



HAL
open science

Un schéma aux volumes finis avec matrice signe pour les systèmes non homogènes

Slah Sahmim

► **To cite this version:**

Slah Sahmim. Un schéma aux volumes finis avec matrice signe pour les systèmes non homogènes. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2005. Français. NNT : . tel-00010000

HAL Id: tel-00010000

<https://theses.hal.science/tel-00010000>

Submitted on 30 Aug 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : Mathématiques appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

Slah SAHMIM

le 15 juin 2005

Titre :

**Un schéma aux volumes finis avec matrice signe
pour les systèmes non homogènes**

JURY

M.	François Alouges	, Rapporteur
M.	Claude Basdevant	, Examineur
M.	Fayssal Benkhaldoun	, Directeur de thèse
M.	Hervé Guillard	, Rapporteur
Mme	Anela Kumbaro	, Examinatrice
Mme	Laure Quivy	, Examinatrice

Remerciements

J'aimerais exprimer ici ma reconnaissance à tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de cette thèse. Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse monsieur Fayssal BENKHALDOUN qui m'a proposé ce sujet, et m'a fait confiance pour faire mon propre chemin dans la recherche en mathématiques. Je le remercie très chaleureusement pour sa disponibilité, son aide et ses conseils qui se sont toujours révélés très enrichissants et décisifs. Je voudrais remercier ensuite très chaleureusement messieurs François ALOUGES et Hervé GUILLARD pour le travail qu'ils ont effectué en rapportant sur cette thèse. Mes vifs remerciements vont également à monsieur Claude BASDEVANT et Mesdames Anela KUMBARO et Laure QUIVY, membres du jury, pour avoir accepté de juger ce travail. Je tiens par ailleurs à remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques et tout le personnel de l'université Paris 13 disponible et professionnel. J'exprime également ma reconnaissance au groupe de travail "Mécanique des Fluides Réels" à l'ENS Cachan, et à ses membres, en particulier les professeurs Jean Michel GHIDAGLIA, Florian DE VUYST, Gérard Le COQ, Frédéric PASCAL, Laurent DESVILLETES, et tous les autres. En effet, j'ai pu exposer régulièrement dans ce cadre, l'état d'avancement de mes travaux, et bénéficier de remarques et de suggestions déterminantes. Je n'oublie pas non plus les membres du laboratoire de mathématiques de la Faculté des sciences et techniques de Marrakech, pour m'avoir accueilli pour un stage en début de thèse, en particulier monsieur le professeur Said RAGHAY, de même que monsieur le professeur Driss OUAZAR de l'Ecole Mohamedia d'Ingénieurs de Rabat qui s'est intéressé à ma thèse, et l'a enrichie par quelques réflexions. Je tiens aussi à remercier le groupe de travail de Paris 12 et à ses membre qui m'ont permet d'exposer mes travaux. Enfin je n'en serais pas là sans l'aide et l'impulsion désintéressé, qui m'a été donnée par tous les professeurs de mon parcours étudiantin en Tunisie, que ce soit au primaire, au secondaire, ou dans l'enseignement supérieur. Qu'ils soient tous ici chaleureusement remerciés.

Sur un registre Personnel, je tiens à remercier mes parents et l'ensemble de ma famille qui a toujours été présente. Je ne citerais pas de nom de peur d'en oublier.

Table des matières

Introduction Générale	5
1 Développement de schémas numériques aux Volumes Finis pour des problèmes non homogènes	15
1.1 Introduction	15
1.2 Présentation du problème ; formulation faible	16
1.3 Méthode des Volumes Finis	16
1.3.1 Construction de la méthode en 1D	16
1.4 Un schéma proposé pour les problèmes non homogènes : le schéma SRNH	18
2 Solveur de Riemann Non Homogène : Analyse dans le cas homogène 1D	25
2.1 Introduction	25
2.2 Analyse du schéma SRNH dans le cas scalaire	26
2.2.1 Cas linéaire	27
2.2.2 Cas non linéaire	29
2.2.3 Le paramètre de contrôle dans l'étape prédicteur	33
2.2.4 Résultats numériques	35
2.3 Étude du schéma SRNH dans le cas de systèmes homogènes	39
2.3.1 Cas linéaire	39
2.3.2 Paramètre de contrôle sous forme matricielle	41
2.3.3 Cas non linéaire	43

2.3.4	Modification entropique	47
2.3.5	Résultats numériques	50
3	Schéma SRNHS - Application aux problèmes hyperboliques non homogènes	59
3.1	Introduction	59
3.2	Cas scalaire non homogène	60
3.2.1	Équation linéaire avec terme source linéaire en u	61
3.2.2	Équation de Burgers avec terme source	65
3.2.3	Application Numérique	67
3.3	Système non linéaire et non homogène	69
3.3.1	Application du schéma SRNHS pour le problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière	70
3.3.2	Comparaison du schéma SRNHS avec d'autres schémas	72
3.3.3	Extension du schéma SRNHS à un ordre élevé	74
3.3.4	Résultats Numériques	75
4	Application du schéma SRNHS au problème de Ransom 1D	87
4.1	Introduction	87
4.2	Modèle bi-fluide	89
4.3	Description de la méthode	90
4.4	Extension du schéma SRNHS pour le système bifluide non symétrisable	93
4.5	Application Numérique - Robinet de Ransom	95
5	Analyse du schéma SRNH pour des systèmes homogènes dans le cas multidimensionnels	101
5.1	Introduction	101
5.2	Analyse des schémas aux volumes finis dans le cas scalaire	104
5.2.1	Schéma de Rusanov	104
5.2.2	Schéma SRNH pour un cas simple	108
5.2.3	Généralisation du schéma SRNH	114

5.2.4	La matrice signe dans l'étape prédicteur	119
5.2.5	Résultat Numérique	120
5.3	Analyse des schémas aux volumes finis dans le cas d'un système . . .	122
5.3.1	Schéma de Rusanov	122
5.3.2	Analyse du schéma SRNH 2D	125
5.4	Résultats Numériques	131
5.4.1	Les équations de Saint-Venant	131
5.4.2	Problème d'Euler	134
6	Application du schéma SRNHS pour des systèmes non homogènes multidimensionnels	139
6.1	Introduction	139
6.2	Extension du schéma SRNHS au problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière en dimension 2	141
6.2.1	Description de la méthode	141
6.2.2	Extension à l'ordre 2 en espace (MUSCL)	143
6.2.3	Application Numérique	145
6.3	Extension du schéma SRNHS au problème diphasique en dimension 2	156
6.3.1	Modèle Diphasique	156
6.3.2	Les lois de fermeture	156
6.3.3	Relation de fermeture de la pression fluctuantes	157
6.4	Réduction mathématique du modèle diphasique	157
6.5	Description de la méthode	159
6.5.1	La méthode itérative	159
6.5.2	La méthode de perturbation par densité	160
	Conclusion et perspectives	165

Introduction Générale

Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique d'un nouveau schéma aux volumes finis dédié au systèmes non homogènes, à son application à la simulation numérique efficace de problèmes monodimensionnels, et à son extension aux problèmes bidimensionnels.

Un grand nombre de problèmes de la mécanique des fluides sont non homogènes ou régis par des équations hyperboliques avec des termes sources. On peut citer par exemple Stoker (1957) [Sto57], pour les problèmes de propagation d'ondes en eau peu profonde, avec termes de pente et de frottement, ou bien Ouazar (1999) [BCSH99] pour les problèmes d'écoulements d'eau dans les nappes, et notamment de l'intrusion d'eau salée dans les nappes côtières. Pour les problèmes de combustion, Leveque et Yee (1990) [LY90], ont mis en évidence la raideur introduite par le terme source d'Arrhénius, et l'écart induit entre les vitesses théoriques et numériques de propagation d'une flamme. Benkhaldoun et ses co-auteurs [BBG94, EBV⁺99, EBBR04], ont réalisé des calculs d'inflammation de gouttes, où la raideur du problème est traitée par l'utilisation de maillages adaptatifs. De manière générale, le terme source peut être dû aux effets physiques (forces extérieures, réaction chimique...) ou aux effets géométriques (problèmes axi-symétriques ou cylindriques, conduite à section variable...). Les problèmes d'inondations régis par les équations bien connues de Saint-Venant avec terme source, de même que les problèmes diphasiques à une ou deux pressions, constituent également des exemples de problèmes non homogènes.

Les équations de Saint-Venant régissent un écoulement à surface libre en eau peu profonde, soumis à la force de gravité. Des problèmes classiques gouvernés par de tels systèmes, sont les ruptures de barrages, les crues, ou les estuaires. Ces systèmes peuvent poser des grands problèmes de nature numérique en présence de discontinuités de la topographie, de profils de rivière/vallée très irréguliers, de fond sec, ou de phénomènes locaux tels les ressauts hydrauliques.

Un écoulement diphasique est un écoulement constitué d'un mélange de deux phases, comme par exemple la présence de bulles de gaz dans un liquide. Il y a des situations diverses où peuvent apparaître ce type d'écoulements (coeurs et générateurs de vapeur des réacteurs nucléaires à eau pressurisée, pipelines de transport d'effluents pétroliers, chambre des moteurs à combustion internes, ...). Cette large gamme d'applications conduit à de nombreux modèles rendant chacun compte d'un type de

configuration donnée. On peut citer en particulier le modèle diphasique à pression commune, décrit par un système non hyperbolique, et qui pose de grandes difficultés lors de sa simulation numérique par les schémas de volumes finis décentrés classiques. Tandis que dans le modèle diphasique à deux pressions, qui est hyperbolique, la pression peut être discontinue à l'interface et des phénomènes d'interaction entre phases peuvent apparaître au travers de termes sources fortement non linéaires et constituer une difficulté supplémentaire.

D'une façon générale, ces problèmes ont lieu dans des domaines à géométrie complexe, et ont un caractère non linéaire, ce qui rend difficile leur simulation par les méthodes des éléments finis ou différences finies, d'où la nécessité d'introduire la méthode des volumes finis qui relève d'une approche physico-mathématique, basée sur l'écriture des lois de bilans, et favorisant la forme intégrale des équations. L'analyse des schémas numériques pour les lois de conservation homogènes a été menée entre autre par Raviart et Godlewski (1991 et 1996) [GR96, GR91]. Par ailleurs la théorie des équations hyperboliques scalaires avec termes source a été établie notamment par Krushkov (1970) [Kru70].

Les schémas numériques pour les systèmes non homogènes ou non-conservatifs, ont fait l'objet de plusieurs études ces dernières années. Pour surmonter les difficultés présentées par de tels systèmes, un travail considérable a été réalisé (voir par exemple I. Toumi et A. Kumbaro 1996) [TK96], et J. M. Ghidaglia [GKLC01] pour les écoulements diphasiques à une pression. Pour la simulation numérique des écoulements diphasiques à deux pressions parmi les méthodes appliquées on note le schéma de VFRoe [Seg02], l'analyse et l'extension pour les problèmes à faible nombre de Mach a été mené par Guillard et Murrone [Mur03, GM04]. Pour les écoulements avec termes sources, on doit mentionner notamment les schémas d'équilibre étudiés par Bermúdez et Vázquez (1994) [BV94], Greenberg et Leroux (1996) [GL96], Leroux [CLS04], Gosse (1996) [Gos98], et Vazquez (1999) [VC99]. L'idée principale dans cette approche est d'écrire un schéma assurant une représentation précise des états stationnaires. Cela implique un équilibre entre le terme de transport et le terme source, et se traduit par le décentrement de ce dernier.

Dans T. Gallouët J. M. Herard, N. Seguin, (2003) [GHS03], les auteurs considèrent un exemple intéressant de systèmes non homogènes : l'écoulement d'eau peu profonde sur une topographie déformée. Supposant un fond plat par morceaux, (voir Chinnayya A, et Le Roux AY, 1999) [CLR99], ils développent un schéma numérique non conservatif adéquat, basé sur la solution approchée de ce problème particulier de terme source. Une exploitation ingénieuse est faite de la solution des problèmes linéarisés, en particulier à proximité des discontinuités stationnaires de contact situées sur le saut de la topographie. Des résultats très précis sont obtenus dans différentes configurations comprenant les cas d'occurrence de vide.

Précisons que les méthodes citées, se fondent pour l'essentiel sur des solveurs approchés de Riemann [Roe81]. Cela implique la détermination des champs propres d'une Jacobienne approchée associée au système. Cette détermination se fait, dans

le cas des systèmes diphasiques par exemple, généralement par le biais de calculs approximatifs plus ou moins ardu, et conduit à varier le traitement en fonction du régime d'écoulement considéré. Cela peut être coûteux mais incontournable pour des écoulements relativement complexes.

Cependant, pour une large gamme de systèmes non homogènes, incluant des écoulements diphasiques, et des écoulements avec termes sources (éventuellement non bornés), on peut envisager de développer des schémas n'ayant pas recours aux calculs complexes évoqués plus haut.

Dans Paillère H., Corre C., Garcia Cascales J.R., (2003) [PCGC03], les auteurs font l'extension de la méthode AUSM+ (Advection Upwind Splitting Scheme) de Liou [Lio00, Lio96, LS93] à un modèle diphasique compressible. C'est un exemple de schéma qui n'exige aucune analyse caractéristique par décomposition champs par champs, puisque l'idée principale est la décomposition du flux numérique en une partie convectrice associée au flux de masse, et un terme de pression. Par conséquent les auteurs évitent ici le recours à un solveur de Riemann linéarisé. Cependant, la méthode a besoin de l'évaluation de quantités moyennes (vecteurs d'advection, pression, quantité de mouvement) employant des fonctions polynômes, ce qui peut être consommateur en temps dans certains cas.

Notre but dans ce travail est de considérer une classe particulière de systèmes non conservatifs; à savoir ceux pour lesquels on suppose que la solution du problème associé de Riemann est autosimilaire. Cette classe de problèmes est assez large cependant, et peut contenir divers phénomènes tels que les écoulements diphasiques, ou les écoulements d'eau peu profonde avec topographie irrégulière.

Nous nous basons pour cela sur le schéma Solveur de Riemann Non Homogène (SRNH) proposé par F. Benkhaldoun [Ben02], que nous modifions, en introduisant une vitesse de Rusanov, en vue de son extension au cas bidimensionnel. En effet, comme on le rappellera par la suite, le schéma (SRNH) est constitué de deux étapes, dont la première, que nous avons appelé étape prédicteur, consiste à écrire à l'interface de deux cellules, une approximation décentrée de la solution approché faisant intervenir un paramètre de contrôle scalaire.

L'analyse de stabilité de ce schéma dans le cas homogène, révèle que le respect de quelques conditions suffisantes pour le principe du maximum amène à réécrire la phase prédicteur du schéma en introduisant le signe d'une matrice, dite de décentrement de l'état. Ce signe peut être déterminé soit par décomposition spectrale (valeur propre et vecteur propre d'une matrice simplifiée), soit par une méthode itérative utilisée par F. Alouges [Alo98] basée sur l'algorithme de Newton Schultz, et qui calcule directement le signe de la matrice. Un nouveau schéma apparaît alors qui s'identifie, dans le cas homogène, au schéma VFRoe introduit par T. Gallouët [MFG99], mais qui a ici une extension naturelle pour le cas non homogène et se révélera efficace aussi bien pour des problèmes d'écoulement d'eau que pour des problèmes diphasiques.

Dans le premier chapitre nous introduisons des rappels élémentaires sur les problèmes de Riemann, les solutions faibles et sur différents schémas de volumes finis. Ensuite nous rappelons le développement du schéma SRNH (Solveur de Riemann Non Homogène) destiné à la simulation numérique des systèmes non homogènes dans le cas $1D$, et enfin son extension aux problèmes non homogènes bidimensionnels.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous présentons une analyse mathématique du schéma de volumes finis (SRNH). On détermine en particulier les conditions de stabilité, de respect du principe du maximum et de monotonie, pour des problèmes homogènes scalaires linéaires et non linéaires. Pour les systèmes hyperboliques linéaires, on procède à une diagonalisation, permettant de ramener l'étude à un ensemble d'équations scalaires indépendantes. L'analyse de stabilité permet alors la détermination optimale d'un paramètre de contrôle sous forme matricielle, et conduit à une nouvelle expression du schéma aux volumes finis (SRNHS), présentant une matrice signe dans l'étape prédicteur. Pour les systèmes non linéaires, la linéarisation locale du problème, mène également à une nouvelle expression du schéma (SRNHS).

La validation de cette nouvelle version est réalisée, en un premier temps, sur des problèmes homogènes issus de la mécanique des fluides, tels que les systèmes de Burgers, Saint-Venant et Euler.

La version initiale du schéma (SRNH) ayant été écrite pour des systèmes non homogènes, on procède de manière naturelle, dans le deuxième chapitre, à l'extension du schéma (SRNHS) aux problèmes avec termes sources. On considère d'abord les cas scalaires linéaire et non linéaire, et on montre l'apport de cette nouvelle approche par rapport aux méthodes les plus récentes.

Ensuite on fait l'extension du schéma SRNHS aux systèmes non homogènes, et on présente des résultats de rupture de barrage sur fond discontinu et dans des cas où il y a assèchement. Cela constitue la première validation du schéma SRNHS dans un cas non homogène réaliste. Notons que pour tous les cas cités, on montre le respect de la propriété de conservation de l'état stationnaire introduite par Bermúdez et Vázquez [BV94, BDDV98]. Pour l'application du schéma SRNHS aux problèmes de Saint-Venant avec topographie présentant des points critiques, nous proposons une extension du schéma à l'ordre deux en espace en introduisant des limiteurs de pente au niveau de l'étape prédicteur.

Le quatrième chapitre est consacré à l'extension du schéma SRNHS aux problèmes diphasiques. Du fait que l'étape prédicteur du schéma nécessite le calcul du signe de la Jacobienne du flux physique, et du fait que le système diphasique conditionné n'est pas hyperbolique dans sa forme originelle (présence de valeurs propres complexes), on introduit un terme supplémentaire dans le système, correspondant à

une pression interfaciale $(p - p_k) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$ [Cor02, CDT98, Cor99, TK96] et on effectue une analyse dimensionnelle en termes de masses volumiques, proposée par Toumi et Cortes [CDT98]. Cela permet de définir un convecteur qui réalise le décentrement au niveau de l'étape prédicteur. Par ailleurs, dans les configurations où les valeurs propres ont des parties imaginaires relativement petites, on montre que l'on peut garder le système originel (sans terme de pression interfaciale) et on applique les idées proposées par F. Alouges [Alo98] s'appuyant sur l'algorithme de Newton-Schultz [KL93], afin de calculer directement le signe de la Jacobienne du système, ce qui permet en particulier de limiter la diffusion numérique. On a ainsi pu procéder à la simulation numérique d'un cas particulier du problème de Ransom, et produit des résultats de très bonne qualité.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons l'analyse de stabilité du schéma SRNH dans le cas bidimensionnel sur maillages non structurés. Dans un premier temps, l'analyse est menée pour le schéma de Rusanov ; nous effectuons ensuite une étude mathématique du schéma SRNH, et aboutissons à des conditions de stabilité et de monotonie pour des problèmes scalaires et pour des systèmes de lois de conservation. Cela permet d'écrire l'extension du schéma SRNHS au cas bidimensionnel et sa validation numérique dans les cas des systèmes de Saint-Venant et d'Euler homogènes, avec présentation de courbes de convergence.

Enfin dans le dernier chapitre nous appliquons la nouvelle version du schéma SRNHS pour le problème de Saint-Venant bidimensionnel avec topographie irrégulière. Pour la première phase du schéma, on introduit une projection du système sur la normale aux interfaces des volumes de contrôle, ce qui facilite l'approximation du terme source dans cette phase. Nous validons le schéma par des résultats numériques de grand efficacité sur des cas critiques à double singularité en faisant l'extension du schéma à l'ordre deux en espace grâce à la technique MUSCL. Pour finir, une extension formelle du schéma aux problèmes diphasiques bidimensionnels est proposée.

Bibliographie

- [Alo98] F. Alouges, *Matrice signe et systèmes hyperboliques*, Tech. report, rapport CMLA, 1998.
- [BBG94] F. Benkhaldoun, R. Borghi, and M. Gonzalez, *A nine point finite volume computation of droplet flame ignition*, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.* **114** (1994), 295–305.
- [BCSH99] J. Bear, A.H.D Cheng, D. Sorek, S. Ouazar, and I. Herrera, *Seawater intrusion in coastal aquifers - concepts, methods, practices*, dordrecht/boston/london ed., Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J-A. Desideri, and M. E. Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, FVCA3, HPS, R. Herbin, D.Kröner(Eds), *Proceedings of the Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Application*, 2002, pp. 269–276.
- [BV94] A. Bermudez and M. E. Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, *Comput. & Fluids* **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [CDT98] J. Cortes, A. Debussche, and I. Toumi, *A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems*, *J. Comput. Phys.* **147** (1998), no. 2, 463–484.
- [CLR99] A. Chinnayya and A.Y Le Roux, *A new general riemann solver for the shallow-water equations with friction and topography*, Available in the conservation law preprint server <http://www.math.ntnu.no/conservation/>, 1999.
- [CLS04] A. Chinnayya, A.-Y. Leroux, and N. Seguin, *A well-balanced numerical scheme for approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon*, *International Journal on Finite volume* (2004), (electronic).

- [Cor99] J. Cortes, *Etude des régimes transitoires d'écoulements diphasiques à faible rapport de densité*, Ph.D. thesis, Université de Paris XI centre d'Orsay, 1999.
- [Cor02] J. Cortes, *On the construction of upwind schemes for non-equilibrium transient two-phase flows*, *Computer & Fluids* **31** (2002), 159–182.
- [EBBR04] I. Elmahi, F. Benkhaldoun, R. Borghi, and S. Raghay, *A numerical study of unspherical ignition of a droplet*, accepté pour publication, 2004.
- [EBV⁺99] I. Elmahi, F. Benkhaldoun, R. Vilsmeier, O. Gloth, A. Patschull, and D. Hänel, *Finite volume simulation of a droplet flame ignition on unstructured meshes*, *J. Comput. Appl. Math.* **103** (1999), no. 1, 187–205, Applied and computational topics in partial differential equations (Gramado, 1997).
- [GHS03] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin, *Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography*, *Comput. & Fluids* **32** (2003), no. 4, 479–513.
- [GKLC01] J.-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method*, *Eur. J. Mech. B Fluids* **20** (2001), no. 6, 841–867.
- [GL96] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux, *A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), no. 1, 1–16.
- [GM04] H. Guillard and A. Murrone, *On the behavior of upwind schemes in the low mach number limit : Ii. godunov type schemes*, *Computers and Fluids* **33** (2004), no. 4, 655–675.
- [Gos98] L. Gosse, *A priori error estimate for a well-balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), no. 5, 467–472.
- [GR91] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, *Mathématiques & Applications (Paris)* [Mathematics and Applications], vol. 3/4, Ellipses, Paris, 1991.
- [GR96] ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [KL93] C. Kenney and A. G. Laub, *Rational iteration methods for the matrix sign function*, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **16** (1993), 489–505.
- [Kru70] S. N. Krushkov, *First order quasilinear equations with several space variables*, *Math. USSR. Sb* **10** (1970), 105–119.
- [Lio96] M.-S. Liou, *A sequel to AUSM : AUSM⁺*, *J. Comput. Phys.* **129** (1996), no. 2, 364–382.
- [Lio00] ———, *Mass flux schemes and connecting to shock instability*, *J. Comput. Phys.* **160** (2000), no. 2, 623–48.

- [LS93] M-S Liou and Christopher J. Steffen, Jr., *A new flux splitting scheme*, J. Comput. Phys. **107** (1993), no. 1, 23–39.
- [LY90] R. J. LeVeque and H. C. Yee, *A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, J. Comput. Phys. **86** (1990), no. 1, 187–210.
- [MFG99] J-M. Masella, I. Faille, and T. Gallouët, *On an approximate Godunov scheme*, Int. J. Comput. Fluid Dyn. **12** (1999), no. 2, 133–149.
- [Mur03] M. Murrone, *Modèle bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de mach*, Ph.D. thesis, Université de provence (Aix-Marseille I), 2003.
- [PCGC03] H. Paillère, C. Corre, and J. R. García Cascales, *On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 6, 891–916.
- [Roe81] P. L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Seg02] N. Seguin, *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*, Ph.D. thesis, Université de Provence, 2002.
- [Sto57] J. J. Stoker, *Water waves : The mathematical theory with applications*, Pure and Applied Mathematics, Vol. IV, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [TK96] I. Toumi and A. Kumbaro, *An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model*, J. Comput. Phys. **124** (1996), no. 2, 286–300.
- [VC99] M. E. Vázquez-C, *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, J. Comput. Phys. **148** (1999), no. 2, 497–526.

Chapitre 1

Développement de schémas numériques aux Volumes Finis pour des problèmes non homogènes

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons les caractéristiques du schéma ($SRNH$), qui s'écrit en deux étapes, et qui a été développé en se basant sur la propriété d'autosimilarité de la solution du problème de Riemann correspondant aux systèmes non homogènes considérés.

1.1 Introduction

La méthode des volumes finis est bien adaptée aux problèmes des lois de conservation. En effet cette méthode se base sur la forme intégrale du système (équations de bilan) et permet le calcul de solutions discontinues d'opérateurs non linéaires, pour des problèmes évoluant dans des domaines quelconques. On peut remarquer que cette méthode peut être vue comme une méthode d'éléments finis où les fonctions tests coïncident avec les fonctions caractéristiques de chaque cellule.

Dans ce chapitre, avant de présenter quelques schémas numériques Volumes Finis permettant la résolution de systèmes hyperboliques non homogènes, on va rappeler la définition d'une solution au sens des distributions ainsi que la construction de la méthode des Volume Finis.

1.2 Présentation du problème ; formulation faible

Dans un domaine $D \subset \mathbb{R}$, le système hyperbolique non homogène prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = Q(x, t, U), & \forall x \in D \subset \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ U(x, 0) = U_0(x), & \forall x \in D. \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec Q un terme source borné.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *Soit $U : D \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) U est une solution de (1.1) au sens des distributions (ou solution faible).*
- ii) Sur tout domaine $R \subset D \times [0, +\infty[$:*

$$\int_{\partial R} (U\eta_t + F(U)\eta_x) d\sigma = \int_R S(x, t, U) dx dt,$$

iii)

- 1. U est une solution classique de (1.1) là où U est \mathcal{C}^1 ,*
- 2. U satisfait la condition de Rankine-Hugoniot le long des courbes de discontinuités :*

$$s[U] = [F(U)].$$

1.3 Méthode des Volumes Finis

1.3.1 Construction de la méthode en 1D

Pour construire la méthode de volumes finis, on utilise la forme intégrale de l'équation (1.1) sur le domaine $R \subset D \times [0, +\infty[$. Soit $\eta = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_t \end{bmatrix}$, le vecteur normal unitaire extérieur à ∂R , frontière du domaine R .

En utilisant la proposition ii) du théorème 1.2.1, on a :

$$\int_{\partial R} (U\eta_t + F(U)\eta_x) d\sigma = \int_R Q(x, t, U) d\sigma.$$

CHAPITRE 1. DÉVELOPPEMENT DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES AUX
VOLUMES FINIS POUR DES PROBLÈMES NON HOMOGENÈS

On discrétise le domaine en espace et en temps en subdivisant D en intervalles successifs :

on pose $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $i \in \mathbb{Z}$, et $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, $n \in \mathbb{N}$.

On intègre l'équation (1.1) sur une cellule $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} & - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt + \\ & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t_{n+1}) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q(x, t, U) dx dt, \end{aligned} \quad (1.2)$$

et on choisit de prendre pour état moyen, la quantité

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t_n) dx.$$

Enfin, on pose

$$F(U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) = \phi(U_i^n, U_{i+1}^n). \quad (1.3)$$

ϕ représente le flux numérique à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, pour t compris entre t_n et t_{n+1} .

L'équation (1.2) devient :

$$\begin{aligned} & -\Delta x_i U_i^n + \Delta t_n \phi(U_i^n, U_{i+1}^n) + \Delta x_i U_i^{n+1} - \Delta t_n \phi(U_{i-1}^n, U_i^n) \\ & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q(x, t, U) dx dt. \end{aligned}$$

On peut alors écrire le schéma sous la forme suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - r_{n,i} [\phi(U_i^n, U_{i+1}^n) - \phi(U_{i-1}^n, U_i^n)] + \Delta t_n Q_i^n$$

où on a posé $r_{n,i} = \frac{\Delta t_n}{\Delta x_i}$.

Q_i^n est l'approximation du terme source, définie ici par $\frac{1}{\Delta x_i \Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q(x, t, U) dx dt$.

La détermination du flux numérique est le fondement même de la méthode des volumes finis.

Par exemple, pour la classe des Q -schémas, le flux numérique s'écrit :

$$\phi(U_i^n, U_{i+1}^n) = \frac{1}{2}(f(U_{i+1}^n) + f(U_i^n)) - \frac{1}{2}|Q(U_i^n, U_{i+1}^n)|(U_{i+1}^n - U_i^n).$$

Q est la matrice caractéristique du Q -schéma.

Dans le schéma de Roe, $Q(U_i^n, U_{i+1}^n) = A(\tilde{U})$ définit la matrice de Roe, où \tilde{U} représente l'état moyen à déterminer en fonction des deux états U_i^n et U_{i+1}^n .

1.4 Un schéma proposé pour les problèmes non homogènes : le schéma SRNH

Considérons un système de lois de bilan dans \mathbb{R}^m , issue de la mécanique des fluides, et qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = Q(x, W) \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, T[\\ W(x, 0) = W_0(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

Nous faisons l'hypothèse fondamentale que le problème de Riemann correspondant, défini par :

$$W_0(x) = W_L \text{ si } x < 0, \text{ et } W_0(x) = W_R \text{ si } x > 0,$$

admet une solution autosimilaire notée $W(x, t) = H\left(\frac{x}{t}\right)$.

Plus précisément :

Si on note a_L et a_R des pentes de courbes de discontinuité ou de détente, il existe un opérateur noté Rs tel que

$$W(x, t) = H\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} W_L, \text{ si } \frac{x}{t} < a_L \\ \overline{H}\left(\frac{x}{t}\right) = Rs\left(\frac{x}{t}, W_L, W_R\right), \text{ si } a_L < \frac{x}{t} < a_R \\ W_R, \text{ si } \frac{x}{t} > a_R. \end{cases} \quad (1.5)$$

Rappelons que Alcrudo et Benkhaldoun ont montré dans [AB01] que les équations de Saint-Venant avec un fond en forme de marche, donnaient lieu à une solution autosimilaire du problème de Riemann, quand la discontinuité initiale de la solution était située à l'endroit de la marche.

Par ailleurs, nous exprimons que nous considérons une solution au sens des distributions du problème (1.4), en utilisant la proposition *ii*) du théorème (1.2.1) :

$$\int_{\partial R} [W.n_t + f(W).n_x] d\sigma = \int_R Q(x, W) dxdt. \quad (1.6)$$

On se propose de construire un schéma numérique basé uniquement sur les deux propriétés (1.5) et (1.6).

Définissons pour un maillage uniforme :

$r_n = \frac{\Delta t_n}{\Delta x}$, avec $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, les pas de temps et d'espace respectivement.

Nous noterons x_i le centre de la cellule $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$.

S'inspirant de la démarche de Godunov [God59, God60] et en utilisant une première fois les propriétés (1.5) et (1.6), sur le domaine $R =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[\times]t_n, t_{n+1}[$, on écrit :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r_n [F(Rs(0, W_i^n, W_{i+1}^n)) - F(Rs(0, W_{i-1}^n, W_i^n))] + \Delta t_n Q_i^n,$$

où Q_i^n est une approximation de $\frac{1}{\Delta t_n \Delta x} \int_R Q(x, W) dx dt$.

Pour l'évaluation de $F(Rs(0, W_i^n, W_{i+1}^n))$, l'idée ici est d'éviter de calculer la solution exacte Rs , ou même d'introduire un problème de Riemann linéarisé. Nous cherchons directement une valeur approchée de la solution exacte, en exploitant les propriétés (1.5) et (1.6).

Ainsi, on écrit par exemple sur le bord $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \text{approximation de } Rs(0, W_i^n, W_{i+1}^n).$$

Pour obtenir cette approximation, on utilise de nouveau la propriété (1.6) sur un ouvert $\pi_\theta =]X^-, X^+[\times]t_n, t_n + \theta[$ tel que $x_{i+\frac{1}{2}} \in]X^-, X^+[$.

En supposant que X^-, X^+ et $\theta > 0$ sont choisis de telle façon que $\forall t \in]t_n, t_n + \theta[$:

$$Rs\left(\frac{X^- - x_{i+\frac{1}{2}}}{t - t_n}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) = W_i^n \text{ et } Rs\left(\frac{X^+ - x_{i+\frac{1}{2}}}{t - t_n}, W_i^n, W_{i+1}^n\right) = W_{i+1}^n,$$

et en introduisant les distances : $dX^- = |X^- - x_{i+\frac{1}{2}}|$ et $dX^+ = |X^+ - x_{i+\frac{1}{2}}|$,
on a

$$\int_{X^-}^{X^+} W(x, t_n + \theta) dx = dX^- W_i^n + dX^+ W_{i+1}^n - \theta [F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)] + \int_{\pi_\theta} Q(x, W) dx dt.$$

On définit :

1.4. UN SCHÉMA PROPOSÉ POUR LES PROBLÈMES NON HOMOGÈNES :
LE SCHÉMA SRNH

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{dX^- + dX^+} \int_{X^-}^{X^+} W(x, t_n + \theta) dx.$$

Avec le choix : $X^- = x_i$ et $X^+ = x_{i+1}$, on obtient une première expression générale, en fonction de θ , de la solution approchée $W_{i+\frac{1}{2}}^n$ issue de cette première étape, que nous appellerons étape de prédiction :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\theta}{\Delta x} [F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)] + \theta \widehat{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n, \quad (1.7)$$

où

$$\widehat{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n = \widehat{Q}(x_i, x_{i+1}, W_i^n, W_{i+1}^n)$$

est une approximation, à définir de manière judicieuse, de

$$\frac{1}{\theta \Delta x} \int_{\pi_\theta} Q(x, W) dx dt.$$

Un premier choix du paramètre θ a été de le prendre comme une fraction du pas de temps Δt_n , en écrivant $\theta = \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \Delta t_n$.

On arrive ainsi à la première forme du schéma SRNH (Solveur de Riemann Non Homogène) :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} r_n [F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)] + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \Delta t \widehat{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r_n [F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n)] + \Delta t Q_i^n. \end{cases} \quad (1.8)$$

Cette forme du schéma SRNH a été utilisé avec succès pour des problèmes non homogènes 1D dans le cas de maillages uniformes (voir [Ben02]).

Remarque concernant le paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$:

Ce paramètre a pour objectif de contrôler la diffusion numérique du schéma comme le montre l'analyse menée dans le cas scalaire dans le chapitre 2. Par exemple dans le cas d'une équation scalaire linéaire sur maillage uniforme le choix de $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = 1$

redonne exactement le schéma de Lax-Wendroff.

Autre variante du schéma SRNH :

Dans le but de l'extension du schéma SRNH au cas bidimensionnel, où il est difficile de définir un équivalent de la distance Δx , il est apparu nécessaire de proposer une variante de (SRNH) ne faisant pas apparaître cette distance dans la phase prédicteur du schéma.

Cela consiste à écrire $\theta = \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \bar{\theta}$ où $\bar{\theta}$ est défini par la vitesse de Rusanov (voir figure 1.1) comme suit :

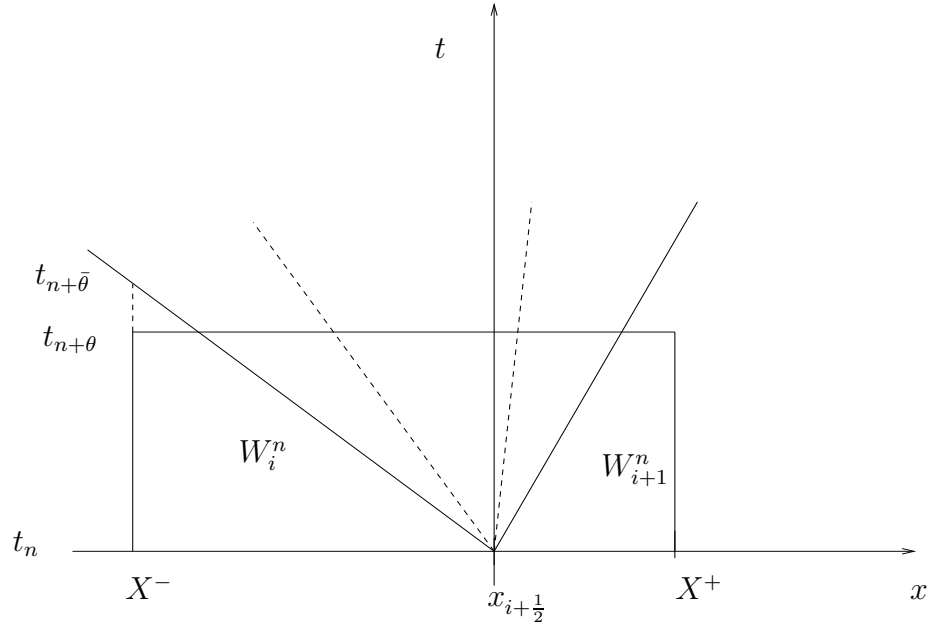


FIG. 1.1 -

$$\bar{\theta} = \frac{\Delta x}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n}.$$

Cela amène à la nouvelle expression de la phase prédicteur du schéma :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} [F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)] + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{\Delta x}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \widehat{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n. \quad (1.9)$$

Remarque : Pour les problèmes traités dans ce travail, le terme non homogène Q contient généralement un terme de dérivée spatiale d'ordre 1. Ainsi, pour le système

1.4. UN SCHÉMA PROPOSÉ POUR LES PROBLÈMES NON HOMOGÈNES :
LE SCHÉMA SRNH

de Saint-Venant, la première composante du terme source est nulle et la seconde s'écrit $Q = -gH \frac{dZ}{dx}$ dont une approximation standard pour la phase prédicteur s'écrit

$$\widehat{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n = -g \frac{H_i^n + H_{i+1}^n}{2} \frac{Z_{i+1} - Z_i}{\Delta x}.$$

La distance Δx disparaît donc du terme source de l'étape prédicteur, et permet ainsi l'extension du schéma au cas bidimensionnel.

La forme définitive du schéma SRNH dans le cas général s'écrit donc :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} [F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)] + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \frac{\Delta x}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \widehat{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r_n [F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n)] + \Delta t Q_i^n. \end{cases} \quad (1.10)$$

Bibliographie

- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*, *Comput. & Fluids* **30** (2001), no. 6, 643–671.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, FVCA3, HPS, R. Herbin, D.Kröner(Eds), *Proceedings of the Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Application*, 2002, pp. 269–276.
- [God59] S. K. Godunov, *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*, *Mat. Sb. (N.S.)* **47 (89)** (1959), 271–306.
- [God60] _____, *A difference method for the calculation of shock waves*, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **16** (1960), 389–390.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre 2

Solveur de Riemann Non Homogène : Analyse dans le cas homogène $1D$

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons une analyse mathématique du schéma SRNH dans le cas homogène $1D$. Cette analyse nous a permis de déterminer une valeur optimale d'un paramètre de contrôle de la diffusion intervenant dans la première étape du schéma. Cela nous a conduit à une nouvelle expression du schéma (*SRNHS*), faisant intervenir la matrice signe d'un opérateur de convection au niveau de cette même première étape.

2.1 Introduction

La difficulté de la résolution analytique de certains systèmes hyperboliques homogènes non linéaires ou de lois de conservation a incité plusieurs chercheurs à développer des schémas de volumes finis. Le premier schéma de ce genre a été développé en 1959 par Godunov [God59, God60] qui s'appuie sur la résolution exacte du problème de Riemann, et qui est à l'origine de la plupart des méthodes dites décentrées. Par la suite, différents schémas de volumes finis se succèdent. On note par exemple celui de Lax-Friedrichs [LW60] qui est très diffusif et ne permet pas la simulation numérique des problèmes en dimension deux d'espace sur maillage non structuré, ainsi que le schéma de Rusanov [Rus61] qui garde le caractère diffusif mais admet une extension en dimension deux d'espace. En 1981, Roe a proposé un solveur de Riemann approché (linéaire) [Roe81] permettant la simulation des équations d'Euler de la dynamique des gaz. En 1999, Gallouët et Masella [MFG99] ont proposé un nouveau schéma numérique, VF-Roe, de type volumes finis pour les systèmes d'équations

hyperboliques unidimensionnelles et bidimensionnelles non linéaires homogènes, en se basant sur la méthode de Godunov après la linéarisation du problème, ensuite il sera prolongé pour les systèmes non conservatifs [BGH00, GHS03, GHS02]. Plus récemment J. M. Ghidaglia, A. Kumbaro et G. Le Coq [GKLC96] ont développé un nouveau schéma de volumes finis qui s'appuie sur la notion de flux caractéristique et qui a donné de bons résultats dans les cas $1D$ et $2D$ pour les systèmes non homogènes.

Par ailleurs, la nécessité de développer des schémas de volumes finis plus précis et efficaces a conduit à la recherche des schémas d'ordre supérieur tels que le schéma de Lax-Wendroff qui est un schéma à trois points, de second ordre en espace et en temps, linéairement L^2 stable. F. De Vuyst [DV04] a développé un schéma avec un flux numérique hybride écrit comme une combinaison convexe du flux de Lax-Wendroff de deuxième ordre et du flux de Lax-Friedrichs du premier ordre.

On note également le développement des schémas de volumes finis de type prédicteur-correcteur comme celui de Richtmyer et Lax-Wendroff [RM67], celui de Mac Cormack [Cor69] et le schéma WAF (Weighted Average Flux) introduit par E. F. Toro, qui généralise le schéma de Lax-Wendroff, le schéma de Godunov pour les systèmes de loi de conservation non linéaire et le schéma de Warming-Beam [Tor99], ce schéma est d'ordre deux en espace et en temps et permet de limiter les oscillations numériques, ce schéma a été appliqué à des problèmes en dimensions deux et trois en espace [BT98, BT97, Tor92], ou encore celui de Benkhaldoun [Ben02] basé sur une remarque d'autosimilarité du problème de Riemann de la solution d'un problème non homogène. Dans ce chapitre, en se basant sur les propriétés des schémas de volumes finis pour les systèmes hyperboliques homogènes [GR91, GR96] nous proposons de faire l'analyse mathématique du schéma SRNH [Ben02], dans le cas des problèmes homogènes scalaire et vectoriel et d'explicitier le choix du paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$.

2.2 Analyse du schéma SRNH dans le cas scalaire

On considère le système régi par une loi de conservation c'est à dire le problème hyperbolique scalaire homogène $1D$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \\ w(x, 0) = w_0(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Nous nous proposons de faire une analyse mathématique pour le schéma de volumes finis SRNH écrit pour la simulation numérique des problèmes non homogènes par F. Benkhaldoun [Ben02] et défini dans le premier chapitre. Pour des raisons de simplicité, nous considérons le cas homogène. Ce schéma s'écrit pour le système

(2.1) de la manière suivante :

$$\begin{cases} w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_{i+1}^n + w_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (f(w_{i+1}^n) - f(w_i^n)), \\ w_i^{n+1} = w_i^n - r \left(f(w_{i+\frac{1}{2}}^n) - f(w_{i-\frac{1}{2}}^n) \right), \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ est un paramètre de contrôle et $S_{i+\frac{1}{2}}^n$ est la vitesse locale de Rusanov donnée par

$$S_{i+\frac{1}{2}}^n = \max(|f'(w_{i+1}^n)|, |f'(w_i^n)|), \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

où Δt est le pas de temps et Δx est le pas d'espace.

Dans cette partie, nous allons faire l'étude mathématique de ce schéma dans le cas linéaire dans un premier temps et dans le cas non linéaire dans un deuxième temps, en gardant $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \alpha(w_i^n, w_{i+1}^n)$, et on se propose de préciser la valeur de $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ permettant de conférer de bonnes propriétés au schéma.

2.2.1 Cas linéaire

On prend $f(w) = c w$, avec $c \in \mathbb{R}$. Le schéma de volumes finis s'écrit alors

$$\begin{cases} w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_{i+1}^n + w_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \operatorname{sgn}(c) (w_{i+1}^n - w_i^n), \\ w_i^{n+1} = w_i^n - rc \left(w_{i+\frac{1}{2}}^n - w_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \end{cases} \quad (2.3)$$

Le schéma défini en (2.3), est conservatif et consistant par construction, et la fonction du flux numérique est donnée par

$$g(w_i^n, w_{i+1}^n) = f\left(w_{i+\frac{1}{2}}^n\right) = c w_{i+\frac{1}{2}}^n.$$

La fonction du flux numérique g est continue, Lipschitzienne; en effet pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |g(w_i^n, w_{i+1}^n) - f(u)| &= \frac{|c|}{2} \left| (w_{i+1}^n + w_i^n) - \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \operatorname{sgn}(c) (w_{i+1}^n - w_i^n) - 2u \right| \\ &= \frac{|c|}{2} \left| \left(1 - \operatorname{sgn}(c) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{i+1}^n - u) + \left(1 + \operatorname{sgn}(c) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_i^n - u) \right| \\ &\leq |c| \left(1 + \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n\right) \max_{k=0,1} |w_{i+k}^n - u|. \end{aligned}$$

Principe du maximum

Proposition 2.2.1 *Sous les deux conditions suivantes :*

- i) $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 1, \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
- ii) $r|c| \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{2} \leq 1, \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$

le schéma (2.3) vérifie le principe du maximum local.

$$\min_{i \in \mathbb{Z}} w_i^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} w_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} w_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} w_i^n.$$

Preuve

Le schéma de volumes finis (2.3) s'écrit :

$$w_i^{n+1} = \beta_0 w_i^n + \beta_{-1} w_{i-1}^n + \beta_1 w_{i+1}^n,$$

où

$$\beta_{-1} = \frac{rc}{2} \left(1 + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \operatorname{sgn}(c) \right) = \frac{r|c|}{2} \left(\operatorname{sgn}(c) + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right),$$

$$\beta_0 = 1 - \frac{r|c|}{2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n + \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right),$$

et

$$\beta_1 = \frac{rc}{2} \left(-1 + \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \operatorname{sgn}(c) \right) = \frac{r|c|}{2} \left(-\operatorname{sgn}(c) + \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \right).$$

Pour que le schéma de volumes finis vérifie le principe du maximum, il suffit d'avoir

$$\beta_{-1} \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1.$$

Ce qui est garanti par les conditions (i) et (ii).

■

Monotonie du schéma SRNH dans le cas où $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ est une constante

Proposition 2.2.2 *Sous les deux conditions suivantes :*

- i) $\exists \gamma \geq 1$ tel que $\forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \gamma,$

- ii) $r|c|\gamma \leq 1, \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$

Le schéma (2.3) est monotone.

Preuve

En utilisant l'opérateur \mathcal{H} , le schéma de volumes finis SRNH s'écrit de la manière suivante :

$$w_i^{n+1} = \mathcal{H}(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n),$$

avec

$$\mathcal{H}(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n) = \beta_0 w_i^n + \beta_{-1} w_{i-1}^n + \beta_1 w_{i+1}^n,$$

où β_0 , β_{-1} et β_1 sont définis dans (2.2.1).

