2}\,(\widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}})$$

et

$$\widetilde{\widehat{\overline{\theta}}\,\widehat{\overline{u}}} - \widetilde{\widehat{\overline{\theta}}}\,\widetilde{\widehat{\overline{u}}} = \frac{b^2}{a^2}\,(\widetilde{\overline{\theta}\,\overline{u}} - \widetilde{\overline{\theta}}\,\widetilde{\overline{u}}).$$

- En utilisant ces dernières relations, on montre que le modèle dynamique est aussi invariant.

Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, aucun modèle faisant intervenir directement $\overline{\delta}$ n'est invariant par changement d'échelle et la procédure dynamique répare la non-invariance du modèle de Smagorinsky, aussi bien pour τ que pour Π.

Le tableau suivant synthétise le résultat de notre analyse.

	$\mathbf{Trans_t}$	$\mathbf{Trans_p}$	$\mathbf{Trans_{p\theta}}$	$\mathbf{Trans_g}$	$\mathbf{Rot_3}$	$\mathbf{Ech_1}$	$\mathbf{Ech_2}$	**Refl**
Smagorinsky	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui
Dynamique	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Eidson	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui
Eidson modif.	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	***Non***	***Non***	Oui
Similarité	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

Seuls donc le modèle dynamique et le modèle de similarité d'échelles sont invariants par rapport au groupe de symétrie des équations de la convection thermique.

Dans ces quelques paragraphes, on a premièrement passé en revue les erreurs théoriques posées par la commutation entre le filtrage et la dérivation. On a alors vu qu'un bon choix de conditions aux limites peut réduire ces erreurs. Deuxièmement, on a montré l'inconsistance de beaucoup de modèles vis-à-vis des symétries des équations de Navier-Stokes ou des équations de la convection thermique. Cette inconsistance fait que les solutions calculées avec ces modèles perdent les propriétés des vraies solutions des équations et sont donc incapables de respecter par exemple les lois de conservation ou les lois d'échelle. Le prochaine grande étape, qui fera l'objet du second chapitre, est alors de proposer des modèles de LES qui respectent le groupe de symétrie des équations de départ (équations de Navier-Stokes et équations de la convection thermique). Mais avant cela, terminons ce chapitre par un passage

en revue des travaux qu'on a cités et qui montrent l'intérêt des symétries.

1.5 Revue des travaux d'autres auteurs sur les symétries

A la fin de la section (1.1.4), nous avons fait référence à des travaux de quelques auteurs dont Nœther, Oberlack, Fushchych *et al.* , Gandarias *et al.* , et d'Ünal. L'objectif de cette dernière section est de donner un petit aperçu de ces travaux.

1.5.1 Sur le théorème de Nœther

Le théorème de Nœther est un résultat assez bien connu. Il s'applique à des équations d'évolution qui dérivent d'un lagrangien. Il stipule qu'à chaque transformation qui laisse le lagrangien invariant correspond une loi de conservation (voir [99] pour le texte original en allemand, [100] pour une version anglaise, [74] pour une version française et historique, et [105] pour une théorie actualisée). Ce théorème ne peut pas être utilisé directement pour les équations de Navier-Stokes car celles-ci ne dérivent pas d'un lagrangien. En revanche, Ibragimov et Kolsrud ont proposé dans [66] une méthode qui permet de passer outre cette condition, pour certaines équations d'évolution. Le but de ce paragraphe est de décrire la démarche proposée, sans les détails qui, pour la continuité du document, sont laissés dans l'annexe B. Il conviendrait aussi de lire cet annexe au préalable pour plus de précision sur le théorème de Nœther.

Le théorème de Nœther s'applique aux équations d'évolution qui peuvent s'écrire sous forme d'une équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u} - \mathrm{Div}\,\frac{\partial L(u)}{\partial \dot{u}} = 0$$

où x désigne t et/ou x, $u = u(x)$, $\dot{u}$ désigne les dérivées de u et L est une fonction de x, de u et de $\dot{u}$. Div est l'opérateur de divergence par rapport à ξ :

$$f \longmapsto \mathrm{Div}\, f = \sum_i \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}.$$

Soit maintenant une équation d'évolution

$$F(x, u) = 0 \tag{1.49}$$

qui ne dérive pas forcément d'un lagrangien. On dira que cette équation dérive d'un « bilagrangien » si on peut trouver une fonction L de x, de u, d'une autre variable $v = v(x)$ et des dérivées $\dot{u}$ et $\dot{v}$ telle que l'équation (1.49) s'écrive sous la forme

$$\frac{\partial L(u,v)}{\partial v} - \mathrm{Div}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = 0.$$

Lorsque tel est le cas, on peut appliquer le théorème de Nœther au système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(u,v)}{\partial v} - \mathrm{Div}\,\dfrac{\partial L(u,v)}{\partial \dot{v}} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L(u,v)}{\partial u} - \mathrm{Div}\,\dfrac{\partial L(u,v)}{\partial \dot{u}} = 0. \end{cases} \tag{1.50}$$

puisque ce système peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial L(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} - \mathrm{Div}\,\frac{\partial L(\mathbf{u})}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = 0$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$, et cette dernière équation dérive du lagrangien $L(\mathbf{u})$. La deuxième équation de (1.50) est appelée équation adjointe.

En s'inspirant des exemples d'Ibragimov et de Kolsrud, nous montrons dans l'annexe B que les équations de Navier-Stokes dérivent d'un bilagrangien. On pourra donc leur appliquer le théorème de Nœther et déduire des lois de conservation.

Lors de la modélisation de la turbulence, si un modèle de turbulence détruit les symétries des équations alors on ne pourra plus retrouver ces lois de conservation.

1.5.2 Oberlack et les lois d'échelle

Dans ce paragraphe, on décrit rapidement la manière dont Oberlack a obtenu des lois d'échelle grâce aux symétries. Les détails de calcul peuvent être trouvés dans beaucoup de ses articles dont [102, 104].

Supposons qu'on a un écoulement stationnaire dans un canal comme sur la figure Fig. 1.10 ou bien qu'on a un écoulement quelconque mais qu'on se place proche d'une paroi solide (dans ce dernier cas, les lois d'échelle sont des lois de paroi). La composante $< u_1 >$ de la vitesse moyenne dépend alors uniquement de x_2, tandis que les autres composantes sont nulles.

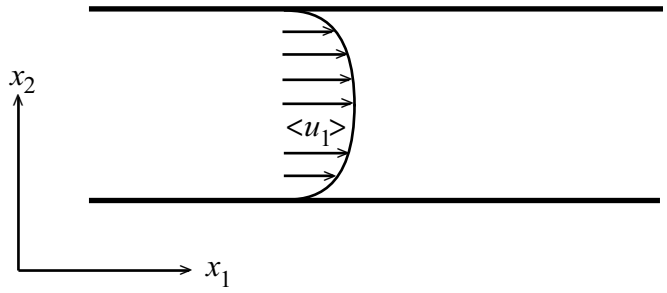


FIG. 1.10 – *Ecoulement plan*

En calculant les générateurs infinitésimaux (qui laissent aussi ν se transformer) des équations vérifiées par la fluctuation statistique de vitesse $u- < u >$, on déduit entre autres que

$$\xi_{x_2} = a_1 x_2 + a_3 \qquad \text{et}$$
$$\eta_{<u_1>} = (a_1 - a_4) < u_1 > + a_2.$$

où les a_i sont des réels arbitraires. Par ailleurs, si a est le paramètre de la transformation, on peut écrire que

$$\frac{\mathrm{d} < u_1 >}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\mathrm{d}\widehat{< u_1 >}}{\mathrm{d}\widehat{x}_2}\bigg|_{a=0} = \left(\frac{\mathrm{d}\widehat{< u_1 >}}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x_2}\right)\bigg|_{a=0} = \frac{\eta_{<u_1>}}{\xi_{x_2}}.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{a_1 x_2 + a_3} = \frac{\mathrm{d} < u_1 >}{(a_1 - a_4) < u_1 > + a_2}.$$

Enfin, en jouant sur les a_i, on obtient les lois d'échelles :

- Loi algébrique si $a_1 \notin \{0, a_4\}$:

$$< u_1 > = C_1 (a_1 x + a_3)^{1 - a_4/a_1} - \frac{a_2}{a_1 - a_4}$$

  où C_1 est une constante.
- Loi logarithmique si $a_1 = a_4 \neq 0$, $b \neq 0$:

$$< u_1 > = \frac{a_2}{a_1} \ln(x + \frac{a_3}{a_1}) + C_2$$

où C_2 est une constante.

- Loi exponentielle si $a_1 = 0$, $a_4 \neq 0$ et $a_3 \neq 0$:

$$< u_1 >= C_3 e^{-a_4 x/a_3} + \frac{a_2}{a_4}$$

où C_3 est une constante.

- Loi linéaire si $a_1 = a_4 = 0$, $a_2 \neq 0$ et $a_3 \neq 0$:

$$< u_1 >= \frac{a_2}{a_3}\, x_2 + C_4$$

où C_4 est une constante.

Si un modèle de turbulence ne respecte pas les symétries des équations alors le champ de vitesse obtenu peut ne plus suivre ces lois d'échelle.

1.5.3 Gandarias *et al.* et le modèle $\kappa - \varepsilon$

Dans [50], Gandarias *et al.* calculent des solutions des équations d'évolution de $\kappa - \varepsilon$, et montre l'existence de fronts progressifs (travelling wave) décroissants et bornés. Cela a été fait en réduisant les équations avec les groupes de symétrie. Rappelons qu'une équation où l'inconnue est une fonction $y(t, x)$ admet un front progressif s'il existe une fonction h et une constante v telle que

$$y(t, x) = h(x + vt)$$

soit solution.

On se place dans le cas de la dimension 1. Notons alors

$$u'' = u - < u >$$

la fluctuation statistique de vitesse,

$$S'' = \frac{1}{2}(\nabla u'' + \nabla u''^{T}) = \frac{\partial u''}{\partial x}$$

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} < \operatorname{tr} S''^2 >= \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u''}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$$

le taux de dissipation et

$$\kappa = u''^2$$

la densité d'énergie turbulente.

Considérons les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \kappa}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\kappa^2}{\varepsilon}\dfrac{\partial \kappa}{\partial x}\right) - \varepsilon \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \beta \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\kappa^2}{\varepsilon}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) - \gamma \dfrac{\varepsilon^2}{\kappa} \end{cases} \tag{1.51}$$

où les réels α, β et γ sont les paramètres du modèle.

Comme des simulations numériques conduisent à $\alpha \simeq \beta$, on suppose que $\alpha = \beta$. Dans ce cas, on montre que la solution vérifie :

$$\kappa(t,x) \;=\; (\gamma - 1)\,(t + t_0)\,\varepsilon(t,x) \tag{1.52}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$.

Le groupe de symétrie des équations (1.51) est engendré par les générateurs infinitésimaux suivants

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad x\frac{\partial}{\partial x} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial \kappa} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad t\frac{\partial}{\partial t} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial \kappa} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

En utilisant l'invariance par chacune des symétries sous-jacentes, on peut réduire les équations en d'autres équations plus simples, mais ici, on ne s'intéressera qu'à l'invariance par translation temporelle, engendré par X_0. Cette invariance permet de prendre $t_0 = 0$. Dans ce cas, en utilisant (1.52) on a :

$$(\gamma - 1)t\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \alpha(\gamma - 1)^3 t^3 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) + \gamma\varepsilon = 0. \tag{1.53}$$

Ecartons le cas trivial où $\gamma = 1$. Le groupe de symétrie de (1.53) est engendré par les quatre générateurs infinitésimaux

$$V_1 \frac{\partial}{\partial x}, \qquad V_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

$$V_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \qquad V_4 = t^{-\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\, t^{-\frac{2\gamma-3}{\gamma-1}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

La réduction par rapport à chaque combinaison de ces générateurs conduit à des solutions sous une forme particulière. Prenons le cas de V_2. V_2 correspond au changement d'échelle

$$(t, x, \varepsilon) \mapsto (t, ax, a^2\varepsilon)$$

Les solutions auto-similaires par rapport à cette transformation sont de la forme

$$\varepsilon = x^2 h(t)$$

où la fonction h vérifie (utiliser (1.53)) :

$$(\gamma - 1)th' - 6\alpha(\gamma - 1)^3 t^3 h^2 + \gamma h = 0.$$

Le calcul de h donne

$$\varepsilon = \frac{(2\gamma - 3)x^2}{kt^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 6\alpha(\gamma - 1)^3 t^3} \qquad \text{si } \gamma \neq \frac{3}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{2x^2}{k - 3\alpha \ln t} \qquad \text{si } \gamma = \frac{3}{2}.$$

ce qui conduit à deux solutions de (1.51), k étant une constante.

Prenons maintenant le générateur

$$vV_1 + V_4$$

où v est un réel quelconque. En empruntant la même démarche que précédemment, on montre l'existence d'une autre fonction h telle que

$$\kappa(t,x) = \frac{1}{t}\, h(x - vt), \qquad \varepsilon(t,x) = \frac{1}{t^2}\, h(x - vt)$$

lorsque $\gamma = 2$. Les auteurs montrent enfin que h peut être pris borné. D'où l'existence de solutions sous forme de front progressif décroissant et borné, lorsque $\alpha = \beta$ et $\gamma = 2$.

1.5.4 Réduction et solutions exactes des équations de Navier-Stokes

Toujours en utilisant la méthode de réduction d'équations aux dérivées partielles comme précédemment, Fushchych et ses collaborateurs [49, 47, 48, 111] ont pu calculer des Ansätze des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire des solutions sous des formes particulières (voir la définition précise dans [154]). A partir de ces Ansätze, ils ont alors déduit un grand nombre de solutions exactes.

Vu le nombre de combinaisons qu'on peut obtenir avec les générateurs infinitésimaux des équations de Navier-Stokes, on ne va prendre qu'un exemple. Soit alors

(avec $\rho = 1$) :

$$X_0, \qquad X_{12} + Y_0(a_1) + b\big[X_3(t) + Y_0(a_2 t)\big], \qquad \text{et} \qquad X_3(e^{st}) + Y_0(a_2 e^{st})$$

où

$$Y_0(f(t)) = f(t)\frac{\partial}{\partial p},$$

$$X_3(f(t)) = f(t)\ \frac{\partial}{\partial x_3}\ +\ f'(t)\ \frac{\partial}{\partial u_3}\ -\ x_3\, f''(t)\ \frac{\partial}{\partial p},$$

et a_1, a_2, et s sont des paramètres qui vérifient certaines conditions. Cette algèbre fournit l'Ansatz suivant :

$$u_1 = x_1\varphi_1 - x_2\frac{\varphi_2}{r^2},$$

$$u_2 = x_2\varphi_1 + x_1\frac{\varphi_2}{r^2},$$

$$u_3 = \varphi_3 + sx_3 + \nu \arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$p = h - \frac{1}{2}s^2x_3^2 + a_1 \arctan\frac{x_2}{x_1} + a_2x_3$$

où

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

et les φ_i et h sont des fonctions de la seule variable r. L'introduction de ces relations dans les équations de Navier-Stokes conduit alors à un système d'équations différentielles puis à différentes solutions exactes, selon les valeurs des paramètres.

Notons que les solutions exactes trouvées offrent un nouveau moyen pour analyser les modèles de sous-mailles.

1.5.5 Ünal et le spectre de Kolmogorov

On va décrire somairement ici la démarche empruntée par Ünal ([143]) pour transformer les équations de Navier-Stokes en un autre problème ayant comme solution les champs de vitesse qui ont le spectre de Kolmogorov.

Le principe de Kolmogorov suppose que le transfert d'énergie entre les différentes échelles ne dépend pas des échelles, lorsqu'on est dans une zone inertielle. Cela se traduit par l'invariance de ε par une certaine transformation d'échelle. Ünal a trouvé que le changement d'échelle permettant de réaliser cette hypothèse est celui engendré par le générateur infinitésimal

$$\frac{1}{3}\,Y_1 + \frac{2}{3}\,Y_2 = \frac{2}{3}\,t\,\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} \;+\; \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} u_j\,\frac{\partial}{\partial u_j} \;+\; \frac{2}{3}\,p\,\frac{\partial}{\partial p} \;+\; \frac{4}{3}\,\nu\,\frac{\partial}{\partial \nu}$$

et qui est donc

$$(t, x, u, v, p, \nu) \mapsto (a^2 t, a^3 x, au, a^2 p, a^4 \nu). \tag{1.54}$$

L'auteur propose alors de réduire les équations de Navier-Stokes par cette transformation. Ainsi, si on note

$$\mathbb{x} = xt^{-3/2},$$

les solutions auto-similaires par rapport à (1.54) sont de la forme

$$u = t^{1/2} u^*(\mathbb{x}), \qquad p = t p^*(\mathbb{x}), \qquad \nu = t^2 \nu^*(\mathbb{x}),$$

où u^*, p^* et ν^* sont des fonctions de $\mathbb{x}$. En intégrant ces expressions dans les équations de Navier-Stokes, on obtient de nouvelles équations sur u^*, p^* et ν^*. Si on continue la réduction, on arrive à un système d'équations différentielles ordinaires dont la résolution devrait conduire à des solutions des équations de Navier-Stokes ayant le spectre de Kolmogorov.

1.5.6 Ünal et le modèle de Speziale

Ce dernier paragraphe décrit brièvement la manière dont Ünal a retrouvé le modèle de Speziale ([134]) dans [144] grâce aux symétries.

L'étude de la turbulence par approche RANS conduit à la modélisation du tenseur de Reynolds

$$\tau = -\rho < u'' \otimes u'' > .$$

Pour vérifier l'invariance par les translations temporelle et de pression, l'invariance galiléenne et l'indifférence matérielle, Ünal propose de prendre

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\tau &= a_{00} I + a_{10} A_1 + a_{20} A_1^2 + a_{01} A_2 + a_{02} A_2^2 \\ &+ a_{11}(A_1 A_2 + A_2 A_1) + a_{12}(A_1 A_2^2 + A_2^2 A_1) \\ &+ a_{21}(A_1^2 A_2 + A_2 A_1^2) + a_{22}(A_1^2 A_2^2 + A_2^2 A_1^2) \end{aligned} \tag{1.55}$$

où les a_{ij} sont des fonctions de κ et de ε. A_1 et A_2 sont les tenseurs de Rivlin-Ericksen d'ordre 1 et deux définis par

$$A_1 = G + G^T$$

$$A_2 = \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} + A_1 G + G^T A_1$$

si G est le gradient de la vitesse moyenne

$$G = \nabla < u > .$$

On montre que τ est aussi invariant par réflection. Le modèle (1.55) est donc invariant par toutes les symétries des équations de Navier-Stokes, sauf les changements d'échelle. On ne considérera pas le second changement d'échelle.

Le premier changement d'échelle (1.31) transforme κ, ε, A_1 et A_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{\kappa} = a^{-2}\kappa, \qquad & \widehat{\varepsilon} = a^{-4}\varepsilon, \\ \widehat{A}_1 = a^{-2}A_1 \qquad \text{et} \qquad & \widehat{A}_2 = a^{-4}A_4. \end{aligned} \tag{1.56}$$

On suppose alors que les fonctions a_{ij} sont de la forme

$$a_{ij} = c_{ij}\frac{\kappa^l}{\varepsilon^m}$$

où c_ij sont des constantes et l et m sont des entiers. En jouant sur les puissances l et m, et en tenant compte de (1.56), on arrive à trouver un modèle invariant par le toutes les symétries à partir de (1.55) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\tau &= c_{00}\kappa I + c_{10}\frac{\kappa^2}{\varepsilon}A_1 + c_{20}\frac{\kappa^3}{\varepsilon^2}A_1^2 + c_{01}\frac{\kappa^l}{\varepsilon^m}A_2 + c_{02}\frac{\kappa^5}{\varepsilon^4}A_2^2 \\ &+ c_{11}\frac{\kappa^4}{\varepsilon^3}(A_1A_2 + A_2A_1) + c_{12}\frac{\kappa^6}{\varepsilon^5}(A_1A_2^2 + A_2^2A_1) \\ &+ c_{21}\frac{\kappa^5}{\varepsilon^4}(A_1^2A_2 + A_2A_1^2) + c_{22}\frac{\kappa^7}{\varepsilon^6}(A_1^2A_2^2 + A_2^2A_1^2). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Enfin, pour que τ^d soit à trace nulle, on retranche $(\frac{1}{3}\ \mathrm{tr}\,\tau)$ de τ.

En se limitant aux termes quadratiques, on obtient le modèle de Speziale (en remarquant que A_2 est un terme quadratique par rapport à G). Rappelons que le modèle de Speziale ([134]) est une prolongation jusqu'au terme quadratique du modèle $\kappa - \varepsilon$ standard.

Ces différents travaux témoignent de l'intérêt de respecter les symétries lors de la modélisation de la turbulence. Dans le chapitre suivant, on va alors construire des modèles de turbulence, par approche LES, qui respectent toutes les symétries des équations de Navier-Stokes. Ces modèles pourront être vus comme une généralisation du modèle d'Ünal dans la mesure où, contrairement à ce derniers, leurs coefficients dépendront aussi des invariants fondamentaux des tenseurs qui interviennent.

Chapitre 2

Construction de modèles respectant les groupes de symétrie

On a déjà signalé, et on le montrera plus tard, que la procédure d'évaluation dynamique de la constante d'un modèle permet de retrouver l'invariance d'échelle. Une première idée pour construire un modèle respectant le groupe de symétrie des équations est alors de partir d'un modèle déjà invariant par les autres symétries, comme par exemple du modèle de Smagorinsky. Cette méthode a cependant quelques inconvénients : premièrement, comme elle introduit un filtre test, elle nécessite des conditions sur ce filtre, et deuxièmement, elle détruit le respect du second principe de la thermodynamique. La conformité à ce principe représente pourtant une certaine consistance physique du modèle. De plus, comme on le prouvera, elle garantit la stabilité. Dans ce chapitre, nous proposons alors une autre méthode pour construire des modèles de sous-maille qui sont non seulement consistants du point de vue des symétries mais aussi conformes au second principe de la thermodynamique. Grâce à des tests numériques, nous montrerons que les modèles ainsi construits débouchent sur des résultats meilleurs que ceux obtenus avec les modèles les plus courants.

Ce chapitre se décompose comme suit. Dans la section 2.1, nous montrerons que la procédure dynamique introduit par Lilly ([79]) permet bien de retrouver l'invariance d'échelle du moment que le modèle se met sous la forme

$$CQ$$

où C est la constante à évaluer et Q représente la partie restante, indépendante de C. Dans la section 2.2, on construira une classe de modèles qui respectent le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. On raffinera cette classe dans la section 2.3 pour que les modèles soient conformes au second principe de la thermodynamique. On démontrera alors que la vérification de ce principe conduit à la stabilité du modèle. Ensuite, nous prouverons l'efficacité numérique d'un des modèles ainsi

construits dans la section 2.4. Nous utiliserons la même démarche dans la section 2.5 pour construire des modèles de la convection thermique invariants et respectant le second principe de la thermodynamique.

2.1 Sur la procédure dynamique

Dans cette section, on va démontrer rapidement que la procédure d'évaluation dynamique de la constante conduit à un modèle respectant l'invariance d'échelle. On va prendre le cas de la modélisation de τ. Pour Π, la démonstration est analogue.

Soit un changement d'échelle qui transforme (entre autres) u en $\widehat{u}$ tel que :

$$\widehat{u} = au,$$

a pouvant être une puissance du paramètre de la transformation. L'invariance par changement d'échelle est maintenue si et seulement si :

$$\widehat{\tau} = a^2\tau. \tag{2.1}$$

Supposons que τ est modélisé de la manière suivante :

$$\tau \;=\; \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u} \;\;\simeq\;\; CQ,$$

$Q = \mathfrak{F}(t, x, \overline{u}, \overline{p}, \overline{\theta}, \nu, \kappa, \overline{\delta})$ étant un tenseur d'ordre 2 et C la constante du modèle. Supposons aussi que $\overline{Q}$ se transforme par le changement d'échelle en

$$\widehat{Q} = bQ.$$

Si $b \neq a^2$ alors le modèle n'est pas invariant.

Lorsqu'on applique la procédure dynamique, on trouve l'expression suivante de la constante :

$$C = \frac{(\widetilde{\overline{u} \otimes \overline{u}} - \widetilde{\overline{u}} \otimes \widetilde{\overline{u}}) : (\mathcal{Q} - \widetilde{Q})}{(\mathcal{Q} - \widetilde{Q}) : (\mathcal{Q} - \widetilde{Q})}$$

où $\mathcal{Q} = \mathfrak{F}(t, x, \widetilde{\overline{u}}, \widetilde{\overline{p}}, \widetilde{\overline{\theta}}, \nu, \kappa, \widetilde{\overline{\delta}})$ et le symbole « $\widetilde{\ }$ » représente le filtrage test. Or $\mathcal{Q}$ se transforme de la même manière que Q, c'est-à-dire

$$\widehat{\mathcal{Q}} = b\mathcal{Q}.$$

D'où

$$\widehat{C} = \frac{a^2}{b}\, C.$$

Enfin, puisque

$$\widehat{\tau} = \widehat{C}\widehat{Q},$$

on retrouve bien la condition d'invariance (2.1).

Les simulations numériques attestent que la procédure dynamique améliore bien la performance des modèles. Cependant, si on veut obtenir à l'aide de cette procédure un modèle respectant toutes les symétries des équations, il faut partir d'un modèle déjà invariant par toutes les symétries autres que la transformation d'échelle. Par ailleurs, le second niveau de filtrage requiert quelques conditions sur le filtre pour que celui-ci ne détruise pas les invariances.

En outre, la détermination dynamique de la constante n'assure pas que le modèle vérifie le second principe de la thermodynamique. En effet, la constante pouvant prendre des grandes valeurs, aussi bien positives que négatives, la dissipation totale peut ne pas être positive sans forçage *a posteriori*.

Pour ces différentes raisons, on propose des nouveaux modèles de sous-maille qui respectent de par leur construction le groupe de symétrie de Navier-Stokes, sans besoin d'un recours à la procédure dynamique qui n'est finalement qu'une modification du modèle pour corriger la non-invariance par changement d'échelle. De plus, comme on le verra ci-après, une condition simple à vérifier suffit pour s'assurer que la dissipation totale sera positive. On procédera en deux étapes. Dans la première, on commencera par construire une classe de modèles respectant le groupe de symétrie, puis, dans la section d'après, on restreindra cette classe aux modèles compatibles avec le second principe de la thermodynamique.

2.2 Construction d'une classe de modèles invariants

Un certain nombre d'auteurs se sont intéressé à la construction de modèles de turbulence invariants. On peut citer Speziale ([134]) et Wang ([148, 149]). Mais,

n'ayant pas utilisé la théorie de Lie, les seules symétries qui leur étaient disponibles sont les translations, l'invariance galiléenne classique, l'indifférence matérielle et la réflection. Ünal est jusqu'à présent l'un des seuls à avoir élaboré des modèles en ayant pour but le respect de toutes les invariances des équations de Navier-Stokes. Il l'a fait pour une approche RANS (voir la section 1.5.6). La méthode qu'il a utilisée manque toutefois de généralité car les coefficients des modèles sont indépendants des différents invariants fondamentaux.

Les fonctions qui interviendront dans les expressions des modèles seront considérées de classe C^∞.

2.2.1 Invariance par les translations, les rotations et la reflection

Pour que le modèle soit invariant par rapport à la translation temporelle, la translation par rapport à la pression et la transformation galiléenne, on choisit τ comme fonction uniquement des dérivées spatiales de la vitesse filtrée et de la viscosité dynamique ν (ν pouvant varier au cours des transformations). On a donc :

$$-\tau = \mathscr{F}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} | i,j = 1,\dots,d, \nu\right).$$

Ensuite, pour s'assurer de l'invariance par rotation et de l'indifférence matérielle, on ne fait intervenir les dérivées de la vitesse que par l'intermédiaire du tenseur des taux de déformation filtré $\overline{S} = (\nabla\overline{u} + \nabla\overline{u}^T)/2$. Et τ prend la forme :

$$-\tau = \mathscr{F}(\overline{S}, \nu).$$

Contrairement à d'autres auteurs comme Lund et Novikov ou Kosovic, on n'a donc pas inclus le tenseur de vorticité dans le modèle car celle-ci n'est pas objective. Notons toutefois que le tenseur $(\overline{W}^2)^d$ est objectif (voir remarque 1.6).

Maintenant, supposons qu'on est en dimension 3. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton à $\overline{S}$, on peut écrire :

$$-\tau = A(\chi,\zeta,\nu)\ \overline{S} + B(\chi,\zeta,\nu)\ \mathrm{Adj}\,\overline{S} + h(\chi,\zeta,\nu)I \tag{2.2}$$

où $\chi = \mathrm{tr}\,\overline{S}^2$ et $\zeta = \det\overline{S}$ sont les invariants fondamentaux de $\overline{S}$, le troisième invariant, $\mathrm{tr}\,\overline{S}$, étant nul. $\mathrm{Adj}\,\overline{S}$ désigne ici l'adjugué ou comatrice de $\overline{S}$ défini par

$$(\operatorname{Adj} S)\overline{S} = (\det \overline{S})I_d.$$

En prenant les traces, on obtient :

$$-\operatorname{tr}\tau = B\ \operatorname{tr}\ \operatorname{Adj}\overline{S} + 3h.$$

En en extrayant h et en le réinjectant dans (2.2), on trouve :

$$\boxed{-\tau^d = A(\chi,\zeta,\nu)\ \overline{S} + B(\chi,\zeta,\nu)\ \operatorname{Adj}^d \overline{S}}$$

où

$$\tau^d = \tau - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\tau I_d \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Adj}^d \overline{S} = \operatorname{Adj}\overline{S} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\operatorname{Adj}\overline{S})I_d$$

sont les déviateurs de τ et de $\operatorname{Adj}\overline{S}$.

Enfin, puisque $\overline{S}$ est invariant par réflection, il en est de même pour τ.

Il reste donc à faire vérifier l'invariance par les deux changements d'échelle.

Remarque 2.1. *On pourrait prendre $\overline{S}^2$ à la place de $\operatorname{Adj}\overline{S}$. A part que le calcul numérique de ce dernier (considéré comme une comatrice) est légèrement plus rapide, il n'y aurait pas de différence théoriquement. Toutefois, ce choix nous permettra d'extraire facilement la condition pour que le modèle vérifie le second principe de la thermodynamique (voir la preuve de la proposition 2.8).*

2.2.2 L'invariance par les changements d'échelle

Pour des raisons de simplicité, on va d'abord considérer le second changement d'échelle.

a) Invariance par le second changement d'échelle

Le second changement d'échelle transforme x, u et ν de la manière suivante :

$$x \mapsto \widehat{x} = ax, \qquad u \mapsto \widehat{u} = au, \qquad \nu \mapsto \widehat{\nu} = a^2\nu.$$

Par conséquent,

$$\widehat{\overline{S}} = \overline{S}, \qquad \widehat{\chi} = \chi, \qquad \widehat{\zeta} = \zeta.$$

Pour garder l'invariance, il faut et il suffit que $\widehat{\tau} = a^2\tau$. Cela équivaut à

$$A(\widehat{\chi}, \widehat{\zeta}, \widehat{\nu}) = a^2 A(\chi, \zeta, \nu) \qquad \text{et} \qquad B(\widehat{\chi}, \widehat{\zeta}, \widehat{\nu}) = a^2 B(\chi, \zeta, \nu).$$

Ces relations sont vérifiées si et seulement si ν peut se mettre en facteur, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions scalaires A_0 et B_0 telles que

$$A(\chi, \zeta, \nu) = \nu\ A_0(\chi, \zeta) \qquad \text{et} \qquad B(\chi, \zeta, \nu) = \nu\ B_0(\chi, \zeta).$$

D'où l'expression de τ^d :

$$\boxed{-\tau^d = \nu A_0(\chi, \zeta)\ \overline{S} + \nu B_0(\chi, \zeta)\ \mathrm{Adj}^d\, \overline{S}} \tag{2.3}$$

b) Invariance par le premier changement d'échelle

La dernière symétrie à prendre en considération est le premier changement d'échelle. A partir de la classe (2.3) de modèles qui sont déjà invariants par toutes les autres symétries, on propose alors le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Supposons $\overline{S} \neq 0$ et soit $v = \dfrac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}$. Alors un modèle de sous-maille de la forme*

$$\boxed{-\tau^d = \nu A_1(v)\ \overline{S} + \nu \frac{1}{\|\overline{S}\|} B_1(v)\ \ \mathrm{Adj}^d\, \overline{S}} \tag{2.4}$$

où A_1 et B_1 sont des fonctions scalaires arbitraires respecte le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes.

Preuve

Le premier changement d'échelle transforme x, u et ν de la manière suivante :

$$x \mapsto \widehat{x} = ax, \qquad u \mapsto \widehat{u} = \frac{1}{a}\, u, \qquad \nu \mapsto \widehat{\nu} = \nu.$$

On en déduit que

$$\overline{S} \mapsto \frac{1}{a^2}\overline{S}, \qquad \operatorname{Adj} \overline{S} \mapsto \frac{1}{a^4} \operatorname{Adj} \overline{S}.$$

D'autre part, τ est invariant si et seulement si

$$\widehat{\tau} = \frac{1}{a^2}\tau.$$

Si τ est défini par (2.3) alors cette condition, récrite pour A_0 et B_0, devient :

$$A_0(\widehat{\chi}, \widehat{\zeta}) = A_0(\chi, \zeta) \qquad \text{et} \qquad B_0(\widehat{\chi}, \widehat{\zeta}) = a^2 B_0(\chi, \zeta),$$

ou bien

$$A_0(\frac{1}{a^4}\chi, \frac{1}{a^6}\zeta) = A_0(\chi, \zeta) \qquad \text{et} \qquad B_0(\frac{1}{a^4}\chi, \frac{1}{a^6}\zeta) = a^2 B_0(\chi, \zeta).$$

Prenons la variation autour de $a = 1$, c'est-à-dire dérivons chaque membre par a puis faisons $a = 1$. On obtient

$$-4\chi\frac{\partial A_0}{\partial \chi} - 6\zeta\frac{\partial A_0}{\partial \zeta} = 0 \qquad \text{et} \qquad -4\chi\frac{\partial B_0}{\partial \chi} - 6\zeta\frac{\partial B_0}{\partial \zeta} = 2B_0.$$

En utilisant les méthodes des caractéristiques ([5, 124]), on déduit, pour A_0, une surface solution est définie par une équation du type

$$F\left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}}, A_0\right) = 0.$$

On peut alors prendre comme solution

$$A_0(\chi, \zeta) = A_1\left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}}\right)$$

où A_1 est une fonction scalaire. Quant à B_0, la surface solution est du type

$$F\left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}}, \frac{B_0}{\chi^{-1/2}}\right) = 0.$$

On peut choisir

$$B_0(\chi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\chi}}\, B_1\left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}}\right).$$

Il suffit alors d'injecter les expressions de A_0 et B_0 dans (2.3) et de remarquer que $\sqrt{\chi} = \|\overline{S}\|$ et $\dfrac{\zeta}{\chi^{3/2}} = v$ pour avoir le théorème. ■

On vient donc de construire une classe de modèles possédant l'invariance par rapport à toutes les symétries des équations de Navier-Stokes et en particulier l'invariance par changements d'échelle qui fait défaut dans la plupart des modèles existants.

