



**HAL**  
open science

# Grands Réseaux Aléatoires: comportement asymptotique et points fixes

Moez Draief

► **To cite this version:**

Moez Draief. Grands Réseaux Aléatoires: comportement asymptotique et points fixes. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT: . tel-00009919

**HAL Id: tel-00009919**

**<https://theses.hal.science/tel-00009919>**

Submitted on 8 Aug 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Grands Réseaux Aléatoires : Comportement Asymptotique et Point Fixe

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 24 janvier 2005

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Denis Diderot – Paris 7**  
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

M. Moez DRAIEF

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Dr Fabrice Guillemin	France Telecom R&D
	Prof. Onno Boxma	Université d'Eindhoven
<i>Examineurs :</i>	Prof. François Baccelli	INRIA-ENS (co-directeur de thèse)
	Prof. Francis Comets	Université Paris 7
	Dr Jean Mairesse	CNRS-Paris 7 (directeur de thèse)
	Prof. Neil O'Connell	Université de Warwick



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres de mon Jury. Merci à :

**François Baccelli**, directeur de recherche INRIA, pour avoir suivi régulièrement mon parcours depuis cinq années et pour sa participation à ce Jury.

**Onno Boxma**, professeur de Mathématiques à l'université d'Eindhoven, qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse.

**Francis Comets**, professeur de Mathématiques à l'université Paris 7, pour avoir accepté d'être membre de ce Jury et d'être le tuteur de mon stage postdoctoral.

**Fabrice Guillemin**, ingénieur de recherche (HDR) France Telecom R&D, qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse.

**Jean Mairesse**, chargé de recherche CNRS, pour avoir assumé la lourde tâche de directeur de thèse et pour m'avoir enseigné l'art de la rédaction scientifique. Je tiens également à le remercier pour son soutien et ses conseils pendant ces années.

**Neil O'Connell**, professeur de Mathématiques à l'université de Warwick, pour avoir accepté de faire partie de ce Jury et pour l'aide précieuse qu'il m'a fournie.

Je tiens également à remercier :

**Laifa Ahmadi** et **Noelle Delgado** pour leurs disponibilités.

**Laurent** pour avoir partagé mes pauses et **Mélanie** pour m'avoir soutenu lors des moments difficiles.

Mes parents **Mohamed** et **Sarra** pour l'éducation que j'ai reçue de leur part. Cette thèse est un peu la leur...



*Je dédie cette thèse à mes grand-mères  
Najia et Nfissa.*



# Table des matières

---

---

## Partie I Théorème de Burke et Algorithme RSK

---

---

<b>Chapitre 1 Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.1 File d'attente avec services inutilisés . . . . .	9
1.1.2 Théorème de Burke . . . . .	13
1.1.3 Théorème de Pitman . . . . .	15
1.2 Files d'attente en tandem . . . . .	17
1.2.1 Marches aléatoires ordonnées . . . . .	19
1.2.2 Limite hydrodynamique . . . . .	20
1.3 Séries de files d'attente en tandem . . . . .	22
1.3.1 Algorithme de Robinson-Schensted-Knuth . . . . .	24
1.3.2 Fonction de Schur . . . . .	32
<b>Chapitre 2 File M/M/1</b>	<b>35</b>
2.1 File d'attente $././1$ . . . . .	36
2.2 Théorème de Burke . . . . .	39
2.3 Périodes d'activité et Chemins de Dyck . . . . .	40
2.3.1 Chemins de Dyck . . . . .	41
2.3.2 Processus des instants de début de service . . . . .	43
2.4 Loi d'un service au sein d'une période d'activité . . . . .	48

## Table des matières

---

<b>Chapitre 3 File Géo/Géo/1</b>	<b>53</b>
3.1 File ././1 et Modèle de Stockage . . . . .	54
3.1.1 File Géo/Géo/1 . . . . .	54
3.1.2 Modèle de Stockage . . . . .	56
3.2 Marches aléatoires ordonnées . . . . .	57
3.3 Files/Magasins en tandem . . . . .	59
3.3.1 Départs d'un système de files d'attente en tandem . . . . .	60
3.3.2 Départs d'un système de magasins en tandem . . . . .	62
3.4 Propriétés statistiques et symétrie . . . . .	66
3.5 Conclusion . . . . .	67

---

---

## Partie II Points fixes

---

---

<b>Chapitre 4 Points fixes pour la file ./GI/1</b>	<b>71</b>
4.1 Préliminaires . . . . .	71
4.2 Plus long chemin . . . . .	73
4.3 Animaux de grille . . . . .	74
4.4 Limite hydrodynamique . . . . .	77
4.5 Existence de points fixes . . . . .	83
<b>Chapitre 5 Grandes Déviations</b>	<b>87</b>
5.1 Grandes déviations . . . . .	87
5.2 Événements rares pour la file d'attente ././1 . . . . .	90
5.3 Principe de grandes déviations pour le processus de charge . . . . .	92
5.4 Bande passante effective . . . . .	94
5.5 Principe de grandes déviations pour les variables de sortie . . . . .	96
5.5.1 Problème d'optimisation . . . . .	99
5.5.2 Existence de points fixes . . . . .	103

---

<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>107</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>
<b>Table des figures</b>	<b>115</b>
<b>Index</b>	<b>117</b>

## Table des matières

---

# Introduction

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'étude des grands réseaux aléatoires. Nous entendons par grand réseau aléatoire un système composé d'un grand nombre de stations servant un flux aléatoire de clients. L'étude de certains exemples de ces grands réseaux a permis récemment de lier la dynamique de ces derniers à celle d'autres objets sans liens directs avec la théorie des réseaux stochastiques [74]. Un préalable à cette étude est de bien comprendre le fonctionnement d'une unique station. Nous commençons par la file M/M/1, modèle le plus étudié de la théorie des files d'attente [4, 7, 14, 20, 84, 94], pour laquelle nous prouvons quelques nouveaux résultats. Nous abordons ensuite deux exemples de systèmes à événements discrets : la file d'attente à un serveur et le modèle de stockage. Le premier de ces deux modèles est le modèle  $M/M/1$  très classique en théorie des files d'attente. Le deuxième modèle est moins classique et est généralement défini en tant que modèle de file d'attente avec des groupes d'arrivée et des groupes de départ [12]. Pour éviter toute confusion entre les deux modèles, nous avons pris le parti de définir le deuxième modèle en tant que modèle de stockage. Ce choix nous permet de définir un nouveau modèle que nous appellerons *File d'attente/Modèle de Stockage* qui permet de coupler ces deux systèmes et d'avoir des interprétations naturelles pour certaines variables. Nous étudions ensuite le système *File d'attente/Modèle de Stockage en tandem* (ou en série) lorsque le nombre de stations devient grand.

Nous détaillons maintenant le contenu de ce mémoire. Nous énonçons les principales contributions originales de cette thèse sous forme de **Résultat**.

## Théorème de Burke

Dans un premier temps, nous considérons une unique station sous des hypothèses markoviennes, c'est-à-dire lorsque les lois des inter-arrivées et des services sont sans mémoire (exponentielles ou géométriques). Nous présentons des extensions du *théorème de Burke* [16], qui établit que le processus des départs d'une file d'attente simple a la même loi que le processus des arrivées. Nous rappelons la preuve pour la file avec services inutilisés en temps discret [61] et nous prouvons un résultat type Burke pour les modèles suivants :

- la file d'attente M/M/1 et le modèle de stockage avec des arrivées et des services suivant des lois exponentielles :

## Introduction

**Résultat 1.** *Le processus marqué  $(\mathcal{D}, r)$ , où  $\mathcal{D}$  est le processus des instants de départ de la file d'attente et  $r$  la suite des quantités partant du modèle de stockage, a la même loi que le processus marqué  $(\mathcal{A}, s)$ , variables d'entrée du système file d'attente/modèle de stockage; c'est-à-dire le processus  $(\mathcal{D}, r)$  est un processus de Poisson, de paramètre  $\lambda$ , marqué par la suite de marques  $r$  i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\mu$  pour  $\lambda < \mu$ .*

- Nous démontrons un résultat analogue pour la file Géo/Géo/1 et le modèle de stockage avec des arrivées et des services suivant des lois géométriques.

Les preuves de ces résultats sont essentiellement basées sur la propriété de *réversibilité* [82] du processus de charge du système étudié. Néanmoins, le processus de charge ne permet pas de reconstituer toute l'information nécessaire pour établir le théorème de Burke. Nous avons présenté une manière de contourner ce problème dans le cas de la file d'attente Géo/Géo/1 et du modèle de stockage avec des variables géométriques. Pour ce faire, nous introduisons un processus auxiliaire qu'on appellera le *processus zig-zag* (figure 1) et qui est réversible.

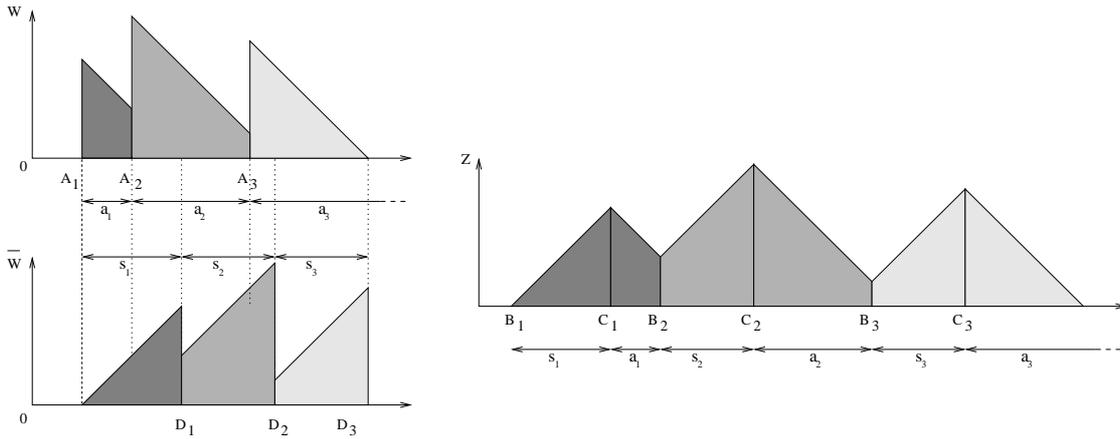


FIG. 1 – Processus de charge, son dual et le processus zig-zag

Ces extensions du théorème de Burke permettent d'étendre le *théorème de représentation de Pitman* [78, 79] à des marches aléatoires donnant une représentation (non-conditionnelle) de ces marches aléatoires, conditionnées à rester ordonnées.

**Résultat 2.** *Soient  $\{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  deux suites de variables aléatoires i.i.d. et mutuellement indépendantes de lois respectivement Géo( $p$ ) et Géo( $q$ ) avec  $p < q$ , on a*

$$\mathbb{L}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n s_i\right) \mid \sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k s_i, \forall k \geq 0\right] = \mathbb{L}\left[\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=j+1}^{n+1} s_i \right\}, \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=2}^j s_i + \sum_{i=j+1}^n a_i \right\}\right)\right].$$

---

## Périodes d'activité et Chemins de Dyck

Par ailleurs, nous prouvons que dans le cadre de la file M/M/1 en régime stationnaire, on a :

**Résultat 3.** *Le processus des instants de début de service n'est pas un processus de Poisson, contrairement au processus des instants de départ (fin de service).*

Nous analysons, par la suite, le comportement des clients au sein d'une même période d'activité. Pour ce faire, nous revisitons la correspondance entre *période d'activité* et *chemin de Dyck* [34] ce qui nous permet d'interpréter les corrélations entre les lois des services des différents clients en utilisant une famille de fonctions génératrices sur les chemins de Dyck.

**Résultat 4.** *Sachant que la période d'activité est de longueur  $n + 1$ , la densité conditionnelle du vecteur aléatoire  $(s_0, \dots, s_n)$  représentant les temps de service des clients successifs est*

$$D(y_0, \dots, y_n) = \frac{(\lambda + \mu)^{2n+1}}{C_n} e^{-(\lambda + \mu)(y_0 + \dots + y_{n-1})} P_n(y_0, \dots, y_{n-1}) e^{-(\lambda + \mu)y_n},$$

avec

$$P_n(y_0, \dots, y_{n-1}) = \int_{y_1}^{y_0 + y_1} P_{n-1}(y, y_2, \dots, y_{n-1}) dy, \quad P_0 = 1.$$

Le polynôme  $P_n$  est un polynôme à  $n$  variables de degrés  $n$  codant les statistiques des chemins de Dyck de longueur  $2n$  et  $C_n$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan.

## Algorithme de Robinson-Schensted-Knuth

Nous abordons ensuite l'étude de systèmes de stations (ou modèles de stockage) en tandem (ou en série). Tout d'abord, nous explorons le *régime stationnaire* pour lequel nous analysons le comportement asymptotique lorsque le nombre de stations devient infini. Ceci permet, en outre, de retrouver des résultats de *limite hydrodynamique* sur des familles de chemins sur  $\mathbb{Z}^2$  [5]. Nous étudions ensuite ce système de stations en tandem en *régime transitoire*, l'analyse est trajectorielle. L'objectif est de mettre en évidence le lien entre la dynamique du système de files d'attente en tandem et l'*algorithme de Robinson-Schensted-Knuth* (RSK). On considère le modèle File d'attente/Stock décrit plus haut,

**Résultat 5.** *Soit  $D$  l'instant de départ du dernier client de la file et  $R$  la quantité totale de produit fournie par le dernier stock jusqu'au dernier instant, alors*

$$D = \lambda_1, \quad R = \lambda_k,$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_k$  sont respectivement la longueur de la plus longue et de la plus courte ligne du tableau de Young  $P$  obtenu en appliquant l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth à une matrice codant les variables d'entrée des deux systèmes.

## Introduction

---

Ce résultat permet de prouver la propriété d'invariance de la loi des départs, d'un système en tandem, par permutation des stations pour des files Géo/Géo/1 ou des modèles de stockage. Ce résultat est analogue aux énoncés donnés dans [3, 97] pour la file M/M/1 avec une preuve différente.

**Résultat 6.** *Pour une série de  $k$  files Géo/Géo/1 en tandem en régime transitoire. Supposons que la suite des services à la file  $i$  est i.i.d. de loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $q_i$  indépendante des services aux autres files. Alors,*

$$\mathbb{P}(D = l) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_k, \lambda_1 = l} a(q)^n s_\lambda(q) s_\lambda(1, \dots, 1),$$

avec  $a(q) = \prod_{j=1}^k (1 - q_j)$  et  $s_\lambda$  est la fonction de Schur associée à la partition  $\lambda$ . On en déduit que  $D$  est symétrique en les paramètres  $q_i$ .

*Nous prouvons un résultat analogue pour le modèle de stockage avec des arrivées et des services suivant des lois géométriques. La variable  $R$  est symétrique en les paramètres  $q_i$ .*

## Point fixe et Grandes déviations

Nous explorons la question de l'existence, pour une station avec des services généraux, de processus d'arrivée non-triviaux dont les lois sont invariantes par passage à travers la station. Ce problème peut être interprété en terme de recherche de *points fixes* pour l'opérateur associé à la station. Nous trouvons dans [64, 65] une réponse partielle à cette question. Pour un ensemble d'intensités du processus des arrivées dense dans la zone de stabilité, il existe un point fixe. En outre, ce point fixe est unique [18] et attractif [81]. Un tel résultat de point fixe est intimement lié au *comportement asymptotique* des réseaux de files d'attente en tandem.

Mis à part l'existence de ces points fixes et certaines de leurs propriétés, nous ne disposons d'aucune information sur leur distribution. Pour en apprendre davantage, nous traitons la question de l'existence de points fixes dans le cadre des *grandes déviations* [38]. Dans un premier temps, nous cherchons à établir un principe de grandes déviations pour les variables de sortie du système file d'attente/modèle de stockage. Supposons que les variables d'entrée  $a$  et  $s$ , représentant les arrivées respectivement à la file d'attente et au modèle de stockage, satisfont des principes de grandes déviations avec les fonctions de taux  $I_A$  et  $I_S$  alors

**Résultat 7.** *Sous certaines hypothèses sur  $I_A$  et  $I_S$ , la suite  $\{(\frac{D_n}{n}, \frac{R_n}{n}, \frac{w_0}{n}), n \in \mathbb{Z}\}$ , où  $D_n$  et  $R_n$  représentent les départs cumulés respectivement de la file d'attente et du modèle de stockage et  $w_0$  est la version stationnaire du processus de charge, satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}_+^3$  avec la fonction de taux*

$$J(x_1, x_2, w) = \inf \{ \delta(w - x_1 + x_2) + I_A(x_2) + I_S(x_1); \inf_C g(q, \tau, v_1, v_2) \},$$

---

où

$$g(q, \tau, v_1, v_2) = \tau \left[ I_A \left( \frac{x_2 - v_2}{\tau} \right) + I_S \left( \frac{x_2 - v_2 + w}{\tau} \right) \right] + (1 - \tau) \left[ I_A \left( \frac{v_1}{1 - \tau} \right) + I_S \left( \frac{v_2 - q}{1 - \tau} \right) \right] + \delta q,$$

avec  $\delta = \inf_{0 < a < s} \frac{I_A(a) + I_S(s)}{s - a}$  et

$$C = \{(q, \tau, v_1, v_2) \mid q \geq 0, 0 \leq \tau \leq 1, x_2 - v_2 + w = x_1 - v_1 + q\}.$$

Nous établissons ensuite une condition sous laquelle il existe une classe de variables d'entrée vérifiant un principe de grandes déviations de telle sorte que les processus de départ du système file d'attente/ modèle de stockage satisfont un principe de grandes déviations avec les mêmes fonctions de taux que les variables d'entrée.

**Résultat 8.** Soit  $\delta > 0$  et  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  les variables d'entrée de la file d'attente de lois marginales unidimensionnelles respectivement  $\nu_A$  et  $\nu_S$ , avec  $\nu_A$  la mesure  $\delta$ -inclinée de  $\nu_S$  (ou encore  $\nu_S$  la mesure  $(-\delta)$ -inclinée de  $\nu_A$ ) alors la suite  $\{(\frac{D_n}{n}, \frac{R_n}{n}, \frac{w_0}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}_+^3$  avec la fonction de taux

$$J(x_1, x_2, w) = \delta w + I_A(x_1) + I_S(x_2).$$

En particulier, on a

$$I_D = I_A \quad \text{et} \quad I_R = I_S.$$

Ce résultat permet d'envisager des familles de variables d'entrée liées par une condition d'inclinaison exponentielle comme candidates potentielles pour les points fixes pour les lois.

## Organisation de la thèse

Ce mémoire est organisé comme suit : la première partie est consacrée à l'étude de ces modèles sous des hypothèses markoviennes. Nous prouvons d'une part les différentes versions du théorème de Burke énoncées plus haut ; et d'autre part, nous explorons les liens avec des objets combinatoires. Le chapitre 1 contient des rappels de résultats présentés par Neil O'Connell dans [61, 76, 74, 75]. Ils permettent de mettre en place les techniques qui seront largement utilisées dans cette partie et de présenter d'une manière plus naturelle que dans [76], les liens existant entre files d'attente en tandem et l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth. Le chapitre 2 est consacré à la file M/M/1 où nous présentons les résultats 1, 3 et 4. Nous concluons la première partie par le chapitre 3 dans lequel nous présentons une version discrète du théorème de Burke et nous appliquons les techniques présentées au chapitre 1 à la file Géo/Géo/1 et au modèle de stockage avec des variables géométriques pour obtenir les résultats 2, 5 et 6.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des points fixes pour l'opérateur associé à notre modèle. Le chapitre 4 présente un résultat [65] de point fixe pour la file ./GI/1, c'est-à-dire la loi des arrivées est égale à la loi des départs. En fait, nous avons rappelé et complété les

## Introduction

---

preuves figurant dans [5, 41, 67, 68] qui permettent de prouver l'existence de points fixes non-triviaux pour la file  $./GI/1$ . Ce chapitre permet de motiver le résultat 8 de points fixes pour les grandes déviations pour le modèle File d'attente/ Modèle de Stockage présenté au chapitre 5.

Les résultats des chapitres 2 et 3 ont fait l'objet d'un article accepté pour publication dans *Queueing Systems* [29] et d'une prépublication en cours d'évaluation par un journal [31]. Une version courte de [31] a été publiée dans les actes de la conférence *Marches aléatoires discrètes : théorie et applications en combinatoire, biologie algorithmique, informatique théorique, probabilités, physique statistique* qui a eu lieu en septembre 2003 à l'Institut Henri Poincaré [30]. Les résultats du chapitre 5 ont été soumis à un journal [28].

Première partie

**Théorème de Burke et Algorithme  
RSK**



# Chapitre 1

## Préliminaires

### Sommaire

---

<b>1.1 Introduction</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1.1 File d'attente avec services inutilisés . . . . .	9
1.1.2 Théorème de Burke . . . . .	13
1.1.3 Théorème de Pitman . . . . .	15
<b>1.2 Files d'attente en tandem</b> . . . . .	<b>17</b>
1.2.1 Marches aléatoires ordonnées . . . . .	19
1.2.2 Limite hydrodynamique . . . . .	20
<b>1.3 Séries de files d'attente en tandem</b> . . . . .	<b>22</b>
1.3.1 Algorithme de Robinson-Schensted-Knuth . . . . .	24
1.3.2 Fonction de Schur . . . . .	32

---

### 1.1 Introduction

Cette partie n'est qu'un aperçu des liens, mis en évidence récemment, entre certains modèles de files d'attente en tandem, les marches aléatoires ordonnées et l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth. Les résultats de ce chapitre ne sont pas nouveaux, ils permettent de poser les bases qui nous seront utiles pour illustrer les liens entre les différents objets employés dans d'autres contextes aux chapitres 2 et 3.

#### 1.1.1 File d'attente avec services inutilisés

Soit  $\{y(n), n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  une suite de réels, nous définissons, pour  $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$ ,  $\mathcal{Y}(m, n] = \sum_{j=m+1}^n y(i)$ , la suite des sommes partielles associées. Nous introduisons, également pour  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{Y}(n) = \mathcal{Y}(0, n]$ . Soit  $\{\mathcal{R}(y)(n), n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  la suite renversée en temps associée à  $y$  définie par  $\mathcal{R}(y)(n) = y(-n)$ .

Nous noterons  $\Lambda_1$  l'ensemble des chemins (suites à valeurs entières)  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  avec  $x(0) = 0$  et  $x(n) - x(n-1) \in \{0, 1\}$ . Pour  $x, y \in \Lambda_1$ , nous définissons  $x \Delta y$  et  $x \nabla y$  des éléments

## Chapitre 1. Préliminaires

de  $\Lambda_1$  où

$$(x \Delta y)(i, j) = \min_{i \leq m \leq j} [x(m) - x(i) + y(j) - y(m)], \quad (x \nabla y)(i, j) = \max_{i \leq m \leq j} [x(m) - x(i) + y(j) - y(m)].$$

Les opérations  $\Delta$  et  $\nabla$  ne sont pas associatives. En effet, d'après [76]

$$\begin{aligned} (x_1 \Delta x_2) \Delta x_3 &= x_1 \Delta (x_3 \nabla x_2) \Delta (x_2 \Delta x_3) \\ (x_1 \nabla x_2) \nabla x_3 &= x_1 \nabla (x_3 \Delta x_2) \nabla (x_2 \nabla x_3). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Nous nous intéressons également à l'ensemble  $\Lambda_k$ , l'ensemble des chemins  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$  avec  $x(0) = (0, \dots, 0)$  tels que pour  $n > 0$ ,  $x_i(n) - x_i(n-1) \in \{0, 1\}$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Nous définissons  $G^{(k)} : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_k$  par  $G^{(2)}(x, y) = (x \Delta y, y \nabla x)$ , et pour  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} G^{(k)}(x_1, \dots, x_k) &= (x_1 \Delta x_2 \Delta \dots \Delta x_k, \\ &G^{(k-1)}(x_2 \nabla x_1, x_3 \nabla (x_1 \Delta x_2), \dots, x_k \nabla (x_1 \Delta \dots \Delta x_{k-1})). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les opérations s'effectuent de gauche à droite, c'est-à-dire  $x \Delta y \Delta z$  se lira  $(x \Delta y) \Delta z$ . Nous donnerons d'autres propriétés de ces opérateurs au paragraphe 1.3. Nous allons, dans un premier temps, donner l'interprétation de ces opérations en terme de file d'attente.

Notre modèle est une file d'attente où les arrivées et les départs s'effectuent aux instants entiers et telle que les clients sont servis dans l'ordre de leur arrivée. Nous désignerons par  $a_1(n)$  et  $s_1(n)$  respectivement le nombre de clients qui *arrivent* au système et le nombre maximal de *services* à l'instant  $n$ . Nous noterons  $q_1(n)$  le *nombre de clients* dans le système à l'instant  $n$ .

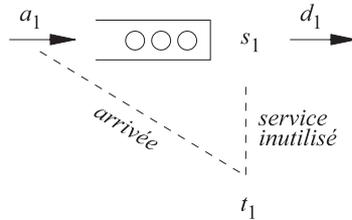


FIG. 1.1 – File d'attente avec services inutilisés.

A chaque instant  $n$ , nous assistons à deux scénarios possibles : si  $q_1(n-1) + a_1(n) \geq s_1(n)$ , il y a  $s_1(n)$  clients qui quittent le système et  $q_1(n) = q_1(n-1) + a_1(n) - s_1(n)$ ; sinon si  $q_1(n-1) + a_1(n) < s_1(n)$ , le système se vide ( $q_1(n) = 0$ ) : il y a  $q_1(n-1) + a_1(n)$  clients qui quittent le système et  $s_1(n) - (q_1(n-1) + a_1(n))$  services qui sont inutilisés et donc perdus (d'où l'appellation file d'attente avec services inutilisés). Nous allons, dans la suite, donner une série d'équations qui régissent l'évolution de cette file d'attente.

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , le processus du nombre de clients vérifie l'équation de Lindley :

$$q_1(n) = \max\{q_1(n-1) + a_1(n) - s_1(n), 0\} = (q_1(n-1) + a_1(n) - s_1(n))^+. \quad (1.3)$$

## 1.1. Introduction

---

La suite du nombre effectif de *départs*  $d_1 = \{d_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  est définie par, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} d_1(n) &= a_1(n) + q_1(n-1) - q_1(n) \\ &= \min[s_1(n), a_1(n) + q_1(n-1)]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Nous définissons la suite des *services inutilisés*  $u_1 = \{u_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $u_1(n) = s_1(n) - d_1(n)$ , ce qui nous permet de définir la suite  $t_1 = \{t_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  (qui n'a pas d'interprétation immédiate), pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$t_1(n) = a_1(n) + u_1(n) = s_1(n) - q_1(n-1) + q_1(n). \quad (1.5)$$

Au vu des notations du paragraphe 1.1.1, nous pouvons réécrire les équations (1.4) et (1.5) sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}_1(m, n] = \mathcal{A}_1(m, n] + q_1(m) - q_1(n), \quad \mathcal{T}_1(m, n] = \mathcal{S}_1(m, n] - q_1(m) + q_1(n). \quad (1.6)$$

Nous allons illustrer l'évolution de ce système entre les instants 0 et 9 (figure 1.2). A l'instant 0, la file est vide.

Instant	$a_1(n)$	$s_1(n)$	$q_1(n)$	$d_1(n)$	$u_1(n)$	$t_1(n)$
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	1	0	1	0	0	1
<b>2</b>	0	1	0	1	0	0
<b>3</b>	1	1	0	1	0	1
<b>4</b>	1	0	1	0	0	1
<b>5</b>	1	1	1	1	0	1
<b>6</b>	1	0	2	0	0	1
<b>7</b>	0	1	1	1	0	0
<b>8</b>	0	1	0	1	0	0
<b>9</b>	0	1	0	0	1	0

Tab.1 : Évolution de la file avec services inutilisés

- A l'instant 1, un client arrive dans le système ( $a_1(1) = 1$ ), nous représentons les clients qui arrivent dans le système par une boule pleine, et  $t_1(1) = 1$ . Le client se place dans la salle d'attente ( $q_1(1) = 1$ ) jusqu'au premier instant où il peut être servi .
- A l'instant 2, il y a un service ( $s_1(2) = 1$ ) et le client en attente quitte le système ( $d_1(2) = 1$ ) qui se vide ( $q_1(2) = 0$ ).

- A l'instant 3, il y a une arrivée et un départ qui se produisent au même instant ( $a_1(3) = s_1(3) = 1$ ), c'est-à-dire  $d_1(3) = t_1(3) = 1$  et le système est vide ( $q_1(3) = 0$ ). Nous avons représenté cette situation par une boule pleine (arrivée) avec son contour en pointillés (départ instantané).
- A l'instant 4, un client arrive et nous sommes dans la même situation qu'à l'instant 1. A l'instant 5, ce dernier part ( $s_1(5) = 1$ ), mais le système ne se vide pas ( $q_1(5) = 1$ ) car il y a un nouveau client qui est admis dans le système ( $a_1(5) = 1$ ).
- A l'instant 6, il y a une arrivée ( $a_1(6) = 1$ ) et  $q_1(6) = 2$ .
- Enfin, ces deux clients partent respectivement aux instants 7 et 8 et le système se vide ; à l'instant 9, nous avons un service inutilisé.

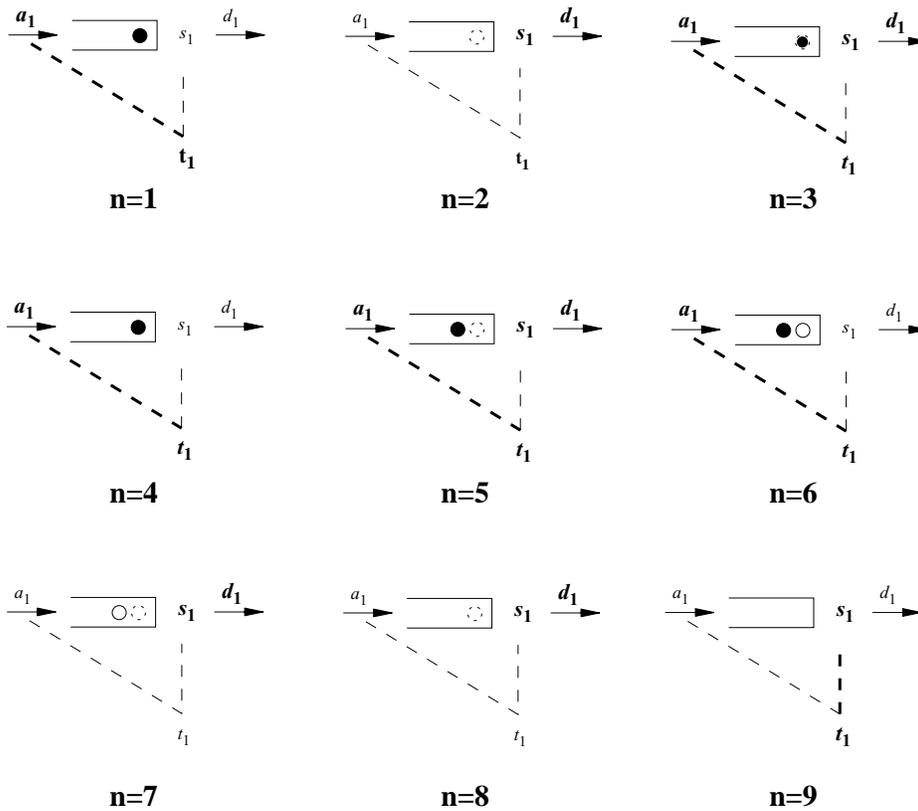


FIG. 1.2 – Evolution de la file d'attente entre les instants  $n = 1$  et  $n = 9$ .

Nous donnons, pour conclure ce paragraphe, la trajectoire de  $q_1$  entre les instants 0 et 9 (figure 1.3). Ces trajectoires contiennent une partie de l'information sur l'évolution du système. Pour compléter les données qui ne figurent pas sur les trajectoires de  $q_1$ , nous marquons par un carré noir les instants où il y a un service inutilisé et par un point noir les instants où il y a une arrivée et un départ que nous ne pouvons constater sur cette trajectoire. Nous verrons comment formaliser ceci dans la suite.

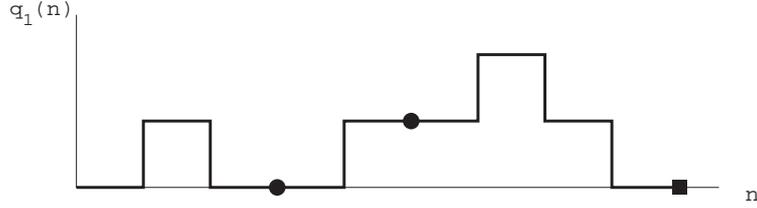


FIG. 1.3 – Trajectoire de  $q_1$  pour l'exemple de Tab.1.

### 1.1.2 Théorème de Burke

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Pour toute variable aléatoire  $X$ , nous noterons  $\mathbb{L}[X]$  la loi de  $X$  sous  $\mathbb{P}$ . Soit  $\mathcal{B}$  un borélien de  $\mathcal{F}$ , la loi  $\mathbb{L}[X \mid \mathcal{B}]$  est la loi de  $X$  conditionnellement à  $\mathcal{B}$ . Enfin, si deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même loi, nous écrirons  $X \sim Y$ .

Nous supposons, qu'à chaque instant  $n \in \mathbb{Z}$ , il y a au plus un client qui arrive et un client qui part. Plus précisément, les suites de variables aléatoires  $a_1 = \{a_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  et  $s_1 = \{s_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  sont des variables aléatoires i.i.d. Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètres respectivement  $p_1$  et  $p_2$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(a_1(0) = 1) = p_1 = 1 - \mathbb{P}(a_1(0) = 0), \quad \mathbb{P}(s_1(0) = 1) = p_2 = 1 - \mathbb{P}(s_1(0) = 0).$$

En d'autres termes, les processus  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{S}_1$  sont des processus binomiaux, indépendants, ayant pour paramètres respectivement  $p_1 < p_2$ , c'est-à-dire pour  $m \leq n$ , les variables aléatoires  $\mathcal{A}_1(m, n]$  et  $\mathcal{S}_1(m, n]$  suivent des lois binomiales de paramètres respectivement  $(n - m, p_1)$  et  $(n - m, p_2)$ .

Nous supposons la condition de stabilité  $p_1 < p_2$  vérifiée, dans ce cas le processus en temps discret  $q_1 = \{q_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  est une marche aléatoire, avec une dérive strictement négative, avec une barrière (réfléchissante) en 0. La version stationnaire de  $q_1$  est presque sûrement finie et vérifie

$$q_1(n) = \sup_{m \leq n-1} \{\mathcal{A}_1(m, n] - \mathcal{S}_1(m, n]\}^+ = \sup_{m \leq n} \{\mathcal{A}_1(m, n] - \mathcal{S}_1(m, n]\}, \quad (1.7)$$

où on a juste remplacé le 0 par  $\mathcal{A}_1(n, n] - \mathcal{S}_1(n, n]$ .

Le processus  $q_1 = \{q_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  est une chaîne de Markov et plus précisément un processus de naissance et de mort en temps discret de distribution invariante géométrique sur  $\mathbb{N}$  de paramètre  $\frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}$ . Le processus  $q_1$  est réversible, c'est-à-dire

$$q_1 = \{q_1(n), n \in \mathbb{Z}\} \sim \mathcal{R}(q_1) = \{\mathcal{R}(q_1)(n), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une extension du théorème de Burke à la file avec services inutilisés en temps discret, présentée dans [61]. Plus précisément, nous pouvons identifier la loi des *variables de sortie* du système, en l'occurrence  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{T}_1$ , avec celle des *variables d'entrée*  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{S}_1$ . L'ingrédient principal consiste en la propriété de

## Chapitre 1. Préliminaires

---

réversibilité utilisé par E. Reich dans [82] donnant une preuve élégante du résultat de P.J. Burke [16]. Des analogues de ce résultat, dans le cas continu et dans le cas de trafic lourd (*heavy traffic*), sont énoncés dans respectivement [78] et [48, 77].

**Théorème 1.1.1.** [61] *Les processus  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{T}_1$  sont des processus binomiaux, indépendants, ayant pour paramètres respectivement  $p_1$  et  $p_2$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{\mathcal{Q}(n), n \in \mathbb{Z}\}$  un processus de naissance et de mort de même distribution que  $\{q_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ . Nous ne disposons pas d'assez d'information, avec la simple donnée de la trajectoire de  $\{q_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ , pour reconstruire  $\{a_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ . En fait, en temps discret, nous pouvons assister à une arrivée et un départ au même instant  $n$  qu'on ne peut pas constater sur la trajectoire de  $\{q_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ . Nous complétons par un processus auxiliaire, réversible sur  $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  contenant l'information manquante sur les événements  $\{\mathcal{Q}(n-1) = \mathcal{Q}(n)\}$ . Considérons la suite i.i.d.  $\{\mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}^0, n \in \mathbb{Z}\} \in \{(0,0), (0,1), (1,1)\}^{\mathbb{Z}}$  (respectivement  $\{\mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}, n \in \mathbb{Z}\} \in \{(0,0), (1,1)\}^{\mathbb{Z}}$ ), où pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}^0$  (respectivement  $\mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}$ ) a la même distribution que  $(a_1(n), s_1(n))$  sachant  $\{q_1(n-1) = q_1(n) = 0\}$  (respectivement  $\{q_1(n-1) = q_1(n) \neq 0\}$ ). Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , définissons  $(\alpha(n), \sigma(n)) = f((\mathcal{Q}(n-1), \mathcal{Q}(n)), \mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}^0, \mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}})$  où

$$f((\beta, \beta'), (m_0, m'_0), (m, m')) = \begin{cases} (m_0, m'_0) & \text{si } \beta = \beta' = 0 \\ (m, m') & \text{si } \beta = \beta' \neq 0 \\ (0, 1) & \text{si } \beta - \beta' = 1 \\ (1, 0) & \text{si } \beta' - \beta = 1. \end{cases}$$

Nous vérifions que le processus  $\{(\alpha(n), \sigma(n)), n \in \mathbb{Z}\}$  est le processus des arrivées-services à la file (figure 1.3). Plus précisément, le processus  $\{(\mathcal{Q}(n), \alpha(n), \sigma(n)), n \in \mathbb{Z}\}$  a la même distribution que  $\{(q_1(n), a_1(n), s_1(n)), n \in \mathbb{Z}\}$ . D'une manière analogue, nous pouvons construire la suite des départs  $\{d_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ . En effet, nous définissons les processus  $\{\delta(n), n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{\tau(n), n \in \mathbb{Z}\}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\mathcal{R}(\delta)(n), \mathcal{R}(\tau)(n)) = f((\mathcal{R}(\mathcal{Q})(n-1), \mathcal{R}(\mathcal{Q})(n)), \mathcal{R}(\mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}^0), \mathcal{R}(\mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}})) \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) peut être traduite par le fait que le processus des arrivées-services de la file renversée en temps est  $\{(\mathcal{R}(\delta)(n), \mathcal{R}(\tau)(n)), n \in \mathbb{Z}\}$ . Comme,

$$\{(\delta(n), \tau(n)), n \in \mathbb{Z}\} \sim \{(d_1(n), t_1(n)), n \in \mathbb{Z}\},$$

et que le processus  $\{(\mathcal{Q}(n), \mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}^0, \mathcal{M}_{n-\frac{1}{2}}), n \in \mathbb{Z}\}$  est réversible par construction, nous en déduisons que

$$\{(\mathcal{R}(\delta)(n), \mathcal{R}(\tau)(n)), n \in \mathbb{Z}\} \sim \{(\alpha(n), \sigma(n)), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ces processus sont i.i.d., donc réversibles alors  $\{(\delta(n), \tau(n)), n \in \mathbb{Z}\} \sim \{(\alpha(n), \sigma(n)), n \in \mathbb{Z}\}$ , soit  $\{(d_1(n), t_1(n)), n \in \mathbb{Z}\} \sim \{(a_1(n), s_1(n)), n \in \mathbb{Z}\}$ .  $\square$

L'énoncé originel du théorème de Burke est établi pour la file  $M/M/1$  stable et à l'équilibre, où le processus des arrivées est un processus de Poisson sur  $\mathbb{R}$  indépendant de la suite des services qui est i.i.d. de loi exponentielle. La preuve, dans ce contexte en temps continu, repose sur le même argument de réversibilité que dans le cas discret, traité plus haut. La différence fondamentale réside dans le fait que'en temps discret, le processus  $q_1$  ne contient pas suffisamment d'information pour reconstituer le processus d'entrée du système, d'où la nécessité de compléter cette information. La subtilité réside dans le choix de ce complément d'information de telle sorte qu'on puisse recouvrir un processus réversible. Ce résultat établit en outre que les suites  $s_1$  et  $t_1$  ont la même loi, l'utilité de cette assertion apparaîtra au cours du paragraphe suivant.

En fait, en plus de l'identité en loi, entre les processus d'arrivée et de départ, ce système (en temps discret et continu) vérifie la propriété de *quasi-réversibilité* suivante [55] : pour tout  $n$ , le processus  $\{\mathcal{D}_1(m, n), m \leq n\}$  est indépendant de  $\{q_1(m), m > n\}$ . Autrement dit, le passé des départs, avant l'instant  $n$ , est indépendant du nombre de clients, après l'instant  $n$ , dans le serveur.

