HAL
open science

Largeur de seuil dans les lois du Zéro-Un

Raphaël Rossignol

To cite this version:

Raphaël Rossignol. Largeur de seuil dans les lois du Zéro-Un. Mathématiques [math]. Université René Descartes - Paris V, 2005. Français. NNT : . tel-00009780

HAL Id: tel-00009780

https://theses.hal.science/tel-00009780

Submitted on 19 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université René Descartes – Paris 5
Centre Universitaire des Saints-Pères
UFR de Mathématiques et Informatique

Thèse

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université René Descartes – Paris 5

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Probabilités

présentée par

Raphaël Rossignol

Largeur de seuil dans les lois du Zéro-Un

Soutenue publiquement le 27 juin 2005, devant le jury composé de :

Pascal MASSART	Président
Stéphane BOUCHERON	Rapporteur
Michel LEDOUX	Rapporteur
Hervé DAUDÉ	Examinateur
Bernard YCART	Directeur de thèse

Remerciements

Voici donc la page où l'on peut s'épancher un peu, laisser transparaître ce que le désir de pureté et de séparation s'efforce de cacher : ce dont la thèse est faite. Il faut bien avouer que la mienne fut longue à venir au monde. Merci donc à Bernard Ycart d'avoir su, parfois malgré mes états d'âme, me guider à travers cette aventure. J'ai finalement trouvé quelqu'un qui m'a appris à travailler !

Je tiens à remercier chaleureusement Stéphane Boucheron et Michel Ledoux d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Leurs remarques sont une source de réflexions déjà très utile. Merci également à Hervé Daudé pour sa présence dans ce jury et sa relecture attentive de ma thèse.

Je remercie tout particulièrement Pascal Massart pour sa présence. Parce que j'ai une grande estime pour ses travaux et parce qu'il m'a fait découvrir les statistiques en maîtrise, puis, à l'occasion de son cours de DEA, les inégalités de concentration. Il est ainsi à l'origine de mon attirance pour les probabilités.

D'où vient cette thèse ? Je serais tenté de répondre : de la curiosité de l'enfance. Je me rappelle encore de cet émerveillement devant le contenu d'un "Sciences et vie" ou d'une boîte de chimie amusante. Evidemment, il faut que cette curiosité soit entretenue, la curiosité et la contestation, ou en tout cas, le questionnement tenace. De cela je suis énormément redevable à mes parents, mon frère et mes sœurs.
Merci aussi à tous ceux qui m'ont fait découvrir et aimer les mathématiques elles-mêmes. Tout d'abord, mon frère Laurent qui m'a appris les rudiments quand j'étais enfant : compter, multiplier, diviser . . . l'essentiel, en somme. Puis mon professeur de maths sup, M. Thieulin à qui je dois vraiment la découverte des maths "sérieuses" . . . et belles. Merci à tous les professeurs passionnants de l'Université d'Orsay : Renée Elkik, Frédéric Paulin, Wendelin Werner, Yannick Heurteaux, Dominique Hulin, Etienne Fouvry et bien sûr, Stéphane Boucheron et Pascal Massart. Merci aux participants des rencontres ALEA de 2001 à 2003. Souvent, ils m'ont remis en face de la beauté des mathématiques, dans une ambiance des plus conviviales et stimulantes. Merci notamment à Vlady et Anne-Elisabeth.

Parallèlement à cela, je crois que mon intérêt pour les mathématiques se serait asséché si je ne m'étais pas nourri intellectuellement à d'autres sources. Une personne surtout était là pour stimuler ma curiosité à propos de sciences ou de politique, de cinéma ou de cuisine, de tapisserie ou de rapports humains et toujours en portant un regard acéré et lumineux. Une discussion avec Jean-Claude, c'est souvent un bain de jouvence.
Au bureau, heureusement, il y avait Christian, Elise, Béatrice, puis Javiera, Olivier et David.

C'est important de trouver sa place dans un lieu de travail, de s'y sentir bien. Grâce à eux, ce fut le cas.
Enfin, merci à tous mes autres amis les plus proches, pour l'affection essentielle qu'ils m'ont apportée, Charles, François, Magalie, Christophe, Xavier, Damien, Yann, Gale. Et à mon cœur, Sylvie.
Je dédie ce travail à Raphi, même si ça lui fait une belle jambe.

Largeur de seuil dans les lois du Zéro-Un

Résumé : Ce travail de thèse prolonge les développements récents, dûs à Talagrand, Friedgut et Kalai de l'étude des conditions générales assurant l'existence d'un phénomène de seuil. Dans une première partie, nous apportons une contribution à l'unification du cadre théorique des phénomènes de seuil, d'une part en reliant rigoureusement le cadre originel des "fonctions seuils" introduit par Erdös et Rényi, celui des travaux de Friedgut et Kalai et la concentration du temps d'atteinte de la propriété qui suit le phénomène de seuil ; d'autre part en initiant une recherche sur la stabilité des phénomènes de seuil par trois types d'opérations : l'union, l'intersection et le produit tensoriel. On obtient ainsi un moyen simple de construire des largeurs de seuil d'ordres variés. Dans une seconde partie, on optimise la majoration générale de la largeur de seuil d'une propriété croissante et symétrique, à l'aide de l'inégalité de Sobolev logarithmique sur l'hypercube discret.

Mots-clefs : phénomène de seuil, largeur de seuil, transition de phase, concentration de la mesure, loi du zéro-un, inégalité de Sobolev logarithmique, graphe aléatoire

Classification AMS (2000) : 60F20, 28A35, 60E15, 05C80, 82B26

Threshold width in Zero-One laws

Abstract: This thesis further develops some recent results due to Talagrand, Friedgut and Kalai on the study of general conditions under which threshold phenomena occur. In a first part, we contribute to the unification of the general framework of the threshold phenomena, firstly by connecting the original setting of the "threshold functions" due to Erdös and Rényi, the one of Friedgut and Kalai's work and the concentration of the hitting time of the property for which the threshold phenomenon holds ; secondly, by originating a research on the stability of threshold phenomena under three kind of operations : union, intersection and tensor product. We obtain thus a simple way to construct threshold widths of various orders. In a second part, we optimize the general upper bound on the threshold width of a monotone symmetric property by using the logarithmic Sobolev inequality on the discrete cube.

Key Words: threshold phenomenon, threshold width, phase transition, concentration of measure, zero-one law, logarithmic Sobolev inequality, random graph

AMS Classification (2000): 60F20, 28A35, 60E15, 05C80, 82B26

Table des matières

1 Introduction. **7**

2 Cadre général. **11**
2.1 Notations et définitions de base. 11
2.2 Exemples de cadres particuliers. 17

3 Combinaisons algébriques de seuils. **25**
3.1 Union et intersection d'un nombre fini de propriétés. 25
3.2 Produit tensoriel de deux propriétés. 30

4 L'approche classique et les liens temps-espace. **35**
4.1 Les définitions des fonctions seuils. 35
4.2 Les méthodes des deux premiers moments. 43
4.3 Approximation poissonienne. 56

5 Les approches spécifiquement temporelles. **63**
5.1 Les bases. 63
5.2 Analyse harmonique sur $\left(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\right)^n$: le travail de Kahn, Kalai et Linial. . . . 69
5.3 La généralisation de Talagrand et les remarques de Friedgut et Kalai. 72
5.4 A la recherche de la meilleure constante. 74
5.4.1 Une première valeur. 74
5.4.2 Hypercontractivité et inégalité de Sobolev logarithmique. 78
5.4.3 Une meilleure constante. 84
5.4.4 Optimalité ou sous-optimalité ? 90
5.5 Deux voies à explorer. 93
5.5.1 Le travail de Bourgain et Kalai. 93
5.5.2 Le travail de Friedgut et Bourgain : comment caractériser les seuils étroits à partir des éléments minimaux ? 97

6 La concentration du temps d'atteinte. **103**
6.1 Loi du 0-1 étroite et concentration du temps d'atteinte. 103
6.2 Seuils réguliers et convergence en loi du temps d'atteinte. 106

7 Conclusion et perspectives. **109**

Chapitre 1

Introduction.

A l'échelle microscopique, la matière a un comportement essentiellement aléatoire. Or le monde tel que nous le percevons est, à bien des égards, déterministe, prédictible. Le mouvement désordonné des molécules de gaz ne nous empêche pas de mesurer des températures ou des pressions. Malgré l'agitation moléculaire, nous sommes capables de prévoir la quantité de combustible nécessaire pour chauffer une pièce connaissant son volume, ou la puissance transmise par un piston à de l'air comprimé. Quel miracle fait que, en passant de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, ce qui était aléatoire devient déterministe ? Un(e) probabiliste a une réponse en tête : la "loi des grands nombres".

La loi des grands nombres dit qu'une moyenne de variables indépendantes est "essentiellement constante". On peut définir rigoureusement cette notion, en décidant qu'une suite de variables aléatoires (X_n) est essentiellement constante si elle est équivalente à la suite des espérances $(\mathbb{E}[X_n])$, à savoir si $Prob[\, X_n \leq c\mathbb{E}[X_n]\,]$ converge vers 0 pour $c < 1$, vers 1 pour $c \geq 1$. L'inégalité de Bienaymé-Chebyshev fournit une condition pour qu'il en soit ainsi : il suffit que l'écart-type de X_n soit petit devant son espérance.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{Var[X_n]}}{\mathbb{E}[X_n]} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Prob\left[\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\right| > \varepsilon\right] = 0\,,\ \forall\varepsilon > 0\ .$$

Pour une somme de n variables indépendantes, l'espérance est proportionnelle à n, l'écart-type à $\sqrt{n}$, et ce critère s'applique. Mais ceci n'est qu'un cas particulier d'une démarche très générale, qui est commune non seulement à tous les probabilistes, mais aussi à bon nombre de physiciens, chimistes, biologistes, informaticiens ... Devant un phénomène aléatoire particulier (variable ou processus), on commence par se placer à son *échelle de localisation* (son espérance). Il y a "loi des grands nombres" si à l'échelle de localisation (macroscopique) le phénomène est essentiellement déterministe. On se place ensuite autour de l'espérance, à l'*échelle des fluctuations*, donnée par l'écart-type. A cette échelle (microscopique), le phénomène est bien aléatoire, et on peut chercher à démontrer, dans le meilleur des cas, une convergence en loi. Par exemple, dans le cas des sommes de n variables indépendantes, la localisation est en $O(n)$, les fluctuations en $O(\sqrt{n})$ et la limite en loi est gaussienne : c'est le théorème central limite ([28], p. 258). Mais bien d'autres comportements sont possibles. Lorsqu'on étudie le supremum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi, on peut avoir essentiellement trois types de comportements à l'échelle des fluctuations, et toutes

sortes d'échelles de localisations ([25]). L'informatique, aussi, fournit un catalogue particulièrement riche et varié de ces comportements asymptotiques (voir le livre de Flajolet et Sedgewick [58]).
L'apparition du déterminisme dans le monde réel peut être modélisée, pour un probabiliste, par l'existence d'une loi des grands nombres pour chaque grandeur déterministe qu'il observe. Ce déterminisme n'est pas pour autant immuable, et une même matière peut avoir deux comportements déterministes fort différents. Prenons l'exemple de l'eau. A chaque température fixée, l'eau est relativement prévisible. Lorsque la température dépasse 100°C, le comportement de l'eau change radicalement, même s'il reste prévisible. L'eau est passée d'un état à un autre, et ce changement s'est fait à une température précise, déterministe : 100°C. En physique, on appelle cela une transition de phase, et le paramètre qui la régit est la température. Nous utiliserons le nom de loi du 0-1 pour définir cette évolution brutale entre deux états radicalement différents comme le sont 0 et 1, ou l'eau et la vapeur d'eau. Le sujet central de cette thèse est un modèle mathématique de transitions de phases (que nous appellerons donc lois du 0-1) que l'on peut décrire de la manière suivante : un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la loi commune dépend d'un paramètre de contrôle. On pourrait assimiler ce paramètre à la température, mais on préfèrera prendre comme image celle du temps. Les problèmes d'apparition d'une phase, lorsque le paramètre de contrôle (le "temps") évolue, seront qualifiés de temporels, tandis que les propriétés de dispersion des variables aléatoires, à un temps donné, seront qualifiées de spatiales. Prenons un exemple pour éclaircir nos buts, le modèle le plus simple de graphe aléatoire (voir [10] par exemple), sur lequel on reviendra plus longuement dans le chapitre 4.

Définition 1.0.1 *Soit p un élément de $[0,1]$ et n un entier naturel non nul. On appelle* graphe aléatoire*, et on note $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}(n,p)$, la variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des graphes non orientés d'ensemble de sommets $\{1,\ldots,n\}$, telle que l'arête $\{i,j\}$ existe avec probabilité p, ces événements étant indépendants.*

Considérons le problème de savoir si le graphe contient ou non des triangles, et combien. Il est clair que lorsque p augmente de 0 à 1, il y a de plus en plus de chances que le graphe contienne des triangles, et il en possèdera de plus en plus en moyenne.
La question "le graphe contient-il un triangle" est une question temporelle, au sens où, si l'on se fixe un seuil ε, on pourra y répondre de la manière suivante : "Tant que p est plus petit qu'un certain p_ε, la probabilité que le graphe contienne un triangle est moindre que ε, et dès que p est supérieur à un certain $p_{1-\varepsilon}$, cette probabilité est plus grande que $1-\varepsilon$". La largeur de l'intervalle $[p_\varepsilon, p_{1-\varepsilon}]$ quantifiera la qualité du "déterminisme des triangles", c'est l'échelle des fluctuations de la propriété "contenir un triangle", tandis que $p_{\frac{1}{2}}$ sera considéré comme l'échelle de localisation de cette propriété. Il y aura loi du 0-1 étroite si cette échelle de localisation est petite devant l'échelle des fluctuations.

Remarquez que le fait de contenir un triangle dans un graphe ayant un très grand nombre de sommets s'apparente intuitivement à une propriété microscopique, et ne devrait donc pas être qualifié de déterministe ... Nous verrons dans l'exemple 15 que le fait de contenir un triangle ne suit pas une loi du 0-1 étroite.
D'un autre côté, la question "Combien le graphe contient-il de triangles" est une question

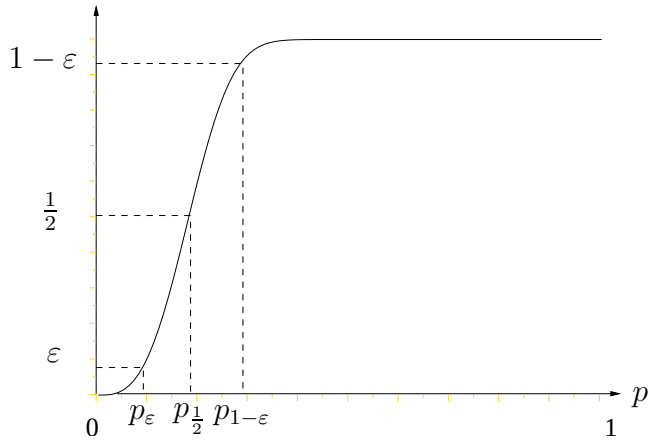

FIG. 1.1 – Probabilité que le graphe aléatoire à 10 sommets contienne un triangle, en fonction de p.

plutôt spatiale. On pourra y répondre, pour tout p fixé, en donnant un résultat de concentration pour la variable aléatoire qui compte le nombre de triangles contenus dans $\mathcal{G}(n,p)$: "La probabilité que le nombre de triangles contenus dans $\mathcal{G}(n,p)$ soit plus grand que $m(p,\varepsilon)$ et plus petit que $M(p,\varepsilon)$ est supérieure à $1-\varepsilon$". L'échelle de localisation du nombre de triangles contenus dans le graphe est la moyenne de ce nombre, tandis que l'échelle des fluctuations est la longueur de l'intervalle $[m(p,\varepsilon), M(p,\varepsilon)]$.
En fait, les deux types de questions ne sont pas sans rapport. L'approche classique consiste même à déduire de résultats de concentration, ou même de limite en loi, les résultats temporels (cf. l'article fondateur de Erdös et Rényi [26]). Un très grand nombre de résultats a ainsi été obtenu, et on peut avoir maintenant une assez bonne idée du comportement du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$ lorsque p évolue de 0 à 1 (voir, outre l'article précédemment cité, les livres de Bollobás [10], Spencer [61], Janson, Łuczak et Rucinski [40]).
En 1996 paraît un article de Friedgut et Kalai qui détone dans le paysage des graphes aléatoires. Cet article, intitulé "Every monotone graph property has a sharp threshold" ([32]), et basé sur des techniques d'analyse harmonique dans $\left(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\right)^n$ donne une majoration très générale de l'échelle des fluctuations des propriétés. De plus, son cadre n'est pas limité à celui du graphe aléatoire, mais est étendu à de nombreux cadres où s'exprime une certaine symétrie. L'inégalité obtenue est, de surcroît, non asymptotique. Il faut considérer que cet article est à la base du travail de recherche présenté ici. C'est notamment l'étonnement suscité par l'utilisation de l'analyse harmonique et par le caractère général du résultat obtenu qui nous a amené à améliorer ces preuves et à chercher les liens qui unissaient ce résultat aux techniques plus classiques des probabilités, en l'occurence au corpus sans cesse grandissant de travaux réalisés sur le thème de la concentration de la mesure.
Dans cette thèse, on s'intéressera aux questions temporelles concernant les propriétés dites "croissantes", mais dans un cadre plus large que celui du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$. Le chapitre 2 sera réservé à des préliminaires. Nous y donnerons la définition de la croissance, la définition précise d'une loi du 0-1 et de ses caractères (étroite, grossière ...). Nous introduirons notamment deux définitions nouvelles qui concerneront ce que nous avons

décidé d'appeler l'homogénéité d'une loi du 0-1. Cette homogénéité est la condition essentielle pour avoir une certaine stabilité de la loi du 0-1 par tensorisation, ainsi que nous le verrons dans le chapitre 3. Le modèle choisi étant très large, nous donnerons un ensemble varié de cadres qu'il englobe. Ces exemples ont en commun une symétrie qui sera détaillée dans la section 2.2, et qui sera une hypothèse essentielle dans les résultats du chapitre 5.
Dans le chapitre 3, nous aborderons la question de la stabilité de la notion de loi du 0-1 par trois types d'opérations : l'union, l'intersection et le produit tensoriel. Notre apport pour l'union et l'intersection consiste uniquement à écrire proprement ce qui était déjà connu. Le résultat concernant le produit tensoriel de deux propriétés, c'est à dire la conservation de la loi du 0-1 correspondante est nouveau.
Les problèmes spatiaux ne nous intéresseront que dans la mesure où ils peuvent nous donner des renseignements sur des problèmes temporels. Dans le chapitre 4, nous discuterons de ces liens, notamment par le biais des méthodes du premier et deuxième moments et des approximations poissonniennes, qui forment la culture nécessaire à la compréhension du type de transition de phase qui nous occupe.
Les approches spécifiquement temporelles seront l'objet d'étude du chapitre 5, qui forme le cœur de cette thèse. Après avoir exposé le résultat fondateur de Kahn, Kalai et Linial (section 5.2), on explicitera l'approche de Friedgut et Kalai par l'analyse harmonique (section 5.3). C'est dans la section 5.4 que se trouve l'essentiel des nouveautés que nous apportons, dans le but d'optimiser le résultat de Friedgut et Kalai. Nous commencerons par obtenir une valeur explicite, en suivant leurs idées, de la constante intervenant dans leur inégalité. Puis nous insisterons sur les liens qui unissent leur approche avec le concept d'inégalité de Sobolev logarithmique, outil très utilisé actuellement dans une certaine présentation de la concentration de la mesure (cf. notamment [50, 47, 48]). Ceci nous permettra de trouver une ligne de preuve nouvelle et prometteuse, exposée dans la section 5.4.3, conduisant à une inégalité presque optimale (section 5.4.4). On finira cette partie par une discussion des limites du nouveau résultat ainsi obtenu (section 5.5).
Enfin dans la partie 6, on montrera pourquoi tous les problèmes considérés dans les chapitres précédents peuvent être vus sous l'angle de la concentration d'un certain temps d'atteinte d'un ensemble par un processus croissant sur $\{0,1\}^n$. Cette section a un rôle d'ouverture, on ne fait qu'y offrir un changement de perspective qui nous semble pouvoir jouer un rôle fécond.

Chapitre 2

Cadre général.

Notre étude ne se limite pas au cadre du graphe aléatoire exposé dans l'introduction. Plutôt, nous allons nous placer dans un cadre très large, recouvrant notamment celui du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$, mais aussi bien d'autres modèles. Ce cadre est celui de l'espace $\{0,1\}^n$ muni d'une probabilité à un paramètre telle que toutes les coordonnées soient indépendantes et uniformément distribuées. Après avoir énoncé les définitions nécessaires à notre étude des lois du 0-1 pour les propriétés croissantes de cet espace (section 2.1), nous énumérerons un certain nombre de cadres et de propriétés qui peuvent être vus sous cet angle (section 2.2).

2.1 Notations et définitions de base.

Soit E un ensemble fini. On appelle configuration sur E une application de E dans l'ensemble à deux états $\{0,1\}$. L'ensemble des configurations est donc $\{0,1\}^E$. On peut définir sur cet ensemble une probabilité $\mu_{E,p}$ telle que chaque élément de E soit dans l'état 1 indépendamment des autres, avec probabilité p. On a alors, en notant b_p la mesure de Bernoulli sur $\{0,1\}$:

$$\forall \eta \in \{0,1\}^E,\ \mu_{E,p}(\eta) = \prod_{e\in E} b_p\left(\eta(e)\right)\ .$$

Ou, ce qui revient au même :

$$\forall \eta \in \{0,1\}^E,\ \mu_{E,p}(\eta) = p^{\sum_{e\in E}\eta(e)}(1-p)^{\sum_{e\in E}(1-\eta(e))}\ .$$

Les résultats étudiés dans cette thèse prennent la plupart du temps leur sens lorsque le cardinal de E est grand. On considérera souvent une bijection privilégiée (mais rarement explicite) de E dans $\{1,\dots,n\}$, où n est le cardinal de E, et on utilisera alors $(\{0,1\}^n,\ \mu_{n,p})$ au lieu de $\left(\{0,1\}^E,\ \mu_{E,p}\right)$, avec la définition suivante, pour tout $p\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\forall x \in \{0,1\}^n,\ \mu_{n,p}(x) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^n(1-x_i)}\ . \tag{2.1.1}$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on utilisera la notation μ_p au lieu de $\mu_{n,p}$.
L'espace $\{0,1\}^n$ est muni de l'ordre coordonnée par coordonnée $\preceq$:

$$\forall x,y \in \{0,1\}^n,\ x \preceq y \Longleftrightarrow (\forall i,\ x_i \le y_i)\ . \tag{2.1.2}$$

Dans cette thèse, nous nous intéresserons aux transitions de phases des propriétés croissantes pour l'ordre $\preceq$:

Définition 2.1.1 *Soit $A \subset \{0,1\}^n$ une propriété. On dit que A est* croissante *si sa fonction indicatrice est une fonction croissante pour $\preceq$:*

$$\forall x, y \in \{0,1\}^n,\ (x \in A \text{ et } x \preceq y) \Longrightarrow (y \in A)\ .$$

En d'autres termes, si une propriété croissante est vraie pour une configuration, elle reste vraie quand on remplace des 0 par des 1.

`Remarque`*:*

Une propriété croissante A est entièrement déterminée par ses éléments minimaux. En effet, notons $\mathcal{M}$ la collection des éléments minimaux de A pour l'ordre $\preceq$:

$$\mathcal{M} = \{m \in A \text{ tq. } \forall x \in A,\ x \preceq m \Rightarrow x = m\}\ .$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ est une famille d'éléments de $\{0,1\}^n$ deux à deux non comparables, et A peut s'écrire :

$$A = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq. } \exists m \in \mathcal{M}, m \preceq x\}\ .$$

Il est clair qu'une propriété décroissante va de même être déterminée par ses éléments maximaux. Donc, pour une propriété croissante A, si on note $\mathcal{M}'$ l'ensemble des éléments maximaux de A^c, on a :

$$A^c = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq. } \exists m' \in \mathcal{M}', m' \succeq x\}\ .$$

Lorsque la propriété A est croissante, la fonction $p \mapsto \mu_{n,p}(A)$ est croissante, comme le montre le lemme 2.1.3, et même strictement croissante lorsque la propriété considérée n'est pas triviale au sens suivant :

Définition 2.1.2 *Soit $A \subset \{0,1\}^n$, on dira que A est* trivial *si $A = \emptyset$ ou $A = \{0,1\}^n$.*

Lemme 2.1.3 *Soit A une propriété croissante, alors $p \mapsto \mu_{n,p}(A)$ est une fonction croissante. De plus, si A n'est pas trivial, $p \mapsto \mu_{n,p}(A)$ est strictement croissante.*

Démonstration :

Pour montrer la propriété de croissance annoncée, on définit sur $\{0,1\}^n$ un processus croissant qui a pour loi $\mu_{n,p}$ au temps p. Soit $U = (U_i)_{i=1,\dots,n}$ un échantillon de la loi uniforme sur $[0,1]$. Les coordonnées U_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La loi du vecteur U est la loi uniforme sur $[0,1]^n$. Pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout $p \in [0,1]$, on définit

$$\mathcal{X}(n,p) = (X_i(p))_{i=1,\dots,n}\ ,$$

où $X_i(p) = \mathbb{1}_{[0,p]}(U_i)$ (1 si $U_i \leq p$, 0 sinon). Il est facile de voir que la loi de $\mathcal{X}(n,p)$ est la loi $\mu_{n,p}$, et on a :

$$\forall\ 0 \leq p \leq p' \leq 1,\ \mathcal{X}(n,p) \preceq \mathcal{X}(n,p')\ .$$

Donc si A est une propriété croissante, vraie pour $\mathcal{X}(n,p)$ avec un certain p, alors elle est aussi vraie pour $\mathcal{X}(n,p')$, pour tout $p' \geq p$. D'où le résultat. Pour la croissance stricte, on se reportera à la démonstration du lemme 5.1.3.

□

Par conséquent, pour un ensemble croissant, et non trivial, $p \mapsto \mu_{n,p}(A)$ est une bijection croissante de $[0,1]$ dans lui-même. Pour tout ε fixé, il y a exactement une seule "montée" de ε à $1-\varepsilon$ (cf. figure 2.1). L'intervalle sur lequel s'effectue cette montée sera appelé la fenêtre de transition, et sa largeur, la largeur de seuil. L'instant où la probabilité de A vaut $\frac{1}{2}$ sera appelé probabilité critique.

Définition 2.1.4 Largeur de Seuil.
Soit $A \subset \{0,1\}^n$ un ensemble croissant non trivial, et $\alpha < \beta$ deux réels de $]0,1[$. On appelle fenêtre de transition pour A de α à β, *et on note $\mathcal{F}(A,\alpha,\beta)$ l'intervalle $[p_\alpha, p_\beta]$ où p_ε est défini pour tout ε de $[0,1]$ par :*

$$\mu_{p_\varepsilon}(A) = \varepsilon\ .$$

Pour tout ε de $]0,\frac{1}{2}]$, on appelle largeur de seuil de niveau ε pour A, *et on note $\tau(A,\varepsilon)$, la longueur de $\mathcal{F}(A,\varepsilon,1-\varepsilon)$:*

$$\tau(A,\varepsilon) = p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon\ ,$$

enfin, on appelle probabilité critique *pour A le nombre $p_{\frac{1}{2}}$.*

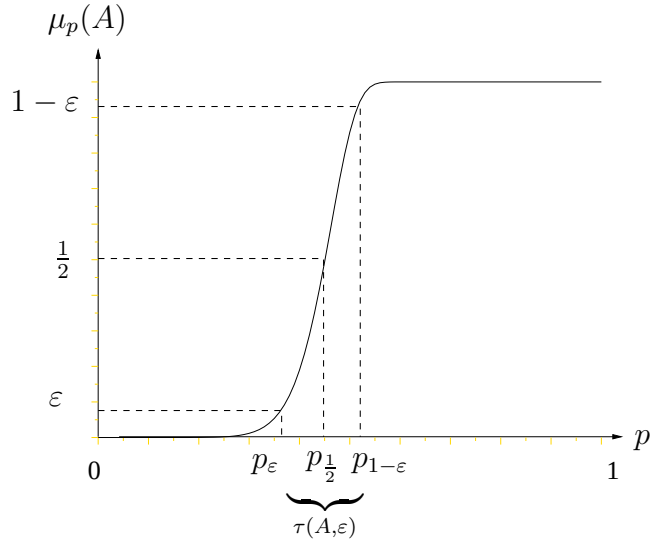

FIG. 2.1 – Exemple de seuil.

Jusqu'ici, on a considéré dans chaque définition un unique sous-ensemble A de $\{0,1\}^n$. En général, on s'intéresse plutôt à des propriétés définies comme des sous-ensembles de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^{\alpha(n)}$, où $\alpha(n)$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante. Par exemple, posons $\alpha(n) = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$. Quitte à numéroter toutes les arêtes possibles de 1 à $\alpha(n)$, l'ensemble des arêtes $\mathcal{A}$ d'un graphe à n sommets peut être identifié à une configuration de $\{0,1\}^{\alpha(n)}$ et l'espace probabilisé $\mathcal{G}(n,p)$ peut être assimilé à $\left(\{0,1\}^{\alpha(n)}, \mu_{\alpha(n),p}\right)$. Par exemple, la propriété de connexité pour le graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$ peut s'écrire $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $A_n \subset \{0,1\}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ désigne l'ensemble des graphes connexes ayant $\{1,\dots,n\}$ pour sommets. Par commodité, on commettra l'abus de notation consistant à écrire $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ au lieu de $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^{\alpha(n)}$, $\mu_{\alpha(n),p}(A)$ au lieu de $\mu_{\alpha(n),p}(A_n)$ et $\tau(A,\varepsilon)$ au lieu de $\tau(A_n,\varepsilon)$. On dira également que la propriété $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ est croissante si tous les A_n sont croissants.
Nous arrivons maintenant à la définition de ce qui sera l'objet principal de cette thèse : les lois du 0-1.

Définition 2.1.5 Loi du 0-1.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ une propriété croissante. On dit que A suit une loi du 0-1 *si :*

$$\forall \varepsilon \in]0,\frac{1}{2}],\ \tau(A,\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Soit $p_{\frac{1}{2}}$ la probabilité critique de A. On dit que A suit une loi du 0-1 étroite *si :*

$$\forall \varepsilon \in]0,\frac{1}{2}],\ \frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Enfin, on dit que A a un seuil grossier *si elle ne suit pas de loi du 0-1 étroite, c'est à dire, s'il existe ε dans $]0,\frac{1}{2}[$ tel que :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{1/2}} > 0\ .$$

Remarquez que si la localisation de la propriété A tend vers 1, c'est à dire, si $p_{\frac{1}{2}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, il faut remplacer dans les définitions ci-dessus $\frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}}$ par $\frac{\tau(A,\varepsilon)}{1-p_{\frac{1}{2}}}$. On peut obtenir une définition qui recouvre les deux cas en utilisant $\frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}(1-p_{\frac{1}{2}})}$. Nous avons préféré ne pas changer les habitudes, d'autant que la totalité des exemples évoqués dans cette thèse n'ont pas une localisation qui tend vers 1.
Nous ferons parfois usage du petit lemme suivant, qui exprime un condition équivalente pour que A suive une loi du 0-1 étroite.

Lemme 2.1.6 *La propriété croissante $A \subset \{0,1\}^{\alpha_n}$ suit une loi du* 0-1 *étroite si et seulement si, pour tout ε de $\left]0;\frac{1}{2}\right]$, on a :*

$$\frac{p_{1-\varepsilon}}{p_\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\ .$$

Démonstration :

La propriété A étant croissante, on a :

$$\forall \varepsilon \in \left]0; \frac{1}{2}\right] , \ p_{1-\varepsilon} \geq p_{\frac{1}{2}} \geq p_\varepsilon \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ , \\
&\Rightarrow \quad \frac{p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ , \\
&\Rightarrow \quad \frac{p_{1-\varepsilon}}{p_\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ , \\
&\Rightarrow \quad \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ , \\
&\Rightarrow \quad \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .
\end{aligned}$$

L'équivalence est démontrée.

□

Lorsqu'on est en présence d'une loi du 0-1, il est très fréquent que l'intervalle de seuil soit homogène, au sens où tous les sous-intervalles de la fenêtre de transition se réduisent à la même vitesse. L'intérêt de cette homogénéité est que l'on peut alors parler de l'ordre de grandeur de la fenêtre de transition, celui-ci ne dépendant plus du niveau ε de cette fenêtre. De même, cette homogénéité de la largeur du seuil s'accompagne fréquemment de l'homogénéité de la localisation du seuil, qui correspond au fait que tous les instants qui constituent la fenêtre de transition sont également du même ordre de grandeur. Nous donnons dans le second énoncé qui suit une définition rigoureuse de ces deux idées. Pour parler des ordres de grandeurs nous utiliserons les notations suivantes :

Définition 2.1.7 Notations des ordres de grandeur.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
On note $a_n = o(b_n)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ |a_n| \leq \varepsilon |b_n| \ .$$

On note $a_n \sim b_n$ si :

$$a_n - b_n = o(b_n) \ .$$

On note $a_n = O(b_n)$ si :

$$\exists C > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ a_n < C b_n \ .$$

On note $a_n = \Theta(b_n)$ si :

$$a_n = O(b_n) \text{ et } b_n = O(a_n) \ ,$$

ou de manière équivalente, si :

$$\exists C_2 > C_1 > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N, \ C_1 b_n < a_n < C_2 b_n \ .$$

Définition 2.1.8 Homogénéité.
Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha_n}$ une propriété croissante et non triviale, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant 0 pour limite.
On dit que A possède une localisation de seuil homogène d'ordre a_n *si et seulement si tous les p_ε sont du même ordre :*

$$\forall \varepsilon \in]0;1[,\ p_{A,\varepsilon} = \Theta\left(a_n\right) \text{ et } 1 - p_{A,\varepsilon} = \Theta\left(1 - a_n\right)\ .$$

On dit que A suit une loi du 0-1 de largeur d'ordre b_n *si pour tous α et β de $]0,1[$ tels que $\alpha < \beta$ on a :*

$$p_{A,\beta} - p_{A,\alpha} = O(b_n)\ .$$

On dit que A suit une loi du 0-1 de largeur homogène d'ordre b_n *si pour tous α et β de $]0,1[$ tels que $\alpha < \beta$ on a :*

$$p_{A,\beta} - p_{A,\alpha} = \Theta(b_n)\ .$$

Nous aurons besoin dans la section 3.2 d'une notion un peu plus forte de loi du 0-1, qui conserve l'homogénéité lorsqu'on autorise les niveaux de seuil à dépendre de n.

