



**HAL**  
open science

# Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes

Félicien Bonnefoy

► **To cite this version:**

Félicien Bonnefoy. Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Nantes, 2005. Français. NNT : . tel-00010065

**HAL Id: tel-00010065**

**<https://theses.hal.science/tel-00010065>**

Submitted on 8 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**

**MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL**

*Année 2005.*

N° B.U. :

**Thèse de DOCTORAT**

***Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par :

FELICIEN BONNEFOY

le 31 mars 2005  
à l'École Centrale de Nantes

**TITRE**

**MODELISATION EXPERIMENTALE ET NUMERIQUE DES ETATS DE MER COMPLEXES**

**JURY**

Président :	M. Yves LECOINTE	Professeur, Université de Nantes
Rapporteurs :	M. Bernard MOLIN	Professeur Associé, École Généraliste d'Ingénieurs de Marseille
	M. Christian KHARIF	Professeur, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Marseille
Examineurs :	M. Rodney EATOCK-TAYLOR	Professeur, University of Oxford (UK)
	M. Pierre FERRANT	Maître de Conférences, École Centrale de Nantes
	M. Gérard DELHOMMEAU	Ingénieur de Recherche, École Centrale de Nantes

# Remerciements

Trois ans après un premier passage dans l'Équipe Hydrodynamique et Génie Océanique, j'ai repassé les portes du Laboratoire de Mécanique des Fluides, pour enchaîner le DEA et la thèse. Au cours du DEA, les membres de l'équipe, Pierre Ferrant, Alain Clément, Lionel Gentaz, Bertrand Alessandrini et Jean-Michel Kobus m'ont fait découvrir plus en détail le domaine de l'hydrodynamique navale, ce qui n'a fait que renforcer mon intérêt et ma curiosité pour le domaine. Du coup, j'ai continué dans cette voie et j'ai rempilé pour trois ans lorsque Pierre m'a proposé de travailler sur la génération et la propagation de houle. C'est avec beaucoup d'enthousiasme que je me suis lancé dans cette aventure sur un sujet à la fois classique dans l'équipe qui y travaille depuis de nombreuses années, mais en même temps relativement nouveau grâce aux possibilités expérimentales offertes par le nouveau bassin de houle directionnelle du Laboratoire. Pierre m'a judicieusement orienté vers un travail à la fois expérimental dans le bassin, et numérique en équipe avec David Le Touzé. Pierre m'a aussi accordé tout au long de mon travail une grande confiance, que ce soit dans le choix de certains thèmes de travail ou lors de l'utilisation du bassin de houle. Il m'a conduit à participer à un nombre conséquent de conférences internationales, de Jyväskylä à Vancouver, qui m'ont permis de rencontrer d'autres personnes et d'élargir mon champ de vision sur les problèmes de l'hydrodynamique. J'ai pu apprécier tout au long des trois ans sa maîtrise étonnante du domaine et sa faculté de n'être jamais à court d'idées. C'est à toi Pierre que j'adresse mon premier remerciement, pour m'avoir encadré pendant ces trois ans.

Je tiens ensuite à exprimer toute ma reconnaissance à Gérard Delhommeau, directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides, de m'avoir accueilli au sein du-dit laboratoire où j'ai pu travailler pendant plus de trois ans dans de très bonnes conditions, et d'avoir accepté d'encadrer officiellement cette thèse.

Je remercie vivement le Professeur Yves Lecointe, directeur adjoint de l'École polytechnique de l'Université de Nantes d'avoir accepté d'être Président de mon jury de thèse.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Bernard Molin, Professeur associé à l'École Généraliste d'Ingénieurs de Marseille et Christian Kharif Professeur à l'Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre à Marseille, d'avoir accepté de rapporter mon travail de thèse et de faire partie du jury. Leurs commentaires avisés m'ont permis de porter un regard critique enrichissant sur mon travail et ont su éveiller ma curiosité dans des domaines que je n'ai pas encore abordé.

Je remercie particulièrement Rodney Eatock-Taylor, Professeur à l'Université d'Oxford, d'avoir accepté de participer au jury malgré la barrière linguistique. Je suis très honoré par sa présence et j'aurais le plaisir de travailler bientôt avec lui en stage post-doctoral.

Bon, ensuite je dois remercier David Le Touzé mais là, je suis bien embêté parce que 2, 5 ou 10 pages n'y suffiraient pas. Si son rythme de travail, qui nécessite d'être très près d'une dead-line pour s'y mettre (très proche de celui de Pierre d'ailleurs...) m'a un peu surpris au

## REMERCIEMENTS

---

début, j'ai vite compris l'efficacité du garçon et c'est sûrement en prenant modèle sur lui que j'ai pu abordé de front plusieurs sujets variés. Deux ans et demi de travail en commun m'ont permis de connaître un peu (!) le personnage et d'en faire plus qu'un équipier solide, un ami sincère. Je le félicite aussi pour son *nu mou rrrhhh* qui décoiffe, son anglais *pure style*. Je lui dois un énorme merci pour sa relecture (très !) attentionnée et au combien profitable du manuscrit.

Impossible d'oublier Yann, mon co-bureau de trois ans, champion du monde de F18, Mr Voile du groupe (Mr Voiles maintenant ?), qui a eu la lourde tâche de me supporter au quotidien (une petite boulette ?) et surtout dans la dernière ligne droite (là, une *très* lourde tâche)... Des purs bords de catas restent bien gravés dans ma mémoire, merci pour ça et pour tout le reste...

Impossible également d'oublier Mathieu que je côtoie depuis le DEA, toujours prêt à écouter et toujours plein de bons conseils en maths, en info et dans la vie tout simplement. À quand les prochains bords sur le bateau ?

Coté bassins, si la fraîcheur du lieu rend attirantes les expériences (bon d'accord, c'est surtout vrai en été), c'est surtout la troupe qui gravite autour des piscines qui en fait des moments agréables. Merci à Bruno (toutes ses explications qui m'ont bien aidé notamment au tout début), à Jean-Marc, Stéphane et Olivier toujours là pour une petite discussion sur le montage, sur LabView (Olivier, t'as fait tes sous-vis pour demain ?) ou sur toute autre chose, à Jean-Luc et ses bons plans, à Guy et Paul, irremplaçables à l'atelier (Paul, mon vélo roule toujours...). Tous, avec Edouard et Francis sont toujours partant pour un coup de main ou un dépannage et ça c'est cool.

Un grand merci à Anne Lagatu et Françoise Palvadeau pour leur gentillesse, leur patience, leur disponibilité et leur aide indispensables (et aussi Josette Settelen pour le démarrage).

Je remercie également toute l'équipe d'enseignement au sein de laquelle j'ai effectué mon monitorat, Jean-François Hétet, Jean-François Sini, Isabelle Calmet, Gilbert Le Rouzic, Christian Jacquot, Pierre, Lionel (merci cher tuteur), Olivier (il est partout), Dominique Marichal. Grâce à eux j'ai pu faire mes premiers pas dans l'enseignement dans de très bonnes conditions, apprendre beaucoup sur la façon d'apprendre et confirmer mon envie d'apprendre aux autres. Je suis content d'avoir bossé avec Christophe Josset et Alban Leroyer, moniteurs également, pour mener à bien les TP de Maîtrise notamment.

Mention spéciale aux deux stagiaires, Ludivine Gougeon et Pierre Roux de Reilhac, que j'ai encadré et qui ont dû essuyer les plâtres de ces débuts.

Et puis la déferlante des thésards qui a contribué à rendre très agréable ces trois ans... Kostia, Gaëlle, Karine, Régis, Joss (pour les premiers bords de body et la barre de Vendée), Yann, Alexander, David, Mathieu, Alban, Aurélien (vive les Skoyotes), Jean-Christophe, Romain, Guillaume, Mickaël, et les nouveaux Pierre-Michel, Jean-Baptiste, Guillaume, Pierre, Oussama et Davy. Les futurs, Nicolas... et tous les autres, Mathieu du J22, Luc et Myriam pour d'innombrables discussions sur tout plein de sujets, pour les croisières au CMN, Charlotte (garde ta bonne humeur, c'est la classe ! et merci pour tous les petits plans détente autour du cheval).

Je dois beaucoup à toute ma famille, mes parents de Poisson, les bouffées de verdure qui font toujours du bien, mon frère, Marie et les trois petits (j'en connais bien plus sur le retapage des maisons et sur l'électricité...). Je termine sur cette pensée affectueuse pour eux et surtout pour Karen qui m'a supporté pendant la rédaction pas toujours facile de cette thèse.

Félicien Bonnefoy

Juin 2005

Écrit et mis en page avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Bassins de houle et outils numériques</b>	<b>13</b>
<b>I.1 Position du problème</b>	<b>21</b>
I.1.1 Hypothèses et Équations . . . . .	21
I.1.2 Génération de la houle . . . . .	24
I.1.2.1 Modélisation d'un batteur physique . . . . .	24
I.1.2.2 Rampe en temps . . . . .	25
I.1.3 Zone absorbante . . . . .	25
I.1.3.1 Modélisation de la plage absorbante . . . . .	25
I.1.3.2 Géométrie de la zone absorbante . . . . .	26
I.1.4 Résolution du problème par une méthode spectrale . . . . .	27
I.1.4.1 Modes propres du bassin . . . . .	27
I.1.4.2 Notion de potentiel additionnel . . . . .	29
<b>I.2 Modèle au second ordre – SWEET</b>	<b>31</b>
I.2.1 Développement en série de perturbation . . . . .	31
I.2.2 Lois de commande du batteur . . . . .	33
I.2.3 Validations . . . . .	34
I.2.3.1 Lâchers de surface libre . . . . .	34
I.2.3.2 Houle et nombre de modes . . . . .	34
I.2.3.3 Comparaison à une solution analytique de référence . . . . .	35
I.2.3.4 Volume et énergie . . . . .	35
I.2.3.5 Modes longs . . . . .	37
I.2.4 Batteur latéral au B600 . . . . .	38
Conclusion . . . . .	39
<b>I.3 Non linéaire complet – modèle HOS</b>	<b>41</b>
I.3.1 Potentiel de surface et approximation HOS . . . . .	41
I.3.2 Génération de houle et potentiel additionnel . . . . .	43
I.3.2.1 Doublet tournant . . . . .	43
I.3.3 Volumes et énergies . . . . .	45
I.3.4 Aperçu de l'algorithme numérique . . . . .	46
I.3.4.1 À chaque pas de temps . . . . .	46
I.3.4.2 Traitement anti-repliement . . . . .	46
I.3.4.3 Intégration en temps:choix du pas de temps et stabilité . . . . .	48

I.3.5	Propriétés et validations . . . . .	50
I.3.5.1	Génération de houle cambrée . . . . .	50
I.3.5.2	Comportement de l'approximation pour $W$ . . . . .	52
Conclusion	. . . . .	56
<b>II</b>	<b>Effets de confinement</b>	<b>59</b>
<b>II.1</b>	<b>Réflexions sur la plage absorbante</b>	<b>61</b>
II.1.1	Méthode d'analyse . . . . .	63
II.1.1.1	Description . . . . .	63
II.1.1.2	Validation . . . . .	64
II.1.2	Description des essais . . . . .	64
II.1.3	Analyse des données . . . . .	66
II.1.3.1	Cas de très faible amplitude: . . . . .	66
II.1.3.2	Amplitude incidente . . . . .	68
II.1.3.3	Coefficient de réflexion . . . . .	70
II.1.3.4	Nombre de sondes et position . . . . .	72
II.1.4	Effets non-linéaires d'ordre supérieur . . . . .	74
II.1.4.1	Tentative d'analyse au second ordre . . . . .	74
II.1.4.2	Perturbations dues aux interstices entre les volets du batteur . . . . .	76
II.1.4.3	Vitesses de phase et houle incidente . . . . .	78
II.1.4.4	Amplitude finie de l'onde incidente et réflexion . . . . .	80
II.1.4.5	Évolution temporelle du champ de vagues généré . . . . .	82
II.1.5	Plage numérique . . . . .	86
Conclusion	. . . . .	88
<b>II.2</b>	<b>Réflexions sur les murs latéraux</b>	<b>91</b>
II.2.1	Solution au premier ordre . . . . .	91
II.2.2	Lois de commande du batteur . . . . .	92
II.2.2.1	Principe du serpent . . . . .	92
II.2.2.2	Méthode de Dalrymple . . . . .	93
II.2.2.3	Méthodes à contours complexes . . . . .	94
II.2.2.4	Construction de la loi de commande pour les batteurs . . . . .	95
II.2.3	Application aux simulations . . . . .	96
II.2.3.1	Houle régulière . . . . .	96
II.2.3.2	Houle irrégulière . . . . .	97
II.2.4	Application aux expériences . . . . .	101
Conclusion	. . . . .	102
<b>III</b>	<b>Prédiction et suppression des ondes libres</b>	<b>105</b>
Introduction	. . . . .	107
<b>III.1</b>	<b>Solution analytique et prédiction</b>	<b>109</b>
III.1.1	Position du problème . . . . .	109
III.1.1.1	Ondes liées . . . . .	110
III.1.1.2	Ondes libres . . . . .	112

III.1.2	Investigation du champ d'onde libre . . . . .	114
III.1.3	Stratégie de suppression des ondes libres . . . . .	117
<b>III.2</b>	<b>Applications aux bassins et suppression</b>	<b>119</b>
III.2.1	Bassin numérique . . . . .	119
III.2.1.1	En deux dimensions . . . . .	120
III.2.1.2	En trois dimensions . . . . .	122
III.2.2	Bassin expérimental . . . . .	124
	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>
<b>IV</b>	<b>Reproduction déterministe de paquets de vagues</b>	<b>131</b>
<b>IV.1</b>	<b>Paquets de vague focalisés</b>	<b>133</b>
	Introduction . . . . .	133
IV.1.1	Approche linéaire . . . . .	138
IV.1.2	Approche au second-ordre de perturbation . . . . .	144
IV.1.3	Approche itérative . . . . .	148
IV.1.4	Approche vitesse de phase non linéaire . . . . .	151
IV.1.4.1	Principe de base . . . . .	152
IV.1.4.2	Validation à faible amplitude . . . . .	154
IV.1.4.3	Simplification . . . . .	155
IV.1.4.4	Application à la reproduction déterministe . . . . .	157
IV.1.4.5	Théorie et instabilités . . . . .	160
IV.1.5	Paquets de vagues 3D . . . . .	163
	Introduction . . . . .	163
IV.1.5.1	Paquets de vagues cibles . . . . .	164
IV.1.5.2	Principe de la reproduction déterministe . . . . .	167
IV.1.5.3	Améliorations proposées . . . . .	172
	Conclusion . . . . .	173
<b>V</b>	<b>Génération et analyse de houles irrégulières</b>	<b>177</b>
<b>V.1</b>	<b>Houle irrégulière 2D</b>	<b>179</b>
V.1.1	Houles irrégulières générées . . . . .	180
V.1.2	Description des essais expérimentaux . . . . .	181
V.1.3	Descriptions des simulations . . . . .	183
V.1.4	Analyse statistique . . . . .	184
V.1.4.1	Loi de répartition de l'élévation . . . . .	184
V.1.4.2	Analyse vague par vague . . . . .	185
V.1.4.3	Filtrage préliminaire du signal . . . . .	186
V.1.5	Analyse fréquentielle . . . . .	186
V.1.5.1	Comparaison des différentes sondes . . . . .	187
V.1.6	Comparaison de deux périodes up-crossing . . . . .	188
V.1.7	Influence de la hauteur significative . . . . .	190
V.1.7.1	Domaine temporel . . . . .	190

V.1.7.2	Analyse statistique de la répartition de l'élévation . . . . .	191
V.1.7.3	Analyse statistique vague par vague . . . . .	197
V.1.7.4	Analyse fréquentielle . . . . .	198
V.1.8	Influence du second ordre lors des simulations . . . . .	201
V.1.9	Évolution dans le temps . . . . .	201
V.1.9.1	Élévation . . . . .	202
V.1.9.2	Spectres . . . . .	202
V.1.9.3	Niveau moyen . . . . .	205
V.1.9.4	Modes longitudinaux . . . . .	205
V.1.9.5	Modes transverses . . . . .	206
V.1.10	Réflexion de la plage . . . . .	209
V.1.10.1	Séparation houle incidente et houle réfléchie . . . . .	209
V.1.10.2	Résultats pour les simulations . . . . .	210
V.1.10.3	Résultats pour les essais expérimentaux . . . . .	211
	Conclusion . . . . .	213
<b>V.2</b>	<b>Houle irrégulière 3D</b>	<b>215</b>
	Introduction . . . . .	215
V.2.1	Description des méthodes . . . . .	217
V.2.1.1	Méthode du Maximum d'Entropie (MEP) . . . . .	217
V.2.1.2	Méthode du Maximum d'Entropie Étendue (EMEP) . . . . .	218
V.2.1.3	Méthode Bayésienne (BDM) . . . . .	218
V.2.1.4	Points communs et comparaisons . . . . .	219
V.2.2	Validation numérique . . . . .	219
V.2.2.1	Étalement uni-modal . . . . .	220
V.2.2.2	Étalement bi-modal . . . . .	223
V.2.2.3	Conclusions sur les tests numériques . . . . .	224
V.2.3	Simulations numériques . . . . .	224
V.2.4	Essais expérimentaux . . . . .	225
V.2.4.1	Incertitudes . . . . .	227
V.2.4.2	Spectres en fréquence . . . . .	227
V.2.4.3	Étalement directionnel . . . . .	228
	Conclusion . . . . .	233
	<b>Conclusion générale</b>	<b>235</b>
	<b>Annexes</b>	<b>237</b>
<b>A</b>	<b>Génération de houle oblique</b>	<b>237</b>
A.1	Position du problème . . . . .	237
A.1.1	Établissement des équations . . . . .	237
A.1.2	Équations au premier ordre . . . . .	239
A.2	Solution en régime établi . . . . .	239
A.3	Fonctions de transfert . . . . .	243
A.3.1	Batteur piston . . . . .	244

A.3.2	Batteur volet . . . . .	244
A.3.3	Terme transverse . . . . .	244
A.3.4	Comparaison des lois de commande serpent et Dalrymple . . . . .	244
A.4	Modes transverses . . . . .	245
A.4.1	Fréquences propres . . . . .	245
A.4.2	Résonance . . . . .	245
A.5	Segmentation . . . . .	246
<b>B</b>	<b>Analyse statistique</b>	<b>251</b>
<b>C</b>	<b>Analyse de Fourier</b>	<b>253</b>
<b>D</b>	<b>Volumes et énergies numériques</b>	<b>255</b>
D.1	Volumes . . . . .	255
D.2	Énergies . . . . .	256
<b>E</b>	<b>Solution stationnaire au second ordre</b>	<b>261</b>
<b>F</b>	<b>Étalonnage dynamique des sondes</b>	<b>263</b>
<b>G</b>	<b>Vibrations des sondes</b>	<b>265</b>
<b>H</b>	<b>Température et étalonnage</b>	<b>267</b>
<b>I</b>	<b>Instabilité de Benjamin-Feir</b>	<b>271</b>

## TABLE DES MATIÈRES

# Introduction générale

Les essais en bassin tiennent une place importante dans l'histoire de l'hydrodynamique navale.

Depuis les premiers travaux de Stokes sur la houle stationnaire non linéaire, en passant par l'étude dès les années 60 des interactions résonantes jusqu'à nos jours, les nombreux travaux sur la propagation des vagues montrent l'intérêt toujours soutenu de la recherche vers la compréhension de la houle.

L'étude de la houle multi-directionnelle abordée dans cette thèse fait partie des objectifs prioritaires du Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'ECN qui vient de se doter d'un bassin de houle de grandes dimensions. Pour exploiter au mieux ces nouvelles capacités en recherche expérimentale, il s'avère nécessaire d'acquérir des compétences adaptées concernant autant la génération des vagues et l'analyse des mesures que la compréhension fine des phénomènes qui interviennent dans le bassin.

Du point de vue de l'utilité du bassin, les essais interviennent lors de la phase de conception des structures off-shore, de corps flottants, de navires. Ils peuvent par exemple apporter des réponses à des questions concernant le dimensionnement de la structure, sa tenue à la mer ou encore son comportement en survie dans des conditions extrêmes. Des mesures en mer peuvent être réalisées sur des constructions existantes mais s'accompagnent alors des aléas naturels de ce milieu ouvert par excellence. Les conditions de mer, de vent, de courant ne peuvent être contrôlées et ne seront pas forcément en harmonie avec les attentes des concepteurs. Il s'agit là d'un des intérêts majeurs du bassin de houle qui permet de générer les séquences de houle que l'on désire en accord avec les besoins du programme de conception. De plus, le travail sur des maquettes, à échelle réduite, peut favoriser l'investigation d'un plus grand nombre d'options de design en assurant un coût de fabrication et de test plus faible que des essais à l'échelle un.

Les essais en bassin apportent également une contribution importante sur la compréhension de la houle elle-même. Ils rendent possible l'étude des phénomènes non linéaires de propagation ou du déferlement par exemple, et permettent ainsi d'accéder à une meilleure connaissance du milieu environnant les structures marines.

D'un point de vue phénoménologique, la reproduction des vagues en bassin de houle a trait aux problèmes classiques de la propagation des ondes de surface qu'on observe en milieu ouvert. Dispersion et effets non-linéaires se produisent dans le bassin comme en mer. Cependant, la conduite d'essais expérimentaux s'accompagne d'une série de phénomènes spécifiques au milieu confiné que représente le bassin :

- Le mouvement du batteur doit être contrôlé pour reproduire la houle désirée dans le bassin.
- Cette génération apporte une nouvelle source de non-linéarité, qui se traduit par l'apparition d'ondes parasites ou d'instabilités ;
- La réflexion de la houle à l'extrémité du bassin opposée au générateur nécessite l'emploi

d'un dispositif permettant d'absorber cette onde incidente pour éviter qu'elle ne retourne perturber l'écoulement ;

- D'autres effets liés au confinement interviennent comme la profondeur finie à grande longueur d'onde ou la présence des murs réfléchissants sur les côtés du bassin.

D'un point de vue expérimental, les effets de confinement présentés ci-dessus doivent être pris en compte lors de la mise en place et du déroulement des essais. Leur réalisation nécessite alors une connaissance approfondie des mécanismes entrant en jeu. Pour permettre cette maîtrise des conditions expérimentales, des outils auxiliaires sont indispensables et prennent la forme à la fois de modèles

- **théoriques** comme la connaissance des lois de propagation (vitesse, dispersion), des lois de commande du batteur pour la génération ;
- **numériques** comme la simulation partielle ou complète des phénomènes intervenant dans le bassin.

En parallèle, il est nécessaire de développer des outils d'analyse qui permettent de caractériser de façon précise ces conditions d'expériences et d'interpréter les mesures brutes. Ces outils d'analyse devront présenter plusieurs degrés de raffinement en fonction des effets à quantifier.

L'objectif de cette thèse est donc à la fois la génération correcte et l'analyse détaillée d'états de mer complexes en bassin de houle. Pour cela, le développement d'outils d'aide à la compréhension et d'outils d'analyse des phénomènes dans le bassin a constitué un axe majeur du travail effectué, mettant en jeu à la fois des approches théoriques (analytiques), numériques (simulations) et expérimentales. Ainsi, l'utilisation initialement prévue de modèles numériques non linéaires instationnaires, qui s'est transformée en participation à la mise au point, s'est révélée très riche d'enseignements à la fois pour l'appréhension des techniques de génération et pour celle des phénomènes physiques non linéaires associés.

L'étude de la réflexion sur la plage absorbante du bassin, de la suppression des ondes libres, de la séparation des effets non linéaires pairs/impairs ou de la houle irrégulière directionnelle sont autant d'exemples qui ont nécessité la mise au point de méthodes d'analyse, à partir des techniques présentes dans la littérature, adaptées spécifiquement aux cas traités, et dans la plupart des cas améliorées. Différents modèles analytiques ont servi à mieux appréhender certains effets comme la prise en compte des murs latéraux lors de la génération de houle (modèle fréquentiel linéaire) ou des effets d'amplitude finie sur la vitesse de phase des ondes (modèle stationnaire d'ordre trois). En outre le développement d'une solution analytique originale au second ordre a permis la mise en place de la technique de suppression des ondes libres parasites mentionnée plus haut. L'approche numérique instationnaire, en reproduisant le fonctionnement complet du bassin de houle prenant en compte murs latéraux, générateur, plage absorbante et non-linéarités d'ordre deux ou plus, a permis de mieux préparer les essais expérimentaux et a aussi mis en évidence la nécessité d'améliorer les techniques de génération. Au cours des essais numériques et expérimentaux, plusieurs techniques performantes de génération de houle ont été mises au point pour améliorer le fonctionnement des batteurs. L'utilisation de la méthode de Dalrymple a porté ses fruits lors de la génération de houles obliques, houles irrégulières et houle focalisée. La suppression des ondes libres conduit à la génération de champs de vagues réguliers obliques corrects au second ordre et allonge la durée de mesure disponible. Enfin, la reproduction déterministe abordée en 2D et en 3D permet de générer des paquets de vagues cibles dans le bassin et donnera par la suite tout loisir de mesurer lors d'essais ou de calculer avec les modèles numériques instationnaires la cinématique sous les crêtes cambrées lors d'études de dimensionnement par exemple.

Nous nous sommes efforcés d'utiliser les différents points de vue et outils disponibles, analyse, théorie, simulations et expériences, dans un ensemble cohérent, en cherchant systématiquement à inter-valider les méthodes. Par exemple, entres autres, au premier ordre, la solution analytique stationnaire 3D existante valide les simulations numériques en régime établi après passage du front d'onde. Au second ordre, cette solution analytique 3D est comparée positivement aux solutions existantes 2D lorsque la direction de propagation est nulle. L'accord est vérifié en régime établi en 3D avec les simulations. La suppression des ondes libres fonctionne parfaitement pour ces mêmes simulations.

De même la cohérence entre les bassins expérimental et numériques nous permet d'utiliser indifféremment des essais ou des simulations, par exemple lors de la reproduction déterministe en 2D et 3D.

Tous ces points, ainsi que d'autres sont abordés dans ce rapport. On a tenté, autant que possible, de regrouper les différents aspects autour de thèmes forts qui correspondent aux différentes parties de ce rapport de thèse. La diversité des sujets abordés ainsi que l'inter-connexion entre ces sujets nous conduit cependant à de fréquents renvois entre les parties. On a tenté de réduire le plus possible ces renvois pour simplifier la lecture du document, en adoptant finalement le plan suivant. La première partie traite du développement de deux outils numériques de modélisation non linéaire d'un bassin de houle, basés sur une méthode de résolution spectrale. Cette étude constitue le sujet de travail le plus long et a été réalisée en collaboration avec David Le Touzé [79] également en thèse à l'époque. Le travail de développement sur cette approche ayant été réalisé en commun, et une grande partie des résultats obtenus figurant déjà dans la thèse de D. Le Touzé, on a choisi ici d'éviter au maximum les répétitions concernant les réalisations communes déjà rapportées par D. Le Touzé et de n'aborder que certains points nouveaux ou simplement nécessaires à la compréhension du reste du travail. La mise en place des équations à résoudre fournira une description détaillée des éléments du bassin physique qu'on souhaite modéliser numériquement (batteur, plage, murs). On rappellera rapidement quelques notions sur la méthode spectrale employée pour résoudre le jeu d'équations obtenu. Le premier modèle décrit ensuite reproduit au second ordre le fonctionnement du bassin réel. En citant les travaux de validation qu'on a effectués, déjà présentés en [79], on abordera plus spécifiquement la description du fonctionnement du batteur, la vérification de la conservation des volumes et énergies, ainsi que l'excitation des modes longs au second ordre. Le deuxième modèle consiste en une évolution du précédent où les conditions de surface libre sont traitées cette fois de manière complètement non linéaire au moyen d'une approximation d'ordre élevé (High-Order Spectral Method). Il nous donne accès aux effets non linéaires d'ordre supérieur à deux. En houle régulière, ce modèle sera validé dans le domaine fréquentiel en comparaison avec une autre solution non linéaire, en régime stationnaire cette fois. L'étude de l'approximation HOS qui donne la vitesse verticale fera apparaître une propriété de convergence tardive *i.e.* au delà de la saturation habituellement décrite dans la littérature, qui nécessite un traitement correct du repliement. Le bassin réel et les deux bassins numériques seront mis à profit conjointement tout au long des parties suivantes.

La deuxième partie traite de deux effets de confinement accompagnant les essais de houle en bassin. Les performances de la plage ou des zones absorbantes sont quantifiées dans un premier chapitre, au niveau expérimental tout d'abord. La méthode de Mansard et Funke [92], utilisée en houle régulière pour  $P \geq 3$  sondes, sera améliorée pour fournir une meilleure estimation de la réflexion, notamment pour nos essais de hautes fréquences, fortement cambrés. Pour cela, les vitesses de phases à l'ordre trois de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont prises en compte et leurs amplitudes déterminées de manière itérative. L'application de cette méthode

aux essais effectués fournit une estimation correcte du coefficient de réflexion. Enfin, on mettra en évidence l'apparition de diverses ondes parasites, au second ordre dues aux interstices entre les batteurs et au troisième ordre sous forme d'instabilités temporelles.

Le second chapitre sur le confinement verra la prise en compte des murs latéraux pour construire la loi de mouvement du batteur. En reprenant les méthodes existantes dans la littérature et en les implémentant dans les batteurs numériques et expérimental, on insistera sur l'amélioration obtenu, en terme de zone utile, à l'aide d'exemples numériques ou expérimentaux.

La troisième partie répond aux questions relatives aux ondes libres qui apparaissent lors de la génération de houle oblique. Ce phénomène parasite est dû aux non-linéarités sur la paroi du batteur et se traduit par la génération d'ondes courtes de longueur d'onde environ un quart de l'onde incidente, se propageant deux fois moins vite dans le bassin. On expose une solution analytique au second ordre en régime stationnaire (domaine fréquentiel), suffisante pour prédire l'amplitude des ondes libres. À partir de là, on peut s'intéresser à l'importance du champ parasite d'ondes libres, par rapport au champ d'onde liée. On verra ainsi que les méthodes de génération élaborées mises en place en II.2 ont tendance à générer un taux d'onde libre plus important que la méthode simple du serpent, d'où l'intérêt d'exploiter une méthode permettant de se débarrasser de ces parasites. Une stratégie de suppression est alors proposée et aussitôt validée dans les bassins. Les simulations temporelles grâce au code au second ordre sont un outil dédié pour une validation et prouvent l'efficacité de la méthode en 2D et en 3D. Dans le bassin expérimental, à la fois la génération correcte du mouvement correctif et la mesure précise des ondes liées et libres du second ordre sont deux difficultés supplémentaires absentes des simulations et qui ont ralenti la validation.

La quatrième partie aborde la reproduction déterministe d'états de mer focalisés de forte cambrure. En 2D le point départ est constitué de deux techniques présentes dans la littérature, l'une de décomposition initiale au second ordre, l'autre de corrections itératives pour prendre en compte les vitesses de phase non linéaires. Leurs utilisations révèlent un mauvais contrôle des longueurs d'onde courtes. La séparation des effets non linéaires pairs/impairs sert de base à un modèle partiel au troisième ordre qui permet une meilleure estimation des vitesses de phase réelles et conduit à une technique satisfaisante de reproduction.

La cinquième et dernière partie est consacrée à l'étude de houles irrégulières. En 2D tout d'abord, les premiers essais réalisés dans le bassin de houle sont traités de manière à mettre en évidence des phénomènes parasites comme l'excitation des modes longitudinaux et transverses. En 3D les méthodes d'analyse de houle directionnelle abordées en DEA sont validées puis utilisées lors d'essais expérimentaux.

## Première partie

# Bassins de houle et outils numériques



---

Cette partie traite du développement de deux modèles numériques instationnaires reproduisant un bassin de houle.

Comme on l'a mentionné en introduction, une connaissance approfondie des phénomènes physiques liés à la génération et à la propagation de houle est nécessaire à l'interprétation correcte des mesures. On utilise ici l'exemple du bassin de houle du Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'ECN pour mettre en évidence ces phénomènes. La figure 1 donne un schéma du bassin et montre ses différentes parties. En bas à droite se situe le générateur de houle. Il est constitué de 48 volets articulés indépendants qui permettent la génération dans le bassin de houles multi-directionnelles complexes. En haut à gauche on observe la plage amortissante dont le but est d'atténuer les vagues arrivant au bout du bassin pour éviter qu'elles ne se réfléchissent sur le mur du fond et ne reviennent perturber l'écoulement. Au centre on voit également la passerelle qui porte les instruments de mesure et le puits qui permet par exemple des études sur les ancrages en grande profondeur. Les dimensions de ce bassin sont de  $50 \times 30 \times 5$  m. La géométrie des volets et la puissance installée donnent accès à des grandes amplitudes de

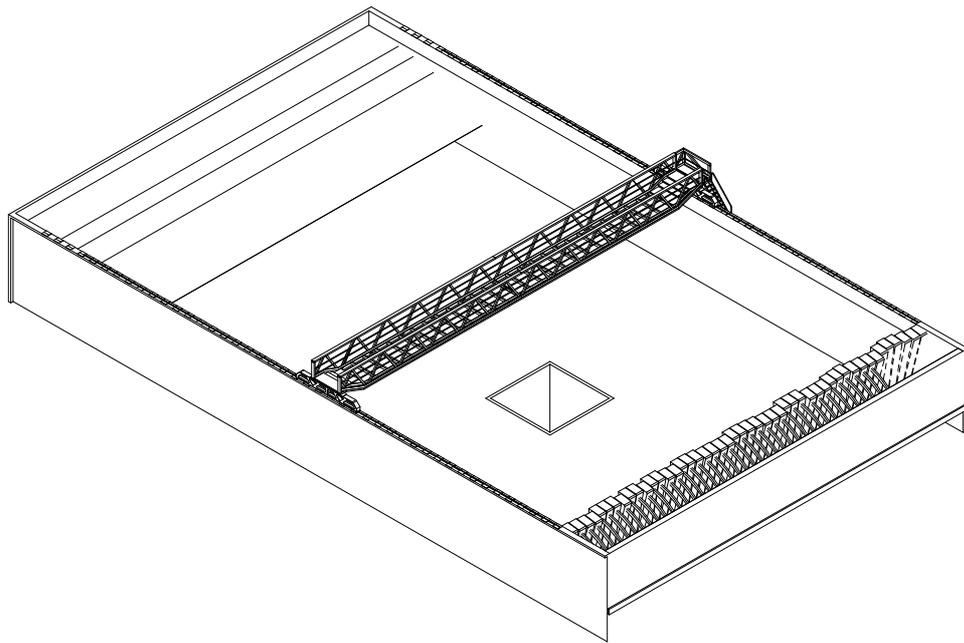


FIG. 1 – Schéma du bassin de houle de l'École Centrale de Nantes

houle. En houle droite, entre 2.5 et 3.5 s, on atteint des hauteurs crêtes à creux de 1 m. La segmentation du batteur permet la génération de houles multi-directionnelles en jouant sur la phase des volets.

Certains effets sont communs à tout type de bassin de houle. Les effets transitoires tels que le passage des fronts d'onde incident et réfléchi délimitent une durée utile de mesure où le régime établi est atteint, en houle régulière par exemple. La qualité de la stationnarité de la houle au cours du temps dépend des performances de la plage absorbante et des réflexions sur les murs latéraux. Des effets non linéaires d'ordre élevés interviennent, tels que l'augmentation de la longueur d'onde, de la vitesse de phase avec la cambrure en houle régulière. Le déferlement

---

des vagues se produit lorsque la houle générée est très cambrée, au niveau du front d'onde où certaines crêtes sont plus importantes ou encore si une focalisation d'énergie est créée. L'excitation du bassin pendant l'essai impose d'attendre le retour au calme entre deux essais, ce qui prend d'une dizaine de minutes jusqu'à une heure dans certains cas. La campagne d'essai s'allonge en conséquence, alors qu'elle est par ailleurs limitée par la disponibilité du bassin.

D'autres aspects sont plus spécifiques d'un bassin de houle multi-directionnelle, comme le contrôle du mouvement des volets qui nécessite la prise en compte des murs latéraux parfaitement réfléchissants pour obtenir une zone utile dans le bassin suffisamment étendue. Enfin, les grandes dimensions du bassin amènent un certain nombre de contraintes supplémentaires telles que le temps de mise en place assez long des moyens de mesure (sondes, supports, maquettes) dans l'environnement du bassin.

Les différents points qu'on vient d'évoquer nous incitent à développer en parallèle du bassin expérimental des moyens de simulations numériques. Ces modèles fourniront des données complémentaires aux essais expérimentaux dont les objectifs principaux concernent

- la compréhension des phénomènes physiques en jeu dans le bassin ;
- l'aide au développement et à la validation d'outils d'analyse des mesures ;
- l'aide à la préparation d'expériences à travers par exemple la réalisation d'études systématiques de paramètres plus pratiques (rapides et moins coûteuses).

Pour répondre à ces critères, l'approche que nous avons adoptée vise à reproduire l'essentiel des caractéristiques du bassin pour fournir des résultats aussi proches que possible des mesures réelles. Une approche instationnaire s'impose alors pour traiter des effets transitoires, de même que la modélisation du batteur pour permettre la génération de houles complexes. Des objectifs supplémentaires assurent la pérennité d'un tel modèle numérique

- solution de génération et propagation de la houle obtenue de manière précise et à un coût de calcul faible pour être effectivement utilisable
- description continue possible de la cinématique au-dessus de la surface libre pour l'emploi de méthodes couplées de type SWENSE [48] en développement au Laboratoire

L'ensemble des objectifs et contraintes fixés a pu être atteint grâce l'emploi d'une méthode de résolution spectrale originale dans la modélisation des bassins de houle.

En théorie potentielle (fluide parfait irrotationnel), les études sont nombreuses dans la littérature. On dénote deux approches différentes, l'une purement bassin avec la prise en compte des murs, et l'autre orientée propagation avec des conditions aux limites périodiques sur les parois latérales du domaine. La plupart des méthodes présentes dans la littérature sont formulées dans ces approches, en fonction des besoins des auteurs. Kim *et al.* [72] proposent une revue assez complète des bassins de houles numériques avec une formulation intégrale des équations (BIE). Les méthodes de résolution employées pour déterminer le potentiel des vitesses dans ce cas sont de la famille des Méthodes des Éléments aux Frontières (BEM) qui consiste à exprimer le potentiel inconnu en un point du domaine en fonction des conditions aux limites. Les conditions de surface libre sont traitées avec un suivi lagrangien ou semi-lagrangien des particules à la surface libre alors que les BIE sont résolues en formulation eulérienne : l'ensemble est souvent appelé procédure mixte eulérien-lagrangien (MEL). En deux dimensions, on peut citer le code Canal développé par Clément [32, 34]. Plusieurs études utilisent une méthode de décomposition de domaine, comme De Haas [41] en 2D et 3D, ou Tulin [] LONGTANK en 2D.

En 3D encore, Ferrant a réalisé des travaux portant principalement sur les effets de diffraction non linéaire (voir par exemple [46, 49]). On peut citer le modèle numérique basé sur la Méthode des Éléments aux Frontières (BEM), initié par Grilli *et al.* [57] et amélioré par

---

Fochesato [50]. Ce code est appliqué à la focalisation géométrique générée par un batteur à houle dans le papier de Brandini et Grilli [21] et la thèse de Fochesato [50]. D'autres travaux en BEM 3D utilisent une formulation périodique, comme Xue *et al.* [128] avec une méthode mixte eulérien lagrangien et une formulation intégrale frontière.

Une étude très complète d'une méthode mixte éléments–différences finis en 2D faite par Westhuis [126]. D'autres auteurs ont proposé des études en fluide visqueux. Un bassin de houle numérique a été développé par Park *et al.* [103]. Il est basé sur la résolution des équations de Navier-Stokes grâce à un schéma de différences finies et à un schéma marker-and-cell (MAC). Il permet l'étude de la propagation de vagues non linéaires et leurs interactions avec un corps tri-dimensionnel fixe dans un courant uniforme.

L'intérêt des méthodes BEM, MAC ou VOF citées est la possibilité de traiter de la phase initiale du déferlement pour le premier, et de la viscosité pour les deux dernières. Ces méthodes sont cependant relativement coûteuses en temps de calcul notamment en 3D, malgré des améliorations dans cette voie (Fochesato [50]). Elles sont utilisées avec une résolution (liée à la taille du maillage de discrétisation) souvent encore trop grossière en 3D pour tirer partie de leurs spécificité et garantir une précision correcte.

On présente maintenant les méthodes spectrales, efficaces et rapides.

Une approche analytique de modélisation instationnaire de bassin existe en linéaire par Lunéville [90] et [89]. Il s'agit d'une méthode spectrale de Galerkin où les inconnues sont projetées sur une base de fonction et les équations sur un ensemble de fonction de test (souvent les fonctions de base et de test sont identiques), aboutissant à une équation différentielle ordinaire pour chaque coefficient de la projection (amplitudes modales). Il faut noter que cette méthode peut inclure un terme d'absorption semblable à l'effet de la viscosité mais ne prend pas en compte la plage absorbante. En effet, une zone absorbante dans une région limitée de l'espace entraîne un couplage des équations modales : on perd le caractère analytique de la résolution et on aboutit au même type de résolution numérique que dans notre modèle.

Lorsqu'on résout numériquement, les conditions de surface libre sont réécrites sous forme d'équations d'évolution pour l'élévation et le potentiel. On calcule alors à chaque pas de temps les dérivées temporelles pour évaluer ces grandeurs au pas de temps suivant.

En non linéaire, la méthode *directe* a été proposée initialement par Fenton et Rienecker [45]. Elle consiste à décomposer le potentiel inconnu sur la base de modes propres du bassin (périodique ou non) et d'avancer en temps les amplitudes modales  $a_m$ . Pour cela les conditions de surface libres forment un système linéaire d'équations pour les  $\partial_t a_m$ , système dont on doit évaluer le second membre sur la surface libre. Cette opération est coûteuse en temps de calcul par l'emploi de fonctions cosh à évaluer sur la surface, de même que l'inversion du système. Johannessen [68] a utilisée cette approche en formulation périodique et D. Le Touzé [79] dans un bassin.

Pour accélérer l'inversion du système, une formulation en potentiel de surface (Zakharov [130]) est préférable car elle permet l'emploi de Transformées de Fourier. Les modèles HOS ont été développés en hydrodynamique à la fin des années 80 conjointement par West *et al.* [125] et Dommermuth et Yue [42]. Ils sont basés sur une décomposition formelle du potentiel en série de puissance. Un peu plus tard, en 1993, Craig et Sulem [37]) ont présenté une approche similaire basée sur la définition d'un opérateur permettant de passer du potentiel de surface à la vitesse normale à la surface, et la décomposition formelle de cet opérateur en série de puissance. Les modèles sont très proches dans l'esprit et une modification apportée par Bateman *et al.* [4] et [5] sur l'opérateur les a conduits à re-développer le modèle HOS original. La modification en question consiste à prendre un opérateur qui donne la vitesse verticale à la surface et non

---

plus normale, toujours à partir du potentiel de surface. Avec cette modification, la distinction entre décomposition du potentiel ou de l'opérateur devient obsolète, les deux formulations correspondant exactement aux mêmes calculs.

La séparation du potentiel en deux parties (Agnon et Bingham [1]) permet la génération de houle avec la résolution d'un problème additionnel.

Des applications récentes de ces méthodes HOS ont été publiées. Skandrani *et al.* [116] ont ainsi développé un modèle HOS tenant compte des effets visqueux et de tension de surface. Ce modèle leur a permis d'étudier le phénomène de transfert vers les basses fréquences accompagnant la propagation de houle régulière non linéaire soumise à une instabilité de Benjamin-Feir. Les faibles longueurs d'onde, favorisées par la capillarité et amorties par la viscosité jouent un rôle important dans ce mécanisme. Tanaka [119, 120] a utilisé le modèle de West *et al.* en formulation périodique pour étudier l'évolution aux temps longs de houles irrégulières. Il a pu ainsi obtenir l'évolution des grandeurs caractéristiques telles que skewness et kurtosis [119], caractériser les transferts d'énergie non linéaires et ainsi valider la théorie d'Hasselmann sur les-dits transferts [120].

La majeure partie de ce travail sur les modèles numériques s'est faite en collaboration avec David Le Touzé, aussi bien pour l'établissement des équations à résoudre, la mise au point de l'algorithme de résolution, le codage proprement dit et la validation des modèles. Ce travail d'équipe a été très fructueux en termes d'échange à tel point qu'il est parfois difficile et inutile de séparer objectivement le travail de chacun. Il est plus raisonnable de considérer ces modèles comme une véritable réalisation commune. On rappelle ici les grandes lignes du travail sur le code au second ordre en adaptant un passage de la thèse de D. Le Touzé [79]

- [D. Le Touzé a] commencé à travailler sur ce thème à la fin de [sa] première année de thèse vers juin 2001 [...] pour déboucher en janvier 2002 sur un modèle dont la structure se montrait alors pertinente mais encore imparfaite ;
- à compter de cette date, [je l'ai] rejoint et nous avons continué à développer le code de calcul en équipe, ce qui inclut : la mise en œuvre de plusieurs formes de batteurs, un passage à trois dimensions, une amélioration de la rapidité de calcul, une qualification des propriétés de convergence, la mise en place d'une rampe en temps, d'une plage d'absorption numérique, le calcul des volumes et énergies, etc. ; le code a alors été baptisé de son acronyme 'SWEET' pour Spectral Wave Evolution in the ECN Tank ;
- [l'implémentation au sein du code des mouvements du batteur et de la suppression des ondes libres a été effectuée : ce travail sera décrit plus loin respectivement en I.2.2 et III]
- en outre, à l'automne 2002, pour rendre plus pratique et étendre son utilisation, nous avons repensé et re-programmé intégralement le code ;
- enfin, au printemps de [l']année 2003, après que nous avons envisagé ensemble la possibilité d'améliorer encore grandement la vitesse de calcul, [D. Le Touzé a] opéré une nouvelle refonte du code [diminution des ressources mémoire nécessaire par un meilleur stockage des variables, accélération du calcul grâce à l'emploi de Transformées de Fourier rapides] ;

Pour le code HOS, là aussi le travail d'équipe a été fructueux. L'expérience du modèle au second ordre nous a grandement facilité la compréhension de l'approximation HOS, ainsi que l'expérience de D. Le Touzé sur la méthode directe. Après de longues discussions préliminaires,

---

D. Le Touzé a programmé l'algorithme à la fin de sa thèse. Je suis ensuite intervenu pour y inclure les mouvements de batteur complexes ainsi que pour réaliser des validations en houle régulière.

Cette partie s'organise en trois chapitres de la façon suivante :

- L'énoncé des hypothèses utilisées dans la théorie potentielle aboutit dans un premier temps à un jeu d'inconnues et d'équations pour modéliser la propagation de houle en trois dimensions. Sont abordés ensuite des aspects plus spécifiques des bassins, la génération à une extrémité, l'absorption à l'autre.
- Ces équations sont tout d'abord résolues par une approche perturbative au second ordre. La décomposition en deux potentiels dits spectral et additionnel permet de prendre en compte la géométrie exacte du batteur, ainsi que les mouvements de ce dernier. Un rappel des validations effectuées en commun et déjà présentées dans la thèse de D. Le Touzé est fait, ainsi qu'une étude de l'excitation des modes longs. On termine par l'application du code lors d'un contrat avec la DGA sur le B600.
- Le deuxième modèle numérique, est proposé ensuite avec un traitement non linéaire complet des conditions aux limites de surface libre. Basé sur l'approximation d'ordre élevé (HOS) de la dérivée verticale du potentiel à la surface libre, il inclut également la modélisation du batteur.



# Chapitre I.1

## Position du problème

On décrit dans ce chapitre la mise en place des équations modélisant le processus instationnaire de génération et propagation de houle dans un bassin. La théorie potentielle en profondeur finie est utilisée dans un bassin avec des murs réfléchissants, un batteur et une zone absorbante. On présente enfin la méthode de résolution spectrale utilisée pour résoudre le système d'équations aux limites. Une description détaillée de ce type de méthode est disponible dans la thèse de D. Le Touzé, aussi, on se contentera ici de donner simplement les bases de la méthode pour éviter les répétitions.

### I.1.1 Hypothèses et Équations

On présente dans cette section les hypothèses faites pour modéliser l'écoulement instationnaire dans un bassin de houle ainsi que les équations obtenues<sup>1</sup>. On considère un domaine fermé  $D$  contenant de l'eau. Il représente le bassin dans lequel on veut générer la houle. Les bassins modélisés sont de type rectangulaire comme l'est la grande majorité des bassins de houle réels construits de par le monde. La modélisation numérique du bassin océanique de l'ECN constitue un objectif principal de notre approche mais d'autres bassins ont été également reproduits, tels que le B600 de la DGA à Rouen, bassin de traction de dimensions 600x15x8 m (*cf.* la section I.2.4 et annexe) et de nombreux bassins bi-dimensionnels destinés à fournir des solutions de référence (en génération de houle ou sloshing, section I.2.3.1) pour valider d'autres codes actuellement en développement au Laboratoire. On peut noter que les bassins simulés sont de profondeur constante  $h$  et que les effets de cette profondeur finie seront pris en compte dans les modèles développés.

On choisit un système de coordonnées cartésien dont l'origine  $O$  du repère est placée en un coin du bassin *i.e.* à une intersection batteur–mur latéral–surface libre au repos. L'axe vertical ( $Oz$ ) est orienté vers le haut, l'axe ( $Ox$ ) selon la longueur  $L_x$  du bassin et l'axe ( $Oy$ ) selon la largeur  $L_y$ . La face  $x = 0$  correspondra à l'emplacement du batteur et la plage absorbante est placée à l'autre extrémité, près du mur en  $x = L_x$ . Les coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  seront représentées par le vecteur  $\mathbf{x}$ . On notera  $\nabla$  le gradient horizontal et  $\tilde{\nabla}$  le gradient tri-dimensionnel.

On utilise l'hypothèse de fluide parfait (non visqueux) incompressible pour décrire le fluide (l'eau) contenue dans ce bassin, hypothèse généralement adoptée pour la génération et la pro-

---

1. On prend le temps de présenter en détail ici l'établissement des conditions aux limites ; elles resserviront en effet plusieurs fois tout au long de cette thèse, dans le chapitre II.2 et la partie III.

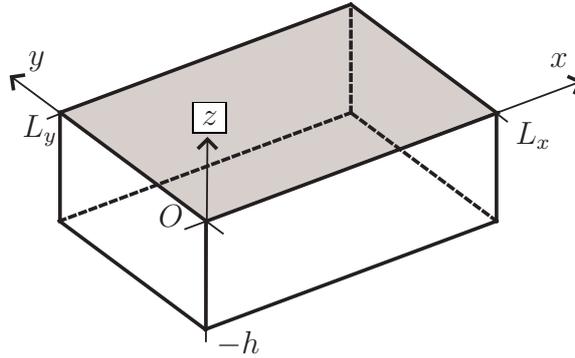


FIG. I.1.1 – Schéma du bassin avec repère spatial

pagation des vagues (voir la discussion sur les effets dus à la viscosité page 70). L'écoulement est complètement déterminé par la pression, le champ de vitesse et la forme de la surface libre. Les champs volumiques, champ de vitesse  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t)$  et pression sont décrits par un formalisme eulérien. Les équations qui régissent l'écoulement sont l'équation de continuité, qui traduit l'incompressibilité de l'écoulement, l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ainsi que les conditions aux limites.

L'écoulement est supposé irrotationnel<sup>2</sup>. Il existe alors un potentiel  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ , dit des vitesses, tel que  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t) = \tilde{\nabla}\phi$ . Le potentiel est défini à une fonction du temps seul près. L'équation de continuité  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  prend une forme simple pour le potentiel, qui doit vérifier l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } D$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement, ou équation d'Euler, peut être écrite sous la forme d'un gradient nul pour un fluide incompressible irrotationnel. Son intégration en espace conduit à la relation de Bernoulli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi|^2 = B(t) \quad (\text{I.1.1})$$

valable dans tout le domaine  $D$  avec  $B$  une fonction du temps uniquement. On choisit ici de ne pas donner de sens physique à celle-ci, appelée parfois constante de Bernoulli : on préfère l'intégrer dans le potentiel sans modifier le champ de vitesse, en posant<sup>3</sup>  $\phi' = \phi + \int B(t) dt$ . Cette relation de Bernoulli permettra de calculer la pression en tout point du domaine une fois le potentiel des vitesses connu. Elle conduit aussi à la condition de surface libre dite *dynamique* qui traduit le fait que la pression de l'eau à la surface libre est égale à la pression de l'air (les effets de tension superficielle sont négligés). Avant cela il convient de définir la position de cette surface libre. On suppose l'absence de déferlement et on utilise une fonction univoque  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$  pour décrire la surface libre. En écrivant que la pression est nulle à la surface libre,

2. On part du repos où le rotationnel de la vitesse est nul partout, alors on peut montrer que pour un fluide parfait barotrope soumis à des forces extérieures dérivant d'un potentiel, le rotationnel restera nul tout le temps (théorème de Kelvin (Guyon *et al.* [58]) ou de Thomson (Landau et Lifchitz [77]))

3. Cela revient à choisir par convention  $B = 0$  ; le potentiel étant toujours défini à une fonction du temps seul près. Cette fonction du temps seul dans le potentiel peut représenter par exemple une variation du niveau moyen du fluide. C'est parfois ce sens physique qui est attribué à  $B$  et qu'on a préféré inclure dans  $\phi$ .

on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

ce qui constitue la condition dynamique de surface libre (CDSL). Les autres conditions aux limites expriment que les surfaces du domaine fluides sont imperméables.