### 1.1.3 Théorème de Pitman

Nous allons utiliser les résultats du paragraphe 1.1.2 pour donner une représentation non conditionnelle d'une marche aléatoire conditionnée à rester positive. Ceci est motivé par le théorème de représentation de Pitman pour le processus de *Bessel tridimensionnel* [79] que nous pouvons voir également comme un mouvement Brownien conditionné (dans un certain sens) à rester positif. Plus précisément,

**Théorème 1.1.2.** [79] *Soit  $\{X_t, t \geq 0\}$  un mouvement Brownien standard. Soit*

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$$

*le processus de ses maxima alors  $\{2M_t - X_t, t \geq 0\}$  a la même loi que  $\{X_t, t \geq 0\}$  conditionné à rester positif.*

Ce résultat a été généralisé à différents contextes : pour le mouvement Brownien avec une dérive positive [80], pour des marches aléatoires avec pas markoviens [47] et des mouvements browniens conditionnés (au sens de Doob) à rester ordonnés [78]. Nous allons, dans la suite, nous intéresser au cas d'une marche aléatoire, avec une dérive strictement positive, conditionnée à rester strictement positive, traité dans [61].

Remarquons d'abord que, sous l'hypothèse de stabilité  $p < q$ , l'équation (1.7) admet une version renversée dans le temps, pour  $n \geq 0$ ,

$$q_1(n) = \sup_{u \geq n} \{\mathcal{D}_1(n, u) - \mathcal{J}_1(n, u)\}. \quad (1.9)$$

De plus, sur l'événement  $\{q_1(0) = 0\}$ , on vérifie que

$$q_1(n) = \max_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{S}_1(m, n)\}.$$

## Chapitre 1. Préliminaires

---

**Proposition 1.1.3.** *Nous avons pour tout  $n \geq 0$ ,*

$$\mathbb{L}[\mathcal{A}_1(n), \mathcal{S}_1(n) \mid \mathcal{A}_1(l) \leq \mathcal{S}_1(l), \forall l \geq 0] = \mathbb{L}[G^{(2)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{S}_1)(n)]. \quad (1.10)$$

*Démonstration.* Sur  $\{q_1(0) = 0\}$ , et en utilisant (1.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(n) = \mathcal{A}_1(n) - q_1(n) &= \mathcal{A}_1(n) - \max_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{S}_1(m, n)\} \\ &= \min_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{A}_1(m) + \mathcal{S}_1(n) - \mathcal{S}_1(m)\}, \end{aligned}$$

et de la même manière, nous obtenons que

$$\mathcal{J}_1(n) = \mathcal{S}_1(n) + q_1(n) = \max_{0 \leq m \leq n} [\mathcal{S}_1(m) + \mathcal{A}_1(n) - \mathcal{A}_1(m)].$$

En résumé, nous avons prouvé que

$$\mathcal{D}_1(n) = \mathcal{A}_1 \triangle \mathcal{S}_1(n), \quad \mathcal{J}_1(n) = \mathcal{S}_1 \nabla \mathcal{A}_1(n). \quad (1.11)$$

En appliquant le théorème 1.1.1, on a

$$\mathbb{L}[(\mathcal{A}_1(n), \mathcal{S}_1(n)) \mid \mathcal{A}_1(n) \leq \mathcal{S}_1(n), \forall n \geq 0] = \mathbb{L}[(\mathcal{D}_1(n), \mathcal{J}_1(n)) \mid \mathcal{D}_1(n) \leq \mathcal{J}_1(n), \forall n \geq 0]$$

Grâce à (1.9), l'événement  $\{\mathcal{D}_1(l) \leq \mathcal{J}_1(l), \forall l \geq 0\}$  est égal à  $\{q_1(0) = 0\}$ . En tenant compte de (1.11), on a

$$\mathbb{L}[(\mathcal{A}_1(n), \mathcal{S}_1(n)) \mid \mathcal{A}_1(l) \leq \mathcal{S}_1(l), \forall l \geq 0] = \mathbb{L}[\mathcal{A}_1 \triangle \mathcal{S}_1(n), \mathcal{S}_1 \nabla \mathcal{A}_1(n) \mid q_1(0) = 0].$$

Nous concluons en remarquant que les processus  $\{\mathcal{A}_1(n), n \geq 0\}$  et  $\{\mathcal{S}_1(n), n \geq 0\}$  sont indépendants de l'événement  $\{q_1(0) = 0\}$ .  $\square$

Le théorème de Pitman à un analogue discret,

**Théorème 1.1.4.** [47] *Soit  $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  une marche aléatoire, ayant des pas i.i.d. dans  $\{-1, 0, 1\}$  de dérive strictement positive. Soit  $M(n) = \max_{0 \leq m \leq n} X(m)$  le processus de ses maxima alors  $\{2M(n) - X(n), n \in \mathbb{Z}\}$  a la même loi que  $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  conditionné à rester positif.*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que

$$\mathcal{S}_1 \nabla \mathcal{A}_1(n) - \mathcal{A}_1 \triangle \mathcal{S}_1(n) = 2 \max_{0 \leq m \leq n} [\mathcal{S}_1(m) - \mathcal{A}_1(m)] - [\mathcal{S}_1(n) - \mathcal{A}_1(n)].$$

Soit en réécrivant (1.10), avec  $X(n) = \mathcal{S}_1(n) - \mathcal{A}_1(n), \forall n \geq 0$ , on a

$$\mathbb{L}[X(n) \mid X(l) \geq 0, \forall l \geq 0] = \mathbb{L}[2M(n) - X(n)].$$

$\square$

Nous pouvons, à partir de ce résultat, retrouver le théorème de Pitman pour le mouvement brownien [79], ce passage est présenté dans [77].

## 1.2 Files d'attente en tandem

Commençons par définir le modèle en tandem de ces files d'attente. Nous numérotions les files d'attente successives par  $i \in \{1, \dots, k\}$  et nous réserverons  $n \in \mathbb{Z}$  pour le temps. Nous poserons  $a_i(n)$  et  $d_i(n)$  respectivement le nombre d'arrivées à la file  $i$  à l'instant  $n$  et le nombre de départs de la file  $i$  à l'instant  $n$ . Dire que les files sont en tandem revient à poser  $d_i(n) = a_{i+1}(n)$ , en d'autres termes, un client qui quitte la file  $i - 1$  rejoint directement la file  $i$ .

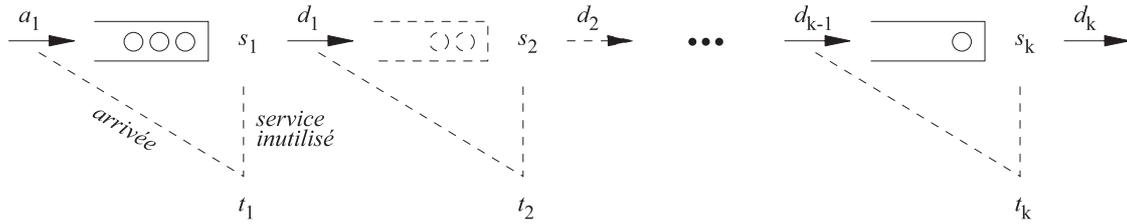


FIG. 1.4 – Files d'attente en tandem.

Nous noterons par  $s_i(n)$  le nombre de services dispensés, à l'instant  $n$ , par la file  $i$  et par  $q_i(n) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  le nombre de clients, à la file  $i$ , à l'instant  $n$ . Nous supposons que  $d_0 = a_1$ .

Nous supposons, dans la suite de cette section, que les arrivées et les services se produisent de manière aléatoire. Nous supposons que  $\{a_1(n), n \in \mathbb{Z}\}, \{s_1(n), n \in \mathbb{Z}\}, \dots, \{s_k(n), n \in \mathbb{Z}\}$  sont des suites i.i.d. mutuellement indépendantes de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$  avec  $p_1 < \min\{p_2, \dots, p_{k+1}\}$ . Sous cette condition, nous avons  $q_i(n) \in \mathbb{N}$  et pour  $i \in \{1, \dots, k\}, n \in \mathbb{Z}$ , nous vérifions les relations suivantes

$$q_i(n) = (q_i(n-1) + d_{i-1}(n) - s_i(n))^+ = \max_{m \leq n} \{\mathcal{D}_{i-1}(m, n] - \mathcal{S}_i(m, n]\}$$

et  $d_i(n) = d_{i-1}(n) + q_i(n-1) - q_i(n)$ . Nous introduisons, enfin, les variables  $t_i(n)$  et  $u_i(n)$  (nombre de services inutilisés à l'instant  $n$  au sein de la file  $i$ ), définies par

$$\begin{aligned} u_i(n) &= s_i(n) - d_i(n) \\ t_i(n) &= s_i(n) - q_i(n-1) + q_i(n). \end{aligned}$$

Nous rappelons que, pour  $1 \leq i \leq k$ , on a

$$\mathcal{D}_i(m, n] = \mathcal{D}_{i-1}(m, n] + q_i(m) - q_i(n), \quad \mathcal{I}_i(m, n] = \mathcal{S}_i(m, n] - q_i(m) + q_i(n). \quad (1.12)$$

Sur l'événement  $q_i(0) = 0$ , nous vérifions que

$$q_i(n) = \max_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{D}_{i-1}(m, n] - \mathcal{S}_i(m, n]\}. \quad (1.13)$$

## Chapitre 1. Préliminaires

---

**Proposition 1.2.1.** *Sur l'événement  $\{q_1(0) = \dots = q_k(0) = 0\}$ ,*

$$q_1(n) + \dots + q_k(n) = \max_{0 \leq m \leq n} \{A_1(m, n) - (\mathcal{S}_1 \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_k)(m, n)\}. \quad (1.14)$$

De plus,

$$\mathcal{D}_i(n) = (A_1 \Delta \mathcal{S}_1 \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_i)(n), \quad \mathcal{T}_i(n) = \mathcal{S}_i \nabla (A_1 \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_{i-1})(n). \quad (1.15)$$

*Démonstration.* Comme  $q_k(n) = \max_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{D}_{k-1}(m, n] - \mathcal{S}_k(m, n]\}$ , nous déduisons d'après (1.12) que

$$q_k(n) = \max_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{D}_{k-2}(m, n] + q_{k-1}(m) - q_{k-1}(n) - \mathcal{S}_k(m, n]\}.$$

En combinant ceci avec (1.13), on a

$$\begin{aligned} q_{k-1}(n) + q_k(n) &= \max_{0 \leq m \leq n} \{\mathcal{D}_{k-2}(m, n] + \max_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{D}_{k-2}(l, m] - \mathcal{S}_{k-1}(l, m]\} - \mathcal{S}_k(l, n]\} \\ &= \max_{0 \leq l \leq n} \{\mathcal{D}_{k-2}(l, n] - \min_{l \leq m \leq n} \{\mathcal{S}_{k-1}(l, m] + \mathcal{S}_k(m, n]\}\} \\ &= \max_{0 \leq l \leq n} \{\mathcal{D}_{k-2}(l, n] - (\mathcal{S}_{k-1} \Delta \mathcal{S}_k)(l, n]\}. \end{aligned}$$

Nous concluons en appliquant successivement l'opération précédente et en tenant compte de

$$(\mathcal{S}_l \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_k)(m, n] = \inf_{m \leq u \leq n} \{\mathcal{S}_l(m, u] + (\mathcal{S}_{l+1} \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_k)(u, n]\}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} D_i(n) &= A_1(n) - (q_1(n) + \dots + q_i(n)) \\ &= A_1(0, n] - \max_{0 \leq m \leq n} \{A_1(m, n] - (\mathcal{S}_1 \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_i)(m, n]\} \\ &= (A_1 \Delta \mathcal{S}_1 \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_i)(n). \end{aligned}$$

Grâce à (1.12), on a

$$\begin{aligned} T_i(n) &= S_i(0, n] + \max_{0 \leq m \leq n} \{D_{i-1}(m, n] - S_i(m, n]\} \\ &= (S_i \nabla D_{i-1})(n) = (S_i \nabla A_1 \Delta \dots \Delta \mathcal{S}_{i-1})(n). \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de donner une version multi-dimensionnelle du théorème de Burke.

**Théorème 1.2.2.** [61] *Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{D}_k, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$  sont des processus binomiaux indépendants de paramètres respectivement  $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$  avec  $p_1 < \min\{p_2, \dots, p_{k+1}\}$ .*

## 1.2. Files d'attente en tandem

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 2$ , se reporter au théorème 1.1.1. Supposons que le théorème est vrai quand on se restreint à  $k - 1$  files, c'est-à-dire,  $\mathcal{D}_{k-1}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{k-1}$  sont des processus binomiaux indépendants de paramètres respectivement  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Rappelons que  $\mathcal{D}_{k-1} = \mathcal{A}_k$  et que le processus  $\mathcal{S}_k$  est, par hypothèse, indépendant des autres processus. En appliquant le théorème 1.1.1 à  $(\mathcal{A}_k, \mathcal{S}_k)$  nous obtenons que  $(\mathcal{D}_k, \mathcal{T}_k)$  sont deux processus binomiaux indépendants de paramètres  $p_1, p_{k+1}$  et nous concluons grâce à l'hypothèse d'indépendance.  $\square$

Sous l'hypothèse de stabilité  $p_1 < \min\{p_2, \dots, p_{k+1}\}$ , la définition (1.13) du processus des nombres de clients, à la file  $i$ , à l'instant  $n$ , admet une version renversée en temps, donnée par

$$q_i(n) = \sup_{u \geq n} \{\mathcal{D}_i(n, u) - \mathcal{T}_i(n, u)\}. \quad (1.16)$$

En utilisant l'équation (1.16), nous pouvons prouver, de la même manière qu'à la proposition 1.2.1, que

$$q_1(0) + \dots + q_k(0) = \sup_{u > 0} \{\mathcal{D}_k(u) - (\mathcal{T}_1 \triangle \dots \triangle \mathcal{T}_k)(u)\}. \quad (1.17)$$

Nous exploitons ce résultat, dans le paragraphe suivant, pour donner une représentation (non conditionnée) de marches aléatoires, conditionnées à rester ordonnées, à l'image de ce que nous avons présenté au paragraphe 1.1.3, pour le cas en deux dimensions.

### 1.2.1 Marches aléatoires ordonnées

Soit  $X = (X_1, \dots, X_k)$  une marche aléatoire sur  $\mathbb{N}^k$  dont les composantes sont mutuellement indépendantes, de pas i.i.d. de paramètres  $p_1, p_2, \dots, p_k$  avec  $p_1 < \min\{p_2, \dots, p_k\}$ . Nous désirons donner la représentation de ces marches aléatoires conditionnées à rester ordonnées. Plus précisément,

**Théorème 1.2.3.** *La loi conditionnelle de  $(X_1, \dots, X_k)$  sachant*

$$X_1(n) \leq \dots \leq X_k(n), \quad \forall n \geq 0, \quad (1.18)$$

*est égale à la loi (non conditionnée) de  $G^{(k)}(X_1, \dots, X_k)$ , c'est-à-dire*

$$\mathbb{L}[(X_1, \dots, X_k) \mid X_1(n) \leq \dots \leq X_k(n), \forall n \geq 0] = \mathbb{L}[G^{(k)}(X_1, \dots, X_k)].$$

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence. Le cas  $k = 2$  correspond à la proposition 3.2.2.

Soit  $k \geq 3$ , supposons l'hypothèse vraie à l'ordre  $k - 1$ . Par application de l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbb{L}[(\mathcal{D}_{k-1}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{k-1}) \mid \mathcal{T}_1 \leq \dots \leq \mathcal{T}_{k-1}] = \mathbb{L}[(\mathcal{D}_{k-1}, G^{(k-1)}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{k-1}))].$$

Ainsi, la loi de  $(\mathcal{D}_{k-1}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{k-1})$  conditionnellement à l'événement  $\{\mathcal{D}_{k-1} \leq \mathcal{T}_1 \leq \dots \leq \mathcal{T}_{k-1}\}$  est égale à la loi de  $(\mathcal{D}_{k-1}, G^{(k-1)}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{k-1}))$  sachant  $\{\mathcal{D}_{k-1} \leq \mathcal{T}_1 \triangle \dots \triangle \mathcal{T}_{k-1}\}$ .

## Chapitre 1. Préliminaires

---

D'après (1.17),

$$\{\mathcal{D}_{k-1} \leq \mathcal{T}_1 \Delta \cdots \Delta \mathcal{T}_{k-1}\} = \{q_1(0) + \cdots + q_{k-1}(0) = 0\}.$$

Par conséquent, en utilisant (1.2) et (1.15), on a

$$(\mathcal{D}_{k-1}, G^{(k-1)}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{k-1})) = G^{(k)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{k-1}).$$

Nous concluons grâce à l'indépendance des processus  $\mathcal{A}_1, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{k-1}$  de  $q_1(0), \dots, q_{k-1}(0)$ .  $\square$

Par application du théorème de Donsker, nous retrouvons un résultat analogue [78], pour des particules browniennes conditionnées à rester dans la chambre de Weyl

$$W = \{(x_1, \dots, x_k), x_1 < \cdots < x_k\}.$$

### 1.2.2 Limite hydrodynamique

Pour  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , un *chemin orienté*  $\pi$  allant de  $(1, 1)$  à  $(n, k)$  est une suite de points  $\{(n_i, k_i), 0 \leq i \leq n+k-1\}$ , avec soit  $(n_{i+1}, k_{i+1}) = (n_i, k_i+1)$  soit  $(n_{i+1}, k_{i+1}) = (n_i+1, k_i)$ ,  $(n_0, k_0) = (1, 1)$  et  $(n_{n+k-1}, k_{n+k-1}) = (n, k)$ . Nous supposons que chaque site  $(n, k)$  a un poids  $\epsilon_{n,k}$ . Soit  $\Pi_{(n,k)}$  l'ensemble de tous ces chemins, nous nous intéressons à l'instant de premier passage par le point  $(n, k)$ , c'est-à-dire

$$F((n, k)) = \min_{\pi \in \Pi_{(n,k)}} \sum_{(i,j) \in \pi} \epsilon_{i,j}. \quad (1.19)$$

La quantité  $\sum_{(i,j) \in \pi} \epsilon_{i,j}$  représente le poids du chemin  $\pi$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , nous définissons l'ensemble  $\Pi_x^k$  des chemins allant de  $(1, 1)$  à un point de la forme  $(n, k)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dans la direction  $x$ , c'est-à-dire  $n = \lfloor xk \rfloor$  où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ . Nous introduisons également les notations suivantes :

$$F_x(k) = \min_{\pi \in \Pi_x^k} \sum_{(i,j) \in \pi} \epsilon_{i,j}.$$

En posant  $\epsilon_{i,j} = t_j(i)$ , nous vérifions que  $F_x(k) = \mathcal{T}_1 \Delta \cdots \Delta \mathcal{T}_k(\lfloor xk \rfloor)$ , nous pouvons réécrire (1.17) sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^k q_j(0) = \sup_{x>0} \{\mathcal{D}_k(\lfloor xk \rfloor) - F_x(k)\}. \quad (1.20)$$

Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser au comportement asymptotique de  $F_x(k)$ . Plus précisément,

**Théorème 1.2.4.** *Supposons que  $\{\epsilon_{i,j}, i, j \in \mathbb{Z}\}$  sont i.i.d. Bernoulli avec*

$$\mathbb{P}(\epsilon_{i,j} = 1) = q = 1 - \mathbb{P}(\epsilon_{i,j} = 0),$$

alors la limite hydrodynamique

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} F_x(k)$$

existe presque sûrement sur  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ .

L'ingrédient principal de cette preuve est le théorème ergodique sous-additif de Kingman [57]. Nous détaillerons la preuve au chapitre 4. Nous voulons calculer cette limite  $f(x)$ . Pour ce faire, revenons au modèle de files d'attente en tandem avec  $p_1 = p < p_2 = \dots = p_{k+1} = q$ , comme les suites  $a_1, s_1, \dots, s_k$  sont indépendantes, les variables  $q_i(0)$  le sont également. Par conséquent, grâce à la loi des grands nombres, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k q_j(0) = E(q_1(0)) = \frac{p(1-q)}{q-p}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathcal{D}_k(\lfloor xk \rfloor) = xE(d_1(0)) = xp.$$

Soit, en revenant à (1.20), on a

$$\begin{aligned} E(q_1(0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sup_{x>0} \{ \mathcal{D}_k(\lfloor xk \rfloor) - F_x(k) \} \\ &= \sup_{x>0} \{ xp - f(x) \}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité n'étant pas immédiate, nous devons justifier l'inversion de la limite et du supremum (chapitre 4). Ainsi,  $f(x)$  est la *transformée de Legendre* de  $h(p) = \frac{p(1-q)}{q-p}$ , cette transformée est inversible, c'est-à-dire

$$\sup_{x \geq 0} \{ px - f(x) \} = h(p) \iff f(x) = \sup_{0 < p < q} \{ px - h(p) \}. \quad (1.21)$$

Nous retrouvons de la sorte un résultat dû à Seppäläinen [87, 88] en utilisant des idées similaires mais moins directes. En maximisant  $px - \frac{p(1-q)}{q-p}$  pour  $0 < p < q$ , on a

**Théorème 1.2.5.** [87] *La fonction de croissance  $f(x)$  donnant le comportement asymptotique, en limite hydrodynamique, du temps de premier passage d'un modèle de percolation dirigé avec les poids  $\{\epsilon_{i,j}, i, j \in \mathbb{Z}\}$  i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $q$  est donnée par*

$$f(x) = \left( \max(\sqrt{qx} - \sqrt{1-q}, 0) \right)^2.$$

L'astuce consistant à utiliser les files d'attente stationnaires pour calculer la fonction de croissance  $f(x)$  introduite dans [85], a été systématisée pour différents contextes, dans [73]. Nous reviendrons sur ce problème ultérieurement pour d'autres modèles de files d'attente.

### 1.3 Séries de files d'attente en tandem

Nous définissons, maintenant, le modèle de séries de files d'attente en tandem. La première série de files d'attente correspond au modèle classique de  $k$  files d'attente en tandem décrit au paragraphe 1.2. La deuxième série de files d'attente correspond également à un modèle classique de  $k - 1$  files d'attente en tandem. Il y a un service à la file  $i$  de cette deuxième série à chaque fois qu'il y a ou bien un départ de la file  $i$  (une arrivée à la file  $i + 1$ ) de la première série ou bien un service inutilisé à la file  $i + 1$  de la première série. Ceci s'effectue de manière instantanée (sans décalage dans le temps). La  $i$ -ième série contient  $k - i + 1$  files et hérite ses services de la  $(i - 1)$ -ième série.

Nous supposons que la première file de chaque série est saturée, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de clients à la file 1 en attente d'être servis, à l'instant 0, les autres files sont vides. Nous noterons

$$x_i = \{x_i(n), n \in \mathbb{N}\},$$

le processus des services de la file  $i$  de la première série.

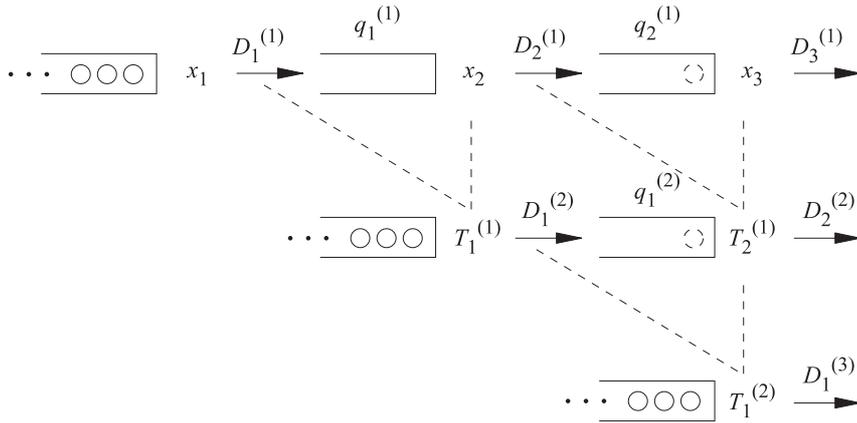


FIG. 1.5 – Séries de files d'attente en tandem.

Nous allons, enfin, introduire quelques variables auxiliaires qui seront utiles dans la suite. Pour  $k \geq 2$ , soient les applications  $D^{(1)} : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_k$  et  $T^{(1)} : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k-1}$  définies par

$$D^{(1)}(x) = (x_1, x_1 \Delta x_2, \dots, x_1 \Delta \dots \Delta x_k) \tag{1.22}$$

$$T^{(1)}(x) = (x_2 \nabla x_1, x_3 \nabla (x_1 \Delta x_2), \dots, x_k \nabla (x_1 \Delta \dots \Delta x_{k-1})). \tag{1.23}$$

Autrement dit,  $D_i^{(1)}(x) = D_{i-1}^{(1)}(x) \Delta x_i$  et  $T_{i-1}^{(1)}(x) = x_i \nabla D_{i-1}^{(1)}(x)$  ou encore

$$(D_i^{(1)}(x), T_{i-1}^{(1)}(x)) = G^{(2)}(D_{i-1}^{(1)}(x), x_i).$$

Les processus  $D_i^{(1)}(x)$  et  $T_i^{(1)}(x)$  correspondent respectivement à la suite des départs de la file  $i$  de la première série et à la suite des services à la file  $i$  de la deuxième série. Pour

### 1.3. Séries de files d'attente en tandem

---

$j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \in \{1, \dots, k - j + 1\}$ , soient  $D_i^{(j)}, T_i^{(j)} : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_1$ ,

$$\begin{aligned} D_i^{(j)}(x) &= D_{i-1}^{(j)}(x) \triangle T_i^{(j-1)}(x) \\ T_i^{(j)}(x) &= T_{i+1}^{(j-1)}(x) \nabla D_i^{(j)}(x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nous pouvons nous convaincre grâce à un raisonnement par récurrence que  $D_i^{(j)}(x)$  et  $T_i^{(j)}(x)$  représentent respectivement le processus des départs de la file  $i$  de la  $j$ -ième série et le processus des services à la file  $i$  de la  $(j+1)$ -ième série (figure 1.5). Nous noterons  $q_j^{(i)}(x)$  le processus du nombre de clients à la  $i$ -ième file de la série  $j$ , on a  $q_i^{(j)}(x) = D_{i-1}^{(j)}(x) - D_i^{(j)}(x)$ . Nous allons présenter deux lemmes qui seront utiles pour la suite.

**Lemme 1.3.1.** *L'application  $G^{(k)} : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_k$  définie dans (1.2) vérifie,*

$$G^{(k)}(x) = (D_k^{(1)}(x), \dots, D_1^{(k)}(x)).$$

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 2$ ,  $G^{(2)}(x) = (x_1 \triangle x_2, x_2 \nabla x_1) = (D_1^{(1)}(x), T_1^{(1)}(x))$ .

Soit  $k \geq 3$ , supposons que pour  $2 \leq i \leq k - 1$ ,

$$G^{(k-1)}(y_1, \dots, y_{k-1}) = (D_{k-1}^{(1)}(y_1, \dots, y_{k-1}), \dots, D_1^{(k-1)}(y_1, \dots, y_{k-1})). \quad (1.25)$$

Grâce à (1.2) et (1.23), nous remarquons que

$$G^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = (D_k^{(1)}(x), G^{(k-1)}(T^{(1)}(x_1, \dots, x_k))).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, pour  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $G_1^{(k-1)}(T^{(1)}(x)) = D_{k-1}^{(1)}(T^{(1)}(x))$  que nous pouvons voir comme le processus des départs de la dernière file d'un système de files d'attente en tandem dont les processus des services aux différentes stations sont donnés par  $T^{(1)}(x)$ . Comme  $T^{(1)}(x)$  est le processus des services à la deuxième série, nous avons  $D_{k-1}^{(1)}(T^{(1)}(x)) = D_{k-1}^{(2)}(x)$ . Nous concluons en remarquant, de la même manière, que  $G_1^{(k-i)}(T^{(i)}(x)) = D_{k-i}^{(i+1)}(x)$  est le processus des départs de la dernière file de la  $i + 1$ -ième série.  $\square$

**Lemme 1.3.2.** *La dernière coordonnée de  $G^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$  est donnée par*

$$G_k^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_k \nabla \dots \nabla x_1. \quad (1.26)$$

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence. Pour  $k = 2$ , la vérification est immédiate. Nous rappelons que

$$G^{(k)}(x) = (D_k^{(1)}(x), G^{(k-1)}(T^{(1)}(x))).$$

## Chapitre 1. Préliminaires

---

Par l'hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour  $G^{(k-1)}$ , soit

$$G_k^{(k)}(x) = T_{k-1}^{(1)}(x) \nabla T_{k-2}^{(1)}(x) \nabla \dots \nabla T_1^{(1)}(x).$$

Grâce à (1.1), on a

$$\begin{aligned} T_{k-1}^{(1)}(x) \nabla T_{k-2}^{(1)}(x) &= x_k \nabla D_{k-1}^{(1)} \nabla T_{k-2}^{(1)}(x) \\ &= x_k \nabla (D_{k-2}^{(1)} \Delta x_{k-1}) \nabla (x_{k-1} \nabla D_{k-2}^{(1)}) \\ &= x_k \nabla x_{k-1} \nabla D_{k-2}^{(1)}. \end{aligned}$$

De même,

$$x_k \nabla x_{k-1} \nabla D_{k-2}^{(1)} \nabla T_{k-3}^{(1)} = x_k \nabla x_{k-1} \nabla x_{k-2} \nabla D_{k-3}^{(1)},$$

et ainsi de suite. □

Dans le cas  $k = 3$  (figure 1.5), nous vérifions que

$$\begin{pmatrix} D_1^{(1)}(x) & D_2^{(1)}(x) & D_3^{(1)}(x) \\ & D_1^{(2)}(x) & D_2^{(2)}(x) \\ & & D_1^{(3)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \Delta x_2 & x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \\ & x_2 \nabla x_1 & (x_2 \nabla x_1) \Delta (x_3 \nabla (x_1 \Delta x_2)) \\ & & x_3 \nabla (x_1 \Delta x_2) \nabla (x_2 \nabla x_1) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} T_1^{(1)}(x) & T_2^{(1)}(x) \\ & T_1^{(2)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \nabla x_1 & x_3 \nabla (x_1 \Delta x_2) \\ & x_3 \nabla (x_1 \Delta x_2) \nabla (x_2 \nabla x_1) \end{pmatrix}.$$

### 1.3.1 Algorithme de Robinson-Schensted-Knuth

Une *partition* de  $n \in \mathbb{N}^*$  est une suite d'entiers  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  tel que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$  avec  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ , nous noterons cette relation  $\lambda \vdash n$ . Le *diagramme de Ferrer* associé à la partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  est une partie finie de  $\mathbb{N}^2$  correspondant à  $n$  cases arrangées en  $k$  lignes successives justifiées à gauche (figure 1.6) telles que le nombre de cases à la ligne  $i$  est égal à  $\lambda_i$ . Nous noterons  $\mathbb{Y}_k$  l'ensemble des diagrammes de Ferrer ayant au plus  $k$  lignes et  $\mathbb{Y} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Y}_k$  l'ensemble de tous les diagrammes de Ferrer.

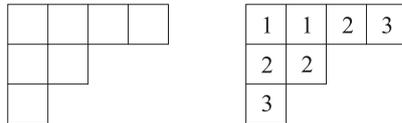


FIG. 1.6 – Diagramme de Ferrer (gauche) et tableau de Young (droite).

Un *tableau de Young semi-standard* est un remplissage d'un diagramme de Ferrer  $\lambda$  par des entiers (figure 1.6), de telle sorte que les nombres soient strictement croissants sur

### 1.3. Séries de files d'attente en tandem

les colonnes et croissants sur les lignes. Si les nombres sont en plus strictement croissants en ligne, on dira que la tableau de Young est *standard*. Nous utiliserons, par défaut, l'appellation tableau de Young pour désigner des tableaux de Young semi-standards.

Étant donné un tableau de Young  $P$ , nous appellerons le diagramme de Ferrer sous-jacent la *forme du tableau de Young*  $P$ , que nous noterons  $sh(P)$ . Pour  $(i, j)$  avec  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq \lambda_i$ ,  $P_{i,j}$  correspond au  $j$ -ième élément de la  $i$ -ième ligne. Pour un diagramme de Ferrer  $\lambda$ , nous désignerons par  $\mathbb{T}_M(\lambda)$  l'ensemble des tableaux de Young semi-standards  $P$  tel que  $sh(P) = \lambda$  et  $P_{i,j} \in \{1, \dots, M\}$  et nous poserons  $\mathbb{T}_M = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{Y}} \mathbb{T}_M(\lambda)$ . Remarquons qu'un tableau  $P$  dans  $\mathbb{T}_M$  a au plus  $M$  lignes, et donc  $sh(P) = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  avec certains  $\lambda_i$  possiblement nuls.

**Algorithme RSK insertion en colonne.** L'algorithme *RSK* consiste à insérer des entiers dans des tableaux de Young (appelés respectivement  $P$ -tableau et  $Q$ -tableau). L'insertion s'effectue de la manière suivante (figure 1.7).

1. Appelons  $i$  l'élément à insérer dans le tableau  $P$ . Si  $P$  est vide, alors, on remplace  $P$  par une case numérotée par  $i$ . Sinon, on insère cet élément dans le tableau comme suit :
  - (a) On cherche dans la première colonne de  $P$  le plus petit élément  $P_{j,1}$  plus grand ou égal à  $i$ , s'il n'existe pas alors on rajoute une case à la première colonne de  $P$ , que l'on numérote par  $i$ . Sinon, on remplace le contenu  $P_{j,1}$  de la case  $j$  de la première colonne par une case indexée par  $i$ . On passe alors à l'étape suivante.
  - (b) On insère l'élément  $P_{j,1}$  dans le sous-tableau de  $P$  formé des colonnes  $2, 3, \dots$  en retournant à l'étape 1.  $P$  est alors remplacé par le tableau dont la première colonne est celle de  $P$ , et les colonnes suivantes sont celles obtenues par le même algorithme.
2. On rajoute à  $Q$  une case, pour que  $Q$  et  $P$  aient la même forme. On numérote cette case par  $n$ .

La *correspondance de Robinson-Schensted-Knuth* est une bijection entre l'ensemble des mots  $w \in \{1, \dots, k\}^n$  et l'ensemble des paires de tableaux de Young  $(P, Q) \in \mathbb{T}_k \times \mathbb{T}_n$  avec  $sh(P) = sh(Q)$ , où  $P$  est semi-standard et  $Q$  est standard. La paire  $(P, Q)$  en bijection avec  $w$  est celle obtenue en appliquant l'algorithme RSK aux lettres successives de  $w$ . Pour les propriétés de l'algorithme RSK, nous invitons le lecteur à consulter [35, 86, 91, 92]. Nous allons ignorer dans la suite le tableau  $Q$  et nous nous concentrerons exclusivement sur le tableau  $P$ .

Nous allons présenter un algorithme d'insertion légèrement modifié qui donne la position d'insertion du dernier  $i$ , directement dans le tableau. Pour ce faire, il n'est pas difficile de se convaincre que pour déterminer cette position il suffit de s'intéresser au sous-tableau  $P^{(k-i+1)}$  de  $P$  ne contenant que des labels inférieurs ou égaux à  $i$ . Plus précisément, nous pouvons voir un tableau de Young  $P \in \mathbb{T}_k(\lambda)$  comme étant une suite de  $k$  diagrammes de Ferrer  $\lambda = \lambda^{(1)} \supset \lambda^{(2)} \supset \dots \supset \lambda^{(k)} \supset \emptyset$  où  $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{k-i+1}^{(i)})$  est la forme du tableau

## Chapitre 1. Préliminaires

de Young  $P^{(i)}$  obtenu en retirant tous les nombres strictement plus grands que  $k - i + 1$ . Nous identifierons  $P$  à la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} & \lambda_2^{(k-1)} & \dots & \lambda_{k-1}^{(2)} & \lambda_k^{(1)} \\ & \lambda_1^{(k-1)} & \dots & \lambda_{k-2}^{(2)} & \lambda_{k-1}^{(1)} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & \lambda_1^{(2)} & \lambda_2^{(1)} \\ & & & & \lambda_1^{(1)} \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_i^{(j)}$  est la longueur de la  $i$ -ième ligne de  $P^{(j)}$ . Par définition, nous avons

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_k^{(1)}).$$

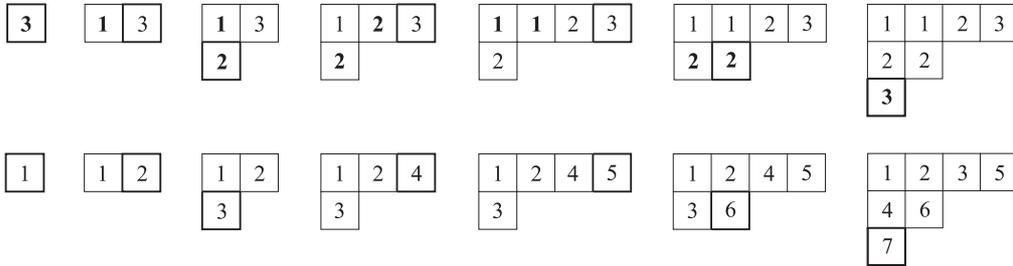


FIG. 1.7 – L'algorithme RSK, avec insertion en colonne, appliqué à  $w = 3122123$ .

Pour l'exemple du mot  $w = 3122123$ , présenté à la figure 1.7, le  $P$ -tableau est donné par

$$P^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}, \text{ soit } \lambda^{(1)} = (4, 2, 1), P^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, \text{ soit } \lambda^{(2)} = (3, 2) \text{ et } P^{(3)} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \text{ soit } \lambda^{(3)} = 2.$$

**Algorithme RSK revisité** Nous voulons insérer  $i$  dans un tableau  $P$ . La case où nous allons insérer  $i$  contient un nombre  $i' \geq i$  et est en-dessous d'une case contenant un nombre  $l < i$ , soit  $m$  le numéro de la colonne contenant  $l$ . Si  $i' > i$  on remplace  $i'$  par  $i$  et on insère  $i'$  dans les colonnes  $m + 1, m + 2, \dots$  de  $P$ . Sinon, on insère  $i$  successivement dans les colonnes suivantes jusqu'à arriver à une case contenant un nombre  $i'$  strictement supérieur à  $i$ . Ceci revient à insérer  $i$  dans  $P^{(k-i+1)}$  (figure 1.8). Au vu de ces quelques remarques nous pouvons réécrire l'algorithme RSK avec insertion en colonne sous la forme suivante :

1. (a) on insère  $i$  dans  $P^{(k-i+1)}$  à la dernière ligne  $j$  où  $\lambda_j^{(k-i+1)} < \lambda_{j-1}^{(k-i+2)}$ , c'est-à-dire  $\lambda_j^{(k-i+1)}$  est incrémentée de 1.
  - (b) Soit  $i'$  l'élément que remplace  $i$  à la colonne  $m$  alors on insère  $i'$  dans les colonnes  $m + 1, m + 2, \dots$  en revenant à la première étape.
2. On rajoute à  $Q$  une case, pour que  $Q$  et  $P$  aient la même forme. On numérote cette case par  $n$ .

### 1.3. Séries de files d'attente en tandem

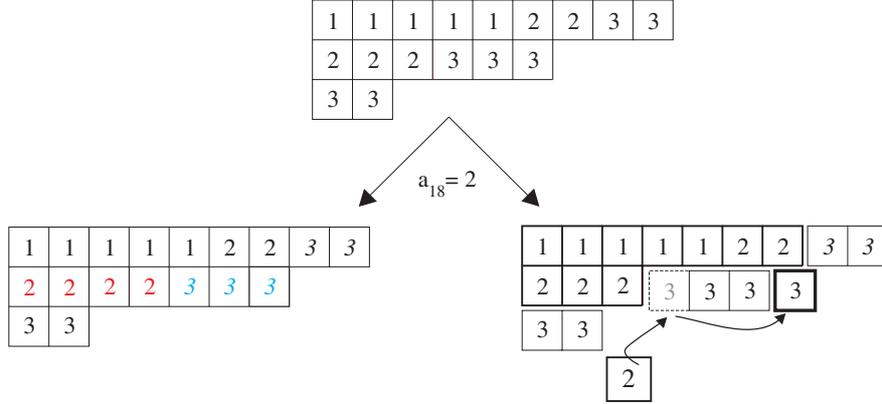


FIG. 1.8 – RSK colonne classique vs. RSK colonne revisité.

**Théorème 1.3.3.** [76] Soit  $w = a_1 \dots a_n \in \{1, \dots, k\}^n$ , nous définissons les chemins  $x \in \Lambda_k$  avec

$$x_i(m) = |\{j, 1 \leq j \leq m, a_j = i\}|.$$

Le tableau semi-standard  $P^{(1)}$ , de forme  $\lambda^{(1)} = sh(P^{(1)})$ , obtenu en appliquant l'algorithme RSK, avec insertion en colonne, au mot  $w = a_1 \dots a_n$ , vérifie

$$\lambda^{(1)} = (D_1^{(k)}(x), D_2^{(k-1)}(x), \dots, D_{k-1}^{(2)}(x), D_k^{(1)}(x)),$$

où la variable  $D_i^{(k-i+1)}(x)$  correspond à la suite des départs de la file  $i$  (dernière) de la série de files d'attente numéro  $k - i + 1$  et vérifie donc

$$(D_k^{(1)}(x), D_{k-1}^{(2)}(x), \dots, D_2^{(k-1)}(x), D_1^{(k)}(x)) = G^{(k)}(x).$$

La preuve suivante est différente de celle présentée dans [76] et repose essentiellement sur la nouvelle description de l'algorithme RSK.