D'après (i) de la proposition (2.2.1), on a $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 1$, $\forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, supposons alors qu'il existe $\gamma \geq 1$, tel que pour tout $(i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \gamma$, dans ce cas β_0 , β_{-1} et β_1 deviennent

$$\beta_{-1} = \frac{rc}{2} (1 + \gamma \operatorname{sgn}(c)) = \frac{r|c|}{2} (\operatorname{sgn}(c) + \gamma),$$

$$\beta_0 = 1 - r|c|\gamma,$$

et

$$\beta_1 = \frac{rc}{2} (-1 + \gamma \operatorname{sgn}(c)) = \frac{r|c|}{2} (-\operatorname{sgn}(c) + \gamma).$$

Le schéma SRNH est monotone si β_0 , β_{-1} et β_1 sont postifs ou nuls.

Comme $\gamma \geq 1$, alors β_{-1} et β_1 sont positifs.

$\beta_1 \geq 0$ si est seulement si $r|c|\gamma \leq 1$, ce qui est garanti par la condition (ii), d'où le résultat.

■

2.2.2 Cas non linéaire

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 non linéaire, $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ étant la condition initiale du problème (2.1).

Pour $\gamma \geq 1$, On définit l'ensemble suivant :

$$X = \{w \in \mathbb{R} / |w| \leq \gamma \|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$$

et on pose $A = \max_{w \in X} |f'(w)|$.

Le schéma SRNH pour le problème non linéaire homogène (2.1), s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_{i+1}^n + w_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (f(w_{i+1}^n) - f(w_i^n)), \\ w_i^{n+1} = w_i^n - r \left(f(w_{i+\frac{1}{2}}^n) - f(w_{i-\frac{1}{2}}^n) \right). \end{cases} \quad (2.4)$$

Le schéma de volumes finis (2.4) est conservatif par construction et la fonction du flux numérique est donnée par

$$g(w_i^n, w_{i+1}^n) = f(w_{i+\frac{1}{2}}^n) = f(\varphi(w_i^n, w_{i+1}^n)),$$

avec :

$$\varphi(w_i^n, w_{i+1}^n) = \frac{1}{2} (w_{i+1}^n + w_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (f(w_{i+1}^n) - f(w_i^n)).$$

Pour $w_{i+1}^n = w_i^n$, on a $\varphi(w_i^n, w_i^n) = w_i^n$; il s'ensuit que $g(w_i^n, w_i^n) = f(w_i^n)$, et par suite le schéma est consistant.

Principe du maximum

On note $a \perp b = \min(a, b)$ et $a \top b = \max(a, b)$.

Proposition 2.2.3 *On suppose que f est une fonction de classe C^1 et que f' garde un signe constant, alors sous les deux conditions suivantes :*

$$1) \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|} \leq \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \gamma \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|}, \quad \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

$$2) r \leq \frac{1}{\gamma A},$$

avec : $a_i^n \in [w_{i+\frac{1}{2}}^n \perp w_{i-\frac{1}{2}}^n, w_{i+\frac{1}{2}}^n \top w_{i-\frac{1}{2}}^n]$ tel que

$$f(w_{i+\frac{1}{2}}^n) - f(w_{i-\frac{1}{2}}^n) = f'(a_i^n) (w_{i+\frac{1}{2}}^n - w_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

et

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n \in [w_{i+1}^n \perp w_i^n, w_{i+1}^n \top w_i^n],$$

tel que

$$f(w_{i+1}^n) - f(w_i^n) = f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) (w_{i+1}^n - w_i^n),$$

le schéma (2.4) satisfait le principe du maximum local.

$$\min_{i \in \mathbb{Z}} w_i^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} w_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} w_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} w_i^n.$$

Preuve

f est continue et dérivable sur $[w_{i-\frac{1}{2}}^n \perp w_{i+\frac{1}{2}}^n, w_{i-\frac{1}{2}}^n \top w_{i+\frac{1}{2}}^n]$; le théorème des accroissements finis, nous donne l'existence de a_i^n .

De même sur $[w_i^n \perp w_{i+1}^n, w_i^n \top w_{i+1}^n]$, le théorème des accroissements finis nous donne l'existence de $a_{i+\frac{1}{2}}^n$. Il s'ensuit que

$$w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_i^n + w_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) (w_{i+1}^n - w_i^n). \quad (2.5)$$

En posant

$$\delta_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right),$$

on obtient

$$w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left(1 + \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right) w_i^n + \frac{1}{2} \left(1 - \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right) w_{i+1}^n.$$

Or la condition (1) de la proposition (2.2.3) donne $1 \leq \left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| \leq \gamma$, il s'ensuit que

$$\left| w_{i+\frac{1}{2}}^n \right| \leq \gamma \|w^n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \gamma \|w^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \gamma \|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

D'où $w_{i+\frac{1}{2}}^n \in X \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et aussi $a_i^n \in X$ et donc $f'(a_i^n) \leq A$.

En injectant l'égalité (2.5) dans l'étape correcteur on aura

$$w_i^{n+1} = \mathcal{H} \left(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n \right) = \beta_0 w_i^n + \beta_1 w_{i+1}^n + \beta_{-1} w_{i-1}^n, \quad (2.6)$$

avec :

$$\beta_0 = 1 - \frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \left(\left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \delta_{i-\frac{1}{2}}^n \right| \right),$$

$$\beta_1 = \frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \operatorname{sgn} \left(f'(a_i^n) \right) \left(\left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| \operatorname{sgn} \left(f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right) - 1 \right) = \frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \left(\left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| - \operatorname{sgn} (f') \right),$$

$$\beta_{-1} = \frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \operatorname{sgn} \left(f'(a_i^n) \right) \left(\left| \delta_{i-\frac{1}{2}}^n \right| \operatorname{sgn} \left(f' \left(a_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 1 \right) = \frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \left(\left| \delta_{i-\frac{1}{2}}^n \right| + \operatorname{sgn} (f') \right).$$

Pour montrer le principe du maximum, il suffit de trouver les conditions sur $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ et r de telle sorte que β_0, β_1 et β_{-1} soient positifs et $\beta_0 + \beta_{-1} + \beta_1 = 1$. Or on a

$$\beta_1 \geq 0 \quad \iff \quad \left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| \geq \operatorname{sgn} (f'), \quad (2.7)$$

$$\beta_{-1} \geq 0 \quad \iff \quad \left| \delta_{i-\frac{1}{2}}^n \right| \geq -\operatorname{sgn} (f'), \quad (2.8)$$

d'où, sous la condition $\forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{\left| f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right|}$, on assure $\beta_1 \geq 0$,

$\beta_{-1} \geq 0$

$$\text{et} \quad \beta_0 \geq 0 \quad \iff \quad \frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \left(\left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \delta_{i-\frac{1}{2}}^n \right| \right) \leq 1.$$

Or sous les conditions de la proposition (2.2.3) on a

$$\frac{r}{2} |f'(a_i^n)| \left(\left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \delta_{i-\frac{1}{2}}^n \right| \right) \leq rA\gamma \leq 1.$$

Lemme 2.2.4 *La fonction du flux numérique du schéma SRNH est continue Lipschitzienne.*

Preuve

Pour tout $w \in X$ on a

$$\begin{aligned}
 |g(w_i^n, w_{i+1}^n) - f(w)| &= |f(\varphi(w_i^n, w_{i+1}^n)) - f(w)| \\
 &\leq A |\varphi(w_i^n, w_{i+1}^n) - w| \\
 &\leq \frac{1}{2}A \left(1 + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \left| f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) \right| \right) \max_{j=0,1} |w_{i+j}^n - w| \\
 &\leq C \max_{j=0,1} |w_{i+j}^n - w|,
 \end{aligned}$$

où $C = \frac{A(\gamma + 1)}{2}$

■

Remarque

Dans le cas où : $f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) = 0$, l'étape prédicteur devient

$$w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_i^n + w_{i+1}^n).$$

Monotonie

Proposition 2.2.5 *On suppose que f' garde un signe constant. Sous les deux conditions suivantes :*

- 1) $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{\gamma} \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|}, \forall i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ avec $\bar{\gamma} \in [1, \gamma]$, $\bar{\gamma}$ est constante,
- 2) $r\gamma A \leq 1$.

Le schéma (2.4) est monotone.

Preuve

Une condition suffisante pour respecter la première condition de la proposition (2.2.3) et de fixer un $\bar{\gamma} \in [1, \gamma]$ tel que

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{\gamma} \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|}. \tag{2.9}$$

Dans ce cas l'étape prédicteur devient :

$$w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (1 + \bar{\gamma} \operatorname{sgn}(f')) w_i^n + \frac{1}{2} (1 - \bar{\gamma} \operatorname{sgn}(f')) w_{i+1}^n$$

et l'étape correcteur s'écrit sous la forme conservative suivante

$$w_i^{n+1} = w_i^n - r \left(f \left(w_{i+\frac{1}{2}}^n \right) - f \left(w_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right), \quad (2.10)$$

$$= \mathcal{H} \left(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n \right), \quad (2.11)$$

avec \mathcal{H} est l'opérateur défini dans (2.6).

Le schéma (2.10) est monotone si l'opérateur \mathcal{H} est croissant par rapport à chacune de ces variable w_i^n , w_{i-1}^n et w_{i+1}^n .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_{i-1}^n} \left(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n \right) &= \frac{r}{2} (\operatorname{sgn}(f') + \bar{\gamma}) |f'(a_i^n)|, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_{i+1}^n} \left(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n \right) &= -\frac{r}{2} (\operatorname{sgn}(f') - \bar{\gamma}) |f'(a_i^n)|, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_i^n} \left(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n \right) = 1 - r\bar{\gamma} f'(a_i^n).$$

Le fait que $\bar{\gamma} \geq 1$ et $r\bar{\gamma}A \leq 1$, l'opérateur \mathcal{H} est croissant par rapport à chacune de ces variables, il s'ensuit que le schéma SRNH est monotone.

■

Théorème 2.2.6 *Soit $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, sous les conditions définies dans la proposition (2.2.5) la solution numérique donnée par le schéma SRNH converge vers l'unique solution entropique.*

Preuve

Le schéma (2.4) est un schéma à trois points conservatif consistant monotone [GR91], sous les conditions de la proposition (2.2.5), il s'ensuit que ce schéma est consistant avec toute condition d'entropie.

■

2.2.3 Le paramètre de contrôle dans l'étape prédicteur

La condition de stabilité ((2) de la proposition (2.2.3)) exige que $|f'(a_i^n)|$ soit fini. Une condition suffisante pour cela, est que a_i^n et $w_{i+\frac{1}{2}}^n$ restent bornés.

Dans ce qui précède, cela a été obtenu, en imposant que $w_{i+\frac{1}{2}}^n \in X$, où X est défini au début de cette section via un paramètre $\gamma \geq 1$. Nous voulons ici lever l'indétermination introduite par ce paramètre γ . Pour cela, on remarque qu'une condition suffisante pour que $w_{i+\frac{1}{2}}^n$ reste borné est que $w_{i+\frac{1}{2}}^n \in [w_i^n \perp w_{i+1}^n, w_i^n \top w_{i+1}^n]$. Or

$$w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left(1 + \delta_{i+\frac{1}{2}}^n\right) w_i^n + \frac{1}{2} \left(1 - \delta_{i+\frac{1}{2}}^n\right) w_{i+1}^n,$$

une condition suffisante est donc $1 + \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ et $1 - \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0$, il s'ensuit que

$$\left| \delta_{i+\frac{1}{2}}^n \right| \leq 1 \quad \iff \quad \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{\left| f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right|}.$$

Cela avec la condition (1) de la proposition (2.2.3) du principe du maximum impose que $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{\left| f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right|}$. Finalement on déduit le schéma SRNHS (c'est le schéma

SRNH en faisant intervenir le signe de f' dans l'étape prédicteur) qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_i^n + w_{i+1}^n) - \frac{1}{2 \left| f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right|} (f(w_{i+1}^n) - f(w_i^n)) \\ w_i^{n+1} = w_i^n - r \left(f \left(w_{i+\frac{1}{2}}^n \right) - f \left(w_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right), \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} w_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (w_i^n + w_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right) (w_{i+1}^n - w_i^n) \\ w_i^{n+1} = w_i^n - r \left(f \left(w_{i+\frac{1}{2}}^n \right) - f \left(w_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right). \end{cases}$$

Remarque

Si on suppose que f' garde un signe constant et que l'on écrit le schéma SRNHS sous la forme

$$w_i^{n+1} = \mathcal{H} \left(w_{i-1}^n, w_i^n, w_{i+1}^n \right),$$

l'erreur de troncature est donnée par (Voir Raviart et Godlewski 1991 [GR91])

$$ET(w)(x, t) = -\tau \frac{\partial}{\partial x} \left[B(w, r) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \circ(\tau^2)$$

avec $B(w, r) = \frac{1}{2r^2} \sum_{j=-1}^{j=1} j^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_{i+j}^n} (w, w, w) - \frac{1}{2} f'(w)^2$.

Comme

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_{i+1}^n} (w, w, w) = \frac{r}{2} (1 - \operatorname{sgn}(f')) (f'(w))$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_{i-1}^n} (w, w, w) = \frac{r}{2} (1 + \operatorname{sgn}(f')) (f'(w)),$$

alors

$$\begin{aligned} B(w, r) &= \frac{1}{2r^2}r |f'(w)| - \frac{1}{2}f'(w)^2 \\ &= \frac{|f'(w)|}{2r} (1 - r |f'(w)|). \end{aligned}$$

Le schéma est donc quasi d'ordre 2 si la condition de stabilité est de l'ordre de 1. Si la condition de stabilité est inférieure à 1 le schéma est d'ordre 1.

2.2.4 Résultats numériques

Equation de Burgers

L'équation de Burgers représente une loi de conservation non linéaire combinée avec une partie non homogène diffusive, modélisant de manière simplifiée un écoulement et qui s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

où w est une variable conservative, ν est un coefficient de viscosité. On considère le cas où ν tend vers 0. Dans ce cas l'équation devient :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) = 0,$$

et on prend comme condition initiale

$$w_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 0.2, \\ 1 & \text{si } 0.2 \leq x < 0.4, \\ 1 - 5(x - 0.4) & \text{si } 0.4 \leq x < 0.6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est un problème de Riemann testé par F. De Vuyst [DV04], dont la solution contient une onde de raréfaction qui se forme à partir de la première discontinuité et qui comprime la zone entre $x = 0.4$ et $x = 0.6$, et une onde de choc qui se propage à partir de $x = 0.6$ avec une vitesse égale à $\sigma = \frac{1}{2}$. On compare les résultats numériques donnés par le schéma SRNHS et le schéma Hybride Lax-Wendroff–Lax-Friedrichs conçu par F. De Vuyst [DV04] et la solution théorique aux mêmes instants $t = 0.1s$ et $t = 0.6s$. La CFL vaut 1 pour le schéma SRNHS et 0.5 pour le schéma hybride et on montre leur courbe d'erreur à l'instant $t=0.6s$. Puisque le schéma

SRNHS devient le schéma de Lax-Wendroff pour le paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = 1$ et le schéma hybride également pour le paramètre $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$, nous allons afficher les courbes de répartition de $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ et $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$.

De plus les paramètres $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ et $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$ contrôlent la diffusion numérique, on remarque que celle ci est élevée pour le schéma SRNHS à l'endroit d'une onde de raréfaction et aussi importante pour le schéma hybride à l'issue du propagation d'une onde de choc.

Le flux numérique du schéma hybride s'écrit de la façon suivante

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n \left(\theta_{i+\frac{1}{2}}^n; W_i^n, W_{i+1}^n, r \right) = \theta_{i+\frac{1}{2}}^n \phi_{i+\frac{1}{2}}^{MLF} (W_i^n, W_{i+1}^n, r) + \left(1 - \theta_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW,\epsilon} (W_i^n, W_{i+1}^n, r),$$

où $\phi^{MLF}(U, V, r)$ et le flux numérique du schéma de Lax-Friedrichs modifié donné par

$$\phi^{MLF}(U, V, r) = \frac{1}{2} (f(U) + f(V)) - \frac{1}{4r} (V - U)$$

et $\phi^{LW,\epsilon}(U, V, r)$ et l'approximation du flux numérique suivant une dérivée directionnelle et un paramètre ϵ du schéma de Lax-Wendroff donné par

$$\phi^{LW,\epsilon}(U, V, r) = \frac{1}{2} (f(U) + f(V)) - \frac{r}{2} \frac{f[\bar{\varphi}(U, V) + \epsilon(f(V) - f(U))] - f(\bar{\varphi}(U, V))}{\epsilon},$$

où $\bar{\varphi}(U, V)$ est un état moyen satisfaisant la relation de consistance $\bar{\varphi}(U, U) = U$, est choisi tel que la matrice $\bar{A}(U, V) = A(\bar{\varphi}(U, V))$, et le flux numérique du schéma de Lax-Wendroff est donné par

$$\phi^{LW}(U, V, r) = \frac{1}{2} (f(U) + f(V)) - \frac{r}{2} \bar{A}(U, V) (f(V) - f(U)).$$

$\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$ est choisi de telle sorte que le terme de la dissipation $\eta_{i+\frac{1}{2}}^n$ soit inférieur ou égal à 0 et

$$\eta_{i+\frac{1}{2}}^n = S(U_i^{n+1}) - S(U_i^n) + r \left\{ D_U S_{i-\frac{1}{2}}^n \left(U_i^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + D_U S_{i+\frac{1}{2}}^n \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - U_i^n \right) \right\},$$

où $S(U) = \frac{1}{2} \|U\|^2$ est la norme de l'énergie, et $D_U S_{i+\frac{1}{2}}^n = D_U S \left(\frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{2} \right)$.

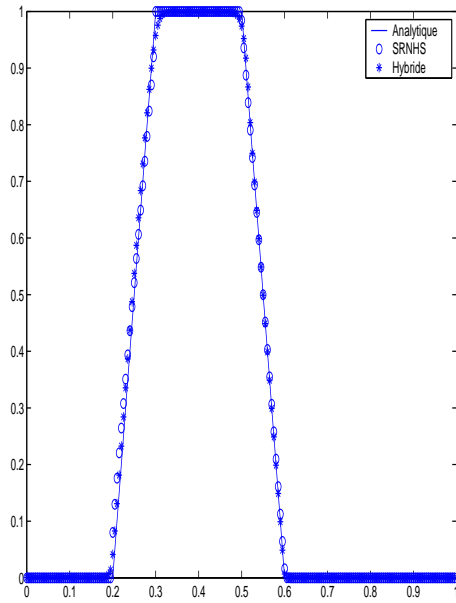


FIG. 2.1 – Courbe de la solution w à $t=0.1s$

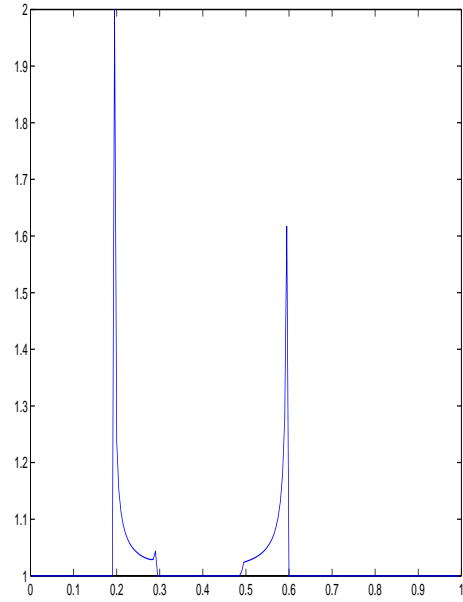


FIG. 2.2 – Répartition du paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ à $t=0.1s$

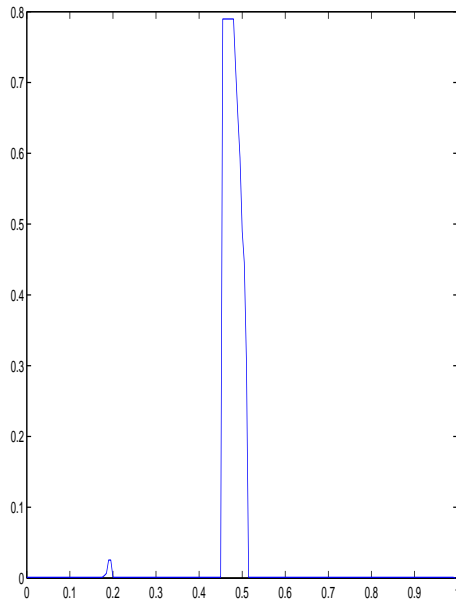


FIG. 2.3 – Répartition du paramètre $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$ à $t=0.1s$

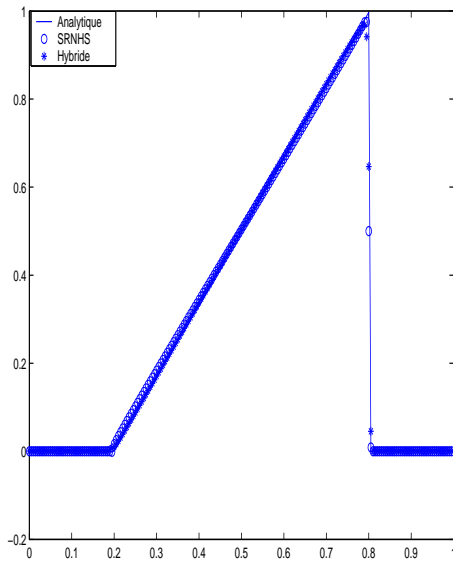


FIG. 2.4 – Courbe de la solution w à $t=0.6s$

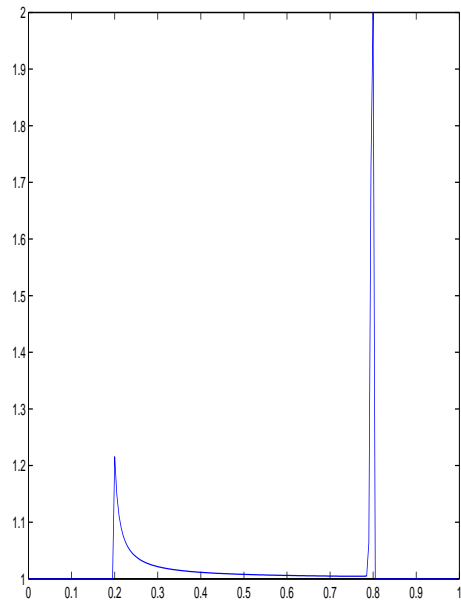


FIG. 2.5 – Répartition du paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ à $t=0.6$ s

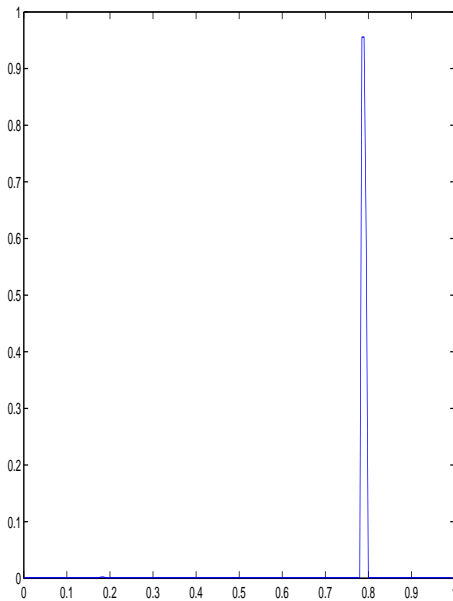


FIG. 2.6 – Répartition du paramètre $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$ à $t=0.6$ s

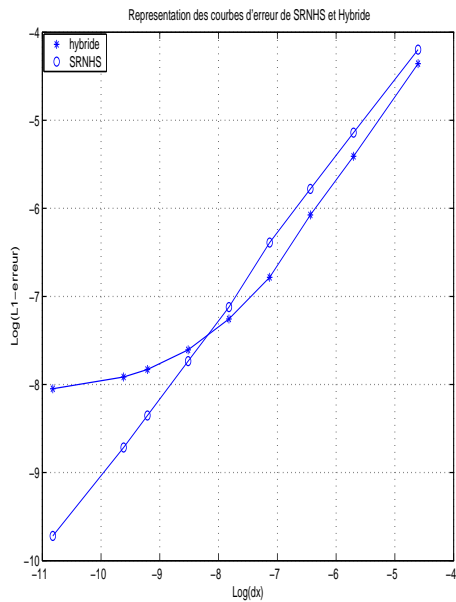


FIG. 2.7 – Courbes d'erreur du schéma SRNHS et du schéma hybride à $t=0.6$ s, pente $\simeq 0.734$

2.3 Étude du schéma SRNH dans le cas de systèmes homogènes

2.3.1 Cas linéaire

On considère le système hyperbolique linéaire homogène 1D suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial W}{\partial x} = 0, (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \\ W(x, 0) = W_0(x), x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $W : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ un vecteur à m composantes de quantités conservées, où variables d'état, Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^m , \mathcal{A} est une matrice carrée dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Pour ce problème le schéma SRNH présenté par F. Benkhaldoun dans [Ben02] et dans le premier chapitre de cette thèse s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{A} (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r \mathcal{A} (W_{i+\frac{1}{2}}^n - W_{i-\frac{1}{2}}^n) \end{cases}$$

où

$$S_{i+\frac{1}{2}}^n = \max_{p=1, \dots, m} (|\lambda_p|) = \rho(\mathcal{A}),$$

avec $\rho(\mathcal{A})$ le rayon spectral de \mathcal{A} , $[\lambda_p]_{p=1, \dots, m}$ sont les valeurs propres de la matrice \mathcal{A} et $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ est un paramètre de contrôle.

Le système (2.12) est hyperbolique, il s'ensuit que la matrice \mathcal{A} est diagonalisable dans une base des vecteurs propres. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ ses valeurs propres associées aux vecteurs propres $\{r_1, \dots, r_m\}$, et on note $\mathcal{B} = \{r_1, \dots, r_m\}$ la base de \mathbb{R}^m formée par les vecteurs propres de \mathcal{A} . Soit $\mathcal{R} = [r_1, \dots, r_m]$ la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^m à la base \mathcal{B} , il s'ensuit que la matrice $\mathcal{A} = \mathcal{R} \Lambda \mathcal{R}^{-1}$, où Λ est la matrice des valeurs propres et \mathcal{R}^{-1} est la matrice inverse de la matrice de passage.

L'étape prédicteur s'écrit

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{A} (W_{i+1}^n - W_i^n).$$

On pose $V = \mathcal{R}^{-1}W$, l'étape prédicteur devient

$$V_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (V_{i+1}^n + V_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Lambda (V_{i+1}^n - V_i^n)$$

et l'étape correcteur devient

$$V_i^{n+1} = V_i^n - r\Lambda \left(V_{i+\frac{1}{2}}^n - V_{i-\frac{1}{2}}^n \right).$$

L'écriture est donc équivalente au schéma de volumes finis SRNH suivant :

$$\begin{cases} V_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (V_{i+1}^n + V_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Lambda (V_{i+1}^n - V_i^n), \\ V_i^{n+1} = V_i^n - r\Lambda \left(V_{i+\frac{1}{2}}^n - V_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \end{cases}$$

appliqué au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x} = 0, (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \\ V(x, 0) = V_0(x), x \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à m équations indépendantes à m variables, c'est-à-dire que le problème se ramène à : $\forall p \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_p}{\partial t} + \lambda_p \frac{\partial v_p}{\partial x} = 0, (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \\ v_p(x, 0) = (v_p)_0(x), x \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

et le schéma SRNH s'écrit pour ces problèmes 1D scalaire, $\forall p$

$$\begin{cases} (v_p)_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} ((v_p)_{i+1}^n + (v_p)_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \lambda_p ((v_p)_{i+1}^n - (v_p)_i^n), \\ (v_p)_i^{n+1} = (v_p)_i^n - r\lambda_p \left((v_p)_{i+\frac{1}{2}}^n - (v_p)_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \end{cases}$$

Proposition 2.3.1 *Sous les deux conditions suivantes :*

1) $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{\rho(\mathcal{A})}{|\lambda_p|} \quad \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \forall p \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\lambda_p \neq 0$,

2) $r \leq \rho(\mathcal{A})^{-1}$.

Le schéma satisfait le principe du maximum local

$$\min_{i \in \mathbb{Z}} (v_p)_i^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} (v_p)_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} (v_p)_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} (v_p)_i^n.$$

Preuve

On a $\forall p$

$$\begin{aligned} (v_p)_i^{n+1} = (v_p)_i^n & - \frac{r}{2} \lambda_p \left[((v_p)_{i+1}^n + (v_p)_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \lambda_p ((v_p)_{i+1}^n - (v_p)_i^n) \right] \\ & + \frac{r}{2} \lambda_p \left[(v_p)_i^n + (v_p)_{i-1}^n - \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{S_{i-\frac{1}{2}}^n} \lambda_p ((v_p)_i^n - (v_p)_{i-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement que dans le cas scalaire, on écrit

$$(v_p)_{i+1}^{n+1} = \beta_{i-1}^n (v_p)_{i-1}^n + \beta_i^n (v_p)_i^n + \beta_{i+1}^n (v_p)_{i+1}^n,$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_{i-1}^n &= \frac{r}{2} \lambda_p \left(1 + \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{S_{i-\frac{1}{2}}^n} \lambda_p \right), \\ \beta_i^n &= 1 - \frac{r}{2} \left(\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{S_{i-\frac{1}{2}}^n} + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \right) \lambda_p^2, \\ \beta_{i+1}^n &= \frac{r}{2} \lambda_p \left(\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \lambda_p - 1 \right).\end{aligned}$$

On pose $[\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p = \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} \lambda_p$.

1) En appliquant le même argument que dans le cas scalaire, on aura $\beta_{i+1}^n \geq 0$ et $\beta_{i-1}^n \geq 0$ sous la condition suffisante $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_p|}$, $\forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\forall p \in \{1, \dots, m\}$.

2) D'après 1), on déduit que $\frac{1}{\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} + \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{S_{i-\frac{1}{2}}^n}} \leq \frac{|\lambda_p|}{2} \quad \forall p \in \{1, \dots, m\}$; et la condition $\beta_i^n \geq 0$ est satisfaite si $r \lambda_p^2 \leq \frac{2}{\left(\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{S_{i+\frac{1}{2}}^n} + \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{S_{i-\frac{1}{2}}^n} \right)}$ $\forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\forall p \in \{1, \dots, m\}$, ce

qui est vérifié sous la condition suffisante $r\rho(\mathcal{A}) \leq 1$.

■

2.3.2 Paramètre de contrôle sous forme matricielle

De manière analogue à l'étude faite dans le cas scalaire, on se propose de borner l'état intermédiaire $(v_p)_{i+\frac{1}{2}}^n \quad \forall p \in \{1, \dots, m\}$. Pour cela à chaque instant on impose sur $v_{i+\frac{1}{2}}^n$ la condition suffisante suivante :

$$(v_p)_{i+\frac{1}{2}}^n \in [(v_p)_{i+1}^n \perp (v_p)_i^n, (v_p)_{i+1}^n \top (v_p)_i^n] \quad \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall p \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.13)$$

Or

$$(v_p)_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left(1 + [\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p \right) (v_p)_i^n + \frac{1}{2} \left(1 - [\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p \right) (v_p)_{i+1}^n,$$

pour que la condition (2.13) soit remplie, il suffit d'avoir

$$1 + [\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - [\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p \geq 0,$$

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES HOMOGENES

il s'ensuit que

$$\left| [\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p \right| \leq 1 \quad \forall p \in \{1, \dots, m\}, \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$$

Finalement sous la condition (2.13), on trouve

$$\forall p \in \{1, \dots, m\} \quad \left| [\delta_{i+\frac{1}{2}}^n]_p \right| \leq 1. \quad (2.14)$$

Les deux inégalités $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_p|}$ (condition de stabilité de la proposition 2.3.1) et $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_p|}$ impliquent $\forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{1, \dots, m\}$ $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_p|}$. On voit donc que le paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ dépend des valeurs propres, d'où le choix de le prendre sous la forme d'une matrice diagonale

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_2|} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_m|} \end{pmatrix}.$$

Or $V = \mathcal{R}^{-1}W$. En remplaçant dans l'étape prédicteur, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{R} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \Lambda \mathcal{R}^{-1} (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{R} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \mathcal{R}^{-1} \mathcal{A} (W_{i+1}^n - W_i^n). \end{aligned}$$

On pose

$$\mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{R} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \mathcal{R}^{-1}.$$

Finalement le schéma SRNH devient

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \mathcal{A} (W_{i+1}^n - W_i^n), \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r \mathcal{A} (W_{i+\frac{1}{2}}^n - W_{i-\frac{1}{2}}^n). \end{cases}$$

En simplifiant on obtient le schéma SRNHS

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\mathcal{A}) (W_{i+1}^n - W_i^n), \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r \left(F \left(W_{i+\frac{1}{2}}^n \right) - F \left(W_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right), \end{cases}$$

avec $\text{sgn}(\mathcal{A}) = \mathcal{R} \text{sgn}(\Lambda) \mathcal{R}^{-1}$ et $\text{sgn}(\Lambda) = \text{diag} \left(\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} \right)$.

Remarque

Pour un problème linéaire $F(W) = \mathcal{A}W$ le schéma SRNHS se ramène à un schéma décentré amont comme le schéma de Roe, VFFC et VFRoe en effet :

$$\begin{aligned} \Phi^{VFFC}(W_i^n, W_{i+1}^n) &= \frac{1}{2} \mathcal{A} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\mathcal{A}) \mathcal{A} (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{A} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= \Phi^{Roe}(W_i^n, W_{i+1}^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{SRNHS}(W_i^n, W_{i+1}^n) &= \frac{1}{2} \mathcal{A} ((W_i^n + W_{i+1}^n) - \text{sgn}(\mathcal{A}) (W_{i+1}^n - W_i^n)) \\ &= \Phi^{VFFC}(W_i^n, W_{i+1}^n). \end{aligned}$$

D'autre part si on projette $W_{i+1}^n - W_i^n$ dans la base des vecteurs propres de la manière suivante $W_{i+1}^n - W_i^n = \sum_{p=1}^{p=m} \gamma_p r_p$ on aura

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^n &= W_i^n + \frac{1}{2} (W_{i+1}^n - W_i^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\mathcal{A}) (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= W_i^n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=m} \gamma_p (1 - \text{sgn}(\lambda_p)) r_p \\ &= W_i^n + \sum_{\lambda_p < 0} \gamma_p r_p \\ &= W_{VFRoe}(0, W_i^n, W_{i+1}^n), \end{aligned}$$

où $W_{VFRoe}(0, W_i^n, W_{i+1}^n)$ est la solution du problème de Riemann, $\gamma_p = {}^t l_p \cdot (W_{i+1}^n - W_i^n)$ et ${}^t l_p$ pour $p = 1, \dots, m$ les vecteurs propres à gauche de \mathcal{A} vérifiant ${}^t l_p \cdot r_q = \delta_{pq}$ d'où pour ce cas linéaire

$$\Phi^{SRNHS}(W_i^n, W_{i+1}^n) = \mathcal{A} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{A} W_{VFRoe}(0, W_i^n, W_{i+1}^n) = \Phi^{VFRoe}(W_i^n, W_{i+1}^n).$$

2.3.3 Cas non linéaire

On considère le système hyperbolique non linéaire homogène 1D suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = 0, (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \\ W(x, 0) = W_0(x), x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (2.15)$$

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES HOMOGENES

avec $W : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ un vecteur à m composantes de quantités conservées, où variables d'état, comme la masse, la quantité de mouvement et l'énergie dans le cas des problèmes de la mécanique des fluides, et la hauteur et la quantité de mouvement dans le cas du problème de Saint-Venant. Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^m . La fonction F définie de Ω dans \mathbb{R}^m représente la fonction flux que l'on suppose assez régulière. Le schéma SRNH pour ce problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)), \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r \left(F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n) \right), \end{cases}$$

avec

$$S_{i+\frac{1}{2}}^n = \max_{p=1,\dots,m} \left(\max \left(|\lambda_{i,p}^n|, |\lambda_{i+1,p}^n| \right) \right)$$

où $[\lambda_p]_{p=1,\dots,m}$ sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de F , $\lambda_{i,p}^n$ (respectivement $\lambda_{i+1,p}^n$) calculées à l'état W_i^n (respectivement à l'état W_{i+1}^n) et $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ un paramètre de contrôle. On suppose qu'il existe un état intermédiaire $\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n)$ tel que

$$F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n) = \mathcal{A}(\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n)) (W_{i+1}^n - W_i^n).$$

La matrice de Roe [Roe81] quand elle existe vérifie exactement cette condition. Dans ce cas l'étape prédicteur devient :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{A}(\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n)) (W_{i+1}^n - W_i^n).$$

Comme le système (2.15) est hyperbolique, il s'ensuit que la matrice $\mathcal{A}(\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n))$ est diagonalisable. On note $\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_m$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m\}$, et on note $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m\}$ la base des vecteurs propres de \mathbb{R}^m . Soit $\bar{\mathcal{R}} = [\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m]$ la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^m à la base $\bar{\mathcal{B}}$ formée par les vecteurs propres de $\mathcal{A}(\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n))$, il s'ensuit que la matrice $\mathcal{A}(\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n)) = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$, où $\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}$ est la matrice des valeurs propres et $\bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$ est la matrice inverse de la matrice de passage. Si on considère le comportement du système localement entre les mailles x_i et x_{i+1} , l'étape prédicteur du système (2.15) donne :

$$\bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (W_{i+1}^n - W_i^n).$$

On pose $\bar{V}_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} W_{i+\frac{1}{2}}^n$, $\bar{V}_i^n = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} W_i^n$ et $\bar{V}_{i+1}^n = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} W_{i+1}^n$ on aura

$$\bar{V}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (\bar{V}_{i+1}^n + \bar{V}_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} (\bar{V}_{i+1}^n - \bar{V}_i^n).$$

En tenant compte de l'analyse du schéma SRNH dans le cas linéaire vectoriel, dans le cas où $\lambda_p \neq 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, m\}$ on peut écrire de manière analogue :

$$\bar{Q}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)) = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1},$$

avec

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_2|} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|\lambda_m|} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas le schéma SRNH devient

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \bar{Q}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)) (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)), \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r (F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n)). \end{cases}$$

En simplifiant on aura

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) (W_{i+1}^n - W_i^n), \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r (F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n)). \end{cases}$$

Finalement le schéma SRNHS est une variante du schéma SRNH qui s'écrit :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2} \left| \mathcal{A}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))^{-1} \right| (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)), \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r (F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n)), \end{cases}$$

avec

$$\left| \mathcal{A}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))^{-1} \right| = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} \left| \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \right| \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \quad \text{et} \quad \left| \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \right| = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{|\lambda_p|} \right).$$

Remarque 1

Dans le but de qualifier ce schéma nous allons le comparer avec des schémas de volumes finis efficaces pour la simulation numérique des systèmes hyperboliques, à savoir le schéma à flux caractéristique (VFFC)[GKLC96, Bou98], dont le flux numérique s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$g^{VFFC}(V, W) = \frac{1}{2} (F(V) + F(W)) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}(\bar{U})) (F(W) - F(V))$$

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES HOMOGENES

basé sur les courbes caractéristiques $X_k(t)$ qui sont des solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dX_k}{dt} = \lambda_k(V(X_k, t)).$$

Le schéma VFFC a une grande ressemblance avec le schéma de Roe dans le cas des systèmes hyperboliques homogènes, dont le flux numérique peut s'écrire de la manière suivante :

$$g^{Roe}(V, W) = \frac{1}{2} (F(V) + F(W)) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}^{Roe}) (F(W) - F(V))$$

en changeant la moyenne de Roe par une moyenne arithmétique $\bar{U} = \frac{1}{2}(V + W)$.

On note également le schéma VFRoe [MFG99, GHS02], dont le flux numérique est donné par

$$g^{VFRoe}(V, W) = F(W_{VFRoe}(0; V, W)),$$

où $W_{VFRoe}(0; V, W)$ désigne la solution du problème de Riemann linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(\bar{U}) \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \\ W(x, 0) = \begin{cases} V, & x < 0, \\ W, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

en supposant que la solution du problème non linéaire est connue à l'instant t^n .

Le schéma a été écrit pour les problèmes hyperboliques conservatifs, et par la suite a été prolongé aux problèmes non conservatifs [BGH00].

Le schéma SRNHS retrouve le schéma VFRoe pour les systèmes hyperboliques non homogènes en effet l'étape prédicteur s'écrit

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^n &= W_i^n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p (1 - \operatorname{sgn}(\bar{\lambda}_p)) \bar{r}_p \\ &= W_i^n + \sum_{\bar{\lambda}_p < 0} \bar{\gamma}_p \bar{r}_p \\ &= W_{VFRoe}(0; W_i^n, W_{i+1}^n), \end{aligned}$$

dans le cas où l'état moyen $\bar{V}(W_i^n, W_{i+1}^n) = \frac{1}{2}(W_i^n + W_{i+1}^n)$, et $\bar{\gamma}_p = {}^t \bar{l}_p \cdot (W_{i+1}^n - W_i^n)$, (pour plus de détails voir paragraphe (2.3.4)).

Pour une loi de conservation scalaire sur un maillage régulier, le schéma SRNHS comme les schémas VFFC et VFRoe sont très proches. En effet, si on considère l'équation de conservation scalaire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$$

où $v \in \mathbb{R}$ et f une fonction régulière de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , les expressions des flux numériques sont données par :

$$g^{SRNHS}(v, w) = \begin{cases} f(v) & \text{si } f'(\hat{u}) > 0 \\ f(w) & \text{si } f'(\hat{u}) < 0 \\ f(\bar{u}) & \text{si } f'(\hat{u}) = 0 \end{cases}$$

$$g^{Roe}(v, w) = \begin{cases} f(v) & \text{si } f'(\hat{u}) > 0 \\ f(w) & \text{si } f'(\hat{u}) < 0 \\ \frac{1}{2}(f(v) + f(w)) & \text{si } f'(\hat{u}) = 0 \end{cases}$$

$$g^{VFFC}(v, w) = \begin{cases} f(v) & \text{si } f'(\bar{u}) > 0 \\ f(w) & \text{si } f'(\bar{u}) < 0 \\ \frac{1}{2}(f(v) + f(w)) & \text{si } f'(\bar{u}) = 0 \end{cases}$$

où

$$f'(\hat{u}) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(v)}{w - v} & \text{si } w \neq v \\ f'(v) & \text{si } w = v \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{u} = \frac{1}{2}(v + w).$$

Remarque 2

$g^{SRNHS}(v, w) = g^{VFRoe}(v, w)$ dans le cas où l'état moyen \hat{u} du schéma SRNHS est pris égal à \bar{u} . Le schéma SRNHS a montré une robustesse et une grande efficacité pour la simulation numérique de certains problèmes hyperboliques homogènes. Mais de manière analogue aux schémas de Roe, VFFC et VFRoe qui se basent essentiellement sur l'approximation du problème de Riemann local par un problème linéaire, ce schéma peut donner des solutions non physiques et mener à l'apparition de chocs stationnaires, alors que la solution physique qui vérifie l'inégalité d'entropie est une onde de détente, cela nous oblige à faire une correction entropique au niveau des points soniques.

2.3.4 Modification entropique

Dans l'étape prédicteur du schéma SRNHS, on a essayé de trouver une bonne approximation de la solution approchée du problème de Riemann linéarisé par l'expression :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} (\mathcal{A} (\bar{\mathcal{V}} (W_i^n, W_{i+1}^n))) (W_{i+1}^n - W_i^n).$$

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES
HOMOGENES

On projette $W_{i+1}^n - W_i^n$ dans la base des vecteurs propres $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m\}$ de la Jacobienne \mathcal{A} calculée a l'état moyen, on aura :

$$W_{i+1}^n - W_i^n = \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p \bar{r}_p.$$

Or

$$\mathcal{A}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)) = \bar{\mathcal{R}} \operatorname{sgn}(\bar{\Lambda}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) \bar{\mathcal{R}}^{-1},$$

avec $\operatorname{sgn}(\bar{\Lambda}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)))$ est donnée par

$$\operatorname{sgn}(\bar{\Lambda}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\lambda}_1}{|\bar{\lambda}_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\lambda}_2}{|\bar{\lambda}_2|} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\bar{\lambda}_m}{|\bar{\lambda}_m|} \end{pmatrix},$$

dans le cas où $\bar{\lambda}_k = 0$, on pose $\operatorname{sgn}(\bar{\lambda}_k) = 0$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) (W_{i+1}^n - W_i^n) &= \bar{\mathcal{R}} \operatorname{sgn}(\bar{\Lambda}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) \bar{\mathcal{R}}^{-1} \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p \bar{r}_p \\ &= \bar{\mathcal{R}} \operatorname{sgn}(\bar{\Lambda}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p \bar{\mathcal{R}}^{-1} \bar{r}_p. \end{aligned}$$

Or ${}^t \bar{l}_q \bar{r}_p = \delta_{pq}$ ou \bar{l}_q est le q-ième vecteur colonne de la matrice $\bar{\mathcal{R}}^{-1}$, d'où

$$\operatorname{sgn}(\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) (W_{i+1}^n - W_i^n) = \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p \operatorname{sgn}(\bar{\lambda}_p) \bar{r}_p,$$

de plus on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) &= W_i^n + \frac{1}{2} (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= W_i^n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p \bar{r}_p. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) &= W_{i+1}^n - \frac{1}{2} (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= W_{i+1}^n - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p \bar{r}_p. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^n &= W_i^n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p (1 - \text{sgn}(\bar{\lambda}_p)) \bar{r}_p \\ &= W_{i+1}^n - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \bar{\gamma}_p (1 + \text{sgn}(\bar{\lambda}_p)) \bar{r}_p. \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$\lambda_{jl} < 0 < \lambda_{jr}$$

où λ_{jl} est la j -ième valeur propre de la jacobienne calculée à l'état W_i^n et λ_{jr} est la j -ième valeur propre de la jacobienne calculée à l'état W_{i+1}^n , dans ce cas s'inspirant de Harten, Hyman et Lax [HHL76] et Harten et Hyman [HH83] on remplace λ_{jl} par $\hat{\lambda}_{jl}$ et λ_{jr} par $\hat{\lambda}_{jr}$ avec

$$\hat{\lambda}_{jl} = \lambda_{jl} \frac{\lambda_{jr} - \bar{\lambda}_j}{\lambda_{jr} - \lambda_{jl}}$$

et

$$\hat{\lambda}_{jr} = \lambda_{jr} \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_{jl}}{\lambda_{jr} - \lambda_{jl}}.$$

Ensuite on l'injecte dans l'expression de $W_{i+\frac{1}{2}}^n$ de la façon suivante :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = W_i^n + \frac{1}{2} \sum_{p=1, p \neq j}^m \bar{\gamma}_p (1 - \text{sgn}(\bar{\lambda}_p)) \bar{r}_p + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_j (1 - \text{sgn}(\hat{\lambda}_{jl})) \bar{r}_j \quad (2.16)$$

et

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = W_{i+1}^n - \frac{1}{2} \sum_{p=1, p \neq j}^m \bar{\gamma}_p (1 + \text{sgn}(\bar{\lambda}_p)) \bar{r}_p - \frac{1}{2} \bar{\gamma}_j (1 + \text{sgn}(\hat{\lambda}_{jr})) \bar{r}_j. \quad (2.17)$$

On additionne (2.16) et (2.17) on aura

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1, p \neq j}^m \bar{\gamma}_p \text{sgn}(\bar{\lambda}_p) \bar{r}_p - \frac{1}{4} \bar{\gamma}_j (\text{sgn}(\hat{\lambda}_{jl}) + \text{sgn}(\hat{\lambda}_{jr})) \bar{r}_j.$$

Nous allons tester le schéma SRNHS, tout d'abord sur des problèmes homogènes.