Définition 2.1.9 Homogénéité forte.
Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha_n}$ une propriété croissante et non triviale, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positif admettant 0 *pour limite.*
On dit que A suit une loi du 0-1 de largeur fortement homogène d'ordre b_n *si elle suit une loi du 0-1 de largeur homogène d'ordre b_n et si, pour toutes suites $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$\exists \varepsilon \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon < \beta_n < \gamma_n < 1 - \varepsilon\ ,$$

on a :

$$p_{A,\gamma_n} - p_{A,\beta_n} = O((\gamma_n - \beta_n)b_n)\ .$$

Nous verrons dans le chapitre 4.1 que les notions de loi du 0-1 de localisation homogène et de loi du 0-1 étroite de seuil et largeur homogènes correspondent respectivement à l'existence d'une fonction seuil et d'une paire de fonctions de seuil étroit, au sens usuel, défini par Erdös et Rényi dans le cadre du graphe aléatoire (cf. [26]).
On termine cette section avec un résultat qui nous sera utile à plusieurs occasions. Ce résultat, intitulé l'inégalité FKG (cf. [30] ou [3], p.75), du nom de ses inventeurs, dit en substance que deux fonctions croissantes sur $(\{0,1\}^n, \preceq)$ sont toujours positivement corrélées, pourvu que la mesure sur $\{0,1\}^n$ vérifie la condition FKG que nous allons définir. Remarquez que toute partie non vide de $\{0,1\}^n$ est majorée et minorée, et admet un plus petit majorant et un plus grand minorant, qu'on appelle respectivement borne supérieure et borne inférieure. Si x et y sont deux éléments de $\{0,1\}^n$, on note $x \cup y$ la borne supérieure de $\{x,y\}$ et $x \cap y$ la borne inférieure du même ensemble. Ces notations coïncident avec les notations usuelles d'union et d'intersection lorsqu'on identifie tout élément x de $\{0,1\}^n$ avec le sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$, $\{i \text{ tq } x_i = 1\}$.

Définition 2.1.10 Condition FKG. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\{0,1\}^n$. On dit que μ satisfait la* condition FKG *si :*

$$\forall x, y \in \{0,1\}^n,\ \mu(x \cup y)\mu(x \cap y) \geq \mu(x)\mu(y)\ . \tag{2.1.3}$$

Proposition 2.1.11 Inégalité FKG. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\{0,1\}^n$ vérifiant la condition FKG. Soient f et g deux fonctions croissantes de $(\{0,1\}^n, \preceq)$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :*

$$\mathbb{E}_\mu(fg) \geq \mathbb{E}_\mu(f)\mathbb{E}_\mu(g) \ .$$

Pour la démonstration, voir [30] et [38].

`Remarque`*:*

La mesure $\mu_{n,p}$ vérifie l'inégalité FKG :

$$\begin{aligned} \mu_{n,p}(x \cup y)\mu_{n,p}(x \cap y) &= p^{|x\cup y|+|x\cap y|}(1-p)^{2n-|x\cup y|-|x\cap y|} \ , \\ &= p^{|x|+|y|}(1-p)^{2n-|x|-|y|} \ , \\ &= \mu_{n,p}(x)\mu_{n,p}(y) \ . \end{aligned}$$

2.2 Exemples de cadres particuliers.

Même si les ensembles A_n sont croissants, non triviaux, rien ne permet d'assurer qu'il y ait réellement une loi du 0-1 au sens de la définition 2.1.5. En effet, soit A_n l'ensemble des éléments x de $\{0,1\}^n$ tels que $x_1 = 1$:

$$A_n = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq } x_1 = 1\} \ .$$

Cet ensemble est croissant, non trivial, et vérifie $\mu_{n,p}(A_n) = p$. On peut difficilement avoir une progression plus régulière de 0 à 1 ! S'il n'y a pas de saut du tout, c'est certainement parce que l'ensemble A_n dépend exclusivement d'une coordonnée. Un problème qui nous occupe est donc de chercher des conditions les plus naturelles possibles sur A_n, ensemble croissant non trivial, pour pouvoir assurer un contrôle de sa largeur de seuil qui implique une loi du 0-1. Dans cette section, nous allons présenter un certain nombre d'exemples qui seront autant de repères dans la quête de majorations générales des largeurs de seuil. Ils partagent la propriété de respecter une certaine symétrie, au sens défini comme suit :

Définition 2.2.1 *Soit $A \subset \{0,1\}^n$ une propriété. On dit que A est* symétrique *si A est invariante par l'action d'un groupe G de permutations des coordonnées agissant transitivement sur $\{1,\ldots,n\}$:*

$$\forall i,j = 1,\ldots,n \ , \quad \exists \sigma \in G \ , \ \sigma(i) = j \ ,$$

et :

$$\forall \sigma \in G \ , \quad (x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in A \Longrightarrow (x_{\sigma(i)})_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in A \ .$$

Au premier abord, cette définition peut paraître surprenante. En fait, une telle condition est assez naturelle. Donnons quelques exemples.

Exemple 1 *Symétrie totale*
Quelles sont les propriétés $A \subset \{0,1\}^n$, monotones, et invariantes sous l'action du groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ tout entier (on dira d'une telle propriété qu'elle est totalement symétrique) ? Un instant de réflexion permet de se convaincre que ce sont les propriétés qui s'expriment sous la forme

$$A_{k,n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \right\} ,$$

pour un certain entier $k \in \{0, \ldots, n+1\}$. Une majoration de la largeur du seuil se déduit dans ce cas très simplement de la concentration de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Pour préciser le comportement de S_n à l'échelle des fluctuations (l'echelle de localisation, est bien sûr $\frac{k}{n}$), nous utiliserons le résultat suivant qui se déduit des inégalités de Chernov ou de Hoeffding (voir, par exemple, [59]).

Théorème 2.2.2 *Pour tous n, p et pour tout $c > 0$ on a :*

$$\mu_{n,p}(S_n - np > c\sqrt{n}) \leq \exp(-2c^2) , \tag{2.2.4}$$

$$\mu_{n,p}(S_n - np < -c\sqrt{n}) \leq \exp(-2c^2) , \tag{2.2.5}$$

et donc :

$$\mu_{n,p}(|S_n - np| > c\sqrt{n}) \leq 2\exp(-2c^2) . \tag{2.2.6}$$

Le théorème 2.2.2 va nous permettre d'obtenir un contrôle indépendant de k, pour les largeurs de seuil de toutes les propriétés $A_{k,n}$. Dans la proposition 2.2.3, n et k sont quelconques.

Proposition 2.2.3 *Pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2[$, on a :*

$$\tau(A_{k,n}, \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{2\log(1/\varepsilon)}}{\sqrt{n}} .$$

Démonstration :

Fixons ε entre 0 et $1/2$, et posons $c = \sqrt{\frac{\log(1/\varepsilon)}{2}}$, de sorte que $\exp(-2c^2) = \varepsilon$. Si p_ε est tel que $\mu_{n,p_\varepsilon}(A_k) = \varepsilon$, alors k ne peut pas être trop loin de np_ε. L'inégalité (2.2.4) permet d'affirmer que k est inférieur à $np_\varepsilon + \sqrt{n\log(1/\varepsilon)/2}$. Posons alors $q = p_\varepsilon + 2\sqrt{\log(1/\varepsilon)/(2n)}$. Par l'inégalité (2.2.5) appliquée à nq, on obtient $\mu_{n,q}(A_k) \geq 1 - \varepsilon$, et donc $q \geq p_{1-\varepsilon}$, d'où le résultat.

□

Exemple 2 *Graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$*
Revenons sur l'exemple développé dans l'introduction. Posons $\alpha(n) = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$. Nous avons déjà noté que l'ensemble des arêtes $\mathcal{A}$ d'un graphe à n sommets peut être identifié à une configuration de $\{0,1\}^{\alpha(n)}$, et que le modèle de la définition 1.0.1 revient à mettre

la probabilité $\mu_{\alpha(n),p}$ sur $\{0,1\}^{\alpha(n)}$. Notons que ce modèle est différent de celui initialement proposé par Erdös et Rényi [26], qui considéraient l'équiprobabilité sur l'ensemble des graphes ayant un nombre fixe d'arêtes. En fait, dans de nombreux cas, les deux modèles ont les mêmes propriétés asymptotiques (cf. par exemple, [10] théorème 3 p.36).
Il est alors naturel de dire qu'un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\alpha(n)}$ est une propriété de graphe s'il est invariant par tout automorphisme de graphe. Ceci revient à dire que $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ est une propriété de graphe lorsque A est invariante sous l'action de $\mathcal{S}_n$ (permutations de sommets) sur les arêtes :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall i \neq j,\ \sigma.(i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))\ .$$

Les graphes considérés ne comportant pas de boucle, l'action de $\mathcal{S}_n$ sur $\{1,\ldots,\alpha(n)\}$ est transitive. On verra dans le chapitre 4 quelques calculs de localisation et de largeur de seuil pour diverses propriétés de ce graphe aléatoire. Remarquons également qu'on peut adapter ce modèle aux sous-graphes d'un graphe dont le groupe d'automorphisme est transitif sur les arêtes. Nous allons présenter plus précisément deux propriétés du graphe cyclique à n sommets dans les exemples 3 et 4.

Exemple 3 *Stabilité*
Considérons d'abord la propriété S definie comme suit.

Définition 2.2.4 *On munit $\{1,\ldots,n\}$ de la structure de graphe cyclique non orienté dont l'ensemble d'arêtes est :*

$$C_n = \Big\{ \{1,n\}\,,\ \{i,i+1\}\,,\ i = 1,\ldots,n-1 \Big\}\ .$$

Une configuration, identifiée à un sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$ est dite stable *si elle est un sous-ensemble stable pour le graphe cyclique :*

$$x = (x_i) \in S \Longleftrightarrow (\forall \{i,j\} \in C_n\,,\ x_i = 1 \Longrightarrow x_j = 0)\ . \tag{2.2.7}$$

Le graphe cyclique aléatoire, de loi $\mu_{n,p}$ sera noté $\mathcal{C}(n,p)$.

En d'autres termes, une configuration est stable si elle ne comporte pas deux 1 voisins. Nous notons S la propriété de stabilité. La négation de S, S^c est croissante, et invariante par le groupe des permutations cycliques, qui est bien transitif sur $\{1,\ldots,n\}$. La propriété de stabilité est donc symétrique au sens de la définition 2.2.1. On peut calculer la fonction génératrice des ensembles stables pour de nombreux types de graphes (voir [29]). Dans le cas du graphe cyclique à n sommets, elle est particulièrement simple. Notons $s_{k,n}$ le nombre de stables à k sommets dans le graphe cyclique à n sommets. On a :

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,n} z^k = \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^n\ .$$

Il est facile d'en déduire l'expression explicite de $\mu_{n,p}(S)$.

$$\mu_{n,p}(S) = (1-p)^n g_n\left(\frac{p}{1-p}\right)\ .$$

Pour toute valeur strictement positive de p, $\mu_{n,p}(S)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour $p = p(n)$ tendant vers 0, on vérifie facilement que $\mu_{n,p}(S)$ est équivalent à $\exp(-np^2)$. L'échelle de localisation de S (ou de S^c) est $1/\sqrt{n}$. L'échelle des fluctuations est aussi $1/\sqrt{n}$.

Exemple 4 *Runs de longueur* $u \log n$
Considérons à nouveau le graphe cyclique à n sommets. Notons M_n la variable aléatoire égale au nombre maximal de 1 consécutifs dans la configuration aléatoire X_n. Soit R_n la propriété d'avoir au moins un "run" de 1 consécutifs de longueur $u \log n$, avec $u > 0$ fixé. La propriété R_n s'identifie également à un sous-ensemble croissant de $\{0,1\}^n$, invariant sous l'action du groupe cyclique. La distribution des "runs" dans une configuration aléatoire cyclique a souvent été étudiée (voir par exemple [33]). On démontre que la variable aléatoire M_n est localisée en $O(\log(n))$, avec des fluctuations d'ordre $O(1)$, sans qu'il y ait convergence en loi à l'échelle des fluctuations. Le résultat suivant, dû à Erdös et Révész [27], est démontré dans [46] (voir aussi [34, 45] et [37] pour une généralisation).

Théorème 2.2.5 *Posons :*

$$a(n) = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(1/p)} \right\rfloor \quad \textit{et} \quad b(n) = \frac{\log(n)}{\log(1/p)} - \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(1/p)} \right\rfloor \ ,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ *désigne la partie entière. Notons* R_k *la propriété :*

$$R_k = \text{“}M_n - a(n) \leq k\text{”} \, .$$

Quand n *tend vers l'infini :*

$$\mu_{n,p}(R_k) = \exp(-p^{k-b(n)}) + o(1) \ .$$

De manière générale, toute propriété de graphe cyclique est symétrique au sens de la définition 2.2.1. Par "propriété de graphe cyclique", on entend une propriété telle que dès que deux configurations sont isomorphes, soit elles vérifient toutes les deux la propriété, soit aucune des deux ne la vérifie.
Nous reviendrons sur le graphe cyclique dans le chapitre 4.

Exemple 5 *Images aléatoires*
Nous utiliserons ici les images aléatoires comme un autre moyen de visualiser la concentration de la mesure dans un espace produit. Nous ne considérons que des images carrées $n \times n$, binaires, pour lesquelles les pixels sont noirs avec probabilité p ou blancs avec probabilité $1-p$, indépendamment les uns des autres.

Définition 2.2.6 *On appelle* image aléatoire*, et on note* $\mathcal{I}$*, ou* $\mathcal{I}(n,p)$*, la matrice aléatoire de taille* $n \times n$*, dont les coefficients, indépendants, valent* 1 *avec probabilité* p *et* 0 *avec probabilité* $1-p$*.*

C'est une nouvelle variante du modèle de Bernoulli : l'espace est identifiable à $\{0,1\}^{n^2}$ et la loi d'une image aléatoire est $\mu_{n^2,p}$.

L'idée des images aléatoires est de fournir une base quantitative à l'intuition qui consiste à dire que l'œil voit dans une image ce qui est inhabituel, qui tranche sur un bruit de fond,

bref, qui est improbable. Les algorithmes de détection cherchent donc les groupes de pixels qui seraient de probabilité faible dans une image aléatoire (voir [23]).

On peut convenir qu'une propriété d'image doit être invariante par l'action sur les pixels du groupe engendré par les deux translations élémentaires :

$$\tau_v : (i,j) \mapsto (i+1,j) \ ,$$

$$\tau_h : (i,j) \mapsto (i,j+1) \ ,$$

où on identifie l'ensemble des pixels à $\left(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}\right)^2$ (conditions de bord toriques). Le groupe de permutations ainsi obtenu agit bien transitivement sur l'ensemble des pixels. Pour des résultats sur la localisation des seuils d'apparition de sous-images particulières, voir [16].

Exemple 6 *Systèmes Parallèle-série et Série-parallèle en fiabilité*
Les deux exemples que nous allons introduire sont issus de la fiabilité (voir par exemple [5]). Ils sont très importants d'un point de vue théorique du fait de leur grande simplicité calculatoire. Nous ne faisons ici que les définir, et nous reviendrons dessus dans le chapitre 5.4.4.
Imaginons un système électrique constitué de m blocs en série, chacun des blocs contenant k composants élémentaires en parallèle qui sont en panne indépendamment les uns des autres avec probabilité p. En posant $n = mk$, on peut assimiler l'ensemble des états possibles des n composants à $\{0,1\}^n$, où 0 correspond à un état de marche, et 1 à un état de panne. On définit alors PS_n comme étant le sous-ensemble de $\{0,1\}^n$ des états de panne du système. Appelons S_i l'ensemble des transformations qui permutent les composants du i-ème bloc, et $\tau_{j,k}$ la transformation qui échange les composants du j-ème bloc avec ceux du k-ème, et notons G le groupe engendré par les éléments des S_i et les $\tau_{j,k}$ pour $i,\ j,\ k \in \{1,\ldots,n\}$. Il est facile de voir que G agit transitivement sur les composants. PS_n est clairement invariant par l'action de ce groupe, donc symétrique, et est également croissant. On a :

$$\mu_p(PS_n) = 1 - (1-p^k)^{n/k} \ .$$

On peut aussi observer un système Série-parallèle sur le même modèle : il sera constitué de m blocs en prallèle, chacun des blocs contenant k composants élémentaires en série qui sont en panne indépendamment les uns des autres avec probabilité p. On définit alors SP_n comme étant le sous-ensemble de $\{0,1\}^n$ des états de panne de ce système. SP_n est également un ensemble croissant et symétrique, et on a :

$$\mu_p(SP_n) = (1-(1-p)^k)^{n/k} \ .$$

`Remarque`*:*

Utiliser le langage de la fiabilité nous sert surtout à avoir une autre manière de nous représenter les sous-ensembles croissants de $(\{0,1\}^n, \mu_{n,p})$. En effet, un tel sous-ensemble peut toujours être considéré comme l'ensemble des états de panne d'un certain système cohérent. Le qualificatif "cohérent" renvoie justement à cette croissance de l'ensemble des états de panne : si un système est en

panne et qu'un composant tombe en panne, le système reste en panne.
Dans [32], la propriété PS_n est appelée "the tribes example", l'exemple des tribus, en référence au fait qu'on y observe des tribus indépendantes. Elle joue un rôle d'optimalité qu'on retrouvera dans la section 5.4.4.

Exemple 7 *Formules croissantes de clauses*
On se donne un ensemble de n variables logiques booléennes, $x_1, \ldots, x_n$. Une *clause* de longueur k est une disjonction de k de ces variables, affirmées ou niées. Par exemple, $x_{i_1} \vee \neg x_{i_2} \vee x_{i_3}$ est une clause de longueur 3. Il y a $\binom{n}{k}$ ensembles de k variables possibles, et une fois choisies les k variables, chacune peut apparaître affirmée ou niée dans la clause. Il est donc possible de former $\alpha(n,k) = 2^k\binom{n}{k}$ clauses de longueur k sur n variables. Notons $C_{n,k}$ l'ensemble des clauses. Choisissons d'ordonner les clauses de C_1 à $C_{\alpha(n,k)}$, et identifions, grâce à cet ordre, les sous-ensembles de $C_{n,k}$ à $\{0,1\}^{\alpha(n,k)}$. En suivant l'exemple du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$, on définit une formule aléatoire comme suit.

Définition 2.2.7 *On appelle formule aléatoire, et on note $\mathcal{F}(n,p)$, une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}^{\alpha(n,k)}$, telle que chaque clause apparaît dans la formule avec probabilité p, indépendamment des autres.*

La loi de $\mathcal{F}(n,p)$ est donc $\mu_{\alpha(n,k),p}$. Choisissons maintenant une phrase loqique Φ à $\alpha(n,k)$ variables booléennes y_i, avec uniquement les connecteurs "et" et "ou", et des parenthèses, bien sûr (pas de négation). Par exemple,

$$\Phi(y_1, \ldots, y_8) = (y_1 \wedge (y_2 \vee y_3)) \vee (y_8 \wedge y_3) \ .$$

Si $\psi : \{1, \ldots, n\} \to \{Vrai, Faux\}$ est une affectation booléenne de $x_1, \ldots, x_n$, et F une formule, on notera $F \circ \psi$ le $\alpha(n,k)$-uplet dont la coordonnée de la clause C est "Vrai" lorsqu'elle est absente de F (i.e coordonnée F_C égale à 0) ou lorsque cette clause est vraie sous l'affectation ψ, et "Faux" sinon. On notera

$$A_\Phi = \left\{F \in \{0,1\}^{\alpha(n,k)} \text{ tels que } \exists \psi : \{1, \ldots, n\} \to \{Vrai, Faux\}, \quad \phi(F \circ \psi) = Vrai\right\} \ ,$$

Il est facile de voir que A_Φ est nécessairement décroissante (mais peut être triviale), et donc A_Φ^c est croissante. Considérons maintenant deux types d'action sur les clauses. Tout d'abord, l'action de chaque élément σ de $\mathcal{S}_n$, qui consiste à remplacer chaque variable x_i par $x_{\sigma(i)}$ dans les clauses. Ensuite, les transformations τ_k, qui consistent à échanger x_k et $\neg x_k$. Voici deux exemples pour des clauses de longueur 3 :

$$(145).(\neg x_4 \vee x_6 \vee x_5) = (\neg x_5 \vee x_6 \vee x_4) \ ,$$

$$\tau_4.(\neg x_5 \vee x_6 \vee x_4) = (\neg x_5 \vee x_6 \vee \neg x_4) \ .$$

Le groupe engendré par ces éléments agit transitivement sur l'ensemble des clauses de longueur k, et on le fait agir par l'intermédiaire des clauses sur l'ensemble des formules $\{0,1\}^{\alpha(n,k)}$. On peut voir également que pour toute phrase Φ, A_Φ est invariante par l'action

de ce groupe.
Remarquons que ce cadre recouvre le célèbre cas de la k-sat pour un choix particulier de Φ. En effet, il sufit de prendre pour Φ la conjonction de toutes les clauses :

$$\Phi(y_1, \ldots, y_{\alpha(n,k)}) = y_1 \wedge \ldots \wedge y_{\alpha(n,k)} \ .$$

L'ensemble A_Φ est alors identifiable à celui des formules à n variables qui sont k-satisfaisables. Ce sont les formules de clauses de k variables, toutes les clauses devant être satisfaites simultanément.
Ce problème particulier a été intensément étudié ces dernières années, par des physiciens, des informaticiens et des mathématiciens. On ne sait toujours pas calculer rigoureusement l'échelle de localisation de ce phénomène, mais un grand pas a été fait par Friedgut en 1998 ([31], publié en 1999). Nous aurons l'occasion de revenir plus longuement sur ce problème dans l'exemple 14 et dans le chapitre 5.5.2.
Remarquez enfin qu'on peut s'intéresser à d'autres types de clauses. Au lieu de relier les variables par un "ou", on peut les relier par un "ou exclusif", par exemple. En prenant encore pour Φ la conjonction de toutes les clauses, on retrouve le problème de k-XORSAT, étudié notamment par Creignou, Daudé, Dubois et Mandler (voir notamment [24], [20]). D'autres types de clauses sont encore possibles. On renvoie à [21] pour un exposé général dans le cas d'une conjonction de ces clauses.

Chapitre 3

Combinaisons algébriques de seuils.

A partir de deux propriétés croissantes et symétriques, il est naturel de se demander si, en les combinant d'une certaine manière, on peut dire quelque chose de la taille du seuil de la nouvelle propriété ainsi formée. Dans cette section, on apporte des éléments de réponse pour trois types de combinaisons distinctes : l'union, l'intersection et le produit tensoriel.
Il est facile de voir que la propriété de loi du 0-1 se conserve par union et intersections finies, mais pas par union ou intersection quelconques. Il en est de même pour le caractère grossier d'une propriété (cf. section 3.1).
Les lois du 0-1 se comportent donc de manière assez médiocre vis-à-vis de l'union et de l'intersection. Il y a néanmoins une combinaison pour laquelle la loi du 0-1 se comporte très bien. Cette combinaison, dont l'idée vient de la fiabilité, est le produit tensoriel de deux propriétés. Elle nous permettra de construire dans la section 3.2 des largeurs de seuils très variées à partir de deux ensembles de base.

3.1 Union et intersection d'un nombre fini de propriétés.

Mettons-nous un instant en tête l'idée qu'une loi du 0-1 correspond à l'approximation d'une propriété qui asymptotiquement a pour probabilité 0 ou 1. Si A et B sont deux évènements dont les probabilités valent 0 ou 1, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ ont pour mesure 0 ou 1. De plus, si A et B sont croissants, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont croissants. On peut donc avoir en tête les schémas de la figure 3.1. Ces schémas ne sont pas faux, mais présentent la situation asymptotique. Nous allons voir dans la section 3.1 ce qu'il advient des largeurs de seuil des points de vue asymptotique et non asymptotique dans le cas de l'union et de l'intersection.
En utilisant les relations simples :

$$A \subset A \cup B \ ,$$

$$B \subset A \cup B \ ,$$

$$\mu_p(A \cup B) \leq \mu_p(A) + \mu_p(B) \ ,$$

on peut facilement donner un premier encadrement de la largeur de seuil de l'union de deux propriétés.

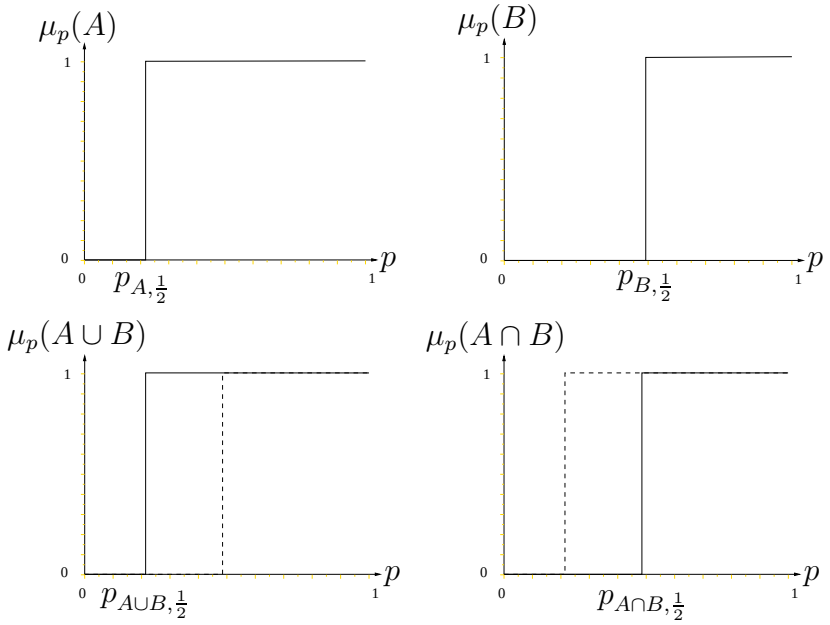

FIG. 3.1 – Stabilité de l'union et l'intersection pour les lois du 0-1.

Proposition 3.1.1 *Soient A et B deux propriétés croissantes de $\{0,1\}^n$. On a, pour tout ε de $[0,1]$,*

$$\inf\left\{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}, p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \leq p_{A\cup B,\varepsilon} \leq \inf\left\{p_{A,\varepsilon}, p_{B,\varepsilon}\right\} \ .$$

Par conséquent, pour tout ε de $]0,\frac{1}{2}[$, on a :

$$\tau(A\cup B,\varepsilon) \leq \sup\left\{\tau\left(A,\frac{\varepsilon}{2}\right), \tau\left(B,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \ .$$

Démonstration :

Pour minorer $p_{A\cup B,\varepsilon}$, il suffit d'utiliser le fait que :

$$\mu_p(A\cup B) \leq \mu_p(A) + \mu_p(B) \ .$$

Ainsi, $A\cup B$ étant croissante,

$$p_{A\cup B,\varepsilon} \geq \inf\left\{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}, p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \ .$$

Pour la majoration, on utilise :

$$\mu_p(A\cup B) \geq \sup\left\{\mu_p(A), \mu_p(B)\right\} \ .$$

Par conséquent,

$$p_{A\cup B,\varepsilon} \leq \inf\left\{p_{A,\varepsilon}, p_{B,\varepsilon}\right\} \ .$$

Pour la largeur du seuil, on écrit :

$$\begin{aligned}
\tau(A\cup B,\varepsilon) &\leq \inf\left\{p_{A,1-\varepsilon}, p_{B,1-\varepsilon}\right\} - \inf\left\{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}, p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \ , \\
&\leq \sup\left\{p_{A,1-\varepsilon} - p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}, p_{A,1-\varepsilon} - p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \ , \\
&\leq \sup\left\{\tau\left(A,\frac{\varepsilon}{2}\right), \tau\left(B,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \ .
\end{aligned}$$

□

Pour obtenir une minoration utile, il est nécessaire d'utiliser l'inégalité FKG (cf. proposition 2.1.11).

Proposition 3.1.2 *Soient A et B deux propriétés croissantes de $\{0,1\}^n$. On a, pour tout ε de $[0,1]$,*

$$\inf\left\{p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}}, p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right\} \leq p_{A\cup B,\varepsilon} \leq \inf\left\{p_{A,\varepsilon}, p_{B,\varepsilon}\right\} \ .$$

Par conséquent, pour tout ε de $]0,\frac{1}{4}[$, on a :

$$\inf\left\{\tau(A,\sqrt{\varepsilon}), \tau(B,\sqrt{\varepsilon})\right\} \leq \tau(A\cup B,\varepsilon) \leq \sup\left\{\tau\left(A, 1-\sqrt{1-\varepsilon}\right), \tau\left(B, 1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)\right\} \ .$$

Démonstration :

La mesure $\mu_{n,p}$ satisfaisant l'inégalité FKG (voir remarque 2.1), on peut écrire :

$$\mu_p(A\cap B) \geq \mu_p(A)\mu_p(B) \ .$$

Donc :

$$\mu_p(A\cup B) \leq \mu_p(A) + \mu_p(B) - \mu_p(A)\mu_p(B) \ .$$

Posons $p = \inf\left\{p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}}, p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right\}$.
Supposons, par exemple, que $p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}} \leq p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}$. On a alors :

$$\mu_{p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}}}(B) \leq \mu_{p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}}(B) = 1-\sqrt{1-\varepsilon} \ .$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mu_p(A) + \mu_p(B) - \mu_p(A)\mu_p(B) &= \mu_p(A) + \mu_p(B)\left(1-\mu_p(A)\right) \ , \\
&\leq 1-\sqrt{1-\varepsilon} + (1-\sqrt{1-\varepsilon})\sqrt{1-\varepsilon} \ , \\
&= \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\mu_{p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}}}(A\cup B) \leq \varepsilon \ .$$

De même, si $p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}} \geq p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}$, on trouve :

$$\mu_{p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}}(A\cup B) \leq \varepsilon \ .$$

Par conséquent,

$$p_{A\cup B,\varepsilon} \geq \inf\left\{p_{A,1-\sqrt{1-\varepsilon}}, p_{B,1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right\} \ .$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned}
\tau(A\cup B,\varepsilon) &\geq \inf\left\{p_{A,1-\sqrt{\varepsilon}}, p_{B,1-\sqrt{\varepsilon}}\right\} - \inf\left\{p_{A,\varepsilon}, p_{B,\varepsilon}\right\} \ , \\
&\geq \inf\left\{p_{A,1-\sqrt{\varepsilon}} - p_{A,\varepsilon}, p_{B,1-\sqrt{\varepsilon}} - p_{B,\varepsilon}\right\} \ , \\
&\geq \inf\left\{p_{A,1-\sqrt{\varepsilon}} - p_{A,\sqrt{\varepsilon}}, p_{B,1-\sqrt{\varepsilon}} - p_{B,\sqrt{\varepsilon}}\right\} \ .
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la minoration attendue de la largeur de seuil de $A\cup B$. La majoration se montre de manière analogue, à partir de l'encadrement de $p_{A\cup B,\varepsilon}$.

□

On peut tout de suite déduire de la proposition 3.1.2 le résultat suivant :

Corollaire 3.1.3 *Toute union finie de propriétés croissantes admettant un seuil grossier admet elle-même un seuil grossier.*
De même, toute union finie de propriétés croissantes suivant une loi du 0-1 (resp. une loi du 0-1 étroite) suit elle-même une loi du 0-1 (resp. une loi du 0-1 étroite).

Démonstration :

Montrons d'abord que toute union finie de propriétés croissantes admettant un seuil grossier admet elle-même un seuil grossier. Par une récurrence élémentaire, il suffit de démontrer le résultat pour l'union de deux propriétés croissantes A et B de $\{0,1\}^n$ admettant un seuil grossier. D'après la proposition 3.1.2, on a, pour tout ε de $\left]0, \frac{1}{4}\right[$,

$$\tau(A \cup B, \varepsilon) \geq \inf \left\{\tau\left(A, \sqrt{\varepsilon}\right), \tau\left(B, \sqrt{\varepsilon}\right)\right\} \ ,$$

et également :

$$p_{A\cup B, \frac{1}{2}} \leq \inf \left\{p_{A,\frac{1}{2}}, p_{B,\frac{1}{2}}\right\} \ .$$

Par conséquent :

$$\frac{\tau(A \cup B, \varepsilon)}{p_{A\cup B, \frac{1}{2}}} \geq \inf \left\{\frac{\tau\left(A, \sqrt{\varepsilon}\right)}{p_{A,\frac{1}{2}}}, \frac{\tau\left(B, \sqrt{\varepsilon}\right)}{p_{B,\frac{1}{2}}}\right\} \ ,$$

et ainsi,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\tau(A \cup B, \varepsilon)}{p_{A\cup B, \frac{1}{2}}} \geq \inf \left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{\tau(A, \varepsilon)}{p_{A,\frac{1}{2}}}, \liminf_{n\to\infty} \frac{\tau(B, \varepsilon)}{p_{B,\frac{1}{2}}}\right\} \ .$$

Les propriétés A et B admettant un seuil grossier (cf. définition 2.1.5), on en déduit :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\tau(A \cup B, \varepsilon)}{p_{A\cup B, \frac{1}{2}}} > 0 \ ,$$

et $A \cup B$ admet un seuil grossier.
Il est très simple de voir que la proposition 3.1.1 implique que toute union finie de propriétés croissantes suivant une loi du 0-1 suit elle-même une loi du 0-1. Montrons que toute union finie de propriétés croissantes suivant une loi du 0-1 étroite suit elle-même une loi du 0-1 étroite. Par une récurrence élémentaire, il suffit de démontrer le résultat pour l'union de deux propriétés croissantes A et B de $\{0,1\}^n$ admettant un seuil étroit. Dans ce cas, on peut écrire, toujours à

l'aide de la proposition 3.1.1,

$$\begin{aligned}
1 \leq \frac{p_{A\cup B,1-\varepsilon}}{p_{A\cup B,\varepsilon}} &\leq \frac{\inf\{p_{A,1-\varepsilon}, p_{B,1-\varepsilon}\}}{\inf\{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}, p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}\}} \ , \\
&= \sup\left\{\frac{\inf\{p_{A,1-\varepsilon}, p_{B,1-\varepsilon}\}}{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}}, \frac{\inf\{p_{A,1-\varepsilon}, p_{B,1-\varepsilon}\}}{p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}}\right\} \ , \\
&\leq \sup\left\{\frac{p_{A,1-\varepsilon}}{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}}, \frac{p_{B,1-\varepsilon}}{p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}}\right\} \ , \\
&\leq \sup\left\{\frac{p_{A,1-\frac{\varepsilon}{2}}}{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}}, \frac{p_{B,1-\frac{\varepsilon}{2}}}{p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}}\right\} \ .
\end{aligned}$$

Or, A suivant une loi du 0-1 étroite, on a, d'après le lemme 2.1.6,

$$\frac{p_{A,1-\frac{\varepsilon}{2}}}{p_{A,\frac{\varepsilon}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ ,$$

et

$$\frac{p_{B,1-\frac{\varepsilon}{2}}}{p_{B,\frac{\varepsilon}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ .$$

Ainsi,

$$\frac{p_{A\cup B,1-\varepsilon}}{p_{A\cup B,\varepsilon}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ ,$$

ce qui donne le résultat attendu, toujours à l'aide du lemme 2.1.6.