*Démonstration.* Il suffit de s'intéresser à l'insertion de  $k$  dans  $P^{(1)}$ . En effet, pour insérer  $i \in \{1, \dots, k\}$  dans un tableau  $P$ , on commence par insérer  $i$  dans  $P^{(k-i+1)}$ .

Nous procédons par récurrence sur  $n$ . La vérification pour  $n = 1$  est immédiate, nous supposons que pour le mot  $a_1 \dots a_{n-1}$ , on a

$$\lambda^{(1)}(n-1) = (D_1^{(k)}(x), D_2^{(k-1)}(x), \dots, D_{k-1}^{(2)}(x), D_k^{(1)}(x))(n-1),$$

et

$$\lambda^{(2)}(n-1) = (D_1^{(k-1)}(x), D_2^{(k-2)}(x), \dots, D_{k-2}^{(2)}(x), D_{k-1}^{(1)}(x))(n-1),$$

où  $P(n-1)$  est le tableau obtenu en appliquant l'algorithme RSK au mot  $a_1 \dots a_{n-1}$ , avec  $\lambda(n-1) = sh(P(n-1))$ .

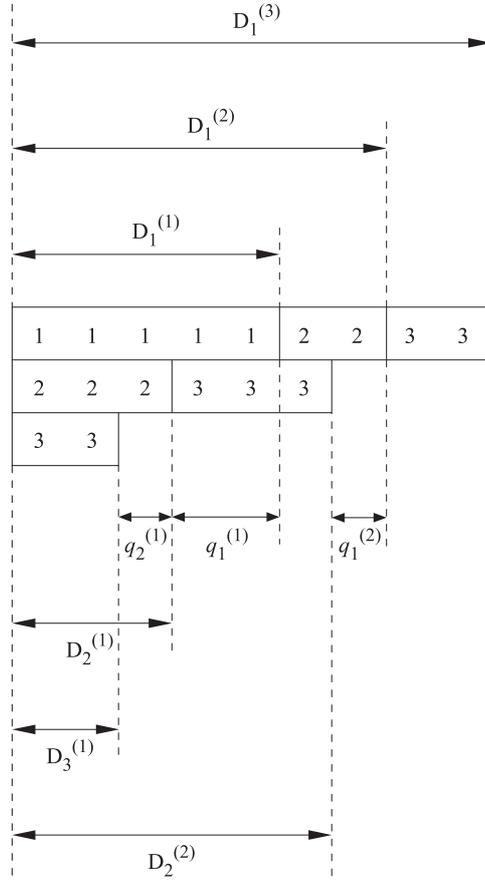


FIG. 1.9 – Interprétation à l’aide de files d’attente de l’algorithme RSK.

- Si  $\lambda_k^{(1)}(n-1) < \lambda_{k-1}^{(2)}(n-1)$  alors d’après l’hypothèse de récurrence  $D_k^{(1)}(x)(n-1) < D_{k-1}^{(1)}(x)(n-1)$ . Dans ce cas,  $k$  est inséré à la fin de la dernière ligne,  $\lambda_k^{(1)}(n) = \lambda_k^{(1)}(n-1) + 1$  et les autres lignes sont inchangées. Pour la file d’attente, ceci correspond à un service à la file  $k$  de la première série. Ce service est utilisé si  $D_k^{(1)}(x)(n-1) < D_{k-1}^{(1)}(x)(n-1)$  c’est-à-dire qu’il y a  $q_{k-1}^{(1)}(n-1) = D_{k-1}^{(1)}(x)(n-1) - D_k^{(1)}(x)(n-1)$  clients à la file  $k$  à l’instant  $n$  et  $D_k^{(1)}(x)(n) = D_k^{(1)}(x)(n-1) + 1$  et les autres  $D_j^{(i)}(x)$  sont inchangés.
- Sinon,  $k$  est inséré à la ligne  $l$  (la plus basse) vérifiant  $\lambda_l^{(1)}(n-1) < \lambda_{l-1}^{(2)}(n-1)$  et  $\lambda_l^{(1)}(n) = \lambda_l^{(1)}(n-1) + 1$ . En terme de files d’attente, le service est utilisé à la dernière file  $l$  de la première série  $k-l+1$  vérifiant  $D_l^{(k-l+1)}(x)(n-1) < D_{l-1}^{(k-l+1)}(x)(n-1)$  (d’après l’hypothèse de récurrence) et dans ce cas

$$D_l^{(k-l+1)}(x)(n) = D_{k-l+1}^{(l)}(x)(n-1) + 1,$$

et les autres  $D_j^{(i)}(x)$  sont inchangés.

□

### 1.3. Séries de files d'attente en tandem

**Exemple** Nous allons illustrer ce qui précède, pour  $k = 3$  et  $n = 7$ . Nous donnerons, à chaque étape, le tableau de Young obtenu en appliquant l'algorithme RSK avec insertion en colonne au mot  $w = 3122123$ . Nous décrirons, également, l'évolution du système de file d'attente correspondant, en exhibant, pour chaque  $n$  :

$$D(n) = \begin{pmatrix} D_1^{(1)}(x)(n) & D_2^{(1)}(x)(n) & D_3^{(1)}(x)(n) \\ & D_1^{(2)}(x)(n) & D_2^{(2)}(x)(n) \\ & & D_1^{(3)}(n) \end{pmatrix}, \quad Q(n) = \begin{pmatrix} q_1^{(1)}(x)(n) & q_2^{(1)}(x)(n) \\ & q_1^{(2)}(x)(n) \end{pmatrix}$$

- A l'instant 1,  $a_1 = 3$ , un service est proposé à la troisième file de la première série. Comme cette file est initialement vide, ce service est inutilisé ce qui correspond à une incrémentation de  $T_2^{(1)}$ . Ce qui engendre un service à la deuxième file de la deuxième série, qui est également vide. Le service est inutilisé et  $T_1^{(2)}$  est incrémentée. Le service est, ensuite, hérité par la première file de la troisième série, entraînant le départ d'un client de cette file parce qu'il y a une infinité de clients à la première file de chaque série, soit

$$D(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (1, 0, 0)$ .

- A l'instant 2,  $a_2 = 1$ , un service est proposé à la première file de la première série, entraînant le départ d'un client de cette file. Ce départ se traduit, pour la deuxième série, par un service à la première file, entraînant le départ d'un client. A la troisième file, nous assistons à un départ également, soit

$$D(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (2, 0, 0)$ ,  $\lambda^{(2)} = (1, 0)$  et  $\lambda^{(3)} = 1$ .

- A l'instant 3,  $a_3 = 2$ , un service est proposé à la deuxième file de la première série, entraînant le départ d'un client de cette file et un service à la deuxième file, de la deuxième série, et un client part de cette file, soit

$$D(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (2, 1, 0)$ ,  $\lambda^{(2)} = (1, 1)$  et  $\lambda^{(3)} = 1$ .

## Chapitre 1. Préliminaires

---

- A l'instant 4,  $a_4 = 2$ , un service est proposé à la deuxième file de la première série, qui est vide. Ce service est donc inutilisé. Un service est, alors, proposé à la première file de la deuxième série, entraînant le départ d'un client de cette file et un service à la première file, de la troisième série. Un client part de celle-ci, soit

$$D(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}, \quad Q(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (3, 1, 0)$ ,  $\lambda^{(2)} = (2, 1)$  et  $\lambda^{(3)} = 1$ .

- A l'instant 5,  $a_5 = 1$ , un service est proposé à la première file de la première série, entraînant le départ d'un client de cette file. Ce départ se traduit, pour la deuxième série, par un service à la première file, entraînant le départ d'un client. A la troisième file, nous assistons à un départ également, soit

$$D(5) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{pmatrix}, \quad Q(5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (4, 1, 0)$ ,  $\lambda^{(2)} = (3, 1)$  et  $\lambda^{(3)} = 2$ .

- A l'instant 6,  $a_6 = 2$ , un service est proposé à la deuxième file de la première série, entraînant le départ d'un client de cette file et un service à la deuxième file, de la deuxième série et un client part de la cette file, soit

$$D(6) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{pmatrix}, \quad Q(6) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (4, 2, 0)$ ,  $\lambda^{(2)} = (3, 2)$  et  $\lambda^{(3)} = 2$ .

- A l'instant 7,  $a_7 = 3$ , un service est proposé à la troisième file de la première série et il y a un départ de cette file, soit

$$D(7) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{pmatrix}, \quad Q(7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Le tableau correspondant est  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$  avec  $\lambda^{(1)} = (4, 2, 1)$ ,  $\lambda^{(2)} = (3, 2)$  et  $\lambda^{(3)} = 2$ .

**Algorithme RSK avec insertion en ligne** L'algorithme *RSK* consiste à insérer des entiers dans les lignes d'un tableau de Young, L'insertion s'effectuant comme suit (figure 1.10) :

1. Appelons  $i$  l'élément à insérer dans le tableau. Si  $P$  est vide, alors, on remplace  $P$  par une case numérotée par  $i$ . Sinon, on insère cet élément dans le tableau comme suit :

- (a) On cherche dans la première ligne de  $P$  le plus petit élément  $P_{1,j}$  strictement plus grand que  $i$ , s'il n'existe pas alors on rajoute une case à la première ligne de  $P$ , que l'on numérote par  $i$ . Sinon, on remplace le contenu  $P_{1,j}$  de la case  $j$  de la première ligne par une case indexée par  $i$ . On passe alors à l'étape suivante.
- (b) On insère l'élément  $P_{1,j}$  dans le sous-tableau de  $P$  formé des lignes 2, 3, ... en retournant à l'étape 1.  $P$  est alors remplacé par le tableau dont la première ligne est celle de  $P$ , et les lignes suivantes sont celles obtenues par le même algorithme.

2. On rajoute à  $Q$  une case, pour que  $Q$  et  $P$  aient la même forme. On numérote cette case par  $n$ .

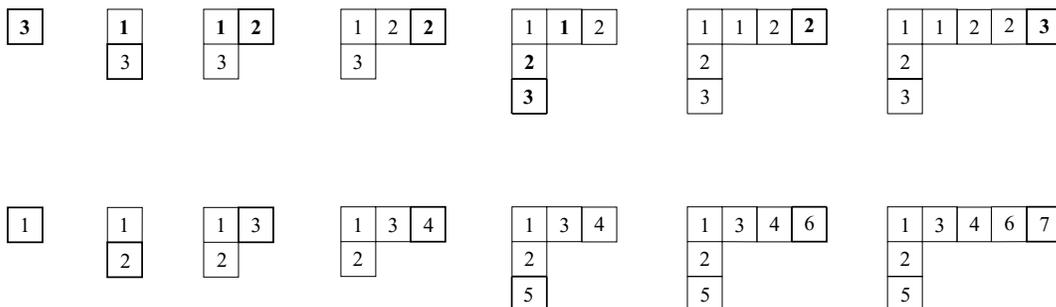


FIG. 1.10 – L'algorithme RSK, avec insertion en ligne, appliqué à  $w = 3122123$ .

L'application de l'algorithme RSK, insertion en colonne, à  $w = a_1 \dots a_n$  est équivalente à l'application de l'algorithme RSK, insertion en ligne, à  $w^* = a_n \dots a_1$ , c'est-à-dire  $\lambda^{(ligne)}(w) = \lambda^{(colonne)}(w^*)$  (figures 1.7 et 1.11).

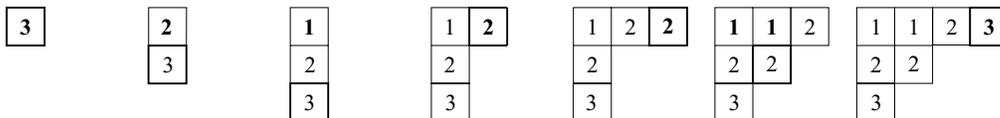


FIG. 1.11 – L'algorithme RSK, avec insertion en ligne, appliqué à  $w^* = 3212213$ .

Soit  $w = a_1 \dots a_n \in \{1, \dots, k\}^n$ , nous définissons les chemins  $x, x^* \in \Lambda_k$  avec

$$x_i(m) = |\{j, 1 \leq j \leq m, a_j = i\}|, \quad x_i^*(m) = |\{j, 1 \leq j \leq m, a_{m-j+1} = i\}|$$

## Chapitre 1. Préliminaires

---

Remarquons que  $x_i^*(m) = x_i(n) - x_i(n - m)$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned}
 x_i^* \Delta x_j^*(n) &= \min_{0 \leq m \leq n} [x_i^*(m) + x_j^*(n) - x_j^*(m)] \\
 &= \min_{0 \leq m \leq n} [x_i(n) - x_i(n - m) + x_j(n) - (x_j(n) - x_j(n - m))] \\
 &= \min_{0 \leq m \leq n} [x_i(n) - x_i(n - m) + x_j(n - m)] \\
 &= \min_{0 \leq m \leq n} [x_i(n) - x_i(m) + x_j(m)] \\
 &= x_j \Delta x_i(n).
 \end{aligned}$$

De la manière, on vérifie que

$$x_i^* \nabla x_j^*(n) = x_j \nabla x_i(n).$$

En utilisant (1.26), nous prouvons un résultat nouveau qui donne les longueurs des premières et dernières lignes du tableau de Young obtenu par application de l'algorithme RSK avec insertion en ligne.

**Proposition 1.3.4.** *Soient  $w = a_1 \dots a_n$  et  $\lambda_1^{(ligne)}$  (respectivement  $\lambda_k^{(ligne)}$ ) la longueur de la première (respectivement dernière) ligne du tableau obtenu en appliquant l'algorithme RSK avec insertion en ligne au mot  $w$ , on a*

$$\lambda_1^{(ligne)} = (x_1 \nabla \dots \nabla x_k)(n), \quad \lambda_k^{(ligne)} = (x_k \Delta \dots \Delta x_1)(n).$$

Ce résultat sera utile au chapitre 3.

### 1.3.2 Fonction de Schur

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $k \geq 1$  un diagramme de Ferrer ayant au plus  $k$  lignes. Pour  $z = (z_1, \dots, z_k)$ , nous définissons  $s_\lambda$  la *fonction de Schur* associée à  $\lambda$ , introduite par Jacobi dans [49], donnée par

$$s_\lambda(z) = \frac{\det((z_i^{\lambda_j + k - j})_{i,j})}{\det((z_i^{k-j})_{i,j})}. \quad (1.27)$$

Notons que  $\det((z_i^{k-j})_{i,j}) = h(x)$  où  $h(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$  est la *fonction de Vandermonde*.

Nous pouvons également donner une définition combinatoire de  $s_\lambda$ . Soit  $P \in \mathbb{T}_k(\lambda)$ , le *type du tableau*  $P$  est donné par  $\gamma \in \mathbb{N}^k$  où  $\gamma_i$  est le nombre d'occurrence de  $i$  dans le tableau  $P$ , nous écrivons

$$z^P = z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \dots z_k^{\gamma_k},$$

alors

$$s_\lambda(z) = \sum_{P \in \mathbb{T}_k(\lambda)} z^P \quad (1.28)$$

Soit  $a_1, a_2, \dots$  une suite de variables aléatoires i.i.d. sur  $\{1, \dots, k\}$  avec  $\mathbb{P}(a_1 = i) = p_i$ . Soit  $(P(n), Q(n))$  avec  $sh(P(n)) = sh(Q(n)) = \lambda(n)$  la paire de tableaux de Young (aléatoires)

### 1.3. Séries de files d'attente en tandem

---

obtenue en appliquant l'algorithme RSK avec insertion en colonne au mot aléatoire  $w = a_1 \dots a_n$ . La loi jointe du couple de tableaux  $(P(n), Q(n))$  est donnée [75] par

$$\mathbb{P}(P(n) = P, Q(n) = Q) = p^P \mathbb{1}_{\{sh(P)=sh(Q)\}},$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la fonction indicatrice. En sommant sur tous les tableaux  $(P, Q) \in \mathbb{T}_k(\lambda) \times \mathbb{T}_n(\lambda)$ , pour  $\lambda \in \mathbb{Y}_k$ , on a

$$\mathbb{P}(\lambda(n) = \lambda) = s_\lambda(p) s_\lambda(1, \dots, 1), \tag{1.29}$$

où  $(1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^k$ ,  $s_\lambda((1, \dots, 1))$  est le cardinal de  $\mathbb{T}_k(\lambda)$ . Il est prouvé, dans [75], que le processus  $\{\lambda(n), n \geq 0\}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\mathbb{P}(\lambda(n) = \lambda \mid \lambda(n-1) = \lambda') = \frac{s_\lambda(p)}{s_{\lambda'}(p)}$$

pour  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Y}_k$  où  $\lambda$  est obtenu en rajoutant une case à  $\lambda'$ . En combinant le théorème 1.3.3 avec la relation (1.29), nous déduisons que

**Corollaire 1.3.5.** *Le processus  $\{\mathcal{D}_k(n), n \geq 0\}$ , où  $\mathcal{D}_k(n)$  est le nombre de départs de la file  $k$  jusqu'à l'instant  $n$ , est symétrique suivant les paramètres  $p_i$ . En effet,*

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_k(n) = l) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_k, \lambda_k=l} s_\lambda(p) s_\lambda(1, \dots, 1) \tag{1.30}$$

La variable  $\mathcal{D}_k(n)$  n'est rien d'autre que la longueur de la dernière ligne du tableau de Young obtenu en appliquant l'algorithme RSK avec insertion en ligne. La fonction de Schur étant un polynôme symétrique [35, 66], nous en déduisons que la loi de  $\mathcal{D}_k(n)$  est invariante par permutation des stations (déterminées par le paramètre  $p_i$  de la loi des services). Ce résultat est analogue à l'invariance établie dans [3, 97] pour la file  $M/M/1$ .



# Chapitre 2

## File M/M/1

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>File d'attente <math>././1</math></b>	<b>36</b>
<b>2.2</b>	<b>Théorème de Burke</b>	<b>39</b>
<b>2.3</b>	<b>Périodes d'activité et Chemins de Dyck</b>	<b>40</b>
2.3.1	Chemins de Dyck	41
2.3.2	Processus des instants de début de service	43
<b>2.4</b>	<b>Loi d'un service au sein d'une période d'activité</b>	<b>48</b>

---

Notre modèle est une file d'attente à un serveur traversée par un flux bi-infini de clients. Chaque client est caractérisé par un instant d'arrivée au système et par une demande de service. Les clients sont servis à leur arrivée à la file d'attente, en respectant leur ordre d'arrivée. Comme le système ne comporte qu'un unique serveur, un client peut avoir à attendre avant d'entamer son service. D'après la nomenclature de Kendall, notre modèle est une file  $././1/\infty/\text{PAPS}$  (Premier Arrivé Premier Servi). Les clients sont numérotés sur  $\mathbb{Z}$  selon leur ordre d'arrivée au système.

Nous définissons, dans un premier temps, un contexte abstrait qui permet d'interpréter la file d'attente en tant qu'opérateur transformant les variables d'entrée  $(\mathcal{A}, s)$  en  $(\mathcal{D}, r) = \varphi(\mathcal{A}, s)$ . Ceci nous permet d'établir une extension du théorème de Burke à l'image de ce qui a été présenté au chapitre 1 pour la file avec services inutilisés. Ensuite, nous revisitons la correspondance classique [34] entre chemins de Dyck et périodes d'activité, ce qui nous conduit, d'une part, à montrer que le processus des instants de début de service n'est pas un processus de Poisson et à calculer la loi jointe des services au sein d'une période d'activité.

L'utilisation des propriétés combinatoires des chemins sur la grille pour l'étude des périodes d'activité de certains modèles de files d'attente a déjà été abordée dans [34, 46]. Leur approche permet une analyse plus approfondie que ce que nous présentons dans la suite. Ils dénombrent les nombres de montées et de descentes. Pour l'analyse des services au sein d'une période d'activité présentée dans la suite, nous nous intéressons aux abscisses des montées et descentes. Ceci nous donne des fonctions génératrices en variables non-commutatives. Nous ne serons donc pas en mesure de donner des informations aussi précises que dans [34, 46].

Cette partie reprend les travaux relatifs à la file M/M/1 présentés dans [29] et [30].

## 2.1 File d'attente ././1

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Nous supposons que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les variables aléatoires  $A_n$  et  $s_n$  représentent respectivement l'instant d'Arrivée et le temps de Service du client  $n$ , avec la convention  $A_0 \leq 0 < A_1$  et  $A_n < A_{n+1}$  pour tout  $n$ . Nous introduisons le *processus ponctuel*  $\mathcal{A}$  dont les points sont les instants d'arrivées  $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Pour tout borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$ , nous rappelons que  $\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{A_n \in \mathcal{B}}$ . Nous identifierons, lorsque cela ne prête pas à confusion, le processus ponctuel  $\mathcal{A}$  et la suite des instants  $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , sinon nous noterons  $T_n(\mathcal{A}) = A_n$  les points du processus ponctuel  $\mathcal{A}$ . Nous définissons la suite de variables aléatoires, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $a = \{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  par  $a_n = A_{n+1} - A_n$ . Nous supposons que  $s = \{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de variables aléatoires, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Le *processus ponctuel marqué*  $(\mathcal{A}, s)$  représente le couple de *variables d'entrée* de notre modèle, une présentation complète des processus ponctuels figure dans [24].

Soit  $\mathcal{D} = \{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$  le processus ponctuel des instants de départ des clients successifs du système, on a

$$D_n = \sup_{k \leq n} \left[ A_k + \sum_{i=k}^n s_i \right].$$

Les variables aléatoires  $D_n$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Nous supposons que  $(\mathcal{A}, s)$  sont telles que les  $D_n$  sont presque sûrement finies. Elles satisfont alors la relation de récurrence suivante :

$$D_{n+1} = \max(D_n, A_{n+1}) + s_{n+1}. \quad (2.1)$$

Soit  $d = \{d_n, n \in \mathbb{Z}\}$  la suite des durées d'inter-départs entre les clients successifs définie par, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $d_n = D_{n+1} - D_n$ .

Nous définissons également la suite des variables aléatoires  $r = \{r_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , par

$$r_n = \min(D_n, A_{n+1}) - A_n. \quad (2.2)$$

La variable  $r_n$  est le *temps passé en fin de file d'attente* par le client  $n$ . Nous appellerons le processus ponctuel marqué  $(\mathcal{D}, r)$  le couple de *variables de sortie* de notre modèle. En sommant (2.1) et (2.2), nous obtenons la relation de conservation suivante entre variables d'entrée et variables de sortie

$$r_n + d_n = a_n + s_{n+1}. \quad (2.3)$$

Enfin, nous introduisons les variables suivantes qui seront utiles pour la suite. Soit la suite de variables aléatoires  $w = \{w_n, n \in \mathbb{Z}\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$w_n = D_n - s_n - A_n = \sup_{k \leq n-1} \left[ \sum_{i=k}^{n-1} (s_i - a_i) \right]^+. \quad (2.4)$$

Ces variables satisfont l'équation de Lindley

$$w_{n+1} = [w_n + s_n - a_n]^+. \quad (2.5)$$

En tenant compte de cette nouvelle variable  $w_n$ , nous donnons d'autres expressions pour  $D_n$  et  $r_n, \forall l \leq n$ ,

$$D_n = \left[ w_l + A_l + \sum_{i=l}^n s_i \right] \vee \max_{l < k \leq n} \left[ A_k + \sum_{i=k}^n s_i \right], \quad r_n = \min\{w_n + s_n, a_n\} = s_n + w_n - w_{n+1}.$$

En terme de file d'attente, la variable  $w_n$  représente le *temps d'attente* du client  $n$ , dans la salle d'attente (ou Buffer), entre son arrivée et le début de son service, l'expression développée de  $w_n$  donnée dans (2.4) est construite à l'aide du schéma de Loynes [63], elle représente la version stationnaire de  $w$ . Nous introduisons également le *processus de charge* (càdlàg)  $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ , où  $W(t)$  est la quantité totale de service à pourvoir par le serveur à l'instant  $t$ , définie par

$$W(t) = [w_n + s_n - (t - A_n)]^+, \quad \text{pour } t \in [A_n, A_{n+1}), \quad (2.6)$$

où la suite  $\{w_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est donnée par (2.4). Remarquons que  $W(A_n^-) = w_n$ . Nous pouvons également interpréter  $W(t)$  comme étant le temps d'attente d'un client virtuel qui rejoindrait la file d'attente à l'instant  $t$ .

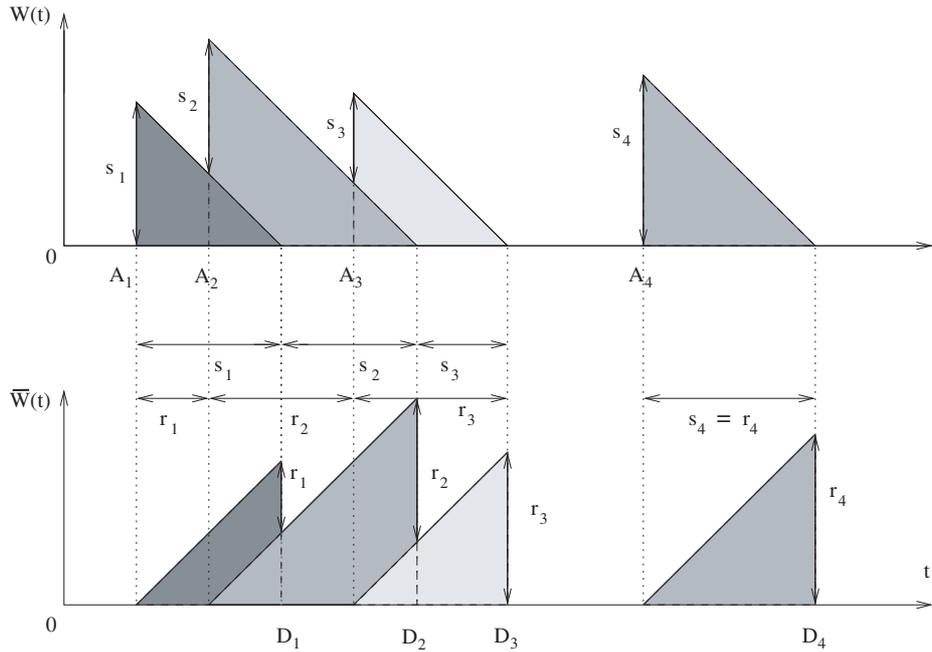


FIG. 2.1 – Processus  $W$  et  $\bar{W}$  associés respectivement aux variables d'entrée  $(\mathcal{A}, s)$  et  $(\mathcal{D}, r)$ .

Soit le processus (aléatoire) càdlàg  $Q = \{Q(t), t \in \mathbb{R}\}$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , défini par

$$Q(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{A_n \leq t < D_n\}}. \quad (2.7)$$

## Chapitre 2. File M/M/1

La variable  $Q(t)$  représente le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  (incluant le client en train d'être servi) : *processus du nombre (total) de clients*.

Pour tout processus càdlàg  $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on définit le *processus renversé*  $\mathcal{R} \circ Y = \{\mathcal{R} \circ Y(t), t \in \mathbb{R}\}$  comme la modification càdlàg de  $\{Y(-t), t \in \mathbb{R}\}$ . Nous introduisons les processus ponctuels (avec un nombre fini ou infini de points)  $\mathcal{N}_+(Y)$  et  $\mathcal{N}_-(Y)$  correspondant respectivement aux instants de sauts positifs ou négatifs de  $Y$ , c'est-à-dire pour  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{N}_+(Y)(I) = \int_I \mathbb{1}_{\{Y(u) > Y(u-)\}} du, \quad \mathcal{N}_-(Y)(I) = \int_I \mathbb{1}_{\{Y(u) < Y(u-)\}} du. \quad (2.8)$$

**Lemme 2.1.1.** *Nous avons  $\mathcal{N}_+(Q) = \mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}_-(Q) = \mathcal{D}$ . De plus,  $D_{-Q(0)} \leq 0 < D_{-Q(0)+1}$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $Q(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{A_n \leq 0 < D_n\}}$  et que  $A_0 \leq 0 < A_1$ . Par construction,  $\mathcal{N}_-(Q) = \mathcal{D}$ , cependant,  $T_0(\mathcal{D})$  peut être différent de  $D_0$ . En effet, soit  $k = \sup\{n \in \mathbb{Z}_- \mid D_n \leq 0\}$ , autrement dit  $Q(0) = |k|$ , en examinant la figure 2.2, nous pouvons nous convaincre que  $T_0 \circ \mathcal{N}_-(Q) = D_{-Q(0)}$ .  $\square$

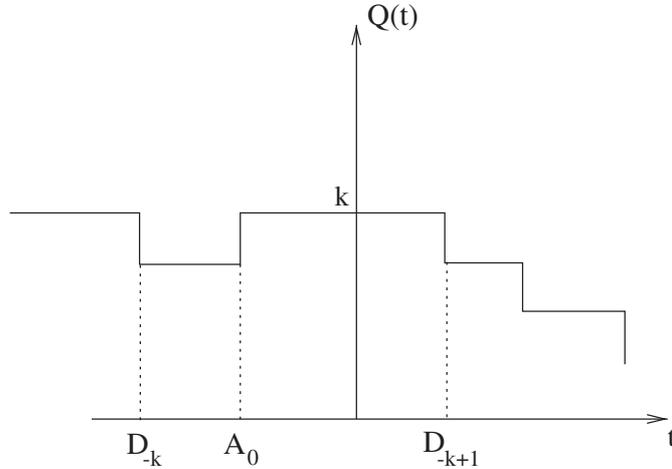


FIG. 2.2 – Numérotation des  $\{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$

L'état du système peut être décrit par une alternance de périodes d'activité et de périodes de repos. Une *période d'activité* est la période maximale pendant laquelle  $Q(t) > 0$ . Une *période de repos* est la période maximale pendant laquelle  $Q(t) = 0$ . La *longueur*  $|B|$  d'une période d'activité  $B$  (à ne pas confondre avec la durée) représente le nombre de clients servis dans cette période d'activité. Pour des raisons de simplicité, étant donnée

## 2.2. Théorème de Burke

une période d'activité  $B$ , on notera  $s_0, \dots, s_{|B|-1}$  et  $a_0, \dots, a_{|B|-1}$  respectivement les temps de service et les temps d'inter-arrivée des différents clients qui sont servis pendant cette période d'activité. Il n'est pas difficile de vérifier que

**Lemme 2.1.2.** *Soit  $\Delta_n$  l'événement qu'une période d'activité générique consiste en  $n + 1$  clients, alors*

$$\Delta_n = \left\{ \sum_{j=0}^i a_j < \sum_{j=0}^i s_j, i = \{0, \dots, n-1\}; \sum_{j=0}^n a_j \geq \sum_{j=0}^n s_j \right\}. \quad (2.9)$$

La file  $././1$  est le modèle central en théorie de file d'attente, pour plus de détails sur ce modèle nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages de référence suivants [4, 7, 6, 13, 20, 55, 94].

## 2.2 Théorème de Burke

La file  $M/M/1/\infty/PAPS$  (ou file  $M/M/1$ ) est une file d'attente avec un flux d'arrivée Poissonnien, des services exponentiels, un unique serveur, une salle d'attente ayant une capacité infinie et une discipline PAPS (Premier Arrivé Premier Servi). Une présentation exhaustive de la dynamique de cette file d'attente est détaillée dans [14, 20, 84, 89, 94].

Nous supposons, dans la suite, que  $\mathcal{A} = \{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , c'est-à-dire pour tout  $\mathcal{B}$  borélien de  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}(\mathcal{B}) = k) = e^{-k\lambda l(\mathcal{B})} \frac{(\lambda l(\mathcal{B}))^k}{k!},$$

où  $l(\mathcal{B})$  est la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{B}$ . La suite des inter-arrivées  $a = \{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est i.i.d suivant une loi exponentielle,  $\text{Exp}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(a_1 > t) = e^{-\lambda t}$ . La suite des temps de service  $s = \{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est i.i.d. suivant une exponentielle de paramètre  $\mu$  que nous noterons  $\text{Exp}(\mu)$ . Nous supposons que la condition de stabilité  $\lambda < \mu$  est satisfaite. Nous nous intéressons au système à l'équilibre. Le processus  $Q$ , défini dans (2.7), est un *processus Markovien de naissance et de mort* (Birth and Death process) de distribution stationnaire géométrique de paramètre  $\rho = \lambda/\mu$

$$\mathbb{P}(Q(0) = k) = \rho^k (1 - \rho), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Théorème 2.2.1.** *Le processus marqué  $(\mathcal{D}, r)$ , défini dans (2.1) et (2.2), a la même loi que le processus marqué  $(\mathcal{A}, s)$ , c'est-à-dire le processus  $(\mathcal{D}, r)$  est un processus de Poisson, de paramètre  $\lambda$ , marqué par des marques i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .*

## Chapitre 2. File M/M/1

---

*Démonstration.* Rappelons que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la variable  $T_n(\mathcal{A}) = A_n$  représentant le  $n$ -ième point du processus ponctuel  $\mathcal{A}$  et que  $T_n \circ \mathcal{N}_+(Q) = A_n$ . Remarquons que

$$s_n = D_n - \max(A_n, D_{n-1}) = \mathcal{S}_n(Q).$$

En tenant compte du décalage dans les indices et du lemme 2.1.1, nous avons  $T_n \circ \mathcal{N}_-(Q) = D_{n-Q(0)}$ , c'est-à-dire

$$s_n = \mathcal{S}_n(Q) = T_{n+Q(0)} \circ \mathcal{N}_-(Q) - \max(T_n \circ \mathcal{N}_+(Q), T_{n+Q(0)-1} \circ \mathcal{N}_-(Q)). \quad (2.10)$$

Sachant  $Q = \{Q(t), t \in \mathbb{R}\}$ , nous sommes en mesure de construire les variables d'entrée :  $(\mathcal{A}, s) = \varphi(Q)$ . Nous allons prouver que

$$\varphi \circ \mathcal{R}(Q) = \{-D_{-n+Q(0)+1}, r_{-n+Q(0)+1}, n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}(\mathcal{D}, r).$$

Grâce au lemme 2.1.1, nous vérifions, sans difficulté, que

$$T_n \circ \mathcal{N}_+ \circ \mathcal{R}(Q) = -D_{-n-Q(0)+1}, \quad T_{n+\mathcal{R}(Q)(0)-1} \circ \mathcal{N}_- \circ \mathcal{R}(Q) = -A_{-n-Q(0)+2}.$$

En appliquant (2.10) au processus  $\mathcal{R}(Q)$  et en tenant compte de (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n \circ \mathcal{R}(Q) &= -A_{-n-Q(0)+1} - \max(-D_{-n-Q(0)+1}, -A_{-n-Q(0)+2}) \\ &= r_{-n+Q(0)+1}. \end{aligned}$$

Le processus  $Q$  est un processus de naissance et de mort stationnaire, donc réversible :  $\mathcal{R}(Q) \sim Q$ . Ceci entraîne que  $\varphi(Q) = (\mathcal{A}, s) \sim \mathcal{R}(\mathcal{D}, r) = \varphi \circ \mathcal{R}(Q)$ . Par ailleurs, il est clair que  $\mathcal{R}(\mathcal{D}, r) \sim (\mathcal{D}, r)$  car  $\mathcal{R}(\mathcal{D}, r)$  est un processus de Poisson homogène de marques i.i.d.  $\square$

Ce théorème complète le résultat de Burke [16], anticipé par Morse dans [69] et O'Brien dans [72]. La preuve donnée par Burke est analytique. L'argument de réversibilité utilisé plus haut est dû à Reich [82]. Le fait que le processus des instants de départ d'une file M/M/1 soit un processus de Poisson de même intensité que le processus des instants d'arrivée, peut se traduire en terme de point fixe pour l'opérateur associé à la file ./M/1. Comme nous le détaillerons au chapitre 4, ce point fixe est unique [3] et attractif [70]. Un résultat, dans le cas général (service suivant une loi quelconque) a été établi dans [64, 65, 81].

### 2.3 Périodes d'activité et Chemins de Dyck

On s'intéresse à l'analyse des temps de service des clients d'une file M/M/1 stable et en équilibre selon leurs positions dans une période d'activité. On donne la loi d'un service sachant que le client se trouve au début, à la fin ou au milieu de la période d'activité. Ceci permet, au passage, de prouver que le processus des instants de début de service n'est pas un processus de Poisson. On mène ensuite une étude plus fine. On exhibe une famille de séries génératrices polynômiales associées aux chemins de Dyck de longueur  $2n$  et on montre qu'il s'agit de la fonction de corrélation des différents services dans une période d'activité comportant  $n+1$  clients. L'utilisation des propriétés combinatoires de famille de chemins pour étudier les périodes d'activité de certains modèles de file d'attente est une technique classique [34, 46, 94].

### 2.3.1 Chemins de Dyck

Nous commençons par rappeler quelques définitions et résultats sur les chemins de Dyck.

Les *nombre de Catalan*  $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$  sont définis par

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

leur fonction génératrice est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Les premiers nombres de Catalan sont  $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429, \dots$  Ils apparaissent dans différents contextes [44, 92]. En particulier,  $C_n$  est le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$ .

Un *chemin de Dyck* de longueur  $2n$  est un chemin sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  partant de l'origine  $(0, 0)$  et se terminant en  $(2n, 0)$  de pas  $(1, 1)$  ou  $(1, -1)$ . Soit  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des chemins de Dyck de longueur  $2n$ , remarquons que  $\mathcal{D}_0 = \{(0, 0)\}$ . Soit  $\mathcal{D}_n^{<i>}$  l'ensemble des chemins de Dyck de longueur  $2n$  recoupant l'axe  $\{(n, 0), n \in \mathbb{N}\}$  pour la première fois (après l'origine  $(0, 0)$ ) au point  $(2i, 0)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les ensembles  $\mathcal{D}_n^{<i>}$  sont disjoints et  $\mathcal{D}_n = \cup_{i=1}^n \mathcal{D}_n^{<i>}$ . En outre, on a  $\mathcal{D}_n^{<i>} \simeq \mathcal{D}_{i-1} \times \mathcal{D}_{n-i}$ . L'identité (classique)  $C_n = \sum_{i+j=n-1} C_i C_j$  est une conséquence immédiate de la partition précédente de  $\mathcal{D}_n$ .

Nous définissons enfin deux familles de polynômes sur les chemins de Dyck. Soit  $\pi \in \mathcal{D}_n$  et soit  $\gamma_j$  la droite d'équation  $y = x - 2j$ , pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Nous définissons  $\alpha_j$  la longueur de l'intersection de  $\gamma_j$  et  $\pi$  (de manière équivalente  $\alpha_j + 1$  est le nombre de points du réseau communs à  $\pi$  et  $\gamma_j$ ). Soient les polynômes  $P_\pi$  et  $R_\pi$  définis par

$$P_\pi(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{y_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!}, \quad R_\pi(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} y_i^{\alpha_i}. \quad (2.11)$$

Soient  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{R_n, n \in \mathbb{N}\}$  ces deux familles de polynômes définies par

$$P_n = \sum_{\pi \in \mathcal{D}_n} P_\pi, \quad R_n = \sum_{\pi \in \mathcal{D}_n} R_\pi.$$

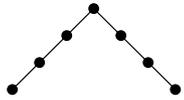
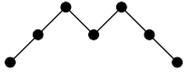
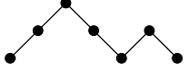
Nous vérifions aisément que  $P_n$  et  $R_n$  sont des polynômes homogènes de degrés  $n$  sur les  $n$  variables  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ .

**Proposition 2.3.1.** *Les polynômes  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfont à l'équation de récurrence suivante*

$$P_n(y_0, \dots, y_{n-1}) = \int_{y_1}^{y_0+y_1} P_{n-1}(y, y_2, \dots, y_{n-1}) dy. \quad (2.12)$$

En développant la récurrence, on a

$$\begin{aligned} P_n(y_0, \dots, y_{n-1}) &= \int_0^{y_0} dx_0 \int_0^{y_0+y_1-x_0} dx_1 \dots \int_0^{y_0+\dots+y_{n-1}-(x_0+\dots+x_{n-2})} dx_{n-1} \\ &= \int_0^{y_0} dx_0 \int_0^{y_1+x_0} dx_1 \dots \int_0^{y_{n-1}+x_{n-2}} dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

	Chemin de Dyck	Polynôme $P_\pi$	Polynôme $Q_\pi$
$\pi_1$		$y_0^3/6$	$y_0^3$
$\pi_2$		$(y_0^2/2)y_1$	$y_0^2y_1$
$\pi_3$		$(y_0^2/2)y_2$	$y_0^2y_2$
$\pi_4$		$y_0(y_1^2/2)$	$y_0y_1^2$
$\pi_5$		$y_0y_1y_2$	$y_0y_1y_2$

TAB. 2.1 – Chemins de Dyck de longueur 6 et leurs polynômes correspondants.