Revenons maintenant à des considérations plus spécifiques à la L.E.S. On sait que le tenseur de sous-maille τ représente l'interaction entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille. Il engendre donc une certaine dissipation qui peut être positive ou négative, selon le sens de la cascade d'énergie. Mais pour satisfaire le second principe de la thermodynamique, il faut s'assurer que la dissipation totale (la dissipation générée par τ ajoutée à la dissipation moléculaire) reste positive. Pour que les modèles soient conformes à ce principe, on va restreindre la classe (2.4).

2.3 Conséquences du second principe de la thermodynamique

Pour plus de compatibilité aux équations de Navier-Stokes, on va d'abord poser une hypothèse préliminaire avant de déduire des conditions de conformité avec le second principe de la thermodynamique.

2.3.1 Préliminaire

Commençons par donner le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soit E un sous-espace convexe de $\mathbb{R}^n$ et*

$$f \ : \ E \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction différentiable. Alors, si f est convexe et positif, on a

$$\big[\nabla f(x)\big]^T \ x \geq 0$$

pour tout x dans E.

PREUVE
Pour une fonction différentiable f, la définition de la convexité est équivalente à :

$$\text{Pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } E, \qquad f(y) - f(x) \quad \leq \quad \big[\nabla f(x)\big]^T \ (y - x)$$

On prend alors $y = 0$. Puis, par un changement d'origine adéquat, on peut se ramener à $f(y) = 0$. D'où

$$\big[\nabla f(x)\big]^T \ x \geq f(x).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la positivité de f. ■

A l'échelle moléculaire, le tenseur des contraintes visqueuses $\tau_r = 2\nu S$ peut être relié au tenseur des taux de déformation par[1] :

$$\tau_r = \frac{\partial \varphi_r}{\partial S}$$

où φ_r est un potentiel[2] défini comme suit :

$$\varphi_r = \nu \ \mathrm{tr}\, S^2.$$

[1]Ceci est un abus de langage car la vraie contrainte visqueuse est $\rho\tau_r$

[2]On devrait plutôt dire pseudo-potentiel car ce n'est pas la définition physique habituelle d'un potentiel.

Ce potentiel est convexe et positif. Le lemme 2.3 assure donc que la dissipation est positive :

$$\Phi_r = \operatorname{tr}(\tau_r S) \geq 0.$$

De son côté, l'opposé du tenseur de sous-maille $(-\tau)$ peut être considéré comme une contrainte de sous-maille, engendrant une dissipation

$$\Phi = \operatorname{tr}(-\tau \overline{S}).$$

Pour rester compatible avec les équations de Navier-Stokes, on va faire l'hypothèse que cette contrainte de sous-maille a la même propriété que la contrainte visqueuse τ_r, c'est-à-dire :

Hypothèse 2.4. *Le tenseur de sous-maille τ dérive d'un potentiel φ :*

$$-\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{S}},$$

φ dépendant des invariants χ et ζ de $\overline{S}$.

Avec cette hypothèse, la contrainte totale est donc

$$\frac{\partial(\overline{\varphi}_r + \varphi)}{\partial \overline{S}}.$$

En vertu du lemme 2.3, il suffirait maintenant de s'assurer que le potentiel φ est convexe et positif pour avoir une dissipation de sous-maille positive, ou bien de s'assurer que $\overline{\varphi}_r + \varphi$ est convexe et positif pour avoir une dissipation totale positive. Mais comme τ doit appartenir à la classe (2.4), il faut traduire l'hypothèse 2.4 sous forme de conditions sur A_1 et B_1.

Supposons toujours que $\overline{S} \neq 0$.

Lemme 2.5. *Soit τ un tenseur défini par (2.4).*

Alors, τ dérive d'un potentiel comme dans l'hypothèse 2.4, si et seulement si

$$A_1'(v) = -B_1(v) - 3vB_1'(v).$$

Preuve
Supposons que τ dérive d'un potentiel φ :

$$-\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{S}}.$$

On a alors

$$-\tau^d = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{S}}\right)^d.$$

D'où

$$\begin{aligned} -\tau^d &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\overline{S}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\overline{S}}\right)^d \\ &= \left(2\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\overline{S} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\ \mathrm{Adj}\,\overline{S}\right)^d \\ &= 2\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\overline{S} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\ \mathrm{Adj}^d\,\overline{S}. \end{aligned}$$

En comparant cela à (2.4), il vient :

$$\frac{1}{2}\,\nu A_1(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \qquad \text{et} \qquad \nu\frac{1}{\sqrt{\chi}}B_1(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}.$$

v étant égal à $\dfrac{\zeta}{\chi^{3/2}}$. Par conséquent, si τ dérive d'un potentiel φ si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{2}\,\nu A_1(v)\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi \partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\nu\frac{1}{\sqrt{\chi}}B_1(v)\right),$$

c'est-à-dire si

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\chi^{3/2}}\,A_1'(v) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\chi^{3/2}}\,B_1(v) - \frac{3}{2}\,\frac{\zeta}{\chi^3}\,B_1'(v)$$

ou

$$A_1'(v) = -B_1(v) - 3vB_1'(v).$$

Pour la réciproque, il suffit de remonter le calcul. ■

Comme conséquence immédiate du lemme , on a :

Proposition 2.6. *Un tenseur τ défini par*

$$\boxed{-\tau^d = \nu\Big[2g_\tau(v) - 3vg_\tau'(v)\Big]\overline{S} + \nu\frac{1}{\|\overline{S}\|}\, g_\tau'(v)\ \mathrm{Adj}^d\,\overline{S},} \tag{2.5}$$

où g_τ est une fonction scalaire arbitraire, appartient à la classe (2.4) et dérive d'un potentiel comme dans l'hypothèse 2.4.

Preuve
Il suffit de remarquer que la condition du lemme 2.5 sur A_1 et B_1 possède comme solution :

$$A_1(v) = 2g_\tau(v) - 3vg_\tau'(v) \qquad \text{et} \qquad B_1(v) = g_\tau'(v). \tag{2.6}$$

si g_τ est une primitive de B_1. Et comme B_1 est arbitraire (ce qui n'est pas le cas de A_1 qui dépend de B_1), il en est de même de g_τ. ■

Remarque 2.7. *Les relations (2.6) entraînent que*

$$A_1 + 3vB_1 = 2g_\tau. \tag{2.7}$$

On s'en servira plus tard.

2.3.2 Vérification du second principe

On va maintenant restreindre la classe (2.5) de manière à ce que, pour chaque modèle lui appartenant, il soit sûr que la dissipation totale

$$\Phi_T = \mathrm{tr}\left[(\overline{\tau}_r - \tau)\overline{S}\right]$$

est positive.

Proposition 2.8. *Soient $\tau_r = 2\nu S$ et τ un tenseur vérifiant la conclusion de la proposition 2.6. Supposons que la fonction g qui détermine τ est telle que*

$$1 + g_\tau(w) \geq 0 \tag{2.8}$$

pour tout réel w. Alors

$$\operatorname{tr}\left[(\overline{\tau}_r - \tau)\overline{S}\right] \geq 0.$$

Preuve
La dissipation totale vaut

$$\Phi_T = \operatorname{tr}\left[(\overline{\tau}_r - \tau)\overline{S}\right] = \operatorname{tr}\left[(\overline{\tau}_r - \tau^d)\overline{S}\right]$$

car $\operatorname{tr}\overline{S} = 0$. D'où, en reprenant la relation (2.4),

$$\begin{aligned}
\Phi_T &= 2\nu \operatorname{tr}\overline{S}^2 + \nu A_1 \operatorname{tr}\overline{S}^2 + 3\nu\frac{1}{\sqrt{\chi}} B_1 \det\overline{S} \\
&\quad \text{puisque } \operatorname{tr}[(\operatorname{Adj}\overline{S})\overline{S}] = \operatorname{tr}[(\det\overline{S})I] = 3\det\overline{S} \\
&= 2\nu\chi + \nu\chi A_1 + 3\nu\frac{\zeta}{\sqrt{\chi}} B_1 \\
&= 2\nu\chi + \nu\chi(A_1 + 3vB_1) \\
&= 2\nu\chi + 2\nu\chi g_\tau(v) \\
&\quad \text{en tenant compte de (2.7).}
\end{aligned}$$

Par suite

$$\Phi_T = 2\chi\nu(1 + g_\tau(v)).$$

Comme $\overline{S}$ a été supposé non nul, on a :

$$\Phi_T \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + g_\tau(v) \geq 0.$$

D'où la proposition. ■

La proposition 2.8 signifie que, pour peu que la fonction

$$1 + g_\tau$$

reste positive, un modèle défini par (2.5) respecte le second principe de la thermodynamique. On n'a cependant pas à vérifier cette condition sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais uniquement sur un intervalle borné, comme le montre le résultat suivant.

Lemme 2.9. *Soit $\mathcal{S}$ une matrice carré réelle de dimension 3×3 non nulle et $w = \dfrac{\det \mathcal{S}}{\|\mathcal{S}\|^3}$.*

Si $\mathcal{S}$ est symétrique et à trace nulle alors il existe un réel w^* tel que $w \in [-w^*, w^*]$.

Preuve
Soit $\mathcal{S}$ vérifiant les hypothèses du lemme.

Comme $\mathcal{S}$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Dans une base adéquate, elle s'écrit donc :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

λ, λ_2 et λ_3 étant des réels.

Puisque $\mathcal{S}$ est non nul, on peut se ramener au cas où $\lambda \neq 0$. Soit alors $c = \dfrac{\lambda_2}{\lambda} \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{S}$ est à trace nulle, on a encore :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & c\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(1+c)\lambda \end{pmatrix}$$

Par suite, comme le déterminant et la norme sont invariants par changement de base,

$$w = \frac{\det \mathcal{S}}{\|\mathcal{S}\|^3} = \frac{\lambda^3 c(1+c)}{\lambda^3 2^{3/2}(1+c+c^2)^{3/2}} = \frac{c(1+c)}{2^{3/2}(1+c+c^2)^{3/2}}$$

L'allure de la fonction

$$c \mapsto \frac{c(1+c)}{2^{3/2}(1+c+c^2)^{3/2}}$$

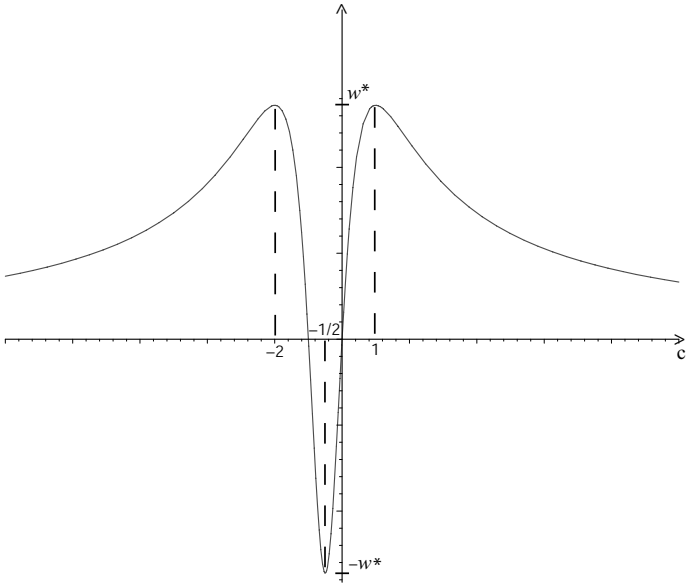


FIG. 2.1 – *Allure de w lorsque c varie*

qui est représentée sur la figure FIG. 2.1 montre clairement que w est borné. Une étude de la dérivée permet d'extraire les extremums et de déduire que

$$|w| \leq \frac{1}{3\sqrt{6}} = w^*.$$

■

Rassemblons et résumons alors tous ces résultats dans le théorème suivant.

Théorème 2.10. *Soit $v = \dfrac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}$. Alors un modèle de sous-maille τ tel qu'il existe une fonction g_τ vérifiant :*

$$\boxed{-\tau^d = \nu\left[2g_\tau(v) - 3vg'_\tau(v)\right]\overline{S} + \nu\frac{1}{\|\overline{S}\|}\, g'_\tau(v)\ \mathrm{Adj}^d\, \overline{S}} \tag{2.9}$$

respecte le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes et dérive d'un potentiel.

Si de plus

$$\boxed{1 + g_\tau(w) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } w \in [-w^*, w^*]} \tag{2.10}$$

où $w^* = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ *alors* τ *est conforme au second principe de la thermodynamique.*

Grâce à ces quelques paragraphes, on a donc pu construire des modèles mathématiquement consistants non seulement du point de vue des symétries mais aussi du point de vue thermodynamique. De plus, la généralité de ces modèles permet de demander à ce qu'ils vérifient d'autres propriétés mathématiques ou physique. Par ailleurs, comme on le démontrera ci-après, la vérification du second principe assure la stabilité du modèle.

2.3.3 Stabilité du modèle

Le but de cette section est de montrer qu'un modèle défini comme dans le théorème 2.10 possède une énergie finie. Pour cela, on va établir un résultat beaucoup plus général qui prouve que dès que le second principe de la thermodynamique est vérifié, l'énergie est finie. Mettons nous alors dans le cas où les conditions au bord sont uniquement du type Dirichlet. Quitte à effectuer un changement de variable, supposons que les équations filtrées s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla \overline{p} - \operatorname{div}(\overline{\tau}_r - \tau) = F \\ \\ \operatorname{div} \overline{u} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

avec les conditions

$$\begin{cases} \overline{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \\ \overline{u}(0,x) = \overline{\gamma}(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

$\overline{\tau}_r$ étant, rappelons-le, $\overline{\tau}_r = 2\nu\overline{S}$. Et comme ces équations ne déterminent la pression $\overline{p}$ qu'à une constante additive près, on va supposer que

$$\int_\Omega \overline{p}(t,x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall t \in [0, t_f],$$

t_f désignant le temps final d'étude, $t_f > 0$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.11. *Soit $(\overline{u}, \overline{p})$ une solution assez régulière de (2.11) où le tenseur τ est symétrique et*

$$\mathrm{tr}[(\overline{\tau}_r - \tau)\overline{S}] \geq 0.$$

Alors, on a :

$$\|\overline{u}(t,x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\overline{\gamma}(x)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{t_f} \|F(s,x)\|_{L^2(\Omega)}\, ds.$$

Preuve
Notons $(\bullet, \bullet)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et soit $(\overline{u}, \overline{p})$ une solution assez régulière de (2.11). De la première équation de (2.11) et de la condition au bord, on tire :

$$\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}, \overline{u}\right) + b(\overline{u}, \overline{u}, \overline{u}) - \frac{1}{\rho}\,(p,\, \mathrm{div}\overline{u}) + (\overline{\tau}_r - \tau, \nabla \overline{u}) = (F, \overline{u}) \tag{2.12}$$

où b est la forme trilinéaire défini par

$$b(u,v,w) = \big(\,\mathrm{div}(u \otimes v), w\big).$$

Grâce à des intégrations par parties, on montre que

$$b(u,v,w) + b(u,w,v) = -(\,\mathrm{div}\; u, v \,.\, w)) + \int_\Gamma (v \,.\, w)\; (u \,.\, \mathbf{n})\; \mathrm{d}s.$$

Compte tenu de la condition au bord, il suit que $b(\overline{u}, \overline{u}, \overline{u}) = 0$.

D'autre part, la condition d'incompressibilité entraîne que $b(\overline{u}, \overline{u}, \overline{u}) = 0$, et la symétrie de $(\overline{\tau}_r - \tau)$ conduit à :

$$(\overline{\tau}_r - \tau, \nabla \overline{u}) = (\overline{\tau}_r - \tau, \overline{S}).$$

En rassemblant tous ces résultats, (2.12) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}, \overline{u}\right) + (\overline{\tau}_r - \tau, \overline{S}) = (F, \overline{u}).$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{u},\overline{u}) + (\overline{\tau}_r - \tau, \overline{S}) = (F, \overline{u}).$$

Or

$$(\overline{\tau}_r - \tau, \overline{S}) = \int_\Omega \mathrm{tr}[(\overline{\tau}_r - \tau)\overline{S}]\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{u},\overline{u}) \leq (F, \overline{u}),$$

et

$$\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq (F, \overline{u}) \leq \|F\|_{L^2(\Omega)}\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, en simplifiant par $\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)}$ et en intégrant par rapport au temps, on a :

$$\begin{aligned}\|\overline{u}(t,x)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\overline{\gamma}(x)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|F(s,x)\|_{L^2(\Omega)}\ \mathrm{d}s \\ &\leq \|\overline{\gamma}(x)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^{t_f} \|F(s,x)\|_{L^2(\Omega)}\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

■

On vient donc de montrer la stabilité des modèles définis par (2.9) et (2.10).

2.3.4 Quelques remarques sur les modèles

Quelques remarques peuvent être formulées à l'égard des modèles.

- Premièrement, les modèles du théorème 2.10 sont aptes à prendre en compte la cascade inverse d'énergie car la dissipation de sous-maille

$$\Phi = \mathrm{tr}(-\tau\overline{S}) = 2\nu\chi g_\tau(v)$$

peut prendre des valeurs négatives. Si on veut obtenir une dissipation de sous-maille toujours positive, il suffit de remplacer la condition (2.10) par

$$g_\tau(w) \geq 0 \qquad \text{pour tout } w \in [-w^*, w^*].$$

- Deuxièmement, l'hypothèse 2.4 qui demande à ce que τ dérive d'un potentiel n'est pas capital dans la démonstration de la proposition 2.8. En fait, on peut se passer de cette hypothèse et obtenir le résultat équivalent au théorème 2.10 suivant.

  Théorème 2.12. *Soit* $v = \dfrac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}$. *Alors un modèle de sous-maille* τ *tel qu'il existe deux fonctions* A_1 *et* B_1 *vérifiant :*

$$\boxed{-\tau^d = \nu A_1(v)\ \overline{S} + \nu \frac{1}{\|\overline{S}\|} B_1(v)\ \ \mathrm{Adj}^d\, \overline{S}} \tag{2.13}$$

  respecte le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes.
  Si de plus

$$\boxed{2 + A_1(w) + 3wB_1(w) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } w \in [-w^*, w^*]} \tag{2.14}$$

  où $w^* = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ *alors* τ *est conforme au second principe de la thermodynamique.*

  Mais dans ce cas, la contrainte de sous-maille ne possède bien sûr pas la même forme que la contrainte visqueuse τ_r.
- Ensuite, on a supposé jusqu'ici que $\overline{S} \neq 0$. Puisque g est continu, on montre aisément que

$$\tau \xrightarrow[\overline{S}\to 0]{} 0.$$

  Comme la norme de $\overline{S}$ est présent au dénominateur dans les modèles, ce résultat peut être utile dans les applications numériques.
- Enfin, la classe de modèle qu'on vient de présenter dans le théorème 2.10 est encore assez large pour qu'on puisse donner aux modèles d'autres propriétés.

Dans la section suivante, on va prendre un simple modèle de la classe définie par (2.9)-(2.10) et montrer son efficacité numérique.

2.4 Test numérique

On va tester un simple modèle de la classe (2.10) à l'écoulement tridimensionnel dans une chambre ventilée ou cavité de Nielsen ([98]), qui a ses applications dans l'étude des bâtiments. Dans un premier temps, on va alors choisir le modèle. On présentera ensuite le schéma numérique utilisé, qui est basé sur les différences finies. Après cela, on présentera la géométrie de la chambre et on terminera par une comparaison des résultats avec ceux obtenus avec les modèles de Smagorinsky et dynamique.

2.4.1 Modèles utilisés

On va prendre comme fonction g_τ une fonction linéaire :

$$g_\tau(v) = C_1 v.$$

On a donc l'expression suivante :

$$-\tau^d = \nu C_1 \left(-\frac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3} \overline{S} + \frac{1}{\|\overline{S}\|} \operatorname{Adj}^d \overline{S} \right).$$

Sous entendu, C_1 est une constante par rapport à v (et donc par rapport à $\overline{S}$ aussi), mais peut dépendre d'autres paramètres comme la longueur de coupure $\overline{\delta}$.

Pour des raisons dimensionnelles, on va introduire le rapport

$$\mathring{\delta} = \frac{\overline{\delta}}{\ell}$$

où ℓ est une échelle de longueur liée à la taille du domaine. $\mathring{\delta}$ peut donc être compris comme étant le rapport entre la taille du maillage (généralement égale à $\overline{\delta}$) et celle du domaine. Posons alors que C_1 a la forme suivante :

$$C_1 = (C_m \mathring{\delta})^2,$$

C_m étant une constante pure. Finalement, le modèle s'écrit :

$$\boxed{-\tau^d = \nu(C_m\mathring{\delta})^2\left(-\frac{\det\overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}\,\overline{S}+\frac{1}{\|\overline{S}\|}\,\mathrm{Adj}^d\,\overline{S}\right).} \tag{2.15}$$

Dans un premier temps, pour se rapprocher du modèle de Smagorinsky qui est le modèle le plus populaire, on va prendre comme valeur de C_m celle de la constante de Smagorinsky : $C_m = C_s$. On utilisera ensuite un calcul dynamique de la constante pour voir dans quelles mesures cette procédure peut entraîner des améliorations. L'avantage d'un calcul dynamique est qu'il permet de se passer d'une détermination analytique ou empirique de C_m. Il conduit à l'expression suivante :

$$-\tau^d \;=\; \left\langle \frac{\widetilde{[\overline{u}\otimes\overline{u}-\widetilde{\overline{u}}\otimes\widetilde{\overline{u}}]} : [(\widetilde{\overline{\delta}}/\overline{\delta})^2\mathcal{Q}-\widetilde{Q}]}{[(\widetilde{\overline{\delta}}/\overline{\delta})^2\mathcal{Q}-\widetilde{Q}] : [\mathcal{Q}-\widetilde{Q}]} \right\rangle \mathfrak{F}(\overline{S})$$

où $Q = \mathfrak{F}(\overline{S})$, $\mathcal{Q} = \mathfrak{F}(\widetilde{\overline{S}})$ et $\mathfrak{F}$ est l'opérateur tel que

$$\mathfrak{F}(\overline{S}) = -\frac{\det\overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}\,\overline{S}+\frac{1}{\|\overline{S}\|}\,\mathrm{Adj}^d\,\overline{S}.$$

Le symbole $<\bullet>$ désigne ici un moyennage. Le filtre test utilisé est le filtre porte tridimensionnel de taille $2\overline{\delta}$. Ce filtre a été choisi car il a la propriété de ne pas détruire l'invariance des modèles (voir (1.43)).

En revanche, le modèle dynamique ne respecte plus le second principe de la thermodynamique sans forçage *a posteriori*. Il est utilisé ici uniquement pour valider le choix de la constante de Smagorinsky comme valeur de C_m. De plus, le filtrage test demande un temps de calcul plus élevé.

2.4.2 Le schéma numérique

Le programme qu'on a adopté pour implémenter le modèle invariant est le code de calcul dénommé LES qui a été élaboré au Massachusetts Institute of Technology par Chen *et al.* ([25]). Il a été créé particulièrement pour simuler (par l'approche LES) et étudier les écoulements et la dispersion de particules dans une chambre ventilée en dimension 3. Voici ses grandes lignes.

Le schéma de discrétisation temporelle du code est explicite ; cela nécessite un pas de temps assez petit. Mais comme notre but, à terme, est la simulation de la dispersion de particules et que de tel type de simulations impose une condition

encore plus contraignante sur le pas de temps, on gardera ce schéma explicite, même si dans les applications numériques présentées ici, il n'y a pas d'étude sur concernant les particules.

Pour simplifier les écritures, on va récrire l'équation de la conservation de la quantité de mouvement filtrée de la manière suivante :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + F + \nabla \overline{p} = 0.$$

où on a désigné par F :

$$F = \operatorname{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) - 2\nu \operatorname{div}\overline{S} + \operatorname{div}\tau.$$

$\overline{p}$ est ici la pression modifiée

$$\frac{1}{\rho}\,\overline{p} - \frac{1}{3}\ \operatorname{tr}\tau.$$

Le schéma de discrétisation temporelle utilise la méthode d'Adams-Bashforth explicite, qui est un schéma d'ordre deux. Il conduit à :

$$\frac{\overline{u}^{k+1} - \overline{u}^{k}}{\Delta t} + \frac{3}{2}\,F^{k} - \frac{1}{2}\,F^{k-1} + \nabla \overline{p}^{k+1} = 0, \tag{2.16}$$

q^k désignant la valeur $q(t_k)$ de q au temps t_k, pour toute quantité q. Puis, pour la résolution, on utilise la méthode SMAC (Simplified Marker and Cell Method). Introduisons alors une pseudo-vitesse u^*, qui est la solution de l'équation

$$\frac{u^* - \overline{u}^{k}}{\Delta t} + \frac{3}{2}\,F^{k} - \frac{1}{2}\,F^{k-1} + \nabla \overline{p}^{k} = 0. \tag{2.17}$$

En soustrayant (2.16) à (2.17), il vient :

$$\frac{u^* - \overline{u}^{k+1}}{\Delta t} = \nabla(\overline{p}^{k+1} - \overline{p}^{k}).$$

Par suite, en appliquant l'opérateur de divergence, on a :

$$\operatorname{div} u^* = \Delta t\ \nabla^2(\overline{p}^{k+1} - \overline{p}^{k})$$

sachant que $\overline{u}^{k+1}$ est à divergence nulle. Notons $p' = \overline{p}^{k+1} - \overline{p}^{k}$. On peut maintenant résumer le schéma de résolution de (2.16) comme suit :

Chercher u^* tel que	:	$\dfrac{u^* - \overline{u}^k}{\Delta t} + \dfrac{3}{2} F^k - \dfrac{1}{2} F^{k-1} + \nabla \overline{p}^k = 0.$
Résoudre l'équation de Poisson	:	$\mathrm{div} u^* = \Delta t \ \nabla^2 p'.$
Calculer $\overline{p}^{k+1}$	:	$\overline{p}^{k+1} = \overline{p}^k + p'.$
Calculer $\overline{u}^{k+1}$	:	$\overline{u}^{k+1} = u^* - \Delta t \nabla p'.$

L'équation de Poisson est résolue par la méthode itérative SIP (Strong-Implicit Procedure).

La discrétisation spatiale s'effectue par différences finies. Pour le terme d'advection, on utilise un schéma centré d'ordre 2, c'est-à-dire que, si on était en dimension 1, on aurait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial uu}{\partial x} &= \frac{U_{i+1/2}U_{i+1/2} - U_{i-1/2}U_{i-1/2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{U_i+U_{i+1}}{2}\frac{U_i+U_{i+1}}{2} - \frac{U_{i-1}+U_i}{2}\frac{U_{i-1}+U_i}{2}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Quant au terme visqueux et au terme de sous-maille, on fait :

$$\frac{\partial(\tau_r + \tau)}{\partial x} = \frac{(\tau_r + \tau)_{i+1} - (\tau_r + \tau)_i}{\Delta x}.$$

Le filtre qui sépare les échelles est le filtre implicite.

Décrivons maintenant les paramètres de la simulation.

2.4.3 Géométrie et résultats

La géométrie de la chambre ventilée sur laquelle on effectue le test est représentée sur la figure Fig. 2.2. Cette configuration a été utilisée à maintes reprises par les auteurs. On peut citer Davidson et Nielsen dans [32] ainsi que Emmerich et Mc Grattan dans [40] qui l'ont adoptée pour étudier la L.E.S. dans le cas adiabatique. Des résultats expérimentaux ont été fournis par Restivo dans [120].

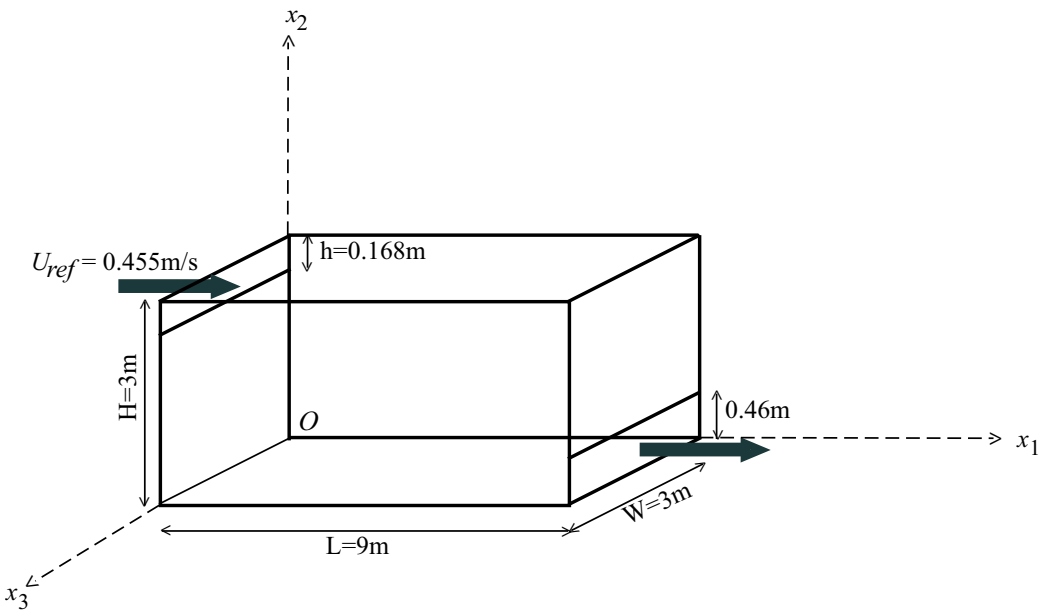


Fig. 2.2 – *Géométrie de la chambre ventilée et orientation du repère*

La valeur de ℓ est prise égale à 1m. Le nombre de Reynolds, calculé à partir de la hauteur d'entrée h est d'environ 5000.

Le maillage est un maillage décalé ([146]), comme il est montré sur la figure Fig. 2.3. Il est composé de $72\times52\times26$ mailles. Aucune fonction de paroi n'est utilisée pour bien comparer les performances des modèles seuls. Un léger raffinement est effectué près du plafond et du plancher. Le pas de temps vaut environ $\Delta t = 7.10^{-3}$, sachant que

$$\frac{\delta_{min}}{U_{ref}} \simeq 7.10^{-2},$$

où δ_{min} est la taille minimale d'une maille. Le CFL vaut donc 10^{-1}.

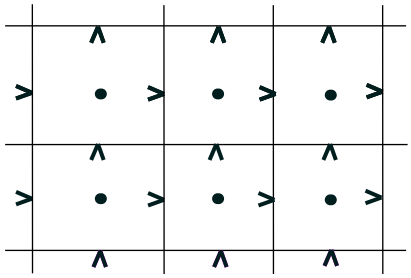


FIG. 2.3 – *Coupe plane du maillage décalé.*

- $\bullet$: *Nœuds de pression*
- $>$: *Nœuds de la composante horizontale de la vitesse*
- $\wedge$: *Nœuds de la composante verticale de la vitesse*

Pour les comparaisons, un moyennage est effectué, puis on se restreint au plan $x_3/W = 1/2$. On appellera d_1 la droite verticale appartenant à ce plan et se trouvant aux deux tiers de la longueur de la chambre et d_c la droite horizontale se situant à 0,084m au dessous du plafond.

Deux premières simulations ont été effectuées avec le modèle invariant. Pour la première, la constante C_m a été mis égal à $C_s \simeq 0.16$, et pour la seconde, la constante est évaluée dynamiquement. Les calculs ont été menés jusqu'à 1200 secondes, ce qui correspond à environ 163000 pas de temps. On remarque d'après les comparaisons (dont une partie se trouve sur la figure FIG. 2.4) que le modèle invariant simple donne un résultat proche de celui obtenu avec une procédure dynamique. Cela valide le choix d'avoir pris $C_m = C_s$.

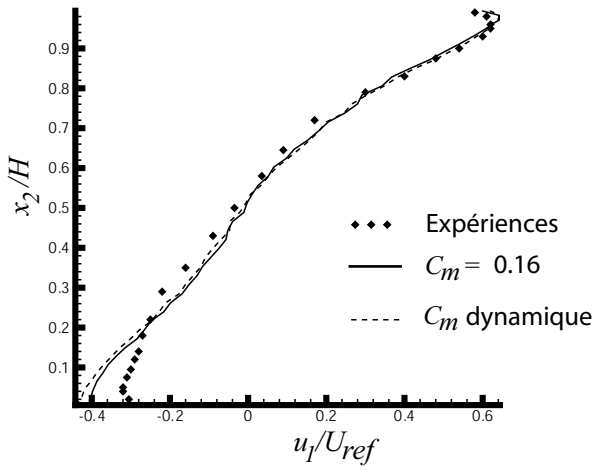


FIG. 2.4 – *Comparaison entre le modèle invariant et le modèle invariant dynamique. Profil moyen de la vitesse horizontale le long de* d_1.

Suite à cette comparaison, on n'utilisera plus que le modèle invariant, sans calcul dynamique, et où le coefficient C_m est égal à la constante de Smagorinsky. La figure Fig. 2.5 montre alors une comparaison entre le modèle invariant et les modèles les plus courants qui sont le modèle de Smagorinsky et le modèle (de Smagorinsky) dynamique aux deux tiers de la longueur de la chambre. On peut y remarquer que le modèle invariant donne des résultats nettement meilleurs que les deux autres modèles. Par ailleurs, l'écart avec les résultats expérimentaux est faible sauf dans la région proche du plancher qui constitue environ 15% de la hauteur où la vitesse est surévaluée (en valeur absolue).

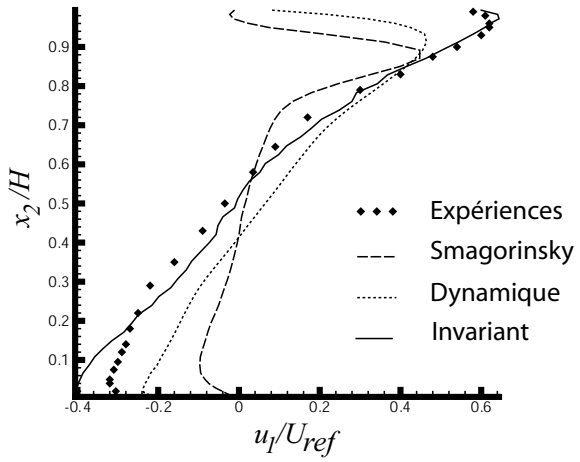


Fig. 2.5 – *Comparaison entre le modèle de Smagorinsky, le modèle (de Smagorinsky) dynamique et le modèle invariant. Profil moyen de la composante horizontale de la vitesse le long de* d_1.