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{I.1.2})$$

avec  $\mathbf{U}$  la vitesse de la surface considérée et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au fluide. On en déduit que pour

- le fond du bassin

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h$$

- les murs latéraux

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } L_y$$

- le mur opposé au batteur

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L_x$$

Traitons maintenant de la surface libre. Elle est décrite par les points de coordonnées  $\{\mathbf{x}; \eta(\mathbf{x}, t)\}$  : il s'agit là encore d'une description eulérienne, d'une surface cette fois-ci. La vitesse  $\mathbf{U}$  de la surface libre peut être calculée par la dérivée particulière de la position ; cette dérivée particulière exprime la vitesse du point de la SL qui est en  $\mathbf{x}$  à  $t$ . On a alors

$$\mathbf{U} = \left. \frac{D}{Dt} \right|_{\eta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{x} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \tilde{\nabla}) \right) \left. \mathbf{x} \right|_{\eta(\mathbf{x}, t)} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta \right|_{\eta(\mathbf{x}, t)}$$

Un vecteur normale a pour composante  $\{-\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, 1\}$  d'où  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ . De plus, on a  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta$  d'où finalement la condition cinématique de surface libre (CCSL) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \eta \cdot \nabla \phi \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

Sur le batteur, la condition aux limites mérite un développement détaillé et sera explicitée dans la partie suivante. On peut d'ores et déjà faire un bilan partiel des autres équations à vérifier pour le potentiel et l'élévation de surface libre<sup>4</sup>

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans } D \quad (\text{I.1.3a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{I.1.3b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } L_y \quad (\text{I.1.3c})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L_x \quad (\text{I.1.3d})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla \eta \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.1.3e})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.1.3f})$$

4. On rappelle que la dernière inconnue, la pression  $p$  est obtenue par la relation de Bernoulli (I.1.1) une fois déterminés  $\phi$  et  $\eta$ .

Le principe de base des codes instationnaires développés est de réécrire les conditions de surface libre (CSL) sous la forme d'équations d'évolution pour  $\eta$  et  $\phi$ , du type  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \dots$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \dots$ , puis d'avancer en temps les inconnues  $\eta$  et  $\phi$  à partir du repos.

## I.1.2 Génération de la houle

On s'intéresse maintenant à la génération de la houle. Deux types de générateur ont été implémentés, à savoir la prise en compte d'une paroi mobile en  $x = 0$  et l'introduction d'une singularité de type doublet tournant dans le volume fluide. On s'attache simplement dans cette partie à décrire les conditions aux limites utilisées avec la première technique de génération, qui est commune aux deux codes développés (la deuxième technique sera abordée plus loin en I.3.2). D'autres parties traiteront ensuite plus spécifiquement de la notion de potentiel additionnel I.1.4.2 et de l'implémentation de la génération dans les codes numériques basés sur des méthodes spectrales au second ordre et en non linéaire complet I.3.2.

### I.1.2.1 Modélisation d'un batteur physique

On souhaite modéliser ici le batteur réel pour lequel la mise en mouvement d'une paroi génère un écoulement. Pour simplifier l'explication, on suppose que le batteur est situé au niveau de la paroi  $x = 0$ , qui est sa position moyenne, et qu'il occupe toute la largeur<sup>5</sup> du bassin, de  $y = 0$  à  $y = L_y$ . L'écoulement doit satisfaire une condition de glissement (I.1.2) sur la paroi mobile. On décrit le batteur par une surface continue définie par une fonction  $x = X(y, z, t)$ . On peut noter que dans la plupart des bassins expérimentaux la géométrie verticale est la même sur toute la largeur du batteur *i.e.* on posera  $X(y, z, t) = g_v(z) \tilde{X}(y, t)$  avec  $g_v(z = 0) = 1$ : la fonction  $g_v$  définit simplement la forme verticale du batteur. La figure I.1.2 montre des géométries classiques de batteur piston ou volet. Comme on l'a fait dans le cas de la surface libre, on peut déterminer

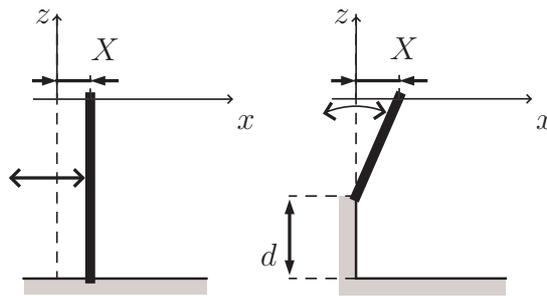


FIG. I.1.2 – Schéma de la forme verticale de batteur piston (à gauche) et volet (à droite)

la vitesse  $\mathbf{U} = \{U_x; \mathbf{u}_v\}$  du batteur<sup>6</sup> grâce à une dérivée particulière

$$\mathbf{U} = \frac{D}{Dt} \begin{vmatrix} X(y, z, t) \\ y \\ z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \cdot + (\mathbf{U} \cdot \tilde{\nabla}) \cdot \right) \begin{vmatrix} X(y, z, t) \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} + \mathbf{u}_v \cdot \nabla_v X \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}$$

5. On a également considéré le cas d'un batteur occupant une portion limitée de la largeur, se reporter pour plus de détails à la partie I.2.4

6. On définit cette fois la vitesse verticale  $\mathbf{u}_v = \{U_y; U_z\}$  et le gradient vertical correspondant  $\nabla_v$

Un vecteur normale dirigé vers l'extérieur a pour composante  $\{-1; \frac{\partial X}{\partial y}; \frac{\partial X}{\partial z}\}$  d'où  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial X}{\partial t}$ . De plus, on a  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla_v X \cdot \nabla_v \phi$  d'où finalement

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nabla_v X \cdot \nabla_v \phi \quad \text{en } x = X(y, z, t) \quad (\text{I.1.4})$$

Cette équation est la condition aux limites sur le batteur qui sera utilisée dans les modèles numériques présentés plus tard pour générer la houle. Elle tient compte du mouvement réel du batteur. Une autre technique de génération a été étudiée en introduisant une singularité dans l'écoulement, qu'on décrira en I.3.2.1.

### I.1.2.2 Rampe en temps

Enfin, une rampe en temps est appliquée au démarrage et à l'arrêt de la génération numérique comme en pratique. Son rôle est double :

- diminuer les contraintes mécaniques importantes imposées par un démarrage brutal pour le batteur physique (grandes accélérations) ; au niveau numérique, diminuer les discontinuités des termes de forçage pour faciliter la résolution de l'avance en temps
- diminuer l'excitation transitoire des modes propres du bassin. Ces modes perdurent durant tout l'essai, notamment les plus longs qui ne sont pas atténués par la plage absorbante (on y reviendra page 37).

L'essai de plusieurs types de rampe (linéaire, quadratique *etc.*) nous a montré (D. Le Touzé [79] page 126) l'importance des bords de la rampe. Outre le fait que l'augmentation de la durée de la rampe diminue l'amplitude des modes excités, il est ainsi apparu que l'utilisation d'une rampe démarrant et s'arrêtant plus doucement qu'une rampe linéaire produit moins de modes excités, à même durée de rampe. Suite à ces travaux numériques, la rampe utilisée dans le bassin réel, linéaire et de durée fixe de 3 s devrait être modifiée avec différents types de rampes et une durée variable.

## I.1.3 Zone absorbante

Une fois la houle générée et propagée dans le bassin, elle rencontre le mur opposé au batteur. Ce mur est l'équivalent d'un miroir parfait pour la houle, à la fois numériquement et expérimentalement, qui se réfléchit et retourne perturber la zone de mesure. Il est nécessaire d'empêcher ou au moins d'atténuer cette réflexion gênante et c'est le rôle des systèmes d'absorption placés à l'opposé des générateurs de houle. Ces systèmes sont divers : plaques perforées, plans inclinés, panneaux absorbants disposés en  $V$  verticaux *etc.* Il est nécessaire de reproduire cette absorption dans les modèles numériques pour reproduire au mieux l'évolution temporelle du champ de vague généré.

### I.1.3.1 Modélisation de la plage absorbante

On simule l'absorption de la houle à l'extrémité opposée du bassin par l'ajout d'un terme supplémentaire dans la condition dynamique de surface libre. On peut interpréter ce terme supplémentaire comme une modification locale de la pression de l'air (cette pression supplémentaire à la surface libre n'existe pas dans le domaine fluide). Ce terme doit atténuer la

cinématique sans altérer la conservation de la masse<sup>7</sup>. D'après Westhuis [126] un terme de pression à la surface (parfois appelé patch de pression) de la forme

$$p_a = \rho \nu(\mathbf{x}) \tilde{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n}$$

avec  $\mathbf{n}$  un vecteur normal extérieur, permet d'assurer une décroissance de l'énergie dans la zone d'absorption où  $\nu(\mathbf{x}) > 0$  (l'indice  $a$  désigne l'absorption et  $\nu(\mathbf{x}) = 0$  hors de la zone d'absorption). En effet, la puissance  $\mathcal{P}_a$  des forces de pression (voir Annexe D.2) dans cette zone de surface  $S_a$  est négative :

$$\mathcal{P}_a = - \int_{S_a} p_a \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS_a = - \int_{S_a} \rho \nu(\mathbf{x}) (\nabla \phi \cdot \mathbf{n})^2 dS_a \leq 0$$

Contrairement aux remarques contenues dans le papier de Clamond *et al.* [27], on ne s'intéresse pas ici à la constante de Bernoulli  $B(t)$ . En effet, celle-ci a été intégrée dans le potentiel par un changement de potentiel  $\phi' = \phi + \int B(t) dt$  au cours d'un raisonnement effectué à l'intérieur du volume fluide. L'ajout d'un terme de pression pour absorber la houle est purement surfacique et ne remet pas en cause ce changement. La condition de surface libre dynamique s'écrit maintenant

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \eta + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \nu(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \eta \cdot \nabla \phi \right) = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

en choisissant  $\mathbf{n} = \{-\nabla \eta; 1\}$ . On peut signaler que nombre d'autres méthodes d'absorption existent répertoriées par exemple par Kim *et al.* [72]. D'autres formes de patch de pression sont employées, par exemple la pression absorbante est choisie comme  $p_a = \nu(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, \eta, t)$  ou  $p_a = \nabla^{-1}(\nu \nabla(\phi(\mathbf{x}, \eta, t)))$  (Clamond *et al.* [27]). Les paramètres d'absorption peuvent être ajustés dynamiquement en fonction du flux d'énergie entrant dans la zone d'absorption (*e.g.* Grilli et Horillo [56]); on peut utiliser une condition de Sommerfeld sur le mur opposé au batteur (*e.g.* Westhuis [126]) ou encore utiliser une absorption active [72].

### I.1.3.2 Géométrie de la zone absorbante

Plusieurs formes  $\nu(\mathbf{x})$  de plage ont été utilisées suivant la qualité de l'absorption désirée et la forme du bassin à modéliser. Elles ont été définies par des fonctions polynômiales par morceaux avec  $\nu(\mathbf{x}) = 0$  pour  $\mathbf{x} \notin S_a$  (zone sans absorption) et  $\nu(\mathbf{x}) \neq 0$  pour  $\mathbf{x} \in S_a$ . La figure I.1.3 montre la géométrie de la zone d'absorption choisie lors des simulations correspondant au bassin de houle de l'ECN. Ces fonctions doivent vérifier certaines propriétés pour obtenir l'absorption désirée. On peut raisonnablement poser que la fonction  $\nu$  doit être la plus régulière possible,

---

7. L'absorption de la masse peut être exigée par exemple lorsqu'un soliton doit quitter le domaine de calcul en formulation périodique (Clamond *et al.* [27]). Elle peut se faire par l'ajout d'un terme de dissipation dans la condition cinématique de surface libre. En effet, la variation de volume est égale au flux de masse qui passe à travers la surface du domaine

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \rho (\mathbf{V} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I.1.5})$$

et la condition cinématique exprime justement l'imperméabilité de la surface libre  $(\mathbf{V} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = 0$ . D'après Westhuis [126], une telle modification de la CCSL peut aussi conduire à une diminution d'énergie et donc servir à absorber la houle. L'équation (I.1.5) prouve cependant qu'une modification de la CCSL s'accompagne nécessairement d'une variation du volume du fluide. Dans la suite, désireux de conserver correctement le volume de fluide au cours des simulations, on gardera donc inchangée la condition cinématique de surface libre.

notamment à la jonction entre zone sans absorption et zone d'absorption. Dans le cas de fonctions polynômiales, on impose la nullité des premières dérivées de  $\nu$  à la jonction. On cherche à reproduire les qualités des plages expérimentales, notamment une bonne absorption pour les longueurs d'ondes courtes et moyennes et une réflexion plus importante pour les modes plus longs. La première contrainte sur les ondes courtes impose de choisir une zone d'absorption

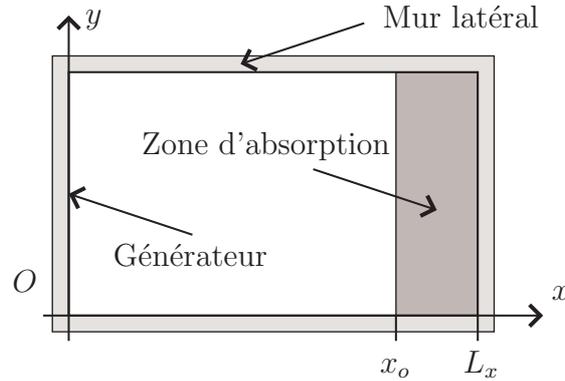


FIG. I.1.3 – Schéma de la zone d'absorption modélisée (vue de dessus du bassin de houle ECN)

progressive où  $\nu(\mathbf{x})$  est nulle au début de la zone puis augmente progressivement. Si au contraire la zone d'absorption est discontinue, la houle sera réfléchiée au niveau de la discontinuité. Si la zone reste de taille faible par rapport aux dimensions du bassin, il en résulte que les modes longs seront faiblement amortis comme dans le cas expérimental.

Les fonctions de forme ont été définies par deux paramètres indépendants, l'un équivalent à la longueur de la plage  $L_x - x_o$ , l'autre à l'intensité de l'absorption  $\alpha$ . Dans le cas d'un bassin bidimensionnel avec une plage à l'opposé du batteur, on définit

$$\nu(x) = \begin{cases} \alpha u^2 & \text{si } x \geq x_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \nu(x) = \begin{cases} \alpha u^2(3 - 2u) & \text{si } x \geq x_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = \frac{x - x_o}{L_x - x_o}$$

Pour des simulations dans des bassins plus exotiques, lors de la simulation d'un batteur sur un mur latéral du bassin de traction B600 de la DGA à Val de Reuil par exemple, des plages latérales ont été ajoutées de manière à limiter la taille du bassin à simuler à la zone intéressante. La figure I.1.4 donne un schéma des plages utilisées dans ces simulations. On note une zone absorbante en face du batteur destinée à reproduire une plage réelle et les deux zones absorbantes artificielles latérales.

## I.1.4 Résolution du problème par une méthode spectrale

On décrit dans un premier temps la décomposition du potentiel cherché sur la base des modes propres du bassin, puis on introduira la notion de potentiel additionnel nécessaire à la prise en compte de la condition aux limites sur le batteur pour la génération de la houle.

### I.1.4.1 Modes propres du bassin

On conseille de se référer à D. Le Touzé [79] pour une définition précise des méthodes spectrales ainsi qu'une revue de leurs nombreuses applications en Mécanique des Fluides. On

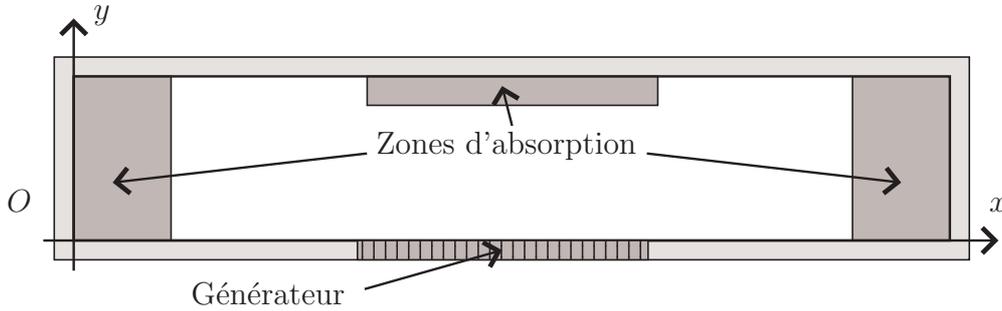


FIG. I.1.4 – Schéma de la zone d'absorption modélisée (vue de dessus du B600)

se contente ici d'une présentation simplifiée, en faisant apparaître la base des modes propres du bassin sur laquelle sont exprimées les inconnues à déterminer.

En considérant le sous-système d'équations linéaires (I.1.3a) à (I.1.3d) et en ajoutant à ce sous-système une condition homogène de Neumann sur le mur  $x = 0$ , on peut le résoudre analytiquement. Les conditions aux limites permettent de séparer les variables et d'exprimer le potentiel solution comme une superposition de modes élémentaires :

$$\phi(x,y,z,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn}(t) \cos k_{xm}x \cos k_{yn}y \frac{\cosh k_{mn}(z+h)}{\cosh k_{mn}h} \quad (\text{I.1.6})$$

avec  $k_{in} = \frac{n\pi}{L_i}$  pour  $i = x, y$  et  $k_{mn} = \sqrt{k_{xm}^2 + k_{yn}^2}$ . Ces modes sont les modes propres du bassin. L'ensemble des modes propres<sup>8</sup> forme une base orthogonale sur laquelle seront décomposées les solutions des différents modèles. De là vient le nom employé dans nos travaux de méthode spectrale. Pratiquement, les sommes seront tronquées à des nombres finis  $N_x, N_y$  de termes. Les avantages à utiliser ce genre de décomposition sont nombreux :

- chaque mode vérifie une partie des équations (I.1.3), et il ne reste qu'à déterminer l'amplitude  $A_{mn}(t)$  de chaque mode grâce aux CSL (I.1.3e) et (I.1.3f). Ceci est réalisé à l'aide de  $N_x \times N_y$  points de collocation répartis sur la surface libre ;
- la description est globale *i.e.* dans tout le domaine (par opposition à des approches différences ou éléments finis qui sont locales) et les dérivées partielles pourront être calculées exactement ;
- chaque mode possède un sens physique : il s'agit d'un mode propre du bassin réel ;
- un des avantages majeurs est l'apparition des fonctions cosinus. Dans les CSL, le potentiel et ses dérivées, exprimés en  $z = 0$ , font apparaître des sommes du type (I.1.6), à calculer en chacun des  $N_x \times N_y$  points de collocation. Les fonctions horizontales en cosinus permettent d'utiliser des transformées de Fourier pour évaluer ces sommes d'où un coût de calcul en  $N \log N$  (avec  $N = N_x$  ou  $N_y$ ), plus faible que celui d'une évaluation directe en  $N^2$ . Le gain en temps de calcul ainsi obtenu est très appréciable et permet d'employer un nombre  $N$  élevé de modes tout en gardant des temps de calcul raisonnables.

8. On peut noter que le mode zéro  $A_{00}(t)$  correspond à une fonction du temps seul : il pourra représenter le cas échéant une variation du niveau moyen dû à un déplacement moyen du batteur, ou attestera de la bonne conservation du volume.

Les inconvénients sont la restriction à des géométries simples pour lesquels les modes peuvent être facilement explicités (géométries rectangulaires ou cylindriques), l'impossibilité apparente de prendre en compte une condition inhomogène sur un des murs latéraux puisqu'on a utilisé une condition homogène pour construire les modes. Cette seconde restriction est cependant facilement levée comme on le verra dans la section suivante I.1.4.2.

### I.1.4.2 Notion de potentiel additionnel

Il s'agit d'une technique pour générer la houle tout en gardant un domaine rectangulaire fixe propice à la méthode spectrale. On vient de voir que l'évolution de la surface libre est traitée numériquement par une méthode spectrale, et plus précisément que le potentiel est décomposé en une superposition d'ordre (de perturbation pour le code second ordre, formels pour le code HOS) et qu'à chaque ordre, la solution est exprimée sur la base des modes propres du bassin. Cette décomposition en modes propres suppose que le flux de masse est nul partout sur les murs.

Dans le cas d'un batteur, la condition aux limites de Neumann inhomogène sur celui-ci (I.1.4) est une condition linéaire en  $\phi$ . Dans le cas d'un doublet tournant, la condition homogène sur le mur  $x = 0$  est linéaire en  $\phi$ . Par conséquent, dans les deux cas, l'ensemble formé par l'équation de Laplace et les conditions aux limites sur les parois du bassin (sans la surface libre) est linéaire en  $\phi$ . Le potentiel est séparable classiquement en deux parties (Agnon et Bingham [1])

$$\phi = \phi_{add} + \phi_{spec}$$

Le potentiel additionnel  $\phi_{add}$  tient compte du processus de génération, le potentiel spectral  $\phi_{spec}$  de l'évolution de la surface libre.

Deux types de potentiels additionnels ont été utilisés pour la génération de houle. L'un pour représenter le mouvement du batteur réel (géométrie, loi de commande) avec une condition aux limites (I.1.4), l'autre pour générer la houle sans tenir compte du batteur réel (introduction d'une singularité de Rankine de type doublet tournant dans le domaine fluide). Dans le premier cas, l'originalité de notre approche tient dans le fait que le potentiel additionnel est obtenu par une résolution numérique des équations qui le gouverne. Dans la formulation de Agnon et Bingham [1], une solution analytique était adoptée, ce qui limite l'application à un batteur piston. Notre approche permet de s'affranchir de cette restriction et donne accès à des géométries volets pour lesquelles une solution analytique n'existe pas ; elle a également été étendue facilement à la 3D.



# Chapitre I.2

## Modèle au second ordre en série de perturbation – modèle SWEET

Le premier modèle non linéaire instationnaire développé en collaboration avec D. Le Touzé est basé sur la résolution des équations précédentes au second ordre d'un développement en série de perturbation en fonction de la cambrure de la houle<sup>1</sup>, résolution basée sur une méthode spectrale. Comme une description détaillée du modèle figure dans [79], on ne reprend pas ici l'algorithme de résolution. On présente dans un premier temps les équations développées au second ordre, puis on abordera la mise en place d'un modèle du batteur réel avant de passer aux validations du code numérique obtenu. L'application de ce code à un large éventail de houles de complexité croissante sera ensuite exposée tout au long du document.

### I.2.1 Développement en série de perturbation

Lors du développement en série de perturbation, les grandeurs  $G$  (élévation, potentiel, mouvement du batteur) sont écrites sous la forme  $G = G_o + G_1 + G_2 + \dots$ . Le déplacement des surfaces mobiles est supposé faible<sup>2</sup> et les grandeurs exprimées sur ces surfaces sont développées en séries de Taylor autour des surfaces au repos. Sur la surface libre :

$$G(x, z = \eta(x, t), t) = G(x, 0, t) + \eta \frac{\partial G}{\partial z}(x, 0, t) + \dots$$

et sur le batteur :

$$G(x = X(z, t), z, t) = G(0, z, t) + X \frac{\partial G}{\partial x}(0, z, t) + \dots$$

---

1. En houle régulière en profondeur finie, les longueurs caractéristiques de l'écoulement sont au nombre de trois (profondeur  $h$ , amplitude  $a$  et longueur d'onde  $\lambda$ ) et permettent de définir deux nombres sans dimension,  $\mu = kh$  et la cambrure  $ka$  (ou  $\varepsilon = \frac{ka}{\pi} = \frac{H}{\lambda}$ ) avec le nombre d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . On travaille en profondeur finie *i.e.*  $\mu = O(1)$ , à faible cambrure  $\varepsilon \ll 1$

2. À l'ordre zéro, qui correspond à l'état de repos, le batteur est vertical soit  $X_o = 0$  et la surface libre horizontale, soit  $\eta_o = 0$ . Mouvement batteur et élévation sont donc des grandeurs du premier ordre. Le potentiel à l'ordre zéro, qui peut éventuellement prendre en compte un courant, est pris nul ici.

Ces deux développements sont introduits dans les équations (I.1.3) et (I.1.4) et les termes sont regroupés par ordre. On obtient un système d'équations pour chaque ordre. Les inconnues<sup>3</sup> sont les potentiels  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , les élévations de surface libre  $\eta_1$  et  $\eta_2$  à déterminer en fonction des mouvements  $X_1$  et  $X_2$  connus. Chacun des ordres vérifie les mêmes équations de continuité et aux limites sur le fond et les murs fixes :

$$\Delta\phi_i = 0 \quad \text{dans } D_o \quad (\text{I.2.3a})$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{I.2.3b})$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } L_y \quad (\text{I.2.3c})$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L_x \quad (\text{I.2.3d})$$

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial t} - \frac{\partial\phi_i}{\partial z} = A_i \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{I.2.3e})$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t} + g\eta_i + \nu \frac{\partial\phi_i}{\partial z} = B_i \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{I.2.3f})$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x} = C_i \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{I.2.3g})$$

Les termes de forçage ou seconds membres des conditions aux limites sur les parois mobiles, notés  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  dépendent de l'ordre considéré. Au premier ordre, sur la surface libre, on obtient simplement  $A_1 = 0$  et  $B_1 = 0$ ; sur le batteur :

$$C_1 = \frac{\partial X_1}{\partial t}$$

Au second ordre cette fois, les termes de forçage sur les parois mobiles s'écrivent :

$$A_2 = \eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} - \nabla\eta_1 \cdot \nabla\phi_1 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{I.2.4a})$$

$$B_2 = -\eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} \left| \tilde{\nabla}\phi_1 \right|^2 - \nu \left( \eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} - \nabla\eta_1 \cdot \nabla\phi_1 \right) \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{I.2.4b})$$

$$C_2 = \frac{\partial X_2}{\partial t} - X_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + \nabla_v X_1 \cdot \nabla_v \phi_1 \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{I.2.4c})$$

Comme annoncé en I.1.4.1, on utilise une méthode spectrale pour résoudre les équations (I.2.3), et les conditions aux limites au premier ordre et au second ordre (I.2.4). Pour cela, on se ramène à une condition de Neumann homogène sur le mur du batteur  $x = 0$  grâce à la résolution préalable d'un potentiel additionnel.

---

3. La pression  $P = P_o + P_1 + P_2 + \dots$  est déterminée à partir de l'équation de Bernoulli (I.1.1) qui, développée en ordres de perturbation, donne :

$$P_o = -\rho g z$$

$$P_1 = -\rho \frac{\partial\phi_1}{\partial t} \quad (\text{I.2.1})$$

$$P_2 = -\rho \frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left| \tilde{\nabla}\phi_1 \right|^2 \quad (\text{I.2.2})$$

Pour alléger ce rapport de thèse, on préfère ne pas rentrer dans les détails de l'algorithme numérique de résolution des équations précédentes dans le domaine temporel, donnés dans [79].

On décrit maintenant en détails les travaux que nous avons effectués sur les lois de mouvement du batteur puis les validations apportées grâce au développement d'une solution analytique du problème de génération de la houle au second ordre en régime établi.

## I.2.2 Lois de commande du batteur

Les lois de commande du batteur ont été programmées de manière à définir simplement des états de mer complexes. Une théorie complètement non linéaire de la génération n'existant pas encore, le contrôle du générateur de houle est souvent basé sur des modèles simples linéarisés ou second ordre. La prise en compte d'effets d'ordre supérieur se fait parfois, indirectement en corrigeant itérativement le mouvement à partir de l'analyse des mesures.

Un des objectifs est de pouvoir simplement comparer les houles mesurées en bassin et les houles simulées. Le plus simple est d'utiliser la même façon de piloter les deux batteurs. Dans le bassin de houle de l'ECN, les volets sont pilotés en position<sup>4</sup> et ces positions sont calculées à partir d'un fichier de description de la houle à générer. Ce fichier est un langage spécifique développé par le concepteur du batteur, Edinburgh Design Limited (EDL). Dans ce langage appelé *Wave*, les houles sont spécifiées sous forme de composantes fréquentielles décrites chacune par leur fréquence, amplitude, angle de propagation et phase. On peut simplement construire le champ de vague cible en ajoutant plusieurs composantes à l'intérieur de boucle par exemple. Ce langage inclut ensuite un grand nombre de fonctions prédéfinies qui permettent d'agir éventuellement sur les amplitudes, angles et phases (par exemple appliquer un facteur d'échelle à toutes les amplitudes, faire tourner toutes les ondes d'un certain angle ou encore ajuster la phase pour focaliser toutes les ondes à un instant donné en un point donné du bassin). Le langage comprend aussi tout un jeu de spectres prédéfinis (Pierson-Moskowitz, JONSWAP, Bretschneider...) et de dispersion angulaire ( $\cos^n \theta$  et  $\cos^{2n} \theta$ ). De plus amples détails sont fournis dans le manuel du logiciel *Ocean* [106]. Après compilation avec le logiciel *Ocean*, on obtient un fichier binaire qui contient les positions des volets au cours du temps. On peut également demander l'écriture d'un fichier contenant la liste des composantes fréquentielles utilisées pour construire le mouvement batteur. C'est ce fichier texte qui est utilisé par les codes de simulations pour utiliser le même jeu de composantes que lors des expériences.

Le travail effectué a consisté en la mise en place d'une convention d'écriture des composantes fréquentielles sous formes de tableaux en fichiers textes qui peuvent être interprétés à la fois par

- le compilateur *Ocean* pour produire les mouvements du batteur réel
- les codes de simulations pour les batteurs numériques
- les routines d'analyse des mesures (réelles ou numériques) pour reconstruire les champs de vague cibles linéaires ou second ordre (Annexe E) et comparer aux mesures

Plusieurs fonctions de transfert ont été introduites dans les codes pour reproduire les types de batteurs les plus courant, piston ou volet (la hauteur de l'articulation est variable).

La commande du batteur numérique se fait soit par l'intermédiaire d'un fichier de composantes fréquentielles (issu du logiciel *Ocean* ou construit par l'utilisateur), soit par un mouvement sinusoïdal simple pour la houle régulière 2D ou oblique. En houle oblique, plusieurs lois

---

4. Le pilotage en force est en gestation chez le fabricant EDL.

de commande ont été mises en œuvre, le principe du serpent et la méthode de Dalrymple (*cf.* Annexe A et section II.2).

### I.2.3 Validations

Les validations du code au second ordre ont porté sur différents points :

- comportement en fonction du nombre de modes,
- avance en temps,
- comparaisons à des solutions de référence dans le domaine fréquentiel,
- contrôle de la conservation du volume et de l'énergie au cours des simulations.

L'étude de l'intégration numérique des équations temporelles sera reprise dans la description du code non linéaire complet, dans la section I.3.4.3. L'utilisation d'une rampe en temps au démarrage du batteur évite d'avoir à employer des pas de temps faibles pour résoudre correctement les accélérations importantes liées à un démarrage sans rampe.

#### I.2.3.1 Lâchers de surface libre

D. Le Touzé a réalisé une validation intensive du modèle second ordre dans des cas de lâcher de surface libre dans des cuves fixes (sans potentiel additionnel) avec comparaison à une solution analytique (Cointe *et al.* [35]) et à résolution numérique par éléments frontières de Stassen [117]. Cette comparaison a porté sur les élévations premier et second ordre en différents points, ainsi que l'étude de la convergence des modes et l'influence du repliement. Les détails de cette étude sont données dans [79] page 81.

#### I.2.3.2 Houle et nombre de modes

La génération de houle avec ce modèle a également été validé, en plusieurs étapes, en houle régulière. Cette validation s'intéresse au comportement de la solution en fonction des paramètres numériques de discrétisation spatio-temporelle. La discrétisation spatiale est gérée par les nombres de modes utilisés pour décrire les solutions (*cf.* l'équation (I.1.6)),  $N_1$  et  $N_2$  dans les directions  $x$  et  $y$  sur la surface libre, et  $N_3$  dans la direction  $z$  sur la surface du batteur. Tout d'abord, on a investigué l'influence du nombre de modes en distinguant la décroissance des amplitudes modales en fonction du numéro du mode et l'erreur commise sur une quantité locale (vitesse, élévation de surface libre) en fonction du nombre total de modes. Cette erreur est relative à la simulation lancée avec le plus grand nombre de modes et considérée comme convergée (proche de la solution exacte).

Pour le potentiel additionnel, l'étude est faite en 2D, au second ordre plus sensible. On constate ainsi que les amplitudes modales du potentiel additionnel décroissent à l'ordre 3.5. L'erreur<sup>5</sup> sur la vitesse horizontale (obtenue en multipliant chaque amplitude par le nombre d'onde du mode et en sommant sur les modes) décroît à l'ordre 2.5 : on ne perd qu'un ordre alors que les deux opérations précédentes (multiplication et somme) pouvaient nous en faire perdre deux. Ce résultat très positif est dû à l'alternance des séries qui accélère leur convergence. La conclusion de ces tests est que la résolution du problème additionnel nécessite peu de modes pour obtenir une bonne précision d'où un temps de calcul peu important.

---

5. Cette erreur est calculée en référence à la simulation effectuée avec  $N_3 = 256$ , le plus grand utilisé.

Pour le problème spectral (surface libre), les amplitudes modales du potentiel décroissent à l'ordre 3 en linéaire et 2.5 au second ordre<sup>6</sup>. L'erreur<sup>7</sup> sur l'élévation de surface libre diminue selon un ordre 2.2 au premier ordre et 2.4 au second ordre.

Hormis ces ordres de décroissance satisfaisants, les niveaux d'erreur relevés sont très faibles, en dessous du pour cent en relatif dès  $N_1 = 128$  modes en linéaire et  $N_1 = 256$  modes au second ordre.

Ces tests montrent l'efficacité du modèle numérique qui nécessite peu de modes pour un niveau de précision suffisant et est très rapide grâce au coût de calcul réduit en  $N \log N$ .

### I.2.3.3 Comparaison à une solution analytique de référence

La solution analytique de la génération de houle régulière oblique dans le domaine fréquentiel, développée dans le cadre de la suppression des ondes libres, fournit une base de comparaison très intéressante. Cette solution<sup>8</sup> est valable à l'ordre deux dans un bassin tridimensionnel semi-infini dans la direction  $x$ , modélise le batteur en  $x = 0$  et inclut les lois de commandes élaborées. On utilise alors le code instationnaire avec une plage très performante et on compare le régime établi après le passage du front d'onde à la solution fréquentielle. Les résultats, présentés dans [79] page 148, montrent qu'on obtient facilement au premier ordre une erreur inférieure à 0.2 % avec un nombre de modes suffisant ( $N = 513$ ). Comme on le verra dans l'étude des ondes libres parasites, le champ de vagues au second ordre est perturbé par des ondes courtes de longueur d'onde environ un quart de celle de la houle premier ordre. Ces ondes courtes du second ordre nécessitent donc un nombre de modes plus élevé pour que la cinématique soit précisément décrite, que lorsque les ondes liées sont seules présentes. L'écart à la solution analytique stationnaire passe à 2 % dans ce cas avec un nombre de modes double ( $N = 1024$ ).

### I.2.3.4 Volume et énergie

Un développement complet en série de perturbations au second ordre a été effectué de manière à vérifier séparément à chaque ordre la conservation du volume et le bilan d'énergie. Des détails sur les expressions des volumes et énergies sont donnés dans l'Annexe D. On rappelle ici quelques résultats. Pour le volume au premier ordre, on s'attend à ce que le déplacement d'eau par le batteur  $\int_0^{L_y} \int_{-1}^0 X_1(y,z,t) dy dz$  soit compensé par une variation du niveau moyen  $\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta_1(x,y,t) dx dy$ . Cette variation, liée aux modes évanescents, intervient localement près du batteur. Numériquement dans le cas d'une houle régulière, on observe pour un nombre faible de modes que la différence entre les volumes précédents est non nulle. Elle oscille comme prévu à la fréquence du batteur. L'amplitude des oscillations tend vers zéro comme  $N^{-2}$  lorsque le nombre de modes  $N$  augmente.

Au second ordre, on s'attend aussi à une compensation entre la variation de volume dans le bassin et le déplacement de fluide dû au batteur, celui-ci se calculant avec un terme en plus, dit

---

6. On peut noter que cette valeur au second ordre est obtenue sans la suppression des ondes libres. Le champ de vagues est alors la superposition d'une onde liée de longueur d'onde  $\lambda/2$  et d'une libre deux fois plus courte environ. Avec la suppression des ondes libres, la variation spatiale se fait seulement à l'échelle  $\lambda/2$  et le nombre de modes nécessaires à la description du champ de vague est plus faible. Autrement dit, les amplitudes modales décroissent plus vite.

7. Relative au cas  $N_1 = 2048$  avec toujours  $N_3 = N_1/4$ .

8. Cette solution est décrite dans la suite de la thèse, en Annexe A au premier ordre et dans la partie III au second ordre.

de coin  $X_1 \eta_1$ , égal au volume de fluide déplacé par le batteur au dessus de la surface libre au repos. Numériquement, on observe cette fois que le volume total<sup>9</sup> au second ordre a tendance à croître linéairement avec une oscillation superposée à la fréquence double. Lorsque  $N$  augmente, à la fois la pente de la droite et l'amplitude des oscillations tendent vers zéro comme  $N^{-2}$  à nouveau. Cette étude des volumes premier et second ordre montre donc une bonne décroissance de l'erreur sur le volume lorsque  $N$  augmente.

En ce qui concerne les énergies, les simulations partent d'un état de repos qu'on prend comme référence d'énergie mécanique  $E = 0$  à  $t = 0$ . Ensuite, lorsque le batteur se met en route, on doit vérifier que l'énergie mécanique est égale au travail des forces extérieures, à savoir les forces de pression. Ce travail est nul sur les parois fixes ou de pression nulle. Il interviendra donc uniquement sur la surface du batteur et celle de la plage absorbante fonctionnant comme un patch de pression. Au premier ordre en cambrure, le bilan d'énergie est très simple, l'énergie cinétique étant nulle et le travail dû à la pression hydrostatique :

$$E_1 = E_p^1 = - \int_0^{L_y} \int_{-1}^0 X_1(y,z,t) z dy dz = W_1 = - \int_0^t \int_0^{L_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial X_1}{\partial t} z dy dz dt \quad (\text{I.2.5})$$

Les grandeurs  $X_1$  et  $\frac{\partial X_1}{\partial t}$  étant connues, ce bilan permet de valider l'intégration en temps intervenant dans le calcul du travail.

Au second ordre en cambrure, l'énergie mécanique à l'instant  $t$  vaut :

$$E_2 = E_{c2} + E_{p2} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \phi_1(0,z,t) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \phi_1(x,0,t) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \eta_1^2(x,t) dx - \int_{-1}^0 X_2(z,t) z dz \quad (\text{I.2.6})$$

et le travail

$$W_2 = - \int_0^t \left[ \int_{-1}^0 \frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz + \int_{-1}^0 \frac{\partial X_2}{\partial t} z dz + \int_0^L \nu(x) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 dx \right] dt \quad (\text{I.2.7})$$

Cette fois apparaissent le potentiel et l'élévation de surface libre calculés durant la simulation et la comparaison de l'énergie  $E_2$  et du travail  $W_2$  permet de valider la précision du calcul. Sur la figure I.2.1, on a tracé l'évolution temporelle des énergies et travail dans le cas d'une houle régulière de longueur d'onde 5 m dans un bassin bi-dimensionnel de 50 m de longueur par 5 m de profondeur. Entre  $t = 0$  et  $t = 30$  s, le front d'onde se propage à la vitesse de groupe constante du batteur à la plage. Derrière le front d'onde, le champ de vague est établi. Plus le front d'onde avance plus la surface de champ établi augmente (linéairement) et plus les énergies cinétique  $E_{c2}$  et potentielle  $E_{p2}$  du champ établi augmentent en restant égales conformément au comportement en milieu ouvert. Le travail des forces de pression sur le batteur, seul présent avant que la houle n'atteigne la plage, augmente également et égale l'énergie mécanique  $E_2 = E_{c2} + E_{p2}$ . Le taux de croissance de l'énergie  $E_2$  est lié à la vitesse de groupe de l'onde générée :

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 v_g t$$

Après l'arrivée du front sur la plage, l'énergie mécanique se stabilise si l'absorption est correcte ou augmente encore lorsque le front d'onde réfléchi se propage en direction du batteur ; dans

9. *i.e.* l'erreur sur le volume.

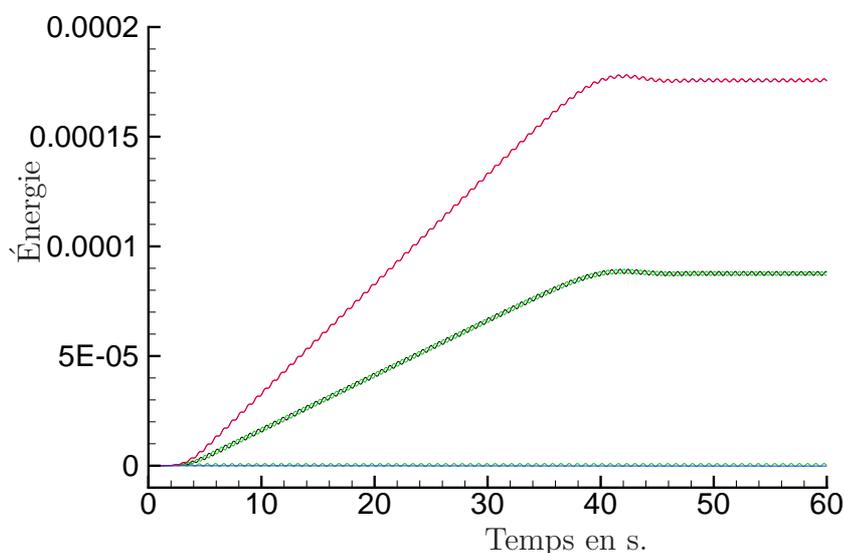


FIG. I.2.1 – Bilan d'énergie au second ordre

ce cas on observe également un échange d'énergie entre énergie cinétique à la surface libre et énergie potentielle, témoin de l'onde partiellement stationnaire qui s'installe dans le bassin. En étudiant la différence entre l'énergie mécanique dans le bassin et le travail des forces de pression, on observe lors des simulations numériques que cette différence tend vers un résidu très faible oscillant à la fréquence  $\omega$  au cours de la simulation.

Au troisième ordre en cambrure, les expressions sont plus complexes et données en annexe D.2. On observe lors des simulations que la différence entre l'énergie mécanique du volume fluide et le travail des forces de pression croît linéairement avec le temps. Comme pour le volume au second ordre, le taux d'accroissement est très faible même avec un nombre faible de modes et diminue selon  $N^{-2}$  lorsqu'on augmente le nombre  $N$  de modes.

### I.2.3.5 Modes longs

L'étude réalisée par Molin *et al.* [101] montre que les modes longs sont excités lors de la génération de houle régulière par un effet du second ordre. L'excitation linéaire lors du démarrage du batteur (ou de l'arrêt) est beaucoup plus faible, moyennant l'emploi d'une rampe efficace.

On se place dans les mêmes conditions que les essais réalisés [101] (ancienne géométrie du bassin de traction de l'ECN de dimensions  $63 \times 2.8$  m ; période de houle  $T = 2.4$  s soit  $kh = 2$  et amplitude  $a = 0.22$  m ; génération pendant 90 s avec des rampes de deux périodes à la mise en route et à l'arrêt du batteur). La figure I.2.2 montre l'amplitude modale  $A_{mo}^{(2)}(t)$  des trois premiers modes propres ( $m = 1, 2$  et  $3$ ) du bassin au second ordre. On observe une excitation des modes à la période propre. Le premier mode est le plus excité. La période d'oscillation de ce mode, mesurée sur les 12 dernières périodes, est de 24.2 s ce qui correspond bien à la période théorique de 24.19 s. L'amplitude de l'élévation correspondante vaut  $a_{mo}^{(2)} = \omega_m \widehat{A_{mo}^{(2)}} h$  où  $\widehat{A_{mo}^{(2)}}$  désigne l'amplitude de  $A_{mo}^{(2)}(t)$ . Pour le premier mode, on trouve  $a_{mo}^{(2)} \simeq 3.8$  mm. Cette valeur est proche de la valeur expérimentale, 4 mm, mesurée par un capteur de pression en bout de

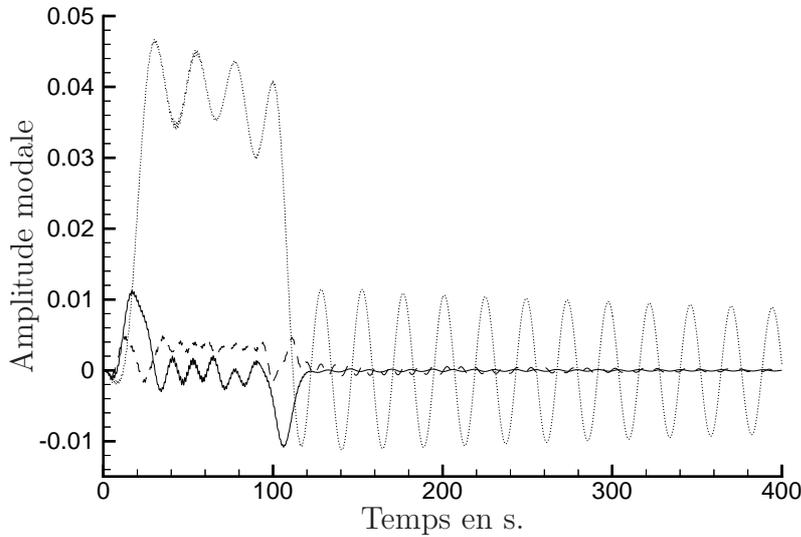


FIG. I.2.2 – Évolution temporelle des trois premiers modes propres au second ordre

bassin.

La comparaison de la décroissance du premier mode propre avec la mesure expérimentale (figure 2 dans [101]) montre que la plage numérique utilisée est moins efficace que la plage expérimentale. La décroissance observée dans la simulation est plus faible que dans le bassin de traction. Les paramètres caractéristiques de la plage ont été déterminées pour assurer un coefficient de réflexion proche du coefficient expérimental (environ 5 %) pour la longueur d'onde  $\lambda = 3.1$  m générée. Contrairement à l'absorption en  $\nu\phi$  utilisée par Stassen qui semble absorber trop les modes longs, il s'avère que la plage en  $\nu\phi_n$  ne les absorbe pas assez par rapport aux expériences.

L'élévation sur une sonde à 9.95 m du batteur, sur la figure I.2.3, donne bien une amplitude d'oscillation similaire à celle présentée sur la figure 9 de Molin *et al.* .

Enfin, dans le bassin de houle, la profondeur plus importante que dans le bassin de traction amoindrit l'excitation des modes longs. La limite  $kh = 2$  donne dans ce bassin une longueur d'onde de 15 m et on génère rarement des houles régulières plus longues compte tenu des dimensions du bassin.

## I.2.4 Batteur latéral au B600

Dans le cadre d'un marché conclu avec la DGA, une étude numérique a été entreprise sur la faisabilité de la génération de houles obliques dans le B600 du Bassin d'Essais des Carènes du Val de Reuil à l'aide d'un batteur latéral partiel. Cette étude est détaillée dans le rapport d'étude [16] fourni à la DGA. Il s'agit de savoir si l'équipement, sur un des côtés du bassin de traction, d'une portion de 100 m des 600 m disponibles par des batteurs volets permettra de générer des houles obliques correctes, de savoir combien de temps sera disponible pour effectuer les mesures avant que la champ de vague obtenu ne se dégrade (diffraction sur les bords, réflexions). Pour cela une série de simulations numériques avec le code SWEET a été entreprise. Le bassin simulé modélise une partie du bassin de traction physique, autour du

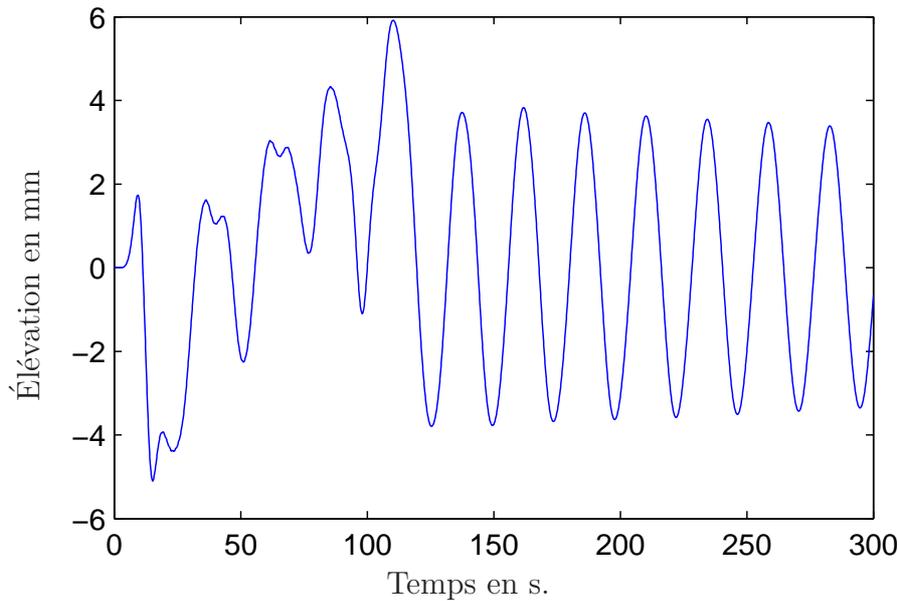


FIG. I.2.3 – *Élévation de surface libre au second ordre à 9.95 m du batteur*

batteur latéral. Une partie du rapport final est donnée en annexe à la fin de ce document.

## Conclusions

Le modèle non linéaire second ordre instationnaire a été extensivement validé au cours du travail effectué en commun avec D. Le Touzé. Une formulation cohérente a été obtenue et une programmation efficace mise en place. Ce modèle numérique fournit de façon précise et rapide des résultats sur la génération et la propagation de la houle en bassin 2D et 3D. Les paramètres numériques concernent le nombre de modes utilisés, le pas de temps et sont maîtrisés.

La mise en place des mouvements batteurs identiques aux expériences permet sans difficulté la génération de houles complexes tri-dimensionnelles. Des applications développées au cours de cette thèse montreront les capacités du modèle second ordre appliqué à de nombreux types de houles :

- étude des zones utiles avec des lois de commande élaborées (section II.2) ;
- suppression des ondes libres (partie III) ;
- performance de la zone absorbante (section II.1.5) ;
- Paquets de vagues focalisés (partie IV) ;
- simulations longues de houle irrégulière 2D et 3D (600 périodes de pics), partie V...

## Perspectives

### Houle et courants

Les séries de modes propres donnent accès facilement aux grandeurs vitesses et pression dans le domaine fluide. L'étude de la vitesse permet par exemple de s'intéresser au phénomène de courant de retour en houle oblique. Au premier ordre, la vitesse horizontale moyennée sur

la verticale et sur une période est nulle

$$\frac{1}{hT} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-h}^0 \nabla \phi_1 dz dt = 0$$

Au second ordre, on observe un courant de Stokes à la surface

$$\mathbf{U}_S = \frac{1}{hT} \int_{t_0}^{t_0+T} \eta_1 \nabla \phi_1 dt \quad \text{en } z = 0$$

compensé par le courant de retour

$$\mathbf{U}_r = \frac{1}{hT} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-h}^0 \nabla \phi_2 dz dt$$

Ces deux termes sont à calculer dans le code SWEET. En 2D, on peut les comparer à la solution analytique proposée par exemple par Hudspeth et Sulisz [64]. En 2D, Stassen [117] a montré des simulations au cours desquelles le courant de retour (second ordre) s'établit pendant le front d'onde et s'arrête pendant la queue d'onde. Il a présenté des champs de vitesse basse fréquence dans tout le bassin, obtenus par un filtre passe-bas  $f_c = f/3$ . Il étudie ensuite ces champs de vitesse après l'arrêt du batteur : on peut identifier les deux premiers modes longs excités.