### 2.3. Périodes d'activité et Chemins de Dyck

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}_n^{(i)}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{D}_n$  dont les chemins (de longueur  $2n$ ) commencent par  $i$  pas de type  $(1, 1)$  suivis d'un pas du type  $(1, -1)$  et soit  $P_n^{(i)}$  les polynômes définis par  $\sum_{\pi \in \mathcal{D}_n^{(i)}} P_\pi = \frac{y_0^i}{i!} P_n^{(i)}(y_1, \dots, y_{n-1})$ . Nous vérifions aisément que  $P_n(y_0, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{y_0^i}{i!} P_n^{(i)}(y_1, \dots, y_{n-1})$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_0+y_1} P_{n-1}(y, y_2, \dots, y_{n-1}) dy &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)!} [(y_0 + y_1)^{i+1} - y_1^{i+1}] P_{n-1}^{(i)}(y_2, \dots, y_{n-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{y_0^j}{j!} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{y_1^k}{k!} P_{n-1}^{(k+j-1)}(y_2, \dots, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Grâce à la figure 2.3, nous remarquons que

$$P_n^{(j)}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-j} \frac{y_1^k}{k!} P_{n-1}^{(k+j-1)}(y_2, \dots, y_{n-1}),$$

ce qui entraîne

$$\int_{y_1}^{y_0+y_1} P_{n-1}(y, y_2, \dots, y_{n-1}) dy = \sum_{i=1}^n \frac{y_0^i}{i!} P_n^{(i)}(y_1, \dots, y_{n-1}) = P_n(y_0, \dots, y_{n-1}).$$

□

Enfin, grâce à (2.13), les polynômes  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  peuvent être interprétés comme des volumes (cf figure 2.4 pour  $n = 2$  et  $n = 3$ ).

#### 2.3.2 Processus des instants de début de service

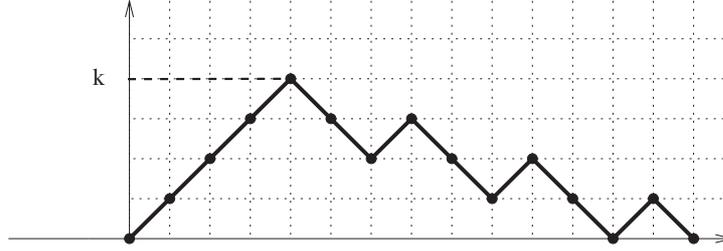
On s'intéresse à l'analyse des temps de service des clients d'une file M/M/1 stable et à l'équilibre, selon leur position dans une période d'activité. On donne la loi d'un service sachant que le client se trouve au début, à la fin ou au milieu de la période d'activité. Ceci permet, au passage, de prouver que le processus des instants de début de service n'est pas un processus de Poisson.

La suite des durées des périodes d'activité et des périodes de repos successives sont des variables aléatoires i.i.d., mutuellement indépendantes. La *propriété sans mémoire* de la loi exponentielle ( $\mathbb{P}(s_0 > x + y \mid s_0 > y) = \mathbb{P}(s_0 > x)$ ) implique que la durée d'une période de repos suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Pour ce qui est des périodes d'activité, la distribution est plus complexe. Nous rappelons la loi de la longueur d'une période d'activité donnée dans [20, Chapitre II.2.2] ou [94, Chapitre 1.2].

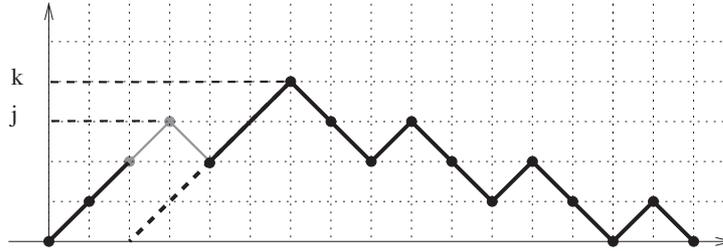
**Théorème 2.3.2.** *La probabilité qu'une période d'activité  $B$  comporte  $(n + 1)$  clients est donnée par*

$$\mathbb{P}\{|B| = n + 1\} = C_n \frac{\lambda^n \mu^{n+1}}{(\lambda + \mu)^{2n+1}}, \quad (2.14)$$

où  $C_n$  le  $n$ -ième nombre de Catalan.



a) Chemin contribuant à  $P_k^{(n-1)}$



b) Chemin contribuant à  $P_j^{(n)}$

FIG. 2.3 – Preuve de la proposition 2.3.1.

*Démonstration.* Le processus  $\{Q(t), t \in \mathbb{R}\}$  est un processus de naissance et de mort en temps continu, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de générateur  $G$  tel que

$$G_{n,n+1} = \lambda, n \geq 0; G_{n,n-1} = \mu, n \geq 1; G_{n,m} = 0, |n - m| \geq 2.$$

Soit  $\{q_n, n \in \mathbb{Z}\}$  la chaîne de Markov associée à  $Q$  et restreinte à ses instants de sauts. Plus précisément, soit  $\mathcal{J}$  le processus ponctuel obtenu en superposant les processus des arrivées et des départs et  $\{J_n, n \in \mathbb{Z}\}$  la suite de ses instants  $T_n(\mathcal{J}) = J_n$ . Nous posons  $q_n = Q(J_n^-)$ . La matrice de transition de  $\{q_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est donnée par

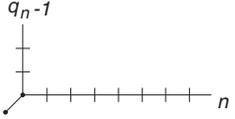
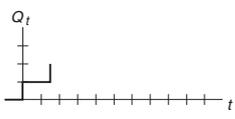
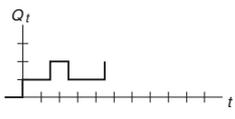
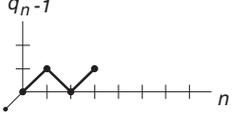
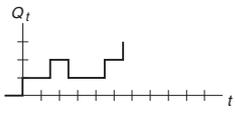
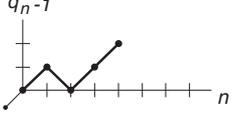
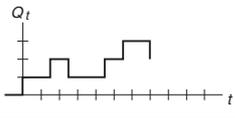
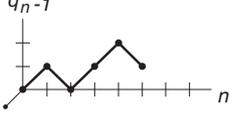
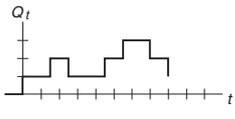
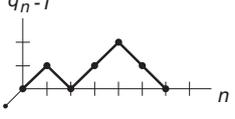
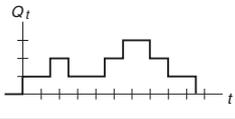
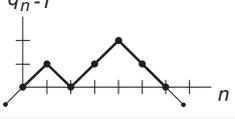
$$g_{0,1} = 1; \quad g_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad g_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad i \geq 1; \quad (2.15)$$

et  $g_{i,j} = 0$  sinon.

Une période d'activité est une *excursion* de  $\{q_n, n \in \mathbb{Z}\}$  de 0 jusqu'à son premier retour en 0. En utilisant les conventions du paragraphe 2.3.2, une période d'activité  $B$  comporte  $n + 1$  clients si et seulement si

$$q_0 = 0, \quad q_i > 0, \quad i \in \{1, \dots, 2n + 1\}, \quad q_{2n+2} = 0. \quad (2.16)$$

### 2.3. Périodes d'activité et Chemins de Dyck

Événement	Processus de charge	Chemin associé
Arrivée du premier client.		
Arrivée du deuxième client.		
Départ du premier client.		
Arrivée du troisième client.		
Arrivée du quatrième client.		
Départ du deuxième client.		
Départ du troisième client.		
Départ du quatrième client.		

TAB. 2.2 – Chemin de Dyck associé à une période d'activité.

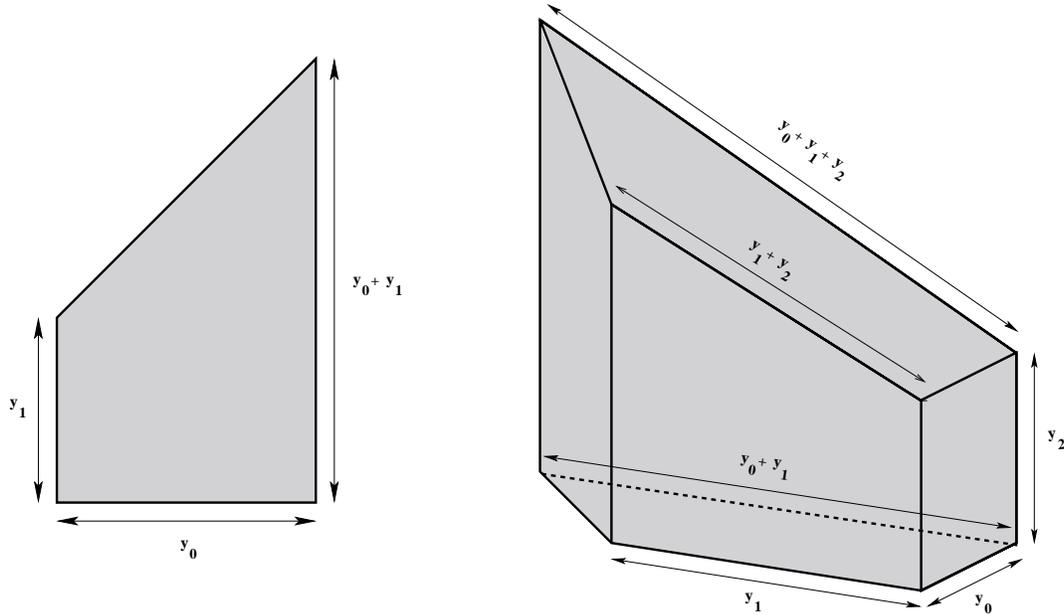


FIG. 2.4 – Les volumes en gris valent  $P_2(y_0, y_1)$  (gauche) et  $P_3(y_0, y_1, y_2)$  (droite).

Sur l'événement  $\{q_0 = 0, q_i > 0, i \in \{1, \dots, 2n + 1\}, q_{2n+2} = 0\}$ , le chemin (aléatoire) de pas successifs  $(i - 1, q_i - 1)$ ,  $i \in \{1, \dots, 2n + 1\}$  est un chemin de Dyck (aléatoire) de longueur  $2n$ . Nous l'appellerons le chemin de Dyck associé à  $B$  (Tableau 2.2). Sur l'événement  $\{|B| = n + 1\}$ , les chemins de Dyck (associés) sont équiprobables. D'après (2.15), chacun a une probabilité  $\frac{\lambda^n \mu^{n+1}}{(\lambda + \mu)^{2n+1}}$  et il y a  $C_n$  chemins, d'où l'égalité (2.14).  $\square$

Soit  $\delta_n$  la loi conditionnelle de la durée d'une période d'activité sachant que celle-ci comporte  $(n + 1)$  clients. Soit  $\Psi_{\delta_n}(x)$  la transformée de Laplace de  $\delta_n$ . D'après [34], la transformée de Laplace de la loi de la durée d'une période d'activité, donnée par

$$\tilde{\theta}_1(x) = \int e^{-xt} \mathbb{P}\{\text{la période d'activité } B \text{ est de durée } t\} dt,$$

est solution de l'équation  $X = (\lambda + \mu + x - \lambda X)^{-1}$ , soit

$$\tilde{\theta}_1(x) = \frac{\lambda + \mu + x - \sqrt{(\lambda + \mu + x)^2 - 4\lambda}}{2\lambda}. \quad (2.17)$$

Comme  $\tilde{\theta}_1(x) = \sum_{n \geq 0} \Psi_{\delta_n}(x) \mathbb{P}\{|B| = n + 1\}$ , en utilisant la fonction génératrice des nombres de Catalan, on a

$$\Psi_{\delta_n}(x) = \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + x} \right)^{2n+1}. \quad (2.18)$$

On peut voir  $\delta_n$  comme la somme de  $2n + 1$  variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $(\lambda + \mu)$ . En exploitant la propriété sans mémoire de la loi exponentielle, on a

$$s_0 \sim \text{Exp}(\mu), \quad s_{|B|-1} \sim \text{Exp}(\lambda + \mu).$$

### 2.3. Périodes d'activité et Chemins de Dyck

En outre, en remarquant le fait que  $\{|B| = 1\} = \{s_0 \leq a_0\}$ , on obtient

$$\mathbb{L}[s_0 \mid |B| = 1] = \text{Exp}(\lambda + \mu), \quad \mathbb{L}[s_0 \mid |B| > 1] = \text{Exp}(\lambda + \mu) \star \text{Exp}(\mu). \quad (2.19)$$

Notre but, dans la suite de cette section, est de calculer la loi d'un service situé au milieu d'une période d'activité, c'est-à-dire un client qui n'est ni au début ni à la fin de  $B$ . On suppose que  $|B| > 2$ . Soit  $s_*$  le service d'un client (générique) numéro  $*$  et soit  $B$  la période d'activité à laquelle il appartient. Nous introduisons les événements suivants :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_s &= \{*\text{ est le seul client de } B\} \\ \mathfrak{E}_p &= \{*\text{ est le premier client de } B \text{ et } |B| > 1\} \\ \mathfrak{E}_d &= \{*\text{ est le dernier client de } B \text{ et } |B| > 1\} \\ \mathfrak{E}_m &= \{*\text{ est au milieu de } B \text{ et } |B| > 2\}. \end{aligned}$$

On voit clairement que ces événements sont disjoints et que  $\mathbb{P}\{\mathfrak{E}_s \cup \mathfrak{E}_p \cup \mathfrak{E}_d \cup \mathfrak{E}_m\} = 1$ . Comme les longueurs des périodes d'activité successives sont i.i.d., nous en déduisons les relations suivantes

$$\mathbb{P}\{\mathfrak{E}_p\} = \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_d\}, \quad \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_p\} = \mathbb{P}\{|B| > 1\}/\mathbb{E}[|B|], \quad \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_s \cup \mathfrak{E}_p\} = 1/\mathbb{E}[|B|].$$

D'après (2.14), nous obtenons que  $\mathbb{P}\{|B| > 1\} = \lambda/(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{E}[|B|] = \mu/(\mu - \lambda)$ . Ceci implique que

$$\mathbb{P}\{\mathfrak{E}_s\} = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}, \quad \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_p\} = \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_d\} = \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{\mu(\mu + \lambda)}, \quad \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_m\} = \frac{2\lambda^2}{\mu(\mu + \lambda)}. \quad (2.20)$$

**Proposition 2.3.3.** *La transformée de Laplace de la loi conditionnelle de  $s_*$  sachant  $\mathfrak{E}_m$  est donnée par :*

$$\Psi_{s_*|\mathfrak{E}_m}(x) = \frac{(2\mu + x)(\mu + \lambda)}{2(\mu + x)(\mu + \lambda + x)}. \quad (2.21)$$

*Démonstration.* Comme  $s_0 \sim \mathbb{L}[s_* \mid \mathfrak{E}_s \cup \mathfrak{E}_p]$  et  $s_{|B|-1} \sim \mathbb{L}[s_* \mid \mathfrak{E}_d]$ . Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \Psi_{s_*}(x) &= \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_s \cup \mathfrak{E}_p\} \Psi_{s_*|\mathfrak{E}_s \cup \mathfrak{E}_p}(x) + \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_d\} \Psi_{s_*|\mathfrak{E}_d}(x) + \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_m\} \Psi_{s_*|\mathfrak{E}_m}(x) \\ &= \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_s \cup \mathfrak{E}_p\} \Psi_{s_0}(x) + \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_d\} \Psi_{s_{|B|-1}}(x) + \mathbb{P}\{\mathfrak{E}_m\} \Psi_{s_*|\mathfrak{E}_m}(x). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\frac{\mu}{\mu + x} = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \frac{\mu}{\mu + s} + \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{\mu(\mu + \lambda)} \frac{\mu + \lambda}{\mu + \lambda + s} + \frac{2\lambda^2}{\mu(\mu + \lambda)} \Psi_{s_*|\mathfrak{E}_m}(x).$$

Après simplification, nous obtenons la formule donnée dans (2.21). □

Posons  $b_*$  la différence entre les deux instants de début de service de deux clients successifs numérotés  $*$  et  $(* + 1)$  et soient  $B$  la période d'activité contenant le client  $*$  et  $\nu$  la période de repos suivant  $B$  ( $\nu \sim \text{Exp}(\lambda)$ ). Une conséquence directe du théorème 2.3.3 est que

**Théorème 2.3.4.** *Le processus des instants de début de service n'est pas un processus de Poisson, contrairement au processus des instants de départ (fin de service) qui est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  d'après le théorème de Burke 2.2.1 [16, 82].*

*Démonstration.* D'après (2.19), (2.20), on a  $\mathbb{L}[b_* | \mathfrak{E}_m] = \mathbb{L}[s_* | \mathfrak{E}_m]$  et

$$\begin{aligned} b_* \mathbb{1}_{\mathfrak{E}_s} = (s_0 + \nu) \mathbb{1}_{\mathfrak{E}_s} &\implies \mathbb{L}[b_* | \mathfrak{E}_s] = \text{Exp}(\lambda + \mu) \star \text{Exp}(\lambda) \\ b_* \mathbb{1}_{\mathfrak{E}_p} = s_0 \mathbb{1}_{\mathfrak{E}_p} &\implies \mathbb{L}[b_* | \mathfrak{E}_p] = \text{Exp}(\lambda + \mu) \star \text{Exp}(\mu) \\ b_* \mathbb{1}_{\mathfrak{E}_d} = (s_{|B|-1} + \nu) \mathbb{1}_{\mathfrak{E}_d} &\implies \mathbb{L}[b_* | \mathfrak{E}_d] = \text{Exp}(\lambda + \mu) \star \text{Exp}(\lambda). \end{aligned}$$

En tenant compte de (2.21), nous en déduisons la transformée de Laplace de  $b_*$  :

$$\Psi_{b_*}(x) = \frac{\lambda(\mu^2(\lambda + \mu) + \mu(2\mu + \lambda)x + \lambda x^2)}{\mu(\lambda + x)(\mu + x)(\lambda + \mu + x)}. \quad (2.22)$$

Nous vérifions que  $\mathbb{E}[b_*] = 1/\lambda$  et que  $\mathbb{E}[b_*^2] = \frac{\lambda^3 - \mu\lambda^2 + \mu^3 + \mu^2\lambda}{\lambda^2\mu^2(\lambda + \mu)}$ . En particulier, nous constatons que  $\mathbb{E}[b_*^2] < \mathbb{E}[d_*^2] = 2/\lambda^2$ , où  $d_*$  représente l'inter-départ entre  $*$  et  $* + 1$ .  $\square$

## 2.4 Loi d'un service au sein d'une période d'activité

Dans [34], les auteurs entreprennent une étude systématique des processus de naissance et de mort, en temps continu, en les associant à des familles de chemins. Ils revisitent, à l'aide d'arguments combinatoires, les liens entre processus de naissance et de mort, fractions continues et polynômes orthogonaux, mis en évidence analytiquement par Karlin et Mc Gregor dans [52, 51, 53]. Dans [46], les auteurs exploitent les liens entre les trajectoires du processus du nombre de clients  $Q$  et les chemins de Dyck pour calculer différentes quantités émanant de problématiques de télécommunication. Notre étude repose sur cette correspondance avec les chemins de Dyck, néanmoins les polynômes  $\{P_n, n \in \mathbb{Z}\}$  sont en variables non-commutatives. Il paraît donc difficile d'avoir une information aussi précise que dans [34].

Sur l'événement  $\{|B| = n + 1\}$  et sachant que le chemin de Dyck associé est  $\pi \in \mathcal{D}_n$ , la puissance de  $y_{i-1}$  dans  $P_\pi$  correspond au nombre de clients qui rejoignent le système entre le  $i$ -ième et le  $(i + 1)$ -ième départ. En combinant ces observations au fait que le temps entre deux transitions successives de  $\{Q(t), t \in \mathbb{R}\}$  (tant que le système ne se vide pas) sont des variables aléatoires de loi  $\text{Exp}(\lambda + \mu)$ , nous obtenons

**Théorème 2.4.1.** *Sachant que la période d'activité est de longueur  $n + 1$ , la densité conditionnelle du vecteur aléatoire  $(s_0, \dots, s_n)$  représentant les temps de service des clients successifs est*

$$D(y_0, \dots, y_n) = \frac{(\lambda + \mu)^{2n+1}}{C_n} e^{-(\lambda + \mu)(y_0 + \dots + y_{n-1})} P_n(y_0, \dots, y_{n-1}) e^{-(\lambda + \mu)y_n}, \quad (2.23)$$

où  $P_n$  est le polynôme de Dyck de degrés  $n$  défini au paragraphe 2.3.1.

## 2.4. Loi d'un service au sein d'une période d'activité

*Démonstration.* Soient  $\Delta_n = \{|B| = n + 1\}$  et  $E_0, \dots, E_n$  une suite de boréliens de  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$\mathbb{P}\{s_i \in E_i, i = 0, \dots, n \mid \Delta_n\} = \frac{\mathbb{P}\{s_i \in E_i, i = 0, \dots, n; \Delta_n\}}{\mathbb{P}\{\Delta_n\}}.$$

Posons  $L_n = \lambda^{-n} \mu^{-(n+1)} \mathbb{P}\{s_i \in E_i, i \in \{0, \dots, n\}; \Delta_n\}$ , on a

$$L_n = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} dy_0 \dots dy_n e^{-(\mu+\lambda)(y_0+\dots+y_n)} \int_0^{y_0} dx_0 \int_0^{y_0+y_1-x_0} dx_1 \dots \int_0^{y_0+\dots+y_{n-1}-(x_0+\dots+x_{n-2})} dx_{n-1}.$$

Nous concluons en utilisant (2.13). □

Nous remarquons immédiatement que le service du dernier client est indépendant des services des autres clients et qu'il suit une loi  $\text{Exp}(\lambda + \mu)$ . Pour pouvoir commenter davantage ce résultat, nous introduisons le vecteur aléatoire  $(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n)$  tel que

$$(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n) \sim \mathbb{L}[(s_0, \dots, s_n) \mid |B| = n + 1].$$

Par un calcul direct, on a

**Corollaire 2.4.2.** *La transformée de Laplace de  $(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n)$  est donnée par*

$$\Psi_{(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n)}(x_0, \dots, x_n) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^n e^{-x_i \tilde{s}_i}\right] = \frac{1}{C_n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} z_i\right) R_n(z_0, \dots, z_{n-1}) z_n, \quad (2.24)$$

où  $z_i = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + x_i}$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$  et  $R_n$  défini au paragraphe 2.3.1.

En d'autres termes, dans une période d'activité de longueur  $(n + 1)$ , la loi conditionnelle de  $(s_0, \dots, s_n)$  est égale à la loi de  $(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n)$  qu'on peut voir comme suit : la loi de  $\tilde{s}_n$  est  $\text{Exp}(\lambda + \mu)$  indépendante de  $(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_{n-1})$ . Soit  $\Pi$  une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $\mathcal{D}_n = \{\pi_1, \dots, \pi_{C_n}\}$ . Sachant  $\{\Pi = \pi_i\}$ , la variable aléatoire  $\tilde{s}_j$  est indépendante des autres variables et elle suit la loi de la somme de  $k_j^i$  variables aléatoires de loi  $\text{Exp}(\lambda + \mu)$  où  $(k_j^i - 1)$  correspond à la puissance de  $y_j$  dans  $P_{\pi_i}$  (Tableau 2.1).

Soit  $\mathcal{R}_n$  défini par

$$\mathcal{R}_n(z_0, \dots, z_{n-1}) = R_n(z_0, \dots, z_{n-1}) \times z_0 \dots z_{n-1}.$$

De cette manière, en tenant compte du corollaire 2.4.2, nous parvenons à

$$\Psi_{(\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n)}(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{C_n} \mathcal{R}_n(z_0, \dots, z_{n-1}) \cdot z_n.$$

où  $z_i = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + x_i}$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Nous introduisons également  $\Psi_{\tilde{s}_i}^{(i)}(x_i) = \frac{1}{C_n} \mathcal{R}_n^{(i)}(z_i)$  où

$$\mathcal{R}_n^{(i)}(z_i) = \mathcal{R}_n(1, \dots, 1, z_i, 1, \dots, 1).$$

En utilisant,  $\mathcal{D}_n \simeq \cup_{i=1}^n \mathcal{D}_{i-1} \times \mathcal{D}_{n-i}$  (paragraphe 2.3.1), on a



## 2.4. Loi d'un service au sein d'une période d'activité

---

*Démonstration.* L'application  $\Psi : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$  définie par la figure 2.5 est une involution, donc une bijection. Plus précisément, étant donné un chemin de Dyck  $\pi \in \mathcal{D}_n$  tel que

$$R_\pi = y_1^k \cdot y_0 Q(y_0, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

alors  $\Psi(\pi) \in \mathcal{D}_n$  est défini par  $R_{\Psi(\pi)} = y_0^{k+1} Q(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ . En combinant ces observations avec le corollaire 2.4.2, on a le résultat recherché.

□

De nombreux modèles de files d'attente (la file M/M/K/ $\infty$ , la file M/M/ $\infty$  ou la file M/M/K/L ( $K \leq L < \infty$ )) ont leurs processus de nombre de clients qui sont des processus de naissance et de mort. Dans chacun des cas, étant donnée une période d'activité générique contenant  $n + 1$  clients, nous pouvons lui associer un chemin de Dyck de longueur  $2n$ . Néanmoins, ces chemins de Dyck ne sont plus équiprobables, ce qui rend difficile l'obtention de formule simple pour les lois jointes des services dans l'esprit du théorème 2.4.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>s<sub>0</sub></b>	0	742900	742900	534888	326876	177650	87210	38760	15504	5508	1700	440	90	13	1
<b>s<sub>1</sub></b>	742900	742900	534888	326876	177650	87210	38760	15504	5508	1700	440	90	13	1	0
<b>s<sub>2</sub></b>	950912	742900	476102	268090	135660	62016	25500	9316	2960	790	167	25	2	0	0
<b>s<sub>3</sub></b>	1068484	742900	442510	234498	111792	47872	18220	6040	1686	374	59	5	0	0	0
<b>s<sub>4</sub></b>	1152464	742900	418200	210188	94632	37862	13215	3895	916	154	14	0	0	0	0
<b>s<sub>5</sub></b>	1220532	742900	398180	190168	80618	29854	9365	2355	426	42	0	0	0	0	0
<b>s<sub>6</sub></b>	1280592	742900	380162	172150	68144	22924	6215	1221	132	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>7</sub></b>	1337220	742900	362738	154726	56264	16588	3575	428	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>8</sub></b>	1393848	742900	344720	136708	44252	10582	1430	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>9</sub></b>	1453908	742900	324700	116688	31382	4862	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>10</sub></b>	1521976	742900	300390	92378	16796	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>11</sub></b>	1605956	742900	266798	58786	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>12</sub></b>	1723528	742900	208012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>13</sub></b>	1931540	742900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>s<sub>14</sub></b>	2674440	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. 2.3 - Loi des services dans une période d'activité de longueur 15.

# Chapitre 3

## File Géo/Géo/1

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>File ././1 et Modèle de Stockage . . . . .</b>	<b>54</b>
3.1.1	File Géo/Géo/1 . . . . .	54
3.1.2	Modèle de Stockage . . . . .	56
<b>3.2</b>	<b>Marches aléatoires ordonnées . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>3.3</b>	<b>Files/Magasins en tandem . . . . .</b>	<b>59</b>
3.3.1	Départs d'un système de files d'attente en tandem . . . . .	60
3.3.2	Départs d'un système de magasins en tandem . . . . .	62
<b>3.4</b>	<b>Propriétés statistiques et symétrie . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>67</b>

---

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux liens existant entre deux modèles de files d'attente. Le premier n'est rien d'autre que le modèle classique de file d'attente à un serveur décrit au chapitre 2. Le second moins classique peut être vu comme une file d'attente en temps discret avec des paquets d'arrivées et des paquets de départs. Il est étudié dans [12]. Pour éviter toute confusion entre les deux modèles, nous définirons le deuxième modèle, non plus comme une file d'attente, mais comme un modèle de stockage.

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre un modèle abstrait constitué d'une file d'attente et d'un modèle de stockage couplés d'une façon assez naturelle. Dans ce modèle, nous pouvons voir notre système comme un opérateur  $\Phi$  qui transforme les variables d'entrée  $(\mathcal{A}, s)$  en variables de sortie  $(\mathcal{D}, r) = \phi(\mathcal{A}, s) = (\phi_1(\mathcal{A}, s), \phi_2(\mathcal{A}, s))$  :  $\phi_1$  et  $\phi_2$  donnant les départs respectivement de la file d'attente et du modèle de stockage. En supposant que les arrivées et les services suivent des lois géométriques et que la condition de stabilité est vérifiée, nous prouvons une version jointe du théorème de Burke à l'image des paragraphes 1.1.2 et 2.2.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous explorons une deuxième facette de la dualité entre file d'attente et modèle de stockage qui se manifeste à travers l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth. Plus précisément, nous considérons un système de  $k$  files/magasins en tandem en régime transitoire. En s'inspirant des idées développées dans [11, 75], nous montrons que les départs du système de files d'attente en tandem et de la

série de magasins en tandem donnent respectivement la longueur de la plus longue et de la plus courte ligne d'un tableau de Young obtenu en appliquant l'algorithme RSK au mot  $\omega$  associé aux variables d'entrée de notre modèle.

Ce chapitre reprend les travaux figurant dans [30, 31].

### 3.1 File ././1 et Modèle de Stockage

Nous nous intéressons au modèle décrit au paragraphe 2.1 en temps discret. L'étude des systèmes de files d'attente en temps discrets n'a reçu que peu d'intérêt dans la littérature. Néanmoins, certains livres [15, 60, 95] se sont intéressés à ces modèles qui s'avèrent important dans l'étude de certains systèmes de communication tel l'ATM.

#### 3.1.1 File Géo/Géo/1

Plus précisément, soit  $\mathcal{A}$  un processus ponctuel de Bernoulli de paramètre  $p \in (0, 1)$ , c'est-à-dire : le temps est discret et à chaque instant  $n \in \mathbb{Z}$ , un client arrive avec une probabilité  $p$  et ceci est indépendant de ce qui se passe dans les autres instants. Comme au paragraphe 2.1, nous définissons  $\mathcal{A} = \{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$  avec  $A_0 \leq 0 < A_1$  et  $a_n = A_{n+1} - A_n$ . La suite  $\{a_n, n \geq 1\}$  est une suite i.i.d. de variables aléatoires géométriques sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $p$  ( $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(a_1 = k) = (1 - p)^{k-1}p$ , on notera  $\mathbb{L}(a_n) = \text{Géo}(p)$ ). Soit  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires géométriques sur  $\mathbb{N}^*$ ,  $\text{Géo}(q)$ , de paramètre  $q \in (0, 1)$ , indépendante de  $\mathcal{A}$ . On suppose  $p < q$  (condition de stabilité).

Nous nous proposons de prouver une version discrète du théorème de Burke. Comme pour la file avec services inutilisés (paragraphe 1.1.2), les trajectoires du processus des nombres de clients  $Q$  ne recèlent pas assez d'informations pour reconstruire les variables d'entrée  $(\mathcal{A}, s)$ . Pour y remédier, nous présentons une approche basée sur la version complétée du processus de charge  $W$  définie dans (2.6), dont nous donnons une nouvelle expression. Commençons par définir les fonctions (aléatoires) càdlàg  $f_n, g_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < A_n \\ D_n - t & \text{if } A_n \leq t \leq D_n \\ 0 & \text{if } t > D_n \end{cases}, \quad g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < A_n \\ t - A_n & \text{if } A_n \leq t \leq D_n \\ 0 & \text{if } t > D_n \end{cases}.$$

Les processus (duaux)  $W$  et  $\bar{W}$  présentés à la figure 2.1 peuvent être redéfinis comme suit :

$$W(t) = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t), \quad \bar{W}(t) = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} g_n(t), \quad (3.1)$$

où  $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}}$  désigne le maximum pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Nous vérifions, en effet, que  $W(t)$  est bien la quantité de services à traiter par le serveur à l'instant  $t$ , et  $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}\}$  est donc le processus de charge défini à l'équation (2.6). Le processus  $\bar{W} = \{\bar{W}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est le dual du processus  $W$ , (figures 2.1 et 3.1). En examinant ensemble les processus  $W$  et  $\bar{W}$ , nous avons une version complétée du processus de charge. Considérons le processus  $P = (W, \bar{W})$  et définissons  $\mathcal{R}(P) = (\mathcal{R}(\bar{W}), \mathcal{R}(W))$ . Connaissant  $P$ , nous pouvons, à l'image de la preuve

### 3.1. File ././1 et Modèle de Stockage

du théorème de Burke (paragraphe 2.2), reconstruire les variables d'entrée :  $(A, s) = \psi(P)$ . De plus, nous constatons que  $\mathcal{R}(\mathcal{D}, r) = \Psi \circ \mathcal{R}(P)$ . Le lemme suivant est crucial pour la preuve de la version discrète du théorème de Burke.

**Lemme 3.1.1.** *Le couple formé par le processus de charge  $W$  et son dual  $\overline{W}$  est réversible, c'est-à-dire :  $(W, \overline{W}) \sim (\mathcal{R}(\overline{W}), \mathcal{R}(W))$ .*

*Démonstration.* Les processus  $W$  et  $\overline{W}$  sont des processus stationnaires (en temps) et ergodiques. Nous pouvons voir une période de repos comme la période de durée maximale pendant laquelle  $W(t) = 0$  (ou de manière équivalente,  $\overline{W}(t) = 0$ ). Une période d'activité est un intervalle de temps séparant deux périodes de repos. Nous pouvons de la sorte partitionner  $\mathbb{R}$  à l'aide d'une suite alternant périodes d'activité et périodes de repos.

Soient  $\{i_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{b_n, n \in \mathbb{Z}\}$  respectivement les longueurs des périodes de repos et des périodes d'activité successives. Les suites  $\{i_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{b_n, n \in \mathbb{Z}\}$  sont indépendantes et i.i.d. De plus, grâce à la propriété sans mémoire de la distribution géométrique, la variable  $i_n$  est une variable aléatoire géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $p$ . Ainsi, pour prouver la réversibilité de  $(W, \overline{W})$ , il nous suffira de montrer la réversibilité pour une unique période d'activité. Pour ce faire, nous allons introduire un processus annexe  $Z$ .

Considérons une période d'activité comportant  $k$  clients numérotés de 1 à  $k$ . Nous définissons (à une translation près) les suites  $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{C_n, n \in \mathbb{Z}\}$  par

$$C_n = B_n + s_n, \quad B_{n+1} = C_n + a_n.$$

Nous posons

$$Z(B_1) = 0, \quad Z(t) = \begin{cases} Z(B_n) + (t - B_n) & \text{si } t \in [B_n, C_n[ \\ [Z(C_n) - (t - C_n)]^+ & \text{si } t \in [C_n, B_{n+1}[ \end{cases}. \quad (3.2)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $dZ/dt = 1$  sur  $[B_n, C_n[$  et on a  $dZ/dt = (-1)\mathbb{1}_{Z>0}$  sur  $[C_n, B_{n+1}[$ .

En considérant la figure 3.1, le lecteur peut se convaincre que le processus  $Z$  est en bijection avec  $(W, \overline{W})$ , et que le processus  $\mathcal{R}(Z)$  est en bijection avec  $(\mathcal{R}(\overline{W}), \mathcal{R}(W))$ , le processus  $Z$  étant obtenu par juxtaposition de  $\overline{W}$  et  $W$ .

Pour prouver la réversibilité de  $(W, \overline{W})$  sur une période d'activité donnée, il nous suffira de prouver la réversibilité de  $Z$ . Nous appellerons  $Z$  le *processus zig-zag*. Ce processus (réversible bien qu'il ne soit pas Markovien) a été introduit dans un contexte différent dans [47].

Le processus zig-zag  $Z$  peut être identifié avec les longueurs de ses intervalles de croissance et de décroissance. Soit  $(l_1, \dots, l_{2k}) \in (\mathbb{N}^*)^{2k}$ , avec  $\sum_i l_{2i} = \sum_i l_{2i+1} = L$ , les longueurs de ces intervalles (la longueur totale des périodes de croissance doit être égale à celle des périodes de décroissance). Les variables  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  étant géométriques de paramètres respectifs  $q$  et  $p$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z = (l_1, \dots, l_{2k})\} &= (1-p)^{l_1-1} p (1-q)^{l_2-1} q \cdots (1-p)^{l_{2k-1}-1} p (1-q)^{l_{2k}-1} \\ &= (1-p)^{L-k} p^k (1-q)^{L-k} q^{k-1}. \end{aligned}$$

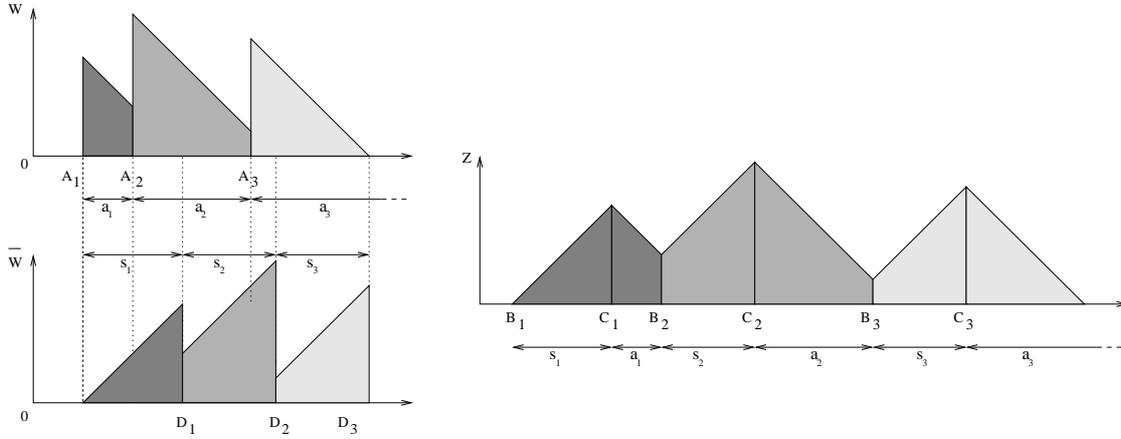


FIG. 3.1 – Processus de charge, son dual et le processus zig-zag

Ainsi, étant donnés  $L$  et  $k$ , les différentes trajectoires de  $Z$  sont équiprobables. Cette propriété est héritée, par renversement du temps, par le processus  $\mathcal{R}(Z)$ . Ce qui entraîne le résultat voulu.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver un analogue en temps discret du théorème 2.2.1. Ce résultat est une généralisation du théorème de Burke en temps discret présenté dans [17].

**Théorème 3.1.2.** *Le processus  $(\mathcal{D}, r)$  est un processus de Bernoulli marqué d'intensité  $p$  indépendant de ses marques  $r$ . La suite de variables aléatoires  $\{r_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est une suite i.i.d. suivant une loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $q$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $(\mathcal{A}, s) = \psi(W, \overline{W})$  et  $\mathcal{R}(\mathcal{D}, r) = \psi \circ \mathcal{R}(W, \overline{W})$ . Par le lemme 3.1.1, on a

$$(\mathcal{A}, s) = \psi(W, \overline{W}) \sim \psi \circ \mathcal{R}(W, \overline{W}) = \mathcal{R}(\mathcal{D}, r).$$

Ceci entraîne que  $(\mathcal{D}, r) \sim \mathcal{R}(\mathcal{A}, s) \sim (\mathcal{A}, s)$ , où la dernière équivalence découle du fait que  $(\mathcal{A}, s)$  est un processus de Bernoulli de marque i.i.d. donc réversible.  $\square$

Ce résultat est l'analogue discret du théorème de Burke énoncé au paragraphe 2.2, l'assertion  $\mathcal{D} \sim \mathcal{A}$  représente un résultat original et l'assertion  $r \sim s$  figure dans [12], nous avons proposé ici une preuve plus simple basée sur la réversibilité.

### 3.1.2 Modèle de Stockage

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au modèle de file d'attente présenté dans [12]. Dans leur papier, Bedekar et Azizoglu considèrent le système comme une file d'attente avec des paquets d'arrivée (batch arrivals), pour éviter toute confusion avec les files d'attente

### 3.2. Marches aléatoires ordonnées

présentées aux chapitres 1 et 2, nous en donnons une nouvelle interprétation en terme de modèle de stockage. Dans ce cadre, la suite  $r$  peut être vue comme le processus des départs du modèle de stockage.

Plus précisément, un produit est fourni, vendu et stocké dans un magasin de la manière suivante. Le temps étant discret, à chaque instant  $n \in \mathbb{Z}$  une quantité de ce produit est fournie et une autre est demandée par des acheteurs potentiels. Le principe étant de parvenir à satisfaire toute la demande. La demande non satisfaite à un instant  $n$  est perdue alors que les quantités non vendues sont stockées pour la suite.