2.3.5 Résultats numériques

Problème de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant monodimensionnelles modélisant l'écoulement de l'eau dans un canal s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0, & x \in [-10, 10] \\ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

où h est la hauteur de l'eau, u est la vitesse d'écoulement de l'eau et $g = 9.81ms^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

La matrice Jacobienne est donnée par

$$\mathcal{A}(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

où $c = \sqrt{gh}$.

Le deux valeurs propres de \mathcal{A} sont $u - c$ et $u + c$, la matrice de passage est donnée par

$$\mathcal{R}(W) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u - c & u + c \end{pmatrix}$$

et l'inverse de la matrice de passage est :

$$\mathcal{R}^{-1}(W) = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} u + c & -1 \\ -u + c & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice signe définie dans le schéma SRNHS, est en principe définie par les états moyens de Roe [Roe81] qui sont données par $\tilde{h} = \frac{h_l + h_r}{2}$ et $\tilde{u} = \frac{u_l \sqrt{h_l} + u_r \sqrt{h_r}}{\sqrt{h_l h_r}}$.

Cependant dans les tests numériques on a simplement pris les états moyens $\bar{h} = \frac{h_l + h_r}{2}$ et $\bar{u} = \frac{u_l + u_r}{2}$, où h_l et u_l sont respectivement la hauteur et la vitesse de l'eau si $x < 0$, h_r et u_r sont respectivement la hauteur et la vitesse de l'eau si $x > 0$.

Pour valider le schéma SRNHS et la modification entropique nous faisons des tests numériques sur des cas où ils existent des points soniques et nous introduisons la correction entropique à ce niveau. Pour cela on prend comme condition initiale $h_l = 20m$, $h_r = 1m$, $u_l = 0$ et $u_r = 0$ à $t = 0.3s$ avec un maillage de 100 points (figures FIG. 2.8, FIG. 2.9) et un cas test avec fond sec (figures FIG. 2.10, FIG. 2.11)

. Ensuite nous allons reprendre quelques exemples testés par T. Buffard, T. Gallouet et J.M. Hérard [BGH98] dans “un schéma simple pour les équations de Saint-Venant” pour voir l’efficacité du schéma pour la résolution de ces problèmes.

Rupture de barrage sur fond mouillé : il s’agit d’un problème de Riemann de condition initiales :

$$(h, Q)(x < 0, t = 0) = (1, 0), \quad (h, Q)(x > 0, t = 0) = (0.3, 0)$$

Une 1-onde de détente subsonique et un 2-choc se forment.

Rupture de barrage sur fond sec : Les conditions initiales sont maintenant :

$$(h, Q)(x < 0, t = 0) = (1, 0), \quad (h, Q)(x > 0, t = 0) = (0, 0)$$

Une 1-onde de détente subsonique et un 2-choc d’amplitude très faibles se forment. On constate bien que les résultats numériques sur plusieurs cas test obtenus par le schéma SRNHS (ou VFRoe) coïncident avec ceux du schéma de Roe.

On constate aussi que le calcul de la Jacobienne en utilisant la moyenne arithmétique au lieu de la moyenne de Roe ne change pas les résultats numériques.

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES HOMOGENES

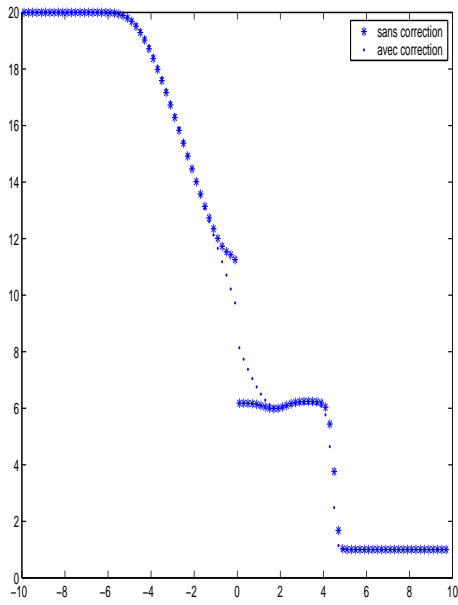


FIG. 2.8 – Hauteur de l'eau, $cfl=0.7$, $t=0.3$, 100 points

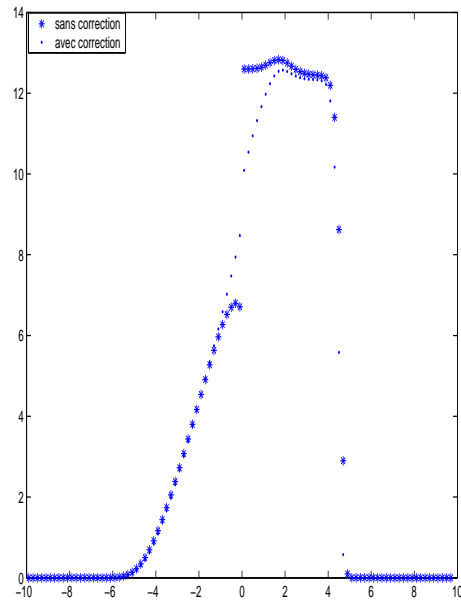


FIG. 2.9 – Vitesse de l'eau, $cfl=0.7$, $t=0.3$, 100 points

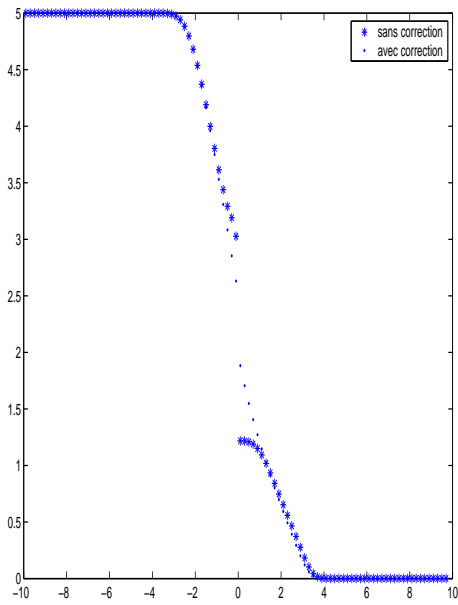


FIG. 2.10 – Hauteur de l'eau, $cfl=0.7$, $t=0.3$, 100 points

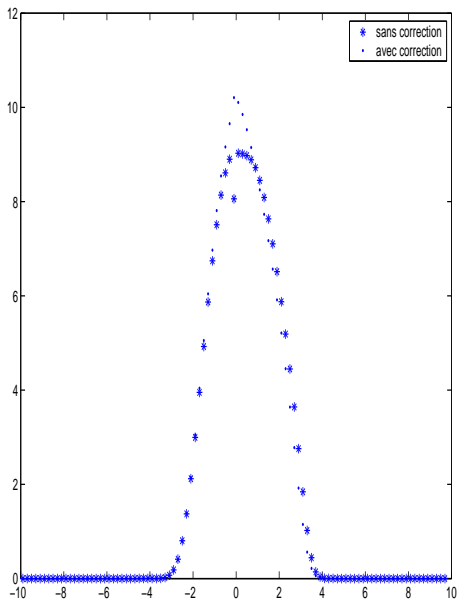


FIG. 2.11 – débit de l'eau, $cfl=0.7$, $t=0.3$, 100 points

Problème d'Euler

Les équations de la dynamique des gaz pour un fluide parfait s'écrivent en une dimension d'espace sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = 0, & x \in [0, 10], \\ W(x, 0) = W_0(x). \end{cases}$$

Pour fermer le système, on ajoute l'équation d'état des gaz parfaits

$$p = (\gamma - 1) \left[E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right].$$

Les variables conservatives et la fonction du flux physique sont donnés par :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p) u \end{pmatrix}$$

où ρ représente la densité du gaz, u est la vitesse, p est la pression et E est l'énergie totale. γ est le rapport des chaleurs spécifiques. Il est supposé constant et égal à 1.4 (cas d'un gaz parfait diatomique).

On définit également l'enthalpie totale H par $H = \frac{1}{\rho} (E + p)$ et la célérité du son

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

La Jacobienne de F est donnée par

$$\nabla F(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 1)H - u^2 - c^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 2)uH - uc^2 & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}.$$

La matrice $\nabla F(W)$ est diagonalisable, ses valeurs propres λ_j sont données par :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

et ses vecteurs propres associés sont donnés par

$$R_1(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad R_2(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_3(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}.$$

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES HOMOGENES

Après avoir effectué la correction entropique introduite dans le paragraphe (2.3.4), ce schéma permet la simulation numérique de quelques cas critiques en prenant $t = 0.005$ et la condition de stabilité égale à 0.9 :

En fonction des conditions initiales le problème d'Euler admet trois champs caractéristiques, le premier et le troisième champs caractéristiques sont vraiment non linéaires ($\nabla \lambda_j \cdot R_j \neq 0$, pour $j = 1, 3$) et peuvent être soit des ondes de raréfaction, soit des ondes de choc, par contre le deuxième champ caractéristique est linéairement dégénéré ($\nabla \lambda_2 \cdot R_2 = 0$) et correspond à une discontinuité de contact qui se propage avec la vitesse u .

Notons que pour ce problème les résultats numériques du schéma SRNHS et le schéma de VFRoe sont les mêmes.

cas testé

Onde supersonique 1-raréfaction

Le premier champ caractéristique est une onde de raréfaction qui contient un point sonique, ce problème est traité à l'aide de la correction entropique introduite dans le paragraphe (2.3.4).

état gauche $x \leq 5$	état droit $x > 5$
$\rho_l = 1$	$\rho_r = 0.01$
$u_l = 0$	$u_r = 0$
$p_l = 10^5$	$p_r = 10^3$

Notons que le schéma VFFC pour ce cas, s'est avéré non entropique même après correction entropique [Seg02].

Onde de choc double subsonique

Dans ce cas il y a deux chocs que se propagent de la gauche vers la droite.

état gauche $x \leq 5$	état droit $x > 5$
$\rho_l = 1$	$\rho_r = 1$
$u_l = 300$	$u_r = -300$
$p_l = 10^5$	$p_r = 10^5$

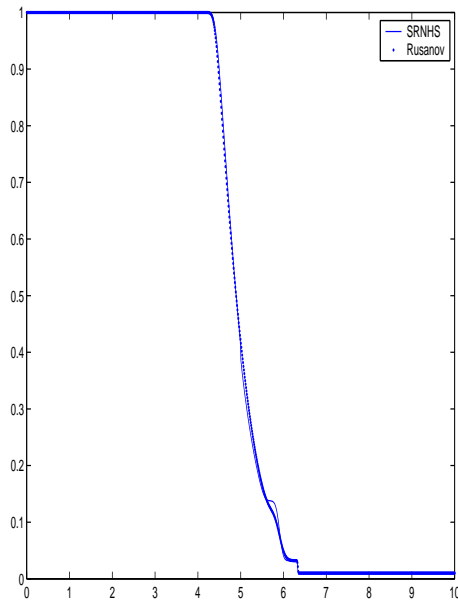


FIG. 2.12 – La densité du fluide, $cf=0.9$, $t=0.0015$, 1000 points

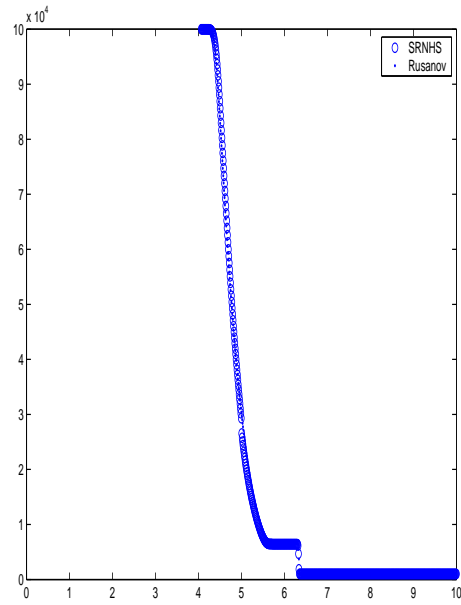


FIG. 2.13 – La pression du fluide, $cf=0.9$, $t=0.0015$, 1000 points

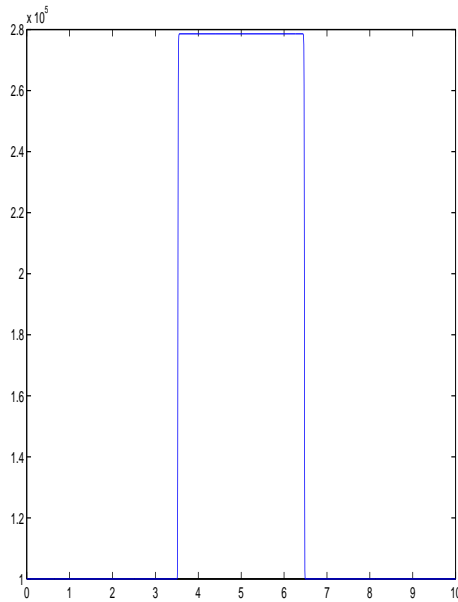


FIG. 2.14 – La pression du fluide, $cf=0.9$, $t=0.005$, 1000 points

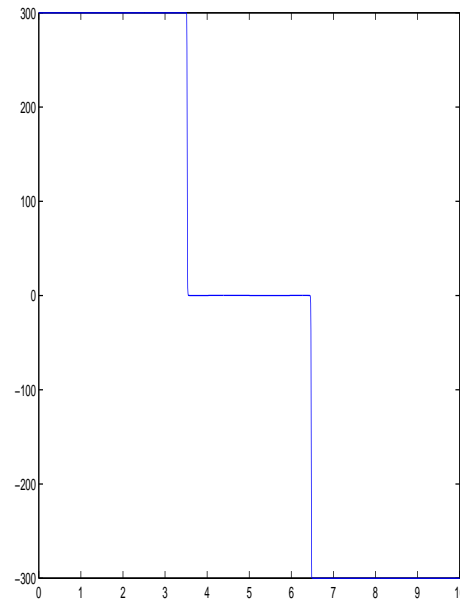


FIG. 2.15 – La quantité de la mouvement du fluide, $cf=0.9$, $t=0.005$, 1000 points

2.3. ÉTUDE DU SCHEMA SRNH DANS LE CAS DE SYSTEMES HOMOGENES

Bibliographie

- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, FVCA3, HPS, R. Herbin, D.Kröner(Eds), Proceedings of the Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Application, 2002, pp. 269–276.
- [BGH98] T. Buffard, T. Gallouët, and J-M. Hérard, *Un schéma simple pour les équations de Saint-Venant*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 3, 385–390.
- [BGH00] T. Buffard, T. Gallouët, and J-M. Hérard, *A sequel to a rough Godunov scheme : application to real gases*, Comput. & Fluids **29** (2000), no. 7, 813–847.
- [Bou98] M. Boucker, *Modélisation numérique multidimensionnelle d’écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent : méthodes et applications*, Ph.D. thesis, Electricité de France, 1998.
- [BT97] S. J. Billett and E. F. Toro, *On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys. **130** (1997), no. 1, 1–24.
- [BT98] ———, *Unsplit WAF-type schemes for three-dimensional hyperbolic conservation laws*, Numerical methods for wave propagation (Manchester, 1995), Fluid Mech. Appl., vol. 47, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 75–124.
- [Cor69] R. W. Mac Cormack, *the effect of viscosity in hyperbolicity impact ctreating*, AIAA **69** (1969), 354.
- [DV04] F. De Vuyst, *Stable and accurate hybrid finite volume methods based on pure convexity arguments for hyperbolic systems of conservation law*, J. Comput. Phys. **193** (2004), no. 2, 426–468.
- [GHS02] T. Gallouët, J-M. Hérard, and N. Seguin, *True rate of convergence of some upwinding finite volume schemes for Euler equations*, Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille, 2002, pp. 731–738 (electronic).
- [GHS03] ———, *Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 4, 479–513.
- [GKLC96] J-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes*

- hyperboliques de lois de conservation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [God59] S. K. Godunov, *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*, Mat. Sb. (N.S.) **47** (89) (1959), 271–306.
- [God60] ———, *A difference method for the calculation of shock waves*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **16** (1960), 389–390.
- [GR91] E. Godlewski and P-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications], vol. 3/4, Ellipses, Paris, 1991.
- [GR96] ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [HH83] A. Harten and J. M. Hyman, *Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys. **50** (1983), no. 2, 235–269.
- [HHL76] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax, *On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 3, 297–322, With an appendix by B. Keyfitz.
- [LW60] P. Lax and B. Wendroff, *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 217–237.
- [MFG99] J-M. Masella, I. Faille, and T. Gallouët, *On an approximate Godunov scheme*, Int. J. Comput. Fluid Dyn. **12** (1999), no. 2, 133–149.
- [RM67] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, *Difference methods for initial-value problems*, Second edition. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 4, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1967.
- [Roe81] P. L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Rus61] V. V. Rusanov, *The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **1** (1961), 267–279.
- [Seg02] N. Seguin, *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*, Ph.D. thesis, Université de Provence, 2002.
- [Tor92] E. F. Toro, *Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **338** (1992), no. 1649, 43–68.
- [Tor99] Eleuterio F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1999, A practical introduction.

Chapitre 3

Schéma SRNHS - Application aux problèmes hyperboliques non homogènes

Résumé

Dans ce chapitre nous faisons l'extension du schéma Solveur de Riemann non homogène avec matrice signe (SRNHS) aux problèmes scalaires non homogènes, ensuite nous l'appliquerons au problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière. Nous effectuons des comparaisons avec un schéma performant pour la simulation numérique de ce genre de problèmes à savoir le schéma de Bermúdez et Vázquez [BV94] en présentant des courbes d'erreurs.

3.1 Introduction

La résolution numérique des problèmes non homogènes fait l'objet de plusieurs travaux de recherches, notamment pour le problème de Saint-Venant avec terme source très raide. La propriété de conservation de l'état d'équilibre est fondamentale dans la simulation numérique de ce type d'écoulement. Très récemment plusieurs articles ont été publiés sur le sujet. Des schémas de volumes finis décentrés développés pour la simulation numérique des problèmes de la mécanique des fluides homogènes (équation d'Euler) [HLvL83, vL84, Roe85, Roe81, SW81, Vij86], ont ainsi été appliqués pour la simulation numérique du problème de Saint-Venant avec des topographies non régulières, en effectuant le décentrement du terme source par sa projection sur les vecteurs propres de la jacobienne du flux numérique [BDDV98, BV94, VC99]. Ces méthodes sont étendues aux problèmes multidimensionnels [BDDV98], Hubbard et Garcia Navarro ont utilisé les limiteurs de pente pour élever ces schémas à l'ordre deux en espace [HGN00]. Plusieurs schémas sont basés sur la propriété de conser-

vation du cas stationnaire. Ces schémas ont été initialement introduits par J. M. Greenberg et A. Y. Leroux [GL96b, GLBN97, GL96a, BPV03] pour le cas scalaire, ensuite ils ont été étendus pour la résolution du problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière [Bon97] et avec frottement. LeVeque et ses coauteurs ont présenté des algorithmes quasi-stationnaires pour les propagations de vagues [LeV98], Jenny et Müller ont modifié la relation de Rankine-Hugoniot des solveurs de Riemann pour les problèmes avec termes sources [JM99]. Dans [VS02], Senko et Luka ont développé un nouveau schéma de volumes finis basé sur la méthode ENO et WENO développé par Osher, Enquist, Chakravarthy, Shu et Jiang basé sur l'idée d'établir une relation d'équilibre entre le flux du gradient et le terme source. Alcrudo et Benkhaldoun dans [AB01] ont donné la solution autosimilaire exacte pour le problème de Riemann de l'équation de Saint-Venant avec un fond discontinu, ensuite avec un schéma basé sur l'autosimilarité de la solution exacte du problème de Riemann non homogène, Benkhaldoun a déduit un schéma général de type prédicteur-correcteur pour la simulation numérique des problèmes non homogène. Ce schéma a été appliqué avec succès dans le cas 1D aux écoulements diphasiques et au problème de Saint-Venant avec terme source [Ben02].

Dans les chapitres précédents nous avons montré qu'une analyse mathématique d'une version modifiée du schéma précité permettait d'aboutir à un nouveau schéma SRNHS. Ce nouveau schéma SRNHS a une grande ressemblance avec les schémas décentré amont au niveau des techniques utilisées (matrice de Roe, matrice signe, décentrement amont, solution de Riemann approchée), mais diffère dans la manière d'introduire l'approximation de la solution du problème de Riemann avec présence de terme source.

Pour évaluer l'efficacité de cette méthode nous allons commencer l'étude du schéma SRNHS dans le cas scalaire dans la première section. Ensuite nous allons l'appliquer pour le problème de Saint-Venant avec une topographie irrégulière. Nous allons montrer le respect de la C-propriété de la conservation du cas stationnaire introduite par Bermúdez et Vázquez [BV94, BDDV98]. La simulation numérique de quelques cas critiques a été menée en effectuant l'extension du schéma SRNHS à l'ordre deux en espace en utilisant la technique MUSCL, et la qualification du schéma SRNHS est faite par le tracé des courbes d'erreurs.

3.2 Cas scalaire non homogène

On considère le problème non linéaire avec terme source suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = s(x, u), \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \longrightarrow u(x, t)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $s(x, u)$ et le terme source.

Le schéma de volumes finis SRNH basé sur l'autosimilarité de la solution du problème de Riemann non homogène, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Delta x \hat{s}^n(x_i, x_{i+1}, u_i^n, u_{i+1}^n), \\ u_i^{n+1} = u_i^n - r \left(f(u_{i+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) + \Delta t s_i^n. \end{cases}$$

En tenant compte de l'analyse faite dans le deuxième chapitre pour le cas homogène où $f(u_{i+1}^n) \neq f(u_i^n)$ une valeur du paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{S_{i+\frac{1}{2}}^n}{|f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|}$ est établie. En remplaçant $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ par sa valeur dans l'étape prédicteur on a :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right) (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{\Delta x}{2|f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|} \hat{s}^n(x_i, x_{i+1}, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

où

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n \in]u_i^n \perp u_{i+1}^n, u_i^n \top u_{i+1}^n[$$

est donné par le théorème des accroissements finis :

$$f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) (u_{i+1}^n - u_i^n) = f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n).$$

Dans le cas où $u_i^n = u_{i+1}^n$, $f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) = f'(u_i^n)$ et $\hat{s}^n(x_i, x_{i+1}, u_i^n, u_{i+1}^n)$ est l'approximation du terme source à l'étape prédicteur donnée par

$$\hat{s}^n(x_i, x_{i+1}, u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{\Delta x \theta} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{t^n}^{t^n + \theta} s(x, t, u) dx dt.$$

Pour prouver l'efficacité de ce schéma nous allons comparer la solution numérique donnée par le schéma SRNHS et la solution analytique pour les problèmes linéaire et non linéaire non homogènes, et nous allons tracer les courbes d'erreurs pour évaluer l'ordre de convergence de ce schéma.

3.2.1 Équation linéaire avec terme source linéaire en u

On a vu que dans le cas scalaire linéaire homogène le schéma SRNHS est équivalent à un schéma décentré, mais il présente un avantage à propos de la simulation des problèmes non homogènes, notamment la conservation d'état d'équilibre pour les problèmes avec fond discontinu. Dans le premier exemple, nous allons vérifier ce schéma sur un cas stationnaire, ensuite nous allons comparer l'erreur de ce schéma sur un problème avec fond discontinu avec l'erreur commise par le schéma décentré

sur un problème homogène avec les mêmes conditions initiales. Pour cela on prend le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx} \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{si } x \leq 20 \\ u_r & \text{si } x > 20 \end{cases} \\ z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 20 \\ 1 & \text{si } x > 20. \end{cases} \end{cases} \quad (3.1)$$

Le schéma de volumes finis SRNHS pour ce problème s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_i^n - \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) (z_{i+1} - z_i) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - r (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) + \Delta t s_i^n \end{cases}$$

où s_i^n est une approximation de la partie non homogène dans l'étape correcteur donnée par

$$s_i^n = -\frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t) \frac{dz}{dx} dx dt = -\frac{1}{8\Delta x} (u_{i+1}^n + 2u_i^n + u_{i-1}^n) (z_{i+1} - z_{i-1})$$

et

$$z_i = z(x_i).$$

Précisons que pour ce problème, la solution analytique présente une discontinuité de contact stationnaire entre u_l et un état intermédiaire $u_* = u_l \exp(-1)$, et un choc entre u_* et u_r de vitesse $s = 1$. De sorte que si on prend $u_l = 6$ et $u_r = 6 \exp(-1)$, cette solution a une apparence stationnaire. Cela est confirmé par la solution numérique donnée par le schéma SRNHS (voir figure FIG. 3.1).

Dans ce cas le schéma décentré (le schéma de Bermúdez et Vázquez [BV94, BDDV98]) est donné par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - r (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{r}{2} (u_i^n + u_{i-1}^n) (z_i - z_{i-1}).$$

On voit que le schéma décentré de Bermúdez et Vázquez ne conserve pas le cas stationnaire pour ce cas test (voir figure FIG. 3.2).

Ensuite on prend $u_l = 6$ et $u_r = 1$. Pour ce cas test l'efficacité du schéma est prouvée par la coïncidence de la solution numérique avec la solution analytique au niveau de l'état intermédiaire (voir figure FIG. 3.3). Enfin nous allons tracer les courbes d'erreurs du schéma SRNHS pour le problème (3.1) et pour l'équation linéaire sans terme source pour comparer l'efficacité du schéma SRNHS pour les problèmes homogènes et non homogènes à l'instant $t = 10s$. Dans la figure (FIG. 3.4)

on remarque que la vitesse de convergence du schéma SRNHS est la même pour le cas homogène et non homogène. En revanche la valeur de l'erreur pour le problème non homogène est inférieure à celle du problème homogène. Ce qui prouve que le schéma SRNHS est efficace pour les problèmes non homogènes autant que pour les problèmes homogènes, en gardant la vitesse de convergence d'ordre $\frac{1}{2}$ pour les problèmes non homogènes comme pour le cas homogène.

3.2. CAS SCALAIRE NON HOMOGENÈNE

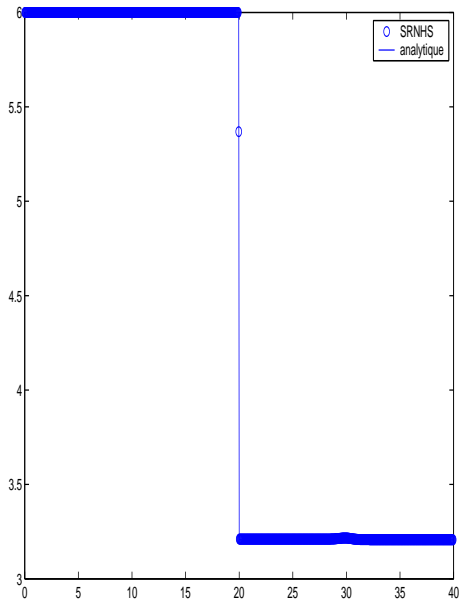


FIG. 3.1 – Courbe de la solution u , $cfl=0.95$, $t=10$, 1000 points

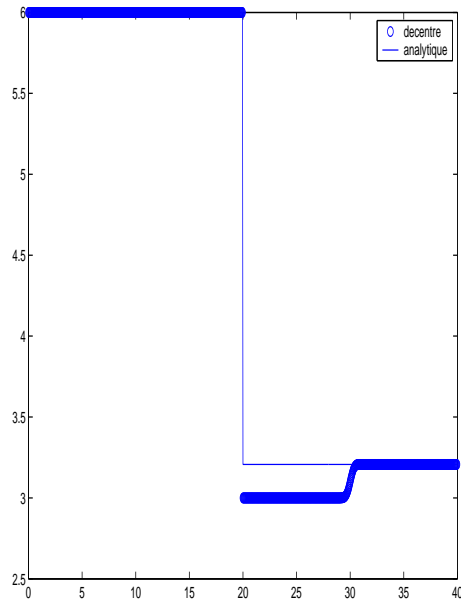


FIG. 3.2 – Courbe de la solution u , $cfl=0.95$, $t=10$ s, 1000 points

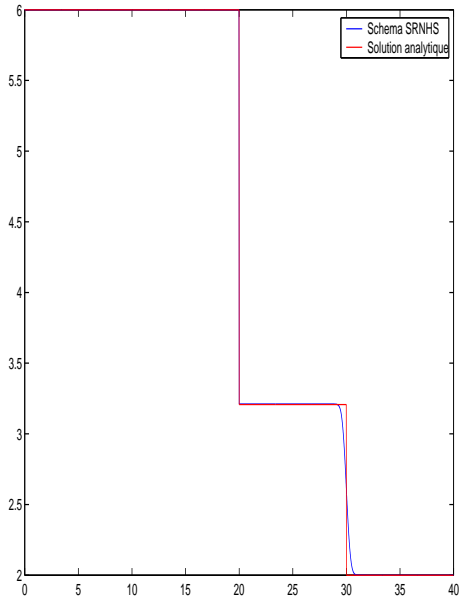


FIG. 3.3 – Courbe de la solution u $cfl=1$, $t=10$ s, 3600 points

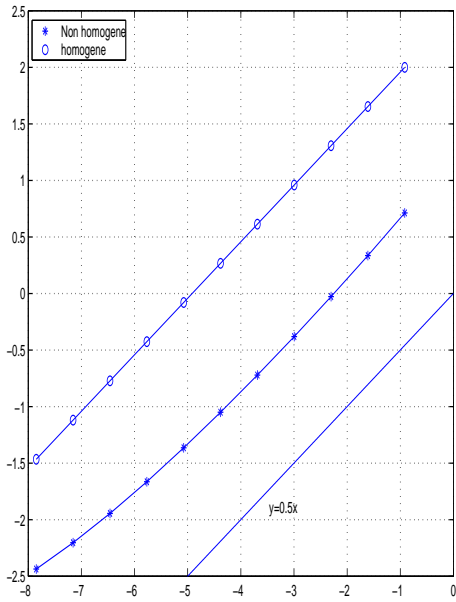


FIG. 3.4 – Courbes d'erreurs du schéma SRNHS avec fond discontinu et fond plat

3.2.2 Équation de Burgers avec terme source

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx} \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{si } x \leq 0 \\ u_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ z(x) = \begin{cases} z_l & \text{si } x \leq 0 \\ z_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.2)$$

Définition 3.2.1 On dit que $u(x, t)$ ($u(x, t)$ est une fonction assez régulière) est une solution stationnaire du problème (3.2) si $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$.

Soit $u(x, t)$ une fonction assez régulière, et $u(x, t)$ est une solution stationnaire du problème (3.2), alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -u \frac{dz}{dx} \iff \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) + z(x)) = 0 \iff u(x, t) + z(x) = c$$

où c est une constante.

Définition 3.2.2 On dit qu'un schéma respecte parfaitement le cas stationnaire pour le problème (3.2) si

$$u_i^n + z_i = c \quad \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{et} \quad z_i = z(x_i). \quad (3.3)$$

Proposition 3.2.3 Sous la condition de la discrétisation du terme source dans l'étape correcteur de l'une des deux façons suivantes :

$$\begin{aligned} i) \quad s_i^n &= -\frac{1}{4\Delta x} (u_{i-\frac{1}{2}}^n + u_{i+\frac{1}{2}}^n) (z_{i+1} - z_{i-1}) \\ ii) \quad s_i^n &= -\frac{1}{8\Delta x} (u_{i-1}^n + 2u_i^n + u_{i+1}^n) (z_{i+1} - z_{i-1}) \end{aligned}$$

où $u_{i+\frac{1}{2}}^n$ est l'état défini à l'étape prédicteur,
le schéma SRNHS respecte parfaitement le cas stationnaire.

Preuve

Dans ce cas, le schéma de volumes finis s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(f' \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right) (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ \quad + \frac{\Delta x}{2 |f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n)|} \hat{s}^n (x_i, x_{i+1}, u_i^n, u_{i+1}^n) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - r \left(f \left(u_{i+\frac{1}{2}}^n \right) - f \left(u_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + \Delta t s_i^n \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{s}^n(x_i, x_{i+1}, u_i^n, u_{i+1}^n) &= -\frac{1}{\Delta x \theta} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{t^n}^{t^{n+\theta}} u(x, t) \frac{dz}{dx}(x) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \frac{(u_{i+1}^n + u_i^n)}{2} (z_{i+1} - z_i),\end{aligned}$$

où le paramètre θ est défini dans le premier chapitre et [Ben02].

Or

$$f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) = \frac{1}{2} (u_i^n + u_{i+1}^n),$$

et

$$f(u_{i+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^n) = \frac{1}{2} (u_{i-\frac{1}{2}}^n + u_{i+\frac{1}{2}}^n) (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n).$$

En remplaçant, on aura

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) \right) ((u_{i+1}^n + z_{i+1}) - (u_i^n + z_i)) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{r}{2} (u_{i+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2}}^n) (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) + \Delta t s_i^n. \end{cases}$$

En utilisant la relation (3.3), l'étape prédicteur devient

$$\begin{aligned}u_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) \\ &= u_{i+1}^n + \frac{1}{2} (z_{i+1} - z_i).\end{aligned}$$

$u(x, t)$ est une solution stationnaire si est seulement si $u_i^{n+1} = u_i^n$, il s'ensuit que l'étape correcteur du schéma SRNHS (3.4) est équivalente à

$$\frac{r}{2} (u_{i+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2}}^n) (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) - \Delta t s_i^n = 0$$

ceci équivaut à

$$\begin{aligned}s_i^n &= \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2}}^n) (u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ &= -\frac{1}{4\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2}}^n) (z_{i+1} - z_{i-1}),\end{aligned}$$

d'où la première discrétisation de s_i^n .

Par ailleurs dans ce cas on a $u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n)$, alors

$$u_{i+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

il s'ensuit la deuxième discrétisation du terme source dans l'étape correcteur.

■

3.2.3 Application Numérique

Nous allons tracer les courbes d'erreurs pour le schéma SRNHS et celui du Q-schéma de Van-Leer déduit par Vázquez [BV94, BDDV98] pour la simulation numérique des problèmes non homogènes.

Ce schéma s'écrit de la manière suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - r (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)) - \Delta t s_i^n,$$

avec

$$g(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ((u_{i+1}^n)^2 + (u_i^n)^2) - \left| f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) \right| (u_{i+1}^n - u_i^n) \right)$$

et

$$\begin{aligned} s_i^n &= \frac{1}{4\Delta x} \left(\left[1 + \operatorname{sgn} \left(f'(a_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) \right] (u_i^n + u_{i-1}^n) (z_i - z_{i-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{4\Delta x} \left(\left[1 - \operatorname{sgn} \left(f'(a_{i+\frac{1}{2}}^n) \right) \right] (u_{i+1}^n + u_i^n) (z_{i+1} - z_i) \right). \end{aligned}$$

On prend comme condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et un fond discontinu

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cas quasi-stationnaire [LeV98]

Pour le problème de Burgers, on prend une pulsation d'amplitude très petite qui se propage avec la vitesse u , en prenant comme conditions initiales les conditions suivantes.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \begin{cases} 1 - z(x) + \epsilon & \text{si } 0.1 < x < 0.2 \\ 1 - z(x) & \text{sinon,} \end{cases} \\ z(x) &= \begin{cases} 0.25(\cos(\pi(x - 0.5)/0.1) + 1) & \text{si } |x - 0.5| \leq 0.1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

avec soit $\epsilon = 0.001$, soit $\epsilon = 0.2$. Dans ces deux cas le schéma SRNHS et le Q-schéma de Bermudez et Vázquez ont donné les mêmes résultats numériques (voir figures FIG. 3.5 et FIG. 3.8) et la vitesse de convergence est de l'ordre de 0.78 qui est la même que celle obtenue dans le cas homogène.

3.2. CAS SCALAIRE NON HOMOGENÈNE

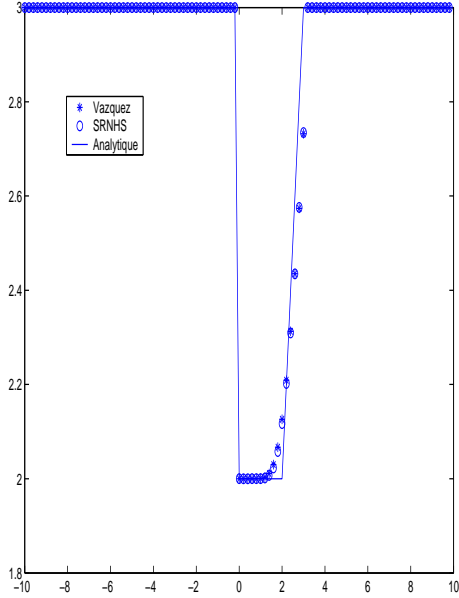


FIG. 3.5 – Courbe de la solution u cfl=1, $t=1$ s, 100 points

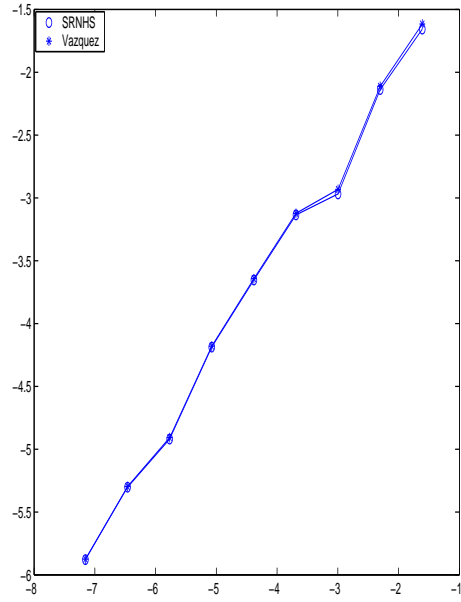


FIG. 3.6 – Courbes d'erreurs du schéma SRNHS et du schéma de Vázquez cfl=1, $t=1.0$, pente = 0.76

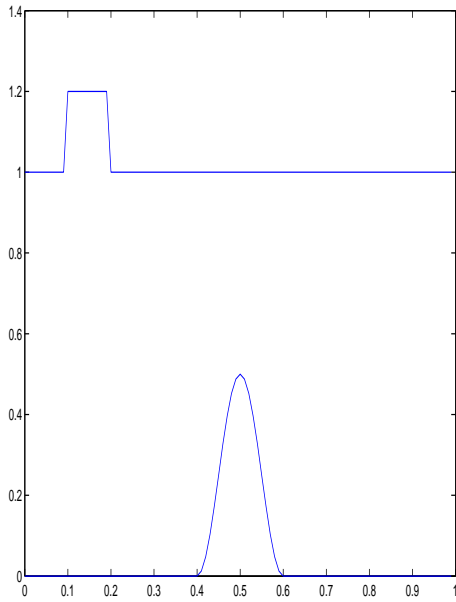


FIG. 3.7 – Courbe de la solution u et du fond à $t=0$. s, cfl=1, 100 points

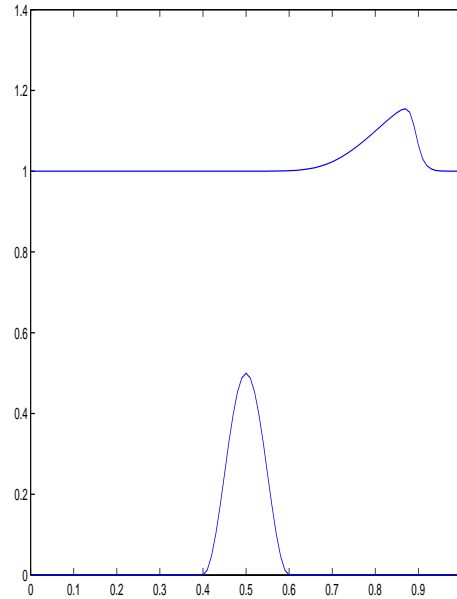


FIG. 3.8 – Courbe de la solution u cfl=1, $t=0.7$ s, 100 points

3.3 Système non linéaire et non homogène

On considère le système hyperbolique non linéaire non homogène 1D suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = \mathcal{Q}(x, W), & (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \\ W(x, 0) = W_0(x), & x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (3.5)$$

où $W : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ est un vecteur à m dimensions de quantités conservées, les variables d'état, comme la masse, la quantité de mouvement et l'énergie dans le cas du problème de la mécanique des fluides et la hauteur et la quantité de mouvement dans le cas du problème de Saint-Venant, Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^m . La fonction F est définie de Ω dans \mathbb{R}^m dite fonction flux que l'on suppose assez régulière et $\mathcal{Q}(x, W)$ le terme source.

Pour ce cas le schéma SRNH s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Delta x \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r (F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n)) + \Delta t \mathcal{Q}_i^n, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $S_{i+\frac{1}{2}}^n = \max_{p=1, \dots, m} (|\lambda_{ip}^n|, |\lambda_{i+1p}^n|)$ où $[\lambda_p]_{p=1, \dots, m}$ sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de F , λ_{ip}^n et λ_{i+1p}^n sont calculées respectivement à l'état W_i^n et W_{i+1}^n , et $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ un paramètre de contrôle, $\mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n$ est l'approximation de la partie non homogène dans l'étape prédicteur dans le volume de contrôle $[t^n, t^n + \theta] \times [x_i, x_{i+1}]$ [Ben02].

On suppose qu'il existe un état intermédiaire $\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)$, tel que la matrice de Roe vérifie la relation

$$F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n) = \bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)) (W_{i+1}^n - W_i^n).$$

L'étape prédicteur devient alors

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)) (W_{i+1}^n - W_i^n) + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Delta x \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n.$$

Comme on a supposé que le système (3.5) est hyperbolique, alors on peut écrire $\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))$ de la manière suivante

$$\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)) = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$$

où $\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}$, $\bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}$ et $\bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$ sont respectivement la matrice des valeurs propres, la matrice de passage et la matrice de passage inverse calculée à l'état $\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n)$, d'où une étape prédicteur qui s'écrit :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (W_{i+1}^n - W_i^n) + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Delta x \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n$$

3.3. SYSTÈME NON LINÉAIRE ET NON HOMOGENÈ

$$\iff \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (W_{i+1}^n - W_i^n) + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \Delta x \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n. \quad (3.7)$$

Dans le cas de systèmes homogènes on a pu trouver l'expression du paramètre de contrôle $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = S_{i+\frac{1}{2}}^n |\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}|^{-1}$.

On remplace dans (3.7), l'étape prédicteur devient

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} |\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}|^{-1} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta x \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} |\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}|^{-1} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n, \end{aligned}$$

comme

$$\text{sgn}(\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} |\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}|^{-1} \bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$$

et

$$|\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))|^{-1} = \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}} |\bar{\Lambda}_{i+\frac{1}{2}}|^{-1} \bar{\mathcal{R}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1},$$

alors le schéma SRNHS pour le problème (3.5) s'écrit

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))) (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ \quad + \frac{1}{2} |\bar{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n))|^{-1} \Delta x \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r \left(F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) + \Delta t \mathcal{Q}_i^n. \end{cases} \quad (3.8)$$

Remarque

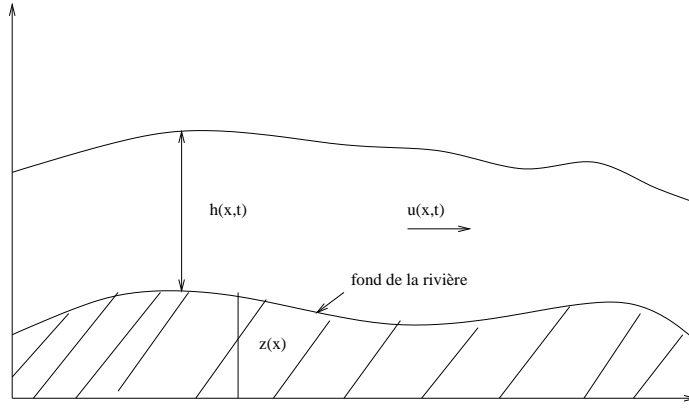
Dans la pratique on peut prendre l'état moyen [GKLC96]

$$\bar{\mathcal{V}}(W_i^n, W_{i+1}^n) = \frac{1}{2} (W_{i+1}^n + W_i^n).$$

3.3.1 Application du schéma SRNHS pour le problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière

Nous allons utiliser le schéma SRNHS pour la simulation numérique du problème de Saint-Venant avec un fond irrégulier dépendant de la variable spatiale x et donné par $z(x)$, $h(x, t)$ représentant la hauteur de l'eau et $\zeta(x, t) = h(x, t) + z(x)$ la surface libre, $u(x, t)$ est la vitesse de l'eau et $Q(x, t) = h(x, t)u(x, t)$ est le débit, l'équation de Saint-Venant avec topographie irrégulière s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(hu)}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)(x, t) = -gh(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x). \end{cases} \quad (3.9)$$



Profil du lit de la rivière

Soit $W(x, t) = \begin{pmatrix} h(x, t) \\ hu(x, t) \end{pmatrix}$ une solution stationnaire de (3.9) c'est-à-dire W est assez régulière vérifiant $\frac{\partial W}{\partial t}(x, t) = 0$ et $u(x, t) = 0$, dans ce cas la deuxième équation du système (3.9) est équivalente à

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(gh^2)}{\partial x}(x, t) = -gh \frac{\partial z}{\partial x}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad h(x, t) + z(x) = c.$$

Définition 3.3.1 [BV94, BDDV98] On dit que le schéma vérifie la \mathcal{C} -propriété si le schéma appliqué à une solution stationnaire retrouve

$$h_i^n + z_i = c, \quad \text{et} \quad u_i^n = 0 \quad \forall (i, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

Proposition 3.3.2 Sous la condition de la discrétisation du terme source dans l'étape correcteur sous l'une des deux formes suivantes :

$$i) \quad s_i^n = -\frac{g}{4\Delta x} (h_{i+\frac{1}{2}}^n + h_{i-\frac{1}{2}}^n) (z_{i+1} - z_{i-1}),$$

$$ii) \quad s_i^n = -\frac{g}{8\Delta x} (h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n) (z_{i+1} - z_{i-1}),$$

le schéma SRNHS vérifie la \mathcal{C} -propriété.

Preuve

Soit $W(x, t)$ une solution stationnaire. Donc $u(x, t) = 0$, dans ce cas le système (3.9) est équivalent à

$$\frac{\partial F}{\partial x}(W(x, t)) = Q(x, t),$$

$$\text{avec } W(x, t) = \begin{pmatrix} h(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, F(W(x, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont données par

$$\bar{\lambda}_1 = -\bar{c} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{c}$$

3.3. SYSTÈME NON LINÉAIRE ET NON HOMOGENÈ

et la matrice de passage \mathcal{R} et la matrice de passage inverse \mathcal{R}^{-1} sont données par

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\bar{c} & \bar{c} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^{-1} = \frac{1}{2\bar{c}} \begin{pmatrix} \bar{c} & -1 \\ \bar{c} & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\bar{c}^2 = g \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}$.