La figure Fig. 2.6 compare les profils de vitesse moyen près du plafond. On y remarque que globalement, le modèle invariant donne de meilleurs résultats par rapport aux deux autres modèles. Dans la région centrale on a un bon accord avec les données expérimentales. En revanche, à l'entrée, on a un écart significatif par rapport à ces mêmes données. Malgré tout, les deux figures montrent que dans tous les cas le modèle invariant est nettement meilleur que le modèle de Smagorinsky. Et sauf dans une petite partie de l'écoulement, il est aussi meilleur que le modèle dynamique.

Notons qu'il faut être prudent lors de l'appréciation des résultats proche des parois car les mesures expérimentales peuvent y manquer des précisions. Par ailleurs, rappelons qu'aucune fonction de paroi n'est utilisée.

La figure Fig. 2.7 représente le champ de vitesse moyen donné par le modèle

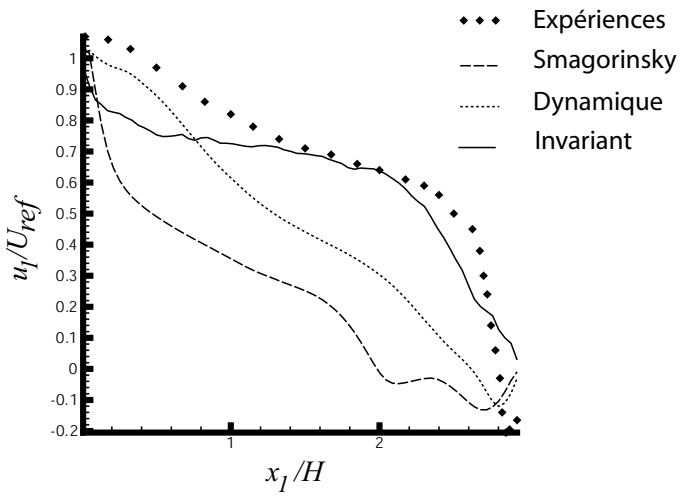


FIG. 2.6 – *Comparaison entre le modèle de Smagorinsky, le modèle (de Smagorinsky) dynamique et le modèle invariant. Profil moyen de la composante horizontale de la vitesse le long de* d_c.

invariant dans le plan ($x_3/W = 1/2$). La figure 2.8 montre le champ de vitesse moyen correspondant à trois plans transversaux. On peut constater grâce à cette figure que le champ est bien tridimentionnel. Elle indique aussi la présence de nombreuses zones de recirculation. L'évolution temporelle est représentée sur les figures FIG. 2.9 et FIG. 2.10. On y remarque qu'il n'y a plus beaucoup d'évolution à partir d'environ 400 secondes.

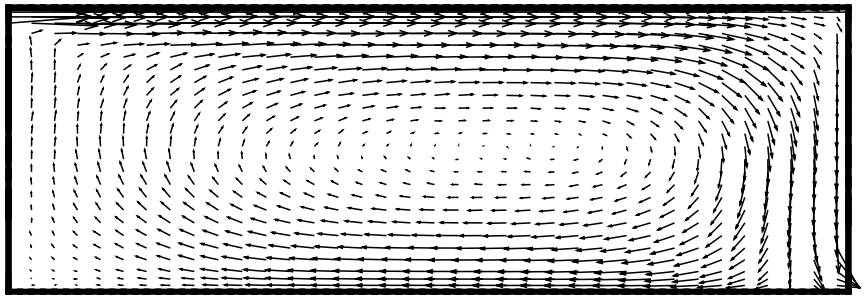


FIG. 2.7 – *Champ de vitesse moyen donné par le modèle invariant en* $x_3/W = 1/2$. *(Seul le vecteur vitesse en un nœud sur quatre est représenté.)*

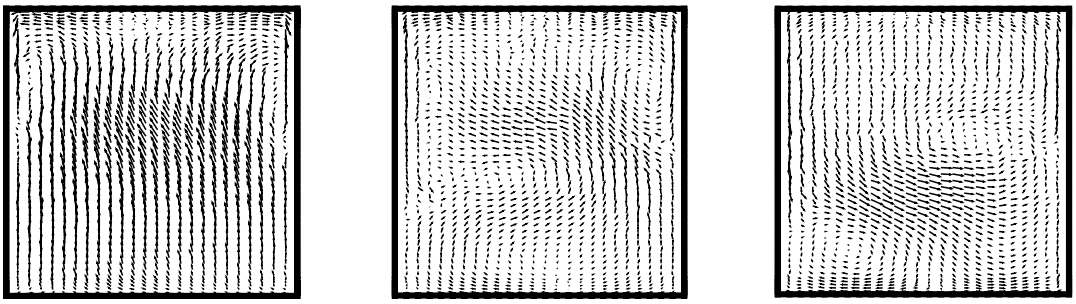


FIG. 2.8 – *Champ de vitesse moyen donné par le modèle invariant en : a)* $x_1/L = 1/3$, *b)* $x_1/L = 1/2$, *c)* $x_1/L = 2/3$.

Pour plus de visibilité, un facteur d'agrandissement de 5 par rapport à la figure FIG. *2.7 a été appliqué aux vecteurs.*

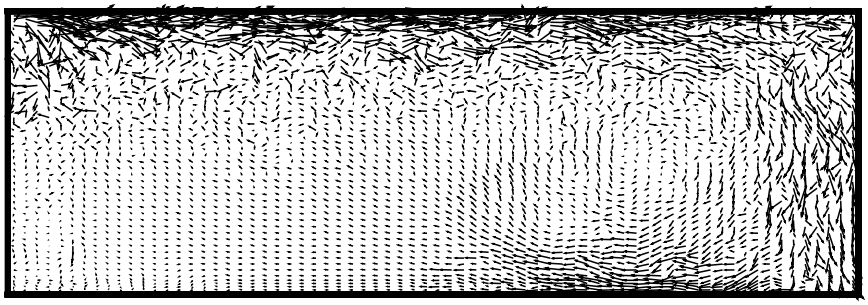
2.4.4 Conclusion

A partir de ces premiers tests, on a pu montrer la validité du modèle invariant. L'amélioration qu'il apporte par rapport au modèle de Smagorinsky prouve encore l'importance du respect des symétries des équations de Navier-Stokes lors de la modélisation de la turbulence. Mais au-delà de ces résultats, on a surtout construit des modèles qui sont mathématiquement consistants du point de vue de la symétrie et de la thermodynamique.

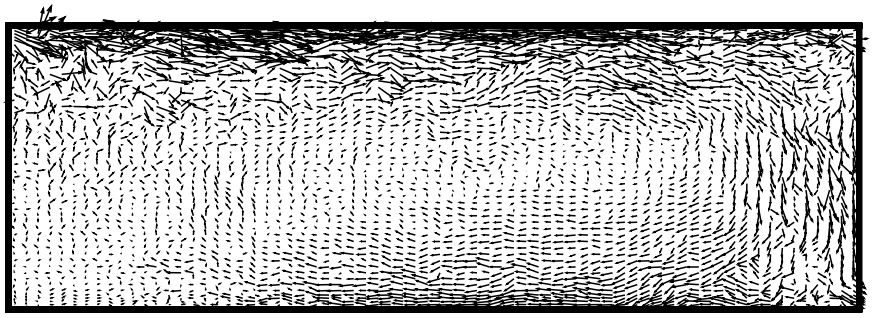
Pour les calculs ci-dessus, on a choisi la fonction g linéaire pour avoir un modèle le plus simple possible. Une étude plus poussée pourrait donner plus de précision sur cette fonction. On pourrait alors espérer des résultats encore meilleurs. On pourrait aussi introduire d'autres paramètres comme le taux de dissipation ou bien l'énergie cinétique dans le modèle. Notons que si on introduit le taux de dissipation, on peut alors enlever ν de l'expression du modèle.

Enfin, faisons la remarque que la classe de modèles (2.10) a été construite pour la dimension 3. On ne peut pas l'utiliser telle quelle pour déduire des modèles en dimension 2. L'introduction d'autres paramètres est nécessaire pour construire des modèles en dimension 2.

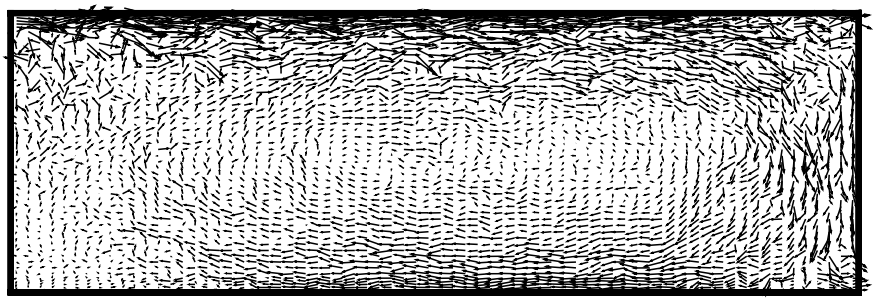
Après avoir validé un modèle pour les équations de Navier-Stokes, on va maintenant étendre la construction de modèles au cas de la convection thermique.



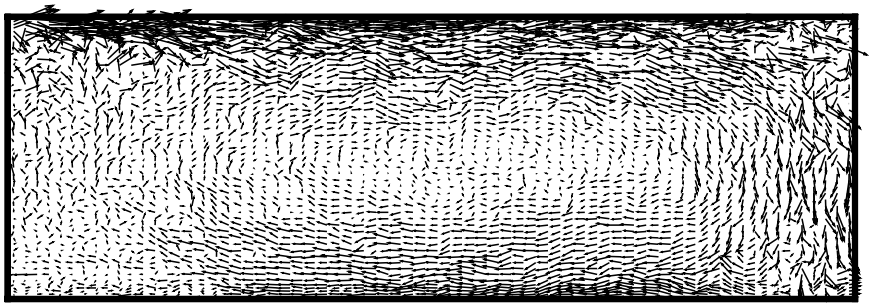
$t = 100s$



$t = 200s$

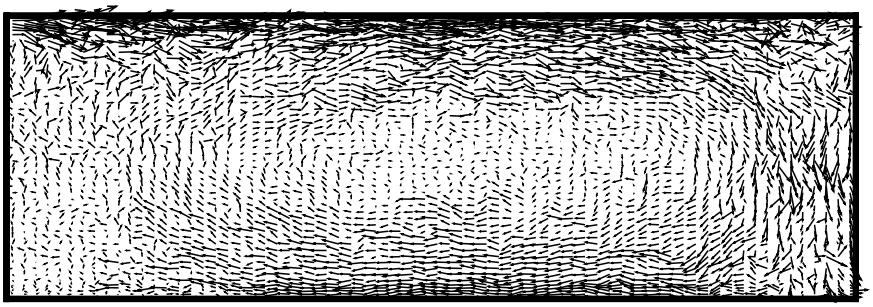


$t = 300s$

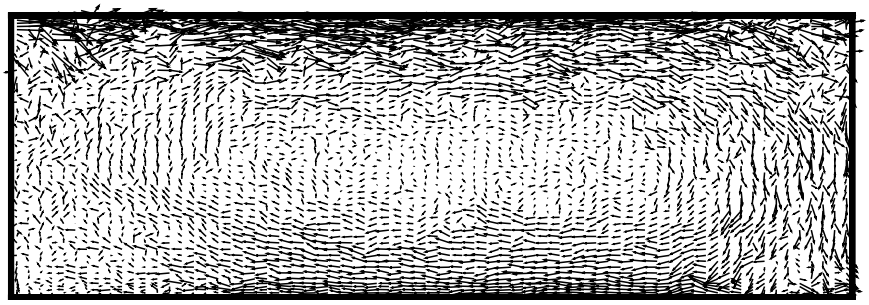


$t = 400s$

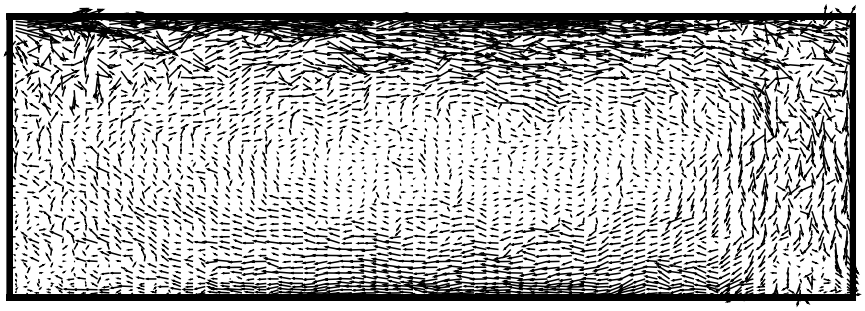
FIG. 2.9 – *Evolution temporelle du champ de vitesse*



$t = 500s$



$t = 600s$



$t = 1200s$

FIG. 2.10 – *Evolution temporelle du champ de vitesse (suite)*

2.5 Classe de modèles invariants pour la convection thermique

Comme pour les équations de Navier-Stokes, on peut construire des modèles invariants respectant le second principe de la thermodynamique pour les équations de la convection thermique. On a alors à modéliser le tenseur des contraintes de sous-maille $\tau = \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u}$ et le flux de sous-maille $\pi = \overline{\theta u} - \overline{\theta}\overline{u}$.

On va adopter le même plan qu'avant, c'est-à-dire qu'on va construire une classe de modèles invariants qu'on raffinera pour vérifier le second principe de la thermodynamique. Pour cela, on se mettra dans le cas général où il y a un fort couplage entre la vitesse et la température, c'est-à-dire que la vitesse intervient dans l'expression de π et qu'inversement, la température intervient dans l'expression de τ. On donnera ensuite quelques exemples simples de modèles, dont des modèles où la température n'intervient pas dans l'expression de τ.

Pour le moment, on restera dans le cadre théorique et on ne présentera pas de résultats de simulations.

2.5.1 Construction d'une classe de modèles invariants

Pour que le modèle soit invariant par rapport à la transformation galiléenne, la translation temporelle et la translation par rapport à la pression, il suffit de ne pas inclure le temps et la pression. Ceci fait, en ne faisant intervenir la température qu'à travers son gradient

$$\overline{\mathbb{T}} = \nabla\overline{\theta},$$

on vérifie l'invariance par rapport à la translation pression-température. De même, si $\overline{u}$ et x n'interviennent qu'à travers $\overline{S}$, alors on garde l'invariance par rotation. On a alors :

$$-\tau = \mathscr{F}_0(\overline{S}, \overline{\mathbb{T}}, \nu)$$
$$-\pi = \mathscr{G}_0(\overline{S}, \overline{\mathbb{T}}, \kappa).$$

Pour satisfaire l'invariance par le second changement d'échelle, il faut et il suffit que ν et κ se mettent en facteur. D'où :

$$-\tau = \nu\mathscr{F}(\overline{S}, \overline{\mathbb{T}})$$

$$-\pi = \kappa \mathscr{G}(\overline{S}, \overline{\mathbb{T}}).$$

A partir de là, la théorie des invariants, l'invariance par réflection et l'égalité des traces entraînent :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\tau^d & = & \nu E_1 \overline{S} + \nu E_2 \ \mathrm{Adj}^d \, \overline{S} + \nu E_3 (\overline{\mathbb{T}} \otimes \overline{\mathbb{T}})^d \\ & + & \nu E_4 [\overline{S}(\overline{\mathbb{T}} \otimes \overline{\mathbb{T}})]^d + \nu E_5 [\overline{S}(\overline{\mathbb{T}} \otimes \overline{\mathbb{T}})\overline{S}]^d \\ -\pi & = & \kappa E_6 \overline{\mathbb{T}} + \kappa E_7 \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} + \kappa E_8 \overline{S}^2 \overline{\mathbb{T}} \end{array}} \tag{2.18}$$

Les coefficients E_i sont des fonctions des invariants indépendants formés à partir de $\overline{S}$ et

$$\chi = \operatorname{tr} \overline{S}^2, \quad \zeta = \det \overline{S}, \quad \vartheta = \overline{\mathbb{T}}^2, \quad \omega_1 = \overline{\mathbb{T}} \centerdot \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}}, \quad \omega_2 = \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} \centerdot \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} \tag{2.19}$$

(voir aussi [149]).

Il ne reste plus maintenant qu'à faire vérifier l'invariance par le premier changement d'échelle. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.13. *Supposons que $\overline{S} \neq 0$. Notons*

$$v_1 = \frac{\zeta}{\chi^{3/2}}, \qquad v_2 = \frac{\vartheta}{\chi^2}, \qquad v_3 = \frac{\omega_1}{\chi^{5/2}}, \qquad v_4 = \frac{\omega_2}{\chi^3}$$

où χ, ζ, ϑ, ω_1 et ω_2 sont les invariants fondamentaux indépendants définis par (2.19).

Alors, un modèle de sous-maille (τ, II) de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\tau^d & = & \nu F_1 \overline{S}^d \ + \ \nu \chi^{-1/2} F_2 \ \mathrm{Adj}^d \, \overline{S} \ + \ \nu \chi^{-3/2} F_3 (\overline{\mathbb{T}} \otimes \overline{\mathbb{T}})^d \\ & + & \nu \chi^{-2} F_4 [\overline{S}(\overline{\mathbb{T}} \otimes \overline{\mathbb{T}})]^d \ + \ \nu \chi^{-5/2} F_5 \overline{S} [(\overline{\mathbb{T}} \otimes \overline{\mathbb{T}})\overline{S}]^d \\ -\mathrm{II} & = & \kappa F_6 \overline{\mathbb{T}} \ + \ \kappa \chi^{-1/2} F_7 \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} \ + \ \kappa \chi^{-1} F_8 \overline{S}^2 \overline{\mathbb{T}} \end{array}} \tag{2.20}$$

où les F_i, $i = 1, \ldots, 8$, sont des fonctions de (v_1, v_2, v_3, v_4) respecte le groupe de symétrie des équations de la convection thermique.

PREUVE
Le premier changement d'échelle transforme les variables x, u, ν, θ et κ de la manière suivante :

$$x \mapsto \widehat{x} = ax, \qquad u \mapsto \widehat{u} = \frac{1}{a}\, u, \qquad \nu \mapsto \widehat{\nu} = \nu,$$

$$\theta \mapsto \widehat{\theta} = \frac{1}{a^3}\, \theta, \qquad \kappa \mapsto \widehat{\kappa} = \kappa.$$

On a alors :

$$\widehat{\overline{S}} = \frac{1}{a^2}\, \overline{S}, \qquad \widehat{\overline{\mathbb{T}}} = \frac{1}{a^4}\, \overline{\mathbb{T}}.$$

Quant aux invariants indépendants, on a :

$$\widehat{\chi} = \frac{1}{a^4}\, \chi, \qquad \widehat{\zeta} = \frac{1}{a^6}\, \zeta, \qquad \widehat{\vartheta} = \frac{1}{a^8}\, \vartheta, \qquad \widehat{\omega}_1 = \frac{1}{a^{10}}\, \omega_1, \qquad \widehat{\omega}_2 = \frac{1}{a^{12}}\, \omega_2.$$

Pour avoir l'invariance du modèle, il faut que

$$\widehat{\tau} = \frac{1}{a^2}\, \tau \qquad \text{et} \qquad \widehat{\pi} = \frac{1}{a^4}\, \pi.$$

A partir de ces relations et du modèle (2.18), on doit avoir :

$$E_1(\frac{1}{a^4}\, \chi, \frac{1}{a^6}\, \zeta, \frac{1}{a^8}\, \vartheta, \frac{1}{a^{10}}\, \omega_1, \frac{1}{a^{12}}\, \omega_2) = E_1(\chi, \zeta, \vartheta, \omega_1, \omega_2)$$

En calculant la variation autour de $a = 1$, on obtient :

$$-4\chi \frac{\partial E_1}{\partial \chi} - 6\zeta \frac{\partial E_1}{\partial \zeta} - 8\vartheta \frac{\partial E_1}{\partial \vartheta} - 10\omega_1 \frac{\partial E_1}{\partial \omega_1} - 12\omega_2 \frac{\partial E_1}{\partial \omega_2} = 0$$

En faisant de même avec les autres E_i, on trouve :

$$\chi \frac{\partial E_i}{\partial \chi} + \frac{3}{2}\, \zeta \frac{\partial E_i}{\partial \zeta} + 2\vartheta \frac{\partial E_i}{\partial \vartheta} + \frac{5}{2}\, \omega_1 \frac{\partial E_i}{\partial \omega_1} + 3\omega_2 \frac{\partial E_i}{\partial \omega_2} = b_i E_i, \qquad i = 1, \ldots, 8$$

avec

$$b_1 = 0,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = -\frac{3}{2},\ b_4 = -2,\ b_5 = -\frac{5}{2},\ b_6 = 0,\ b_7 = -\frac{1}{2},\ b_8 = -1.$$

Les équations caractéristiques sont

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\chi} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\frac{3}{2}\zeta} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{2\vartheta} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\frac{5}{2}\omega_1} = \frac{\mathrm{d}\omega_2}{3\omega_2} = \frac{\mathrm{d}E_i}{b_i E_i}.$$

En supposant que χ ne s'annule pas, nous pouvons prendre comme solution

$$E_i = \chi^{b_i} F_i\left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}}, \frac{\vartheta}{\chi^2}, \frac{\omega_1}{\chi^{5/2}}, \frac{\omega_2}{\chi^3}\right) = \chi^{b_i} F_i(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

d'où le théorème. ■

Raffinons maintenant la classe de modèles (2.20) pour satisfaire le second principe de la thermodynamique.

2.5.2 Respect du second principe de la thermodynamique

A l'échelle moléculaire, le tenseur des contraintes visqueuses $\tau_r = 2\nu S$ peut être relié au tenseur des taux de déformation par :

$$\tau_r = \frac{\partial \varphi_{r,m}}{\partial S}$$

où $\varphi_{r,m}$ est le « potentiel mécanique » (que l'on notait φ_r précédemment et que l'on notera désormais $\varphi_{r,m}$ pour le distinguer du « potentiel thermique ») défini comme suit :

$$\varphi_{r,m} = \nu\ \mathrm{tr}\, S^2.$$

De même, le flux de chaleur $\pi_r = -\kappa\theta$ peut être relié au gradient de température par la relation :

$$-\pi_r = \frac{\partial \varphi_{r,t}}{\partial \mathbb{T}}$$

où $\varphi_{r,t}$ est le « potentiel thermique » :

$$\varphi_{r,t} = \frac{1}{2}\,\kappa\|\mathbb{T}\|^2.$$

Ces deux potentiels sont convexes et positifs. Le lemme 2.3 assure donc que la dissipation mécanique et la dissipation thermique restent positives :

$$\Phi_{r,m} = \operatorname{tr}(\tau_r S) = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \varphi_{r,m}}{\partial S}\ S\right) \geq 0,$$

et

$$\Phi_{r,t} = \frac{1}{\theta}\operatorname{tr}(-\pi_r\ \nabla\theta^T) = \frac{1}{\theta}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \varphi_{r,t}}{\partial \mathbb{T}}\ \mathbb{T}^T\right) \geq 0.$$

De leur côté, l'opposé du tenseur de sous-maille $(-\tau)$ peut être considéré comme une contrainte engendrant une dissipation mécanique

$$\Phi_m = \operatorname{tr}(\tau\overline{S})$$

et le flux de sous-maille π peut être considéré comme un flux de chaleur induisant une dissipation thermique

$$\Phi_t = \frac{1}{\overline{\theta}}\operatorname{tr}(-\pi\ \overline{\mathbb{T}}^T).$$

Pour rester compatible avec les équations de la convection thermique, on va supposer qu'ils dérivent aussi respectivement d'un potentiel mécanique et d'un potentiel thermique.

Hypothèse 2.14. *Le tenseur de sous-maille τ et le flux de sous-maille π dérivent respectivement d'un potentiel mécanique φ_m (dépendant des invariants et de ν) et d'un potentiel thermique φ_t (dépendant des invariants et de κ) tels que*

$$-\tau = \frac{\partial \varphi_m}{\partial \overline{S}}$$

et

$$-\pi = \frac{\partial \varphi_t}{\partial \overline{\mathbb{T}}}.$$

Avec cette hypothèse, il suffit donc que les deux potentiels soient convexes et positifs pour assurer le second principe de la thermodynamique.

L'hypothèse 2.14 va induire une restriction de la classe de modèles (2.20) selon la proposition suivante.

Proposition 2.15. *Soient τ un tenseur de sous-maille et Π un flux de sous-maille définis par (2.20).*

Alors, si τ et Π satisfont l'hypothèse 2.14, il existe deux fonctions g_m et g_t de v_1, v_2, v_3 et v_4 telles que

$$\boxed{\begin{aligned} -\tau^d &= \nu\left[2g_m - 3v_1\frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2\frac{\partial g_m}{\partial v_2} - 5v_3\frac{\partial g_m}{\partial v_3} - 6v_4\frac{\partial g_m}{\partial v_4}\right]\overline{S} + \\ &+ \nu\chi^{-1/2}\frac{\partial g_m}{\partial v_1}\,\mathrm{Adj}^d\,\overline{S} + \nu\chi^{-3/2}\frac{\partial g_m}{\partial v_3}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})^d + 2\nu\chi^{-2}\frac{\partial g_m}{\partial v_4}[\overline{S}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})]^d, \\ -\Pi &= 2\kappa\frac{\partial g_t}{\partial v_2}\overline{\mathbb{T}} + 2\kappa\chi^{-1/2}\frac{\partial g_t}{\partial v_3}\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} + 2\kappa\chi^{-1}\frac{\partial g_t}{\partial v_4}\overline{S}^2\overline{\mathbb{T}}. \end{aligned}} \tag{2.21}$$

Preuve

Supposons que τ et Π dérivent de potentiels :

$$-\tau = \frac{\partial\varphi_m}{\partial\overline{S}}, \qquad -\Pi = \frac{\partial\varphi_t}{\partial\overline{\mathbb{T}}}.$$

Or (τ,Π) appartient à la classe (2.20). Il est donc invariant par le second changement d'échelle. Cela entraîne la forme suivante

$$-\tau = \nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\overline{S}}, \qquad -\Pi = \kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\overline{\mathbb{T}}}.$$

où cette fois, φ_m et φ_t ne dépendent plus de ν et de κ.

On a alors,

$$-\tau^d = \nu\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\overline{S}}\right)^d, \qquad -\pi = \kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\overline{\mathbb{T}}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} -\tau^d &= \nu\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\overline{S}}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{S}}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{S}}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\overline{S}}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\overline{S}}\right)^d \\ &= 2\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\chi}\overline{S}+\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\zeta}\ \mathrm{Adj}^d\,\overline{S}+\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\omega_1}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})^d+2\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\omega_2}[\overline{S}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})]^d \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\pi &= \kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\overline{\mathbb{T}}}+\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{\mathbb{T}}}+\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\mathbb{T}}}+\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\overline{\mathbb{T}}}+\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\overline{\mathbb{T}}} \\ &= 2\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\vartheta}\overline{\mathbb{T}}+2\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\omega_1}\overline{S}\ \overline{\mathbb{T}}+2\kappa\frac{\partial\varphi_t}{\partial\omega_2}\overline{S}^2\overline{\mathbb{T}}. \end{aligned}$$

Or (τ,π) appartient à la classe (2.20). Il est donc invariant par le premier changement d'échelle. Cela entraîne que

$$\varphi_m(\frac{1}{a^4}\,\chi,\frac{1}{a^6}\,\zeta,\frac{1}{a^8}\,\vartheta,\frac{1}{a^{10}}\,\omega_1,\frac{1}{a^{12}}\,\omega_2)=\frac{1}{a^4}\,\varphi_m(\chi,\zeta,\vartheta,\omega_1,\omega_2),$$

et

$$\varphi_t(\frac{1}{a^4}\,\chi,\frac{1}{a^6}\,\zeta,\frac{1}{a^8}\,\vartheta,\frac{1}{a^{10}}\,\omega_1,\frac{1}{a^{12}}\,\omega_2)=\frac{1}{a^8}\,\varphi_t(\chi,\zeta,\vartheta,\omega_1,\omega_2).$$

Ainsi,

$$\chi\frac{\partial\varphi_m}{\partial\chi}+\frac{3}{2}\,\zeta\frac{\partial\varphi_m}{\partial\zeta}+2\vartheta\frac{\partial\varphi_m}{\partial\vartheta}+\frac{5}{2}\,\omega_1\frac{\partial\varphi_m}{\partial\omega_1}+3\omega_2\frac{\partial\varphi_m}{\partial\omega_2}=\varphi_m,$$

et

$$\chi\frac{\partial\varphi_t}{\partial\chi}+\frac{3}{2}\,\zeta\frac{\partial\varphi_t}{\partial\zeta}+2\vartheta\frac{\partial\varphi_t}{\partial\vartheta}+\frac{5}{2}\,\omega_1\frac{\partial\varphi_t}{\partial\omega_1}+3\omega_2\frac{\partial\varphi_t}{\partial\omega_2}=2\varphi_t.$$

Ces équations ont une solution de la forme

$$\varphi_m = \chi g_m(v_1, v_2, v_3, v_4),$$

$$\varphi_t = \chi^2 g_t(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \chi} = g_m - \frac{3}{2}\, v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 2v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2} - \frac{5}{2}\, v_3 \frac{\partial g_m}{\partial v_3} - 3v_4 \frac{\partial g_m}{\partial v_4},$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \zeta} = \chi^{-1/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \omega_1} = \chi^{-3/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_3}, \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \omega_2} = \chi^{-2} \frac{\partial g_m}{\partial v_4}$$

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \vartheta} = \frac{\partial g_t}{\partial v_2}, \qquad \frac{\partial \varphi_t}{\partial \omega_1} = \chi^{-1/2} \frac{\partial g_t}{\partial v_3}, \qquad \frac{\partial \varphi_t}{\partial \omega_2} = \chi^{-1} \frac{\partial g_t}{\partial v_4}.$$

En injectant ces expressions dans τ et π, on obtient (2.21). ■

Pour que les dissipations soient positives, il suffit que les potentiels soient convexes et positifs. On a vu au cours de la démonstration de la proposition que les relations entre les potentiels φ_m et φ_t dont τ et π dérivent et les fonctions g_m et g_t sont :

$$\varphi_m = \nu \chi g_m,$$
$$\varphi_t = \kappa \chi^2 g_t.$$

D'où le théorème suivant qui conclut les résultats précédents :

Théorème 2.16. *Supposons que $\overline{S} \neq 0$. Soient*

$$\chi = \operatorname{tr} \overline{S}^2, \quad \zeta = \det \overline{S}, \quad \vartheta = \overline{\mathbb{T}}^2, \quad \omega_1 = \overline{\mathbb{T}}.\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}}, \quad \omega_2 = \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}}.\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}},$$

puis

$$v_1 = \frac{\zeta}{\chi^{3/2}}, \qquad v_2 = \frac{\vartheta}{\chi^2}, \qquad v_3 = \frac{\omega_1}{\chi^{5/2}}, \qquad v_4 = \frac{\omega_2}{\chi^3}.$$

Alors, un tenseur de sous-maille τ et un flux de sous-maille Π définis par

$$
\begin{aligned}
-\tau^d &= \nu\left[2g_m - 3v_1\frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2\frac{\partial g_m}{\partial v_2} - 5v_3\frac{\partial g_m}{\partial v_3} - 6v_4\frac{\partial g_m}{\partial v_4}\right]\overline{S} + \\
&+ \nu\chi^{-1/2}\frac{\partial g_m}{\partial v_1}\,\mathrm{Adj}^d\,\overline{S} + \nu\chi^{-3/2}\frac{\partial g_m}{\partial v_3}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})^d + 2\nu\chi^{-2}\frac{\partial g_m}{\partial v_4}[\overline{S}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})]^d, \\
-\Pi &= \kappa\frac{\partial g_t}{\partial v_2}\overline{\mathbb{T}} + \kappa\chi^{-1/2}\frac{\partial g_t}{\partial v_3}\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} + \kappa\chi^{-1}\frac{\partial g_t}{\partial v_4}\overline{S}^2\overline{\mathbb{T}}.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

où g_m et g_t sont des fonctions de v_1, v_2, v_3 et v_4 respectent le groupe de symétrie des équations de la convection thermique et dérivent chacun d'un potentiel.

Si de plus, g_m et g_t sont positifs et que les fonctions χg_m et $\chi^2 g_t$ sont convexes alors τ et Π sont conformes au second principe de la thermodynamique.

Le facteur 2 de Π a été mis dans g_t dans ce théorème.

Le théorème (2.22) donne une classe globale de modèles. On peut bien sûr en déduire des modèles plus simples en jouant sur les fonctions g_m et g_t. Un raisonnement similaire peut être utilisé pour déduire des modèles pour l'équation de transport de n'importe quel autre scalaire comme la masse ou la concentration de particule.

Dans le paragraphe suivant, on propose des modèles plus simples appartenant à la classe (2.22).

2.5.3 Exemples simples de modèles pour la convection thermique

a) Un modèle fortement couplé simple

Prenons le cas où g_m et g_t dépendent uniquement de v_1 et de v_2. On a alors :

$$
\begin{aligned}
-\tau &= \nu\left[2g_m - 3v_1\frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2\frac{\partial g_m}{\partial v_2}\right]\overline{S} + \nu\chi^{-1/2}\frac{\partial g_m}{\partial v_1}\,\mathrm{Adj}^d\,\overline{S} \\
-\Pi &= \kappa\frac{\partial g_t}{\partial v_2}\overline{\mathbb{T}}
\end{aligned}
$$

La fonction g_t étant arbitraire, on peut remplacer $(-\Pi)$ par :

$$-\Pi \;=\; \kappa h_t \overline{\mathbb{T}}$$

où h_t est une fonction (dérivable suffisamment de fois) de v_1 et v_2

La dissipation mécanique totale vaut

$$\mathrm{tr}[(\overline{\tau}_r + \tau)\overline{S}] = 2\nu \ \mathrm{tr}\,\overline{S}^2 \left[1 + g_m - 2v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2}\right]$$

tandis que la dissipation thermique totale est

$$\mathrm{tr}[-(\overline{\Pi}_r + \Pi)\overline{\mathbb{T}}^T] = \kappa \ \mathrm{tr}\,\overline{\mathbb{T}}^2 \left[1 + h_t\right].$$

Par conséquent, le modèle

$$\boxed{\begin{aligned} -\tau \;&=\; \nu \left[2g_m - 3v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2}\right] \overline{S} + \ \nu\chi^{-1/2} \frac{\partial g_m}{\partial v_1} \ \mathrm{Adj}^d\, \overline{S} \\ -\Pi \;&=\; \kappa h_t \overline{\mathbb{T}} \end{aligned}}$$

où g_m et h_t dépendent de v_1 et v_2 et

$$\boxed{\begin{aligned} 1 + g_m - 2v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2} \;&\geq\; 0 \\ 1 + h_t \;&\geq\; 0 \end{aligned}} \tag{2.23}$$

est un exemple de modèle invariant, vérifiant le second principe de la thermodynamique.