Soit  $s_n$  la quantité fournie (**S**upplied) au slot  $n + 1$ , et soit  $a_n$  la quantité de  $P$  réclamée (**A**skeeD) au même slot. Les variables définies dans (2.2)-(2.7) peuvent être interprétées dans ce contexte :

- $w_n$  est le niveau de stock à la fin du slot  $n$ , évoluant selon l'équation de Lindley ;
- $r_n$  est la demande satisfaite au slot  $n + 1$  définie à l'équation (2.2) ; c'est la quantité du produit qui quitte le magasin au slot  $n + 1$ .

Les processus  $\mathcal{D}$  et  $Q$  n'ont pas d'interprétation naturelle dans ce modèle. Nous résumons l'évolution du modèle de stockage dans la figure 3.2. Le choix des indices ( $s_n, a_n, r_n$ , pour le slot  $n + 1$ ) traduit un souci de clarté dans les équations données au paragraphe 2.1.

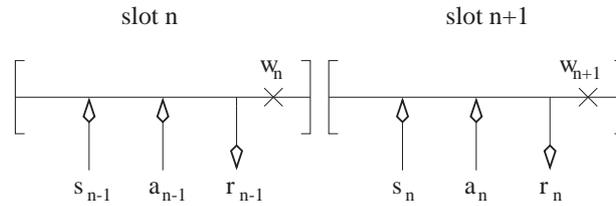


FIG. 3.2 – Le modèle de Stockage

Il est crucial de remarquer que bien que les variables d'entrée dans les modèles (*File d'attente* et *Modèle de stockage*) soient les mêmes, les variables de sortie intéressantes sont différentes. Nous nous intéressons, dans chacun des deux modèles, aux variables représentant les départs. Dans le cas de la file d'attente, celles-ci sont données par les instants  $\{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et pour le modèle de stockage, ce sont les variables  $\{r_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

### 3.2 Marches aléatoires ordonnées

Nous reprenons les techniques de calcul présentées au paragraphe 1.1.3. Le but étant de donner une représentation non-conditionnée de marches aléatoires ordonnées. Néanmoins, les décalages d'indices ne nous permettent pas de retrouver une formulation équivalente au théorème de Pitman.

Commençons par établir le lemme suivant :

### Chapitre 3. File Géo/Géo/1

**Lemme 3.2.1.** *La suite des temps d'attente (renversée en temps)  $\mathcal{R}(w)$  vérifie une récurrence analogue à l'équation de Lindley (2.5),*

$$w_n = (w_{n+1} + r_n - d_{n-1})^+. \quad (3.3)$$

*Démonstration.* Par (2.2)-(2.7), on a

$$d_n = a_n - w_n + w_{n+1} - s_n + s_{n+1}, \quad r_n = s_n - w_{n+1} + w_n.$$

Par conséquent, on vérifie que  $w_{n+1} + r_n - d_{n-1} = w_{n-1} + s_{n-1} - a_{n-1}$ . En prenant le maximum avec 0 des deux côtés de l'égalité précédente et en utilisant l'équation de Lindley, on a

$$(w_{n+1} + r_n - d_{n-1})^+ = w_n.$$

□

**Proposition 3.2.2.** *Soient  $\{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  deux suites de variables aléatoires i.i.d. et mutuellement indépendantes de lois respectivement Géo( $p$ ) et Géo( $q$ ) avec  $p < q$ , on a*

$$\mathbb{L}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n s_i\right) \mid \sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^{k+1} s_i, \forall k \geq 0\right] \sim \mathbb{L}\left[\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=j+1}^{n+1} s_i \right\}, \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=2}^j s_i + \sum_{i=j+1}^n a_i \right\}\right)\right].$$

*Démonstration.* Soit  $v_n = w_n + s_n = w_{n+1} + r_n$  (le temps de séjour du client  $n$ ). En développant (3.3), nous obtenons

$$v_n = w_{n+1} + r_n = \sup_{k \geq n-1} \left\{ \sum_{i=n}^{k+1} r_i - \sum_{i=n}^k d_i \right\}. \quad (3.4)$$

De la même manière qu'au paragraphe 1.1.3, remarquons que sur l'événement  $\{v_1 = 0\}$ , on a

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n a_i + \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=j+1}^{n+1} s_i - \sum_{i=j+1}^n a_i \right\} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^j a_i - \sum_{i=j+1}^{n+1} s_i \right\},$$

et

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=2}^n s_i - \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=j+1}^n s_i - \sum_{i=j+1}^n a_i \right\} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=2}^j s_i - \sum_{i=j+1}^n a_i \right\}.$$

En définitive, nous avons prouvé que

$$\sum_{i=1}^n d_i = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=j+1}^{n+1} s_i \right\}, \quad \sum_{i=1}^n r_i = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=2}^j s_i + \sum_{i=j+1}^n a_i \right\}. \quad (3.5)$$

En appliquant le théorème 3.1.2, la loi de  $\{(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n s_i), n \in \mathbb{N}\}$  sachant  $\{\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^{k+1} s_i\}$ , pour tout  $k \geq 0$  est égale à celle de  $\{(\sum_{i=1}^n d_i, \sum_{i=1}^n r_i), n \in \mathbb{N}\}$  sachant

### 3.3. Files/Magasins en tandem

que  $\{\sum_{i=1}^k d_i \geq \sum_{i=1}^{k+1} r_i\}$ , pour tout  $k \geq 0$ . Grâce à (3.4), l'événement  $\{\sum_{i=1}^k d_i \geq \sum_{i=1}^{k+1} r_i, \forall k \geq 0\}$  est égal à  $\{v_1 = 0\}$ . Nous concluons en tenant compte de (3.5) et en remarquant que les suites  $\{a_i, i \geq 1\}$  et  $\{s_i, i \geq 2\}$  sont indépendantes de l'événement  $\{v_1 = 0\}$ .  $\square$

La proposition 3.2.2 peut être étendue au cas limite où  $\mathbb{E}[a_1] = \mathbb{E}[s_1]$  et également au cas où les lois géométriques sont remplacées par des lois exponentielles en appliquant le théorème 2.2.1 au lieu du théorème 3.1.2. Nous pouvons également donner une représentation dans le cas où nous avons  $k$  marches aléatoires. Pour ce faire, nous pouvons adapter, à notre contexte particulier, les méthodes utilisées dans [78, 61, 47]. Les formules sont, néanmoins, plus compliquées que dans le cas des lois de Bernoulli (paragraphe 1.2.1).

### 3.3 Files/Magasins en tandem

Nous considérons la dynamique de files d'attente et de modèles de stockage en tandem, dans le cas transient ou saturé. Plus précisément, soit le modèle décrit au chapitre 2 (paragraphe 2.1) avec l'hypothèse  $w_0 = A_0 = s_0 = 0$ , ce qui entraîne  $D_0 = r_0 = 0$ , et restreignons nous aux clients 1 et ses successeurs, respectivement aux slots de temps après 1.

Nous pouvons voir ce modèle en terme de files d'attente. Dans ce cas, nous pouvons voir les arrivées comme les départs d'une file d'attente virtuelle ayant un nombre infini de clients à l'instant 0 (numérotés sur  $\mathbb{N}$ ). Le temps de service du client  $n$  à la file virtuelle est  $a_{n-1}$ . Ce système est un modèle saturé de deux files en tandem. Dans le cadre du modèle de stockage, nous pouvons voir les *quantités fournies* comme étant les départs d'un magasin virtuel à la fin du *slot* 0. Dans le magasin virtuel, le stock est infini et la demande au slot  $n$  est  $s_n$ . Ce système est un modèle saturé de deux magasins en tandem.

Nous allons maintenant incorporer ces deux modèles en un seul. Nous désignerons par *file/magasin 1* le premier système virtuel et par *file/magasin 2* l'autre. Soit  $u(n, 1) = a_{n-1}$  et  $u(n, 2) = s_n$ , pour  $n \geq 1$ .

Le modèle en tandem saturé est complètement déterminé par la donnée des variables d'entrée  $\{u(n, i), n \in \mathbb{N}^*, i = 1, 2\}$ . Ces variables représentent les services (respectivement les demandes) pour le modèle de files en tandem (respectivement le modèle de magasins en tandem). Dans le tableau suivant, nous résumons la description précédente dans le cas de deux files/magasins en tandem, saturés.

Client / slot	1	2	...	$n$
File 2 / Magasin (Virtuel) 1	$u(1, 2) = s_1$	$u(2, 2) = s_2$		$u(n, 2) = s_n$
File (Virtuelle) 1 / Magasin 2	$u(1, 1) = a_0$	$u(2, 1) = a_1$		$u(n, 1) = a_{n-1}$

En général,  $u(n, i)$  est le service du client  $n$  à la file  $i$ , et la demande au slot  $n$  du magasin  $3 - i$ . En d'autres termes, les éléments (files ou magasins) associés à une suite  $\{u(n, i), n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $i = 1, 2$  sont attribués en ordre inverse pour le modèle de files/magasins en tandem. Ceci est illustré à la figure 3.3, pour  $k = 2$ . Pour le modèle de stockage, il y a un décalage

### Chapitre 3. File Géo/Géo/1

dans la numérotation des slots : la quantité partant du magasin 1 au slot  $n$  n'arrive au magasin 2 qu'à l'instant  $n + 1$ . Cette convention traduit l'évolution discrète du système. Durant un slot, il y a d'abord les quantités qui arrivent au magasin ; ensuite, une quantité du produit P est demandée ; enfin, nous assistons aux départs (figure 3.2).

Nous pouvons naturellement étendre ce modèle au cas de  $k$  files/magasins saturés en tandem. Ce modèle est défini par la famille des variables  $\{u(i, j), i \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, \dots, k\}\}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

Pour le modèle de files d'attente :

- (i) à l'instant 0, la file 1 contient un nombre infini de clients, en attente, numérotés sur  $\mathbb{N}^*$  et les autres files sont vides ;
- (ii)  $u(i, j)$  est le temps de service du client  $i$  à la file  $j$  ;
- (iii) l'instant de départ du client  $n$  de la file  $i$  est l'instant d'arrivée de ce dernier à la file  $i + 1$ .

Pour le modèle de stockage :

- (i) à la fin du slot 0, le magasin 1 a des réserves infinies et les autres magasins sont vides ;
- (ii) la quantité  $u(i, k + 1 - j)$  représente la demande au slot  $i$  du magasin  $j$  ;
- (iii) la quantité partant au slot  $i$  du magasin  $j$  est la quantité qui est fournie au slot  $i + 1$  au magasin  $j + 1$ .

Ces modèles sont illustrés à la figure 3.3.

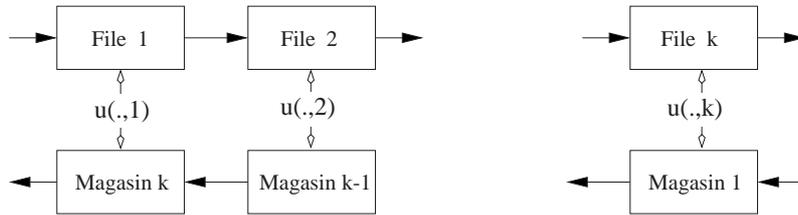


FIG. 3.3 – Files et magasins en ordre opposé

#### 3.3.1 Départs d'un système de files d'attente en tandem

Notons  $D(n, k)$  le temps de départ du client  $n$  de la file  $k$ . Pour que le client  $n$  commence son service à la  $k$ -ième file, deux conditions doivent être satisfaites. D'une part, le client  $n$  doit avoir quitté la file  $k - 1$  et d'autre part le client  $n - 1$  doit avoir quitté la file  $k$ . Ce qui nous permet d'écrire la relation de récurrence suivante :

$$D(n, k) = \max(D(n, k - 1), D(n - 1, k)) + u(n, k) . \quad (3.6)$$

Nous prendrons la condition au bord suivante :  $D(n, 0) = D(0, k) = 0$ , pour tout  $n, k \leq 0$  ; qui correspond au système saturé, c'est-à-dire telle que tous les clients numérotés sur  $\mathbb{N}^*$  soient présents à l'instant  $t = 0$ . En développant (3.6), on obtient

$$D(n, k) = \max_{\pi \in \Pi(n, k)} S(\pi) ,$$

### 3.3. Files/Magasins en tandem

où  $\Pi_{(n,k)}$  est l'ensemble des chemins croissants sur  $\mathbb{Z}^2$  allant de  $(1,1)$  à  $(n,k)$  dont les pas successifs sont de la forme  $(0,1)$  ou  $(1,0)$ . La quantité  $S(\pi)$  est le poids du chemin  $\pi$  c'est-à-dire

$$S(\pi) = \sum_{(i,j) \in \pi} u(i,j).$$

Nous nous intéressons, dans un premier temps, au régime asymptotique lorsque  $k$  tend vers l'infini, avec  $n$  bornée. Nous supposons que les variables aléatoires  $\{u(i,j), i,j \in \mathbb{N}\}$  sont i.i.d. de variance finie  $\mathbb{V}u(i,j)^2 < \infty$ . Un résultat dû à Glynn et Whitt dans [41], donne la loi limite de  $\frac{D(n,k) - k\mathbb{E}u(1,1)}{\sqrt{k\mathbb{V}u(1,1)}}$ , en fonction d'un mouvement brownien.

**Théorème 3.3.1.** [41] *Le processus  $\{\frac{D(n,k) - k\mathbb{E}u(1,1)}{\sqrt{k\mathbb{V}u(1,1)}}, n \in \mathbb{N}^*\}$  converge en loi, lorsque  $k$  tend vers l'infini, vers le processus*

$$\left\{ \max_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} [B_i(t_{i+1}) - B_i(t_i)], n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

où le processus  $(B_1, \dots, B_n)$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{R}^n$ .

Il n'est pas difficile de voir qu'un chemin allant de  $(1,1)$  à  $(n,k)$  pour  $k$  grand consiste en  $k$  paliers horizontaux, où deux paliers successifs sont séparés par un pas horizontal (figure 3.4). En utilisant le *théorème de Donsker* [83], nous pouvons nous convaincre que les sommes des poids centrés, renormalisés sur les différents paliers horizontaux sont approximativement l'incrément d'un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}$  indépendant des autres paliers.

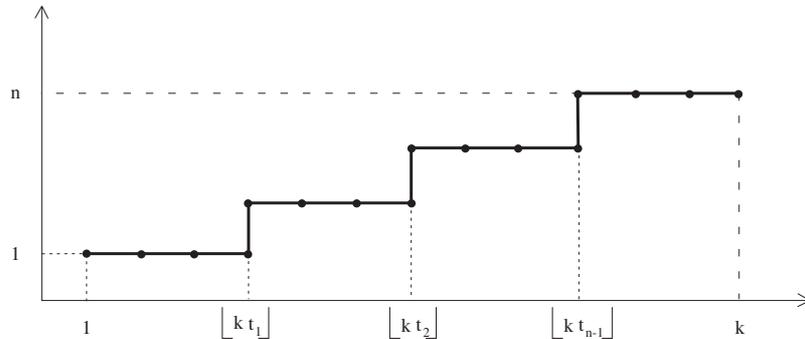


FIG. 3.4 – Théorème Central Limite pour l'instant de départ d'une série de files en tandem

Posons  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k u(i,j)$ , nous pouvons définir le mot  $\omega \in \{1, \dots, k\}^M$ , avec

$$\omega = \omega_1 \dots \omega_n, \text{ avec } \omega_i = \underbrace{1 \dots 1}_{u(i,1)} \underbrace{2 \dots 2}_{u(i,2)} \dots \underbrace{k \dots k}_{u(i,k)}. \quad (3.7)$$

Nous définissons la *plus longue sous-suite croissante* de  $\omega$  comme le plus long sous-mot croissant (au sens large) de  $\omega$ , appelons  $l(n,k)$  la longueur de cette plus longue sous-suite

croissante. Pour obtenir la plus longue sous-suite croissante sur  $\omega$ , commençons par la fin du mot  $\omega$ . D'abord, les  $u(n, k)$  apparitions de  $k$  dans  $\omega_n$  y figurent. Ensuite, deux cas se présentent :

1. nous prenons encore des  $k$  dans  $\omega_1 \dots \omega_{n-1}$  pour compléter la sous-suite croissante dans ce cas la longueur de la plus longue sous-suite croissante est  $l(n-1, k) + u(n, k)$  ;
2. nous ne prenons plus de  $k$ , autrement dit nous regardons la plus longue sous-suite croissante dans  $\{1, \dots, k-1\}$  sur  $\omega_1 \dots \omega_n$ , c'est-à-dire la longueur de la plus longue sous-suite croissante de  $\omega$  est  $l(n, k-1) + u(n, k)$  ;

La suite  $\{l(i, j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$  vérifie la relation de récurrence suivante

$$l(n, k) = \max(l(n, k-1), l(n-1, k)) + u(n, k) .$$

Par conséquent,  $l(n, k)$  vérifie la même relation de récurrence que  $D(n, k)$  et nous vérifions sans grandes difficultés que nous avons les mêmes conditions au bord, ainsi  $l(n, k) = D(n, k)$ .

Un résultat classique [59], relie la plus longue sous-suite sur un mot  $\omega$  avec la longueur de la première ligne du tableau de Young obtenu en appliquant l'algorithme RSK, avec insertion en ligne, au mot  $\omega$ . En tenant compte de cette remarque et en utilisant les résultats du premier chapitre, on a  $D(n, k) = \lambda_1(\omega)$ .

### 3.3.2 Départs d'un système de magasins en tandem

Soit  $r(n, k)$  la quantité de produit quittant le magasin  $k$  au slot  $n$  et  $w(n, k)$  la quantité restant en stock à la fin du slot  $n$ , dans le magasin  $k$ . Au slot  $n+1$ , il y a la quantité  $w(n, k) + r(n-1, k-1)$  qui arrive au magasin  $k$ , la quantité  $r(n, k)$  qui part et la quantité  $w(n+1, k)$  qui est stockée pour le slot  $n+2$ , soit

$$r(n, k) = r(n-1, k-1) + w(n, k) - w(n+1, k) , \quad (3.8)$$

En tenant compte de la dynamique décrite au paragraphe 3.1.2, nous pouvons réécrire l'équation de Lindley comme suit,

$$\begin{aligned} w(n+1, j) &= [w(n, j) + r(n-1, j-1) - u(n, k+1-j)]^+ \\ &= \max_{1 \leq m \leq n} \left[ \sum_{i=m}^{n-1} (r(i, j-1) - \sum_{i=m+1}^n u(i, k+1-j)) \right] . \end{aligned}$$

A l'image de ce que nous avons prouvé au paragraphe précédent, nous désirons maintenant exprimer  $R(n, k)$ , la quantité totale quittant le système de  $k$  magasins en tandem au bout de  $n$  unités de temps, en fonction de  $\lambda_k$ , la longueur de la plus courte ligne du tableau de Young obtenu à partir du mot  $\omega$ . Pour ce faire, nous allons introduire  $\tilde{\Pi}$ , l'ensemble des chemins sur  $\mathbb{Z}^2$  allant de l'un des points  $\{(1+i, k-i), i=0, \dots, k-1\}$  à l'un des points de  $\{(n-j, 1+j), j=0, \dots, n-1\}$  avec des pas du type  $(1+i, -i)$ ,  $i \geq 0$  (cf figure 3.5). Pour

### 3.3. Files/Magasins en tandem

prouver que  $R(n, k) = \lambda_k$ , nous allons procéder en deux étapes, d'une part nous montrons que

$$R(n, k) = \min_{\pi \in \tilde{\Pi}} S(\pi),$$

et d'autre part que

$$\lambda_k = \min_{\pi \in \tilde{\Pi}} S(\pi).$$

**Lemme 3.3.2.** *La quantité (cumulée)  $R(n, k)$  de produit quittant le magasin  $k$  jusqu'à l'instant  $n$  est donnée par*

$$R(n, k) = \min_{\pi \in \tilde{\Pi}} S(\pi).$$

*Démonstration.* Pour  $n \geq k$ , on a

$$\begin{aligned} r(n, k) &= r(n-1, k-1) + w(n, k) - w(n+1, k) \\ &= r(n-2, k-2) + w(n-1, k-1) - w(n, k-1) + w(n, k) - w(n+1, k) \\ &= r(n-k+1, 1) + \sum_{i=0}^{k-2} [w(n-i, k-i) - w(n-i+1, k-i)] \\ &= u(n-k+1, k) + \sum_{i=0}^{k-1} [w(n-i, k-i) - w(n-i+1, k-i)]. \end{aligned}$$

Ainsi, en remarquant qu'il n'y a pas de départs du magasin  $k$  avant l'instant  $k$  (le temps qu'il faut au produit pour atteindre ce magasin vide au départ), c'est-à-dire que

$$R(n, k) = \sum_{i=1}^n r(i, k) = \sum_{i=k}^n r(i, k).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} R(n, k) &= \sum_{i=k}^n u(i-k+1, k) + \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{k-1} w(i-j, k-j) - w(i-j+1, k-j) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} u(i, k) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=k}^n w(i-j, k-j) - w(i-j+1, k-j) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} u(i, k) + \sum_{i=0}^{k-1} w(k-i, k-i) - w(n-i+1, k-i). \end{aligned}$$

On rappelle que  $w(i, i) = 0$ , pour tout  $i \geq 1$ . Soit

$$\begin{aligned} R(n, k) &= \sum_{i=1}^{n-k+1} u(i, k) + \sum_{i=1}^k w(i, i) - \sum_{i=1}^k w(n-k+i+1, i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} u(i, k) - \sum_{i=1}^k w(n-k+i+1, i). \end{aligned} \tag{3.9}$$

### Chapitre 3. File Géo/Géo/1

Par conséquent, en posant  $A = w(n+1, k) + w(n, k-1)$ , on a

$$\begin{aligned}
 A &= \max_{1 \leq i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_1}^{n-1} r(i, k-1) - \sum_{i=i_1+1}^n u(i, 1) \right] + w(n, k-1) \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_1}^{n-1} [r(i-1, k-2) + w(i, k-1) - w(i+1, k-1)] - \sum_{i=i_1+1}^n u(i, 1) \right] + w(n, k-1) \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_1-1}^{n-2} r(i, k-2) + w(i_1, k-1) - w(n, k-1) - \sum_{i=i_1+1}^n u(i, 1) \right] + w(n, k-1) \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_1-1}^{n-2} r(i, k-2) + w(i_1, k-1) - \sum_{i=i_1+1}^n u(i, 1) \right] \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_1-1}^{n-2} r(i, k-2) + \max_{1 \leq i_2 \leq i_1-1} \left[ \sum_{i=i_2}^{i_1-2} r(i, k-2) - \sum_{i=i_2+1}^{i_1-1} u(i, 2) \right] - \sum_{i=i_1+1}^n u(i, 1) \right] \\
 &= \max_{1 \leq i_2 < i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_2}^{n-2} r(i, k-2) - \sum_{i=i_2+1}^{i_1-1} u(i, 2) - \sum_{i=i_1+1}^n u(i, 1) \right].
 \end{aligned}$$

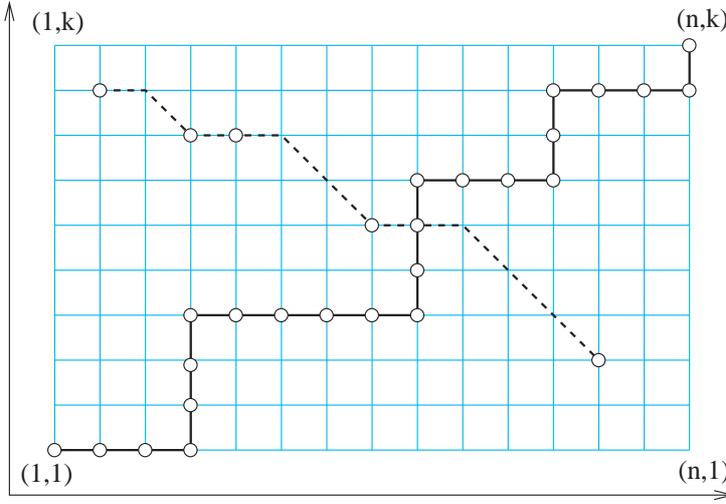


FIG. 3.5 – Un chemin dans  $\Pi$  (plein) et un chemin dans  $\tilde{\Pi}$  (discontinu)

En appliquant ceci successivement, on a

$$\sum_{i=1}^k w(n-k+i+1, i) = \max_{1 \leq i_{k-1} < \dots < i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=i_{k-1}}^{n-k+1} u(i, k) - \left( \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_{k-2}-1} u(i, k-1) + \dots + \sum_{i=i_1+1}^N u(i, 1) \right) \right]. \quad (3.10)$$

En combinant (3.9) et (3.10), nous vérifions que

$$\begin{aligned} R(n, k) &= \min_{1 \leq i_{k-1} < \dots < i_1 \leq n} \left[ \sum_{i=1}^{i_{k-1}-1} u(i, k) + \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_{k-2}-1} u(i, k-1) + \dots + \sum_{i=i_1+1}^N u(i, 1) \right] \\ &= \min_{\pi \in \tilde{\Pi}} \left[ \sum_{(i,j) \in \pi} u(i, j) \right]. \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.3.3.** *Nous vérifions que*

$$x_k \Delta \dots \Delta x_2 \Delta x_1(M) = \min_{\pi \in \tilde{\Pi}} \left[ \sum_{(i,j) \in \pi} u(i, j) \right]. \quad (3.11)$$

*Démonstration.* Par définition,

$$x_k \Delta \dots \Delta x_1(M) = \min_{1 \leq m_k < \dots < m_1 = M} x_k(m_k) + x_{k-1}(m_{k-1}) - x_{k-1}(m_k) + \dots + x_1(m_1) - x_1(m_2).$$

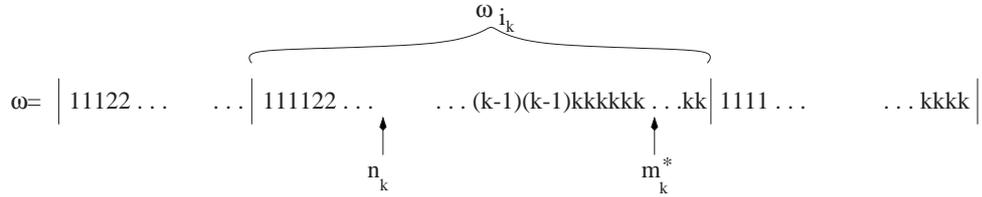


FIG. 3.6 – Illustration du lemme 3.3.3

Soit  $(m_k^*, \dots, m_2^*)$  la suite des entiers réalisant le minimum dans l'équation précédente. Considérons l'ensemble des entiers

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^l |\omega_i| + \sum_{j=1}^{k-1} u(l+1, j), l \in \{0, \dots, k-1\} \right\}.$$

Si  $m_k^* \notin I$ , et si  $n_k$  est le plus petit entier tel que  $n_k \in I, n_k > m_k^*$ , alors il est clair que  $x_k(n_k) = x_k(m_k^*)$  et que

$$\begin{aligned} x_k \Delta \dots \Delta x_1(M) - x_k(n_k) &\leq \min_{n_k < m_{k-1} < \dots < m_2} x_{k-1}(m_{k-1}) - x_{k-1}(n_k) + \dots + x_1(M) - x_1(m_2) \\ &\leq \min_{m_k^* < m_{k-1} < \dots < m_2} x_{k-1}(m_{k-1}) - x_{k-1}(m_k^*) + \dots + x_1(M) - x_1(m_2) \\ &= x_k \Delta \dots \Delta x_1(M) - x_k(m_k^*). \end{aligned}$$

### Chapitre 3. File Géo/Géo/1

Ainsi,  $m_k^* \in I$ , c'est-à-dire qu'il existe  $i_k \in \{0, \dots, k-1\}$  tel que  $m_k^* = \sum_{i=1}^{i_k-1} |\omega_i| + \sum_{j=1}^{k-1} u(i_k, j)$  et  $x_k(m_k^*) = \sum_{j=1}^{i_k-1} u(j, k)$ . De la même façon, nous vérifions que  $m_{k-1}^* \in \{\sum_{i=1}^l |\omega_i| + \sum_{j=1}^{k-2} u(l+1, j), l \in \{i_k, \dots, k-1\}\}$ . Ceci entraîne  $x_{k-1}(m_{k-1}) - x_{k-1}(m_k) = \sum_{j=i_k+1}^{i_{k-1}-1} u(k-1, j)$  pour  $i_{k-1} \in \{i_k, \dots, k-1\}$ . Nous pouvons conclure en appliquant de nouveau ce genre d'argument.  $\square$

Grâce à la proposition 1.3.4, nous vérifions que

$$R(n, k) = x_k \Delta \cdots \Delta x_2 \Delta x_1(M) = \lambda_k .$$

Nous avons montré que

$$D(n, k) = \lambda_1, \quad R(n, k) = \lambda_k ,$$

ceci permet de relier les variables de sortie de notre système de files/magasins en tandem aux longueurs de la première et de la dernière ligne du tableau de Young associé. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment exploiter cette correspondance pour prouver la symétrie du système.

### 3.4 Propriétés statistiques et symétrie

Nous désirons montrer une propriété de symétrie du système de files en tandem à l'image de ce qui a été effectué au paragraphe 1.3.2 pour une distribution différente sur les mots de  $\{1, \dots, k\}^n$ . Supposons que les variables aléatoires  $U = \{(u(i, j), (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\})\}$  sont indépendantes et que  $u(i, j)$  suit une loi géométrique de paramètre  $q_j$ , pour  $q = (q_1, \dots, q_k) \in ]0, 1[^k$ . Soit  $\omega$  le mot associé à  $U$  et  $T$  le  $P$ -tableau obtenu par application de l'algorithme RSK avec insertion en ligne à  $\omega$ .

Si  $T$  est un tableau sur l'alphabet  $\{1, \dots, k\}$ , nous écrivons  $x^T = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ , où  $\alpha_i$  est le nombre d'occurrences de  $i$  dans le tableau. La *fonction de Schur*  $s_\lambda$  associée à la partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  est définie par

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{T: \text{sh}(T)=\lambda} x^T ,$$

où  $\text{sh}(T)$  est la forme du tableau  $T$ , [86, 92].

Dans [75], il est prouvé que :

**Proposition 3.4.1.** *La loi des partitions aléatoires  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , associées à  $\omega$ , est donnée par*

$$\mathbb{P}\{\lambda = l\} = a(q)^n s_l(q) s_l(1, \dots, 1), \quad l \in \mathbb{Y}_k , \quad (3.12)$$

où  $\mathbb{Y}_k$  est l'ensemble des partitions entières à  $k$  éléments,  $a(q) = \prod_{j=1}^k (1 - q_j)$  et  $s_l$  est la fonction de Schur associée à la partition  $l$ .

### 3.5. Conclusion

*Démonstration.* Nous reprenons ici les arguments de [75]. D'abord, si nous posons  $(P^{(n)}, Q^{(n)})$ , le couple de tableaux de Young obtenus en appliquant l'algorithme RSK à  $\omega$ , on a, pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{T}_k \times \mathbb{T}_n$ ,

$$\mathbb{P}[(P^{(n)}, Q^{(n)}) = (P, Q)] = a(q)^n q^P 1_{\{shP=shQ\}}.$$

En sommant ceci pour  $(P, Q)$  avec  $shP = shQ = l \in \mathbb{Y}_k$ , nous obtenons

$$\mathbb{P}(\lambda = l) = a(q)^n s_l(q) s_l(1, \dots, 1).$$

□

En particulier, la loi de  $\lambda$ , et donc celles de  $D(n, k)$  et  $R(n, k)$ , sont *symétriques* en  $q_1, \dots, q_k$ . Le fait que la loi de  $D(n, k)$  soit symétrique est un résultat classique en théorie des files d'attente [3, 97].

Si nous tenons compte de la dépendance en  $n$ ,  $\lambda = \lambda^{(n)}$ , alors, d'après [75] le processus  $\lambda^{(n)}$  est une chaîne de Markov sur  $\mathbb{Y}_k$  ayant pour probabilités de transition

$$\mathbb{P}\{\lambda^{(n+1)} = l \mid \lambda^{(n)} = m\} = a(q) \frac{s_l(q)}{s_m(q)}, \quad (3.13)$$

pour tout  $m$  et  $l$  tels que  $l_1 \geq m_1 \geq l_2 \geq m_2 \geq \dots$ . En particulier, nous constatons que la loi du processus  $\lambda^{(n)}$ , et par conséquent celles des suites  $\{D(n, k), n \geq 1\}$  et  $\{R(n, k), n \geq 1\}$ , sont symétriques en  $q_1, \dots, q_k$ . Nous remarquons, enfin, que cette propriété s'étend au cas exponentiel.

### 3.5 Conclusion

Nous avons entrepris dans cette partie des généralisations du théorème de Burke dans le cas continu au chapitre 2 (loi exponentielle) et dans le cas discret au chapitre 3 (loi géométrique). Il en ressort trois méthodes de preuve du théorème de Burke : une première analytique, une deuxième basée sur la réversibilité de  $Q$  et une troisième basée sur la réversibilité du processus zig-zag  $Z$ .

Le première preuve proposée par Burke lui-même dans le cas exponentiel est analytique [16]. Le cas géométrique est traité de manière analytique par Azizoglu et Bedekar dans [12]. L'exploitation de la propriété de réversibilité de  $Q$  pour le modèle en temps continu est due à Reich [82]. Cette preuve centrale en théorie des files d'attente a été étendue à de nombreux contextes donnant naissance au concept de réseaux à forme produit [13, 55]. La preuve de Reich ne marche pas telle quelle pour le modèle en temps discret. Le processus  $\{Q(n), n \in \mathbb{Z}\}$  est toujours un processus markovien de naissance et de mort réversible. Néanmoins, la difficulté réside dans le fait que l'information que recèle ce processus d'entrée ne permet pas de reconstituer les variables  $\mathcal{A}$  et  $s$ . En effet, sur les événements  $\{Q(n-1) = Q(n) > 0\}$ , deux cas de figures sont possibles : il n'y a ni départ ni arrivée à l'instant  $n$ , ou bien il y a un départ et une arrivée au même instant ; et il est impossible avec la seule donnée de  $Q$  de dire lequel a eu lieu. Une manière de combler ce manque d'information est d'ajouter un processus auxiliaire rendant la preuve un peu plus complexe. Cette méthode

### Chapitre 3. File Géo/Géo/1

---

a été exploitée dans [61, Théorème 4.1] pour le modèle avec services inutilisés présenté au chapitre 1. L'utilisation du processus zig-zag pour prouver une version discrète du théorème de Burke est originale.

Les autres problèmes que nous avons abordé dans cette partie ont été explorés, dans un premier temps, dans d'autres contextes que celui des files d'attente. Les liens entre des modèles de files d'attente en tandem, certains modèles de particules en interaction et les tableaux de Young ont été mis en évidence pour la première fois dans [45]. L'analogie avec les processus d'exclusion (de particules) sur la ligne, largement étudiés dans [62, 85], est explicitée dans [90]. Les tableaux de Young sont des objets classiques dans l'étude de la représentation des groupes et en combinatoire [35]. L'étude des liens entre files d'attente en tandem et tableaux de Young en croissance, établie dans [88], a permis de mettre la lumière sur la proximité des problèmes suivants : plus longs chemins sur un graphe, plus longues sous-suites croissantes sur des mots et certains systèmes de particules en interactions et files d'attente en tandem dans un cadre markovien [1, 2].

**Deuxième partie**

**Points fixes**



# Chapitre 4

## Points fixes pour la file ./GI/1

### Sommaire

---

4.1	Préliminaires . . . . .	71
4.2	Plus long chemin . . . . .	73
4.3	Animaux de grille . . . . .	74
4.4	Limite hydrodynamique . . . . .	77
4.5	Existence de points fixes . . . . .	83

---

Nous présentons, dans la première partie de ce chapitre, l'ensemble des résultats ayant trait au comportement asymptotique d'un système de files d'attente ./1 en tandem. Ces systèmes ont été étudiés dans [42, 5] pour des files avec capacités infinies et ces résultats étendus dans [68] pour le cas où il y a blocage des clients avant et après leurs services. Ces problèmes ont été abordés dans différents contextes avant d'être traités dans le cadre des files d'attente [1, 58, 85].

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous exploiterons ces résultats asymptotiques pour aborder la problématique de point fixe à l'image du théorème de Burke. Plus précisément, étant donnée une distribution de probabilités pour les services, nous recherchons des processus ergodiques d'inter-arrivées qui soient tels que le processus des inter-départs correspondant ait la même loi [64, 65].

### 4.1 Préliminaires

En reprenant les notations [65], nous présentons des relations trajectorielles décrivant le système de files d'attente en tandem déjà introduit au chapitre 2.

Commençons par définir les opérateurs  $\phi$  et  $\psi$  décrivant la dynamique d'une file ./GI/1/ :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \cup \{(+\infty)^{\mathbb{Z}}\} \\ (a, s) &\mapsto w = \psi(a, s), \end{aligned} \tag{4.1}$$

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

où le temps d'attente du client  $n$  avant le début de son service est donné par

$$\begin{aligned} w_n = \psi(a, s)_n &= \sup_{j \leq n} \sum_{i=j}^{n-1} (s_i - a_i) \\ &= \left[ \sup_{m < j \leq n} \sum_{i=j}^{n-1} (s_i - a_i) \right] \vee \left[ w_m + \sum_{i=m}^{n-1} (s_i - a_i) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous définissons également la fonction donnant la suite des inter-départs :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \\ (a, s) &\mapsto d = \phi(a, s), \end{aligned} \quad (4.3)$$

où

$$d_n = \phi(a, s)_n = [a_n - s_n - \psi(a, s)_n]^+ + s_{n+1}. \quad (4.4)$$

Soit  $L : \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$ , l'opérateur de translation défini par  $Lu_n = u_{n+1}$ , alors

$$\phi(a, s) = a + L\psi(a, s) - \psi(a, s) + Ls - s.$$

Remarquons enfin que si  $a, b \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$  tel que  $a \leq b$ , alors

$$\psi(a, s) \geq \psi(b, s), \quad \phi(a, s) \leq \phi(b, s).$$

**Schéma de Loynes.** Nous reprenons dans la suite, le résultat dû à Loynes [63] donnant les différents régimes de notre système.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, pour tout  $(K, \mathcal{K})$  un espace mesurable, on notera  $\mathcal{M}(K)$  et  $\mathcal{M}_s(K)$  (respectivement  $\mathcal{M}_e(K)$ ) l'ensemble des mesures de probabilités et des mesures de probabilités stationnaires (respectivement ergodiques) sur  $(K, \mathcal{K})$ . Nous introduisons  $\mathcal{M}_e^\alpha(K)$  l'ensemble des mesures ergodiques de moyenne  $\alpha$ . Pour des raisons de commodité, nous noterons  $a \perp b$  lorsque  $a$  et  $b$  sont indépendants. Soit  $\theta$  un *shift stationnaire* par rapport à  $\mathbb{P}$  tel que les suites  $a$  et  $s$  soient compatibles avec  $\theta$ . Enfin, nous définissons  $\mathcal{T}$  la  $\sigma$ -algèbre invariante par  $\theta$ .

Soit une file  $G/G/1$  avec  $a = \{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $s = \{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  représentant respectivement les inter-arrivées et les services qu'on suppose ergodiques et de moyennes finies. Nous considérons le processus tronqué des inter-arrivées  $\{a_n, n \geq N\}$  et nous posons  $w_N = 0$ . En utilisant l'équation de Lindley (4.2) et l'équation (4.4), nous pouvons définir le processus des inter-départs correspondant au processus tronqué. En faisant tendre  $N$  vers  $-\infty$ , nous distinguons trois régimes possibles pour le système :

- *Cas stable.* Sur l'événement  $\{\mathbb{E}[s_0 | \mathcal{T}] < \mathbb{E}[a_0 | \mathcal{T}]\}$ , on a  $w \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$  et  $\mathbb{E}[d_0 | \mathcal{T}] = \mathbb{E}[a_0 | \mathcal{T}]$ .
- *Cas instable.* Sur l'événement  $\{\mathbb{E}[s_0 | \mathcal{T}] > \mathbb{E}[a_0 | \mathcal{T}]\}$ , on a  $w = (+\infty)^{\mathbb{Z}}$  et  $d = Ls$ .
- *Cas critique.* Sur l'événement  $\{\mathbb{E}[s_0 | \mathcal{T}] = \mathbb{E}[a_0 | \mathcal{T}]\}$ , on a  $d = Ls$ , cependant  $w$  peut être finie ou infinie. En effet, pour  $a = s = (c)^{\mathbb{Z}}$ , on a  $w = (0)^{\mathbb{Z}}$ , alors que si  $s$  est i.i.d., non constante et  $a$  indépendant de  $s$ , on a  $w = (+\infty)^{\mathbb{Z}}$ .

## 4.2. Plus long chemin

En résumé, si on note  $\sigma \in \mathcal{M}_s^{1/\mu}$  la loi de  $s$ , alors on peut définir

$$\begin{aligned} \phi_\sigma : \mathcal{M}_s(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}) &\rightarrow \mathcal{M}_s(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}) \\ \mu &\mapsto \phi_\sigma(\mu), \end{aligned} \tag{4.5}$$

où  $\phi_\sigma(\mu)$  est la loi de  $\phi(a, s)$  lorsque  $a \sim \mu$ ,  $s \sim \sigma$  et les suites  $a$  et  $s$  sont indépendantes. On dira qu'une distribution est un *point fixe* pour la file d'attente si  $\phi_\sigma(\mu) = \mu$ . Remarquons que  $\sigma$  est un *point fixe trivial*  $\phi_\sigma(\sigma) = \sigma$ .