En 3D, on pourra obtenir par exemple des cartes de courant de retour en traçant une vue de dessus du courant de retour en houle régulière oblique (vitesse horizontale second ordre moyennée sur une période et sur la profondeur). Une observation du profil vertical est aussi envisageable.

### Plage absorbante

Pour quantifier l'efficacité de la zone absorbante numérique, il est possible de regarder son effet sur une houle régulière établie. La valeur moyenne de la puissance des forces de pression sur une période donne le taux de décroissance de l'énergie. Une telle étude analytique permettrait de voir l'influence des paramètres définissant la géométrie de la zone et de la période de la houle sur l'absorption obtenue. Dans ce contexte, le potentiel incident, en profondeur infinie pour simplifier, est

$$\phi_1 = \operatorname{Re} \left[ \frac{i \underline{a} g}{\omega} e^{kz+i\psi} \right]$$

avec  $\psi = \omega t - kx$ . La pression d'absorption en  $\gamma(\mathbf{x})\phi_n$  donne

$$\langle W_{abs} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T W_{abs} dt = -\frac{1}{2} |\underline{a}|^2 \omega^2 2 \int_0^L \gamma(x) dx$$

Le facteur 2 devant l'intégrale traduit le fait qu'une onde incidente qui passe dans la zone d'absorption se réfléchit sur le mur et repasse dans la zone. Cette expression peut permettre une étude systématique rapide des propriétés de la plage.

# Chapitre I.3

## Non linéaire complet – modèle HOS

Les formulations HOS originales (West *et al.* [125], Dommermuth et Yue [42]) ont été établies en domaine périodique. Pour prendre en compte les parois latérales du bassin réel, on a développé une nouvelle formulation. L'adjonction d'un potentiel additionnel rend possible la génération de houle. Les capacités de génération ont été étendues en appliquant la technique précédemment employée dans le code au second ordre, qui permet de simuler un batteur réel en résolvant le problème additionnel correspondant par une méthode spectrale. Cette fois, la méthode est décrite en détail (approximation HOS, phénomène de repliement) pour aider à la compréhension des tests de validation présentés.

### I.3.1 Équations formulées en potentiel de surface et approximation d'ordre élevé

Les équations de surface libre (I.1.3e) et (I.1.3f) sont réécrites en fonction de  $\eta$  et du potentiel de surface  $\phi^s$  défini par :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{I.3.1})$$

On obtient ainsi

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) W - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta \quad (\text{I.3.2a})$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -g \eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \quad (\text{I.3.2b})$$

en  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$  et  $W = \frac{\partial \phi}{\partial z}(\mathbf{x}, \eta, t)$  la dérivée verticale du potentielle (vitesse verticale sur la surface libre). Ces équations sont utilisées pour avancer en temps les quantités surfaciques  $\eta$  et  $\phi^s$ . À un instant  $t$  donné, on suppose  $\eta$  et  $\phi^s$  connus et on évalue leurs dérivées temporelles grâce aux équations (I.3.2) : on peut alors estimer  $\eta$  et  $\phi^s$  à l'instant  $t + \Delta t$  suivant. Dans les membres de droite des conditions aux limites (I.3.2), interviennent  $\eta$  et  $\phi^s$  qu'on a supposés connus. La seule quantité qui reste à déterminer est la vitesse verticale  $W$  sur la surface libre. Celle-ci ne s'exprime pas explicitement en fonction de  $\eta$  et  $\phi^s$ . Pour calculer cette vitesse verticale, une procédure idéale consiste à résoudre un problème de Dirichlet pour le potentiel  $\phi$ , *i.e.* trouver  $\phi$  vérifiant l'équation de Laplace dans le domaine  $D$ , des conditions homogènes de Neumann sur les murs latéraux et le fond et une condition de Dirichlet sur la surface libre

$$\phi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t) = \phi^s(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.3.3})$$

Une fois  $\phi$  ainsi trouvé, il suffit de le dériver selon  $z$ . Cependant cette résolution avec une condition de Dirichlet sur la surface  $\eta$  n'est pas aisée, aussi le principe du modèle HOS est d'approximer la vitesse verticale par un schéma d'ordre élevé. Pour cela, le potentiel est décomposé en série de puissance de  $\eta$  de la forme

$$\phi(\mathbf{x}, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(\mathbf{x}, \eta, t)$$

Pratiquement les sommes sont calculées jusqu'à un ordre  $M$  fini. En reportant cette série dans la définition du potentiel de surface (I.3.1), on effectue un développement de Taylor du potentiel  $\phi$  autour de  $z = 0$  et on ordonne suivant les puissances de  $\eta$ , d'où

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \phi^s(\mathbf{x}, t) \\ \phi^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ \phi^{(3)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ &\vdots = \vdots \\ \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^{(m-k)}(\mathbf{x}, 0, t) \quad \text{pour } m > 1 \end{aligned} \quad (\text{I.3.4})$$

On obtient ainsi des conditions aux limites de Dirichlet sur une surface simple  $z = 0$  pour chacun des ordre  $\phi^{(m)}$ . Chaque problème est résolu par une méthode spectrale, *i.e.* le potentiel  $\phi^{(m)}$  est décomposé sur la base des modes propres du bassin :

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{np}^{(m)}(t) \cos k_{xn}x \cos k_{yp}y \frac{\cosh k_{np}(z+h)}{\cosh k_{np}h}$$

avec  $k_{in} = \frac{n\pi}{L_i}$  pour  $i = x, y$  et  $k_{np} = \sqrt{k_{xn}^2 + k_{yp}^2}$ . On résout successivement chaque problème de Dirichlet en commençant par le premier. Les amplitudes modales  $A_{np}^{(m')}(t)$  pour  $m' = 1 \dots m-1$  ainsi obtenues permettent d'évaluer le second membre de l'équation (I.3.4) pour le potentiel suivant  $\phi^{(m)}$  et de calculer en passant dans le domaine de Fourier les amplitudes  $A_{np}^{(m)}(t)$ . Une fois toutes les amplitudes modales obtenues pour  $m = 1 \dots M$ , la vitesse verticale  $W$  sur la surface libre est finalement évaluée à l'aide d'un développement de Taylor identique au précédent

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ W^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ &\vdots = \vdots \\ W^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \phi^{(m-k)}(\mathbf{x}, 0, t) \end{aligned} \quad (\text{I.3.5})$$

On peut noter que cette expression est la même<sup>1</sup> dans les deux articles de Dommermuth et Yue [42] et de West *et al.* [125]. West *et al.* proposent un traitement du terme en  $W$  homogène

1. Tanaka présente dans [119] deux expressions différentes pour la vitesse verticale  $W$  issues des deux articles originaux de Dommermuth et Yue [42] et de West *et al.* [125]. Il s'agit en fait de la même formule, à un changement d'indice près dans les sommations.

en ordre dans les CSL, qu'on adopte dans notre modèle. Dans la condition de surface libre cinématique, on écrit ainsi

$$(1 + |\nabla\eta|^2) W \simeq W_M + |\nabla\eta|^2 W_{M-2} \quad (\text{I.3.6})$$

et de même pour le terme  $(1 + |\nabla\eta|^2) W^2$  dans la condition de surface libre dynamique *i.e.*

$$(1 + |\nabla\eta|^2) W^2 \simeq \sum_{p+q \leq M} W_p W_q + |\nabla\eta|^2 \sum_{p+q \leq M-2} W_p W_q \quad (\text{I.3.7})$$

On peut noter que le modèle DNO mis en œuvre par Bateman [6] et utilisé par exemple dans [4] et [5] est similaire au modèle HOS dans l'approximation pour la vitesse verticale. La différence n'est que formelle, Bateman se basant sur une description en opérateur et non en potentiel.

## I.3.2 Génération de houle et potentiel additionnel

Dans le but de générer la houle, on a introduit la notion de potentiel additionnel dans la partie I.1.4.2, à savoir qu'on décompose le potentiel en  $\phi = \phi^{spec} + \phi^{add}$ . Pour le modèle HOS, on a cette fois un potentiel de surface  $\phi^s = \phi^{spec}(x, z = \eta, t)$  et l'introduction du potentiel additionnel modifie les conditions aux limites de surface libre qui s'écrivent

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = (1 + |\nabla\eta|^2) W + \frac{\partial\phi^{add}}{\partial z} - \nabla(\phi^s + \phi^{add}) \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{I.3.8a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi^s}{\partial t} = & -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla\eta|^2) W^2 - \nu \frac{\partial\eta}{\partial t} \\ & - \nabla\phi^s \cdot \nabla\phi^{add} - \frac{\partial\phi^{add}}{\partial t} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi^{add}|^2 \quad \text{en } z = \eta \end{aligned} \quad (\text{I.3.8b})$$

en  $z = \eta$  avec  $W = \frac{\partial\phi^{spec}}{\partial z}(x, z = \eta, t)$ . L'utilisation d'un tel potentiel additionnel ajoute plusieurs termes. Ils sont tous évaluables sans difficulté. Deux types de potentiel additionnel ont été implémentés dans le code spectral HOS pour tenir compte de la génération. Le premier est basé sur le potentiel développé au premier ordre dans le code SWEET pour reproduire un batteur physique (géométrie verticale, loi de mouvement). La procédure pour obtenir le potentiel et ses dérivées est la même que employée dans le code SWEET. Ce potentiel additionnel permet de générer facilement des houles complexes et des mouvements batteurs identiques aux mouvements expérimentaux (voir la partie I.2.2). Le traitement du mouvement étant linéaire, ce potentiel servira lorsque la houle générée est de faible cambrure près du batteur, comme dans le cas de focalisation de houle au centre du bassin, ou pour des houles irrégulières de faible hauteur significative.

Le deuxième concerne l'utilisation d'un doublet tournant en deux dimensions dont on rappelle ici les grandes lignes. Le potentiel additionnel sur la surface libre et ses dérivées spatio-temporelles sont évaluées à partir du doublet et de ses images par rapport aux fond et aux murs du bassin. Ce potentiel permet de générer des amplitudes plus importantes.

### I.3.2.1 Doublet tournant

Il s'agit d'introduire au sein du domaine fluide, une singularité de Rankine de type doublet tournant. Placée d'un côté du bassin, à une certaine distance d'un mur, cette singularité peut

généraliser un champ de vagues se propageant en direction du mur opposé. La technique, originellement proposée par Clément [33] et améliorée par Le Touzé et Ferrant [78], est utilisée en bassin bi-dimensionnel pour des houles régulières et des paquets de vagues multi-fréquences. Pour plus de clarté, on explique tout d'abord le principe en houle régulière.

### Doublet tournant de Rankine en houle régulière

Le doublet tournant est placé en  $x = x_d > 0$  et  $z = z_d < 0$  (voir un schéma en figure I.3.1). Il est défini par son moment  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x(t); \mu_z(t)\}$  de sorte que le potentiel des vitesses associé s'écrit

$$\phi_d = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (\text{I.3.9})$$

En houle régulière, l'étude dans le domaine fréquentiel d'un doublet de Kelvin de moment  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x; \mu_z\}$  fournit une fonction de transfert entre le moment vertical et l'amplitude de la houle. De plus, en imposant une houle mono-directionnelle, on obtient une relation entre les composantes horizontale et verticale  $\underline{\mu}_x = i\underline{\mu}_z \tanh k(z_d + h)$ . Ainsi, le moment du doublet de Kelvin est complètement déterminé, à partir des caractéristiques fréquence et amplitude de la houle désirée et de la profondeur du doublet. Dans le code non linéaire, le même choix des composantes a été implémenté pour le doublet de Rankine (discuté dans [79]), qui permet d'obtenir une houle mono-directionnelle d'amplitude donnée.

Le doublet est qualifié de tournant car les composantes  $x$  et  $z$  de son moment  $\boldsymbol{\mu}$  sont périodiques en quadrature de phase. Le sommet du vecteur  $\boldsymbol{\mu}$  attaché au point  $\{x_d, z_d\}$  suit une trajectoire orbitale autour de ce point.



FIG. I.3.1 – Position du doublet tournant dans le bassin

### Interprétation

On peut interpréter un peu plus physiquement l'effet du doublet tournant en s'intéressant aux conditions aux limites pour le fluide. Sur les parois fixes<sup>2</sup> du domaine, la condition de glissement est assurée grâce aux images. Sur la surface libre l'influence du doublet ne se fait ressentir qu'au-dessus de lui puisque le potentiel  $\phi_d$  décroît rapidement quand on s'éloigne du doublet. La modification des CSL due au doublet prend la forme d'un paquet d'ondes au-dessus du doublet. L'enveloppe de ce paquet d'ondes est stationnaire au-dessus du doublet et possède une longueur approximativement égale à une longueur d'onde. Les ondes dans l'enveloppe du paquet se propagent vers le mur opposé comme l'indique la flèche positionnée au-dessus du doublet sur la figure I.3.2. Les ondes apparaissent à l'arrière du paquet et disparaissent à l'avant.

2. Contrairement au cas du batteur mobile, cette fois le mur en  $x = 0$  est fixe.

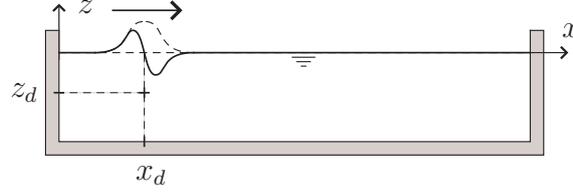


FIG. I.3.2 – Influence du doublet sur les conditions de surface libre

### Intérêt et génération 3D

On peut utiliser un doublet instationnaire de la même manière en remplaçant juste les composantes  $\mu_x(t)$  et  $\mu_z(t)$ . Grâce à la fonction de transfert, on peut construire un spectre en fréquence pour  $\mu_z$  à partir d'un spectre de houle, en déduire le spectre pour  $\mu_x$  à partir de la condition donnée ci-dessus et calculer ensuite l'évolution temporelle  $\mu_x(t)$  et  $\mu_z(t)$ , par exemple par transformées de Fourier. Ce sont ces composantes temporelles qui sont les données d'entrée pour la génération numérique par doublet avec la formule (I.3.9). On trouve des exemples de tels doublets instationnaires dans [79], avec la génération de houle irrégulière et de paquets de vagues focalisés.

En trois dimensions, la génération de houle oblique peut être obtenue avec un doublet  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \{\boldsymbol{\mu}; \mu_z\}$  où  $\boldsymbol{\mu}$  est le moment horizontal. Le rapport  $\mu/\mu_z$  sera définie comme précédemment pour la composante  $x$  ( $\mu = |\boldsymbol{\mu}|$ ). La loi d'évolution transverse en  $y$  du doublet peut être donnée par le principe du serpent *i.e.*

$$\begin{aligned}\mu_x &= \mu e^{-ik \sin \theta y} \\ \mu_y &= 0\end{aligned}$$

ou on peut également incliner les doublets dans la direction de propagation

$$\begin{aligned}\mu_x &= \mu \cos \theta e^{-ik \sin \theta y} \\ \mu_y &= \mu \sin \theta e^{-ik \sin \theta y}\end{aligned}$$

Cette formulation 3D présente l'inconvénient de fournir des temps de calcul assez longs. Les simulations 3D avec une génération par doublet se limitent à des houles droites avec une ligne de doublet 2D ([79]).

### I.3.3 Volumes et énergies

Pour le modèle HOS, le volume de fluide est évalué par :

$$\mathcal{V} = \int_{X(y,z,t)}^L \int_{-1}^{\eta(x,y,t)} dx dy dz$$

Dans le cas d'un batteur pris en compte par un flux linéaire, le volume du domaine de calcul varie au cours du temps du fait du mouvement du batteur.

L'énergie est calculée grâce à la formule :

$$E = E_c + E_p = \int_X^L \phi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx - \int_{-1}^{\eta} \phi \frac{\partial X}{\partial t} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \eta^2(x,t) dx - \int_{-1}^0 X(z,t) z dz - \int_0^X \int_0^{\eta} z dx dz$$

## I.3.4 Aperçu de l’algorithme numérique

### I.3.4.1 À chaque pas de temps

Comme pour le modèle au second ordre, les conditions de surface libre sont considérées comme des équations d’évolution pour  $\eta$  et  $\phi^s$  aux points de collocation. On utilise un schéma d’avance en temps de Runge Kutta d’ordre 4. À chaque pas de temps, les seconds membres des conditions de surface libre sont évalués (quatre fois) d’après le diagramme de la figure I.3.3. En entrée figurent les vecteurs élévation  $\eta$  et potentiel de surface  $\phi$  aux points de collocation. Les gradients horizontaux sont évalués dans le domaine de Fourier (les points de collocation sont choisis pour permettre une utilisation d’algorithme rapide (FFT) des transformées de Fourier). La vitesse verticale  $W$  est évaluée grâce au double schéma itératif (équations (I.3.4) et (I.3.5)). Là encore l’emploi de FFT est possible en raison de la forme en cosinus des modes propres du bassin. Au cours du calcul de  $W$ , tous les produits sont réalisés dans l’espace physique et traités contre le repliement. Finalement, les seconds membres des équations (I.3.8) sont assemblés avec la donnée des termes additionnels nécessaires. À nouveau, chaque produit est évalué sans repliement dans l’espace physique. Le modèle numérique, travaillant dans l’espace physique aux points de collocation est pseudo-spectral au sens de Canuto *et al.* [25] avec en plus les produits traités anti-repliement. On a vu, à la fin de la partie I.3.1, que le traitement

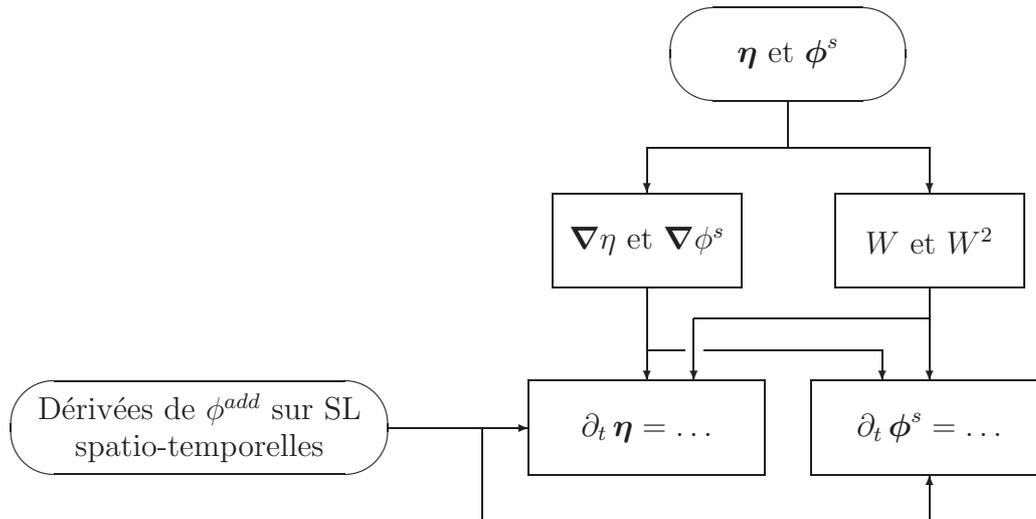


FIG. I.3.3 – Diagramme d’une sous étape du schéma de Runge Kutta

des termes  $(1 + |\nabla\eta|^2) W^p$ ,  $p = 1,2$  dans les conditions de surface libre est effectué pour rester consistant en ordre de développement (voir équations (I.3.6) et (I.3.7)).

### I.3.4.2 Traitement anti-repliement

#### Le phénomène de repliement

La décomposition spectrale employée associée à chaque grandeur, définie sur  $N$  points dans l’espace physique, a une représentation sur  $N$  modes de l’espace de Fourier. Un produit simple de deux grandeurs dans l’espace physique contient alors dans l’espace de Fourier  $2N$  composantes. Si l’on calcule ce produit sur les  $N$  points de départ, on ne peut obtenir par passage dans le

domaine de Fourier que les  $N$  premiers modes. Les composantes de  $N + 1$  à  $2N$  sont donc interprétées comme des composantes  $0$  à  $N$  : c'est le problème de repliement, classique en traitement du signal. Il apparaît dans notre modèle HOS, aussi bien lors de l'approximation HOS (I.3.4) et (I.3.5) que lors de l'assemblage des seconds membres des CSL (I.3.2) avec (I.3.6) et (I.3.7).

### Remède

La technique du remplissage par zéros ('zero-padding') est fréquemment employée pour prévenir du repliement (Canuto *et al.* [25]). Pour un produit simple, on part de deux termes exprimés sur  $N$  points de l'espace physique, soit  $N$  modes dans le domaine de Fourier. La règle des trois moitiés ( $3N/2$ ) préconise d'exprimer chaque membre du produit sur  $3N/2$  modes avec des zéros de  $N + 1$  à  $3N/2$ , *i.e.* de passer à  $3N/2$  points dans l'espace physique (un aller-retour dans l'espace de Fourier). On effectue alors le produit dans l'espace physique sur ces  $3N/2$  points et on passe dans le domaine de Fourier. On ne conserve que les composantes  $1$  à  $N$  et on repasse dans l'espace physique sur  $N$  points (un deuxième aller-retour). Le résultat de ce double aller-retour dans l'espace de Fourier est le produit des deux membres sans repliement. Pour un produit d'ordre trois, la même technique sur quatre moitiés ( $4N/2$ ) fonctionne et ainsi de suite.

Dans notre modèle, les termes non linéaires sont des produits d'ordre  $M$  au plus. Il faudrait utiliser une technique des  $M + 1$  moitiés soit  $(M + 1)N/2$  points dans l'espace physique pour prévenir correctement tout repliement (on parlera dans la suite de traitement *anti-repliement complet*). Ce nombre devient rapidement trop élevé notamment en trois dimensions : à la fois la mémoire de stockage et le temps de calcul augmentent.

On applique plutôt un traitement *anti-repliement partiel* en appliquant une règle des quatre moitiés<sup>3</sup> à chaque produit simple. À l'ordre  $M = 3$ , les produits triples sont évalués sans repliement grâce à cette règle ( $4=3+1$ ) : les simulations seront complètement dépourvues de repliement. À un ordre  $M > 3$  qui nécessite une règle des  $M + 1 > 4$  moitiés, le repliement n'est que partiellement traité. Pour des fonctions suffisamment régulières (dont les modes décroissent exponentiellement), on peut s'attendre à ce que l'erreur commise par rapport à un traitement complet soit faible et comparable aux erreurs d'arrondis (Clamond et Grue [28], Fructus *et al.* [52]). On peut penser que cette technique anti-repliement partielle peut être à l'origine de difficultés pour les fortes cambrures là où les fonctions utilisés deviennent moins régulières (*cf.* point singulier dans la théorie de Stokes). Pour clarifier ce point, on a comparé les traitements complet et partiel en formulation périodique (voir la section I.3.5.2).

### HOS et repliement

Dans la littérature HOS, on trouve deux traitements différents contre le repliement. Domermuth et Yue décomposent les produits multiples dans l'espace physique en produits simples successifs et appliquent à chaque produit simple la règle des trois moitiés (traitement anti-repliement seulement partiel). West *et al.* semblent avoir utilisé un traitement anti-repliement global sur les CSL, *i.e.* une fois les calculs de  $W$  effectués, à l'aide de la règle des  $M + 1$  moitiés (traitement complet).

---

3. Les algorithmes de FFT utilisés (Numerical Recipes [104]) fonctionnent avec des nombres de points puissance de deux ce qui ne nous permet pas d'utiliser une règle des trois moitiés qui serait suffisante. Cependant, la règle des quatre moitiés est utilisable et elle assurera que les produits triples sont bien traités contre le repliement.

Une analyse détaillée du processus de calcul de  $W$  nous a révélé qu'il faut intégrer le traitement anti-repliement au fur et à mesure de l'approximation de  $W$ , contrairement à West *et al.* qui ne mentionnent que les CSL. Ainsi à chaque étape  $m$  de l'approximation *HOS*, on détermine le potentiel  $\phi^{(m)}$  grâce à l'expression (I.3.4) qui fait intervenir des produits d'ordre  $m - 1$  au plus. On a ensuite besoin des dérivées selon  $z$  de ce potentiel  $\phi^{(m)}$ , dans deux types de termes :

- calcul de  $\phi^{(m+1)}$  et les suivants,
- calcul de  $W^{(m)}$  et les suivants.

Ces dérivées se calculent dans l'espace de Fourier, sur les  $N$  premiers modes qui doivent donc être exempts de repliement : un traitement anti-repliement<sup>4</sup> doit être appliqué à  $\phi^{(m)}$  avant de le dériver et de pouvoir passer à l'ordre suivant. Il est en outre utile d'une part de traiter contre le repliement les termes  $\eta^k$  une fois pour toute avant démarrer la résolution itérative des  $\phi^{(m)}$  et d'autre part de calculer les sommes de produits (I.3.4) ou (I.3.5) avant d'effectuer le deuxième aller-retour dans le domaine de Fourier pour diminuer le nombre de TF plutôt que de faire cet aller-retour pour chaque produit et sommer ensuite.

Les tests numériques effectués pour évaluer la qualité de l'approximation HOS nous ont permis de mieux comprendre l'influence de la technique anti-repliement mise en œuvre. Ils ont porté sur des comparaisons à la solution stationnaire de Rienecker et Fenton. Ils ont révélé que le traitement partiel multiplie par deux l'erreur relative maximale commise sur l'évaluation de  $W$  pour une cambrure de  $ka = 0.35$  et toute valeur de  $M$  tant que le nombre  $N$  de modes utilisé n'est pas trop élevé. Pour une cambrure plus élevée  $ka = 0.4$ , un anti-repliement complet s'avère nécessaire pour des valeurs élevées de l'ordre  $M$ . Plus de détails sont donnés dans la section I.3.5.2.

### I.3.4.3 Intégration en temps : choix du pas de temps et stabilité

Au cours de l'avance en temps, il convient de choisir un pas de temps (éventuellement de l'adapter au cours du temps) qui satisfait au moins aux deux critères suivants :

- La solution obtenue est stable aux temps longs *i.e.* elle ne diverge pas au bout de plusieurs pas de temps,
- La solution obtenue est proche de la solution théorique *i.e.* la précision obtenue est bonne.

Le premier critère a trait à la stabilité intrinsèque de l'algorithme d'avance en temps couplé à la discrétisation spatiale. On définit un domaine de stabilité, *i.e.* un ensemble de pas de temps pour lesquels une petite erreur sur la solution ne tendra pas à s'accroître. En général, on obtient une condition pour la stabilité sur le pas de temps en fonction du pas d'espace.

Les premiers calculs que nous avons effectués [79], l'ont été avec un pas de temps choisi à partir d'une condition de stabilité proposée par Dommermuth et Yue. Dans leur article [42], on trouve en effet la condition suivante sur le pas de temps

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{8}{k_N}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \Delta x} = \sqrt{\frac{8L}{\pi N}} \quad (\text{I.3.10})$$

Celle-ci est obtenue à partir d'une étude de stabilité linéaire du schéma d'avance en temps de  $\eta$  et  $\phi_S$  et s'établit aisément dans le domaine de Fourier par exemple. On l'obtient également en étudiant une EDP du type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

---

4. Par la règle des  $m - 1 + 1 = m$  moitiés en complet ou la règle 3/2 de produit à produit en partiel.

analogue à celle vérifiée par le potentiel en théorie linéarisée ( $\partial_{tt}\phi = -\partial_z\phi$ ). Celle-ci s'est révélée insuffisante lors des tests numériques ([79] page 132). Une réduction d'un facteur variant approximativement comme  $1/\sqrt{N}$  était nécessaire pour stabiliser l'avance en temps. Le pas de temps limite (maximum) varie donc comme  $1/N$ . Pour expliquer la provenance de ce facteur, plusieurs pistes ont été envisagées. De leurs côtés, West *et al.* parlent de condition de Courant ou condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} = \frac{L}{cN}$$

où  $c$  est une vitesse de propagation ou de convection dans l'écoulement. Dans le cas de notre bassin on peut être tenté de prendre comme vitesse soit la vitesse maximale à la surface libre (encore faut-il qu'elle soit bien résolue), soit la vitesse du mode le plus rapide à savoir le plus long, de nombre d'onde  $k_m = \frac{\pi}{L}$ . Dans ce cas

$$c = \sqrt{\frac{\tanh k_m}{k_m}} \quad \text{d'où} \quad \Delta t \leq \left( \frac{\frac{\pi}{L}}{\tanh \frac{\pi}{L}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{L}{N} \quad (\text{I.3.11})$$

Cette vitesse du mode le plus rapide est indépendante du nombre de modes et on retrouve bien dans ce cas une dépendance en  $1/N$  du pas de temps maximum.

La dépendance en  $1/N$  est également celle trouvée lors de l'analyse de stabilité linéaire de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 utilisée lors de l'avance en temps d'une équation aux dérivées partielles (EDP) de type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{I.3.12})$$

conjointement avec une formulation spectrale des inconnues. On obtient dans ce cas la condition de stabilité (Fornberg [51])

$$\Delta t \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Delta x = \frac{2\sqrt{2} L}{N\pi} \quad (\text{I.3.13})$$

À la différence de la condition (I.3.11), le rapport  $\Delta t/L$  est ici indépendant de la longueur du bassin. Pour départager ces deux conditions, des tests numériques ont été effectués dans un bassin de longueur variable par rapport à la profondeur. Les deux critères, dépendant de ce rapport longueur sur profondeur, varient différemment et il est possible d'identifier la condition correcte. Les tests ont porté sur un lâcher de surface libre d'un mode propre en deux dimensions avec 256 modes. Le tableau I.3.1 donne un résumé des tests. On constate que pour une grande

Longueur $L$ du bassin	10	1	0.1	0.01	
$\Delta t$	RK4 (I.3.13)	3.5	0.35	0.035	0.0035
	CFL (I.3.11)	3.9	0.69	0.21	0.069
(x10 <sup>-2</sup> )	Numérique	10	0.92	0.08	0.009

TAB. I.3.1 – Récapitulatif des tests sur le choix du pas de temps

longueur de bassin, les deux équations (I.3.13) et (I.3.11) donnent un pas de temps maximum semblable (lignes 2 et 3 du tableau). En revanche, lorsque la longueur diminue, la condition (I.3.13) devient plus restrictive sur le pas de temps. Les tests effectués (ligne 4) montrent que le pas de temps maximum numérique suit la variation imposée par la condition (I.3.13) avec

cependant un facteur moyen de 2.6. Tout calcul avec un pas de temps supérieur à 2.6 fois la limite fournie par l'équation (I.3.13) diverge au bout de quelques pas de temps. La condition (I.3.13) qui a été établie pour une EDP *a priori* différente de celle étudiée donne la bonne variation pour le pas de temps maximal. On a vérifié également que ces résultats ne dépendaient pas du mode lâché ou de la fréquence générée.

Une fois le pas de temps maximum déterminé, le schéma d'avance en temps fournit une solution approchée. L'écart à la solution exacte diminuera si le pas de temps diminue. Le schéma utilisé est d'ordre quatre et assure une erreur faible sans avoir recours à des pas de temps beaucoup plus faibles que le pas de temps maximal.

### I.3.5 Propriétés et validations

D. Le Touzé a réalisé un important travail de validation et de caractérisation des propriétés du modèle HOS développé au cours de sa thèse [79]. L'étude de l'évolution du temps de calcul en 2D, en fonction des paramètres a montré un comportement en  $N \log N$  selon le nombre de modes en  $x$ , et une variation linéaire selon l'ordre  $M$  de non-linéarités. La convergence numérique vers la solution en fonction du nombre de modes  $N$  a été testée en houle régulière avec un doublet tournant. Pour une cambrure faible  $ka = 0.16$ , la convergence est quasi-exponentielle en fonction de  $N$  en raison de la régularité de la solution (l'élévation spatiale s'annule aux bords du domaine grâce aux zones absorbantes). Ensuite, la convergence en fonction de l'ordre de non-linéarité  $M$  montre un comportement exponentiel pour la cambrure  $ka = 0.16$ . Pour une cambrure plus élevée  $ka = 0.25$ , la convergence se fait à l'ordre 3.2 ce qui est tout à fait satisfaisant. Enfin, une première validation est apporté qui consiste à comparer la houle régulière obtenue en régime établi après le passage du front d'onde à une solution non linéaire stationnaire. Pour les deux cambrures citées plus haut, la superposition des élévations de surface libre a montré que dès  $M = 4$  les solutions sont indiscernables. Pour compléter cette validation visuelle, on s'intéressera aux composantes fréquentielles jusqu'au cinquième ordre pour la cambrure  $ka = 0.25$ .

#### I.3.5.1 Génération de houle cambrée

On génère une houle de forte cambrure  $\varepsilon = 8 \%$  ( $ka = 0.25$ ) par l'intermédiaire d'un doublet tournant et on compare l'élévation obtenue sur une sonde du bassin à la solution stationnaire de Rienecker et Fenton[105]. La comparaison se fait à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Toutes les grandeurs présentées dans cette partie ont été adimensionnées grâce à la profondeur et à l'accélération de la gravité. Le bassin a pour longueur  $L_x = 10$ , le doublet tournant est placé en  $x_d = 2.5$  à une distance  $z_d = -0.25$  sous la surface libre et sa fréquence est choisie pour générer une houle de longueur d'onde  $\lambda = 0.5$ . La figure I.3.4 reprend tout d'abord nos résultats temporels présentés dans [79] et affiche en haut l'élévation de surface libre dans tout le bassin pour la solution de référence de Rienecker et Fenton et le modèle HOS avec un ordre  $M = 6$ . En bas, un zoom sur une partie du bassin compare la solution de référence aux simulations effectuées avec des paramètres  $M = 1, 3$  et  $6$ . Tous les calculs sont effectués avec  $N = 257$  modes. Une sonde est placée en  $x=7$  dans le bassin et permet une analyse fréquentielle du signal d'élévation recueilli. La figure I.3.5 montre l'amplitude des composantes fréquentielles pour les cinq premiers harmoniques du signal. Les amplitudes du modèle HOS sont obtenues par TF sur une fenêtre de 9 périodes de l'élévation. Le tableau I.3.2 donne l'erreur commise sur l'amplitude et la phase des composantes fréquentielles pour

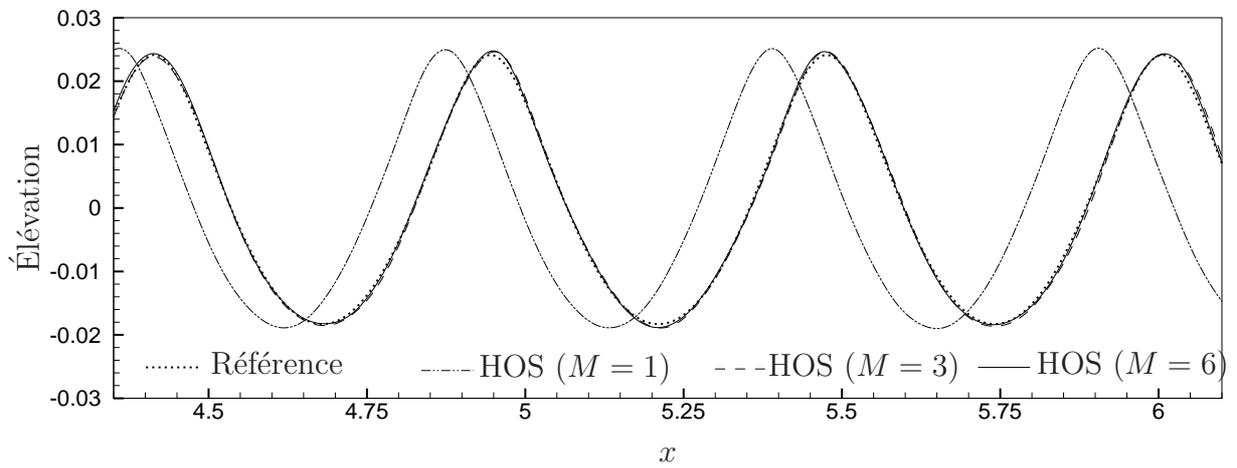
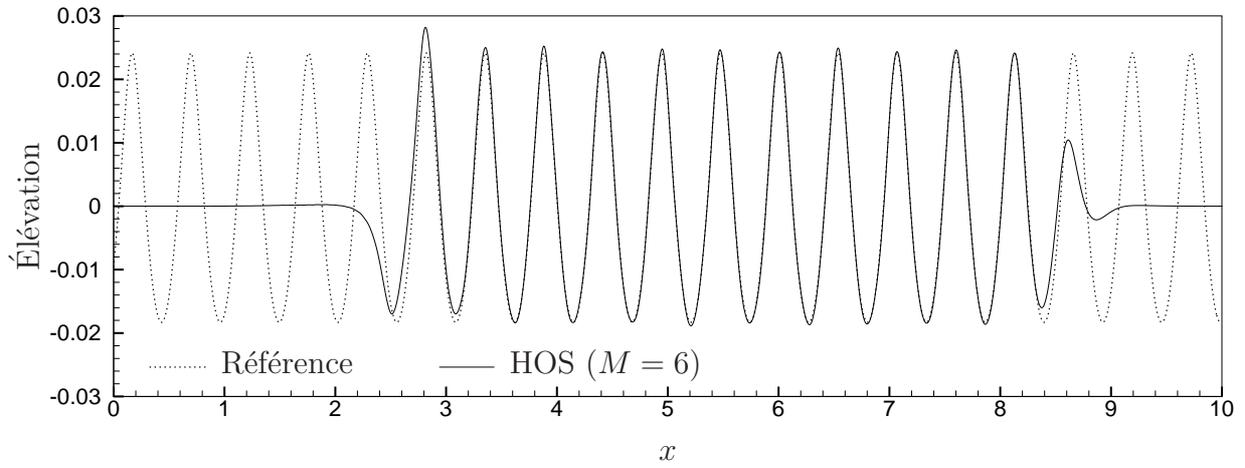


FIG. I.3.4 – *Élévation de surface libre* ( $\varepsilon = 8 \%$ )

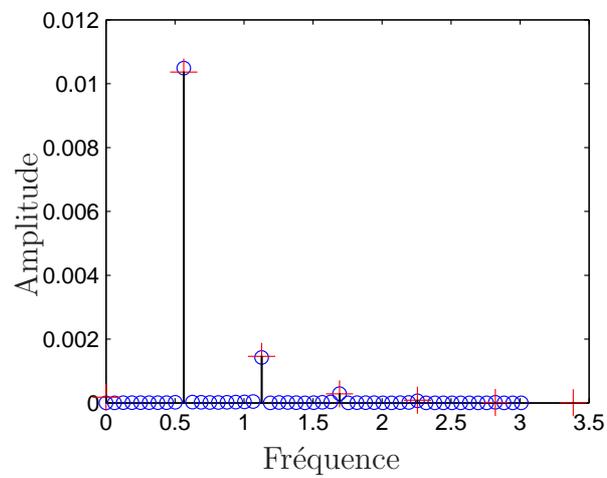


FIG. I.3.5 – *Composantes fréquentielles* ( $\varepsilon = 8 \%$ )

les cinq premiers ordres. Les deux première lignes correspondent aux amplitudes absolues de l'élévation de référence et de l'élévation simulée. La troisième ligne donne l'erreur relative sur les amplitudes et la dernière ligne l'écart de phase calculé par

$$\Delta\phi = \arg \frac{a_p}{(a_1)^p}$$

où  $a_p$  est l'amplitude à l'ordre  $p$ . On peut constater que sur cet exemple, la simulation HOS

	1 <sup>er</sup> ordre	2 <sup>ème</sup> ordre	3 <sup>ème</sup> ordre	4 <sup>ème</sup> ordre	5 <sup>ème</sup> ordre
Référence ( $10^{-5}$ )	104	14.6	2.82	0.825	0.151
HOS ( $10^{-5}$ )	105	14.2	2.90	0.689	0.184
Erreur (%)	1.2	2.4	2.7	16	22
Phase (rad)	0	-0.036	-0.12	-0.2	-0.14

TAB. I.3.2 – Erreur sur les composantes fréquentielles ( $\varepsilon = 8 \%$ )

mise en œuvre ( $M = 6$ ,  $N = 257$ ) permet de reproduire correctement jusqu'à l'ordre trois la génération d'une cambrure de 8 %, à la fois en phase et en amplitude. Il faut toutefois rester prudent car le caractère instationnaire de la génération de houle donne un régime établi qui n'est pas complètement débarrassé des phénomènes transitoires (front d'onde, réflexion) comme dans le cadre de la solution de référence. On a donc mis en place une autre validation de l'approximation HOS seule.

### I.3.5.2 Comportement de l'approximation pour $W$

On s'attache ici à valider la résolution approchée du problème de Dirichlet permettant de calculer la vitesse verticale en s'intéressant notamment à la procédure anti-repliement<sup>5</sup>.

Pour simplifier cette étude, on s'est placé dans le cas simple d'une houle stationnaire périodique, utilisé par exemple dans Dommermuth et Yue [42] et Clamond et Grue [28]. Pour cela, l'approximation HOS pour le calcul de la vitesse verticale  $W$  a été codée en domaine périodique comme dans sa formulation originale, en profondeur infinie. On effectue des comparaisons avec une solution stationnaire de houle non linéaire établie par Rienecker et Fenton<sup>6</sup> [105], déjà codée par P. Ferrant, qu'on a adaptée elle aussi à la profondeur infinie. Cette solution de référence fournit d'une part l'élévation  $\eta(x)$  et le potentiel de surface  $\phi(x, z = \eta(x))$  sur un domaine de calcul d'une longueur d'onde (ces deux données surfaciques servent d'entrée au test HOS qui estime la vitesse verticale); d'autre part la vitesse verticale de référence  $\frac{\partial\phi}{\partial z}$  en  $z = \eta$  qui sert de point de comparaison. Des tests similaires ont été réalisés par Dommermuth et Yue

---

5. Dans cette partie uniquement, le traitement anti-repliement complet est utilisé. Les résultats obtenus montrent qu'il sera nécessaire pour les simulations de houle fortement cambrées.

6. L'utilisation de l'algorithme original proposé dans l'article [105] montre que l'élévation de surface libre a besoin d'un nombre  $N_\eta$  de modes plus élevé que la fonction de courant  $\psi$  pour être correctement décrite, autrement dit, l'amplitude des modes décroît moins vite que pour la fonction de courant. Or cet algorithme emploie le même nombre de modes pour l'élévation  $N_\eta$  et la fonction de courant  $N_\psi$ , *i.e.*  $N_\eta = N_\psi$ , et l'augmentation de ce nombre rend la convergence numérique difficile (besoin de cambrures intermédiaires). Ceci a été amélioré grâce à l'augmentation du nombre de point de collocation sur la surface libre et du nombre de modes utilisés pour décrire la surface libre sans rien changer pour la fonction de courant. Le système à résoudre devient sur-déterminé et est résolu par une méthode des moindres carrés. Par exemple, pour une cambrure  $ka = 0.4$ ,  $N_\eta = 100$  et  $N_\psi = 50$  assure en profondeur infinie la décroissance des modes jusqu'à la précision machine.

[42] pour des cambrures  $ka = 0.1$  à  $0.4$  et Skandrani *et al.* [116] pour des cambrures de  $0.1$ ,  $0.2$  et  $0.3$ . Refaire ces mêmes tests permet de vérifier la cohérence entre notre modèle et des leurs. Les détails des valeurs numériques de ces tests ne sont pas reproduits ici ; on n'en donne que des courbes et les interprétations qui vont avec. Trois cambrures,  $ka = 0.2$ ,  $0.35$  et  $0.4$  ont servi pour ces tests numériques. On fait varier les deux paramètres de l'approximation HOS, le nombre de modes  $N$  et l'ordre  $M$  de non-linéarité HOS. On regarde l'erreur commise sur la dérivée verticale par rapport à la solution stationnaire de référence. L'erreur utilisée est une erreur relative donnée en pourcentage par l'expression :

$$\varepsilon(N, M) = 100 \frac{\max_x |\phi_z - \phi_z^{RF}|}{\max_x |\phi_z^{RF}|}$$

où  $\phi_z$  est la vitesse verticale approximée par le modèle HOS et  $\phi_z^{RF}$  est la vitesse verticale issue de la solution stationnaire de référence de Rienecker et Fenton [105]. Les maxima sont recherchés sur l'intervalle de calcul d'une période ( $x \in [0; \lambda]$ ). Pour chaque cas, *i.e.* chaque couple  $\{N, M\}$  de paramètres, on a réalisé trois calculs de vitesse verticale par le modèle HOS. Le premier, sans traitement anti-repliement donne de mauvais résultats comme on pouvait s'y attendre et ne sera pas présenté ici. On se concentre sur les deux autres, l'un avec un traitement anti-repliement partiel et l'autre avec un traitement complet implémenté spécifiquement.

Dans ce test, un ordre  $M$  dans le modèle HOS avec une longueur de domaine égale à la longueur d'onde de la houle stationnaire permettra de représenter le fondamental et  $M - 1$  harmoniques. Ces  $M$  modes de Fourier nécessitent un maillage de  $2M$  points (critère de Shannon).

Selon Dommermuth et Yue, et Skandrani *et al.* , qui ont réalisé des tests similaires, pour des cambrures  $ka \leq 0.35$ , l'erreur décroît exponentiellement avec  $N$  et  $M$  lorsque ceux-ci augmentent. À  $M$  fixé, la vitesse verticale approximée tend vers une solution limite de façon exponentielle lorsque  $N$  augmente. À  $N$  fixé, la convergence en  $M$  a lieu si  $N$  est assez élevé (critère de Shannon : il faut au minimum  $N > 2M$ ). Pour  $ka = 0.4$ , ils ont observé une divergence de la solution lorsque  $M$  devient supérieur à 10 et ce même si  $N$  est augmenté en conséquence. Les tests numériques que nous avons effectués sur le même principe ont permis de retrouver ces conclusions et d'aller un peu plus loin, notamment avec une étude de l'influence de la technique anti-repliement employée (voir les remarques en I.3.4.2) ainsi que la mise en évidence d'une convergence à large  $M$  même pour la cambrure importante de  $ka = 0.4$ .

Pour réaliser les figures suivantes, on a volontairement poussé les valeurs des paramètres dans une très large gamme, notamment l'ordre de non-linéarité HOS  $M$  jusqu'à trente. On pouvait le faire ici puisqu'on ne réalise qu'une seule estimation de la vitesse verticale (en simulation temporelle, des valeurs trop élevées de  $M$ , par exemple, augmentent le temps de calcul (comme  $M$ )). Les calculs ont été réalisés avec un nombre de points  $N_1$  pour les TF (qui doit être une puissance de deux pour les algorithmes FFT utilisés (ici,  $N_1 = 128$ )) différent du nombre de modes  $N$  utiles pour représenter  $\eta$  ou  $\phi_s$ . L'idée est de faire varier à notre guise le nombre de modes effectivement utilisés tout en conservant un nombre de modes de calcul en puissance de deux pour les FFT. On doit avoir  $2N < N_1$  d'après le critère de Shannon. Cette séparation est l'équivalent d'un filtre passe-bas parfait dont la fonction de transfert possède une phase nulle sur toute la gamme de mode, une amplitude un pour  $n \leq N$  et zéro pour  $N < n \leq N_1$ .

On commence par étudier la cambrure la plus faible, *i.e.*  $ka = 0.2$ . La figure I.3.6 donne l'évolution de l'erreur relative définie précédemment en fonction de l'ordre  $M$  de non-linéarité de l'approximation HOS. On a tracé trois courbes qui correspondent à trois valeurs de nombre

de modes  $N$ , *i.e.* de nombre d'harmoniques ( $N=20, 30$  et  $40$ ). Intéressons-nous tout d'abord aux

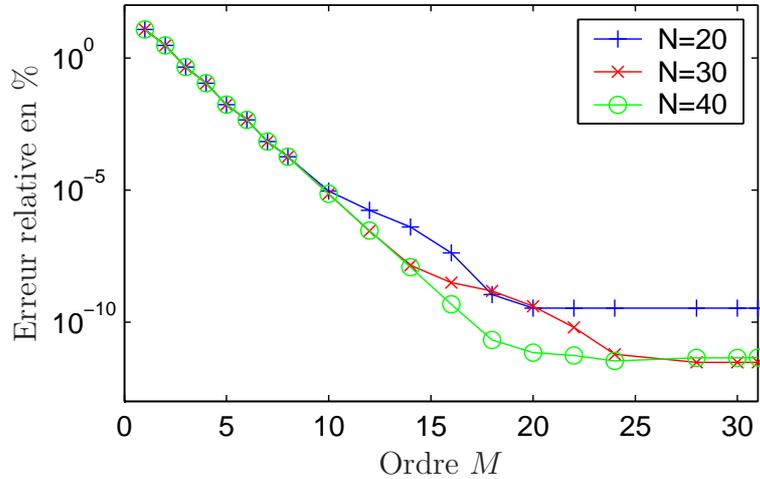


FIG. I.3.6 – Erreur relative en fonction de l'ordre  $M$  de non-linéarité ( $ka = 0.2$ )

calculs avec  $N = 20$  modes. Entre  $M = 1$  et  $10$ , on observe une décroissance exponentielle de l'erreur<sup>7</sup>. Puis lorsque  $M$  continue d'augmenter, on remarque un ralentissement temporaire de la décroissance de l'erreur, suivi à nouveau d'un comportement exponentiel jusqu'à une précision limite d'environ  $10^{-10}$  %. Pour les calculs avec  $N = 30$  modes maintenant, le comportement est similaire avec deux différences cependant : un ralentissement plus tardif, *i.e.* qui apparaît pour une plus grande valeur de  $M$ , et une précision limite qui atteint la précision machine ( $10^{-12}$  %).

Le ralentissement se fait de plus en plus tard lorsqu'on augmente le nombre  $N$  de modes si bien que pour  $N = 40$ , on n'observe plus ce ralentissement sur la figure I.3.6, l'erreur décroît directement jusqu'à la précision machine.

Si l'on s'intéresse à l'évolution de l'erreur à  $M$  fixé cette fois, avec<sup>8</sup>  $M > 10$ , on observe également une décroissance exponentielle en fonction de  $N$  pour les  $N$  faibles, puis un ralentissement si l'on augmente encore  $N$ , jusqu'à une précision limite. Cette précision limite décroît vers la précision machine si l'on augmente  $M$  comme on l'a vu précédemment. Pour la cambrure  $ka = 0.2$ , la différence entre les deux traitements anti-repliement, partiel ou complet, est très faible : les courbes de la figure I.3.6 sont superposées, c'est pourquoi seules celles correspondant au traitement complet ont été représentées.

Ces résultats sont semblables à ceux montrés par Dommermuth et Yue [42] et Skandrani *et al.* [116] qui ont utilisés des valeurs de  $M$  entre 1 et 12. Cette comparaison positive valide le modèle HOS que l'on a développé. L'étude pour les valeurs de  $M$  supérieures à 10 fait apparaître un comportement de l'erreur qu'on retrouvera aux autres cambrures.

La deuxième cambrure étudiée,  $ka=0.35$ , donne des informations supplémentaires sur le comportement de l'approximation HOS lorsque les non-linéarités sont plus importantes. L'évolution de l'erreur relative sur la vitesse verticale est donnée sur la figure I.3.7. On observe comme précédemment une bonne décroissance de l'erreur pour les faibles valeur de  $M$ , et ce quel que soit le nombre de mode  $N$  utilisé. Ensuite, le ralentissement de la décroissance de

7. Ce comportement est le même pour les trois valeurs de  $N$  : la décroissance exponentielle est indépendante du nombre de modes  $N$ .

8. Pour  $M < 10$ , on a vu précédemment que l'erreur est indépendante de  $N$ .

l'erreur apparaît pour un ordre  $M$  plus faible. Ce ralentissement est plus sévère que pour la cambrure  $ka = 0.2$ , allant jusqu'à une légère augmentation de l'erreur pour les grandes valeurs de  $N$ . Après le ralentissement, on retrouve à nouveau une décroissance rapide de l'erreur en fonction de  $M$ , jusqu'à une précision limite qui dépend du nombre de modes  $N$ .