Contrairement au cas du théorème 2.22, le second principe de la thermodynamique est vérifié au sens faible ici, c'est-à-dire que ce ne sont pas les dissipations (mécanique et thermique) de sous-maille qui sont positives mais les dissipations totales. Cela permet au modèle de prendre en compte la cascade inverse d'énergie.

b) Un modèle couplé

La vérification de la première inégalité de (2.23) n'est pas toujours facile car, contrairement à v_1 (qui n'est autre que la variable qu'on a appelé v précédemment), v_2 n'est pas borné. Tout ce qu'on peut dire sur v_2 est qu'il est positif. Il peut donc être plus prudent de choisir g_m indépendant de v_2. Dans ce cas, on obtient un modèle couplé où τ ne dépend pas de la température mais que π peut dépendre à la fois de la vitesse et de la température :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\tau & = & \nu\Big[2g_m(v) - 3vg'_m(v)\Big]\overline{S} + \ \nu\chi^{-1/2}g'_m(v)\ \mathrm{Adj}^d\,\overline{S} \\ -\pi & = & \kappa\ h_t(v,v_2)\ \overline{\overline{\mathbb{T}}} \end{array}}$$

Les conditions thermodynamiques deviennent alors :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 1+g_m & \geq & 0 \\ 1+h_t & \geq & 0 \end{array}} \tag{2.24}$$

Le dernier exemple qu'on donnera est un modèle où les fonctions g_m et h_t sont linéaires.

c) Modèles linéaires

On se met dans le cas où les fonctions g_m et h_t sont de la forme :

$$g_m(v) = C_m\mathring{\delta}^2 v$$

et

$$h_t(v,v_2) = C_t\mathring{\delta}^2 v$$

ou

$$h_t(v, v_2) = C_t \mathring{\delta}^2 v_2.$$

avec $\mathring{\delta} = \dfrac{\overline{\delta}}{\ell}$ et les coefficients C_m et C_t sont positifs.

Dans le premier cas, le modèle s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\tau & = & \nu\, C_m \mathring{\delta}^2 \left[-\dfrac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}\, \overline{S} + \dfrac{1}{\|\overline{S}\|}\, \mathrm{Adj}^d\, \overline{S} \right] \\ -\pi & = & \kappa\, C_t \mathring{\delta}^2 \dfrac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}\, \overline{\mathbb{T}} \end{array}}$$

Et comme v est borné, il suffit que C_m et C_t ne soient pas trop grands pour assurer des dissipations positives.

Enfin, dans le cas où $h_t(v, v_2) = C_t \mathring{\delta}^2 v_2$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\tau & = & \nu\, C_m \mathring{\delta}^2 \left[-\dfrac{\det \overline{S}}{\|\overline{S}\|^3}\, \overline{S} + \dfrac{1}{\|\overline{S}\|}\, \mathrm{Adj}^d\, \overline{S} \right] \\ -\pi & = & \kappa\, C_t \mathring{\delta}^2 \dfrac{\|\overline{\mathbb{T}}\|^2}{\|\overline{S}\|^4}\, \overline{\mathbb{T}} \end{array}}$$

Sous peu que C_m n'est pas trop grand et C_t est par exemple positif, le modèle vérifie le second principe de la thermodynamique.

Remarque 2.17. *Ce n'est pas forcément une idée adaptée de tenter d'introduire la notion de nombre de Prandtl de sous-maille avec le seul premier terme de τ car le terme comportant $\mathrm{Adj}^d\, \overline{S}$ a son importance.*

Enfin, revenons au modèle général (2.22) et notons qu'il est possible à partir de ce modèle d'extraire des conditions sur la fonction g_t pour que π respecte le second principe de la thermodynamique. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 2.18. *Soit* Π *défini comme suit :*

$$-\Pi = \kappa h_1 \overline{\mathbb{T}} \; + \; \kappa h_2 \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} \; + \; \kappa h_3 \overline{S}^2 \overline{\mathbb{T}}.$$

où les h_i *sont des fonctions scalaires réelles. Alors, on a :*

$$\mathrm{tr}[-(\overline{\Pi}_r + \Pi)\overline{\mathbb{T}}^T] \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 + h_1 \geq 0, \\ h_3 \geq 0 \qquad et \\ h_2^2 - 4(1+h_1)h_3 \leq 0. \end{cases}$$

Preuve

La preuve qu'on présente ici est inspiré de [149].

D'abord, notons K la matrice

$$K = (1 + h_1) I_d + h_2 \overline{S} + h_3 \overline{S}^2$$

qui est symétrique réelle. On a alors :

$$\mathrm{tr}[-(\overline{\Pi}_r + \Pi)\ \overline{\mathbb{T}}^T] \geq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{tr}[(K\overline{\mathbb{T}})\ \overline{\mathbb{T}}^T] \geq 0.$$

Il faut donc et il suffit que K soit semi-défini positif. Cela est vrai si et seulement si les valeurs propres de K sont positives ou nulles. Or ces valeurs propres sont :

$$(1 + h_1) + h_2 \lambda_i + h_3 \lambda_i^2, \qquad i = 1, 2, 3$$

si les λ_i sont celles de $\overline{S}$. D'où

$$\mathrm{tr}[-(\overline{\Pi}_r + \Pi)\ \overline{\mathbb{T}}^T] \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad h_0(\lambda) = (1 + h_1) + h_2 \lambda + h_3 \lambda^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cela conduit à trois conditions nécessaires :

- Comme $h_0(0)$ doit être positif,

$$1 + h_1 \geq 0.$$

- Puisque $h_0(\lambda)$ doit rester positif lorsque $\lambda \to +\infty$,

$$h_3 \geq 0.$$

- h_0 change forcément de signe sauf si son déterminant (en tant que fonction polynomiale de degré 2) est négatif ou nul, d'où

$$h_2^2 - 4(1 + h_1)h_2 \leq 0.$$

Il est aisé de montrer que ces trois conditions sont également suffisantes. ■

Dans ce chapitre, on a proposé des modèles qui sont consistants du point de vue des symétries, aussi bien pour les équations de Navier-Stokes que pour les équations de la convection thermique. Ces modèles sont de plus conformes au second principe de la thermodynamique. En outre, on a montré que la vérification de ce principe conduit à la stabilité des modèles.

La généralité des modèles construits, mais également de la démarche empruntée, laisse des possibilités d'améliorations. En introduisant d'autres paramètres comme le taux de dissipation dans les expressions du modèle, il est possible d'élaborer par exemple des modèles en dimension 2.

On va maintenant entrer dans la seconde partie de la thèse qui consiste à intégrer la LES dans un algorithme de type MAN.

PARTIE II

MISE EN ŒUVRE D'UNE TECHNIQUE DE PERTURBATION NUMÉRIQUE POUR LA LES

Chapitre 3

Méthode Asymptotique Numérique et LES

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'introduction de la LES dans un algorithme basé sur la méthode asymptotique numérique (MAN). Rappelons que la MAN est une méthode de résolution numérique de problèmes non linéaires qui se base sur la technique de perturbation ([10]). Elle consiste à chercher une solution sous forme d'une série formelle par rapport à un paramètre de contrôle. Cela transforme le problème en une cascade de problèmes linéaires où seul le second membre change.

Dans l'introduction générale de ce document, on a déjà mentionné les intérêts de la MAN et l'utilité d'y intégrer la LES (détection de bifurcations instationnaires, ...). On va alors intégrer ici la LES dans un algorithme basé sur la MAN. Pour cela, on va prendre un des algorithmes associant à la MAN une technique d'homotopie et que Braikat et ses coolaborateurs ([17, 18, 19]) ont proposés pour traiter des problèmes instationnaires. On adaptera cet algorithme à la résolution les équations filtrées de Navier-Stokes, comportant un modèle de sous-maille.

Le chapitre sera organisé comme suit. Dans la première section, on discrétisera les équations filtrées de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis. On y appliquera alors l'algorithme de résolution. Dans la deuxième section, on effectuera des tests numériques pour évaluer l'efficacité de l'algorithme. On utilisera comme modèles de sous-maille le modèle de Smagorinsky et le modèle dynamique. On discutera des résultats obtenus dans la dernière section.

3.1 La MAN associée à une technique d'homotopie pour la LES

Récrivons les équations de Navier-Stokes filtrées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) + \dfrac{1}{\rho}\nabla \overline{p} - 2\nu \operatorname{div}\overline{S} + \operatorname{div}\tau = 0 \\ \\ \operatorname{div}\overline{u} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

La MAN ne dépend pas de la méthode de discrétisation (spatiale ou temporelle). Mais comme le code de calcul qu'on utilise se base sur les éléments finis, on va choisir des conditions aux limites adaptées aux éléments finis :

$$\begin{cases} \overline{u} = \overline{\gamma}_u & \text{sur } \Gamma_u, \\ \overline{\sigma}^* \, n = 0 & \text{sur } \Gamma_\sigma, \\ \overline{u}(0,x) = \overline{\gamma}(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\overline{\sigma}^* = -\overline{p}I + 2\mu\overline{S} - \rho\tau$ et Γ_u et Γ_σ sont une partition du bord du domaine (qu'on suppose assez régulier).

Remarque 3.1. *Avec le type de conditions au bord (3.2), on n'a d'erreur de commutation entre le filtrage et la dérivation que sur la partie du bord où γ_u est non nul (voir la section 1.1.3), ce qui correspond à une condition d'entrée.*

Discrétisons les équations (3.1) en espace.

3.1.1 Discrétisation spatiale

a) Formulation faible

Dans le but d'utiliser la méthode des éléments finis, on va écrire la formulation faible du problème (3.1). Prenons alors comme espaces test les espaces H_v et H_q suivant :

$$H_v = \{v \in H^1(\Omega) \cap W^{1,3}(\Omega),\ v_{|\Gamma_u} = 0\},$$

$$H_q = L^2(\Omega).$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\overline{u},\overline{p}) \in H_u \times H_p \text{ tel que pour tout } (v,q) \in H_v \times H_q \text{ on ait :} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \cdot v + \operatorname{div}(\overline{u}\otimes\overline{u}) \cdot v - \frac{1}{\rho}\overline{p}\operatorname{div} v + 2 \operatorname{tr}\left[(2\nu\overline{S}-\tau)S(v)\right] \right) \mathrm{d}x = 0 \\ \\ \displaystyle\int_\Omega (\operatorname{div}\overline{u})\, q \, \mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

avec la condition initiale

$$\overline{u}(0,x) = \gamma(x),$$

où on a désigné par $S(v)$ le terme

$$S(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T).$$

Des résultats de convergence et d'unicité avec la LES peuvent être trouvées dans [69] et [72] pour le problème faible.

b) Discrétisation par éléments finis

Dans le but d'enlever la pression dans les équations, on effectue une pénalisation, c'est-à-dire qu'on remplace la dernière équation de (3.3) par

$$\int_\Omega \left(\operatorname{div}\overline{u} + \frac{1}{b}p \right) q \, \mathrm{d}x = 0 \tag{3.4}$$

où b est un grand paramètre. Notons que la technique de pénalisation peut améliorer la stabilité du schéma numérique ou encore accélérer la convergence dans le cas stationnaire ([95]). On peut alors trouver des résultats de convergence vers la solution d'origine dans [55] et [41]. Des études sur le choix optimal théorique de b peuvent être trouvée dans [12] mais dans la pratique, b est pris comme un multiple de la viscosité :

$$b = c\mu.$$

La valeur pratique de la constante c se situe entre 10^5 et 10^7.

Appliquons maintenant la discrétisation par éléments finis à notre problème (3.3)-(3.4). Pour cela, nous approximons $(\overline{u}, \overline{p}) \in H_u \times H_p$ par un couple (u_h, p_h) appartenant à un espace $V_h^u \times V_h^p$ de dimension finie $n^u \times n^p$. Nous pouvons alors écrire ([34]) :

$$\begin{aligned} u_h &= N_u U \\ p_h &= N_p P \end{aligned} \tag{3.5}$$

où N_u et N_p sont les matrices formées par les fonctions de base de V_h^u et V_h^p, tandis que $U \in \mathbb{R}^{n^u}$ et $P \in \mathbb{R}^{n^p}$ sont les valeurs nodales. En introduisant les relations (3.5) dans (3.3)-(3.4), puis en remplaçant v et q par les fonctions de base, nous pouvons mettre le problème sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (U, P) \in \mathbb{R}^{d^u} \times \mathbb{R}^{d^p} \text{ tel que} \\ \\ M \dfrac{\partial U}{\partial t} + Q(U,U) + \dfrac{1}{\rho} K_{up}\ P + N(U,U) = 0 \\ \\ {K_{up}}^T\ U + K_{pp}\ P = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Dans ces expressions, M désigne la matrice de masse

$$M = \int_\Omega {N_u}^T\ N_u \, \mathrm{d}x,$$

Q est l'opérateur quadratique défini par

$$Q(U,V) = \int_\Omega {N_u}^T\ (N_u U) \cdot \nabla N_u V \, \mathrm{d}x,$$

N l'opérateur non linéaire correspondant à $\overline{S}$ et τ, qui, dans le cas d'un modèle de viscosité de sous-maille, s'écrit :

$$N(U,V) = \left(\int_\Omega 2\,[\nu + \nu_{sm}(N_u U)]\, B^T D B \, \mathrm{d}x \right) V,$$

où B est la matrice formée par les dérivées des fonctions de base de vitesse et D la matrice telle que μD est la matrice de comportement. Le premier argument de N va au coefficient du modèle. Ensuite,

$$K_{up} = \int_\Omega B_v N_p \, \mathrm{d}x$$

où B_v est un réarrangement de B, $B_v = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T \; B$, et enfin

$$K_{pp} = \frac{1}{b} \int_\Omega {N_p}^T \, N_p \, \mathrm{d}x.$$

De (3.6), on peut enlever l'inconnu P puisque

$$P = -K_{pp}^{-1} \;\; K_{up} \, U.$$

Ainsi, en notant

$$L = -\frac{1}{\rho} \, K_{up} \; K_{pp}^{-1} \; {K_{up}}^T,$$

résoudre le problème (3.6) revient à résoudre le problème suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{d^u} \text{ tel que} \\ \\ M \dfrac{\partial U}{\partial t} + Q(U,U) + LU + N(U,U) = 0. \end{cases}} \tag{3.7}$$

Dans la pratique, la condenstation de la pression, c'est-à-dire l'opération qui consiste à enlever la pression, s'effectue au niveau élémentaire. L'inversion de K_{pp} se fait alors à la main.

C'est donc le problème (3.7) qu'on va retenir comme forme discrète du problème initial (3.1) et c'est à lui qu'on va appliquer l'algorithme de linéarisation annoncé précédemment. Quelque soit la méthode de discrétisation utilisée, on peut toujours s'arranger de manière à ce que le problème discrétisé soit de la même forme que (3.7).

3.1.2 Algorithme de résolution

On va maintenant entrer dans la MAN proprement dite.

Sous l'appellation MAN, il existe beaucoup d'algorithmes selon la manière dont on décompose la solution en série entière (le paramètre de décomposition, le premier terme de la série, ...). Dans le cas des problèmes instationnaires, Braikat et ses collaborateurs en proposent quelques uns dans [17, 18, 19]. On choisira l'algorithme dit « de linéarisation par rapport à l'instant précédent basé sur une matrice arbitraire » car les autres nécessitent l'inversion d'une matrice à chaque pas de temps à cause de la non-linéarité dans N introduite par le modèle de sous-maille. De plus, c'est lui qui s'est montré le plus efficace.

L'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent basé sur une matrice arbitraire comporte les étapes suivants :

a) discrétisation temporelle,
b) changement de variable par rapport à l'instant précédent,
c) technique d'homotopie avec introduction d'une matrice arbitraire,
d) technique de perturbation,

On va développer chacune de ces étapes.

a) Discrétisation temporelle

Notre algorithme requiert une discrétisation temporelle mais ne dépend pas de la méthode de discrétisation elle-même. On peut alors prendre la méthode de Newmark qui propose la discrétisation suivante :

$$\frac{v^{i+1} - v^i}{\Delta t} = \alpha\gamma^{i+1} + (1-\alpha)\gamma^i$$

si v^k et γ^k sont respectivement la vitesse et l'accélération au temps t^k et α un réel entre 0 et 1. Lorsque $\alpha = 0$ (respectivement 1, 0.5), le schéma est un schéma explicite (resp. implicite, de Crank Nicholson).

Pour éviter d'avoir une non-linéarité non quadratique (qui nécessiterait un traitement particulier), les coefficients du modèle (par exemple la viscosité de sous-maille) seront évalués à l'instant précédent. L'équation (3.7) devient alors :

$$\boxed{MU^{i+1} + \alpha\Delta t\, LU^{i+1} + \alpha\Delta t\, Q(U^{i+1}, U^{i+1}) + \alpha\Delta t\, N(U^i, U^{i+1}) = MU^i + T^{i+1}} \tag{3.8}$$

avec

$$T^{i+1} = \Delta t(\alpha-1)LU^i + \Delta t(\alpha-1)Q(U^i,U^i) + \Delta t(\alpha-1)N(U^i,U^i).$$

Quelque soit la méthode de discrétisation temporelle choisie, on devrait pouvoir se ramener à la forme (3.8).

b) Changement de variable

On effectue un changement de variable par rapport à l'instant précédent :

$$U^{i+1} = U^i + V,$$

ce qui donne :

$$\boxed{L_t^i V + \alpha\Delta t Q(V,V) = S^{i+1}} \tag{3.9}$$

où L_t^i est l'opérateur tangent en U^i :

$$L_t^i V = (M + \alpha\Delta t L)V + Q(U^i,V) + Q(V,U^i)$$

et

$$S^{i+1} = -\Delta t\, LU^i - \Delta t\, Q(U^i,U^i) - \Delta t\, N(U^i,U^i).$$

c) Technique d'homotopie avec introduction d'une matrice arbitraire

Pour éviter d'inverser l'opérateur L_t^i à chaque pas de temps, on introduit dans (3.9) une matrice arbitraire inversible L^* de la manière suivante :

$$L^*V + (L_t^i - L^*)V + \alpha\Delta t\, Q(V,V) = S^{i+1}. \tag{3.10}$$

Cette équation est bien sûr équivalente à (3.9). Ensuite, par la technique d'homotopie, on modifie le problème (3.10) en introduisant un paramètre de chemin λ pour arriver à :

$$\boxed{L^*W + \lambda(L_t^i - L^*)W + \alpha\Delta t\, Q(W,W) = \lambda S^{i+1}} \tag{3.11}$$

où W dépend du paramètre : $W = W(\lambda)$. Généralement, la matrice L^* est la matrice tangente L_t^0 ou une autre matrice assez proche pour contenir le maximum d'information sur la dynamique de l'écoulement.

L'équation (3.11) définit une classe de problèmes telle que, lorsque $\lambda = 0$, la solution est nulle et, lorsque $\lambda = 1$, on obtient la solution V de l'équation (3.9). On a donc : $W(\lambda = 0) = W_0 = 0$ et $W(\lambda = 1) = V$.

d) Technique de perturbation

Pour arriver à la solution V qui correspond à $\lambda = 1$, on applique une perturbation à la solution correspondant à $\lambda = 0$. On décompose alors W sous forme de série entière autour de $W_0 = 0$:

$$W = \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \cdots$$

Afin d'éviter un problème infini, on tronque la série à un ordre l.

$$W = \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \cdots + \lambda^l W_l. \tag{3.12}$$

En injectant le développement (3.12) dans (3.11), on obtient une cascade de problèmes après une identification selon les puissances de λ :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Ordre } 1 \\ \qquad L^* W_1 = S^{i+1} \\ \\ \text{Ordre } k,\ 2 \leq k \leq l \\ \qquad L^* W_k = (L^* - L_t^i) W_{k-1} - \alpha \Delta t \displaystyle\sum_{r=1}^{k-1} Q(W_r, W_{k-r}) \\ \\ U^{i+1} = U^i + W_1 + W_2 + \ldots + W_l \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Enfin, on peut modifier légèrement la deuxième équation de (3.13) pour avoir le schéma de résolution suivant :

$$
\begin{aligned}
&\text{Ordre } 1\\
&\qquad L^* W_1 = S^{i+1}\\
&\\
&\text{Ordre } k,\ 2 \leq k \leq l\\
&\qquad L^* w_k = -L_t^i W_{k-1} - \alpha \Delta t \sum_{r=1}^{k-1} Q(W_r, W_{k-r})\\
&\qquad W_k = W_{k-1} + w_k\\
&\\
&U^{i+1} = U^i + W_1 + W_2 + \ldots + W_p.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Sur le schéma (3.14), on remarque que pour tous les ordres k et tous les pas de temps, tous les problèmes sont linéaires. Ceci est dû au fait qu'on n'a multiplié le terme non-linéaire par λ dans (3.11).

L^* est la seule matrice à inverser. A chaque fois, seul le second membre change. Cela offre un grand avantage à la MAN par rapport aux méthodes classiques comme la méthode Newton-Raphson. Pour conserver les informations concernant la dynamique de l'écoulement, on choisit généralement une matrice proche de la matrice tangente L_t^0 comme L^*.

Pour qu'on puisse calculer U^{i+1}, il faut que le rayon de convergence de la série représentée par (3.12) soit plus grand que l'unité, ce qui n'est pas forcément le cas. Toutefois, la MAN présente l'avantage qu'il est facile d'évaluer numériquement ce rayon de convergence.

3.1.3 Rayon de convergence et continuation

Pour évaluer le rayon de convergence de la série (3.12), on part de la constatation que deux approximations polynomiales successives s'éloignent brusquement lorsqu'on atteint le rayon de convergence. Il suffit alors d'exiger que la différence soit inférieure à un petit paramètre ϵ pour être sûr qu'on est encore dans le domaine de validité. Notons

$$\mathcal{P}_k = W_1 + \lambda^2 W_2 + \cdots + \lambda^k W_k$$

l'approximation de W à l'ordre k. Donc, tant que l'inégalité suivante est vérifiée, on est dans le domaine de validité de la série :

$$\frac{\|\mathcal{P}_l - \mathcal{P}_{l-1}\|}{\|\mathcal{P}_l\|} = \frac{\|\lambda^l W_l\|}{\|\lambda W_1 + \ldots + \lambda^l W_l\|} < \epsilon.$$

En approximant le dénominateur par $\|\lambda W_1\|$, on obtient le rayon de convergence :

$$\lambda_{conv} = \left(\epsilon \frac{\|W_1\|}{\|W_l\|}\right)^{\frac{1}{l-1}}$$

Ce critère ne demande qu'un temps de calcul insignifiant par rapport à l'algorithme de résolution.

Si à un certain $t = t^{i_0}$ le rayon de convergence de la série est inférieur à l'unité, on ne peut pas calculer U^{i_0}. Une continuation devient alors nécessaire. Pour cela, on réajuste la matrice L^* (par exemple, prendre la matrice $L_t^{i_0}$), puis on recommence l'algorithme avec $U^0 = U^{i_0}$. On peut construire ainsi toute la courbe solution jusqu'à un pas de temps élevé. Le nombre totale de matrices à inverser est finalement égal au nombre de continuations. Le nombre de fois où on procède à une continuation sera appelé nombre de pas de continuation.

Il est possible d'élargir le domaine de validité de la série (3.12) en remplaçant le polynôme par une fraction rationnelle (Padé) qui lui est asymptotiquement équivalente (voir [136, 96]). Ce procédé s'est révélé efficace mais peut être insuffisant pour définir la série (3.12) en $\lambda = 1$. On peut aussi utiliser la méthode de resommation de séries, de type Borel-Laplace. Ce procédé sera étudié en particulier ultérieurement.

Remarque 3.2. *A chaque fois qu'on a un nouveau U^{i+1}, même si le rayon de convergence de la série est supérieur à 1, on calcule généralement le résidu pour s'assurer que la norme de celui-ci est assez petite, ce qui a toujours été notre cas.*

3.2 Tests numériques

On va appliquer l'algorithme ci-dessus pour simuler un écoulement d'air dans une cavité entraînée en dimension 2.

3.2.1 La configuration de l'écoulement

La géométrie de la cavité et les conditions au bord sont représentées sur la figure Fig. 3.1.

La viscosité cinématique et la densité sont

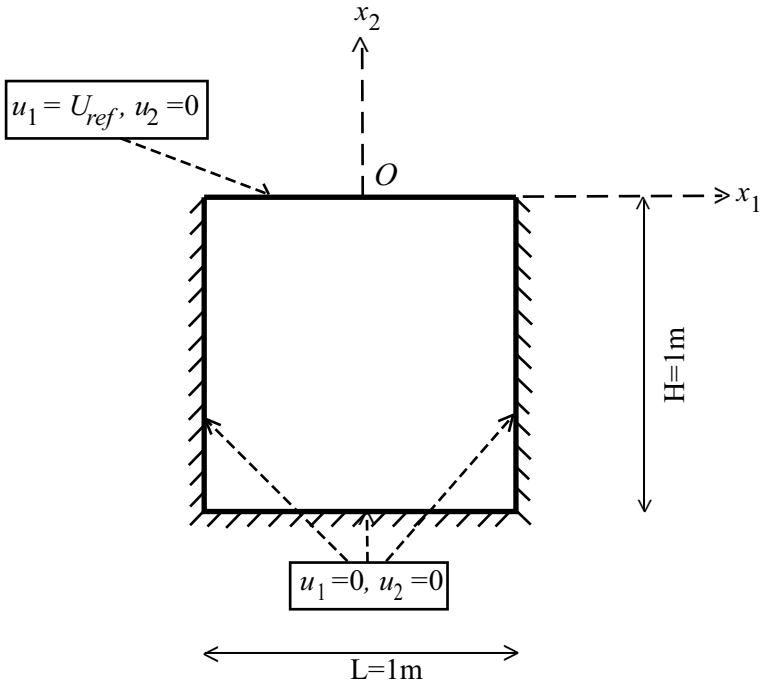


FIG. 3.1 – *Géométrie de la cavité entraînée et conditions au bord.*

$$\nu = 1.5\,10^{-5}\ m^2 s^{-1}, \qquad \text{et} \qquad \rho = 1.206\ kg\,m^{-3}.$$

U_{ref} est pris égal à $U_{ref} = 0.15$m/s de tel sorte que le nombre de Reynolds, calculé à partir de la longueur L de la cavité, vaille $Re = 10000$.

3.2.2 Les paramètres de simulation

Le code qu'on a utilisé pour implémenter les modèles de sous-maille est le code en éléments finis EVE. Ce code à été développé au départ par B. Cochelin et des étudiants de l'Université de Metz.

On prendra des éléments Q9-P1, c'est-à-dire des éléments quadrangles, avec 9 nœuds de vitesse et 3 nœuds de pression. Un tel élément est représenté sur la figure FIG. 3.2. La discrétisation spatiale est effectué avec la méthode de Crank-Nicholson ($\alpha = 0.5$).

Le paramètre b est pris égal à $b = 10^7\mu$. La série (3.12) est développé jusqu'à l'ordre $l = 15$. Le petit paramètre ϵ est mis à $\epsilon = 10^{-5}$. Aucun traitement n'est appliqué aux parois.

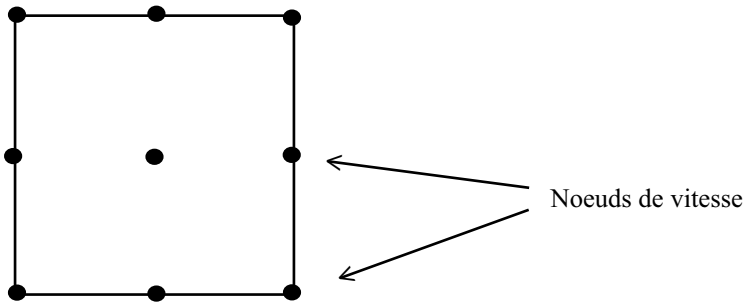


FIG. 3.2 – *Position des nœuds de vitesse sur un élément Q9-P1*

Le maillage est uniforme et composé de 33×33 points. Le calcul est mené jusqu'à $t = 1000$s avec un pas de temps de $\Delta t = 0.1$. Le CFL vaut donc environ 0.5. On prend $L^* = L_t^0$.

On se servira des résultats de Ghia *et al.* ([54]) comme référence. Ceux-ci ont été obtenus par simulation directe, avec 257×257 points.

3.3 Résultats et discussion

Deux calculs ont été effectués, le premier correspondant au modèle de Smagorinsky et le second au modèle dynamique (voir section 1.1.4). Les profils de vitesse obtenu le long de la droite verticale passant par le centre de la cavité sont montrés sur la figure FIG. 3.3. D'après cette figure, on a globalement un très bon accord avec les résultats de simulation directe de Ghia. On remarque aussi que le modèle dynamique donne un meilleur résultat par rapport au modèle de Smagorinsky. On constate en revanche quelques écarts proche de la paroi solide ($x_2 = -1$) et de la paroi entraînée ($x_2 = 0$) où on a une surévaluation (en valeur absolue). Toutefois, la zone où ces écarts sont significatifs n'excèdent pas 20% de la hauteur avec le modèle de Smagorinsky et 10% avec le modèle dynamique. Rappelons qu'aucune fonction de paroi n'est utilisée et qu'il n'y a pas de raffinement de maillage.

Sur les figures FIG. 3.4 et FIG. 3.5, on a alors les champs de vitesse moyen donnés respectivement par les deux modèles. On peut distinguer la présence de zone de recirculation dans les coins, sauf le coin supérieur droit.

Comme aucun traitement particulier n'a été fait proche des parois, on constate des oscillations proche du bord avec le modèle dynamique. En revanche, le caractère

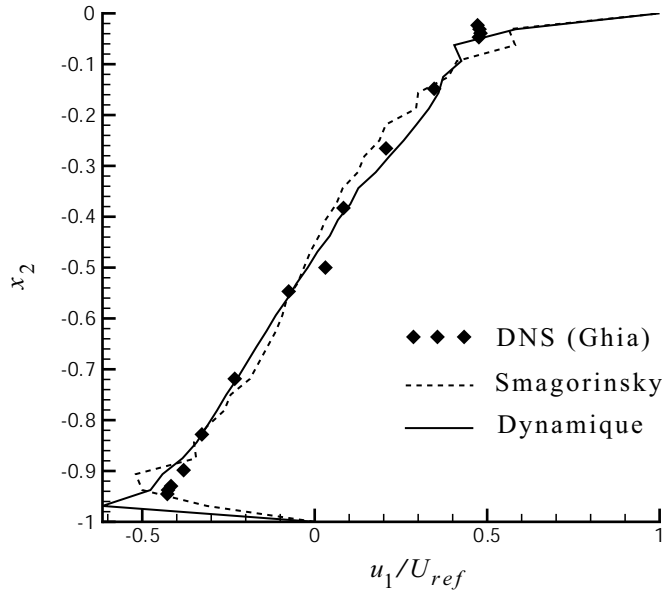


FIG. 3.3 – *Profils moyens de la vitesse horizontale le long de la droite verticale passant par le centre*

dissipatif du modèle de Smagorinsky, qui se remarque bien lorsqu'on compare les figures FIG. 3.4 et FIG. 3.5, absorbe les oscillations.

Les figures FIG. 3.6 et FIG. 3.7 représentent l'évolution temporelle des champs de vitesse obtenus avec les deux modèles. On y observe que le champ donné par le modèle de Smagorinsky se stabilise vers $t = 600$s. Par contre, avec le modèle dynamique, on a une petite évolution temporelle entretenue.

Revenons maintenant sur des aspects plus spécifiques à la MAN. Une seule inversion de matrice a été nécessaire pour calculer la solution jusqu'à 1000 secondes avec le modèle de Smagorinsky, ce qui représente une économie de calcul énorme. Par contre, pour le modèle dynamique, le résultat est moins bien. Si seule une inversion a été utile pour arriver jusqu'à environ 20 secondes (200 pas de temps), une inversion tous les deux ou trois pas de temps devient indispensable à partir d'environ 30 secondes car le rayon de convergence de la série est inférieur à 1, ce qui diminue l'intérêt de la méthode. Cette manque de performance peut s'expliquer par l'évaluation de la viscosité de sous-maille à l'instant précédent. En effet, contrairement au modèle de Smagorinsky, l'expression de la viscosité de sous-maille est bien plus complexe pour le modèle dynamique, si bien que sa valeur à l'instant précédent n'est pas une assez bonne approximation. Pour compenser cette mauvaise approximation, la matrice L^* doit être actualisée plus fréquemment.

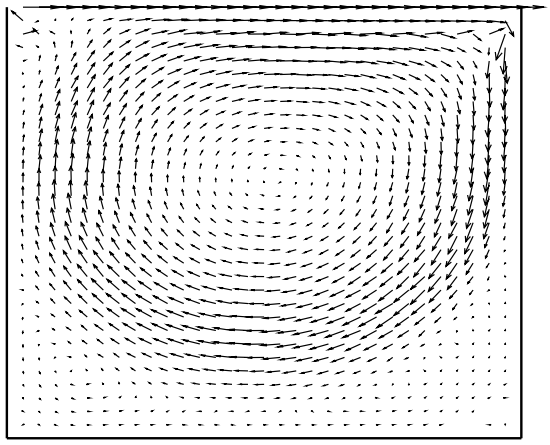


FIG. 3.4 – *Champ de vitesse moyen obtenu avec le modèle de Smagorinsky*

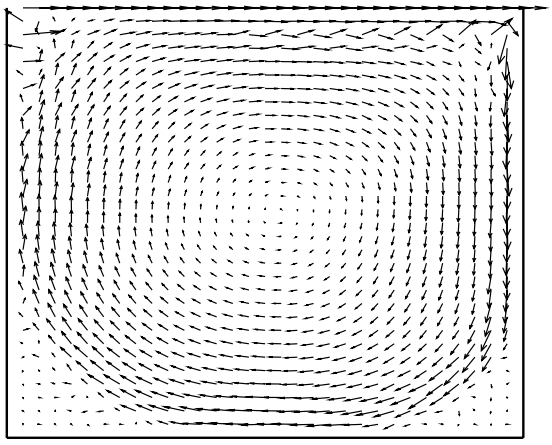


FIG. 3.5 – *Champ de vitesse moyen obtenu avec le modèle dynamique*

3.4 Conclusion

Nous avons pu montrer que l'intégration de la LES dans un algorithme du type MAN permet de simuler un écoulement avec un nombre de Reynolds élevé (10000 dans notre cas test). Cela ouvre une perspective pour la détection des bifurcations instationnaires. La comparaison des profils de vitesse a montré un bon accord avec les résultats de la DNS surtout dans la région centrale. En revanche, l'algorithme choisi n'est pas bien adapté à tout type de modèles de sous-maille. L'évaluation de la viscosité de sous-maille à l'instant précédent a pénalisé le modèle dynamique. Cela s'est manifesté par la réduction du domaine de validité de la série et la nécessité d'une actualisation plus fréquente de la matrice L^*.