□

On peut immédiatement traduire les résultats relatifs à l'union en des résultats relatifs à l'intersection. En effet, on aurait pu définir, comme dans la définition 2.1.4 une largeur de seuil pour des propriétés décroissantes non triviales. Or $(A \cap B) = (A^c \cup B^c)^c$, et si A et B sont croissantes, A^c et B^c sont décroissantes, et corrélées positivement. On a alors les résultats suivants :

Proposition 3.1.4 *Soient A et B deux propriétés croissantes de $\{0,1\}^n$. On a, pour tout ε de $[0,1]$,*

$$\sup\{p_{A,\varepsilon}, p_{B,\varepsilon}\} \leq p_{A\cap B,\varepsilon} \leq \sup\left\{p_{A,\sqrt{\varepsilon}}, p_{B,\sqrt{\varepsilon}}\right\} \ .$$

Par conséquent, pour tout ε de $]0,\frac{1}{4}[$, on a :

$$\inf\left\{\tau(A,\sqrt{\varepsilon}), \tau(B,\sqrt{\varepsilon})\right\} \leq \tau(A\cap B,\varepsilon) \leq \sup\left\{\tau\left(A, 1-\sqrt{1-\varepsilon}\right), \tau\left(B, 1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)\right\} \ .$$

Corollaire 3.1.5 *Toute intersection finie de propriétés croissantes admettant un seuil grossier admet elle-même un seuil grossier.*
De même, toute intersection finie de propriétés croissantes suivant une loi du 0-1 (resp. une loi du 0-1 étroite), suit elle-même une loi du 0-1 (resp. une loi du 0-1 étroite).

3.2 Produit tensoriel de deux propriétés.

A partir de deux propriétés croissantes et symétriques, on peut construire une nouvelle propriété croissante et symétrique en effectuant ce qu'on appellera le produit tensoriel des deux propriétés. Cette nouvelle propriété appartient à un nouvel espace, qui correspond effectivement à un produit tensoriel usuel, si on identifie $\{0,1\}^n$ au $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\left(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\right)^n$.

Définition 3.2.1 *Soient $A \subset \{0,1\}^r$ et $B \subset \{0,1\}^m$. On note $A \otimes B$ la propriété de $(\{0,1\}^r)^m$ définie par :*

$$\eta \in A \otimes B \Leftrightarrow (\mathbb{1}_{\eta_1 \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{\eta_m \in A}) \in B \ ,$$

où

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \text{ et } \forall j \in \{1, \ldots, m\},\ \eta_j \in \{0,1\}^r \ .$$

Cette construction, qui peut sembler abstraite, se représente bien avec le langage de la fiabilité. Si A désigne l'ensemble des états de panne d'un circuit $\mathcal{A}$ et B désigne l'ensemble des états de panne d'un autre circuit $\mathcal{B}$, alors $A \otimes B$ désigne l'ensemble des états de panne d'un circuit obtenu en remplaçant les composants élémentaires de $\mathcal{B}$ par m copies du circuit $\mathcal{A}$. On peut par exemple obtenir les systèmes Parallèle-série et Série-Parallèle évoqués dans l'exemple 6 à partir de briques élémentaires en série ou en parallèle (cf. figure 3.2). Ce jeu de construction peut se continuer ainsi indéfiniment, en emboîtant des circuits dans les autres (cf. figure 3.3).

On peut facilement calculer la probablité de $A \otimes B$ en fonction de celles de A et B, et également obtenir un résultat d'invariance sur $A \otimes B$ en fonction des invariances de A et B. Dans la suite, si $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ est un élément de $(\{0,1\}^r)^m$, avec $\eta_j \in \{O,1\}^r$ pour tout j, on notera $\eta_j = (\eta_{i,j})_{i=1\ldots r}$, $\eta_{i,j}$ valant 0 ou 1. On identifie ainsi $(\{0,1\}^r)^m$ à $\{0,1\}^{\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,m\}}$

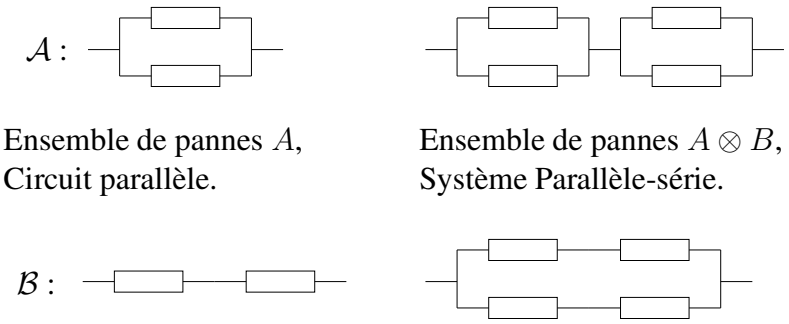

FIG. 3.2 – Les systèmes Parallèle-série et Série-parallèle s'obtiennent par tensorisation.

Proposition 3.2.2 *Soient $A \subset \{0,1\}^r$ et $B \subset \{0,1\}^m$. Alors :*

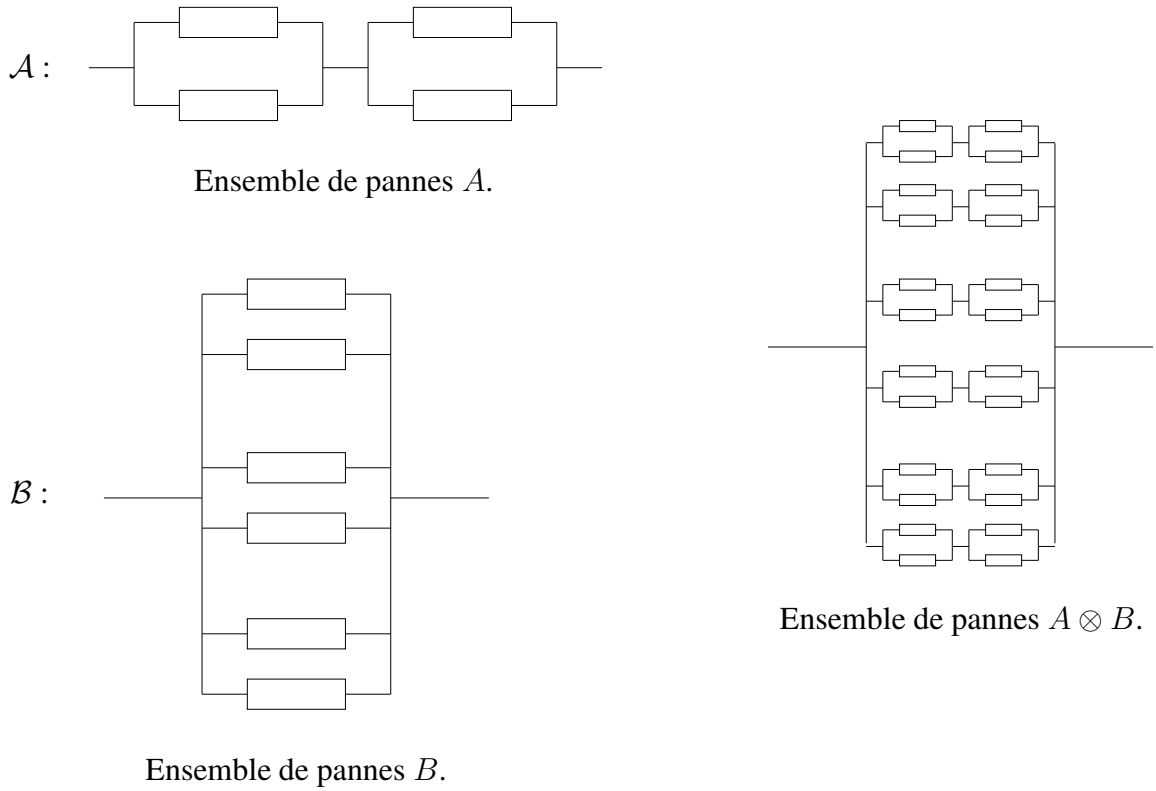

FIG. 3.3 – Un exemple de tensorisation de deux ensembles de pannes en fiabilité.

1. *Pour tout* p *de* $[0,1]$,
$$\mu_{mr,p}(A \otimes B) = \mu_{m,\mu_{r,p}(A)}(B) \ ,$$
2. *Si* A *et* B *sont croissantes, alors* $A \otimes B$ *est croissante.*
3. *Si* A *est invariante par un sous-groupe* G *de* $\mathcal{S}_r$ *et* B *par un sous-groupe* H *de* $\mathcal{S}_m$*, alors* $A \otimes B$ *est invariante sous l'action du sous-groupe* $G \times H$ *des permutations de* $\{1,\ldots,r\} \times \{1,\ldots,m\}$ *définie par :*
$$\forall i \in \{1,r\},\ \forall j \in \{1,m\},\ (g,h).(i,j) = (g.i, h.j) \ .$$

Démonstration :

Si $(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ sont indépendantes et distribuées selon la loi $\mu_{r,p}$, alors $(\ \mathbb{1}_{\eta_1 \in A},\ldots,\ \mathbb{1}_{\eta_m \in A})$ est distribué selon la loi $\mu_{m,\mu_p(A)}$. Ce qui prouve le premier point.
Prouvons la deuxième assertion. Soient η et ζ deux éléments de $(\{0,1\}^r)^m$ tels que $\eta \leq \zeta$. Alors,
$$\forall i \in \{1,\ldots,m\},\ \eta_i \leq \zeta_i \ .$$
Comme A est croissant, on a :
$$(\ \mathbb{1}_{\eta_1 \in A},\ldots,\ \mathbb{1}_{\eta_m \in A}) \preceq (\ \mathbb{1}_{\zeta_1 \in A},\ldots,\ \mathbb{1}_{\zeta_m \in A}) \ . \tag{3.2.1}$$

Supposons que $\eta \in A \otimes B$. On a donc :

$$\left(\mathbb{1}_{\eta_1 \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{\eta_m \in A} \right) \in B \ . \tag{3.2.2}$$

Comme B est croissant, on déduit de (3.2.1) et (3.2.2) que $\zeta \in B$, ce qui montre la croissance de $A \otimes B$.
Prouvons le dernier point. Prenons $\eta \in A \otimes B$, $(g,h) \in G \times H$ et notons $\zeta = (g,h).\eta$. On a :

$$\zeta_{i,j} = \eta_{(g,h).(i,j)} = \eta_{g.i,h.j} \ ,$$

c'est à dire :

$$\zeta = (g.\eta_{h.1}, \ldots, g.\eta_{h.m}) \ .$$

D'autre part,

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \ ,$$

avec $\eta_i \in \{0,1\}^r$. Et aussi :

$$\left(\mathbb{1}_{\eta_1 \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{\eta_m \in A} \right) \in B \ .$$

Par conséquent,

$$\left(\mathbb{1}_{g(\eta_1) \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{g(\eta_m) \in A} \right) \in B \ .$$

Et donc :

$$h.\left(\mathbb{1}_{g(\eta_1) \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{g(\eta_m) \in A} \right) \in B \ ,$$

ce qui signifie :

$$\left(\mathbb{1}_{g(\eta_{h.1}) \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{g(\eta_{h.m}) \in A} \right) \in B \ .$$

Donc $\zeta \in A \otimes B$.

□

La propriété 3.2.2 permet d'obtenir un résultat de stabilité de la loi du 0-1 sous certaines hypothèses d'homogénéité (cf. définitions 2.1.8 et 2.1.9). Nous aurons aussi besoin que l'une des deux propriétés ait son seuil loin de 0 et de 1, ce qui se traduit, dans la proposition suivante, par un "seuil d'ordre $\frac{1}{2}$". Notez bien que ce seuil peut donc se situer en n'importe quel $\alpha \in]0,1[$.

Proposition 3.2.3 *Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement croissantes d'entiers naturels. Supposons que $A \subset \{0,1\}^{r_n}$ suit une loi du 0-1 de largeur fortement homogène d'ordre a_n, et $B \subset \{0,1\}^{m_n}$ suit une loi du 0-1 de localisation (homogène) d'ordre $\frac{1}{2}$ et de largeur homogène d'ordre b_n. Alors, il existe α appartenant à $]0;1[$ tel que $A \otimes B \subset \{0,1\}^{r_n m_n}$ suive une loi du 0-1 de localisation $p_{A,\alpha}$ et de largeur d'ordre $a_n.b_n$. Si, de plus, A admet une localisation homogène, alors la localisation de $A \otimes B$ est homogène, d'ordre $p_{A,\frac{1}{2}}$.*

Démonstration :

Soit ε un réel de $]0, \frac{1}{2}[$. D'après la proposition 3.2.2, on a :

$$\mu_{m_n r_n, p}(A \otimes B) = \mu_{m_n, \mu_{r_n, p}(A)}(B) \ ,$$

Donc,

$$\mu_{r_n, p_{A\otimes B,\varepsilon}}(A) = p_{B,\varepsilon} \ .$$

puis :

$$p_{A\otimes B,\varepsilon} = p_{A, p_{B,\varepsilon}} \ .$$

$$p_{A\otimes B,1-\varepsilon} - p_{A\otimes B,\varepsilon} = p_{A, p_{B,1-\varepsilon}} - p_{A, p_{B,\varepsilon}} \ .$$

La propriété B suivant une loi du 0-1 de localisation d'ordre $\frac{1}{2}$ et de largeur homogène d'ordre b_n, on a :

$$p_{B,1-\varepsilon} - p_{B,\varepsilon} = \Theta(b_n) \ ,$$

et

$$\exists \alpha \in]0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha < p_{B,\varepsilon} < p_{B,1-\varepsilon} < 1 - \alpha \ .$$

On peut alors utiliser le fait que A suive une loi du 0-1 de largeur fortement homogène d'ordre a_n (cf. définition 2.1.9) pour écrire :

$$p_{A, p_{B,1-\varepsilon}} - p_{A, p_{B,\varepsilon}} = \Theta\left(\left(p_{B,1-\varepsilon} - p_{B,\varepsilon}\right) a_n\right) = \Theta(a_n b_n) \ .$$

Pour la localisation, remarquons qu'il existe une constante $\alpha \in]0,1[$ telle que :

$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \ p_{B,\varepsilon} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \alpha \ .$$

Supposons maintenant que le seuil de A soit un seuil de localisation homogène. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On peut alors remarquer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \frac{\alpha}{2} \leq p_{B,\varepsilon} \leq 2\alpha \ ,$$

donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ p_{A,\frac{\alpha}{2}} \leq p_{A\otimes B,\varepsilon} \leq p_{A,2\alpha} \ .$$

Or $p_{A,\frac{\alpha}{2}}$ et $p_{A,2\alpha}$ sont du même ordre que $p_{A,\frac{1}{2}}$ lorsque n tend vers l'infini, par conséquent, pour tout ε de $]0,1[$, $p_{A\otimes B,\varepsilon}$ est de l'ordre de $p_{A,\frac{1}{2}}$, ce qui achève la démonstration.

□

Les conséquences de la proposition 3.2.3 sont théoriques, mais d'importance. En effet, ce résultat nous permet, à partir d'exemples de bases, élémentaires, dont on connait les seuils et les largeurs de seuils, de construire d'autres exemples ayant de nouvelles largeurs de seuil. Nous en donnons une illustration dans l'application qui suit.

Exemple 8 *Construction d'un seuil de largeur* $\Theta\left(\frac{1}{N^\alpha \log N}\right)$*, pour* $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.
On considère $A \subset \{0,1\}^n$, défini par (voir l'exemple 1) :

$$A_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{2} \right\} .$$

Puis on considère un système Parallèle-série B_n à $\lfloor \frac{n}{\log n} \rfloor$ blocs en série de $\lfloor \log n \rfloor$ composants en parallèle (pour la définition, voir l'exemple 6). Posons $N = n \times \lfloor \frac{n}{\log n} \rfloor . \lfloor \log n \rfloor$.
On peut voir (cf. exemples 1 et 6) que A admet un seuil localisé en $\frac{1}{2}$, de largeur fortement homogène $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et que B suit une loi du 0-1 de localisation homogène en $\frac{1}{e}$, de largeur homogène $\frac{1}{\log n}$. Par conséquent, la proposition 3.2.3 nous assure que la propriété $A_n \otimes B_n \subset \{0,1\}^N$ admet un seuil de localisation homogène située en $\frac{1}{2}$, de largeur homogène d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n} \log n}$.
La largeur de seuil est donc d'ordre $\frac{1}{N^{\frac{1}{4}} \log N}$.
De la même manière, pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on peut construire des propriétés sur $\{0,1\}^N$ munies d'un seuil ayant une largeur d'ordre $\frac{1}{N^\alpha \log N}$. En effet, il nous suffit de considérer la propriété $C_\alpha = A_{\left\lfloor n^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}} \right\rfloor} \otimes B_n \subset \{0,1\}^N$, avec $N = \left\lfloor n^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}} \right\rfloor . \lfloor \frac{n}{\log n} \rfloor \lfloor \log n \rfloor$. On peut alors déduire de la proposition 3.2.3 que C_α admet un seuil de largeur $\frac{1}{\sqrt{n^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}} \log n}$. Or,

$$N = \Theta\left(n^{\frac{1}{1-2\alpha}}\right) ,$$

donc :

$$n = \Theta\left(N^{1-2\alpha}\right) ,$$

donc :

$$\sqrt{n^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}} = \Theta\left(N^\alpha\right) ,$$

et

$$\log n = \Theta(N) .$$

La propriété C_α possède donc un seuil de largeur d'ordre $\frac{1}{N^\alpha \log N}$.

Chapitre 4

L'approche classique et les liens temps-espace.

En 1960, dans leur article fondateur [26], Erdös et Rényi donnaient déjà une description fine du comportement du graphe aléatoire en dépeignant les changements radicaux qu'il subit lorsqu'on fait évoluer p de 0 à 1. D'une soupe primordiale composée de petites composantes connexes en arbres, de taille au plus de l'ordre de $\log n$, on passe, lorsque p franchit $\frac{1}{n}$, à un graphe avec une composante géante, d'une taille linéaire en n. Un peu plus tard, le graphe devient brutalement connexe lorsque p franchit $\frac{\log(n)}{n}$, les fluctuations de cette propriété étant de l'ordre de $O(1/n)$ autour de la localisation. On a même une fonction de répartition de seuil étroit qui est celle de la loi de Gumbel (voir aussi [60] p. 303). Ces résultats étaient obtenus essentiellement avec les méthodes dites du premier et deuxième moments et d'approximation poissonnienne. Depuis, une importante littérature s'est développée, empruntant les mêmes méthodes.
La présentation des phénomènes de seuil a évolué entre l'article d'Erdös et Rényi [26] et celui de Friedgut et Kalai [32]. Le but de cette évolution est notamment de pouvoir parler de majorations non asymptotiques de la largeur de seuil. Il nous a donc paru opportun de relier les définitions modernes aux anciennes dans la section 4.1.
Nous exposerons les méthodes du premier et deuxième moments (section 4.2). Suivront certaines de leurs applications, qui donnent une culture essentielle du comportement asymptotique du graphe aléatoire ou d'autres objets introduits dans la section 2.2.
Pour finir, nous présenterons un résultat d'approximation poissonnienne dû à Janson (section 4.3) dont nous donnerons une application à un contrôle non asymptotique de la largeur de seuil.

4.1 Les définitions des fonctions seuils.

Dans cette section, nous présentons les définitions usuelles des fonctions seuils, telles qu'elles ont été utilisées notamment dans l'étude du graphe aléatoire. De plus, nous relierons ces définitions à celles que nous avons mises en place dans le chapitre 2.1. En fait, dans l'article fondateur sur le graphe aléatoire [26], les auteurs considèrent un modèle légèrement

différent et nous adaptons ici leurs définitions au cadre introduit dans la section 2.1 (voir également le cours de Saint-Flour de Spencer [60]).
Dans toutes les définitions suivantes, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls.

Définition 4.1.1 *Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ une propriété croissante. On dit que $(s(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ est une* fonction seuil *pour la propriété A si :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{s(n)} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 0 \ , \\
\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{s(n)} = +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 1 \ , \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1-p(n)}{1-s(n)} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 1 \ , \\
\text{et } \lim_{n\to\infty} \frac{1-p(n)}{1-s(n)} = +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Cette définition correspond, dans le langage du chapitre 2.1 à une localisation homogène d'ordre $s(n)$. On a le résultat suivant :

Proposition 4.1.2 *Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ une propriété croissante. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *La propriété A possède une localisation homogène d'ordre $s(n)$.*
2. *La propriété A admet $s(n)$ pour fonction seuil.*

Démonstration :

Supposons que A possède une localisation homogène d'ordre $s(n)$:

$$\forall \varepsilon \in]0;1[, \ p_{A,\varepsilon} = \Theta\left(s(n)\right) \text{ et } 1 - p_{A,\varepsilon} = \Theta\left(1 - s(n)\right) \ .$$

Supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{s(n)} = 0 \ .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On a :

$$\exists C > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ p_\alpha \geq C s(n) \ ,$$

Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ p(n) \leq p_\alpha \ ,$$

et alors,

$$\forall n \geq N, \ \mu_{p(n)}(A) \leq \alpha \ .$$

On a donc :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \mu_{p(n)}(A) \leq \alpha \ ,$$

ce qui revient à dire

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 0 \ .$$

De la même façon, supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{s(n)} = +\infty \ .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On a :

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_\alpha \leq Cs(n) \ ,$$

Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ p(n) \geq p_\alpha \ ,$$

et alors,

$$\forall n \geq N,\ \mu_{p(n)}(A) \geq \alpha \ ,$$

On a donc :

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \mu_{p(n)}(A) \geq \alpha \ ,$$

ce qui revient à dire

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 1 \ .$$

Supposons maintenant que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-p(n)}{1-s(n)} = 0 \ .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On a :

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1-p_\alpha \geq C(1-s(n)) \ ,$$

Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ 1-p(n) \leq 1-p_\alpha \ ,$$

et alors,

$$\forall n \geq N,\ \mu_{p(n)}(A) \geq \alpha \ ,$$

On a donc :

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \mu_{p(n)}(A) \geq \alpha \ ,$$

ce qui revient à dire

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 1 \ .$$

Enfin, supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-p(n)}{1-s(n)} = +\infty \ .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On a :

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 - p_\alpha \leq C(1 - s(n))\ ,$$

Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ 1 - p(n) \geq 1 - p_\alpha\ ,$$

et alors,

$$\forall n \geq N,\ \mu_{p(n)}(A) \leq \alpha\ ,$$

On a donc :

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \mu_{p(n)}(A) \leq \alpha\ ,$$

ce qui revient à dire

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 0\ .$$

Démontrons maintenant la réciproque. Supposons que la propriété A admette $s(n)$ pour fonction seuil. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrons par l'absurde que p_α est nécessairement du même ordre que $s(n)$. Supposons le contraire. Il existe une suite d'entiers $k(n)$ strictement croissante telle que :

$$\forall C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{\alpha,k(n)} > Cs(k(n))\ ,$$

ou

$$\forall C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ s(k(n)) > Cp_{\alpha,k(n)}\ .$$

C'est à dire qu'on peut extraire deux sous-suites $p_{\alpha,k(n)}$ et $s(k(n))$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{\alpha,k(n)}}{s(k(n))} = +\infty\ .$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{\alpha,k(n)}}{s(k(n))} = 0\ .$$

Par conséquent, A admettant $s(n)$ pour fonction seuil, on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{p_{\alpha,k(n)}} = 1 \text{ ou } 0\ ,$$

Ce qui donne une contradiction, puisque $\mu_{p_{\alpha,k(n)}} = \alpha \in]0,1[$.

□

Définition 4.1.3 *Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ une propriété croissante. On dit que $(s(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ est une* fonction de seuil régulier *pour la propriété A si c'est une fonction seuil pour A, et s'il existe une fonction de répartition F telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ point de continuité de F, on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{s(n)} = x \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = F(x)\ .$$

Dans ce cas, F est appelée la fonction de répartition de seuil *de la propriété A.*

Exemple 9 Nous verrons, grâce au théorème 4.3.2 que $\frac{1}{n}$ est une fonction seuil pour la propriété "contenir un triangle" concernant le graphe $\mathcal{G}(n,p)$. La fonction de répartition de seuil correspondante est

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^3}{6}} \ .$$

Définition 4.1.4 *Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ une propriété croissante. On dit que $(s_1, s_2) \in \left([0,1]^{\mathbb{N}^*}\right)^2$ est une* paire de fonctions de seuil étroit *pour la propriété A si :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_2(n)}{s_1(n)} = 0 \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n) - s_1(n)}{s_2(n)} = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 0 \ ,$$

et :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n) - s_1(n)}{s_2(n)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 1 \ .$$

La suite s_2 sera appelée une largeur du seuil *(pour la propriété A).*

`Remarque`*:*

Il est clair que si (s_1, s_2) est une paire de fonctions de seuil étroit pour une propriété A, alors, s_1 est une fonction seuil régulière pour A, avec comme fonction de répartition dégénérée :

$$F(x) = \mathbb{1}_{x>1} \ .$$

On peut voir facilement que l'existence d'une paire de fonctions de seuil étroit correspond à l'existence d'une loi du 0-1 étroite de localisation homogène et de largeur homogène.

Proposition 4.1.5 *Soit $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ une propriété croissante. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *La propriété A suit une loi du* 0-1 *étroite de localisation homogène d'ordre $s_1(n)$ et de largeur d'ordre $s_2(n)$.*
2. *La propriété A admet $(s_1(n), s_2(n))$ pour paire de fonction de seuil étroit.*

Démonstration :

On prendra $\alpha(n) = n$ dans la définition 4.1.4 pour simplifier les notations. Supposons tout d'abord que la propriété A suit une loi du 0-1 étroite de localisation homogène d'ordre $s_1(n)$ et de largeur d'ordre $s_2(n)$, et montrons que *1* $\Rightarrow$ *2*.
D'après la définition 2.1.8, on a :

$$p_{\frac{1}{2}} = \Theta\left(s_1(n)\right) \text{ et } \tau(A,\varepsilon) = \Theta\left(s_2(n)\right) \ .$$

Comme A suit une loi du 0-1 étroite, on a :

$$\frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}} = o(1) \ ,$$

donc

$$\frac{s_2(n)}{s_1(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Maintenant, prenons $p(n)$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)-s_1(n)}{s_2(n)} = -\infty \ ,$$

c'est à dire :

$$\forall K>0, \ , \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ p(n) < s_1(n) - K s_2(n) \ .$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. D'après les définitions d'une localisation homogène et de la largeur de seuil, on a :

$$p_{\frac{1}{2}} = \Theta\left(s_1(n)\right), \text{ et } p_{\frac{1}{2}} - p_\varepsilon = O\left(s_2(n)\right) \ .$$

Donc il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que :

$$\forall K>0, \ , \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ p(n) < C_1 p_{\frac{1}{2}} - K C_2 \left(p_{\frac{1}{2}} - p_\varepsilon\right) \ .$$

Le choix de $K = \sup\{\frac{C_1}{C_2}, \ \frac{1}{C_2}\}$ donne :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ p(n) < p_\varepsilon \ .$$

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ p(n) < p_\varepsilon \ ,$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \mu_{p(n)}(A) < \varepsilon \ .$$

Ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 0 \ .$$

De la même manière, on montrerait que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)-s_1(n)}{s_2(n)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = 1 \ .$$

Supposons désormais que la propriété A admet $(s_1(n), s_2(n))$ pour paire de fonctions de seuil étroit, et montrons que *2* $\Rightarrow$ *1*.
D'après la proposition 4.1.2, A suit une loi du 0-1 de localisation homogène d'ordre $s_1(n)$. Supposons qu'il existe α et β dans $]0,1[$, avec $\alpha < \beta$ tels que $p_\beta - p_\alpha$ ne soit pas un $O\left(s_2(n)\right)$. On peut alors trouver une suite strictement croissante d'entiers $k(n)$ telle que :

$$\frac{p_{k(n),\beta} - p_{k(n),\alpha}}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

On a alors :

$$\frac{p_{k(n),\beta} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} + \frac{s_1(k(n)) - p_{k(n),\alpha}}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

Donc :

$$\frac{p_{k(n),\beta} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ ou bien } \frac{s_1(k(n)) - p_{k(n),\alpha}}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

Supposons d'abord que :

$$\frac{p_{k(n),\beta} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

Alors, d'après la définition d'une paire de fonctions de seuil étroit :

$$\mu_{p_{k(n),\beta}}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ ,$$

mais $\mu_{p_{k(n),\beta}}(A) = \beta \in]0,1[$. C'est une contradiction. Supposons alors que

$$\frac{p_{k(n),\beta} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

On a :

$$\frac{p_{k(n),\alpha} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \ ,$$

et donc :

$$\mu_{p_{k(n),\alpha}}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ ,$$

mais $\mu_{p_{k(n),\beta}}(A) = \alpha \in]0,1[$. C'est encore une contradiction. Donc :

$$p_\beta - p_\alpha = O\left(s_2(n)\right) \ ,$$

Et comme s_2 est négligeable devant s_1, on a bien une loi du 0-1 étroite de largeur d'ordre s_2.

□

`Remarque`*:*

En fait, lorsqu'on est dans un de ces deux cas équivalents, tous les p_ε ne sont pas seulement du même ordre, ils sont tous équivalents à $s_1(n)$. En effet, supposons le contraire, c'est à dire supposons qu'il existe ε, une suite strictement croissante d'entiers $k(n)$ et deux constantes $C_1 > 1$ et $C_2 < 1$ tels que :

$$\frac{p_{k(n),\varepsilon}}{s_1(k(n))} \geq C_1 \text{ ou bien } \frac{p_{k(n),\varepsilon}}{s_1(k(n))} \leq C_2 \ .$$

Si on est dans le premier cas, alors :

$$\frac{p_{k(n),\varepsilon} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \geq (C_1 - 1)\frac{s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

Donc :

$$\mu_{p_{k(n),\varepsilon}}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ .$$

Mais $\mu_{p_{k(n),\varepsilon}}(A) = \varepsilon$*, et* $\varepsilon \in]0,1[$*, ce qui donne une contradiction. Supposons alors qu'on soit dans le second cas :*

$$\frac{p_{k(n),\varepsilon}}{s_1(k(n))} \leq C_2 \ ,$$

avec $C_2 < 1$*. On a alors :*

$$\frac{p_{k(n),\varepsilon} - s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \leq (C_2 - 1)\frac{s_1(k(n))}{s_2(k(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \ .$$

Donc :

$$\mu_{p_{k(n),\varepsilon}}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Mais $\mu_{p_{k(n),\varepsilon}}(A) = \varepsilon$*, et* $\varepsilon \in]0,1[$*, ce qui donne encore une contradiction. Par conséquent, tous les* p_ε *sont équivalents à* $s_1(n)$*.*

Définition 4.1.6 *Soit* $A \subset \{0,1\}^{\alpha(n)}$ *une propriété croissante. On dit que* $(s_1, s_2) \in \left([0,1]^{\mathbb{N}^*}\right)^2$ *est une* paire de fonctions de seuil étroit régulier *pour la propriété* A *si c'est une paire de fonctions de seuil étroit pour* A*, et s'il existe une fonction de répartition* G *telle que pour tout* y*, point de continuité de* G*,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n) - s_1(n)}{s_2(n)} = y \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha(n),p(n)}(A) = G(y) \ .$$

Dans ce cas, G *est appelée la* fonction de répartition de seuil étroit *de la propriété* A*.*

Exemple 10 On peut voir (cf. Spencer [60] p.303) que $\left(\frac{\log n}{n}, \frac{1}{n}\right)$ est une paire de fonctions de seuil étroit régulier pour la propriété de connexité du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$. La fonction de répartition de seuil étroit est alors celle de la loi de Gumbel :

$$G(y) = e^{-e^{-y}} \ .$$

Lorsqu'une propriété dispose d'une fonction seuil régulière et non dégénérée, celle-ci donne l'échelle de localisation du seuil et l'échelle des fluctuations à la fois. Lorsqu'une propriété dispose d'une paire (s_1, s_2) de fonctions de seuil régulier étroit et non dégénéré, s_1 donne l'échelle de localisation du seuil et s_2, la largeur de seuil, donne l'échelle des fluctuations. Celle-ci n'est également qu'un ordre de grandeur. Nous commettrons l'abus de langage consistant à parler de *la* fonction seuil ou de *la* largeur du seuil. Dans la section 6, on montrera l'équivalence entre l'existence d'une paire de fonctions de seuil étroit régulier et la convergence en loi du temps d'atteinte d'un certain processus sur $\{0,1\}^{\alpha(n)}$.

4.2 Les méthodes des deux premiers moments.

La propriété PS_n de l'exemple 6 montre qu'il existe des cas où on peut facilement calculer exactement la probabilité d'un ensemble croissant et non trivial. En fait, cet exemple est à peu près le seul où l'on peut effectivement calculer cette probabilité. Sa particularité réside dans le fait qu'il peut s'exprimer comme une union d'évènements simples (des cylindres) et indépendants, car ses éléments minimaux sont disjoints. Comme l'indique la remarque 2.1, on peut toujours exprimer une propriété croissante en fonction de ses éléments minimaux, et également en fonction des éléments maximaux de son complémentaire. Mais ces éléments minimaux (ou maximaux) ne sont pas disjoints en général, rendant ainsi le calcul exact de la probabilité de cette propriété trop délicat.
Bien sûr, l'espérance et la variance se comportent bien vis-à-vis des sommes de variables aléatoires. Les méthodes du premier et deuxième moment consistent à essayer de ramener l'étude d'une propriété à l'étude d'une fonction somme, c'est à dire une fonction qui compte un nombre d'éléments présents. La plupart du temps, on compte le nombre d'éléments minimaux (ou d'éléments maximaux) présents, mais il y a bien d'autres possibilités.
En effet, si $A \subset \{0,1\}^n$ est une propriété et X une fonction de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{N}$ telle que $A \subset \{X \geq 1\}$, on peut majorer la probabilité $\mu_p(A)$ à l'aide de l'espérance de X sous μ_p (qui est facile à calculer si X est une somme de fonctions simples). Si $A^c \subset \{X = 0\}$, on peut la minorer à l'aide de la variance de X sous μ_p. Ces inégalités, pourtant très frustres, permettent dans un grand nombre de cas d'obtenir le bon ordre de grandeur de la localisation du seuil d'une propriété, et même celui des fluctuations, c'est à dire la largeur du seuil. C'est l'utilisation de ces bornes que l'on appelle traditionnellement les méthodes du premier et du second moment.