Pour ce cas l'étape prédicteur s'écrit

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{bmatrix} \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \\ -\frac{\bar{c}}{2} (h_i^n - h_{i+1}^n) - \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{2}\right) \end{bmatrix}$$

et l'étape correcteur

$$\begin{bmatrix} h_i^{n+1} \\ q_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i^n \\ q_i^n \end{bmatrix} - \frac{rg}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ (h_{i+\frac{1}{2}}^n)^2 - (h_{i-\frac{1}{2}}^n)^2 \end{bmatrix} + \Delta t \mathcal{Q}_i^n \quad (3.10)$$

avec

$$\mathcal{Q}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ s_i^n \end{bmatrix}.$$

Comme la solution est stationnaire, alors $W_i^{n+1} = W_i^n$ et $h_{i+1}^n - h_{i-1}^n = -(z_{i+1} - z_{i-1})$, il s'ensuit que la deuxième composante de (3.10) est équivalente à

$$\begin{aligned} s_i^n &= \frac{g}{2\Delta x} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^n + h_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \left(h_{i+\frac{1}{2}}^n - h_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ &= \frac{g}{4\Delta x} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^n + h_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \left(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n \right) \\ &= -\frac{g}{4\Delta x} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^n + h_{i-\frac{1}{2}}^n \right) (z_{i+1} - z_{i-1}) \end{aligned}$$

d'où la première discrétisation.

On a $h_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (h_i^n + h_{i+1}^n)$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^n + h_{i-\frac{1}{2}}^n \right) = \frac{1}{4} (h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n),$$

d'où la deuxième discrétisation.

■

3.3.2 Comparaison du schéma SRNHS avec d'autres schémas

Afin de qualifier le schéma SRNHS il est intéressant de comparer sa formulation avec un autre schéma performant développé pour la simulation numérique des problèmes non homogènes. En exploitant l'efficacité du schéma décentré amont de type

Roe, Van-Leer, ..., pour la simulation numérique des problèmes hyperboliques homogènes (problèmes des mécaniques des fluides) Bermúdez et Vázquez [BDDV98, BV94, VC99] ont proposé une discrétisation décentrée de la partie non homogène et ont ainsi obtenu un schéma performant pour ce type de système. Ce schéma s'écrit en une seule étape de la façon :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^{Roe} - F_{i-\frac{1}{2}}^{Roe} \right) + \Delta t \mathcal{Q}_i^n$$

où $F_{i+\frac{1}{2}}^{Roe}$ est la fonction du flux numérique à l'instant t^n au niveau de l'interface $i + \frac{1}{2}$ donnée par

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{Roe} = \frac{1}{2} \left(F_{i+1}^n + F_i^n - \frac{1}{2} \left| \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| (W_{i+1}^n - W_i^n) \right)$$

où $\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{R}_{i+\frac{1}{2}} \Lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$ est la matrice de Roe et $\left| \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| = \mathcal{R}_{i+\frac{1}{2}} \left| \Lambda_{i+\frac{1}{2}} \right| \mathcal{R}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$, $\Lambda_{i+\frac{1}{2}}$ la matrice des valeurs propres, $\mathcal{R}_{i+\frac{1}{2}}$ la matrice de passage et $\mathcal{R}_{i+\frac{1}{2}}^{-1}$ l'inverse de la matrice de passage, qui dépend de deux états voisins W_i^n et W_{i+1}^n . Le traitement du terme source proposé s'écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{Q}_i^n = \frac{1}{2} \left(\mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^L + \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^R \right),$$

avec

$$\mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^L = \left[I + \text{sgn}(\mathcal{A}_{i-\frac{1}{2}}) \right] \cdot \mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^n$$

et

$$\mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^R = \left[I - \text{sgn}(\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}) \right] \cdot \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n$$

où I est la matrice d'identité et $\mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{Q} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) \right)$ représente une approximation du terme source à l'interface $i + \frac{1}{2}$.

En arrangeant cette écriture, on aura

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Phi^{Vaz}(W_i^n, W_{i+1}^n, \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n) - \Phi^{Vaz}(W_{i-1}^n, W_i^n, \mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n + \mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

avec

$$\Phi^{Vaz}(W_i^n, W_{i+1}^n, \mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^n) = \frac{1}{2} \left(F_{i+1}^n + F_i^n - \left| \mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| (W_{i+1}^n - W_i^n) - \Delta x \text{sgn}(\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}) \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \right)$$

Le schéma SRNHS s'écrit sous la forme suivante

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Phi^{SRNHS} \left(W_i^n, W_{i+1}^n, \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \right) - \Phi^{SRNHS} \left(W_{i-1}^n, W_i^n, \mathcal{Q}_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + \Delta t \tilde{\mathcal{Q}}_i^n$$

avec

$$\Phi^{SRNHS} \left(W_i^n, W_{i+1}^n, \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n \right) = F \left(W_{i+\frac{1}{2}}^n \right)$$

avec

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n \right) (W_{i+1}^n - W_i^n) - \frac{1}{2} |\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}^n|^{-1} \Delta x \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n$$

et

$$\sim \mathcal{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} Q(x, t) dx dt$$

est une approximation de la partie non homogène dans l'étape correcteur.

Dans la réécriture du schéma SRNHS et le schéma de Vázquez et Bermúdez, on remarque qu'il y a une différence dans la manière de traiter le terme source et la fonction du flux numérique, les deux schéma ne sont donc pas équivalentes.

3.3.3 Extension du schéma SRNHS à un ordre élevé

Dans le cas d'un système hyperbolique linéaire homogène, le schéma SRNHS se ramène au schéma classique décentré amont, ceci confirme bien que ce schéma est d'ordre un en temps et en espace. Pour des cas homogènes critiques présentant des points soniques ce schéma ne converge pas vers la solution entropique, donc il est nécessaire d'introduire une correction entropique pour pallier ce problème. Dans le cas de la marche il existe dans la solution physique une discontinuité de contact stationnaire qu'il convient de garder en tant que discontinuité, autrement dit il n'est pas indiqué dans ce cas de vouloir remplacer cette discontinuité par une onde de détente, mais il y a un problème qui persiste sur la solution numérique au niveau de la discontinuité du fond (voir figures FIG. 3.24 et FIG. 3.26). Il a été nécessaire de faire l'extension du schéma SRNHS à l'ordre deux en espace pour dépasser cette difficulté. Dans notre cas, les limiteurs sont introduits au niveau de l'étape prédicteur pour les variables physiques (on note V le vecteur des variables physiques de composante $^t(v_1, \dots, v_m)$) de la façon suivante :

$$(v_p)_i^+ = (v_p)_i^n + \frac{1}{2} \phi(\theta_p) ((v_p)_{i+1}^n - (v_p)_i^n)$$

et

$$(v_p)_i^- = (v_p)_i^n - \frac{1}{2} \phi(\theta_p) ((v_p)_{i+1}^n - (v_p)_i^n)$$

avec

$$\theta_p = \frac{(v_p)_i^n - (v_p)_{i-1}^n}{(v_p)_{i+1}^n - (v_p)_i^n} \quad \text{si} \quad (v_p)_{i+1}^n \neq (v_p)_i^n$$

dans le cas où $\lambda_{i+\frac{1}{2}}^n > 0$ et

$$\phi(\theta_p) = \begin{cases} 0 & \text{si} & \theta_p \leq 0 \\ \theta_p & \text{si} & 0 \leq \theta_p \leq 1 \\ 1 & \text{si} & \theta_p \geq 1. \end{cases}$$

Ensuite on écrit les variables conservatives en fonction des variables physiques et dans ce cas l'étape prédicteur devient :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_{i+1}^- + W_i^+) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}) (W_{i+1}^- - W_i^+) \\ + \frac{\Delta x}{2} |\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}|^{-1} \mathcal{Q}_{i+\frac{1}{2}}^n(x_i, x_{i+1}, W_{i+1}^-, W_i^+)$$

où $\mathcal{A}_{i+\frac{1}{2}}$ est la jacobienne calculée a l'état de Roe en fonction de V_{i+1}^- et V_i^+ .

3.3.4 Résultats Numériques

Problème discuté par LeVeque

Dans ce cas, on teste la performance du schéma SRNHS sur un écoulement à variation rapide. C'est un test proposé par LeVeque[LeV98], ensuite testé par Senko et Luka [VS02] avec le schéma ENO/WENO en vérifiant la C-propriété exacte. En effet c'est un problème non stationnaire, qui présente réellement deux ruptures de barrage qui se propagent dans des sens opposés, de plus quand le choc qui se propage dans le sens de l'écoulement passe au dessus du lit horizontal, l'autre passe au dessus d'une bosse.

Le fond est donné par

$$z(x) = \begin{cases} 0.25(\cos(10\pi(x - 0.5)) + 1) & \text{si } 1.4 \leq x \leq 1.6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les conditions initiales sont données par

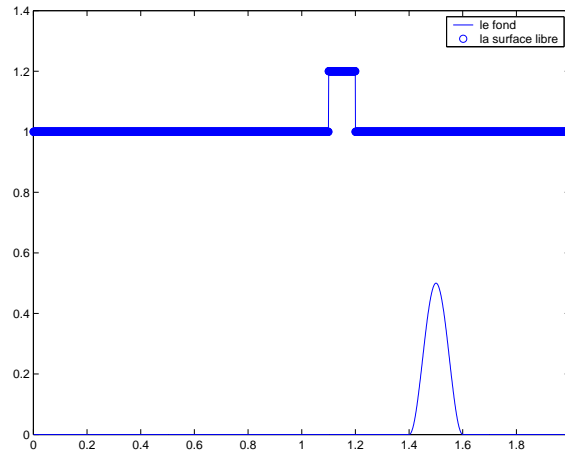
$$u(x, 0) = 0.0 \quad \text{et} \quad h(x, 0) = \begin{cases} 1. + \Delta h - z(x) & \text{si } 1.1 \leq x \leq 1.2 \\ 1. - z(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où Δh est la hauteur de l'impulsion, ensuite on fait le test pour les deux cas.

(a) Grande impulsion, c'est-à-dire $\Delta h = 0.2$.

(b) Petite impulsion, c'est-à-dire $\Delta h = 0.001$.

Initialement, LeVeque a résolu ce problème avec $g = 1m/s^2$ et Senko et Luka avec $g = 9,81m/s^2$.



Le fond et la surface libre à $t=0$ s

Les résultats numériques obtenus par le schéma SRNHS (voir figures FIG. 3.9, FIG. 3.10) sont comparables à ceux fournis par un schéma équilibre Roe-ENO et meilleurs que ceux obtenus par le schéma Roe-ENO avec un traitement classique du terme source [VS02].

Apparition de vide par une double onde de raréfaction au-dessus d'une marche

Dans ce cas, nous allons tester l'efficacité du schéma SRNHS sur un problème [Seg02], où il y a des zones à fond sec avec topographie non régulière, $z(x) = 1m$ si $(25/3)m < x < (25/2)m$ et $z(x) = 0$ ailleurs, sachant que la longueur totale de ce bassin est de $25m$. Initialement la surface libre est à $10m$ et la quantité de mouvement est $-350m^2/s$ si $x < (50/3)m$ et $350m^2/s$ sinon, ensuite nous allons considérer les résultats de la surface libre (figures FIG. 3.11) et le débit (figures FIG. 3.12) aux instants $0s$, $0.05s$, $0.45s$ et $0.65s$. Dans les zones, où la topographie est régulière la solution est composée de deux ondes de raréfaction avec des zones à fond sec entre celle ci.

Avec ce cas test on a mis en évidence l'efficacité du schéma SRNHS pour la simulation numérique de problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière dans le cas où il y a apparition des zones sèches.

Nos résultats sont comparable à ceux de [Seg02].

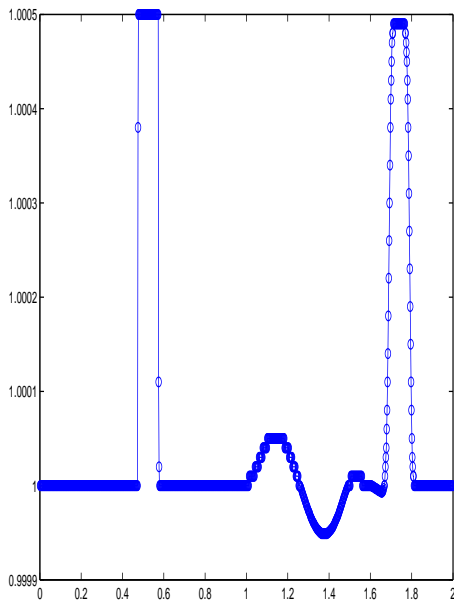


FIG. 3.9 – La surface libre
 $cfl=1$, $t=0.2$ s, 1000 points

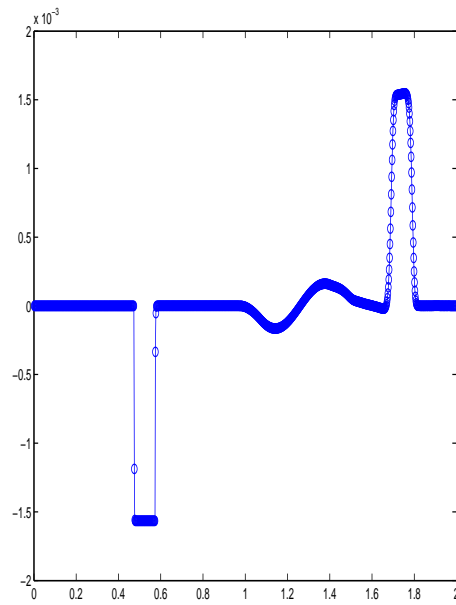


FIG. 3.10 – Vitesse de l'eau
 $cfl=1$, $t=0.2$ s, 1000 points

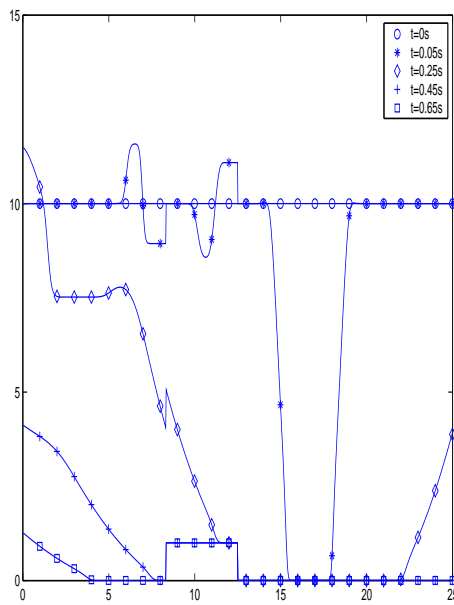


FIG. 3.11 – La surface libre
 $cfl=0.5$, 1000 points

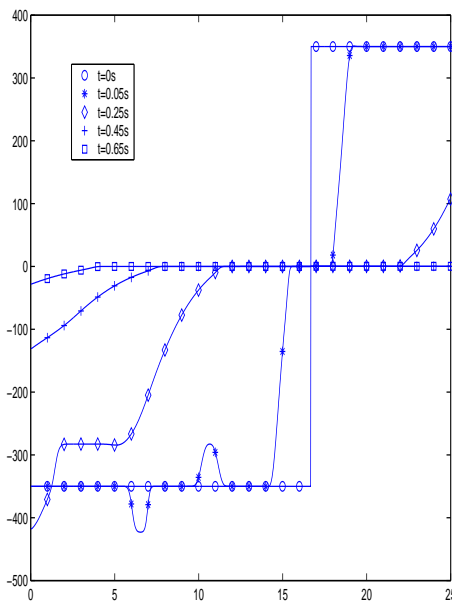


FIG. 3.12 – Le débit de l'eau
 $cfl=0.5$, 1000 points

Problème de rupture de barrage avec fond discontinu

Nous nous prendrons des cas tests avec double singularité [AB01], une singularité au niveau des conditions initiales plus la discontinuité du fond, dans les cas présentés le fond est représenté par la fonction :

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_0 \\ 1 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

et la condition initiale est donnée par

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l & \text{si } x \leq x_0 \\ U_r & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Grâce à la solution théorique calculée par Alcrudo et Benkhaldoun [AB01], nous allons évaluer l'erreur pour la norme L^1 de ce schéma en représentant l'affichage de $\text{Log}(\|u - u_h\|_{L^1})$, où u_h est la solution numérique, en fonction de $\text{Log}(\Delta x)$ où Δx est le pas d'espace. Comme la précision du schéma est jugée en particulier au niveau des états constants nous allons afficher la solution analytique et numérique, de la surface libre, la quantité de mouvement.

Le nombre de Froude est défini par $F = \frac{u}{c}$, où u est la vitesse du fluide et $c = \sqrt{gh}$ est la célérité, qui est l'analogue de nombre de Mach pour le gaz dynamique compressible. Si $|F| > 1$ l'écoulement est dit supercritique, dans le cas où $|F| < 1$ l'écoulement est dit subcritique. Dans le cas où l'écoulement passe du cas subcritique au cas supercritique ou viceversa la situation est dite transcritique.

Cas subcritique

Nous allons commencer par tester ce schéma sur un cas simple, en faisant la comparaison de la vitesse de convergence du schéma SRNHS avec conditions initiales (dans ce cas $x_0 = 10$).

$$\begin{aligned} h_l &= 5m & h_r &= 1m \\ u_l &= 0m/s & u_r &= 0m/s \end{aligned}$$

avec fond discontinu (figure FIG. 3.15) et avec fond plat (figure FIG. 3.13).

Dans ce cas on remarque que le terme source ralentit la vitesse de convergence, pour le cas homogène la vitesse de convergence est de l'ordre de 0.8, tandis que pour le cas non homogène la vitesse de convergence est de l'ordre de 0.65.

En présence de la marche l'ordre de la vitesse de convergence du schéma SRNHS a diminué et ceci s'explique par la discontinuité de contact de type linéaire au niveau de la marche. On remarque aussi que la vitesse de convergence est décroissante

en fonction des conditions initiales du problème. La vitesse de convergence étant d'autant plus petite que le problème est plus raide.

Remarque

La pente de la courbe d'erreur est calculée par la méthode des moindres carrés.

3.3. SYSTÈME NON LINÉAIRE ET NON HOMOGENÈ

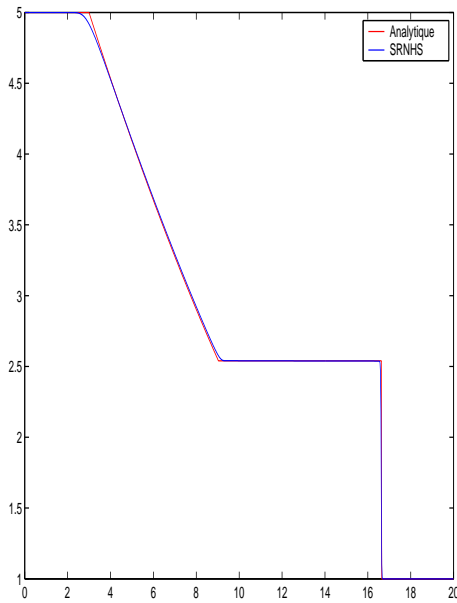


FIG. 3.13 – Courbe de la hauteur à $t=1s$ fond plat

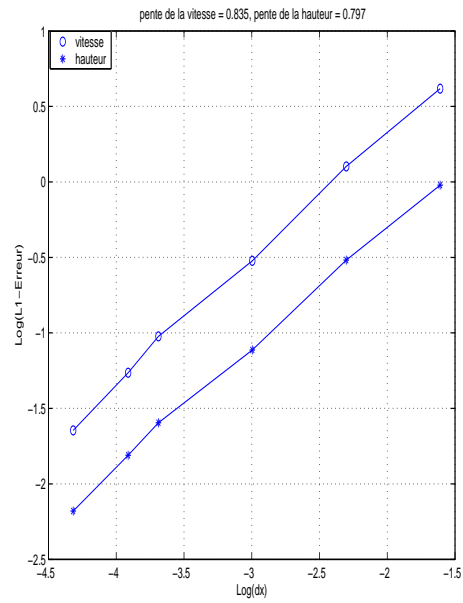


FIG. 3.14 – Courbe d'erreur associée, pente $\simeq 0.8$

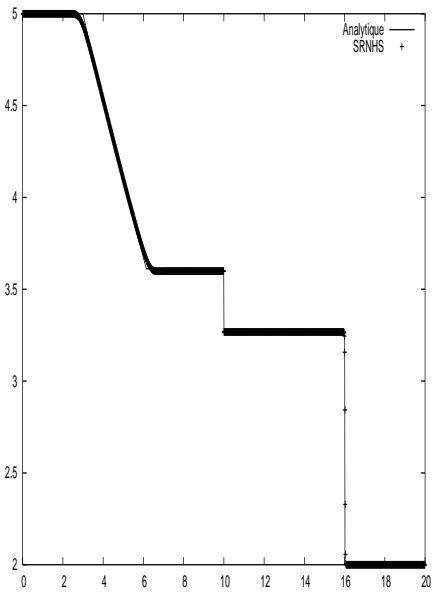


FIG. 3.15 – Courbe de la surface libre à $t=1s$ fond discontinu

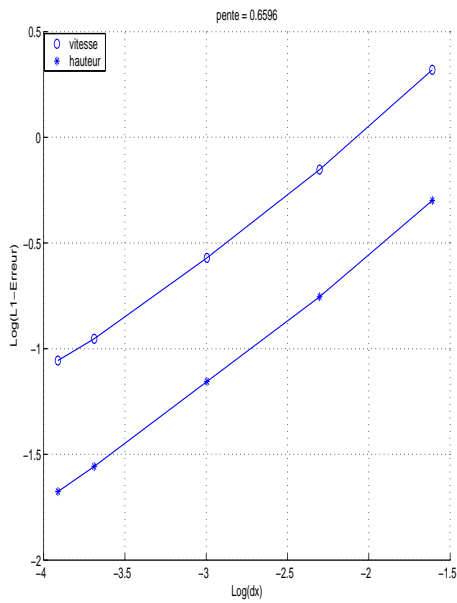


FIG. 3.16 – Courbe d'erreur associée, $cfl=0.75$, pente $\simeq 0.65$

1-Raréfaction, Étape de transition critique SST, 1-Raréfaction et 2-Raréfaction

Dans ce cas on prend comme condition initiale (ici $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned} h_l &= 5m & h_r &= 1m, \\ u_l &= -4m/s & u_r &= 9m/s. \end{aligned}$$

Dans ce cas 1 – Rarefaction devient supercritique, qui se propage à travers l'étape de transition critique selon le modèle suivant

$$U_l \longrightarrow \text{1-Raréfaction} U_2 \longrightarrow \text{SST} U_3 \longrightarrow \text{1-Raréfaction} U_m \longrightarrow \text{2-Raréfaction} U_r.$$

Problème Transcritique

Dans ce cas on prend comme condition initiale (ici $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned} h_l &= 4m & h_r &= 0.1m, \\ u_l &= 0m/s & u_r &= 0m/s. \end{aligned}$$

La solution de ce problème est constituée de trois états constants U_1 , U_2 et U_3 [AB01] connectés par des ondes suivant le modèle suivant

$$U_l \longrightarrow \text{Rarefaction} U_1 \longrightarrow \text{SST} U_2 \longrightarrow \text{Rarefaction} U_3 \longrightarrow \text{Choc} U_r.$$

En comparant les résultats donnés par le schéma SRNHS et le schéma de Bermúdez et Vázquez on voit que le schéma SRNHS capte mieux l'étape de transition, en revanche le schéma de Bermúdez et Vázquez résout mieux le problème de la discontinuité de contact stationnaire même sans passage à l'ordre deux en espace en utilisant la technique MUSCL (figures FIG. 3.20, FIG. 3.21 et FIG. 3.22).

Pour le schéma SRNHS le passage à l'ordre deux en utilisant la technique MUSCL permet la correction du problème de la discontinuité de contact stationnaire, ce qui a permis d'accroître la vitesse de convergence (figure FIG. 3.27).

3.3. SYSTÈME NON LINÉAIRE ET NON HOMOGENÈ

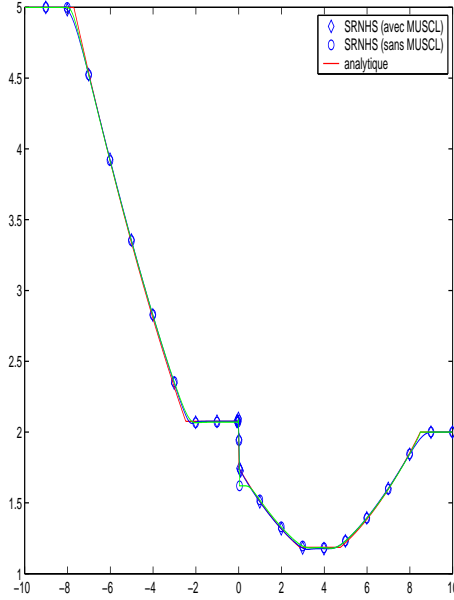


FIG. 3.17 – La surface libre à $t=0.7$, $cfl=1.$, 800 points

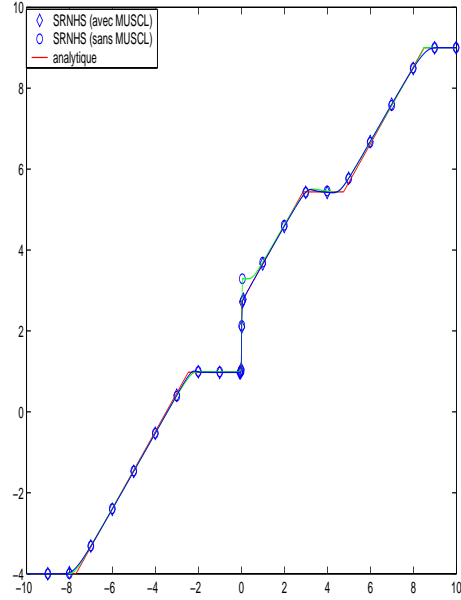


FIG. 3.18 – La vitesse à $t=0.7$, $cfl=1.$, 800 points

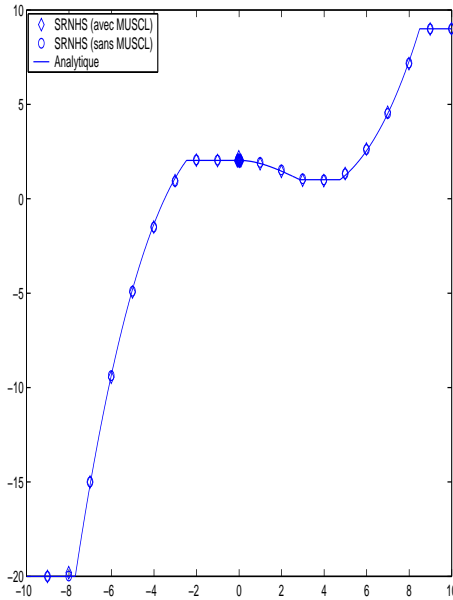


FIG. 3.19 – Le débit à $t=0.7$, $cfl=1.$, 800 points

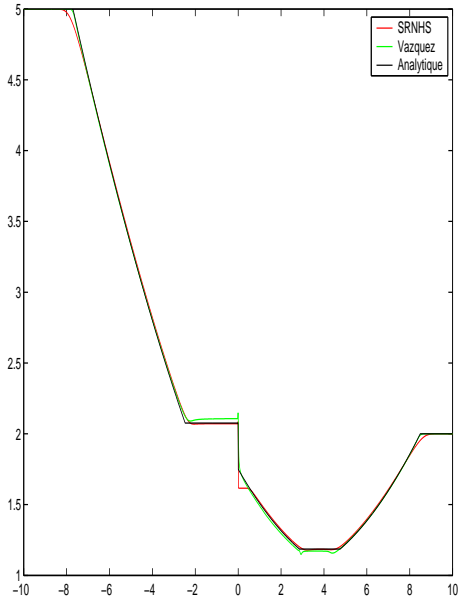


FIG. 3.20 – La surface libre à $t=0.7$ s, $cfl=0.5$, sans (MUSCL)

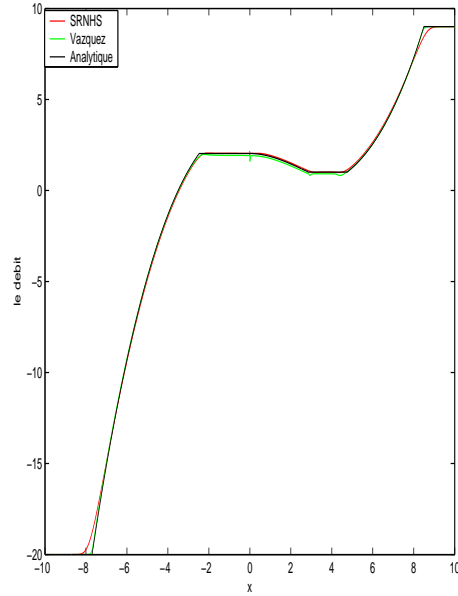


FIG. 3.21 – Le débit à $t=0.7$ s, $cfl=0.5$, sans (MUSCL)

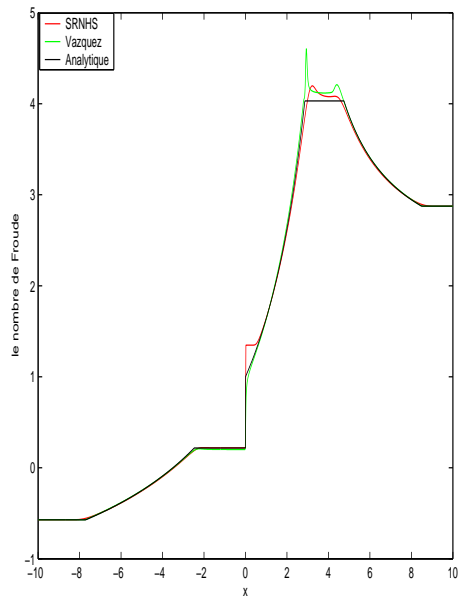


FIG. 3.22 – Le nombre de Froude à $t=0.7$ s, $cfl=0.5$, sans (MUSCL)

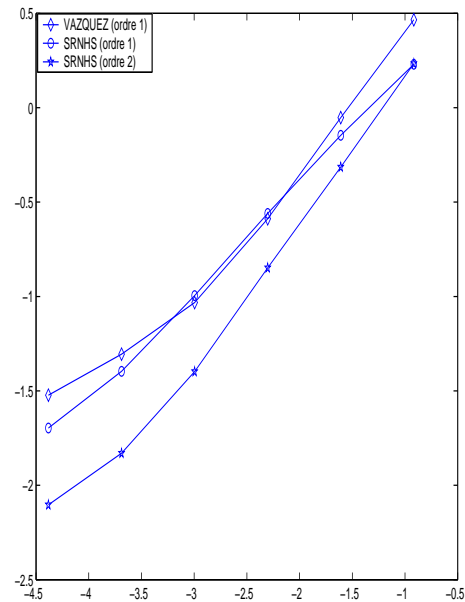


FIG. 3.23 – Courbe d'erreur sur la hauteur, pente (ordre 2) $\simeq 0.76$, pente (ordre 1) $\simeq 0.54$

3.3. SYSTÈME NON LINÉAIRE ET NON HOMOGENÈ

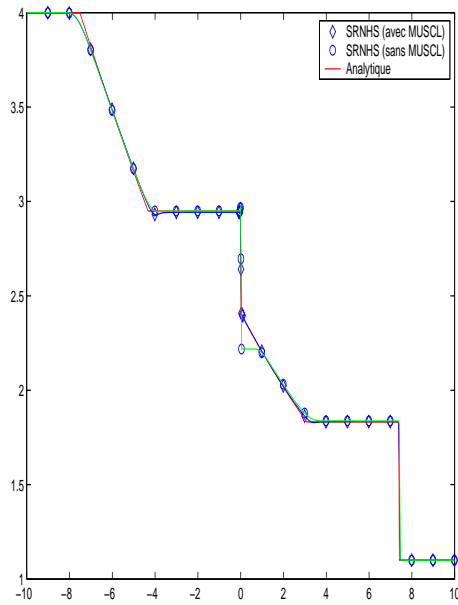


FIG. 3.24 – La surface libre à $t=1.2$ s, $cf=1.$, 800 points

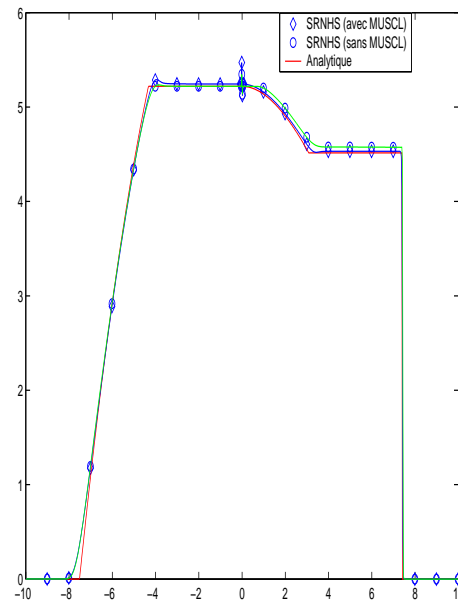


FIG. 3.25 – Le débit de l'eau à $t=1.2$ s, $cf=1.$, 800 points

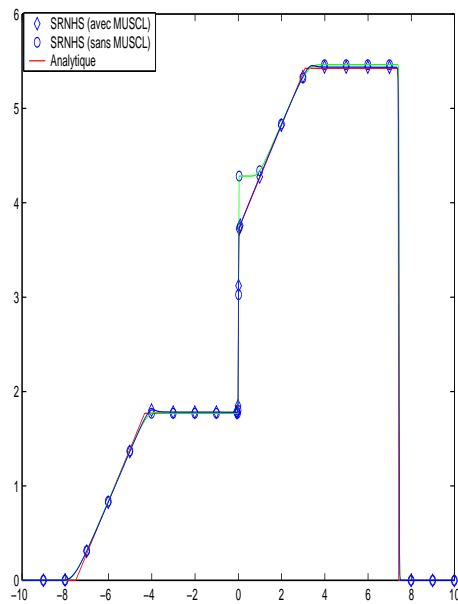


FIG. 3.26 – La vitesse de l'eau à $t=1.2$ s, $cf=1.$, 800 points

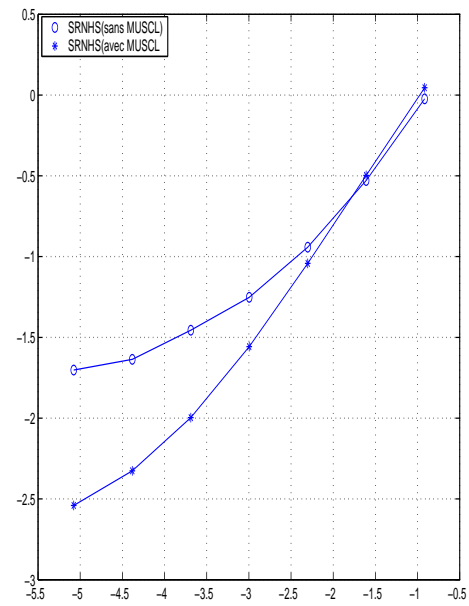


FIG. 3.27 – Courbe d'erreur associée à la hauteur, pente (avec MUSCL) $\simeq 0.6214$, pente (sans MUSCL) $\simeq 0.4035$

Bibliographie

- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun, *Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step*, *Comput. & Fluids* **30** (2001), no. 6, 643–671.
- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J-A. Desideri, and M. E. Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, FVCA3, HPS, R. Herbin, D.Kröner(Eds), Proceedings of the Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Application, 2002, pp. 269–276.
- [Bon97] C. Bon, *Modélisation et simulations numériques d’écoulement hydroliques et ruissellement en topographie quelconque*, Ph.d. thesis, Université Bordeaux I, France, France, 1997.
- [BPV03] R. Botchorishvili, B. Perthame, and A. Vasseur, *Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources*, *Math. Comp.* **72** (2003), no. 241, 131–157 (electronic).
- [BV94] A. Bermudez and M. E. Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, *Comput. & Fluids* **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [GKLC96] J-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [GL96a] L. Gosse and A-Y. Leroux, *Un schéma-équilibre adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 5, 543–546.
- [GL96b] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux, *A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), no. 1, 1–16.

- [GLBN97] J. M. Greenberg, A. Y. Leroux, R. Baraille, and A. Noussair, *Analysis and approximation of conservation laws with source terms*, SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 5, 1980–2007.
- [HGN00] M. E. Hubbard and P. Garcia-Navarro, *Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients*, J. Comput. Phys. **165** (2000), no. 1, 89–125.
- [HLvL83] A. Harten, Peter D. Lax, and B. van Leer, *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Rev. **25** (1983), no. 1, 35–61.
- [JM99] P. Jenny and B. Müller, *Rankin-hugoniot -riemann solver considering source terms and multidimensionnal effects*, J. Comput. Phys. **150** (1999), 575.
- [LeV98] R. J. LeVeque, *Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm*, J. Comput. Phys. **146** (1998), no. 1, 346–365.
- [Roe81] P. L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Roe85] ———, *Upwind schemes using various formulations of the Euler equations*, Numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics (Rocquencourt, 1983), SIAM, Philadelphia, PA, 1985, pp. 14–31.
- [Seg02] N. Seguin, *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*, Ph.D. thesis, Université de Provence, 2002.
- [SW81] J. L. Steger and R. F. Warming, *Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite-difference methods*, J. Comput. Phys. **40** (1981), no. 2, 263–293.
- [VC99] M. E. Vázquez-C, *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, J. Comput. Phys. **148** (1999), no. 2, 497–526.
- [Vij86] G. Vijayasundaram, *Transonic flow simulations using an upstream centered scheme of Godunov in finite elements*, J. Comput. Phys. **63** (1986), no. 2, 416–433.
- [vL84] B. van Leer, *Multidimensional explicit difference schemes for hyperbolic conservation laws*, Computing methods in applied sciences and engineering, VI (Versailles, 1983), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 493–497.
- [VS02] S. Vukovic and L. Sopta, *ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations*, J. Comput. Phys. **179** (2002), no. 2, 593–621.

Chapitre 4

Application du schéma SRNHS au problème de Ransom 1D

Résumé

Dans ce chapitre nous faisons l'extension du schéma SRNHS défini dans la première partie pour un modèle bifluide, en calculant la matrice signe soit par la méthode de F. Alouges [Alo98] basée sur l'algorithme de Newton-Schultz, soit par la méthode de la décomposition spectrale en utilisant la méthode de perturbation par densité introduite par I. Toumi et ses collaborateurs [Cor02, CDT98, TKP99, TK96, Tou96].

4.1 Introduction

Les écoulements diphasiques occupent une place importante dans le monde industriel, notamment dans les systèmes thermomécaniques industriels : cœurs et générateurs de vapeur des réacteurs nucléaires à eau pressurisée, pipelines de transport d'effluents pétroliers, chambre de moteurs à combustion interne, . . . Ceci a mené les chercheurs à diriger leurs recherches vers la simulation numérique de ce genre de problèmes. Dès 1981 divers schémas aux volumes finis dits décentrés sont appliqués pour la simulation numérique de problèmes monofluides homogènes hyperboliques [Roe81, VL82, OS82]. Mais comme les problèmes diphasiques ont un caractère complexe (ils ne sont ni homogènes, ni hyperboliques), il fallait développer d'autres moyens pour les résoudre.

La diversité des domaines d'applications de ces problèmes a donné naissance à plusieurs modèles pour les écoulements diphasiques liquide-gaz et liquide-vapeur. On note le modèle homogène ou le modèle avec vitesse de dérive (drift flux en anglais) qui décrit l'évolution des quantités représentatives du mélange de deux phases, et le modèle à deux fluides ou bi-fluide qui décrit l'évolution de quantités représentatives de chacune des phases. Selon ces modèles il y a plusieurs schémas pour la simulation numérique des problèmes diphasiques. Steinar Evje et Kjell K. Fjelde

ont exploités le schéma Advection Upstream Splitting Method (AUSM) [EF03] développé par Liou [LS93, Lio96, Lio00] pour la simulation numérique des systèmes de lois de conservation hyperboliques sans expliciter la jacobienne du flux physique. Mesella, Faille et Gallouët ont résolu le problème de flux bi-fluide dans un pipeline [MFG99] avec le schéma VFRoe construit pour la simulation de problèmes non homogènes dans le cadre du modèle avec vitesse de dérive. Dans le cadre du modèle bi-fluide plusieurs chercheurs tels que Toumi, Kumbaro, Romate et Sanaulieu [Rom98, CEAG⁺97, TK96, Cor99], ont eu recours à l’extension des schémas de volumes finis décentrés écrits pour les problèmes monofluides en effectuant la perturbation du système en ajoutant des masses virtuelles ou des pressions de correction $(p - p_k^i)\Delta\alpha_k$, $k = l, v$. En se basant sur ces travaux Cortes [CDT98] avec ses collaborateurs ont utilisé une méthode de perturbation par densité pour approcher la jacobienne du flux par une matrice diagonalisable et ils ont appliqué le schéma de Roe pour la simulation du problème de Ransom. Dans ce même contexte, Ghidaglia et ses coauteurs ont proposé un schéma de volumes finis décentré basé sur le flux caractéristique présentant une matrice signe du gradient du flux physique [GKLC96] ils l’ont appliqué pour la simulation des écoulements diphasiques monodimensionnels et multidimensionnels [GKLC01, Bou98]. En partant de l’analyse d’un schéma de volumes finis pour les systèmes non homogènes construit par Benkhaldoun [Ben02] basé sur l’autosimilarité de la solution du problème de Riemann non homogène appelé SRNH qui ne calcule que le flux physique, on a pu construire un nouveau schéma décentré présentant une matrice signe dans l’étape prédicteur pour décentrer les états au lieu de décentrer les flux, comme dans [Roe81, GKLC96]. Cela nous a permis d’obtenir des résultats très encourageants pour les problèmes hyperboliques homogènes et non homogènes (faite dans la première partie). Vu que les problèmes bi-fluides ne sont pas hyperboliques, au lieu de calculer le signe de la matrice du gradient du flux, on calcule juste le signe d’un convecteur qui permet de décentrer l’état dans l’étape de prédicteur et ensuite on utilise cet état avec le flux physique dans l’étape correcteur. Cela nous donne un schéma décentré même pour ces problèmes complexes. Dans ce chapitre nous allons définir le modèle diphasique dans la première section, et dans la deuxième section nous allons développer la méthode utilisée en effet pour le cas d’un système sans l’ajout de la pression interfaciale, sur un cas où les valeurs propres sont à partie imaginaire faible (cas du problème da Ransom avec $\alpha_{v,init} = 0.6$). On utilise la méthode de F. Alouges qui permet de calculer directement la matrice signe basée sur des itérations de l’algorithme de Newton-Schultz [Alo98], et pour le cas ($\alpha_{v,init} = 0.2$) ou les valeurs propres ont une partie imaginaire prépondérante, on rajoute la pression interfaciale, et on utilise la méthode de I. Toumi et ses collaborateurs [Cor02, CDT98, TKP99, TK96, Tou96]. Enfin nous allons appliquer le schéma SRNHS pour la simulation numérique du problème de Ransom.

4.2 Modèle bi-fluide

Dans ce travail nous considérons un modèle bi-fluide régi par quatre équations à pression commune, dont deux décrivent la conservation de la masse des deux phases et deux équations décrivent la conservation du moment des deux phases. Dans ce cas le système avec condition initiale s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(W(x, t))}{\partial x} + S_1(x, W) = S_2(x, W) \\ W(x, 0) = W_0(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$W(x, t) = \begin{pmatrix} \alpha_v \rho_v \\ \alpha_v \rho_v u_v \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_l \rho_l u_l \end{pmatrix}, \quad F(W(x, t)) = \begin{pmatrix} \alpha_v \rho_v u_v \\ \alpha_v \rho_v u_v^2 \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_l \rho_l u_l^2 \end{pmatrix}$$

$$S_1(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_v \frac{\partial p}{\partial x} + \delta(p - p_v^i) \frac{\partial \alpha_v}{\partial x} \\ 0 \\ \alpha_l \frac{\partial p}{\partial x} + \delta(p - p_l^i) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_v \rho_v g \\ 0 \\ \alpha_l \rho_l g \end{pmatrix}$$

avec : v et l se rapportent aux phases gazeuses et liquides respectivement, g est l'accélération de la pesanteur, α_v , ρ_v et u_v sont respectivement le taux de vide, la densité et la vitesse de la vapeur, α_l , ρ_l et u_l sont respectivement le taux de présence, la densité et la vitesse du liquide. On a sept inconnues ($\alpha_v, \alpha_l, \rho_v, \rho_l, u_v, u_l, p$) et quatre équations, donc il nous faut des lois d'états pour fermer ce système. La première loi lie les taux de vide : $\alpha_v + \alpha_l = 1$, et la deuxième celle des gaz parfait, gouverne la pression en fonction des densités de la vapeur et du liquide $p = c \rho_v^\gamma$ et $\rho_l = k_l p^a$ où c , γ , a et k_l sont des constantes données par $c = 10^5$, $\gamma = 1.4$, $a = 4.37 \times 10^{-5}$ et $k_l = 987,57$. On suppose de plus que la densité du liquide est quasi-constante $\rho_l \simeq \rho_l^0$ et que la phase vapeur est très légère par rapport à la phase liquide.

p_k^i où k désigne v et l est la pression interfaciale des deux phases, le terme différentiel $\delta(p - p_k^i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$ est le terme de pression de correction. Il y a plusieurs variétés de l'expression $(p - p_k^i)$ [RH88], [Bes90]. Ici nous adaptions la loi de fermeture des flux de bulles présenté par R.T.Laheye [Lah92] qui définit $p - p_k^i$ comme suit

$$\begin{cases} p - p_v^i = 0 \\ p - p_l^i = C_p(\alpha_v) \rho_l (u_v - u_l)^2 \end{cases}$$

avec $C_p(\alpha_v) = \alpha_v$ ou $C_p(\alpha_v) = \frac{\alpha_v \alpha_l \rho_v}{\alpha_v \rho_l + \alpha_l \rho_l}$, avec δ est une constante choisie.

Dans la suite on pose $\theta_l = \delta(p - p_l^i)$.

Remarque

Notons que nous tenons compte de la pression de correction dans les cas de l'application du schéma SRNHS avec la méthode de perturbation par densité utilisée par I. Toumi et al. [Cor02, CDT98, TKP99, TK96, Tou96]. Par contre lors de l'utilisation de la méthode de F. Alouges [Alo98], on considère le même système avec $\delta = 0$.

4.3 Description de la méthode

Dans la première partie de ce travail une analyse mathématique du schéma SRNH [Ben02] pour les systèmes hyperboliques non homogènes a abouti à un nouveau schéma appelé SRNHS défini comme suit :

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} (\nabla F(\bar{W})) (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ \quad + \frac{1}{2} \mathcal{R}(\bar{W}) |\Lambda|^{-1} (\bar{W}) \mathcal{R}^{-1}(\bar{W}) S_{i+\frac{1}{2}}^n \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) + \Delta t S_i^n \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $\nabla F(\bar{W})$ est le gradient du flux physique $F(W)$ défini à l'état de Roe. $\Lambda(\bar{W})$ est la matrice diagonale semblable au gradient du flux physique $F(W)$. $\mathcal{R}(\bar{W})$ est la matrice des vecteurs propres et $\mathcal{R}^{-1}(\bar{W})$ son inverse. Dans le cas où la matrice $\nabla F(\bar{W})$ est diagonalisable

$$\operatorname{sgn} (\nabla F(\bar{W})) = \mathcal{R}(\bar{W}) \operatorname{sgn} (\Lambda (\bar{W})) \mathcal{R}^{-1} (\bar{W}) ,$$

et $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ avec Δt est le pas de temps et Δx est le pas d'espace.