Pour remédier à ce problème, quelques possibilités s'offrent à nous. La première est un traitement particulier de la viscosité de sous-maille. On pourrait n'évaluer qu'une partie moins importante de celle-ci à l'instant précédent pour avoir une

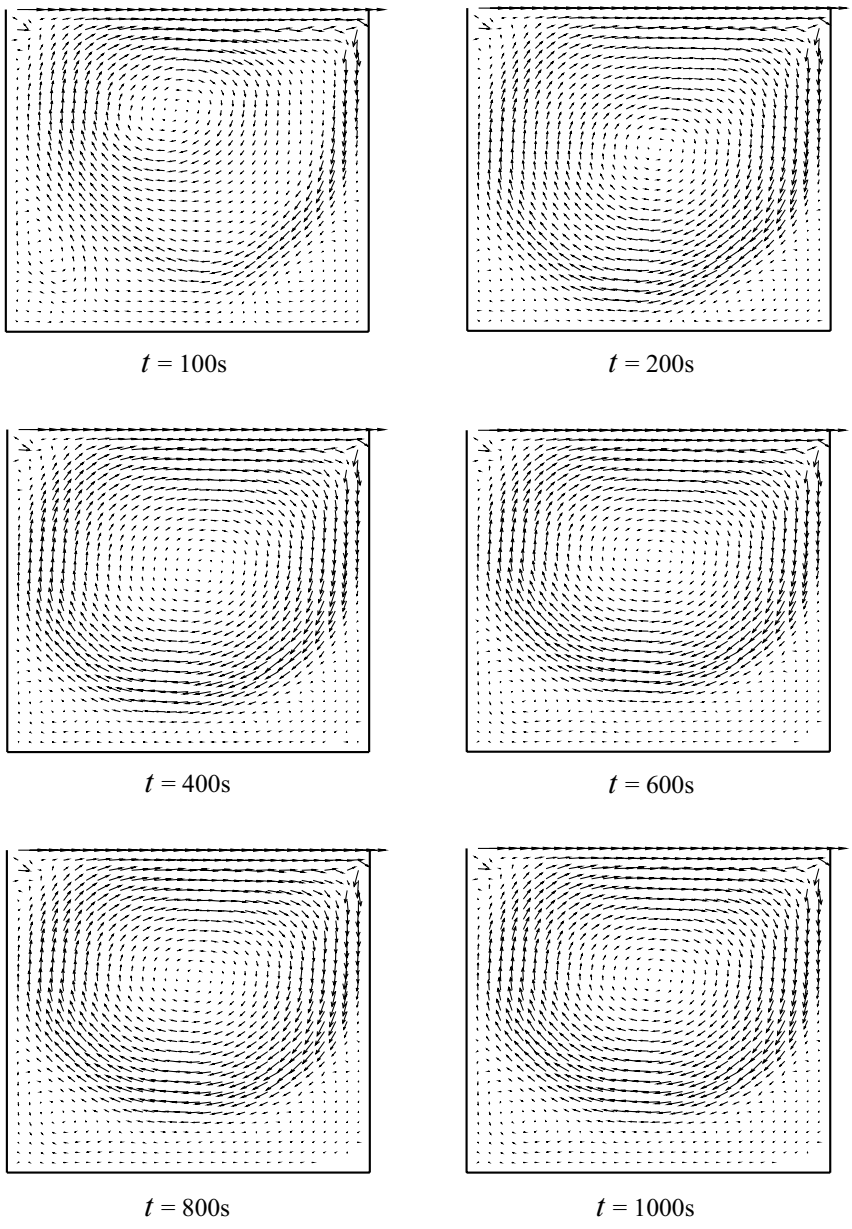


FIG. 3.6 – *Evolution temporelle calculée avec le modèle de Smagorinsky*

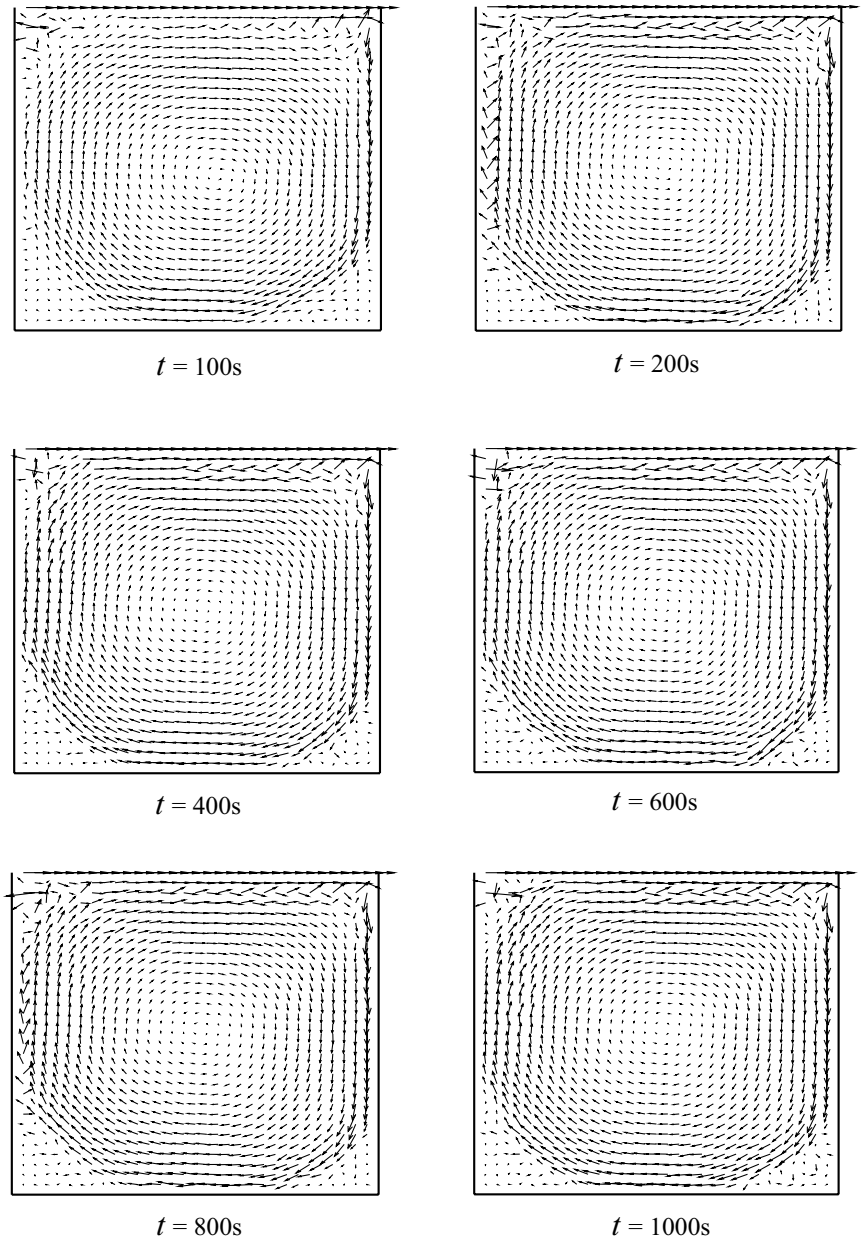


FIG. 3.7 – *Evolution temporelle calculée avec le modèle dynamique*

meilleure approximation, mais en faisant en sorte que les non-linéarités qui restent soient quadratiques, les non-linéarités quadratiques étant plus faciles à manipuler avec la MAN. Par exemple, avec le modèle dynamique, on a

$$\tau^d = \overline{\delta}^2 C_d |\overline{S}| \overline{S}.$$

On évaluerait alors la constante C_d à l'instant précédent et on traiterait le produit $|\overline{S}|\overline{S}$ de manière à n'avoir un terme quadratique. Cela peut se faire en utilisant les techniques proposées par Potier-Ferry, Zahrouni et ses collaborateurs pour le traitement des fortes non-linéarités ([112, 152]). Toutefois, cette méthode dépend fortement de la forme du modèle de sous-maille. En outre, au moins une partie du modèle sera toujours évaluée à l'instant précédent.

Une autre possibilité est de garder l'idée de l'évaluation à l'instant précédent et de faire un prolongement du domaine de validité de la série mais il n'est pas garantie qu'on pourra aller jusqu'à la valeur $\lambda = 1$. La solution qu'on propose est alors d'éviter la technique d'homotopie, qui nécessite des rayons de convergence assez grands pour avancer. On partira alors des équations discrétisées (3.7) et on effectuera un développement en série de la solution où le paramètre de contrôle est directement le temps. Dans le chapitre suivant, on s'intéressera à cette approche pour voir sa faisabilité, trouver ses limites et étudier les améliorations possibles.

Chapitre 4

Développement en série temporelle et resommation de Borel-Laplace

Quelques études sur la MAN avec un développement en série temporelle ont déjà été initiées ([42, 13]). Deux algorithmes ont alors été proposés, l'un pour les équations d'évolution non linéaires faisant intervenir la dérivée première et l'autre pour les équations non linéaires faisant intervenir la dérivée seconde. Puis, quelques applications ont été présentées ([44, 43, 19]). Dans ce chapitre, on va prendre le premier algorithme proposé et l'adapter aux équations de Navier-Stokes. Comme cet algorithme n'utilise pas la technique d'homotopie, on n'est plus tenu, du moins théoriquement, d'avoir un rayon de convergence supérieur à une valeur fixe. Cependant, les études théoriques mettent en évidence que ce rayon peut être très faible lorsque la taille du problème discrétisé est élevé. Il peut même devenir nul pour un problème continu. Face à cela, on proposera d'utiliser la méthode de resommation de Borel-Laplace qui consiste à chercher une solution qui est asymptotique à la série et qui est applicable aux séries divergentes. Cette méthode peut être considérée comme une méthode de prolongement du domaine de validité de la série lorsque cette dernière est convergente et joue son rôle de méthode de resommation lorsque la série diverge.

Dans la première section de ce chapitre, on présentera la mise en œuvre de l'algorithme comportant un développement en série temporelle. On y effectuera alors les études théoriques sur le rayon de convergence. Dans la deuxième section, on décrira la méthode de resommation de Borel-Laplace et on l'appliquera dans la dernière section à des formes réduites des équations de Navier-Stokes.

4.1 Etude du développement en série temporelle

On commencera cette section par la description de l'algorithme avec le développement en série temporelle appliqué aux équations de Navier-Stokes.

4.1.1 Algorithme pour les équations de Navier-Stokes

Après discrétisation spatiale, les équations de Navier-Stokes ont la forme suivante (voir ce qui a été fait pour les équations filtrées dans la section 3.1.1) :

$$M\frac{\partial U}{\partial t} + Q(U,U) + LU = 0, \tag{4.1}$$

avec la condition initiale

$$U(t=0) = U_0.$$

M est la matrice de masse, Q un opérateur quadratique et L un opérateur linéaire.

Développons la solution U de (4.1) en une série (vectorielle) par rapport au temps :

$$U(t) = U_0 + U_1 t + U_2 t^2 + \cdots + U_k t^k + \cdots \tag{4.2}$$

En injectant ce développement dans (4.1) et en identifiant selon les puissances de t, on obtient une cascade de problèmes :

$$\begin{cases} \text{Ordre } 0 : & MU_1 + Q(U_0,U_0) + LU_0 = 0 \\ \text{Ordre } 1 : & 2MU_2 + Q(U_0,U_1) + Q(U_1,U_0) + LU_1 = 0 \\ & \vdots \\ \text{Ordre } k : & (k+1)MU_{k+1} + \displaystyle\sum_{j=0}^{k} Q(U_j,U_{k-j}) + LU_k = 0 \\ & \vdots \end{cases}$$

Une fois qu'on a calculé les U_k jusqu'à un ordre arbitraire, on a une approximation de la solution de (4.1) dans tout le domaine de validité de la série (4.2). Une seule matrice, M, est à inverser. On procède ensuite par continuation lorsque le rayon de convergence de la série est atteinte. La matrice à inverser reste la même au cours des continuations, seule la condition initiale et les seconds membres changent.

Un développement en temps peut bien donc conduire à un algorithme d'une grande simplicité pour résoudre les équations de Navier-Stokes et les équations filtrées, et plus généralement des problèmes de mécanique. De plus, contrairement à d'autres algorithmes de la famille MAN, on est sûr de n'inverser qu'une seule matrice, même au cours des continuations.

Dans la pratique, la matrice de masse M est inversible. La performance de l'algorithme se repose donc sur la rayon de convergence. Si celui-ci est petit, un nombre élevé de continuations devient nécessaire. Cela nous amène à une étude sur le rayon de convergence.

4.1.2 Estimation du rayon de convergence de la série temporelle

On va simplifier l'équation (4.1) sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + Q(U,U) + LU = 0 \tag{4.3}$$

où $L = (L^i_j)_{i,j=1,\dots,N}$ est une matrice et $Q = (Q_i)_{i=1,\dots,N}$ l'opérateur quadratique tel que

$$Q_i(U,V) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathbb{Q}^i_{jl} U^j V^l,$$

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^i_{j,l})_{i,j,l=1,\dots,N}$ étant un tenseur d'ordre 3 et N est la taille du problème (le nombre de nœuds spatiaux).

Sous forme vectorielle, la solution à trouver est

$$U = (U^1, U^2, \dots, U^N)^T.$$

La condition initiale est :

$$U_0 = U(t=0) = (U^1_0, U^2_0, \dots, U^N_0)^T.$$

Notons

$$\mathbf{Q} = \max_{i,j,l=1,\ldots,N}(\mathbb{Q}^i_{jl})$$

$$\mathbf{L} = \max_{i,j=1,\ldots,N}(L^i_j)$$

$$\mathbf{U_0} = \max_{i=1,\ldots,N}(U^i_0)$$

les normes respectives de $\mathbb{Q}$, de L et de U_0. En notation vectorielle, le développement (4.2) s'écrit :

$$U^i(t) = U^i_0 + U^i_1 t + U^i_2 t^2 + \cdots + U^i_k t^k + \cdots ,$$
$$i = 1, \ldots, N$$

En injectant le développement ci-dessus dans (4.3), on a, à l'ordre 0 :

$$\begin{aligned} -U^i_1 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\mathbb{Q}^i_{j\,l}\, U^j_0\, U^l_0 + \sum_{j=1}^{N} L^i_j\, a^j_0, \\ |U^i_1| &< \mathbf{Q}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\mathbf{U_0}^2 + \mathbf{L}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{U_0} \\ |U^i_1| &< \mathbf{Q}N^2\mathbf{U_0}^2 + \mathbf{L}N\mathbf{U_0}. \end{aligned}$$

Notons $E = (\mathbf{Q}N^2\alpha^2 + \mathbf{L}N\alpha)$ où $\alpha = \max(\mathbf{U_0}, 1)$. Alors

$$|U^i_1| < E, \qquad i = 1, \ldots, N$$

Posons alors comme hypothèse de récurrence

$$|U^i_k| < E^k, \qquad i = 1, \ldots, N,\ k = 1 \ldots, l.$$

Ainsi, à l'ordre l, on a :

$$
\begin{aligned}
(l+1)|U_{l+1}^i| &= \left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \mathbb{Q}_{j\,l}^{i} \left(\sum_{r=0}^{l} U_r^j \, U_{l-r}^l \right) + \sum_{j=1}^{N} L_j^i \, U_l^j \right| \\
(l+1)|U_{l+1}^i| &< \mathbf{Q} \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{r=0}^{l} E^r E^{l-r} + \mathbf{L} \sum_{j=1}^{N} E^l \\
&< \mathbf{Q} N^2 (l+1) E^l + \mathbf{L} N E^l
\end{aligned}
$$

Cela donne :

$$
\begin{aligned}
|U_{l+1}^i| &< (\mathbf{Q} N^2 + \|L\|_\infty N \frac{1}{l+1}) E^l \\
|U_{l+1}^i| &< E^{l+1}.
\end{aligned}
$$

On conclut que

$$
\boxed{|U_k^i| < E^k, \qquad \forall i = 1, \ldots, N, \ k \in \mathbb{N}} \tag{4.4}
$$

Cette relation montre que la série temporelle (vectorielle)

$$
\sum_{k \geq 0} U_k t^k
$$

est convergente et que son rayon de convergence est supérieur ou égal à $r = \dfrac{1}{E}$.

Cette estimation fait comprendre les limites de l'utilisation d'un développement en série temporelle. En effet, elle montre que le rayon de convergence évolue en $1/N^2$ sauf lorsque la matrice $\mathbb{Q}$ est nulle auquel cas l'évolution est en $1/N$. On peut donc s'attendre à ce que le rayon de convergence de la série temporelle diminue quand la taille du problème augmente et qu'on ait besoin de beaucoup de pas de continuation. Ainsi, pour rendre un tel algorithme performant, il faut utiliser une technique d'accélération de convergence ou de prolongement de la série hors du domaine de convergence.

Quelques méthodes existent déjà et sont utilisées pour prolonger une série hors de son domaine de validité ([10, 20]). Celle qui est la plus couramment associée à la MAN pour des applications en mécanique est la méthode des approximants de Padé (voir [10, 136]). Cette méthode consiste à prolonger la série par une fonction sous forme de fraction rationnelle dont le développement de Taylor est la série

elle-même. On prend alors la fraction rationnelle comme approximation de la solution à l'extérieur du rayon de convergence. Les approximants de Padé se révèlent très efficaces lorsqu'on les intègre à certains types d'algorithme de la famille MAN ([88, 17, 30, 43]). Par contre, ils peuvent ne pas être adaptés lorsque le rayon de convergence de la série est très faible.

Après avoir montré que le rayon de convergence diminue lorsque la taille du problème discret augmente, voyons ce qui se passe lorsque le problème est continu. Prenons le cas de l'équation de la chaleur.

4.1.3 Cas de l'équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur en dimension 1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.5}$$

avec la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x)$$

où u_0 est une fonction C^∞ dans le domaine Ω. Cherchons une solution sous forme d'une série temporelle formelle :

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} u_k(x)\ t^k. \tag{4.6}$$

En injectant ce développement dans (4.5), on obtient

$$\sum_{k \geq 1} k\ u_k\ t^{k-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\ t^k.$$

En effectuant une identification selon les puissances de t, il suit que

$$u_k = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}.$$

On en déduit que

$$u_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{2k} u_0}{\partial x^{2k}}.$$

Ainsi, formellement, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{k!} \sum_{k\geq 0} \frac{\partial^{2k} u_0(x)}{\partial x^{2k}}\ t^k.$$

On obtient bien donc une solution sous forme de série temporelle. Par contre, selon la condition initiale imposée, le rayon de convergence de la série peut être nulle. Prenons par exemple le cas où $\Omega \subset]-1,1[$ et

$$u_0(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Pour cette condition initiale, on a :

$$u(t,x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(2k)!}{k!}\ \frac{1}{(1-x)^{2k+1}}\ t^k.$$

Cette série diverge en tout point x du domaine et pour tout t non nul.

Dans cette situation donc, la MAN ne peut pas conduire à une solution approchée dans un voisinage de $t = 0$. De plus, on ne peut faire aucune continuation car pour en effectuer une, il faudrait partir d'une solution connue en un temps $t_1 > 0$.

En résumé, une approche avec un développement en série temporelle conduit à un algorithme d'une grande simplicité et où une seule matrice est à inverser. En revanche, le rayon de convergence de la série peut être très faible ou même nul. Face à l'inefficacité des méthodes habituelles d'extrapolation, on propose alors de se tourner vers des algorithme de resommation de séries divergentes. Actuellement, la seule méthode qui semble réellement prometteuse pour accomplir cette tâche est la méthode de resommation de Borel-Laplace. Elle agit sur les séries dont la divergence n'est pas « trop rapide ». Elle prend tout son intérêt lorsqu'on sait que les solutions sous forme de série entière de pratiquement toutes les équations fonctionnelles analytiques, appliquées à la physique, vérifient ce critère (théorème de Maillet [86, 139]). Le dernier point de la thèse sera consacré alors à cette méthode.

4.2 Méthode de resommation de Borel-Laplace

Vers la fin du XIXème siècle, E. Borel cherchait à étendre le rôle que pouvaient jouer les séries divergentes en analyse. Suite à cela, il a sorti dans un mémoire ([15]) une méthode pour calculer la « somme » d'une série divergente, ou celle d'une série convergente à l'extérieur de son disque de convergence. Cette méthode se base

sur la transformation de Borel et son inverse, la transformation de Laplace. Elle est surtout utilisée par les mathématiciens pour faire une resommation de séries à divergence nulle ([53, 115, 109]) pour étudier théoriquement les solutions d'équations différentielles. Notre but est d'étendre le champ d'application aux problèmes réels de la mécanique, d'autant plus que la performance des calculateurs actuels permet une utilisation plus systématique et automatisée. On se limitera cependant à des problèmes de petites tailles dans ce cadre d'exploration.

Pour comprendre le fond de la méthode, commençons par prendre deux exemples théoriques. Afin de contourner les éventuelles irrégularités sur la droite réelle, on se placera dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

4.2.1 Illustration de la méthode

Le premier exemple qu'on va traiter est une équation dont la non-linéarité est quadratique, comme pour les équations de Navier-Stokes.

a) Un problème quadratique

Soit l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + w^2 = 0 \\ \\ w(0) = w_0 = 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Supposons qu'on veuille résoudre (4.7) en effectuant un développement par rapport au temps. On décompose donc w comme suit :

$$w = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \cdots .$$

En introduisant ce développement dans (4.7) et en identifiant selon les puissances de t, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Ordre } 0 : & w_1 + w_0^2 = 0 \\ \text{Ordre } 1 : & 2w_2 + 2w_0 w_1 = 0 \\ \quad \vdots & \\ \text{Ordre } l-1 : & l w_l + \sum_{k=0}^{l-1} w_k w_{l-k-1} = 0. \\ \quad \vdots & \end{cases} \tag{4.8}$$

On en tire que

$$w_k = (-1)^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

D'où la solution

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k.$$

Notons $\breve{w}$ la série correspondant à cette fonction :

$$\breve{w} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k z^k. \tag{4.9}$$

La MAN peut donc nous fournir la solution de (4.7) en tout t appartenant au disque de convergence de la série (4.9) qui est le disque unité. Par contre, sans continuation, il ne lui est pas possible d'évaluer la solution au-delà du cercle unité, qui, pourtant, existe bien puisque c'est :

$$w(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Pour comprendre la méthode de resommation de Borel-Laplace, il suffit de remarquer que, formellement, on a :

$$\sum_{k \geq 0} s_k z^k = w_0 + \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{s_{k+1}}{k!} \, \xi^k \right) e^{-\xi/z} \, \mathrm{d}\xi \tag{4.10}$$

pour toute série formelle $\breve{s} = \sum_{k\geq 0} s_k z^k$, sachant que

$$k! = \int_0^{+\infty} \xi^k e^{-\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

Si on applique cela à la série (4.9), on a

$$\sum_{k\geq 0} \frac{w_{k+1}}{k!}\, \xi^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\, \xi^k = -e^{-\xi}.$$

Le membre de droite de (4.10) vaut donc

$$1 + \int_0^{+\infty} e^{-\xi} e^{-\xi/z}\, \mathrm{d}\xi = 1 - \frac{1}{1+\dfrac{1}{z}} = \frac{1}{1+z}.$$

Ainsi, les opérations qu'on a fait subir à la série $\breve{w}$ dans le membre de droite de (4.10) a permis de retrouver la fonction analytique qui prolonge w dans $\mathbb{C} - \{-1\}$ et dont le développement de Taylor est $\breve{s}$.

Prenons maintenant un autre exemple qui montre encore plus la puissance de la resommation de Borel-Laplace.

b) L'équation d'Euler

Considérons l'équation d'Euler :

$$z^2 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + w = z.$$

Si on cherche une solution de cette équation sous forme de série formelle alors on trouve la série :

$$\breve{w} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k k! z^{k+1} \tag{4.11}$$

Cette série étant divergente, on n'espère pas que la MAN puisse donner une approximation fine de la solution, même dans un petit disque autour de l'origine. Si

on applique maintenant successivement les opérations dans (4.10) à la série (4.11), on a :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{w_{k+1}}{k!}\,\xi^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \xi^k = \frac{1}{1+\xi}$$

Ainsi, le second membre de (4.10) vaut ici

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi}\, e^{-\xi/z}\, \mathrm{d}\xi$$

qui est une fonction analytique dans tout le demi-plan complexe où la partie réelle de z est positive et qui se calcule numériquement. On a donc trouvé une solution analytique de l'équation d'Euler à partir de la série (4.11). Cela a été possible car, bien que la série diverge, sa divergence n'est pas « trop rapide ».

Après ces deux exemples, le principe de la resommation de Borel-Laplace et son utilité sont clairs. Présentons maintenant la théorie avec plus de rigueur, mais dans une version simplifiée.

4.2.2 Cadre théorique

Soit $\mathbb{C}[[z]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients complexes dont la variable est z et $\mathbb{C}\{z\}$ celui des séries convergentes (c'est-à-dire dont le rayon de convergence est non nul). Donnons un sens mathématique au terme « pas trop rapide » de la divergence d'une série, qu'on a utilisé précédemment.

Définition 4.1. *Une série* $\breve{s} = \sum_{k\geq 0} s_k z^k$ *de* $\mathbb{C}[[z]]$ *est* de Gevrey *d'ordre* q *(*$q > 0$*), s'il existe deux réels* C *et* A *tels que*

$$|s_k| < C A^k (k!)^q$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On notera $\mathbb{C}[[z]]_q$ l'ensemble des séries de Gevrey d'ordre q. En utilisant la formule de Stirling, on montre que

$$\sum_{k\geq 0} s_k z^k \;\in\; \mathbb{C}[[z]]_q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k\geq 0} \frac{s_k}{(k!)^q} z^k \;\in\; \mathbb{C}\{z\}.$$

En particulier, les séries de Gevrey d'ordre 0 sont les séries convergentes.

La définition précédente a été introduite par Gevrey [53] (bien sûr, il n'a pas utilisé le terme « de Gevrey » mais l'expression « série de classe q »).

Etendons la définition du développement de Taylor au voisinage de l'origine aux séries de Gevrey.

Définition 4.2. *On appelle* secteur *un ensemble* $V = Sect(a_1, a_2, r) \subset \mathbb{C}^*$ *défini par*

$$V = \{z \in \mathbb{C}^*; 0 < |z| < r,\ a_1 < \arg z < a_2\}$$

où a_1 *et* a_2 *sont des réels et* $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$(a_2 - a_1)$ *est appelé l'*ouverture *de* V.

La figure Fig. 4.1 montre un exemple de secteur.

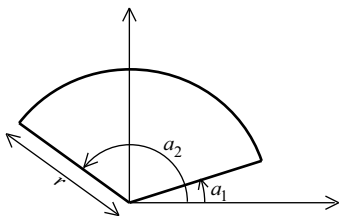


Fig. 4.1 – *Un secteur d'angles* a_1 *et* a_2*, de rayon* r

Définition 4.3. *Soit* V *un secteur,* s *une fonction analytique dans* V *et*

$$\breve{s} = \sum_{i \geq 0} s_k z^k \in \mathbb{C}[[z]].$$

On dit que s *admet la série* $\breve{s}$ *comme* développement asymptotique *de Gevrey d'ordre* q *dans* V *si pour tout sous-secteur compact* W *de* V*, il existe deux constantes réelles* C *et* A *tels que*

$$\left| s(z) - \sum_{j=0}^{k-1} s_j z^j \right| < CA^k (k!)^q |z|^k,$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ *et tout* $z \in W$.

Toute fonction analytique admet sa propre série de Taylor comme développement asymptotique d'ordre quelconque. L'idée est alors de remplacer la série obtenue avec la MAN par une fonction analytique qui l'admet comme développement de Gevrey. Le théorème suivant montre que cela est toujours possible au moins dans un secteur de petite ouverture et qu'on a l'unicité dans un secteur d'ouverture assez grande.

Théorème 4.4. *Soient $\check{s}$ une série de Gevrey d'ordre q et V un secteur. Notons $m = \frac{1}{q}$.*

- *(Théorème de Borel-Ritt-Gevrey) Si l'ouverture de V est inférieure ou égale à $\frac{\pi}{m}$ alors il existe une fonction analytique s qui admet $\check{s}$ comme développement asymptotique de Gevrey d'ordre q.*
- *Si l'ouverture de V est supérieure à $\frac{\pi}{m}$ et que deux fonctions admettent $\check{s}$ comme développement asymptotique alors ces deux fonctions sont égales.*

Preuve
Le premier point est le théorème de Borel-Ritt-Gevrey qu'on peut retrouver par exemple dans [45, 153]. Le second est une conséquence du lemme de Watson ([10, 87]). ■

Remarque 4.5. *Lorsqu'on n'a pas l'unicité alors la différence entre deux fonctions admettant la série comme développement asypmtotique de Gevrey d'ordre q est une fonction exponentiellement plate d'ordre $m = 1/q$.*

Rappelons qu'une une fonction exponentiellement plate d'ordre m est une fonction analytique f sur un secteur V telle que, pour tout sous-secteur compact W de V, on peut trouver deux constantes C et B vérifiant

$$|f(z)| \leq Ce^{-B/|z|^m}$$

pour tout z dans V.

Pour calculer la « somme » de la série, on va utiliser les transformations de Borel formelle et de Laplace. On se restreindra au cas de la classe de Gevrey d'ordre $q = 1$ (on pourra trouver la généralisation au q quelconque dans [87]).

Définition 4.6. *On appelle* transformation de Borel formelle *l'application suivante*

$$\mathcal{B}: \begin{array}{ccc} C[[z]] & \longrightarrow & C[[\xi]] \\ \breve{s} = \sum_{k\geq 1} s_k z^k & \longmapsto & \mathcal{B}\breve{s} = \sum_{k\geq 0} \frac{s_{k+1}}{k!}\, \xi^k \end{array}.$$

La série image $\widehat{s}$ est appelée la transformée de Borel formelle *de s.*

A partir des définitions, on conclut tout de suite que la transformée de Borel formelle d'une série de Gevrey est une série convergente, c'est-à-dire une fonction analytique au voisinage de 0. Il est à remarquer que le terme constant de la série à laquelle on a appliqué la transformation de Borel a été enlevé (la somme commence à 1). Cela ne posera aucun problème car il suffira de le rajouter à la fonction finale qu'on aura trouvée.

La transformation de Laplace est l'application inverse de la transformation de Borel. Pour l'utiliser, on a besoin de la définition suivante.

Définition 4.7. *Une fonction f analytique au voisinage de 0 et dans un secteur $V = Sect(a-\epsilon, a+\epsilon, \infty)$ est* à croissance exponentielle à l'infini *si*

$$|f(\xi)| \leq O(e^{c\xi})$$

dans V, c étant une constante.

Définition 4.8. *Notons H_a l'ensemble des fonctions qui sont analytiques au voisinage de 0 et qui se prolongent en une fonction analytique à croissance exponentielle à l'infini dans un secteur $V = Sect(a-\epsilon, a+\epsilon, +\infty)$. Ensuite, soit d_a la demi-droite orientée de 0 vers l'infini bissectant V.*

Alors la transformation de Laplace *dans la direction a est l'application qui, à une fonction $f \in H_a$, associe la fonction $\mathcal{L}_a f$ définie par*

$$\mathcal{L}_a f(z) = \int_{d_a} f(\xi) e^{-\xi/z}\, d\xi.$$

La transformée de Laplace dans la direction a d'une fonction f telle que $|f(\xi)| \leq O(e^{c\xi})$ est définie au moins sur le disque (de Borel) dont un diamètre est $[0, \frac{1}{c}\, e^{ia}]$ (voir figure Fig. 4.2).

On a maintenant les outils nécessaires pour définir la « somme » d'une série divergente.

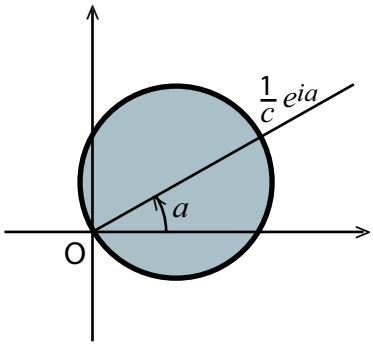


FIG. 4.2 – *Disque de Borel dans la direction a*

Définition 4.9. *Lorsque* $\breve{s}$ *est de Gevrey et* $\mathcal{B}(\breve{s} - s_0) \in H_a$ *alors on dit que* $\breve{s}$ *est* Borel-sommable *dans la direction a et la fonction*

$$s_0 + \mathcal{L}_a\big[\mathcal{B}(\breve{s} - s_0)\big]$$

est appelée somme de Borel *de* $\breve{s}$ *dans la direction a.*

Remarque 4.10. *Les transformées de Laplace d'une fonction f dans deux directions différentes peuvent ne pas coïncider si f possède une singularité entre ces deux directions (phénomène de Stokes, voir [28, 80]). Cela conduit à deux sommes de Borel de la série dont la différence est une fonction exponentiellement plate d'ordre 1. On supposera qu'on n'est pas dans ce cas là.*

Actuellement, la méthode de resommation de Borel-Laplace est surtout utilisée pour des calculs manuels de solutions et reste dans un cadre théorique. Notre but est de l'exploiter pour résoudre des problèmes réels de la mécanique avec l'aide d'un calculateur. Pour cela, on va présenter un algorithme qui permettra d'arriver à cette fin.

4.2.3 Cadre calculatoire

Supposons qu'on a une équation différentielle dont la solution formelle est une série de Gevrey

$$\breve{s} = \sum_{k\geq 0} s_k z^k.$$

Avec la MAN, dans la pratique, on se limite aux l premiers termes de la série. On a donc une fonction polynomiale :

$$\breve{s}^l(z) = \sum_{k=0}^{l} s_k z^k. \tag{4.12}$$

à la place de la série.

Pour calculer effectivement une approximation de la somme de la série $\breve{s}$, on procède comme suit.

1) On applique la transformation de Borel formelle à $\breve{s} - s_0$. Cela ne pose aucun problème particulier. Elle donne :

$$\mathcal{B}(\breve{s}^l - s_0)(\xi) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{s_{k+1}}{k!}\, \xi^k.$$

2) Ensuite, on prolonge $\mathcal{B}(\breve{s}^l - s_0)(\xi)$ en une fonction analytique allant jusqu'à l'infini au moins dans une direction. Cela peut être effectué avec les approximants de Padé. Rappelons que la méthode des approximants de Padé (voir aussi [10, 136, 56, 39]) consiste à prolonger une série dont on ne connaît que les l premiers termes par une fraction rationnelle $P[N_1/N_2]$, avec $N_1 + N_2 = l$, de la forme

$$P[N_1/N_2](\xi) = \frac{A_0 + A_1\xi + \cdots + A_{N_1}\xi^{N_1}}{1 + B_1\xi + \cdots + B_{N_2}\xi^{N_2}}$$

où les coefficients A_i et B_i sont choisis de telle sorte que $P[N_1/N_2]$ ait la fonction polynomiale $\breve{s}^l$ comme développement de Taylor à l'ordre l. Contrairement à la série d'origine, la transformée de Borel est sûrement convergente et son rayon de convergence est plus grand. On sait donc que les approximants de Padé opèrent ici.

3) Enfin, on applique la transformation de Laplace à la fonction $P[N_1/N_2]$ pour aboutir à une fonction analytique dont le développement asymptotique de Gevrey, tronqué à la puissance $l^{\text{ième}}$ de z, est $\breve{s}^l$.