De plus, l'application  $\phi_\sigma$  conserve les moyennes dans le sens suivant :

$$\begin{cases} \forall \lambda < \mu, & \phi_\sigma : \mathcal{M}_e^{1/\lambda}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathcal{M}_e^{1/\lambda}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}); \\ \forall \lambda > \mu, & \phi_\sigma : \mathcal{M}_e^{1/\lambda}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}) \rightarrow \{\sigma\}. \end{cases}$$

Si la loi  $\sigma$  est celle d'une suite i.i.d. non-constante alors  $\phi_\sigma(\mathcal{M}_e^{1/\mu}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})) = \{\sigma\}$ .

**Files en tandem.** Soit  $s^k = \{s(n, k), n \in \mathbb{Z}\}$ , une suite de variables (non-constantes) i.i.d. sur  $\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$  de distribution  $\sigma \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$ . Soit  $a^0 = \{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  une suite stationnaire indépendante des  $s^k$  telle que  $\mathbb{E}a_0 = 1/\lambda$ . Soit  $\theta$  un *shift stationnaire* par rapport à  $\mathbb{P}$  et tel que la suite  $a^0$  et les suites  $s^k$  soient compatibles avec  $\theta$ . Nous supposons que  $\mathbb{E}s(0, 0) \leq \mathbb{E}[a_0 \mid \mathcal{J}]$ , p.s. Nous pouvons ainsi définir pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les suites  $w^k$  et  $a^{k+1}$  comme suit

$$w^k = \{w(n, k), n \in \mathbb{Z}\} = \psi(a^k, s^k), \quad a^{k+1} = \{a(n, k+1), n \in \mathbb{Z}\} = \phi(a^k, s^k)$$

Les processus aléatoires  $a^k$ ,  $s^k$  et  $w^k$  sont respectivement les suites des inter-arrivées, des services et des temps de séjour à la  $k$ -ième file de notre système et  $a^{k+1}$  est la suite des inter-départs de la  $k$ -ième file.

La suite  $\{a^k, k \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$ . Par conséquent, une mesure  $\kappa \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$  est une distribution stationnaire pour  $\{a^k, k \in \mathbb{N}\}$  si et seulement si  $\kappa$  est un point fixe pour la file, c'est-à-dire, si et seulement si  $\phi_\sigma(\kappa) = \kappa$ . Nous allons donc utiliser la méthode classique des limites de Césaro pour construire la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov (paragraphe 4.5).

Avant d'aborder la construction des points fixes, nous allons introduire deux objets combinatoires, aux paragraphes 4.2 et 4.3, qui sont les plus longs chemins sur la grille et les *animaux de grille* qui seront utiles pour établir une limite hydrodynamique sur les instants de départ d'un système de file d'attente en tandem. Ceci nous assurera la non-trivialité des points fixes construits au paragraphe 4.5.

## 4.2 Plus long chemin

Soient  $(n, k)$  et  $(n', k')$  deux points de  $\mathbb{Z}^2$  avec  $n \leq n'$  et  $k \leq k'$ . Une suite  $\{(n_1, k_1) \dots, (n_r, k_r)\}$  de points dans  $\mathbb{Z}^2$  forme un chemin croissant de  $(n, k)$  à  $(n', k')$ , si

(i)  $(n_1, k_1) = (n, k)$  et  $(n_r, k_r) = (n', k')$ ,

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

(ii) les pas sont de la forme  $(n_i, k_i) \rightarrow (n_i + 1, k_i)$  ou  $(n_i, k_i) \rightarrow (n_i, k_i + 1)$  ;  
 On notera  $\Pi_{(n,k) \rightarrow (n',k')}$  l'ensemble de ces chemins de  $(n, k)$  à  $(n', k')$ .

Pour tout ensemble  $\xi \subset \mathbb{Z}^2$ , nous définissons le poids  $S(\xi)$  de  $\xi$  par

$$S(\xi) = \sum_{(n,k) \in \xi} s(n, k).$$

On peut de la sorte définir le chemin de poids maximal sur  $\Pi_{(n,k) \rightarrow (n',k')}$  par

$$T((n, k); (n', k')) = \max_{\pi \in \Pi_{(n,k) \rightarrow (n',k')}} S(\pi). \quad (4.6)$$

Nous noterons  $T(n, k)$  pour  $T((1, 1); (n, k))$ . Nous allons, maintenant, donner les hypothèses probabilistes qui permettent de prouver une loi des grands nombres pour le temps mis par un client pour progresser dans le système.

Nous supposons que la suite des services  $\{s(n, k), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  est i.i.d. et que la condition suivante est vérifiée,

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(s(0, 0) \geq s)^{1/2} ds < \infty. \quad (4.7)$$

Cette condition a été introduite pour la première fois dans [67], dans le cadre des animaux de grille. La condition (4.7) est plus forte que la condition d'existence de second moment mais plus faible que la condition

$$\mathbb{E}s(0, 0)^2 (\log^+ s(0, 0))^{2+\epsilon} < \infty, \quad \epsilon > 0,$$

requis dans [5]. En résumé,

$$\mathbb{E}s(0, 0)^2 (\log^+ s(0, 0))^{2+\epsilon} < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \mathbb{P}(s(0, 0) \geq s)^{1/2} ds < \infty \Rightarrow \mathbb{E}s(0, 0)^2 < \infty.$$

Il nous reste ensuite à se donner des conditions aux limites. Deux cas sont particulièrement intéressants à examiner, ils ont été introduits dans [5] :

1. *Le quadrant.* Dans ce cas, nous supposons que  $D(n, k) = 0$  pour  $n \leq 0$  ou  $k \leq 0$ . Cette condition correspond au cas saturé, tous les clients, numérotés sur  $\mathbb{N}^*$ , sont présents dans le système à l'instant 0, le client 1 commence son service à la file 1.
2. *Le demi-plan.* Dans ce cas, nous supposons  $D(n, 0) = A_n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Cette condition correspond au cas d'un système de files d'attente en tandem où le processus des arrivées à la file 1 est donné par le processus  $\mathcal{A} = \{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

### 4.3 Animaux de grille

Pour prouver une loi des grands nombres sur les départs dans les contextes du quadrant et du demi-plan définis plus haut, nous allons conjuguer un argument de sur-additivité pour prouver l'existence de la limite avec des résultats sur les animaux de grille pour assurer la finitude de cette limite. Le modèle d'animaux sur la grille a été étudié dans [23, 36].

### 4.3. Animaux de grille

**Définition 4.3.1.** *Un animal de grille  $\xi$  sur  $\mathbb{Z}^2$  est une sous-partie connexe de  $\mathbb{Z}^2$ . La taille d'un animal, notée  $|\xi|$ , est le nombre de sommets contenus dans  $\xi$  et son poids, noté  $S(\xi)$ , est la somme des poids de ses sommets.*

Notons  $A(n)$  l'ensemble des animaux de taille  $n$  contenant le point  $(1, 1)$ . Comme pour les chemins, nous pouvons définir le poids d'un animal de grille glouton  $N(n)$  de taille  $n$  de la manière suivante :

$$N(n) = \max_{\xi \in A(n)} S(\xi).$$

Soit  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$ , notons  $\hat{s}(n, k) = \min[s(n, k), (\max(|n|, |k|)^{1/4})]$ . Pour tout animal  $\xi$  de  $\mathbb{Z}^2$ , nous définissons les analogues tronqués de  $S(\xi)$  par

$$\hat{S}(\xi) = \sum_{(n,k) \in \xi} \hat{s}(n, k).$$

Rappelons, tout d'abord, le résultat proposé dans [23] et repris dans [67], donnant le recouvrement d'un animal par des boules :

**Lemme 4.3.2.** *Soient  $\xi \in A(n)$  et  $p \in ]0, 1[$ . Fixons  $l = \lfloor p^{-1/2} \rfloor$  et  $r = \lfloor 2n/l \rfloor (\leq 2n\sqrt{p})$ . Il existe au plus  $9^{2n\sqrt{p}}$  ensembles  $\{u_0, \dots, u_r\}$  de points de  $\mathbb{Z}^2$ , avec  $u_0 = (0, 0)$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\|u_i - u_{i-1}\| \leq 1$ , tels que*

$$\xi \subset \cup_{i=0}^r B(lu_i, 2l).$$

*De plus, l'ensemble  $\cup_{i=0}^r B(lu_i, 2l)$  contient au plus  $3n\sqrt{p}(9p^{-1/2})^2$  points à coordonnées entières.*

**Théorème 4.3.3.** [68] *Pour  $\{s(n, k), (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$  i.i.d. vérifiant (4.7), il existe une constante  $c < \infty$  telle que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n} \leq c \int_0^\infty \mathbb{P}(s(0, 0) \geq s)^{1/2} ds, \text{ p.s.} \quad (4.8)$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \max_{\xi \in A(n)} S(\xi) - \hat{S}(\xi) \right) = 0, \text{ p.s.} \quad (4.9)$$

*Démonstration.* Nous ne donnerons dans la suite qu'une majoration, uniformément en  $n$ , de  $\mathbb{E} \frac{N(n)}{n}$ . Pour montrer la majoration presque sûre, l'argument est technique et repose essentiellement sur des comparaisons avec une suite sur-additive.

Commençons par prouver le résultat dans le cas où la suite (double)  $\{s(n, k), n, k \in \mathbb{Z}\}$  est i.i.d. de loi commune Bernoulli de paramètre  $p$ . Pour éviter toutes confusions, nous noterons  $\mathbb{P}_{Ber(p)}$ , lorsque l'on s'intéresse à ce cas de figure. Nous distinguerons deux cas :

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

1. si  $n\sqrt{p} \leq 1$ , alors

$$p^{-1/2} \mathbb{E}_{Ber(p)} \frac{N(n)}{n} \leq \frac{1}{n\sqrt{p}} \mathbb{E}_{Ber(p)} \sum_{v=(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2, \|v\| < n} s(v) \leq \frac{(2n)^2 p}{n\sqrt{p}} \leq 4.$$

2. Supposons  $n\sqrt{p} > 1$ , soit  $s > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Ber(p)} \left( \frac{N(n)}{n\sqrt{p}} \geq s \right) &= \mathbb{P}_{Ber(p)} \left( \max_{\xi \in A(n)} \sum_{v \in \xi} s(v) \geq n\sqrt{p}s \right) \\ &\leq \sum_{u_0, \dots, u_r} \mathbb{P}_{Ber(p)} \left( \sum_{v \in \cup_{i=0}^r B(lu_i, 2l)} s(v) \geq n\sqrt{p}s \right) \\ &\leq \sum_{u_0, \dots, u_r} e^{-n\sqrt{p}s} \mathbb{E}_{Ber(p)} \left[ \exp \left( \sum_{v \in \cup_{i=0}^r B(lu_i, 2l)} s(v) \right) \right] \\ &\leq \sum_{u_0, \dots, u_r} e^{-n\sqrt{p}s} [\mathbb{E}_{Ber(p)} e^{s(0,0)}]^{3n\sqrt{p}(9p^{-1/2})^2} \\ &\leq 9^{2n\sqrt{p}} e^{-n\sqrt{p}s} \left( (1-p+ep)^{1/p} \right)^{3n\sqrt{p}(9)^2}. \end{aligned}$$

Pour  $y = n\sqrt{p}$  suffisamment grand, on vérifie que

$$9^{2n\sqrt{p}} e^{-n\sqrt{p}s} \left( (1-p+ep)^{1/p} \right)^{3n\sqrt{p}(9)^2} \leq 1.$$

Par conséquent, il existe  $c$  tel que  $p^{-1/2} \mathbb{E}_{Ber(p)} \left( \frac{N(n)}{n} \right) \leq c$  uniformément en  $n$  et  $p$ .

Considérons, maintenant, la loi de  $s(0,0)$  vérifiant la condition (4.7). Pour tout  $\xi \in A(n)$ , on a

$$S(\xi) = \int_0^\infty \#\{v \in \xi, s(v) > x\} dx,$$

où  $\#$  désigne le cardinal d'un ensemble, de telle sorte que

$$N(n) = \max_{\xi \in A(n)} \int_0^\infty \#\{v \in \xi, s(v) > x\} dx \leq \int_0^\infty \left[ \max_{\xi \in A(n)} \#\{v \in \xi, s(v) > x\} \right] dx.$$

En remarquant que les variables aléatoires  $\{\mathbb{1}_{X_v > x}, v \in \mathbb{Z}^2\}$  sont i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre  $\mathbb{P}(s(0,0) > x)$ , on a

$$\mathbb{E}N(n) \leq cn \int_0^\infty \mathbb{P}(s(0,0) > x)^{1/2} dx.$$

Il nous reste, maintenant, à prouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \max_{\xi \in A(n)} S(\xi) - \widehat{S}(\xi) \right) = 0.$$

#### 4.4. Limite hydrodynamique

Pour ce faire, commençons par appliquer (4.8) en remplaçant  $s(n, k)$  par  $[s(n, k) - y]^+$ , pour  $y > 0$ , ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{\xi \in A(n)} \sum_{(n,k) \in \xi} [s(n, k) - y]^+ \leq c \int_y^\infty \mathbb{P}(s(0, 0) \geq s)^{1/2} ds .$$

Si la condition (4.7) est vérifiée pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $y > 0$  tel que

$$c \int_y^\infty \mathbb{P}(s(0, 0) \geq s)^{1/2} ds \leq \epsilon .$$

Pour  $\max(|n|, |k|) \geq y^4$ , nous vérifions que  $s(n, k) - \hat{s}(n, k) \leq [s(n, k) - y]^+$ , soit

$$\begin{aligned} & \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left( \max_{\xi \in A(m)} S(\xi) - \widehat{S}(\xi) \right) \\ & \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \max_{\xi \in A(m)} \left( \sum_{\max(|n|, |k|) < y^4} [s(n, k) - \hat{s}(n, k)] + \sum_{\max(|n|, |k|) \geq y^4} [s(n, k) - y]^+ \right) \leq \epsilon . \end{aligned}$$

En effet, la première somme est finie, et la deuxième est majorée par  $\epsilon$  d'après ce qui précède.  $\square$

Nous exploiterons ce résultat dans la suite pour majorer la borne supérieure du poids d'un plus long chemin de longueur  $O(n)$  en construisant un animal de grille qui le contient et qui a une taille de l'ordre de  $n$ .

#### 4.4 Limite hydrodynamique

Le premier résultat que nous présentons donne la limite hydrodynamique du poids du plus long chemin dans une direction donnée  $x$ , c'est-à-dire une loi des grands nombres sur la variable  $T(\lfloor xk \rfloor, k)$ , lorsque  $k$  tend vers l'infini. Nous utiliserons, ensuite, ce résultat pour avoir une loi des grands nombres pour  $D(0, k)$ , l'instant de départ du client 0 de la file  $k$  lorsque le nombre de files (à l'équilibre) devient grand.

**Le quadrant.** Soient  $l, m \in \mathbb{N}$  tels que  $l < m$ , on définit

$$X(l, m) = T((ln, lk); (mn, mk)) - s(ln, lk) .$$

En tenant compte des propriétés de la suite  $\{s(n, k), (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ , nous vérifions aisément que :

*Positivité* :  $X(l, m) \geq 0, 0 \leq l < m$  ;

*Sur-additivité* :  $X(l, r) \geq X(l, m) + X(m, r), 0 \leq l < m < r$  ;

*Stationnarité* :  $\{X(j+l, j+m), 0 \leq l < m\}$  a la même distribution pour tout  $j \geq 0$  ;

*Indépendance* :  $X(l, m)$  et  $X(r, s)$  sont indépendantes pour  $0 \leq l < m \leq r < s$ .

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

Le lemme suivant permet l'utilisation des animaux de grille pour prouver une loi des grands nombres pour les plus longs chemins sur  $\mathbb{Z}^2$ .

**Lemme 4.4.1.** [68] Soit  $\pi \in \Pi_{(n,k) \rightarrow (n_1,k_1)}$ , où  $n_1 \leq n_2$  et  $k_1 \leq k_2$  et soit  $R = |n_2| + |k_2| + |n_1| + |k_1|$ , on a

- (i) La longueur d'un chemin  $\pi \in \Pi_{(n_1,k_1) \rightarrow (n_2,k_2)}$  est égale à  $|\pi| = (n_2 - n_1) + (k_2 - k_1) \leq R$ ,
- (ii) Pour tout point  $(i, j) \in \pi$ ,  $\max(|i|, |j|) \leq \max(|n_2|, |k_2|, |n_1|, |k_1|) \leq R$ ,
- (iii) Il existe un animal  $\xi$  de taille  $R$  tel que  $\pi \subset \xi$ .

**Théorème 4.4.2.** [5] Supposons les services (poids des sites) i.i.d. de loi commune vérifiant la condition (4.7), et soit  $\mu^{-1} = \mathbb{E}s(0,0)$ , alors il existe  $\gamma(x)$  sur  $[0, \infty[$ , telle que pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(\lfloor xk \rfloor, k)}{k} = \gamma(x), \text{ p.s. et en } L_1, \quad (4.10)$$

avec, pour  $n, k \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}T(n, k) \leq k\gamma(n/k) + \mu^{-1}.$$

De plus, la fonction  $\gamma$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\gamma$  est concave avec  $\gamma(0) = 1/\mu$ ,
- (ii) pour  $x \geq 0$  et  $y > 0$ , on a  $\gamma(x+y) - \gamma(x) \geq y/\mu$ ,
- (iii)  $x\gamma(1/x) = \gamma(x)$ ,  $x > 0$ .
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma'(x) = 1/\mu$ .

*Démonstration.* D'après les propriétés précédentes, la suite  $\{X(m, n), 0 \leq m < n\}$  satisfait aux hypothèses du théorème sur-additif ergodique. De plus, grâce au lemme 4.4.1 on a

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} X(0, m) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} N(mn + mk + 1) < \infty,$$

il existe donc  $\eta(n, k) < \infty$  tel que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} X(0, m) = \eta(n, k) \text{ p.s. et en } L^1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} T(mn, mk) = \eta(n, k) \text{ p.s. et en } L^1.$$

Soit  $x = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$ , on vérifie que

$$T(n \lfloor m/k \rfloor, k \lfloor m/k \rfloor) \leq T(\lfloor (n/k)m \rfloor, m) \leq T(n \lfloor (m/k) \rfloor + 1, k \lfloor (m/k) \rfloor + 1),$$

ainsi, en posant  $\gamma(x) = \frac{1}{k} \eta(n, k)$ , la limite s'étend à tous les rationnels, soit

$$\gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T(mn, mk)}{km} \text{ p.s. et en } L^1, \text{ pour tout } n, k \text{ tel que } x = \frac{n}{k}.$$

#### 4.4. Limite hydrodynamique

En prenant des espérances dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\mathbb{E}T(n, k) \leq \eta(n, k) = k\gamma\left(\frac{n}{k}\right).$$

Nous voulons, maintenant, prouver que  $\gamma(x)$  est concave sur les rationnels, ce qui permettra de l'étendre aux irrationnels.

Soient  $x = \frac{n}{k}$ ,  $y = \frac{n'}{k}$  et  $t = \frac{a}{b}$  des nombres rationnels. D'après la figure 4.1, nous remarquons que

$$T\left((an+(b-a)n')m, (bk)m\right) \geq T\left((an)m, (ak)m\right) + T\left((an)m+1, (ak)m+1; (an+(b-a)n')m, (bk)m\right).$$

En tenant compte de la stationnarité des variables  $s(i, j)$ , nous avons

$$\mathbb{E}T\left((an+(b-a)n')m, (bk)m\right) \geq \mathbb{E}T\left((an)m, (ak)m\right) + \mathbb{E}T\left((b-a)n'm, (b-a)km\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \gamma(tx + (1-t)y) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}T((an+(b-a)n')m, (bk)m)}{(bk)m} \\ &\geq \frac{a}{b} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}T((an)m, (ak)m)}{(ak)m} + \frac{b-a}{b} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}T((b-a)n'm, (b-a)km)}{(b-a)km} \\ &= t\gamma(x) + (1-t)\gamma(y). \end{aligned}$$

Comme  $\gamma$  est concave et croissante (propriété (ii)), elle est continue et sa définition comme limite s'étend aux irrationnels.

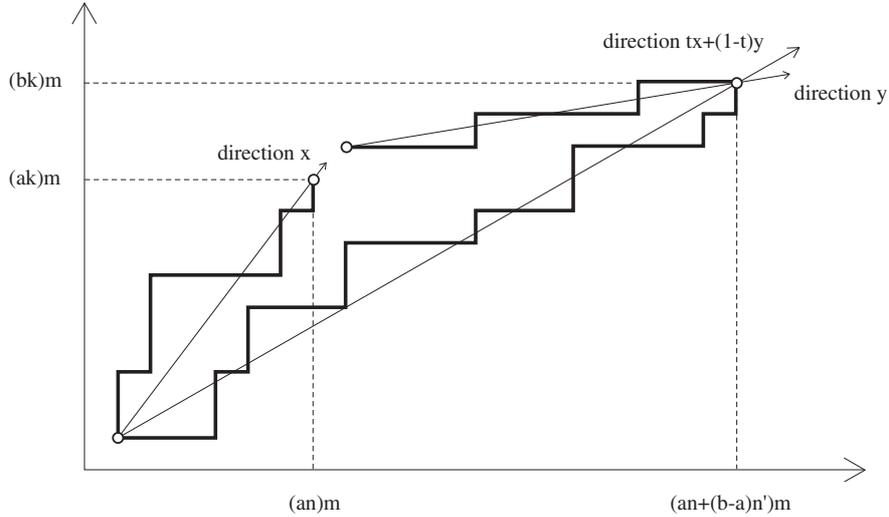


FIG. 4.1 – Concavité de  $\gamma$

La propriété (i) est une application directe de la loi des grands nombres. Quant à la propriété (ii) il suffit de remarquer que

$$T(\lfloor(x+y)k\rfloor, k) \geq T(\lfloor xk\rfloor, k) + \sum_{i=\lfloor xk\rfloor+1}^{\lfloor(x+y)k\rfloor} s(i, k).$$

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

Enfin, étant donnée l'interprétation de  $T(n, k)$  en terme de plus long chemin, nous pouvons en déduire que  $T(n, k) \sim T(k, n)$  ce qui implique la propriété (iii). En tenant compte de (i), on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = 1/\mu .$$

□

**Le demi-plan.** Dans le cas du demi-plan, nous désirons avoir une loi des grands nombres sur l'instant de départ du client 0 de la file  $k$ , plus précisément nous voulons calculer la limite suivante  $\lim_{k \rightarrow \infty} D(0, k)/k$ . En effet, nous avons prouvé dans le cas du quadrant que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(\lfloor xk \rfloor, k)/k = \gamma(x) < \infty \text{ p.s. et en } L_1 .$$

Par ailleurs, l'instant  $D(0, k)$  est donné par

$$\begin{aligned} D(0, k) &= \sup_{n \geq 0} [T((-n, 0), (0, k)) - \sum_{i=1}^n a_{-i}] \\ &= \sup_{x \geq 0} [T((- \lfloor xk \rfloor, 0); (0, k)) - \sum_{i=1}^{\lfloor xk \rfloor} a_{-i}] . \end{aligned}$$

Ce qui suggère le résultat suivant [5],

**Théorème 4.4.3.** [5] *Supposons  $\{s(n, k), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*\}$  i.i.d. de moyenne  $1/\mu$  vérifiant la condition (4.7), et que la suite  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  des inter-arrivées est i.i.d. d'intensité  $\lambda < \mu$  où la fonction  $\gamma$  est celle définie dans (4.10), alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(0, k)/k = \sup_{x \geq 0} \{\gamma(x) - \lambda^{-1}x\}, \text{ p.s. et en } L_1 .$$

Nous commençons par introduire quelques remarques et notations. Tout d'abord, grâce au lemme 4.4.1 et au théorème 4.3.3, on a  $\hat{\gamma}(x) = \gamma(x)$  où  $\hat{\gamma}(x)$  est la fonction de croissance obtenue quand les poids  $s(n, k)$  sont remplacés par les poids tronqués  $\hat{s}(n, k)$ . Ensuite, notons

$$V_x(k) = T((- \lfloor xk \rfloor, 0), (0, k)) - \sum_{i=1}^{\lfloor xk \rfloor} a_{-i}, \text{ pour tout } x \geq 0 .$$

Par le *théorème de Birkhoff*, nous vérifions que  $\lim V_x(k)/k = \gamma(x) - x/\lambda$ . Posons  $V(k) = \sup_{x > 0} V_x(k)$  et  $\delta(x) = \gamma(x) - \lambda^{-1}x$ , d'après les propriétés de  $\gamma$ , il existe  $x^* > 0$  tel que  $\delta(x^*) = \sup_{x > 0} \delta(x)$ . En utilisant, le fait que  $V(k) \geq V_{x^*}(k)$  et également que  $V_{x^*}(k)/k$  converge presque sûrement vers  $\delta(x^*)$ , on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} V(k)/k \geq \delta(x^*) .$$

Reste à prouver la majoration de la limite supérieure. Tout d'abord, nous allons prouver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \leq x^*} [V_x(k)/k] = \sup_{x \leq x^*} \{\gamma(x) - \lambda^{-1}x\}, \text{ p.s.} \quad (4.11)$$

et ensuite nous vérifierons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x > x^*} [V_x(k)/k] = 0, \text{ p.s.} \quad (4.12)$$

Pour ce faire, nous utiliserons l'inégalité de concentration suivante qui est une conséquence du Théorème 8.1.1. de [96]. L'énoncé suivant a été prouvé dans [67],

**Lemme 4.4.4.** *Soit  $L > 0$ , et  $\{X_i, i = 1 \dots N\}$  une famille de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$\mathbb{P}(0 \leq X_i \leq L) = 1, \forall i.$$

*Soit  $\mathcal{C} \subset \{1, \dots, N\}$ , tel que*

$$\max_{C \in \mathcal{C}} |C| \leq r,$$

*et soit*

$$Z = \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{i \in C} X_i,$$

*alors, pour tout  $u > 0$*

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}Z| \geq u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{16rL^2} + 64\right).$$

En appliquant cette inégalité à notre contexte, et en tenant compte du lemme 4.4.1, avec  $\mathcal{C} = \Pi_{(n_1, k_1) \rightarrow (n_2, k_2)}$ ,  $L = R^{1/4}$  et  $r = R$ , on a

**Lemme 4.4.5.** [67] *Soit  $n_1 \leq n_2$  et  $k_1 \leq k_2$ , posons  $R = |n_1| + |n_2| + |k_1| + |k_2| > 0$ . Pour  $u > 0$ , on a*

$$\mathbb{P}(|\hat{T}((n_1, k_1); (n_2, k_2)) - \mathbb{E}\hat{T}((n_1, k_1), (n_2, k_2))| \geq u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{16rR^{3/2}} + 64\right).$$

*Démonstration du théorème 4.4.3.* Pour prouver les limites (4.11) et (4.12), nous allons montrer que d'une part

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_{0 \leq n \leq kx^*} [T((-n, 0); (0, k)) - \sum_{i=0}^n a_{-i}] = \max_{0 \leq x \leq x^*} \delta(x) \text{ p.s.} \quad (4.13)$$

et d'autre part

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sup_{n > kx^*} [T((-n, 0); (0, k)) - \sum_{i=0}^n a_{-i}] = 0 \text{ p.s.} \quad (4.14)$$

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

*Preuve de (4.13).* Grâce au lemme 4.4.1 et à la relation (4.9), on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_{0 \leq n \leq kx^*} [T((-n, 0); (0, k)) - \hat{T}((-n, 0); (0, k))] = 0 \text{ p.s. .}$$

Par Birkhoff, on vérifie aisément que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_{0 \leq n \leq kx^*} \left[ \sum_{i=0}^n a_{-i} - n/\lambda \right] = 0 \text{ p.s. .}$$

Enfin, remarquons que par application du lemme 4.4.5 on a

$$\mathbb{P}(|\hat{T}((-n, 0); (0, k)) - \mathbb{E}\hat{T}((-n, 0); (0, k))| > k\epsilon) \leq \exp\left(-\frac{(\epsilon k)^2}{16R^{5/2}} + 64\right).$$

Nous pouvons conclure par le *lemme Borel-Cantelli* qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_{0 \leq n \leq kx^*} [\mathbb{E}\hat{T}((-n, 0); (0, k)) - n/\lambda] = \max_{0 \leq x \leq x^*} \delta(x) \text{ p.s. ,} \quad (4.15)$$

Grâce à la propriété de sur-additivité, on vérifie que  $\mathbb{E}\hat{T}((-n, 0); (0, k)) \leq \gamma\left(\frac{n+1}{k}\right)$ , soit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq n \leq kx^*} \frac{\mathbb{E}[\hat{T}((-n, 0); (0, k))] - n/\lambda}{k} \leq \max_{0 \leq x \leq x^*} \delta(x),$$

d'où (4.13).

*Preuve de (4.14).* Nous allons prouver la relation suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sup_{n > kx^*} [\mathbb{E}\hat{T}((-n, 0); (0, k)) - \nu k]^+ = 0 \text{ p.s. .}$$

Comme  $\mathbb{E}\hat{T}((-n, 0); (0, k)) - \nu n \leq k\gamma\left(\frac{n+1}{k}\right) - \nu n \leq 0$ , nous déduisons (4.14).

Pour la convergence  $L_1$  [5, 67], il suffit de rajouter l'hypothèse qu'il existe  $\nu$  tel que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x)/x < \nu < 1/\lambda$  avec

$$\mathbb{E} \sup_{n \geq 0} \left[ \nu n - \sum_{i=1}^n a_{-i} \right] < \infty.$$

□

**Exemple** Revenons à la file M/M/1 traitée au chapitre 2, nous supposons les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\{s(n, 1), n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{s(n, k), n \in \mathbb{Z}\}$  i.i.d. indépendantes les unes des autres de lois marginales

$$\mathbb{P}(s(0, j) > u) = \exp(-\mu u), \quad j = \{1, \dots, k\}; \quad \mathbb{P}(a_0 > u) = \exp(-\lambda u), \quad \forall u \in \mathbb{R}_+,$$

## 4.5. Existence de points fixes

---

avec  $\lambda < \mu$ . Les temps de séjour du client 0 aux files successives  $v(0, j)$ ,  $j = 0 \cdots k$  sont indépendants de loi marginale

$$\mathbb{P}(v(0, 1) > u) = \exp [-(\mu - \lambda)u], \quad \forall u \in \mathbb{R}_+ .$$

A partir de (4.2) et en utilisant les mêmes techniques de calculs qu'au paragraphe 1.2.2, nous retrouvons la formule suivante [71, 93],

$$\sum_{j=1}^k v(0, j) = \sup_{x>0} \{ \mathcal{D}_k(\lfloor xk \rfloor) - T(\lfloor xk \rfloor, k) \} . \quad (4.16)$$

D'après le théorème de Burke 2.2.1, le processus de sortie est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Grâce à la preuve précédente, nous pouvons inverser limite et supremum de telle sorte qu'en divisant par  $k$  et en faisant tendre  $k$  vers l'infini, on obtient

$$\mathbb{E}v(0, 1) = \sup_{x>0} \{ x/\lambda - \gamma(x) \} . \quad (4.17)$$

En inversant la transformée de Legendre précédente, on a

$$\gamma(x) = \mu^{-1}(1 + \sqrt{x})^2 .$$

Ce résultat a été prouvé par Rost [85] dans le cadre de systèmes de particules en interaction, nous pouvons le retrouver également dans [41, 90].

Nous pouvons aussi nous intéresser à la file Géo/Géo/1 décrite au chapitre 3, c'est-à-dire nous supposons les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\{s(n, 1), n \in \mathbb{Z}\}, \dots, \{s(n, k), n \in \mathbb{Z}\}$  i.i.d. indépendantes les unes des autres de lois marginales

$$\mathbb{P}(s(0, j) > n) = (1 - q)^n, \quad j = \{1, \dots, k\}; \quad \mathbb{P}(a_0 > n) = (1 - p)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ,$$

avec  $p < q$ . Alors de la même manière que dans le cas de la file M/M/1, nous vérifions, grâce au Théorème 3.1.2 que,

$$\gamma(x) = \frac{q}{1 - q}(1 + x + 2\sqrt{x/q}) .$$

Le cas géométrique est traité dans [21, 50] et par Seppäläinen [88].

Les cas exponentiels et géométriques représentent les deux seuls cas où nous disposons d'une formule explicite pour  $\gamma$ .

## 4.5 Existence de points fixes

Nous reprenons dans cette partie les arguments de [64, 65]. Cependant, nous ne traiterons pas les propriétés d'unicité et de convergence des points fixes. Soit une file d'attente ayant une salle d'attente infinie et suivant la discipline PAPS. Supposons que la suite des services  $s = \{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  vérifie

$$\mathbb{E}s_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbb{P}(s_0 = \mathbb{E}s_0) < 1, \quad \int_0^\infty \mathbb{P}(s_0 \geq u)^{1/2} du < \infty ,$$

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

**Théorème 4.5.1.** [65] *Etant donnée une suite i.i.d. de temps de service  $s$ , il existe une suite ergodique d'inter-arrivées  $a = \{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  indépendante de  $s$  vérifiant*

$$\mathbb{E}s_0 < \mathbb{E}a_0 < \infty ,$$

telle que la suite des inter-départs correspondante

$$d = \{d_n, n \in \mathbb{Z}\} \sim a = \{a_n, n \in \mathbb{Z}\} .$$

*Démonstration.* Soit le quadruplet  $(a^k, s^k, w^k, a^{k+1})$ , défini au paragraphe 4.1, de loi  $\mu_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons  $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$  par  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k$ . La loi  $\mu_n$  peut être interprétée comme la loi de  $(a^N, s^N, w^N, a^{N+1})$  où  $N$  est une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $\{0, \dots, n-1\}$  et indépendante de toutes les autres variables aléatoires de notre problème.

Soit  $(\hat{a}^n, \hat{s}^n, \hat{w}^n, \hat{a}^{n+1})$  de loi  $\mu_n$ , on a

$$\hat{s}^n \sim \sigma, \hat{s}^n \amalg \hat{a}^n, \hat{w}^n = \psi(\hat{a}^n, \hat{s}^n), \hat{a}^{n+1} = \phi(\hat{a}^n, \hat{s}^n) .$$

Nous allons prouver que la suite  $\mu_n$  est tendue. Soit  $\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}, \mu_n^{(3)}$  et  $\mu_n^{(4)}$  les lois marginales de  $\mu_n$  correspondant aux lois respectivement  $\hat{a}^n, \hat{s}^n, \hat{w}^n, \hat{a}^{n+1}$ . Comme  $\mu_n^{(3)}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$  et que  $\mu_n^{(2)} = \sigma$ , alors il suffit de s'intéresser à  $\mu_n^{(1)}$  et  $\mu_n^{(4)}$ .

Par le schéma de Loynes, on a  $\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(4)} \in \mathcal{M}_s^{1/\lambda}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$ . Soit  $\epsilon > 0$ , posons  $K = \prod_{i \in \mathbb{Z}} [0, 2^{|i|+2}/\epsilon]$ . D'après le *théorème de Tychonoff*, l'ensemble  $K$  est compact pour la topologie produit. Nous vérifions que si  $\mu \in \mathcal{M}_s^{1/\lambda}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$  alors  $\mu\{K\} \geq 1 - \epsilon/\lambda$ . Nous en déduisons que  $\{(\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(4)}), n \in \mathbb{Z}\}$  est tendue. D'après le *théorème de Prohorov*, la suite  $\{\mu_n, n \in \mathbb{Z}\}$  admet une sous-suite qui converge faiblement vers une limite  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}})$ .

Soit le quadruplet  $(\hat{a}, \hat{s}, \hat{w}, \hat{d}) \sim \mu$ , ceci entraîne que  $\hat{s} \sim \sigma$ ,  $\hat{a} \amalg \hat{s}$ . Rappelons que

$$\hat{d}^n = \hat{a}^{n+1} = \hat{a}^n + L\hat{w}^n - \hat{w}^n + L\hat{s}^n - \hat{s}^n ,$$

par continuité, on a

$$\hat{d} = \hat{a} + L\hat{w} - \hat{w} + L\hat{s} - \hat{s} .$$

Montrons que  $\hat{d} \sim \hat{a}$ . Soit  $\eta$  la loi de  $a^0$ . Alors, par définition,  $a^n \sim \phi_\sigma^n(\eta)$  et  $\hat{a}^n \sim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_\sigma^i(\eta) = \eta_n$ . Nous avons

$$\hat{d}^n = \phi(\hat{a}^n, \hat{s}^n) \sim \phi_\sigma(\eta_n) = \eta_n + \frac{1}{n}(\phi_\sigma^n(\eta) - \eta) ,$$

où  $\frac{1}{n}(\phi_\sigma^n(\eta) - \eta)$  converge en variation totale et donc faiblement vers la mesure nulle. De plus, il y a une sous-suite pour laquelle  $\eta_n$  et  $\phi_\sigma(\eta_n)$  convergent, pour la topologie faible, respectivement vers les lois de  $\hat{a}$  et  $\hat{d}$ .

Il nous reste à prouver que  $\hat{d} = \phi(\hat{a}, \hat{s})$ . Pour ce faire, nous allons justifier le fait que  $\hat{w} = \psi(\hat{a}, \hat{s})$ .

## 4.5. Existence de points fixes

Rappelons que  $\widehat{d}^n = (\widehat{a}^n - \widehat{s}^n - \widehat{w}^n)^+ + L\widehat{s}^n$ , par continuité, nous déduisons que

$$\widetilde{d} = (\widehat{a} - \widehat{s} - \widetilde{w})^+ + L\widehat{s}.$$

D'après (4.2), pour  $k < l - 1$ , on a

$$\max_{k \leq j \leq l} \sum_{i=j}^{l-1} (\widehat{s}_i^n - \widehat{a}_i^n) \leq \widehat{w}_l^n = \max_{k \leq j \leq l} \sum_{i=j}^{l-1} (\widehat{s}_i^n - \widehat{a}_i^n) \vee [\widehat{w}_k^n + \sum_{i=k}^{l-1} (\widehat{s}_i^n - \widehat{a}_i^n)].$$

De nouveau par continuité, on obtient

$$\max_{k \leq j \leq l} \sum_{i=j}^{l-1} (\widehat{s}_i - \widehat{a}_i) \leq \widetilde{w}_l = \max_{k \leq j \leq l} \sum_{i=j}^{l-1} (\widehat{s}_i - \widehat{a}_i) \vee [\widetilde{w}_k + \sum_{i=k}^{l-1} (\widehat{s}_i - \widehat{a}_i)].$$

Ainsi, grâce à ce qui précède

$$\psi(\widehat{a}, \widehat{s}) \leq \widetilde{w}, \quad L\widehat{s} \leq \widetilde{d} \leq \phi(\widehat{a}, \widehat{s}).$$

En faisant tendre  $k$  vers  $-\infty$  et en tenant compte du fait que  $\mathbb{E}a_0 > \mathbb{E}s - 0$ , nous vérifions que  $\widetilde{w}_k + \sum_{i=k}^{l-1} (\widehat{s}_i - \widehat{a}_i) \rightarrow -\infty$ , en probabilités. Soit

$$\widetilde{w}_l = \sup_{j \leq l} \sum_{i=j}^{l-1} (\widehat{s}_i - \widehat{a}_i) = \psi(\widehat{a}, \widehat{s})_l,$$

en d'autres termes, nous avons

$$\widetilde{w} = \phi(\widehat{a}, \widehat{s}), \quad \widetilde{d} = \psi(\widehat{a}, \widehat{s}).$$

Pour conclure, nous désirons prouver que lorsque  $\mathbb{P}\{\widetilde{w} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}\} > 0$ , alors le point fixe est non-trivial. Pour ce faire, nous allons prouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} w(0, i) = \sup_{x > 0} \{\gamma(x) - x/\lambda\} \text{ p.s.} \Rightarrow \widetilde{w}_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ p.s.}$$

Nous allons procéder par l'absurde, supposons que  $\mathbb{P}(\widetilde{w}_0 = +\infty) = a > 0$ . Prenons  $K > 0$  et  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $\mu_{f(n)}$  converge faiblement vers  $\mu$ , alors  $\widehat{w}_0^{f(n)}$  converge faiblement vers  $\widetilde{w}_0$ . Comme

$$\mathbb{P}(\widehat{w}_0^n \geq K) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(w(0, i) \geq K),$$

alors  $\forall b \in ]0, a[$ ,  $\exists N, \forall n \geq N$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(w(0, i) \geq K) \geq b.$$

## Chapitre 4. Points fixes pour la file ./GI/1

---

Nous définissons  $\Xi = \{n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{w(0,i) \geq K} \geq c\}$ , où  $0 < c < b < a$  et posons  $q = \mathbb{P}(\Xi)$ , on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{w(0,i) \geq K} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{w(0,i) \geq K} \right) \mathbb{1}_{\Xi} + \left( \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{w(0,i) \geq K} \right) \mathbb{1}_{\Xi^c} \leq n \mathbb{1}_{\Xi} + nc \mathbb{1}_{\Xi^c}.$$

En prenant les espérances dans l'inégalité précédente, nous vérifions que

$$nb \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(w(0,i) \geq K) \leq nq + n(1-q)c.$$

Ceci entraîne que  $q \geq (b-c)/(1-c) > 0$  pour tout  $K$ , ce qui contredit le fait que  $n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} w(0,i)$  converge p.s. vers une constante finie (Théorème 4.4.3).  $\square$

Nous avons pris le parti de ne pas présenter les résultats d'unicité et de convergence dans le cadre de cette thèse. Une preuve élégante de l'unicité est donnée dans [18]. La preuve de l'attraction du point fixe est basée sur un argument de couplage [81].