$S_{i+\frac{1}{2}}^n$ est l'approximation du terme source entre $[t^n, t^n + \theta][x_i, x_{i+1}[$ au niveau de l'étape prédicteur et S_i^n est l'approximation du terme source entre $[t^n, t^{n+1}[\times [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ dans l'étape correcteur.

Les états de Roe pour ce problème bifluide sont définies dans [TKP99] :

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\alpha_l)_L} + \frac{1}{(\alpha_l)_R} \right), \quad \bar{\alpha}_v = 1 - \bar{\alpha}_l,$$

$$\bar{p} = \frac{(\alpha_l p)_L + (\alpha_l p)_R}{(\alpha_l)_R + (\alpha_l)_L},$$

$$\bar{u}_v = \frac{(\sqrt{\alpha_v \rho_v} u_v)_L + (\sqrt{\alpha_v \rho_v} u_v)_R}{(\sqrt{\alpha_v \rho_v})_L + (\sqrt{\alpha_v \rho_v})_R},$$

$$\bar{u}_l = \frac{(\sqrt{\alpha_l \rho_l} u_l)_L + (\sqrt{\alpha_l \rho_l} u_l)_R}{(\sqrt{\alpha_l \rho_l})_L + (\sqrt{\alpha_l \rho_l})_R},$$

et

$$\bar{\rho}_v = \left(\frac{\bar{p}}{c} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_l = k_l \bar{p}^a$$

où $(.)_L$ est l'état gauche et $(.)_R$ est l'état droit.

Puisque le système bifluide n'est pas hyperbolique, alors $\nabla F(W)$ n'est pas diagonalisable, donc il nous faut un convecteur pour décentrer l'étape prédicteur, pour cela on écrit le système (4.1) sous la forme suivante

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \nabla F(W(x, t)) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + C(W) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = S_2(x, W) \quad (4.3)$$

avec $C(W) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = S_1(x, W)$. Ensuite on utilise le schéma de fractionnement de deux étapes. Dans la première étape on utilise le schéma d'Euler d'intégration explicite en temps

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = S_2(\hat{W}) \\ \hat{W}(x, t^n) = W^n(x) \end{cases}$$

et avec le schéma SRNHS on résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(W(x, t))}{\partial x} + S_1(x, W) = 0 \\ W(x, t^n) = W^{n+1}(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans ce cas la première équation du système (4.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \nabla F(W(x, t)) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + C(W) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} &= 0 \\ \iff \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + (\nabla F(W(x, t)) + C(W)) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

on pose $\mathcal{A}(W) = \nabla F(W(x, t)) + C(W)$.

L'étape prédicteur revient à approcher la solution exacte du problème de Riemann suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}(W) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = 0 \\ W(x, 0) = W_0(x). \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans l'étape prédicteur, en intégrant l'équation (4.5) dans le domaine $[t^n, t^n + \theta] \times [x_i, x_{i+1}[$. En gardant les mêmes notations que celles de la première partie on aura

$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{A}(\bar{W}) (W_{i+1}^n - W_i^n). \quad (4.6)$$

Ensuite on applique la méthode de perturbation par densité proposée par J.Cortes, A.Deussche et I.Toumi [CDT98, Cor99] en effectuant le changement de variable suivant $\tilde{\rho}_v = \frac{\rho_v}{\rho_v^0}$ et $\tilde{\rho}_l = \frac{\rho_l}{\rho_l^0}$ avec ρ_v^0 et ρ_l^0 sont deux densités caractéristiques respectivement de la vapeur et du liquide, ensuite on définit $\epsilon = \frac{\rho_v^0}{\rho_l^0}$. Comme on a supposé

4.3. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

que la phase vapeur est très légère par rapport à la phase liquide, alors $\epsilon \ll 1$. Dans ce cas

$$\mathcal{A}(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_v^2 + \alpha_v p_{,1} & 2u_v & \alpha_v p_{,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \epsilon \alpha_l p_{,1} + \theta_l \alpha_{l,1} & 0 & -u_l^2 + \epsilon \alpha_l p_{,3} + \theta_l \alpha_{l,3} & 2u_l \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

En tenant compte du calcul fait dans [Bou98, GKLC01] dans le cas où le fluide liquide est incompressible, on a $\alpha_v p_{,1} = \frac{\gamma p}{\rho_v}$, $p_{,3} = \frac{\gamma p}{\alpha_v \rho_l}$, comme ρ_l est constant on pose $\rho_l = \rho_l^0$ on aura $p_{,3} = \frac{\gamma p}{\alpha_v \rho_v^0} \frac{\rho_v^0}{\rho_l^0} = \epsilon \frac{\gamma p}{\alpha_v \rho_v^0}$, $\alpha_{l,1} = 0$ et $\alpha_{l,3} = \frac{1}{\rho_l}$.

On pose

$$\frac{\gamma p}{\rho_v} = c_1^2 \quad \text{et} \quad c_2^2 = \frac{\theta_l}{\rho_l},$$

et on remplace dans (4.7), on aura $\mathcal{A}(W) = \mathcal{A}_0(W) + \epsilon \mathcal{H}(W)$ avec

$$\mathcal{A}_0(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_v^2 + c_1^2 & 2u_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -u_l^2 + c_2^2 & 2u_l \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{H}(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma p}{\rho_v^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_l p_{,1} & 0 & \alpha_l p_{,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à \mathcal{A}_0 est donné par

$$P_0(\lambda) = ((\lambda - u_v)^2 - c_1^2) ((\lambda - u_l)^2 - c_2^2)$$

ce polynôme admet quatre valeurs propres distinctes qui sont

$$\lambda_1 = u_v - c_1, \quad \lambda_2 = u_v + c_1, \quad \lambda_3 = u_l - c_2 \quad \text{et} \quad \lambda_4 = u_l + c_2$$

et

$$\mathcal{R}(W) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $\mathcal{A}(\bar{W}) = \mathcal{A}_0(\bar{W}) + \epsilon \mathcal{H}(\bar{W})$ on aura

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} (\mathcal{A}_0(\bar{W}) + \epsilon \mathcal{H}(\bar{W})) (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \mathcal{A}_0(\bar{W}) (W_{i+1}^n - W_i^n) - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n}{2S_{i+\frac{1}{2}}^n} \epsilon \mathcal{H}(\bar{W}) (W_{i+1}^n - W_i^n). \end{aligned}$$

Comme $\epsilon \ll 1$, la théorie de perturbation des opérateurs linéaires [Hin91, Cha88, Kat95] prouve que si on effectue une perturbation pour un opérateur linéaire \mathcal{B} en écrivant $\mathcal{B}' = \mathcal{B} + \epsilon\mathcal{H}$ où ϵ est un réel très petit et \mathcal{B} est diagonalisable dans \mathbb{R} avec des valeurs propres distincts, alors \mathcal{B}' est diagonalisable sur \mathbb{R} avec des valeurs propres distinctes [TKP99] et les valeurs propres λ'_j de \mathcal{B}' sont approchées par celles des valeurs propres λ_j de \mathcal{B} par la relation suivante

$$|\lambda'_j - \lambda_j| = o(\epsilon).$$

En tenant compte de ces résultats on peut dire que l'opérateur \mathcal{A} est diagonalisable sur \mathbb{R} et ses quatre valeurs propres sont distinctes, puisqu'elles sont très proches de celles de \mathcal{A}_0 et dans ce cas on peut traiter le système par le signe de la matrice \mathcal{A}_0 au lieu du signe de la matrice \mathcal{A} . Finalement le schéma SRNHS s'écrit pour le problème bi-fluide (4.1) de la manière suivante

$$\begin{cases} W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}_0(\bar{W})) (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ W_i^{n+1} = W_i^n - r \left(F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) + \Delta t (S_1)_i^n, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec

$$(S_1)_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(\alpha_v)_i^n}{2\Delta x} (p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) \\ 0 \\ \frac{(\alpha_l)_i^n}{2\Delta x} (p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) - \frac{1}{2\Delta x} \delta(\rho_l)_i^n (\alpha_v)_i^n ((u_l)_i^n - (u_v)_i^n)^2 ((\alpha_l)_{i+1}^n - (\alpha_l)_{i-1}^n) \end{bmatrix}.$$

4.4 Extension du schéma SRNHS pour le système bifluide non symétrisable

L'application du schéma SRNHS pour le problème bifluide (4.1) dans ce chapitre a été mené par l'ajout du terme de la pression de correction et la méthode de perturbation par densité [TKP99, CDT98, Cor99] pour approcher la jacobienne du gradient par un convecteur \mathcal{A}_0 diagonalisable.

Dans cette section nous allons considérer le système (4.1) on posant $\delta = 0$ dans le terme différentiel $\delta (p - p_k^i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x}$ et sans recourt a la méthode de perturbation par densité en calculant la matrice signe intervenant dans la phase prédictor du schéma SRNHS en utilisant la méthode de F. Alouges [Alo98, ABDV⁺99].

La jacobienne dont on propose de calculer le signe dans ce cas est donnée par

$$\mathcal{A}_0(\bar{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{u}_v^2 + \frac{\gamma \bar{p}}{\rho_v} & 2\bar{u}_v & \frac{\gamma \bar{p}}{\rho_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\bar{\alpha}_l}{\bar{\alpha}_v} \frac{\gamma \bar{p}}{\rho_v} & 0 & -\bar{u}_l^2 + \frac{\bar{\alpha}_l}{\bar{\alpha}_v} \frac{\gamma \bar{p}}{\rho_l} & 2\bar{u}_l \end{pmatrix}.$$

4.4. EXTENSION DU SCHÉMA SRNHS POUR LE SYSTÈME BIFLUIDE NON SYMÉTRISABLE

Dans le cas où les valeurs propres de $\mathcal{A}_0(\bar{W})$ sont toutes de module plus petit que 1 l'algorithme de Newton-Schulz est donné par

$$\begin{cases} B_0 = \mathcal{A}_0 \\ B_{n+1} = \frac{3A_n - A_n^3}{2}. \end{cases}$$

Or les valeurs propres de \mathcal{A}_0 ne sont pas toutes de module plus petit que 1, et comme si $M > 0$ on a

$$\text{sgn}(\mathcal{A}_0) = |\mathcal{A}_0| \mathcal{A}_0^{-1} = |M\mathcal{A}_0| (M\mathcal{A}_0)^{-1} = \text{sgn}(M\mathcal{A}_0),$$

alors on multiplie la matrice $\mathcal{A}_0(\bar{W})$ par M de telle sorte que les valeurs propres de $M\mathcal{A}_0(\bar{W})$ sont toutes de module plus petit que 1 et on applique la méthode de F. Alouges pour $M\mathcal{A}_0$.

Pour ce problème on prend $M = \frac{1}{L_0}$ avec

$$L_0 = \max \left(|\bar{u}_v| + \left| \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\rho_v}} \right|, |\bar{u}_l| + \left| \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\rho_v}} \right| \right).$$

Si une valeur propre est vraiment très petite, sa convergence sera lente. Dans ce cas il est possible d'accélérer la procédure. Supposons que les valeurs propres de $\mathcal{A}_0(\bar{W})$ soient dans l'intervalle $[-L_0, -1] \cup \{0\} \cup [1, L_0]$ (ceci est possible après la multiplication de $\mathcal{A}_0(\bar{W})$ par une constante), on pose $a_0 = \frac{1}{L_0(L_0 + 1)}$, $B_0 = \mathcal{A}_0$ et l'algorithme s'écrit

$$\begin{cases} B_{n+1} = P_{a_n}(B_n), \\ L_{n+1} = \frac{2(a_n + 1)}{3} \sqrt{\frac{a_n + 1}{3}}, \\ a_{n+1} = \frac{1}{L_{n+1}(L_{n+1} + 1)}, \end{cases}$$

où P_a est une fonction polynômiale définie par

$$P_a(X) = -aX^3 + (a + 1)X.$$

Pour plus de détail sur l'application de cette méthode voir [Alo98].

Notons que cette méthode donne les mêmes résultats numériques que la méthode de la décomposition spectrale du calcul de la matrice signe dans le cas où $\delta \neq 0$ (voir figures FIG. 4.7, FIG. 4.9) et a l'avantage de permettre la simulation numérique du problème de Ransom dans le cas où $\delta = 0$ (voir figures FIG. 4.1, FIG. 4.2, FIG. 4.3, FIG. 4.4).

4.5 Application Numérique - Robinet de Ransom

Il s'agit d'un cas test monodimensionnel instationnaire proposé par V.H. Ransom comme "benchmark" numérique pour les codes de thermohydrolique diphasique 1D [RH88].

On considère l'écoulement d'une colonne d'eau à la sortie d'un robinet débouchant dans une enceinte contenant de l'air. La vitesse d'entrée de l'eau est de 10 m/s alors que l'air est au repos. Le rapport des sections de la buse de l'enceinte est tel que le taux de vide intégré sur la section vaut 0.2. Dans cette configuration, on observe un phénomène de striction du jet sous l'effet de la pesanteur. En effet, si on fait l'hypothèse que le jet reste cohérent (pas d'arrachage de liquide sous forme de gouttes, pas de pénétration de l'air dans le jet), l'accélération du liquide due à la pesanteur entraîne nécessairement un rétrécissement de la section de passage du liquide par conservation du débit. De plus, les conditions initiales correspondantes à la solution qu'on obtiendrait en l'absence de pesanteur (donc $\alpha_{v,init} = 0.2$, soit $\alpha_{v,init} = 0.6$ partout), une onde de taux de vide se propage de la section d'entrée vers la section de sortie à partir de l'instant initial.

Les conditions aux limites sont programmées de la façon suivante :

à l'entrée on impose sur les variables $\alpha_v(0, t) = 0.2$, $u_v(0, t) = 0$, $u_l(0, t) = 10\text{m/s}$ avec sortie libre. Tandis que pour la pression on impose une sortie $p(12, t) = 10^5\text{Pa}$ avec entrée libre.

Le calcul direct du signe de la Jacobienne par la méthode de F. Alouges avec l'algorithme de Newton-Schultz [Alo98] permet l'application du schéma SRNHS au problème non hyperbolique à condition que la partie imaginaire des valeurs propres soit petite et permet la diminution de la diffusion numérique introduite sur le schéma (voir figures FIG. 4.1, FIG. 4.2) . En revanche la méthode de I. Toumi basée sur la perturbation de densité permet l'application du schéma SRNHS au problème de Ransom sans restriction sur la valeur de taux de vide de la vapeur dans la condition initiale , comme le cas par exemple $\alpha_v = 0.2$ (voir figures FIG. 4.5 et FIG. 4.7) qui n'est pas possible avec $\delta = 0$.

Dans les figures FIG. 4.5, FIG. 4.6, FIG. 4.7, FIG. 4.8, FIG. 4.9, FIG. 4.10, FIG. 4.11, FIG. 4.12 la matrice signe dans l'étape prédicteur est calculée par la méthode de I. Toumi [Cor02, CDT98, TKP99, TK96, Tou96] basée sur la perturbation par densité. Par contre la matrice signe dans les figures FIG. 4.1, FIG. 4.2, FIG. 4.3, FIG. 4.4 est calculée par la méthode de F. Alouges [Alo98, ABDV⁺99].

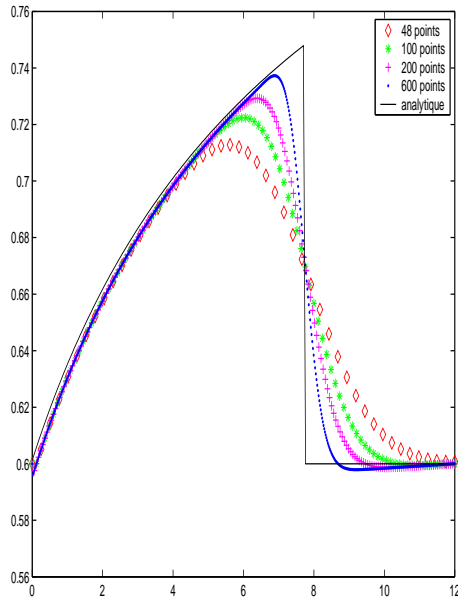


FIG. 4.1 – variation du taux de vide entre 48 et 600 points, $\delta = 0$, méthode de F. Alouges

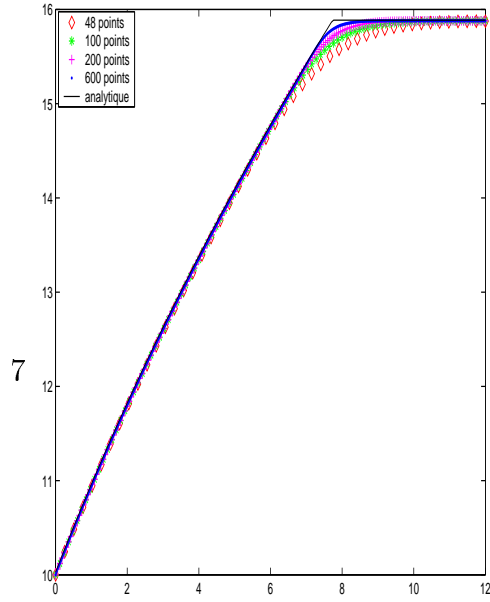


FIG. 4.2 – variation de la vitesse du liquide entre 48 et 600 points, $\delta = 0$, méthode de F. Alouges

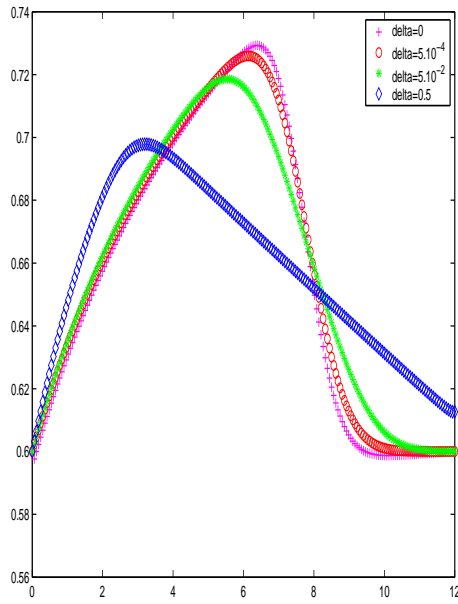


FIG. 4.3 – Influence du paramètre d'hyperbolicité δ sur le taux de vide $\alpha_{v,init} = 0.6$, 200 points, méthode de F. Alouges

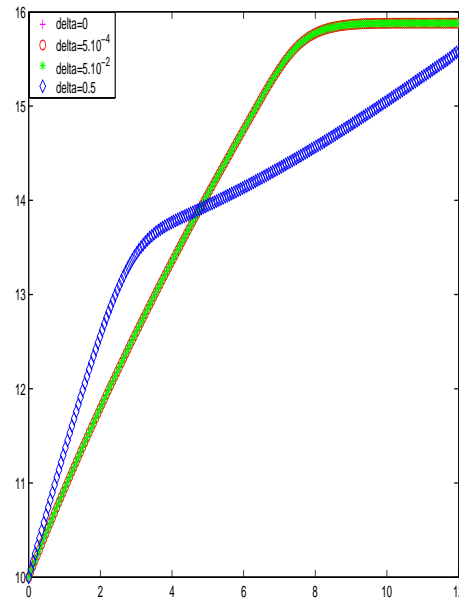


FIG. 4.4 – Influence du paramètre d'hyperbolicité δ sur la vitesse du liquide $\alpha_{v,init} = 0.6$, 200 points, méthode de F. Alouges

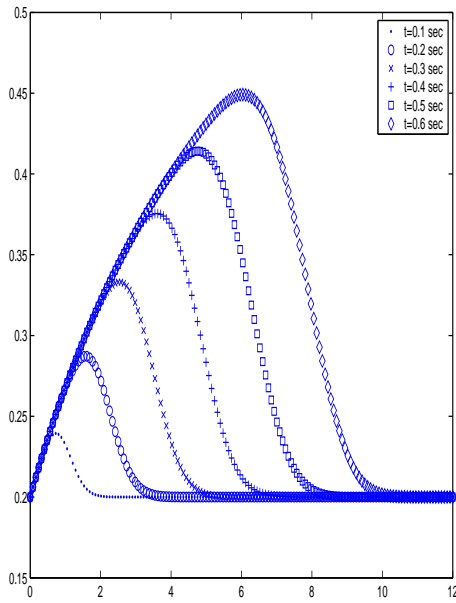


FIG. 4.5 – Taux de vide de la vapeur $\delta = 5 \times 10^{-4}$, 150 points, méthode de I. Toumi

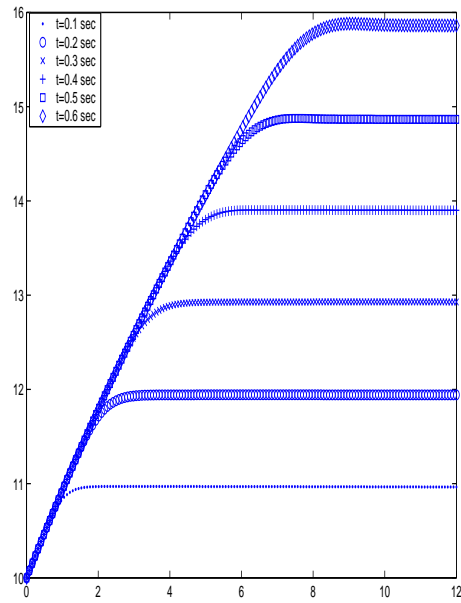


FIG. 4.6 – Vitesse du liquide $\delta = 5 \times 10^{-4}$, 150 points, méthode de I. Toumi

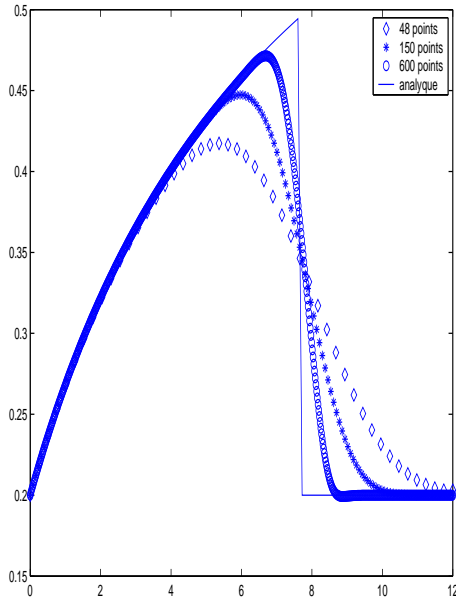


FIG. 4.7 – Courbe de taux de vide de la vapeur entre 48 points et 600 points $\delta = 5 \times 10^{-4}$, méthode de I. Toumi

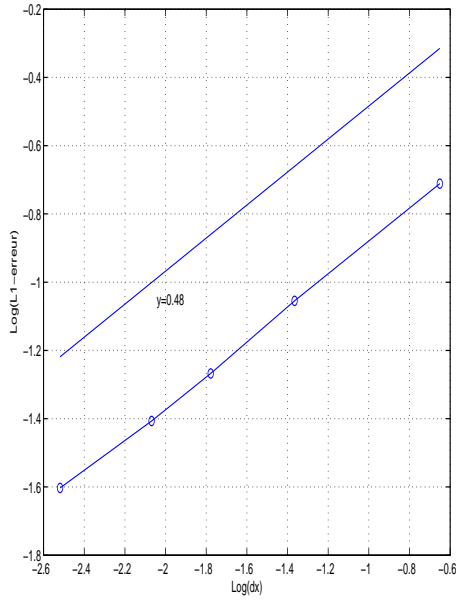


FIG. 4.8 – Courbe d'erreur en norme L^1 associée au taux de vide, pente $\simeq 0.5$, méthode de I. Toumi

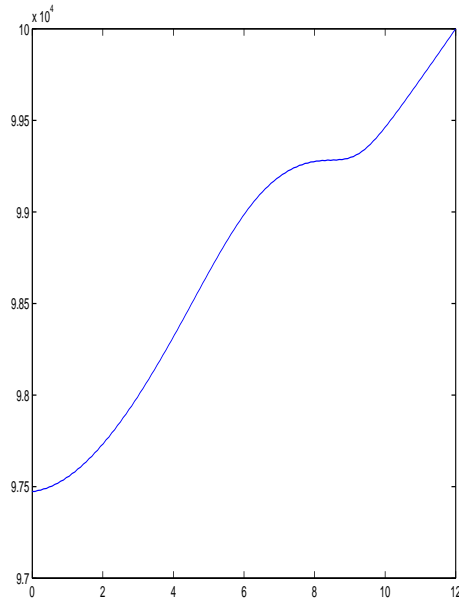


FIG. 4.9 - La pression à $t=0.6$ sec $\delta = 5 \times 10^{-4}$, 150points, méthode de I. Toumi

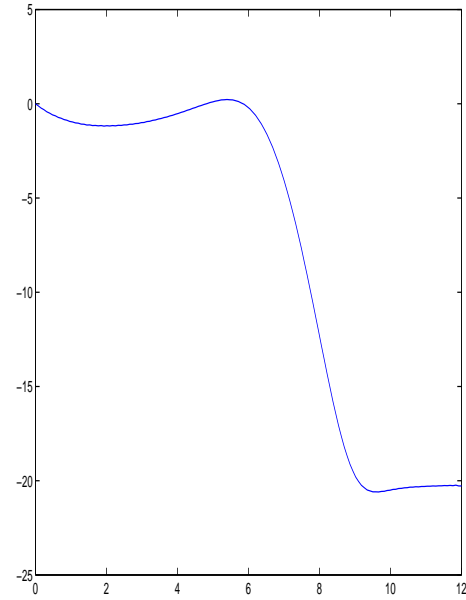


FIG. 4.10 - Vitesse de la vapeur à $t=0.6$ sec $\delta = 5 \times 10^{-4}$, 150points, méthode de I. Toumi

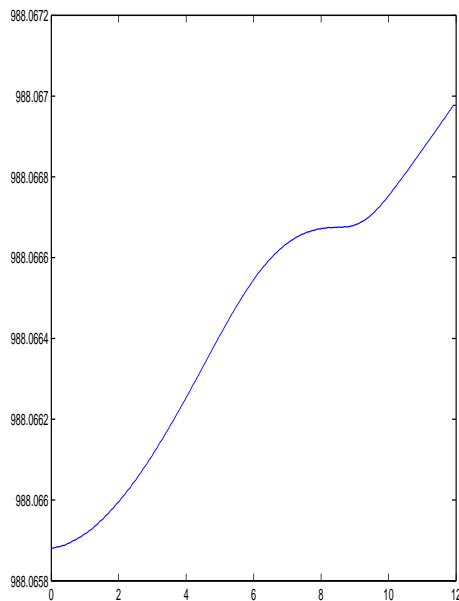


FIG. 4.11 - Densité du liquide à $t=0.6$ sec $\delta = 5 \times 10^{-4}$, 150points, méthode de I. Toumi

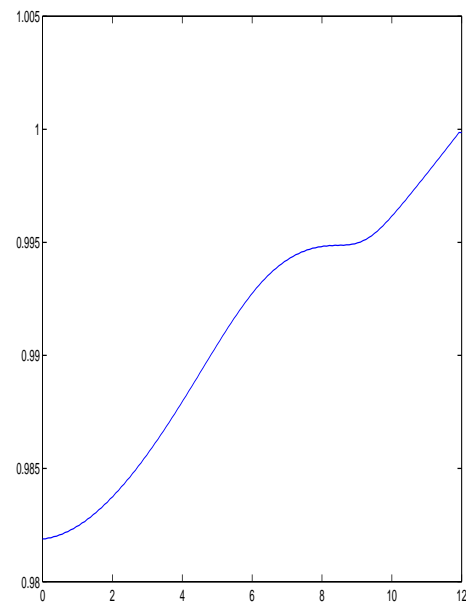


FIG. 4.12 - Densité de la vapeur à $t=0.6$ sec $\delta = 5 \times 10^{-4}$, 150points, méthode de I. Toumi

Bibliographie

- [ABDV⁺99] F. Alouges, M. Boucker, F. De Vuyst, P. Freydier, J. M. Ghidaglia, A. Kumbaro, G. Le Coq, F. Pascal, and M. Tajchman, *An overview of the vffc - methods and tools for the simulation of two-phase flows*, Tech. report, Département Transferts Thermiques et Aérodynamique. Division Recherche & Développement Electricité de France, 1999.
- [Alo98] F. Alouges, *Matrice signe et systèmes hyperboliques*, Tech. report, rapport CMLA, 1998.
- [Ben02] F. Benkhaldoun, *Analysis and validation of a new finite volume scheme for nonhomogeneous systems*, FVCA3, HPS, R. Herbin, D.Kröner(Eds), Proceedings of the Third International Symposium on Finite Volumes for Complex Application, 2002, pp. 269–276.
- [Bes90] D. Bestion, *The physical closure laws in the cathare code*, Nuclear Engineering and Design **124** (1990), 229–245.
- [Bou98] M. Boucker, *Modélisation numérique multidimensionnelle d'écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent : méthodes et applications*, Ph.D. thesis, Electricité de France, 1998.
- [CDT98] J. Cortes, A. Debussche, and I. Toumi, *A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems*, J. Comput. Phys. **147** (1998), no. 2, 463–484.
- [CEAG⁺97] F. Coquel, K. El Amine, E. Godlewski, B. Perthame, and P. Rascle, *A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows*, J. Comput. Phys. **136** (1997), no. 2, 272–288.
- [Cha88] F. Chatelen, *Valeurs propres des matrices*, M.A.M., MASSON, MASSON, 1988.
- [Cor99] J. Cortes, *Etude des régimes transitoires d'écoulements diphasiques à faible rapport de densité*, Ph.D. thesis, Université de paris XI centre d'Orsay, 1999.
- [Cor02] J Cortes, *On the construction of upwind schemes for non-equilibrium transient two-phase flows*, Computer & Fluids **31** (2002), 159–182.
- [EF03] S. Evje and K. K. Fjelde, *On a rough AUSM scheme for a one-dimensional two-phase model*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 10, 1497–1530.

- [GKLC96] J-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode "volumes finis" à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [GKLC01] ———, *On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method*, Eur. J. Mech. B Fluids **20** (2001), no. 6, 841–867.
- [Hin91] E. J. Hinch, *Perturbation methods*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Kat95] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition.
- [Lah92] R.T. Lahay, *The prediction phase of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models*, Boiling Heat transfer, Elsevier Science (1992), 85–121.
- [Lio96] M-S. Liou, *A sequel to AUSM : AUSM⁺*, J. Comput. Phys. **129** (1996), no. 2, 364–382.
- [Lio00] ———, *Mass flux schemes and connecting to shock instability*, J. Comput. Phys. **160** (2000), no. 2, 623–48.
- [LS93] M-S Liou and Christopher J. Steffen, Jr., *A new flux splitting scheme*, J. Comput. Phys. **107** (1993), no. 1, 23–39.
- [MFG99] J-M. Masella, I. Faille, and T. Gallouët, *On an approximate Godunov scheme*, Int. J. Comput. Fluid Dyn. **12** (1999), no. 2, 133–149.
- [OS82] S. Osher and F. Solomon, *Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, Math. Comp. **38** (1982), no. 158, 339–374.
- [RH88] V. H. Ransom and D. L. Hicks, *Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow*, J. Comput. Phys. **75** (1988), no. 2, 498–504.
- [Roe81] P. L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Rom98] J. E. Romate, *An approximate Riemann solver for a two-phase flow model with numerically given slip relation*, Comput. & Fluids **27** (1998), no. 4, 455–477. MR 99e :76083
- [TK96] I. Toumi and A. Kumbaro, *An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model*, J. Comput. Phys. **124** (1996), no. 2, 286–300.
- [TKP99] I. Toumi, A. Kumbaro, and H Paillere, *Approximate riemann solvers and flux vector splitting schemes for two-phase flow*, Tech. report, CEA/Saclay, 1999.
- [Tou96] I. Toumi, *An upwind numerical method for tow-fluids tow-phase flow models*, Nuclear Sci Engng **123** (1996), 147–68.
- [VL82] B. Van Leer, *Flux vector splitting for the euler equations*, Tech. Report 82-30, ICASE, 1982.

Chapitre 5

Analyse du schéma SRNH pour des systèmes homogènes dans le cas multidimensionnels

Résumé

Dans ce chapitre nous effectuons une analyse mathématique du schéma de Rusanov et du schéma SRNH dans le cas bidimensionnel, sur maillage non-structuré, pour des problèmes scalaires et des systèmes de lois de conservation. Nous aboutissons à la version 2D du schéma (*SRNHS*), où intervient de nouveau une matrice signe. Nous présentons alors des résultats numériques pour les problèmes d'Euler et Saint-Venant bidimensionnels homogènes.

5.1 Introduction

Pour faire l'analyse mathématique de ce nouveau schéma de volumes finis (schéma SRNH) dans le cas multidimensionnel scalaire homogène suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \operatorname{div}(F(x, t, u(x, t))) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.1)$$

on fait référence aux livres de E. Godlewski et P.-A. Raviart [GR91, GR96], J. Smoller [Smo83] et au livre de Eymard, Gallouët et Herbin [EGH00], on admet les hypothèses suivantes sur le maillage :

$$\alpha h^N \leq m(p), \quad m(\partial p) \leq \frac{1}{\alpha} h^{N-1} \quad \forall p \in \mathcal{T},$$

où $m(p)$ est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N de la maille $p \in \mathcal{T}$, $m(\partial p)$ est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^{N-1} , ∂p est la frontière de p , h est le diamètre de la maille p

et α représente la régularité du maillage. Et des hypothèses sur la condition initiale $u_0(x)$ et la fonction flux [Hil98],

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) : \text{il existe } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } A \leq u_0 \leq B \text{ p.p} \\ (ii) F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial s} \text{ est localement Lipschitzienne} \\ (iii) \operatorname{div}_x F(x, t, s) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x, t, s) = 0 \text{ pour tout } (x, t, s) \in (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \\ (iv) \text{ pour tout compact } K \in \mathbb{R}, \text{ il existe } V_K < \infty \text{ tel que } \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right| \leq V_K \text{ pour} \\ \text{presque tout } (x, t, s) \in (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times K). \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Pour ce genre de problème, pour définir la solution d'une façon unique, il est nécessaire d'introduire la solution entropique qui est la vraie solution physique parmi les solutions faibles. La première démonstration d'existence et d'unicité de la solution entropique du problème (5.1) est due à S. N. Krushkov [Kru70]. Les hypothèses admises sont les hypothèses (5.2) avec la condition $F \in C^3(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, la démonstration s'appuie sur la régularisation parabolique de (5.1). Dans les articles [EGH95b, EGH95a] R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin ont montré l'existence et l'unicité de la solution entropique dans le cas $F(x, t, s) = v(x, t)f(s)$ avec $v \in L^\infty \cap C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ils ont obtenu ce résultat en passant à la limite sur un schéma volume finis. Ces résultats seront généralisés pour une fonction $F(x, t, s)$ qui vérifie les hypothèses (5.2) par Hillairet [Hil98, Hil99]. Elle a aussi montré des estimations BV-faible en espace et en temps dans le cas général, et une estimation BV-forte en temps dans le cas où $F(x, t, s) = F(x, s)$. Les schémas d'ordre deux ou d'ordre plus élevé ont été étudiés par S. Noelle [Noe96] et par D. Kröner, S. Noelle et M. Rokyta dans [KNR95] pour le problème (5.1) dans le cas $F(x, t, s) = F(s)$. Dans [KNR95, Noe95] les auteurs s'intéressent à la convergence des schémas de volumes finis d'ordre élevé pour des maillages non structurés, réguliers ou irréguliers. Dans [Noe96] S. Noelle donne des estimations d'erreur entre solution approchée et solution entropique. Pour cela il utilise les estimations de N. N. Kusnetsov [Kuz76] et il regarde le schéma comme une régularisation parabolique du problème hyperbolique.

Dans ce chapitre nous allons faire l'analyse mathématique du schéma aux volumes finis pour les problèmes non homogènes appelé SRNH dans le cas $2D$. Dans ce cas la fonction du flux physique $F = (f_1, f_2)$, et le schéma SRNH s'écrit de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{ij}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} (F(W_j^n) - F(W_i^n)) \cdot \eta_{ij} \\ W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ W_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} u(x, 0) dx \end{array} \right. \quad (5.3)$$

avec ;

C_i : le volume de contrôle,

$|\partial C_i|$: le périmètre du volume de contrôle,
 A_i : l'aire du volume de contrôle C_i ,
 e_{ij} : l'arête commune de C_i et C_j ,
 $V(C_i) = \{C_j \in \mathcal{T} \text{ telque } C_i \cap C_j = e_{ij}\}$,
 $N_i = \{j/C_j \in V(C_i)\}$,
 $a_{\{j \in N_i\}} = (a_j)_{j \in N_i}$,
 $S_{ij}^n = |\eta_x| \max(|f'_1(W_i^n)|, |f'_1(W_j^n)|) + |\eta_y| \max(|f'_2(W_i^n)|, |f'_2(W_j^n)|)$,
 g est la fonction du flux numérique donnée par :

$$g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = F(W_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}$$

où $\eta_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}$ est la normale sortante, α_{ij}^n est le paramètre de contrôle. Dans notre analyse on considère de plus les hypothèses (5.2) sur la fonction flux et les hypothèses énoncées ci-dessus sur le maillage. Ensuite nous allons chercher les conditions sur le paramètre de contrôle α_{ij}^n et le pas de temps Δt (condition de stabilité) pour que la fonction du flux numérique respecte certaines propriétés comme la monotonie, le principe du maximum, la conservativité et la consistance :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (i) \ g(u, v, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \text{ est croissant par rapport à } u \text{ et décroissant par rapport à } v \\
 \text{pout tout } (u, v) \in [A, B]^2. \\
 (ii) \ g(u, v, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = -g(v, u, S_{ji}^n, \eta_{ji}) \text{ pout tout } (u, v) \in [A, B]^2. \\
 (iii) \ g(u, v, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \text{ est lipschitzien sur } [A, B]^2 \text{ avec la même constante} \\
 \text{de lipschitz en } u \text{ et } v.
 \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Sous ces conditions l'estimation d'erreur généralement prouvée (en norme L^1) est de l'ordre de $h^{\frac{1}{4}}$ et la solution approchée donnée par ce schéma converge faiblement vers l'unique solution entropique dans L^p pour tout $1 \leq p < \infty$. Dans cette partie nous déterminons la condition de stabilité pour le schéma de Rusanov et celui du schéma SRNH et la monotonie du schéma SRNH dans des cas, pour des systèmes non linéaires hyperboliques en dimension deux d'espace.

5.2 Analyse des schémas aux volumes finis dans le cas scalaire

5.2.1 Schéma de Rusanov

On considère le problème hyperbolique non linéaire scalaire dans l'espace de dimension deux avec condition initiale suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(F(u)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (5.5)$$

avec $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} de classe C^1 , dont les dérivées gardent des signes constant, majorées et $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Le schéma aux volumes finis pour ce problème se déduit de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(F(u)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(F(u)) dx dt = 0,$$

on utilise, alors l'approximation de u dans le domaine $[t^n, t^{n+1}[\times C_i$ et le théorème de Green on aura :

$$\begin{aligned} & A_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t^n} + \int_{\partial C_i} F(u) \cdot \eta_{ij} d\sigma = 0 \\ \Longleftrightarrow & A_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t^n} + \sum_{j \in N_i} \int_{e_{ij}} F(u) \cdot \eta_{ij} d\sigma = 0 \\ \Longleftrightarrow & u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, \eta_{ij}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

avec η_{ij} est la normale sortante et $g(u_i^n, u_j^n, \eta_{ij})$ est la fonction du flux numérique donnée par

$$g(u_i^n, u_j^n, \eta_{ij}) \simeq \frac{1}{|e_{ij}|} \int_{e_{ij}} F(u) \cdot \eta_{ij} d\sigma.$$

Selon l'expression de la fonction du flux numérique on note des différents schémas aux volumes finis. On note le schéma de Roe, VFFC, VFRoe, le schéma de Rusanov, WAF, ...

La fonction du flux numérique est dite conservative si :

$$g(u_i^n, u_j^n, \eta_{ij}) = -g(u_j^n, u_i^n, \eta_{ji}).$$

Cette relation exprime que le flux de C_i vers C_j est le même que le flux de C_j vers C_i , au signe près. Cette propriété fondamentale assure que, si le schéma converge, il converge vers une solution faible du système (5.5) de la loi de conservation qui

vérifie donc les relations de Rankine-Hugoniot.

La fonction du flux numérique est dite consistante si :

$$g(u_i^n, u_i^n, \eta_{ij}) = F(u_i^n) \cdot \eta_{ij}.$$

Cette propriété traduit le fait que si les variables ont des valeurs identiques de part et d'autre de l'interface e_{ij} , le flux numérique doit être égal au flux physique.

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'analyse mathématique du schéma de Rusanov et le schéma SRNH.

La fonction du flux numérique de Rusanov est donnée par

$$\begin{aligned} g(u_i^n, u_j^n, \eta_{ij}) &= \frac{1}{2} (F(u_i^n) \cdot \eta_{ij} + F(u_j^n) \cdot \eta_{ij}) - \frac{1}{2} S_{ij}^n (u_j^n - u_i^n) \\ &= F(u_i^n) \cdot \eta_{ij} + \frac{1}{2} (F(u_j^n) \cdot \eta_{ij} - F(u_i^n) \cdot \eta_{ij}) - \frac{1}{2} S_{ij}^n (u_j^n - u_i^n) \end{aligned}$$

où S_{ij}^n est la vitesse de Rusanov locale de part et d'autre de chaque arête de la cellule C_i donnée par

$$S_{ij}^n = |\eta_x| \max \{|f'_1(u_i^n)|, |f'_1(u_j^n)|\} + |\eta_y| \max \{|f'_2(u_i^n)|, |f'_2(u_j^n)|\}$$

et $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ est le pas de temps et A_i est l'aire du volume de contrôle C_i . En utilisant un opérateur \mathcal{H} , le schéma (5.6) s'écrit sous la forme suivante :

$$u_i^{n+1} = \mathcal{H}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n), \quad (5.7)$$

où $u_{\{j \in N_i\}}^n$ sont les valeurs moyennes de u dans les cellules voisines de C_i , et l'opérateur \mathcal{H} sur la cellule i est donné par

$$\mathcal{H}(u, v_{\{j \in N_i\}}) = u - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u, v_j, \eta_{ij}).$$

Propriété du flux de Rusanov

La fonction du flux de Rusanov est consistante et conservative par construction.

Définition 5.2.1 [Elm99] *Le schéma (5.6) sera dit monotone si l'opérateur \mathcal{H} est croissant par rapport à chacun de ses arguments u_i^n et $u_{\{j \in N_i\}}^n$.*

Condition de stabilité

Lemme 5.2.2 *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathcal{D}) \cap L^1(\mathcal{D})$.*

Supposons que l'on peut écrire le schéma (5.6) sous la forme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (u_i^n - u_j^n)$$

et si les coefficients α_{ij} vérifient les conditions :

(i) $\alpha_{ij} \geq 0$ pour tout $j \in N_i$,

(ii) $\sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} \leq 1$,

alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a le principe du maximum

$$\min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n \leq \min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n.$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (u_i^n - u_j^n) \\ &= \left(1 - \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} \right) u_i^n + \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} u_j^n. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses (i) et (ii) du lemme (5.2.2), on a le principe du maximum

$$\min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n \leq \min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n$$

■

On note $a \perp b = \min(a, b)$ et $a \top b = \max(a, b)$

Proposition 5.2.3 Soit u_0 une fonction bornée à support compact et $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 tel que

$$\sup_{u \in X} \{|f_1'(u)|, |f_2'(u)|\} = M \in \mathbb{R},$$

où X est défini comme suit :

$$X = \{u \in \mathbb{R}^+ / |u| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\}.$$

On suppose de plus que le pas de temps Δt^n , le périmètre $|\partial C_i|$ et l'aire A_i de la cellule C_i vérifient la relation

$$\Delta t^n \leq \frac{A_i}{|\partial C_i| S_i^n} \quad \forall i, n \in \mathbb{N}$$

où $S_i^n = \max_{j \in N_i} S_{ij}^n$ est la vitesse de Rusanov, $\forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$, alors le schéma de Rusanov vérifie le principe du maximum local

$$\min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n \leq \min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n \quad \forall C_i \in \mathcal{T}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et la condition de stabilité L^∞

$$\|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, \eta_{ij}) &= \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| F(u_i^n) \cdot \eta_{ij} \\ &= F(u_i^n) \cdot \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \eta_{ij} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où le schéma de volumes finis de Rusanov s'écrit de la manière suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (F(u_j^n) \cdot \eta_{ij} - F(u_i^n) \cdot \eta_{ij} - S_{ij}^n (u_j^n - u_i^n)).$$

Or F est de classe C^1 sur $[u_i^n \perp u_j^n, u_i^n \top u_j^n]$, d'où il existe ν_{ij}^n et $\epsilon_{ij}^n \in]u_i^n \perp u_j^n, u_i^n \top u_j^n[$ tels que

$$F(u_j^n) \cdot \eta_{ij} - F(u_i^n) \cdot \eta_{ij} = \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n),$$

avec $\vec{V}_{ij}^n = \begin{pmatrix} f_1'(\nu_{ij}^n) \\ f_2'(\epsilon_{ij}^n) \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que le schéma de Rusanov s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} - S_{ij}^n \right) (u_j^n - u_i^n) \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(S_{ij}^n - \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) \right) u_i^n \\ &\quad + \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(S_{ij}^n - \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) u_j^n. \end{aligned}$$

On pose

$$\tau_{ij}^n = \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| \left(S_{ij}^n - \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) \quad \text{et} \quad \tau_i^n = \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n.$$

On remarque que $\tau_{ij}^n \geq 0$, d'où pour que le schéma soit L^∞ stable, il suffit d'avoir $\tau_i^n \leq 1$.

On a

$$\begin{aligned}\tau_i^n &\leq \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \tau_{ij}^n \\ &\leq \sup_{j \in N_i} |\tau_{ij}^n| \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \\ &\leq \frac{\Delta t^n}{A_i} S_i^n |\partial C_i|.\end{aligned}$$

Sous la condition $\Delta t^n \leq \frac{A_i}{S_i^n |\partial C_i|} \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$, on aura le résultat du principe de maximum.

■

5.2.2 Schéma SRNH pour un cas simple

On considère le système hyperbolique non linéaire scalaire dans l'espace de dimension deux avec condition initiale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(v(x, t)f(u(x, t))) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (5.8)$$

avec $\operatorname{div} = \sum_{i=1}^{i=2} \partial_i$, où ∂_i est la dérivée partielle de la i^{eme} composante de $v(x, t)f(u(x, t))$ par rapport à la i^{eme} composante x_i de $x \in \mathbb{R}^2$; v est une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ vers \mathbb{R}^2 , de classe C^1 tel que

$$\operatorname{div}(v(x, t)) = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \{|v_1(x, t)|, |v_2(x, t)|\} = V \in \mathbb{R},$$

où f est une fonction de classe C^1 , monotone de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , et u_0 est la donnée initiale à support compact du système (5.8).