Lemme 4.2.1 *Soit $X : \{0,1\}^n \to \mathbb{N}$ une fonction, et $A \subset \{0,1\}^n$.*

1. *Si $A \subset \{X \geq 1\}$, on a, pour tout $p \in [0,1]$:*
$$\mu_p(A) \leq \mathbb{E}_{\mu_p}(X) \ .$$
2. *Si $A^c \subset \{X = 0\}$, on a, pour tout $p \in [0,1]$:*
$$1 - \frac{Var_{\mu_p}(X)}{\mathbb{E}_{\mu_p}(X)^2} \leq \mu_p(A) \ .$$

Démonstration :

La majoration est simplement l'application directe de l'inégalité de Markov :
$$\begin{aligned} \mu_p(A) &\leq \mu_p\left(X \geq 1\right) \ , \\ &\leq \mathbb{E}(X) \ . \end{aligned}$$

Pour la minoration, on écrit :
$$\begin{aligned} \mu_p(A^c) \leq \mu_p(X = 0) &= \mu_p\left(X - \mathbb{E}_{\mu_p}(X) \leq -\mathbb{E}_{\mu_p}(X)\right) \\ &\leq \mu_p\left(|X - \mathbb{E}_{\mu_p}(X)|^2 \geq \mathbb{E}_{\mu_p}(X)^2\right) \\ &\leq \frac{Var_{\mu_p}(X)}{\mathbb{E}_{\mu_p}(X)^2} \ , \end{aligned}$$

la dernière égalité étant à nouveau une conséquence de l'inégalité de Markov.

□

On appliquera généralement ce lemme avec une somme d'indicatrices X. Si $X = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{1}_{A_i}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{P}(A_i)$$

$$Var(X) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{P}\left(A_i\right) - \mathbb{P}\left(A_i\right)^2 + \sum_{i\neq j\in\mathcal{I}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \ .$$

Pour utiliser le lemme 4.2.1, il faudra minorer la variance. Plus précisément, il faudra arriver à montrer que la variance est négligeable devant $\mathbb{E}(X)^2$. En général, chaque $\mathbb{P}(A_i)$ sera un $o(1)$, et donc $\mathbb{P}(A_i)^2$ sera négligeable devant $\mathbb{P}(A_i)$. Dans de nombreux cas également, on sera dans une situation où $\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right)$ est grand devant $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ sauf si A_i et A_j sont indépendants, auquel cas, les deux termes sont égaux. On pourra donc utiliser la minoration suivante :

$$Var(X) \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{P}\left(A_i\right) + \sum_{i\sim j\in\mathcal{I}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) \ , \tag{4.2.1}$$

où la notation $i \sim j$ signifie que i et j sont distincts, et que A_i et A_j ne sont pas indépendants.

Une propriété A étant donnée, on peut trouver beaucoup de fonctions X telles que $A \subset \{X \geq 1\}$ ou $A^c \subset \{X = 0\}$. Remarquons deux choix que l'on pourrait qualifier de "canoniques" lorsque A est croissante. On a dans ce cas une collection d'éléments minimaux $\mathcal{M} \subset \{0,1\}^n$, 2 à 2 non comparables, telle que :

$$A = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq } \exists m \in \mathcal{M},\ m \preceq x\} \ ,$$

et on peut poser :

$$X(x) = \sum_{m\in\mathcal{M}} \mathbb{1}_{m\preceq x} \ . \tag{4.2.2}$$

Alors $A = \{X \geq 1\}$. On a également une collection d'éléments maximaux $\mathcal{M}' \subset \{0,1\}^n$, 2 à 2 non comparables, telle que :

$$A^c = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq } \exists M \in \mathcal{M}',\ x \preceq M\} \ ,$$

et on peut poser :

$$Y(x) = \sum_{M\in\mathcal{M}'} \mathbb{1}_{x\preceq M} \ . \tag{4.2.3}$$

Alors $A = \{Y = 0\}$. On peut affirmer, à l'aide du lemme 4.2.1, que :

$$\mu_p(A) \leq \mathbb{E}_{\mu_p}(X) \tag{4.2.4}$$

$$\mu_p(A^c) \leq \frac{Var_{\mu_p}(X)}{\mathbb{E}_{\mu_p}(X)^2} \tag{4.2.5}$$

$$\mu_p(A^c) \leq \mathbb{E}_{\mu_p}(Y) \tag{4.2.6}$$

$$\mu_p(A) \leq \frac{Var_{\mu_p}(Y)}{\mathbb{E}_{\mu_p}(Y)^2} \tag{4.2.7}$$

Toutefois, ces choix de fonctions ne sont pas forcément les meilleurs, ni les plus aisés à manipuler (voir le cas des graphes non équilibrés dans l'exemple 11).
La suite de cette section est consacrée à des exemples d'application du lemme 4.2.1. Nous présentons deux illustrations dans le cas du graphe aléatoire, une dans le cas du graphe cyclique (cf. exemple 2) et une dans le cas de la k-sat (cf. exemple 7). Aucune des démonstrations correspondantes n'est nouvelle (à part, peut-être, celle concernant le graphe cyclique), elles sont l'œuvre de Spencer pour le graphe complet, Creignou et Daudé pour la k-sat, mais nous avons éprouvé le besoin de les faire figurer, afin de les adapter à nos besoins, les commenter, les prolonger et parfois les compléter lègèrement. A travers ces exemples, nous voulons avant tout expliquer les méthodes des deux premiers moments, et les caractéristiques qui les font marcher, ou non. Il faut noter que les méthodes des deux premiers moments ont surtout été utilisées pour découvrir les échelles de localisation, et nous évoquerons ce qu'elle peuvent apporter comme majoration de la largeur de seuil.
Cette présentation est pour nous l'occasion de souligner deux traits des lois du 0-1 qui sont à nos yeux fondamentaux :

- le rôle que joue la taille des éléments minimaux.
- le rôle que joue la géométrie du modèle.

Les différences de comportement entre le graphe aléatoire complet (exemples 11 et 12) et le graphe cyclique (exemple 13) illustrent le rôle de la géométrie du modèle. La présence d'une loi du 0-1 grossière dans l'exemple 11 et d'une loi étroite dans l'exemple 12 témoigne du rôle de la taille des éléments minimaux dans la largeur de seuil. Enfin, nous ne manquerons pas l'occasion de montrer les limites de la méthode du second moment dans l'exemple 14. La présence de la k-sat est également destinée à exposer un problème difficile, où bien des choses restent à découvrir.

Exemple 11 *Apparition de sous-graphes*
Etant donné un graphe H fixé, quelle est la fonction seuil et la largeur de seuil de la propriété d'apparition de ce graphe comme sous-graphe de $\mathcal{G}(n,p)$? Le problème de la fonction seuil est résolu dans l'article d'Erdös et Rényi [26]. Celui de la largeur de seuil sera traité dans la section 4.3. Dans ce qui suit, nous exposons le travail de [60], en insistant sur les points évoqués plus haut.
Considérons, la propriété $A(H)$, pour $\mathcal{G}(n,p)$, de posséder H comme sous-graphe. Notons X_H la fonction qui compte le nombre de copies de H dans le graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$. Soit v le nombre de sommets de H, e le nombre de ses arêtes et $Aut(H)$ son groupe d'automorphismes. On a :

$$\mathbb{E}(X_H) = \binom{n}{v} \frac{v!}{|Aut(H)|} p^e \ ,$$

Par conséquent,

$$\text{Si } p \ll n^{-\frac{v}{e}},\ \mathbb{E}(X_H) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ ,$$

$$\text{Si } p \gg n^{-\frac{v}{e}},\ \mathbb{E}(X_H) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ .$$

Il y a donc un seuil critique pour l'espérance, qui est, à n fixé, une fonction croissante de $\frac{e}{v}$. Lorsque $\mathbb{E}(X_H)$ tend vers 0, le lemme 4.2.1 implique que $\mu_p(A(H))$ tend également vers 0. Il est naturel de se demander si $n^{-\frac{v}{e}}$ n'est pas la fonction seuil de $A(H)$. Autrement dit si, dès que $\mathbb{E}(X_H)$ tend vers l'infini, la probabilité de $A(H)$ tend vers 1. Nous allons voir que ce n'est pas automatique. En effet, considérons un graphe H, à v sommets et e arêtes, contenant un sous-graphe H_1 à v_1 sommets et e_1 arêtes. Supposons que $\frac{e_1}{v_1}$ soit strictement supérieur à $\frac{e}{v}$. On a alors la situation suivante :

$$\text{Si } p \ll n^{-\frac{v}{e}},\ \mathbb{E}(X_H) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \mathbb{E}(X_{H_1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ ,$$

$$\text{Si } n^{-\frac{v}{e}} \ll p \ll n^{-\frac{v_1}{e_1}},\ \mathbb{E}(X_H) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ et } \mathbb{E}(X_{H_1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ ,$$

$$\text{Si } p \gg n^{-\frac{v_1}{e_1}},\ \mathbb{E}(X_H) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ et } \mathbb{E}(X_{H_1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\ ,$$

Remarquons maintenant que si $\mathcal{G}(n,p)$ contient une copie de H, il contient nécessairement une copie de H_1. Par conséquent, $A(H) \subset A(H_1)$, et on a :

$$\mu_p(A(H_1)) \longrightarrow 0 \Rightarrow \mu_p(A(H)) \longrightarrow 0\ .$$

Ainsi, lorsque $n^{-\frac{v}{e}} \ll p \ll n^{-\frac{v_1}{e_1}}$, on a à la fois $\mathbb{E}(X_H) \longrightarrow +\infty$ et $\mu_p(A(H)) \longrightarrow 0$! Ce contre-exemple justifie l'introduction de la définition suivante.

Définition 4.2.2 *Soit H un graphe à v sommets et e arêtes. On appelle* densité *de H et on note $\rho(H)$ le rationnel $\frac{e}{v}$. Si, pour tout sous-graphe H' de H, on a $\rho(H') \leq \rho(H)$, on dit que H est un graphe* équilibré. *On dit qu'il est* strictement équilibré *si ces inégalités sont strictes.*

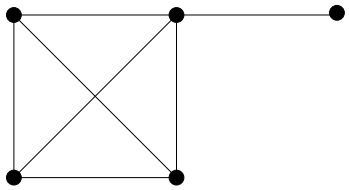

FIG. 4.1 – Un exemple de graphe non équilibré.

L'utilisation de la méthode du second moment va permettre de résoudre notre problème. Résolvons d'abord le cas de l'apparition d'un sous-graphe équilibré :

Théorème 4.2.3 *Soit H un graphe équilibré, et $A(H)$ la propriété pour $\mathcal{G}(n,p)$ de posséder H comme sous-graphe. Alors, $p(n) = n^{-\frac{1}{\rho(H)}}$ est la fonction seuil de $A(H)$.*

En termes plus imagés, si on fait évoluer p de 0 à 1, tant que p est inférieur à $n^{-\frac{1}{\rho(H)}}$ le graphe $\mathcal{G}(n,p)$ ne possède pas H comme sous-graphe (en fait a une chance infime de le posséder), alors que lorsque p est supérieur à $n^{-\frac{1}{\rho(H)}}$, vous pouvez parier qu'il possède une copie de H comme sous-graphe.

Démonstration :

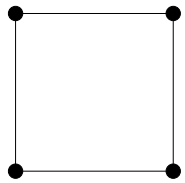

FIG. 4.2- Un exemple de graphe strictement équilibré.

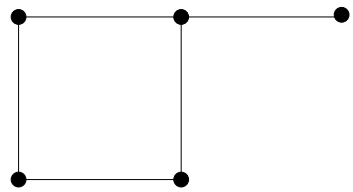

FIG. 4.3- Un exemple de graphe équilibré, mais non strictement équilibré.

Notons v le nombre de sommets de H et e le nombre de ses arêtes. Nous pourrions appliquer le lemme 4.2.1 avec la fonction X_H décrite plus haut. On préfère ici suivre l'exemple de Spencer (cf. [60]) pour des raisons de clarté. Pour tout sous-ensemble de sommets $S \subset \{1, \ldots, n\}$, notons A_S l'événement "$\mathcal{G}$ contient H comme sous-graphe, avec S pour ensemble de sommets". Pour tout graphe H', notons $Aut(H')$ le groupe des automorphismes de H', $\mathcal{V}(H')$ l'ensemble de ses sommets et $|H'|$ le nombre de ses arêtes. On a :

$$\mathbb{P}(A_S) = \sum_{\substack{H \subset H' \\ \mathcal{V}(H')=S}} \frac{v!}{|Aut(H')|} p^{|H'|} (1-p)^{\frac{v(v-1)}{2} - |H'|} .$$

On voit donc que :

$$p^e \leq \mathbb{P}(A_S) \leq v! p^e ,$$

et aussi, si $p = o(1)$, que $\mathbb{P}(A_S)$ est équivalent à

$$\frac{v!}{|Aut(H)|} p^{|H|} .$$

Notons alors I_S la fonction indicatrice de l'ensemble A_S, et X la somme de ces indicatrices, de sorte que $A(H) = \{X \geq 1\}$. On a :

$$X = \sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,n\} \\ |S|=v}} I_S ,$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = \Theta\left(\binom{n}{v} \frac{v!}{|Aut(H)|} p^e \right) = \Theta(n^v p^e) ,$$

Si $p \ll n^{-\frac{v}{e}}$, alors $\mathbb{E}(X) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et on retrouve donc que :

$$\mu_p(A(H)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 ,$$

d'après le lemme 4.2.1.
Supposons maintenant que $p \gg n^{-\frac{v}{e}}$, et tournons nous vers l'examen de la variance de X. On peut effectuer le même raisonnement qui aboutit à l'expression 4.2.1. En effet,

$$Var(X) = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=v}} \mathbb{E}(I_S) - \mathbb{E}(I_S)^2 + \sum_{\substack{S\neq S'\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=|S'|=v}} \mathbb{E}(I_S I_{S'}) - \mathbb{E}(I_S)\mathbb{E}(I_{S'}) \ .$$

Or, si S et S' ont moins de 2 sommets en commun, le nombre $\mathbb{E}(I_S I_{S'}) - \mathbb{E}(I_S)\mathbb{E}(I_{S'})$ est nul. Notons alors $S \sim S'$ si S et S' sont deux sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal v, distincts et ayant au moins deux sommets en commun :

$$\begin{aligned} Var(X) &\leq \mathbb{E}(X) + \sum_{\substack{S\sim S'\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=|S'|=v}} \mathbb{E}(I_S I_{S'}) \ , \\ &= \mathbb{E}(X) + \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=v}} \mathbb{E}(I_S) \sum_{\substack{S'\sim S\subset\{1,\dots,n\}\\|S'|=v}} \frac{\mathbb{E}(I_S I_{S'})}{\mathbb{E}(I_S)} \ , \\ &= \mathbb{E}(X)\left(1 + \sum_{\substack{S'\sim S_0\subset\{1,\dots,n\}\\|S'|=v}} \mathbb{P}\left(A_{S'}|A_{S_0}\right)\right) \ , \end{aligned}$$

par symétrie, en fixant un ensemble de sommets quelconque S_0 de cardinal v. Maintenant,

$$\sum_{\substack{S'\sim S_0\subset\{1,\dots,n\}\\|S'|=v}} \mathbb{P}\left(A_{S'}|A_{S_0}\right) = \sum_{i=2}^{v-1} \sum_{\substack{|S'\cap S_0|=i\\|S'|=v}} \mathbb{P}\left(A_{S'}|A_{S_0}\right) \ .$$

C'est ici que la géométrie du graphe complet joue un rôle important. L'ensemble S_0 étant fixé, il y a $\binom{v}{i}.\binom{n-v}{v-i} = \Theta(n^{v-i})$ choix d'ensembles S' tels que $|S' \cap S_0| = i$. Fixons S_0 et S', il y a $\frac{v!}{|Aut(H)|} = O(1)$ copies possibles de H avec S' comme ensemble de sommets. Considérons le sous-graphe J d'une telle copie ayant pour ensemble de sommets les i sommets communs à S_0 et S'. C'est un sous-graphe de H, or H est équilibré, donc le nombre e_J d'arêtes de J vérifie : $\frac{e_J}{i} \leq \frac{e}{v}$. Donc :

$$e_J \leq \frac{ie}{v} \ .$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(A_{S'}|A_{S_0}\right) = O\left(p^{e-\frac{ie}{v}}\right) \ ,$$

et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{S'\sim S_0\subset\{1,\dots,n\}\\|S'|=v}} \mathbb{P}\left(A_{S'}|A_{S_0}\right) &= \sum_{i=2}^{v-1} O\left(n^{v-i}p^{e-\frac{ie}{v}}\right) \ , \\ &= \sum_{i=2}^{v-1} O\left((n^v p^e)^{1-\frac{i}{v}}\right) \ ,\end{aligned}$$

Supposons que $p \gg n^{-\frac{v}{e}}$. On a alors :

$$\sum_{\substack{S'\sim S_0\subset\{1,\dots,n\}\\|S'|=v}} \mathbb{P}\left(A_{S'}|A_{S_0}\right) = o\left(\mathbb{E}(X)\right) \ ,$$

$$Var(X) = o\left(\mathbb{E}(X)^2\right) \ ,$$

$$\mu_p(A(H)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ ,$$

d'après le lemme 4.2.1. On a bien prouvé que $n^{-\frac{v}{e}}$ est la fonction seuil de $A(H)$. Pour ce qui est de la largeur du seuil, on peut évidemment dire qu'elle est au plus du même ordre que la fonction seuil ! On verra dans la section 4.3 que c'est en fait le bon ordre de grandeur. On n'a donc pas affaire à une loi du 0-1 étroite.

□

La solution générale de l'apparition d'un sous-graphe particulier est alors donnée par le théorème suivant (cf. [60]).

Théorème 4.2.4 *Soit H un graphe quelconque, fixé, et H_1 un sous-graphe de H de densité maximale $\rho(H_1)$. Alors, $p(n) = n^{-\frac{1}{\rho(H_1)}}$ est la fonction seuil pour $A(H)$ (et pour $A(H_1)$).*

0n trouvera dans le tableau 4.1 un résumé du comportement de la probabilité d'apparition d'un graphe et du nombre moyen de copies de ce graphe.

p	0			$n^{-\frac{1}{\rho(H)}}$			$n^{-\frac{1}{\rho(H_1)}}$		
	$\mathbb{E}(X_H)$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mathbb{E}(X_H)$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	$+\infty$	$\mathbb{E}(X_H)$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	$+\infty$
	$\mu_p(A_H)$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mu_p(A_H)$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mu_p(A_H)$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	1
	$\mathbb{E}(X_{H_1})$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mathbb{E}(X_{H_1})$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mathbb{E}(X_{H_1})$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	$+\infty$
	$\mu_p(A_{H_1})$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mu_p(A_{H_1})$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	0	$\mu_p(A_{H_1})$	$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$	1

TAB. 4.1 – Asymptotique de la propriété "contenir une copie de H", pour un graphe H et sous-graphe H_1 de H de densité maximale.

Exemple 12 *Apparition du lien social*
Dans cet exemple, nous nous intéressons à la propriété de $\mathcal{G}(n,p)$,

$$A = \{\text{aucun sommet n'est isolé}\} \ .$$

Le travail exposé est inspiré de Spencer (cf. [60]). Un sommet est dit isolé lorsqu'il n'est relié par une arête à aucun autre sommet. La propriété A est croissante. Il est assez naturel, ici, d'étudier la fonction qui compte le nombre de sommets isolés. Pour tout i de $\{1,\dots,n\}$, on note X_i la fonction indicatrice de l'évènement $\{i \text{ est isolé}\}$, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de sommets isolés :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

On a bien sûr $A = \{X = 0\}$. Calculons l'espérance de X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n(1-p)^{n-1} \ .$$

Si $p \gg \frac{\log n}{n}$, $\mathbb{E}(X)$ tend vers 0, et donc $\mu_p(A^c) = \mu_p(X \geq 1)$ aussi. Calculons la variance de X :

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(X_i)^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \ . \\
&= n\left((1-p)^{n-1} - (1-p)^{2(n-1)}\right) + n(n-1)\left((1-p)^{(n-2)+(n-2)+1} - (1-p)^{2(n-1)}\right) \ , \\
&= \mathbb{E}(X)\left(1 - (1-p)^{n-1} + (n-1)((1-p)^{n-2} - (1-p)^{n-1})\right) \ , \\
&= \mathbb{E}(X)\left(1 - (1-p)^{n-1} + (n-1)p(1-p)^{n-2}\right) \ , \\
&= \mathbb{E}(X)\left(1 + (1-p)^{n-2}(np-1)\right) \ ,
\end{aligned}$$

et si $p = p(n) \ll \frac{\log n}{n}$, cette quantité est de l'ordre de $p(n)\mathbb{E}(X)^2$, ainsi $\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)^2}$ tend vers 0, et d'après le lemme 4.2.1, $\mu_p(A^c)$ tend vers 1. On a donc montré que $\frac{\log n}{n}$ est la fonction seuil pour A. Maintenant, plaçons-nous dans l'intervalle critique. Soit $\varepsilon \in [0,1]$, et $p_\varepsilon = p_\varepsilon(n)$ tel que $\mu_{p_\varepsilon}(A) = \varepsilon$. Alors :

$$1 - \frac{Var_{p_\varepsilon}(X)}{\mathbb{E}_{p_\varepsilon}(X)^2} \leq \mu_{p_\varepsilon}(A^c) \leq \mathbb{E}_{p_\varepsilon}(X) \ .$$

Ainsi :

$$1 - \frac{1}{\mathbb{E}_{p_\varepsilon}(X)} \lesssim 1 - \varepsilon \leq \mathbb{E}_{p_\varepsilon}(X) \ ,$$

ce qui nous donne :

$$1 - \left(\frac{1}{n\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n-1}} \lesssim p_\varepsilon \lesssim 1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \ ,$$

d'où :

$$\frac{\log n}{n} + \frac{\log \varepsilon}{n} \lesssim p_\varepsilon \lesssim \frac{\log n}{n} + \frac{\log \frac{1}{1-\varepsilon}}{n} .$$

De cela, on déduit que la largeur de seuil de niveau ε pour A, $\tau(A, \varepsilon)$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{n}$. On a en effet :

$$p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon \lesssim \frac{2 \log \frac{1}{\varepsilon}}{n} .$$

Cela implique :

$$\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

La propriété A suit donc une loi du 0-1 étroite.

`Remarque`*:*

Nous l'avons déjà dit, il y a toujours une somme d'indicatrices X "canonique" qui est telle que $A = \{X \geq 1\}$, c'est la fonction qui compte le nombre d'éléments minimaux de A contenus dans $\mathcal{G}(n, p)$. Pour autant, rien ne nous assure que ce soit un choix judicieux. Dans cet exemple, il est assez délicat d'essayer de prouver la loi du 0-1 en utilisant cette fonction. En effet, ces éléments minimaux sont de sortes très diverses : ils ne sont pas tous isomorphes. Par contre, la fonction étudiée ici, celle qui compte le nombre de sommets isolés dans $\mathcal{G}(n, p)$, n'est autre que la fonction qui compte le nombre d'éléments maximaux de A^c contenus dans $\mathcal{G}(n, p)$, c'est l'autre choix "canonique" décrit à l'équation 4.2.3.
D'autre part, remarquez que les éléments minimaux de A ont une taille d'au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, et que A suit une loi du 0-1 étroite. Au contraire, dans l'exemple 11, $A(H)$ suit une loi du 0-1 grossière, et ses éléments minimaux sont de taille bornée. Nous verrons dans le corollaire 5.1.4 qu'une propriété disposant d'éléments minimaux de taille bornée ne peut avoir un seuil étroit. La question de savoir si une propriété admet un seuil étroit dès que la taille de ses éléments minimaux n'est pas bornée sera abordée dans la section 5.5.2.

Exemple 13 Dans cet exemple, on s'intéresse à l'analogue de l'exemple 11 pour le graphe cyclique. Les résultats qui suivent se généralisent sans effort au cas du tore, et même aux dimensions supérieures. On choisit de rester dans le cadre du graphe cyclique pour des raisons de simplicité de notation.
Soit l un entier non nul, et $H \in \{0, 1\}^l$. Pour la définition du graphe cyclique aléatoire $\mathcal{C}(n, p)$, on se référera à l'exemple 3. On dit que le graphe cyclique contient le motif H si la configuration du graphe cyclique, $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}}$ est telle qu'il existe $j \in \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ tel que $x_{j+i} = H_i$ pour tout $i = 1, \ldots, l$. On note $A(H)$ la propriété, pour le graphe cyclique à n sommets, de contenir le motif H. Notons k le nombre de 1 dans H. On a le résultat suivant :

Proposition 4.2.5 *La propriété $A(H)$ admet pour fonction seuil :*

$$s(n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \ .$$

Démonstration :

Considérons X_H la fonction comptant le nombre d'éléments minimaux inclus dans le graphe cyclique $\mathcal{C}(n,p)$. Le nombre d'éléments minimaux est un $\Theta(n)$). Nous pouvons évaluer l'ordre de $\mathbb{E}(X_H)$:

$$\mathbb{E}(X_H) = \Theta(np^k) \ .$$

Par conséquent, si $p \ll n^{-\frac{1}{k}}$, $\mathbb{E}(X_H)$ tend vers 0, et $\mathbb{P}(A(H))$ aussi. Supposons maintenant que $p \gg n^{-\frac{1}{k}}$. En fixant un élément minimal m_0, on peut écrire (voir l'équation (4.2.1)),

$$\begin{aligned}
Var(X_H) &\leq \mathbb{E}(X_H)\left(1 + \sum_{m \text{ tq } m\sim m_0} \mathbb{P}\left(m \preceq \mathcal{C}(n,p) | m_0 \preceq \mathcal{C}(n,p)\right)\right) \ , \\
&= \mathbb{E}(X_H)\left(1 + \sum_{m \text{ tq } m\sim m_0} \mathbb{P}\left(m \setminus m_0 \preceq \mathcal{C}(n,p)\right)\right) \ , \\
&= \mathbb{E}(X_H)\left(1 + \sum_{m \text{ tq } m\sim m_0} p^{|m\setminus m_0|}\right) \ , \\
&= \mathbb{E}(X_H)(1 + o(1)) \ ,
\end{aligned}$$

car pour un élément minimal m_0 donné, il n'y a qu'un nombre fixé, borné (par $3k$) d'éléments minimaux m tels que $m \sim m_0$. Comme $\mathbb{E}(X_H)$ tend vers l'infini lorsque $p \gg n^{-\frac{1}{k}}$, on déduit du lemme 4.2.1 que la probabilité de $A(H)$ tend vers 1.

□

Pour ce qui est de la largeur de seuil, on peut voir, à l'aide des méthodes de la section 4.3, qu'elle est du même ordre que la localisation. On a donc affaire à un seuil grossier.
Notons pour finir que ce résultat s'applique à la propriété de contenir un run de k 1 consécutifs, avec k fixé, indépendant de n. La localisation du seuil est alors $n^{-\frac{1}{k}}$.

`Remarque`*:*

Dans la démonstration précédente, on s'aperçoit que la situation est très différente de celle du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$. En effet, dans celui-ci, selon que le graphe est équilibré ou non, le terme de covariance est petit ou non. Cette différence tient essentiellement aux différences de topologies entre $\mathcal{G}(n,p)$ et $\mathcal{C}(n,p)$. En effet, dans $\mathcal{G}(n,p)$, le nombre de voisins d'un sommet quelconque est $n-1$,

alors que dans $\mathcal{C}(n,p)$, il y en a deux. Or, si H et H' sont deux éléments minimaux tels que $H \sim H'$, ils sont nécessairement à distance bornée l'un de l'autre, indépendamment de n. Ceci limite le nombre de choix possibles à un $O(1)$ dans le cas du graphe cyclique, contre un nombre de choix de l'ordre de n^v dans le cas de $\mathcal{G}(n,p)$.
Si l'on espère obtenir des résultats à la fois généraux et fins pour la majoration des largeurs de seuil, il faut nécessairement tenir compte de la géométrie du modèle. Nous discuterons dans la section 5.5.1 le travail de Bourgain et Kalai qui va dans ce sens.

Exemple 14 Examinons le cas de la k-sat défini dans l'exemple 7. Dans toute la suite, on supposera $k \geq 2$. On peut naturellement associer à une formule aléatoire $\mathcal{F}$ le nombre d'assignations qui la rendent vraie. On s'intéresse donc, en assimilant $\{Vrai,\ Faux\}^{\{1,\dots,n\}}$ à $\{0,1\}^n$, à la variable aléatoire suivante :

$$Y = \sum_{\psi \in \{0,1\}^n} \mathbb{1}_{\psi \circ \mathcal{F} = Vrai} \ .$$

On notera A_{ksat} l'ensemble des formules satisfaisables. C'est un ensemble décroissant. La quantité Y est la fonction qui compte les éléments maximaux de A_{ksat} comme le démontre le lemme suivant.

Lemme 4.2.6 *Le nombre d'assignations satisfaisant une formule $\mathcal{F}$ est égal au nombre d'éléments maximaux M de A_{ksat} tels que $M \preceq \mathcal{F}$.*

Démonstration :

Quels sont les éléments maximaux de A_{ksat} ? Ce sont les formules satisfaisables telles que si on rajoute une clause de plus, n'importe laquelle, alors la formule n'est plus satisfaisable. Nous allons voir que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des affectations. Soit $\psi \in \{Vrai,\ Faux\}^{\{1,\dots,n\}}$ une affectation. Si L est une formule logique, on dira que ψ satisfait $\mathcal{L}$ lorsque $\psi \circ \mathcal{F} = Vrai$. Pour tout k-uplet de variables donné, il existe une seule clause de ces k variables que ψ ne satisfait pas, et $2^k - 1$ clauses que ψ satisfait. En effet, prenons par exemple $k = 3$, et ψ telle que :

$$\psi(1) = Vrai,\ \psi(2) = Faux,\ \psi(3) = Faux \ .$$

Alors, la seule clause faisant apparaitre x_1, x_2 et x_3 qui ne soit pas satisfaite par ψ est $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$. Pour toute assignation ψ, notons F_ψ la formule contenant exactement les $(2^k - 1)\binom{n}{k}$ clauses satisfaites par ψ, et aucune autre. Cette formule est bien entendu satisfaisable par ψ, et uniquement par ψ, et c'est la seule formule qui ait cette propriété. De plus, cette formule est maximale. En effet,

on ne peut plus l'augmenter que d'une des $\binom{n}{k}$ clauses que ψ ne satisfait pas. Ainsi, $\psi \mapsto F_\psi$ est une application injective de l'ensemble des assignations vers l'ensemble des éléments maximaux de A_{ksat}. Pour voir la surjectivité de cette application, prenons F une formule maximale de A_{ksat}. Comme F est satisfaisable, notons ψ une assignation qui la satisfait. On a alors $F \preceq F_\psi$, puisque les seules clauses qui ne sont pas dans F_ψ sont les clauses qui ne sont pas satisfaites par ψ. Et comme F est maximale, on a $F = F_\psi$, et la surjectivité de $\psi \mapsto F_\psi$ est démontrée. Il est clair maintenant que compter le nombre d'éléments maximaux qui contiennent la formule aléatoire $\mathcal{F}$ revient à compter le nombre d'affectations qui satisfont $\mathcal{F}$.

□

La fonction seuil de la k-sat peut être calculée à l'aide de la méthode du premier moment, en utilisant les inégalités 4.2.4 et 4.2.6 (cf. [21]). Nous insisterons surtout sur le fait que la méthode du second moment, appliquée à Y, ne marche pas du tout.

Proposition 4.2.7 *La fonction seuil de la k-satisfaisabilité est $\frac{1}{n^{k-1}}$, où n est le nombre de variables booléennes.*

Démonstration :

Etudions le premier moment de Y. On peut écrire :

$$Y = \sum_{\psi \in \{0,1\}^n} \prod_{\substack{\text{clauses } c \text{ tq} \\ \psi \circ \mathcal{F} = Faux}} \mathbb{1}_{\mathcal{F}(c)=0} \ .$$

Or, pour une affectation ψ donnée, le nombre de clauses qui ne sont pas satisfaites par ψ est $\binom{n}{k}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= 2^n (1-p)^{\binom{n}{k}} \ , \\ &= e^{n \log(2) + \binom{n}{k} \log(1-p)} \ . \end{aligned}$$

Si $p \gg \frac{1}{n^{k-1}}$, $\mathbb{E}(Y)$ tend vers 0, et la probabilité que $\mathcal{F}$ soit satisfaisable aussi. On peut même être plus précis. Si $p \geq \frac{\alpha}{n^{k-1}}$, avec $\alpha > k! \log 2$, alors $\mathbb{E}(Y)$ tend vers 0, et la probabilité que $\mathcal{F}$ soit satisfaisable aussi.
Il est naturel de se demander si la méthode du second moment, appliquée à Y, nous assurerait que $\frac{1}{n^{k-1}}$ est une fonction seuil pour A_{ksat}. Nous allons voir que cette méthode échoue dans ce cas précis. Calculons le moment d'ordre 2 de Y :

$$Y^2 = \sum_{\psi,\, \psi' \in \{0,1\}^n} \prod_{\substack{\text{clauses } c \text{ tq} \\ \psi \circ \mathcal{F} = Faux \\ \text{ou } \psi' \circ \mathcal{F} = Faux}} \mathbb{1}_{\mathcal{F}(c)=0} \ .$$

Fixons deux affectations ψ et ψ', et notons l le nombre de variables auxquelles ψ et ψ' affectent la même valeur booléenne. Alors, le nombre de clauses qui ne

sont satisfaites ni par ψ ni par ψ' sont au nombre de $\binom{l}{k}$. En effet, les variables constituant une telle clause sont à choisir dans les variables auxquelles ψ et ψ' donnent la même affectation, sous la forme niée si cette affectation est $Vrai$, sous la forme affirmative si cette affectation est $Faux$. Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 2^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (1-p)^{2\binom{n}{k}-\binom{l}{k}} .$$

On a donc :

$$\frac{Var(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2} = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left((1-p)^{-\binom{l}{k}} - 1\right) .$$

Posons alors $p = \frac{a_n}{n^{k-1}}$. On a, en utilisant la convexité de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^\alpha}$ pour $\alpha > 0$,

$$\frac{1}{(1-p)^{\binom{l}{k}}} - 1 \geq p\binom{l}{k} .$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{Var(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2} &\geq \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{a_n}{n^{k-1}} \binom{l}{k} , \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{a_n}{n^{k-1}} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k} . \end{aligned}$$

Ce dernier terme est un $\Theta(na_n)$. Ainsi, tant que p est au moins de l'ordre de $\frac{1}{n^k}$, la variable aléatoire Y n'est pas concentrée : son écart-type n'est pas petit devant son espérance. Donc la méthode du second moment ne permet pas de montrer que $\frac{1}{n^{k-1}}$ est la fonction seuil de la k-sat.