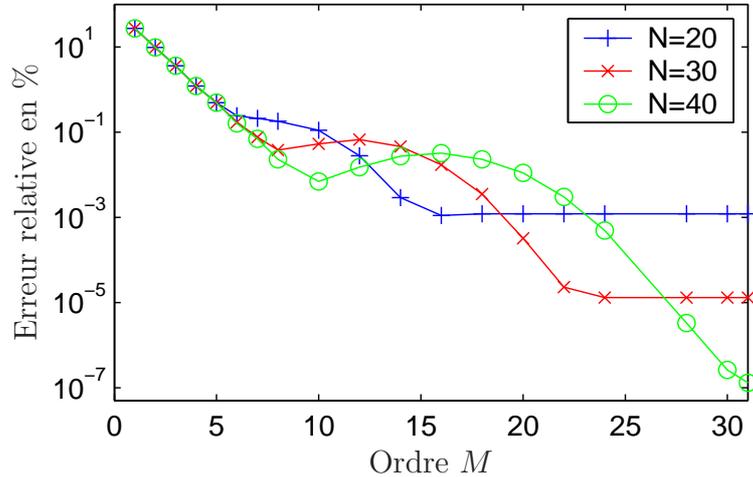


FIG. I.3.7 – Erreur relative en fonction de l'ordre  $M$  de non-linéarité ( $ka = 0.35$ )

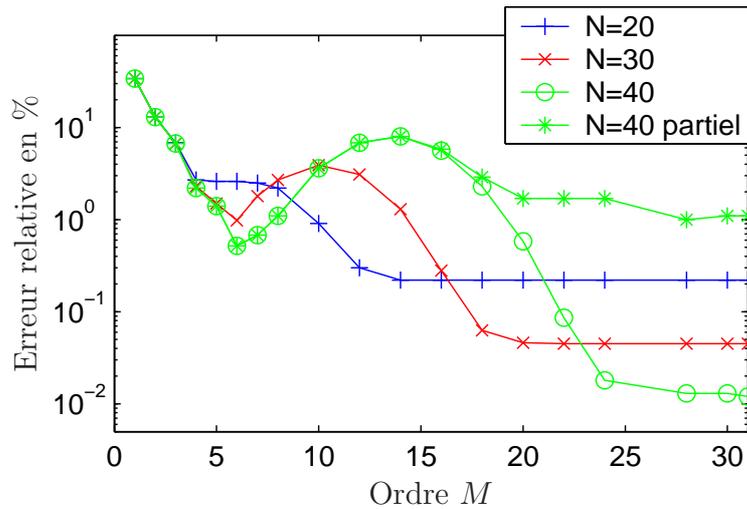
On n'arrive pas à la précision machine mais à une précision satisfaisante vu la cambrure élevée (80 % de la limite de Stokes). Le ralentissement de la décroissance de l'erreur lorsque l'ordre  $M$  de non-linéarités augmente a été observé par Dommermuth et Yue [42], ces derniers utilisant un traitement partiel contre le repliement. Le même effet relevé par Skandrani *et al.* est interprété comme une saturation du modèle HOS (*e.g.* Fructus *et al.* [52]).

Pour cette cambrure  $ka = 0.35$ , l'influence du traitement anti-repliement se fait sentir. Ainsi, l'erreur relative obtenue avec un anti-repliement complet est deux fois plus faible que celle avec anti-repliement partiel, ce pour toutes les valeurs de  $M$  et  $N$  testées.

La dernière cambrure  $ka = 0.4$  permet de tester l'approximation HOS en conditions extrêmes. L'erreur est tracée sur la figure I.3.8 en fonction de l'ordre de non-linéarité  $M$ . On remarque tout d'abord que pour les faibles valeurs de  $M$ , l'erreur décroît de la même façon quel que soit  $N$ . Les observations faites pour  $ka = 0.35$  sont valables ici mais les défauts de décroissance sont plus forts. Pour  $N=20$  harmoniques, on a un palier temporaire où l'erreur ne décroît plus ; pour  $N=35$  et 40 l'erreur croît même pour des valeurs de  $M$  intermédiaires, avant de redescendre vers la précision limite, respectivement pour  $M > 20$  et  $M > 25$ .

On peut observer l'effet du traitement partiel anti-repliement. Ici, pour la cambrure  $ka = 0.4$  très élevée, la différence entre les deux traitements est plus importante que pour la cambrure  $ka = 0.35$ . La figure I.3.8 montre, pour 40 harmoniques, le comportement avec anti-repliement complet et partiel, notés respectivement  $N = 40$  (o) et  $N = 40$  partiel (\*) dans la légende. On peut voir que les deux approches se comportent de la même façon pour des valeurs faibles de  $M$  (décroissance de l'erreur puis augmentation lorsque  $M$  augmente). Pour les valeurs de  $M$  supérieures à 14 cependant, l'erreur diminue à nouveau en formulation complète alors qu'elle garde des valeurs élevées avec un traitement partiel contre le repliement (chez Dommermuth et Yue, l'erreur décroît jusqu'à  $M = 8$  conformément aux résultats qu'on a obtenu en traitement partiel contre le repliement).

Enfin, pour situer les propriétés du modèle HOS périodique par rapport à d'autres modèles, on trouve également dans Clamond et Grue [28] une étude comparative avec une solution


 FIG. I.3.8 – Erreur relative en fonction de l'ordre  $M$  de non-linéarité ( $ka = 0.4$ )

stationnaire de référence. On dispose de chiffres pour  $ka = 0.35$  et  $N = 8, 16, 32$  et  $64$  modes, avec une intégration limitée à une longueur d'onde. Il s'agit d'une erreur relative maximale en pourcentage. Elle vaut respectivement 4.6, 0.6, 0.25 et 0.26 %. En utilisant les mêmes nombres de modes qu'eux, et en faisant varier l'ordre  $M$  du HOS, on a pu obtenir facilement des erreurs similaires avec  $M = 3, 5, 6$  et  $6$ . Le choix d'une valeur  $M = 8$  permet à notre modèle de gagner un ordre de grandeur sur la précision avec des valeurs 0.51, 0.21, 0.038 et 0.023 % respectivement.

Des tests supplémentaires sur la formulation périodique sont en cours pour quantifier l'influence du traitement contre le repliement lors de simulations temporelles.

## Conclusion

Le développement du bassin numérique HOS, en collaboration avec D. Le Touzé, nous donne accès à la génération et à la propagation de la houle en non linéaire complet. Le phénomène de convergence tardive observé a mis en évidence l'importance du traitement anti-repliement complet lors des simulations HOS en houle très cambrée. Le schéma numérique obtenu est rapide grâce à l'emploi de FFT, et précis. La modélisation du générateur physique fournit une capacité applicative réelle du modèle aussi bien en 2D qu'en 3D, qu'on illustrera au cours de cette thèse lors de la simulation de houles irrégulières droites de longues durées, de houle focalisée bi- et tri-dimensionnelles.

Enfin, la comparaison entre les deux modèles, second ordre et non linéaire complet, permet de dégager facilement les effets d'ordre supérieur à deux.

## Perspectives

L'utilisation systématique du traitement anti-repliement complet est à envisager pour les cas de houles fortement cambrées.

La mise en œuvre du calcul des grandeurs dans le fluide (vitesses, pression) par reconstruction à partir des modes du potentiel (Bateman *et al.* [5]) dans les deux codes permettra l'utilisation des bassins numériques dans les méthodes mixtes d'étude des interactions houle/structure

de type SWENSE développées au Laboratoire [48]. Cette mise en place est entreprise en ce moment par Guillaume Ducrozet et les premiers résultats sur des houles régulières en régime établi sont tout à fait convaincants.

Une autre amélioration simple à apporter au modèle HOS est d'intégrer les équations d'évolution (I.3.8) pour  $\eta$  et  $\phi^s$  en utilisant la méthode de la variation de la constante. En passant ces équations dans le domaine de Fourier, on obtient des équations d'évolution pour les amplitudes des modes de Fourier de  $\eta$  et  $\phi_s$ . La résolution de ces équations linéarisées est possible analytiquement ce qui permet de chercher des solutions non linéaires cette fois sous la forme

$$\eta(\mathbf{k},t) = \operatorname{Re} [F(\mathbf{k},t) e^{2i\pi ft}]$$

où  $f$  est la fréquence reliée au mode de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  par la relation de dispersion linéaire. La fonction  $F$  varie plus lentement que  $\eta(\mathbf{k},t)$ . L'avantage d'une telle formulation est à la fois un gain de temps CPU (Clamond *et al.* []) et une réduction de l'erreur numérique (Tanaka [119]).

D'un point de vue pratique, il est nécessaire d'employer les routines de calculs des mouvements batteur pour calculer le mouvement du doublet instationnaire et disposer ainsi d'une manière simple de reproduire les essais expérimentaux fortement cambrés près du batteur.



Deuxième partie

**Effets de confinement**



# Chapitre II.1

## Réflexions sur la plage absorbante

À l’opposé du générateur de houle, la plage absorbante est là pour amortir la houle provenant du batteur, évitant qu’elle ne se réfléchisse sur le mur opposé et ne revienne perturber le champ de vagues créé. Il est nécessaire de connaître ses performances réelles pour tenir compte de la réflexion lors de l’analyse de résultats de mesure. On a également besoin d’une telle évaluation pour reproduire les caractéristiques d’absorption de la plage réelle dans les modèles numériques de bassin développés au cours de cette thèse. Les performances de la plage réelle ont été évaluées à l’occasion du stage de L. Gougeon [55] par une campagne d’essais pour des houles droites couvrant l’essentiel de la gamme de fréquences et d’amplitudes utilisable au regard des dimensions du bassin.

La plage du bassin de houle est constituée d’un voile d’acier inox de forme parabolique se terminant en pente douce à l’intersection avec la surface libre au repos. Le nombre adimensionnel d’Iribaren caractérise le comportement des vagues incidentes sur cette plage :

$$I_r = \frac{\beta}{\sqrt{H_o/L_o}}$$

avec  $\beta$  la pente de la plage,  $H_o$  la hauteur de houle et  $L_o$  la longueur d’onde en eau profonde. La pente utilisée pendant la campagne de conception et pour la plage à l’échelle 1 vaut 1 : 8 (7 degrés). Conformément aux observations qui révèlent que tous les trains d’onde se brisent en rouleaux sur la plage, le nombre d’Iribaren, compris entre 0.4 et 1.6 pour toutes les houles usuellement générées, prédit un déferlement plongeant. Les vagues incidentes, qui voient donc une diminution de la hauteur d’eau à leur arrivée sur la plage, se cambrent et déferlent pour la plupart des longueurs d’onde et des amplitudes. C’est ce déferlement qui est à la source de l’amortissement des vagues ; on gardera donc à l’esprit que ce phénomène, fortement non linéaire, produit bien évidemment des ondes réfléchies dans une large gamme d’harmoniques.

On trouve dans la littérature un grand nombre de méthodes pour estimer la réflexion par des structures. En houle aléatoire, Goda et Suzuki [54] ont proposé une méthode fréquentielle à deux sondes. Il s’agit du nombre minimal de sondes nécessaires à distinguer houle incidente et réfléchi mais cette méthode présente l’inconvénient de ne pas pouvoir résoudre toutes les fréquences pour un espacement fixé des sondes. Zhu [132] et Sanchez [109] ont plus récemment proposé des méthodes analogues dans le domaine temporel. Marcou [94] puis plus tard Gaillard *et al.* [53] et Mansard et Funke [92] ont étendu cette technique à trois sondes. On dispose cette fois de plus d’informations que d’inconnues et une résolution par moindres carrés fournit les caractéristiques incidentes et réfléchies pour une plus large gamme de fréquences. Suh *et al.* [118] ont proposé une extension de la méthode à trois sondes dans le cas de houle avec

courant. D'autres techniques ont également été proposées comme l'utilisation de sondes mobiles (Brossard *et al.* [23] et [24]) se déplaçant au dessus du bassin grâce à un système de chariot ou un travail dans le domaine temporel. Cette méthode des moindres carrés peut être généralisée à un réseau de  $P \geq 3$  sondes, et adaptée très simplement à une analyse des composantes second-order d'un champ de vague régulier ou bi-chromatique (voir par exemple Boudet et Cointe [18] ou plus récemment Lin *et al.* [82] et aussi Brossard *et al.* [23]). Elle peut aussi être améliorée pour les cambrures plus importantes où des effets d'amplitude finie interviennent (Stassen [117], Boudet et Ménard [19]).

Dans notre cas, compte tenu de la grande taille du bassin, on s'est tourné vers une méthode à sondes fixes. Utilisant toujours au moins trois sondes, on analyse les données grâce à une adaptation de la méthode dite de Mansard et Funke au cas de la houle régulière (voir par exemple Isaacson [67]). L'étude présente a pour objectifs :

- de qualifier la plage physique,
- d'intégrer ces performances réelles dans les codes numériques,
- d'évaluer le comportement de la méthode de Mansard et Funke appliquée à des cas expérimentaux instationnaires et/ou de forte cambrure,
- de prendre en compte certains effets non linéaires, sur la vitesse de phase notamment.

Sans rentrer dans une étude technique spécifique de la plage (qui correspondrait plus au cadre d'un rapport d'étude), on cherche à plutôt ici s'intéresser aux limites de la méthode d'analyse pour en tirer une liste de précautions à prendre lors du commentaire des résultats.

Les essais ont montré aussi que le champ de vagues dans le bassin est parfois instable, avec l'apparition de modulations au cours du temps. Plusieurs types d'instabilités ont été observés en bassin de houle. La plus connue est l'instabilité de Benjamin-Feir (Benjamin et Feir [7], Lake *et al.* [75], Melville [95], Tulin et Waseda [122]) : on observe la modulation en paquets d'un train d'onde régulier à mesure qu'on s'éloigne du batteur. Cette modulation s'explique par la croissance de bandes latérales. L'amplitude initiale de ces bandes latérales est liée au bruit présent près du batteur (agitation résiduelle, vibrations des volets), d'où la nécessité d'un mouvement bien contrôlé du batteur. Longuet-Higgins et Drazen [84] ont observé une autre type d'instabilité lors de la réflexion de vagues cambrées contre un mur vertical. Il s'agit là d'un phénomène plus spécifique à l'onde stationnaire qui se forme devant le mur. Dans notre cas, il semble que les instabilités soient de type Benjamin-Feir. Elles ne se développent pas directement après le premier passage du front d'onde mais apparaissent au cours du temps et sont liées aux réflexions multiples sur la plage et le batteur (voir par exemple l'observation de ces instabilités par Tulin et Waseda [122]).

Dans un premier temps (II.1.1), on décrit la méthode de base de séparation de la houle incidente et réfléchi qui fournit un coefficient de réflexion à partir d'une mesure d'élévation sur  $P = 3$  sondes. Après une description des essais menés au cours de la campagne d'essai de juin 2002 avec L. Gougeon (II.1.2), on donnera un aperçu des résultats obtenus (II.1.3) : ils montrent les limites de la méthode à cambrure élevée et l'importance des effets d'amplitude finie. On s'attachera ensuite à la prise en compte de ces effets d'ordre supérieur, à la fois lors de la génération de houle, de la réflexion sur la plage et de l'analyse (II.1.4). On terminera l'étude expérimentale par l'évolution temporelle du champ de vagues pour un essai instable. On passera enfin à l'analyse de la réflexion dans les modèles numériques (II.1.5).

## II.1.1 Méthode d'analyse

On rappelle ici la méthode de Mansard et Funke adaptée à l'analyse de la houle régulière. On donne dans un premier temps les grandes lignes de la méthode basée sur une description linéaire de la réflexion, puis un bref rappel des validations effectuées en DEA ainsi qu'une liste des extensions possibles pour traiter des effets d'ordre supérieurs.

### II.1.1.1 Description

Pour analyser la réflexion, on suppose dans un premier temps que le signal mesuré est la superposition d'une onde incidente de fréquence et d'amplitude imposée par le batteur et d'une onde réfléchie par la plage à la même fréquence. Il s'agit d'une interprétation linéaire de la réflexion. Les amplitudes et phases des ondes incidente et réfléchie sont déterminées en considérant les Transformées de Fourier des signaux des  $P$  sondes à la fréquence du batteur comme la superposition de ces deux ondes, ce qu'on écrit :

$$\underline{a}_i e^{-ikx_{1p}} + \underline{a}_r e^{ikx_{1p}} = \underline{b}_p \quad \text{pour } p = 1 \text{ à } P \quad (\text{II.1.1})$$

Dans cette expression, les termes  $\underline{a}_i$  et  $\underline{a}_r$  sont les amplitudes complexes de la houle incidente et réfléchie,  $k$  le nombre d'onde obtenu par la relation de dispersion linéaire et  $x_{1p}$  l'écartement entre la sonde 1 et la sonde  $p$ . Les termes  $\underline{b}_p$  représentent la Transformée de Fourier du signal de la sonde  $p$ . Les Transformées de Fourier (TF) utilisées sont des Transformées de Fourier à court terme, appelées aussi analyse glissante. La fenêtre temporelle sur laquelle s'applique cette TF possède une durée d'une ou plusieurs périodes de manière à ce que la fréquence de la houle tombe exactement sur une des fréquences d'analyse. Cette fenêtre est déplacée progressivement le long du signal et fournit à chaque instant<sup>1</sup> un jeu de coefficients complexes de Fourier dont on utilise dans un premier temps uniquement ceux à la fréquence du batteur. Pour chaque fenêtre temporelle, le système (II.1.1) de  $P$  équations à deux inconnues s'écrit sous la forme

$$A \underline{a} = \underline{b} \quad (\text{II.1.2})$$

La matrice  $A$  de dimensions<sup>2</sup>  $(N,P)$  contient les termes de phase  $A_{pn} = e^{ik_n x_{1p}}$  où  $k_n$  est le nombre d'onde de l'onde  $n$ . Le vecteur  $\underline{a}$  contient les amplitudes inconnues  $\underline{a}_i$  et  $\underline{a}_r$  et  $\underline{b}$  contient les transformées de Fourier aux sondes. Le système (II.1.2) est résolu par une méthode des moindres carrés : on multiplie chaque côté de (II.1.2) par la matrice trans-conjuguée de  $A$

$$A^* A \underline{a} = A^* \underline{b} \quad \text{avec } A^* = \overline{A}^t$$

où cette fois la matrice  $A^* A$  est carrée. La résolution de ce second système donne une valeur de  $\underline{a}_i$  et  $\underline{a}_r$ . Une telle analyse glissante en temps permet d'obtenir une évolution temporelle des coefficients de Fourier et par là-même des amplitudes incidentes et réfléchies dans notre cas précis. On peut donc *a priori* identifier les régimes établis et repérer le passage des différents fronts d'onde suite aux réflexions successives sur la plage et le batteur.

Le coefficient de réflexion est estimé sur une fenêtre temporelle pendant laquelle on observe la superposition des deux ondes cibles (après l'arrivée du front d'onde réfléchi sur les sondes

1. L'instant d'analyse correspondant à une fenêtre est défini comme le temps au milieu de la fenêtre.

2.  $N$  est le nombre d'ondes à séparer, qui vaut 2 pour l'analyse de la houle incidente et réfléchie. Avec les notations introduites pour la matrice  $A$ , ces ondes ont pour nombre d'onde  $k_n$  respectivement  $k_1 = -k$  et  $k_2 = +k$ . Un autre exemple est donné dans la partie II.1.4.1 où l'on sépare trois ondes *i.e.*  $N = 3$ .

et avant l'arrivée du front d'onde réfléchi par le batteur). Il est défini ici comme le rapport d'amplitude de l'onde réfléchie et de l'onde incidente à la fréquence du batteur : on l'appellera dans la suite *coefficient de réflexion au fondamental*. Finalement le système d'équations (II.1.1) se ramène facilement à un système carré très simple à résoudre. Tout le soin de l'analyse doit se porter vers l'obtention des TF qui forment le second membre. De leur qualité dépendent entre autres la pertinence de la séparation incident réfléchi.

### II.1.1.2 Validation

L'analyse a été validée numériquement ([14]) sur des signaux de houle idéaux. Pour cela on construit les élévations des sondes au cours du temps selon l'expression

$$\eta_p(t) = a_i \cos(\omega t - kx_p + \phi_i) + a_r \cos(\omega t + kx_p + \phi_r)$$

en se donnant des valeurs d'amplitudes  $a_i$  et  $a_r$  et de phases  $\phi_i$  et  $\phi_r$ . Après une décomposition de Fourier correcte (nombre entier de périodes dans la fenêtre d'analyse), la séparation incident réfléchi par la technique décrite précédemment permet de retrouver parfaitement les amplitudes et phases cibles. De tels tests ont été utilisés également lors de l'étude des effets d'amplitude finie sur la séparation incident réfléchi (voir la partie II.1.4.4).

On passe maintenant à la description des essais effectués au cours de la campagne de juin 2002 avec L. Gougeon [55].

## II.1.2 Description des essais

Les performances de la plage absorbante ont été évaluées lors de la conception sur un prototype à l'échelle 3/5<sup>ème</sup> par le fabricant EDL en mars 2001. D'après discussion avec Douglas Rogers, qui a contribué aux essais, la campagne complète (montage, essais, démontage) s'est déroulée sur deux jours dans un canal bi-dimensionnel de test adapté à la taille d'un volet du batteur de houle (22×0.625×3 m). Les résultats de ces essais préliminaires ont été fournis dans un rapport [107] et serviront de point de comparaison une fois les résultats adimensionnés par la longueur de la plage. Les fréquences générées sont notamment les mêmes<sup>3</sup>.

Les manipulations ont consisté à générer des houles mono-chromatiques et à enregistrer trois élévations de surface libre au milieu du bassin. L'instant de démarrage du batteur a servi de déclenchement de l'acquisition, de manière à comparer les mesures à des simulations dans le domaine temporel : pour cela un interrupteur de déclenchement placé à proximité du PC de commande batteur est actionné en même temps que le démarrage logiciel du batteur (on ne disposait pas de signal de recopie ou de trigger lié au démarrage physique du batteur<sup>4</sup>).

Les capteurs utilisés sont trois sondes de marques SEREPS, d'étendue de 1 m, achetées peu de temps avant les essais. L'ensemble {sonde-conditionneur} est supposé être linéaire dans la gamme de mesure utilisée. Trois étalonnages statiques des sondes ont été réalisés au cours des essais pour évaluer la variation du coefficient de régression linéaire dans le temps qui se révèle faible. La linéarité s'est révélée très bonne pour ces sondes neuves, avec un écart quadratique moyen à la droite de régression inférieur à 1 mm pour les trois sondes (lors des campagnes

---

3. Erreur de jeunesse, on aurait eu intérêt à générer des houles en respectant l'échelle de la maquette...

4. Depuis ces essais de juin 2002, la procédure a été améliorée puisque le logiciel de contrôle du batteur permet désormais d'envoyer un signal de déclenchement lorsque le batteur se met réellement en mouvement.

suivantes, les déformations des sondes lors des différentes manipulations (étalonnage, montage, stockage) ont quelque peu altéré cette bonne linéarité).

La position des sondes est mesurée sur le support de fixation. On estime à  $\pm 2$  mm l'incertitude sur les distances inter-sondes. La position des sondes a été choisie pour maximiser

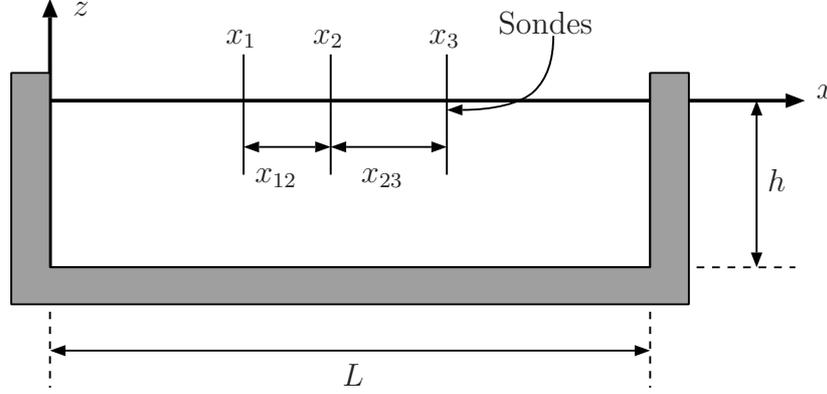


FIG. II.1.1 – Schéma du montage expérimental

le temps de mesure, à savoir la superposition de la houle incidente et réfléchie. Pour cela, les sondes sont placées à proximité de la plage autour de  $x = 30$  m. La figure II.1.1 schématise le montage expérimental. À partir de la vitesse de groupe  $v_g$  de l'onde régulière étudiée et  $v_g^{(2)}$  de l'onde second ordre libre associée, on peut prédire les temps de passage des différents fronts d'onde au niveau des sondes. La superposition des ondes incidente et réfléchie aura lieu entre

$$t_1 = \frac{2L - x_1}{v_g} \text{ et } t_2 = \frac{2L + x_1}{v_g}$$

La durée de mesure augmente donc lorsqu'on se rapproche de la plage. Le choix s'est porté vers  $x_1 = 29$  m. Le front d'onde second ordre libre en provenance de la plage<sup>5</sup> arrivera aux sondes à

$$t_3 = \frac{L}{v_g} + \frac{L - x_3}{v_g^{(2)}}$$

L'onde second ordre libre générée par le batteur arrive à

$$t_4 = \frac{x_1}{v_g^{(2)}}$$

Elle sera déjà présente quand arrivera celle générée au niveau de la plage. Pour les fréquences supérieures à 0.2 Hz, on a  $t_1 < t_4 < t_3 < t_2$ . Ces temps seront matérialisés par des traits verticaux sur les figures temporelles suivantes.

Les positions relatives des sondes sont déterminées de manière à éviter que l'information fréquentielle (de phase) fournie ne soit redondante. Il existe, comme pour la méthode de Goda et Suzuki (à deux sondes) des configurations pour lesquelles le système d'équations n'est pas solvable. Ces configurations sont cependant faciles à éviter<sup>6</sup>. L'écartement a été fixé à  $x_{12} =$

5. Voir partie II.1.4.1

6. Pour  $P = 3$  sondes, les configurations sans solutions sont du type

$$x_{12} = n \frac{\lambda}{2} \text{ et } x_{13} = m \frac{\lambda}{2}$$

2.01 m et  $x_{13} = 4.28$  m en profitant de toute la longueur du support disponible. On verra plus loin (partie II.1.3.4) que ce choix n'était pas le meilleur.

Comme on l'a dit précédemment, les fréquences utilisées sont les mêmes que lors des essais sur le prototype [107]. Un premier balayage constitué de 14 fréquences entre 0.2 et 1 Hz et de trois amplitudes par fréquence permet d'évaluer le comportement de la plage dans une gamme typique d'utilisation du bassin. Des essais préliminaires ont permis de choisir l'amplitude maximum pour chacune des 14 fréquences, limitée soit par le déferlement soit par les capacités des sondes. Les amplitudes ainsi obtenues correspondent aux essais appelés d'amplitude forte par la suite. Deux autres jeux d'amplitude en divisant par deux et quatre ces amplitudes maximales donnent les essais d'amplitude moyenne et faible.

Un deuxième balayage de cinq amplitudes supplémentaires pour deux des fréquences précédentes donne une idée de l'influence de l'amplitude sur le coefficient de réflexion au fondamental.

### II.1.3 Analyse des données

On décrit dans un premier temps la mise au point de l'analyse sur un cas d'amplitude très faible puis on présentera les résultats pour l'ensemble des essais. Il s'agit ici de l'application directe de la méthode linéaire décrite dans la partie II.1.1.1.

Le déclenchement de l'acquisition décrit plus haut s'est révélé insuffisamment précis pour permettre soit des comparaisons temporelles soit des mesures de phase absolues (manipulation manuelle (incertitude  $\Delta t = 0.1$  s) et surtout retard entre le démarrage logiciel et le démarrage physique du batteur lié à la transmission des informations du PC de commande aux cartes de contrôle (retard  $\Delta t \simeq 0.6$  s)). On a mesuré la période des houles générées en repérant deux passages à zéro espacé de plusieurs périodes et en divisant l'intervalle de temps obtenu par le nombre de période. La période ainsi mesurée est bien celle imposée au batteur, avec un écart inférieur à 0.1 % (qui est de l'ordre de l'incertitude de mesure évaluée par  $\Delta T = \Delta t/N$  avec  $\Delta t$  l'incertitude sur la durée entre les deux passages à zéro et  $N$  le nombre de périodes sélectionnées). Dans la suite, on peut alors effectuer une analyse par TF glissante avec une fenêtre de plusieurs périodes, la période choisie étant la période imposée au batteur. Les fréquences les plus faibles utilisées pour le prototype ont été générées lors de la campagne : les résultats des analyses ne seront pas présentés ici car les durées du signal sont trop courtes.

#### II.1.3.1 Cas de très faible amplitude :

On étudie tout d'abord une houle de longueur d'onde 5 m, d'amplitude 2.7 cm ( $\varepsilon = 1$  % de cambrure ou  $ka = 0.03$ ). La figure II.1.2 montre les résultats de la séparation avec analyse glissante (réalisée sur une fenêtre longue de 4 périodes). On observe sur la figure du haut que l'amplitude réfléchi est bien faible par rapport à la houle incidente. Les trois premiers traits verticaux représentent les instants de passage des fronts d'onde (incident, réfléchi sur la plage, réfléchi sur le batteur) Au passage du front incident ( $t = 22$  s), la méthode de séparation basée sur un régime établi fournit une composante réfléchi non nulle. Puis la houle incidente est d'amplitude constante égale à la consigne à 1 % près jusqu'à l'arrivée du front d'onde réfléchi par le batteur ( $t = 89$  s). Pendant ce temps, l'amplitude réfléchi ne s'annule pas tout à fait lorsque la houle incidente est seule mais on peut observer l'arrivée du front d'onde réfléchi au niveau du deuxième trait vertical ( $t = 45$  s). Ceci est lié au fait que les deux fronts sont trop rapprochés pour qu'un régime établi 'houle incidente seule' puisse être détecté par la méthode

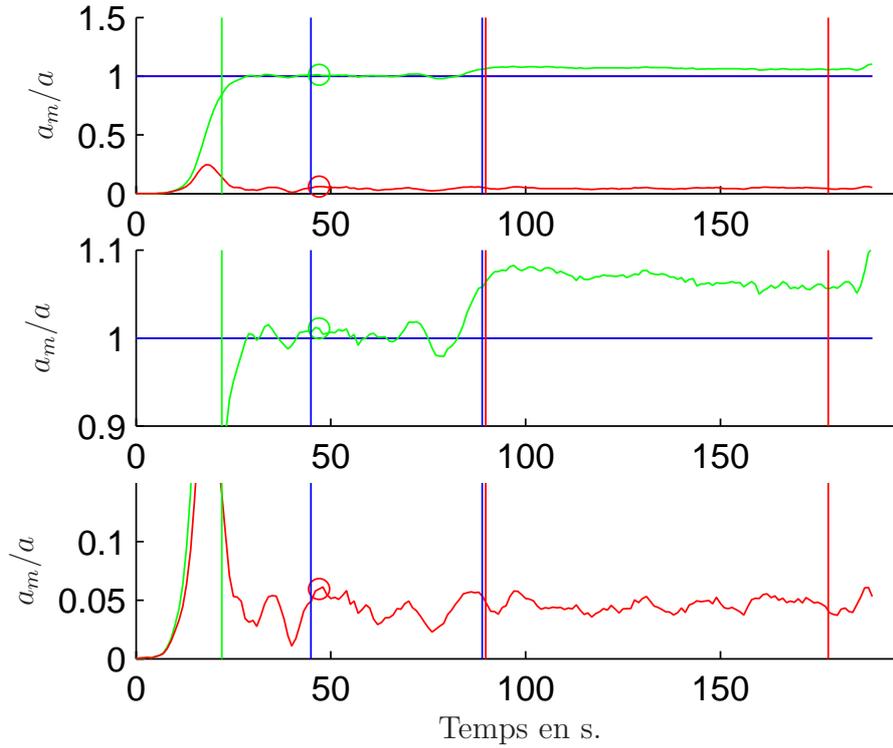


FIG. II.1.2 – Évolution temporelle des amplitudes incidente et réfléchie (haut : les deux, milieu : incident, bas : réfléchi)

(qui rappelons-le fonctionne en régime établi). Lors des essais, les sondes ont été placées près de la plage (à trente mètres du batteur et 5 m seulement du début de la plage) de manière à allonger le plus possible la durée du régime houles incidentes et réfléchies superposées, au détriment du régime précédemment évoqué. Des simulations avec des sondes plus proches du batteur ont confirmé que dans ce cas la décomposition fonctionne et l'amplitude réfléchie est négligeable lorsque la houle incidente est seule (des essais dans cette configuration donneraient la même conclusion). On peut retenir que pour interpréter les essais effectués le comportement de l'amplitude réfléchie n'est pas pertinent avant l'arrivée du front d'onde réfléchi.

Lorsque les deux ondes sont superposées on obtient un coefficient de réflexion de 5 % (figure II.1.2 en bas). Après l'arrivée du front d'onde réfléchi par le batteur, on observe l'augmentation de l'amplitude incidente évaluée : on retrouve alors une amplitude supplémentaire semblable à l'amplitude réfléchie. Si on retourne au formalisme de la méthode, l'amplitude après réflexion sur le batteur vaut

$$\underline{a} = a_i (1 + C_r e^{-2ikL})$$

Si l'onde réfléchi par le batteur est en phase avec l'onde incidente (*i.e.* si  $L/\lambda \in \mathbb{N}$ ) l'amplitude mesurée vaut  $a = a_i (1 + C_r)$ . Dans le cas présenté,  $L/\lambda \simeq 9$  si l'on prend comme longueur du bassin la distance entre le batteur et l'intersection au repos de la surface libre et de la plage. Il conviendrait dans ce cas d'interpréter la houle comme la superposition de l'onde incidente et d'une onde stationnaire (houle réfléchi sur la plage superposée à la houle réfléchi une deuxième fois sur le batteur). Une telle interprétation sera utilisée lors de l'analyse de la réflexion en houle irrégulière dans la partie V.1.10.1 (voir aussi Ursell *et al.* [123]).

### II.1.3.2 Amplitude incidente

Pour les trois séries d'essais d'amplitude faible, moyenne et forte, la première vérification a porté sur la mesure de l'amplitude incidente lorsque la houle incidente est seule. La méthode de mesure est analogue à la séparation incident-réfléchi : la houle est incidente et une méthode simple pour la déterminer consiste à faire la moyenne sur les trois sondes du module des Transformées de Fourier, prises sur une fenêtre temporelle de plusieurs périodes. Les sondes, placées près de la plage pour augmenter la durée de la superposition incident-réfléchi, réduisent la durée *incident seul*. Le nombre de périodes est néanmoins suffisant pour pouvoir faire une estimation correcte de l'amplitude de la houle incidente. On constate que pour les cas de

Fréquence (Hz)		0.31	0.34	0.38	0.44	0.5	0.56	0.66	0.75	0.87	1.0
Amplitude	faible	95	97	99	96	97	99	100	89	107	90
	moyenne	98	–	97	94	96	95	99	92	95	88
	forte	96	96	94	89	85	79	84	87	84	83
	forte (bis)	98	96	94	89	84	78	81	82	77	73
	forte (ter)	95	96	94	89	84	78	84	87	83	83

TAB. II.1.1 – Amplitude incidente mesurée, en % de l'amplitude demandée

faible et moyenne amplitudes, l'amplitude mesurée est très proche de l'amplitude demandée (respectivement 4 et 5 % d'écart en moyenne). Cela valide la fonction de transfert linéaire du batteur utilisée pour calculer l'amplitude de débattement en fonction de l'amplitude de la houle demandée. La quatrième ligne du tableau II.1.1 donne, pour les cas d'amplitude forte, l'amplitude mesurée grâce à la moyenne des modules des Transformées de Fourier : l'écart entre l'amplitude imposée linéairement et la mesure est plus conséquent, l'amplitude mesurée étant plus faible. On peut se demander d'où vient cette différence.

Avant de passer en revue les phénomènes physiques qui peuvent modifier le champ de vague ou perturber la mesure, on s'intéresse à la méthode d'analyse qui fournit ces amplitudes incidentes mesurées. La deuxième ligne, notée *forte (bis)* correspond à une autre façon de déterminer l'amplitude incidente sur les mêmes signaux. En appliquant la méthode des moindres carrés pour une houle incidente seule, l'amplitude mesurée devient

$$a_i = \left| \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P b_n e^{ikx_{1n}} \right|$$

Cette formule tient compte de la vitesse de phase linéaire à laquelle se propage l'onde incidente. On constate en regardant les deux lignes *forte* et *forte (bis)* du tableau II.1.1 que cette seconde méthode introduit une erreur supplémentaire en utilisant les nombres d'onde issus de la relation de dispersion linéaires.

On peut alors améliorer la méthode des moindres carrés en tenant compte de la modification de la vitesse de phase par l'amplitude finie<sup>7</sup> de l'onde incidente en prenant, au troisième ordre en profondeur infinie :

$$k' = k(1 - (ka)^2) \quad (\text{II.1.3})$$

avec  $\omega^2 = gk$  et  $a$  l'amplitude incidente. La méthode des moindres carrés peut être appliquée avec ces nombres d'onde corrigés, de manière itérative en calculant  $k'$  à chaque itération avec

7. On ne rentre pas dans les détails ici. On s'attardera plus longuement sur cette correction de la vitesse de phase à l'ordre trois dans l'étude des effets d'ordre supérieur dans la partie II.1.4.

l'amplitude  $a$  déterminée à l'itération précédente. En pratique, la convergence est obtenue rapidement et deux ou trois itérations suffisent. Les résultats obtenus figurent sur la ligne intitulée *forte (ter)* du tableau II.1.1: on retrouve l'amplitude estimée par la moyenne des modules des TF.

On vient de tester trois méthodes pour estimer l'amplitude d'une houle incidente seule. La méthode par les moindres carrés avec nombre d'onde linéaire appliquée à la fréquence de la houle est améliorée à dans les cas de fortes amplitudes en corrigeant les nombres d'onde avec les effets du troisième ordre. Elle permet alors d'obtenir les mêmes résultats que la moyenne des amplitudes de Fourier sur les sondes. Le même principe de correction des nombres d'onde sera appliqué en II.1.4 à la séparation des houles incidente et réfléchie.

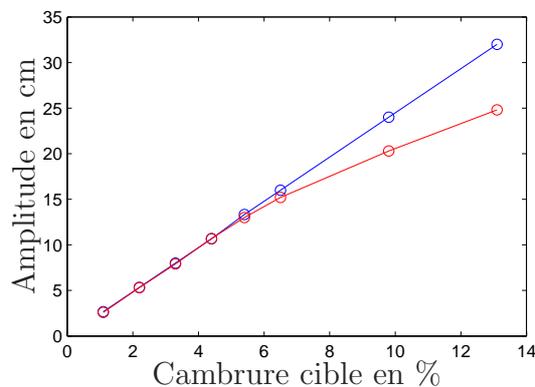


FIG. II.1.3 – Amplitude mesurée et cible

Les différences d'amplitude constatées précédemment ne sont pas dues à la méthode d'analyse. Une série d'essais complémentaires a été réalisée lors de la campagne juin 2002 pour étudier l'influence de la cambrure sur la réflexion. Il s'agissait de réaliser un balayage en amplitude pour la période  $T = 1.8$  s. La figure II.1.3 présente les amplitudes incidentes demandées et mesurées pour l'ensemble des essais à  $T = 1.8$  s. L'écart pour les cambrures les plus fortes se confirme à nouveau. Plusieurs éléments de réponse ont été envisagés pour expliquer cet écart.

**Débattement du batteur :** le débattement réel du batteur vaut  $X_r = (h-d) \tan \theta_m$  avec  $h-d$  la distance entre la charnière des volets et la surface libre au repos et  $\theta_m$  le débattement angulaire imposé aux volets, évalué grâce à la fonction de transfert linéaire. Comme on a  $\tan \theta \geq \theta$ , le débattement réel est plus important que le débattement théorique linéaire  $X_l = (h-d)\theta_m$ . L'écart est cependant faible  $(\tan \theta - \theta)/\theta = 3\%$  pour le débattement maximal admissible du batteur de 0.3 radian (17 degrés). Cet écart faible et allant dans le sens d'une amplitude générée plus importante que celle demandée n'explique pas les différences observées à forte amplitude.

**Effets d'ordre supérieur :** l'amplitude du fondamental est réduite par les effets d'ordre trois en houle régulière (*e.g.* Molin [100]) :

$$\Delta a = -\frac{3}{8} k^2 a^3$$

Pour les essais  $f=0.56$  Hz et  $f=1$  Hz d'amplitude forte, de cambrure respective 13 et 10 %, cette diminution s'élève à 6 et 4 % : ces effets d'ordre trois évoqués contribuent dans le bon sens mais n'expliquent pas seuls les différences observées expérimentalement.

**Amortissement visqueux :** l'amortissement visqueux à la surface libre au cours de la propagation conduit lui aussi à une diminution de l'amplitude (*e.g.* [86]). Au niveau des sondes, en  $x = x_p$ , la décroissance est de

$$\frac{\Delta a}{a} \simeq \frac{4\nu\omega^5}{g^3}x_p$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique de l'eau. Pour une fréquence de 1 Hz, pour laquelle cette décroissance est maximale dans notre gamme de fréquence, à trente mètres du batteur, la diminution d'amplitude est de 0.1 %, ce qui est insuffisant pour expliquer l'écart constaté. La dissipation visqueuse est donc négligeable pour toute la gamme de fréquence utilisée et les distances de propagation lors des essais.

**Flexion des sondes :** l'influence de la flexion des sondes au passage des crêtes et des creux a été étudiée lors d'une courte campagne d'étalonnage dynamique [17]. Dans le cas de mouvements forcés de la houle avec des profils horizontaux de vitesse uniformes, l'erreur sur l'amplitude du fondamental s'est révélée très faible, toujours inférieure à 2 % pour des configurations correspondant à des cambrures de houle jusqu'à 8 %.

Les quatre pistes envisagées n'apportent pas des corrections suffisantes pour expliquer les différences observées entre amplitude demandée et amplitude mesurée. Elles ont toutefois permis de mieux cerner les phénomènes physiques intervenant lors de la génération et propagation de houle régulière.

En juin 2002, le programme de commande du batteur ne permettait pas d'enregistrer un signal de copie de position, comme c'est le cas actuellement. L'essai {0.56 Hz; 0.32 m} a été refait depuis en mesurant le débattement des volets à l'aide d'un mètre. Cette mesure approchée donne un débattement de 55 cm  $\pm$  1 cm, contre une valeur théorique de 62 cm. Il semble donc que le mouvement réel du batteur ne suive pas correctement la consigne en amplitude pour les mouvements importants (rappel: la fréquence de consigne est bien reproduite comme l'a montrée l'estimation de la période de la houle générée avec une analyse vague par vague en page II.1.3). Cette hypothèse explique peut-être les écarts d'amplitude entre consigne et mesure constatées précédemment. La possibilité récente d'enregistrer le mouvement du batteur devrait permettre une évaluation plus détaillée des écarts.

En conclusion sur l'amplitude de la houle incidente, étudiée dans cette partie pendant que la houle incidente est seule et avant de s'intéresser à la réflexion, on peut dire que l'amplitude mesurée pour les séries d'essais d'amplitude faible et moyenne est proche de l'amplitude théorique servant au pilotage du batteur. Les essais d'amplitude forte montrent en revanche une amplitude plus faible, dont l'écart avec l'amplitude théorique ne s'explique pas complètement en considérant la modification de l'amplitude du fondamental par les effets d'ordre trois. Le mouvement réel du batteur au cours des essais doit être étudié plus en détail pour savoir si le batteur suit bien la consigne imposée à forte cambrure.

### II.1.3.3 Coefficient de réflexion

Les trois paragraphes suivants présentent les résultats de l'analyse par la méthode de Mansard et Funke à trois sondes pour les trois séries d'essais d'amplitudes faible, moyenne et forte. Ces séries correspondent à des cambrures moyennes de 2, 4 et 8 %, la cambrure variant dans chaque série suivant les hauteurs maximales mesurables par les sondes à basse fréquence et la limite de déferlement pour les hautes fréquences.

### Amplitude faible

Pour les essais de cambrure comprise entre 1 et 3 %, on donne dans le tableau II.1.2 le résultat de la séparation houle incidente – houle réfléchiée en utilisant la relation de dispersion linéaire pour calculer les nombres d’onde associés aux deux ondes.

On peut déjà noter une valeur anormalement forte du coefficient de réflexion pour la fréquence  $f = 0.87$  Hz, qu’on retrouvera pour les amplitudes moyennes et qu’on expliquera dans la partie II.1.3.4. Les valeurs de coefficient de réflexion en amplitude obtenues varient en

Fréquence (Hz)	0.31	0.34	0.38	0.44	0.5	0.56	0.66	0.75	0.87	1.0
Cambrure (%)	1.1	1.3	1.6	2.1	2.8	3.2	3.0	3.1	2.9	2.6
$C_r$ (%)	9	3	7	6	3	5	5	6	15	7

TAB. II.1.2 – Coefficient de réflexion à faible amplitude

moyenne entre 5 et 10 % : la plage amortissante joue correctement son rôle pour les longueurs d’onde testées, entre 15 m et 1.5 m.

### Amplitude moyenne

Une deuxième série d’essais a été réalisée avec des amplitudes doubles. Pour ces nouveaux essais, de cambrure comprise entre 2 et 6 %, le tableau II.1.3 donne le résultat de la séparation houle incidente – houle réfléchiée en utilisant la relation de dispersion linéaire pour calculer les nombres d’onde associés aux deux ondes. Les valeurs de coefficient de réflexion obtenues évoluent globalement dans la même gamme que précédemment<sup>8</sup>, ce qui peut conforter l’hypothèse faite d’un fonctionnement quasi-linéaire de la plage. Certaines valeurs sont anormalement faibles (2 et 3 %) alors qu’à  $f = 0.87$  Hz la valeur à nouveau très grande est erronée, comme on le verra dans la partie II.1.3.4.

Fréquence (Hz)	0.31	0.34	0.38	0.44	0.5	0.56	0.66	0.75	0.87	1.0
Cambrure (%)	2.2	2.6	3.2	4.2	5.6	6.4	6.0	6.2	5.8	5.2
$C_r$ (%)	13	–	2	8	6	9	11	7	25	3

TAB. II.1.3 – Coefficient de réflexion à amplitude moyenne

### Amplitude forte

Cette fois, les coefficients de réflexion estimés sont globalement plus forts que dans les cas d’amplitude moyenne et faible. On peut penser que le fonctionnement de la plage est tellement

Fréquence (Hz)	0.31	0.34	0.38	0.44	0.5	0.56	0.66	0.75	0.87	1.0
Cambrure (%)	4.4	5.2	6.4	8.4	11.2	12.8	12.0	12.4	11.6	10.4
$C_r$ (%)	11	12	12	6	12	19	21	3	53	33

TAB. II.1.4 – Coefficient de réflexion à amplitude forte

non linéaire que la réflexion en amplitude au premier ordre est fortement modifiée par les effets

8. l’essai de fréquence  $f=0.34$  Hz n’a pas été réalisé

d'ordre supérieur. On verra en fait que les valeurs trouvées, anormalement fortes notamment pour les plus hautes fréquences, sont erronées (partie II.1.4). La propagation de la houle étant non linéaire, la méthode d'analyse et de séparation onde incidente et réfléchiée doit s'adapter et prendre en compte si possible ces non-linéarités.

### II.1.3.4 Nombre de sondes et position

On revient ici un court instant sur la configuration des sondes utilisée lors des essais, qui ne s'est pas révélée très judicieuse. On donne ici les enseignements tirés lors de cette campagne de qualification de la plage. La méthode de Mansard et Funke revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues. On peut inverser ce système et donc séparer houle incidente et réfléchiée lorsque le déterminant est non nul. Ce déterminant est fonction des écartements entre les sondes et de la fréquence. Sans s'annuler ni devenir très petit, le déterminant correspondant aux positions des sondes lors des essais prenait de faibles valeurs pour certaines des fréquences. On s'intéresse ici à l'effet de ces faibles valeurs sur la séparation des houles.

La figure II.1.4 à gauche donne le comportement en fréquence du déterminant et du conditionnement du système linéaire, pour le jeu de sondes utilisées pendant les essais sur la réflexion. On peut constater que le déterminant comporte deux pics proches de zéro, autour de 0.6 Hz et 0.86 Hz, qui auraient dû être évités par un bon positionnement des sondes. Et donc le conditionnement du système est très élevé autour de ces fréquences. L'effet est la dégradation de la solution : une petite erreur ou modification du second membre<sup>9</sup> entraîne une grande variation sur la solution.

L'utilisation de tests numériques sur des signaux idéaux non linéaires montre que lors de nos essais, on se retrouve justement dans ce cas pour les fréquences proches de 0.6 et 0.86 Hz. La position des sondes n'a pas été choisie correctement lors des manipulations<sup>10</sup>.

Il existe plusieurs remèdes simples pour pallier ces difficultés :

- mieux positionner les sondes en vérifiant le conditionnement de manière à repousser hors du domaine de fréquence d'étude les pics du conditionnement,
- utiliser plus de trois sondes<sup>11</sup>,
- construire la matrice du système en prenant en compte les vitesses de phase non linéaires.

Les deux premiers points se comprennent aisément et leur effet est visualisé sur la figure II.1.4 (on y a ajouté en (d) le cas de la méthode à deux sondes pour comparaison). En (b) et (c), celle-ci montre le déterminant et le conditionnement obtenus respectivement en déplaçant la troisième sonde ( $x_{13} = 3.3$  m au lieu de 4.3 m) ou en ajoutant une quatrième sonde ( $x_{14} = 1.5$  m). À la fois le déterminant ne s'approche plus autant de zéro et le conditionnement reste modéré.

La motivation du dernier point vient du fait que le nombre d'onde est supposé vérifier la relation de dispersion linéaire dans la méthode originale de Mansard et Funke, ce qui n'est pas le cas dès les cambrures modérées. On est alors tenté de prendre les effets d'ordre supérieur pour séparer houle incidente et réfléchiée (Cet aspect sera abordé plus en détail dans la partie II.1.4.4).

---

9. Dans les tests numériques effectués, il s'agissait des effets des non-linéarités d'ordre trois; cela pourrait être le bruit lors des mesures expérimentales.

10. Pour donner un point de comparaison, dans la méthode de Goda et Suzuki à deux sondes, le déterminant s'annule exactement pour les longueurs d'onde demi-entières de l'écartement des sondes et le conditionnement correspondant est infini.

11. Voir la partie V.1.10.1 sur l'analyse de la réflexion en houle irrégulière.

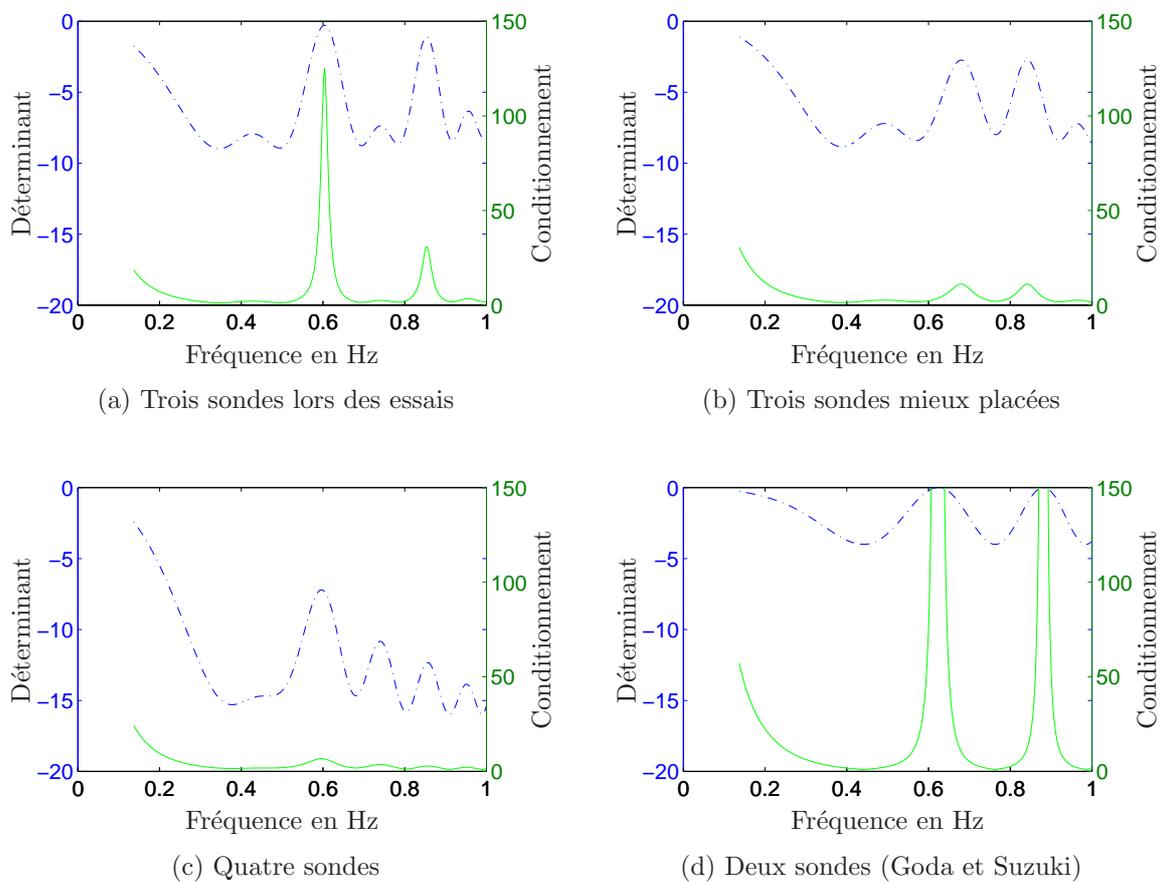


FIG. II.1.4 – Évolution du déterminant ( $- \cdot - \cdot -$ ) et du conditionnement ( $-$ ) du système linéaire

Pour conclure, le comportement du conditionnement en fonction de la fréquence s'avère un bon critère pour positionner les sondes et vient compléter l'étude des zéros du déterminant (utilisée par exemple dans [108] lors de l'étude des ondes second ordre libres générées au niveau du batteur).