Le schéma de volumes finis SRNH scalaire en dimension deux d'espace pour le problème (5.8) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} (f(u_j^n) - f(u_i^n)) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ u_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} W(x, y, 0) dx dy, \end{cases} \quad (5.9)$$

avec

$$v_{ij}^n = \frac{1}{|e_{ij}|} \int_{e_{ij}} v(x, t^n) d\sigma = v_{ji}^n,$$

$$S_{ij}^n = \max(|f'(u_i^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|, |f'(u_j^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|),$$

g est la fonction du flux numérique du schéma SRNH donnée par :

$$g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = f(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$$

où η_{ij} est la normale sortante.

α_{ij}^n est un paramètre de contrôle dont nous allons chercher à expliciter son expression et vérifiant $\alpha_{ij}^n = \alpha_{ji}^n$.

Vérification de certaines hypothèses sur la fonction du flux

(i) **Propriété de conservation :**

Comme

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_i^n) - \frac{\alpha_{ji}^n}{2S_{ji}^n} (f(u_i^n) - f(u_j^n)) v_{ji}^n \cdot \eta_{ji} = u_{ji}^n$$

et $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$ et $g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = f(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$, alors

$$g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = -g(u_j^n, u_i^n, S_{ij}^n, \eta_{ji})$$

d'où la fonction du flux numérique est conservative.

(ii) **Propriété de consistance**

Si on prend $u_i^n = u_j^n$, on aura $g(u_i^n, u_i^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = f(u_i^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$, il s'ensuit que la fonction du flux numérique est consistante.

Condition de stabilité

Proposition 5.2.4 Soit v une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ vers \mathbb{R}^2 , de classe C^1 , tel que

$$\operatorname{div}(v(x, t)) = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \{|v_1(x, t)|, |v_2(x, t)|\} = V \in \mathbb{R},$$

f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , de classe C^1 monotone, vérifiant $|f'(u)| \leq M$, avec $M \in \mathbb{R}_+$. u_0 est une fonction bornée à support compact donnée, on suppose de plus que le paramètre de contrôle α_{ij}^n vérifie la relation

$$1 \leq \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} |f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|.$$

Le pas de temps Δt^n , le périmètre $|\partial C_i|$ et l'aire A_i du volume de contrôle C_i vérifient la relation

$$\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i|} \frac{1}{(1 + \gamma_i^n) \phi_i^n} \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2,$$

avec

$$\sup_{j \in N_i} |f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| = \phi_i^n \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{et} \quad \gamma_i^n = \sup_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \geq 1$$

vérifiant la relation suivante

$$\alpha_{ij}^n = \gamma_{ij}^n \frac{S_{ij}^n}{|f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|},$$

le schéma SRNH vérifie le principe du maximum local

$$\min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n \leq \min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n$$

pour tout $C_i \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$ et la condition de stabilité L^∞

$$\|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve

Le schéma SRNH s'écrit sous la forme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}),$$

avec

$$g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = f(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$$

et

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} (f(u_j^n) - f(u_i^n)) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}.$$

Or f est de classe C^1 , il s'ensuit que le théorème des accroissements finis donne l'existence de a_{ij}^n dans l'intervalle $]u_i^n \perp u_j^n, u_i^n \top u_j^n[$ tel que

$$(f(u_j^n) - f(u_i^n)) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} = f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n),$$

d'où l'étape prédicteur devient

$$\begin{aligned} u_{ij}^n &= \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n) \\ &= u_i^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) (u_j^n - u_i^n) \\ &= u_j^n - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) (u_j^n - u_i^n). \end{aligned}$$

On pose

$$\delta_{ij}^n = \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} f' (a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij},$$

dans ce cas l'étape prédicteur devient

$$u_{ij}^n = u_i^n + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) (u_j^n - u_i^n).$$

En effectuant le développement de Taylor Lagrange de $f(u_{ij}^n)$ au voisinage de u_i^n , il existe

$$\theta_{ij}^n \in]u_i^n \perp u_{ij}^n, u_i^n \top u_{ij}^n[,$$

tel que

$$\begin{aligned} g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) &= f(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \\ &= \left(f(u_i^n) + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) f'(\theta_{ij}^n) (u_j^n - u_i^n) \right) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| f(u_i^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} &= f(u_i^n) \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \\ &= f(u_i^n) \sum_{j \in N_i} \int_{e_{ij}} v(x, t^n) \cdot \eta_{ij} d\sigma \\ &= f(u_i^n) \int_{C_i} \operatorname{div}(v(x, t^n)) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

car on a supposé $\operatorname{div}(v(x, t^n)) = 0$, d'où le schéma SRNH s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (1 - \delta_{ij}^n) f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n) \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (\delta_{ij}^n - 1) f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) u_i^n \\ &\quad + \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (\delta_{ij}^n - 1) f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} u_j^n. \end{aligned}$$

On pose

$$\tau_{ij}^n = \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| (\delta_{ij}^n - 1) f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij},$$

or on a supposé que f est monotone, d'où $f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$ et $f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$ ont les mêmes signes, d'où

$$\tau_{ij}^n = \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| (|\delta_{ij}^n| - \operatorname{sgn}(f'(u) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij})) |f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|,$$

on aura

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n\right) u_i^n + \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n u_j^n.$$

D'après le lemme (5.2.2), le schéma SRNH vérifie le principe du maximum si

$$\tau_{ij}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n \leq 1.$$

$$\tau_{ij}^n \geq 0 \quad \iff \quad |\delta_{ij}^n| - \operatorname{sgn}(f'(u) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}) \geq 0 \quad \text{vrai si} \quad |\delta_{ij}^n| \geq 1,$$

or

$$|\delta_{ij}^n| \geq 1 \quad \iff \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2, \forall j \in N_i, \exists \gamma_{ij}^n \geq 1 \quad \text{tel que} \quad \alpha_{ij}^n = \gamma_{ij}^n \frac{S_{ij}^n}{|f'(a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|} \quad (5.10)$$

et on a

$$\sum_{j \in N_i} |\tau_{ij}^n| \leq \frac{\Delta t^n |\partial C_i|}{2A_i} (1 + \gamma_i^n) \phi_i^n,$$

avec

$$\sup_{j \in N_i} |f'(\theta_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| = \phi_i^n, \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{et} \quad \gamma_i^n = \sup_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n.$$

En admettant que u_{ij}^n reste borné et ainsi que l'état θ_{ij}^n (voir (5.2.4) La matrice signe dans l'étape prédicteur), il s'ensuit que si $\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i|} \frac{1}{(1 + \gamma_i^n) \phi_i^n}$, on a

$\sum_{j \in N_i} |\tau_{ij}^n| \leq 1$, d'où le résultat du principe de maximum.

■

Propriété de monotonie

En utilisant l'opérateur \mathcal{H} sur la cellule C_i , le schéma de volumes finis s'écrit de la manière suivante :

$$u_i^{n+1} = \mathcal{H}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n).$$

Dans le cas d'un maillage triangulaire $\operatorname{card}(N_i) = 3$, avec

$$\mathcal{H}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n) = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}).$$

D'après la définition (5.2.1), la fonction du flux numérique est monotone si l'opérateur \mathcal{H} est croissant par rapport à chacune de ces variables u_i^n, u_j^n , avec $j \in N_i$. Or d'après la relation (5.10), l'étape prédicteur s'écrit

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_i^n) - \frac{\gamma_{ij}^n}{2} \operatorname{sgn} (f' (a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}) (u_j^n - u_i^n).$$

Pour montrer la monotonie, nous allons fixer le paramètre γ_{ij}^n à γ , dans ce cas le schéma SRNH s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_i^n) - \frac{\gamma}{2} \operatorname{sgn} (f' (a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}) (u_j^n - u_i^n) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} g (u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}). \end{cases}$$

Proposition 5.2.5 *Soit f une fonction de classe C^1 et monotone, alors sous la condition suivante :*

$$\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i| \psi_i^n (\gamma + 1)}, \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2,$$

avec

$$\psi_i^n = \sup_{j \in N_i} |f' (u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|,$$

le schéma SRNH est monotone.

Preuve

Comme f est monotone, alors $f' (a_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$ et $f' (u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$ ont les mêmes signes, on pose

$$\operatorname{sgn} (f' (u) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}) = s_{ij}.$$

Dans ce cas la phase prédicteur s'écrit de la manière suivante

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} ((1 + \gamma s_{ij}) u_i^n + (1 - \gamma s_{ij}) u_j^n)$$

$$\circ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} (u, u_{\{j \in N_i\}}) = -\frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| (1 - \gamma s_{ij}) s_{ij} |f' (u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|.$$

Pour que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} (u, u_{\{j \in N_i\}}) \geq 0$, il suffit d'avoir $s_{ij} - \gamma \leq 0$.

Comme $\gamma \geq 1$, alors ceci est toujours vérifié.

$$\circ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} (u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}) = 1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (1 + \gamma s_{ij}) |f' (u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| s_{ij}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} (u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}) \geq 0 \quad \iff \quad \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (s_{ij} + \gamma) |f' (u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| \leq 1.$$

Or on a

$$\sum_{j \in N_i} (s_{ij} + \gamma) |f'(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| \leq (\gamma + 1) \sup_{j \in N_i} |f'(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| |\partial C_i|.$$

On pose

$$\sup_{j \in N_i} |f'(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij}| = \psi_i^n,$$

d'où

$$\sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (\gamma + s_{ij}) f'(u_{ij}^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \leq (\gamma + 1) \psi_i^n |\partial C_i|.$$

De la même manière on suppose qu'on peut borner l'étape u_{ij}^n (voir (5.2.4) La matrice signe dans l'étape prédicteur), d'où si $\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i|} \frac{1}{(\gamma + 1) \psi_i^n} \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$,

alors $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} (u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}) \geq 0$.

■

5.2.3 Généralisation du schéma SRNH

On considère l'équation hyperbolique non linéaire scalaire dans l'espace de dimension deux avec condition initiale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} (F(u(x, t))) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (5.11)$$

avec $F = (f_1, f_2)$ une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^2 , de classe C^1 et $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Le schéma de volumes finis SRNH pour le problème (5.11) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} (F(u_j^n) - F(u_i^n)) \cdot \eta_{ij} \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ u_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} u(x, y, 0) dx dy. \end{cases} \quad (5.12)$$

avec

$$S_{ij}^n = |\eta_x| \max \{|f'_1(u_i^n)|, |f'_1(u_j^n)|\} + |\eta_y| \max \{|f'_2(u_i^n)|, |f'_2(u_j^n)|\}$$

g est la fonction du flux numérique donnée par :

$$g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = F(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}$$

où $\eta_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}$ est la normale sortante.

Vérification de certaines hypothèses sur la fonction flux

Le schéma SRNH est conservatif et consistant par construction.

Condition de stabilité

Proposition 5.2.6 *Soit $F = (f_1, f_2)$ une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^2 , de classe C^1 , telle que $\sup_{u \in \mathbb{R}} \{|f'_1(u)|, |f'_2(u)|\} \leq M \in \mathbb{R}^+$. u_0 est une fonction bornée à support compact donnée; on suppose que le paramètre de contrôle α_{ij}^n vérifie la relation*

$$1 \leq \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \left| \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right|,$$

le pas de temps Δt^n , le périmètre et l'aire A_i du volume de contrôle C_i vérifient la relation

$$\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i|} \frac{1}{(1 + \gamma_i^n) \phi_i^n},$$

avec

$$\phi_i^n = \sup_{j \in N_i} \left| \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right| \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{et} \quad \gamma_i^n = \sup_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \geq 1$$

avec \vec{U}_{ij}^n et \vec{V}_{ij}^n sont définis dans la preuve et γ_{ij}^n vérifie la relation suivante

$$\alpha_{ij}^n = \gamma_{ij}^n \frac{S_{ij}^n}{\left| \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right|}, \quad (5.13)$$

alors on a le principe du maximum local :

$$\min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n \leq \min_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^{n+1} \leq \max_{C_i \in \mathcal{T}} u_i^n,$$

pour tout $C_i \in \mathcal{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la condition de stabilité L^∞

$$\|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve

Le schéma de volumes finis SRNH s'écrit sous la forme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij})$$

avec

$$g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = F(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}$$

et

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} (F(u_j^n) - F(u_i^n)) \cdot \eta_{ij}.$$

Or F est de classe C^1 , il s'ensuit qu'il existe a_{ij}^n et $b_{ij}^n \in]u_i^n \perp u_j^n, u_i^n \top u_j^n [$ tel que

$$(F(u_j^n) - F(u_i^n)) \cdot \eta_{ij} = \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n), \quad (5.14)$$

avec $\vec{V}_{ij}^n = \begin{pmatrix} f_1'(a_{ij}^n) \\ f_2'(b_{ij}^n) \end{pmatrix}$, d'où l'étape prédicteur devient

$$\begin{aligned} u_{ij}^n &= \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n) \\ &= u_i^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) (u_j^n - u_i^n). \end{aligned}$$

On pose $\delta_{ij}^n = \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$, dans ce cas l'étape prédicteur devient

$$u_{ij}^n = u_i^n + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) (u_j^n - u_i^n).$$

En effectuant le développement de Taylor Lagrange de $F(u_{ij}^n)$ au voisinage de u_i^n suivant la normale η_{ij} , il existe θ_{ij}^n et $\epsilon_{ij}^n \in]u_i^n \perp u_{ij}^n, u_i^n \top u_{ij}^n [$, tels que

$$\begin{aligned} g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) &= F(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij} \\ &= \left(F(u_i^n) \cdot \eta_{ij} + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n) \right), \end{aligned}$$

avec $\vec{U}_{ij}^n = \begin{pmatrix} f_1'(\theta_{ij}^n) \\ f_2'(\epsilon_{ij}^n) \end{pmatrix}$.

Or on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) &= \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| F(u_i^n) v_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \\ &= F(u_i^n) \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \cdot \eta_{ij} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (1 - \delta_{ij}^n) \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} (u_j^n - u_i^n) \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (\delta_{ij}^n - 1) \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) u_i^n \\ &\quad + \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (\delta_{ij}^n - 1) \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} u_j^n. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^n &= \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| (\delta_{ij}^n - 1) \vec{U}_{ij}^n \\ &= \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| \left(|\delta_{ij}^n| - \operatorname{sgn}(\vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}) \right) \left| \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right|,\end{aligned}$$

on a

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n \right) u_i^n + \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n u_j^n.$$

D'après le lemme (5.2.2) le schéma SRNH vérifie le principe du maximum si

$$\tau_{ij}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in N_i} \tau_{ij}^n \leq 1.$$

$$\tau_{ij}^n \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\delta_{ij}^n| - 1 \geq 0 \quad \text{vrai si} \quad |\delta_{ij}^n| \geq 1,$$

or

$$\delta_{ij}^n \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (i, n, j) \in \mathbb{N}^2 \times N_i \quad \exists \gamma_{ij}^n \geq 1 \quad \text{tel que} \quad \alpha_{ij}^n = \gamma_{ij}^n \frac{S_{ij}^n}{\left| \vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right|}$$

et on a

$$\sum_{j \in N_i} |\tau_{ij}^n| \leq \frac{\Delta t^n |\partial C_i|}{2A_i} (1 + \gamma_i^n) \phi_i^n,$$

avec

$$\sup_{j \in N_i} \left| \vec{U}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right| = \phi_i^n, \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{et} \quad \gamma_i^n = \sup_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n.$$

D'où si $\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i|} \frac{1}{(1 + \gamma_i^n) \phi_i^n}$, on a $\sum_{j \in N_i} |\tau_{ij}^n| \leq 1$. D'où le résultat du principe de maximum.

■

Propriété de monotonie

En utilisant l'opérateur \mathcal{H} sur la cellule C_i , le schéma de volumes finis s'écrit de la manière suivante :

$$u_i^{n+1} = \mathcal{H}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n),$$

avec

$$\mathcal{H}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n) = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u, u_j, S_{ij}^n, \eta_{ij}).$$

D'après la définition (5.2.1), le schéma SRNH est monotone si l'opérateur \mathcal{H} est croissant par rapport à chacune de ses variables $u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n$.

Or d'après la première condition du principe de maximum (5.13), on peut écrire

$$\alpha_{ij}^n = \gamma_{ij}^n \frac{S_{ij}^n}{|\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|} \quad \text{avec} \quad \gamma_{ij}^n \geq 1.$$

En utilisant l'égalité (5.14), l'étape prédicteur devient

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_j^n + u_i^n) - \frac{\gamma_{ij}^n}{2} \operatorname{sgn} \left(\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) (u_j^n - u_i^n).$$

Pour montrer la propriété de la monotonie, nous allons poser $\gamma_{ij}^n = \gamma \forall (i, n, j) \in \mathbb{N}^2 \times N_i$

Proposition 5.2.7 *Soit $F = (f_1, f_2)$ une fonction de classe C^1 , avec f_1 et f_2 deux fonctions monotones, alors sous la condition suivante :*

$$\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i| (\gamma + 1) \psi_i^n} \quad \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$$

avec

$$\psi_i^n = \sup_{j \in N_i} |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}| \quad \text{et} \quad \gamma \geq 1$$

le schéma SRNH est monotone.

Preuve

Comme les deux fonctions f_1 et f_2 sont monotones et la dérivée de F est calculée suivant la même direction η_{ij} , alors $\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}$ et $F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}$ ont les mêmes signes.

On pose $\operatorname{sgn} \left(\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij} \right) = s_{ij}$, alors

$$\begin{aligned} u_{ij}^n &= \frac{1}{2} (u_j^n + u_i^n) - \frac{\gamma s_{ij}}{2} (u_j^n - u_i^n) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + \gamma s_{ij}) u_i^n + (1 - \gamma s_{ij}) u_j^n) \end{aligned}$$

$$\circ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} (u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n) = -\frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (1 - \gamma s_{ij}) s_{ij} |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}|.$$

Pour que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} (u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n) \geq 0$, il suffit d'avoir $s_{ij} - \gamma \leq 0 \iff s_{ij} \leq \gamma$.

Comme $\gamma \geq 1$, ceci est vrai.

$$\circ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n} (u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}^n) = 1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (s_{ij} + \gamma) |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}|.$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}) \geq 0 \quad \iff \quad \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} (s_{ij} + \gamma) |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}| \leq 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} (s_{ij} + \gamma) |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}| &\leq \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (1 + \gamma) |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}| \\ &\leq (1 + \gamma) \sup_{j \in N_i} |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}| |\partial C_i|. \end{aligned}$$

On pose

$$\psi_i^n = \sup_{j \in N_i} |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}|,$$

il s'ensuit que

$$\sum_{j \in N_i} (1 + \gamma) |F'(u_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}| \leq (1 + \gamma) \psi_i^n |\partial C_i|.$$

D'où si $\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i|} \frac{1}{(1 + \gamma) \psi_i^n} \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i^n}(u_i^n, u_{\{j \in N_i\}}) \geq 0$.

■

5.2.4 La matrice signe dans l'étape prédicteur

De manière analogue à l'étude faite dans le cas unidimensionnel, on se propose de borner l'état intermédiaire u_{ij}^n . Pour cela à chaque instant on peut imposer sur u_{ij}^n la condition suffisante qui est la suivante :

$$u_{ij}^n \in [u_i^n \perp u_j^n, u_i^n \top u_j^n].$$

Or

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2} (1 + \delta_{ij}^n) u_i^n + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) u_j^n,$$

une condition suffisante et donc $1 + \delta_{ij}^n \geq 0$ et $1 - \delta_{ij}^n \geq 0$, il s'ensuit que $|\delta_{ij}^n| \leq 1$, ce qui équivaut à dire que $\alpha_{ij}^n \leq \frac{S_{ij}^n}{|\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|}$. Cela avec la première condition de la

stabilité $|\delta_{ij}^n| \geq 1$, on aura $\alpha_{ij}^n = \frac{S_{ij}^n}{|\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|}$.

Finalement on en déduit le schéma SRNHS pour les problèmes bidimensionnels (c'est

le schéma SRNH en faisant intervenir le signe de $F' \cdot \eta_{ij}$ dans la phase prédicteur) qui s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{1}{2 |\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}|} (F(u_j^n) - F(u_i^n)) \cdot \eta_{ij} \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ u_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} u(x, y, 0) dx dy, \end{cases} \quad (5.15)$$

soit

$$\begin{cases} u_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_i^n + u_j^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\vec{V}_{ij}^n \cdot \eta_{ij}) (u_j^n - u_i^n) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(u_i^n, u_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ u_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} u(x, y, 0) dx dy. \end{cases} \quad (5.16)$$

5.2.5 Résultat Numérique

On considère le problème linéaire (5.17) avec condition initiale, ce problème est testé par Hubbard [Hub99] sur différents schémas de volumes finis, avec limiteurs de pente, sur un maillage non structuré :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, (x, y) \in \mathcal{D}, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \cos^2 [2\pi ((x - 0.5)^2 + (y - 0.25)^2)], \end{cases} \quad (5.17)$$

avec $\mathcal{D} = [0, 2] \times [0, 1]$.

Pour réaliser la coupe 1D suivant une ligne y_j , on détermine l'ensemble des triangles traversés par cette ligne, et on trace la courbe dont l'abscisse est formée par la coordonnée x du centre de gravité, et l'ordonnée par la valeur de la quantité physique dans le triangle considéré.

$Hmax$ utilisé dans le calcul d'erreur est donné par $Hmax = \max_i \left(\max_{j \in N_i} |e_{ij}| \right)$.

Les résultats numériques fournis par le schéma SRNHS sont les suivants :

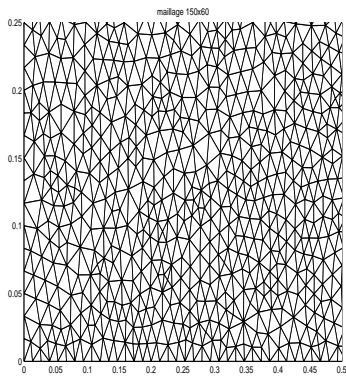


FIG. 5.1 – Zoom du maillage utilisé 150x60

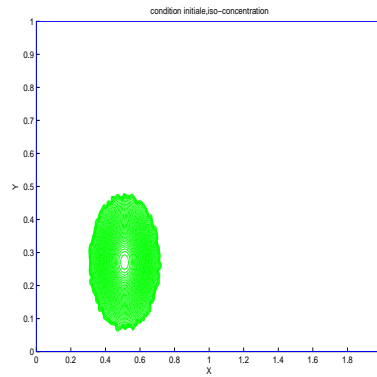


FIG. 5.2 – La condition initiale

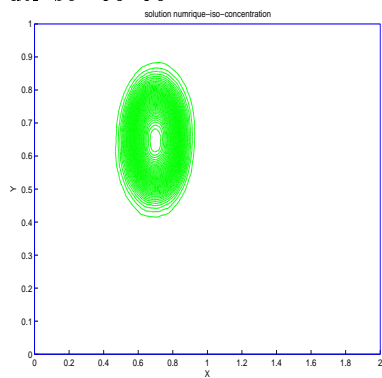


FIG. 5.3 – Solution numérique à $t=0.2$, $cfl=1$, $\Delta t = 0.00047$, maillage 150x60

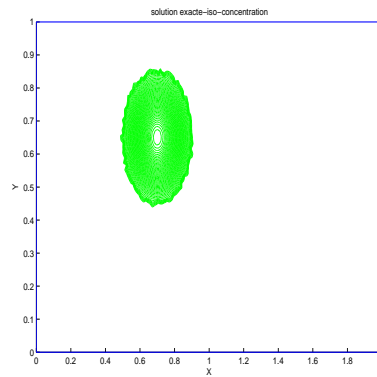


FIG. 5.4 – Solution exacte à $t=0.2$, maillage 150x60

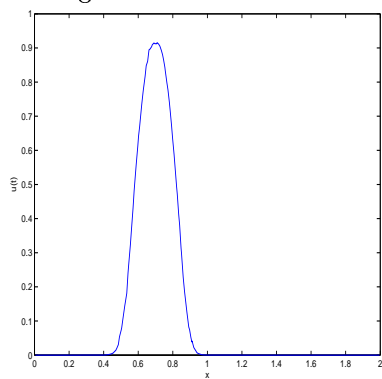


FIG. 5.5 – Coupe 1D de la solution numérique

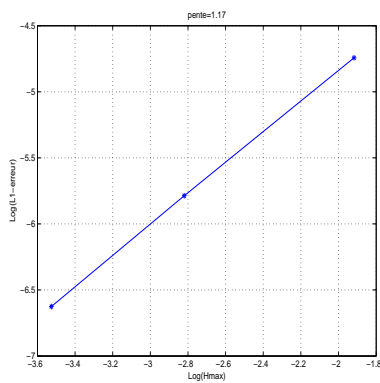


FIG. 5.6 – Courbe d'erreur associée, pente ≈ 1.17

5.3 Analyse des schémas aux volumes finis dans le cas d'un système

Dans cette partie nous déterminons les conditions de stabilité pour le schéma de Rusanov et celui du schéma SRNH pour un système non linéaire hyperbolique en dimension deux d'espace.

On considère le système hyperbolique non linéaire dans l'espace de dimension deux avec condition initiale suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(F(W)) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ W(x, 0) = W_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (5.18)$$

avec $F(W) = (F_1(W), F_2(W))$ où F_1 et F_2 sont deux fonctions de \mathbb{R}^m vers \mathbb{R}^m , $m \geq 1$ de classe C^1 et $W : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$. Le schéma de volumes finis pour le problème (5.18) s'écrit de la manière suivante

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij})$$

où $g(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij})$ est la fonction du flux numérique donnée par

$$g(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij}) = \frac{1}{|e_{ij}|} \int_{e_{ij}} F(W) \cdot \eta_{ij} d\sigma.$$

qui a une approximation dépendante du schéma aux volumes finis considéré.

5.3.1 Schéma de Rusanov

La fonction du flux numérique du schéma de Rusanov est donnée par

$$g(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij}) = \frac{1}{2} (F(W_i^n) \cdot \eta_{ij} + F(W_j^n) \cdot \eta_{ij}) - \frac{1}{2} S_{ij}^n (W_j^n - W_i^n), \quad (5.19)$$

avec S_{ij}^n est la vitesse de Rusanov locale de part et d'autre de chaque arête de la cellule C_i donnée par

$$S_{ij}^n = \max \left(\max_{1 \leq p \leq m} |[\lambda_i^n]_p|, \max_{1 \leq p \leq m} |[\lambda_j^n]_p| \right),$$

où $[\lambda_i^n]_p$ et $[\lambda_j^n]_p$ sont les p -ième valeurs propres de la jacobienne $\nabla F(W_i^n) \cdot \eta_{ij}$ respectivement $\nabla F(W_j^n) \cdot \eta_{ij}$ et $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ est le pas de temps et A_i est l'aire du volume de contrôle C_i .

On vérifie facilement que la fonction du flux numérique est consistante et conservative.

Proposition 5.3.1 *Soit $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 , et W_0 une fonction dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ donnée. On suppose de plus que le pas de temps Δt^n , le périmètre $|\partial C_i|$ et l'aire A_i de la cellule C_i vérifient la relation*

$$\Delta t^n \leq \frac{A_i}{|\partial C_i| S_i^n}, \quad \forall i, n \in \mathbb{N},$$

où $S_i^n = \sup_{j \in N_i} S_{ij}^n$ est la vitesse de Rusanov.

On a, alors la condition de stabilité L^∞

$$\|W^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|W_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$$

La norme L^∞ pour un vecteur $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{R}^m$ est donnée par

$$\|X\|_{L^\infty} = \sup_{1 \leq r \leq m} |X_r|.$$

Preuve

Puisque $\sum_{j \in N_i} |e_{ij}| F(W_i^n) \cdot \eta_{ij} = 0$, alors on peut écrire le schéma de volumes finis

(5.19) de la façon suivante

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (g(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij}) - F(W_i^n) \cdot \eta_{ij}) \\ &= W_i^n - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| [(F(W_j^n) - F(W_i^n)) \cdot \eta_{ij} - S_{ij}^n (W_j^n - W_i^n)]. \end{aligned}$$

On construit la matrice linéaire de Roe quand elle existe $\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij})$ entre les états W_i^n et W_j^n suivant la direction η_{ij} . Cette matrice vérifie nécessairement les trois propriétés suivantes [Roe81] :

(i) $\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_i^n; \eta_{ij}) = \mathcal{A}(W_i^n; \eta_{ij})$

(ii) $\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij}) (W_j^n - W_i^n) = (F(W_j^n) - F(W_i^n)) \cdot \eta_{ij}$

(iii) $\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij})$ est diagonalisable dans une base orthonormée formée par les vecteurs propres $[\mathcal{R}_{ij}^n]_p$ pour $p = 1, \dots, m$ associée aux valeurs propres $[\lambda_{ij}^n]_p$ pour $p = 1, \dots, m$.

Le schéma de Rusanov s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left[\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij}) (W_j^n - W_i^n) - S_{ij}^n (W_j^n - W_i^n) \right] \\ &= \left[I^m - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij}) + S_{ij}^n I^m \right) \right] W_i^n \\ &+ \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij}) + S_{ij}^n I^m \right) W_j^n, \end{aligned} \tag{5.20}$$

où I^m est la matrice identité de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Ensuite on décompose les états W_i^n , W_j^n et W_i^{n+1} dans la base orthonormée $\left([\mathcal{R}_{ij}^n]_p\right)_{1 \leq p \leq m}$, on aura

$$W_i^{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} [\alpha_i^{n+1}]_p [\mathcal{R}_{ij}^n]_p, \quad W_i^n = \sum_{p=1}^{p=m} [\alpha_i^n]_p [\mathcal{R}_{ij}^n]_p, \quad \text{et} \quad W_j^n = \sum_{p=1}^{p=m} [\alpha_j^n]_p [\mathcal{R}_{ij}^n]_p,$$

d'où le schéma (5.20) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=m} \left[[\alpha_i^{n+1}]_p - \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) \right) [\alpha_i^n]_p \right] [\mathcal{R}_{ij}^n]_p \\ & - \sum_{p=1}^{p=m} \left[\frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) [\alpha_j^n]_p \right] [\mathcal{R}_{ij}^n]_p = 0. \end{aligned}$$

Puisque les $[\mathcal{R}_{ij}^n]_p$ sont indépendant pour $p = 1, \dots, m$, alors

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=m} \left[[\alpha_i^{n+1}]_p - \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) \right) [\alpha_i^n]_p \right] [\mathcal{R}_{ij}^n]_p \\ & - \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) [\alpha_j^n]_p [\mathcal{R}_{ij}^n]_p = 0 \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} & [\alpha_i^{n+1}]_p - \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) \right) [\alpha_i^n]_p \\ & - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) [\alpha_j^n]_p = 0, \end{aligned}$$

pour $p = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} \iff [\alpha_i^{n+1}]_p &= \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) \right) [\alpha_i^n]_p \\ &+ \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) [\alpha_j^n]_p, \end{aligned}$$

pour $p = 1, \dots, m$.

On pose $[\gamma_{ij}^n]_p = \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right)$ pour $p = 1, \dots, m$.

On remarque que $[\gamma_{ij}^n]_p \geq 0$ pour $p = 1, \dots, m$

Enfin pour conclure la condition de stabilité L^∞ , il suffit de trouver la condition pour que $\sum_{j \in N_i} [\gamma_{ij}^n]_p \leq 1$ pour $p = 1, \dots, m$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} [\gamma_{ij}^n]_p &= \sum_{j \in N_i} \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| \left(-[\lambda_{ij}^n]_p + S_{ij}^n \right) \\ &\leq \frac{\Delta t^n}{A_i} S_i^n \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \\ &\leq \frac{\Delta t^n}{A_i} S_i^n |\partial C_i|, \end{aligned}$$

où $S_i^n = \max_{j \in N_i} S_{ij}^n$.

D'où si $\Delta t^n \leq \frac{A_i}{S_i^n |\partial C_i|} \forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$, on a $\sum_{j \in N_i} [\gamma_{ij}^n]_p \leq 1$, pour $p = 1, \dots, m$, d'où la condition de stabilité L^∞ .

■

5.3.2 Analyse du schéma SRNH 2D

Cas de systèmes linéaires

On considère le système hyperbolique linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \\ W(x, y, 0) = W_0(x, y), \end{cases} \quad (5.21)$$

avec A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Le système considéré est supposé hyperbolique, il s'ensuit que la Jacobienne

$$\mathcal{J}(\eta_{ij}) = A \cdot (\eta_{ij})_x + B \cdot (\eta_{ij})_y$$

est diagonalisable sur \mathbb{R} , et admet m valeurs propres $\left([\lambda_{ij}]_p\right)_{1 \leq p \leq m}$ associées aux vecteurs propres $\left([\mathcal{R}_{ij}]_p\right)_{1 \leq p \leq m}$.

Le schéma de volumes finis SRNH s'écrit pour le système (5.21) de la manière

suivante :

$$\begin{cases} W_{ij}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} (A \cdot (\eta_{ij})_x + B \cdot (\eta_{ij})_y) (W_j^n - W_i^n) \\ W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ W_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} W(x, y, 0) dx dy, \end{cases} \quad (5.22)$$

avec :

$$g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = \mathcal{J}(\eta_{ij}) \cdot (W_{ij}^n)$$

où η_{ij} est la normale sortante.

S_{ij}^n est la vitesse de Rusanov locale de part et d'autre de chaque arrête de la cellule C_i donnée par

$$S_{ij}^n = \max_{1 \leq p \leq m} \left(\left| [\lambda_{ij}]_p \right| \right)$$

Proposition 5.3.2 Soit W_0 une fonction dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ donnée ; on suppose que le paramètre de contrôle α_{ij}^n vérifie la relation

$$\min_{j \in N_i} \{ \alpha_{ij}^n \} \geq \max_{j \in N_i} \left\{ \frac{S_{ij}^n}{[\lambda_{ij}]_p} \right\}.$$

Le pas de temps Δt^n , le périmètre $|\partial C_i|$ et l'aire A_i du volume de contrôle C_i vérifient

$$\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i| \max_{j \in N_i} \left\{ \left| [\lambda_{ij}]_p \right| (1 + |\delta_{ij}^n|) \right\}}$$

avec $\delta_{ij}^n = \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} [\lambda_{ij}]_p$, alors le schéma de volumes finis SRNH (5.24) appliqué pour le système (5.21) vérifie la condition de stabilité L^∞ suivante

$$\|W^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|W_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve

On décompose les états W_i^n , W_j^n , W_{ij}^n et W_i^{n+1} dans la base formée par les vecteurs propres de $\mathcal{J}(\eta_{ij})$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W_i^n &= \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_i^n]_p [\mathcal{R}_{ij}]_p, & W_j^n &= \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_j^n]_p [\mathcal{R}_{ij}]_p, & W_{ij}^n &= \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_{ij}^n]_p [\mathcal{R}_{ij}]_p \\ \text{et} & & W_i^{n+1} &= \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_i^{n+1}]_p [\mathcal{R}_{ij}]_p \end{aligned}$$

l'étape prédicteur du schéma SRNH (5.24) donne, pour $p = 1, \dots, m$

$$[\xi_{ij}^n]_p = \frac{1}{2} \left([\xi_i^n]_p + [\xi_j^n]_p \right) - \frac{\alpha_{ij}^n}{2S_{ij}^n} [\lambda_{ij}]_p \left([\xi_j^n]_p - [\xi_i^n]_p \right). \quad (5.23)$$

On pose $\delta_{ij}^n = \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \lambda_{ij}$, (5.23) devient

$$[\xi_{ij}^n]_p = \frac{1}{2} (1 + \delta_{ij}^n) [\xi_i^n]_p + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) [\xi_j^n]_p.$$

Comme $\sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \mathcal{J}(\eta_{ij}) W_i^n = 0$, alors la projection de l'étape correcteur du schéma SRNH (5.24) dans la base formée par les vecteurs propres s'écrit :

$$\begin{aligned} [\xi_i^{n+1}]_p &= [\xi_i^n]_p - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| [\lambda_{ij}]_p \left([\xi_{ij}^n]_p - [\xi_i^n]_p \right) \\ &= [\xi_i^n]_p - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| [\lambda_{ij}]_p \left(\frac{1}{2} (1 + \delta_{ij}^n) [\xi_i^n]_p + \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}^n) [\xi_j^n]_p - [\xi_i^n]_p \right) \\ &= \left(1 - \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \right) [\xi_i^n]_p + \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n [\xi_j^n]_p, \end{aligned}$$

avec $\gamma_{ij}^n = \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| [\lambda_{ij}]_p (-1 + \delta_{ij}^n)$.

D'après le lemme (5.2.2) pour montrer la condition de stabilité L^∞ , il suffit de montrer que $\gamma_{ij}^n \geq 0$ et $\sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \leq 1$.

$$\gamma_{ij}^n \geq 0 \iff [\lambda_{ij}]_p (-1 + \delta_{ij}^n) \geq 0 \iff -s_{ij} + |\delta_{ij}^n| \geq 0 \text{ vrai si } |\delta_{ij}^n| \geq 1,$$

avec $s_{ij} = \text{sgn}([\lambda_{ij}]_p)$.

Maintenant nous allons déterminer la condition pour laquelle $\sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \leq 1$.

On a

$$\sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \leq \frac{\Delta t^n}{2A_i} |\partial C_i| \max_{j \in N_i} \left\{ |[\lambda_{ij}]_p| (s_{ij} + |\delta_{ij}^n|) \right\},$$

d'où sous la condition de stabilité

$$\Delta t \leq \frac{2A_i}{|\partial C_i| \max_{j \in N_i} \left\{ |[\lambda_{ij}]_p| (s_{ij} + |\delta_{ij}^n|) \right\}}$$

le schéma SRNH vérifie la condition de stabilité L^∞ .

■

Cas de systèmes non linéaires

Le schéma de volumes finis SRNH pour le problème (5.18) s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} W_{ij}^n = \frac{1}{2} \left((W_i^n + W_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} (F(W_j^n) - F(W_i^n)) \cdot \eta_{ij} \right) \\ W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ W_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} W(x, y, 0) dx dy, \end{cases} \quad (5.24)$$

où g est la fonction du flux numérique du schéma SRNH donnée par :

$$g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) = F(W_{ij}^n) \cdot \eta_{ij} \quad \text{et} \quad S_{ij}^n = \max_{1 \leq p \leq m} \left(\left| \left[\widetilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p \right| \right)$$

où η_{ij} est la normale sortante et $\left[\widetilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p$ sont les valeurs propres de la matrice de Roe [Roe81] définie dans le schéma de Rusanov entre les états W_i^n et W_j^n , suivant la direction η_{ij} .

La fonction du flux numérique du schéma SRNH est consistante et conservative.

Proposition 5.3.3 Soient $F = (F_1, F_2)$ une fonction de \mathbb{R}^m vers \mathbb{R}^2 , de classe C^1 et W_0 une fonction dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ donnée ; on suppose que le paramètre de contrôle α_{ij}^n vérifie la relation

$$\min_{j \in N_i} \{ \alpha_{ij}^n \} \geq \max_{j \in N_i} \left\{ \frac{S_{ij}^n}{\left| \left[\widetilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p \right|} \right\}.$$

Le pas de temps Δt^n , le périmètre $|\partial C_i|$ et l'aire A_i du volume de contrôle C_i vérifient

$$\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{S_i^n \left(1 + \sup_{j \in N_i} \left(\left| \left[\delta_{ij}^n \right]_p \right| \right) \right) |\partial C_i|},$$

avec $\left[\delta_{ij}^n \right]_p = \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \left[\widetilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p$ et $S_i^n = \max_{j \in N_i} S_{ij}^n$, alors on a la condition de stabilité L^∞

$$\|W^n\|_{L^\infty} \leq \|W_0\|_{L^\infty}.$$

Preuve

On a

$$W_{ij}^n = \frac{1}{2} \left((W_i^n + W_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} (F(W_j^n) - F(W_i^n)) \cdot \eta_{ij} \right).$$

On introduit la matrice de Roe[Roe81] définie dans le schéma de Rusanov entre les états W_i^n et W_j^n , suivant la direction η_{ij} , on aura

$$W_{ij}^n = \frac{1}{2} \left((W_i^n + W_j^n) - \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij}) (W_j^n - W_i^n) \right).$$

Comme le système (5.18) est hyperbolique, alors $\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij})$ est diagonalisable sur \mathbb{R} et admet m vecteurs propres $\left(\left[\tilde{\mathcal{R}}_{ij}^n \right]_p \right)_{p=1, \dots, m}$ associées aux valeurs propres $\left(\left[\tilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p \right)_{p=1, \dots, m}$, ensuite on décompose les états W_i^n et W_j^n dans la base des vecteurs propres $\left(\left[\tilde{\mathcal{R}}_{ij}^n \right]_p \right)_{1 \leq p \leq m}$, on aura

$$W_i^n = \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_i^n]_p \left[\tilde{\mathcal{R}}_{ij}^n \right]_p, \quad W_j^n = \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_j^n]_p \left[\tilde{\mathcal{R}}_{ij}^n \right]_p, \quad W_{ij}^n = \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_{ij}^n]_p \left[\mathcal{R}_{ij}^n \right]_p, \quad (5.25)$$

$$\text{et} \quad W_i^{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} [\xi_i^{n+1}]_p \left[\tilde{\mathcal{R}}_{ij}^n \right]_p.$$

On pose $[\delta_{ij}^n]_p = \frac{\alpha_{ij}^n}{S_{ij}^n} \left[\tilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p$, on aura

$$\xi_{ij}^n = \frac{1}{2} \left(1 + [\delta_{ij}^n]_p \right) [\xi_i^n]_p + \frac{1}{2} \left(1 - [\delta_{ij}^n]_p \right) [\xi_j^n]_p. \quad (5.26)$$

Or $\sum_{j \in N_i} |e_{ij}| F(W_i^n) \cdot \eta_{ij} = 0$, il s'ensuit que

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| (F(W_{ij}^n) - F(W_i^n)) \cdot \eta_{ij}.$$

On utilise la même procédure, c'est-à-dire on construit la matrice linéaire de Roe $\check{\mathcal{A}}(W_{ij}^n, W_i^n; \eta_{ij})$ entre les états W_{ij}^n et W_i^n suivant la direction η_{ij} .

Nous admettons alors une hypothèse forte, que nous ne justifions pas, que les deux matrices $\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij})$ et $\check{\mathcal{A}}(W_{ij}^n, W_i^n; \eta_{ij})$ ont même base de vecteurs propre. On

note $\left(\left[\check{\lambda}_{ij}^n \right]_p \right)_{p=1, \dots, m}$ les valeurs propres de $\check{\mathcal{A}}(W_{ij}^n, W_i^n; \eta_{ij})$, et on suppose de

plus que pour chaque p les valeurs propres $\left[\check{\lambda}_{ij}^n \right]_p$ et $\left[\tilde{\lambda}_{ij}^n \right]_p$ ont les mêmes signes s_{ij}^n .

Dans ce cas la projection de l'étape correcteur sur les vecteurs propres donne

$$[\xi_i^{n+1}]_p = \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left[\check{\lambda}_{ij}^n \right]_p \left(-1 + [\delta_{ij}^n]_p \right) \right) [\xi_i^n]_p$$

$$+ \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left[\lambda_{ij}^n \right]_p \left(-1 + [\delta_{ij}^n]_p \right) [\xi_j^n]_p.$$

On pose $[\gamma_{ij}^n]_p = \frac{\Delta t^n}{2A_i} |e_{ij}| \left| \left[\lambda_{ij}^n \right]_p \right| \left(-s_{ij}^n + \left| [\delta_{ij}^n]_p \right| \right)$ pour $p = 1, \dots, m$.

Pour montrer la condition de stabilité L^∞ , il suffit de montrer

$$[\gamma_{ij}^n]_p \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in N_i} [\gamma_{ij}^n]_p \leq 1 \quad \text{pour} \quad p = 1, \dots, m.$$

$$[\gamma_{ij}^n]_p \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left| [\delta_{ij}^n]_p \right| \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_{ij}^n \geq \frac{S_{ij}^n}{\left| [\lambda_{ij}^n]_p \right|}.$$

Maintenant on va déterminer la condition pour laquelle $\sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n \leq 1$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} \gamma_{ij}^n &= \frac{\Delta t^n}{2A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| \left[\lambda_{ij}^n \right]_p \left(-1 + [\delta_{ij}^n]_p \right) \\ &\leq \frac{\Delta t^n}{2A_i} S_i^n \left(s_{ij}^n + \sup_{j \in N_i} \left(\left| [\delta_{ij}^n]_p \right| \right) \right) |\partial C_i|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $\Delta t^n \leq \frac{2A_i}{S_i^n \left(1 + \sup_{j \in N_i} \left| [\delta_{ij}^n]_p \right| \right) |\partial C_i|}$, le schéma est L^∞ stable.

En combinant l'analyse faite pour les systèmes unidimensionnels et l'analyse scalaire bidimensionnels on peut écrire à nouveau le schéma SRNHS sous la forme :

$$\begin{cases} W_{ij}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_j^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n; \eta_{ij}) \right) (W_j^n - W_i^n) \\ W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| g(W_i^n, W_j^n, S_{ij}^n, \eta_{ij}) \\ W_i^0 = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} W(x, y, 0) dx dy. \end{cases} \quad (5.27)$$

Remarque 1

Pour les systèmes hyperboliques homogènes le schéma SRNHS ce coïncide avec le schéma VFRoe [BGH00].

Remarque 2

Dans la pratique on constate qu'on peut remplacer la matrice de Roe par la jacobienne calculée à l'état intermédiaire [GKLC96]

$$\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij}) = \tilde{\mathcal{A}} \left(\frac{W_i^n + W_j^n}{2}, \eta_{ij} \right).$$

5.4 Résultats Numériques

Nous allons tester ce schéma sur le problème d'Euler bidimensionnel et le problème de Saint-Venant avec fond plat bidimensionnel dans le cadre des problèmes homogènes.

5.4.1 Les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant représentent l'écoulement à surface libre en eau peu profonde, soumis à la gravité (dans la direction verticale).

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0 \\ W(x, y, 0) = W_0(x, y), \end{cases}$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$$

W représente le vecteur des variables conservatives, h est la hauteur de l'eau, u et v sont respectivement les vitesses d'écoulement du fluide dans les directions horizontale et verticale, g est l'accélération de pesanteur.

La jacobienne du flux physique s'écrit $\mathcal{A}(W; \eta) = \mathcal{A}_1(W)\eta_x + \mathcal{A}_2(W)\eta_y$ avec $\mathcal{A}_1(W)$ et $\mathcal{A}_2(W)$ sont les matrices jacobiennes des fonctions du flux physique, et elles sont données par

$$\mathcal{A}_1(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne suivant la direction $\eta = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}$, est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(W, \eta) &= \mathcal{A}_1(W)\eta_x + \mathcal{A}_2(W)\eta_y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \eta_x & \eta_y \\ (c^2 - u^2)\eta_x - uv\eta_y & 2u\eta_x + v\eta_y & u\eta_y \\ -uv\eta_x + (c^2 - v^2)\eta_y & v\eta_x & u\eta_x + 2v\eta_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $c = \sqrt{gh}$ est la célérité du son dans le vide.

Ce système est hyperbolique. Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction flux sont données par :

$$\lambda_1(W, \eta) = \vec{V} \cdot \eta - c, \quad \lambda_2(W, \eta) = \vec{V} \cdot \eta, \quad \lambda_3(W, \eta) = \vec{V} \cdot \eta + c,$$

où $\vec{V} \cdot \eta = u \cdot \eta_x + v \cdot \eta_y$.