En fait, il y a un moyen simple de trouver la fonction seuil de A_{ksat}, c'est d'appliquer la méthode du premier moment à la fonction X qui compte le nombre d'éléments minimaux de A^c_{ksat}. Le problème, à première vue, est que ces éléments ne sont pas aussi faciles à caractériser que les éléments maximaux de A_{ksat}. Il revient à Creignou et Daudé (cf. [21]) d'avoir compris la caractéristique suffisante de ces éléments pour minorer de manière efficace l'espérance de X, et ce, pour une classe de problèmes de satisfaisabilité bien plus large que k-sat. Cette caractéristique essentielle est une majoration du nombre de variables intervenant dans une formule minimale de A_{ksat} en fonction du nombre de clauses présentes.
Lorsque k est supérieur ou égal à 3, on peut ainsi prouver l'existence de deux constantes $\alpha < \beta$ telles que :

$$\text{Si } p = \frac{\alpha_1}{n^{k-1}}, \text{ avec } \alpha_1 < \alpha, \text{ alors } \mu_p(A_{ksat}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 , \tag{4.2.8}$$

et

$$\text{Si } p = \frac{\beta_1}{n^{k-1}}, \text{ avec } \beta_1 > \beta, \text{ alors } \mu_p(A_{ksat}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 . \tag{4.2.9}$$

Ce qui implique bien sûr que $\frac{1}{n^{k-1}}$ est une fonction seuil pour la k-sat.

□

Evidemment, un tel comportement suggère fortement de s'intéresser à ce qui se passe entre α et β. Pour un grand nombre de raisons, la plupart des chercheurs travaillant sur la k-sat pensent que le seuil de cette propriété est étroit et n'oscille pas, c'est à dire que la localisation est équivalente à un certain $\frac{c}{n^{k-1}}$. Le fait que le seuil soit étroit a été démontré par Friedgut (cf. [31]) à l'aide de techniques d'analyse harmonique sur lesquelles nous reviendrons dans la partie 5. Le fait que la localisation n'oscille pas n'a pas encore été démontré pour k supérieur ou égal à 3. Cependant, un certain nombre de simulations numériques, ainsi que des techniques empruntées à la physique des verres de spins (cf. les travaux de Monasson et al.[53]) semblent indiquer qu'il existe une localisation précise en $\frac{c}{n^{k-1}}$, c'est à dire que l'on peut prendre $\alpha = \beta = c$ dans les énoncés (4.2.8) et (4.2.9). Précisons enfin que pour $k = 2$, le problème de la localisation et de la largeur de seuil a été résolu en détail par Bollobas, Borgs, Chayes, Kim et Wilson [11], grâce à une structure spécifique du cas $k = 2$ permettant de le voir sous l'angle d'un problème d'apparition de cycles particuliers dans un graphe aléatoire orienté.

4.3 Approximation poissonienne.

Pour ce qui est du comportement asymptotique du graphe aléatoire vis-à-vis d'une propriété donnée, l'objectif ultime est d'obtenir une paire de fonctions de seuil (ou seuil étroit) régulier, avec la fonction de répartition de seuil (ou seuil étroit) correspondante. Dans les résultats précédents on a déduit un comportement d'une propriété A de l'étude d'une variable aléatoire X à valeurs entières qui lui est reliée : en l'ocurrence, une variable qui compte des éléments dont la présence est équivalente au fait que A soit vérifiée. Dans cet esprit a été développé, notamment par Bollobás, Spencer et Janson (voir [10], [60] et [40]) le "paradigme poissonien", qui permet notamment d'atteindre dans certains cas l'objectif ultime mentionné. Si on dispose d'une variable X qui compte le nombre de sous-graphes (ou plus généralement d'éléments de $\{0,1\}^n$) d'un certain type contenus dans $\mathcal{G}(n,p)$, X s'écrit comme la somme d'un grand nombre d'indicatrices. On sait que si ces indicatrices sont indépendantes, et que l'espérance de la somme est maintenue constante, alors X est proche d'une variable de Poisson, dont le paramètre est $\mathbb{E}(X)$. Donc, si ces indicatrices ne sont pas trop corrélées, on peut s'attendre à ce que X se comporte de la même manière, et obtenir : $\mathbb{P}(X = 0) \simeq e^{-\mathbb{E}(X)}$. Si $A = \{X \geq 1\}$, on dispose alors d'une approximation de la probabilité que A soit vérifiée. C'est ce phénomène qui s'est produit dans les exemples 11, 12, et 13 ci-dessus. Pour démontrer une approximation poissonienne, on peut montrer la convergence de tous les moments. Notre but, dans cette section, est plutôt d'insister sur les précisions que ce phénomène peut apporter à l'étude de la largeur de seuil. Nous allons donc utiliser un autre résultat, très élégant, dû à Janson ([39]). Il a l'avantage d'être non-asymptotique, et nous utiliserons cette caractéristique dans l'étude des petits sous-graphes (cf. proposition 4.3.3). Il faut apprécier également sa simplicité d'utilisation. Avant d'énoncer le résultat de Janson, introduisons quelques notations.
L'espace $\{0,1\}^n$ est muni de la probabilité μ_p. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de parties de $\{1,\ldots,n\}$.

Pour tout $m \in \mathcal{M}$, on note I_m la fonction définie sur $\{0,1\}^n$ par :

$$I_m(x) = \mathbb{1}_{\{m \preceq x\}} \ ,$$

et

$$X = \sum_{m \in \mathcal{M}} I_m \ .$$

En d'autres termes, si on pense aux éléments de $\mathcal{M}$ comme à des éléments minimaux d'un ensemble croissant (pour l'ordre $\preceq$), $X(x)$ compte le nombre de ces éléments minimaux qui sont inférieurs à x. Comme dans la preuve du théorème 4.2.3, on notera :

$$m \sim m' \Longleftrightarrow (m \neq m') \text{ et } (m \cap m' \neq \emptyset) \ .$$

Notons également :

$$p_m = \mathbb{E}(I_m) \ ,$$

$$\lambda = \mathbb{E}(X) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathbb{E}(I_m) \ ,$$

et

$$\delta = \frac{1}{\lambda} \sum_{m \sim m'} \mathbb{E}(I_m I_{m'}) \ .$$

Dans [39], Janson démontre le théorème suivant. Il trouve la majoration en effectuant un travail simple et élégant sur la transformée de Laplace de X. La minoration est simplement la conséquence de l'inégalité FKG (cf. proposition 2.1.11).

Théorème 4.3.1 *On a :*

$$e^{\sum_{m \in \mathcal{M}} -\log(1-p_m)} \leq \mathbb{P}(X=0) \leq e^{-\frac{\lambda}{1+\delta}} \ .$$

Ce résultat a de nombreuses applications dans l'étude des graphes aléatoires. On peut également sortir du cadre du graphe aléatoire comme nous le montrerons dans l'exemple 16. Dès que δ et tous les p_m tendent vers 0, alors que l'espérance λ reste constante, on aura une approximation poissonienne, au sens où $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda(1+o(1))}$. Dans la suite de cette section, nous commençons par reprendre les deux exemples 11 et 13 de la section 2.2.

Exemple 15 *Approximation poissonnienne et sous-graphes.*
On peut facilement prouver un résultat d'approximation poissonienne dans le cas des graphes strictement équilibrés (cf. définition 4.2.2), comme cela a été découvert par Erdős et Rényi [26] (voir aussi [9]). Lorsque le graphe H n'est pas strictement équilibré, les expressions asymptotiques de la probabilité que $\mathcal{G}(n,p)$ contienne une copie de H sont plus complexes, en général. Toutefois, lorsqu'il y a un seul sous-graphe de densité maximale, tout se passe comme si la présence de H était équivalente à la présence de ce sous-graphe (cf. [10], p.83).

Théorème 4.3.2 *Soit H un graphe contenant un unique sous-graphe H_1 de densité maximale. Soit v le nombre de sommets de H_1, e son nombre d'arêtes, et a le cardinal de son groupe d'automorphismes. Soit $c > 0$ une constante, et $A(H)$ la propriété que $\mathcal{G}(n,p)$ contienne une copie de H. Alors, pour $p = cn^{-\frac{v}{e}}$, on a :*

$$\mathbb{P}(A(H)) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 - e^{-\frac{c^e}{a}} \ .$$

Remarquez qu'un tel résultat implique nécessairement que la loi du 0-1 correspondante est grossière, et que la largeur du seuil de $A(H)$ est d'ordre $n^{-\frac{v}{e}}$.
En fait, le résultat de Janson permet également de contrôler, de manière non asymptotique, à quel point la probabilité de contenir une copie d'un graphe strictement équilibré est proche de 0 ou 1 lorsque le paramètre p s'écarte de la probabilité critique.

Proposition 4.3.3 *Soit H un graphe équilibré à v sommets, e arêtes et a automorphismes. Notons $p(n) = \left(\binom{n}{v}\frac{v!}{a}\right)^{-\frac{1}{e}}$. On a alors :*

1. *Si H est strictement équilibré,*

$$\mu_{p(n)}(A(H)) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{e} \ ,$$

2. *Si $p < p(n)$,*

$$\mu_p\left(A(H)\right) \leq \left(\frac{p}{p(n)}\right)^e \frac{\log\frac{1}{1-p(n)^e}}{p(n)^e} \ .$$

3. *Si $p > p(n)$,*

$$\mu_p\left(A(H)^c\right) \leq e^{-\frac{1}{va^2}\left(\frac{p}{p(n)}\right)^{\frac{2e}{v}}} \ .$$

Démonstration :

Le premier point est une très légère variante du théorème 4.3.2. Soit X_H la fonction qui compte le nombre de copies de H dans $\mathcal{G}(n,p)$. On peut l'obtenir ainsi : notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des éléments minimaux de la propriété $A(H)$. On a :

$$\forall x \in \{0,1\}^{\frac{n(n-1)}{2}},\ X_H(x) = \sum_{m\in\mathcal{M}} \mathbb{1}_{m\leq x} \ .$$

Le cardinal de $\mathcal{M}$ est $\binom{n}{v}\frac{v!}{a}$. Remarquez que $p(n)$ est choisi de telle sorte que $\mathbb{E}_{p(n)}(X_H) = 1$. On peut appliquer le théorème 4.3.1 :

$$e^{\sum_{m\in\mathcal{M}} -\log(1-p^{|m|})} \leq \mathbb{P}(X=0) \leq e^{-\frac{\lambda}{1+\delta}} \ .$$

On a bien sûr $\mathbb{P}(X = 0) = \mu_p\left(A(H)^c\right)$. Choisissons d'abord un réel p de $]0, p(n)[$. On a donc :

$$\mu_p\left(A(H)^c\right) \geq e^{\binom{n}{v}\frac{v!}{a}\log(1-p^e)} \ .$$

Or la convexité de la fonction $x \mapsto \log(1-x)$ nous permet d'écrire :

$$\log(1-p^e) \geq p^e \frac{\log(1-p(n)^e)}{p(n)^e} \ .$$

Ainsi, en utilisant $e^x \geq 1 + x$:

$$\begin{aligned}
\mu_p\left(A(H)^c\right) &\geq e^{-\binom{n}{v}\frac{v!}{a}\frac{p^e}{p(n)^e}\log\frac{1}{1-p(n)^e}} \ , \\
&= e^{-\left(\frac{p}{p(n)}\right)^e\frac{\log\frac{1}{1-p(n)^e}}{p(n)^e}} \ , \\
&\geq 1 - \left(\frac{p}{p(n)}\right)^e \frac{\log\frac{1}{1-p(n)^e}}{p(n)^e} \ .
\end{aligned}$$

D'où la première inégalité.
Supposons maintenant que p soit supérieur à $p(n)$ et étudions $\delta = \frac{1}{\lambda}\sum_{m\sim m'}\mathbb{E}(I_m I_{m'})$. Notons, pour tout élément minimal m, $\mathcal{V}(m)$ l'ensemble de ses sommets. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{m\sim m'}\mathbb{E}(I_m I_{m'}) &= \sum_{j=2}^{v}\sum_{\substack{m\sim m' \\ |\mathcal{V}(m)\cap\mathcal{V}(m')|=j}}\mathbb{E}(I_{m\cup m'}) \ , \\
&= \sum_{j=2}^{v}\sum_{\substack{m\sim m' \\ |\mathcal{V}(m)\cup\mathcal{V}(m')|=j}} p^{|m\cap m'|} \ , \\
&= \sum_{j=2}^{v}\sum_{\substack{m\sim m' \\ |\mathcal{V}(m)\cap\mathcal{V}(m')|=j}} p^{2e-|m\cap m'|} \ ,
\end{aligned}$$

Le graphe H étant équilibré, on est sûr que lorsque $m \sim m'$ et $|\mathcal{V}(m)\cap\mathcal{V}(m')| = j$:

$$|m \cap m'| \leq j\frac{e}{v} \ .$$

D'autre part, le nombre de couples (m, m') de $\mathcal{M}^2$ vérifiant $m \sim m'$ et $|\mathcal{V}(m) \cap \mathcal{V}(m')| = j$ est inférieur à $n(n-1)\ldots(n-2v+j+1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda\delta &\leq \sum_{j=2}^{v}\sum_{\substack{m\sim m' \\ |\mathcal{V}(m)\cap\mathcal{V}(m')|=j}} p^{2e-j\frac{e}{v}} \ , \\
&= \sum_{j=2}^{v}\sum_{\substack{m\sim m' \\ |\mathcal{V}(m)\cap\mathcal{V}(m')|=j}} p^{2e-j\frac{e}{v}} \ , \\
&\leq \sum_{j=2}^{v} p^{2e} n(n-1)\ldots(n-2v+j+1)p^{-j\frac{e}{v}} \ ,
\end{aligned}$$

Remarquons également que :

$$[n(n-1)\ldots(n-2v+j+1)]^v \leq [n(n-1)\ldots(n-v+1)]^{2v-j} \ .$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lambda\delta &\leq \sum_{j=2}^{v} p^{2e}\left[n(n-1)\dots(n-v+1)\right]^{\frac{2v-j}{v}} p^{-j\frac{e}{v}} \ , \\ &= p^{2e}\left[n(n-1)\dots(n-v+1)\right]^2 \sum_{j=2}^{v}\left(\frac{1}{\left[n(n-1)\dots(n-v+1)\right]p^e}\right)^{\frac{j}{v}} \ .\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\left[n(n-1)\dots(n-v+1)\right]p^e = v!\binom{n}{v}p^e = \lambda a \geq 1,$$

puisqu'on a supposé que $p \geq p(n)$. En minorant grossièrement chaque terme de la somme par le premier terme, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda\delta &\leq p^{2e}\left[n(n-1)\dots(n-v+1)\right]^2 (v-1)\left(\frac{1}{\left[n(n-1)\dots(n-v+1)\right]p^e}\right)^{\frac{2}{v}} \ , \\ &= (a\lambda)^{2-\frac{2}{v}}(v-1) \ .\end{aligned}$$

Donc :

$$\delta \leq (a\lambda)^{1-\frac{2}{v}} a(v-1) \ ,$$

et donc, d'après le théorème 4.3.1,

$$\mu_p\left(A(H)^c\right) \leq e^{-\frac{\lambda}{1+(a\lambda)^{1-\frac{2}{v}}a(v-1)}} \ .$$

Comme $(a\lambda)^{1-\frac{2}{v}}a$ est supérieur à 1, on conclut :

$$\mu_p\left(A(H)^c\right) \leq e^{-\frac{\lambda^{\frac{2}{v}}}{va^2}} \ .$$

La deuxième inégalité en découle.

□

Pour illustrer la proposition 4.3.3, prenons l'exemple du carré. Dès que n est supérieur à 10, le terme $\log \frac{1}{1-p(n)^e}/p(n)^e$ est inférieur à $1 + 3.10^{-4}$, et lorsque n grandit, il se rapproche de 1. Pour les calculs numériques, on peut prendre ce terme égal à 1. La proposition 4.3.3 nous assure alors le résultat suivant :

- Lorsque $p \leq \alpha p(n)$, avec $\alpha < 1$, le graphe aléatoire ne contient pas de carré, avec une probabilité supérieure à $1 - \alpha^4$.
- Lorsque $p \geq \beta p(n)$, avec $\beta > 1$, le graphe aléatoire contient un carré, avec une probabilité supérieure à $1 - e^{-\frac{\beta^2}{16}}$.

Exemple 16 *Approximation poissonienne pour les motifs du graphe cyclique.* Il est aisé de prouver un résultat d'approximation poissonienne pour les propriétés étudiées dans l'exemple 13.

Proposition 4.3.4 *Soit H un motif à e arêtes. Si $p = \frac{c}{n}$, on a :*

$$\mu_p(A(H)) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 - e^{-c^e} \ .$$

Démonstration :

Posons $p = \frac{c}{n^{\frac{1}{e}}}$. D'une part, pour n assez grand, on a :

$$\mathbb{E}(X_H) = np^e \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} c^e \ ,$$

et d'autre part, en fixant un élément minimal m_0 :

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{m \text{ tq } m \sim m_0} \mathbb{P}\left(m \preceq \mathcal{C}(n,p) | m_0 \preceq \mathcal{C}(n,p)\right) \ , \\ &= \sum_{m \text{ tq } m \sim m_0} p^{|m \setminus m_0|} \ , \\ &\leq 3kp \\ &= o(1) \ , \end{aligned}$$

De plus,

$$e^{\sum_{m \in \mathcal{M}} -\log(1-p_m)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} e^{-c^e} \ .$$

Le théorème 4.3.1 nous donne alors, pour n assez grand :

$$(1-p^e)^n \leq \mathbb{P}(A(H)^c) \leq e^{-\frac{np^e}{1+3kp}} \ .$$

Et notamment :

$$\mathbb{P}(A(H)) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 - e^{-c^e} \ .$$

Ceci nous assure notamment que la largeur du seuil de $A(H)$ est d'ordre $\frac{1}{n}$. La propriété $A(H)$ suit donc une loi du 0-1 grossière. Il est tout à fait aisé d'obtenir une proposition analogue à la proposition 4.3.3 pour $A(H)$.

□

`Remarque`*:*

Il est possible d'appliquer ce type de résultats au débruitage d'images. En effet, on peut prendre pour modèle d'images aléatoires l'analogue du graphe cyclique en dimension 2, c'est à dire le tore. Remarquez que les résultats obtenus ici se généralisent sans difficulté au cas du tore, ou même des dimensions supérieures. Nous avons choisi de rester en dimension 1 pour des raisons de simplicité de notation.

Dans [18], Coupier, Desolneux et Ycart établissent le résultat analogue à la proposition 4.3.4 sur les images, puis l'appliquent au débruitage. Leur démonstration utilise une technique différente de celle présentée ici, puisqu'ils montrent

la convergence de tous les moments de la variable X_H vers ceux de la loi de Poisson. Ainsi, la démonstration présentée ici est nouvelle, peut se généraliser à la dimension 2 et l'analogue de la proposition 4.3.3 que l'on peut démontrer pourrait avoir un intérêt particulier dans le débruitage d'images.
Remarquons enfin que Coupier [17] généralise ces résultats d'approximations poissoniennes au modèle d'Ising sur les images.

Chapitre 5

Les approches spécifi quement temporelles.

En 1982, Russo [57], ayant en vue des applications dans le domaine de la percolation, utilise la notion d'influence pour montrer ce qu'il appelle une "loi du 0-1 approchée", très proche des résultats qui nous intéressent ici. L'étude des influences, notamment le lemme traditionnellement appelé "lemme de Russo", est au cœur des approches spécifiquement temporelles que nous présenterons ici. Nous les introduirons dans la section 5.1.
Dans un article de 1988 [41], Kahn, Kalai et Linial montrent qu'il existe nécessairement une influence plus grande que $c\frac{\log n}{n}$, où c est une contante. C'est dans cet article qu'apparaissent pour la première fois les idées d'analyse harmonique dans le calcul des influences. On présentera leur travail dans la section 5.2.
Quelques années après, dans le but d'améliorer et de simplifier le résultat de Russo sur les influences, Talagrand [62] généralise le résultat de Kahn, Kalai et Linial à un p quelconque. Puis Friedgut et Kalai [32] montrent l'intérêt particulier qu'a ce type de résultat dans un certain nombre de cas où intervient une symétrie sur les coordonnées. Ces développements feront l'objet de la section 5.3.
Intéressés par ce résultat très général, nous avons travaillé pour obtenir une preuve plus simple et un meilleur résultat en termes de constantes dans la section 5.4. Nous commençons par obtenir une valeur explicite et nouvelle, en suivant les idées de Friedgut et Kalai, de la constante intervenant dans leur inégalité (section 5.4.1). Puis nous insistons sur les liens qui unissent leur approche avec le concept d'inégalité de Sobolev logarithmique (section 5.4.2). Ceci nous permet de trouver une ligne de preuve nouvelle et prometteuse, exposée dans la section 5.4.3, conduisant à une inégalité presque optimale (section 5.4.4).
Enfin, nous présenterons dans la section 5.5 les suites logiques à donner à ce travail, en suivant les travaux de Bourgain, Friedgut et Kalai [15] et [32].

5.1 Les bases.

Dans cette section nous allons donner les bases de l'approche spécifiquement temporelle en introduisant notamment la notion d'influence et en démontrant le lien qui existe entre les

influences et la largeur de seuil, notamment avec le lemme de Russo.
Une première remarque importante consiste en effet à préciser l'idée selon laquelle la probabilité de A passera d'autant plus rapidement de 0 à 1 que le graphe de la fonction $p \mapsto \mu_p(A)$ aura une pente plus raide près du seuil. On cherchera donc à montrer que $\frac{d\mu_p(A)}{dp}$ est grand devant $\mu_p(A)$ lorsque $\mu_p(A) \leq \frac{1}{2}$, et grand devant $1-\mu_p(A)$ lorsque $\mu_p(A) \geq \frac{1}{2}$. Cela revient au même de montrer que $\frac{d\mu_p(A)}{dp}$ est grand devant $\mu_p(A)(1-\mu_p(A))$. On peut donner une formulation précise avec le lemme suivant.

Lemme 5.1.1 *Soit A un sous-ensemble croissant, non trivial de $\{0,1\}^n$ et a un réel strictement positif. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall p \in [0,1],\ \frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq a\,\mu_p(A)(1-\mu_p(A))$.
(ii) $\forall \alpha \leq \beta \in]0,1[,\ p_\beta - p_\alpha \leq \frac{1}{a}\log\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}$.

En particulier, le lemme 5.1.1 implique que :

$$\forall \varepsilon \in \left]0,\frac{1}{2}\right],\ p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon \leq \frac{2}{a}\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ .$$

Démonstration :

On a :

$$\frac{\frac{d\mu_p(A)}{dp}}{\mu_p(A)(1-\mu_p(A))} \geq a \Longleftrightarrow \frac{d\log\frac{\mu_p(A)}{1-\mu_p(A)}}{dp} \geq a\ .$$

Ce qui implique (ii) en intégrant entre p_α et p_β. Réciproquement,

$$\begin{aligned}(ii) \quad &\Longrightarrow \quad \forall \alpha < \beta \in]0,1[,\ a \leq \frac{\log\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}}{p_\beta - p_\alpha}\ ,\\ &\Longrightarrow \quad \forall p < q \in]0,1[,\ a \leq \frac{\log\frac{\mu_q(A)(1-\mu_p(A))}{\mu_p(A)(1-\mu_q(A))}}{q-p}\ ,\end{aligned}$$

ce qui implique (i) en passant à la limite, q tendant vers p.

□

La deuxième remarque fondamentale est que la dérivée $\frac{d\mu_p(A)}{dp}$ s'exprime à l'aide de la somme des *influences* des coordonnées, que l'on peut voir comme une mesure de la *frontière* de A. Ce fait est bien connu en théorie de la percolation sous le nom de "lemme de Russo". Pour l'énoncer précisément, nous avons besoin de quelques définitions. Désignons par $\delta_k^I A$, pour tout $k = 1,\ldots,n$ l'ensemble des points de A tels que le changement de la k-ième coordonnée les en fait sortir :

$$\delta_k^I A = \{x \in A \text{ t.q. } T_k(x) \notin A\}\ ,$$

où $T_k(x)$ est la configuration y telle que $y_i = x_i$ pour $i \neq k$ et $y_k = 1 - x_k$. L'ensemble $\delta_k^I A$ apparaît comme la frontière intérieure de A relative à la k-ième coordonnée. De même, définissons une frontière extérieure par :

$$\delta_k^E A = \{x \in A^c \text{ t.q. } T_k(x) \in A\}\ ,$$

et la réunion de ces deux frontières :

$$\delta_k A = \delta_k^E A \cup \delta_k^I A \ .$$

L'*influence* de la k-ième coordonnée est une mesure de la frontière relative à la k-ième coordonnée, et donc apparaît logiquement comme une mesure en dimension $n-1$.

Définition 5.1.2 Influence.
Soit $A \subset \{0,1\}^n$. Pour tout $u \in \{0,1\}^{n-1}$, on note :

$$l_k(u) = \{(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0, u_k, \ldots, u_{n-1}) \ , \ (u_1, \ldots, u_{k-1}, 1, u_k, \ldots, u_{n-1})\} \ .$$

On appelle influence de la k-ième coordonnée sur A *et on note $I_A(k)$ le nombre :*

$$I_A(k) = \mu_{n-1,p}\left(\{u \in \{0,1\}^{n-1} \ t.q. \ \mathbb{1}_A \text{ n'est pas constante sur } l_k(u)\}\right) \ .$$

Ou, de manière équivalente,

$$I_A(k) = \mu_{n,p}(\delta_k A) \ .$$

`Remarque`*:*

Lorsque A est un ensemble croissant, on peut remarquer que $I_A(k) = \frac{1}{p}\mu_p(\delta_k^I A) = \frac{1}{1-p}\mu_p(\delta_k^E A)$. Montrons cela pour $k=1$:

$$\begin{aligned}
\mu_p(\delta_k^I A) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \text{ tq} \\ x \in A \text{ et } T_1(x) \notin A}} \mu_p(x) \ , \\
&= \sum_{\substack{x \in A \text{ tq} \\ x_i = 1 \text{ et } T_1(x) \notin A}} \mu_p(x) \ , \\
&= \sum_{\substack{(x_2,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^{n-1} \text{ tq} \\ (1,x_2,\ldots,x_n) \in A \text{ et } (0,x_2,\ldots,x_n) \notin A}} \mu_p(1, x_2, \ldots, x_n) \ , \\
&= p \sum_{\substack{(x_2,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^{n-1} \text{ tq} \\ (1,x_2,\ldots,x_n) \in A \text{ et } (0,x_2,\ldots,x_n) \notin A}} \mu_p(x_2, \ldots, x_n) \ , \\
&= p\mu_{n-1,p}\left(\{u \in \{0,1\}^{n-1} \ t.q. \ \mathbb{1}_A \text{ n'est pas constante sur } l_1(u)\}\right) \ , \\
&= pI_A(1) \ .
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\mu_p(\delta_k^E A) &= \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \text{ tq} \\ x\in A^c \text{ et } T_1(x)\in A}} \mu_p(x) \ , \\
&= \sum_{\substack{x\notin A \text{ tq} \\ x_i=0 \text{ et } T_1(x)\in A}} \mu_p(x) \ , \\
&= \sum_{\substack{(x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1} \text{ tq} \\ (1,x_2,\ldots,x_n)\in A \text{ et } (0,x_2,\ldots,x_n)\notin A}} \mu_p(0,x_2,\ldots,x_n) \ , \\
&= (1-p) \sum_{\substack{(x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1} \text{ tq} \\ (1,x_2,\ldots,x_n)\in A \text{ et } (0,x_2,\ldots,x_n)\notin A}} \mu_p(x_2,\ldots,x_n) \ , \\
&= (1-p)\mu_{n-1,p}(\{u\in\{0,1\}^{n-1} \ t.q. \ \mathbb{1}_A \text{ n'est pas constante sur } l_1(u)\}) \ , \\
&= (1-p)I_A(1) \ .
\end{aligned}$$

Le lemme de Russo montre que la dérivée de $\mu_p(A)$ est égale à la somme des influences (voir [35], p. 35, théorème 2.25). Nous allons en profiter pour donner un résultat un peu plus général. Notons, pour toute fonction f de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$, pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, et tout x de $\in \{0,1\}^n$,

$$\nabla_i f(x) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) \ . \qquad (5.1.1)$$

En fait, il est plus simple de dériver séparément pour chaque coordonnée. Introduisons donc d'autres notations : dans toute la suite, $p, p_1, \ldots, p_n$ étant des réels de $]0,1[$, on notera $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, b_p la mesure de Bernoulli de paramètre p sur $\{0,1\}$, et

$$\mu_{\mathbf{p}} = \bigotimes_{i=1}^n b_{p_i} \ .$$

Enfin, pour tout n-uplet $(y_1,\ldots,y_n)$, on conviendra de noter :

$$y^{(i)} = (y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n) \ .$$

Lemme 5.1.3 *Pour toute fonction f de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$,*

$$\frac{\partial \int f \ d\mu_{\mathbf{p}}}{\partial p_i} = \int \nabla_i f \ d\mu_{\mathbf{p}} \ ,$$

et par conséquent :

$$\frac{d \int f \ d\mu_p}{dp} = \sum_{i=1}^n \int \nabla_i f \ d\mu_p \ ,$$

et, si A est un ensemble croissant :

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} = \sum_{k=1}^n I_A(k) \ .$$

Démonstration :

Notons

$$\mathbf{p}' = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p'_i, p_{i+1}, \ldots, p_n) \ ,$$
$$x \oplus 0_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ ,$$

et

$$x \oplus 1_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ .$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\int f(x) d\mu_{\mathbf{p}'}(x) - \int f(x) d\mu_{\mathbf{p}}(x) \\
&= \int \left(\int f(x) \ db_{p'_i}(x_i) - \int f(x) \ db_{p_i}(x_i) \right) \ d\mu_{\mathbf{p}^{(i)}}(x^{(i)}) \ , \\
&= \int [p'_i f(x \oplus 1_i) + (1 - p'_i) f(x \oplus 0_i) \\
&-p_i f(x \oplus 1_i) - (1 - p_i) f(x \oplus 0_i)] \ d\mu_{\mathbf{p}^{(i)}}(x^{(i)}) \ , \\
&= \int (p'_i - p_i)(f(x \oplus 1_i) - f(x \oplus 0_i) \ d\mu_{\mathbf{p}^{(i)}}(x^{(i)}) \ ,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\frac{\int f(x) d\mu_{\mathbf{p}'}(x) - \int f(x) \ d\mu_{\mathbf{p}}(x)}{p'_i - p_i} = \int \nabla_i f(x) \ d\mu_{\mathbf{p}}(x) \ ,$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre p'_i vers p_i. Lorsque A est croissant, on a, en appliquant ce résultat à $f = \mathbb{1}_A$,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \int \nabla_k f(x) \ d\mu_{\mathbf{p}}(x) = I_A(k) \ .$$

En effet, montrons le pour $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\int \nabla_1 f(x) \ d\mu_{\mathbf{p}}(x) &= \sum_{\substack{(x_2,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^{n-1} \text{ tq} \\ (1,x_2,\ldots,x_n) \in A \text{ et } (0,x_2,\ldots,x_n) \notin A}} \mu_p(x_2, \ldots, x_n) \ , \\
&= \mu_{n-1,p} \left(\{u \in \{0,1\}^{n-1} \ t.q. \ \ \mathbb{1}_A \text{ n'est pas constante sur } l_1(u)\} \right) \ , \\
&= I_A(1) \ .
\end{aligned}$$

Remarquons que si A est croissant et non trivial, $\sum_{i=1}^n \nabla_i \ \mathbb{1}_A$ est toujours positive, et non nulle en au moins un point de $\{0,1\}^n$. Or μ_p charge tous les points de $\{0,1\}^n$, pourvu que p soit différent de 0 et 1. Donc si A est croissant et non trivial, $\frac{d\mu_{\mathbf{p}}(A)}{dp}$ est strictement positive pour tout p de $]0,1[$. Par conséquent, la fonction $p \mapsto \mu_p(A)$ est strictement croissante sur $[0,1]$, résultat qui était annoncé dans le lemme 2.1.3.

□

Une conséquence immédiate de ce résultat et de la remarque 5.1 est qu'une propriété croissante dont la taille des éléments minimaux est bornée a nécessairement un seuil grossier.

Corollaire 5.1.4 *Soit A une propriété croissante dont les éléments minimaux sont de taille inférieure à K. On a :*

$$\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_\varepsilon} \geq \frac{1}{K} \log\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) .$$

Démonstration :

Notons h_A la fonction qui compte, pour les éléments de la frontière intérieure de A, le nombre de coordonnées k par lesquelles on peut "sortir" de A.

$$h_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x \in \delta_k^I A} .$$

D'après la remarque 5.1 et le lemme 5.1.3,

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} = \frac{1}{p} \int h_A(x)\, d\mu_p(x) .$$

Soit x un élément de $\delta_k^I A$. La coordonnée k appartient nécessairement à l'intersection de tous les éléments minimaux de A contenus dans x. Par conséquent, le nombre de coordonnées k telles que x puisse appartenir à $\delta_k^I A$ est inférieur à K. Ainsi :

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} \leq \frac{K}{p} \mu_p(A) ,$$

et donc :

$$\frac{1}{\mu_p(A)} \frac{d\mu_p(A)}{dp} \leq \frac{K}{p} ,$$

D'où, en intégrant l'égalité précédente entre p_ε et $p_{1-\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} &\leq K \log \frac{p_{1-\varepsilon}}{p_\varepsilon} . \\
\frac{p_{1-\varepsilon}}{p_\varepsilon} &\geq \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}} , \\
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_\varepsilon} &\geq \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{K}} - 1 , \\
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_\varepsilon} &\geq \frac{1}{K} \log\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) .
\end{aligned}$$

□

On retrouve avec ce résultat que les seuils des propriétés étudiées dans les exemples 11 et 13 sont nécessairement grossiers.

5.2 Analyse harmonique sur $\left(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\right)^n$: le travail de Kahn, Kalai et Linial.