## II.1.4 Effets non-linéaires d'ordre supérieur et évolution temporelle

L'observation des modules des transformées de Fourier (spectres) à forte amplitude révèle la présence d'une importante quantité d'harmoniques. On tente dans cette partie de qualifier ce comportement non linéaire, à la fois de la génération, de la propagation et de la réflexion. Il apparaît aussi que la houle générée se dégrade au cours du temps (modulation et perturbations transverses).

### II.1.4.1 Tentative d'analyse au second ordre

L'analyse précédente II.1.3 est basée sur une approche linéaire de la réflexion au sens où l'on s'intéresse à une onde réfléchie de même fréquence que la houle incidente. On est en droit de penser qu'il s'agit d'une part importante du phénomène de réflexion. Cependant, les observations visuelles sur la plage permettent d'identifier une houle réfléchie de longueur d'onde plus courte que la houle incidente se propageant en direction du batteur. Il est alors intéressant de tenter d'analyser cette réflexion, cette fois-ci non linéaire. Une explication possible est d'y voir une composante second ordre de fréquence  $2\omega$  créée par le déferlement et se propageant à sa propre vitesse de phase (une onde libre). La figure II.1.5 montre deux vues temporelles

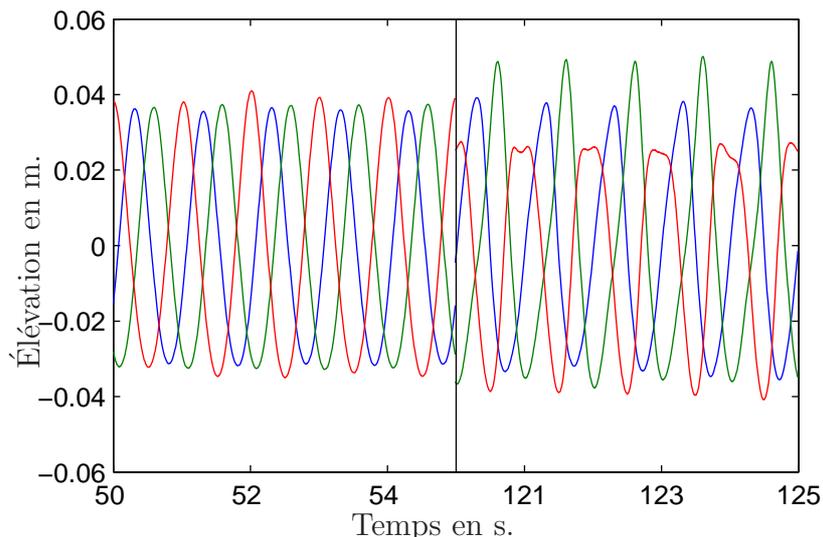


FIG. II.1.5 – *Élévation de surface libre sur les trois sondes*

de l'élévation sur les trois sondes, pour un essai de houle régulière de fréquence 1 Hz et de cambrure 6%. À gauche entre 50 et 55 s, la houle incidente est seule. Les trois élévations ont même amplitude. À droite, entre 120 et 125 s, les élévations sont différentes au niveau des

maxima. Cette fois, les signaux diffèrent suivant les sondes, ce qui est typique de la présence de différentes longueurs d'onde se déplaçant à leur propre vitesse de phase. On retrouve ici des caractéristiques classiques d'élévations linéaire et second ordre superposées avec des vitesses de phases différentes. On observe de tels motifs lors de l'étude des ondes libres générées au niveau des batteurs.

D'après la position des sondes au cours des essais, le temps de parcours de la composante incidente libre (apparition près du batteur  $t_4 = x/v_g^{(2)}$ ), et celui de la composante réfléchie libre (apparition au niveau de la plage  $t_3 = x/v_g + (L-x)/v_g^{(2)}$ ) sont du même ordre de grandeur : on ne peut pas les séparer en temps *i.e.* on ne possède d'intervalle de temps où une des composantes est seule présente. On les observe toujours simultanément sur le signal. L'analyse à employer pour évaluer leurs amplitudes est donc analogue à celle utilisée pour séparer houle incidente et réfléchie (Boudet et Cointe [18], Lin *et al.* [82]). Pour cela, on suppose que la composante  $2\omega$  des Transformées de Fourier des élévations mesurées correspond à la superposition de trois composantes second ordre :

1. liée incidente
2. libre créée au niveau du batteur (nommée incidente par la suite)
3. libre créée au niveau de la plage (nommée réfléchie<sup>12</sup>, au sens créée lors de la réflexion.)

Pratiquement, la Transformée de Fourier  $\underline{b}'_p$  à la fréquence double s'écrit cette fois :

$$\underline{a}_1 e^{-2ikx_{1p}} + \underline{a}_2 e^{-ik_l x_{1p}} + \underline{a}_3 e^{ik_l x_{1p}} = \underline{b}'_p \quad \text{pour } p = 1 \text{ à } P \quad (\text{II.1.4})$$

Les amplitudes des trois ondes sont notées  $a_i$  avec  $i = 1, 2, 3$ ,  $k$  est le nombre d'onde de l'onde incidente linéaire et  $k_l$  le nombre d'onde de l'onde libre qui vérifie  $4\omega^2 = gk_l \tanh k_l h$ . On néglige ici la composante réfléchie liée accompagnant la houle réfléchie qui est de faible amplitude ( $ka_r^2/2 \ll ka_i^2/2$ ). L'amplitude théorique de l'onde libre incidente est la moitié environ de l'amplitude liée  $ka_i^2/2$  à cette fréquence (*cf.* partie III). La figure II.1.6 présente le résultat

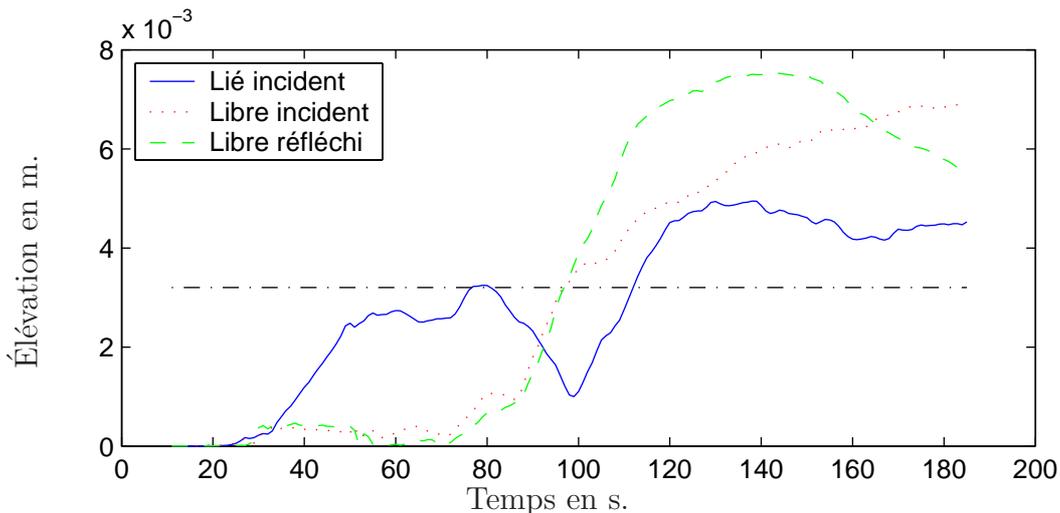


FIG. II.1.6 – Élévations de surface libre au second ordre ( $f = 1 \text{ Hz}$ ;  $\varepsilon = 6 \%$ )

de la séparation des ondes du second ordre après résolution du système d'équations (II.1.4).

12. Ce terme, un peu abusif sera quand même employé par la suite pour plus de simplicité.

L'analyse a été effectuée avec une fenêtre glissante de durée 26 périodes. Le temps affiché en abscisse correspond à l'instant central de chaque fenêtre. On observe que pour  $t < 80$  s, l'élévation second ordre est principalement une onde liée. L'amplitude théorique, qui vaut  $ka_i^2/2 = 0.0032$  m, est bien celle évaluée par l'analyse entre le front d'onde incident et  $t = 80$  s. Durant cet intervalle, les amplitudes libres incident et réfléchi sont négligeables. Après deux nouveaux fronts d'onde vers  $t = 80$  et  $100$  s, on observe entre  $t = 100$  et  $150$  s, une forte proportion d'onde libre réfléchi<sup>13</sup>, d'amplitude 0.01 m importante par rapport à celle de l'onde liée. Le temps d'arrivée  $t = 100$  s du front d'onde libre réfléchi ne correspond pas avec la valeur théorique  $t_3 \simeq 80$  s. Ce front d'onde à  $t = 100$  s ne correspond donc pas à l'onde libre visée mais plutôt à l'arrivée d'une houle croisée parasite générée par les interstices entre les volets.

### II.1.4.2 Perturbations dues aux interstices entre les volets du batteur

On interprète la composante  $2\omega$  observée précédemment comme la création de vaguelettes par les interstices entre les volets du batteur. Une transformée de Fourier glissante sur un grand nombre de période ne met en évidence que le fondamental et ses harmoniques. La perturbation due aux interstices possède donc elle aussi une de ces fréquences. Ces interstices entre les volets

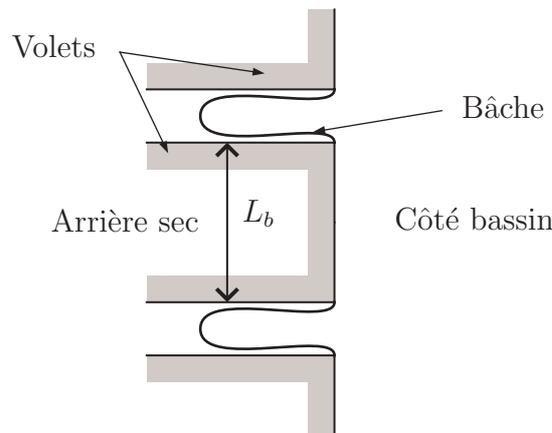


FIG. II.1.7 – Vue de dessus d'un interstice entre deux volets

du batteur, représentés sur la figure II.1.7, ont une épaisseur de 4 cm et sont fermés par une bâche qui garantit l'étanchéité (batteur à arrière sec). Celle-ci délimite une poche d'eau qui se déverse en jets dans le bassin lorsque le niveau dans la poche est supérieur à l'élévation extérieure, ce qui se produit à chaque période du mouvement. Ce phénomène de jets déferlants est *a priori* fortement non linéaire et engendre un flux parasite aux fréquences  $\omega, 2\omega, \dots$ , de périodicité spatiale égale à la largeur des volets. Chacun de ces flux génère une onde parasite qui, soit se propage dans le bassin et perturbe tout le champ de vague, soit est de nature évanescence et s'annule à une distance suffisante du batteur. Examinons dans quelles conditions (sur la fréquence du batteur) ces ondes parasites sont progressives.

13. L'amplitude incidente libre mesurée est du même ordre que l'amplitude liée incidente : on ne retrouve pas le facteur  $1/2$  attendu. On reviendra plus en détail sur l'analyse des ondes libres générées près du batteur dans la partie III.

Considérons l'onde parasite à la fréquence  $\omega_n = n\omega$ . Près du batteur, l'excitation par les jets engendre une onde localement stationnaire, superposition de deux ondes progressives de nombre d'onde transverse  $\pm\tilde{k}_y$  avec  $\tilde{k}_y = \frac{2\pi}{L_b}$ . Dans le bassin, cette paire d'onde possède un vecteur d'onde  $\tilde{\mathbf{k}}_n^\pm = \{\tilde{k}_x, \pm\tilde{k}_y\}$  vérifiant la relation de dispersion  $(n\omega)^2 = g\tilde{k}_n$  soit  $\lambda_n = \frac{\lambda}{n^2}$ . La composante longitudinale vérifie

$$\tilde{k}_x^2 = \tilde{k}_n^2 - \tilde{k}_y^2 = (2\pi)^2 \frac{n^4 B^2 - \lambda^2}{(\lambda B)^2}$$

On en déduit que l'onde parasite est progressive<sup>14</sup> si la longueur d'onde désirée est inférieure à  $n^2$  fois la largeur des volets. Sinon, l'onde est évanescente; elle s'atténue avec une distance caractéristique

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_y^2 - \tilde{k}_n^2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda B}{\sqrt{\lambda^2 - n^4 B^2}}$$

Celle-ci tend vers l'infini lorsque la fréquence du batteur s'approche de la fréquence du mode transverse  $\tilde{k}_y$  qui vaut  $f_n = \frac{1}{2n\pi} \sqrt{g\tilde{k}_y}$ . Dans ce cas, on observe dans le bassin une onde quasi-transverse s'installer dans le bassin.

Examinons maintenant les conséquences pratiques de ces ondes parasites.

- À la fréquence du batteur (*i.e.*  $n = 1$ ), l'onde parasite est progressive si la longueur d'onde de la houle qu'on veut générer dans le bassin est inférieure à la largeur d'un volet ( $\lambda < L_b$ ). En pratique, on génère rarement des longueurs d'onde si courtes et l'onde parasite à  $\omega$  est alors évanescente. La distance caractéristique d'atténuation  $\delta_1$  devient très grande lorsque la fréquence du batteur s'approche de la fréquence du mode transverse  $\tilde{k}_y$  qui vaut  $f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g\tilde{k}_y} \simeq 1.61$  Hz. La gamme de fréquence usuelle en houle régulière reste assez éloignée de cette fréquence  $f_1$ . À titre d'exemple, pour  $f = 1.5$  Hz, la longueur d'atténuation vaut  $0.3\lambda$ .
- À la fréquence double (*i.e.*  $n = 2$ ), la paire d'ondes progressives apparaît pour les fréquences du batteur  $f > f_2 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{g\tilde{k}_y} \simeq 0.807$  Hz. À titre d'exemple, pour  $f = 0.7$  Hz, la longueur d'atténuation vaut  $0.05\lambda$ .

Dans la section précédente (avec  $f = 1$  Hz), la composante parasite observée à la fréquence double correspond bien à cette houle croisée de fréquence  $2\omega$  ( $f_1 > f > f_2$ ). L'estimation du temps d'arrivée aux sondes confirme cette hypothèse. Le schéma de la figure II.1.8 représente les deux configurations possibles pour le vecteur d'onde

L'angle de propagation vérifie alors

$$\tan \theta = \pm \frac{\tilde{k}_y}{\tilde{k}_x} = \pm \frac{\tilde{k}_y}{\sqrt{\tilde{k}_n^2 - \tilde{k}_y^2}}$$

Les ondes se propagent avec cet angle  $\theta$  et parcourent une distance  $L = x/\cos \theta$  jusqu'aux sondes, avec  $x$  est la distance entre batteur et sondes. L'instant d'arrivée aux sondes est

$$t_5 = \frac{L}{\tilde{v}_g} = \frac{x}{\tilde{v}_g \cos \theta}$$

14. Dans ce cas, la perturbation dans le bassin est une houle croisée due à la paire d'onde  $\pm\tilde{k}_y$ .

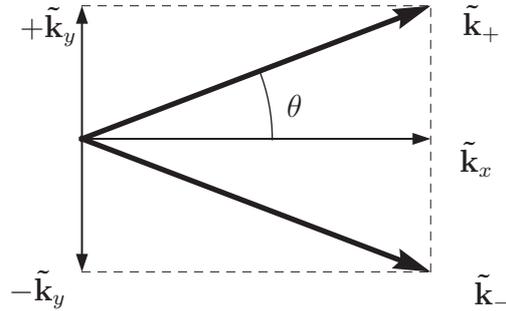


FIG. II.1.8 – Schéma des vecteurs d'ondes parasites dûs aux interstices

On trouve numériquement  $t_5 = 101$  s, ce qui correspond aux observations faites sur la figure II.1.6. Lors de l'analyse, cette houle croisée en  $2\omega$  n'a pas été prise en compte et l'amplitude importante de la composante libre réfléchiée est erronée. L'onde parasite due aux interstices est bien évidemment visible à l'œil nu pendant les essais. On peut estimer que son amplitude est au moins égale à l'amplitude de 1 cm obtenue dans la partie précédente. Cette onde parasite empêchera toute mesure précise d'élévation au second ordre en houle régulière pour les fréquences supérieures à  $f_c = 0.807$  Hz et sera vraisemblablement présente également en houle irrégulière. Un dispositif permettant en houle droite d'obturer les interstices entre les volets est souhaitable pour éliminer cette onde parasite<sup>15</sup>. En houle oblique, il sera nécessaire de quantifier l'importance du phénomène.

### II.1.4.3 Vitesses de phase et houle incidente

On s'intéresse désormais aux effets d'ordre trois, à savoir la modification de la vitesse de phase de l'onde incidente due à leur amplitude finie. On revient plus en détail sur cette notion brièvement introduite en II.1.3.2. La méthode d'analyse décrite précédemment utilise les nombres d'ondes vérifiant la dispersion de relation linéaire et ne prend pas en compte de tels effets. L'influence de l'amplitude est étudiée selon deux points de vue : la première (dans cette partie) consiste à mesurer la vitesse de phase expérimentalement ou numériquement et comparer celle-ci aux prédictions théoriques (par exemple Longuet-Higgins et Phillips [85]), la deuxième (partie suivante) tentera de prendre en compte ces effets d'amplitude finie dans l'analyse de la houle.

L'étude d'une paire de sondes permet d'évaluer la vitesse de phase de l'onde, soit par une analyse vague par vague (estimation de l'intervalle de temps entre même zéro-crossing sur les deux sondes) soit par une analyse fréquentielle (déphasage des deux Transformées de Fourier glissantes), les deux techniques fournissant le même résultat. Les objectifs sont multiples : vérifier le bon accord entre la théorie linéaire et les mesures quand l'amplitude tend vers zéro et éventuellement valider la mesure de la position des sondes; valider ou non l'hypothèse de vitesse de phase linéaire suivant la cambrure de la houle générée.

Théoriquement, au troisième ordre, le nombre d'onde d'une houle régulière incidente seule

---

15. On peut noter également qu'au cours de certains essais, les interstices aux deux extrémités du batteur, plus larges que ceux entre volets, génèrent eux aussi des perturbations qui rayonnent des coins vers tout le bassin.

générée par un batteur est modifié.

$$k' = k (1 - (ka)^2)$$

La vitesse de phase est modifiée elle aussi, et on obtient par la relation  $c'k' = \omega$  :

$$c' = \frac{\omega}{k'} (1 + (ka)^2) = c (1 + (ka)^2)$$

L'intervalle de temps entre deux passages à zéro  $t_{nl}$  est mesuré et comparé à la prédiction linéaire  $t_l$ . Le comportement prédit par la théorie non linéaire au troisième ordre en profondeur infinie est  $t_{nl} = \Delta x / c'$  avec  $\Delta x$  l'écartement entre les sondes, soit :

$$\frac{t_{nl}}{t_l} = 1 - (ka)^2 = \frac{\Delta\phi_{nl}}{\Delta\phi_l}$$

La deuxième égalité correspond à une analyse de Fourier où  $\Delta\phi_{nl}$  et  $\Delta\phi_l$  sont les différences de phases entre les signaux de deux sondes. La figure II.1.9 compare cette expression théorique avec les mesures adimensionnées de temps de parcours pour les deux paires de sondes disponibles, en fonction de la cambrure<sup>16</sup>. À gauche sont présentés les mesures expérimentales pour huit d'essais de période 1.8 s et d'amplitude de 2.5 cm à 24 cm et pour deux paires de sondes. On observe pour chaque essais une forte variation du temps de parcours mesuré : il s'agit de plusieurs mesures faites à des instants différents en décalant la fenêtre d'analyse de Fourier ou en étudiant des vagues successives. Les droites ont été obtenues par moindres carrés pour chaque

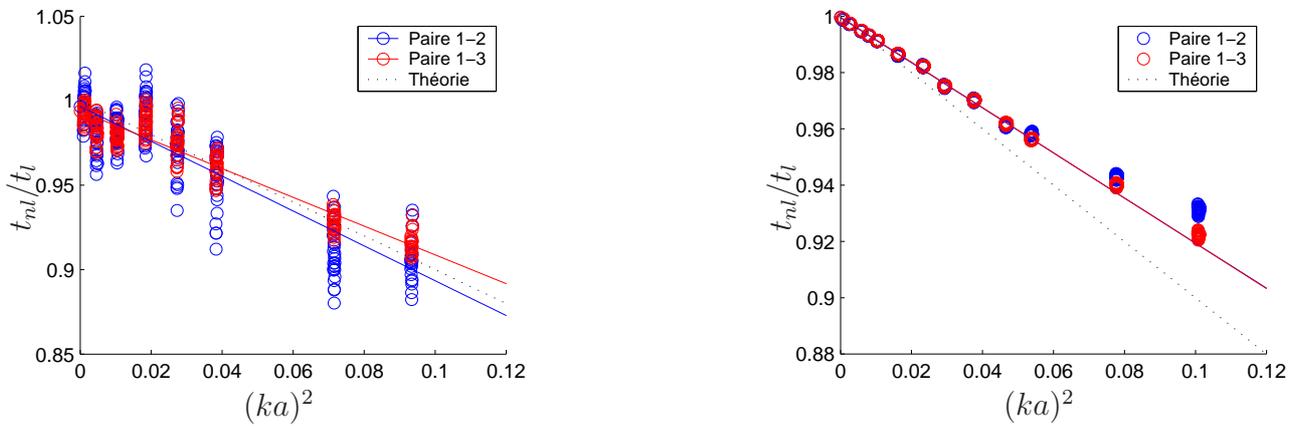


FIG. II.1.9 – Évolution du temps de parcours entre deux sondes avec la cambrure (à gauche : expérimental, à droite : numérique)

paires de sondes. On constate une bonne reproduction moyenne de la décroissance prédite par la théorie en fonction de la cambrure. L'ordonnée à l'origine des régressions linéaires renseigne sur l'erreur lors du calcul du temps de parcours : elle de l'ordre de 1 % et provient soit de la non prise en compte de la profondeur finie (correction inférieure à 0.01 % donc rejetée) soit de

16. On précise que dans les deux cas (simulations et expériences) la houle a été générée à partir d'une amplitude cible imposée selon la théorie linéaire. L'amplitude réelle obtenue dans les bassins a été mesurée par itérations lorsque la houle incidente est seule (cf. page 68). C'est cette dernière qui est utilisée pour comparer les résultats aux formules théoriques.

la mauvaise position des sondes (1 % sur 2 m soit 2 cm, supérieur à l'incertitude de mesure de la position).

La figure de droite reproduit la même analyse pour des simulations non linéaires avec le code HOS cette fois. Elles ont été réalisées avec la même période, pour des amplitudes de 2 à 28 cm. On remarque cette fois une variation très faible des temps de parcours mesurés. On observe bien une décroissance linéaire en fonction de  $(ka)^2$  comme prévu par les effets d'ordre trois. On remarque toutefois une pente différente de un : le courant de retour se fait sentir et ralentit la propagation de la houle (plus de détails sont donnés en page 89).

En conclusion, l'étude de la vitesse de phase lorsque la cambrure de la houle varie a montré la nécessité de prendre en compte une évolution non linéaire de cette vitesse pour les fortes cambrures. Les observations effectuées lorsque la cambrure est faible ne conduit pas à corriger de la position des sondes, mesurée avec une précision suffisante.

#### II.1.4.4 Amplitude finie de l'onde incidente et réflexion

Si l'on s'intéresse à des houles de cambrure importante, on a vu qu'il convient de prendre en compte les effets liés à l'amplitude finie des composantes incidente et réfléchi. D'une part, l'amplitude du fondamental est modifié par les effets d'ordre trois et d'autre part, la vitesse de phase (ou de manière équivalente le nombre d'onde) de ces deux composantes est modifiée elle aussi par les effets d'ordre trois et dépend de leurs amplitudes. On s'intéresse à ces effets d'amplitude finie sur la phase.

#### Modification de la vitesse de phase des ondes

Ainsi, parmi les interactions résonnantes à quatre vagues, certaines agissent sur les nombres d'onde et l'élévation totale s'écrit

$$\eta = \underline{a}_i e^{i(\omega t - k'_i x)} + \underline{a}_r e^{i(\omega t + k'_r x)} \quad (\text{II.1.5})$$

avec  $k'_i$  et  $k'_r$  les nombres d'onde modifiés. La modification du nombre d'onde n'est pas la même pour l'onde incidente et réfléchi, elle est donnée par exemple dans Longuet-Higgins et Phillips [85] en profondeur infinie :

$$k'_i = k (1 - (ka_i)^2 + 2(ka_r)^2) \simeq k (1 - (ka_i)^2) \quad (\text{II.1.6a})$$

$$k'_r = k (1 - (ka_r)^2 + 2(ka_i)^2) \simeq k (1 + 2(ka_i)^2) \quad (\text{II.1.6b})$$

avec  $\omega^2 = gk$  et pourvu que  $a_i \gg a_r$ . L'onde incidente voit principalement sa vitesse de phase et sa longueur d'onde augmenter par interaction avec elle-même, alors que l'onde réfléchi voit sa longueur d'onde et sa vitesse de phase diminuer du fait de l'interaction mutuelle avec l'onde incidente. L'expression des nombres d'onde (II.1.6) présentée ici est différente de celle utilisée par Boudet et Ménard [19] ou Stassen [117]. Dans ces deux références, il semble que la modification du nombre d'onde soit de même amplitude et de même signe pour les deux ondes réfléchi et incidente  $k'_i = k'_r = k (1 - (ka_i)^2)$  et non de signe opposé et d'amplitude différente comme on le propose ici dans (II.1.6). L'application des deux expressions à la séparation houle incidente houle réfléchi donnent, sur un cas test numérique de cambrure 10 %, un écart de 25 % sur le coefficient de réflexion obtenu.

### Côté pratique

Pratiquement, la prise en compte des effets d'amplitude finie impose que les nombres d'onde, qui composent la matrice du système carré à résoudre, dépendent cette fois des amplitudes inconnues. Le système est devenu non linéaire. On effectue alors une résolution par itération, où l'amplitude déterminée à l'étape  $n$  sert à calculer les nombres d'onde qui donneront le système carré à l'étape  $n + 1$  suivante. Ce système linéaire est résolu et fournit l'amplitude à l'étape  $n + 1$  et ainsi de suite. Après plusieurs itérations, on obtient une solution convergée et on détermine le coefficient de réflexion  $C_r$ . Le nombre d'itérations nécessaires pour une bonne convergence varie en fonction de la fréquence et de la cambrure de la houle. On a pu observer pour nos essais expérimentaux, un nombre élevé d'itérations à faible fréquence 0.56 Hz, alors qu'une convergence rapide en quelques itérations intervient pour les faibles cambrures et pour les hautes fréquences (1 Hz).

### Résultats

La prise en compte des effets d'ordre trois sur la vitesse de phase modifie les valeurs de coefficient de réflexion trouvés précédemment, notamment pour les essais de cambrure élevée. Les essais de la série d'amplitude faible possèdent tous une cambrure peu élevée et la correction apportée est négligeable. Les valeurs données dans le tableau II.1.2 sont donc correctes à l'ordre trois. En revanche, pour les deux autres séries d'amplitudes moyenne et forte, des différences notables apparaissent. Ainsi, le tableau II.1.5 reproduit les coefficients de réflexion obtenus avec la méthode linéaire de base (ligne intitulée  $C_r$  linéaire) et ceux obtenus avec la technique itérative décrite plus haut (ligne intitulée  $C_r$  non linéaire). Aux basses fréquences, on n'observe pas de modification car la cambrure reste faible. À partir de 0.5 Hz et au-delà, les cambrures augmentent et l'effet de l'amplitude finie de l'onde incidente se fait sentir sur le coefficient de réflexion. Les valeurs extrêmes qu'on trouvait pour les fréquences proches des minima du déterminant semblent désormais correctement résolues.

Fréquence (Hz)	0.31	0.34	0.38	0.44	0.5	0.56	0.66	0.75	0.87	1.0
Cambrure (%)	2.2	2.6	3.2	4.2	5.6	6.4	6.0	6.2	5.8	5.2
$C_r$ (%) linéaire	13	–	2	8	6	9	11	7	25	3
$C_r$ (%) non linéaire	13	–	2	8	5	5	4	4	6	13

TAB. II.1.5 – Coefficient de réflexion à amplitude moyenne

Le tableau II.1.6 donne les coefficients de réflexion obtenus avec la méthode linéaire de base (ligne intitulée  $C_r$  linéaire) et avec correction des nombres d'onde non linéaire (ordre trois sur la ligne intitulée  $C_r$  non linéaire). L'ensemble des essais sont de cambrure importante et la correction influe sur une grande majorité d'entre eux. À nouveau les valeurs extrêmes trouvées précédemment et physiquement erronées sont bien corrigées avec la prise en compte de l'amplitude finie de la houle incidente. La figure II.1.10 montre les coefficients de réflexion pour l'ensemble des essais en fonction de la fréquence. On peut noter en premier lieu la qualité de la plage qui réfléchit en moyenne entre 5 et 10 % de la houle incidente, quelle que soit l'amplitude de celle-ci. Il faut rappeler qu'on considère seulement ici le fondamental. Des ondes de longueur d'onde plus courte repartant de la plage ont été observées visuellement mais n'ont pu être quantifiées pour l'instant (*cf.* II.1.4.1). À chaque fréquence, l'évolution en fonction de

Fréquence (Hz)	0.31	0.34	0.38	0.44	0.5	0.56	0.66	0.75	0.87	1.0
Cambrure (%)	4.4	5.2	6.4	8.4	11.2	12.8	12.0	12.4	11.6	10.4
$C_r$ (%) linéaire	11	12	12	6	12	19	21	3	53	33
$C_r$ (%) non linéaire	9	14	12	7	3	6	9	9	5	6

TAB. II.1.6 – Coefficient de réflexion à amplitude forte

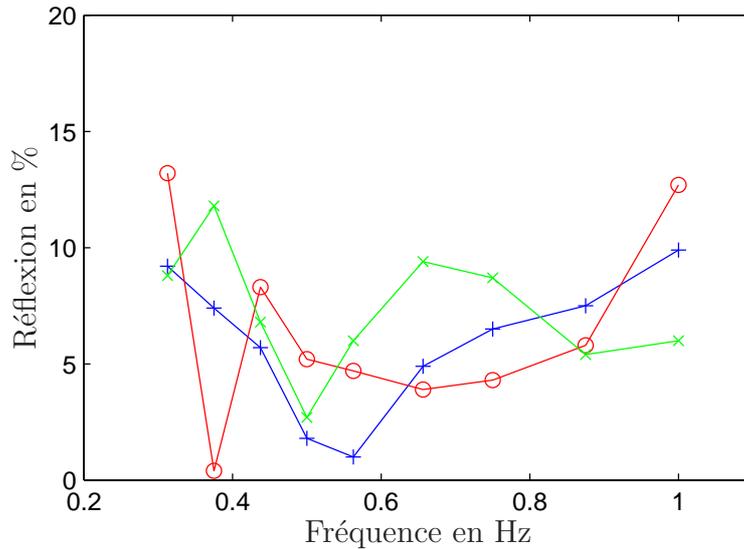


FIG. II.1.10 – Coefficient de réflexion (amplitude faible (+), moyenne (o) et forte (x))

l'amplitude est variable. Trop peu de points (trois par fréquence) sont néanmoins disponibles pour conclure quant à l'origine de ces divers comportements.

Lors des essais de période  $T = 1.8$  s et  $T = 3.2$  s, des amplitudes supplémentaires ont été générées, ce qui permet d'investiguer raisonnablement l'évolution du coefficient de réflexion avec la cambrure pour ces deux périodes. Sur la figure II.1.11, on constate que dans les deux cas, il est faible, en moyenne de 5 % pour la période  $T = 1.8$  s et 10 % pour la période  $T = 3.2$  s : le fonctionnement de la plage est correcte. On n'observe pas d'évolution marquée sur la gamme de cambrure testée. On peut également penser que les oscillations importantes à faible cambrure sont dues à la faible amplitude à mesurer pour les amplitudes incidentes et réfléchies. Devant les valeurs faibles de coefficient de réflexion obtenues, il faut tout de même rappeler qu'à forte cambrure, la réflexion à fréquence double  $2\omega$  est également importante.

#### II.1.4.5 Évolution temporelle du champ de vagues généré

Les coefficients de réflexion ont été précédemment déterminés en houle régulière établie, pendant l'intervalle de temps où a lieu la superposition de la houle incidente et de la houle réfléchi. Après cette période, la houle réfléchi arrive au batteur, se réfléchit à nouveau et repart en direction de la plage et ainsi de suite. Il est donc intéressant de savoir comment se comporte le champ de vague aux temps longs, après plusieurs allers-retours du front d'onde. On présente ici le cas d'un essai au cours duquel sont apparues des instabilités très proche de celles observées par Tulin et Waseda [122]. Une première analyse glissante avec une fenêtre de durée égale à

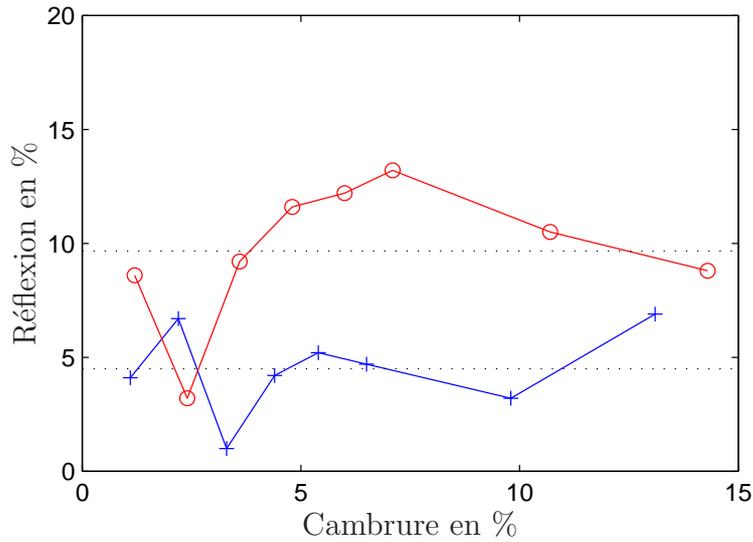


FIG. II.1.11 – Coefficient de réflexion (période  $T = 1.8$  s (+), et  $T = 3.2$  s (o))

deux périodes<sup>17</sup> a été réalisée pour suivre l'évolution temporelle des amplitudes incidentes et réfléchies. On présente le résultat obtenu pour l'essai de période  $T = 1$  s et d'amplitude 8 cm (12 % de cambrure) sur la figure II.1.12 qui montre le comportement en temps de l'amplitude incidente et réfléchie (Les amplitudes sont normalisées par l'amplitude  $a_c$  de consigne). On peut

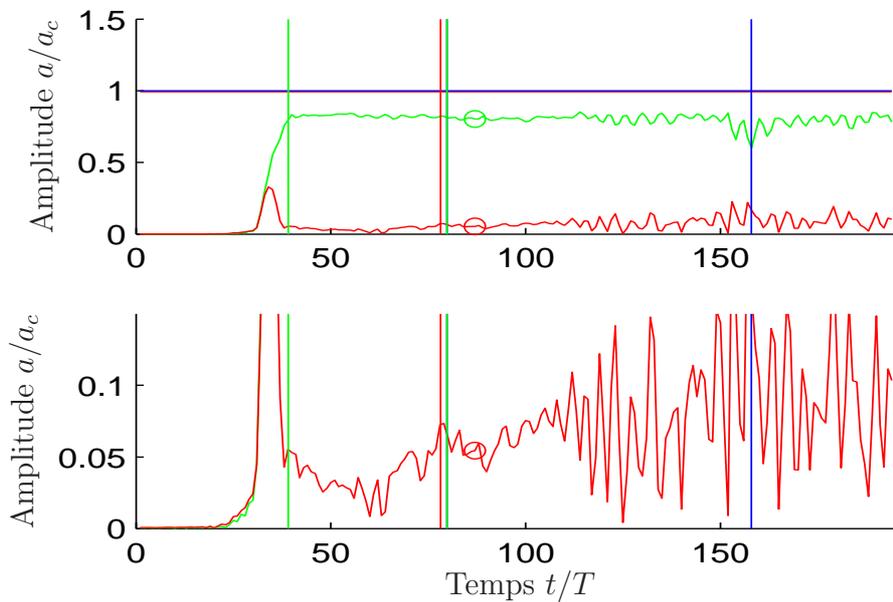


FIG. II.1.12 – Évolution temporelle avec en haut : houle incidente (—) et houle réfléchie (—), et en bas : houle réfléchie seule ( $T = 1$  s,  $\varepsilon = 12$  %)

remarquer successivement un pic d'onde réfléchie dans le front d'onde<sup>18</sup> incident arrivant aux

17. Une telle fenêtre temporelle assez courte permet de garder une bonne localisation temporelle pour le fondamental.

18. Caractère instationnaire de l'écoulement mal interprété par la méthode stationnaire d'analyse.

sondes puis une amplitude réfléchi faible lorsque la houle est seulement incidente<sup>19</sup>. Ensuite, pendant la superposition des houles incidente et réfléchi, un palier stationnaire puis des oscillations. Ces modulations, aussi présentes pour l'amplitude incidente sont maximales à  $t = 155 T$ ; elles témoignent de la dégradation du champ de vagues. La figure II.1.13 montre le signal

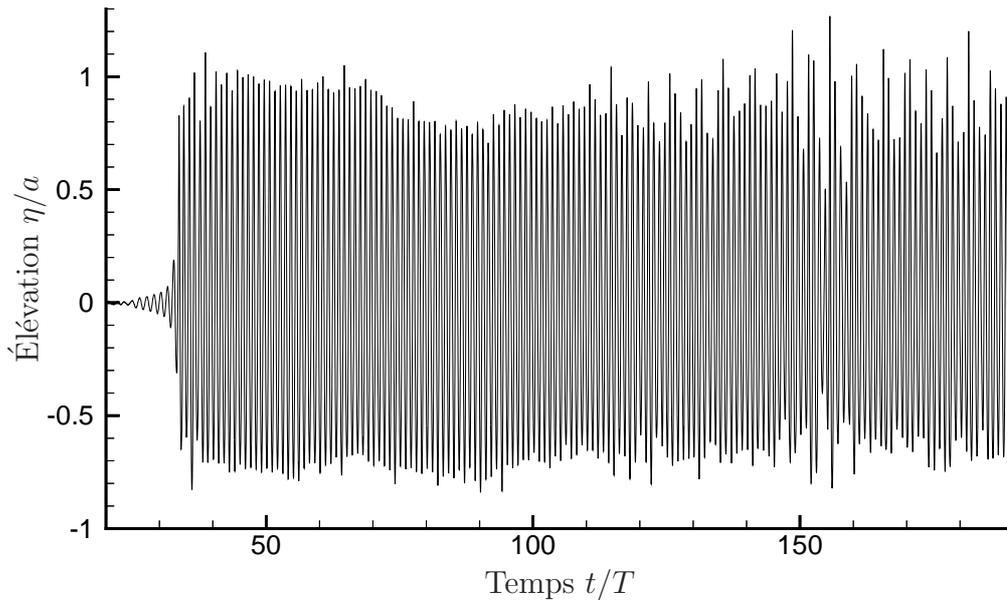


FIG. II.1.13 – Élévation de surface libre à 29 m du batteur ( $T = 1$  s,  $\varepsilon = 12$  %)

d'élevation sur la sonde placée à 29 m du batteur, pour une houle de période 1 s et d'amplitude 8 cm (cambrure 12 %). La différence qu'on constate entre les intervalles  $[40; 70]$  et  $[70; 110]$  périodes est due à la réflexion. À partir de  $t = 110T$ , les modulations apparaissent et sont maximales à  $t = 155T$  qui est le temps de parcours du front d'onde après un aller-retour dans le bassin.

Le résultat d'une analyse de Fourier glissante avec une fenêtre de 25 périodes est donné sur la figure II.1.14 (Transformée de Fourier à court terme). On y a tracé l'amplitude en fonction du temps et de la fréquence. Expliquons plus en détail cette analyse temps–fréquence. Il s'agit du même type d'analyse glissante que précédemment, mais cette fois la fenêtre glissante est plus longue ce qui donne une résolution plus fine en fréquence. Comme précédemment avec l'observation de l'évolution temporelle de l'amplitude incidente (passage du front d'onde...) cela permet de savoir à quel instant quelle fréquence est présente. Plus la durée  $T_d$  de la fenêtre temporelle est longue, plus la résolution fréquentielle est fine  $\Delta f = 1/T_d$ . En contrepartie, la localisation en temps diminue (l'amplitude calculée pour une fenêtre donnée (un instant) et une fréquence correspond à l'amplitude moyenne du signal à cette fréquence sur toute la durée de la fenêtre). Pour les fréquences élevées qui oscillent un grand nombre de fois dans la fenêtre, la localisation en temps est mauvaise<sup>20</sup>. Sur la figure II.1.14, on peut observer le front d'onde incident arrivant aux sondes entre  $t_1 = 15$  et  $t_2 = 35 T$ . Le front se signale par un

19. L'amplitude incidente est différente de la consigne, voir la section II.1.3.2.

20. De nombreux autres outils existent pour une telle étude temps–fréquence, donnant accès à une meilleure résolution en temps, notamment les Transformées en Ondelettes (TO). Les ondelettes testées ne sont pas des

contenu temps–fréquence étalé en fréquence. La composante fréquentielle  $f \times T = 1$  prend des valeurs importantes à  $t > t_1$ . Elle apparaît nettement séparé du fait de la fenêtre temporelle large. Dans le même temps, la composante de fréquence double  $2\omega$  est visible également. Les niveaux de contour, ajustés pour faire apparaître les instabilités, laissent cependant entrevoir la composante  $3\omega$ . Sur la figure de gauche, les composantes fréquentielles évoluent très peu après

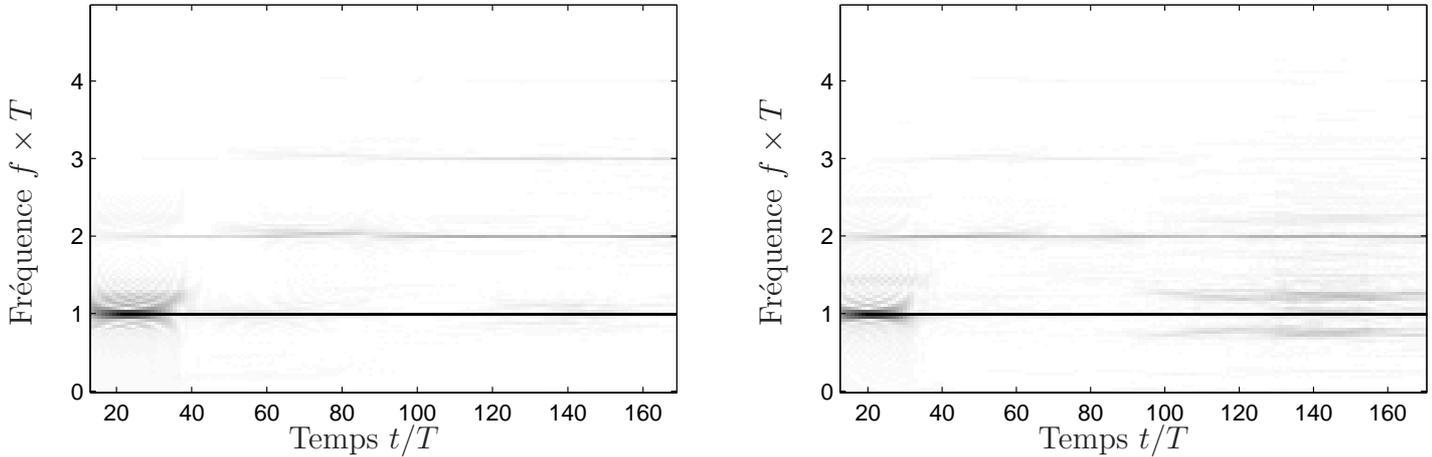


FIG. II.1.14 – Analyse temps-fréquence en houle régulière ( $f = 1$  Hz, à gauche :  $\varepsilon = 6$  %, à droite :  $\varepsilon = 12$  %)

le passage du front d’onde incident. On peut noter le léger renforcement de la composante  $2\omega$  après  $t = 100$  T dû aux parasites identifiés en II.1.4.2. Sur la figure de droite, on voit apparaître au contraire des composantes supplémentaires, symétriques, de part et d’autre du fondamental. À partir de  $t = 100$  T, on peut ainsi noter des amplitudes non nulles réparties sur deux bandes de fréquence, entre  $f \times T = 0.5$  et  $f \times T = 1$  d’une part, et entre  $f \times T = 1$  et  $f \times T = 1.5$  d’autre part. La croissance de ces bandes latérales montre que l’instabilité est de type Benjamin-Feir<sup>21</sup>. Comme l’ont observé Tulin et Waseda, on constate que la modulation maximale est liée au front d’onde réfléchi sur le batteur, à  $t = 155$  T. Cependant, les bandes latérales sont détectées dès  $t = 100$  T, un peu plus tôt que lors des observations précédentes du fait de la durée de la fenêtre glissante d’analyse. Les bandes latérales se développent donc avant le retour du front d’onde réfléchi par le batteur. Il est donc probable qu’il existe une autre source de perturbations latérales que le front d’onde, qui agit avant celui-ci.

## II.1.5 Plage numérique

Les coefficients de réflexion expérimentaux évalués précédemment ont servi de référence lors de l’implémentation des absorptions numériques dans les modèles spectraux SWEET et HOS.

fonctions propres des équations linéaires de houle. Elle ne possèdent donc pas les bonnes propriétés des fonctions de base de Fourier à savoir par exemple qu’elles se dispersent au cours du temps. Une ondelette à un instant donné se transformera aux autres instants en un série d’autres ondelettes.

21. Conformément à la théorie classique des instabilités de Benjamin-Feir, les bandes latérales se mettent en place dès la mise en route du batteur. Cependant si le mouvement du batteur est bien contrôlé, leur amplitude est négligeable et malgré leur croissance exponentielle, elles restent indétectables au niveau des sondes ( $x = 29$  m). C’est bien ce qu’on observe sur la figure II.1.14 à droite entre  $t = 35$  et  $t = 90$  T.

L'absorption utilisée est gérée par deux paramètres semblables à une longueur et une intensité. Elle consiste en un terme de forçage proportionnel à la vitesse normale dans la condition dynamique de surface libre (voir la partie I.1.3). Elle assure une diminution de l'énergie dans la zone où le coefficient de proportionnalité, qui ne dépend que des coordonnées spatiales, est non nul. Longueur et intensité ont été ajustées pour obtenir des coefficients de réflexion de même ordre que ceux du bassin physique.

On donne ici les mesures de réflexion pour une fonction  $\nu(x)$  sous forme de polynôme d'ordre trois. On privilégie une longueur d'onde typique  $\lambda = h$ , bien adaptée au batteur (peu de modes évanescents), pour étudier l'évolution du coefficient de réflexion en fonction des paramètres  $\nu_o$  et de  $L_r$ . L'étude se fait simplement en fixant l'un des deux paramètres et en faisant varier le second. La figure II.1.15 donne ainsi l'influence de l'intensité  $\nu_o$  de la zone absorbante pour une longueur  $L_b$  fixée à deux longueurs d'onde  $L_b = 2\lambda$ . On peut constater que le taux de réflexion est élevé pour les faibles valeurs du paramètre  $\nu_o$ . Il décroît rapidement à mesure que  $\nu_o$  augmente pour se stabiliser ensuite aux valeurs plus élevées. Lors des simulations, on aura alors intérêt de choisir un point de fonctionnement situé dans la zone où le coefficient de réflexion varie peu en fonction du coefficient  $\nu_o$ .

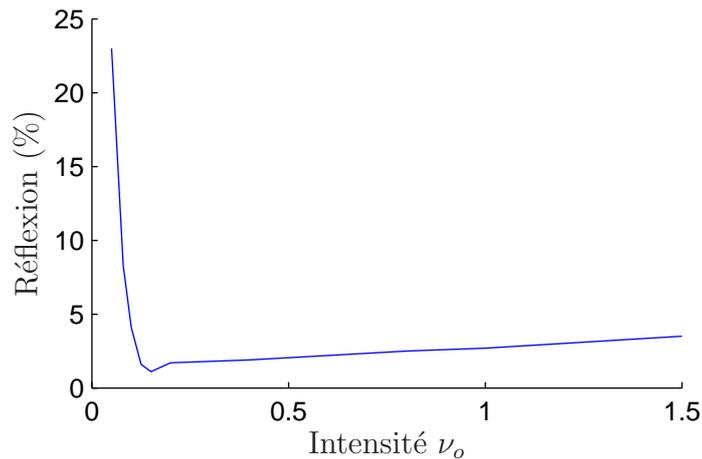


FIG. II.1.15 – Influence de l'intensité de la zone absorbante ( $f = 0.56$  Hz et  $L_b = 2\lambda$ )

La figure II.1.16 présente cette fois l'influence de la longueur de la zone absorbante à intensité fixée à  $\nu_o = 0.4$  (choisi dans la zone où  $C_r$  évolue peu en fonction de  $\nu_o$ ). On observe que le coefficient de réflexion est très faible pour les longueurs  $L_b$  supérieures à la longueur d'onde. Pour les longueurs comprises entre une demie et une longueur d'onde, le coefficient de réflexion varie sur une gamme importante, de 11 à 1 % : on peut alors ajuster la longueur de la plage qui reproduit le coefficient expérimental à cette fréquence de houle. Lorsque la longueur d'onde est grande devant celle de la zone absorbante, les performances se dégradent.

Pratiquement, pour une longueur d'onde proche de la profondeur, les essais expérimentaux donnent un coefficient de l'ordre de 5 %. On peut alors choisir les paramètres  $\nu_o = 0.4$  et  $L_b = 0.9\lambda$  pour reproduire correctement la plage réelle. Pour terminer cette étude, on s'intéresse maintenant au comportement fréquentiel du coefficient de réflexion de la zone absorbante numérique, avec les paramètres  $\{\nu_o = 0.4; L_b = 0.9\lambda\}$  fixés (figure II.1.17). On peut voir que les modes longs sont mal amortis par la zone absorbante numérique. La plus grande période testée, de 4 s présente déjà une réflexion de l'ordre de 50 % (une valeur expérimentale à faible cambrure donne 20 % de réflexion (mais sûrement entachée d'incertitude : faible durée d'ana-

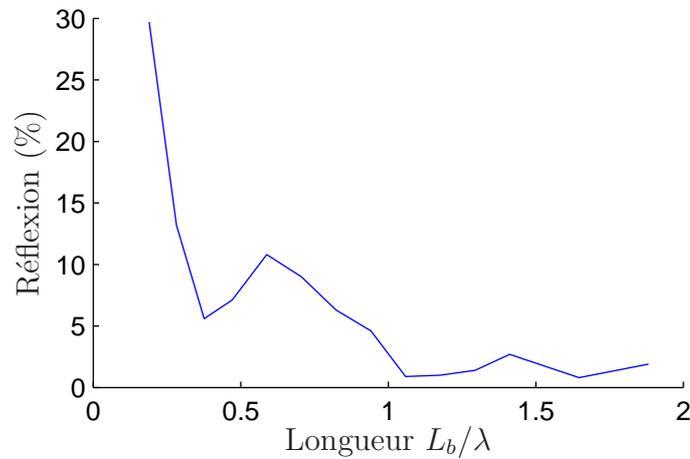


FIG. II.1.16 – Influence de la longueur de la zone absorbante ( $f = 0.56$  Hz et  $\nu_o = 0.4$ )

lyse)). Le coefficient de réflexion numérique décroît en fonction de la fréquence. Autour de la fréquence centrale de 0.56 Hz, on retrouve bien des coefficients de réflexion puis à plus hautes fréquences, les valeurs obtenues sont plus faibles que pour les expériences. La forme de l'absorption choisie, qui permet facilement, grâce à ces deux paramètres d'adapter en houle régulière le coefficient de réflexion numérique à la valeur expérimentale, ne permet pas de reproduire les performances de la plage physique sur toute la gamme de fréquence en houle irrégulière.