Le schéma suivant représente ces opérations :

$$\begin{array}{ccc} \breve{s}^l = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} s_k z^k & & \mathrm{BL}_a(\breve{s}^l)(z) = s_0 + \displaystyle\int_{d_a} P(\xi) e^{-\xi/z}\, \mathrm{d}\xi \\ \\ \mathrm{Borel} \;\Big\downarrow & & \Big\uparrow\; \mathrm{Laplace}\ (\mathcal{L}_a) \\ \\ \mathcal{B}(\breve{s}^l - s_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \frac{s_{k+1}}{k!}\, \xi^k & \xrightarrow{\qquad\mathrm{Padé}\qquad} & P(\xi) = \dfrac{A_0 + A_1\xi + \cdots + A_{N_1}\xi^{N_1}}{1 + B_1\xi + \cdots + B_{N_2}\xi^{N_2}} \end{array}$$

Pour évaluer la valeur de s en un point z quelconque du domaine, on utilise une méthode de quadrature. La méthode de Gauss-Laguerre ([56, 75]) est généralement choisie pour les intégrations allant jusqu'à l'infini. Elle se base sur un nombre arbitraire *NGAUS* de polynômes (de Laguerre) orthogonaux par rapport à la fonction poids $e^{-\xi}$ et fournit comme approximation :

$$\int_0^{+\infty} f(\xi) e^{-\xi}\, \mathrm{d}x \simeq \sum_{NG=1}^{NGAUSS} W_{NG} f(\xi_{NG}) \tag{4.13}$$

Les ξ_{NG} qui sont les racines du polynôme de Laguerre de degré *NGAUSS* et les W_{NG} sont donnés et sont tels que l'erreur d'approximation soit nulle lorsque f est un polynôme de degré $(2\,NGAUS - 1)$. Pour appliquer la formule (4.13) à notre cas et réduire le nombre de calculs, il faut écrire :

$$\int_0^{\infty} P(\xi) e^{-\xi/z}\, \mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} P(\xi) e^{\xi} e^{-\xi/z} e^{-\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

Ainsi, si $POIDS_{NG} = W_{NG} P(\xi_{NG}) e^{\xi_{NG}}$, $_{NG=1,\ldots,NGAUSS}$, la formule donne :

$$\int_0^{\infty} P(\xi) e^{-\xi/z}\, \mathrm{d}\xi = \sum_{NG=1}^{NGAUSS} POIDS_{NG}\; e^{-\xi_{NG}/z}.$$

Il s'en suit que

$$\mathrm{BL}(\breve{s}^l)(z) = s_0 + \sum_{NG=1}^{NGAUSS} POIDS_{NG}\; e^{-\xi_{NG}/z}.$$

De cette manière, on ne calcule les quantités $POIDS_{NG}$ qu'une seule fois pour toutes les valeurs de z. On fournit en entrée les produits $W_{NG}e^{\xi_{NG}}$ au lieu des W_{NG}. Ces formules s'adaptent aisément à une intégration le long d'une autre direction que $\mathbb{R}^+$.

Comme dans le cas de la MAN, il se peut qu'on ne puisse pas atteindre $s(z)$ pour une grande valeur de z en appliquant une seule fois la resommation car, d'une part, on n'a pas la série exacte mais une série tronquée, et d'autre part, le rayon du secteur d'analycité de la transformée de Laplace n'est pas forcément infini. Une continuation est alors nécessaire.

Appliquons maintenant la méthode de resommation de Borel-Laplace à l'équation (4.7) qui est de dimension 1 et dont on connaît la solution exacte pour voir si l'algorithme proposé ci-dessus fonctionne réellement lorsqu'on l'applique numériquement, et voir l'amélioration qu'il apporte.

4.2.4 Retour à l'équation (4.7)

On a élaboré un programme numérique en Fortran pour tester l'efficacité de la méthode de resommation de Borel-Laplace sur l'équation (4.7). Cette équation n'est pas un exemple sur lequel on peut tirer le maximum de profit avec la resommation de Borel-Laplace car la série qu'on en extrait possède un rayon de convergence non nul, et ce rayon de convergence n'est pas forcément faible car le problème est de petite taille (taille 1). Elle a été choisie car elle est du même type que les équations de Navier-Stokes (la non-linéarité est quadratique). Nous verrons qu'elle suffira malgré tout pour montrer l'efficacité de l'algorithme du paragraphe précédent. Dans un premier temps, on ne va pas faire une continuation pour bien voir la différence entre les résultats donnés par la MAN et par la resommation.

a) <u>Sans continuation</u>

La figure Fig. 4.3 compare la solution $\breve{w}^l(z)$ fournie par la MAN et celle donnée par la resommation de Borel-Laplace $\mathrm{BL}(\breve{w}^l)(z)$ avec la solution exacte $w(z)$. Les coefficients de la série sont calculé jusqu'à l'ordre 8 et aucune continuation n'est effectuée. La transformation de Laplace est calculée le long de l'axe réel positif.

On constate alors sur la figure que la solution série tronquée n'est plus exploitable dès qu'on s'approche de $z = 0.7$. Quant à elle, la solution donnée par la resommation suit parfaitement bien la solution exacte jusqu'à ce que l'effet de la troncature et des différentes erreurs numériques se font constater, vers $z = 2.5$. Notons qu'aucune optimisation, comme par exemple une accélération de convergence de la série ou une

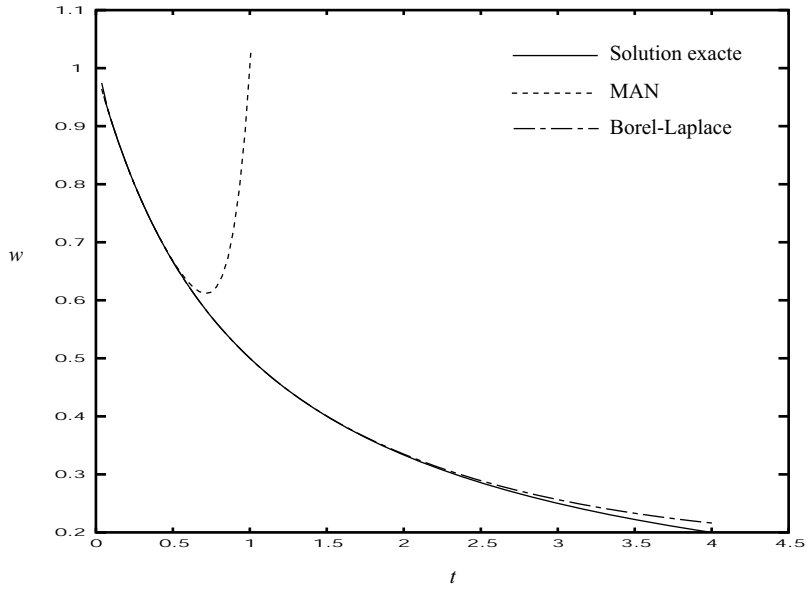


FIG. 4.3 – *Comparaison entre la MAN et la resommation de Borel-Laplace*

optimisation de l'intégration ([20, 75]) autre que ce qui est mentionné, n'est apportée à l'algorithme de Borel-Laplace.

On conclut que le schéma décrit dans la section 4.2.3 est opérationnel.

Pour ce même exemple, on va maintenant utiliser la continuation, pour aller jusqu'à une grande valeur de z.

b) Avec continuation

Pour la continuation, on va combiner les deux méthodes, la MAN et la resommation. Notre critère de qualité se basera sur l'ordre de grandeur du résidu $Res(z)$, le résidu étant, pour l'équation (4.7), le vecteur

$$Res(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(z) + w^2(z) = 0.$$

On procède comme suit :

- On calcule les l premiers coefficients de la série $\breve{w}$ en effectuant un développement en série temporelle à partir de $w_0 = w(0)$.
- On en déduit les valeurs approchées de $w(z)$ par la MAN tant que le résidu $Res(z)$ ne dépasse pas une certaine valeur :

$$w(z) \simeq \breve{w}^l(z) \qquad \text{tant que} \qquad \frac{\|Res(z)\|}{\|\breve{w}^l(z)\|} < \epsilon. \tag{4.14}$$

On arrive ainsi jusqu'à une valeur z_1 de z.

- Ensuite, on forme la transformée de Borel formelle de $\breve{w}^l$, puis on calcule les approximants de Padé et les quantités $POIDS_{NG}$.
- Enfin, on évalue $\mathrm{BL}(\breve{w}^l)(z)$ pour avoir une approximation de $w(z)$, à partir de $z = z_1$ et jusqu'à ce que, de nouveau, le résidu devienne trop grand :

$$w(z) \simeq \mathrm{BL}(\breve{w}^l)(z), \quad z > z_1, \qquad \text{tant que} \qquad \frac{\|Res(z)\|}{\|\,\mathrm{BL}(\breve{w}^l)(z)\|} < \epsilon.$$

- Lorsque la dernière valeur z_0 est atteinte, on recommence l'algorithme en effectuant un développement en série à partir de $w_0 = w(z_0)$.

La resommation est vue donc ici comme un prolongement de la MAN.

On applique alors le schéma précédent à l'équation (4.7). On va jusqu'à $z = 10$s, avec $\epsilon = 10^{-2}$. $NGAUSS = 6$ points de Gauss sont utilisés pour l'intégration. La courbe obtenue est visuellement indistinguable de la solution exacte. On ne présentera donc pas de comparaison graphique entre la courbe calculée et la solution exacte. En revanche, sur la figure Fig. 4.4, on montre l'apport de la resommation par rapport à la MAN et les moments où une continuation devient nécessaire.

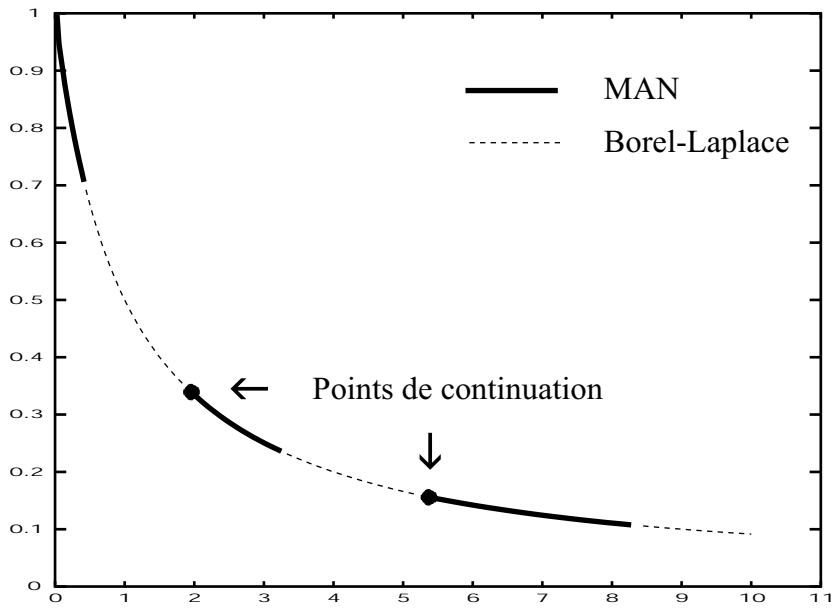


Fig. 4.4 – *Solution avec continuation, MAN et resommation de Borel-Laplace asociées*

Sur cette figure, on voit que la resommation prolonge bien la solution fournie

par la MAN. Deux points de continuation ont été nécessaires pour atteindre $z = 10$ contre six si on avait fait tout le calcul avec la MAN. La figure FIG. 4.5 montre la position des points de continuation lorsqu'on n'utilise que la MAN.

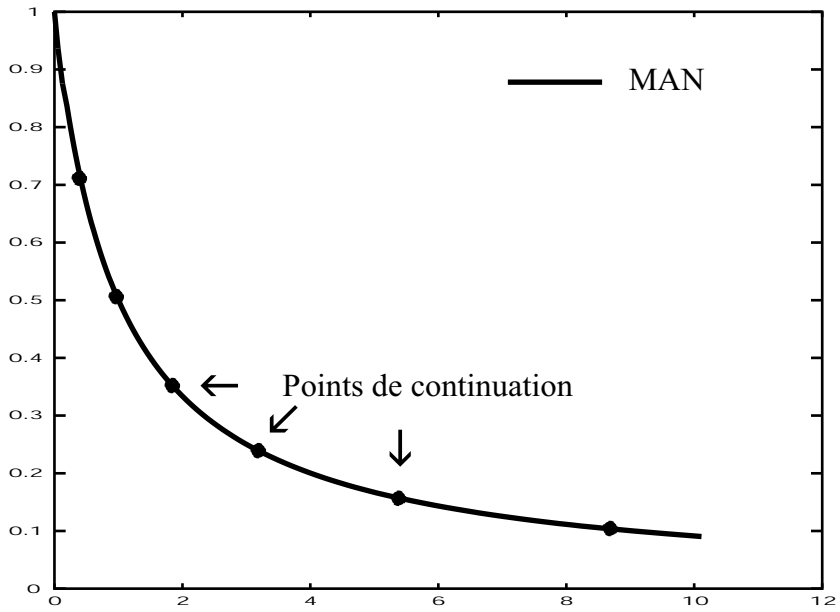


FIG. 4.5 – *Solution avec continuation, MAN seule*

Les résultats précédents correspondent à une troncature de la série à l'ordre $l = 8$. D'autres calculs ont été faits avec $l = 15$. Le tableau suivant compare alors le nombre de points de continuation nécessaires pour les deux méthodes. On y remarque que la combinaison avec la resommation demande nettement moins de pas que la MAN seule.

	l=8	l=15
MAN+Borel-Laplace	2 points	1 points
MAN	6 points	5 points

Ces petits tests montrent que la méthode de resommation de Borel-Laplace conduit bien à une amélioration de la MAN et que le schéma présenté dans le paragraphe (4.2.3) est fonctionnel. Fort de ces bons résultats, on va maintenant appliquer la méthode aux équations de Navier-Stokes. Toutefois, dans l'état d'avancement actuel, on ne s'attaquera pas directement aux équations de Navier-Stokes complètes

mais à un modèle réduit de celles-ci de manière à se limiter pour le moment à un problème de petite taille.

Remarques 4.11.

- *On a choisit un critère sur le résidu pour évaluer la qualité de la solution donnée par la MAN dans (4.14) pour avoir exactement le même critère de qualité pour les deux méthodes et mieux les comparer. On peut remplacer ce critère par un critère sur le rayon de convergence puisqu'on sait évaluer ce dernier directement à partir des termes de la série (voir section 3.1.3). C'est ce que nous ferons dans la suite.*
- *On n'effectuera plus de comparaison entre la MAN et la méthode de resommation de Borel-Laplace dans la suite puisque, comme on l'a montré précédemment, la MAN seule peut ne pas fournir de solution du tout (lorsque la série diverge). La resommation sera donc considérée comme une méthode à part entière mais plus comme un prolongement de la MAN. Les comparaisons se feront alors entre l'algorithme de Borel-Laplace et une méthode plus courante comme celle de Runge-Kutta.*

4.3 Application à un modèle réduit des équations de Navier-Stokes filtrées

Une des méthodes qui permettent de réduire les équations de Navier-Stokes est la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). L'utilisation de cette méthode conduit à un système dynamique d'ordre faible dont la résolution demande un temps de calcul insignifiant par rapport à la résolution du système complet. C'est sur ce système dynamique d'ordre faible qu'on appliquera la méthode de resommation de Borel-Laplace.

Là n'étant pas l'objet de notre étude, on ne décrira la POD que très brièvement. Pour les détails sur le fondement de la méthode, on pourra se référer à [81, 130, 6] et à [11, 1] pour une bibliographie plus complète.

4.3.1 Description sommaire de la POD

La POD consiste à approximer la solution u du problème appartenant à un espace $E(0,T;H)$ par une fonction $\Phi \in H$ qui maximise la fonction

$$\Phi' \in H \qquad \mapsto \qquad \frac{< (\Phi', u)_H >}{\|\Phi'\|_H^2}, \tag{4.15}$$

où $< \bullet >$ désigne toujours un moyennage, $(\bullet, \bullet)_H$ désigne le produit scalaire de H et $\|\bullet\|_H$ la norme associée. Lorque $H = L^2(\Omega)$, la recherche de la solution Φ du problème (4.15) est équivalent à la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_\Omega R(x,x')\Phi(x')\,\mathrm{d}x' = \lambda\Phi(x)$$

où R est le tenseur de corrélation défini par

$$R(x,x') =< u(t,x) \otimes u(t,x') > .$$

Sous l'hypothèse de continuité de R, l'opérateur

$$\Phi \mapsto \int_\Omega R(x,x')\Phi(x')\,\mathrm{d}x'$$

est compact et le théorème de Hilbert-Schmidt prouvent l'existence d'une suite de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ telle que

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_i > \cdots \qquad \text{et} \qquad \lambda_i \to 0$$

et d'une suite de vecteurs propres orthonormaux associés $(\Phi^i)_{i\geq 1}$ formant une base de H. Ainsi, tout élément u de $E(0,T;H)$ se décompose dans cette base de la manière suivante

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varrho^i(t)\ \Phi^i(x) \tag{4.16}$$

où ϱ^i sont les coordonnées.

Les Φ^i sont appelés les *modes*. Ils dépendent de la configuration de l'écoulement et sont déterminés soit à partir de données expérimentales, soit à partir d'une simulation numérique.

Lorsqu'on introduit la décomposition (4.16) dans les équations complètes, on obtient un système réduit dont la résolution demande un temps insignifiant par rapport à la résolution du système complet.

Dans la pratique, on se limite à un nombre fini N de modes. Le calcul des ϱ^i, $i = 1, 2, \ldots, N$, conduit alors à une approximation de u. Les éléments Φ^i de la base peuvent être calculés grâce à une simulation numérique sur seulement quelques secondes, à partir des équations complètes.

4.3.2 Application aux équations de Navier-Stokes

Lorsqu'on applique la POD aux équations de Navier-Stokes, la condition de divergence nulle et les conditions au bord sont automatiquement vérifiées par les fonctions de base. L'équation de quantité de mouvement donne alors, après une projection de Galerkin, un système dynamique de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\varrho^i}{\mathrm{d}t} + \sum_{j,l=1}^{N} \mathbb{Q}^i_{jl}\ \varrho^j \varrho^l + \sum_{j=1}^{N} L^i_j\ \varrho^j = F^i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots N. \tag{4.17}$$

où les coefficients sont définis par

$$\mathbb{Q}^i_{jl} = (\Phi^i,\, \mathrm{div}[\Phi^j \otimes \Phi^l]), \qquad L^i_j = \nu(\Phi^i, \nabla^2 \Phi^j)$$

et les $F^i(t)$ rassemblent les termes restants, contenant la pression et les éventuels termes sources. Ces coefficients sont calculés une seule fois pour une valeur donnée de N.

C'est sur le modèle réduit (4.17) qu'on appliquera la méthode de resommation de Borel-Laplace, en décomposant les ϱ^i sous forme d'un développement en série temporelle.

On va traiter deux exemples d'écoulements : le premier reprend le cas de la cavité entraînée en dimension 2 et le second concerne la dispersion de particules dans une chambre ventilée.

4.3.3 Cavité entraînée

Les paramètres de calcul

La géométrie de la cavité et les paramètres de l'écoulement sont les mêmes que ceux de la section 3.2. Les données du problème réduit, c'est-à-dire les coefficients $\mathbb{Q}^i_{jl}$, L^i_j et F^i ont été fournis par C. Allery ([1]).

On résoudra (4.17) avec la méthode de resommation de Borel-Laplace et avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 à pas adaptatifs ([113]). On comparera quelques valeurs de ϱ issues de ces deux méthodes avec une solution de référence calculée à partir de la résolution des équations de Navier-Stokes complètes.

Le pas dans la méthode de Runge-Kutta à pas adaptatifs est calculé de manière à ce que l'estimation Δ de l'erreur de troncature à l'ordre 5 soit telle que

$$\frac{\Delta}{\|\varrho(t)\|} \leq \epsilon_{rk}$$

où ϵ_{rk} est un petit paramètre. On prendra ϵ_{rk} égal au paramètre ϵ de la méthode de resommation de Borel-Laplace. Notons que cette méthode de Runge-Kutta est d'ordre 5 alors que la méthode de Borel-Laplace est d'ordre arbitraire l. Pour chacune des deux méthodes, on fera le calcul avec 4 et 10 modes.

La série temporelle est tronquée à l'ordre $l = 10$.

On désignera par « MAN+Borel-Laplace » la combinaison de la MAN avec la méthode de resommation.

Résultats

Le tableau ci-dessous compare le nombre de pas nécessaire pour atteindre 20, 50 et 100 secondes. On y remarque qu'on a besoin de nettement moins de pas avec la MAN+Borel-Laplace qu'avec la méthode Runge-Kutta.

	20 secondes	50 secondes	100 secondes
Runge-Kutta	18 pas	41 pas	80 pas
MAN+Borel-Laplace	9 pas	24 pas	52 pas

La figure Fig. 4.6 montre les valeurs des deux premières composantes de ϱ jusqu'à 20 secondes. Rappelons que la MAN+Borel-Laplace fournit une approximation C^∞ de la solution entre les points de continuation tandis qu'avec la méthode de Runge-Kutta ne donne que des valeurs point par point. Sur cette figure Fig. 4.6, on remarque que les deux méthodes coïncident bien aux points de calcul de la méthode de Runge-Kutta. L'écart avec la solution de référence est du à l'erreur de la réduction.

Le tableau suivant compare le nombre de pas nécessaire aux deux méthodes lorsqu'on prend 10 modes lors de la réduction. A $t = 100$s, on voit que la MAN+Borel-Laplace requiert 42% de pas en moins par rapport à la méthode de Runge-Kutta contre 35% avec 4 modes. Cela montre encore que plus la taille du problème est élevé, plus la resommation est avantageuse.

	20 secondes	50 secondes	100 secondes
Runge-Kutta	29 pas	81 pas	175 pas
MAN+Borel-Laplace	16 pas	44 pas	102 pas

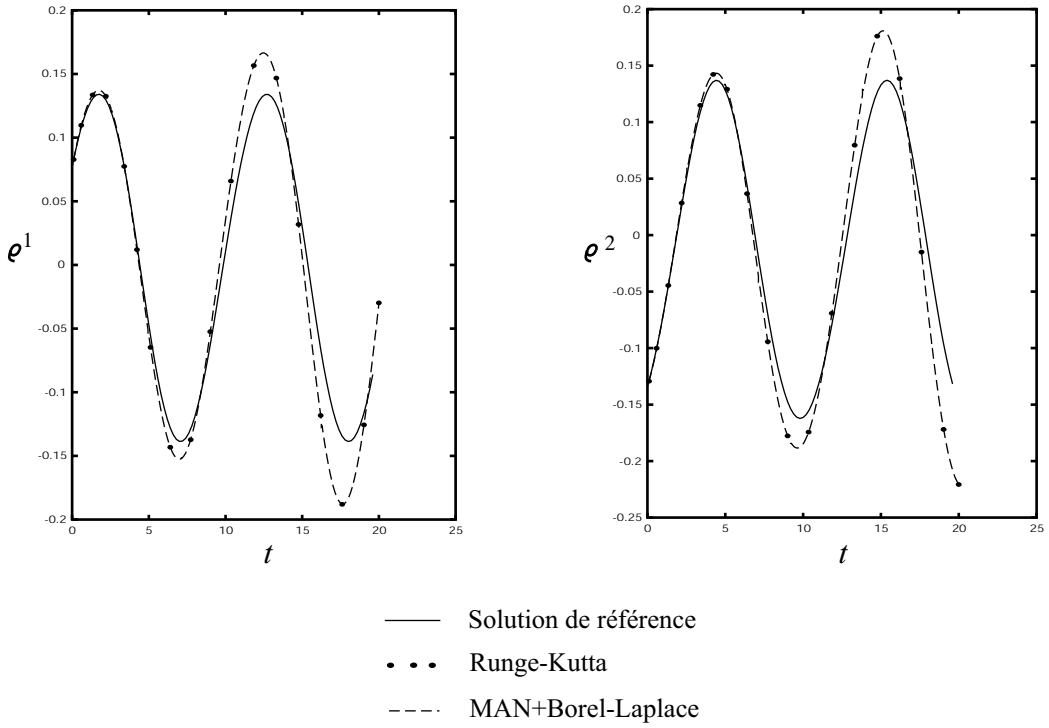


FIG. 4.6 – *Comparaison des valeurs de ϱ^1 (à gauche) et ϱ^2 (à droite) en fonction du temps*

On conclut de ces résultats que la méthode de resommation donne une solution avec autant de précision que la méthode de Runge-Kutta mais avec moins de pas de calcul. En outre, la solution fournie est analytique. Ces résultats montrent également que la méthode de resommation peut très bien être utilisée pour la simulation d'écoulements réels. Enfin, on peut espérer que la méthode offrira encore plus d'avantage si on l'applique à un problème de grande taille comme les équations de Navier-Stokes complètes discrétisées.

Retournons maintenant dans le domaine qui nous intéresse particulièrement qui est le domaine du bâtiment. On va alors utiliser la méthode de resommation pour la simulation de la dispersion de particules dans une cavité ventilée.

4.3.4 Application à l'étude de la dispersion de particules dans une cavité ventilée

Considérons la cavitée ventilée en 2 dimension représentée sur la figure FIG. 4.7. Les ouvertures ont une hauteur de 0.31m. L'entrée se situe à 0.07m du plafond et la sortie à 0.07m du plancher. La vitesse d'entrée est de 0.443m/s ± 10%.

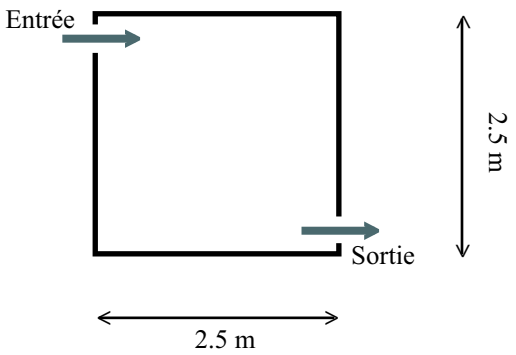


FIG. 4.7 – *Géométrie de la chambre ventilée*

Lorsque le champ de vitesse est stabilisé, 10000 particules sont injectées au milieu de l'ouverture d'entrée au même moment (Les détails de la simulation se trouvent dans [2]). On prend alors quatre modes pour la POD. Le tableau suivant compare le nombre de pas nécessaires aux deux méthodes pendant les premières secondes après l'injection des particules. On y remarque que la MAN+Borel-Laplace nécessite nettement moins de pas que la méthode de Runge-Kutta. Pour atteindre 100 secondes, elle demande 44% de pas en moins.

	1 secondes	20 secondes	30 secondes	100 secondes
Runge-Kutta	8 pas	93 pas	137 pas	397 pas
MAN+Borel-Laplace	4 pas	55 pas	78 pas	224 pas

La figure FIG. 4.8 compare les valeurs de ϱ durant la première seconde de la simulation. Elle montre un très bon accord des deux méthodes de résolution avec la solution de référence.

Terminons par la figure FIG. 4.9 qui est une représentation graphique de l'évolution du nuage de particules pendant les 30 premières secondes après leur injection[1].

[1] Avec l'aimable autorisation des auteurs de [2].

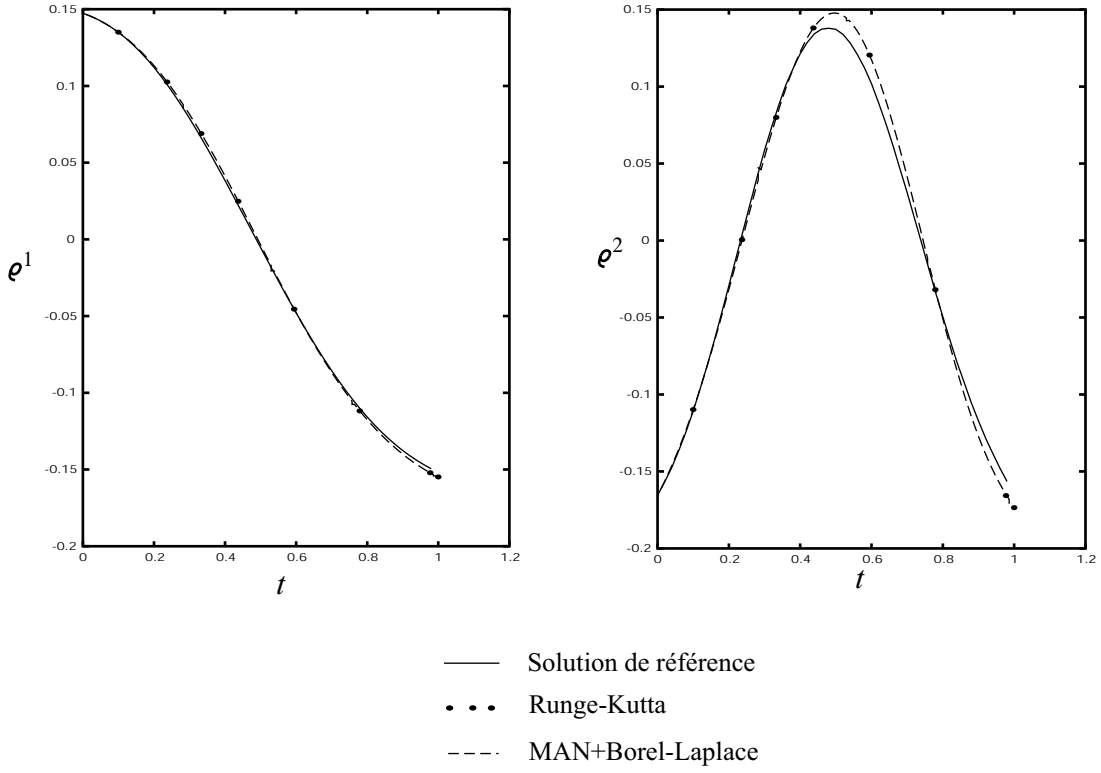


FIG. 4.8 – *Comparaison des valeurs de ϱ^1 (à gauche) et ϱ^2 (à droite) en fonction du temps*

4.4 Conclusion

Les quelques tests numériques présentés nous montrent que la méthode de resommation de Borel-Laplace peut très bien être utilisée pour la résolution numérique de problèmes réels.

L'algorithme qu'on a proposé dans 4.2.3 et (4.2.4) est un algorithme assez « grossier » dans le sens où aucune optimisation plus profonde ne lui a été apportée, alors que la méthode de resommation possède des propriétés très intéressantes dans la théorie. Par exemple, toutes les manipulations qu'on fait subir à la série sont des manipulations formelles. L'utilisation d'un programme purement numérique comme celui employé ici détruit ces propriétés, ce qui entraîne non seulement une accumulation inutile d'erreurs d'arrondis (dont les effets seront encore plus important si la série est proche de la divergence) mais aussi une augmentation du temps de calcul. Il faudrait alors transposer l'algorithme dans un logiciel de calcul symbolique et n'effectuer de calcul numérique que lorsque cela est indispensable.

Par ailleurs, le calcul effectif du résidu pour l'évaluation de la qualité de la solution donnée par la resommation devrait être évité pour diminuer le temps de calcul.

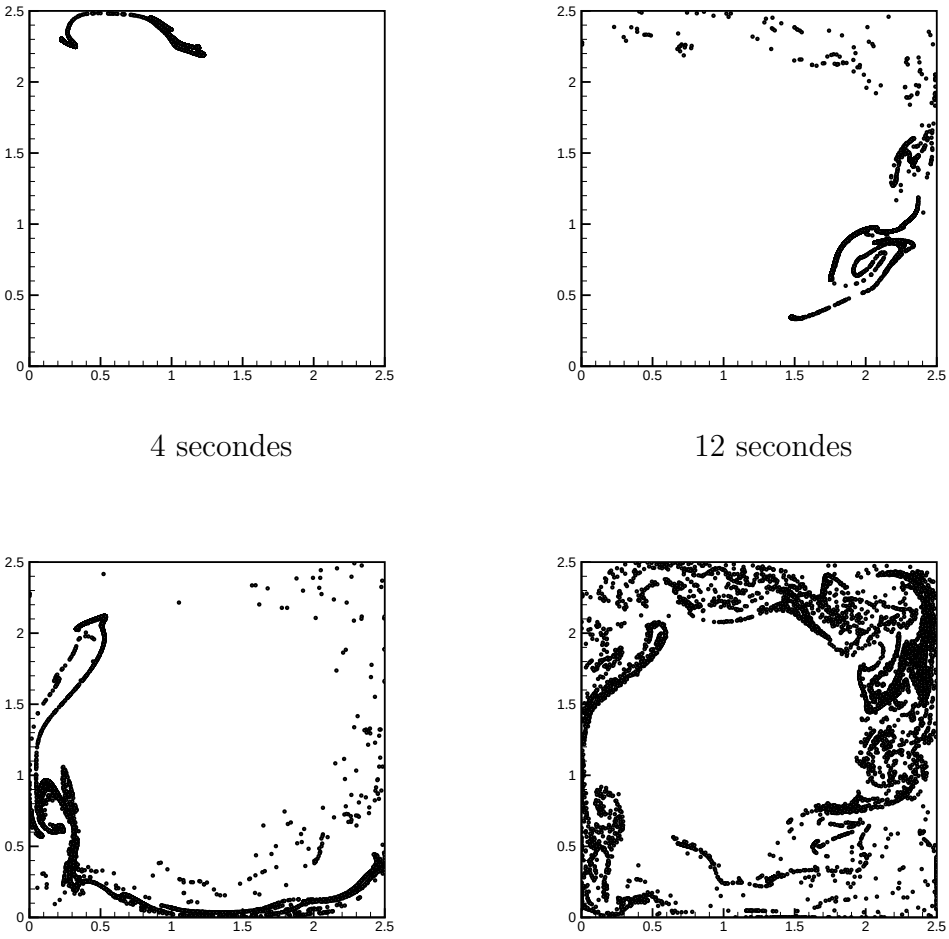


FIG. 4.9 – Evolution temporelle des particules

Il faudrait donc trouver un autre critère en étudiant par exemple l'équation de plus près et en utilisant le fait que la fonction est asymptotique à la série. Notons qu'avec la MAN, on peut majorer le résidu par une relation du type :

$$\|Res(t)\| < (cN + b)\frac{(tE)^N}{1 - (tE)}$$

où c et b sont des constantes si le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à $1/E$. D'autres optimisations comme l'accélération du calcul de l'intégration peuvent aussi être utilisées ([7, 135, 75]).

Enfin, la droite réelle positive a simplement été prise comme direction de la transformation de Laplace. Une étude plus poussée pourrait conduire à une direction meilleure selon l'équation qu'on a.

Malgré ses défauts, le programme qu'on a utilisé a toutefois laissé entrevoir les avantages que la méthode de resommation peut donner. On a vu par exemple qu'elle diminue nettement le nombre de pas de continuation par rapport à la MAN seule ou à la méthode de Runge-Kutta. Par ailleurs, elle promet d'être encore plus avantageuse lorsqu'on résoudra les équations complètes de Navier-Stokes.