Les influences (cf. définition 5.1.2) interviennent dans de nombreux domaines : en informatique théorique [44], mais aussi en percolation [7, 8], en théorie du choix, [43] (voir également l'article de revue [42]), en fiabilité (voir la discussion sur le facteur d'influence de Birnbaum dans [54]), etc. Dans un article de 1988, Kahn, Kalai et Linial [41] montrent que sous $\mu_{n,\frac{1}{2}}$, il existe toujours une influence de l'ordre de $\frac{\log n}{n}$ au moins, tant que la probabilité de l'ensemble concerné n'est pas trop proche de 0 ou 1. C'est dans ce travail qu'apparaît l'idée d'utiliser l'analyse harmonique sur $\left(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\right)^n$ pour étudier le problème de la plus grande influence.
Cette section est consacrée à la démonstration de leur théorème (cf. [41]) :

Théorème 5.2.1 *On notera $\mu = \mu_{n,\frac{1}{2}}$, la mesure uniforme sur $\{0,1\}^n$. Il existe une constante universelle C telle que pour tout sous-ensemble croissant A de $\{0,1\}^n$, on ait :*

$$\sum_{k=1}^{n} I_A^2(k) \geq C^2 \frac{(\mu(A)(1-\mu(A)))^2 \log^2 n}{n} \ ,$$

et donc :

$$\sup_{k\in\{1\ldots,n\}} I_A(k) \geq C \frac{\mu(A)(1-\mu(A)) \log n}{n} \ .$$

Démonstration :

On peut identifier $\{0,1\}^n$ à $\left(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\right)^n$, muni de l'addition et la multiplication canoniques. La transformation de Fourier sur les groupes finis (voir par exemple [56]) établit alors un isomorphisme entre $\{0,1\}^n$ et son dual, que l'on décrira avec les parties de $\{1,\ldots,n\}$. Pour $S \subset \{1,\ldots,n\}$,

$$u_S : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & (-1)^{\sum_{i\in S} x_i} \ , \end{array} \right. \tag{5.2.2}$$

est un caractère, c'est à dire un morphisme de groupe de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{C}$. On peut ainsi identifier le dual de $\{0,1\}^n$ à l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$, l'addition correspondant alors à la différence symétrique Δ, et la multiplication à l'intersection. Un résultat classique de la théorie des caractères conclut qu'ils forment une base de l'ensemble des fonctions de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{C}$, orthonormale pour le produit scalaire :

$$< f, g >= \int fg \, d\mu \ .$$

L'espace vectoriel des fonctions de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{C}$ ayant pour dimension $|\{0,1\}^n| = 2^n$, on a obtenu tous les caractères en (5.2.2). On notera α_S le coefficient de Fourier de f en u_S :

$$\alpha_S =< f, u_S > \ .$$

Exprimons tout d'abord la somme des influences $I_A(k)$ en fonction des coefficients de Fourier de $f := \mathbb{1}_A$. On définit pour cela :

$$f_k(T) := f(T) - f(T \triangle \{k\}) \ ,$$

où $T \triangle \{k\}$ est défini comme suit :

$$\forall i \neq k, \ (T \triangle \{k\})_i = T_i, \text{ et } (T \triangle \{k\})_k = 1 - T_k \ .$$

Les fonctions f_k caractérisent les ensembles sur la frontière de A : $f_k^2(T) = 1$ ssi $f(T) \neq f(T \triangle \{k\})$. On a en fait $I_A(k) = \|f_k\|_2^2$. Or,

$$\begin{aligned}
\alpha_{S,k} =< f_k, u_S > &= 2^{-n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f_k(x) u_S(x) \ , \\
&= 2^{-n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f(x) - f(T_k(x)))(-1)^{\sum_{i \in S} x_i} \ , \\
&= 2^{-n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)((-1)^{\sum_{i \in S} x_i} - (-1)^{\sum_{i \in S} (T_k(x))_i}) \ , \\
&= 2 \, \alpha_S \ \mathbb{1}_{k \in S} \ .
\end{aligned}$$

L'égalité de Parseval donne alors :

$$\|f_k\|_2^2 = 4 \sum_{S \ni k} \alpha_S^2 \ ,$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n I_A(k) = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 &= 4 \sum_{k=1}^n \sum_{S \ni k} \alpha_S^2 \ , \\
&= 4 \sum_{S \in \{0,1\}^n} \sum_{k=1}^n \alpha_S^2 \ , \\
&= 4 \sum_S |S| \alpha_S^2 \ .
\end{aligned}$$

Maintenant, comme $\sum_{S \neq \emptyset} \alpha_S^2 = \mu(A)(1 - \mu(A))$, si cette somme n'est pas portée principalement par les α_S pour $|S|$ petit, alors la somme des $I_A(k)$ va être significativement plus grande. Cela pourra être montré pour les f_k, qui ont un support petit, mais non vide : elles sont trop irrégulières pour que $\alpha_{S,k}$ soit toujours petit quand $|S|$ est grand. On voudrait donc avoir des bornes supérieures pour des sommes du type $\sum_{|S| \leq b} \alpha_S^2$. On s'en approche grâce à un lemme dû indépendamment à Bonami et Beckner [6, 1]. Au lieu de majorer $\sum \mathbb{1}_{|S| \leq b} \alpha_S^2$, ce lemme va nous permettre de majorer $\sum \delta^{|S|} \alpha_S^2$, pour $\delta < 1$: $\delta^{|S|}$ sert de poids approchant $\mathbb{1}_{|S| \leq b}$.

Lemme 5.2.2 *L'application :*

$$P_\varepsilon : \begin{array}{ccc} L^{1+\varepsilon^2} & \longrightarrow & L^2 \\ \sum \alpha_S u_S & \longmapsto & \sum \varepsilon^{|S|}\alpha_S u_S \ , \end{array}$$

est de norme 1 si $0 < \varepsilon < 1$.

En appliquant le lemme 5.2.2 à f_k, et en notant $\delta = \varepsilon^2$, on a :

$$\begin{aligned} \| f_k \|_{1+\varepsilon^2} &\geq \left(\sum \varepsilon^{2|S|}\alpha_{S,k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \ , \\ \beta_k^{\frac{2}{1+\delta}} &\geq \sum_S \delta^{|S|}\alpha_{S,k}^2 \ , \\ &= 4\sum_{S\ni k} \delta^{|S|}\alpha_S^2 \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \beta_k^{\frac{2}{1+\delta}} &\geq 4\sum_S \delta^{|S|}|S|\alpha_S^2 \ , \\ &\geq 4\delta^b \sum_{|S|\leq b} |S|\alpha_S^2 \ , \\ &\geq 4\delta^b \left(\sum_{|S|\leq b} \alpha_S^2 - \alpha_\emptyset^2\right) \ , \end{aligned}$$

où b est à choisir, et $\alpha_\emptyset = \mu(A)^2$. Par ailleurs,

$$\sum I_A(k) = 4\sum |S|\alpha_S^2 \geq 4b \sum_{|S|>b} \alpha_S^2 \ .$$

Donc :

$$\delta^{-b}\sum_{k=1}^n I_A(k)^{\frac{2}{1+\delta}} + b^{-1}\sum I_A(k) \geq 4\left(\sum \alpha_S^2 - \mu(A)^2\right) = 4\mu(A)(1-\mu(A)) \ . \tag{5.2.3}$$

On pose $\frac{\lambda^2}{n} = \sum_{k=1}^n I_A(k)^2$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n I_A(k) \leq \lambda. \tag{5.2.4}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Jensen permet d'écrire :

$$\forall r \in]1,2[\ , \ \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n I_A(k)^r\right)^{\frac{2}{r}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n I_A(k)^2 \ .$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} I_A(k)^{\frac{2}{1+\delta}} \leq \lambda^{\frac{2}{1+\delta}} n^{-\frac{1-\delta}{1+\delta}} . \tag{5.2.5}$$

On choisit maintenant $b = \frac{\lambda}{2\mu(A)(1-\mu(A))}$, de telle sorte que (5.2.3) et (5.2.4) impliquent :

$$\delta^{-b} \sum_{k=1}^{n} I_A(k)^{\frac{2}{1+\delta}} \geq 2\mu(A)(1-\mu(A)) . \tag{5.2.6}$$

Si $\delta = \frac{1}{2}$, (5.2.5) et (5.2.6) donnent, en notant que $2\mu(A)(1-\mu(A)) \leq 1$:

$$\begin{aligned}
2^{\frac{\lambda}{2\mu(A)(1-\mu(A))}} \lambda^{\frac{4}{3}} &\geq 2n^{\frac{1}{3}} \mu(A)(1-\mu(A)) , \\
2^{\frac{\lambda}{2\mu(A)(1-\mu(A))}} \left(\frac{\lambda}{2\mu(A)(1-\mu(A))} \right)^{\frac{4}{3}} &\geq n^{\frac{1}{3}} , \\
e^{\frac{\lambda}{2\mu(A)(1-\mu(A))}(\log 2 + \frac{4}{3})} &\geq n^{\frac{1}{3}} , \\
\lambda &\geq C\mu(A)(1-\mu(A)) \log n ,
\end{aligned}$$

avec $C = \frac{2}{3\log 2 + 4}$.

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} I_A(k)^2 \geq C^2 \frac{(\mu(A)(1-\mu(A))^2 \log^2 n}{n} .$$

Il existe donc i tel que :

$$I_A(k) \geq C \frac{\mu(A)(1-\mu(A)) \log n}{n} .$$

□

5.3 La généralisation de Talagrand et les remarques de Friedgut et Kalai.

Pour obtenir une généralisation du théorème 5.2 avec une mesure μ_p au lieu de la mesure uniforme, l'essentiel est de généraliser le lemme de Bonami et Beckner (lemme 5.2.2). Talagrand [62] introduit la base orthonormée $(r_S)_{S \subset \{1,\ldots,n\}}$ de $L^2(\{0,1\}^n, \mu_p)$, définie comme suit. Remarquons que dans le cas $p = \frac{1}{2}$, on retrouve les caractères de la section 5.2 :

$$\forall x \in \{0,1\},\ r(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-p}{p}} & \text{si} \quad x = 1 \\ \sqrt{\frac{p}{1-p}} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

$$\forall x \in \{0,1\}^n,\ r_S(x) = \prod_{i \in S} r(x_i) .$$

Remarquons que :

$$\forall S \subset \{1,\dots,n\},\ \int r_S db_p(x_i) = \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \in S\ , \\ r_S \text{ si } i \notin S\ . \end{array} \tag{5.3.7}$$

Pour obtenir l'analogue des fonctions f_k de Kahn, Kalai et Linial, Talagrand introduit l'opérateur Δ_i défini par :

$$\Delta_i f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-p)\nabla_i f(x) & \text{si } x_i = 1\ , \\ -p\nabla_i f(x) & \text{si } x_i = 0\ , \end{array} \right. , \tag{5.3.8}$$

Grâce à un argument de symétrisation, Talagrand obtient ensuite une généralisation du lemme de Bonami et Beckner. Précisément, il obtient le résultat suivant :

Lemme 5.3.1 *Pour tout nombre $q \geq 2$, pour tout $p \in [0,1]$ et toute famille $(a_S)_{|S|\leq k}$, on a :*

$$\left\| \sum_{|S|\leq k} a_S r_S \right\|_{q,\mu_p} \leq \left(\sqrt{\frac{q-1}{p(1-p)}} \right)^k \left\| \sum_{|S|\leq k} a_S r_S \right\|_{2,\mu_p} .$$

`Remarque`*:*

En fait, ce résultat n'est pas optimal, comme on le verra dans la section 5.4.2.

Puis, il en déduit le théorème suivant.

Théorème 5.3.2 *Il existe une constante K universelle telle que pour tout $p \in [0,1]$ et tout ensemble croissant $A \subset \{0,1\}^n$, on ait :*

$$\sup_{k\in\{1\dots,n\}} I_A(k) \geq K \frac{\mu_p(A)(1-\mu_p(A))\log n}{np(1-p)\log\frac{2}{p(1-p)}} .$$

Si on suit sa démonstration, la constante K obtenue (qu'il ne s'est pas du tout préoccupé d'optimiser) est en fait très mauvaise : elle est inférieure à $\frac{1}{30}$.
A partir de ce résultat, Friedgut et Kalai font la remarque élémentaire que si toutes les influences sont égales, la dérivée $\frac{d\mu_p(A)}{dp}$ est alors supérieure à une constante fois $\mu_p(A)(1-\mu_p(A))\log n$, ce qui donne, par l'intermédiaire du lemme 5.1.1 une largeur de seuil de niveau ε d'au plus $C'\frac{\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n}$, où C' est une contante. Ils ne cherchent pas à calculer cette constante, mais elle est reliée à K par la formule $C' = \frac{2\log 8}{4K}$. Dans leur article [32], ils donnent une collection d'exemples où les influences sont effectivement égales, en commençant par le cas des graphes aléatoires. Ils font notamment la remarque que cette égalité aura lieu, pourvu qu'on demande à A d'être symétrique, au sens de la définition 2.2.1. Ils obtiennent alors le résultat suivant :

Théorème 5.3.3 *Soit A une propriété croissante de $\{0,1\}^n$, symétrique et non triviale. Il existe une constante universelle C' telle que pour tout $\varepsilon \in]0,1/2]$, on a :*

$$\tau(A,\varepsilon) \leq C' \frac{\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n} .$$

Ce résultat découle directement du théorème 5.3.2 à travers les lemmes 5.1.1 et 5.1.3.

5.4 A la recherche de la meilleure constante.

Le but de cette section est de présenter le résultat qu'on a obtenu en vue d'accéder à la meilleure constante possible dans le théorème 5.3.3. Dans l'article de Friedgut et Kalai [32], la valeur ou une majoration de cette constante C' n'est pas donnée. Le but de cette section est de montrer une autre voie pour obtenir le résultat de Friedgut et Kalai, avec une bien meilleure constante que celle que l'on peut obtenir en suivant leur démonstration.
L'objet de la section 5.4.1 sera d'obtenir une première valeur en suivant une démonstration postérieure de Bourgain et Kalai [15], analogue à celle de Friedgut et Kalai. Il n'est pas dit qu'on ne puisse obtenir mieux avec ces méthodes, mais en fait, on verra qu'elles ne sont pas aisées à optimiser en ce qui concerne la valeur de la constante.
Dans la deuxième partie 5.4.2, on présentera les liens étroits entre le phénomène d'hypercontractivité qui est au cœur de la preuve de Friedgut et Kalai, à travers l'extension par Talagrand du lemme 5.2.2, et l'inégalité de Sobolev logarithmique qui forme le noyau de la nouvelle démonstration.
Le développement de cette dernière fera l'objet de la section 5.4.3.
Enfin, dans la section 5.4.4, on se posera la question de la constante optimale que l'on peut espérer obtenir.

5.4.1 Une première valeur.

Dans cette section, on va s'attacher à donner une première valeur pour la constante C' du théorème 5.3.3. Pour cela, on suivra les idées de Bourgain et Kalai [15], en les précisant.

Théorème 5.4.1 *Soit A une propriété croissante et symétrique. Pour tout $\alpha \in [0,1]$, notons p_α la valeur de p telle que $\mu_{p_\alpha}(A) = \alpha$. Il existe une constante universelle $C \leq 7.03$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2]$, on a :*

$$p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon \leq C \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n} \ .$$

Démonstration :

Le noyau dur de cette preuve est toujours le lemme 5.3.1. Dans la suite, on notera :

$$\rho = \sum_{S \neq \emptyset} \alpha_S^2 = \mu_p(A)(1 - \mu_p(A)) \ .$$

Soit $\beta \in [0,1]$, et K, dépendant de β, défini comme suit :

$$K = \inf \left\{ j \in \{1, \ldots, n\} \text{ t.q. } \sum_{0<|S|\leq j} \alpha_S^2 \geq \rho\beta \right\} \ .$$

On définit :

$$g = \sum_{0<|S|\leq K} \alpha_S r_S \ .$$

Nous allons utiliser les opérateurs Δ_i définis en (5.3.8). Remarquons que :

$$\Delta_i r_S = r_S \, \mathbb{1}_{i \in S} \ .$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\rho\beta \leq \sum_{0<|S|\leq K} |S|\alpha_S^2 &= \sum_{S\in E^n} |S| \, \langle f, r_S\rangle \, \langle g, r_S\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{S\ni k} \langle f, r_S\rangle \langle g, r_S\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{S} \langle \Delta_k f, r_S\rangle \, \langle \Delta_k g, r_S\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \Delta_k f, \Delta_k g\rangle \ .
\end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de Hölder avec deux exposants conjugués q et q', tels que $q \in]1,2[$:

$$\rho\beta \leq \sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k f\|_q \|\Delta_k g\|_{q'} \ .$$

On peut choisir de fixer ces exposants, par exemple en prenant $\frac{4}{3}$ et 4. En fait, n'importe quel choix conviendrait, tant que $q \in]1,2[$. Avec le choix indiqué, on obtient :

$$\rho\beta \leq \sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k f\|_{\frac{4}{3}} \|\Delta_k g\|_4 \ .$$

On peut comparer les normes, dans $L^q(\mu_p)$ et $L^2(\mu_p)$ de $\Delta_k f$ pour une fonction indicatrice croissante f à l'aide du lemme suivant :

Lemme 5.4.2 *Si f est une fonction de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$, et $q \in \mathbb{N}$,*

$$\int |\Delta_k f|^q \ d\mu_p = (p(1-p)^q + (1-p)p^q) \int |\nabla_k f|^q \ d\mu_p \ ,$$

Par conséquent, si f est une fonction indicatrice croissante, on a :

$$\int |\Delta_k f|^q \ d\mu_p = ((1-p)^{q-1} + p^{q-1}) \int |\Delta_k f|^2 \ d\mu_p \ . \tag{5.4.9}$$

De l'égalité (5.4.9), on déduit :

$$\|\Delta_k f\|_{\frac{4}{3}} = ((1-p)^{\frac{1}{3}} + p^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} \|\Delta_k f\|_2^{\frac{3}{2}} \leq \sqrt{2} \|\Delta_k f\|_2^{\frac{3}{2}} \ .$$

D'autre part, le lemme 5.3.1 implique :

$$\|\Delta_k g\|_4 \leq C_1^K \|\Delta_k g\|_2 \ ,$$

où :

$$C_1 = \sqrt{\frac{3}{p(1-p)}} \ .$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\rho\beta &\leq \sqrt{2}\, C_1^K \sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k f\|_2^{\frac{3}{2}} \|\Delta_k g\|_2 \\
&\leq \sqrt{2}\, C_1^K \max_i \|\Delta_k g\|_2^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k f\|_2^{\frac{3}{2}} \|\Delta_k g\|_2^{\frac{1}{2}} \ .
\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder entraîne alors :

$$\begin{aligned}
\rho\beta &\leq \sqrt{2}\, C_1^K \max_k \|\Delta_k g\|_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k f\|_2^2 \right)^{\frac{3}{4}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|\Delta_k g\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \sqrt{2}\, C_1^K \max_k \|\Delta_k g\|_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{S} |S| \alpha_S^2 \right)^{\frac{3}{4}} \left(\sum_{|S| \leq K} |S| \alpha_S^2 \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \sqrt{2}\, C_1^K \max_k \|\Delta_k g\|_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{S} |S| \alpha_S^2 \right) \\
&\leq \sqrt{2}\, C_1^K \max_k \|\Delta_k g\|_2^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} I_k(A) p(1-p) \ .
\end{aligned}$$

Or, A étant symétrique, les normes $\|\Delta_k g\|_2$ sont toutes égales :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k g\|_2^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{S \ni j \\ |S| \leq K}} \alpha_S^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{|S| \leq K} |S| \alpha_S^2 \\
&\leq \frac{K}{n} \rho \ .
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\rho\beta \leq \sqrt{2}\, C_1^K \left(\frac{K}{n} \rho \right)^{\frac{1}{4}} I(A) p(1-p) \ ,$$

où on a posé $I(A) = \sum_{k=1}^{n} I_k(A)$. Donc :

$$I(A) p(1-p) \geq \frac{\beta \rho^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}\, C_1^K\, K^{\frac{1}{4}}} \ . \tag{5.4.10}$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} I(A)p(1-p) &\geq K \sum_{|S|\geq K} \alpha_S^2 \\ &\geq K \left(\rho - \sum_{0<|S|\leq K-1} \alpha_S^2 \right) . \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de K :

$$I(A)p(1-p) \geq K\rho(1-\beta) . \tag{5.4.11}$$

Fixons maintenant $\tau \in]0,1[$, et choisissons :

$$\beta = \frac{\left(\frac{(1-\tau)\log n}{2\log \frac{3}{p(1-p)}} \right)^{\frac{5}{4}}}{n^{\frac{\tau}{4}}} .$$

On a alors deux cas possibles :

- Si $K \geq \frac{(1-\tau)\log n}{2\log \frac{3}{p(1-p)}}$, alors d'après (5.4.11),

$$I(A)p(1-p) \geq \rho \frac{(1-\tau)\log n}{2\log \frac{3}{p(1-p)}} (1-\beta) .$$

- Si $K \leq \frac{(1-\tau)\log n}{2\log \frac{3}{p(1-p)}}$, alors on remarque que l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} C_1^x$ est croissante pour $x > 0$ (car $C_1 \geq \sqrt{12}$), et donc en utilisant (5.4.10),

$$\begin{aligned} I(A)p(1-p) &\geq \frac{(1-\tau)\log n}{2\sqrt{2}\log \frac{3}{p(1-p)}} \rho^{\frac{3}{4}} \\ &\geq \frac{(1-\tau)\log n}{2\sqrt{2}\log \frac{3}{p(1-p)}} \rho . \end{aligned}$$

Par exemple, si l'on prend $\tau = \frac{1}{2}$, on obtient que $\beta \leq 0.289$ (le maximum est atteint pour $n = 22026$), et on a alors :

$$I(A) \geq C_2 \frac{\log n}{p(1-p)\log \frac{3}{p(1-p)}} \rho ,$$

avec $C_2 = \frac{1-0.289}{4}$. Or pour tout $p \in [0,1]$:

$$p(1-p)\log \frac{3}{p(1-p)} \leq \frac{\log(12)}{4} ,$$

Donc, dans le premier cas, on a :

$$I(A) \geq \frac{1-0.289}{\log 12} \log n \, \mu_p(A)(1-\mu_p(A)) .$$

Dans le second cas, il suffit de majorer $p(1-p)\log\frac{3}{p(1-p)}$ pour obtenir :

$$I(A) \geq \frac{1}{\sqrt{2}\log 12}\log n\,\mu_p(A)(1-\mu_p(A))\ .$$

Or $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 - 0.289$. On obtient donc, dans les deux cas possibles :

$$I(A) \geq \frac{\log n}{\sqrt{2}\log 12}\,\mu_p(A)(1-\mu_p(A))\ ,$$

En utilisant le lemme 5.1.1, on conclut donc :

$$\forall\varepsilon \in]0,\frac{1}{2}]\ ,\quad p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon \leq C\,\frac{\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n}\ ,$$

avec $C = 2\sqrt{2}\log 12 \leq 7.03$.

□

Cette démonstration n'est pas aisée à optimiser. Elle laisse pourtant le choix, notamment, des exposants q et q', et il n'est pas impossible que des exposants judicieux mènent à de meilleures valeurs pour la constante C. Nous allons néanmoins découvrir un chemin bien plus pratiquable pour obtenir l'amélioration recherchée.

`Remarque`*:*

Dans leur article sur la percolation de premier passage [8], Benjamini, Kalai et Schramm améliorent le résultat principal de Talagrand dans [62] dans le cas où $p = \frac{1}{2}$. Il est facile de généraliser leur résultat à un p quelconque, en utilisant la bonne constante d'hypercontractivité qui découle de la proposition 5.4.11. On peut alors obtenir une version du théorème 5.4.1 où la constante C vaut 2. Dans les chapitres suivants, nous montrons comment obtenir une meilleure constante. Remarquons que la preuve de Benjamini, Kalai et Schramm est plus simple que celles de Friedgut et Kalai, ou Bourgain et Kalai, mais qu'elle utilise toujours la décomposition de l'indicatrice de A sur la base $(r_S)_{S\subset\{1,\dots,n\}}$.

5.4.2 Hypercontractivité et inégalité de Sobolev logarithmique.

Dans cette section, on introduit les notions d'hypercontractivité et d'inégalité de Sobolev logarithmique. Ces deux notions sont liées entre elles, comme le montre le théorème 5.4.8. De même que le lemme de Bonami et Beckner, qui est un résultat d'hypercontractivité, est au cœur de la preuve des théorèmes 5.2.1 et 5.3.3, l'inégalité de Sobolev logarithmique correspondante est au cœur de notre nouvelle démonstration (cf. section 5.4.3).
Rappelons la définition générale d'un semi-groupe et du générateur associé (voir [4] ou [67]). Pour cela, on se donne un espace topologique mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, et un espace vectoriel normé complet de fonctions continues bornées de Ω dans $\mathbb{R}$, que l'on notera $(\mathcal{B}, \|.\|)$. Par exemple,

pour $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathcal{B}$ pourra être l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. C'est le cas qui nous intéressera. On pourra prendre aussi $\Omega = \mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B} = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, muni encore de la norme $\|.\|_\infty$. On supposera toujours que la fonction $\mathbb{1}_\Omega$, constante égale à 1, appartient à $\mathcal{B}$.

Définition 5.4.3 *On dit qu'une famille $(S_t)_{t\leq 0}$ d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{B}$ est un* semi-groupe de Markov *si :*

(i) $S_0 = Id$,
(ii) *pour toute fonction $f \in \mathcal{B},\ t \mapsto S_t f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$* ,
(iii) *pour tous $s,\ t \geq 0, S_{t+s} = S_t \circ S_s$* ,
(iv) $S_t\, \mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_\Omega$ *et $S_t f \geq 0$ pour $f \geq 0$* ,
(v) *pour toute fonction $f \in \mathcal{B},\ \|S_t f\| \leq \|f\|$* .

Définition 5.4.4 *Lorsque la fonction $\frac{1}{t}(S_t f - f)$ admet une limite dans $\mathcal{B}$ lorsque t tend vers 0, on note $\mathbf{L}f$ cette limite. On appelle alors* générateur infinitésimal *l'opérateur $\mathbf{L}$ ainsi défini.*

On définit alors l'hypercontractivité de la manière suivante :

Définition 5.4.5 *Etant donnée une fonction strictement croissante q, de $\mathbb{R}^+$ dans $[q(0), +\infty[$, on dit qu'un semi-groupe $(S_t)_{t\leq 0}$ est* hypercontractif de fonction de contraction q, *si pour toute fonction f de $\mathcal{B}$, et tout $t > 0$,*

$$\|S_t f\|_{q(t)} \leq \|f\|_{q(0)} \ .$$

Cela revient donc à dire que S_t est une contraction de $L^{q(0)} \bigcap \mathcal{B}$ dans $L^{q(t)} \bigcap \mathcal{B}$. Evidemment, une telle définition n'est intéressante que si $L^{q(0)} \bigcap \mathcal{B}$ n'est pas vide. Elle traduit alors une certaine capacité du semi-groupe à "lisser" les fonctions.
La propriété d'hypercontractivité d'un semi-groupe a un un lien étroit avec l'existence d'une inégalité de Sobolev logarithmique. Pour définir ce qu'on entend par là, commençons par définir l'entropie d'une fonction relativement à une mesure μ.

Définition 5.4.6 *Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. On appelle* entropie *d'une fonction f mesurable, par rapport à μ, la quantité, toujours positive, suivante :*

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) := \int_E f(x) \log f(x)\ d\mu(x) - \int_E f(x)\ d\mu(x) \log \int_E f(x)\ d\mu(x)\ .$$

Une inégalité de Sobolev logarithmique est alors définie par une certaine majoration de l'entropie.

Définition 5.4.7 *Soit $\mathbf{L}$ un générateur infinitésimal de mesure invariante μ (c'est à dire que μ est invariante par le semi-groupe de Markov associé à $\mathbf{L}$). On dira que μ satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c si, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$,*

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq c \int -f\mathbf{L}f\ d\mu\ .$$

Le terme $\int -f\mathbf{L}f\ d\mu$ est appelé l'energie *de f associée au générateur $\mathbf{L}$.*

Le lien étroit entre hypercontractivité et inegalité de Sobolev logarithmique est donné par le théorème suivant, dû à Gross [36].

Théorème 5.4.8 *Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Markov admettant μ pour mesure* réversible *(cf. [66] p. 121). Alors, les deux propositions suivantes sont vérifiées :*

(i) S'il existe une constante $c > 0$ telle que le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ soit hypercontractif de fonction de contraction $q(t) = 1 + e^{\frac{4t}{c}}$, alors, la mesure μ satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c.

(ii) Si μ satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $c > 0$, alors pour tout $q(0) > 1$, le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est hypercontractif, de fonction de contraction $q(t) = 1 + (q(0) - 1)e^{\frac{4t}{c}}$.

Si on repense maintenant à la démonstration du théorème 5.2.1, on s'aperçoit que la suite d'opérateurs $(P_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie dans le lemme 5.2.2 forme un semi-groupe de Markov, de mesure stationnaire μ, si on le reparamètre en temps $t = \log \frac{1}{\varepsilon}$. Nous allons construire l'analogue de ce semi-groupe pour tout $p \in [0, 1]$. On définit le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ sur $\{0, 1\}$ d'un processus Markovien de saut binaire, qui passe de 0 à 1 avec taux p et de 1 à 0 avec taux $1 - p$. Son générateur est le suivant (voir par exemple [66]) :

$$\mathbf{H}f(x) := \begin{cases} (1-p)(f(0) - f(1)) & \text{si } x = 1 \ , \\ p(f(1) - f(0)) & \text{si } x = 0 \ . \end{cases} \tag{5.4.12}$$

L'opérateur T_t est égal à $\exp t\mathbf{H}$, et on peut ainsi exprimer le noyau de transition de $(T_t)_{t\geq 0}$. Pour toute fonction f de $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$,

$$T_t f(x) = \sum_{y\in\{0,1\}} f(y)K_t(x, y) \ ,$$

avec :

$$K_t(x, x) = e^{-t} + (1 - e^{-t})b_p(x) \ ,$$

$$K_t(x, y) = (1 - e^{-t})b_p(y) \text{ si } x \neq y \ .$$

Il est facile de voir que b_p est une mesure symétrique et invariante pour ce semi-groupe, c'est à dire que :

$$\forall f,\ g,\ \int gT_t f \ db_p = \int fT_t g \ db_p \ .$$

Puis, on obtient le semi-groupe $(T_{n,t})_{t\geq 0}$ sur $\{0, 1\}^n$, obtenu à partir du précédent "par tensorisation". Si on note $\mathbf{L}_i$ le générateur associé au semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ agissant seulement sur la i-ème variable des fonctions de $\{0, 1\}^n$ dans $\mathbb{R}$, on prend pour générateur de $(T_{n,t})_{t\geq 0}$ l'opérateur $\mathbf{L}$ défini comme la somme de Kronecker des $\mathbf{L}_i$ (cf. [66]) :

$$\mathbf{L} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i \ .$$

Ainsi, $(T_t)_{t\geq 0}$ a pour noyau de transition :

$$K_{n,t}((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \prod_{i=1}^{n} K_t(x_i,y_i) \ ,$$

et on a, pour toute fonction f de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$,

$$T_{n,t}f(x) = \sum_{y\in\{0,1\}^n} f(y)K_{n,t}(x,y) \ .$$

Nous réunissons dans la proposition suivante les propriétés immédiates des opérateurs $\mathbf{L}_i$ et $\mathbf{L}$. Lorsqu'une fonction f est décomposée sur la base (r_S), on voit notamment apparaître le rapport entre l'énergie de f associée au générateur $\mathbf{L}$ et la quantité $\sum_S |S|\alpha_S^2$, fondamentale dans les théorèmes 5.2.1 et 5.4.1.

Proposition 5.4.9

1. *Le générateur $\mathbf{L}_i$ est décrit par :*

$$\mathbf{L}_i f(x) = \begin{cases} -(1-p)\nabla_i f(x) & \textit{si } x_i = 1 \ , \\ p\nabla_i f(x) & \textit{si } x_i = 0 \ . \end{cases}$$

2. *Le générateur $\mathbf{L}_i$ est décrit par :*

$$\mathbf{L}_i f = -\left(f - \int f \ db_p(x_i)\right) \ .$$

3. *Le générateur $\mathbf{L}$ possède une base orthonormée de $L^2\left(\{0,1\}^n,\mu_p\right)$ de fonctions propres qui est constituée des fonctions r_S définies par :*

$$\forall x\in\{0,1\},\ r(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-p}{p}} & \textit{si} \quad x=1 \\ \sqrt{\frac{p}{1-p}} & \textit{si} \quad x=0 \end{cases} \ .$$

$$\forall x\in\{0,1\}^n,\ r_S(x) = \prod_{i\in S} r(x_i) \ .$$

La fonction propre r_S est associée à la valeur propre $|S|$.

4. *Pour toute fonction $f = \sum_S \alpha_S r_S$ de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$, l'énergie de f associée à $\mathbf{L}$ vérifie l'égalité :*

$$\mathbb{E}\left(-f\mathbf{L}f\right) = \sum_S |S|\alpha_S^2 \ .$$

Démonstration :

1. C'est immédiat, vue la définition du générateur $\mathbf{H}$ en 5.4.12.

2. Montrons cela pour $i = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
& -\left(f - \int f \; db_p(x_1)(x)\right) \\
= \; & -p(f(x) - f(1, x_2, \ldots, x_n)) - (1-p)(f(x) - f(0, x_2, \ldots, x_n)) \; , \\
= \; & -p(f(x) - f(1, x_2, \ldots, x_n)) \; \mathbb{1}_{x_1=0} \\
& -(1-p)(f(x) - f(0, x_2, \ldots, x_n)) \; \mathbb{1}_{x_1=1} \; , \\
= \; & -p(f(x) - f(T_1(x))) \; \mathbb{1}_{x_1=0} - (1-p)(f(x) - f(T_1(x))) \; \mathbb{1}_{x_1=1} \; , \\
= \; & \mathbf{L}_1 f(x) \; ,
\end{aligned}$$

d'après le premier point.

3. Grâce au deuxième point, on peut voir facilement que :

$$\mathbf{L}_i r_S = - \; \mathbb{1}_{i \in S} r_S \; .$$

Et donc,

$$\mathbf{L} r_S = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i r_S = - \sum_{i=1}^{n} \; \mathbb{1}_{i \in S} r_S = -|S| r_S \; .$$

Le fait que les fonctions r_S forment une base orthonormée de $L^2\left(\{0,1\}^n, \mu_p\right)$ se vérifie aisément, et a déjà été évoqué au début de la section 5.3.

4. D'après le dernier point, on a, si f s'écrit $\sum_S \alpha_S r_S$,

$$\mathbb{E}\left(-f \mathbf{L} f\right) = \mathbb{E}\left(\sum_S \alpha_S r_S \times \sum_S |S| \alpha_S r_S\right) \; .$$

Comme les fonctions r_S forment une base orthonormée de $L^2\left(\{0,1\}^n, \mu_p\right)$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(-f \mathbf{L} f\right) = \sum_S |S| \alpha_S^2 \; .$$

□

Dans le cas où f est l'indicatrice d'un ensemble croissant, la propriété 5.4.9 nous permet de relier l'énergie de f associée à $\mathbf{L}$ et la dérivée $\frac{d\mu_p(A)}{dp}$.