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des moyennes pour lesquelles la file admet un point fixe ergodique. Nous avons vu que  $\mathcal{S}$  était non vide (théorème 4.5.1). Dans [65], les auteurs prouvent certaines propriétés de  $\mathcal{S}$ . En particulier, l'ensemble  $\mathcal{S}$  est un fermé de  $]1/\mu, \infty[$ , où  $1/\mu$  est la moyenne des services, vérifiant

$$\inf\{u \in \mathcal{S}\} = 1/\mu, \quad \sup\{u \in \mathcal{S}\} = +\infty.$$

Pour finir, ils conjecturent que  $\mathcal{S} = ]1/\mu, \infty[$ . Ce résultat n'est donc qu'une réponse partielle à une conjecture figurant dans [5, 70]. En fait, l'ensemble  $\mathcal{S}$  est égal à l'image de  $\gamma'$ , la dérivée de  $\gamma$  définie dans (4.10). Pour prouver la conjecture  $\mathcal{S} = ]1/\mu, \infty[$ , il suffirait de prouver que  $\gamma'$  est continue.

# Chapitre 5

## Grandes Déviations

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Grandes déviations . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>5.2</b>	<b>Événements rares pour la file d'attente ././1 . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>5.3</b>	<b>Principe de grandes déviations pour le processus de charge . . . . .</b>	<b>92</b>
<b>5.4</b>	<b>Bande passante effective . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>5.5</b>	<b>Principe de grandes déviations pour les variables de sortie . . . . .</b>	<b>96</b>
5.5.1	Problème d'optimisation . . . . .	99
5.5.2	Existence de points fixes . . . . .	103

---

Nous présentons dans ce chapitre une extension du résultat de points fixes pour la file ././1, dans le cadre des grandes déviations. Nous nous inspirons de l'approche développée dans [38] qui fournit un résultat de points fixes pour la file d'attente avec services inutilisés. Plus précisément, si la suite des services vérifie un principe de grandes déviations, alors il existe une classe de suite des arrivées telle que la suite des départs vérifie un principe de grandes déviations avec la même fonction de taux que les arrivées. Dans [28], nous étendons ce résultat à notre modèle file d'attente/modèle de stockage, pour lequel nous prouvons qu'il existe une famille de variables d'entrée vérifiant un principe de grandes déviations de telle sorte que les variables de sortie vérifient également un principe de grandes déviations avec les mêmes fonctions de taux que les variables d'entrée.

### 5.1 Grandes déviations

Dans cette première partie, nous allons définir les grandes déviations d'une suite de variables aléatoires. Soit  $x = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. et soit  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  définie par  $X_n = \sum_{i=1}^n x_i$ . Si  $\mathbb{E}|x_0| < \infty$ , alors la suite  $x$  vérifie la *loi forte des grands nombres*, c'est-à-dire, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \mathbb{E}x_0 .$$

Nous pouvons, ensuite, nous intéresser aux fluctuations autour de cette moyenne. En effet, supposons  $\mathbb{E}x_0^2 < \infty$ , alors le *théorème central limite* nous donne les fluctuations,

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

d'ordre  $O(1/\sqrt{n})$ , de  $X_n/n$  autour de  $\mathbb{E}x_0$ . Plus précisément, la suite de variables aléatoires  $\sqrt{n}\left(\frac{X_n}{n} - \mathbb{E}x_0\right)$  converge en loi vers une loi normale centrée de même variance que  $x_0$ .

La théorie des grandes déviations s'intéresse aux grandes fluctuations de l'ordre de  $O(1)$ .

**Définition 5.1.1.** Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Hausdorff. Une fonction  $I : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  est une fonction de taux si  $I$  est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que les ensembles  $\{x : I(x) \leq \alpha\}$  sont fermés, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si, en plus, ces ensembles sont compacts alors on dit que  $I$  est une bonne fonction de taux.

**Définition 5.1.2.** Une suite  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$  vérifie un principe de grandes déviations de fonction de taux  $I : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , si pour tout borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{X}$ ,

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in \mathcal{B}^\circ} I(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(x_n \in \mathcal{B}) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(x_n \in \mathcal{B}) \leq - \inf_{x \in \overline{\mathcal{B}}} I(x), \end{aligned}$$

où les ensembles  $\mathcal{B}^\circ$  et  $\overline{\mathcal{B}}$  représentent respectivement l'intérieur et l'adhérence de  $\mathcal{B}$ .

Nous nous intéressons à des variables aléatoires réelles.

**Définition 5.1.3.** La log-transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle  $x$  est donnée par

$$\Lambda_X(\theta) = \log \mathbb{E}e^{\theta x}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

pouvant-être infinie.

Il n'est pas difficile, en utilisant respectivement l'inégalité de Hölder et le lemme de Fatou, de montrer que  $\Lambda_X$  est convexe, semi-continue inférieurement. Pour  $\theta$  à l'intérieur du domaine effectif de  $\Lambda_X$ , c'est-à-dire  $\{\theta \mid \Lambda_X(\theta) < \infty\}$ , on a

$$\Lambda'_X(\theta) = \frac{\mathbb{E}(x_0 e^{\theta x})}{e^{\Lambda_X(\theta)}}.$$

**Définition 5.1.4.** La transformée de Legendre (ou dual convexe) de  $\Lambda_X$  est donnée par

$$I_X(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta x - \Lambda_X(\theta)\}. \quad (5.1)$$

La fonction  $I_X$  est positive, convexe et semi-continue inférieurement. De plus, si la fonction  $\Lambda_X$  est finie au voisinage de l'origine alors

$$\Lambda'_X(0) = \mathbb{E}x_0, \quad I_X(\mathbb{E}x_0) = 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} I_X(x) &= \sup_{\theta \geq 0} \{\theta x - \Lambda_X(\theta)\} && \text{pour } x \geq \mathbb{E}x_0 \\ I_X(x) &= \sup_{\theta \leq 0} \{\theta x - \Lambda_X(\theta)\} && \text{pour } x \leq \mathbb{E}x_0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Un résultat classique en théorie des grandes déviations est le *théorème de Cramér* [25]. Nous énonçons ce résultat pour des variables réelles,

**Théorème 5.1.5.** *Si la suite  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est i.i.d. de log-transformée de Laplace  $\Lambda_X$  finie au voisinage de l'origine, alors la suite de variables aléatoires  $\{X_n/n, n \in \mathbb{Z}\}$ , où  $X_n = \sum_{i=1}^n x_i$ , satisfait un principe de grandes déviations avec la fonction de taux  $I_X$  définie dans (5.1) : pour tout fermé  $F$  de  $\mathbb{R}^d$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} I_X(x). \quad (5.3)$$

et pour tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \in O\right) \geq - \inf_{x \in O} I_X(x). \quad (5.4)$$

Les inégalités (5.3) et (5.4) sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure du principe de grandes déviations. Le théorème de Cramér s'applique à des variables aléatoires dont la log-transformée de Laplace n'est pas finie au voisinage de 0. Les différentes versions du théorème de Cramér figurent dans [26]. Un autre résultat utile consiste en la recherche de fonctions de taux pour un vecteur de variables aléatoires indépendantes,

**Théorème 5.1.6.** *Soient  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfaisant des principes de grandes déviations respectivement sur  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces de Hausdorff, avec les fonctions de taux  $I_X$  et  $I_Y$ . Supposons les deux suites indépendantes, la suite  $\{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  de fonction de taux*

$$I_{X,Y}(x, y) = I_X(x) + I_Y(y).$$

Dans tous les cas que nous traiterons dans la suite, nous n'établirons pas de principe de grandes déviations en partant de zéro, nous allons utiliser des résultats techniques sur les grandes déviations pour déduire des principes de grandes déviations en partant de variables dont on connaît les fonctions de taux. Plus précisément, étant donnée une suite de variables aléatoires vérifiant un principe de grandes déviations, nous pouvons obtenir des principes de grandes déviations pour une grande classe de suites obtenues via une fonction continue. Nous présentons le *principe de contraction* qui permet ceci.

**Théorème 5.1.7.** *Soit  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfaisant un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X}$  avec la fonction de taux  $I_X$ , et soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  une fonction continue. Alors la suite  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  définie par  $y_n = f(x_n)$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{Y}$  avec la fonction de taux*

$$I_Y(y) = \inf_{x, f(x)=y} I_X(x).$$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

Parfois la fonction  $f$  est "presque continue", c'est-à-dire que la suite  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  est proche d'une suite  $\{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$ , avec  $f$  continue.

**Définition-Proposition 5.1.8.** Soient  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  deux suites à valeurs dans  $\mathcal{X}$  muni de la norme  $\|\cdot\|$ . Elles sont dites exponentiellement équivalentes, si pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \log \mathbb{P}(\|x_n - y_n\| > \epsilon) = -\infty.$$

Dans ce cas, si  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfait un principe de grandes déviations alors il en est de même pour la suite  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ , de plus,  $I_X = I_Y$ .

**Théorème 5.1.9.** Si  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{X}$  avec la fonction de taux  $I_X$ , et si  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$  sont deux suites exponentiellement équivalentes, avec  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  continue, alors  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{Y}$  avec la fonction de taux

$$I_Y(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}, f(x)=y} I_X(x).$$

Nous avons présenté un aperçu de la théorie des grandes déviations, pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à [26].

## 5.2 Événements rares pour la file d'attente ././1

Rappelons que  $w_n$  est le temps d'attente du client  $n$  avant d'entamer son service (respectivement le niveau du stock à la fin du slot  $n$ ) est défini par

$$w_n = (w_{n-1} + s_{n-1} - a_{n-1})^+ = \sup_{m \leq n} \left[ \sum_{k=m}^{n-1} s_k - a_k \right]. \quad (5.5)$$

Nous supposons les variables d'entrée stationnaires et ergodiques. Sous la condition de stabilité  $\mathbb{E}s_0 < \mathbb{E}a_0$ , nous pouvons utiliser l'expression précédente pour donner le comportement asymptotique de  $w_n$  à l'aide des propriétés de grandes déviations des variables d'entrée  $a = \{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $s = \{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Nous commençons par examiner un exemple.

**Exemple** Supposons que  $a_n = 1$ , pour tout  $n$ , et que la suite  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est i.i.d. avec

$$\mathbb{P}(s_n = 2) = 1 - \mathbb{P}(s_n = 0) = p < \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, le processus  $\{w_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est un processus de naissance et de mort en temps discret de distribution stationnaire

$$\mathbb{P}(w_0 \geq q) = \left( \frac{p}{1-p} \right)^q,$$

## 5.2. Événements rares pour la file d'attente ././1

---

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(w_0 \geq nq) = -\delta q ,$$

où  $\delta = \log \frac{1-p}{p}$ .

Une approximation de ce type est vraie sous des hypothèses plus au moins générales pour une valeur de  $\delta$  qui dépend des variables d'entrée  $a$  et  $s$ . En fait, il a été prouvé dans [19, 32, 43] que la queue de distribution de la version stationnaire du processus de charge vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(w_0 \geq nq) = -\delta q . \quad (5.6)$$

Par commodité, nous réécrivons (5.6) de la manière suivante

$$\mathbb{P}(w_0/n \geq q) \asymp e^{-n\delta q} .$$

Nous allons donner une preuve heuristique de ce résultat, dans le cas où les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  sont i.i.d. mutuellement indépendantes avec

$$\Lambda_A(\theta) = \log \mathbb{E}e^{\theta a_0} , \quad \Lambda_S = \log \mathbb{E}e^{\theta s_0} ,$$

finies au voisinage de 0. Pour ce faire, posons  $x_n = s_n - a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $X_k = \sum_{i=1}^k x_{-i}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $w_0 = \sup_{k \geq 0} X_k$ , avec  $X_0 = 0$ . D'après le théorème de Cramér 5.1.5, les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  satisfont des principes de grandes déviations sur  $\mathbb{R}$  avec les fonctions de taux respectives  $I_A$  et  $I_S$  transformées de Legendre de  $\Lambda_A$  et  $\Lambda_S$ . Par conséquent, la suite  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  satisfait un principe de grandes déviations avec la fonction de taux  $I_X$ , transformée de Legendre de  $\Lambda_X(\theta) = \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta)$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(\frac{X_n}{n} > x) \asymp e^{-nI_X(x)}$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w_0 \geq nq) &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 0} X_k \geq nq) = \mathbb{P}(\cup_{k \geq 0} \{X_k \geq nq\}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k \geq nq) , \end{aligned}$$

car  $X_0 = 0$ . Comme  $\mathbb{P}(X_k \geq nq) = \mathbb{P}(\frac{X_k}{k} \geq \frac{nq}{k}) \asymp e^{-kI_X(nq/k)}$ , nous vérifions que

$$\mathbb{P}(w_0 \geq nq) \asymp \sum_{k=1}^{\infty} e^{-nq \frac{I_X(nq/k)}{nq/k}} . \quad (5.7)$$

Nous concluons en utilisant le *principe du terme dominant*, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nq \frac{I_X(nq/k)}{nq/k}} \asymp e^{-qn\delta}$$

où  $\delta = \inf_{x>0} \frac{I_X(x)}{x}$  et on retrouve (5.6). L'utilisation du principe du terme dominant s'interprète à l'aide de la propriété de vraisemblance. En effet, le terme le plus grand l'emporte dans (5.7), autrement dit, l'événement rare, ici l'explosion du temps d'attente, se produit suivant le scénario le plus probable.

### 5.3 Principe de grandes déviations pour le processus de charge

Dans cette partie, nous allons donner des hypothèses précises sous lesquelles la queue de distribution de la loi du processus de charge, à l'équilibre, décroît exponentiellement :

$$\mathbb{P}(w_0 \geq nq) \asymp e^{-\delta qn},$$

où  $\delta$  dépend des caractéristiques des variables d'entrée du système. Ce résultat apparaît sous différentes formes dans la littérature [19, 32, 43]. D'abord, nous donnons l'ensemble des hypothèses qui seront utiles dans la suite du chapitre.

**Hypothèses :**

(i) Les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  sont i.i.d., mutuellement indépendantes. Leurs log-transformées de Laplace définies par

$$\Lambda_A(\theta) = \log \mathbb{E}e^{\theta a_0}, \quad \Lambda_S(\theta) = \log \mathbb{E}e^{\theta s_0}$$

sont dérivables au voisinage de zéro.

(ii) La condition de stabilité  $1/\mu = \Lambda'_S(0) = \mathbb{E}s_0 < \mathbb{E}a_0 = \Lambda'_A(0) = 1/\lambda$  est vérifiée.

Sous les hypothèses (i) et (ii), on a

**Proposition 5.3.1.** *La suite  $\{w_0/n, n \in \mathbb{N}^*\}$  satisfait un principe de grandes déviations avec la bonne fonction de taux  $I_W(q) = \delta q$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(w_0/n \geq q) = -\delta q$ , avec*

$$\delta = \inf_{0 < a < s} \frac{I_{A,S}(a, s)}{s - a} = \sup\{\theta : \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta) \leq 0\}. \quad (5.8)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer (5.8). Rappelons que  $x_n = s_n - a_n$  et  $X_n = \sum_{i=1}^n x_{-i}$ , et que

$$w_0 = \sup_{k \geq 0} X_k.$$

Par l'hypothèse d'indépendance, on a

$$\Lambda_X(\theta) = \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta),$$

et par application directe du principe de contraction, nous obtenons

$$I_X(x) = \inf_{y > x} \{I_S(y) + I_A(y - x)\}.$$

Soit  $\theta \leq \inf_{x \geq 0} I_X(x)/x$  alors

$$\begin{aligned} \theta \leq \inf_{x \geq 0} I_X(x)/x &\Leftrightarrow \theta \leq I_X(x)/x, \forall x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \theta x - I_X(x) \leq 0, \forall x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \geq 0} \{\theta x - I_X(x)\} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \Lambda_X(\theta) \leq 0. \end{aligned}$$

### 5.3. Principe de grandes déviations pour le processus de charge

---

La dernière équivalence est due au fait que  $\mathbb{E}x_0 < 0$  (condition de stabilité) et à l'équation (5.2). Nous avons prouvé que

$$\inf_{0 < a < s} \frac{I_{A,S}(a, s)}{s - a} = \inf_{x \geq 0} I_X(x)/x = \sup\{\theta : \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta) \leq 0\}.$$

*Borne inférieure* : Tout d'abord, pour  $q > 0$ , on a  $\mathbb{P}(w_0 \geq q) \geq P(X_k \geq q)$ . En remarquant que, pour  $p > 0$ ,  $p \geq \frac{q}{\lceil q/p \rceil}$ , on a

$$\mathbb{P}(w_0 \geq q) \geq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\lceil q/p \rceil} X_{\lceil q/p \rceil} \geq p\right).$$

De plus, comme  $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p \lceil q/p \rceil}$ , on a

$$\begin{aligned} \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \log \mathbb{P}(w_0 \geq q) &\geq \frac{1}{p} \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lceil q/p \rceil} \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{\lceil q/p \rceil} X_{\lceil q/p \rceil} \geq p\right) \\ &= \frac{1}{p} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} X_n \geq p\right) \geq -\frac{1}{p} I_X(p). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $p > 0$ , nous obtenons la borne inférieure

$$\begin{aligned} \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \log \mathbb{P}(w_0 \geq q) &\geq -\inf_{x > 0} \frac{1}{x} I_X(x) = -\inf_{x > 0} \frac{1}{x} \inf_{y > x} \{I_S(y) + I_A(y - x)\} \\ &= -\inf_{0 < a < s} \frac{I_S(s) + I_A(a)}{s - a}. \end{aligned}$$

*Borne supérieure* : Rappelons que  $\Lambda_X(\theta) = \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta)$ , et grâce à la condition de stabilité, on a  $\Lambda'_X(0) = \log \frac{\mathbb{E}(s_1)}{\mathbb{E}(a_1)} < 0$ . De plus,  $\Lambda_X$  est dérivable sur un voisinage de 0 avec  $\Lambda_X(0) = 0$ . Par conséquent, il existe  $\Theta > 0$  tel que  $\Lambda_X(\Theta) < 0$  et  $\mathbb{E}e^{\Theta X_n} < \infty$ . En appliquant la borne de Chernoff, nous obtenons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq q) \leq e^{-\Theta q} \mathbb{E}e^{\Theta X_n}.$$

Ce qui entraîne

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \log \mathbb{P}(X_n \geq q) \leq -\Theta.$$

D'une part, pour  $N \in \mathbb{N}$ , nous vérifions que

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq q\right) \leq N \max_{0 \leq n \leq N} \mathbb{P}(X_n \geq q).$$

Lorsque  $q$  tend vers l'infini, on a

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \log \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq q\right) \leq \max_{0 \leq n \leq N} \limsup_{q \rightarrow \infty} \log \frac{1}{q} \mathbb{P}(X_n \geq q) \leq -\Theta.$$

D'autre part, nous remarquons que

$$\mathbb{P}(\sup_{n > N} X_n \geq q) \leq \sum_{n > N} \mathbb{P}(X_n \geq q) \leq e^{-\Theta q} \sum_{n > N} \mathbb{E}e^{\Theta X_n}.$$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

Comme  $\frac{1}{n} \log \mathbb{E} e^{\Theta X_n} = \Lambda_X(\Theta) < 0$ , il existe alors  $0 < \epsilon < -\Lambda_X(\Theta)$  et  $N_\Theta \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n > N_\Theta, \frac{1}{n} \log \mathbb{E} e^{\Theta X_n} \leq -\epsilon$ . Ceci entraîne que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n > N_\Theta} X_n > q\right) \leq e^{-\Theta q} \sum_{n > N_\Theta} e^{-n\epsilon} < \frac{e^{-\Theta q}}{1 - e^{-\epsilon}} e^{-(N_\Theta+1)\epsilon}.$$

En résumé, nous avons prouvé que  $\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \log \mathbb{P}\left(\sup_{n > N_\Theta} X_n \geq q\right) \leq -\Theta$ , par conséquent, pour  $\Theta > 0$  tel que  $\Lambda_X(\Theta) < 0$ , on a

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \log \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 0} X_n \geq q\right) \leq -\Theta.$$

Nous pouvons conclure en utilisant (5.8). □

Nous pouvons interpréter ce résultat naïvement grâce aux approximations suivantes, vérifiées à l'échelle logarithmique :

$$\mathbb{P}(\sup_n X_n \geq q) \approx \sup_n \mathbb{P}(X_n \geq q).$$

Ceci rejoint l'argument de l'occurrence des événements rares de la manière la plus probable. Cette approximation, permet en pratique de prédire la fréquence à laquelle le temps d'attente (respectivement le niveau de stock) dépasse un certain seuil. En effet, si (5.6) est vérifiée, il suffit d'observer empiriquement la distribution des temps d'attente sur une période relativement courte. Pour ce faire, on représente le graphe de la fréquence (en échelle logarithmique) à laquelle un niveau  $q$  est atteint en fonction de  $q$ . Le résultat de la proposition 5.3.1 a inspiré de nombreux développements [22] dans l'application des grandes déviations à l'étude statistique des réseaux de files d'attente.

### 5.4 Bande passante effective

La *bande passante* d'un flux de trafic représente une variable fréquemment utilisée dans la littérature traitant des réseaux de communication. La notion de *bande passante effective* fournit un moyen de décrire les propriétés d'un flux aléatoire par l'intermédiaire des événements rares qui peuvent se produire dans le réseau qu'il traverse.

En pratique, les files d'attente et les magasins considérés ont des capacités finies, c'est-à-dire que la file d'attente (respectivement le magasin) refuse des clients (respectivement du stock) lorsque le temps d'attente (respectivement le stock total) dépasse un certain seuil fixé. Dans le contexte de la file d'attente, nous supposons la suite des services  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  donnée et nous chercherons à déterminer une valeur  $a_p$  correspondant au temps d'inter-arrivée minimal pour que la probabilité de rejet d'un client, dont le temps d'attente est supérieur à une certaine valeur, soit inférieure à un seuil pré-défini. Ensuite, nous considérons notre système en tant que modèle de stockage. Dans ce cas de figure, nous nous donnerons  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  la suite des demandes et nous chercherons à déterminer la valeur maximale

## 5.4. Bande passante effective

---

$s_p$  des quantités fournies au magasin pour que le magasin rejette les quantités entraînant le dépassement d'une valeur donnée du stock avec une probabilité inférieure à un certain seuil. Plus précisément, nous désirons pré-définir les arrivées à chacun des deux systèmes de telle sorte que

$$\mathbb{P}(w_0 \geq q) \leq p, \quad (5.9)$$

pour de grandes valeurs de  $q$  et pour  $p$  donné.

**File d'attente** Posons  $a_n = a, \forall n \in \mathbb{Z}$ , ce qui se traduit par  $\Lambda_A(\theta) = a\theta$ . Pour une suite  $s$  i.i.d., on a, d'après la Proposition 5.3.1,  $\mathbb{P}(w_0 \geq q) \leq e^{-\delta(a)q}$  avec

$$\delta(a) = \sup\{\theta : \theta \geq 0 \text{ et } \Lambda_S(\theta) \leq a\theta\}.$$

Le temps d'inter-arrivée minimal, pour lequel l'inégalité (5.9) est vérifiée, est donné par  $a_p$  tel que

$$a_p = \inf\{a : a \geq 0 \text{ et } e^{-\delta(a)q} \leq p\}.$$

Posons  $\theta_p = -\frac{\log p}{q}$ , alors  $\delta(a_p) = \theta_p$  et

$$a_p = \frac{\Lambda_S(\theta_p)}{\theta_p}.$$

Cette valeur est appelée *bande passante effective* pour la file d'attente. La notion de bande passante effective a été introduite par Kelly dans [56], pour plus de détails consulter [54].

**Modèle de Stock** Supposons  $s_n = s, \forall n \in \mathbb{Z}$ , dans ce cas  $\Lambda_S(\theta) = \theta s$  soit

$$\delta(s) = -\inf\{\theta < 0 : \Lambda_A(\theta) \leq s\theta\}.$$

La quantité de produit maximale pour laquelle l'inégalité (5.9) est vérifiée est donnée par  $s_p$  tel que

$$s_p = \sup\{s \geq 0 : e^{-\delta(s)q} \leq p\}.$$

Nous appellerons  $s_p$  la *bande passante effective* pour le modèle de stockage, on a

$$s_p = \frac{\Lambda_A(\theta_p)}{\theta_p}.$$

Nous pouvons généraliser la notion de bande passante effective en introduisant les variables  $\alpha_A(\theta)$  et  $\alpha_S(\theta)$  définies par

$$\alpha_A(\theta) = \frac{\Lambda_S(\theta)}{\theta}, \quad \alpha_S(\theta) = \frac{\Lambda_A(\theta)}{\theta},$$

qui représentent respectivement les bandes passantes effectives de la file d'attente et du modèle de stockage.

## 5.5 Principe de grandes déviations pour les variables de sortie

Les techniques illustrées dans la preuve de la Proposition 5.3.1 sont classiques en théorie des grandes déviations. Néanmoins, pour des variables autres que le processus de charge, il est souvent difficile de calculer directement la fonction de taux. Nous proposons dans cette partie une autre approche qui utilise le principe de contraction. Pour pouvoir appliquer ce résultat, nous devons exhiber une fonction continue qui donne les variables étudiées en fonction des variables d'entrée de la file d'attente. Pour ce faire nous allons utiliser les techniques illustrées dans [38] pour le cas du modèle de stockage. La différence essentielle dans notre cas réside dans l'introduction de nouvelles variables permettant d'étudier conjointement la File d'attente et le Modèle de Stockage. Nous rappellerons, dans un premier temps, les résultats théoriques sur les grandes déviations pour des processus en temps continu. Au paragraphe 5.5.1 nous ramenons la recherche des fonctions de taux pour les variables de sortie à un problème d'optimisation analogue à celui obtenu dans [38]. Nous résolvons ce problème au paragraphe 5.5.2 en imposant la même contrainte d'inclinaison exponentielle, que dans [38], sur les variables d'entrée. Notre résultat est plus général que celui présenté dans [38] car il donne un résultat de point fixe (préservation de la fonction de taux) pour la File d'attente et le Modèle de stockage.

Revenons à l'étude du processus de charge dans sa version stationnaire. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_{-i}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n s_{-i}.$$

Il est clair que  $w_0 = \sup_{k \geq 0} (S_k - A_k)$ . Pour pouvoir appliquer le principe de contraction, il est crucial de définir une bonne topologie pour laquelle la transformation qui donne le processus de charge à partir des variables d'entrée soit continue. Pour ce faire, nous définissons l'*approximation polygonale* en  $n$  d'une suite  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  par

$$\tilde{X}_n(t) = \frac{1}{n} X_{[nt]} + (t - \frac{[nt]}{n})(X_{[nt]+1} - X_{[nt]}), \quad t \geq 0.$$

Nous appelons  $\tilde{A}_n$  et  $\tilde{S}_n$  les approximations polygonales en  $n$  des suites  $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$  et  $\{S_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Remarquons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{n} = \frac{1}{n} \sup_{k \in \mathbb{N}} (S_k - A_k) &= \frac{1}{n} \sup_{t \geq 0} (S_{[nt]} - A_{[nt]}) \\ &= \sup_{t > 0} (\tilde{S}_n(t) - \tilde{A}_n(t)). \end{aligned}$$

On dit qu'une fonction  $x$  est absolument continue sur  $\mathbb{R}$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tels que } \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |u - v| \leq \eta \Rightarrow |x(u) - x(v)| \leq \epsilon.$$

Si  $x$  est absolument continue, alors sa dérivée  $x'$  existe presque partout et nous pouvons écrire  $x(v) - x(u) = \int_u^v x'(t) dt$ .

## 5.5. Principe de grandes déviations pour les variables de sortie

---

Soit  $\mu > 0$ , nous définissons  $\mathcal{C}_\mu$  (respectivement  $\mathcal{A}_\mu$ ) l'espace des fonctions continues (respectivement absolument continues)  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $x(0) = 0$  et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t+1} = 1/\mu < \infty,$$

équipé de la norme

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left| \frac{x(t)}{t+1} \right|. \quad (5.10)$$

Nous nous intéressons, dans un premier temps, aux grandes déviations sur des processus en temps continus sur  $\mathcal{C}_\mu$ .

**Définition 5.5.1.** *On dira qu'une suite de processus  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ , où  $X_n \in \mathcal{C}_\mu$  satisfait un principe de grandes déviations fonctionnel avec géodésique linéaire, de fonction de taux instantanée  $I$ , si*

- (i) *la fonction  $I$  est une fonction de taux, avec  $I(1/\mu) = 0$ ,*
- (ii)  *$\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathcal{C}_\mu$  avec la fonction de taux*

$$\mathcal{J}_X(\phi) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} I(\phi'(t)) dt & \text{si } \phi \in \mathcal{A}_\mu \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Des extensions de principe de grandes déviations aux processus en temps continus ont été explorées par Dembo et Zajic dans [25], pour la topologie de la convergence uniforme qui n'est pas appropriée pour l'étude des files d'attente. L'exploration de topologies plus fines, correspondant à la norme (5.10), a été entreprise dans [37, 27]. Remarquons que si  $x = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  est suite i.i.d. de moyenne  $1/\mu$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\tilde{X}_n \in \mathcal{C}_\mu$ , où  $\tilde{X}_n$  est l'approximation polygonale en  $n$  de la suite  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  avec  $X_n = \sum_{i=1}^n x_i$

**Théorème 5.5.2.** [37] *Soient  $x = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $\Lambda_X$  leur log-transformée de Laplace, qu'on suppose dérivable au voisinage de l'origine. La suite des approximations polygonales  $\{\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  de la suite  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ , où  $X_n = \sum_{i=1}^n x_i$ , satisfait un principe de grandes déviations fonctionnel de géodésique linéaire sur  $\mathcal{C}_\mu$  muni de la norme (5.10), de moyenne  $1/\mu = \Lambda'_X(0)$  et de fonction de taux instantanée  $I_X$ , c'est-à-dire*

$$\mathcal{J}_X(\phi) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} I_X(\phi'(t)) dt & \text{si } \phi \in \mathcal{A}_\mu \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse (i), les processus  $\tilde{A}_n$  et  $\tilde{S}_n$  satisfont des principes de grandes déviations fonctionnels de géodésique linéaire, avec les fonctions de taux instantanées  $\mathcal{J}_A$  et  $\mathcal{J}_S$  définies par

$$\mathcal{J}_A(\phi) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} I_A(\phi'(t)) dt & \text{si } \phi \in \mathcal{A}_\lambda \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

avec  $I_A(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta x - \Lambda_A(\theta)\}$ , transformée de Legendre de  $\Lambda_A$ . Nous définissons de la même manière  $I_S$  et  $\mathcal{I}_S$ .

En utilisant des arguments classiques d'analyse, il est prouvé dans [39], que la fonction  $f : \mathcal{C}_\mu \times \mathcal{C}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$f(\phi, \psi) = \sup_{t>0} (\psi(t) - \phi(t)),$$

est continue pour la topologie induite sur  $\mathcal{C}_\mu \times \mathcal{C}_\lambda$  par la norme (5.10). En effet, le choix de cette topologie permet de surmonter le fait que  $f$  n'est pas continue pour topologie de la convergence uniforme sur les compacts (exemple 5.2 [39]).

En appliquant le principe de contraction, nous vérifions que  $\{w_0/n, n \in \mathbb{Z}\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}_+$  avec la fonction de taux

$$\begin{aligned} I_W(q) &= \inf \left\{ \int_0^\infty I_{A,S}(\phi'(s)) ds \mid (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu, f(\phi_1, \phi_2) = q \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_0^\infty I_{A,S}(\phi'(s)) ds \mid (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu, \sup_{t>0} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) = q \right\}, \end{aligned}$$

où  $I_{A,S}(\phi'(s)) = I_A(\phi_1'(s)) + I_S(\phi_2'(s))$ . En combinant cette remarque avec la Proposition 5.3.1, on a

**Corollaire 5.5.3.** *La solution du problème d'optimisation*

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \int_0^\infty I_{A,S}(\phi'(s)) ds \text{ pour } \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu \\ \text{sous la contrainte } \sup_{t>0} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) = q \end{cases}$$

est  $I_W(q) = \delta q$  où  $\delta$  est défini dans (5.8).

Dans le paragraphe suivant nous allons utiliser le même genre d'arguments pour établir des principes de grandes déviations pour les variables de sortie

$$d_n = a_n + w_{n+1} - w_n + s_{n+1} - s_n, \quad r_n = s_n - w_{n+1} + w_n. \quad (5.11)$$

Nous définissons les suites  $D = \{D_n, n \in \mathbb{N}\}$  et  $R = \{R_n, n \in \mathbb{N}\}$  par

$$D_n = \sum_{i=1}^n d_{-i}, \quad R_n = \sum_{i=1}^n r_{-i}.$$

Soit  $\tilde{D}_n$  et  $\tilde{R}_n$  les approximations polygonales en  $n$  des suites  $D$  et  $R$ . Sous les hypothèses (i), (ii) et grâce au schéma de Loynes, nous vérifions que

$$(\tilde{D}_n, \tilde{R}_n) \in \mathcal{C}_\lambda \times \mathcal{C}_\mu.$$

## 5.5. Principe de grandes déviations pour les variables de sortie

---

### 5.5.1 Problème d'optimisation

Pour des raisons de clarté, nous allons introduire une autre variable qui correspond aux inter-débuts de service dans le cadre de la file d'attente,

$$b_n = a_n + w_{n+1} - w_n .$$

Soit  $B = \{B_n, n \in \mathbb{N}\}$  avec  $B_n = \sum_{i=1}^n b_{-i}$  et  $\tilde{B}_n$  son approximation polygonale en  $n$  alors  $\tilde{B}_n \in \mathcal{C}_\lambda$ . Sous l'hypothèse (i), on a

**Lemme 5.5.4.** *Pour  $0 \leq t \leq 1$  fixé, les suites  $\{\tilde{D}_n(t), n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{\tilde{B}_n(t), n \in \mathbb{N}\}$  sont exponentiellement équivalentes.*

*Démonstration.* Notons que, pour  $\gamma > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{D}_n(t) - \tilde{B}_n(t)| > \gamma) &\leq \mathbb{P}(\sup_{0 \leq k \leq n} |s_{-k} - s_0| > n\gamma) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(|s_{-k} - s_0| > n\gamma) \\ &\leq e^{-\gamma\nu n} \sum_{k=0}^n \mathbb{E}e^{\gamma|s_{-k} - s_0|} \leq (n+1)e^{-\gamma\nu n} e^{2\Lambda_S(\gamma)} . \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log((n+1)e^{-\gamma\nu n}) = -\infty$  et grâce à l'hypothèse (i) ( $\Lambda_S(\gamma) < \infty$  pour  $\gamma$  proche de 0), on a bien l'équivalence exponentielle.  $\square$

Ainsi, si les suites  $\{\tilde{D}_n(t), n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{\tilde{B}_n(t), n \in \mathbb{N}\}$  satisfont des principes de grandes déviations alors elles ont la même fonction de taux. Comme l'expression de  $\tilde{B}_n$  (en fonction des variables d'entrée) est plus simple que celle de  $\tilde{D}_n$ , nous examinerons  $\tilde{B}_n$  et  $\tilde{R}_n$ . En effet,

**Lemme 5.5.5.** *Les variables  $\tilde{B}_n(t)$  et  $\tilde{R}_n(t)$  s'expriment de la manière suivante en fonction de  $\tilde{A}_n(t)$  et  $\tilde{S}_n(t)$ ,*

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n(t) &= \tilde{A}_n(t) + \sup_{s>0} \{\tilde{S}_n(s) - \tilde{A}_n(s)\} - \sup_{s>t} \{(\tilde{S}_n(s) - \tilde{S}_n(t)) - (\tilde{A}_n(s) - \tilde{A}_n(t))\} \\ \tilde{R}_n(t) &= \tilde{S}_n(t) - \sup_{s>0} \{\tilde{S}_n(s) - \tilde{A}_n(s)\} + \sup_{s>t} \{(\tilde{S}_n(s) - \tilde{S}_n(t)) - (\tilde{A}_n(s) - \tilde{A}_n(t))\} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous montrons la relation pour  $\tilde{B}_n(t)$ , la preuve est identique pour  $\tilde{R}_n(t)$ . Comme  $\tilde{B}_n(t)$  n'est rien d'autre qu'une approximation affine de  $B_{\lfloor nt \rfloor}/n$ , nous nous intéresserons à  $B_{\lfloor nt \rfloor}$ . Remarquons tout d'abord que

$$B_{\lfloor nt \rfloor} = A_{\lfloor nt \rfloor} + w_0 - w_{-\lfloor nt \rfloor} .$$

Or  $w_0 = \sup_{s>0} \{\tilde{S}_n(s) - \tilde{A}_n(s)\}$  et nous vérifions de même que

$$w_{-\lfloor nt \rfloor} = \sup_{s>t} \{(\tilde{S}_n(s) - \tilde{S}_n(t)) - (\tilde{A}_n(s) - \tilde{A}_n(t))\} .$$

Ce qui permet de conclure.  $\square$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

**Théorème 5.5.6.** *Sous (i) et (ii), la suite  $\{(\frac{D_n}{n}, \frac{R_n}{n}, \frac{w_0}{n}), n \in \mathbb{Z}\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}_+^3$  avec la fonction de taux*

$$J(x_1, x_2, w) = \inf\{\delta(w - x_1 + x_2) + I_{A,S}(x_2, x_1); \inf_C g(q, \tau, v_1, v_2)\}, \quad (5.12)$$

où

$$g(q, \tau, v_1, v_2) = \tau I_{A,S}\left(\frac{x_2 - v_2}{\tau}, \frac{x_2 - v_2 + w}{\tau}\right) + (1 - \tau) I_{A,S}\left(\frac{v_1}{1 - \tau}, \frac{v_2 - q}{1 - \tau}\right) + \delta q,$$

où  $\delta = \inf_{0 < a < s} \frac{I_A(a) + I_S(s)}{s - a}$  et  $C = \{(q, \tau, v_1, v_2) \mid q \geq 0, 0 \leq \tau \leq 1, x_2 - v_2 + w = x_1 - v_1 + q\}$ .

*Démonstration.* D'après Loynes [63] et en utilisant le lemme 5.5.5, nous vérifions que  $(\tilde{B}_n, \tilde{R}_n, \frac{w_0}{n}) = \Phi(\tilde{A}_n, \tilde{S}_n)$  avec

$$\Phi : \mathcal{C}_\lambda \times \mathcal{C}_\mu \rightarrow \mathcal{C}_\lambda \times \mathcal{C}_\mu \times \mathbb{R}_+,$$

où  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  et pour  $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{C}_\lambda \times \mathcal{C}_\mu$ , on a

$$\begin{aligned} \Phi_1(\phi)(t) &= \phi_1(t) + \sup_{s>0}\{\phi_2(s) - \phi_1(s)\} - \sup_{s>t}\{(\phi_2(s) - \phi_2(t)) - (\phi_1(s) - \phi_1(t))\} \\ \Phi_2(\phi)(t) &= \phi_2(t) - \sup_{s>0}\{\phi_2(s) - \phi_1(s)\} + \sup_{s>t}\{(\phi_2(s) - \phi_2(t)) - (\phi_1(s) - \phi_1(t))\} \\ \Phi_3(\phi)(t) &= \sup_{s>0}\{\phi_2(s) - \phi_1(s)\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Par le principe de contraction, la suite  $\{(\tilde{B}_n, \tilde{R}_n, w_0/n), n \in \mathbb{N}^*\}$  satisfait alors un principe de grandes déviations avec la fonction de taux :

$$J(\psi_1, \psi_2, w) = \inf\left\{\int_0^\infty I_{A,S}(\phi_1'(s), \phi_2'(s)) ds \mid \Phi(\phi_1, \phi_2) = (\psi_1, \psi_2, w)\right\}.$$

Ce problème variationnel est, en général, difficile à résoudre. Nous nous placerons dans le cas où  $t = 1$ . Par la loi des grands nombres, la suite  $\{(\tilde{B}_n(1), \tilde{R}_n(1)), n \in \mathbb{N}^*\} = \{(\frac{B_n}{n}, \frac{R_n}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$  converge vers les moyennes des variables de sortie, alors que les fonctions de taux donnent les grandes fluctuations autour de ces moyennes. La suite  $\{(\frac{B_n}{n}, \frac{R_n}{n}, w_0/n), n \in \mathbb{N}^*\}$  satisfait un principe de grandes déviations avec la fonction de taux suivante

$$J(x_1, x_2, w) = \inf\left\{\int_0^\infty I_{A,S}(\phi_1'(s), \phi_2'(s)) ds \mid [\Phi(\phi_1, \phi_2)](1) = (x_1, x_2, w)\right\}. \quad (5.14)$$

Introduisons les variables  $q_0$  et  $q_1$  définies comme suit

$$\begin{aligned} q_0 &= \sup_{s>0}\{\phi_2(s) - \phi_1(s)\} \\ q_1 &= \sup_{s>1}\{(\phi_2(s) - \phi_2(1)) - (\phi_1(s) - \phi_1(1))\}. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de réécrire (5.13), sous la forme suivante

$$x_1 = \phi_1(1) + q_0 - q_1, \quad x_2 = \phi_2(1) - q_0 + q_1, \quad w = q_0.$$

## 5.5. Principe de grandes déviations pour les variables de sortie

---

Pour résoudre ce nouveau problème, nous allons conditionner par la valeur de la variable  $q_1$  qu'on appellera  $q$ . Grâce à l'hypothèse de stabilité  $\lambda < \mu$ , on vérifie que  $q$  est finie. Nous pouvons ainsi interpréter  $J(x_1, x_2, w)$  comme la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & \int_0^1 I_{A,S}(\phi'(s))ds + \int_1^\infty I_{A,S}(\phi'(s))ds \quad \text{pour } \phi \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu, q \geq 0 \\ \text{sous les contraintes} \quad & q_1 = q, \quad x_1 = \phi_1(1) + q_0 - q_1, \quad x_2 = \phi_2(1) - q_0 + q_1, \quad w = q_0, \end{aligned}$$

où  $\phi = (\phi_1(s), \phi_2(s))$  et  $I_{A,S}(\phi'(s)) = I_A(\phi_1'(s)) + I_S(\phi_2'(s))$ .