Terminons par un petit retour à l'équation de la chaleur (voir section 4.1.3). Il a été prouvé depuis plus d'un siècle que la série (4.6) converge si et seulement si la condition initiale u_0 est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre 2, c'est-à-dire

$$|u_0(z)| = O(e^{c|z|^2}), \qquad z \in \mathbb{C}$$

où c est une constante. En revanche, Lutz *et al.* ([85], voir aussi [9]) ont montré qu'on n'a même pas besoin d'une analycité de u_0 en zéro pour que la série soit Borel-sommable mais d'une analycité dans deux secteurs déterminés et d'une croissance exponentielle d'ordre 2 dans ces deux secteurs.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse a été de trouver de nouveaux moyens pour améliorer la simulation des écoulements turbulents intéressant le domaine du bâtiment, par l'approche de la simulation des grandes échelles. Les deux aspects, théorique et numérique, ont alors été abordés.

Dans la première partie de la thèse, une étude théorique de la LES a été faite. Après avoir montré l'importance des symétries dans l'étude de la turbulence, on a alors effectué une analyse de quelques modèles de sous-maille courants. Cela a mis en évidence le fait que beaucoup de modèles de sous-maille détruisent les symétries des équations de Navier-Stokes. L'extension de l'analyse au cas non isotherme a conduit au même constat pour les équations de la convection thermique.

Suite à cette inconsistance mathématique de beaucoup de modèles de sous-maille de la littérature, on a proposé une classe de nouveaux modèles qui sont invariants par rapport au groupe de symétrie des équations de départ. On a alors demandé à ces modèles de respecter également le second principe de la thermodynamique. Un test numérique sur un des modèles les plus simples de la classe a alors été effectué pour la simulation d'un écoulement d'air dans une chambre ventilée. Cela a donné un résultat statistiquement conforme avec les expériences et bien meilleur que ceux obtenu avec le modèle de Smagorinsky et le modèle dynamique.

Le choix de la valeur de la constante du modèle qui a été numériquement testé a été validé par la comparaison avec un calcul dynamique dans notre cas. Une étude plus approfondie pourrait conduire à une valeur plus précise de cette constante. On pourrait par exemple concevoir une étude spectrale pour cette fin.

Lors de la construction des modèles, on a choisi de ne faire dépendre les coefficients de ces derniers que des invariants fondamentaux issus du tenseur des taux

de déformation résolu (et du gradient de la température résolue dans le cas de la convection thermique), ces invariants apparaissant naturellement dans l'expression des modèles. Dans une prochaine étape, on pourra envisager d'inclure d'autres paramètres comme l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation. Comme ces deux paramètres nécessitent au moins une équation de transport supplémentaire, on pourra étendre par la même occasion l'analyse par les symétries aux modèles de sous-maille de la littérature qui font intervenir une ou plusieurs équations de transport supplémentaires. Toujours dans les perspectives, on peut revenir bien en amont en effectuant des études sur la turbulence (corrélations, ...) en utilisant les symétries.

Dans la deuxième partie de la thèse, on s'est intéressé à l'intégration de la simulation des grandes échelles dans un algorithme de la famille des méthodes asymptotiques numériques, ceci dans le but d'étudier les bifurcations instationnaires survenant dans les écoulements turbulents. Un premier algorithme utilisant la technique d'homotopie a alors été présenté. Cet algorithme a conduit à un résultat intéressant avec le modèle de Smagorinsky. En revanche, il a eu du mal à prendre en compte la complexité du modèle dynamique. Un autre algorithme, n'utilisant plus la technique d'homotopie mais un développement en série temporelle, a alors été présenté comme remplacement.

Avant de mettre le second algorithme qui est basé sur un développement en série temporelle en œuvre, nous avons commencé par une étude théorique du rayon de convergence de la série temporelle. Nous en avons conclu que lorsque la taille du problème est élevé, ce rayon de convergence peut être très faible et tend à s'annuler. Dans le but de surmonter cette limite, on s'est alors intéressé à la méthode de resommation de Borel-Laplace dont on connaît l'efficacité théorique pour la resommation de série divergente.

Comme les applications de la méthode de resommation de Borel-Laplace se réduisent encore essentiellement à des problèmes théoriques, on a voulu dans cette thèse explorer la possibilité de l'utiliser numériquement, pour la résolution de problèmes réels de la mécanique et particulièrement pour la simulation d'écoulements dans le domaine du bâtiment. Par conséquent, un code numérique a été construit pour effectuer les opérations de la resommation. Les tests sur des modèles réduits des équations de Navier-Stokes filtrées ont alors donné des résultats encourageant.

La suite logique de la thèse serait maintenant de revenir sur les équations de Navier-Stokes filtrées complètes et d'y appliquer la méthode de resommation. Cependant, avant cela, beaucoup d'optimisations doivent être apportées au code qu'on

a construit pour la resommation. La première serait de le transposer dans un logiciel de calcul symbolique pour tenir en compte le fait que toutes les opérations intervenant dans la méthode de resommation sont formelles et réduire par conséquent les erreurs de troncature et le temps de calcul. On pourra s'inspirer des travaux de Thomann à cet effet ([137, 138]). Notons que Cochelin et Pérignon ont récemment transcrit la MAN sur MATLAB ([27]).

Toujours dans le but d'améliorer le code, on pourrait faire une étude plus approfondie des équations auxquelles on applique la resommation. Cela permettrait de trouver les éventuelles singularités dans l'espace de Borel et d'avoir plus de précision sur la meilleure direction d'intégration lors de la transformation de Laplace. On pourrait aussi se servir de la théorie de la multisommabilité ([87, 8, 80]).

Annexe A

Les groupes de symétries

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, l'une des principales préoccupations des mathématiciens étaient de résoudre les équations différentielles. Les méthodes exactes de résolution ont alors été intensivement développées mais au bout d'un certain temps, aucune nouveauté n'a été trouvée. Il a fallu attendre la seconde moitié du siècle pour que des idées originales et innovantes apparaissent grâce à Sophus Lie.

A l'origine, Lie voulait créer une théorie de résolution des équations différentielles ressemblant à la théorie de Galois pour les équations algébriques (la théorie de Galois traite entre autres la solvabilité et la relation entre les racines d'une équation algébrique). Il regardait alors les équations différentielles avec une approche géométrique. Plus précisément, il cherchait les transformations qui, à la manière des symétries géométriques, laissent une équation différentielle invariante. Il s'intéressait particulièrement aux transformations continues ou transformations à un paramètre. Cela l'a conduit à fonder la théorie des groupes de transformations continues.

A.1 Groupe de transformations à un paramètre

On va introduire la théorie d'une manière mathématique, comme cela se fait traditionnellement, puis, dans la section A.3 on donnera une interprétation plus mécanique.

A.1.1 Définitions

Appelons *transformation* un C^∞-difféomorphisme

$$T : (t, y) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{y})$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{t} = \widehat{t}(t, y) \\ \\ \widehat{y} = \widehat{y}(t, y). \end{cases} \tag{A.1}$$

On dira qu'une transformation est *une transformation continue* ou *transformation à un paramètre* si elle dépend de manière C^∞ d'un paramètre a, a appartenant à un certain intervalle $\mathcal{J}$. Une telle transformation est de la forme

$$T_a : (t, y) \mapsto (\widehat{t}, \widehat{y})$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{t} = \widehat{t}(t, y, a) \\ \\ \widehat{y} = \widehat{y}(t, y, a) \end{cases} \tag{A.2}$$

Alors, un *groupe de transformations* (à un paramètre) est un ensemble G de transformations à un paramètre T_a vérifiant les axiomes suivants :

1. Il existe $a_0 \in \mathcal{J}$ vérifiant $T_{a_0} = I_d$, où $I_d \in G$ est l'identité : $I_d(t, y) = (t, y)$.

2. G est stable par composition : si $a,\ b \in \mathcal{J}$ alors il existe $c \in \mathcal{J}$ tel que $T_a \circ T_b = T_c$.

3. Chaque transformation de G est inversible : pour tout $a \in \mathcal{J}$, on peut trouver $b \in \mathcal{J}$ tel que $T_a \circ T_b = T_b \circ T_a = I$. On notera $T_b = T_a^{-1}$.

Il se peut que ces axiomes ne soient vérifiés que dans un voisinage de a_0. Dans ce cas, on a un groupe local.

Exemple A.1. Le groupe « extension » ou de transformations d'échelle est l'ensemble des transformations de la forme :

$$E_a : \begin{cases} \widehat{t} = a\, t \\ \\ \widehat{y} = a^\beta\, y. \end{cases} \tag{A.3}$$

Pour ce groupe, on a :

$$a_0 = 1, \qquad E_a \circ E_b = E_{ab}, \qquad E_a^{-1} = E_{1/a}.$$

On peut aussi noter additivement ce groupe. Dans ce cas, les transformations sont de la forme

$$E_a : \begin{cases} \widehat{t} = e^a\, t \\ \widehat{y} = e^{\beta a}\, y. \end{cases} \tag{A.4}$$

Cette fois,

$$a_0 = 0, \qquad E_a \circ E_b = E_{a+b}, \qquad E_a^{-1} = E_{-a}.$$

♢

Dans toute la suite, on supposera que $a_0 = 0$.

A.1.2 Générateur infinitésimal

Introduisons la notion d'*orbite*. C'est l'ensemble des points $(\widehat{t}, \widehat{y})$ qui sont reliés à (t, y) par une des transformations du groupe. Soit $\big(\xi(\widehat{t}, \widehat{y}), \eta(\widehat{t}, \widehat{y})\big)$ le vecteur tangent en $(\widehat{t}, \widehat{y})$, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{t}}{\mathrm{d}a} = \xi(\widehat{t}, \widehat{y}), \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}a} = \eta(\widehat{t}, \widehat{y}). \tag{A.5}$$

En particulier, en (t, y) on a :

$$\xi(t, y) = \left.\frac{\partial \widehat{t}(t, y, a)}{\partial a}\right|_{a=0}$$

$$\eta(t, y) = \left.\frac{\partial \widehat{y}(t, y, a)}{\partial a}\right|_{a=0}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \widehat{t} &= t + \xi(t, y)(a) + O\left(a^2\right), \\ \widehat{y} &= y + \eta(t, y)(a) + O\left((a)^2\right) \end{aligned} \tag{A.6}$$

au voisinage de $a = 0$.

On appelle *générateur infinitésimal* le champ de vecteurs tangent X

$$X \;=\; \xi(t,y)\;\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \eta(t,y)\;\frac{\partial}{\partial y}$$

défini par :

$$X.f \;=\; \xi(t,y)\;\frac{\partial f}{\partial t} \;+\; \eta(t,y)\;\frac{\partial f}{\partial y}$$

si f est une fonction C^∞ de t et de y.

La connaissance de X (et de a_0) détermine complètement le groupe de transformations G. En effet, connaissant ξ et η, on peut trouver $\widehat{t}$ et $\widehat{y}$ grâce aux relations (A.5) et à la condition initiale

$$\Big(\widehat{t}(t,y,0),\widehat{y}(t,y,0)\Big) = (t,y). \tag{A.7}$$

Exemple A.2. Soit le générateur infinitésimal $X = 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Cherchons le groupe de transformations qu'il engendre.

(A.5) s'écrit

$$\frac{\partial\widehat{t}}{\partial a} = 2\widehat{t}, \qquad\qquad \frac{\partial\widehat{y}}{\partial a} = \widehat{y}.$$

Cela donne

$$\widehat{t} = C_1 e^{2a}, \qquad\qquad \widehat{y} = C_2 e^{a}.$$

Puis, en se servant de (A.7), on conclut :

$$\widehat{t} = e^{2a}t, \qquad\qquad \widehat{y} = e^{a}y.$$

Le groupe est le groupe de transformations d'échelle introduit dans l'exemple A.1.

$\diamondsuit$

Un autre moyen d'y arriver est de remarquer que (voir [61, 5]) :

$$f(\widehat{t},\widehat{y}) = f(t,y) + aX.f + \frac{a^2}{2!}X.(X.f) + \cdots = e^{aX}.f$$

pour toute fonction C^∞ f et que par conséquent,

$$\widehat{t} = e^{aX}.t, \qquad \widehat{y} = e^{aX}.y. \tag{A.8}$$

Exemple A.3. Considérons le générateur $X = y\dfrac{\partial}{\partial t} - t\dfrac{\partial}{\partial y}$. En appliquant simplement (A.8), il vient

$$\widehat{t} = t + ay - \frac{a^2}{2!}t - \frac{s^3}{3!}y + \frac{a^4}{4!}t + \cdots = t\cos a + y\sin a,$$

$$\widehat{y} = y - at - \frac{a^2}{2!}y + \frac{s^3}{3!}t + \frac{a^4}{4!}y + \cdots = -t\sin a + y\cos a.$$

Le groupe engendré par X est donc le groupe des rotations. ♢

On va maintenant appliquer ces concepts à la recherche de symétries.

A.1.3 Condition et groupe de symétrie

Une équation (algébrique)

$$F(t,y) = 0 \tag{A.9}$$

est un *invariant*[1] d'un groupe de transformations G si elle ne change pas de forme lorsqu'on applique une quelconque transformation $T : (t,y) \mapsto (\widehat{t},\widehat{y})$ de G. Plus concrètement, l'équation (A.9) est invariante si

$$F(t,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(\widehat{t},\widehat{y}) = 0. \tag{A.10}$$

Dans ce cas, réciproquement, on dit que G est un *groupe de symétrie* de l'équation (A.9) et chaque élément de G est une symétrie.

On montre que la condition (A.10) est équivalente à :

[1] Insistons sur le fait que c'est l'équation qui est invariante mais pas la fonction F.

$$F = 0 \quad \Longrightarrow \quad X.F = 0, \tag{A.11}$$

c'est-à-dire

$$\xi(t,y)\frac{\partial F}{\partial t} + \eta(t,y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

où X est le générateur infinitésimal du groupe. Pour s'en convaincre, il suffit d'introduire les relations (A.6) dans (A.10).

La connaissance de ξ et de η permet de connaître la variation de t et y lorsqu'on applique le groupe G. La question qui se pose est alors : « comment est ce que les dérivées varient ? ». C'est l'objet des prolongations.

A.2 Prolongation

Pour adapter la condition (A.11) à une équation différentielle du type

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) \qquad \text{où } y = y(t),$$

on a besoin de calculer les variations des différentes dérivées. Soit alors

$$\widehat{y}^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k \widehat{y}}{\mathrm{d}\widehat{t}^k}.$$

Le membre de gauche s'appelle la *k-ième prolongation*.

A.2.1 Formule de prolongation

Notons D_t la dérivation totale par rapport à t :

$$\mathrm{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots$$

Pour la première dérivée :

$$\begin{aligned}
\widehat{y}' &= \frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \frac{\mathrm{D}_t\widehat{y}}{\mathrm{D}_t\widehat{t}} \\
&= \frac{\mathrm{D}_t\left[y + a\eta + O(a^2)\right]}{\mathrm{D}_t\left[t + a\xi + O(a^2)\right]} = \frac{y' + a\mathrm{D}_t\eta + O(a^2)}{1 + aD_t\xi + O(a^2)} \\
\widehat{y}' &= y' + \left[D_t\eta - y'D_t\xi\right]a + O(a^2)
\end{aligned}$$

La variation de y' est donc

$$\boxed{\eta^1 = D_t\eta - y'D_t\xi} \tag{A.12}$$

En procédant par récurrence, on trouve :

$$\widehat{y}^{(k)} = y^{(k)} + \eta^k a + O(a^2)$$

avec

$$\boxed{\eta^k = \mathrm{D}_t\eta^{k-1} - y^{(k)}\mathrm{D}_t\xi.} \tag{A.13}$$

Donnons la forme des deux premières variations η^1 et η^2 pour illustrer.

$$\eta^1 = \mathrm{D}_t\eta - y'\mathrm{D}_t\xi = \eta_t + (\eta_y - \xi_t)y' - \xi_y y'^2$$

$$\begin{aligned}
\eta^2 = \mathrm{D}_t\eta^1 - y''\mathrm{D}_t\xi &= \eta_{tt} + (2\eta_{ty} - \xi_{tt})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{ty})y'^2 \\
&\quad - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_t - 3y'\xi_y)y''.
\end{aligned}$$

Les k premières prolongations « prolongent » en fait le groupe G en un groupe $G_{\{k\}}$ (pour prendre les notations de [5]) qui agit sur un espace à $(k+2)$ variables $(t, y, y', \ldots, y^{(k)})$. L'opérateur

$$X^{(k)} = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^1\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^k\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}$$

est le *générateur infinitésimal* de $G_{\{k\}}$. C'est donc le prolongement du générateur X à l'ordre k.

Cette présentation des prolongations est très simplifiée. Si on veut des définitions rigoureuses, il faudra introduire l'espace des jets. On peut se référer par exemple à [105] pour la théorie mathématique complète.

A.2.2 Condition de symétrie

On va maintenant chercher une condition pour qu'une équation différentielle soit un invariant d'un groupe G. Partons d'une équation différentielle du premier ordre :

$$F_1(t, y, y') = 0. \tag{A.14}$$

Par définition, cette équation est invariante si $F_1(\widehat{t}, \widehat{y}, \widehat{y}') = 0$. En effectuant un développement de Taylor de premier ordre il suit que

$$F_1(t, y, y') + \left(\xi \frac{\partial F_1}{\partial t} + \eta \frac{\partial F_1}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial F_1}{\partial y'} \right) a + O(a^2) = 0.$$

Et en tenant compte de l'équation de départ (A.14), on arrive à la condition linéaire suivante : l'équation (A.14) est invariante si

$$F_1(t, y, y') = 0 \quad \Longrightarrow \quad X^{(1)}.F_1 = 0.$$

De même, si on est en présence d'une équation différentielle d'ordre k :

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0,$$

la condition d'invariance est

$$F = 0 \quad \Longrightarrow \quad X^{(k)}.F = 0. \tag{A.15}$$

Lorsqu'on applique cette condition, il faut considérer les différentes dérivées de y comme des variables indépendantes puisqu'on est dans un espace prolongé.

Exemple A.4. Cherchons les symétries de l'équation de Laplace en dimension un :

$$\nabla^2 y = 0. \tag{A.16}$$

on peut encore l'écrire

$$y'' = 0.$$

Cette équation n'a pas un grand intérêt puisqu'on connaît toutes ses solutions mais elle est assez simple pour qu'on puisse mener tous les calculs à la main.

L'équation différentielle étant d'ordre 2, la condition d'invariance s'écrit :

$$\begin{aligned} & X^{(2)}.y'' = 0 \\ & \text{si} \quad y'' = 0. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Calculons $X^{(2)}(y'')$.

$$\begin{aligned} X^{(2)}.y'' &= \left[\xi\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^1\frac{\partial}{\partial y'} + \eta^2\frac{\partial}{\partial y''}\right](y'') \\ &= \eta^2 \\ &= \eta_{tt} + (2\eta_{ty} - \eta_{tt})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{ty})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_t - 3y'\xi_y)y'' \\ &= \eta_{tt} + (2\eta_{ty} - \eta_{tt})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{ty})y'^2 - \xi_{yy}y'^3, \end{aligned}$$

la dernière égalité ayant été obtenue en tenant compte de l'équation de départ (A.16). L'équation est donc invariante si

$$\eta_{tt} + (2\eta_{ty} - \eta_{tt})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{ty})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 = 0.$$

Cette expression est vérifiée si

$$\eta_{tt} = 0, \qquad 2\eta_{ty} - \eta_{tt} = 0, \qquad \eta_{yy} - 2\xi_{ty} = 0, \qquad \xi_{yy} = 0.$$

La résolution de ces équations aboutit à :

$$\xi(t, y) = c_1 + c_2 t + c_3 y + c_4 t^2 + c_5 ty,$$

$$\eta(t,y) = c_6 + c_7 y + c_8 t + c_4 ty + c_5 y^2.$$

où les c_i sont des constantes. Les groupes de symétrie de l'équation (A.17) sont donc ceux engendrés par :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = t\frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_3 = y\frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_4 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + ty\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_5 = ty\frac{\partial}{\partial t} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_6 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_7 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_8 = t\frac{\partial}{\partial y}.$$

♢

A.3 Approche variationnelle des prolongations

On va donner une signification plus « mécanique » de la théorie ci-dessus. On va raisonner en terme de variation. On va alors noter δf la variation d'une quantité f, ou plus formellement :

$$f(\widehat{t},\widehat{y}) = f(t,y) + a\ \delta f(t,y) + O(a^2).$$

On a alors :

$$\xi(t,y) = \delta t(t,y), \qquad \eta(t,y) = \delta y(t,y).$$

Cherchons la variation $\delta(y')$ de la dérivée.

D'abord

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\delta(\,\mathrm{d}y) = \delta y'\ \mathrm{d}t + y'\delta(\,\mathrm{d}t)$$

$$\mathrm{d}(\delta y) = \delta y' \, \mathrm{d}t + y' \, \mathrm{d}(\delta t)$$

et

$$\delta y' = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}t} - y' \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}$$

Ici, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désigne la dérivation particulaire ou totale qu'on a notée D_t auparavant. Les formules de prolongation s'énoncent alors comme suit :

$$\boxed{\delta y' = \mathrm{D}_t \delta y - y' \mathrm{D}_t \delta t} \tag{A.18}$$

C'est l'équivalent de la formule (A.12).

On utilise la récurrence pour les dérivées d'ordre supérieur :

$$\boxed{\delta \left(y^{(k)} \right) = \mathrm{D}_t \delta \left(y^{(k-1)} \right) - y^{(k)} \mathrm{D}_t \delta t.} \tag{A.19}$$

Pour illustrer, on va donner la forme développée de (A.18) et (A.19) pour $k = 2$.

$$\begin{aligned}
\delta y' &= \frac{\partial \delta y}{\partial t} + \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial \delta t}{\partial t} \right) y' - \frac{\partial \delta t}{\partial y} \, y'^2 \\
\delta y'' &= \frac{\partial^2 \delta y}{\partial t^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \delta y}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 \delta t}{\partial t^2} \right) y' + \left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \delta t}{\partial t \partial y} \right) y'^2 \\
&\quad - \frac{\partial^2 \delta t}{\partial y^2} \, y'^3 + \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} - 2 \frac{\partial \delta t}{\partial t} - 3 y' \frac{\partial \delta t}{\partial y} \right) y''.
\end{aligned}$$

Avec l'approche variationnelle, une équation différentielle

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0$$

est invariante si sa variation est nulle, c'est-à-dire si

$$\delta F = 0.$$

Cette formulation a l'avantage d'être plus intuitive que (A.15) et légèrement plus simple dans la pratique.

Les $\delta\left(y^{(k)}\right)$ représentent ici les η^k. En fait,

$$\delta\left(y^{(k)}\right) = X^{(p)}\left(y^{(k)}\right) \qquad \text{pour tout } p \geq k.$$

La formule (A.18) est l'équivalent de (A.12) et (A.19) celui de (A.13).

Exemple A.5. Reprenons l'exemple A.4. Pour avoir toutes les symétries de l'équation, on pose

$$\delta(y'') = 0.$$

Cela nous conduit à :

$$\frac{\partial^2 \delta y}{\partial t^2} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2 \delta y}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 \delta t}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \delta y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \delta t}{\partial t \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \delta t}{\partial y^2} = 0.$$

Et

$$\delta t = c_1 + c_2 t + c_3 y + c_4 t^2 + c_5 t y,$$

$$\delta y = c_6 + c_7 y + c_8 t + c_4 t y + c_5 y^2.$$

♢

Etendons maintenant la théorie aux équations aux dérivées partielles.

A.4 Extension aux équations aux dérivées partielles

A part les indices qui s'alourdissent, relativement peu de choses changent lorsqu'on traite les équations aux dérivées partielles.

Dans le cas général, on a n variables indépendantes $(x_1, \ldots, x_n)$ et m variables $(u_1, \ldots, u_m)$ qui dépendent des x_i :

$$u_\alpha = u_\alpha\left(x_1, \ldots, x_n\right), \qquad \alpha = 1, ..., m.$$

Pour ne pas s'encombrer avec les indices, on va adopter les notations avec les variations. Posons δx_i et δu_α les variations des x_i et u_α. On montre alors que

$$\boxed{\delta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right) = \mathrm{D}_{x_i}\delta u_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\mathrm{D}_{x_i}\delta x_j, \qquad \alpha = 1, \ldots, m, \;\; i = 1, \ldots, n} \tag{A.20}$$

Cela s'obtient en appliquant δ à l'équation

$$\mathrm{d}u_\alpha = \sum_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j.$$

La variation des dérivées d'ordre supérieur s'obtient par récurrence.

Exemple A.6. Cherchons les symétries de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{A.21}$$

Après avoir calculé $\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$ et $\delta\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ en fonction de δt, δx et δu, on pose la condition de symétrie

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \qquad \text{sachant que} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

De là, on tire :

$$\frac{\partial \delta t}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \delta x}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \delta t}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \delta u}{\partial u^2} = 0$$

$$-2\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta t}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta u}{\partial t} = 0 \qquad -\frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial u} + \frac{\partial \delta x}{\partial t} = 0$$

En résolvant ces équations, on trouve les générateurs des groupes de symétrie :

$$X_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_{tx} = 2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_u = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{xu} = 2t\frac{\partial}{\partial x} - ux\frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y = t^2\frac{\partial}{\partial t} + xt\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}(x^2 - 2t)u\frac{\partial}{\partial u},$$

et $Z = f(t,x)\dfrac{\partial}{\partial u}$ où f est une solution de (A.21).

♢

La recherche des groupes de symétries est très fastidieuse à faire à la main car il y a un nombre considérable de termes à manipuler. Ainsi, la théorie n'a pas pu se faire une bonne place dans les domaines à applications industrielles. Il a fallu attendre les années 1990 pour que la situation change. En effet, ce n'est que depuis ces années que les logiciels de calcul symbolique sont assez puissant pour prendre le calcul en charge. Et actuellement, quelques programmes ont été élaboré dans ce sens. Un inventaire a été réalisé dans [59] et [64]. Parmi ces programmes, citons DESOLV qui a été construit par Vu et Carminati ([147]) et SYMMETRY par Hickman ([60]) qu'on a eu l'occasion d'utiliser.

Notons que la performance de ces programmes dépend de la forme dans laquelle on fait entrer l'équation. Par exemple, l'ordre des termes (selon les dérivées) et des variables est important : il est mieux d'écrire l'équation sous une forme involutive (voir [126] pour la définition), orthonomique ou passive ([64],[63]). Certains des programmes intègrent la réduction de l'équation en une forme plus adaptée. Mais puisque la forme n'est pas unique et que certaines formes peuvent être moins désirables, une attention doit être faite. Dans le cas d'un grand système d'équations, la réduction peut même ne pas être possible.

Enfin, notons aussi que les condition du type (A.11) conduisent à un système d'équations aux dérivées partielles. Dans certains cas, la résolution d'un tel système

n'est pas évidente. Mais heureusement, dans beaucoup d'autres cas, on tombe sur des équations différentielles ordinaires qui sont plus faciles à résoudre ([29]).

Annexe B

Extension du théorème de Nœther aux équations de Navier-Stokes

Cet annexe est tiré d'une communication personnelle d'Aziz Hamdouni.

Si on a une équation d'évolution dérivant d'un lagrangien alors le théorème de Nœther[1] ([99, 100, 74]) stipule qu'à chaque transformaition qui laisse invariant le lagrangien correspond une loi de conservation. Beaucoup d'équations d'évolution, dont les équations de Navier-Stokes ne dérivent cependant pas d'un lagrangien. Le but de cet annexe est de rappeler le théorème de Nœther et surtout de montrer qu'on peut tout de même appliquer ce théorème aux équations de Navier-Stokes moyennant quelques manipulations. Pour ce faire, on va emprunter la démarche d'Ibragimov et de Kolsrud dans [66] qui consiste à associer aux équations une « équation adjointe » telle que le couple d'équations dérive d'un lagrangien.

On procédera comme suit. Dans la section B.1, on fera un bref rappel sur les équations d'Euler-Lagrange et le théorème de Nœther. On présentera ensuite dans la section B.2 la démarche proposée pour étendre le théorème à certaines équations d'évolution ne dérivant pas d'un lagrangien. Dans la section B.3, on prendra alors quelques exemples d'application. Et enfin, dans la section B.4, on montrera qu'on peut utiliser la démarche pour les équations de Navier-Stokes.

B.1 Le théorème de Nœther

Soit une équation d'évolution

$$F(x, u) = 0 \tag{B.1}$$

[1] En fait, on devrait écrire « les » théorèmes de Nœther car il y a deux théorèmes (voir [74]).

telle que la solution est un point critique de l'action

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u, \dot{u})\, \mathrm{d}x. \tag{B.2}$$

On dit que l'équation (B.1) dérive du lagrangien L.

x désigne ici la variable spatiale x et/ou la variable temporelle t et $\dot{u}$ englobe les expressions

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

On va introduire les équations d'Euler-Lagrange associées à (B.1)

B.1.1 Equations d'Euler-Lagrange

Notons Div l'opérateur suivant :

$$f \longmapsto \mathrm{Div}\, f = \sum_i \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}.$$

La différence entre l'opérateur Div et l'opérateur de divergence habituel est que l'un des x_i peut être le temps.

La recherche du point critique de l'action (B.2) peut être transformée en la résolution des équations d'Euler-Lagrange selon la proposition suivante :

Proposition B.1. *Si u est un point critique de l'action $\mathcal{L}$ alors u est une solution des équations d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \mathrm{Div}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0. \tag{B.3}$$

On désignera les équations d'Euler-Lagrange (B.3) par

$$E(u).L = 0. \tag{B.4}$$

Preuve
On a :

$$u \text{ est un point critique de } \mathcal{L} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta\mathcal{L}[u] = 0 \quad \text{si} \quad \delta u_{|\Gamma} = 0$$

où la variation se porte uniquement sur u mais pas sur x. D'autre part,

$$\delta\mathcal{L} = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}\ \delta u + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\ \delta \dot{u} \right)\ \mathrm{d}x.$$

Or

$$\delta\dot{u} = \frac{\partial \delta u}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \mathrm{Div}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta u \right) - \mathrm{Div}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta u.$$

D'où :

$$\delta\mathcal{L} = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \mathrm{Div}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) \delta u\ \mathrm{d}x$$

pour tout δu nul sur le bord. Ce qui conduit à (B.3). ■

Exemple B.2. Pour une particule soumise à une force conservative, le lagrangien est

$$L(t, r, r') = E_c(t, r, r') - E_p(t, r)$$

si r est la position, r' la vitesse, E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle. L'équation d'Euler-Lagrange est alors

$$E(r).L \equiv \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial r'} = 0.$$

♢

Exemple B.3. Soit l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f & \text{sur } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Cette équation est associée au lagrangien :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \;-\; \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x.$$

L'équation d'Euler-Lagrange est donc

$$E(u).L \equiv -\operatorname{Div} \nabla u = f,$$

qui n'est autre que l'équation de Laplace. ♢

Etudions maintenant la condition d'invariance du lagrangien par l'action d'un groupe de transformations.

B.1.2 Action d'un groupe de transformations sur le lagrangien

Soit G un groupe de transformations engendré par le champ de vecteurs

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

Soit une transformation T appartenant à G :

$$T \;:\; (x, u) \longmapsto (\widehat{x}, \widehat{u}).$$

T transforme le lagrangien de la manière suivante :

$$\widehat{\mathcal{L}}[\widehat{u}] = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{L} \,\mathrm{d}\widehat{x} = \int_\Omega \widehat{L} J \,\mathrm{d}x$$

où J est le jacobien de la transformation. Si G laisse le lagrangien invariant alors :

$$\int_\Omega \widehat{L} J \, \mathrm{d}x = \int_\Omega L \, \mathrm{d}x.$$

Par conséquent,

$$X^{(1)}.(JL) = 0,$$

où $X^{(1)}$ est la prolongation de X à l'ordre 1.Cela entraîne que

$$X^{(1)}.J\, L + J\, X^{(1)}.L = 0.$$

Par ailleurs, on a :

$$X^{(1)}.J = J \operatorname{Div} \xi.$$

Il suit alors que

$$X^{(1)}.L + L \operatorname{Div} \xi = 0.$$

D'où la proposition suivante.

Proposition B.4. *Si $\mathcal{L}$ est invariant par l'action de G alors*

$$\boxed{X^{(1)}.L + L \operatorname{Div} \xi = 0} \tag{B.5}$$

La condition (B.5) s'écrit encore :

$$\boxed{L \operatorname{Div} \xi + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial L}{\partial u} \cdot \eta + \operatorname{tr}\left(\left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} \right]^T (D_x \eta - \gamma D_x \xi) \right) = 0,}$$

où on a noté γ la matrice d'éléments

$$\gamma_k^j = \frac{\partial u^j}{\partial x_k}$$

et $\dfrac{\partial L}{\partial \gamma}$ la matrice d'éléments

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right)_{j,k} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_k^j}.$$

On va utiliser cette condition pour établir le théorème de Nœther.

B.1.3 Théorème de Nœther

Enonçons le théorème de Nœther.

Théorème B.5. *Soit C la quantité :*

$$\boxed{C = L\xi + \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right]^T (\eta - \gamma\xi).}$$

Si le groupe de transformations G laisse le lagrangien $\mathcal{L}$ invariant alors

$$\text{Div } C = 0 \tag{B.6}$$

pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange.

Si $\mathcal{L}$ n'est pas invariant mais qu'il existe une quantité B telle que

$$X^{(1)}.L + L \,\text{Div}\, \xi = \text{Div}\, B \tag{B.7}$$

alors

$$\text{Div}(C - B) = 0. \tag{B.8}$$

pour toute équation d'Euler-Lagrange.

Les équations (B.6) et (B.8) sont les lois de conservation. La première partie du théorème signifie donc qu'à chaque groupe de symétrie du lagrangien correspond une loi de conservation. La seconde partie est une généralisation.

Si on écrit C par composantes alors

$$\boxed{C^i = \xi^i L + \left(\eta^k - \xi^j u_j^k\right) \frac{\partial L}{\partial u_i^k}}$$

(avec sommation sur les indices répétés).

PREUVE
La preuve du théorème est entièrement calculatoire. Supposons que $\mathcal{L}$ est invariant.

$$\operatorname{Div} C = \mathrm{D}_x L \cdot \xi + L \operatorname{Div} \xi + \operatorname{Div} \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right]^T \cdot (\eta - \gamma\xi) + \operatorname{tr}\left(\left[\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right]^T D_x(\eta - \gamma\xi)\right).$$

Or

$$\mathrm{D}_x L \cdot \xi = \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial L}{\partial u}\gamma\xi + \frac{\partial L}{\partial \gamma} D_x \gamma\xi$$

et $\mathcal{L}$ est invariant. D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} C &= \frac{\partial L}{\partial u} \cdot (\gamma\xi - \eta) + \operatorname{Div}\left[\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right]^T \cdot (\eta - \gamma\xi) \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \operatorname{Div}\left[\frac{\partial L}{\partial \gamma}\right]^T\right) \cdot (\eta - \gamma\xi). \end{aligned}$$

Le premier facteur est nul selon l'équation d'Euler-Lagrange. Donc $\operatorname{Div} C = 0$.
■

Pour illustrer ce théorème, on va prendre un exemple très simple.