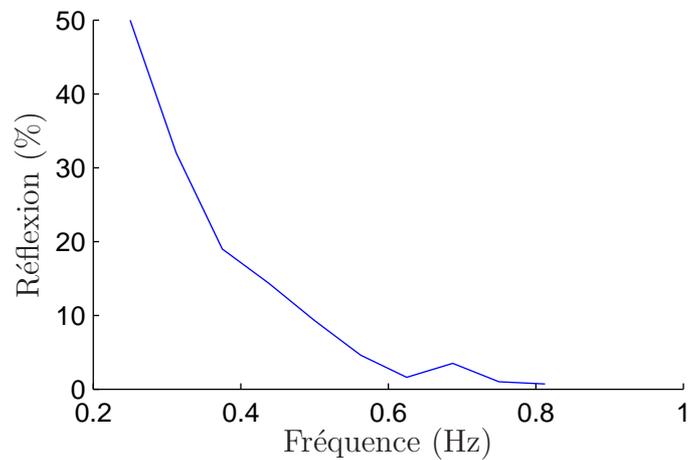


FIG. II.1.17 – Fonction de transfert en amplitude ( $\nu_o = 0.4$  et  $L_b = 0.9\lambda$ )

Le terme de forçage choisi pour amortir la houle donne un comportement linéaire correct de la plage numérique. Au second ordre, on peut se demander s'il est possible qu'une onde libre de pulsation  $2\omega$  soit créée au niveau du mur  $x = L_x$  et se propage en direction du batteur. Dans le cas d'un coefficient de réflexion  $C_r$  élevé par exemple, la houle qui passe à travers la plage arrive jusqu'au mur  $x = L_x$  et s'y réfléchit. La cinématique horizontale linéaire est alors nulle près du mur et il en est de même pour la cinématique second ordre liée. La condition homogène sur la paroi est vérifiée, il n'y a pas de création d'onde libre dans ce cas.

## Conclusion

L'analyse de la réflexion dans le bassin expérimental, prévue au tout début pour paramétrer les zones d'absorption des modèles numériques, nous a conduit un peu plus loin. Cette première étude des performances de la plage du bassin océanique montre sa bonne efficacité à faible amplitude. Lorsque l'amplitude augmente et que l'hypothèse de linéarité sous jacente à la méthode d'analyse est de moins en moins vérifiée, la prise en compte des effets d'amplitude finie au troisième ordre en houle régulière a permis d'étendre la gamme de cambrure analysable et a fourni des valeurs crédibles de coefficient de réflexion pour ces fortes amplitudes. La méthode de séparation des houles incidente et réfléchie, au fondamental et au premier harmonique (second ordre), est désormais disponible pour d'autres analyses de réflexion ou de diffraction-radiation par des structures immergées par exemple.

Des phénomènes non linéaires ont été mis en évidence au cours des essais effectués, dont il faut tenir compte lors de la préparation des essais et de l'analyse des mesures (génération d'ondes libres par les interstices et la plage, instabilités). On devra bien sûr garder à l'esprit que d'autres phénomènes de ce type existent (génération d'ondes libres par le batteur, instabilité classique de Benjamin-Feir).

## Perspectives

L'expérience accumulée tant au cours des essais que des analyses permet de dégager certains aspects à développer relativement aux performances de la plage

- densification du balayage, à la fois en fréquence (notamment entre 0.5 et 1.5 Hz) et en amplitude
- étude en houle oblique
- utilisation d'un nombre plus élevé de sondes
- et plus longues pour avoir accès à des amplitudes plus grandes

Le quatrième point doit se faire en s'assurant que la flexion des sondes ne dégrade pas la précision des mesures, avec par exemple une procédure d'étalonnage dynamique.

Les essais de plus fortes amplitudes ont montré un défaut d'amplitude apparemment dû à un mouvement réel du batteur inférieur à la consigne. Cette question est à étudier plus en détail pour un meilleur contrôle de la génération de houle dans le bassin océanique.

Une validation supplémentaire de la méthode avec vitesse de phase non linéaire peut être faite si nécessaire avec le modèle numérique HOS non linéaire complet. La génération par un doublet tournant, placé au centre du bassin et générant une houle uni-directionnelle grâce au choix approprié de ces composantes, produira après un aller-retour doublet-plage-doublet sur la moitié du bassin, un champ de vague réfléchi seul sur la seconde moitié du bassin. Un groupe de sondes sur chaque moitié permettra de comparer les amplitudes réfléchies mesurées de part et d'autre du doublet. La mesure de l'onde réfléchie en présence de l'onde incidente pourra être validée par la mesure de l'onde réfléchie seule (seconde moitié).

Il reste à investiguer également l'influence du courant de retour sur la vitesse de propagation de l'onde incidente. Une interaction résonante est possible en effet entre l'onde incidente ( $k$ ) et le courant de retour du second ordre ( $k_r = k - k$ ) qui vient modifier la vitesse de phase (interaction résonante  $k_4 = k + k - k$ ). La propagation de la houle incidente s'accompagne d'un débit massique  $Q = \frac{1}{2}\rho k a^2 \frac{g}{\omega}$ . En supposant un courant de retour uniforme suit toute la profondeur (*e.g.* Hudspeth et Sulisz [64]), le courant de retour qui s'installe vérifie  $\rho U_r h = Q$ . Un tel courant modifie la pulsation apparente de l'onde  $\Delta\omega = -kU$ , d'où une modification du

nombre d'onde  $\Delta k = \frac{2\omega}{g} \Delta\omega = \frac{k^2 a^2}{h}$ . Pour la houle incidente, le courant de retour est contraire et la correction totale du nombre d'onde s'écrit alors

$$k'_i = k \left( 1 - (ka)^2 \left( 1 - \frac{1}{kh} \right) \right)$$

La nécessité de prendre en compte du courant de retour était bien visible pour les simulations non linéaires complètes de la figure II.1.9: la pente était différente de un. La figure II.1.18 montre la comparaison des temps de parcours mesurés lors de la simulation avec la prédiction théorique à l'ordre trois avec courant de retour. On constate que l'accord est meilleur cette fois.

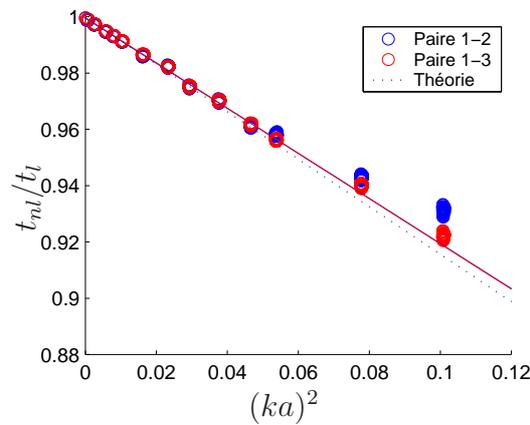


FIG. II.1.18 – Évolution du temps de parcours entre deux sondes avec la cambrure (prise en compte du courant de retour)

Pour la houle réfléchie, le courant de retour est dans le même sens que la propagation, le nombre d'onde augmente en raison du courant et finalement, le signe devant  $(ka)^2$  change. L'effet du courant de retour sur le nombre d'onde sera d'autant plus sensible que la fréquence de la houle est faible. L'amplitude finie des ondes intervient dans nos essais pour les fréquences supérieures à 0.5 Hz. Dans cette gamme, la correction  $1/kh$  sera importante surtout pour les fréquences proches de 0.5 Hz où elle atteint 20 % de celle liée à la vitesse de phase. Dès 0.7 Hz, elle vaut 10 % et pourra ensuite être négligée pour les fréquences supérieures.



## Chapitre II.2

# Réflexions sur les murs latéraux

La génération de houle oblique dans le bassin océanique s'accompagne inévitablement de réflexion sur les murs latéraux. Les ondes réfléchies vont perturber le champ de vague dans le bassin et réduire la dimension de la zone utile où la houle est proche de la consigne. Il est possible de tenir compte de ces réflexions en choisissant une loi de commande adaptée, et augmenter ainsi la taille de la zone utile. Ce type de méthode est nécessaire pour obtenir un champ de vague correct en houle oblique, dans une zone utile entourant la zone des mesures, et exploiter pleinement les capacités du batteur segmenté. Plusieurs lois de commande optimisées existent dans la littérature (Dalrymple [38], Molin [98] (cercle) et [97] (rectangle), Boudet et Pérois [20] (ellipse)). L'objectif de cette partie est, partant de la méthode de Dalrymple, plus simple à mettre en œuvre, d'appliquer cette loi de commande élaborée aux bassins, expérimental et numériques. On s'est attaché à développer ce faisant une procédure qui permettra par la suite d'utiliser très facilement les autres lois de commande citées.

Au niveau pratique, l'étude présente de la loi de commande de Dalrymple en houle oblique a conduit à la détermination des amplitudes maximales de houle générables avec cette méthode compte tenu des débattements admissibles du batteur (*cf.* note [15]). On verra ensuite que la poursuite du développement de la solution analytique au second ordre a permis de connaître le comportement non linéaire de la loi de commande Dalrymple, faisant apparaître la nécessité de supprimer les ondes libres (*cf.* partie III).

Au premier ordre, une houle est la superposition linéaire de composantes élémentaires si bien qu'on s'intéresse à la génération d'une de ces composantes élémentaires, à savoir une houle oblique de fréquence, direction de propagation et amplitudes données. On s'intéresse à la loi de commande qui permet de générer cette houle élémentaire. La solution est classique dans la littérature (Hughes [65] en bassin infini dans la direction transverse, Molin [98] et Boudet et Pérois [20] en tenant compte des murs latéraux). Elle est reprise en détail en Annexe A, afin d'introduire les notions et notations qui serviront aussi dans l'étude des ondes libres (voir partie III section III.1.1). On se contente de simplement de rappeler les principaux résultats ici dans une première section. On montrera ensuite l'application des lois de commandes aux bassins numériques et expérimentaux.

### II.2.1 Solution au premier ordre

Le domaine d'étude est un bassin de profondeur finie, muni de murs parfaitement réfléchissants sur les côtés et semi-infini dans le sens de la longueur pour éviter les réflexions en bout de bassin (voir la section précédente). La résolution des équations linéaires est décrite en

Annexe A. Les solutions sont adimensionnées par la profondeur  $h$  et l'accélération de gravité  $g$ . On cherche une solution en régime établi lorsque le mouvement du batteur est sinusoïdal d'amplitude constante, soit

$$X_1(y, z, t) = \operatorname{Re} [X_1(y, z) e^{i\omega t}]$$

La solution est une superposition de modes élémentaires<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \underline{\eta}_1(x, y) &= \underline{a}_{mn} e^{-k_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\ \underline{\phi}_1(x, y, z) &= \frac{i\underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-k_{mn}x} \cos(\mu_n y) \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \end{aligned}$$

Les amplitudes  $\underline{a}_{mn}$  sont à déterminer en fonction de la loi de commande  $\underline{X}_1(y, z)$  du batteur.

## II.2.2 Lois de commande du batteur

On veut générer une houle régulière oblique, de pulsation  $\omega$ , de direction  $\theta$  par rapport à l'axe ( $Ox$ ) du bassin et d'amplitude  $\underline{a}$ . En domaine non borné, le potentiel et la hauteur de surface libre au premier ordre sont

$$\begin{aligned} \underline{\eta}_1 &= \underline{a} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \underline{a} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \\ \underline{\phi}_1 &= \frac{i\underline{a}}{\omega} \frac{e^{i\alpha_o(z+1)} + e^{-i\alpha_o(z+1)}}{e^{i\alpha_o} + e^{-i\alpha_o}} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

On trouve plusieurs lois de commande dans la littérature pour générer une telle houle. Le point clé est d'obtenir dans le bassin un champ de vague proche de celui en domaine non borné. En raison du confinement, la zone où champs obtenu et cible sont proches est limitée. On a intérêt à maximiser l'étendue de cette zone dite zone utile. Il faut pour cela prendre en compte les réflexions dans la loi de commande.

### II.2.2.1 Principe du serpent

La loi de commande la plus simple est la loi proposée par Biesel [44]. Il considère le batteur comme infini dans la direction  $y$  et calcule l'amplitude à donner au batteur pour obtenir la houle cible. Le mouvement est une ondulation sinusoïdale le long du batteur qui donne son nom à la méthode, du type

$$\underline{X}_1 = \underline{b} e^{-ik \sin \theta y} g_v(z)$$

Afin d'identifier le coefficient  $\underline{b}$ , amplitude du mouvement du batteur, on reporte le mouvement  $\underline{X}_1$  et le potentiel (II.2.1) dans la condition batteur (A.10), ce qui donne la fonction de transfert du batteur en 3D

$$\underline{TF}_{3D} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \underline{TF}_{2D} \cos \theta$$

avec  $\underline{TF}_{2D}$  la fonction de transfert bidimensionnelle du batteur (voir l'Annexe A). On peut alors retrouver les composantes  $\underline{a}_{mn}$  du potentiel. Pour cela, il suffit de reporter la loi de commande

---

1. Les sommes sur  $m$  et  $n$  sont omises pour plus de clarté.

$f(y) = \exp(-ik \sin \theta)$  dans la condition sur le batteur (A.10). Cela revient comme en 2D à décomposer la loi de commande sur la famille des modes en  $\{y, z\}$  du potentiel. Comme indiqué en Annexe A, il suffit de s'intéresser aux modes  $m = 0$ , les autres en découlant grâce à (A.11). On obtient

$$\begin{aligned} \underline{a_{on}} &= \underline{a} \frac{\alpha_o \cos \theta}{k_{on}} I_n \\ \text{où } I_n &= \frac{\int_0^b e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy} \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

L'expression de  $I_n$  est détaillée en Annexe A. On peut remarquer que le mode évanescent  $n = N_1 + 1$  qui est susceptible de décroître lentement avec  $x$  est bien excité par cette loi de commande<sup>2</sup>.

### II.2.2.2 Méthode de Dalrymple

Dalrymple [38] a proposé une loi de commande de batteur qui prend en compte les réflexions sur les parois latérales du bassin pour optimiser la zone utile. Pour cela, on impose un potentiel cible (II.2.1) sur une ligne parallèle au batteur, à une distance  $X_d$  de ce dernier. On peut alors en déduire les coefficients  $\underline{a_{mn}}$  du potentiel dans le bassin. On a

$$\underline{a_{on}} = \underline{a} I_n e^{(k_{on} - \alpha_o \cos \theta) X_d}$$

A partir de ces coefficients  $\underline{a_{on}}$ , on peut en déduire les  $\underline{a_{mn}}$  pour  $m \geq 1$  d'après (A.11). Comme on veut générer un champ de vague proche du champ cible, on a intérêt à exciter le moins de modes évanescents possible. C'est d'autant plus vrai que certains de ces modes peuvent avoir une grande longueur d'atténuation. C'est le cas pour le premier mode évanescent en  $y$ , *i.e.*  $n = N_1 + 1$ . Son nombre d'onde est  $k_{oN_1+1} = \sqrt{\mu_{N_1+1}^2 - k^2}$ , qui tend vers zéro si  $k$  tend vers  $\mu_{N_1+1}$  (par valeur inférieure). Cela correspond à une fréquence de houle tendant vers la fréquence d'un mode propre transverse par valeur inférieure. On aura donc intérêt à éviter d'exciter ces modes. Le plus simple est de ne pas les exciter du tout, *i.e.* d'imposer un mouvement batteur nul pour ces modes, soit

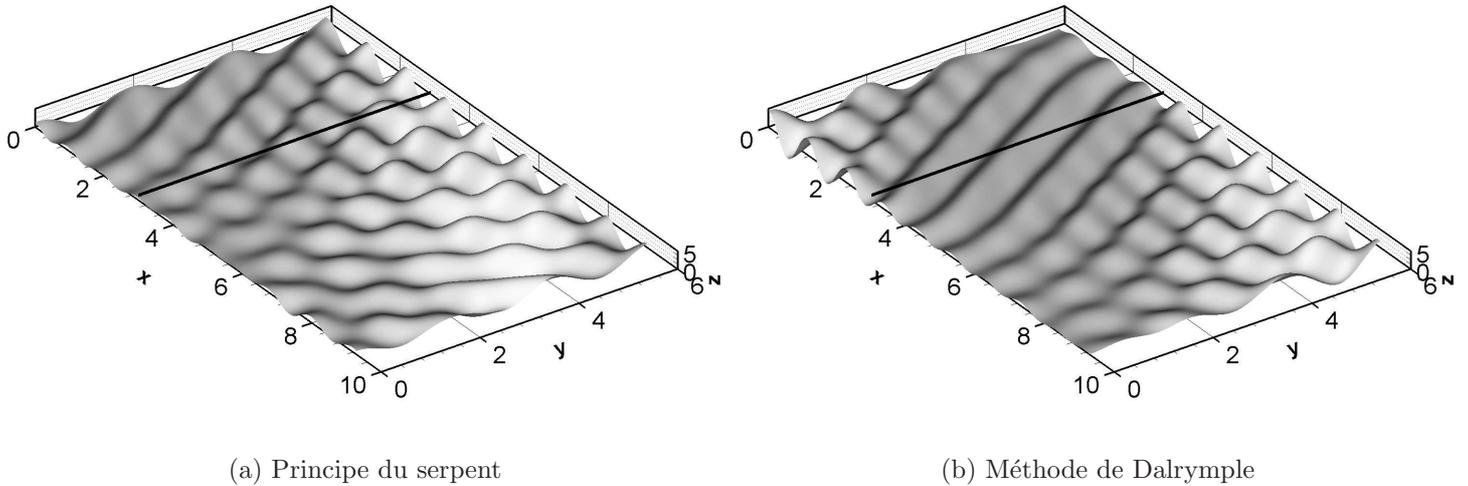
$$\underline{a_{on}} = 0 \text{ si } n > N_1$$

Expérimentalement, on observe que même en houle droite un mode transverse  $n \neq 0$  se développe pour certaines fréquences, évanescent selon la direction de propagation. On peut penser que ce mode excité expérimentalement est le premier mode évanescent décrit plus haut. L'excitation est non linéaire, par des effets du troisième ordre comme dans Yao *et al.* [129].

La figure II.2.1 donne une vue 3D de la surface du bassin, évaluée à partir de la solution analytique (A.9), pour une houle régulière<sup>3</sup> de fréquence  $f = 0.4$  et de direction  $\theta = 30$  degrés

2. On pourrait, comme pour la loi de commande Dalrymple, construire le mouvement batteur en utilisant les amplitudes  $\underline{a_{on}}$  données par (II.2.2) pour  $n \leq N_1$  et en imposant  $\underline{a_{on}} = 0$  pour  $n \geq N_1 + 1$ . On obtient un mouvement légèrement différent du principe du serpent qui permet d'éviter la génération du mode évanescent ( $m = 0$ ;  $n = N_1 + 1$ ) gênant. En pratique, on utilisera directement la loi de commande Dalrymple qui donne une zone utile étendue.

3. Cet exemple de champ de vague sera utilisé au second ordre dans la partie III.1.1 pour étudier les ondes liées et libres associées.


 FIG. II.2.1 – *Champ de vague au premier ordre ( $f = 0.4$  et  $\theta = 30$  degrés)*

pour les deux lois de commande. Le batteur est situé en haut à gauche des figures. La direction, choisie volontairement élevée, est mal reproduite dans le bassin par le principe du serpent du fait des réflexions sur le mur  $y = 6$  : la zone utile est très réduite, devant le batteur, là où les modes évanescents se font sentir. La loi de commande de Dalrymple est utilisée avec une distance cible  $X_d = 3$  (indiqué par le trait sur la figure) et fournit un champ de vague dont la zone utile est clairement visible à l'oeil nu et plus étendue que celle du principe du serpent.

### II.2.2.3 Méthodes à contours complexes

La méthode de Dalrymple impose la houle cible sur un contour relativement simple dans le bassin, une droite parallèle au batteur occupant toute la largeur du bassin. Les avantages sont nombreux, la simplicité du calcul du mouvement batteur *via* les amplitudes des modes  $a_{on}$  avec  $n \leq N_1$ , l'efficacité en terme de zone utile par rapport à la méthode du serpent. Un inconvénient cependant est qu'on reproduit une houle correcte y compris près des murs latéraux, là où on ne fera pas de mesure en général, alors qu'on pourrait au contraire étendre la zone utile dans la direction principale du bassin. C'est précisément l'objectif des méthodes que l'on présente maintenant qui imposent la houle cible sur des contours géométriques plus complexes. Molin [98] a utilisé un contour circulaire de rayon  $R_o$  placé à une position  $(x_o; y_o)$  dans le bassin. Cela permet d'obtenir une zone utile à proximité du point  $(x_o; y_o)$ , dont la taille est donnée par le rayon  $R_o$ . Il s'est avéré nécessaire de limiter le débattement du batteur et l'élévation de surface libre en dehors de la zone utile, notamment près du mur où a lieu la réflexion volontaire et où l'amplitude est élevée, pouvant conduire à un déferlement local. Une autre application a été développée avec un contour rectangulaire [97]. Boudet et Pérois [20] ont présenté une autre méthode originale pour augmenter la taille de la zone utile. Ils ont traité à la fois le cas d'un batteur continu et d'un batteur segmenté. Leur approche est d'imposer la cible voulue non sur le batteur ou sur une ligne parallèle au batteur, mais sur une ellipse dans le bassin. Les amplitudes qui décrivent le mouvement batteur sont les amplitudes des modes transverses dans le cas du batteur continu ou les amplitudes de chaque volet dans le cas d'un batteur segmenté. Elles sont déterminées grâce à la cible. Il apparaît qu'on doit aussi vérifier le débattement des

volets qui peut être important .

Ces trois méthodes consistent à imposer le potentiel cible sur un contour donné quelconque. Les inconnues à déterminer sont, dans le cas d'un batteur continu, les amplitudes modales  $\underline{a_{on}}$ , pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ . On écrira

$$\underline{a_{on}} e^{-k_{on}x} \cos(\mu_n y) = \underline{a} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

pour tout couple  $(x, y)$  du contour. On détermine les coefficients en imposant cette relation en un jeu de points discrets (collocation avec Dirac). Pratiquement, on limite le nombre de modes à  $N_1$  pour éviter les modes évanescents (bien que cela limite la résolution) et on prend plus de points en résolvant au sens des moindres carrés.

#### II.2.2.4 Construction de la loi de commande pour les batteurs

Une fois les amplitudes modales  $\underline{a_{on}}$  déterminées pour  $n \leq N_1$ , il convient d'intégrer ces lois de commandes aux batteurs, expérimental et numérique. Le batteur expérimental est piloté dans le domaine fréquentiel par la donnée d'un jeu de composantes obliques de houle, superposées linéairement pour construire le mouvement complexe du batteur. Les méthodes de génération élaborées fournissent dans un premier temps les amplitudes modales  $\underline{a_{mn}}$  qu'il convient d'utiliser pour calculer le mouvement du batteur. En ne considérant que les modes progressifs, on doit générer une houle

$$\underline{\eta_1} = \sum_{n=0}^{N_1} \underline{a_{on}} \cos \mu_n y e^{-k_{on}x}$$

qui s'interprète comme la superposition de  $N_1 + 1$  houles stationnaires élémentaires. Le mouvement du batteur expérimental se définit par un jeu de composantes fréquentielles de houle, chacune étant traitée par le principe du serpent. Ce principe du serpent fournit très facilement le mouvement du batteur

$$\widetilde{X}_1 = \text{Re} [\underline{a} \underline{TF} \cos \theta \exp i(\omega t - k \sin \theta y)]$$

pour une houle d'amplitude  $\underline{a}$  et de direction  $\theta$ . Il faut donc décomposer chaque mode propre transverse à son tour en deux ondes progressives d'amplitude moitié et de direction  $\pm \theta_n$  avec

$$\theta_n = \arcsin \frac{\mu_n}{k}$$

On fournit donc au logiciel du batteur les  $2N_1 + 1$  composantes

Indice	Fréquence	Amplitude	Phase	Direction
$n = 1 \dots N_1$	$f$	$\frac{1}{2}  \underline{a_{on}} $	$\arg \underline{a_{on}}$	$+\theta_n$
$n = 0$	$f$	$ \underline{a_{oo}} $	$\arg \underline{a_{oo}}$	0
$n = 1 \dots N_1$	$f$	$\frac{1}{2}  \underline{a_{on}} $	$\arg \underline{a_{on}}$	$-\theta_n$

TAB. II.2.1 – Décomposition de la méthode de Dalrymple

Pour le batteur numérique, on a besoin directement du mouvement des points de la surface du batteur. Au niveau de la surface libre au repos, celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_1(y,t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} TF \left( \frac{a_{oo}}{2} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{a_{on}}{2} \cos \theta_n e^{-iky \sin \theta_n} + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{a_{on}}{2} \cos \theta_n e^{iky \sin \theta_n} \right) e^{i\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \widetilde{X}_1(y) e^{i\omega t} \right]\end{aligned}\quad (\text{II.2.3})$$

Pratiquement, le facteur  $\widetilde{X}_1(y)$  devant l'exponentielle temporelle est calculé pour l'ensemble des coordonnées  $y$ , une fois pour toutes en début de simulation. On stocke cette information et on évite de la réévaluer au cours de la simulation. On évalue à chaque pas de temps le mouvement du batteur en appliquant la formule  $X_1(y,z,t) = g_v(z) \operatorname{Re} \left[ \widetilde{X}_1 e^{i\omega t} \right]$  en chaque point  $(y,z)$  du batteur.

## II.2.3 Application aux simulations

Les lois de commande serpent et Dalrymple ont été mises en œuvre dans les deux codes de calcul. Une première étude en houle régulière oblique a permis de valider l'implémentation de la méthode Dalrymple et de mettre en avant ces avantages en terme de taille de zone utile par rapport au principe du serpent. Des états de mer complexes ont ensuite été générés et soulignent la nécessité de traiter des réflexions latérales, dans le cas d'une houle mono-fréquence focalisée en direction (focalisation géométrique) et dans le cas d'une houle irrégulière multi-directionnelle focalisée.

### II.2.3.1 Houle régulière

La génération de houle régulière oblique a permis de valider l'implémentation de la méthode de Dalrymple dans les codes de calcul. La validation a porté sur la comparaison des zones utiles obtenues en simulation instationnaire avec les zones utiles théoriques en régime établi présentes dans la littérature (*cf. e.g.* Boudet et Pérois). Les champs de vagues ont été simulés pour les lois de commande Dalrymple et principe du serpent pour une longueur d'onde de 5 m, une direction de 20 degrés et une distance cible  $X_d = 20$  m pour la méthode de Dalrymple. Les caractéristiques de la houle oblique simulée est la même que celle utilisée pour les vues stationnaires 3D de la figure II.2.1. Dans un premier temps, ils ont été analysés à l'instant  $t = 19T$  où le front d'onde atteint le mur opposé (pas d'influence de la réflexion sur le mur opposé au batteur). La figure II.2.2 montre une carte de la surface du bassin où les niveaux de gris représentent l'amplitude du fondamental, calculée sur une période de houle par une Transformée de Fourier Discrète en chaque point du maillage de la surface libre et normalisée par l'amplitude cible. Le batteur est situé à gauche des cartes, la zone absorbante à droite, la direction de la houle étant dirigée vers le haut de la figure.

À gauche se trouve la carte d'amplitude pour le principe du serpent, dont la zone utile se réduit à un triangle déformé devant le batteur. Près du mur  $y/h = 6$ , on observe très rapidement la formation d'une onde stationnaire transverse due à la réflexion de la houle générée sur ce mur. Près du mur opposé, l'amplitude est faible, provenant de la diffraction par le bord de la zone utile triangulaire. À droite, la carte d'amplitude pour la méthode de Dalrymple montre une zone utile beaucoup plus étendue, en forme de losange caractéristique autour de la position

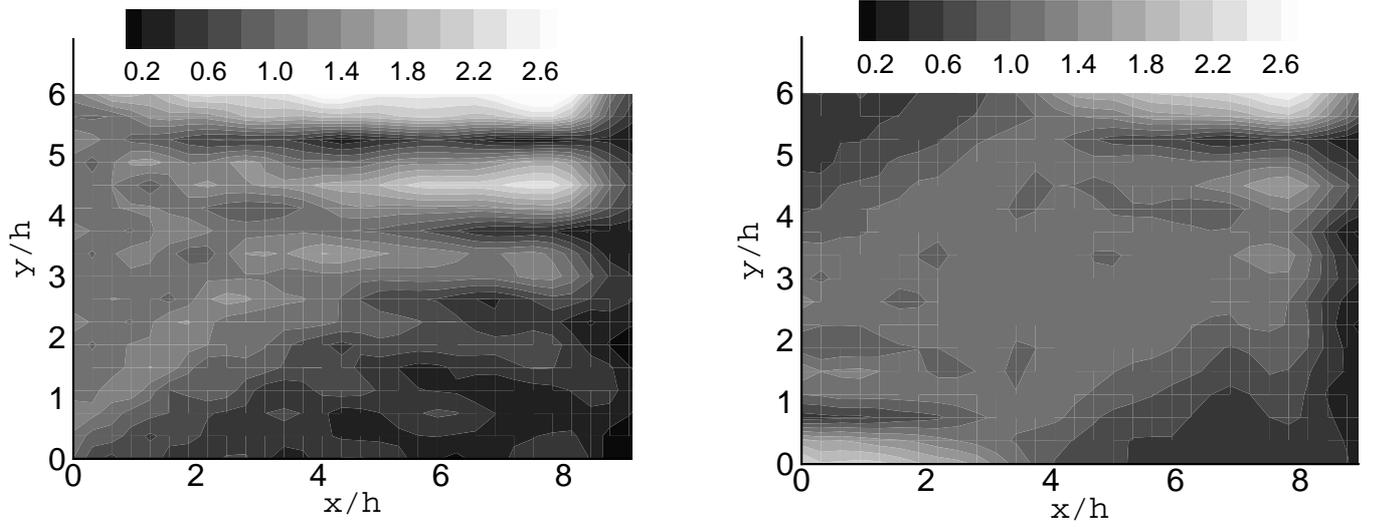


FIG. II.2.2 – Qualité du champ de vague au premier ordre (gauche : serpent, droite : Dalrymple  $f = 0.56$  Hz,  $\theta = 20$  degrés et  $X_d/h=4$ , à l'instant  $t = 19T$ )

$x = X_d$ . On voit clairement l'avantage de cette méthode par rapport au principe du serpent. Il est nécessaire de l'utiliser pour générer de tels angles de propagation.

Le caractère instationnaire du code de calcul SWEET permet de s'intéresser à l'évolution du champ de vague dans le temps. Les réflexions multiples, sur la plage et les murs latéraux sont censées altérer la qualité de la houle générée. La figure II.2.3 montre la carte d'amplitude sur la surface du bassin après un temps de 57 périodes, ce qui correspond à un aller-retour plus un aller du front d'onde dans le bassin. On observe effectivement la dégradation de la houle due aux réflexions : un motif stationnaire transverse plus prononcé apparaît dans les coins en bas à gauche et en haut à droite, là où se produisent les réflexions contrôlées. La zone utile présente par conséquent une dimension plus réduite dans la direction principale du bassin.

### II.2.3.2 Houle irrégulière

Pour les houles plus complexes, multi-directionnelle et/ou multi fréquences, une organisation rigoureuse de l'algorithme de mouvement batteur s'est révélée nécessaire au sein des codes de calculs pour minimiser le temps de calcul correspondant. En houle régulière, on a vu au paragraphe II.2.2.4 qu'une partie des termes est indépendante du temps. Il s'agit d'une somme sur les modes transverses qui est à calculer une fois pour toutes en début de simulation. En houle irrégulière, on applique le même principe à chaque fréquence, avec par exemple un regroupement préliminaire des différentes directions de propagation en un terme indépendants du temps. Pour simplifier, considérons le cas d'une seule fréquence et deux directions  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . L'application de la formule (II.2.3) pour les deux directions conduit à

$$\widetilde{X}_1(y,t) = \text{Re} \left[ \widetilde{X}_1(y,\theta_1) e^{i\omega t} \right] + \text{Re} \left[ \widetilde{X}_1(y,\theta_2) e^{i\omega t} \right]$$

qu'on peut simplement factoriser par l'exponentielle temporelle ; la somme  $\widetilde{X}_1(y,\theta_1) + \widetilde{X}_1(y,\theta_2)$  est calculée au début de la simulation.

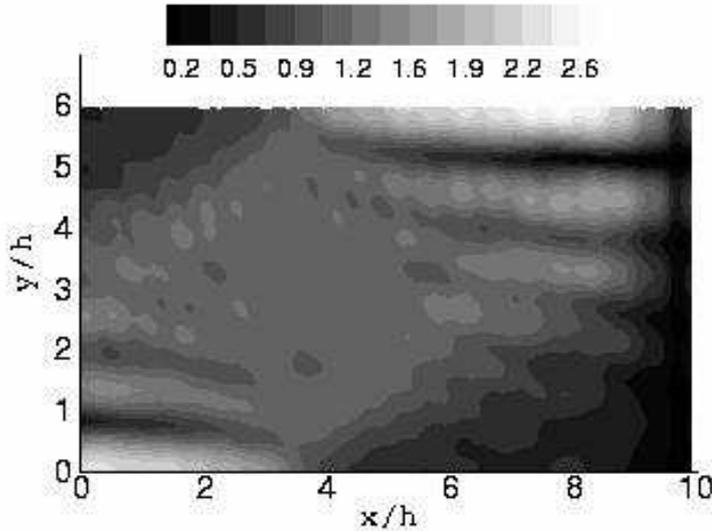


FIG. II.2.3 – Qualité du champ de vague au premier ordre après 57 périodes (Dalrymple,  $f = 0.56$  Hz,  $\theta = 20$  degrés et  $X_d/h=4$ )

Le choix de la loi de commande tenant compte ou non des réflexions s'est posé dans le cas d'une focalisation en direction. Le but est de reproduire en bassin une focalisation de plusieurs ondes de directions différentes. Un cas simple est la superposition d'ondes de même longueur d'onde qui convergent en un point du bassin. On parlera de focalisation géométrique. En linéaire la superposition suivante réalise cette focalisation géométrique :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=-N}^N a_n \cos(\omega t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} + \varphi_n)$$

où la direction de l'onde  $n$  est  $\theta_n = n \frac{\Delta\theta}{N}$ . Sa phase  $\varphi_n$  est ajustée pour qu'elle soit en phase au point  $\mathbf{x}_f$  de focalisation situé au milieu du bassin à une distance  $x_f = 25$  m du batteur, soit  $\varphi_n = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_f$ . Ce champ de vague a été simulé numériquement avec le modèle au second ordre pour une longueur d'onde de 5 m, un étalement angulaire  $\Delta\theta = 45$  degrés et  $N = 5$ , pour les deux lois de commande, serpent et Dalrymple. Les champs de vagues obtenus dans le bassin numérique sont représentés sur la figure II.2.4. On constate que le principe du serpent produit une focalisation plus étalée en largeur et plus faible en amplitude que la méthode de Dalrymple.

La figure II.2.5 compare l'élévation obtenue par les deux lois de commandes au point de focalisation. L'amplitude théorique est repérée par le long trait horizontal (5 cm) : elle correspond à une cambrure caractéristique<sup>4</sup> au point de focalisation de 2 %. Les deux traits horizontaux plus courts repèrent les amplitudes données par le principe du serpent (3.1 cm) et par la méthode de Dalrymple (5.1 cm, très proche de la cible). Les réflexions parasites présentes avec le principe du serpent diminuent fortement l'amplitude focalisée du fait de l'élargissement de la crête focalisée observée sur la figure II.2.4.

4. Cette cambrure étant définie par le rapport de la hauteur crête à creux maximale sur la longueur d'onde *i.e.*

$$\varepsilon = \frac{(2N + 1)a_n}{2\lambda}$$

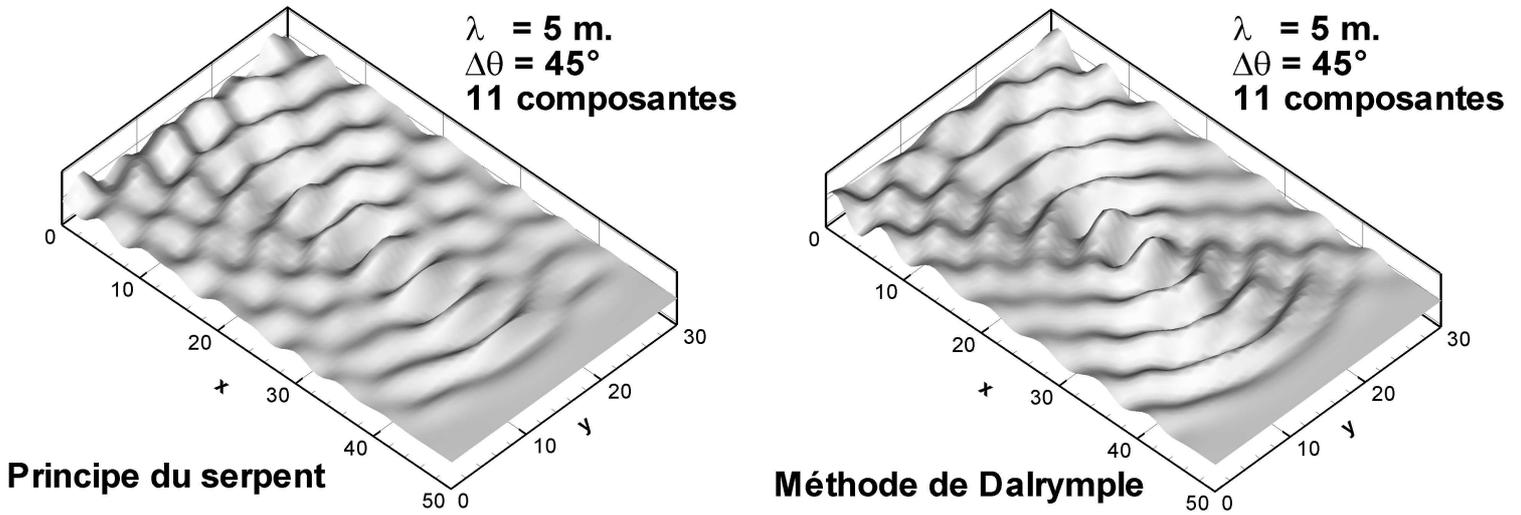


FIG. II.2.4 – Focalisation géométrique, simulations au second ordre

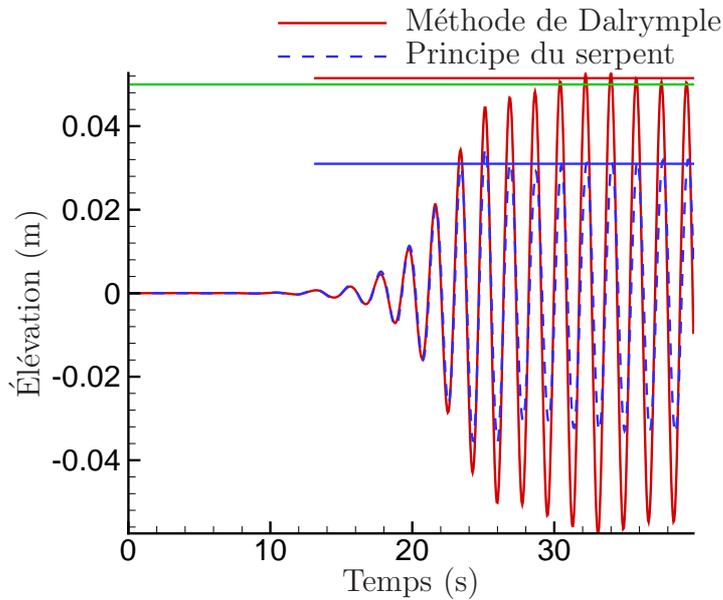


FIG. II.2.5 – Comparaison de l'élevation au point de focalisation géométrique ( $\Delta\theta = 45$  degrés,  $N = 5$ ).

La génération avec la méthode de Dalrymple a été appliquée à un spectre directionnel focalisé au centre du bassin. Le spectre est un spectre de Bretschneider de 2 s de période de pic et 4 cm de hauteur significative. L'étalement directionnel est en  $\cos^{2n}$  avec  $n = 10$ . La focalisation a lieu à 45 s, à 25 m du batteur. La figure II.2.6 montre quatre vues successives de

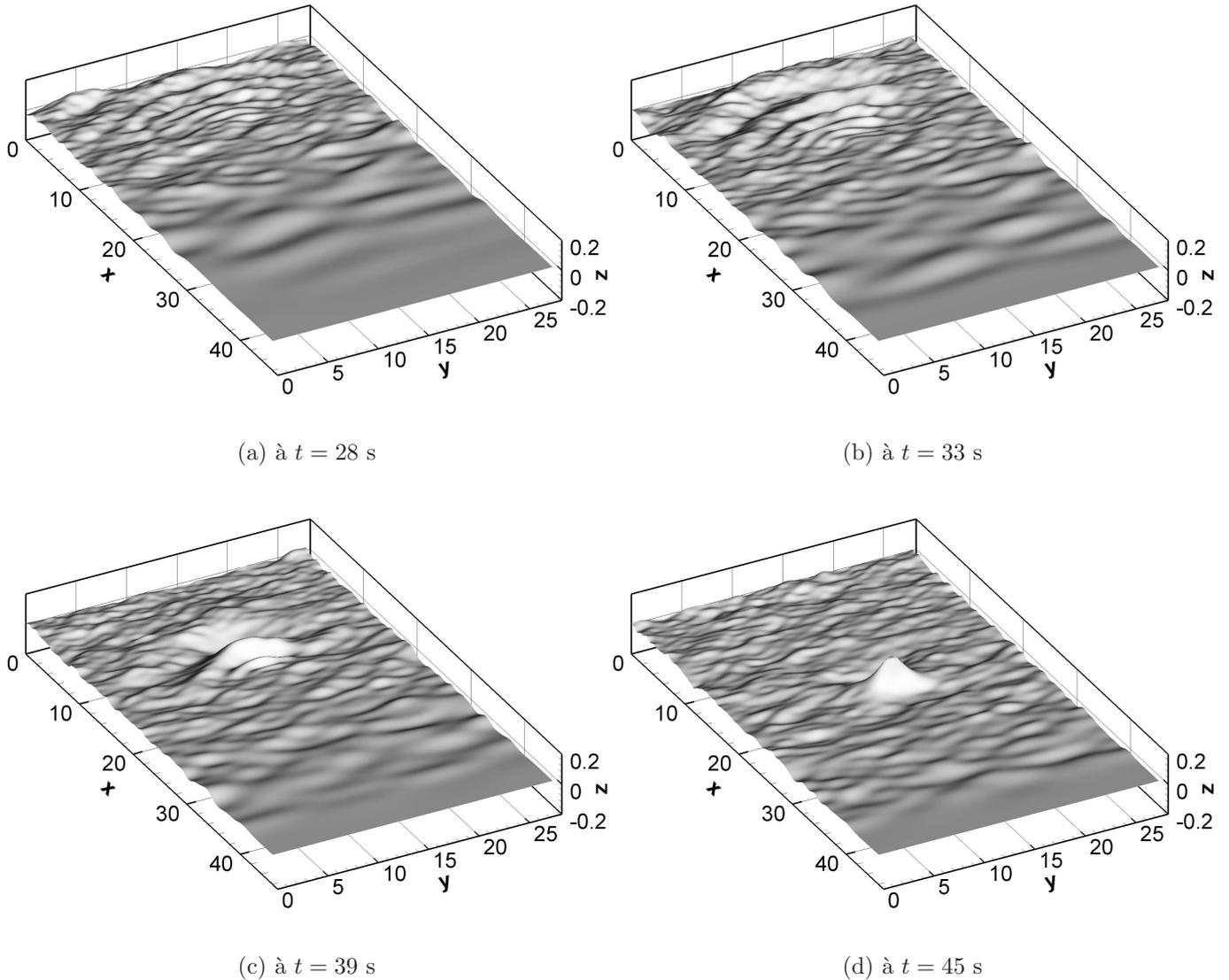


FIG. II.2.6 – Focalisation d'un spectre directionnel

la surface libre au cours de la focalisation, réalisées avec le code HOS. Sur les deux premières vues, on peut voir l'établissement de la houle irrégulière dans tout le bassin. Les ondes plus lentes sont générées en premier.

Un champ irrégulier s'établit avant la focalisation, constitué des grandes longueurs d'onde plus rapides. Au point de focalisation, l'élévation est censée être nulle de part et d'autre de l'instant de focalisation en milieu ouvert (indépendamment du fait que les composantes ne soient pas symétriques). En bassin, on observe le passage d'ondes avant le paquet focalisé due

aux réflexions. L'utilisation de la loi de commande Dalrymple diminue ce phénomène (réflexions contrôlées).

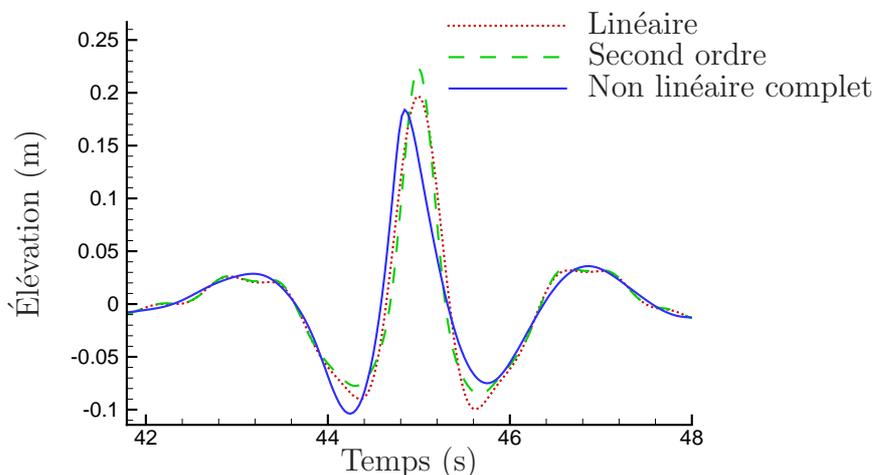


FIG. II.2.7 – *Comparaison de l'élevation au point de focalisation.*

L'utilisation de la loi de commande de Dalrymple pour des houles irrégulières complexes est possible aussi bien dans le code non linéaire complet que dans le code au second ordre. La figure II.2.7 montre l'élevation au point de focalisation pour le paquet de vagues précédents. Les trois résultats de simulation sont comparés. Le second ordre provoque une surélévation du pic central et des creux latéraux ainsi qu'une diminution de la largeur du pic central. Les non-linéarités d'ordre supérieur modifient la phase des ondes (augmentation de la vitesse de phase) d'où deux effets notables, l'arrivée précoce du maximum d'amplitude et le creux précédent le pic plus profond.

## II.2.4 Application aux expériences

La loi de commande Dalrymple a été mise en œuvre dans le bassin de houle de l'ECN. De manière à simplifier la tâche de l'utilisateur, la spécification de la houle se fait exactement de la même manière que pour le principe du serpent fourni par le fabricant. Le mouvement du batteur est décrit par un jeu de composantes fréquentielles de directions données dans un fichier grâce au langage "WAVE", chaque composante étant normalement interprétée avec le principe du serpent par le compilateur OCEAN fourni par le constructeur. Un programme Matlab a été écrit qui est chargé de compiler ce fichier en appliquant la loi de commande Dalrymple à chaque composante. Le lancement de ce programme remplace simplement la compilation habituelle du fichier par "OCEAN". Il s'agit simplement de décomposer la loi de commande Dalrymple en une superposition de principe du serpent, comme expliqué dans le tableau II.2.1. Cette superposition est interprétée en arrière-plan par "OCEAN" qui fournit le fichier binaire du mouvement des 48 batteurs. Cette compilation, nécessaire pour l'instant car le format des fichiers binaires de mouvement est inconnu, pose des limites à l'utilisation de la méthode de Dalrymple. En effet, le compilateur "OCEAN" est limité à un certain nombre de composantes fréquentielles (autour de 3600). Or pour chaque composante initiale du spectre, la méthode de Dalrymple produit

$2N_1 + 1$  composantes,  $N_1 = E$  augmentant rapidement avec la fréquence si bien qu'on tombe dans les limites d'"OCEAN". Deux remèdes ont été appliqués pour diminuer le nombre de composantes

- limiter la bande passante du spectre d'entrée ( $[0 ; 2]$  Hz par défaut),
- conserver uniquement les composantes d'amplitude non négligeable (au dessus d'un certain seuil par exemple).

Le deuxième point vient du fait que parmi les  $2N_1 + 1$  composantes serpent représentant le mouvement Dalrymple à une fréquence donnée, les dernières sont très souvent de très faible amplitude.

Près du mur où a lieu la réflexion contrôlée qui va agrandir la zone utile, le mouvement batteur est proche d'une onde stationnaire d'amplitude double. Le débattement maximal du batteur divise donc par deux l'amplitude de la houle générable (voir par exemple [15]).

La loi de commande de Dalrymple pour le batteur expérimental a été utilisée dans le cadre de la focalisation géométrique précédente. Les caractéristiques sont une longueur d'onde de 5 m, un étalement directionnel  $\Delta\theta = 45$  degrés, une décomposition sur  $N = 15$  et une cambrure caractéristique de 16 %, censées produire une amplitude linéaire de 40 cm au point de focalisation. On a comparé les élévations expérimentales et celles obtenues en simulation pour une sonde placée dans les deux cas au point de focalisation à 25 m du batteur. On observe l'apparition d'un déphasage dû aux non-linéarités (ordre trois, vitesse de phase). En loi de commande Dalrymple, l'amplitude expérimentale (36 cm) est plus faible qu'en simulation (40 cm en linéaire, 48 cm au second ordre). À cette cambrure, les effets du second ordre sont très importants (20 % du linéaire). La différence est importante également entre expérience et second ordre (25 %).

En loi de commande serpent, on retrouve les mêmes observations, pour une amplitude simulée linéaire de 28.7 cm au lieu des 40 cm théoriques. Le second ordre simulé est fort (33.3 cm soit 16 % du linéaire) ; et l'amplitude expérimentale plus faible (25.3 cm soit 24 % du second ordre simulé).

Pour expliquer la différence entre mesure et simulation second ordre, on peut s'intéresser au mouvement du batteur (voir les remarques page II.1.3.2). L'amplitude du mouvement du volet 24, mesurée pendant l'essai, est la même que celle du mouvement au centre du batteur numérique (environ 7.8 cm en Dalrymple) : elle n'est pas très élevée. Elle vaut douze centimètres sur les bords, ce qui n'est pas non plus très élevé donc on peut penser que le mouvement batteur est correct. Il reste la possibilité que le mouvement enregistré (du volet 24) soit plus proche de la consigne que le mouvement réel !

Une autre hypothèse est l'intervention des effets d'ordre supérieurs. Sur les sondes situées plus loin du batteur, l'amplitude maximale ne varie quasiment pas (36 cm). On peut donc penser que le pic de focalisation n'est pas simplement déplacé en aval comme lors des focalisation en 2D ([79]). Les non-linéarités ne font pas que déphaser les ondes.

## Conclusion

La loi de commande élaborée de Dalrymple a été mise en œuvre à la fois dans les simulations temporelles et en bassin expérimental. Elle apporte les améliorations attendues en terme d'élargissement de la zone utile en houle oblique. Validée en houle régulière, en focalisation géométrique et dans le cas d'un spectre directionnel focalisé cette méthode peut remplacer le principe du serpent en houle multi-directionnelle.