Lemme 5.4.10 *Si $f = \mathbb{1}_A$, où A est un sous-ensemble croissant de $\{0,1\}^n$, on a, pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$:*

$$-\int f \mathbf{L}_i f \; d\mu_p = p(1-p) \int \nabla_i f \; d\mu_p \; ,$$

$$-\int f \mathbf{L} f \; d\mu_p = p(1-p) \frac{d\mu_p(A)}{dp} \; ,$$

et

$$\int \left(\mathbf{L}_i f\right)^2 \; d\mu_p = p(1-p) \int \nabla_i f \; d\mu_p \; .$$

Démonstration :

D'après la proposition 5.4.9 :

$$\begin{aligned} -\int f\mathbf{L}_i f \; d\mu_p &= \Big(\int (1-p)f(x) \; \mathbb{1}_{x_i=1}\nabla_i f(x) \; d\mu_p(x) \\ &\quad - \int pf(x) \; \mathbb{1}_{x_i=0}\nabla_i f(x) \; d\mu_p(x)\Big) \; . \end{aligned}$$

Or, f étant une fonction indicatrice croissante, on peut voir facilement que :

$$\forall x \in \{0,1\}^n, \; f(x) \; \mathbb{1}_{x_i=1}\nabla_i f(x) = \; \mathbb{1}_{x_i=1}\nabla_i f(x) \; ,$$

et :

$$\forall x \in \{0,1\}^n, \; f(x) \; \mathbb{1}_{x_i=0}\nabla_i f(x) = 0 \; ,$$

En observant que $\nabla_i f(x)$ ne dépend pas de la coordonnée x_i, on obtient :

$$-\int f\mathbf{L}_i f \; d\mu_p = p(1-p)\int \nabla_i f \; d\mu_p \; .$$

Ensuite,

$$-\int f\mathbf{L} f \; d\mu_p = p(1-p)\int \sum_{i=1}^{n} \nabla_i f \; d\mu_p \; .$$

Donc, d'après le lemme 5.1.3,

$$-\int f\mathbf{L} f \; d\mu_p = p(1-p)\frac{d\mu_p(A)}{dp} \; .$$

Pour la dernière égalité, c'est immédiat, en notant que pour une fonction f croissante, $\nabla_i f = (\nabla_i f)^2$.

□

Ainsi, une inégalité de Sobolev logarithmique appliquée à $f = \mathbb{1}_A$ donnerait directement une minoration de $\frac{d\mu_p(A)}{dp}$. On a justement une telle inégalité pour le semi-groupe de générateur $\mathbf{L}$:

Proposition 5.4.11 *Soit $p \in]0,1[$, et f une fonction de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$. On a :*

$$\int f^2 \log f^2 \; d\mu_p - \Big(\int f^2 \; d\mu_p\Big)\log \int f^2 \, d\mu_p \leq c_{LS}(p)\int -f\mathbf{L} f \; d\mu_p \; , \tag{5.4.13}$$

où :

$$c_{LS}(p) = \begin{cases} \frac{\log(1-p)-\log p}{1-p \; -p} \; \textit{si } p \neq \frac{1}{2} \; , \\ 2 \; \textit{si } p = \frac{1}{2} \; . \end{cases}$$

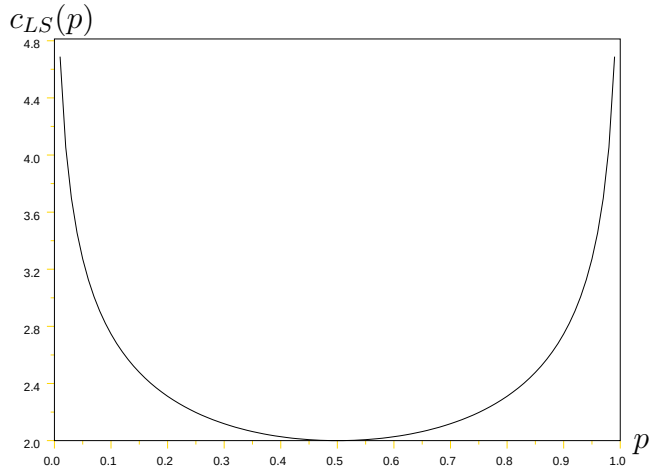

FIG. 5.1 – Valeur de la constante de Sobolev logarithmique $c_{LS}(p)$ en fonction de p.

On trouvera un graphe de la fonction $p \mapsto c_{LS}(p)$ à la figure 5.1. Pour démontrer la proposition 5.4.11, il suffit d'utiliser deux résultats dont on pourra trouver une démonstration, par exemple, dans [4]. Le premier résultat est l'obtention de l'équation (5.4.13) pour $n = 1$. Le second résultat est la propriété 5.4.12, connue sous le nom de "tensorisation de l'entropie". Cette propriété permet sans effort de passer du cas $n = 1$ au cas général lorsque $\mathbf{L}$ est une somme de Kronecker, comme c'est le cas ici.

Proposition 5.4.12 *Soient $(E_i, \mathcal{F}_i, \mu_i, i = 1 \ldots, n)$ n espaces de probabilité et $(E^n, \mathcal{F}^n, \mu_1^n)$ l'espace produit muni de la tribu produit $\mathcal{F}^n$ et de la mesure produit $\mu^n = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$. On a alors :*

$$\boldsymbol{Ent}_{\mu^n}(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\mu^n}(\boldsymbol{Ent}_{\mu_i}(f)) \ ,$$

où la notation $\boldsymbol{Ent}_{\mu_i}(f)$ signifie que seule la i^{eme} variable est concernée par les intégrations.

La minoration obtenue en appliquant directement la proposition 5.4.11 à $f = \mathbb{1}(A)$ n'est pas intéressante, et pour tirer pleinement parti de l'inégalité de Sobolev logarithmique, on peut écrire $f - \int f \ d\mu_p$ comme une somme d'accroissements de martingale (pour la filtration naturelle sur $\{0,1\}^n$), et appliquer la proposition 5.4.11 à chaque accroissement.

5.4.3 Une meilleure constante.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que la largeur de seuil d'une propriété croissante et symétrique est majorée par $\frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{s(n)}$, où $s(n)$ est donnée par :

$$s(n) = \log n - \sup \left\{ \log \left(\frac{\left(\log \frac{n}{(\log n)^2}\right)^{3+\frac{4}{e}}}{8 \left(\frac{2}{e}\right)^{2+\frac{4}{e}}} \right) , \ 2 \log (\log n) \right\} \ . \tag{5.4.14}$$

Remarquez que pour n assez grand (supérieur à 275), on a :

$$s(n) \geq \log n - \left(3 + \frac{4}{e}\right) \log\log \frac{n}{(\log n)^2} \ .$$

Bien sûr, on a également :

$$s(n) \sim \log n \ ,$$

ce qui, asymptotiquement, fait passer la constante de Friedgut et Kalai de 7,03 à 1.
Précisément, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 5.4.13 *Soit A une propriété croissante de $\{0,1\}^n$, symétrique. Pour tout $n \geq 2$,*

$$\forall p \in]0,1[, \ \frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq s(n) \frac{\mu_p(A)(1-\mu_p(A))}{p(1-p)c_{LS}(p)} \ .$$

Si en plus, A n'est pas trivial, on a :

$$\forall \varepsilon \in]0,1/2], \ \tau(A,\varepsilon) \leq \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{s(n)} \ .$$

Un graphe de $p \mapsto p(1-p)c_{LS}(p)$ est donné à la figure 5.2. D'autre part, on trouvera dans les tableaux 5.1 et 5.2 des valeurs de la largeur de seuil maximale donnée respectivement par le théorème 5.4.1 et par le théorème 5.4.13, pour différentes valeurs de ε et de n.

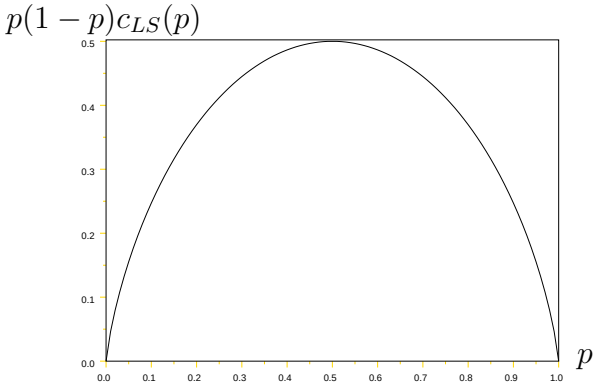

FIG. 5.2 – Graphe de $p \mapsto p(1-p)c_{LS}(p)$.

n	10^3	10^4	10^5	10^{10}	10^{20}	10^{30}
$\varepsilon = 0.1$	2.2356	1.6767	1.3414	0.6707	0.3353	0.2236
$\varepsilon = 0.05$	2.9959	2.2469	1.7975	0.8988	0.4494	0.2996
$\varepsilon = 0.005$	5.3857	4.0393	3.2314	1.6157	0.8079	0.5386

TAB. 5.1 – Largeurs de seuils maximales données par le théorème 5.4.1

n	10^3	10^4	10^5	10^{10}	10^{20}	10^{30}
$\varepsilon = 0.1$	0.7457	0.6784	0.5397	0.1921	0.0714	0.0425
$\varepsilon = 0.05$	0.9993	0.9091	0.7232	0.2575	0.0957	0.0569
$\varepsilon = 0.005$	1.7964	1.6344	1.3001	0.4628	0.1721	0.1023

TAB. 5.2 – Largeurs de seuils maximales données par le théorème 5.4.13

Démonstration :

Soit $f = \sum \alpha_S r_S$ de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ V_j = \mathbb{E}[f|(x_1,\dots,x_j)] - \mathbb{E}[f|(x_1,\dots,x_{j-1})]\ ,$$

De sorte que :

$$f - \mathbb{E}[f] = \sum_{j=1}^{n} V_j\ .$$

A l'aide de l'identité (5.3.7), on obtient le développement de V_j sur la base (r_S).

$$V_j = \sum_{\substack{S \not\ni j+1,\dots,n \\ S \ni j}} \alpha_S r_S\ .$$

Grâce au point (2) de la proposition 5.4.9, on peut également écrire :

$$V_j = \mathbb{E}[-\mathbf{L}_j f|x_1,\dots,x_j]\ . \tag{5.4.15}$$

Appliquons l'inégalité de Sobolev logarithmique à chaque V_j :

$$\begin{aligned} c_{LS}(p) \sum_{\substack{S \not\ni j+1,\dots,n \\ S \ni j}} |S|\alpha_S^2 &\geq \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2)\ , \\ &= \int V_j^2 \log V_j^2\ d\mu_p - \int V_j^2\ d\mu_p \log \int V_j^2\ d\mu_p\ . \end{aligned}$$

Puis, sommons ces inégalités pour j allant de 1 à n. On obtient :

$$c_{LS}(p) \sum_S |S|\alpha_S^2 \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \int V_j^2 \log V_j^2\ d\mu_p}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \parallel V_j \parallel_2^2 \log \frac{1}{\parallel V_j \parallel_2^2}}_{(2)}\ .$$

Notons :

$$I = \sum_S |S|\alpha_S^2 = \int -f\mathbf{L}f \; d\mu_p \; .$$

D'après le lemme 5.4.10,

$$I = p(1-p)\frac{d\mu_p(A)}{dp} \; . \tag{5.4.16}$$

Supposons désormais que f est une fonction symétrique. On peut alors minorer le terme (2) comme suit (la première inégalité est l'application de l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $x \mapsto |x|$) :

$$\begin{aligned} \| \; V_j \; \|_2^2 &\leq \| \; \mathbf{L}_j f \; \|_2^2 \; , \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \| \; \mathbf{L}_j f \; \|_2^2 \; , \\ &= \frac{1}{n} I \; , \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (2) = \sum_{j=1}^n \| \; V_j \; \|_2^2 \log \frac{1}{\| \; V_j \; \|_2^2} &\geq \sum_{j=1}^n \| \; V_j \; \|_2^2 \log \frac{n}{I} \; , \\ &= Var(f) \log \frac{n}{I} \; . \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Découpons maintenant chaque terme de la somme que représente le terme (1) de la façon suivante :

$$\int V_j^2 \log V_j^2 \; d\mu_p = \underbrace{\int V_j^2 \log V_j^2 \; \mathbb{1}_{V_j^2 \leq t} \; d\mu_p}_{(1a)} + \underbrace{\int V_j^2 \log V_j^2 \; \mathbb{1}_{V_j^2 > t} \; d\mu_p}_{(1b)} \; .$$

Remarquons que la fonction $x \mapsto x \log x$ est décroissante sur $[0, \frac{1}{e}]$. Supposons que $t \leq \frac{1}{e^2}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} (1a) = \int 2\,|V_j| \times |V_j| \log |V_j| \; \mathbb{1}_{V_j^2 \leq t} \; d\mu_p &\geq \sqrt{t} \log t \int |V_j| \; \mathbb{1}_{V_j^2 \leq t} \; d\mu_p \; , \\ &\geq \sqrt{t} \log t \int |V_j| \; d\mu_p \; , \end{aligned}$$

car $\sqrt{t} \log t$ est négatif.

Supposons désormais que f est l'indicatrice d'un ensemble symétrique croissant. D'après (5.4.15) et l'inégalité de Jensen, on a :

$$\begin{aligned} \int |V_j| \; d\mu_p &\leq \int |\mathbf{L}_j f| \; d\mu_p \; , \\ &= 2p(1-p) \int |\nabla_j f| \; d\mu_p \; , \\ &= 2 \int -f\mathbf{L}_j f \; d\mu_p \; , \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du lemme 5.4.10, en utilisant l'hypothèse que f est une fonction indicatrice croissante. D'un autre côté, la fonction $\log$ étant croissante,

$$(1b) \geq \log t \int V_j^2 \, d\mu_p \ .$$

En sommant les minorations obtenues, on trouve :

$$\begin{aligned} (1) &\geq 2\sqrt{t}\log t \sum_{j=1}^{n} \int -f\mathbf{L}_j f \, d\mu_p + \log(t) \sum_{j=1}^{n} \int V_j^2 \, d\mu_p \ , \\ &= 2I\sqrt{t}\log t + Var(f)\log(t) \ . \end{aligned}$$

On aimerait choisir t de sorte que cette expression soit maximum. Il est plus simple d'égaler les deux termes dont elle est constituée. On aimerait donc choisir :

$$t = \left(\frac{Var(f)}{2I}\right)^2 \ ,$$

Mais il faut également garantir que t soit inférieur à $\frac{1}{e^2}$. Or, pour l'instant, on ne sait qu'une chose :

$$I \geq \sum_{S \neq \emptyset} \alpha_S^2 = Var(f) \ .$$

On choisit donc :

$$t = \left(\frac{Var(f)}{eI}\right)^2 \ .$$

Ainsi,

$$(1) \geq Var(f) \log \left(\frac{Var(f)}{e\sum_S |S|\alpha_S^2}\right)^{2+\frac{4}{e}} \ . \tag{5.4.18}$$

En regroupant les minorations de (1) et (2), obtenues en 5.4.17 et 5.4.18, on obtient :

$$\begin{aligned} c_{LS}(p)I &\geq Var(f) \log \left(\left(\frac{Var(f)}{e\sum_S |S|\alpha_S^2}\right)^{2+\frac{4}{e}} \frac{n}{I}\right) \\ &\geq Var(f) \log \left(\frac{nVar(f)^{2+\frac{4}{e}}}{e^{2+\frac{4}{e}}\,(I)^{3+\frac{4}{e}}}\right) \ . \end{aligned}$$

La fonction f étant une indicatrice, on peut écrire :

$$1 \geq 4Var(f)$$

D'où :

$$c_{LS}(p)I \geq Var(f) \log \left(\frac{4nVar(f)^{3+\frac{4}{e}}}{e^{2+\frac{4}{e}}\,(I)^{3+\frac{4}{e}}}\right) \ . \tag{5.4.19}$$

Deux cas se présentent alors :

• Soit on a :

$$c_{LS}(p)I \geq Var(f)\log\frac{n}{(\log n)^2}\ ,$$

• Soit on a :

$$c_{LS}(p)I < Var(f)\log\frac{n}{(\log n)^2}\ ,$$

alors, d'après 5.4.19,

$$c_{LS}(p)I \geq Var(f)\log\left(\frac{4nc_{LS}(p)^{3+\frac{4}{e}}}{e^{2+\frac{4}{e}}\left(\log\frac{n}{(\log n)^2}\right)^{3+\frac{4}{e}}}\right)\ ,$$

Dans tous les cas,

$$c_{LS(p)}I \geq \min\left\{Var(f)\log\frac{n}{(\log n)^2},\ Var(f)\log\left(\frac{4nc_{LS}(p)^{3+\frac{4}{e}}}{e^{2+\frac{4}{e}}\left(\log\frac{n}{(\log n)^2}\right)^{3+\frac{4}{e}}}\right)\right\}\ .$$

Remarquons que $c_{LS}(p) \geq 2$. Donc :

$$\begin{aligned} c_{LS(p)}I &\geq \min\left\{Var(f)\log\frac{n}{(\log n)^2},\ Var(f)\log\left(\frac{4n2^{3+\frac{4}{e}}}{e^{2+\frac{4}{e}}\left(\log\frac{n}{(\log n)^2}\right)^{3+\frac{4}{e}}}\right)\right\}\ , \\ &= Var(f).s(n)\ . \end{aligned}$$

Rappelons maintenant (cf. 5.4.16) que :

$$I = p(1-p)\frac{d\mu_p(A)}{dp}\ .$$

On obtient ainsi la première assertion du théorème. Pour la deuxième assertion, remarquez que $s(n)$ (définie en 5.4.14) est positive pour tout $n \geq 2$ et que $p(1-p)c_{LS}(p) \leq \frac{1}{2}$ (cf. figure 5.2). Le résultat découle alors du lemme 5.1.1.

□

5.4.4 Optimalité ou sous-optimalité ?

Pour étudier l'optimalité de la minoration obtenue dans la section 5.4.3, on reprend l'exemple 6 de fiabilité défini dans le chapitre 2.2.

Exemple 17 *Parallèle-série*
L'ensemble des états de panne B_n est bien croissant, et symétrique, et on a :

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = np^{k-1}\left(1-p^k\right)^{\frac{n}{k}-1} .$$

Fixons $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$. Supposons que $\frac{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et que $\mu_p(B_n)$ reste dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$. Alors, nécessairement (p étant lié à n) :

$$p^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Et donc :

$$\left(1-p^k\right)^{\frac{n}{k}-1} = 1-\mu_p(B_n)+o(1) ,$$

$$\frac{n}{k}p^k = \log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)} + o(1) .$$

Ainsi :

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = \frac{k}{p}(1-\mu_p(B_n))\log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)} + o\left(\frac{k}{p}\right) .$$

Et encore :

$$k\log\left(\frac{1}{p}\right) = \log\frac{n}{k\log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)}} + o(1) .$$

Donc :

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = \frac{\log\frac{n}{k\log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)}}}{p\log\left(\frac{1}{p}\right)}(1-\mu_p(B_n))\log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)} + o\left(\frac{\log\frac{n}{k}}{p\log\left(\frac{1}{p}\right)}\right) .$$

Si on suppose, en plus, que $\log k = o(\log n)$, on a alors :

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = \frac{\log n}{p\log\left(\frac{1}{p}\right)}(1-\mu_p(B_n))\log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)} + o\left(\frac{\log n}{p\log\left(\frac{1}{p}\right)}\right) .$$

Remarquons que lorsque p tend vers 0, $p(1-p)c_{LS}(p)$ est équivalent à $p\log\frac{1}{p}$. Dans cet exemple, si on prend $k = o(\log n)$, alors p tend vers 0 si $\mu_p(B_n)$ reste dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$. On aura donc, tant que $\mu_p(B_n)$ reste dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$,

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = \frac{\log n}{p(1-p)c_{LS}(p)}(1-\mu_p(B_n))\log\frac{1}{1-\mu_p(B_n)} + o\left(\frac{\log n}{p(1-p)c_{LS}(p)}\right) .$$

Exemple 18 *Série-parallèle*
L'ensemble des états de panne B_n est bien croissant, et symétrique, et on a :

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = n(1-p)^{k-1}\left(1-(1-p)^k\right)^{\frac{n}{k}-1} .$$

De la même manière que pour le cas Parallèle-série, on fixe $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, et on suppose que $\mu_p(B_n)$ reste dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$. Alors, on montre que, si $\log k = o(\log n)$, on a :

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = \frac{\log n}{(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right)}\mu_p(B_n)\log\frac{1}{\mu_p(B_n)} + o\left(\frac{\log n}{(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right)}\right) .$$

Remarquons que lorsque p tend vers 1, $p(1-p)c_{LS}(p)$ est équivalent à $(1-p)\log\frac{1}{1-p}$. Dans cet exemple, si on prend $k = o(\log n)$, alors p tend vers 1 si $\mu_p(B_n)$ reste dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$. On aura donc, tant que $\mu_p(B_n)$ reste dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$,

$$\frac{d\mu_p(B_n)}{dp} = \frac{\log n}{p(1-p)c_{LS}(p)}\mu_p(B_n)\log\frac{1}{\mu_p(B_n)} + o\left(\frac{\log n}{p(1-p)c_{LS}(p)}\right) .$$

Au vu de ces deux exemples, on se rend compte que le théorème 5.4.13 est assez fin. Il est assez difficile de comparer de façon générale ce résultat avec les exemples 17 et 18, puisque les formes des dérivées au niveau du seuil ne sont pas identiques. En effet, la forme du théorème 5.4.13 est en $\mu_p(A)(1-\mu_p(A))$, alors que les deux exemples ci-dessus sont en $\mu_p(A)\log\frac{1}{\mu_p(A)}$ et $(1-\mu_p(A))\log\frac{1}{1-\mu_p(A)}$. On peut tout de même comparer les dérivées à probabilité $\mu_p(A)$ fixée. Posons :

$$I_n(\varepsilon) = \inf\left\{p(1-p)c_{LS(p)}\frac{d\mu_p(A)}{dp} \text{ tq } A \subset \{0,1\}^n,\ A \text{ symétrique, et } \mu_p(A) = \varepsilon\right\} .$$

Le théorème 5.4.13 affirme que :

$$I_n(\varepsilon) \geq s_n\varepsilon(1-\varepsilon) ,$$

avec s_n équivalente à $\log n$. Les deux exemples ci-dessus nous disent que :

$$I_n(\varepsilon) \lesssim \log(n)\min\left\{\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon},\ (1-\varepsilon)\log\frac{1}{1-\varepsilon}\right\} .$$

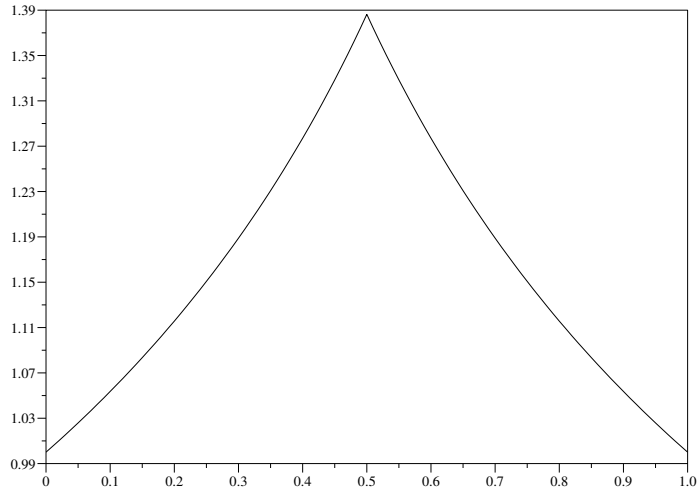

FIG. 5.3 – Graphe de la fonction $\varepsilon \mapsto \frac{\min\left\{\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},\ (1-\varepsilon)\log \frac{1}{1-\varepsilon}\right\}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$.

Le terme $\min\left\{\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},\ (1-\varepsilon)\log \frac{1}{1-\varepsilon}\right\}$ est toujours supérieur ou égal à $\varepsilon(1-\varepsilon)$. On a tracé dans la figure 5.4.4 le quotient $\frac{\min\left\{\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},\ (1-\varepsilon)\log \frac{1}{1-\varepsilon}\right\}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ en fonction de ε. Le maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $2\log(2)$.

La question de l'optimalité reste donc en suspens. Nous n'avons pas réussi à trouver de propriété A telle que $p(1-p)c_{LS}(p)\frac{d\mu_p(A)}{dp}$ soit équivalente à $(\log n)\ .\mu_p(A)(1-\mu_p(A))$ dans l'intervalle de seuil.

`Remarque`*:*

Les calculs développés plus haut pourront être étendus au cas d'une approximation poissonienne plus générale. En effet, supposososons qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs entières telle qu'on ait, dans l'intervalle critique :

$$\mu_p(A) \sim 1 - e^{-\mathbb{E}(X)}\ ,$$

Supposons de plus, pour simplifier, que X s'écrive :

$$X = \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathbb{1}_{m \preceq x}\ ,$$

où les éléments de $\mathcal{M}$ ont tous le même cardinal k. On pourra écrire en général :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_p(A)}{dp} &\sim e^{-\mathbb{E}(X)}\frac{d\mathbb{E}(X)}{dp}\ , \\
&\sim \frac{k}{p}\mathbb{E}(X)e^{-\mathbb{E}(X)}\ , \\
&\sim \frac{k}{p}(1-\mu_p(A))\log\frac{1}{1-\mu_p(A)}\ , \\
&\sim \frac{\log\frac{|\mathcal{M}|}{\mathbb{E}(X)}}{p\log\frac{1}{p}}(1-\mu_p(A))\log\frac{1}{1-\mu_p(A)}\ .
\end{aligned}$$

Ceci donne un seuil de l'ordre de $\frac{\log|\mathcal{M}|}{p\log\frac{1}{p}}$, puisque dans l'intervalle critique, $\mathbb{E}(X)$ reste bornée (on a supposé que $\mu_p(A) = 1 - e^{-\mathbb{E}(X)}$).

5.5 Deux voies à explorer.

Enonçons maintenant deux critiques à l'encontre du théorème 5.4.13. Premièrement, le théorème ne tient pas compte de la taille, ou d'autres spécificités, du sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ par lequel une propriété symétrique A est invariante. Pourtant, nous avons vu dans l'exemple 1 que si ce sous-groupe est $\mathcal{S}_n$ tout entier, la largeur de seuil est nécessairement d'ordre inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Nous avons également vu que dans le cas du groupe produit $\mathcal{S}_{\log n} \times \mathcal{S}_{\frac{n}{\log n}}$ (cf. exemples 18 et 17), l'ordre de largeur de seuil $\frac{1}{\log n}$ peut être atteint. Il est alors tentant de chercher un résultat semblable au théorème 5.4.13, mais qui tienne compte du sous-groupe d'invariance de A. Un début de réponse est apporté par le théorème 5.5.1, dû à Bourgain et Kalai [15], résultat présenté dans la section 5.5.1.
La deuxième critique que l'on peut faire au théorème 5.4.13 est qu'il est souvent incapable de détecter un seuil étroit. En effet, dès que la probabilité critique $p_{\frac{1}{2}}$ d'une propriété A est au plus de l'ordre d'une puissance négative de n, la minoration de la dérivée obtenue ne permet pas de conclure que $\frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}}$ tend vers 0 dans l'intervalle de seuil. Une première réponse à ce problème est apportée par le théorème 5.5.4 dû à Friedgut, présenté dans la section 5.5.2.

5.5.1 Le travail de Bourgain et Kalai.

Cette section est destinée à présenter le résultat suivant de Bourgain et Kalai [15] qui relie les largeurs maximales de seuil à une caractéristique du groupe d'invariance, définie comme suit. Soit G un groupe de permutations agissant transitivement sur $\{1,\dots,n\}$. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ définissons $\phi(k)$ par :

$$\phi(k) = \phi_G(k) = \min_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=k}} \log_2\left(\,|\{\sigma(S) \text{ t.q. } \sigma\in G\}|\,\right)\ ,$$

où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2. Pour tout $\tau \geq 0$, posons alors :

$$a_\tau(G) = \sup\left\{\phi(k) \text{ t.q. } \phi(k) > k^{1+\tau}\right\} \ .$$

Théorème 5.5.1 *Soit G un groupe de permutations agissant transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout $\tau > 0$, il existe une constante $c_\tau > 0$ telle que, pour toute propriété monotone A de $\{0,1\}^n$ invariante sous G :*

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} > c_\tau a_\tau(G)\mu_p(A)(1-\mu_p(A)) \ ,$$

pourvu que $p(1-p)$ reste éloigné de 0 au sens où :

$$\log\left(\frac{1}{p(1-p)}\right) \leq C^{te} \log\log n \ .$$

Par conséquent, la largeur du seuil pour une telle propriété A est au plus :

$$p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon \leq \frac{2\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{c_\tau a_\tau(G)} \ .$$

Ce résultat leur permet, dans le même article [15], de garantir des largeurs de seuil un peu plus fines que $\frac{1}{\log n}$ à partir de considérations algébriques sur le groupe G. Par exemple, on obtient, dans le cas des graphes, que pour tout $\tau > 0$, il existe une constante $C_\tau > 0$ telle que pour toute propriété de graphe croissante, la largeur du seuil soit majorée par $\frac{\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{C_\tau(\log n)^{2-\tau}}$. Ceci est presque fin pour ce qui concerne les graphes, puisqu'on peut montrer que la propriété de contenir une clique (graphe complet) de taille $\lfloor \log n \rfloor$ admet un seuil de largeur $\frac{1}{(\log n)^2}$. Néanmoins, ce résultat n'est pas toujours fin. En effet, pour le groupe de permutations $\mathcal{S}_n$ tout entier, il donne une largeur de seuil maximale de l'ordre de $\frac{1}{(\log n)^M}$, pour M quelconque, mais fixé. La largeur de seuil maximale est pourtant de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Dans l'article déjà cité [15], il est fait mention d'une certaine optimalité du théorème 5.5.1. Nous voudrions ici préciser un peu ce point. Pour cela, il faut commencer par remarquer qu'il existe toujours une propriété invariante par G et dont le seuil soit d'ordre $\frac{1}{a_0(G)}$. Remarquez que le théorème 5.5.1 n'est pas valable lorsque $\tau = 0$. Plus précisément, on a le résultat suivant (qui corrige une preuve de l'article original) :

Proposition 5.5.2 *Pour tout sous-groupe de permutation G, il existe une propriété A invariante par G et dont la largeur de seuil est d'ordre plus grand que $\frac{1}{2a_0(G)}$.*

Démonstration :

Soit S un élément de $\{0,1\}^n$ qui vérifie :

$$|G(S)| = \min_{T \text{ tq } |T|=|S|} |G(T)|, \text{ et } \log_2|G(S)| \geq |S| \ , \tag{5.5.20}$$

et qui soit de taille maximale pour cette propriété :

$$\forall S' \in \{0,1\}^n,\ |S'| > |S| \Rightarrow \begin{cases} \log_2|G(S')| < |S'| \\ \text{ou} \\ |G(S')| > \min_{T \text{ tq } |T|=|S'|} |G(T)| \end{cases}$$

Remarquons que l'élément $(1, \ldots, 1)$ ne vérifie pas l'équation (5.5.20), et donc :

$$|S| \leq n - 1 \ .$$

Soit S' un élément de $\{0,1\}^n$ tel que $|S'| = |S| + 1$ (il en existe d'après la remarque précédente) et dont le cardinal de l'orbite sous G soit minimale parmi les éléments de cardinal $|S| + 1$. D'après la propriété de maximalité de S, on a :

$$\log_2 |G(S')| \leq |S'| - 1 = |S| \leq \log_2 |G(S)| \ .$$

Considérons la propriété :

$$A = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq } \exists T \in G(S') T \preceq x\} \ .$$

Notons X la fonction qui associe à x le nombre d'éléments minimaux de A qu'il contient.

$$X(x) = \sum_{T \in G(S')} \mathbf{I}_{T \preceq x} \ .$$

On a :

$$\begin{aligned} \mu_{\frac{1}{2}}(A) &\leq \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(X) \ . \\ &= |G(S')| 2^{-|S'|} \ , \\ &\leq \frac{1}{2} \ , \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\log_2 |G(S')| \leq |S'| - 1$. Par conséquent,

$$p_{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \ .$$

On peut alors appliquer le lemme 5.1.4 :

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} \leq \frac{|S'|}{p} \mu_p(A) \ ,$$

Donc :

$$\forall p \geq p_{\frac{1}{2}}, \ \frac{d\mu_p(A)}{dp} \leq 2|S'| \mu_p(A) \ .$$

Or $|S'| = |S| + 1 \leq \log_2 |G(S)| + 1$. Donc :

$$\forall p \geq p_{\frac{1}{2}}, \ \frac{d\mu_p(A)}{dp} \leq 2(\log_2 |G(S)| + 1) \mu_p(A) \ .$$

D'où, en intégrant entre $p_{\frac{1}{2}}$ et $p_{1-\varepsilon}$,

$$p_{1-\varepsilon} - p_{\frac{1}{2}} \geq (2(1-\varepsilon))^{\frac{1}{2(\log_2 |G(S)|+1)}} \geq \frac{1}{2(\log_2 |G(S)| + 1)} \log\left(2(1-\varepsilon)\right) \ .$$

Et donc :

$$\tau(A, \varepsilon) \geq \frac{1}{2(\log_2 |G(S)| + 1)} \log\left(2(1-\varepsilon)\right) \ .$$

□

La proposition 5.5.2 ne donne pas toujours une minoration fine de la plus grande largeur de seuil pour un groupe donné. Par exemple, dans le cas du groupe symétrique tout entier, on a :

$$a_0(G) = \sup\left\{\log_2\binom{n}{k},\ k \text{ tq } O \leq k \leq n \text{ et } \log_2\binom{n}{k} \geq k\right\} .$$

Or, en utilisant la formule de Stirling,

$$\log_2\binom{n}{\frac{n}{2}} = n - \frac{1}{2}\log_2 2\pi n + o(1) ,$$

ce qui est supérieur à $\frac{n}{2}$ pour n assez grand. Donc, pour n assez grand,

$$a_0(G) = n - \frac{1}{2}\log 2\pi n + o(1) .$$

La proposition 5.5.2 donne alors une minoration de la largeur de seuil maximale qui est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, ce qui est beaucoup trop petit.
Par contre, dans le cas du groupe cyclique, on obtient quelque chose de fin. En effet, remarquons que

$$|G((1,0,\ldots,0))| = n ,$$

et pour tout élément S de $\{0,1\}^n$,

$$\log|G(S)| \leq \log|G| = \log n .$$

Donc, on obtient :

$$\forall\tau \geq 0,\ a_0(G) = a_\tau(G) = \log n .$$

D'autre part, on sait que la largeur de seuil peut être de l'ordre de $\frac{1}{\log n}$, notamment dans le cas des runs de $\log n$ "1" consécutifs (cf. exemple 4).
En fait, il est montré dans l'article de Bourgain et Kalai que la minoration de la proposition 5.5.2 est "assez fine" pour tous les groupes primitifs, sauf pour $\mathcal{A}_n$ (le groupe alterné) et $\mathcal{S}_n$. Les groupes primitifs sont les groupes de permutations G transitifs sur $\{1,\ldots,n\}$ tels que les seules partitions de $\{1,\ldots,n\}$ qui soient laissées invariantes par G sont les partitions triviales (l'ensemble des singletons et $\{\{1,\ldots,n\}\}$). Précisons ce qu'on entend par "assez fine". Notons, pour ε dans $]0,\frac{1}{2}]$:

$$T(G,\varepsilon) = \sup\{\tau(A,\varepsilon) \text{ tq } A \text{ soit } G-\text{invariante}\} .$$

Le théorème 5.5.1 et la proposition 5.5.2 impliquent que :

$$\forall\tau > 0,\ \frac{C_\tau}{a_\tau(G)} \geq T(G,\varepsilon) \geq \frac{1}{3a_0(G)} .$$

Pour plusieurs groupes primitifs, Bourgain et Kalai montrent que a_τ ne dépend pas de τ. Pour tous les autres (sauf $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$), ils trouvent des majorations de a_τ et des minorations de a_0 très proches l'une de l'autre. Sans rentrer dans le détail, ces minorations sont du type $a_0(G) \leq$

$\Theta\left((\log n)^{1+\frac{1}{r}}\right)$ et $a_\tau(G) \geq \Theta\left((\log n)^{1+\frac{1-\tau}{r}}\right)$, où r est un entier naturel. Ils obtiennent ainsi une description assez complète des plus grandes largeurs de seuil possibles pour un groupe primitif donné.
Une question, principalement, demeure posée. Est-il possible d'améliorer le théorème 5.5.1 de manière à recouvrir de manière fine le cas des groupes $\mathcal{A}n$ et $\mathcal{S}_n$? Peut-être les techniques mises en œuvre dans la preuve du théorème 5.4.13 peuvent-elles nous-y aider.