Les vecteurs propres correspondants sont :

$$r_1(W, \eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c\eta_x \\ v - c\eta_y \end{pmatrix}, r_2(W, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta_y \\ \eta_x \end{pmatrix} \text{ et } r_3(W, \eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c\eta_x \\ v + c\eta_y \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas on prend les conditions initiales suivantes :

$$(h, u, v)(x < 6, t = 0) = (5, 0, 0), \quad \text{et} \quad (h, u, v)(x > 6, t = 0) = (1, 0, 0).$$

Pour ce cas test on voit que l'ordre de convergence de ce schéma est d'ordre 1.

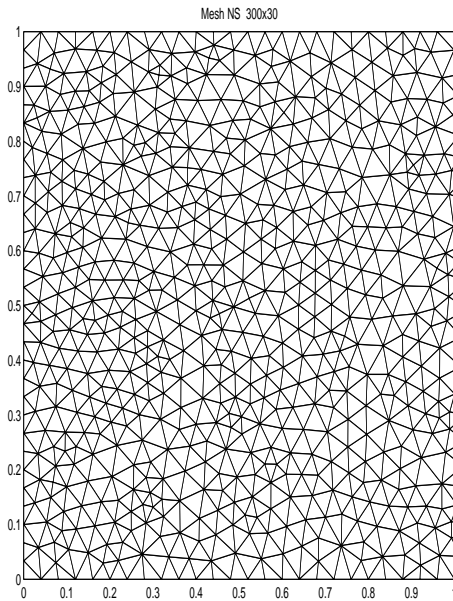


FIG. 5.7 – Zoom du maillage utilisé

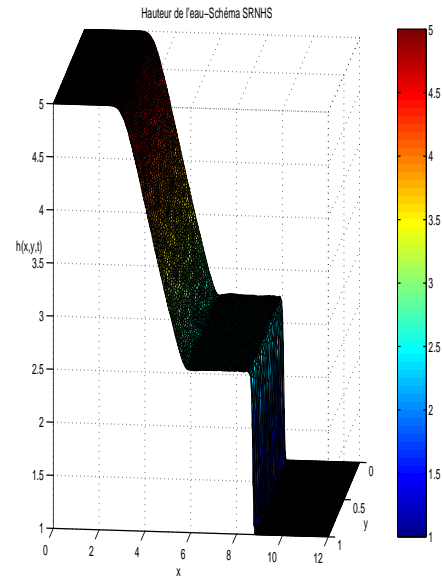


FIG. 5.8 – Courbe de la hauteur vue 3D à $t=0.4$, $cfl=1.$, 1450 itérations, $\Delta t = 0.0002$

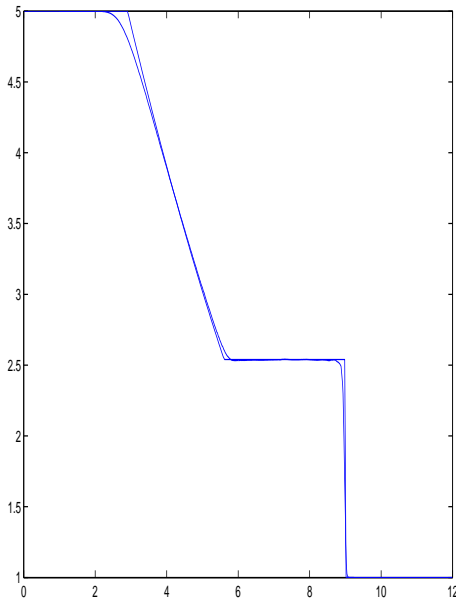


FIG. 5.9 – Courbe de La hauteur à $t=0.4s$ fond plat

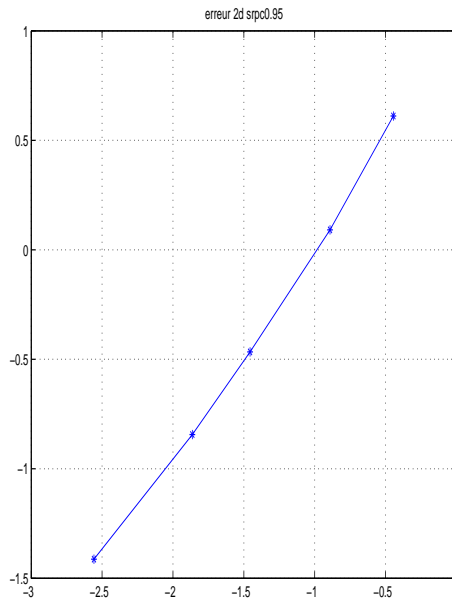


FIG. 5.10 – Courbe d'erreur associée, pente $\simeq 0.95$

5.4.2 Problème d'Euler

Le problème d'Euler bidimensionnel s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0 \\ W(x, y, 0) = W_0(x, y). \end{cases}$$

Avec

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (e + P)u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho uv \\ (e + P)v \end{pmatrix}$$

où ρ est la masse volumique, V est le vecteur champs de la vitesse du fluide de composante u et v , e est l'énergie spécifique totale par unité de volume, P est la pression vérifiant la loi des gaz parfaits.

La relation entre la pression et l'énergie est donnée par

$$P = (\gamma - 1) \left(e - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right),$$

où γ est une constante positive, rapport des chaleurs spécifiques du gaz considéré, T est la température et $R = C_p - C_v$.

La jacobienne est donnée par $\mathcal{A}(W, n) = \nabla F(W)\eta_x + \nabla G(W)\eta_y$, avec

$$\nabla F(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}[(\gamma - 3)u^2 + (\gamma - 1)v^2] & (3 - \gamma)u & (-\gamma + 1)v & (\gamma - 1) \\ -uv & v & u & 0 \\ -u[\frac{c^2}{\gamma-1} + (1 - \frac{\gamma}{2})(u^2 + v^2)] & \frac{c^2}{\gamma-1} - (\gamma - \frac{3}{2})u^2 + \frac{1}{2}v^2 & (1 - \gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla G(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{1}{2}[(\gamma - 3)v^2 + (\gamma - 1)u^2] & (1 - \gamma)u & (3 - \gamma)v & (\gamma - 1) \\ -v[\frac{c^2}{\gamma-1} + (1 - \frac{\gamma}{2})(u^2 + v^2)] & (1 - \gamma)uv & \frac{c^2}{\gamma-1} - (\gamma - \frac{3}{2})v^2 + \frac{1}{2}u^2 & \gamma v \end{pmatrix}$$

avec c est la vitesse locale du son dans le gaz, d'expression égale à

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}.$$

Ce problème est strictement hyperbolique et ses valeurs propres sont :

$$\lambda_1(W, \eta) = V \cdot \eta - c, \quad \lambda_2(W, \eta) = V \quad \text{et} \quad \lambda_3(W, \eta) = V \cdot \eta + c$$

La matrice des vecteurs propres est donnée par

$$\mathcal{R}(W; \eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 1 & 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{u}{c} - \eta_x & u & \eta_y & \frac{u}{c} + \eta_x \\ \frac{v}{c} - \eta_x & v & -\eta_x & \frac{v}{c} + \eta_x \\ \frac{|V|^2}{2c} - v \cdot \eta + \frac{c}{\gamma-1} & \frac{|V|^2}{2} & u \cdot \eta_y - v \cdot \eta_x & \frac{|V|^2}{2c} + v \cdot \eta + \frac{c}{\gamma-1} \end{pmatrix}$$

et son inverse est donnée par

$$\mathcal{R}^{-1}(W; \eta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V \cdot \eta + (\gamma - 1) \frac{|V|^2}{2c} & -(\eta_x + (\gamma - 1) \frac{u}{c}) & -(\eta_y + (\gamma - 1) \frac{v}{c}) & \frac{\gamma-1}{c} \\ 2(1 - (\gamma - 1) \frac{|V|^2}{2c^2}) & (2(\gamma - 1) \frac{u}{c^2}) & 2(\gamma - 1) \frac{v}{c^2} & -2 \frac{\gamma-1}{c^2} \\ 2(\eta_x \cdot v - \eta_y \cdot u) & 2\eta_y & -2\eta_x & 0 \\ -V \cdot \eta + (\gamma - 1) \frac{|V|^2}{2c} & (\eta_x - (\gamma - 1) \frac{u}{c}) & \eta_y - (\gamma - 1) \frac{v}{c} & \frac{\gamma-1}{c} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on prend les conditions initiales comme suit :

$$(\rho, p, u)(x < 6, t = 0) = (12, 10^6, 0), \quad \text{et} \quad (\rho, p, u)(x > 6, t = 0) = (1.2, 10^5, 0)$$

5.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

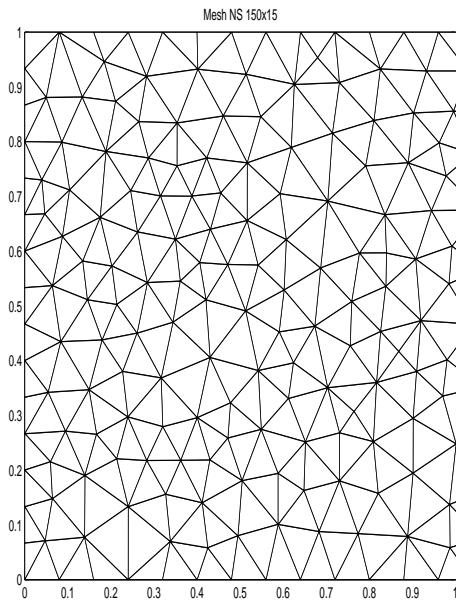


FIG. 5.11 – Zoom du maillage utilisé

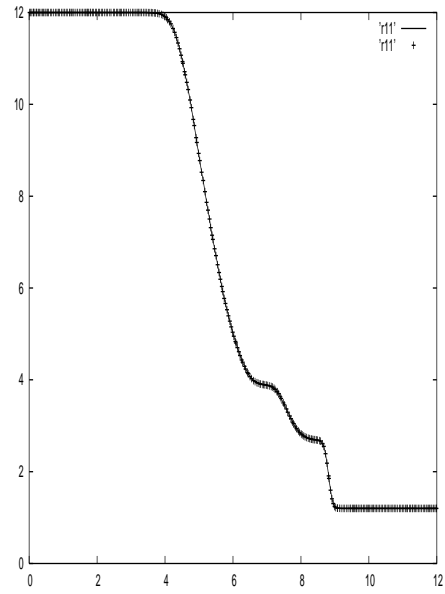


FIG. 5.12 – Courbe de la densité à $t=0.004s$

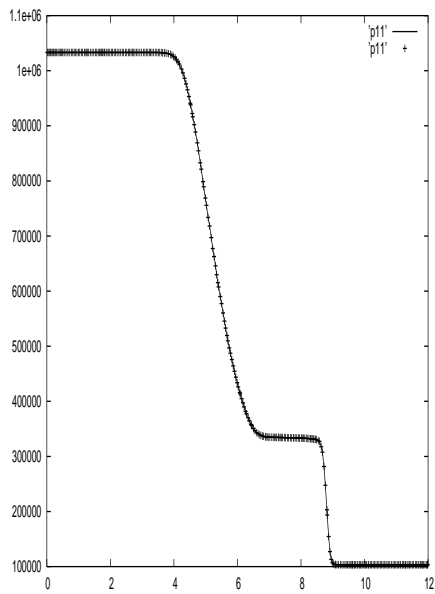


FIG. 5.13 – Courbe de la pression à $t=0.004s$

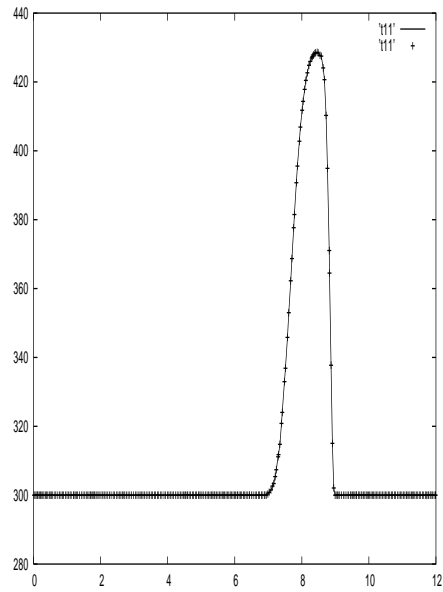


FIG. 5.14 – Courbe de la température à $t=0.004s$

Bibliographie

- [BGH00] T. Buffard, T. Gallouët, and J-M. Hérard, *A sequel to a rough Godunov scheme : application to real gases*, *Comput. & Fluids* **29** (2000), no. 7, 813–847.
- [EGH95a] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Convergence of a finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation*, *Proceedings of the Third International Colloquium on Numerical Analysis (Plovdiv, 1994)* (Utrecht), VSP, 1995, pp. 61–70.
- [EGH95b] ———, *Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation*, *Chinese Ann. Math. Ser. B* **16** (1995), no. 1, 1–14, A Chinese summary appears in *Chinese Ann. Math. Ser. A* **16** (1995), no. 1, 119.
- [EGH00] ———, *Finite volume methods*, *Handbook of numerical analysis*, Vol. VII, *Handb. Numer. Anal.*, VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020.
- [Elm99] I. Elmahi, *Schéma volumes finis pour la simulation numérique de problème à fronts raides en maillages non structurés adaptatifs*, Ph.D. thesis, Université de Rouen, janvier 1999.
- [GKLC96] J-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [GR91] E. Godlewski and P-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, *Mathématiques & Applications (Paris)* [Mathematics and Applications], vol. 3/4, Ellipses, Paris, 1991.
- [GR96] ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Hil98] C. C. Hillairet, *Schéma volumes finis pour des problèmes hyperboliques : convergence et estimations d’erreur*, Ph.D. thesis, Université Paris 6, 1998.

- [Hil99] C. C Hillairet, *Finite volume schemes for a nonlinear hyperbolic equation. Convergence towards the entropy solution and error estimate*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33** (1999), no. 1, 129–156.
- [Hub99] M. E. Hubbard, *Multidimensional slope limiters for MUSCL-type finite volume schemes on unstructured grids*, J. Comput. Phys. **155** (1999), no. 1, 54–74.
- [KNR95] D. Kröner, S. Noelle, and M. Rokyta, *Convergence of higher order upwind finite volume schemes on unstructured grids for scalar conservation laws in several space dimensions*, Numer. Math. **71** (1995), no. 4, 527–560.
- [Kru70] S. N. Krushkov, *First order quasilinear equations with several space variables*, Math. USSR. Sb **10** (1970), 105–119.
- [Kuz76] N. Kuznetsov, *Accuracy of some approximate method for capturing the weak solutions of a first order quasi-linear equation*, Comp. Math and Math. Phys **16** (1976), 105–119.
- [Noe95] S. Noelle, *Convergence of higher order finite volume schemes on irregular grids*, Adv. Comput. Math. **3** (1995), no. 3, 197–218.
- [Noe96] ———, *A note on entropy inequalities and error estimates for higher-order accurate finite volume schemes on irregular families of grids*, Math. Comp. **65** (1996), no. 215, 1155–1163.
- [Roe81] P. L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comput. Phys. **43** (1981), no. 2, 357–372.
- [Smo83] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 258, Springer-Verlag, New York, 1983.

Chapitre 6

Application du schéma SRNHS pour des systèmes non homogènes multidimensionnels

Résumé

Dans ce chapitre nous appliquons le schéma SRNHS obtenu dans le chapitre 5 pour le problème de Saint-Venant bidimensionnel avec topographie irrégulière. Pour l'approximation du terme source dans la phase prédicteur, on effectue la projection du système sur la normale des interfaces e_{ij} . Le passage à l'ordre 2 en espace est effectué en introduisant des limiteurs de pente de type MUSCL, ce qui permet d'avoir des résultats numériques de grande précision comparé à la solution analytique même pour des cas critiques. Pour l'application du schéma SRNHS aux problèmes bifluïdes multidimensionnels on décrit les méthodes permettant de calculer la matrice signe figurant dans l'étape prédicteur du schéma, en utilisant la méthode introduite par I. Toumi et ses collaborateurs [Cor02, CDT98, TKP99, TK96, Tou96] basée sur l'ajout du terme de pression interfaciale et la perturbation par densité. Pour le système bifluïde originel (sans ajout de l'expression interfaciale, on utilise la méthode de F. Alouges [Alo98] basée sur l'algorithme de Newton Schultz pour le calcul d'une matrice signe.

6.1 Introduction

La rupture de barrage peut être à l'origine de plusieurs dégâts matériels, et peut parfois coûter la vie à des êtres humains. La complexité théorique de la résolution des équations de Saint-Venant multidimensionnelles avec terme source (topographie irrégulière, frottement) à incité les chercheurs à développer des méthodes numériques pour la simulation de ces problèmes.

Grâce à une interprétation cinétique du système hyperbolique de lois de conservation

E. Audusse et M.O. Bristeau ont dérivé un solveur homogène stable et qui préserve la positivité de la hauteur, et ainsi ils ont construit un schéma adapté au système de Saint-Venant avec terme source topographique. Alcrudo et Garcia-navarro [AGN91] ont développé un schéma de volumes finis de type, Godunov d'ordre élevé en utilisant la technique MUSCL. Glaister [Gla93] a utilisé la technique de flux splitting, Ambrosi [Amb95] a utilisé un solveur de Roe avec limiteur de pente (MUSCL) pour résoudre le problème de Shallow Water. R. Liska et B. Wendroff [LW99] ont appliqué le schéma de Lax Friedrichs précédé par une phase prédicteur de Lax-Wendroff pour la simulation numérique du système de Saint-Venant avec terme source multidimensionnel sur un maillage trapezoïdale. A l'aide d'un schéma de volumes finis en cellule centré basé sur l'approximation du solveur de Riemann de type Roe sur les interfaces, P. Bufau et P. Garcia-Navarro [bGN00] ont abouti à des résultats encourageants pour le problème de Saint-Venant avec frottement sur des maillages non structurés de type Delaunay. Bermudez [BDDV98] et ses collaborateurs proposent une discrétisation décentré du terme source qui est compatible avec le flux numérique décentrer pour assurer la propriété de conservation et ont pu résoudre le problème de Saint-Venant avec terme source sur un maillage non structuré après l'étude des conditions aux limites.

Pour l'application du schéma SRNHS au problème de Saint-Venant bidimensionnel avec topographie irrégulière sur un maillage triangulaire non structuré, nous effectuons la projection du système (6.1) sur la normale des interfaces, ceci permet de réduire les composantes du terme source et écrire l'étape prédicteur dans une seule direction. Pour la simulation numérique des systèmes bifluides multidimensionnels, on note l'extension du schéma VFFC introduit par Ghidaglia-Kumbaro-Le Coq [GKLC96], par Marc Boucker [Bou98] au problème diphasique tridimensionnel, en utilisant une méthodes simultanée volumes finis-éléments finis proposée par Ghidaglia-Pascal [GP99]. Cela permet de résoudre les problèmes couplés de convection et de diffusion. Pour faire l'extension du schéma de Roe aux problèmes bi-fluides I. Toumi et ses collaborateurs ont ajouté une expression de pression interfaciale pour rendre le système hyperbolique et ils ont introduit la méthode de perturbation par densité [Cor02, CDT98, Cor99, TK96]. En se basant sur cette méthode on a pu trouver un convecteur hyperbolique permettant la détermination de la matrice signe évoquée dans la phase prédicteur du schéma SRNHS. Pour l'application du schéma SRNHS au système bifluide originel, on calcule la matrice signe de l'étape prédicteur par la méthode de F. Alouges basée sur l'algorithme de Newton-Schultz [Alo98].

6.2 Extension du schéma SRNHS au problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière en dimension 2

6.2.1 Description de la méthode

Le problème de Saint-Venant avec terme source bidimensionnel est régi par le système ci-dessous :

$$\begin{cases} h_{,t} + (hu)_{,x} + (hv)_{,y} = 0 \\ (hu)_{,t} + (hu^2)_{,x} + (huv)_{,y} + g \left(\frac{h^2}{2} \right)_{,x} = -gh(Z_f)_{,x} \\ (hv)_{,t} + (huv)_{,x} + (hv^2)_{,y} + g \left(\frac{h^2}{2} \right)_{,y} = -gh(Z_f)_{,y} \end{cases}, \quad (6.1)$$

où h est la hauteur de l'eau, $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$ est la vitesse et ∇Z_f est la pente du fond ($Z_f(x, y)$ et ∇Z_f deux fonctions pouvant être non régulières en général), comme nous montre la figure suivante :

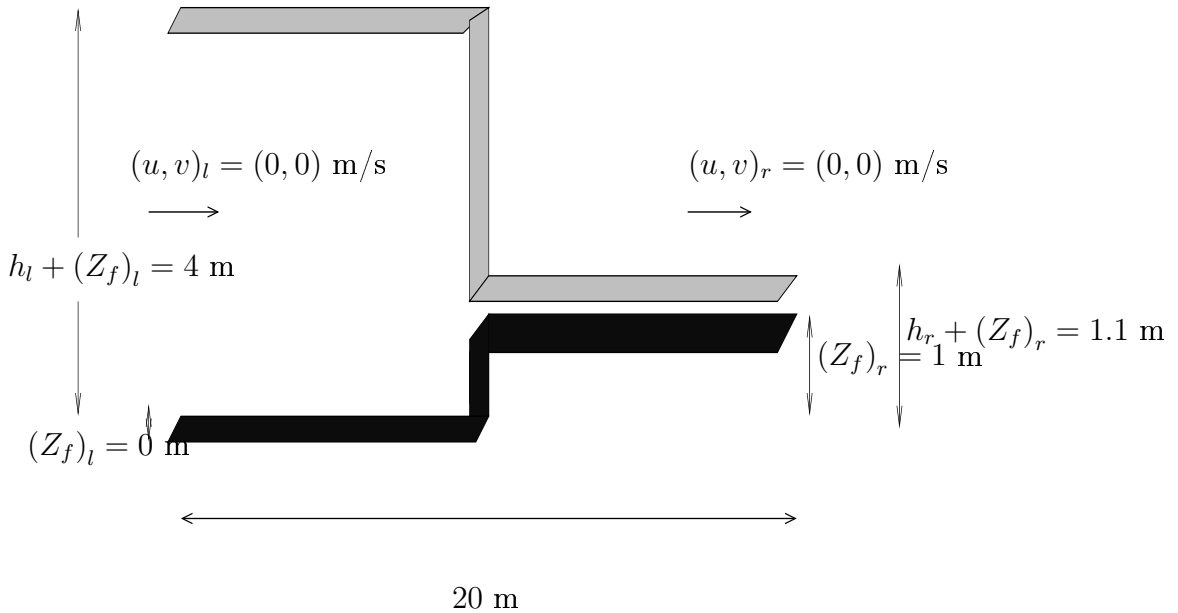


FIG. 6.1 – Fond de la rivière

Où $(.)_l$ sont les valeurs des variables physiques à gauche de la discontinuité et $(.)_r$ sont les valeurs des variables physiques à droite de la discontinuité.

Pour la simulation numérique du problème (6.1), nous allons appliquer le schéma SRNHS défini dans le chapitre 5. Comme dans l'étape prédicteur nous essayons de trouver une approximation de la solution du problème de Riemann aux interfaces, nous reprenons la démarche présentée dans [ANS03, Moh05], et considérons une projection du problème sur la normale d'une interface nous obtenons ainsi le système :

$$\begin{cases} h_t + (hu_\eta)_{,\eta} = 0 \\ (hu_\eta)_t + \left(hu_\eta^2 + g\frac{h^2}{2}\right)_\eta = -gh(Z_f)_{,\eta} \\ (hu_\tau)_{,t} + (hu_\eta u_\tau)_{,\eta} = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

avec $u_\eta = \mathbf{u} \cdot \eta$, $u_\tau = \mathbf{u} \cdot \tau$, η et τ sont respectivement la normale et la tangente à l'interface e_{ij} , et $(\cdot)_{,\eta}$ est la dérivée le long du vecteur normal η .

Dans ce cas l'étape prédicteur U_{ij}^n du schéma SRNHS s'écrit de la manière suivante

$$U_{ij}^n = \frac{1}{2} (U_i^n + U_j^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\nabla F_\eta(\bar{U})) (U_j^n - U_i^n) + \frac{1}{2} \left| \nabla F_\eta(\bar{U})^{-1} \right| Q_{ij}^n \quad (6.3)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu_\eta \\ hu_\tau \end{pmatrix}, \quad F_\eta(U) = \begin{pmatrix} h \\ hu_\eta^2 + g\frac{h^2}{2} \\ hu_\eta u_\tau \end{pmatrix}, \quad Q_{ij}^n = -\frac{g}{2} (h_i + h_j) (Z_{f_j} - Z_{f_i}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

et \bar{U} est l'état de Roe donné par

$$\bar{U} = \frac{1}{2} (h_i + h_j) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{u_i \sqrt{h_i} + u_j \sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \eta_x + \frac{v_i \sqrt{h_i} + v_j \sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \eta_y \\ -\frac{u_i \sqrt{h_i} + u_j \sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \eta_y + \frac{v_i \sqrt{h_i} + v_j \sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \eta_x \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Les valeurs propres sont données par

$$\lambda_1 = u_\eta, \quad \lambda_2 = u_\eta + \sqrt{gh}, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = u_\eta - \sqrt{gh}, \quad (6.6)$$

la matrice des vecteurs propres et la matrice des vecteurs propres inverse sont données par

$$\mathcal{R}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & u_\tau & u_\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^{-1}(U) = \begin{pmatrix} -u_\tau & 0 & 1 \\ \frac{-\lambda_3}{2\sqrt{gh}} & \frac{1}{2\sqrt{gh}} & 0 \\ \frac{\lambda_2}{2\sqrt{gh}} & -\frac{1}{2\sqrt{gh}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\text{sgn}(\nabla F_\eta(\bar{U})) = \mathcal{R}(\bar{U}) \text{sgn}(\Lambda(\bar{U})) \mathcal{R}^{-1}(\bar{U}) \quad \text{et} \quad \left| \nabla F_\eta(\bar{U})^{-1} \right| = \mathcal{R}(\bar{U}) \left| (\Lambda(\bar{U}))^{-1} \right| \mathcal{R}^{-1}(\bar{U}).$$

Enfin on écrit l'étape correcteur de la manière suivante

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{A_i} \sum_{j \in N_i} g(W_i^n, W_j^n, Q_{ij}^n, \eta) + \Delta t Q_i^n, \quad (6.8)$$

avec

$$g(W_i^n, W_j^n, Q_{ij}^n, \eta) = F(W_{ij}^n) \cdot \eta_{ij}, \quad W_{ij}^n = \begin{pmatrix} h_{ij}^n \\ (hu_\eta)_{ij}^n \eta_x - (hu_\tau)_{ij}^n \eta_y \\ (hu_\tau)_{ij}^n \eta_y + (hu_\eta)_{ij}^n \eta_x \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

et

$$Q_i^n = -g \frac{h_i}{A_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j \in N_i} Z_{ij} \cdot (\eta_{ij})_x |e_{ij}| \\ \sum_{j \in N_i} Z_{ij} \cdot (\eta_{ij})_y |e_{ij}| \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad Z_{ij} = \frac{Z_i A_i + Z_j A_j}{A_i + A_j}$$

6.2.2 Extension à l'ordre 2 en espace (MUSCL)

On définit un nouvel espace d'approximation, où l'on approche l'état physique V par une distribution linéaire par morceaux, qui est l'espace des fonctions affines par cellule.

On applique une démarche qui a été utilisée par I. Elmahi [Elm99], cette démarche se décompose en deux étapes : une étape de reconstruction des états gauche et droite, et une étape de limitation des gradients pour éviter les oscillations.

Étape 1 (reconstruction linéaire des états)

Au point X_{ij} de l'arête Γ_{ij} séparant deux volumes de contrôle C_i et C_j , on définit deux valeurs de V , une à gauche V_{ij}^- dans la cellule C_i , et une à droite V_{ij}^+ dans la cellule C_j par :

$$\begin{cases} V_{ij}^- = V_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V_i G_i \vec{G}_j \\ V_{ij}^+ = V_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla} V_j G_i \vec{G}_j. \end{cases} \quad (6.10)$$

G_i et G_j sont respectivement les barycentres des triangles C_i et C_j , $\vec{\nabla} V_i$ et $\vec{\nabla} V_j$ représentent les gradients sur C_i et C_j .

La fonction de flux reste la même, seuls ses arguments changent, et on a :

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F}(V, \vec{n}) d\sigma = \phi(V_{ij}^-, V_{ij}^+, \vec{\eta}_{ij}) \text{mes}(\Gamma_{ij}). \quad (6.11)$$

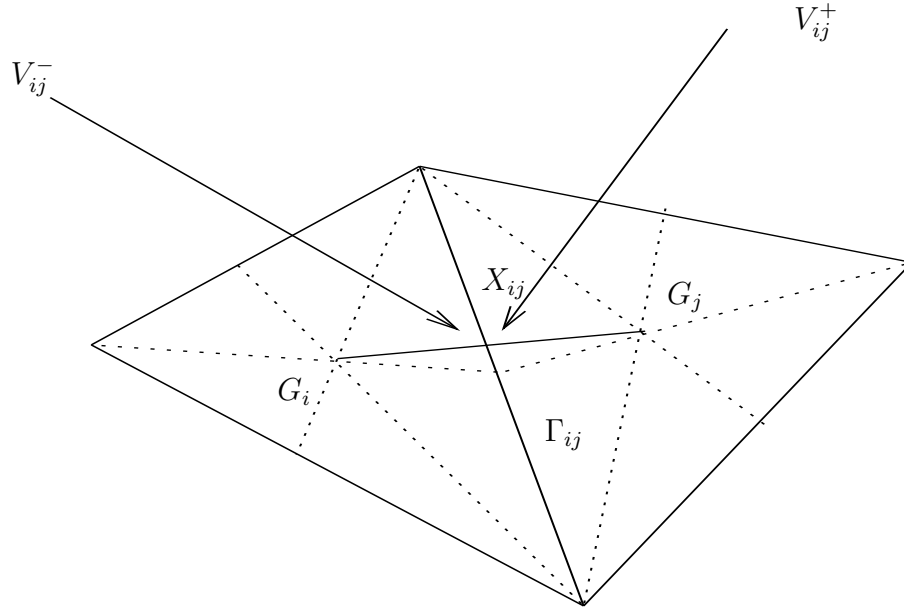


FIG. 6.2 –

Le problème crucial dans cette étape est l'évaluation des gradients de la solution sur chaque volume de contrôle. Ceci peut être effectué de différentes manières, en particulier suivant le type de cellules utilisées. On présente une technique de calcul de gradients dans le cas où on utilise des maillages triangulaires ou quadrangulaires.

Méthode des moindres carrés

Pour un triangle C_i , considérons l'expression

$$\Delta(V_i, V_j) = V_i + (x_j - x_i) \frac{\partial V_i}{\partial x} + (y_j - y_i) \frac{\partial V_i}{\partial y} - V_j$$

où (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont respectivement les coordonnées des centres de gravité de C_i et C_j .

Le terme $\Delta(V_i, V_j)$ représente ici la différence entre la valeur effective de V au centre de la cellule C_j et la valeur obtenue au centre de C_j par développement limité de la fonction V définie au centre de C_i . Le gradient sur la cellule C_i est évalué en minimisant la fonction quadratique :

$$\Psi_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial x}, \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) = \sum_{j \in N(i)} |\Delta(V_i, V_j)|^2$$

où $\frac{\partial V_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_i}{\partial y}$ sont alors solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\frac{\partial \Psi_i(X, Y)}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial \Psi_i(X, Y)}{\partial Y} = 0.$$

Un calcul simple donne

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{J_x I_{yy} - J_y I_{xy}}{D}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{J_y I_{xx} - J_x I_{yx}}{D}$$

avec les notations

$$I_{xx} = \sum_{j \in N(i)} (x_j - x_i)^2 \quad , \quad I_{yy} = \sum_{j \in N(i)} (y_j - y_i)^2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_{j \in N(i)} (x_j - x_i)(y_j - y_i) \quad , \quad D = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2$$

$$J_x = \sum_{j \in N(i)} (x_j - x_i)(V_j - V_i) \quad , \quad J_y = \sum_{j \in N(i)} (y_j - y_i)(W_j - W_i)$$

Étape 2(limitation des pentes).

L'approximation obtenue avec les états évalués dans l'étape 1, peut être dispersive et produire de nouveaux extrema entre les cellules. Pour atténuer ces oscillations, on utilise un schéma de type *TVD* obtenu en utilisant des valeurs limitées $\frac{\partial^{lim} V_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial^{lim} V_i}{\partial y}$ au lieu de $\frac{\partial V_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_i}{\partial y}$, dans (6.10). On présente ici un type de limiteurs qui peut être utilisé dans le cas bidimensionnel pour des maillages non structurés.

Limiteur MinMod généralisé

Sur chaque volume de contrôle C_i , les gradients sont limités de la manière suivante :

$$\frac{\partial^{lim} V_i}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\min_{j \in N(i)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right) + \max_{j \in N(i)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right) \right] \min_{j \in N(i)} \left| \frac{\partial V_j}{\partial x} \right|. \quad (6.12)$$

De même pour $\frac{\partial^{lim} W_i}{\partial y}$. Cette limitation peut être étendue sur l'ensemble $N(i)$ des triangles ayant un sommet commun avec C_i .

6.2.3 Application Numérique

On applique le schéma SRNHS pour les cas critiques testé sur le problème de Saint-Venant avec topographie irrégulière unidimensionnel dans le chapitre 4.

En *2D* le fond est défini de la manière suivante

$$Z(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in [-10, 0] \times [0, 1] \\ 1 & \text{si } (x, y) \in [0, 10] \times [0, 1]. \end{cases}$$

Cas subcritique

Les conditions initiales dans ce cas sont données par

$$\begin{cases} (h_l, u_l, v_l) = (5, 0, 0) & (x, y) \in [0, 6] \times [0, 1] \\ (h_r, u_r, v_r) = (1, 0, 0) & (x, y) \in [6, 0] \times [0, 1] \end{cases}$$

Ce cas est formé par une onde de raréfaction, une discontinuité de contact et un choc. La comparaison de la solution numérique avec la solution théorique montre bien que ce schéma capte bien le choc.

Cas transcritique

Les conditions initiales dans ce cas sont données par

$$\begin{cases} (h_l, u_l, v_l) = (5, -4, 0) & (x, y) \in [-10, 0] \times [0, 1] \\ (h_r, u_r, v_r) = (1, 9, 0) & (x, y) \in [0, 10] \times [0, 1] \end{cases}$$

La comparaison des résultats numériques à $t = 0.7s$ avec les résultats théoriques pour ce problème prouve que le schéma SRNHS a bien capté la phase de transition (voir figures FIG. 6.5, FIG. 6.9 et FIG. 6.13).

Les courbes des isovaleurs sont des droites parfaites ce qui confirme que le problème conserve son caractère 1D (voir figure FIG. 6.6, FIG. 6.10 et FIG. 6.13). Ensuite on prend un cas plus raide dont la hauteur à gauche est 40 fois plus grande que celle à droite, les données initiales dans ce cas sont données par

$$\begin{cases} (h_l, u_l, v_l) = (4, 0, 0) & (x, y) \in [-10, 0] \times [0, 1] \\ (h_r, u_r, v_r) = (0.1, 0, 0) & (x, y) \in [0, 10] \times [0, 1]. \end{cases}$$

On remarque que pour ce cas également le schéma SRNHS calcule bien la phase de transition et a bien capté le choc (voir figure FIG. 6.29, FIG. 6.33 et FIG. 6.37). De plus le passage à l'ordre deux en espace avec la technique MUSCL permet de résoudre le problème de la discontinuité stationnaire, résultant de la double singularité provenant à la fois des conditions initiales des variables physiques et de la discontinuité du fond.

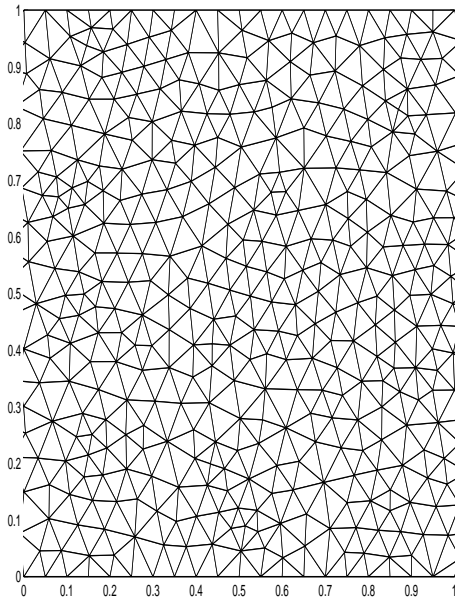


FIG. 6.3 – Zoom du maillage 400x20 utilisé

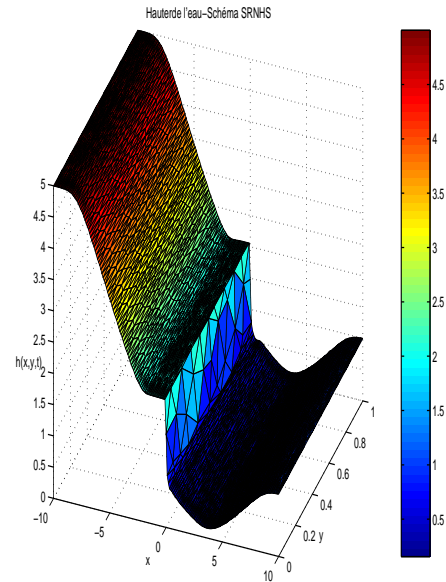


FIG. 6.4 – Courbe de La hauteur vue 3D à $t=0.7$ s fond discontinu,, $\Delta t = 0.0001$, 3860 itérations

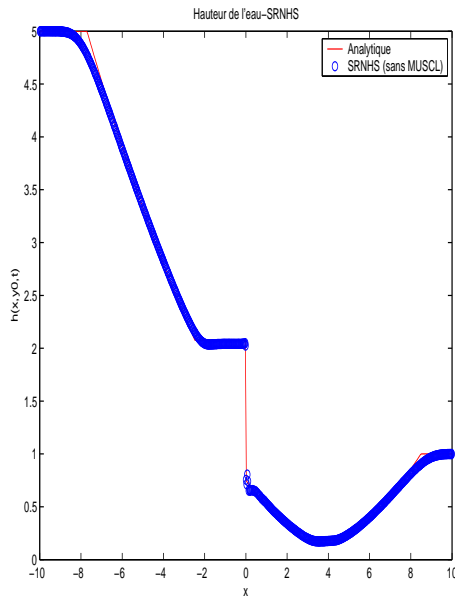


FIG. 6.5 – Courbe de La hauteur coupe 1D à $t=0.7$ s fond discontinu, $\Delta t = 0.0001$, 3860 itérations

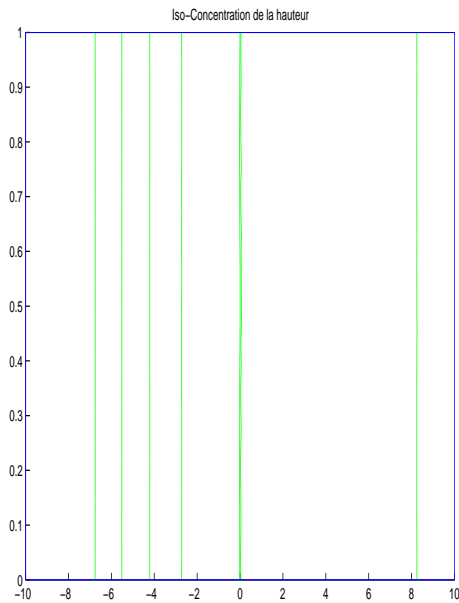


FIG. 6.6 – les isovaleurs de la hauteur

6.2. EXTENSION DU SCHÉMA SRNHS AU PROBLÈME DE SAINT-VENANT AVEC TOPOGRAPHIE IRRÉGULIÈRE EN DIMENSION 2

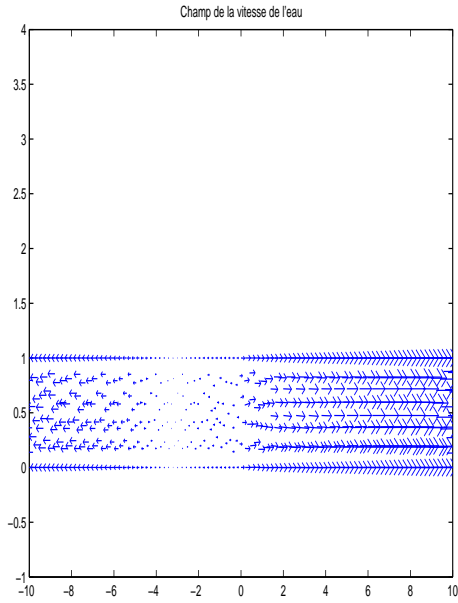


FIG. 6.7 – Champ de la vitesse

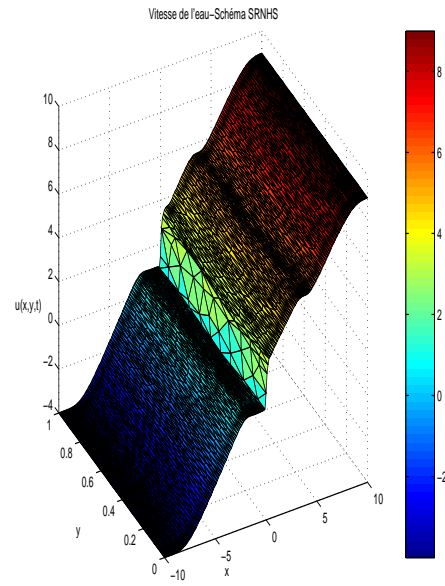


FIG. 6.8 – Courbe de la vitesse vue 3D à $t=0.7s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0001$, 3860 itérations

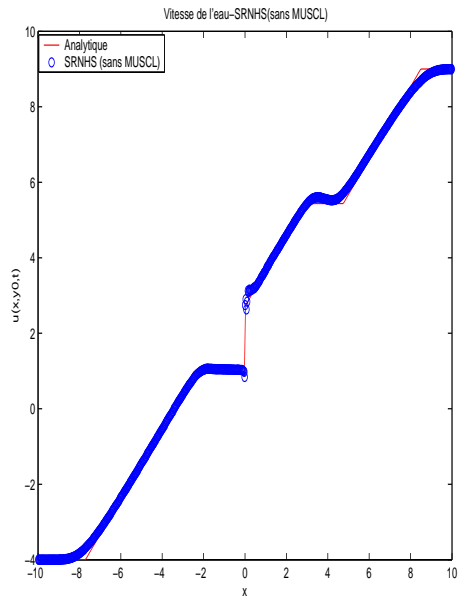


FIG. 6.9 – Courbe de la vitesse coupe 1D à $t=0.7s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0001$, 3860 itérations

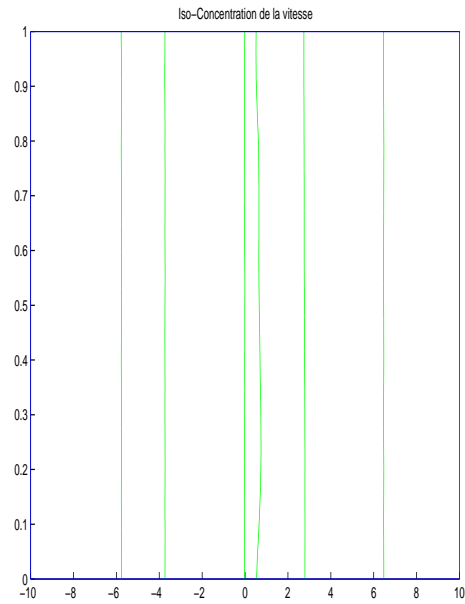


FIG. 6.10 – les isovaleurs de la vitesse

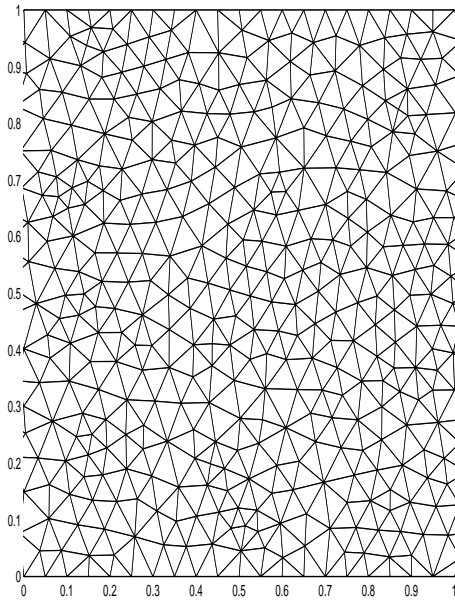


FIG. 6.11 – Zoom du maillage 400x20 utilisé

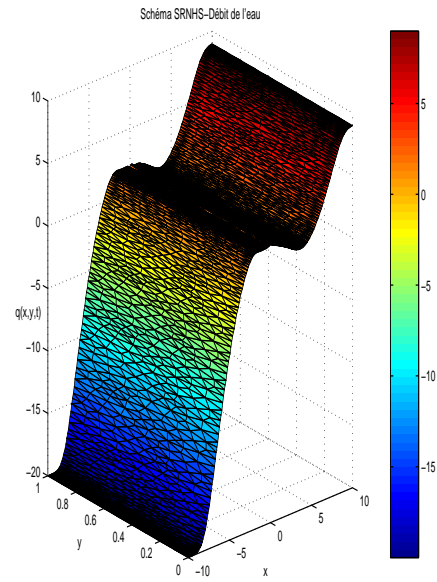


FIG. 6.12 – Courbe de débit vue 3D à $t=0.7s$ fond discontinu,, $\Delta t = 0.0001$, 3860 itérations

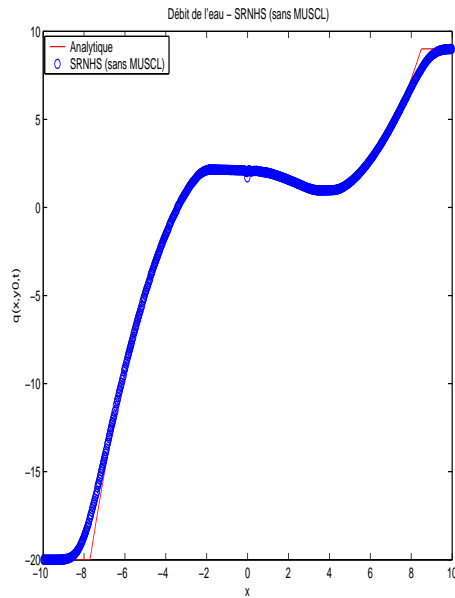


FIG. 6.13 – Courbe du débit coupe 1D à $t=0.7s$ fond discontinu, , $\Delta t = 0.0001$, 3860 itérations