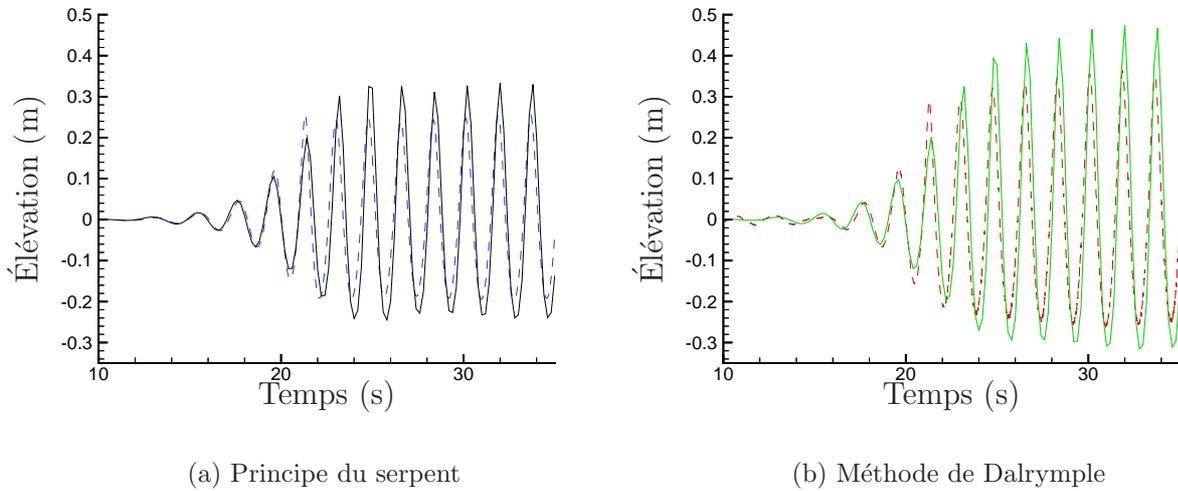


FIG. II.2.8 – Focalisation géométrique (trait plein simulation au second ordre, tirets expérience, pour  $\Delta\theta = 45$  degrés,  $N = 15$  à 25 m du batteur)

Tout au long des chapitres suivants, les lois de commande décrites seront employées lors des simulations et des expériences pour différentes applications (ondes libres en houle oblique, focalisation 3D et houle irrégulière multi-directionnelles).

Les mouvements des volets peuvent être de grande amplitude dans certaines configurations, principalement dans la zone proche du mur latéral utilisé pour les réflexions. Ces amplitudes locales élevées favorisent la génération d’ondes libres parasites comme on le verra dans la partie III.1.1. La comparaison du champ d’onde libre pour le principe du serpent et la méthode de Dalrymple montre que les ondes parasites sont d’amplitude plus élevée dans le cas de la méthode de Dalrymple. Le gain en terme de zone utile linéaire peut donc être atténué par une dégradation de la zone utile au second ordre : pour conserver ce gain linéaire, il est nécessaire de supprimer ces ondes libres.

## Perspectives

La programmation du calcul des amplitudes modales  $a_{on}$  pour les autres lois de commande élaborées (cercle, rectangle) est à entreprendre et permettra l’utilisation de zone utiles adaptables à la configuration de chaque essai.



## Troisième partie

# Prédiction et suppression des ondes libres



---

En houle droite, l'observation visuelle d'une houle régulière de grande longueur d'onde dans le bassin montre des crêtes alternativement carrée ou pointue. Les champs de vagues simulés mettent en évidence un deuxième front d'onde au second ordre, se propageant deux fois moins vite que le front d'onde linéaire. Ces deux phénomènes traduisent la présence d'ondes libres de fréquence double qui perturbent le champ de vagues désiré. Ces parasites existent aussi en houle irrégulière, aux fréquences somme et différence. Les termes différence peuvent conduire à des modes longs libres qu'il est nécessaire de supprimer lorsqu'on étudie les effets de dérive lente par exemple.

Lorsqu'on a besoin d'une houle régulière moyennement cambrée, *i.e.* pour laquelle les effets du second ordre sont perceptibles, les ondes libres perturbent le champ de vagues en  $2\omega$ . Si on doit faire une mesure au centre du bassin avant l'arrivée de la réflexion sur la plage, le temps de mesure disponible est compris entre les instants

$$t_1 = \frac{L}{2v_g} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{3L}{2v_g}$$

avec  $v_g$  la vitesse de groupe de l'onde linéaire, soit une durée de mesure  $T_m = t_2 - t_1 = L/v_g$ . Compte tenu du fait que la vitesse des ondes libres est la moitié de celle de l'onde linéaire, le front d'onde libre arrive au centre du bassin à l'instant

$$t_3 = \frac{L}{2v_g^{(2)}} = \frac{L}{v_g}$$

ce qui divise par deux la durée de mesure. Autrement dit, la suppression des ondes libres permet de doubler la durée de mesure.

Ces ondes existent également en houle oblique. Dans ce cas, il est apparu que les ondes libres sont d'amplitude plus élevée avec une méthode élaborée tenant compte de la réflexion latérale qu'avec le principe du serpent qui n'en tient pas compte.

Pour conserver l'intérêt des méthodes élaborées en terme d'étendue de zone utile et pour augmenter le temps de mesure disponible, l'objet de cette partie est de mettre en place une technique de suppression de ces ondes libres en houle oblique.

## Introduction

Au premier ordre, le profil vertical de vitesse de la houle générée est différent du profil imposé par le mouvement du batteur. Apparaissent alors les modes évanescents qui assurent l'adéquation des profils de vitesse de la houle et du batteur. Ces modes oscillent à la fréquence du batteur, ne se propagent pas mais décroissent assez vite lorsqu'on s'éloigne du batteur. Il ne sont pas gênants lors des expériences, pourvu qu'on se place suffisamment loin du batteur.

Au second ordre, le profil vertical de vitesse des ondes liées n'est pas adapté à celui sur le batteur. Ce dernier est constitué de deux parties : un terme de forçage issu du premier ordre et un éventuel mouvement second ordre. Des ondes dites libres sont alors créées pour compenser cet écart de profil de vitesse. À la différence des modes évanescents du premier ordre, ces ondes libres qui oscillent à la fréquence double possèdent une partie progressive (et une partie évanescence).

La littérature est relativement bien fournie en ce qui concerne la prédiction des ondes libres en deux dimensions (voir Schäffer [113] pour une revue complète). À titre d'exemple de référence, en houle régulière, Hudspeth et Sulisz [64] et en houle irrégulière Schäffer [113]

---

ont présenté des solutions détaillées. Molin [99] et Molin *et al.* [101]) ont étudié également les seiches parasites générées en houle droite. Il s'agit d'un effet sub-harmonique du second ordre se traduisant par l'excitation des modes longs du bassin. Cet effet surtout sensible pour  $kh < 2$  interviendra pour les très grandes longueurs d'onde dans le bassin de houle ( $\lambda > 15$  m).

En trois dimensions, au premier ordre, le formalisme avec murs latéraux est couramment employé (Dalrymple [38], Molin [98], Boudet et Pérois [20]). Au second ordre en revanche, les références sont peu nombreuses et aucune ne traite de façon correcte ou complète de la solution au second ordre dans un bassin semi-infini muni de murs latéraux. Certes la solution proposée par Schäffer et Steenberg [114] pour un bassin infini dans la direction transverse (bateur infiniment long) peut servir de base pour construire la solution avec murs latéraux. Cependant cette approche ne nous a pas paru très intuitive et encore moins aisée. Li et Williams [81] ont proposé une solution avec murs latéraux. Celle-ci fournit la prédiction de l'amplitude des ondes libres quoique l'expression de certaines amplitudes modales nécessaires aux calculs ne soient pas données et que la solution proposée soit limitée au seul principe du serpent. Elle s'est avérée en outre contenir des erreurs, qu'on suppose de frappe.

L'étude présente concerne donc les ondes parasites super-harmoniques (ondes courtes) en houle régulière oblique, dans un bassin délimité par des murs latéraux parfaitement réfléchissants. Elle vient compléter l'approche de Li et Williams. Les amplitudes modales des ondes libres sont données dans une expression générale qui ne fait intervenir que les amplitudes modales du premier ordre et des nombres d'ondes. On peut alors simplement les appliquer aux lois de commandes élaborées élargissant la zone utile au premier ordre; il suffit de connaître les amplitudes modales du premier ordre.

Cette étude des ondes libres a conduit à l'encadrement du stage de DEA de Pierre Roux de Reilhac [108] au cours de l'été 2004 pour quantifier l'efficacité de la correction proposée, à la fois lors des simulations numériques et d'essais expérimentaux.

Dans un premier temps, on présente la théorie analytique développée au second ordre en houle oblique, avec les mêmes notations que pour la solution linéaire de l'annexe A. On aboutit à la prédiction de l'amplitude des ondes libres qu'on utilise dans une stratégie de suppression. L'application aux simulations et aux expériences physiques vient enfin compléter les résultats présentés par Pierre Roux de Reilhac [108].

# Chapitre III.1

## Solution analytique et prédiction

On se propose ici d'exposer les équations nécessaires à l'explication des ondes libres et permettant la prédiction de leurs amplitudes, ce qui permettra leur suppression. Le raisonnement est fait dans le domaine fréquentiel. On obtient finalement un système d'équations à chaque ordre de perturbation. Le premier ordre a déjà été présenté dans la partie II, section II.2. On le poursuit à l'ordre suivant, qui est suffisant pour expliquer et quantifier l'apparition des ondes libres.

### III.1.1 Position du problème

On considère le problème de la génération de houle dans un bassin tridimensionnel semi-infini dans sa direction principale et muni de murs latéraux parfaitement réfléchissants dans la direction transverse. Il s'agit de la continuation du développement de la solution au premier ordre donné en Annexe A, notamment du même bassin. Les solutions sont adimensionnées par la profondeur  $h$  et l'accélération de gravité  $g$ . Au second ordre, le potentiel  $\phi_2$  vérifie le système d'équations :

$$\Delta\phi_2 = 0 \quad \text{pour } (x,y,z) \in D \quad (\text{III.1.1})$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{III.1.2})$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = b \quad (\text{III.1.3})$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x} = \frac{\partial X_2}{\partial t} + \nabla_v X_1 \cdot \nabla_v \phi_1 - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{III.1.4})$$

$$E\phi_2 = -\frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{III.1.5})$$

$$+\text{condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \quad (\text{III.1.6})$$

L'élévation de surface libre  $\eta_2$  est obtenue *via* la condition de surface libre dynamique :

$$\eta_2 = -\frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{III.1.7})$$

On se place à nouveau en notation complexe. Les produits des grandeurs du premier ordre (termes de forçage dans les seconds membres du système d'équations précédent) vont conduire

à des potentiels second ordre constants dans le temps et d'autres oscillant de fréquence double, *i.e.*  $2\omega$ .

On s'intéresse seulement ici aux potentiels en  $2\omega$ . A partir de la solution au premier ordre, on peut calculer les termes dits de forçage dans les seconds membres des équations ci-dessus, termes ainsi nommés parce qu'ils dépendent du premier ordre. On reprend donc successivement chaque équation de conditions aux limites au second ordre et on calcule le terme de forçage correspondant. Pratiquement, un terme de la forme  $F.G$  en notation réelle donne un terme en  $2\omega$  de la forme  $\frac{1}{2}\underline{F.G}$ .

La méthode adoptée pour résoudre les différentes conditions aux limites, qui sont linéaires en  $\phi_2$ , est classique : elle consiste à décomposer linéairement le potentiel second ordre. Ici, on peut le décomposer en deux termes :

$$\phi_2 = \phi_2^{liée} + \phi_2^{libre}$$

de sorte que chacun pris séparément vérifie un jeu d'équations et fournit une solution interprétable physiquement et que la somme des deux vérifie bien le système d'équation complet. Le premier potentiel correspond aux ondes liées qui accompagnent le champ de vague généré au premier ordre et forment avec lui le champ de vague non linéaire souhaité au second ordre, le deuxième aux ondes libres qui se superposent à ce champ idéal et le perturbent.

### III.1.1.1 Ondes liées

Le premier potentiel,  $\phi_2^{liée}$  vérifie l'équation de Laplace (III.1.1) dans le domaine, les conditions de glissement sur le fond (III.1.2) et sur les murs latéraux (III.1.3). Il ne vérifie aucune condition sur le batteur<sup>1</sup> en  $x = 0$  et satisfait à la condition de surface libre combinée (III.1.5) pour le potentiel :

$$E\phi_2^{liée} = -\frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 \quad \text{en } z = 0$$

Après calcul du second membre de cette dernière, à partir des termes du premier ordre, on trouve que le potentiel  $\phi_2^{liée}$  est de la forme

$$\begin{aligned} \underline{\phi_2^{liée}} &= \frac{ia_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^+(z+1)} + e^{-i\alpha_{mnpq}^+(z+1)}}{e^{i\alpha_{mnpq}^+} + e^{-i\alpha_{mnpq}^+}} \\ &+ \frac{ia_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^-(z+1)} + e^{-i\alpha_{mnpq}^-(z+1)}}{e^{i\alpha_{mnpq}^-} + e^{-i\alpha_{mnpq}^-}} \end{aligned}$$

où les signes sommation sur les quatres indices  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , et  $q$  ont été omis pour plus de clarté, et avec

$$\begin{aligned} (\alpha_{mnpq}^+)^2 &= (k_{mn} + k_{pq})^2 - (\mu_n + \mu_q)^2 \\ (\alpha_{mnpq}^-)^2 &= (k_{mn} + k_{pq})^2 - (\mu_n - \mu_q)^2 \end{aligned}$$

On remarque les termes sommes et différences classiques au second ordre, intervenant toutefois en espace ici et non en temps comme dans le cas de la houle irrégulière. L'amplitude de ces

---

1. Celle-ci sera reprise par le potentiel libre.

modes sommes et différences s'obtient grâce à la condition de surface libre combinée :

$$\begin{aligned}\underline{a_{mnpq}^+} &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 + 2k_{mn}k_{pq} + (\alpha_{mnpq}^+)^2 - 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + i\alpha_{mnpq}^+ \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^+} - e^{-i\alpha_{mnpq}^+}}{e^{i\alpha_{mnpq}^+} + e^{-i\alpha_{mnpq}^+}}} \\ \underline{a_{mnpq}^-} &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 + 2k_{mn}k_{pq} + (\alpha_{mnpq}^-)^2 + 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + i\alpha_{mnpq}^- \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^-} - e^{-i\alpha_{mnpq}^-}}{e^{i\alpha_{mnpq}^-} + e^{-i\alpha_{mnpq}^-}}}\end{aligned}$$

Une observation attentive de la solution proposée par Li et Williams révèle une légère différence dans le dénominateur, probablement due à une erreur de frappe dans leur article. L'élévation liée est obtenue par la condition de surface libre dynamique (III.1.7) inhomogène (avec termes de forçage) :

$$\eta_2^{liée} = -\frac{\partial\phi_2^{liée}}{\partial t} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z\partial t} \quad \text{en } z = 0$$

qui donne

$$\underline{\eta_2^{liée}}(x,y) = \underline{\tilde{a}_{mnpq}^+} e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{\tilde{a}_{mnpq}^-} e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \quad (\text{III.1.8})$$

avec

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{a}_{mnpq}^+} &= \underline{a_{mnpq}^+} + \frac{a_{mn}a_{pq}}{8\omega^2} (3\omega^4 + k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) \\ \underline{\tilde{a}_{mnpq}^-} &= \underline{a_{mnpq}^-} + \frac{a_{mn}a_{pq}}{8\omega^2} (3\omega^4 + k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q)\end{aligned}$$

Les nombres d'ondes dans la direction  $x$  nous renseignent sur la nature des modes, évanescents ou progressifs. Ainsi, le champ de vague lié est constitué de trois sortes de modes

**purement progressifs** : ce sont les modes qu'on observe à grande distance du batteur et correspondent aux indices  $m = p = 0$  et  $n \leq N$ ,  $q \leq N$  ;

**purement évanescents** : ils sont issus de l'interaction entre deux modes évanescents du premier ordre et possèdent une longueur d'atténuation plus faible que ces derniers

$$\widehat{\delta_{mnpq}} = \frac{1}{k_{mn} + k_{pq}} \leq \frac{1}{k_{mn}} \text{ ou } \frac{1}{k_{pq}}$$

Deux types d'indice correspondent à ces modes : ( $m = p = 0$  et  $n > N$ ,  $q > N$ ) ou ( $m \geq 1$  et  $p \geq 1$ ) ;

**évano-progressifs** : ils sont issus de l'interaction d'un mode progressif ( $m,n$ ) et d'un mode évanescent ( $p,q$ ). La longueur d'atténuation est celle du mode premier ordre

$$\widehat{\delta_{mnpq}} = \frac{1}{\text{Re}[k_{mn} + k_{pq}]} = \frac{1}{k_{pq}}$$

Les indices correspondants sont ( $m = 0$  et  $n \leq N$  et  $p = 0$  et  $q > N$ ) ou ( $m = 0$  et  $n \leq N$  et  $p \geq 1$ ) et inversement.

La longueur caractéristique d'atténuation des modes évanescents du second ordre est donc toujours inférieure ou égales à toutes celles des modes évanescents du premier ordre, y compris pour les modes évano-progressifs. Les modes purement progressifs ne satisfont pas à la relation de dispersion

$$(2\omega)^2 \neq i\alpha_{mnpq}^\pm \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^\pm} - e^{-i\alpha_{mnpq}^\pm}}{e^{i\alpha_{mnpq}^\pm} + e^{-i\alpha_{mnpq}^\pm}}$$

Ils se propagent avec la vitesse de phase des modes premiers ordres, on parle de modes liés. Avant de passer à la résolution pour le potentiel libre, on donne un exemple de champ de vague lié pour une fréquence  $f = 0.4$ , une direction de propagation de 30 degrés obtenue à l'aide de la méthode de Dalrymple. Sur la figure III.1.1 sont présentés les champs de vague liés correspondant aux modes somme à gauche, et différence à droite. Le champ de vague premier ordre correspondant est donné sur la figure II.2.1 à droite. Le batteur est situé en haut à gauche et le trait indique la distance à laquelle a été imposée la houle cible. Les modes somme

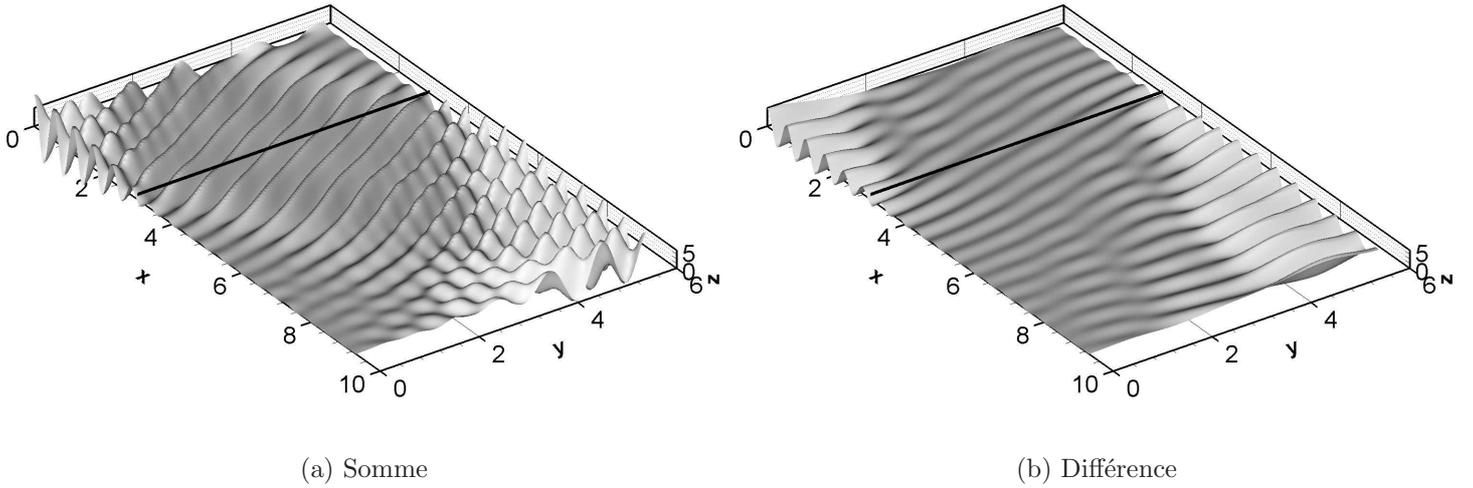


FIG. III.1.1 – *Champ de vague lié (loi de commande Dalrymple pour  $f = 0.4$  et  $\theta = 30$  degrés)*

contiennent la correction classique de Stokes, de longueur d'onde moitié qui accompagne le champ de vague au premier ordre. On retrouve donc la forme caractéristique de la zone utile pour la méthode de Dalrymple. Les modes différence interviennent surtout le long des murs  $y = 0$  et  $y = 6$  aux endroits où a lieu la réflexion du champ linéaire.

### III.1.1.2 Ondes libres

Le deuxième potentiel  $\phi_2^{libre}$  satisfait l'équation de Laplace (III.1.1) dans le domaine, les conditions de glissement sur le fond (III.1.2) et sur les murs latéraux (III.1.3), une condition de surface libre combinée homogène<sup>2</sup> cette fois

$$E\phi_2^{libre} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

et enfin la condition de glissement sur le batteur (III.1.4) réécrite en tenant compte du potentiel lié précédent :

$$\frac{\partial \phi_2^{libre}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_2^{lié}}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial t} + \nabla_v X_1 \cdot \nabla_v \phi_1 - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0$$

D'après la condition de surface libre combinée homogène, on sait que le potentiel libre se comporte comme celui du premier ordre mais avec une fréquence double, soit :

$$\phi_2^{libre}(x,y,z) = \frac{i a_{mn}^{libre}}{2\omega} e^{-\gamma_{mn}x} \cos(\mu_n y) \frac{e^{i\beta_m(z+1)} + e^{-i\beta_m(z+1)}}{e^{i\beta_m} + e^{-i\beta_m}}$$

2. Le second membre est déjà traité par le potentiel lié de sorte que le potentiel total vérifie bien la condition inhomogène (III.1.5).

avec  $(\gamma_{mn})^2 = \beta_m^2 + \mu_n^2$  et  $\beta_m$  solution de la relation de dispersion généralisée

$$4\omega^2 = i\beta_m \frac{e^{i\beta_m} - e^{-i\beta_m}}{e^{i\beta_m} + e^{-i\beta_m}}$$

Pour  $m = 0$ , on a  $\beta_0 = ik_2$  avec  $k_2$  solution de la relation de dispersion classique  $4\omega^2 = k_2 \tanh k_2$ . La même décomposition en modes évanescents et progressifs s'applique, avec notamment des modes progressifs pour  $m = 0$  et  $n \leq N_2 = E \left[ \frac{k_2 L_y}{\pi} \right]$ .

L'amplitude des modes est obtenue grâce à la condition de glissement (III.1.4) sur le batteur au second ordre.

$$\begin{aligned} \underline{a_{mn}^{libre}} &= \frac{\beta_m}{\gamma_{mn}} \frac{(e^{i\beta_m} + e^{-i\beta_m})^2}{2\beta_m + \frac{e^{2i\beta_m} - e^{-2i\beta_m}}{2i}} \\ &\quad \left\{ \sum_{q=0}^{n/2} (k_{m'n-q} + k_{pq}) \frac{a_{m'n-q} a_{pq}}{2} \left[ \frac{6\omega^4 + 2k_{m'n-q} k_{pq} + (\alpha_{m'n-q}^+)^2 - 2\mu_{n-q} \mu_q}{(\alpha_{m'n-q}^+)^2 - \beta_m^2} \right. \right. \\ &\quad + \frac{k_{m'n-q} k_{pq} + \mu_{n-q} \mu_q + \alpha_{m'} \alpha_p}{2\alpha_{m'} \alpha_p} \frac{4\omega^4 + (\alpha_{m'} - \alpha_p)^2}{(\alpha_{m'} + \alpha_p)^2 - \beta_m^2} \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_{m'} \alpha_p - k_{m'n-q} k_{pq} - \mu_{n-q} \mu_q}{2\alpha_{m'} \alpha_p} \frac{4\omega^4 + (\alpha_{m'} + \alpha_p)^2}{(\alpha_{m'} - \alpha_p)^2 - \beta_m^2} \right] - A_{m'p}^{mn} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon_n} \sum_{q=0}^{+\infty} (k_{m'n+q} + k_{pq}) \frac{a_{m'n+q} a_{pq}}{2} \left[ \frac{6\omega^4 + 2k_{m'n+q} k_{pq} + (\alpha_{m'n+q}^-)^2 + 2\mu_{n+q} \mu_q}{(\alpha_{m'n+q}^-)^2 - \beta_m^2} \right. \\ &\quad + \frac{k_{m'n+q} k_{pq} - \mu_{n+q} \mu_q + \alpha_{m'} \alpha_p}{2\alpha_{m'} \alpha_p} \frac{4\omega^4 + (\alpha_{m'} - \alpha_p)^2}{(\alpha_{m'} + \alpha_p)^2 - \beta_m^2} \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_{m'} \alpha_p - k_{m'n+q} k_{pq} + \mu_{n+q} \mu_q}{2\alpha_{m'} \alpha_p} \frac{4\omega^4 + (\alpha_{m'} + \alpha_p)^2}{(\alpha_{m'} - \alpha_p)^2 - \beta_m^2} \right] \right\} \quad (III.1.9) \end{aligned}$$

avec  $A_{m'p}^{mn}$  valant 0 si  $n$  est impair et la moitié du terme général de la première série avec  $q = n/2$  si  $n$  est pair ( $\epsilon_n = 1 + \delta_{on} = 2$  si  $n = 0$  et 1 sinon). La sommation sur  $q$  a été explicitée et celles sur  $m'$  et  $p$  omises pour plus de clarté. Une attention particulière a été apportée lors des calculs des amplitudes pour faire apparaître de façon simple l'influence de la loi de commande au premier ordre. Ainsi, celle-ci intervient uniquement au travers des amplitudes  $\underline{a_{mn}}$  des modes du premier ordre, les autres variables intervenant dans (III.1.9) étant simplement des nombres d'ondes. Grâce à cette manipulation formelle, la formule (III.1.9) est applicable directement à n'importe quelle loi de commande une fois que les amplitudes des modes premier ordre sont connus, sans calcul supplémentaire.

L'élévation des ondes libres est obtenue grâce à la condition de surface libre dynamique, homogène cette fois

$$\eta_2^{libre} = -\frac{\partial \phi_2^{libre}}{\partial t} \quad \text{en } z = 0$$

qui donne

$$\underline{\eta_2^{libre}} = \underline{a_{mn}^{libre}} \cos(\mu_n y) e^{-\gamma_{mn} x} \quad (III.1.10)$$

Cette solution analytique permet de tracer le champ de vague libre établi sur la surface du bassin de houle. Comme on l'a déjà fait pour le premier ordre et les ondes liées (figures II.2.1 et III.1.1), la figure III.1.2 donne une vue 3D de l'élévation libre. On observe un champ de vague totalement

différent du champ linéaire ou lié. La profondeur peut être considérée comme infinie pour le champ linéaire ( $\lambda/h = 1$ ) d'où la longueur d'onde libre qui correspond approximativement à un quart de celle du premier ordre. Le champ libre présente une direction de propagation principale nulle sur l'ensemble du bassin ainsi qu'une modulation transverse importante. Ce

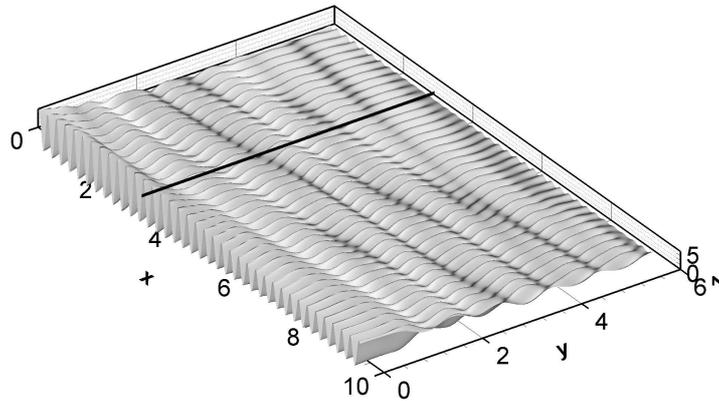


FIG. III.1.2 – *Champ de vague libre (loi de commande Dalrymple pour  $f = 0.4$  et  $\theta = 30$  degrés)*

comportement du champ libre a été observé sur une large gamme de fréquence, modulation transverse et amplitude près du mur  $y = 0$  dépendant de la fréquence. L'influence de la direction de propagation sera étudiée plus loin.

Cette solution en trois dimensions a été validée en plusieurs étapes. La plus simple consiste à réécrire les formules pour une houle droite (bidimensionnelle) et à les comparer aux solutions présentes dans la littérature. La comparaison à la solution de Hudspeth et Sulisz [64] s'est ainsi révélée concluante. La solution tridimensionnelle a elle été comparée partiellement aux expressions de Li et Williams [81], la découverte d'une erreur dans les dénominateurs des formules (33) à (36) de leur article ayant empêché une comparaison complète. Enfin, la comparaison à la solution sans mur latéral en houle irrégulière de Schäffer et Steenberg [114] est plus délicate et longue et n'a pas été entreprise. En revanche, les tests numériques utilisant des simulations dans le domaine temporel ont constitué une validation probante quoique indirecte en révélant un bon fonctionnement de la suppression des ondes libres.

### III.1.2 Investigation du champ d'onde libre

La solution analytique obtenue précédemment permet d'investiguer le comportement du champ d'onde libre lorsque varie par exemple la longueur d'onde ou la loi de commande utilisée. On présente ici l'influence de quelques uns des paramètres de génération [12].

On a cherché tout d'abord à déterminer l'importance des ondes libres dans le bassin de houle, en fonction de la longueur d'onde. On s'est placé pour cela en deux dimensions<sup>3</sup> pour éviter l'influence d'autres paramètres, la direction de propagation  $\theta$  par exemple. La figure III.1.3 donne l'évolution du taux d'onde libre en fonction de la longueur d'onde (à gauche) et de la fréquence (à droite) pour une houle bidimensionnelle dans le bassin de houle de l'ECN. Le

---

3. On précise bien sûr que les solutions 2D déjà présentes dans la littérature auraient pu nous permettre une telle étude. L'intérêt de la solution 3D développée ici se fera sentir plutôt lorsqu'on étudiera l'influence de la direction de propagation ou de la loi de commande du batteur.

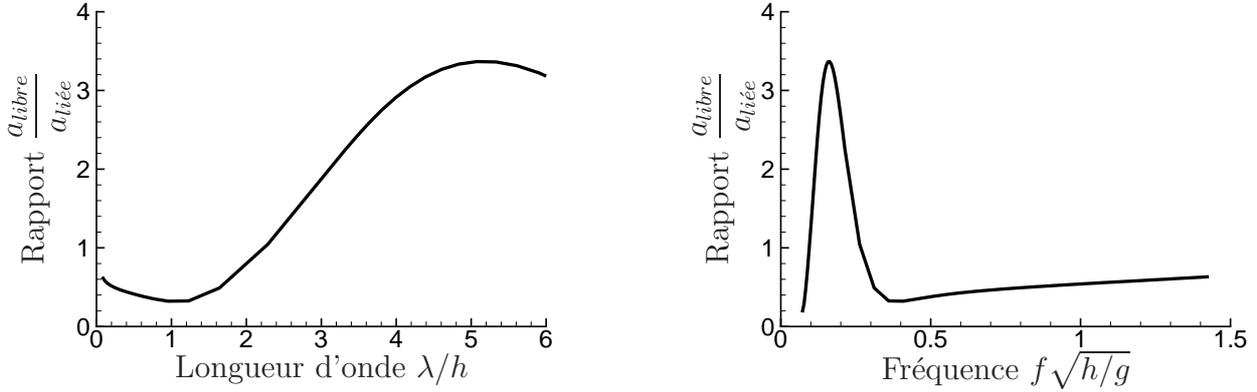


FIG. III.1.3 – Évolution du taux d'onde libre en 2D dans le bassin de houle de l'ECN

taux d'onde libre est calculé par rapport de l'amplitude de l'onde libre sur celle de l'onde liée de Stokes en profondeur finie. Ces deux amplitudes s'obtiennent facilement grâce aux expressions 3D précédentes en prenant  $\theta = 0$  et en ne considérant que les modes  $(m,n) = (0,0)$  dans l'expression (III.1.10) de l'onde libre et les modes somme et différence  $(m,n,p,q) = (0,0,0,0)$  dans l'expression (III.1.8) de l'onde liée. On suppose que les modes évanescents sont négligeables loin du batteur, ce qui est le cas en 2D comme on a pu le voir en A.2 et III.1.1.1. On constate que l'onde libre est toujours d'amplitude supérieure à 0.4 fois celle de l'onde lié. Sur la figure de gauche, entre 0 et 2 de longueur d'onde (0 et 10 m), le taux varie peu autour de 0.5; il augmente assez vite pour les longueurs d'ondes supérieures à 2 ( $\lambda > 10$  m), jusqu'à un maximum de trois obtenu pour  $\lambda/h = 5$  (soit 25 m).

Pour les ondes de grande longueur d'onde, la géométrie verticale du batteur est moins bien adaptée au profil vertical de vitesse de la houle, comme on peut le voir sur la figure III.1.4 à gauche. La première conséquence est l'amplitude élevée des modes évanescents du premier ordre, dont l'amplitude est reportée, pour les cinq premiers d'entre eux, sur la figure III.1.4 à droite. Pour les faibles longueurs d'onde  $\lambda/h < 1$ , plusieurs modes évanescents ont une amplitude importante. Pour  $\lambda/h \simeq 1$ . Pour  $\lambda/h > 1$  enfin, les deux premiers modes évanescents ont une grande amplitude. Ces modes évanescents contribuent à l'amplitude des ondes libres qui est ainsi plus importante pour les grandes longueurs d'onde. La décroissance observée sur la figure III.1.3 de droite pour les fréquences comprises entre 0.1 et 0.2 correspond à des longueurs d'onde trop longues pour le bassin.

Une fois cette influence de la fréquence commentée, on s'intéresse maintenant aux effets 3D qui sont plus originaux. On commence par le comportement lié à la loi de commande du batteur. On confronte le principe du serpent à la méthode de Dalrymple pour une fréquence donnée  $f = 0.4$  et une direction de propagation  $\theta = 30$  degrés (houle cible imposée à  $X_d = 3$  pour la méthode de Dalrymple). Comme pour l'influence de la fréquence, on ne fait varier qu'un seul paramètre pour simplifier l'interprétation. La fréquence  $f = 0.4$  a été choisie parce qu'elle correspond au minimum d'onde libre en 2D. La figure III.1.5 présente à nouveau le rapport des amplitudes des ondes libre et liée, mais cette fois sur des cartes de la surface du bassin. Le taux d'onde libre utilisé ici s'écrit comme le rapport

$$\frac{|\eta_2^{libre}|}{a_{Stokes}^{2D}}$$

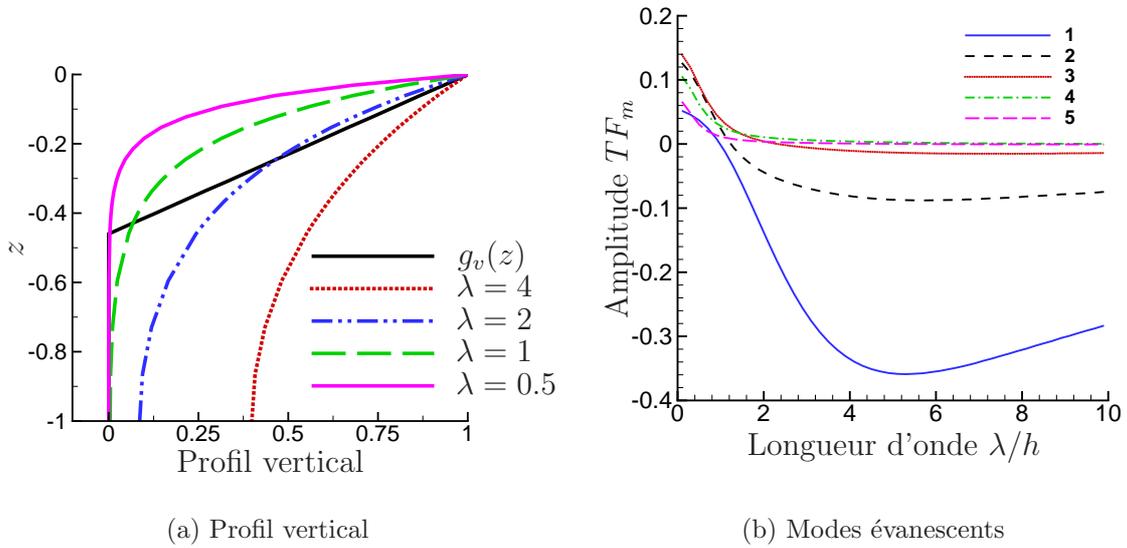


FIG. III.1.4 –

où  $|\eta_2^{libre}|$  est le module de l'élévation second ordre libre et  $a_{Stokes}^{2D}$  l'amplitude de Stokes en 2D, prise uniforme sur toute la surface. On peut ainsi visualiser simplement le champ d'onde libre sur la surface du bassin. Deux cartes sont proposées ici, à gauche pour la loi de commande de type serpent, à droite pour la méthode de Dalrymple, les flèches indiquant la direction de propagation de la houle. La figure III.1.5 nous indique tout d'abord que le taux d'onde libre

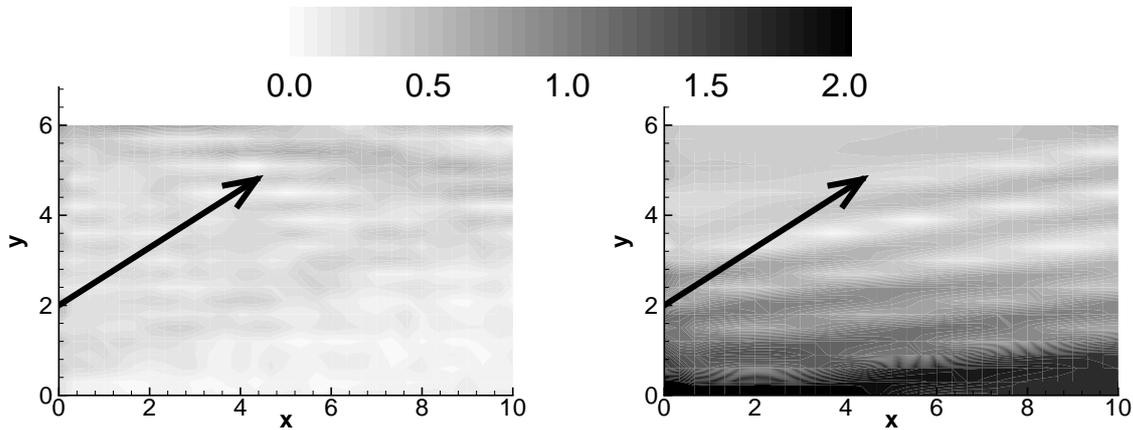


FIG. III.1.5 – Amplitude des ondes libres (loi de commande serpent à gauche et Dalrymple à droite, pour  $f = 0.4$  et  $\theta = 30$  degrés)

généralisé est globalement plus faible pour le principe du serpent. Pour cette loi de commande, le taux d'onde libre dans la zone utile triangulaire près du batteur, est plus faible que sa valeur en 2D de 0.4. Pour la méthode de Dalrymple, on observe un taux d'onde libre plus élevé que pour le principe du serpent, ce qui justifie la suppression des ondes libres mise en place plus loin (voir III.1.3). L'avantage à utiliser la méthode de Dalrymple, qui permet d'agrandir la zone utile au premier ordre et notamment pour des directions élevées comme celle utilisée pour laquelle la

méthode du serpent est inefficace, se paie au second ordre par un fort taux d'onde libre. On remarque notamment que près du mur  $y = 0$  où a lieu la réflexion "utile", le taux d'onde libre atteint des valeurs élevées.

Ce phénomène dépend évidemment de l'angle de propagation sur lequel on se concentre à présent. Toujours pour la fréquence  $f = 0.4$  et la méthode de Dalrymple ( $X_d = 3$ ), la figure III.1.6 montre l'influence de la direction sur le taux d'onde libre dans le bassin. Les flèches en gras indiquent la direction de propagation, de 0, 10, 20 et 30 degrés. On peut voir que le taux d'onde libre n'évolue pas monotonément en fonction de la direction, avec par exemple pour  $\theta = 10$  degrés un taux moyen sur la surface du bassin plus faible qu'en houle droite. Puis lorsque la direction augmente, le taux moyen augmente lui aussi. On remarque également que le taux d'onde libre n'est pas homogène sur la surface et les cartes de la figure III.1.6 présentent des zones de faible amplitude libre, sur le mur  $y = 6$  ou au centre, et une zone, de taille importante, où le taux est élevé, près du mur  $y = 0$ . L'existence de cette zone est due au mouvement batteur de plus forte amplitude près de ce mur nécessaire à la génération de l'onde attendue et de l'onde de direction opposée qui en se réfléchissant ensuite sur le mur  $y = 0$  agrandit la zone utile. Ce mouvement particulier du batteur commandé par la méthode de Dalrymple explique la différence avec le principe du serpent observée plus haut, ce dernier ayant une amplitude constante sur toute la largeur du bassin.

### III.1.3 Stratégie de suppression des ondes libres

Une fois obtenue la décomposition sur les modes propres du bassin des ondes libres, il est aisé de proposer une stratégie de correction de la loi de mouvement du batteur en vue de la suppression des-dites ondes libres.

La stratégie adoptée consiste à ajouter au mouvement batteur une composante du second ordre générant un train d'onde progressif de même amplitude que les ondes libres mais en opposition de phase.

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_2(y,t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \underline{TF}(2\omega) \left( \frac{a_{oo}^{libre}}{a_{oo}^{libre}} + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{a_{on}^{libre}}{a_{on}^{libre}} \cos \theta_n e^{-ik_2 y \sin \theta_n} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{a_{on}^{libre}}{a_{on}^{libre}} \cos \theta_n e^{+ik_2 y \sin \theta_n} \right) e^{i(2\omega t + \pi)} \right] \end{aligned}$$

Cette stratégie est adaptée tant que le champ libre évanescent est limité à proximité du batteur et ne s'étend pas dans le bassin. Une telle situation est à envisager par exemple si le premier mode évanescent du second ordre, à savoir le mode  $m = 0$  et  $n = N_2 + 1$  possède une grande longueur d'atténuation et une amplitude non négligeable par rapport aux ondes liées. Si la fréquence  $2f$  est proche d'une fréquence naturelle transverse du bassin en restant inférieure, on se trouve dans le cas de la grande longueur d'atténuation du mode évanescent cité.

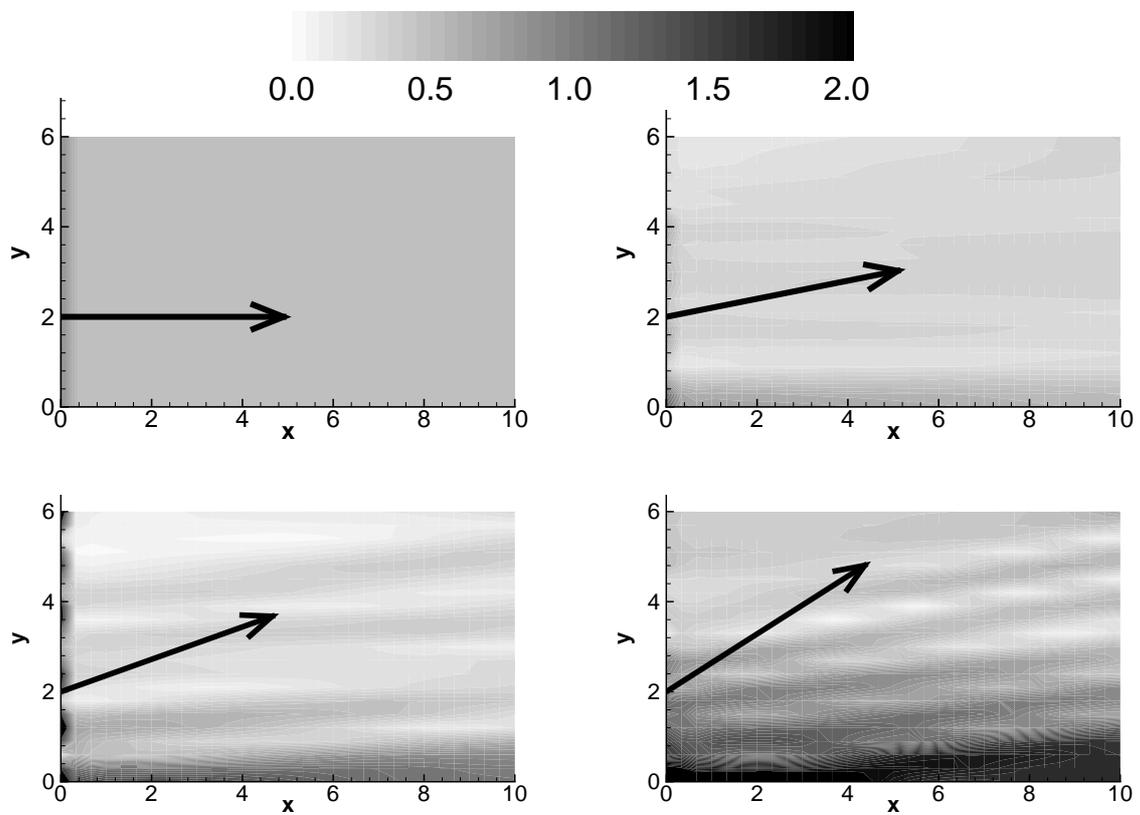


FIG. III.1.6 – Influence de la direction sur l'amplitude des ondes libres (loi de commande D'Alrymple pour  $f = 0.4$  et  $\theta = 0, 10, 20$  et  $30$  degrés)

## Chapitre III.2

# Applications aux bassins et suppression

On introduit ici la correction proposée ci-dessus dans les simulations numériques et les essais expérimentaux. L'objectif est de quantifier l'efficacité de la suppression en analysant des mesures de houles régulières générées avec et sans correction. L'analyse du champ de vague au second ordre est effectuée en deux dimensions avec la méthode de Mansard et Funke, adaptée au second ordre  $2\omega$  en houle régulière (*e.g.* Boudet et Cointe [18], voir aussi l'analyse de la réflexion sur la plage expérimentale dans la partie II.1.4.1 page 74).

Ici, on considère la superposition d'une onde liée incidente et d'une onde libre incidente<sup>1</sup> :

$$\underline{a}_1 e^{-2ik' x_{1p}} + \underline{a}_2 e^{-ik_2 x_{1p}} = \underline{b}'_p \quad \text{pour } p = 1 \text{ à } P \quad (\text{III.2.1})$$

L'onde liée se propage avec un nombre d'onde  $k'$  éventuellement corrigé des effets d'ordre trois. Le nombre d'onde de l'onde libre n'est pas modifié par le troisième ordre<sup>2</sup>. La fenêtre temporelle d'analyse est définie par les instants

$$t_1 = \frac{x}{v_g^{(2)}} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{2L - x}{v_g} \quad (\text{III.2.2})$$

avec  $v_g$  et  $v_g^{(2)}$  les vitesses de groupe de l'onde linéaire et de l'onde libre à  $2\omega$ . La durée  $t_2 - t_1$  comprend toujours au moins 15 périodes d'onde second ordre pour les longueurs d'onde testées. Lors des essais expérimentaux, on tient compte d'effets d'amplitude finie sur la vitesse de phase en employant la même technique itérative que pour l'analyse de la réflexion par la plage absorbante (voir la section II.1.4).

Enfin, en trois dimensions, la méthode utilisée est expliquée dans la section III.2.1.2 dédiée.

### III.2.1 Bassin numérique

Dans un premier temps, la stratégie de suppression des ondes libres a été appliquée aux simulations instationnaires au second ordre avec le code SWEET. Cette étude a été entreprise en 2003 et lors du stage de DEA de Pierre Roux de Reilhac [108]. Les premières houles générées

---

1. Comme lors des expériences détaillées en II.1.4.1, il existe également une onde liée réfléchie (d'amplitude négligeable car la plage fonctionne correctement) et une onde libre réfléchie dans le bassin. Compte tenu des vitesses de propagations, ces deux ondes arrivent après l'intervalle de temps d'étude  $[t_1 ; t_2]$  donné en (III.2.2).

2. De même que le second ordre n'influe pas sur la vitesse de phase de l'onde linéaire, ici à un ordre de plus, le troisième ordre n'influe pas sur celle de l'onde libre. On peut s'attendre à ce que le quatrième ordre intervienne.

au second ordre avec le code SWEET mettaient en évidence de façon flagrante le phénomène des ondes libres. Sur la figure III.2.1, on donne un exemple de vue de la surface au second ordre seul du bassin pour la génération d'une houle de longueur d'onde 2, de direction 20 degrés, 10 périodes après le démarrage du batteur. On remarque deux front d'onde à  $x = 7$  et  $x = 3.5$ . Le premier front d'onde correspond au second ordre lié et on devine entre les deux fronts un houle établie de longueur d'onde  $\lambda/2$ . Le deuxième front correspond alors aux ondes libres qui se déplacent deux fois moins vite environ. On peut remarquer que les amplitudes des ondes libres et liées sont tout à fait comparables.

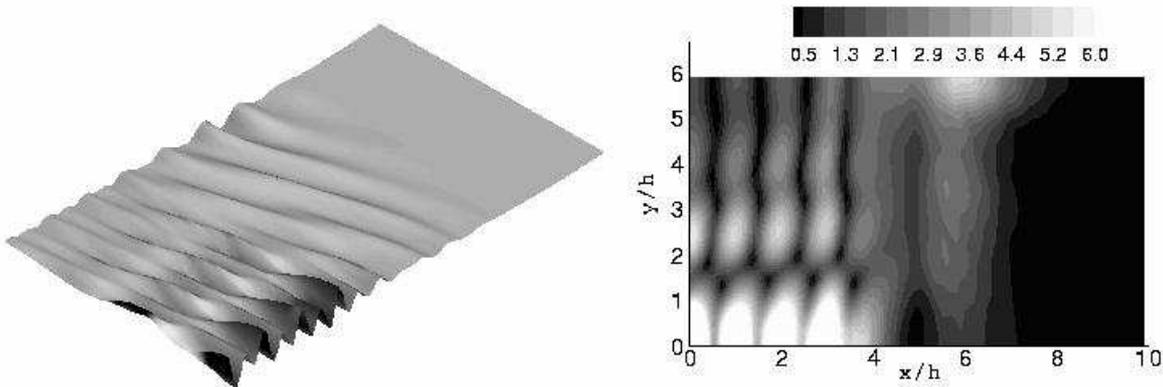


FIG. III.2.1 – *Champ de vague au second ordre après 10 périodes (Dalrymple,  $f = 0.28$  et  $\theta = 20$  degrés)*

### III.2.1.1 En deux dimensions

#### Sans correction

En deux dimensions, une étude préliminaire des simulations au second ordre a été menée pour investiguer la convergence de la solution numérique en fonction du nombre de modes utilisés. Sans appliquer de correction contre les ondes libres, il apparaît (D. Le Touzé [79] et Roux [108]) que le front d'onde libre nécessite un nombre élevé de modes pour être correctement résolu. Sa longueur d'onde approximativement quatre fois plus faible que celle de l'onde linéaire explique cela. Il s'agit d'une autre raison qui pousse à supprimer les ondes libres : le champ d'onde second ordre (lié seul) devient plus simple à résoudre que lorsqu'il contient une composante libre de courte longueur d'onde. En trois dimensions, on s'attend aux mêmes conclusions. La figure III.2.2 donne un exemple de l'évolution temporelle des amplitudes libre et liée après séparation par la méthode d'analyse décrite précédemment. Les amplitudes sont normalisées par l'amplitude de la correction de Stokes au deuxième ordre. La houle générée a une fréquence 0.55 Hz et la durée de la fenêtre glissante est de 11 périodes. Les trois traits verticaux correspondent respectivement à l'arrivée sur les sondes du front d'onde linéaire (pointillés), du front d'onde libre et du front linéaire réfléchi par la plage. L'onde liée arrive aux sondes en même temps que le front linéaire (pointillés). Les cercles identifient la fenêtre temporelle délimitée par les instants  $t_1$  et  $t_2$  donnés en (III.2.2) et les traits horizontaux correspondent aux valeurs théoriques en régime établi : en tireté l'amplitude de l'onde liée (1) et en trait plein celle de l'onde libre (0.30 pour cette fréquence). Après passage des fronts d'onde, les amplitudes libre et lié simulées se stabilisent bien aux valeurs théoriques.