Exemple B.6. Soit une particule dont le mouvement est décrit par le lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m(r'^2) - U(r)$$

et le groupe des translations spatiales de la forme

$$(t, r) \mapsto (t, r + a).$$

Ce groupe est engendré par le générateur infinitésimal

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Dans ce cas,

$$C = mr'$$

et $\mathrm{Div} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Donc la quantité de mouvement mr' est conservée au cours du temps. $\diamondsuit$

Le théorème de Nœther associe donc à chaque groupe de symétrie de $\mathcal{L}$ une loi de conservation. Ce théorème s'applique aux problèmes qui peuvent être décrit par un lagrangien. Dans la section suivante, on propose d'étendre le théorème à certaines équations d'évolution qui n'entrent pas dans cette catégorie de problèmes.

B.2 Démarche d'extension

B.2.1 Bilagrangien et équation adjointe

Les équations d'évolution auxquelles on va étendre le théorème sont celles qui dérivent d'un « bilagrangien » au sens suivant.

Définition B.7. *Soit*

$$F(x, u) = 0 \tag{B.9}$$

une équation différentielle. On dit que F dérive d'un « bilagrangien » *s'il existe une application* L *:*

$$L \ : \ (u, v) \longmapsto L(u, v) \in \mathbb{R}$$

telle que l'équation d'Euler-Lagrange

$$E(v).L(u, v) = 0$$

ne soit autre que l'équation (B.9).

L'équation

$$E(u).L(u,v) = 0$$

est appelée équation adjointe *de (B.9).*

Prenons l'exemple de l'équation de la chaleur.

Exemple B.8. L'équation linéaire de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

a été traitée par Ibragimov et Kolsrud ([66]). Le coefficient de diffusion κ est constant. Cette équation ne dérive pas d'un lagrangien. En revanche, elle dérive du bilagrangien

$$L(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\, v - u \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \kappa \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

et son equation adjointe est

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

La fonction v peut être perçue comme une fonction test. ♢

B.2.2 Application du théorème de Nœther

Le bilagrangien tel qu'on l'a défini est tout simplement le lagrangien associé au couple de variables $w = (u, v)$. Le couple d'équations

$$\begin{cases} E(v).L(u,v) = 0 \\ \\ E(u).L(u,v) = 0 \end{cases} \tag{B.10}$$

n'est autre qu'une expression plus détaillée de l'équation

$$E(w).L(w) = 0.$$

Le théorème de Nœther habituel s'applique à cette dernière équation. En augmentant de manière adéquate le nombre d'inconnues et le nombre d'équations, on a donc pu revenir dans le cadre d'application du théorème.

Pour déduire des lois de conservation, on procède comme suit. On cherche toutes les symétries des équations (B.10). On utilise la condition (B.5) pour savoir lesquelles de ces symétries et de leurs combinaisons linéaires laissent le bilagrangien invariant. On applique alors le théorème de Nœther. La difficulté est de trouver les bonnes combinaisons des symétries qui vérifient (B.5).

Enfin, notons que le bilagranien n'est pas unique.

B.3 Application à quelques équations

B.3.1 Equation linéaire de la chaleur

Reprenons l'équation de la chaleur et son adjointe :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \\ -\dfrac{\partial v}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \tag{B.11}$$

Le bilagrangien est

$$L(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\, v - u \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \kappa \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ibragimov et Kolsrud ([66]) ont calculé les générateurs infinitésimaux qui engendrent le groupe de symétrie de (B.11) qui sont :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \qquad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} \qquad X_5 = v\frac{\partial}{\partial v} \qquad X_6 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{\kappa}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$X_7 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x^2}{4\kappa}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{t}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$X_\phi = \phi(t,x)\frac{\partial}{\partial v} \qquad X_\psi = \psi(t,x)\frac{\partial}{\partial u}$$

où ϕ et ψ sont des solutions respectives de l'équation de la chaleur et de son adjointe.

X_1 vérifie la condition d'invariance (B.5). La quantité conservée correspondante est le vecteur

$$\left(\; u_x v_x \; , \; u_t v_x + u_x v_t \; \right)$$

où u_q et v_q désignent les dérivées partielles de u et v par rapport à une variable q. De même, X_2, X_6 et X_7, ainsi que $(X_3 - X_4)$ vérifient aussi la condition d'invariance. Le générateur X_ϕ vérifie la condition de divergence (B.7) avec

$$B = \left(\; \frac{1}{2}(\phi u) \; , \; \kappa(u\phi_x) \; \right).$$

On peut donc trouver des lois de conservation avec chacun de ces générateurs. On montre que ces lois de conservation peuvent toutes s'écrire sous la forme

$$D_t(wu) + \kappa D_x(uw_x - wu_x) = 0$$

où w est une solution de l'équation adjointe.

B.3.2 Equation de Burgers

L'équation de Burgers s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

où $\varkappa$ est une constante. Elle dérive du bilagrangien L tel que

$$L(u,v) = \frac{1}{2}\big(vu_t - uv_t\big) + \varkappa u_x v_x + \frac{1}{3}\,u\big(uv_x - vu_x\big),$$

qui donne comme équation adjointe :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Les générateurs infinitésimaux correspondants sont

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_4 = \frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_5 = v\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_6 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_7 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x+tu)\frac{\partial}{\partial u}.$$

X_1, X_2 et X_6 vérifient la condition d'invariance (B.5) tandis que X_3, X_4 et X_7 vérifient la condition de divergence (B.7) avec

$$B = (\ \frac{1}{2}\,v\ ,\ -\frac{1}{6}\,uv\ ) \qquad \text{pour } X_3,$$

$$B = (\ \frac{1}{2}\,u\ ,\ -\frac{1}{6}\,u^2\ ) \qquad \text{pour } X_4,$$

$$B = (\ \frac{1}{2}\,xv\ ,\ -\frac{1}{6}\,xuv\ -\ \varkappa v\ ) \qquad \text{pour } X_7.$$

X_5 est le seul générateur qui ne vérifie ni la condition d'invariance ni la condition de divergence. Pour les autres générateurs X_i, on déduit les vecteurs conservés $C_i = (C_i^0, C_i^1)$ définis comme suit ([66]) :

$$C_1^0 = \varkappa u_x v_x - uvu_x, \qquad C_1^1 = (uv - \varkappa v_x)u_t - \varkappa u_x v_t$$

$$C_2^0 = uv_x - vu_x, \qquad C_2^1 = vu_t - uv_t - 2\varkappa u_x v_x$$

$$C_3^0 = v + tvu_x, \qquad C_3^1 = \varkappa(v_x + tu_x v_x) - tvu_t - uv$$

$$C_4^0 = u, \qquad C_4^1 = -\varkappa u_x - u^2/2$$

$$C_6^0 = 2tC_1^0 + xuv_x, \qquad C_6^1 = 2tC_1^1 - xuv_t - \varkappa v_x(xu)_x + vu^2$$

$$C_7^0 = t^2 C_1^0 + txuv_x - xv, \qquad C_7^1 = t^2 C_1^1 - tx(uv_t + \varkappa u_x v_x) + t(vu^2 - \varkappa uv_x) - \varkappa x v_x + \varkappa v$$

B.4 Cas des équations de Navier-Stokes

En s'inspirant des exemples traités ci-dessus, nous avons trouvé que les équations de Navier-Stokes dérivent d'un bilagrangien. En effet, désignons par $\mathbf{u}$ le couple (u, p) et par $\mathbf{v}$ le couple (v, q). Soit

$$\boxed{L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \centerdot v - u \centerdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + \left(q - \frac{1}{2}\, u \centerdot v\right) - p\,\mathrm{div}v + \nu\ \mathrm{tr}\,({}^T\nabla u \centerdot \nabla v)\,.}$$

On a alors

$$E(\mathbf{v}).L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \begin{cases} u_t + u \centerdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u \\ \\ \mathrm{div}u = 0 \end{cases}$$

$$E(\mathbf{u}).L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \begin{cases} -v_t + (v \centerdot \nabla u^T - u \centerdot \nabla v) = \nabla q + \nu \Delta v \\ \\ \mathrm{div}v = 0 \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de Nœther au couple d'équations

$$\begin{cases} E(\mathbf{v}).L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 \\ \\ E(\mathbf{u}).L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0. \end{cases}$$

Grâce au programme DESOLV ([147]), nous avons trouvé les générateurs infinitésimaux de ce couple d'équations qui sont sur le tableau Tab. B.1. A partir de ces générateurs, on pourra chercher des lois de conservation pour les équations de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
Y_0 &= \zeta(t)\frac{\partial}{\partial p} \\
X_{ij} &= x_j\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial}{\partial u_i} - u_i\frac{\partial}{\partial u_j} + v_j\frac{\partial}{\partial v_i} - v_i\frac{\partial}{\partial v_j}, && i=1,2,\ \ j>i \\
X_i &= \alpha_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_i'(t)\frac{\partial}{\partial u_i} - x_i\,\alpha_i''(t)\frac{\partial}{\partial p}, && i=1,2,3 \\
Y_1 &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k} - u_k\frac{\partial}{\partial u_k} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}. \\
Y_0' &= \eta(t)\frac{\partial}{\partial p} \\
X_{ij}' &= (x_ju_i - x_iu_j)\frac{\partial}{\partial q} + x_j\frac{\partial}{\partial v_i} - x_i\frac{\partial}{\partial v_j}, && i=1,2,\ \ j>i \\
X_i' &= \big(x_if'(t) - u_if(t)\big)\frac{\partial}{\partial q} - f(t)\frac{\partial}{\partial v_i}, && i=1,2,3 \\
Y_1' &= v_k\frac{\partial}{\partial v_k} + q\frac{\partial}{\partial q}.
\end{aligned}$$

Tab. B.1 – *Générateurs infinitésimaux des équations de Navier-Stokes et de ses équations adjointes*

Bibliographie

[1] C. Allery. *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d'ordre faible (P.O.D.).* Thèse, Université de Poitiers, 2002.

[2] C. Allery, C. Béghein, and A. Hamdouni. Applying Proper Orthogonal Decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10 :907–920, 2005.

[3] C. Allery, C. Béghein, A. Hamdouni, and D. Razafindralandy. Applying model reduction by POD to various complex flows. In *The 7th Esaform Conference*, Trondheim, Norway, 2004.

[4] C. Allery, J-M. Cadou, A. Hamdouni, and D. Razafindralandy. Application of the asymptotic numerical method to the Coanda effect study. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(1-2) :57–77, 2004.

[5] C. Ancey. Symétrie et groupes de Lie, application à la mécanique des fluides. Cours, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.

[6] N. Aubry, P. Holmes, J. Lumley, and E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.

[7] D. Bailey and P. Swarztrauber. A fast method for the numerical evaluation of continuous Fourier and Laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(5) :1105–1110, 1993.

[8] W. Balser. *From divergent power series to analytic functions.* Springer-Verlag, 1994.

[9] W. Balser. Divergent solutions of the heat equation : on an article of Lutz, Miyake and Schäfke. *Pacific Journal of Mathematics*, 188(1) :53–63, 1999.

[10] C. Bender and S. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers : Asymptotic methods and perturbation theory.* McGraw-Hill, 1978.

[11] G. Berkooz, P. Holmes, and J. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual review of fluid Mechanics*, 25 :539–575, 1993.

[12] C. Bernardi, V. Girault, and F. Hecht. Choix du paramètre de pénalisation pour la discrétisation par éléments finis des équations de Navier-Stokes. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Série I*, 336(8) :671–676, 2003.

[13] N. Berrahma-Chekroun and M. Fafard. Resolution of the transient dynamic problem with arbitrary loading using the asymptotic method. *Journal of Sound and Vibration*, 243(3) :475–501, 2001.

[14] L. C. Berselli and C. R. Grisanti. On the consistency of the rational large eddy simulation model. *Computing and Visualization in Science*, 6(2-3) :75–82, 2004.

[15] E. Borel. Mémoire sur les séries divergentes. *Annales scientifiques de l'E.N.S. $3^{ème}$ série*, 16 :9–131, 1899.

[16] E. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, and M. Boudi. Asymptotic-numerical method for buckling analysis of shell structures with large rotations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :77–85, 2004.

[17] B. Braikat. *Quelques contributions dans la Méthode Asmptotique Numérique en Mécanique*. Thèse, Université Hassan II, 2000.

[18] B. Braikat, M. Jamal, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Algorithmes d'intégration temporelle implicites couplés avec des résoluteurs d'ordre élevé. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11(6/2002), 2002.

[19] B. Braikat, M. Jammal, and N. Damil. Utilisation des techniques de la méthode asymptotique numérique pour la résolution des problèmes instationnaires non-linéaires. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(1-2) :119–139, 2004.

[20] C. Brezinski. Convergence acceleration during the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 122 :1–21, 2000.

[21] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, 1984.

[22] J.M Cadou. *Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'intéraction fluide-structure.* Thèse, Université de Metz, 1997.

[23] J.M. Cadou, M. Potier-Ferry, B. Cochelin, and N. Damil. ANM for stationary Navier-Stokes equations and with Petrov-Galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4) :825–845, 2001.

[24] M. Cannone. *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*. Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1995.

[25] Q. Chen, Y. Jiang, C. Béghein, and M. Su. Particulate dispersion and transportation in buildings with large eddy simulation. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 2001.

[26] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53(5) :1181–1192, 1994.

[27] B. Cochelin and F. Pérignon. Résolution de petits systèmes algébriques par la MAN sous Matlab. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(1-2) :79–96, 2004.

[28] O. Costin. On Borel summation and Stokes phenomena for rank one nonlinear systems of ODE's. *Duke Mathematical Journal*, 93(2) :289–344, 1998.

[29] G. Czichowski. Lie theory of differential equations and computer algebra. In *Seminar Sophus Lie*, 2 :83–91, Berlin, 1991. Heldermann Verlag.

[30] N. Damil, M. Jamal, and H. Lahmam. Vectorial Padé approximants in the asymptotic numerical method. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(1-2) :33–56, 2004.

[31] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9) :943–957, 1990.

[32] L. Davidson and P. Nielsen. Large-eddy simulations of the flow in a three-dimensional ventilated room. In *5th International Conference on Air Distributions on Rooms. ROOMVENT 96*, 2 :161–168, Yokohama, Japan, 1996.

[33] E-M. Daya and M. Potier-Ferry. A numerical method for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79 :533–541, 2001.

[34] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis. 2è éd.* Malone, 1984.

[35] L. Duigou, E-M. Daya, and M. Potier-Ferry. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1323–1335, 2003.

[36] A. Dunca, V. John, W. Layton, and N. Sahin. Numerical analysis of large eddy simulation. In *3rd AFOSR Conference on DNS and LES of Turbulence*, 2001.

[37] T. Eidson. Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Bénard problem using subgrid modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 158 :245–268, 1985.

[38] A. Elhage-Hussein, M. Potier-Ferry, and N. Damil. A numerical continuation method based on Padé approximants. *International Journal of Solids ans Structures*, 37 :6981–7001, 2000.

[39] John Ellis, Einan Gardi, Mark A. Samuel, and Marek Karliner. Padé approximants, Borel transforms and renormalons : the Bjorken sum rule as a case study. *Physics Letters B*, B366(1-4) :268–275, 1996.

[40] S. Emmerich and K. McGrattan. Application of a large eddy simulation model to study room airflow. In *ASHRAE Transactions 1998*, vol. 104, Part I, 1–9, San Francisco, USA, 1998.

[41] A. Ern and J-L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36 of *Series SMAI Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.

[42] M. Fafard, K. Henchi, and G. Cendron. Application of an asymptotic method to transient dynamic problems. *Journal of Sound and Vibration*, 208(1) :73–99, 1997.

[43] S. Fellah, B. Braikat, M. Jamal, and N. Damil. An asymptotic numerical method based on time power series expansionfor linear structural problems. In $5^{ème}$ *Congrès de Mécanique*, Meknès, Maroc, 2001.

[44] S. Fellah, B. Braikat, M. Jamal, and N. Damil. An approach based on time expansion, Padé approximants and Shanks transformation for linear strucural dynamic problems. *Journal Maghrébin de Physique*, 2(1), 2002.

[45] A. Fruchard and C. Zang. Remarques sur les développement asymptotiques. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 8(1) :91–114, 1999.

[46] C. Fureby and G. Tabor. Mathematical and physical constraints on large-eddy simulations. *Theorical and Computational Fluid Dynamics*, 9(2) :85–102, 1997.

[47] W. Fushchych and R. Popowych. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations I. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1(1) :75–113, 1994.

[48] W. Fushchych and R. Popowych. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations II. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1(2) :158, 1994.

[49] W. Fushchych, W. Shtelen, and S. Slavutsky. Reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 24(5) :971–984, 1991.

[50] M. Gandarias, E. Medina, and M. Bruzón. An approach to the $b-\epsilon$ model for turbulence through symmetry reductions. *Europhysics Letters*, 44(6) :679–685, 1998.

[51] N. Georgiadis, D. Alexander, and E. Reshotko. Hybrid Reynolds-Averaged Navier-Stokes/Large-Eddy Simulations of supersonic turbulent mixing. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 41(2) :218–229, 2003.

[52] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, A 3(7) :1760–1765, 1991.

[53] M. Gevrey. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Premier mémoire. *Annales scientifiques de l'E.N.S. $3^{ème}$ série*, 35 :129–190, 1918.

[54] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High reynolds solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48 :387–411, 1982.

[55] V. Girault and P-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Computational Mathematics, vol. 5. Springer-Verlag, 1986.

[56] C. Guilpin. *Manuel de calcul numérique appliqué*. EDP Sciences, Les Ulis, France, 1999.

[57] J. Gullbrand. Explicit filtering and subgrid-scale models in turbulent channel flow. In *Annual Research Briefs*. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, 2001.

[58] J. Gullbrand and F.K. Chow. The effect of numerical errors and turbulence models in large-eddy simulation of channel flow, with and without explicit filtering. *Journal of Fluid Mechanics*, 495 :323–341, 2003.

[59] Hereman. Review of symbolic software for the computation of Lie symmetries of differential equations. *Euromath Bulletin*, 1(2) :45–79, 1994.

[60] M. Hickman. The use of maple in the search for symmetries. In *14th IMACS Congress on Computational and Applied Mathematics*, Atlanta, Georgia, 1994.

[61] P.E. Hydon. *Symmetry methods for differential equations. A beginner's guide.* Cambridge University Press, 2000.

[62] N.H. Ibragimov. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol 1 : Symmetries, exact solutions and conservation laws*. CRC Press, Boca Raton, 1994.

[63] N.H. Ibragimov. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol 2 : Applications in engineering and physical sciences*. CRC Press, Boca Raton, 1995.

[64] N.H. Ibragimov. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol 3 : New trends in theorical developments and computational methods.* CRC Press, Boca Raton, 1996.

[65] N.H. Ibragimov and G. Ünal. Equivalence transformations of Navier-Stokes equations. *Bulletin of the Technical University of Istanbul*, 47(1-2) :203, 1994.

[66] N.H. Ibragimov and T. Kolsrud. Lagrangian approach to evolution equations : symmetries and conservation laws. *Nonlinear Dynamics*, 36(1) :29–40, 2004.

[67] T. Iliescu. *Large eddy simulation for turbulent flows*. PhD, University of Pittsburgh, 2000.

[68] T. Iliescu and P. Fischer. Large eddy simulation of turbulent channel flows by the rational LES model. *Physics of Fluids*, 15(10) :3036–3047, 2003.

[69] T. Iliescu, V. John, and W. Layton. Convergence of finite element approximations of large eddy motion. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 18 :689 – 710, 2002.

[70] T. Iliescu, V. John, W.J. Layton, G. Matthies, and L. Tobiska. An assessment of models in large eddy simulation. *IJCFD*, 2000.

[71] T. Iliescu, V. John, W.J. Layton, G. Matthies, and L. Tobiska. A numerical study of a class of LES models. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17 :75 – 85, 2003.

[72] V. John. *Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows. Analytical and Numerical Results for a Class of LES Models*, volume 34 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, 2004.

[73] H. Kang and C. Meneveau. Universality of large eddy simulation model parameters across a turbulent wake behind a heated cylinder. *Journal of Turbulence*, 3, 2002.

[74] Y. Kosmann-Schwarzbach. *Les théorèmes de Nœther*. Éditions de l'École Polytechnique, 2004.

[75] M. Kzaz. Convergence acceleration of the Gauss-Laguerre quadrature formula. *Applied Numerical Mathematics*, 29 :201–220, 1999.

[76] A. Leonard. Energy cascade in large eddy simulation of turbulent fluid flows. *Advances in geophysics*, 18A :237–248, 1974.

[77] A. Leonard and G.S. Winckelmans. A tensor-diffusivity subgrid model for large-eddy simulation. In N.D. Sandham, P.R. Voke, and L. Kleiser, editors, *Direct and Large-Eddy Simulation III*, ERCOFTAC Series. Kluwer, 1999.

[78] M. Lesieur. Recent approaches in large-eddy simulations of turbulence. In *New tools in turbulence modeling*, 1–28. Les Editions de Physique, 1997.

[79] D. Lilly. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids*, A4(3) :633–635, 1992.

[80] M. Loday-Richaud. Séries formelles provenant de systèmes différentiels linéaires méromorphes. In Centre de mathématiques, editor, *Journées X-UPS 1991*, 69–100, 1991.

[81] J. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In A. Yaglom and V. Tatarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, 166–178, Moscou, 1967.

[82] T.S. Lund. The use of explicit filters in large eddy simulation. *Computers and Mathematics with Applications*, 46 :603–616, 2003.

[83] T.S. Lund and H.-J. Kaltenbach. Experiments with explicit filtering for LES using a finite-difference method. In *Annual research briefs*. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, 1995.

[84] T.S. Lund, X. Wu, and K.D. Squire. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, 140(2) :233–258, 1998.

[85] D. Lutz, M. Miyake, and R. Schäfke. On the borel summability of divergent solutions of the heat equation. *Prépublication*, 1997.

[86] E. Maillet. Sur les séries divergentes et les équations différentielles. *Annales scientifiques de l'E.N.S. 3ème série*, 20 :487–518, 1903.

[87] B. Malgrange and J-P Ramis. Fonctions multisommables. *Annales de l'Institut Fourier*, 42(1-2) :353–368, 1992.

[88] E. Mallil, H. Lahmam, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An iterative process based on homotopy and perturbation techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :1845–1858, 2000.

[89] A.L. Marsden, O.V. Vasilyev, and P. Moin. Construction of commutative filters for LES on unstructured meshes. In *Annual Research Briefs*. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, 2000.

[90] C. Meneveau and J. Katz. Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation. *Annual review of fluid Mechanics*, 32 :1–32, 2000.

[91] J. Miller, M. O'Leray, and M. Schonbek. Nonexistence of singular pseudo-self-similar solutions of the Navier-Stokes system. *Mathematische Annalen*, 319(4) :809–815, 2001.

[92] A. Mitsuishi, Y. Hasegawa, and N. Kasagi. Large eddy simulation of mass transfer across an air-water interface at high Schmidt numbers. In *The 6th ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference*, 2003.

[93] Y. Morinishi and O.V. Vasilyev. A recommended modification to the dynamic two-parameter mixed subgrid scale model for large eddy simulation of turbulent flow. *Physics of Fluids*, 13(11) :3400–3410, 2001.

[94] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 256 :157–194, 1992.

[95] T. De Mulder. The role of bulk viscosity in stabilized finite element formulations for incompressible flow : A review. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1) :1–10, 1998.

[96] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A critical review of asymptotic numerical methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(31-50), 1998.

[97] J. Nečas, M. Růžička, and Šverák. On self-similar solutions of the Navier-Stokes equations. *Acta Mathematica*, 176 :283–294, 1996.

[98] P. Nielsen, A. Restivo, and J. Whitelaw. The velocity characteristics of ventilated rooms. *Journal of Fluids Engineering*, 100 :291–298, 1978.

[99] E. Nœther. Invariante Variationsprobleme. In *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften*, 235–257, Göttingen, 1918.

[100] E. Nœther and A. Tavel. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3) :183–207, 1971.

[101] M. Oberlack. Invariant modeling in large-eddy simulation of turbulence. In *Annual Research Briefs*. Stanford University, 1997.

[102] M. Oberlack. Symmetries, invariance and scaling-laws in inhomogeneous turbulent shear flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62(2) :111–135, 1999.

[103] M. Oberlack. Symmetries of the Navier-Stokes equations and their applications for subgrid-models in large eddy simulation of turbulence. In A. Gyr, W. Kinzelbach, and A. Tsinober, editors, *Fundamental Problematic Issues in Turbulence*. Birkhäuser Verlag, 1999.

[104] M. Oberlack. A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 427 :299–328, 2001.

[105] P. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, New-York, 1986.

[106] S-H. Peng and L. Davidson. Comparison of subgrid-scale models in LES for turbulent convection flow with heat transfer. In *2nd EF Conference in Turbulent Heat Transfer*, 1 :5.25–5.35, Manchester, United Kingdom, 1998.

[107] S-H. Peng and L. Davidson. Numerical investigation of turbulent buoyant cavity flow using large eddy simulation. In *3rd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, 3 :737–744, Nagoya, Japan, 2000.

[108] S-H. Peng and L. Davidson. On a subgrid-scale heat flux model for large eddy simulation of turbulent thermal flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 45 :1393–1405, 2002.

[109] F. Pham. Du vieux et du neuf sur les séries divergentes. In *Causerie au colloque Emile Borel*, Saint-Affrique, 1999.

[110] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual review of fluid Mechanics*, 34, 2002.

[111] R. Popowych. On Lie reduction of the Navier-Stokes equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2(3-4) :301–311, 1995.

[112] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J-M Cadou, H.L. Cao, and A. Elhage Hussein. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Série II b, Mécanique des solides numérique*, 324(Série II b) :171–177, 1997.

[113] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling. *Numerical recipes in Fortran : The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1992.

[114] V.V. Pukhnachev. Invariant solution of Navier-Stokes equations describing motions with free boundary. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 202–302, 1972.

[115] J-P. Ramis. Séries divergentes et théories asymptotiques. In *Journées X-UPS 1991*, 7–67, 1991.

[116] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Subgrid models preserving the symmetry group of Navier-Stokes equations. *A paraître dans Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Série II B, Mécanique*, 2005.

[117] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Un modèle L.E.S. préservant le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. In *Soumis au 17ème Congrès Français de Mécanique*, Troyes, France, 2005.

[118] D. Razafindralandy and A. Hamdouni. Une classe de modèles de sous-maille préservant le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. In *Accépté pour présentation au 7ème Congrès de Mécanique*, Casablanca, Maroc, 2005.

[119] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, and C. Béghein. A class of subgrid-scale models preserving the symmetry group of Navier-Stokes equations. *A paraître dans Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2005.

[120] A. Restivo. *Turbulent flow in ventilated rooms*. PhD, University of London, Imperial College of Science and Technology, 1979.

[121] P Sagaut. *Simulations numériques d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille*. Thèse, Université Paris VI, 1995.

[122] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, volume 30 of *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, 1998.

[123] P Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows. An introduction.* Scientific Computation. Springer, 2004.

[124] S.A. Sarra. The method of characteristics with applications to conservation laws. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, 2003.

[125] J.U. Schlüter. Consistent boundary conditions for integrated LES/RANS simulations : LES inflow conditions. *Annual Research Briefs. Center for Turbulence Research*, 143–154, 2002.

[126] W. M. Seiler. *Analysis and application of the formal theory of partial differential equations*. PhD thesis, Lancaster University, 1994.

[127] A. Sergent. *Approche numérique d'écoulements de convection naturelle turbulente en cavité par la simulation des grandes échelles*. Thèse, Université La Rochelle, 2000.

[128] A. Sergent, P. Joubert, and P. Le Quéré. Large eddy simulation of Rayleigh-Bénard convection using a local subgrid diffusivity model. In *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, volume 4, Antalya, Turquie, 2003.

[129] A. Sergent, P. Joubert, P. Le Quéré, and C. Tenaud. Extension du modèle d'échelles mixtes à la diffusivité de sous-maille. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b, Mécanique des fluides*, 328, 2000.

[130] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I : Coherent strucures, Part II : Symmetries and transformations, Part III : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Machanics*, 45(3) :561–590, 1987.

[131] P. Spalart and C. Speziale. A note on constraints in turbulence modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 391 :373–376, 1999.

[132] C. Speziale. Invariance of turbulent closure models. *Physics of Fluids*, 22 :1033–1037, 1979.

[133] C. Speziale. Galilean invariance of sub-grid scale stress models in the large eddy simulation of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 156 :55, 1985.

[134] C. Speziale. On non-linear $k - l$ and $k - \epsilon$ models of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 178 :459–475, 1987.

[135] J. Strain. A fast Laplace transform based on Laguerre functions. *Mathematics of Computation*, 58(197) :257–283, 1992.

[136] S.P. Suetin. Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series. *Russian Mthematical Surveys*, 57(1) :43–141, 2002.

[137] J. Thomann. Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles. In Centre de mathématiques, editor, *Journées X-UPS 1991*, 101–114, 1991.

[138] J. Thomann. Formal and numerical summation of formal power series solutions of ODE's. Technical report, CIRM Luminy, 2000.

[139] J. Thomann. Resommation des séries formelles. Solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières. *Numerische Mathematik*, 58 :503–535, 2000.

[140] A. Tri, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une méthode asymptotique numérique. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 5(4), 1996.

[141] T-P. Tsai. On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 143 :29–51, 1998.

[142] T-P. Tsai. On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates. Erratum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 147 :363, 1999.

[143] G. Ünal. Application of equivalence transformations to inertial subrange of turbulence. *Lie Group and Their Applications*, 1(1) :232–240, 1994.

[144] G. Ünal. Constitutive equation of turbulence and the Lie symmetries of Navier-Stokes equations. In N.H. Ibragimov, K. Razi Naqvi, and E. Straume, editors, *Modern Group Analysis VII*, 317–323, Trondheim, 1997. Mars Publishers.

[145] O.V. Vasilyev and T.S. Lund. A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. In *Annual Research Briefs*. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University, 1997.

[146] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *Computational fluid dynamics. The finite volume method.* Longman Group, 1995.

[147] K. Vu and J. Carminati. Symbolic computation and differential equations : Lie symmetries. *Journal of Symbolic Computation*, 29(2) :95–116, 2000.

[148] L. Wang. Frame-indifferent and positive-denite Reynolds stress-strain relation. *Journal of Fluid Mechanics*, 352 :341–358, 1997.

[149] L. Wang. Physics-preserving turbulent closure models : SGS flux vectors of mass and energy. In *3rd AFOSR International Conference on Direct Numerical Simulation and Large Eddy Simulation (TAICDL)*, Texas, USA, 2001.

[150] G.S. Winckelmans, A. Wray, O.V. Vasilyev, and H Jeanmart. Explicit filtering large-eddy simulation using the tensor-diffusivity model supplemented by a dynamic Smagorinsky term. *Physics of Fluids*, 13(5) :1385–1403, 2001.

[151] G.S. Winckelmans, A.A. Wray, and O.V. Vasilyev. Testing of a new mixed model for LES : the Leonard model supplemented by a dynamic Smagorinsky term. In *Summer Program*, 367–388. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Standford University, 1998.

[152] H. Zahrouni, W. Aggoune, J. Brunelot, and M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for strong nonlinearities. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(1-2) :97–118, 2004.

[153] C. Zhang. Asymptotique Gevrey - Sommation de Borel-Laplace. Cours de DEA, Université de La Rochelle, 2002.

[154] R. Zhdanov, I. Tsyfra, and R. Popovych. A precise definition of reduction of partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 238(1) :101–123, 1999.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE LA SIMULATION DES GRANDES ÉCHELLES

Les transformations qui conservent l'ensemble des solutions des équations de Navier-Stokes (NS) sont appelées les symétries de NS. Elles forment un groupe de Lie dénommé groupe de symétrie de NS. Ce groupe jouent un rôle important dans la description de la physique des équations (loi de conservation, loi de paroi, ...). Ainsi, les modèles de turbulence devraient être invariant sous l'action de ce groupe. Dans la première partie de la thèse, on effectue alors une analyse de quelques modèles de sous-maille courants sous l'angle des symétries, puis, on construit une classe de modèles de sous-maille qui, d'une part, respectent le groupe de symétrie de NS et, d'autre part, sont conformes au second principe de la thermodynamique. Un modèle très simple de la classe est alors testé et validé numériquement. L'analyse et la construction de modèles sont également étendues au cas de la convection thermique.
Dans la seconde partie de la thèse, on explore la possibilité d'intégrer la LES (simulation des grandes échelles) dans un algorithme de la famille MAN (méthode asymptotique numérique). La MAN est une technique numérique de perturbation, qui consiste à calculer la solution sous forme d'une série entière. Dans un premier temps, on construit et on teste un algorithme associant la MAN et la LES, avec l'aide d'une technique d'homotopie. Face aux limites de ce premier algorithme, on étudie dans un second temps l'utilisation d'un autre algorithme où on effectue un développement en série temporelle. Pour augmenter le domaine de validité de la série obtenue, ou bien pour calculer une solution analytique à partir de la série lorsque celle-ci diverge, on propose d'effectuer la méthode de resommation de Borel-Laplace. Dans les exemples numériques, on applique cette méthode à des modèles réduits issus des équations de Navier-Stokes.

Mots-clés : *Turbulence, Convection thermique, Simulation des grandes échelles, Groupe de symétrie, Méthode asymptotique numérique, Resommation de Borel-Laplace, Théorème de Nœther.*

CONTRIBUTION TO MATHEMATICAL AND NUMERICAL STUDY OF LARGE EDDY SIMULATION

Transformations which preserve the set of the solutions of Navier-Stokes equations (NS) are called symmetries of NS. They form a Lie group called the symmetry group of NS. This group plays an important role in the description of the physics of the equations (conservation law, wall law, ...) and turbulence models should remain invariant under the action of this group. In the first part of the thesis, an analysis of some standard models from the point of view of symmetries is carried out. Next, a class of subgrid models which, on the one hand, respect the symmetry group of NS and, on the other hand, conform to the second law of thermodynamics is built. A simple model of the class is then numerically tested and validated. The analysis and construction of models are extended to the case of thermal convection.
In the second part of the thesis, the possibility of integrating LES (large eddy simulation) in an algorithm belonging to the family of MAN (asymptotic numerical method) is explored. MAN is a perturbation technique which consists in computing a solution as a formal series. A first algorithm associating MAN and LES and using a technique of homotopy is built and tested. Because of the limits of this first algorithm, the use of an other algorithm based on a time series development is studied. To increase the range of validity of the series, or to extract an analytic solution from this series when it diverges, the Borel resummation method is proposed. This method is applied to reduced models obtained from Navier-Stokes equations.

Key words: *Turbulence, Thermal convection, Large eddy simulation, Symmetry group, Asymptotic numerical method, Borel resummation, Nœther theorem.*