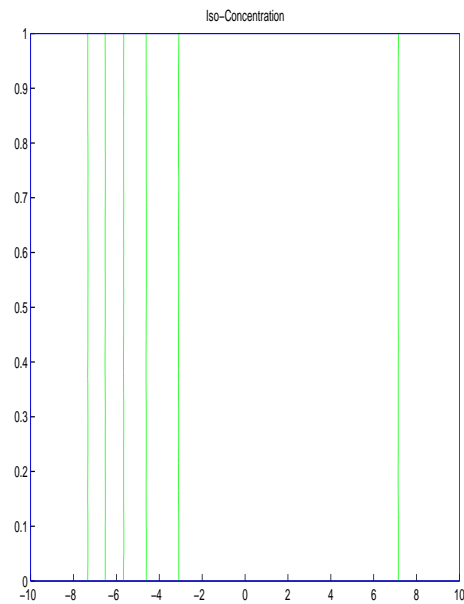


FIG. 6.14 – les isovaleurs du débit

6.2. EXTENSION DU SCHÉMA SRNHS AU PROBLÈME DE SAINT-VENANT AVEC TOPOGRAPHIE IRRÉGULIÈRE EN DIMENSION 2

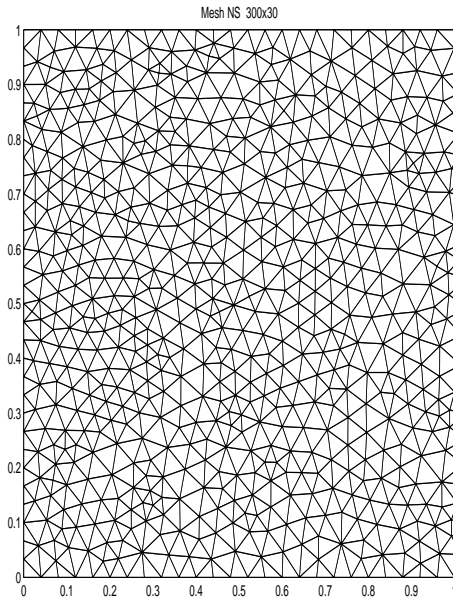


FIG. 6.15 – Zoom du maillage utilisé 300x30

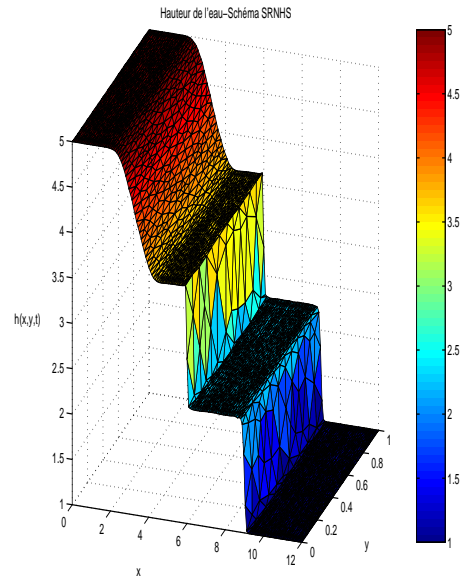


FIG. 6.16 – Courbe de La hauteur vue 3D à $t=0.5s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0003$, 1620 itérations

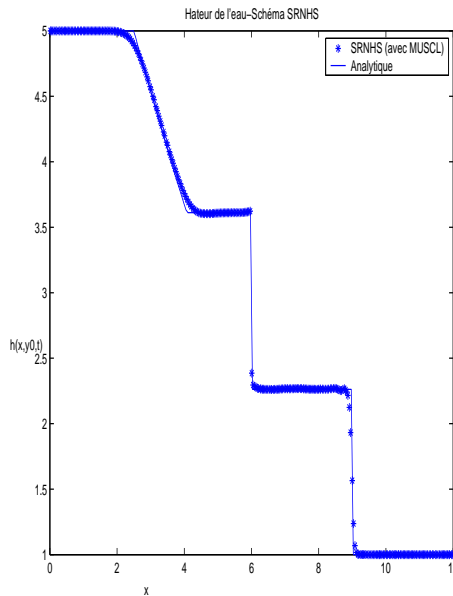


FIG. 6.17 – Courbe de La hauteur coupe 1D à $t=0.5s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0003$, 1620 itérations

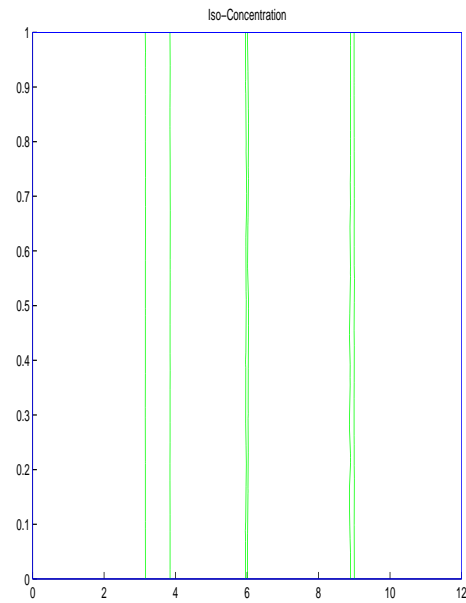


FIG. 6.18 – les isovaleurs de la hauteur

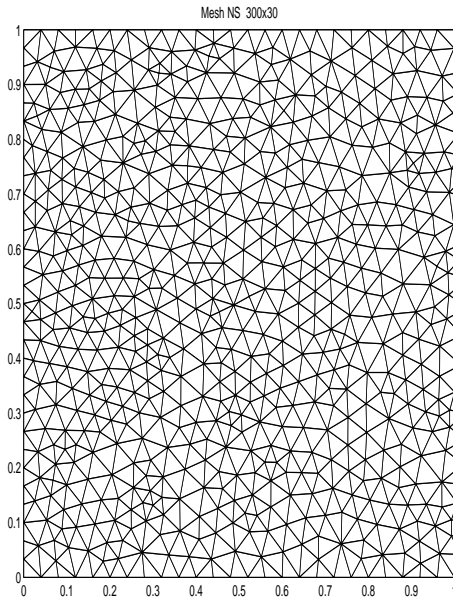


FIG. 6.19 – Zoom du maillage utilisé 300x30

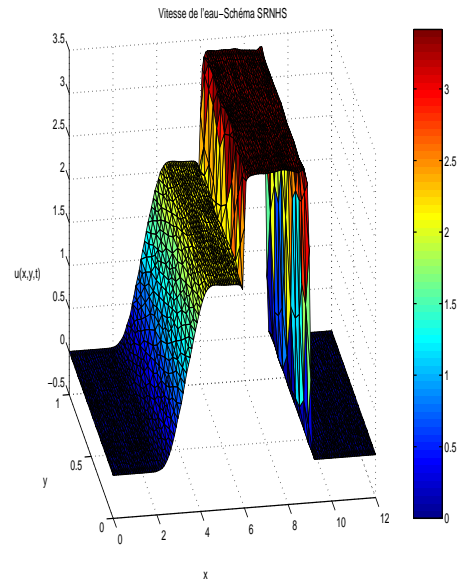


FIG. 6.20 – Courbe de la vitesse vue 3D à $t=0.5s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0003$, 1620 itérations

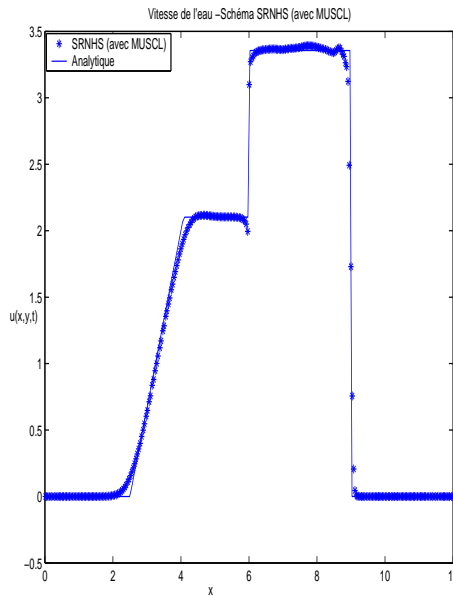


FIG. 6.21 – Courbe de la vitesse coupe 1D à $t=0.5s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0003$, 1620 itérations

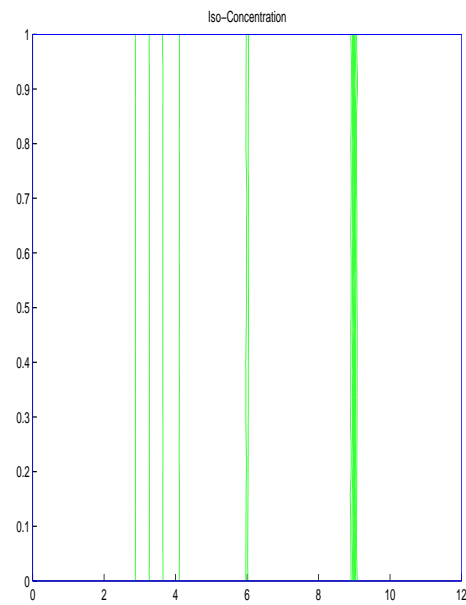


FIG. 6.22 – les isovaleurs de la vitesse

6.2. EXTENSION DU SCHÉMA SRNHS AU PROBLÈME DE SAINT-VENANT AVEC TOPOGRAPHIE IRRÉGULIÈRE EN DIMENSION 2

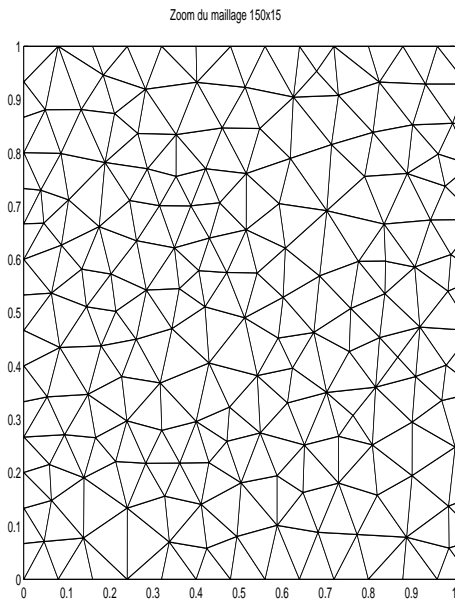


FIG. 6.23 – Zoom du maillage utilisé 150x15

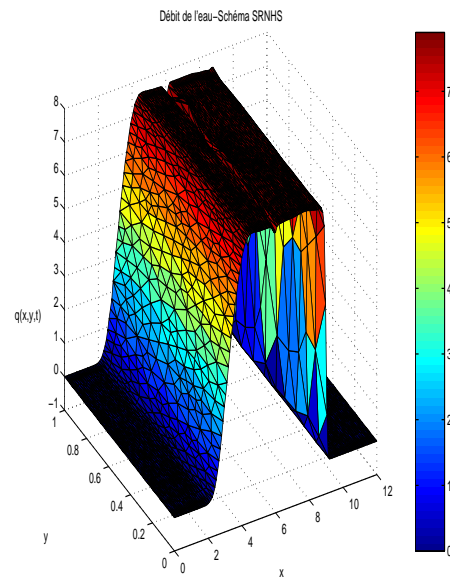


FIG. 6.24 – Courbe de débit vue 3D à $t=0.5s$ fond discontinu

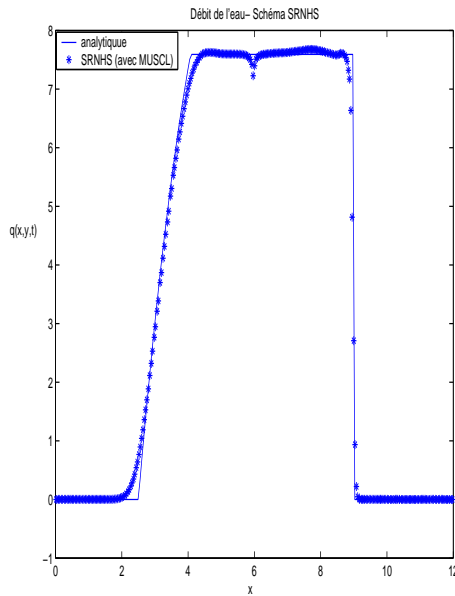


FIG. 6.25 – Courbe du débit coupe 1D à $t=0.5s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0003$, 1620 itérations

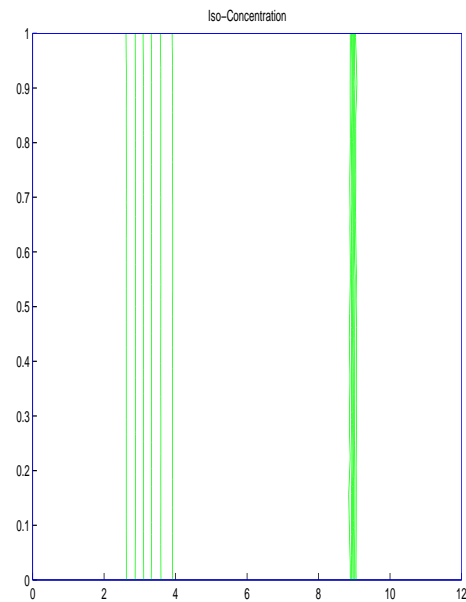


FIG. 6.26 – les isovaleurs du débit

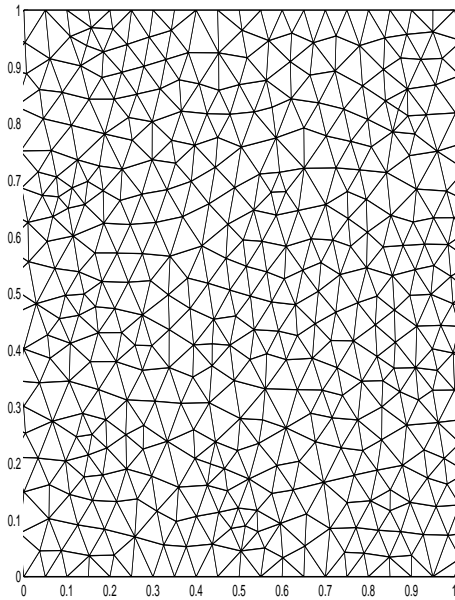


FIG. 6.27 – Zoom du maillage utilisé 400x20

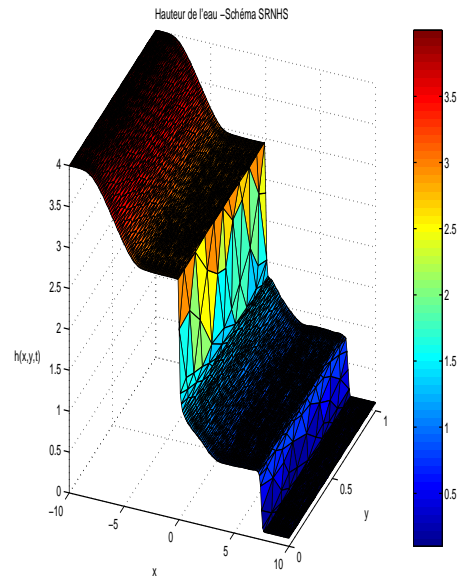


FIG. 6.28 – Courbe de La hauteur vue 3D à $t=1.2$ s fond discontinu, $\Delta t = 0.0002$, 4360 itérations

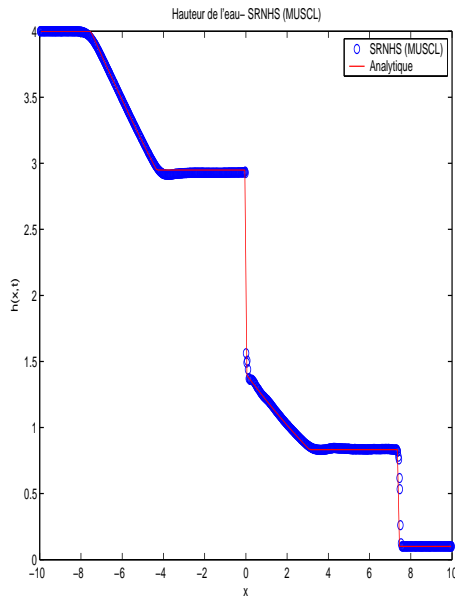


FIG. 6.29 – Courbe de La hauteur coupe 1D à $t=1.2$ s fond discontinu, $\Delta t = 0.0002$, 4360 itérations

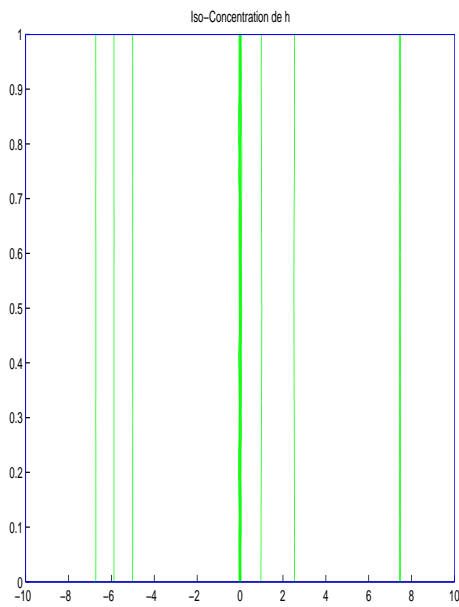


FIG. 6.30 – Les isovaleurs de la hauteur

6.2. EXTENSION DU SCHÉMA SRNHS AU PROBLÈME DE SAINT-VENANT AVEC TOPOGRAPHIE IRRÉGULIÈRE EN DIMENSION 2

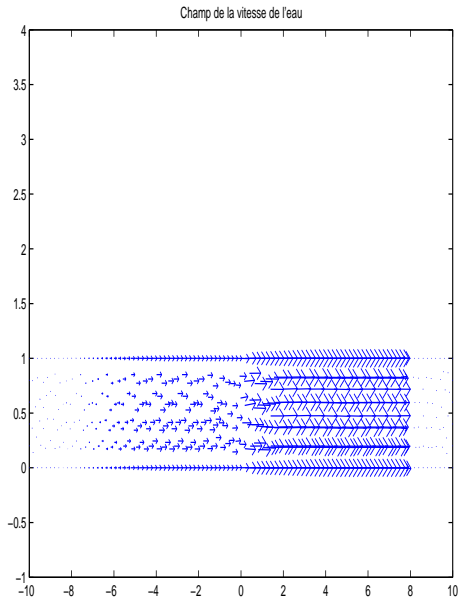


FIG. 6.31 – Champs de la vitesse

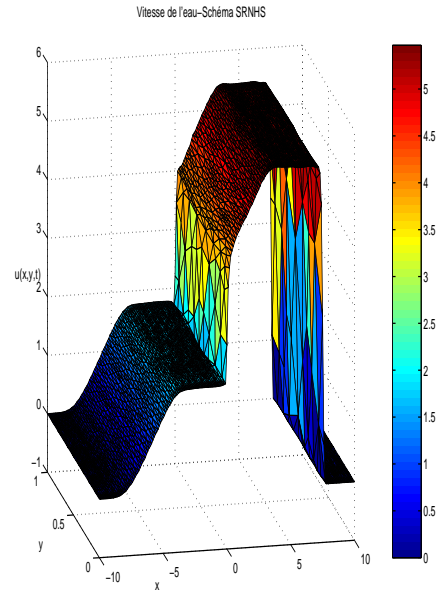


FIG. 6.32 – Courbe de la vitesse vue 3D à $t=1.2s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0002$, 4360 itérations

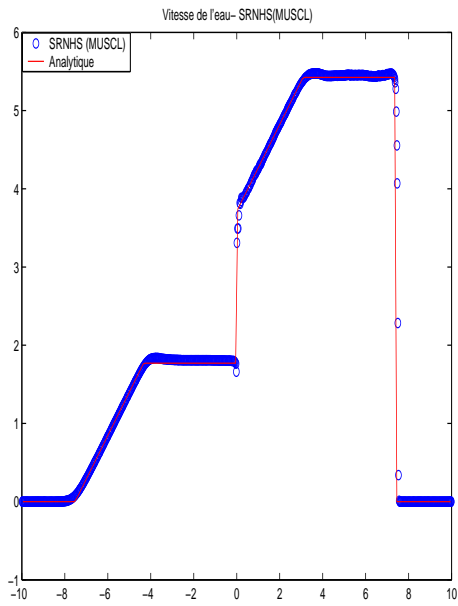


FIG. 6.33 – Courbe de la vitesse coupe 1D à $t=1.2s$ fond discontinu, $\Delta t = 0.0002$, 4360 itérations

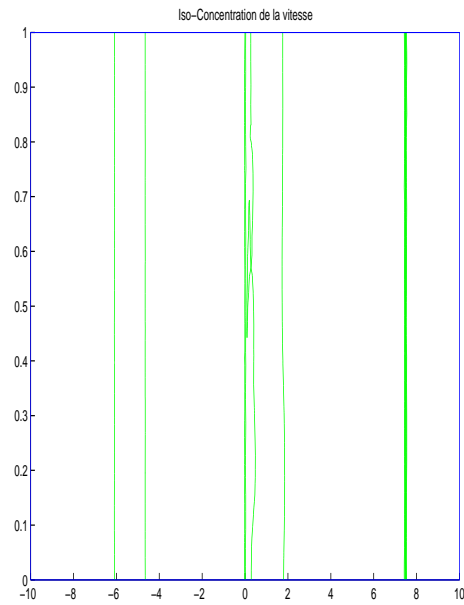


FIG. 6.34 – les isovaleurs de la vitesse

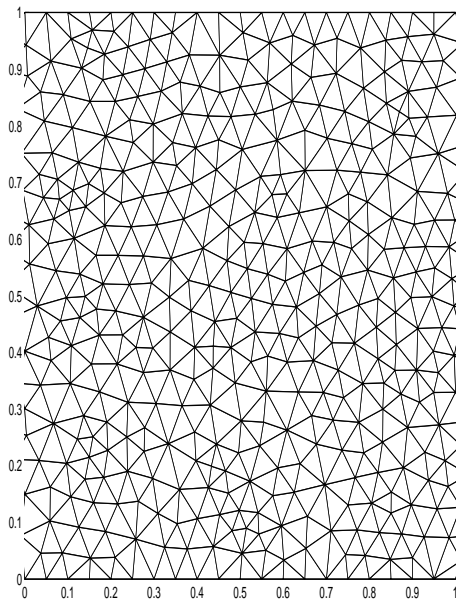


FIG. 6.35 – Zoom du maillage 400x20 utilisé

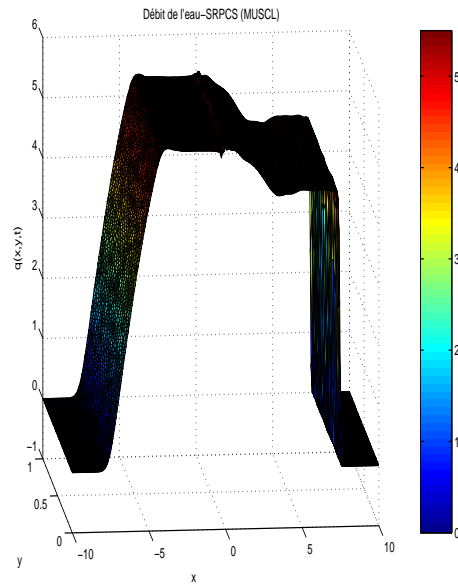


FIG. 6.36 – Courbe du débit vue 3D à $t=1.2s$ fond discontinu

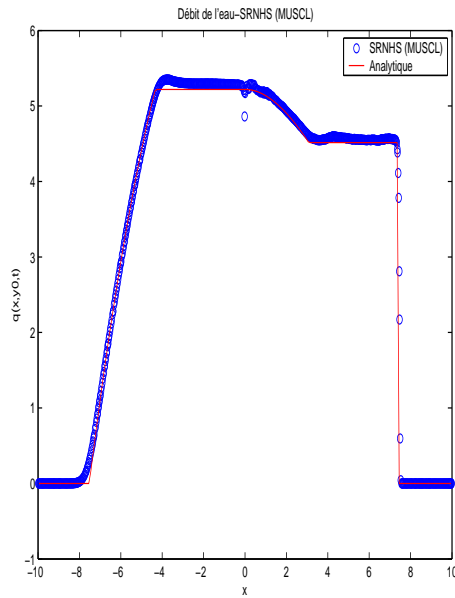


FIG. 6.37 – Courbe du débit coupe 1D à $t=1.2s$ fond discontinu

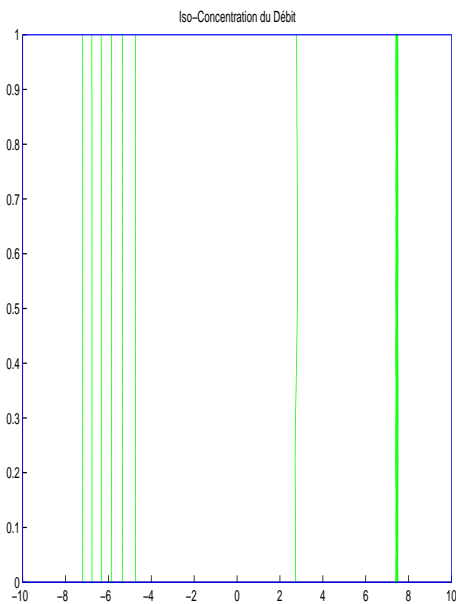


FIG. 6.38 – les isovaleurs du débit

6.3 Extension du schéma SRNHS au problème diphasique en dimension 2

6.3.1 Modèle Diphasique

Dans cette application on considère, le modèle diphasique à pression commune régi par six équations, dont deux décrivent la conservation de la masse moyennée des deux fluides et quatre équations qui décrivent la conservation de la quantité de mouvement moyennée. Dans ce modèle les termes de dissipation sont négligeables. La forme générale de ce modèle est évoquée dans [DGR81].

On note par ∂_t la dérivée par rapport au temps, $\nabla \cdot$ l'opérateur de la divergence et ∇ l'opérateur du gradient.

Dans ce cas les équations de conservation s'écrivent :

- les équations de conservation de la masse :

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k U_k) = 0, \quad (6.13)$$

- les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k U_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k U_k \otimes U_k) + \alpha_k \nabla P_k + (P_k - P_k^i) \nabla \alpha_k = \alpha_k \rho_k \vec{g}, \quad (6.14)$$

où k se rapporte aux phases gazeuse (vapeur) ($k = v$) et liquide ($k = l$). α_k est le taux de vide qui vérifie $\alpha_v + \alpha_l = 1$, ρ_k est la densité, $U_k = {}^t(u_k, v_k)$ est la vitesse et P_k est la pression.

6.3.2 Les lois de fermeture

Au niveau du système, (équations (6.13), (6.14)) que l'on a écrit ci-dessus, il y a plus d'inconnues que d'équation, que l'on considère comme des inconnues principales[Bou98] :

- taux de présence : $\alpha_k \quad k = v, l$
- pressions moyennes : $P_k \quad k = v, l$
- vitesses moyennes : $u_k \quad k = v, l$.

On leur associe les variables auxiliaires suivantes, reliées aux précédentes par des lois ou des tables thermodynamiques :

- masses volumiques moyennes : $\rho_k \quad k = v, l$.

Les autres termes devront être exprimés au moyen de relation de fermeture :

- pressions moyennes aux interfaces : $P_k^i \quad k = v, l$

Ceci nous ramène à choisir des relations de fermeture probablement les plus importantes et les plus ardues concernant le modèle diphasiques à deux fluides.

6.3.3 Relation de fermeture de la pression fluctuantes

Dans cette application nous considérons les lois d'état suivantes :

$$P = A_v \rho_v^\gamma, \quad \text{avec } \gamma = 1.4 \quad \text{et } A_v = 10^5.$$

$$\rho_l = k_l P^a, \quad a = 4.73 \times 10^{-5} \quad \text{et } k_l = 987.57.$$

Cette relation concerne la pression interfaciale au niveau de l'interface gaz-liquide :

$$P_l = P_v = P_v^i = P \quad \text{et} \quad P_l - P_l^i = \rho_l \Theta, \quad (6.15)$$

Θ et un coefficient homogène avec la vitesse tel que l'effet de la dispersion au niveau de l'interface est pris en compte. Pour plus de détails sur la pression de la fluctuation on peut consulter les références suivantes [Bér96, Lah92, LS98].

Selon l'application du schéma SRNHS au problème biffuide monodimensionnel on peut écrire $\Theta = \delta\theta$, et on applique le schéma SRNHS au système originel sans l'ajout de la pression interfaciale en posant $\delta = 0$ lors du calcul de la matrice signe avec la méthode de F. Alouges.

6.4 Réduction mathématique du modèle diphasique

Le modèle diphasique à l'équilibre s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + \partial_y G(W) + S_1(x, y, W) = S(W) \quad (6.16)$$

W est le vecteur des variables conservatifs inconnus, F et G les fonctions de flux physique de la partie conservative, S_1 est la partie non conservative et S et le terme source sont définies par

$$W = \begin{bmatrix} \alpha_v \rho_v \\ \alpha_v \rho_v u_v \\ \alpha_v \rho_v v_v \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_l \rho_l v_l \end{bmatrix}, \quad S(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_v \rho_v g_x \\ \alpha_v \rho_v g_y \\ 0 \\ \alpha_l \rho_l g_x \\ \alpha_l \rho_l g_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S_1(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_v \frac{\partial P}{\partial x} \\ \alpha_v \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 \\ \alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} + (P - P_l^i) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} \\ \alpha_l \frac{\partial P}{\partial y} + (P - P_l^i) \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} \end{bmatrix},$$

avec $U_k = {}^t(u_k, v_k)$ et $\vec{g} = {}^t(g_x, g_y)$

$$F(W) = \begin{bmatrix} \alpha_v \rho_v u_v \\ \alpha_v \rho_v u_v^2 \\ \alpha_v \rho_v u_v v_v \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_l \rho_l u_l^2 \\ \alpha_l \rho_l u_l v_l \end{bmatrix}, \quad G(W) = \begin{bmatrix} \alpha_v \rho_v v_v \\ \alpha_v \rho_v u_v v_v \\ \alpha_v \rho_l v_v^2 \\ \alpha_l \rho_l v_l \\ \alpha_l \rho_l v_l u_l \\ \alpha_l \rho_l v_l^2 \end{bmatrix}.$$

Compte tenu des lois d'état considérées, on peut dire que la phase vapeur est donc considérée comme un gaz parfait évoluant de façon isentropique et la phase liquide est faiblement compressible, voire incompressible [Bou98, GKLC01]. Les expressions des dérivées P_{w_1} et P_{w_4} , avec $w_1 = \alpha_v \rho_v$ et $w_4 = \alpha_l \rho_l$ sont données par :

$$P_{w_1} = \frac{\gamma P}{\rho_v \alpha_v}, \quad P_{w_4} = \frac{\gamma P}{\rho_l \alpha_v}$$

et les dérivées de $(\alpha_v)_{w_1}$ et $(\alpha_v)_{w_4}$ sont données par

$$(\alpha_v)_{w_1} = 0, \quad (\alpha_v)_{w_4} = -\frac{\alpha_v}{\rho_l}.$$

Dans ce cas

$$S_1(x, y, W) = A(W) \frac{\partial W}{\partial x} + B(W) \frac{\partial W}{\partial y}$$

où les matrices $A(W)$ et $B(W)$ sont données par :

$$A(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_v P_{w_1} & 0 & 0 & \alpha_v P_{w_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_l P_{w_1} & 0 & 0 & \alpha_l P_{w_4} + \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_v P_{w_1} & 0 & 0 & \alpha_v P_{w_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_l P_{w_1} & 0 & 0 & \alpha_l P_{w_4} + \Theta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.5 Description de la méthode

Pour faire la simulation numérique de ce problème nous appliquerons le schéma de volumes finis SRNHS défini dans le chapitre 5 de la manière suivante : nous allons utiliser la méthode de splitting en deux étapes, dans la première étape on utilise la transformation d'Euler en intégration en temps

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = S(\hat{W}) \\ \hat{W}(x, t^n) = W^n(x) \end{cases} \quad (6.17)$$

et avec le nouveau schéma SRNHS on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) + \partial_y F(W) + A(W)\partial_x W + B(W)\partial_y W = 0 \\ W(x, t^n) = W^{n+1}(x). \end{cases} \quad (6.18)$$

Le calcul du signe de la matrice dans la phase prédicteur se fera alors, soit par une méthode itérative utilisée par F. Alouges basée sur l'algorithme de Newton Schutlz [Alo98, ABDV⁺99], soit par la méthode de perturbation par densité introduite par I. Toumi et ses collaborateurs [TKP99, Cor02, CDT98, Cor99].

Pour écrire l'étape prédicteur on linéarise le système (6.17) de la manière suivante

$$\partial_t W + M(W)\partial_x W + N(W)\partial_y W = 0 \quad (6.19)$$

avec $M(W) = \nabla F(W) + A(W)$ et $N(W) = \nabla G(W) + B(W)$.

La Jacobienne dont on propose de calculer le signe est

$$\mathcal{J}(W, \eta) = M(W)\eta_x + N(W)\eta_y. \quad (6.20)$$

6.5.1 La méthode itérative

Dans le cas où la partie imaginaire des valeurs propres de la jacobienne $\mathcal{J}(W, \eta)$ est petite devant la partie réelle, on écrit l'étape prédicteur du schéma SRNHS pour ce problème de la manière suivante :

$$W_{ij}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_j^n) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathcal{J}(\bar{W}, \eta)) (W_j^n - W_i^n) \quad (6.21)$$

avec \bar{W} est l'état moyen de Roe calculé entre les cellules C_i et C_j . Dans ce cas l'état moyen de Roe [Cor02] et [Tou96] pour les variables physiques est donné par

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\alpha_l)_L} + \frac{1}{(\alpha_l)_R} \right), \quad \bar{\alpha}_v = 1 - \bar{\alpha}_l, \quad (6.22)$$

$$\bar{p} = \frac{(\alpha_l p)_L + (\alpha_l p)_R}{(\alpha_l)_R + (\alpha_l)_L}, \quad (6.23)$$

$$\bar{u}_k = \frac{(\sqrt{\alpha_k \rho_k} u_k)_i + (\sqrt{\alpha_k \rho_k} u_k)_j}{(\sqrt{\alpha_k \rho_k})_i + (\sqrt{\alpha_k \rho_k})_j}; \quad k = l, v, \quad (6.24)$$

$$\bar{v}_k = \frac{(\sqrt{\alpha_k \rho_k} v_k)_i + (\sqrt{\alpha_k \rho_k} v_k)_j}{(\sqrt{\alpha_k \rho_k})_i + (\sqrt{\alpha_k \rho_k})_j}; \quad k = l, v. \quad (6.25)$$

Ensuite on applique l'algorithme de Newton-Schultz décrit par F. Alouges [Alo98, ABDV⁺99] avec

$$L_0 = \max \left(|\bar{U}_v \cdot \eta| + \left| \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{\rho_v}} \right|, |\bar{U}_l \cdot \eta| + \left| \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{\rho_v}} \right| \right).$$

Pour plus de détails sur cette méthode voir le chapitre 4 de cette thèse et [Alo98, ABDV⁺99].

Remarque

Au vu des résultats numériques obtenus par le schéma SRNHS pour les problèmes 1D et 2D homogènes et non homogènes, on constate, que l'on peut utiliser l'état moyen arithmétique [Bou98] dont les variables physiques moyennes sont données par :

$$\bar{u}_k = \frac{A_i(u_k)_i + A_j(u_k)_j}{A_i + A_j}; \quad k = l, v, \quad (6.26)$$

$$\bar{v}_k = \frac{A_i(v_k)_i + A_j(v_k)_j}{A_i + A_j}; \quad k = l, v, \quad (6.27)$$

où A_i et A_j sont respectivement les aires des cellules C_i et C_j .

6.5.2 La méthode de perturbation par densité

On applique le changement des densités basé sur la méthode de perturbation de densité [CDT98]

$$\rho_v \rightarrow \frac{\rho_v}{\rho_v^0}, \quad \rho_l \rightarrow \frac{\rho_l}{\rho_l^0}, \quad (6.28)$$

avec ρ_v^0 et ρ_l^0 sont deux densités caractéristiques respectivement de la phase gazeuse (vapeur) et la phase liquide. On note la fraction des deux densités $\epsilon = \frac{\rho_v^0}{\rho_l^0}$. Sachant que dans le modèle diphasique considéré, la phase liquide est très dense par rapport à la phase vapeur $\epsilon \ll 1$. Dans ce cas la matrice jacobienne s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{J}(\bar{W}, \eta) = \mathcal{J}_0(\bar{W}, \eta) + \epsilon \mathcal{J}_1(\bar{W}, \eta). \quad (6.29)$$

Les deux matrices \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_1 sont données par

$$\mathcal{J}_0(W, \eta) = \begin{bmatrix} 0 & \eta_x & \eta_y & 0 & 0 & 0 \\ -u_v U_v + c_v^2 \eta_x & u_v \eta_x + U_v & u_v \eta_y & 0 & 0 & 0 \\ -v_v U_v + c_v^2 \eta_y & v_v \eta_x & v_v \eta_y + U_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_x & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_l U_l + c_l^2 \eta_x & u_l \eta_x + U_l & u_l \eta_y \\ 0 & 0 & 0 & -v_l U_l + c_l^2 \eta_y & v_l \eta_x & v_l \eta_y + U_l \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{J}_1(W, \eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma P}{\rho_v^0} \eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma P}{\rho_v^0} \eta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_l}{\alpha_v} \frac{\gamma P}{\rho_v^0} \eta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_l}{\alpha_v} \frac{\gamma P}{\rho_v^0} \eta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$c_v = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho_v}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_v}}, \quad c_l = \sqrt{\Theta} \quad \text{et} \quad U_k = u_k \eta_x + v_k \eta_y. \quad (6.30)$$

La matrice $\mathcal{J}_0(W, \eta)$ est diagonalisable sur \mathbb{R} et les valeur propres sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(W, \eta) = U_v \\ \lambda_{2,0}(W, \eta) = U_v - c_v \\ \lambda_{3,0}(W, \eta) = U_v + c_v \\ \lambda_{4,0}(W, \eta) = U_l \\ \lambda_{5,0}(W, \eta) = U_l - c_l \\ \lambda_{6,0}(W, \eta) = U_l + c_l \end{array} \right.$$

Pour le modèle que nous avons considéré ϵ est un paramètre très petit, il est de l'ordre 5×10^{-2} pour un générateur de vapeur et 10^{-3} dans le cas air-eau. La matrice $\mathcal{J}(W, \eta)$ est une perturbation linéaire de la matrice $\mathcal{J}_0(W, \eta)$, dans ce cas au lieu de chercher le signe de la matrice $\mathcal{J}(W, \eta)$ on peut utiliser le signe du vecteur

$\mathcal{J}_0(W, \eta)$ dans l'étape prédicteur du schéma SRNHS et l'étape prédicteur s'écrit de la façon suivante :

$$W_{ij}^n = \frac{1}{2} (W_i^n + W_j^n) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\mathcal{J}_0(\bar{W}, \eta)) (W_j^n - W_i^n) \quad (6.31)$$

et l'étape correcteur s'écrit de la manière suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j \in N_i} |e_{ij}| G(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij}) + \Delta t (S_1)_i^n \quad (6.32)$$

ou

$$(S_1)_i^n = \frac{1}{\Delta t A_i} \int_{C_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} S_1(x, y, W(x, y, t)) dt dx dy,$$

les C_j sont les volumes de contrôle voisins de C_i et $G(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij})$ est la fonction de flux numérique donnée par

$$G(W_i^n, W_j^n, \eta_{ij}) = F(W_{ij}^n) \eta_{ij,x} + G(W_{ij}^n) \eta_{ij,y} \quad (6.33)$$

Bibliographie

- [ABDV⁺99] F. Alouges, M. Boucker, F. De Vuyst, P. Freydier, J. M. Ghidaglia, A. Kumbaro, G. Le Coq, F. Pascal, and M. Tajchman, *An overview of the vffc - methods and tools for the simulation of two-phase flows*, Tech. report, Département Transferts Thermiques et Aérodynamique. Division Recherche & Développement Electricité de France, 1999.
- [AGN91] F. Alcrudo and P. Garcia-Navarro, *A high resolution goduniv-type scheme in finite volume for the 2d shallow water equations*, Siam J. Math. Anal. Appl **21** (1991), 487.
- [Alo98] F. Alouges, *Matrice signe et systèmes hyperboliques*, Tech. report, rapport CMLA, 1998.
- [Amb95] D. Ambrosi, *Approximation of shallow water equation by roe's rieman solver*, Int. J. Numer. Methods Fluids **20** (1995), 157–169.
- [ANS03] R. Abgrall, B. Nkonga, and R. Saurel, *Efficient numerical approximation of compressible multi-material flow for unstructured meshes*, Comput. & Fluids **32** (2003), no. 4, 571–605.
- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J-A. Desideri, and M. E. Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [Bér96] F. Béreux, *Zero-relaxation limit versus operator splitting for two-phase fluid flow computations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **133** (1996), no. 1-2, 93–124.
- [bGN00] P. brufau and P. Garcia-Navarro, *Tow dimensional dam break flow simulation*, Int. J. Numer. Methods Fluids **33** (2000), 35–57.
- [Bou98] M. Boucker, *Modélisation numérique multidimensionnelle d'écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent : méthodes et applications*, Ph.D. thesis, Electricité de France, 1998.
- [CDT98] J. Cortes, A. Debussche, and I. Toumi, *A density perturbation method to study the eigenstructure of two-phase flow equation systems*, J. Comput. Phys. **147** (1998), no. 2, 463–484.

- [Cor99] J. Cortes, *Etude des régimes transitoires d'écoulements diphasiques à faible rapport de densité*, Ph.D. thesis, Université de Paris XI centre d'Orsay, 1999.
- [Cor02] J. Cortes, *On the construction of upwind schemes for non-equilibrium transient two-phase flows*, *Computer & Fluids* **31** (2002), 159–182.
- [DGR81] J.M. Delhay, M. Giot, and M.L. Riethmuller, *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*, Von Karman Institut (NY), 1981.
- [Elm99] I. Elmahi, *Schéma volumes finis pour la simulation numérique de problème à fronts raides en maillages non structurés adaptatifs*, Ph.D. thesis, Université de Rouen, janvier 1999.
- [GKLC96] J-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq, *Une méthode "volumes finis" à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322** (1996), no. 10, 981–988.
- [GKLC01] ———, *On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method*, *Eur. J. Mech. B Fluids* **20** (2001), no. 6, 841–867.
- [Gla93] P. Glaister, *Flux difference splitting for hyperbolic systems of conservation laws with source terms*, *Comput. Math. Appl.* **26** (1993), no. 7, 79–96.
- [GP99] Jean-Michel Ghidaglia and Frédéric Pascal, *Passerelles volumes finis-éléments finis*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), no. 8, 711–716.
- [Lah92] R.T. Lahay, *The prediction phase of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models*, *Boiling Heat transfer*, Elsevier Science (1992), 85–121.
- [LS98] Kim K Lee SJ, Chang KS, *Pressure wave speed from the characteristics of two fluid models, two-phase hyperbolic equation system*, *Int J Multiphase Flow* **24** (1998), 855–66.
- [LW99] R. Liska and B. Wendroff, *Two dimensional shallow water equations by composite schemes*, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **30** (1999), 461–497.
- [Moh05] K. Mohamed, *Simulation numérique des systèmes non homogènes*, Ph.D. thesis, Université de Paris XIII, 2005.
- [TK96] I. Toumi and A. Kumbaro, *An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model*, *J. Comput. Phys.* **124** (1996), no. 2, 286–300.
- [TKP99] I. Toumi, A. Kumbaro, and H. Paillere, *Approximate Riemann solvers and flux vector splitting schemes for two-phase flow*, Tech. report, CEA/Saclay, 1999.
- [Tou96] I. Toumi, *An upwind numerical method for two-fluids two-phase flow models*, *Nuclear Sci Engng* **123** (1996), 147–68.

Conclusion et perspectives

Notre travail dans cette thèse a eu pour point de départ l'étude des principaux résultats de stabilité et de convergence pour un nouveau schéma aux volumes finis (SRNH) dédié aux systèmes non homogènes. L'étude mathématique a été menée dans le contexte unidimensionnel d'abord pour une équation scalaire, ensuite pour un système d'équations, et a été étendue au cas scalaire bidimensionnel sur maillage non structuré. La version originelle du schéma SRNH comportant un paramètre de contrôle de la diffusion numérique, notre analyse, se fixant pour but l'établissement de conditions suffisantes de stabilité, a conduit à une nouvelle variante du schéma appelée schéma SRNHS. Le schéma SRNHS ne comporte plus de paramètre inconnu, mais requiert la détermination du signe d'une matrice de décentrement issue du système non homogène considéré. La validation numérique du schéma SRNH a été menée pour deux sortes de problèmes non homogènes difficiles, le système de Saint Venant 1D et 2D de modélisation de l'écoulement de l'eau sur un fond fortement pentu, et le cas test du Robinet de Ransom 1D représenté par un système diphasique (eau-vapeur) à pression commune, en prenant en compte les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, mais pas celle de l'énergie. Pour le système de Saint Venant, on montre formellement que le schéma SRNHS vérifie la C-propriété exacte introduite pour les schémas équilibres par Bermúdez et Vázquez [BV94, BDDV98]. La partie homogène du système étant hyperbolique dans ce cas, la matrice de décentrement est simplement la matrice de Roe issue du système. Les résultats numériques 1D et 2D, en particulier du cas de rupture de barrage sur un fond en forme de marche, montrent le degré d'efficacité du schéma. Pour le système diphasique des zones de non hyperbolicité peuvent exister, avec apparition de valeurs propres complexes dans la Jacobienne du système. On montre que pour les configurations faiblement non hyperboliques (partie imaginaire des valeurs propres dominée par la partie réelle), on peut calculer le signe de la Jacobienne par l'algorithme de Newton-Schultz, s'inspirant en cela d'une idée originale de F. Alouges [ADVLCL01]. Pour les configurations plus raides, où la méthode précédente ne fonctionne plus, on peut avoir recours à la méthode de perturbation par densité, introduite par I. Toumi et ses co-auteurs [TKP99, TK96]. Cette méthode, basée sur le rapport élevé des densités eau/vapeur, consiste d'abord à rajouter un terme de pression interfaciale au système, afin de rétablir l'hyperbolicité, et ensuite à utiliser comme matrice de décentrement, une matrice "proche" de la matrice Jacobienne

du système, en terme de développement asymptotique en fonction du rapport de densités. Dans les deux cas évoqués, les test numériques montrent que l'on approche la solution analytique du problème de Ransom avec une grande précision, et que l'on conserve la stabilité des calculs même avec un maillage de finesse élevée. La démarche ainsi proposée s'étend naturellement au cas bidimensionnel, et cela constitue pour nous une perspective de travail prochain. De plus nous pensons que le schéma peut également être efficace, d'une part pour les équations de transport-diffusion d'une substance et pour des problème de combustion diphasique, et d'autre part pour les problèmes non conservatifs de l'élastodynamique.

Bibliographie

- [ADVLCL01] F. Alouges, F. De Vuyst, G. Le Coq, and E. Lorin, *Un procédé de réduction de la diffusion numérique des schémas à différences de flux d'ordre un pour les systèmes hyperboliques non-linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.332, Série I (2001), 1–6.
- [BDDV98] A. Bermúdez, A. Dervieux, J-A. Desideri, and M. E. Vázquez, *Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **155** (1998), no. 1-2, 49–72.
- [BV94] A. Bermudez and M. E. Vazquez, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Comput. & Fluids **23** (1994), no. 8, 1049–1071.
- [TK96] I. Toumi and A. Kumbaro, *An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model*, J. Comput. Phys. **124** (1996), no. 2, 286–300.
- [TKP99] I. Toumi, A. Kumbaro, and H Paillere, *Approximate riemann solvers and flux vector splitting schemes for two-phase flow*, Tech. report, CEA/Saclay, 1999.