5.5.2 Le travail de Friedgut et Bourgain : comment caractériser les seuils étroits à partir des éléments minimaux ?

Revenons au seul résultat général relatif aux seuils grossiers dont on dispose. Le corollaire 5.1.4 dit en substance qu'une propriété dont les éléments minimaux sont de taille bornée indépendamment de n a un seuil grossier. La première idée naïve qui vient à l'esprit est que ce sont les seules propriétés ayant un seuil grossier, et que dès que les éléments minimaux d'une propriété ont une taille tendant vers l'infini, cette propriété a un seuil étroit. Un moment de réflexion permet de se rendre compte que cette idée est un peu hâtive. En effet, il y a beaucoup de propriétés grossières dont le seuil se déclenche à un endroit où la taille des éléments est grande, autrement dit, des propriétés A de $\{0,1\}^N$, avec $N = N(n)$, pour lesquelles Np_ε tend vers l'infini. Notons alors a_n une suite qui tend vers l'infini et qui est négligeable devant Np_ε. La concentration de la mesure $\mu_{N,p}$ permet en général de dire que la nouvelle propriété $B = \{x \in A \text{ tq } |x| \geq a_n\}$ a un seuil de même nature que celui de A , et situé essentiellement à la même localisation. Donc B aura un seuil grossier, et ses éléments minimaux ont une taille qui tend vers l'infini.
Pour préciser cela, prenons l'exemple de la propriété $A =$"contenir un triangle" du graphe aléatoire $\mathcal{G}(n,p)$. Notons $\alpha(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ le nombre d'arêtes du graphe complet. Nous avons vu dans le chapitre 4.3 que :

$$\forall c \in \mathcal{R}+,\ \mu_{\alpha(n),\frac{c}{n}}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{-c^3}{6}} .$$

Ainsi, la transition de A se "déclenche" lorsque p est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. A ce moment-là, le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{G}(n,p)$ est de l'ordre de n. Posons alors :

$$B = \{x \in A \text{ tq } |x| \geq \log n\} .$$

On a :

$$\mu_p(A) \geq \mu_p(B) \geq \mu_p(A) - \mu_p\left(\sum_{i=1}^{\alpha(n)} x_i < \log n\right) .$$

Lorsque $p = \frac{c}{n}$, la concentration de la mesure $\mu_{p,\alpha(n)}$ implique que le dernier terme de l'équation ci-dessus est négligeable. Pour préciser cela, utilisons une version fine de l'inégalité de déviation classique pour les binomiales (cf. [59], p. 854) :

Proposition 5.5.3 *Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(N,p)$, $Y = \frac{X-np}{\sqrt{n}}$, et λ un réel positif. Alors :*

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2 g(p)} \ , \tag{5.5.21}$$

$$\mathbb{P}(Y \leq -\lambda) \leq e^{-\lambda^2 g(1-p)} \ , \tag{5.5.22}$$

$$\textit{avec} \ \ g(p) = \begin{array}{ll} \frac{1}{1-2p}\log\frac{1-p}{p} & \textit{si } 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \ , \\ \frac{1}{2p(1-p)} & \textit{si } \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \ . \end{array}$$

On a alors, pour $p = \frac{c}{n}$, en utilisant l'équation 5.5.22 :

$$\begin{aligned} \mu_p\left(\sum_{i=1}^{\alpha(n)} x_i < \log n\right) &= \mu_p\left(\frac{\sum_{i=1}^{\alpha(n)} x_i - \alpha(n)p}{\sqrt{\alpha(n)}} < -\left(c\frac{\sqrt{\alpha(n)}}{n} - \frac{\log n}{\sqrt{\alpha(n)}}\right)\right) \\ &\leq e^{-\frac{\left(c\frac{\sqrt{\alpha(n)}}{n} - \frac{\log n}{\sqrt{\alpha(n)}}\right)^2}{2\frac{c}{n}(1-\frac{c}{n})}} \ , \\ &= o(1) \ , \end{aligned}$$

puisque $\frac{\sqrt{\alpha(n)}}{n} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, B et A ont les mêmes transitions.
Néanmoins, Friedgut a pu démontrer un résultat qui prend en compte ce genre de cas "artificiels" (théorème 1.1 dans [31]). Dans cet énoncé, on appelle graphe minimal d'une propriété B_n un élément minimal de B_n, c'est à dire un graphe qui la satisfait et dont aucun sous-graphe ne la satisfait. On notera $\|B_n\|$ la plus grande taille (i.e. le plus grand nombre d'arêtes) des graphes minimaux de B_n.

Théorème 5.5.4 *Il existe une fonction $k(\delta, c)$, telle que pour tout $c > 0$, pour tout entier n, toute propriété de graphe A_n telle que $p\frac{d\mu_p(A_n)}{dp} \leq c$, pour tout $\delta > 0$, il existe une propriété de graphe croissante B_n telle que $\|B_n\| \leq k(\delta, c)$ et $\mu_p(A_n \Delta B_n) \leq \delta$ (Δ désigne la différence symétrique).*

Pour relier ce résultat à la définition 2.1.5, il suffit d'observer que la dérivée de $\mu_p(A_N)$ est l'inverse de la dérivée de la fonction réciproque, qui à γ associe p_γ. Majorer $p\frac{d\mu_p(A_N)}{dp}$ revient donc à minorer $\frac{1}{p_\gamma}\frac{dp_\gamma}{d\gamma}$, ce qui entraîne un seuil grossier.
Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 5.5.5 *Soit $A \subset \{0,1\}^n$ une propriété croissante.*

(i) Si A admet un seuil grossier, alors il existe un rang N, une constante $c > 0$, un réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et une suite $(p_n^*)_{n \geq N}$, tels que :

$$\forall n \geq N, \ p_n^* \in [p_\varepsilon, p_{1-\varepsilon}],$$

et

$$\forall n \geq N, \ p_n^* \left.\frac{d\mu_p(A)}{dp}\right|_{p_n^*} < c \ .$$

(ii) Si il existe $c > 0$ et un entier N tel que :

$$\forall n \geq N,\ \forall \varepsilon \in]0,1[,\ p_\varepsilon \left.\frac{d\mu_p(A_N)}{dp}\right|_{p_\varepsilon} \leq c\ ,$$

alors A admet un seuil grossier.

Démonstration :

Notons tout d'abord que :

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \left.\frac{d\mu_p(A_N)}{dp}\right|_{p_\varepsilon} = \frac{1}{\left.\frac{dp_\gamma}{d\gamma}\right|_\varepsilon}\ .$$

Pour démontrer le point (i), remarquons que si A possède un seuil grossier, alors, il existe un rang N, une constante $C > 0$, et un réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, tels que pour tout n supérieur à N,

$$\frac{\tau(A,\varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}} > C\ .$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{\frac{1}{2}}} &> C\ , \\
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_\varepsilon} &> C\ , \\
\frac{p_{1-\varepsilon}}{p_\varepsilon} &> 1 + C\ , \\
\frac{p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} &< \frac{1}{1+C}\ , \\
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} &> 1 - \frac{1}{1+C}\ , \\
\frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} &> \frac{C}{1+C}\ ,
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\tau(A,\varepsilon) \leq (1-2\varepsilon) \sup_{\gamma \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} \left.\frac{dp_\gamma}{d\gamma}\right|_\varepsilon\ .$$

Donc :

$$\tau(A,\varepsilon) \leq (1-2\varepsilon) \sup_{p \in [p_\varepsilon, p_{1-\varepsilon}]} \frac{1}{\left.\frac{d\mu_p(A_N)}{dp}\right|_{p_\varepsilon}}\ .$$

Ainsi, pour tout n supérieur à N, il existe un nombre $p_n^* \in [p_\varepsilon, p_{1-\varepsilon}]$ tel que :

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mu_p(A_N)}{dp}\right|_{p_n^*} &< \frac{(1-2\varepsilon)(1+C)}{p_{1-\varepsilon}C} , \\ &< \frac{1+C}{C} , \end{aligned}$$

ce qui démontre le point (i) avec $c = \frac{C+1}{C}$.
Pour démontrer le point (ii), supposons qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ p_\varepsilon \left.\frac{d\mu_p(A_N)}{dp}\right|_{p_\varepsilon} \leq c .$$

Alors,

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \frac{\left.\frac{dp_\gamma}{d\gamma}\right|_\varepsilon}{p_\varepsilon} \geq \frac{1}{c} .$$

Or, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,\ p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon \geq (1-2\varepsilon) \min_{\gamma \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} \frac{dp_\gamma}{d\gamma} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,\ p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon &\geq (1-2\varepsilon) \min_{\gamma \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} \frac{p_\gamma}{c} \\ &= (1-2\varepsilon)\frac{p_\varepsilon}{c} . \end{aligned}$$

Donc, pour tout ε de $]0, \frac{1}{2}[$,

$$\begin{aligned} \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_\varepsilon} &\geq \frac{1-2\varepsilon}{c} , \\ \frac{p_{1-\varepsilon}}{p_\varepsilon} &\geq 1 + \frac{1-2\varepsilon}{c} , \\ \frac{p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} &\leq \frac{1}{1+\frac{1-2\varepsilon}{c}} , \\ \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} &\geq 1 - \frac{1}{1+\frac{1-2\varepsilon}{c}} , \\ \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{1-\varepsilon}} &\geq \frac{\frac{1-2\varepsilon}{c}}{1+\frac{1-2\varepsilon}{c}} , \\ \frac{p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon}{p_{\frac{1}{2}}} &\geq \frac{1-2\varepsilon}{c+1-2\varepsilon} , \end{aligned}$$

La dernière inégalité est due au fait que A est croissante, et donc $p_{\frac{1}{2}}$ est plus grand que p_ε lorsque ε est inférieur à $\frac{1}{2}$.

□

Un résultat en tout point analogue (le théorème 5.1 de l'article [31]) peut être démontré pour les propriétés concernant les formules de la k-sat (cf. l'exemple 7 du chapitre 2.2). Il permet de prouver que le seuil de la k-sat est fin, en montrant que la propriété de ne pas être satisfaisable ne peut pas être approchée de la manière décrite dans le théorème 5.5.4.
Une question notamment reste en suspens : peut-on quantifier à l'avance le quotient de la largeur de seuil par l'échelle de localisation, par exemple en fonction de certaines caractéristiques fondamentales des éléments minimaux, ne se limitant pas à leur seule taille ?

Chapitre 6

La concentration du temps d'atteinte.

On peut diviser l'étude de la concentration d'une variable aléatoire en deux parties. La première est le calcul de l'échelle des fluctuations, la deuxième est la forme de la distribution à l'échelle des fluctuations, ou de manière plus réaliste, un contrôle de cette forme. L'objet de ce chapitre est de lier un résultat de loi du 0-1 pour une propriété A à la concentration d'une variable aléatoire, à savoir le temps d'atteinte de A par un certain processus.
Lorsqu'on dit, dans le théorème 5.4.13 que, essentiellement, la largeur de seuil de toute propriété croissante symétrique est plus petite que $\frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n}$, cela contient une information sur l'ordre de grandeur des fluctuations de la propriété, $\frac{1}{\log n}$, et donne un contrôle non asymptotique de la forme de ces fluctuations, $\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Ces informations se traduisent en des informations sur l'ordre de grandeur des fluctuations du temps d'atteinte correspondant, et un contrôle de la forme de ces fluctuations. Or dans le domaine du contrôle non asymptotique de la forme des fluctuations, les probabilistes possèdent de nombreux résultats, maintenant sous des hypothèses très générales, notamment grâce aux travaux de Talagrand, puis Ledoux, Boucheron, Lugosi, Massart et bien d'autres (voir notamment [65, 63, 64, 47, 48, 22, 49, 13, 14, 12]). Ce sont les fameuses "inégalités de concentration". Vue la richesse du corpus de résultats dans ce domaine, et la pauvreté du corpus de résultats généraux analogues dans les lois du 0-1, nous pensons qu'il y a là une voie à explorer.
Dans la section 6.1, nous présenterons le lien entre la largeur du seuil d'une propriété A et la dispersion du temps d'atteinte de A.
Dans la section 6.2, nous montrerons l'équivalence entre l'existence d'un seuil régulier et la convergence en loi du temps d'atteinte.

6.1 Loi du 0-1 étroite et concentration du temps d'atteinte.

On peut voir facilement que l'étude de la loi du 0-1 d'une suite de propriétés $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée à l'étude de la concentration du temps d'atteinte de A_n dans le processus $(\mathcal{X}(n,p))_{0\leq p\leq 1}$ défini comme suit (voir [10], p.38–39).

Définition 6.1.1 *Soit $U = (U_i)_{i=1,\dots,n}$ un échantillon de la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout*

$i = 1, \ldots, n$ et pour tout $p \in [0,1]$, on définit

$$\mathcal{X}(n,p) = (X_i(p))_{i=1,\ldots,n} \ ,$$

où $X_i(p) = \mathbb{1}_{[0,p]}(U_i)$ (1 si $U_i \leq p$, 0 sinon).

Soit $A \subset \{0,1\}^n$. On définit :

$$\mathcal{T}(A) = \min \{p \text{ tels que } \mathcal{X}(n,p) \in A\} \ .$$

On a le résultat élémentaire suivant :

Lemme 6.1.2 *Soit A un sous-ensemble croissant de $\{0,1\}^n$. Soient $\alpha < \beta$ deux réels de $[0,1]$. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{T}(A) \in \mathcal{I}(A,\alpha,\beta)\right) = \beta - \alpha \ .$$

Démonstration :

Dans la suite, on supposera que A est croissant. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{T}(A) > p) &= \mathbb{P}(\forall u \leq p,\ \mathcal{X}(n,u) \notin A) \ , \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{X}(n,p) \notin A) \ . \end{aligned}$$

Et donc,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}(A) \leq p) = \mu_{n,p}(A) \ .$$

□

Notons alors $\mathcal{M}$ la collection des éléments minimaux de A, de sorte que A peut s'écrire (voir la remarque 2.1) :

$$A = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq } \exists m \in \mathcal{M},\ m \preceq x\} \ .$$

Pour tout m de $\{0,1\}^n$, nommons alors $C(m)$ l'ensemble des éléments supérieurs à m :

$$C(m) = \{x \in \{0,1\}^n \text{ tq } m \preceq x\} \ .$$

Ainsi :

$$A = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} C(m),$$

$$\mathcal{T}(A) = \min_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{T}(C(m)) \ .$$

En reprenant les notations de la définition 6.1.1, on a donc :

$$\mathcal{T}(A) = \min_{m \in \mathcal{M}} \sup \{U_i,\ i \text{ tq } m_i = 1\} \ .$$

Les lois des variables aléatoires $\sup \{U_i,\ i \text{ tq } m_i = 1\}$ sont faciles à déterminer, mais bien sûr, elles sont très corrélées (positivement) entre elles, en général. Nous avons cherché à obtenir directement des inégalités de concentration pour $\mathcal{T}(A)$, ou au moins, des majorations

de sa variance, afin d'en déduire des résultats sur la largeur de seuil. Nous n'avons pas été en mesure de concrétiser cet espoir. Au lieu de ça, le seul résultat que l'on est en mesure de donner sur la concentration de $\mathcal{T}(A)$ consiste en une traduction du résultat obtenu dans le théorème 5.4.13. Posons, pour $n \geq 2$:

$$r_n = e^{s(n)} = \min \left\{ \frac{8\left(\frac{2}{e}\right)^{2+\frac{4}{e}} n}{\left(\log \frac{n}{(\log n)^2}\right)^{3+\frac{4}{e}}}, \ \frac{n}{(\log n)^2} \right\} .$$

Proposition 6.1.3 *Soit A un sous-ensemble symétrique et non trivial de $\{0,1\}^n$, avec $n \geq 2$. Soit M la médiane de $\mathcal{T}(A)$ (elle est unique). Alors :*

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}(A) \geq M + x) \leq \frac{1}{1 + r_n^{2x}} ,$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}(A) \leq M - x) \leq \frac{1}{1 + r_n^{2x}} .$$

On peut également relier la notion de loi du 0-1 étroite à celle de concentration de manière plus précise grâce à la proposition suivante :

Proposition 6.1.4 *Si l'écart-type de $\mathcal{T}(A)$ est petit devant sa médiane M, c'est à dire si :*

$$\frac{Var(\mathcal{T}(A))}{M^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 ,$$

alors la propriété A suit une loi du 0-1 *étroite.*

Démonstration :

Supposons que $\mathcal{T}(A)$ soit petit devant sa médiane M. Notons F la fonction de répartition de $\mathcal{T}(A)$. Elle est continue et strictement croissante (cf. lemme 5.1.3). On a, d'après le lemme 6.1.2 :

$$\forall \varepsilon \in [0;1] , \ p_\varepsilon = F^{-1}(\varepsilon) .$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} Var(\mathcal{T}(A)) &= \int_0^1 \int_0^1 (u-v)^2 \ \mathbb{1}_{v<u} \, dF(v) \, dF(u) , \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha)\right)^2 \ \mathbb{1}_{\alpha<\beta} \, d\alpha \, d\beta . \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha)}{M} \right)^2 \ \mathbb{1}_{\alpha<\beta} \, d\alpha \, d\beta \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Par conséquent, pour presque tous α et β, on a :

$$\frac{F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha)}{M} \mathbb{1}_{\alpha<\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Or pour tout α fixé, $\beta \mapsto \frac{F^{-1}(\beta)-F^{-1}(\alpha)}{M}$ est croissante, et pour tout β fixé, $\alpha \mapsto \frac{F^{-1}(\beta)-F^{-1}(\alpha)}{M}$ est décroissante. Par conséquent,

$$\forall \alpha < \beta \in]0;1[\ , \ \frac{F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha)}{M} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Et ainsi,

$$\forall \varepsilon \in \left]0;\frac{1}{2}\right] , \ \frac{F^{-1}(1-\varepsilon) - F^{-1}(\varepsilon)}{M} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

$$\forall \varepsilon \in \left]0;\frac{1}{2}\right] , \ \frac{p_{1-\varepsilon} - p_{\varepsilon}}{p_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ ,$$

ce qui finit de démontrer la proposition.

□

Nous ne savons pas démontrer la réciproque de cette propriété. En fait, nous doutons même du fait qu'elle soit juste, mais sans disposer de contre-exemple.

6.2 Seuils réguliers et convergence en loi du temps d'atteinte.

Dans cette section, on montre l'équivalence entre les notions de fonctions de seuil régulier introduites dans les définitions 4.1.3 et 4.1.6, et la convergence en loi du temps d'atteinte $\mathcal{T}(A)$ défini dans la section précédente.

Proposition 6.2.1 *Soient A un sous-ensemble de $\{0,1\}^n$, s une suite de réels strictement positifs, et G une fonction de répartition. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite s est une fonction de seuil régulier pour la propriété A, et F est la fonction de répartition de ce seuil.*
2. *La loi de $\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)}$ converge vers une variable aléatoire de fonction de répartition F.*

Démonstration :

Rappelons tout d'abord que pour toute suite de variables aléatoires X_n, toute suite ε_n de limite 0, pour toute fonction de répartition F et pour tout point de continuité x de F,

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X_n \leq x + \varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \ .$$

Montrons tout d'abord que $1 \Rightarrow 2$. Supposons que $\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)}$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition F. On a donc, pour tout x point de continuité de F,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)} \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \ .$$

Soit $p(n)$ tel que :

$$\frac{p(n)}{s(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \ .$$

Notons $\varepsilon_n = \frac{p(n)}{s(n)} - x$. D'après le lemme 6.1.2, on a :

$$\mu_{n,p(n)}(A) = \mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)} \leq x + \varepsilon_n\right) \ .$$

Dans ce qui suit, x désigne un point de continuité de F. Comme ε_n tend vers 0, la remarque précédente nous permet d'affirmer que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)} \leq x + \varepsilon_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \ ,$$

Ce qui revient à :

$$\mu_{n,p(n)}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \ .$$

Montrons que $2 \Rightarrow 1$. Soit $p(n) = xs(n)$. On a bien sûr :

$$\frac{p(n)}{s(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \ .$$

Donc, d'après la définition de la fonction de seuil régulier,

$$\mu_{n,p(n)}(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \ .$$

Donc, d'après le lemme 6.1.2 :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)} \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) \ ,$$

Ce qui signifie que la loi de $\frac{\mathcal{T}(A)}{s(n)}$ converge vers la loi de fonction de répartition F.

□

On montre d'une manière tout à fait analogue la proposition suivante.

Proposition 6.2.2 *Soient $A \subset \{0,1\}^n$, s_1 et s_2 deux suites de réels strictement positifs, et G une fonction de répartition. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *La paire $(s_1(n), s_2(n))$ est une paire de fonctions de seuil étroit régulier pour la propriété A, et G est la fonction de répartition de ce seuil étroit.*

2. $\frac{\mathcal{T}(A)-s_1(n)}{s_2(n)}$ *converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition* G.

Nous avons considéré ici une dynamique très simple sur $\{0,1\}^n$, croissante de manière déterministe. Il semble tout à fait probable qu'on puisse étendre les propositions 6.2.1 et 6.2.2 au cas de dynamiques stochastiquement croissantes, si l'on conserve l'indépendance des coordonnées et que l'on dispose d'un contrôle suffisant des taux de transitions sur chaque coordonnée. Un tel travail a déjà été mené par Paroissin et Ycart en regardant des propriétés croissantes et totalement symétriques [55].

Chapitre 7

Conclusion et perspectives.

L'étude des phénomènes de seuil est un chantier en pleine expansion, aux multiples facettes : étude classique "à la Erdös-Rényi", introduction d'outils de la physique statistique en percolation, dans la k-satisfaisabilité, entre autres, développement des inégalités de concentration ... Nous avons voulu dans cette thèse apporter notre contribution à l'unification du cadre théorique où ces phénomènes se manifestent. Pour cela, nous avons pris le temps de relier rigoureusement le cadre originel d'Erdös et Rényi [26], celui des travaux "à la Friedgut et Kalai" [32], et la concentration du temps d'atteinte de la propriété qui suit la loi du 0-1. Nous avons également obtenu des résultats élémentaires mais d'un type nouveau sur la stabilité de la notion de loi du 0-1 par trois types d'opérations : l'union, l'intersection et le produit tensoriel. Nous avons surtout apporté une nouvelle preuve du résultat de Friedgut et Kalai qui majore toute largeur de seuil d'une propriété symétrique. Cette nouvelle preuve est plus simple, donne un résultat plus précis, et met en jeu une inégalité de Sobolev logarithmique sur $\{0,1\}^n$, ce qui jette un nouveau pont avec la concentration de la mesure, ce type d'inégalité étant très utilisé pour obtenir certains résultats de concentration.
De nombreuses perspectives s'offrent à la suite de ce travail.
Dans un avenir assez proche, il nous semble réalisable d'étendre la minoration générale de Friedgut et Kalai d'une part (que l'on a améliorée dans le théorème 5.4.13), et le travail de Friedgut appliqué à la k-sat d'autre part, à un cadre plus général où les coordonnées restent indépendantes, mais ne sont pas nécessairement identiquement distribuées. Ce travail pourrait alors permettre d'apporter une contribution à l'étude de $(2+p)$-sat (voir notamment [51], [52] et [2]).
Dans un avenir proche également, nous pensons pouvoir adapter le résultat sur la concentration du temps d'atteinte de la proposition 6.2.1 à une dynamique Markovienne à coordonnées indépendantes et identiquement distribuées.
Les perspectives plus lointaines ne manquent pas. D'un point de vue théorique, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 6, il serait très satisfaisant, et certainement instructif, de parvenir à des résultats généraux comme le théorème 5.4.13 à partir d'un résultat de concentration du temps d'atteinte de A par le processus décrit dans la section 6.1. Néanmoins, la simple retranscription de ce théorème en terme de concentration d'un infimum de variables aléatoires très corrélées entre elles (proposition 6.1.3) suggère l'existence d'une nouvelle source d'inégalités de concentration, taillées pour ce type d'infimum, et provenant de ré-

sultats plus précis que le théorème 5.4.13. Il s'agit maintenant d'établir ces résultats, avec comme guide les travaux de Bourgain, Friedgut et Kalai.
Au vu des généralisations des lois du 0-1 logiques et des approximations poissonniennes obtenues par Coupier, Doukhan et Ycart (voir [17] et [19]), on peut aussi espérer généraliser les résultats de minoration générale de la largeur du seuil à des cas de dépendance faible comme le modèle d'Ising.

Bibliographie

[1] A.Bonami. Etude des coefficients de fourier de $l^p(g)$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 20(2):335–402, 1971.

[2] D. Achlioptas, L.M. Kirousis, E. Kranakis, and D. Krizanc. Rigorous results for (2+p)-sat. *Theor. Comput. Sci.*, 265:109–129, 2001.

[3] N. Alon and J. Spencer. *The Probabilistic Method*. Wiley, 1992.

[4] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[5] R.E. Barlow and F. Proschan. *Mathematical theory of reliability*. With contributions by Larry C. Hunter. The SIAM Series in Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1965.

[6] W. Beckner. Inequalities in Fourier analysis. *Ann. Math.*, 102:159–182, 1975.

[7] I. Benjamini, G. Kalai, and O. Schramm. Noise sensitivity of Boolean functions and applications to percolation. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 90:5–43, 1999.

[8] I. Benjamini, G. Kalai, and O. Schramm. Improved variance bounds for first passage percolation. *Ann. Probab.*, 31(4):1970–1978, 2003.

[9] B. Bollobás. Threshold functions for small subgraphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 90:197–206, 1981.

[10] B. Bollobás. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.

[11] B. Bollobás, C. Borgs, J.T. Chayes, J.H. Kim, and D.B. Wilson. The scaling window of the 2-SAT transition. *Rand. Struct. Algo.*, 18(3):201–256, 2001.

[12] S. Boucheron, O. Bousquet, G. Lugosi, and P. Massart. Moment inequalities for functions of independent random variables. *Ann. Probab.*, 33(2):514–560, 2005.

[13] S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart. A sharp concentration inequality with applications. *Rand. Struct. Algo.*, 16:277–292, 2000.

[14] S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart. Concentration inequalities using the entropy method. *Ann. Probab.*, 31(3):1583–1614, 2003.

[15] J. Bourgain and G. Kalai. Influences of variables and threshold intervals under group symmetries. *Geom. Funct. Analysis*, 7:438–461, 1997.

[16] D. Coupier. Techniques de graphes aléatoires appliquées au traitement d'images. Mémoire de DEA, Orsay, 2002.

[17] D. Coupier. Poisson approximation for the Ising model. soumis, 2005.

[18] D. Coupier, A. Desolneux, and B. Ycart. Image denoising by statistical area thresholding. *J. Math. Imag. Vision*, 22:183–197, 2005.

[19] D. Coupier, P. Doukhan, and B. Ycart. Zero-one laws for binary random fields. soumis, 2005.

[20] N. Creignou and H. Daudé. Satisfiability threshold for random XOR-CNF formulas. *Discrete Applied Math.*, pages 41–53, 1999.

[21] N. Creignou and H. Daudé. Generalized satisfiability problems : minimal elements and phase transitions. *Theor. Comput. Sci.*, 302(1-3):417–430, 2003.

[22] A. Dembo. Information inequalities and concentration of measure. *Ann. Probab.*, 25:527–539, 2000.

[23] A. Desolneux, M. Moisan, and J.M. Morel. Meaningful alignments. *Int. J. Computer Vision*, 40(1):7–23, 2000.

[24] O. Dubois and J. Mandler. The 3-xorsat threshold. In *FOCS 2002*, 2002.

[25] P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling extremal events for insurance and finance.*, volume 33 of *Applications of Mathematics*. Springer, Berlin, 1997.

[26] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Mat. Kuttató. Int. Közl.*, 5:17–60, 1960.

[27] P. Erdös and P. Révész. On the length of the longest head run. In *Topics in information theory*, volume 16, pages 219–228. Keszthely, Hungary, 1975.

[28] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume II. Wiley, London, 2nd edition, 1971.

[29] F. Forbes and B. Ycart. Counting stable sets on Cartesian products of graphs. *Discrete Mathematics*, 186:105–116, 1998.

[30] C.M. Fortuin, P.W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Commun. Math. Phys.*, 1971.

[31] E. Friedgut. Sharp threshold of graph properties and the k-sat problem (with an appendix by Jean Bourgain). *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4):1017–1054, 1999.

[32] E. Friedgut and G. Kalai. Every monotone graph property has a sharp threshold. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124:2993–3002, 1996.

[33] A.P. Godbole and S.G. Papastavridis, editors. *Runs and patterns in probability : selected papers*. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[34] L. Gordon, M.F. Schilling, and M.S. Waterman. An extreme value theory for long head runs. *Probab. Th. Rel. Fields*, 72:279–287, 1986.

[35] G. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[36] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups. In *Dirichlet forms (Varenna 1992)*, pages 54–88. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[37] L.J. Guibas and A.M. Odlyzko. Long repetitive patterns in random sequences. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 53:241–262, 1980.

[38] R. Holley. Remarks on the FKG inequalities. *Commun. Math. Phys.*, 36:227–231, 1974.

[39] S. Janson. Poisson approximation for large deviations. *Random Structures and Algorithms*, 1(2):221–229, 1990.

[40] S. Janson, T. Łuczak, and A. Rucinski. *Random Graphs*. Wiley, 2000.

[41] J. Kahn, G. Kalai, and N. Linial. The influence of variables on Boolean functions. In *Proc. 29-th Ann. Symp. on Foundations of Comp. Sci.*, pages 68–80. IEEE, Washington, 1988.

[42] G. Kalai. Combinatorics with a geometric flavor. In N. Alon and al., editors, *GAFA 2000. Visions in mathematics–Towards 2000*, pages 742–791. Birkhäuser, Basel, 2000.

[43] G. Kalai. A Fourier-theoretic perspective for the Condorcet paradox and Arrow's theorem. *Adv. in Applied Math.*, 29(3):412–426, 2002.

[44] G. Kalai and N. Linial. On the distance distribution of binary codes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 41(5):1467–1472, 1995.

[45] B. Kopociński. On the distribution of the longest success-run in Bernoulli trials. *Roszczniki Polskiego Towarzystwa Mat.*, 24:5–13, 1991.

[46] M.R. Leadbetter, G. Lingren, and H. Rootzén. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[47] M. Ledoux. Isoperimetry and Gaussian analysis. In Dobrushin et al., editor, *Lectures on probability theory and statistics. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XXIV, 1994*, volume 1648 of *Lect. Notes Math.*, pages 15–294, Berlin, 1996. Springer.

[48] M. Ledoux. On Talagrand's deviation inequalities for product measures. *ESAIM P&S*, 1:63–87, 1996.

[49] P. Massart. Optimal constants for Hoeffding type inequalities. Technical Report 98.86, Dép. de Maths, Université de Paris-Sud, 1998.

[50] P. Massart. About the constants in Talagrand's concentration inequalities for empirical processes. *Ann. Probab.*, 28:863–885, 2000.

[51] R. Monasson and R. Zecchina. Tricritical point in the random 2+p-sat problem. *J. Phys. A*, 31:9209, 1998.

[52] R. Monasson and R. Zecchina. 2+p-sat : Relation of typical-case complexity to the nature of the phase transition. *Rand. Struct. and Algo.*, 15:414, 1999.

[53] R. Monasson, R. Zecchina, S. Kirkpatrick, B. Selman, and L. Troyansky. Determining complexity from characteristic 'phase transitions'. *Nature*, 400:133–137, july 1999.

[54] C. Paroissin and B. Ycart. Zero-one law for the non-availability of multistate repairable systems. *Int. J. of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 10(3):311–322, 2003.

[55] C. Paroissin and B. Ycart. Central limit theorem for hitting times of functionals of Markov jump processes. *ESAIM P&S*, 8:66–75, 2004.

[56] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Wiley, New York, 1990.

[57] L. Russo. An approximate zero-one law. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 61:129–139, 1982.

[58] R. Sedgewick and P. Flajolet. *Introduction à l'analyse des algorithmes*. Int. Thomson Publishing, France, 1996.

[59] G.R. Shorač k and J.A. Wellner. *Empirical Processes with applications to statistics*. Wiley, New York, 1986.

[60] J. Spencer. Nine lectures on Random Graphs. In P. Bernard, editor, *Ecole d'été de probabilité de Saint-Flour XXI*, volume 1541 of *L.N. in Mathematics*, pages 293–343. Springer-Verlag, New York, 1991.

[61] J. Spencer. *The strange logic of random graphs*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[62] M. Talagrand. On Russo's approximate zero-one law. *Ann. Probab.*, 22:1576–1587, 1994.

[63] M. Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. *Publ.Math.I.H.E.S*, 81:73–205, 1995.

[64] M. Talagrand. New concentration inequalities in product spaces. *Invent. Math.*, 126:505–563, 1996.

[65] M. Talagrand. A new look at independence. *Ann. Probab.*, 24:1–34, 1996.

[66] B. Ycart. *Modèles et algorithmes markoviens*, volume 39 of *Mathématiques et applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[67] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 6ème edition, 1980.