L'intérêt d'introduire cette variable supplémentaire  $q$  est que le problème d'optimisation se décompose en deux sous-problèmes de minimisation respectivement sur  $s \in [0, 1]$  et  $s > 1$  couplés en  $q$ . Plus précisément, les variables  $x_1, x_2$  et  $w = q_0$  sont données, si on fixe  $q$  la valeur de  $q_1$ , alors les valeurs  $\phi_1(1)$  et  $\phi_2(1)$  sont fixées également. Pour  $s > 1$ , la seule condition portant sur  $\phi_1$  et  $\phi_2$  est  $q_1 = q$ . Par conséquent, le premier problème d'optimisation consiste à

$$\text{Minimiser } \int_1^\infty I_{A,S}(\phi_1'(s), \phi_2'(s))ds, \quad \text{sous la contrainte } q_1 = q.$$

Le second problème consiste à

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & \int_0^1 I_{A,S}(\phi_1'(s), \phi_2'(s))ds \\ \text{sous la contrainte} \quad & x_1 = \phi_1(1) + q_0 - q_1, \quad x_2 = \phi_2(1) - q_0 + q_1, \quad w = q_0, \end{aligned}$$

sachant  $q_1 = q$ . Dans les deux cas, la minimisation est effectuée pour  $\phi \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu$ .

Pour le premier problème, soit  $\psi \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu$  définie par  $\psi_i(s-1) = \phi_i(s) - \phi_i(1)$ ,  $s \geq 1$ ,  $i = 1, 2$ . Grâce au lemme 5.5.3, ce problème d'optimisation se ramène à la recherche (à une translation près) de la fonction de taux pour le principe de grandes déviations vérifié par  $w_0$  donné dans la proposition 5.3.1 et le minimum est  $\delta q$  où  $\delta = \inf_{a < s} \frac{I_{A,S}(a,s)}{s-a}$ .

Ainsi, pour déterminer  $J(x_1, x_2, w)$  il nous reste à

$$\text{Minimiser } \int_0^1 I_A(\phi_1'(s)) + I_S(\phi_2'(s))ds + \delta q, \quad (5.15)$$

pour  $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu$  sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} q & \geq 0, \quad w = \sup_{s \geq 0} \{\phi_2(s) - \phi_1(s)\} \\ x_1 & = \phi_1(1) + w - q \\ x_2 & = \phi_2(1) - w + q. \end{cases}$$

- Supposons  $\sup_{s \geq 0} \{\phi_2(s) - \phi_1(s)\} = \sup_{s \geq 1} \{\phi_2(s) - \phi_1(s)\}$ , alors  $w = q + \phi_2(1) - \phi_1(1)$ , on en déduit que

$$x_1 = \phi_2(1), \quad x_2 = \phi_1(1), \quad q = w - x_1 + x_2.$$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

Dans ce cas, la solution du problème d'optimisation (5.15) est réalisée pour des fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  linéaires. Après un calcul immédiat, la solution est

$$\delta(w - x_1 + x_2) + I_A(x_2) + I_S(x_1).$$

- Supposons maintenant que  $\phi_2(s) - \phi_1(s)$  atteint son maximum en  $\tau \in [0, 1]$ . Alors,

$$\begin{aligned} x_1 &= -q + \phi_1(1) - \phi_1(\tau) + \phi_2(\tau) \\ x_2 &= q + \phi_2(1) - \phi_2(\tau) + \phi_1(\tau). \end{aligned}$$

Nous définissons  $y_i = \frac{\phi_i(\tau)}{\tau}$ ,  $z_i = \frac{\phi_i(1) - \phi_i(\tau)}{1 - \tau}$ ,  $i = 1, 2$  et  $\chi \in \mathcal{A}_\lambda \times \mathcal{A}_\mu$ ,

$$\chi_i(t) = \begin{cases} y_i t & \text{si } t \in ]0, \tau] \\ y_i \tau + z_i(t - \tau) & \text{si } t \in ]\tau, 1] \end{cases}.$$

Par la propriété de convexité de  $I_A$  et  $I_S$  et en utilisant l'*inégalité de Jensen*, on a

$$\int_0^1 I_{A,S}(\chi'_1(s), \chi'_2(s)) ds \leq \int_0^1 I_{A,S}(\phi'_1(s), \phi'_2(s)) ds.$$

Comme  $\int_0^1 I_{A,S}(\chi'_1(s), \chi'_2(s)) ds = \tau I_{A,S}(y) + (1 - \tau) I_{A,S}(z)$  où  $y = (y_1, y_2)$  et  $z = (z_1, z_2)$ , il suffit donc de minimiser

$$\delta q + \tau I_{A,S}(y) + (1 - \tau) I_{A,S}(z),$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} q \geq 0, & y_1 \geq y_2 \\ x_1 = -q + (1 - \tau)z_1 + \tau y_2 \\ x_2 = q + (1 - \tau)z_2 \leq (1 - \tau)z_1 \\ q + (1 - \tau)z_2 \leq (1 - \tau)z_1. \end{cases}$$

Soient  $v_1 = (1 - \tau)z_1$  et  $v_2 = (1 - \tau)z_2 + q$ , on a  $y_1 = \frac{x_2 - v_2}{\tau}$ ,  $y_2 = \frac{w + x_2 - v_2}{\tau}$  et

$$J(x_1, x_2, w) = \inf \{ \delta(w - x_1 + x_2) + I_{A,S}(x_2, x_1), \inf_C g(q, \tau, v_1, v_2) \},$$

$g$  et  $C$  définis au Théorème 5.5.6. □

Ce résultat peut être interprété de la manière suivante. En fait, la manière la plus vraisemblable d'avoir une moyenne  $x_1$  des départs, une moyenne  $x_2$  des temps passés en fin de file et une moyenne  $w$  des temps d'attente, est donnée par l'un des deux scénarios suivants :

- tous les clients appartiennent à une même période d'activité. Ainsi, la moyenne des départs est égale à celle des services et la moyenne des temps passés en fin de file est égale à celle des inter-arrivées.

## 5.5. Principe de grandes déviations pour les variables de sortie

---

- Soient  $q, \tau, v_1, v_2$  les variables pour lesquelles  $g$  atteint son minimum sur  $C$ . Le client  $-n\tau$  trouve le système vide, par conséquent un chemin optimal se décompose en deux étapes. Le client  $-n$  trouve un temps d'attente égal à  $nq$ . Les moyennes des arrivées et des services, lors de cette première période, sont respectivement  $\frac{x_2 - v_2}{\tau}$  et  $\frac{x_2 - v_2 + w}{\tau}$ . La première période d'activité comporte  $n\tau$  clients. Durant la deuxième phase, la moyenne des services est égale à  $\frac{v_2 - q}{1 - \tau}$  et celle des arrivées est égale à  $\frac{v_1}{1 - \tau}$ .

L'équation (5.12) donne la fonction de taux correspondant aux principes de grandes déviations vérifiés par les variables de sortie en fonction de la fonction de taux des variables d'entrée. Nous pouvons nous demander si cette fonction de taux est un point fixe. Plus précisément, sous quelle condition a-t-on  $J(x_1, x_2, w) = I_{A,S}(x_1, x_2) + \delta w$ , ou encore  $(I_D, I_R) = (I_A, I_S)$  ?

Nous proposons, dans un premier temps, l'exemple de la file M/M/1 pour laquelle la réponse est positive. En fait, ceci n'est rien de plus que la traduction du théorème de Burke dans le cadre des grandes déviations. Nous montrons dans la partie suivante que la réponse est vraie sous une condition simple liant les lois des variables d'entrée.

**Exemple** Revenons à la file M/M/1, c'est-à-dire où les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  sont i.i.d. mutuellement indépendantes avec, pour  $t \geq 0$ ,

$$P(a_0 > t) = e^{-\lambda t}, \quad P(s_0 > t) = e^{-\mu t}.$$

Dans ce cas, on obtient, pour  $\theta < \lambda < \mu$

$$\Lambda_A(\theta) = \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - \theta}\right), \quad \Lambda_S(\theta) = \log\left(\frac{\mu}{\mu - \theta}\right).$$

En utilisant le fait que  $\delta = \sup\{\theta > 0, \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta) < 0\}$ , nous vérifions que  $\delta = \mu - \lambda$ . Comme

$$I_A(a) = \lambda a - \log(\lambda a) - 1, \quad I_S(s) = \mu s - \log(\mu s) - 1,$$

en résolvant le problème d'optimisation précédent, on a

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2, w) &= \lambda x_1 - \log(\lambda x_1) - 1 + \mu x_2 - \log(\mu x_2) - 1 + (\mu - \lambda)w \\ &= I_{A,S}(x_1, x_2) + \delta w. \end{aligned}$$

### 5.5.2 Existence de points fixes

Supposons que  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  soient i.i.d., mutuellement indépendantes de moyennes respectives  $1/\lambda$  et  $1/\mu$ . Elles satisfont des principes de grandes déviations avec les fonctions de taux respectives  $I_A$  et  $I_S$  que nous supposerons dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ . On suppose de plus qu'il existe  $\beta > 0$  tel que

$$I'_S(x) - I'_A(x) = \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (5.16)$$

Cette relation peut être réécrite sous la forme suivante qui sera utile pour la suite

$$I_A(x) - I_A(y) = I_S(x) - I_S(y) - \beta(x - y), \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2. \quad (5.17)$$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

Avant d'énoncer le résultat de point fixe sur les fonctions de taux pour l'opérateur associé à la file d'attente qui donnent les variables de sortie en fonction des variables d'entrée, nous allons interpréter les relations (5.16) et (5.17) en terme d'*inclinaison exponentielle* de mesure. Soit  $\beta > 0$ , nous dirons qu'une mesure  $\nu'$  est la mesure  $\beta$ -inclivée exponentiellement d'une mesure  $\nu$  si pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\nu'}{d\nu}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\int e^{\beta x} d\nu(x)}, \quad (5.18)$$

où  $(d\nu'/d\nu)(x)$  désigne la dérivée de Radon-Nikodym de  $\nu'$  par rapport à  $\nu$ .

**Proposition 5.5.7.** *Soient les suites  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  vérifiant les relations (5.16) ou (5.17), de lois marginales unidimensionnelles respectives  $\nu_A$  et  $\nu_S$  alors  $\nu_A$  est la mesure  $\beta$ -inclivée de  $\nu_S$ .*

*Démonstration.* On rappelle que  $I_A(1/\lambda) = 0$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} \Lambda_A(\theta) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} [\theta x - I_A(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} [\theta x - I_S(x) + I_S(1/\lambda) + \beta(x - 1/\lambda)] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} [(\theta + \beta)x - I_S(x)] - \left[ \frac{\beta}{\lambda} - I_S(1/\lambda) \right] \\ &= \Lambda_S(\theta + \beta) - \Lambda_S(\beta). \end{aligned} \quad (5.19)$$

En passant à l'exponentielle dans les deux membres de la dernière égalité, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{\theta x} d\nu_A(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} e^{(\theta+\beta)x} d\nu_S(x)}{\int_{\mathbb{R}_+} e^{\beta x} d\nu_S(x)}.$$

□

**Lemme 5.5.8.** *Si  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  satisfont les hypothèses (i) et (ii), alors le coefficient d'inclinaison  $\beta$  vérifie*

$$\beta = \sup\{\theta : \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta) \leq 0\}.$$

*Démonstration.* Prenons  $\theta = -\beta$  dans (5.19), on a

$$\Lambda_A(-\beta) = \Lambda_S(0) - \Lambda_S(\beta).$$

Comme  $\Lambda_S(0) = 0$ , nous obtenons  $\Lambda_A(-\beta) + \Lambda_S(\beta) = 0$ . Grâce à (5.8), on a

$$\beta \leq \sup\{\theta \geq 0, \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta) \leq 0\} = \delta.$$

La fonction  $G(\theta) = \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta)$  est convexe avec  $G(0) = 0$ . De plus, par l'hypothèse (ii),  $G'(0) = \Lambda'_S(0) - \Lambda'_A(0) < 0$ , c'est-à-dire  $G$  s'annule exactement deux fois sur  $[0, \beta]$ , en 0 et  $\beta$ , donc

$$\beta = \sup\{\theta \geq 0, \Lambda_S(\theta) + \Lambda_A(-\theta) \leq 0\} = \delta.$$

□

## 5.5. Principe de grandes déviations pour les variables de sortie

---

**Théorème 5.5.9.** Soit  $\delta > 0$  et  $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$  les variables d'entrée de la file d'attente avec  $\nu_A$  la mesure  $\delta$ -inclinée de  $\nu_S$  (ou encore  $\nu_S$  la mesure  $(-\delta)$ -inclinée de  $\nu_A$ ) alors la suite  $\{(\frac{D_n}{n}, \frac{R_n}{n}, w_0/n), n \in \mathbb{N}^*\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}_+^3$  avec la fonction de taux

$$J(x_1, x_2, w) = \delta w + I_{A,S}(x_1, x_2). \quad (5.20)$$

En particulier, on a

$$I_D = I_A \quad \text{et} \quad I_R = I_S.$$

*Démonstration.* Rappelons le résultat du théorème 5.5.6. La suite  $\{(\tilde{D}_n(1), \tilde{R}_n(1), w_0/n), n \in \mathbb{N}^*\}$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $\mathbb{R}_+^3$  avec la fonction de taux

$$J(x_1, x_2, w) = \inf\{\delta(w - x_1 + x_2) + I_{A,S}(x_2, x_1); \inf_C g(q, \tau, v_1, v_2)\},$$

Commençons par examiner la première partie de ce problème d'optimisation qui correspond à

$$x_1 = \phi_2(1), \quad x_2 = \phi_2(1) \quad q = w - x_1 + x_2.$$

Ainsi,  $w = x_1 - x_2 + q$ , et grâce à (5.17) on a

$$\begin{aligned} \delta(w - x_1 + x_2) + I_{A,S}(x_2, x_1) &= \delta(w - x_1 + x_2) + I_{A,S}(x_1, x_2) + \delta(x_1 - x_2) \\ &= \delta w + I_{A,S}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, soit  $(q, \tau, v_1, v_2) \in C$ ,

- Si  $v_1 = v_2$ , par convexité, on a

$$\begin{aligned} g(q, \tau, v_1, v_2) &= \delta q + \tau I_{A,S}\left(\frac{x_2 - v_2}{\tau}, \frac{x_2 - v_2 + w}{\tau}\right) + (1 - \tau) I_{A,S}\left(\frac{v_2}{1 - \tau}, \frac{v_2 - q}{1 - \tau}\right) \\ &\geq \delta q + I_{A,S}(x_2, x_2 + w - q) = \delta w + I_{A,S}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

- Si  $v_1 > v_2$ , alors

$$I_{A,S}\left(\frac{x_2 - v_2}{\tau}, \frac{x_2 - v_2 + w}{\tau}\right) = I_{A,S}\left(\frac{x_2 - v_2 + w}{\tau}, \frac{x_2 - v_2}{\tau}\right) + \delta \frac{w}{\tau}$$

Notons que

$$I_S\left(\frac{v_2 - q}{1 - \tau}\right) = I_S\left(\frac{v_2}{1 - \tau}\right) + I_A\left(\frac{v_2 - q}{1 - \tau}\right) - I_A\left(\frac{v_2}{1 - \tau}\right) - \delta \frac{q}{1 - \tau}.$$

Comme  $I_A$  est convexe et  $v_1 \geq v_2$ , on a

$$I_A\left(\frac{v_2 - q}{1 - \tau}\right) - I_A\left(\frac{v_2}{1 - \tau}\right) \geq I_A\left(\frac{v_1 - q}{1 - \tau}\right) - I_A\left(\frac{v_1}{1 - \tau}\right).$$

## Chapitre 5. Grandes Déviations

---

Ainsi,

$$I_S\left(\frac{v_2 - q}{1 - \tau}\right) + I_A\left(\frac{v_1}{1 - \tau}\right) \geq I_S\left(\frac{v_2}{1 - \tau}\right) + I_A\left(\frac{v_1 - q}{1 - \tau}\right) - \delta \frac{q}{1 - \tau}.$$

Or  $I_A$  et  $I_S$  sont convexes et  $x_2 - v_2 + w + v_1 - q = x_1$ , on a

$$g(q) \geq \delta w + I_{A,S}(x_1, x_2).$$

Nous concluons que  $J(x_1, x_2, w) = \delta w + I_{A,S}(x_1, x_2)$ .

□

Le résultat précédent dit que pour un processus d'entrée satisfaisant un principe de grandes déviations avec la fonction de taux  $I_A$  et  $I_S$  avec  $\nu_A$  la mesure  $\delta$ -inclinée de  $\nu_S$ , le processus des variables de sortie satisfait un principe de grandes déviations avec les mêmes fonctions de taux que les variables d'entrée.

Pour conclure nous pouvons envisager d'étendre ce résultat à la suite  $\{(\tilde{D}_n(t), \tilde{R}_n(t), \frac{w_0}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$  mais cette fois pour  $t \in \mathbb{R}_+$ . Cette propriété de géodésique est discutée dans [40].

La méthode présentée dans ce chapitre est générale et pourrait s'appliquer à d'autres contextes de files d'attente. En effet, il suffit de trouver l'approximation adéquate pour passer d'un cadre discret à un cadre continu, d'établir un résultat de continuité pour une topologie convenable. Ceci permet d'utiliser le principe de contraction pour établir un principe de grandes déviations pour les variables de sortie du système étudié dont la fonction de taux est solution d'un problème d'optimisation. Reste enfin à résoudre ce problème d'optimisation, cette étape est la plus ardue, comme on l'a vu au théorème 5.5.6.

# Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux modèles de systèmes à événements discrets. La nature des résultats que nous avons développés est variée allant de l'étude des corrélations entre clients successifs, passant par l'exploration des liens entre la dynamique de ces modèles et l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth et se terminant par l'étude des points fixes aussi bien pour les lois que pour les grandes déviations. Les travaux que nous avons effectués ont des prolongements naturels.

Nous avons évoqué à la fin de la première partie (paragraphe 3.5) les liens entre les modèles de files d'attente en tandem et les systèmes de particules en interaction. Cette correspondance introduite dans [33, 58, 90] pour le processus d'exclusion asymétrique (de particules), a été étendue dans [67] au cas d'exclusion avec des dépendances plus longues. D'autres pistes peuvent être explorées dans cette direction. En effet, les dynamiques d'autres systèmes à événements discrets en tandem sont liées à des systèmes de particules en interaction plus complexes via des problèmes de plus longs chemins sur des graphes et plusieurs arguments se prolongent naturellement à des chemins assez généraux. Nous envisageons de poursuivre ces recherches dans le but de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les pas autorisés sur ces chemins de façon à avoir une croissance linéaire du poids du plus long chemin. Cet axe a des implications immédiates sur des problématiques de fiabilité et de passage à l'échelle liées à la diffusion de données sur des réseaux de connexions réels entre terminaux [8, 9].

Un autre problème évoqué au cours de cette thèse reste ouvert, il s'agit de la condition de moment sur les poids des sites pour que le poids du plus long chemin vérifie une loi des grands nombres. En effet, une condition de second moment semblerait être suffisante pour établir une loi des grands nombres sur le poids du plus long chemin. La condition présentée au chapitre 4 de cette thèse est quant à elle intimement liée à la preuve proposée.

L'étude asymptotique des plus longs chemins sur des graphes généraux serait une première étape pour aborder des problèmes de points fixes pour des familles plus générales de systèmes à événements discrets, à l'image de ce qui a été présenté au chapitre 4. Une file d'attente est un exemple simple de graphes d'événements [10]. On peut envisager d'étendre aux graphes d'événements généraux ou encore à la classe plus générale des réseaux de Petri pour lesquels nous souhaiterions prouver un théorème de points fixes pour les lois des arrivées et des départs. Étant donnée l'utilisation de l'algèbre  $(\max, +)$  pour exprimer la

## Conclusion et Perspectives

---

concurrence et la synchronisation s'y produisant, ces deux familles s'avèrent adaptées au cadre de plus long chemin sur des graphes évoqué plus haut.

Ces modèles généraux peuvent être considérés, également, dans le cadre des grandes déviations à l'image du chapitre 5, d'une part pour étudier des problèmes liés à la saturation de ces systèmes, mais également pour avoir des candidats pour ces points fixes à l'image de l'inclinaison exponentielle pour la file simple.

# Bibliographie

- [1] D. Aldous and P. Diaconis. Hammersley’s interacting particle process and longest increasing subsequences. *Prob. Theory and Related Fields*, 103 :199–213, 1995.
- [2] D. Aldous and P. Diaconis. Longest increasing subsequences : from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 4 :413–432, 1999.
- [3] V. Anantharam. Probabilistic proof of the interchangeability of  $\cdot/M/1$  queues in series. *Queueing Systems Theory Appl.*, 4(2) :387–392, 1987.
- [4] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues*. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [5] F. Baccelli, A. Borovkov, and J. Mairesse. Asymptotic results on infinite tandem queueing networks. *Probability Theory Related Fields*, 118(3) :365–405, 2000.
- [6] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of Queueing Theory*. Number 26 in Applications of Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [7] F. Baccelli and P. Brémaud. *Modélisation des réseaux de télécommunication*. Majeure de Mathématiques Appliquées. École Polytechnique, 1994.
- [8] F. Baccelli, A. Chaintreau, Z. Liu, and A. Riabov. The one-to-many tcp overlay : A scalable and reliable multicast arch. Technical Report RR-5241, INRIA, 2004.
- [9] F. Baccelli, A. Chaintreau, Z. Liu, A. Riabov, and S. Sahu. Scalability of reliable group communication using overlays. Technical Report RR-4895, INRIA, 2003.
- [10] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [11] Y. Baryshnikov. GUEs and queues. *Probability Theory and Related Fields*, 119 :256–274, 2001.
- [12] A.S. Bedekar and M. Azizoglu. The information-theoretic capacity of discrete-time queues. *IEEE Trans. Info. Theory*, 44(2) :446–461, 1998.
- [13] P. Brémaud. *Point Processes and Queues-Martingale Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, 1981.
- [14] P. Brémaud. *Markov chains : Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*, volume 31 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [15] H. Bruneel and B.G. Kim. *Discrete models for communication Systems including ATM*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [16] P.J. Burke. The output of a queueing system. *Operations Research*, 4 :699–704, 1956.

## Bibliographie

---

- [17] P.J. Burke and J. Hsu. Behavior of tandem buffers with geometric input and markovian output. *IEEE Trans. Comm.*, 24 :358–361, 1976.
- [18] C.S. Chang. On the input-output map of a G/G/1 queue. *J. Appl. Prob.*, 31(4) :1128–1133, 1994.
- [19] C.S. Chang. Stability, queue length and delay of deterministic and stochastic queueing networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :913–931, 1994.
- [20] J.W. Cohen. *The single server queue*. North-Holland, 1982.
- [21] H. Cohn, N. Elkies, and J. Propp. Local statistics for random domino tilings of the aztec diamond. *Duke Math. J.*, 85 :117–166, 1996.
- [22] C. Courcoubetis, G. Kesidis, A Ridder, J Walrand, and R. Weber. Admission control and routing in ATM networks using inference from measured buffer occupancy. *IEEE Transactions on Communications*, 43 :1778–1784, 1995.
- [23] J. Cox, A. Gandolfi, P. Griffin, and H. Kesten. Greedy lattice animals I : upper bounds. *Annals Appl. Prob.*, 3(4) :1151–1169, 1993.
- [24] D. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1988.
- [25] A. Dembo and T. Zajic. Large deviations : from empirical mean and measure to partial processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 57 :197–224, 1995.
- [26] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Jones and Barlett, Boston, 1993.
- [27] R.L. Dobrushin and E.A. Pechersky. Large deviations for random processes with independent increments on infinite intervals. In *Probability theory and mathematical statistics*, pages 41–47. Gordon and Breach, 1996.
- [28] M. Draief. The single server queue : Large deviations and fixed points. Technical report, LIAFA, 2004.
- [29] M. Draief and J. Mairesse. Services within a busy period of an M/M/1 queue and Dyck paths. *Accepted in Queueing Systems*, 2004.
- [30] M. Draief, J. Mairesse, and N. O’Connell. Joint Burke’s theorem and RSK representation for a queue and a store. In C. Banderier and C. Krattenthaler, editors, *Discrete Random Walks, DRW’03*, volume AC, pages 69–82, Institut Henri Poincaré, Paris, 2003.
- [31] M. Draief, J. Mairesse, and N. O’Connell. Queues, Stores, and Tableaux. *submitted*, 2004.
- [32] N. Duffield and N. O’Connell. Large deviations and overflow probabilities for the general single server queue, with applications. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 118(1), 1995.
- [33] P. Ferrari and L. Fontes. The net output process of a system with infinitely many queues. *Ann. Applied Prob.*, 4(4), 1994.
- [34] P. Flajolet and F. Guillemin. The formal theory of birth-and-death processes, lattice path combinatorics, and continued fractions. *Advances in Applied Probability*, 32 :750–778, 2000.

- 
- [35] W. Fulton. *Young tableaux : With applications to representation theory and geometry*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [36] A. Gandolfi and H. Kesten. Greedy lattice animals II : linear growth. *Annals Appl. Prob.*, 4(1) :76–107, 1994.
- [37] A. Ganesh and N. O’Connell. A large deviation principle with queueing applications. *Stochastics and Stochastic Reports*, 73(1-2) :25–35, 2002.
- [38] A. Ganesh, N. O’Connell, and B. Prabhakar. Invariant rate functions for discrete-time queues. *Annals of Applied Probability*, 13(2) :446–474, 2003.
- [39] A. Ganesh, N. O’Connell, and D. Wischik. *Big Queues*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [40] A.J. Ganesh and N. O’Connell. The linear geodesic property is not generally preserved by a FIFO queue. *Annals of Appl. Prob.*, 8(1) :98–111, 1998.
- [41] P. Glynn and W. Whitt. Departures from many queues in series. *Annals Appl. Prob.*, 1(4) :546–572, 1991.
- [42] P. Glynn and W. Whitt. Large deviations behavior of counting processes and their inverses. *Queueing Systems*, 17 :107–128, 1994.
- [43] P. Glynn and W. Whitt. Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue. *Journal of Applied Probability*, 31A :131–156, 1994.
- [44] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics : a foundation for computer science. 2nd edition*. Addison-Wesley, 1994.
- [45] AP. Greenberg, O. Schlunk, and W. Whitt. Using distributed-event simulation to study departures from many queues in series. *Proba. Engineering and Informational Sc.*, 7 :159–186, 1993.
- [46] F. Guillemin and D. Pinchon. On the area swept under the occupation process of an M/M/1 queue in a busy period. *Queueing Systems Theory and Application*, 29(2-4) :383–39, 1998.
- [47] B.M. Hambly, J.B. Martin, and N. O’Connell. Pitman’s 2M-X theorem for skip free random walks with markovian increments. *Electronic Communications in Probability*, 1 :73–77, 2001.
- [48] J. Harrison and R. Williams. On the quasireversibility of a multiclass Brownian service station. *Ann. Probab.*, 18(3) :1249–1268, 1990.
- [49] C. Jacobi. De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum. *Journal de Crelle*, 22 :360–371, 1841.
- [50] W. Jockusch, J. Propp, and P. Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem. Unpublished manuscript, 1995.
- [51] S. Karlin and J. Mc Gregor. The classification of birth and death processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 86 :366–401, 1957.
- [52] S. Karlin and J. Mc Gregor. The differential equation of birth and death processes and Stieltjes moment problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 :489–546, 1957.
- [53] S. Karlin and J. Mc Gregor. Linear growth birth and death processes. *J. Math. Mech.*, 7 :643–662, 1958.

## Bibliographie

---

- [54] F. Kelly. Notes on effective bandwidth. In F. Kelly and I. Ziedens, editors, *Stochastic Networks*, pages 141–168. Oxford University Press, 1996.
- [55] F.P. Kelly. *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, New-York, 1979.
- [56] F.P. Kelly. Effective bandwidths at multi-class queues. *Queueing Systems Theory and Application*, 9 :5–15, 1991.
- [57] J. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Annals of Probability*, 1 :883–909, 1973.
- [58] C. Kipnis. Central limit theorems for infinite series of queues and applications to simple exclusion. *Annals of Probability*, 14 :397–408, 1986.
- [59] D.E. Knuth. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pac. J. Math.*, 34(5) :709–727, 1970.
- [60] H. Kobayashi. Discrete-time queueing systems. In Probability Theory and Computer Science, editors, *G. Louchard and G. Latouche*, pages 53–85, London, United Kingdom, 1983.
- [61] W. König, N. O’Connell, and S. Roch. Non-colliding random walks, tandem queues, and discrete orthogonal polynomial ensembles. *Electronic Journal of Probability*, 7(5) :1–24, 2002.
- [62] T. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [63] R. Loynes. The stability of a queue with non-independent interarrival and service times. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 58 :497–520, 1962.
- [64] J. Mairesse and B. Prabhakar. On the existence of fixed points for the  $./GI/1$  queue. Liafa research report 99/25, Université Paris VII, 1999.
- [65] J. Mairesse and B. Prabhakar. On the existence of fixed points for the  $./GI/1$  queue. *Ann. of Prob.*, 31(4) :2216–2236, 2003.
- [66] L. Manivel. *Cours spécialisés*. Maison de la SMF, Marseille, 1998.
- [67] J. Martin. Large tandem queueing networks with blocking. *Queueing Systems*, 41 :45–72, 2002.
- [68] J. Martin. Linear growth for greedy lattice animals. *Stoch. Proc. App.*, 98(1) :43–66, 2002.
- [69] P.M. Morse. Stochastic properties of waiting times. *Operations Research*, 3 :256, 1955.
- [70] T. Mountford and B. Prabhakar. On the weak convergence of departures from an infinite sequence of  $./M/1$  queues. *Annals Appl. Prob.*, 5(1) :121–127, 1995.
- [71] E.G. Muth. The reversibility property of production lines. *Management Sciences*, 25(2) :152–158, 1979.
- [72] G.G. O’Brien. Some queueing problems. *J. Soc. Indust. Appl. Maths*, 2 :134, 1954.
- [73] N. O’Connell. Directed percolation and tandem queues. Technical report, DIAS, 1999.
- [74] N. O’Connell. Random matrices, non-colliding processes and queues. Technical report, Séminaire de Proba XXXVI, 2002.
- [75] N. O’Connell. Conditioned random walks and the RSK correspondance. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 36 :3049–3066, 2003.

- 
- [76] N. O’Connell. A path-transformation for random walks and the RS correspondance. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(9) :3669–3697, 2003.
- [77] N. O’Connell and M. Yor. Brownian analogues of Burke’s theorem. *Stoch. Proc. Appl.*, 96(2) :285–304, 2001.
- [78] N. O’Connell and M. Yor. A representation for non-colliding random walks. *Electronic Communications in Probability*, 7(1) :1–12, 2002.
- [79] J.W. Pitman. One dimensional brownian motion and three dimensional Bessel process. *Adv. Appl. Probab.*, 7 :511–526, 1975.
- [80] J.W. Pitman and L.C.G. Rogers. Markov functions. *Ann. Probab.*, 9 :573–582, 1981.
- [81] B. Prabhakar. On the attractiveness of the fixed points of a  $\cdot/GI/1$  queueing operator. *Ann. of Prob.*, 31(4) :2237–2269, 2003.
- [82] E. Reich. Waiting times when queues are in tandem. *Ann. Math. Stat.*, 28 :527–530, 1957.
- [83] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Paris, 1999.
- [84] P. Robert. *Réseaux et files d’attente : méthodes probabilistes*, volume 35 of *Math. et Applications*. Springer, 2000.
- [85] H. Rost. Non-equilibrium behavior of a many particle process : density profile and local equilibria. *Z. Warsch. Verw. Gebiete*, 58 :41–53, 1981.
- [86] B.E. Sagan. *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions (Second Edition)*. Springer, 2001.
- [87] T. Seppäläinen. Exact limiting shape of the first passage percolation on the plane. *Ann. Prob.*, 26 :1232–1250, 1998.
- [88] T. Seppäläinen. Hydrodynamic scaling, convex duality, and asymptotic shapes of growth models. *Markov Process. Related Fields*, 4 :1–26, 1998.
- [89] A. Shwartz and A. Weiss. *Large Deviations for Performance Analysis*. Chapman and Hall, London, 1995.
- [90] R. Srinivasan. Queues in series via interacting particle systems. *Math. Oper. Res.*, 18(1) :39–50, 1993.
- [91] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume I*. Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986.
- [92] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume II*. Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986.
- [93] W. Szczotka and F. Kelly. Asymptotic stationarity of queues in series and the heavy traffic approximation. *Annals of Probability*, 18(3) :1232–1248, 1990.
- [94] L. Takács. *Introduction to the theory of queues*. Oxford University Press, 1962.
- [95] L. Takagi. *Queueing Analysis Vol. 3 : Discrete-time systems*. North-Holland, 1993.
- [96] M. Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 82 :73–205, 1995.
- [97] R. Weber. The interchangeability of  $\cdot/M/1$  queues in series. *J. Appl. Probab.*, 16 :690–695, 1979.

## Bibliographie

---

# Table des figures

1	Processus de charge, son dual et le processus zig-zag . . . . .	2
1.1	File d'attente avec services inutilisés. . . . .	10
1.2	Evolution de la file d'attente entre les instants $n = 1$ et $n = 9$ . . . . .	12
1.3	Trajectoire de $q_1$ pour l'exemple de Tab.1. . . . .	13
1.4	Files d'attente en tandem. . . . .	17
1.5	Séries de files d'attente en tandem. . . . .	22
1.6	Diagramme de Ferrer (gauche) et tableau de Young (droite). . . . .	24
1.7	L'algorithme RSK, avec insertion en colonne, appliqué à $w = 3122123$ . . . . .	26
1.8	RSK colonne classique vs. RSK colonne revisité. . . . .	27
1.9	Interprétation à l'aide de files d'attente de l'algorithme RSK. . . . .	28
1.10	L'algorithme RSK, avec insertion en ligne, appliqué à $w = 3122123$ . . . . .	31
1.11	L'algorithme RSK, avec insertion en ligne, appliqué à $w^* = 3212213$ . . . . .	31
2.1	Processus $W$ et $\overline{W}$ associés respectivement aux variables d'entrée $(\mathcal{A}, s)$ et $(\mathcal{D}, r)$ . . . . .	37
2.2	Numérotation des $\{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . . . . .	38
2.3	Preuve de la proposition 2.3.1. . . . .	44
2.4	Les volumes en gris valent $P_2(y_0, y_1)$ (gauche) et $P_3(y_0, y_1, y_2)$ (droite). . . . .	46
2.5	L'application $\Psi : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ . . . . .	50
3.1	Processus de charge, son dual et le processus zig-zag . . . . .	56
3.2	Le modèle de Stockage . . . . .	57
3.3	Files et magasins en ordre opposé . . . . .	60
3.4	Théorème Central Limite pour l'instant de départ d'une série de files en tandem . . . . .	61
3.5	Un chemin dans $\Pi$ (plein) et un chemin dans $\tilde{\Pi}$ (discontinu) . . . . .	64
3.6	Illustration du lemme 3.3.3 . . . . .	65
4.1	Concavité de $\gamma$ . . . . .	79

## Table des figures

---

# Index

- Algorithme RSK insertion en colonne, 25
- Algorithme RSK insertion en ligne, 30
- Animal de grille, 75
- Animal de grille glouton, 75
- Approximation polygonale, 96
  
- Bande passante, 94
- Bande passante effective, 94
  
- Chemin de Dyck, 41
- Chemin orienté, 20
- Correspondance RSK, 25
  
- Diagramme de Ferrer, 24
  
- Equation de Lindley, 10, 36
- Equivalence exponentielle, 90
- Excursion, 44
  
- Files/Magasins, 53
- Fonction de Schur, 32, 66
- Fonction de taux, 88
- Fonction de Vandermonde, 32
- Forme d'un tableau de Young, 25
  
- Inégalité de Hölder, 88
- Inégalité de Jensen, 102
- Inclinaison exponentielle, 104
  
- Lemme de Borel-Cantelli, 82
- Lemme de Fatou, 88
- Limite hydrodynamique, 21
- Log-transformée de Laplace, 88
- Loi forte des grands nombres, 87
- Longueur d'une période d'activité, 38
  
- Nombres de Catalan, 41
  
- Période d'activité, 38
  
- Période de repos, 38
- Partition, 24
- Plus longue sous-suite croissante, 61
- Point Fixe, 73
- Principe de contraction, 89
- Principe de grandes déviations, 88
- Principe de grandes déviations fonctionnels, 97
- Principe du terme dominant, 91
- Processus de charge, 37
- Processus de naissance et de mort, 39
- Processus du nombre (total) de clients, 38
- Processus ponctuel, 36
- Processus ponctuel marqué, 36
- Processus renversé, 38
- Processus zig-zag, 55
- Propriété sans mémoire, 43
  
- Quasi-réversibilité, 15
  
- Services inutilisés, 11
  
- Tableau de Young semi-standard, 24
- Tableau de Young standard, 25
- Temps d'attente, 37
- Temps passé en fin de file d'attente, 36
- Théorème central limite, 87
- Théorème de Birkhoff, 80
- Théorème de Cramér, 89
- Théorème de Donsker, 61
- Théorème de Prohorov, 84
- Théorème de Tychonoff, 84
- Transformée de Legendre, 21, 88
- Type d'un tableau, 32
  
- Variables d'entrée, 13
- Variables de sortie, 13



## Résumé

Le théorème de Burke est un résultat classique en théorie des files d'attente. Il établit que le processus de départ d'une file M/M/1 est un processus de Poisson de même intensité que le processus des arrivées. Nous présentons des extensions de ce résultat à la file d'attente et au modèle de stockage. Nous abordons ensuite l'étude de ces systèmes en tandem et en régime transitoire. Nous prouvons que les équations qui régissent la dynamique des deux systèmes (file d'attente et modèle de stockage) sont les mêmes alors que les variables pertinentes sont différentes selon le modèle qui nous intéresse. En utilisant des analogies entre ces systèmes et l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth, nous donnons une preuve élégante de la propriété de symétrie de chacun des deux systèmes. Nous nous intéressons également aux corrélations entre les services des clients successifs au sein d'une période d'activité. Nous nous revenons par la suite au théorème de Burke que l'on peut voir comme étant un résultat de point fixe : le processus de Poisson est un point fixe pour la file d'attente avec des lois de service exponentielles. Nous prouvons des résultats de points fixes dans le cadre des grandes déviations où les variables d'entrée sont décrites par le biais de leurs fonctions de taux.

**Mots-clefs** : file d'attente, modèle de stockage, réversibilité, points fixes, grandes déviations, algorithme de Robinson-Schensted-Knuth, chemins sur la grille.

## Abstract

A cornerstone result in queueing theory due to Burke states that the departure process from a stationary M/M/1 queue is a Poisson process having the same intensity as the arrival process. I proved different extensions of this theorem to the single server queue and to the storage model. Furthermore, I looked at these models in tandem in the *transient regime*. I showed that these models are dual in a strong fashion. Indeed I proved that the equations governing the dynamics of both models (queue and store) are the same even though the interesting variables are different whether we are interested in the queueing model or in the storage model. I use this duality to give an elegant proof, using analogies with the Robinson-Schensted-Knuth algorithm, of the property of symmetry of both systems. Moreover I explored the correlations between the laws of the services of successive customers belonging to the same busy period. Burke's theorem can be seen as a fixed point result : the Poisson process is a fixed point for the queue with exponential service times. I explored fixed points for the single server queue and the storage model in the context of large deviations where the arrivals and the services are described by means of their rate functions.

**Keywords** : single server queue, storage model, reversibility, fixed points, large deviations, Robinson-Schensted-Knuth algorithm, paths on the grid.