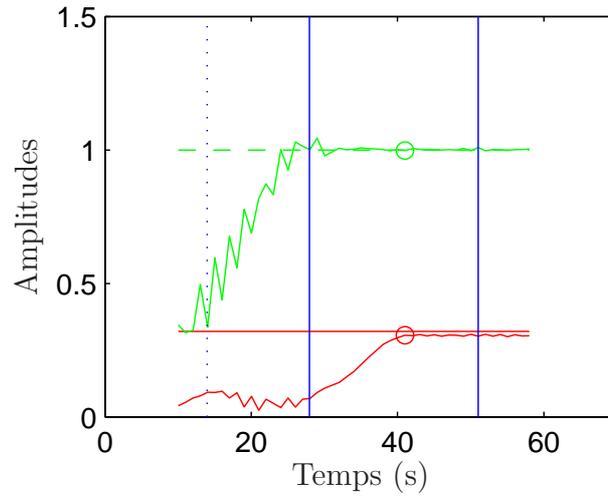


FIG. III.2.2 – Évolution temporelle des amplitudes normalisées libre (—) et liée (—), sans correction

La figure III.2.3 compare le rapport de l'amplitude libre sur l'amplitude liée (taux d'onde libre), théorique en régime permanent d'une part et mesurée après le passage des fronts d'onde dans les simulations instationnaires d'autre part. Sur l'ensemble de la gamme testée, le modèle numérique du bassin de houle au second ordre reproduit bien le fonctionnement non linéaire de la paroi mobile en  $x = 0$ .

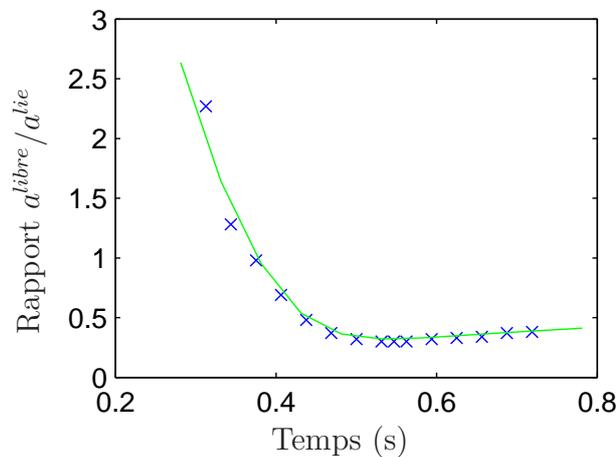


FIG. III.2.3 – Amplitude libre normalisée ( $\times$  : simulation numérique et théorique —), sans correction

### Avec correction

Les mêmes houles que précédemment ont été générées à nouveau en utilisant cette fois la correction  $2\omega$  du mouvement batteur pour supprimer les ondes libres. La figure III.2.4 présente l'évolution temporelle des amplitudes libre et liée estimées pour la même houle que la figure III.2.2. On constate qu'après le passage du front d'onde libre, l'amplitude estimée de cette

dernière est très faible par rapport à la valeur théorique en régime établi. L'amplitude liée, elle, n'est pas modifiée par la correction  $2\omega$ .

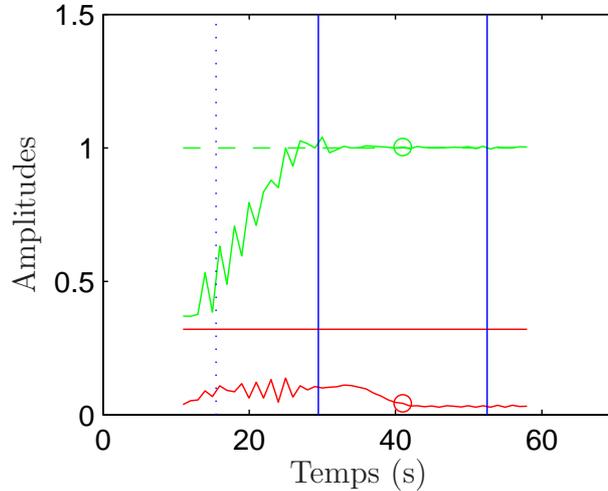


FIG. III.2.4 – Évolution temporelle des amplitudes normalisées libre (—) et liée (—), avec correction

Sur la figure III.2.5, sont reportés les taux d'onde libre mesurés avec correction. Grâce au mouvement correctif en  $2\omega$ , l'amplitude des ondes libres est divisée par un facteur 20 en moyenne sur la gamme de fréquence testée. En deux dimensions, l'efficacité de la correction est validée par ce test numérique.

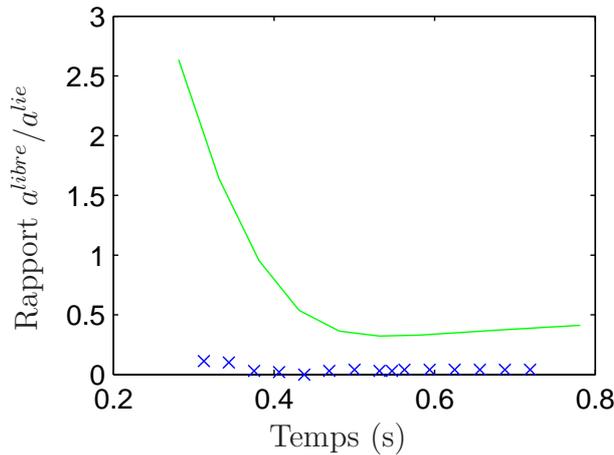


FIG. III.2.5 – Amplitude libre normalisée ( $\times$  : simulation numérique et théorique —), avec correction

### III.2.1.2 En trois dimensions

La figure III.2.6 compare les vues du champ de vagues second ordre, avec et sans suppression des ondes libres, pour une houle oblique de fréquence 0.55 Hz et de direction 30 degrés. Les figures sont tracées après 29 périodes de génération : le front d'onde linéaire arrive au niveau de

la plage. On distingue sur la vue de gauche les deux fronts d'onde, lié au niveau de la plage et libre à mi-bassin. Sur la figure de droite, le champ d'onde libre a bien été supprimé. Seul reste visible à  $x = 20$  m du batteur un front d'onde libre car la méthode de prédiction correction est basée sur le régime stationnaire.

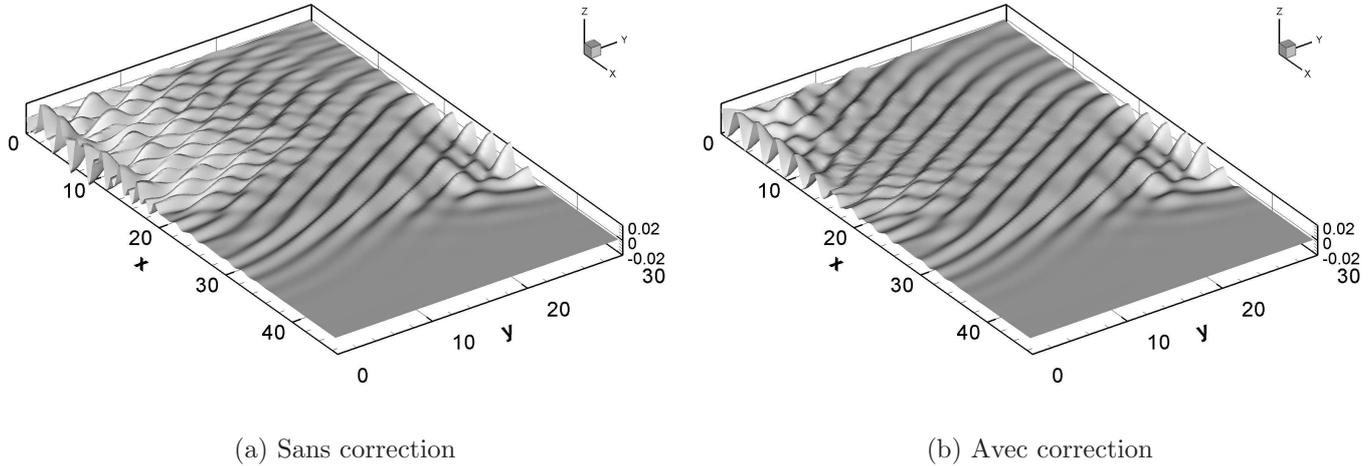


FIG. III.2.6 – Champs de vagues au second ordre après 29 périodes (Dalrymple,  $f = 0.55$  Hz et  $\theta = 30$  degrés)

En houle oblique, il faut adapter la méthode de séparation des ondes libres et liées utilisées en 2D. Pour cela, on se place dans le cas d'une houle oblique générée avec la méthode de Dalrymple. En linéaire dans un premier temps, dans la zone utile, la houle est mono-directionnelle. En anticipant sur les expériences présentées plus loin, on veut conserver un réseau de sondes dans l'axe principal (le même qu'en deux dimensions) pour éviter une manipulation. On fait une hypothèse forte sur la direction de propagation de l'onde linéaire. On ne cherche pas à la déterminer mais on la suppose connue et unique.

Dans le cas d'une houle incidente seule, pour simplifier, la décomposition linéaire proposée est de la forme

$$\underline{a}_i e^{-i k (x_{1p} \cos \theta + y_{1p} \sin \theta)} = \underline{b}_p \quad \text{pour } p = 1 \text{ à } P \quad (\text{III.2.3})$$

où l'amplitude  $\underline{a}_i$  est l'inconnue. Cette approche fonctionne correctement si les sondes sont placées dans une zone où la direction de propagation est uniforme (pas de réflexion) : on l'applique à la loi de commande Dalrymple en plaçant les sondes dans la zone utile. En linéaire on décompose le champ de vagues en une onde incidente de direction  $\theta$ , et une onde réfléchie de direction  $\pi - \theta$ , ou  $\theta + \pi$ . Au second ordre, on superpose l'onde incidente liée et l'onde libre parasite. On donne à l'onde liée la même direction  $\theta$  que l'onde premier ordre. On a vu que l'onde libre a tendance à se propager dans l'axe principal du bassin ( $\theta_l = 0$ ) et que son amplitude est inhomogène sur la surface du bassin. On distinguera pour l'analyse de la suppression deux zones distinctes :

- au centre du bassin, dans la zone utile, on s'attend à trouver une onde liée proche de la correction de Stokes 2D associée à la houle linéaire de direction  $\theta$ . L'onde libre dans cette zone sera de faible amplitude.
- près du bord du bassin où se produit la réflexion contrôlée, on s'attend à trouver au contraire une onde libre de grande amplitude et de direction  $\theta_l = 0$ . En raison des

réflexions, l'onde liée n'a pas de direction particulière.

On place donc un groupe de sondes dans chacune des zones et on sépare ondes libres et liées par la méthode d'analyse glissante. Les résultats sont présentés sur la figure III.2.7 pour une houle régulière oblique de fréquence 0.55 Hz et de direction 30 degrés. En haut, figurent les amplitudes évaluées sans correction, en bas avec la correction contre les ondes libres. À gauche, les courbes concernent les sondes au centre du bassin dans la zone utile, à droite un deuxième groupe situé à deux mètres du mur latéral (une demie longueur d'onde). Les traits horizontaux donnent les amplitudes théoriques en régime permanent bi-dimensionnel.

L'onde liée au centre du bassin correspond bien à celle d'une houle uni-directionnelle. Au bord, l'analyse effectuée fournit une amplitude inférieure à l'amplitude en deux dimensions : une onde stationnaire due à la réflexion est présente au premier ordre et l'onde liée associée n'est pas mono-directionnelle comme on l'a supposé dans l'analyse. On observe bien que les amplitudes liées sont indépendantes de la correction contre les ondes libres.

Sur les deux graphes du haut, on remarque que conformément aux observations de la section III.1.2, au centre l'amplitude de l'onde libre est plus faible qu'en 2D. De même, au bord l'amplitude est plus forte et plus élevée que l'onde liée évaluée. Avec la suppression, sur les courbes du bas cette fois, on constate que l'amplitude libre a fortement diminué pour atteindre un taux acceptable moins de 5 % au centre et 20 % au bord.

## III.2.2 Bassin expérimental

Deux campagnes d'essais 2003 et 2004 ont été menées pour valider la technique de suppression en houle droite et oblique. Les mesures fines d'onde du second ordre ont nécessité une grande rigueur de mise en place et ont mis en évidence les limitations de la chaîne d'acquisition mais aussi du générateur de houle. Un programme a été écrit qui permet de préparer les fichiers batteurs pour une houle régulière sans correction, avec correction ainsi que la correction seule (mouvement  $2\omega$ ). Pour la houle oblique, le programme calcule ces mouvements pour les deux lois de commande serpent et Dalrymple.

En 2003, une première série de manipulations a été réalisée en deux dimensions. Quatre longueurs d'onde ont été étudiées, de 15, 11, 5 et 3 m. Les résultats de la séparation ondes liées / ondes libres sont reportés sur la figure III.2.8. On peut constater qu'à grande longueur d'onde, la correction est efficace ; elle réduit d'un facteur huit en moyenne l'amplitude des ondes libres parasites. Pour 11 m de longueur d'onde, quatre essais d'amplitude croissante (5, 10, 20 et 30 cm) montrent que la correction donne de meilleurs résultats à plus grande amplitude *i.e.* le taux d'onde libre avec correction est plus faible. L'amplitude de l'onde liée étant plus proche de l'amplitude théorique à plus grande amplitude, on peut vraisemblablement penser que c'est la précision (mesure et analyse) qui s'améliore dans ce cas. Au cours de cette campagne, le mode d'emploi des sondes résistives utilisées avec les conditionneurs Churchill s'est révélé inadapté. En effet, le réglage des zéros de ces sondes entre les essais s'est avéré modifier le gain des sondes (de 5 à 10 %). La procédure d'étalonnage a été revue en conséquence pour les campagnes d'essai suivantes.

En 2004, une nouvelle campagne a été entreprise durant le stage de Pierre Roux. Elle a eu pour objectif d'évaluer la correction pour d'autres amplitudes sur les longueurs d'onde courtes (5 et 3 m) et en houle oblique.

Avant cette deuxième campagne, la flexion importante des sondes au passage de la houle nous a conduits à étudier le comportement dynamique de ces sondes. On s'attend à une réponse

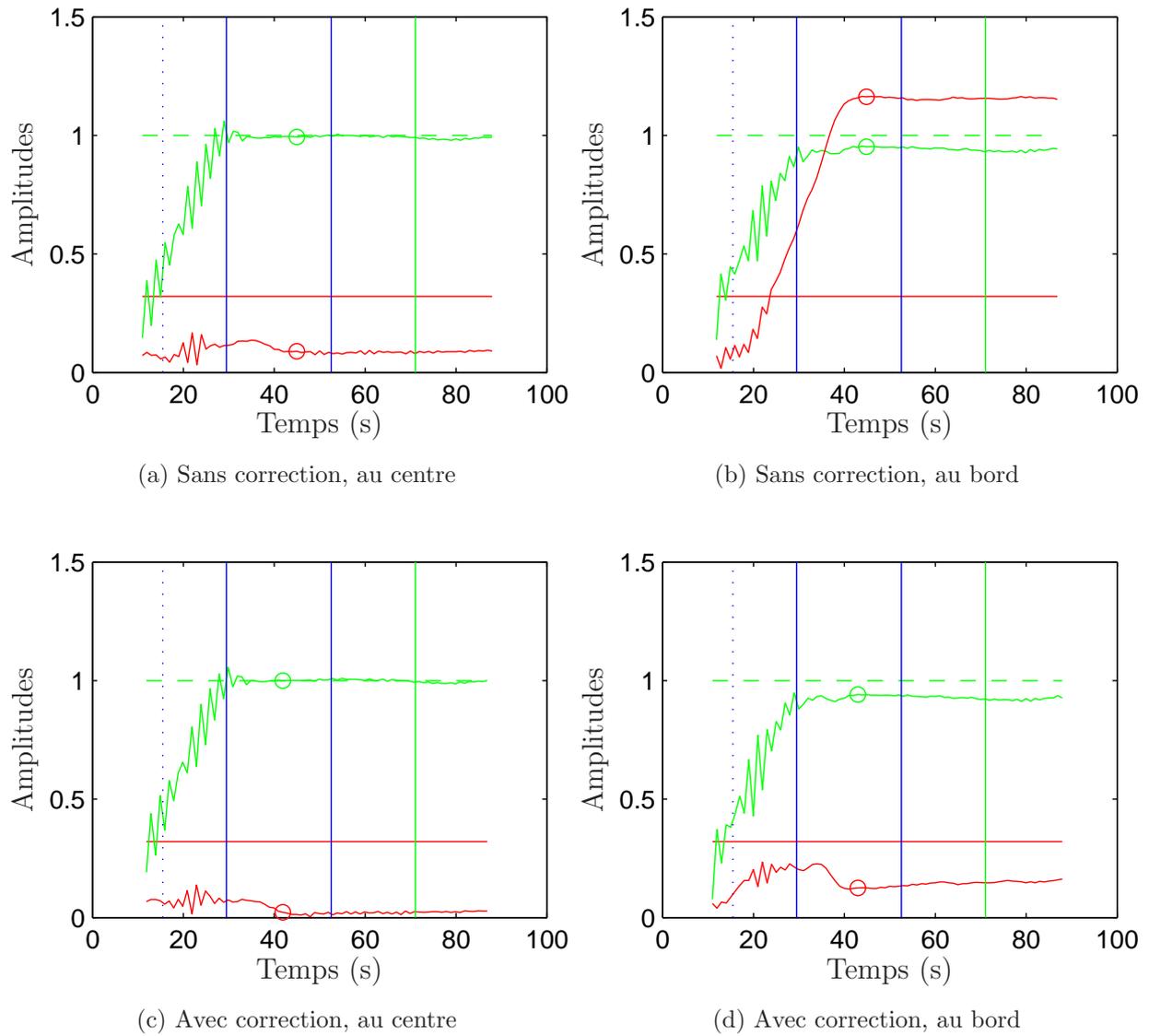
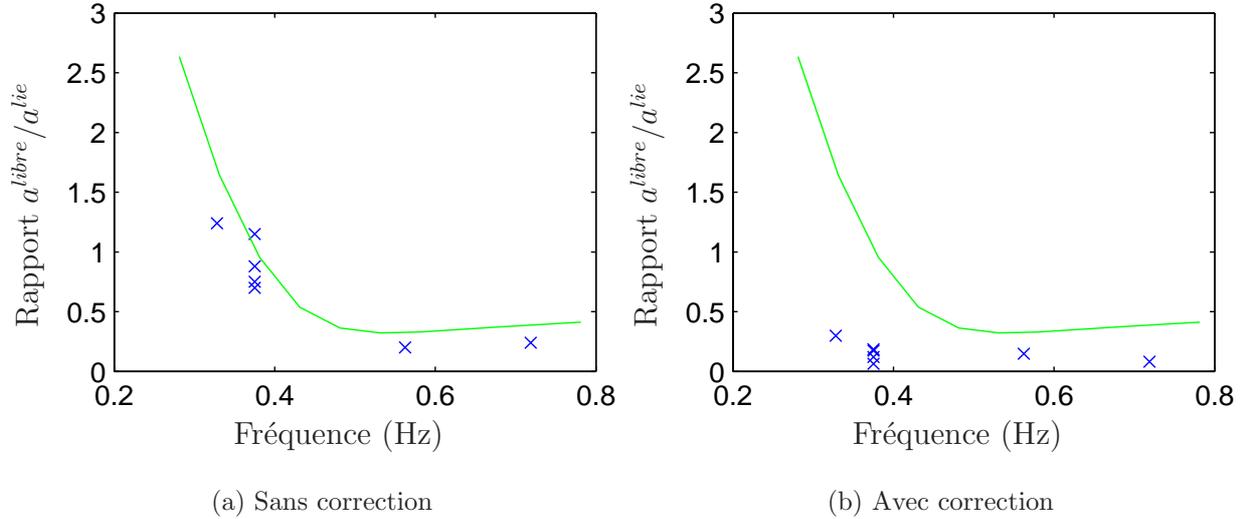


FIG. III.2.7 – Évolution temporelle des amplitudes liées (—) et libres (—) (Dalrymple,  $f = 0.55$  Hz et  $\theta = 30$  degrés)


 FIG. III.2.8 – Amplitude libre normalisée ( $\times$  : expérimentale et théorique —)

non linéaire du fait de la flexion et on s'est intéressé au taux d'harmonique créé en  $2\omega$ , dans l'optique des mesures d'ondes libres du second ordre. La campagne d'étalonnage dynamique [17] correspondante, inspirée des travaux réalisés à l'Ifremer [80], a consisté à imposer un mouvement forcé à la sonde par rapport à l'eau. L'idée était de générer un mouvement orbital périodique de fréquence  $f$  et d'amplitude  $a$ , représentant une houle de mêmes caractéristiques, et de mesurer la composante  $2f$  due entre autres à la flexion de la sonde. L'utilisation du générateur de mouvement Hexapode assure un mouvement imposé de très bonne qualité. En mouvement sinusoïdal pur, l'amplitude du premier harmonique ( $2f$ ) mesurée est de l'ordre de 20 % de l'amplitude second ordre liée théorique. En mouvement sinusoïdal aux fréquences  $f$  et  $2f$ , d'amplitudes respectives  $a$  et  $\frac{1}{2}ka^2$ , l'erreur sur l'estimation de l'amplitude du premier harmonique varie entre 5 et 10 %. Cela donne une idée de l'incertitude de mesure sur les amplitudes second ordre, tout en gardant à l'esprit que lors des essais dynamiques, le profil de vitesse sur la sonde était uniforme alors qu'il est plus faible en réalité au bas de la sonde. Par conséquent, les incertitudes obtenues sont probablement plus élevées que lors de mesures réelles de houle. Plus de détails sont donnés dans le rapport [17].

L'analyse des mesures à forte cambrure a révélé une erreur de programmation de la correction  $2\omega$  en houle droite. L'erreur consiste en un facteur supplémentaire trois quarts appliqué à la correction : il reste un quart des ondes libres après suppression. Les essais ne sont donc pas exploitables pour valider la correction des ondes libres en ondes courtes. Cette erreur ne remet pas en cause les résultats précédents ni sur les essais de 2003, ni sur les simulations qui utilisaient une routine différente, validée sur la solution de Hudspeth et Sulisz.

Le fonctionnement médiocre de la correction (due à l'erreur de codage) nous a poussés à regarder également du côté du mouvement batteur. La deuxième vérification proposée *a posteriori* concerne la correction seule en houle droite. On génère un mouvement  $2\omega$  d'amplitude égale à celle des ondes libres. Ces essais permettent de tester la génération seule, avec des effets non linéaires lors de la propagation négligeables. En 2D pour les trois fréquences, on constate que l'amplitude mesurée est inférieure à l'amplitude de consigne. Le tableau III.2.1 donne les valeurs obtenues ainsi que l'écart à la consigne. On constate que l'erreur est importante dès que

l'amplitude à générer passe en dessous d'un centimètre. Ces essais d'amplitude très faible sont

Fréquence (Hz)	0.44	0.44	0.44	0.55	0.55	0.72	0.72
Cambrure (%)	6.6	3.9	2.0	7.7	3.8	7.9	4
Consigne (mm)	10.6	3.7	0.9	5.9	1.5	4.4	1.1
Mesure (mm)	9.9	3.0	0.3	4.0	0.9	3.8	0.6
Écart (%)	7	19	67	32	40	14	45
Batteur (mm)	8.9	3.1	0.8	4.1	1.0	2.7	0.7

TAB. III.2.1 – *Onde libre seule*

en fait à la limite de résolution du batteur. Son déplacement angulaire entre  $\pm 0.3$  radian est codé sur 12 bits, ce qui lui donne une résolution angulaire de  $1.5 \times 10^{-4}$  radian. La résolution correspondante en mouvement, au niveau de la surface libre au repos, est de de 0.4 mm, si bien que les essais dont le mouvement batteur est inférieur à 4 mm contiennent moins de 10 incréments sur toute la course. Visuellement, on observe que le mouvement est saccadé. L'essai de fréquence 0.44 Hz et de cambrure 6.6 % semble montrer qu'il faut au moins 25 incréments pour obtenir une résolution correcte du mouvement<sup>3</sup>.

En houle oblique, l'importance des ondes libres près du mur latéral où se produit la réflexion laisse penser que dans cette zone le mouvement batteur est d'amplitude suffisamment importante pour pouvoir générer la correction  $2\omega$  en opposition de phase. Lors des essais correspondants, sur les deux sondes qui avaient été placées dans cette zone, l'une des deux n'a pas fonctionné lors des essais, rendant impossible la séparation libre/lié et la quantification de l'efficacité de la suppression.

## Conclusion sur les ondes libres

Le développement de la solution au second ordre en régime établi dans un bassin 3D semi-infini dans sa direction principale a permis de se familiariser avec les solutions analytiques des équations de propagation d'ondes non linéaires. L'expérience acquise a été d'un grand service pour la compréhension des phénomènes physiques qui entrent en jeu dans un bassin, pour l'étude des effets d'ordre supérieur (voir la partie V, chapitre IV.1).

L'expression analytique de l'amplitude des ondes libres a été développée pour rendre son utilisation facile lors de la suppression des ondes libres avec des lois de commande élaborées. On a pu voir que ces méthodes avantageuses au premier ordre en terme d'étendue de zone utile s'accompagnent d'un fort taux d'onde libre qu'il devient nécessaire de corriger pour obtenir un champ de vague satisfaisant aux deux premiers ordres.

Les simulations numériques dans le domaine temporel avec le code au second ordre, qui sont à l'origine du développement de cette étude des ondes libres, ont fourni une validation de la stratégie de suppression en 2D.

La mise en place des essais de validation de la suppression a mis en évidence le compromis à faire entre les critères suivants pour mener à bien ce type de mesure :

- la résolution des sondes et la quantification du mouvement batteur nécessitent des amplitudes le plus élevées possible,

3. On peut se demander quelle est la conséquence de la discrétisation du mouvement sur la génération des hautes fréquences dans un spectre de faible hauteur significative.

- le taux d'onde libre est plus élevé à grande longueur d'onde,
- les cambrures maximales accessibles sont plus élevées à courte longueur d'onde (puissance du batteur),
- des cambrures élevées font apparaître des effets d'ordre supérieur à prendre en compte.

Cette étude expérimentale qui a mis en évidence les limitations du générateur de houle dont la quantification ne permet pas de générer des amplitudes faibles, pose la question de savoir la conséquence de cette quantification lors de la génération de houle irrégulière, pour laquelle une grande partie du spectre est de faible amplitude.

La validation en trois dimensions commencée ici est encore imparfaite à la fois du côté des résultats obtenus et du côté de l'analyse elle-même des mesures et des simulations. L'angle de propagation de la houle était supposé connu, ce qui donne de bons résultats dans la zone utile avec une méthode de Dalrymple en génération. Une méthode similaire à celle développée ultérieurement en focalisation 3D pourra être employée pour déterminer la direction la houle oblique.

## Perspectives

La méthode de séparation des effets pairs et impairs en non-linéarités mise en place pour la reproduction déterministe 2D (*cf.* section IV.1.4) pourra être utilisée pour l'analyse des essais expérimentaux. À partir de deux essais en opposition de phase, on pourra extraire le second ordre grâce à l'élévation paire, et surtout mesurer directement la vitesse de phase non linéaire de l'onde linéaire grâce à l'élévation impaire de manière à valider la technique itérative utilisée pour l'instant. Cette vitesse évaluée servira à construire un système d'équations (III.2.1) mieux adapté aux houles mesurées. Cette amélioration se fera bien sûr avec l'inconvénient de doubler le nombre d'essais nécessaires. Une telle campagne peut s'avérer assez longue du fait du temps d'attente important entre deux essais si l'on veut obtenir un état de repos correct pour l'essai suivant.

Compte tenu des faibles amplitudes à mesurer et de la résolution finie des sondes, on aura intérêt à considérer des grandes longueurs d'onde pour lequel le taux d'onde libre est plus important. La cambrure sera toutefois limitée par la puissance du batteur.

En houle irrégulière 3D, les calculs sont à mener pour supprimer les ondes libres parasites, qui interviendront notamment au niveau des ondes longues.

Il sera intéressant d'intégrer la correction proposée par Molin [99] pour les modes longs excités par des effets du second ordre lors de la propagation de la houle.

D'autres ondes libres sont créées par les interstices entre les volets, pour les hautes fréquences. Ainsi une houle gaufrée de fréquence double de celle du batteur, se propageant lentement apparaît dans certains cas. Parfois cette houle parasite est générée principalement au niveau des coins du batteur, où les interstices sont plus larges. L'ordre de grandeur de ces ondes parasites peut être important, de plusieurs fois l'amplitude de l'onde liée. Aucune correction n'est possible avec la seule loi de mouvement du batteur, mais la suppression des interstices ou au moins la diminution de leur taille permettra d'atténuer ce phénomène.

## Quatrième partie

# Reproduction déterministe de paquets de vagues



# Chapitre IV.1

## Paquets de vague focalisés

On traite ici des paquets de vague bi- et tri-dimensionnels obtenus par focalisation de houle en un point du bassin et un instant donnés. Ce type de paquets de vagues, de courte durée et de forte cambrure, représentent un cas dimensionnant de plus en plus utilisé lors de la conception des structures marines.

L'idée est, partant d'un enregistrement en mer ou en bassin ou d'un signal artificiel, de reproduire ce paquet à l'échelle dans le bassin en expériences et/ou en simulations. On parlera de reproduction déterministe au sens où l'on veut reproduire une cible connue. L'intérêt de ce type de reproduction en bassin est double

- en bassin expérimental, on peut soumettre les maquettes à des paquets de vagues dimensionnants le plus proche possible des états de mer sévères qu'on a mesurés ;
- en bassin numérique, il rend possible l'étude de la cinématique non linéaire au voisinage des crêtes reproduites de forte cambrure.

L'objectif de cette partie est donc de déterminer le mouvement du batteur qui conduit à la génération d'un paquet de vagues sur la sonde de mesure le plus proche possible de la cible. L'étude des techniques existantes dans la littérature a permis d'analyser leurs performances et de proposer une nouvelle technique basée sur une meilleure évaluation des vitesses de phase non linéaires.

### Introduction

Un grand nombre d'études présentes dans la littérature traite des effets non linéaires lors de la propagation de paquets de vagues cambrés focalisés. Après une introduction sur les deux configurations 2D et 3D, on les traitera séparément ensuite en commençant par le cas bi-dimensionnel.

#### En deux dimensions

Dans les études bi-dimensionnelles, les focalisations sont obtenues en mettant en phase linéairement un spectre en un point donné du bassin. Chaplin [26] a étudié la génération de paquets de vagues de spectre à cambrure constante (Constant Wave Steepness CWS) focalisés en un point. La mise en phase au point de focalisation était réalisée par itérations après une première estimation basée sur la théorie linéaire. Contento *et al.* [36] et Lugni [87] ont repris également cette approche itérative sur les phases. Dans ces trois approches, toutes les ondes

du paquet cible ont une phase nulle au point de focalisation. Les composantes non linéaires (second ordre notamment) sont aussi de phase nulle.

Baldock et Swan [3] ont développé un modèle basé sur une double décomposition de Fourier initialement proposée par Lambrakos [76] du potentiel. Son objectif est de prédire la cinématique près du point de mesure. L'élévation mesurée en un point sert de donnée d'entrée ; le potentiel ainsi que l'élévation au voisinage du point de mesure sont déterminées grâce à une procédure faisant intervenir les conditions de surface libre.

La même équipe (Johannessen et Swan [68, 69, 70, 71]) est ensuite passée à un modèle de propagation du type Méthode Directe en formulation périodique. Finalement Bateman *et al.* [4, 5] ont développé un modèle DNO en formulation périodique similaire au modèle HOS de Dommermuth et Yue.

La reproduction déterministe vise à la génération de l'événement dimensionnant cible dans un bassin de houle physique ou numérique, pour étudier le comportement d'une maquette par exemple.

Le point de départ de la reproduction déterministe est l'approche linéaire. Lundgren and Sand [88] ont développé une technique linéaire de reproduction déterministe en 2D dans le domaine temporel. La loi de mouvement  $X(t)$  du batteur est calculée par une convolution de la cible dans le domaine temporel (voir aussi Hughes [65] pour un résumé page 408). Mansard et Funke [93] ont présenté l'équivalent dans le domaine fréquentiel. Cette approche linéaire est évidemment limitée à des paquets de vagues d'amplitude infiniment faible. Lorsque l'amplitude augmente, des effets d'ordre supérieur apparaissent qui modifient la propagation de la houle lors de sa focalisation.

Plusieurs auteurs se sont concentrés sur la reproduction plus spécifique de paquets de vagues cambrés. Une approche consiste à inclure le paquet de vagues au sein d'une houle irrégulière. Dans ce cas, la cible est définie par la donnée de paramètres caractéristiques tels les périodes et amplitudes des vagues successives, ou par une élévation construite artificiellement. Hudspeth *et al.* [63] ont proposé une telle approche dans les domaines temporel et fréquentiel. Des différences sont observées entre les élévations théoriques linéaires et les mesures en bassin, dans le champ irrégulier autour du paquet à reproduire et dans ce paquet lui-même. Elles sont interprétées comme la variation classique apparaissant lors de la comparaison entre des données aléatoires et des simulations numériques, plutôt que provenant d'effets non linéaires.

L'équipe de Clauss [31, 74, 29, 30] a proposé une série d'articles dans laquelle le paquet de vagues cible est également inclus au sein d'une houle irrégulière. L'ajustement des phases et des amplitudes du spectre de houle se fait par itérations, en bassin ou dans un modèle numérique. La version la plus récente [30] traite de paquets de vagues isolés cette fois, et montre un modèle numérique itératif qui permet la propagation en sens inverse du point de mesure jusqu'au batteur et qui tient compte de manière approchée des effets non linéaires d'ordre trois. Le champ de vagues est décrit comme une superposition de houles de Stokes d'ordre trois. L'intervalle spatial entre le point de focalisation et le batteur est discrétisé et la variation de vitesse de phase non linéaire pour chaque fréquence est calculée de proche en proche à l'aide d'une relation de dispersion non linéaire dans laquelle apparaît l'amplitude instantanée obtenue par Transformée de Hilbert. L'application au célèbre paquet de vagues mesuré sur la plate-forme Draupner montre une reproduction globale satisfaisante malgré des différences notamment au niveau de l'amplitude du pic focalisé [30].

La prise en compte des effets non linéaires lors de la reproduction déterministe est abordé également par Maisondieu *et al.* [91]. La vitesse de phase effective est évaluée directement à partir de la TF de l'élévation reproduite et sert à corriger les phases initiales servant à calculer

---

le mouvement batteur. Plusieurs corrections successives sont éventuellement enchaînées pour améliorer la procédure. Pour les paquets de vagues de grande amplitude, cette approche ne prend pas en compte les effets du second ordre qui, à haute fréquence, se superposent au spectre initial. Ces ondes de haute fréquence sont de courte longueur d'onde et interviennent principalement au niveau du pic central (les ondes de fréquence faible (grandes longueurs d'onde) interviennent loin du pic central). Un mauvais contrôle des hautes fréquences est alors synonyme d'écart à la cible au niveau du pic central.

Ferrant [47] a proposé, dans le cadre du projet CLAROM "HOUDIM", une décomposition initiale du paquet de vagues au second ordre, en profondeur finie et pour l'ensemble des termes somme et différence. Les deux dernières approches présentées ont été reprises au cours du travail de thèse pour bien comprendre leurs avantages et inconvénients.

On peut également citer d'autres approches comme l'utilisation du front d'onde d'une houle régulière. Andonowati et van Groesen [2] ont récemment proposé une nouvelle méthode appelée Amplitude Temporelle Maximale (ATM ou MTA en anglais). Ils déterminent, en chaque point d'espace d'un domaine donné, l'ATM définie par  $m(x) = \max_t \eta(x,t)$ . Plusieurs modèles de propagation non linéaires (Non Linear Schrödinger equation, Semi Finite Background, KdV) sont utilisés pour évaluer  $\eta(x,t)$  sur le domaine d'étude. Ils localisent grâce à cette MTA la position  $x_m$  du maximum d'amplitude. En se donnant la distance  $L$  entre le générateur et un point de mesure prévu, le modèle numérique leur fournit le champ de vagues  $\eta_b(t) = \eta(x_m - L, t)$  à générer au niveau du batteur pour reproduire l'élévation maximale au point de mesure. Cette reproduction est possible si l'élévation au niveau du batteur n'est pas trop cambrée.

Wu *et al.* [127] ont donné les bases d'une procédure d'optimisation visant à la reproduction déterministe de houle irrégulière non linéaire et également de paquets de vagues. Partant d'élévations cibles sur plusieurs sondes, celle-ci les décompose initialement de manière linéaire ou au second ordre puis simule numériquement l'évolution du spectre obtenu grâce au modèle HOS périodique de Dommermuth et Yue. Le spectre de départ est alors corrigé au cours d'itérations successives pour améliorer la reproduction de la cible sur les sondes. L'application de cette technique à des paquets de vagues semble prometteuse mais limitée seulement dans [127] à un paquet focalisé simple (focalisation géométrique) de faible cambrure.

## En trois dimensions

Les études sur les paquets de vague 3D sont encore peu nombreuses dans la littérature en comparaison des études 2D, mais elles reçoivent de plus en plus d'intérêt. Le développement récent à la fois des bassins de houle multi-directionnels et de codes de calculs tridimensionnels rapides et précis rend accessible leur étude systématique.

En 1997, She *et al.* [115] ont réalisé une étude du déferlement 3D grâce à une focalisation géométrique principalement (une fréquence, plusieurs directions). Hong *et al.* [62, 61] ont étudié l'influence de la directionnalité sur des paquets de vagues déferlants ou non. Les champs de vagues sont générés à l'aide d'un modèle à double sommation, sur les fréquences et sur les directions (32 fréquences avec 200 directions chacune).

La génération déterministe de houle irrégulière directionnelle a été abordée par Sand et Lundgren [111] et Sand [110]. Le champ de vagues 3D est considéré comme la superposition de composantes linéaires. La procédure d'optimisation pour la reproduction déterministe proposée par Wu *et al.* [127] a été également appliquée à un cas de focalisation géométrique : un essai expérimental sert de cible avec une mesure sur deux sondes. Après une décomposition premier et second ordre de cette cible, les composantes spectrales sont optimisées itérativement. Une

photo prise lors de l'essai comparée à une vue de la surface libre simulée après optimisation, ainsi que les élévations sur les deux sondes sont fournies. La technique employée semble prometteuse puisque seulement deux informations suffisent. Hélas peu de détails sont donnés dans le papier. Zhang *et al.* [131] ont développé un modèle complexe appelé Directional Hybrid Wave Model, qui sert à décomposer de manière déterministe un champ de vague irrégulier au second ordre de non-linéarités. L'étalement directionnel est estimé<sup>1</sup> dans un premier temps puis modéliser en affectant 1, 3, 5 ou 7 directions par fréquence (suivant l'étalement estimé plus ou moins important du champ de vagues). Ensuite, les phases de chacune des composantes fréquentielles sont déterminées par une méthode des moindres carrés. La contribution non linéaire au second ordre est déduite des composantes linéaire à l'aide soit d'une méthode conventionnelle (pour des fréquences proches: voir l'Annexe E, soit d'une solution en modulation de phase (pour l'effet des ondes longues sur les ondes courtes). Cette contribution est prise en compte dans un processus similaire à celui trouvé dans Duncan et Drake [43]. Pour savoir quelle méthode (conventionnelle ou modulation) est appliquée, le domaine fréquentiel est divisé en plusieurs types d'onde: ondes longues, ondes courtes I et II...

Un bon nombre d'études se sont penchées sur l'influence de la directionnalité sur les paquets. Johannessen et Swan [70, 71] ont poursuivi les travaux 2D de Baldock et Swan [3], en 3D cette fois en étudiant l'effet la directionnalité sur des paquets de vagues non linéaires obtenus en focalisant des spectres à cambrure constante (CWS) avec un étalement directionnel donné. Taylor et Gibbs [121] ont considéré des paquets de vagues focalisés en domaine périodique avec le modèle de Bateman *et al.* . [4, 5]

L'approche choisie se porte plus spécifiquement de l'étude des paquets de vagues focalisés (voir la section IV.1.5). En laissant de côté pour l'instant l'influence des non-linéarités, on se penche sur la reproduction déterministe de ces paquets. Cette approche est peu fréquente dans la littérature bien que primordiale pour l'avenir des bassins de houle. De nombreux bassins (*e.g.* MARIN, Hambourg) se sont fixés pour objectif à plus ou moins long terme ce type de génération déterministe en 3D.

### Paquets de vagues cibles en 2D

La figure IV.1.1 à gauche donne une vue de l'élévation à reproduire dans le cas d'une cible artificielle de 40 cm d'amplitude. On peut observer l'asymétrie des creux latéraux et des crêtes secondaires de part et d'autre du pic central, asymétrie due au fait que les ondes ne sont pas totalement en phase. Dans ce cas, on ne pourra pas employer une technique itérative qui vise simplement à mettre en phase les ondes sur la sonde (*cf. e.g.* Chaplin [26], Lugni [87]). Pour caractériser les paquets de vagues cibles, on utilisera l'amplitude maximale  $A_{max}$  relevée sur le signal cible au point de focalisation. La gamme de fréquence (ou de longueur d'onde) est nécessaire également pour caractériser les paquets cibles. On définit pour cela la fréquence moyenne  $f_m$  et la largeur de bande en fréquence  $\Delta f$  par

$$f_m = \frac{\int f a(f) df}{\int a(f) df} \quad \Delta f^2 = \frac{\int (f - f_m)^2 a(f) df}{\int a(f) df}$$

---

1. Avec la Méthode Étendue du Maximum de Vraisemblance (EMLM).

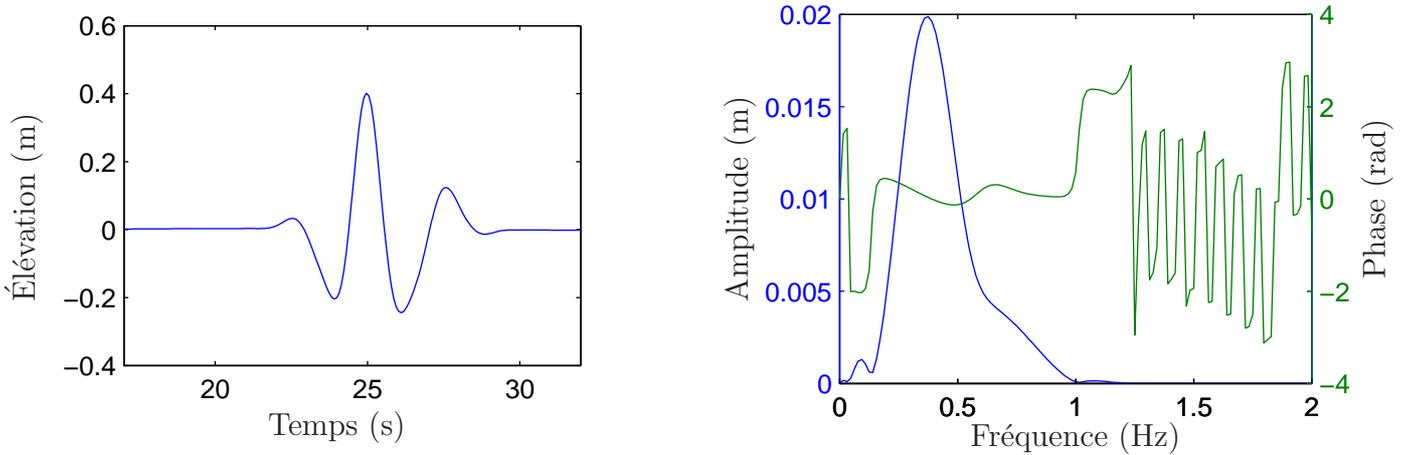


FIG. IV.1.1 – *Cible artificielle : signal temporel à gauche et spectre d’amplitude et phase associés à droite*

où  $a(f)$  est le spectre d’amplitude obtenu par Transformée de Fourier de la cible<sup>2</sup>. Elles permettent d’évaluer l’étroitesse du spectre d’entrée  $e = \Delta f / f_m$ . Si  $e = \Delta f / f_m$  est faible, le paquet de vagues focalisé est semblable à une houle régulière modulée en amplitude. On peut interpréter  $T_m = 1/f_m$  comme la période locale du pic focalisé et  $\Delta t = 1/\Delta f$  comme la largeur temporelle du pic focalisé. À l’inverse lorsque le spectre est large, le paquet focalisé comporte un seul pic central de grande amplitude. Les creux et les crêtes latéraux sont beaucoup moins élevés. Lors des essais effectués dans cette thèse, les paramètres caractéristiques sont  $f_m=0.43$  Hz et  $\Delta f=0.17$  Hz : l’étroitesse vaut  $\Delta f/f_m \simeq 0.4$ , ce qui correspond plutôt à un spectre large<sup>3</sup>. Les spectres d’amplitude ont une décroissance relativement douce à haute fréquence, sans coupure nette, comme le montre la figure IV.1.1 à droite.

La sonde sur laquelle on fait focaliser la houle est placée au milieu du bassin, à 19 ou 30 m suivant les essais. Les essais effectués concernent le signal cible artificiel de la figure IV.1.1 pour différentes amplitudes du pic focalisé (5, 10, 20, 30, 40 cm) ainsi que des paquets de vagues cibles expérimentaux ; ils seront présentés en fonction des besoins. À partir du signal cible, on peut tenter de quantifier l’importance des non-linéarités en définissant par exemple une cambrure caractéristique  $\varepsilon_c$ . La fréquence moyenne  $f_m$  donne ainsi une longueur d’onde moyenne  $\lambda_m$  qu’on combine avec la hauteur maximale pour donner

$$\varepsilon_c = \frac{H_{max}}{\lambda_m} \quad \text{ou} \quad k_m A_{max} = \pi \varepsilon_c$$

Pour la cible artificielle, la hauteur maximale comptée entre le pic et le creux suivant vaut  $H_{max} = 1.6A_{max}$ . Le cas d’amplitude 40 cm est proche du déferlement et correspond à  $\varepsilon_c = 7.6$  % ou  $k_m A_{max} = 24$  %. On retrouve une valeur typique, mentionnée par Baldock et Swan [3] par exemple.

2. On utilisera des Transformées de Fourier et on parlera de spectre d’amplitude et de phase, respectivement pour le module et la phase de la TF.

3. Johannessen et Swan ont réalisé des essais bi-dimensionnels avec des spectres CWS de fréquences comprises entre 0.83 et 1.25 Hz. L’essai noté Dud61 est d’amplitude maximale  $A_{max} = 61$  mm et se caractérise par une fréquence moyenne  $f_m=0.99$  Hz et une largeur  $\Delta f=0.13$  Hz. Dans ce cas, le spectre est étroit  $e \simeq 0.13$ . Un aspect important de ce spectre est qu’il est coupé brusquement à  $f = 1.25$  Hz. Cette coupure semble être fortement liée à la croissance d’instabilités à des fréquences juste supérieures à cette coupure. On reviendra sur ces instabilités dans la section IV.1.4.5.

On présente dans cette partie différentes techniques développées pour déterminer la loi de mouvement du batteur. Ces techniques ont été établies successivement pour tenir compte de non-linéarités toujours croissantes. On expose en même temps des validations sur des reproductions dans le bassin expérimental et dans les bassins numériques. On a commencé naturellement par des faibles amplitudes pour lesquelles la théorie linéaire est adaptée (Mansard et Funke [93], section IV.1.1). On fait apparaître les limitations à son utilisation, soit pour des amplitudes un peu plus fortes par les effets non linéaires, soit à très faible amplitude par le contrôle délicat du mouvement batteur. Aux ordres suivants, trois approches sont utilisées. La décomposition de la cible en deux composantes, linéaire et second ordre lié (Ferrant [47], section IV.1.2) améliore la reproduction du pic central pour des amplitudes moyennes sans tenir compte des vitesses de phase non linéaires. Pour des amplitudes encore plus fortes, on tente de le faire par une technique itérative simple de correction (*e.g.* Maisondieu [91], section IV.1.3) qui se révèle toutefois inefficace à hautes fréquences. La séparation des effets d'ordre pairs et impairs couplée avec une description partielle des effets du troisième ordre (section IV.1.4) conduit cette fois à une estimation correcte des vitesses non linéaires et à une amélioration notable de la qualité des paquets reproduits. Enfin, on abordera la reproduction déterministe en trois dimensions (IV.1.5)

### IV.1.1 Approche linéaire

On rappelle brièvement dans cette partie les étapes de la prédiction linéaire du mouvement du batteur et son application à un cas de faible amplitude. Le mouvement du batteur  $X(t)$  considéré est la position du volet à l'intersection avec la surface libre au repos, qui suffit en 2D à déterminer le déplacement complet du batteur volet. L'élévation de surface libre cible, sur la sonde placée en  $x = x_p$ , est décomposée dans le domaine fréquentiel.

$$\eta(x,t) = \sum_n \underline{a}_n e^{i(\omega_n t - k_n x)} \quad (\text{IV.1.1})$$

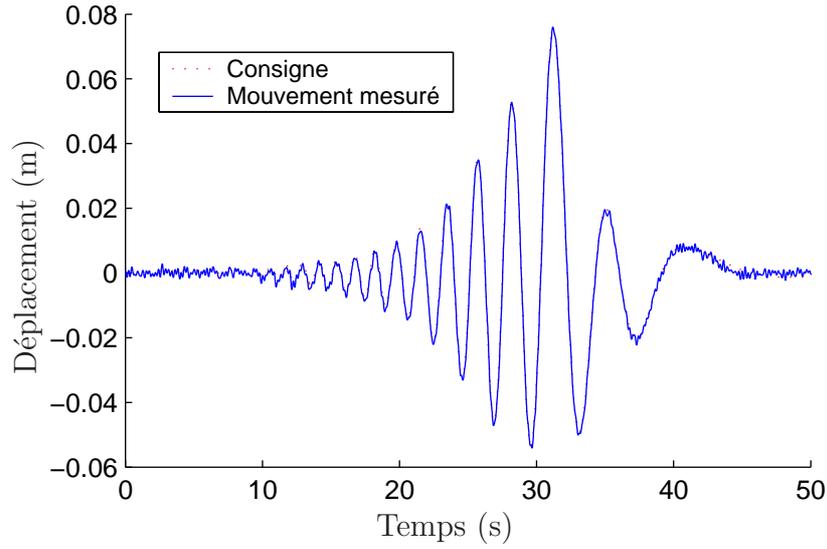
Chaque composante de Fourier, de fréquence  $f_n = n\Delta f = \omega_n/2\pi$ , d'amplitude complexe  $\underline{a}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est associée à un nombre d'onde  $k_n$  et une vitesse de phase  $v_\varphi$  par la relation de dispersion linéaire. L'élévation de surface libre en  $x = 0$  au niveau du batteur est déterminée grâce à la vitesse de phase : on propage en sens inverse, en direction du batteur, chaque composante, ce qui revient à déphaser chacune d'une quantité  $-k_n x_p$ . Le spectre d'amplitude  $\hat{X}_n$  du mouvement batteur est obtenu en appliquant la fonction de transfert linéaire  $\underline{TF}(f_n)$  reliant débattement batteur et amplitude de houle. En résumé, le spectre en amplitude du batteur s'exprime comme

$$\hat{X}_n = \underline{TF}_n \underline{a}_n e^{-ik_n x_p}$$

La figure IV.1.2 montre un exemple typique de mouvement du batteur pour un paquet de vague cible de 10 cm d'amplitude. On a superposé le mouvement imposé et le mouvement mesuré.

Afin de comparer simplement les simulations et les essais expérimentaux, le générateur de houle des codes numériques est commandé par les mêmes fichiers que le batteur physique. Le mouvement est donc identique dans les deux cas.

D'un point de vue pratique, le batteur réel est commandé dans le domaine fréquentiel et possède une certaine bande passante ( $[0.03, 2]$  Hz) qui définit la gamme de fréquences utiles. La résolution en fréquence est liée à la durée de répétition du mouvement batteur, choisie pour


 FIG. IV.1.2 – *Mouvements du batteur (amplitude 10 cm)*

englober la totalité du paquet de vague à reproduire :

$$\Delta f = 1/T_d$$

L'instant de focalisation peut être choisi en fonction du temps de propagation de l'onde la plus lente (plus haute fréquence) jusqu'à la sonde. On effectue pour cela une translation en temps  $\Delta t$  du mouvement batteur, soit, dans le domaine fréquentiel un déphasage  $\Delta\phi = \omega_n \Delta t$  proportionnel à la fréquence de l'onde.

$$\underline{\hat{X}}_n' = \underline{\hat{X}}_n e^{i\omega_n \Delta t}$$

Si le signal cible utilisé ne décroît pas vers zéro aux bords de l'intervalle de temps d'étude, on lui applique une fenêtre  $W(t)$  adéquate s'annulant aux bords.

$$\eta'(t) = W(t)\eta(t) \quad \text{soit} \quad \underline{a}_n' = \underline{\hat{W}}_n * \underline{a}_n$$

où  $*$  désigne un produit de convolution. Une première vérification consiste à comparer la reconstruction de l'élévation après TF et double fenêtrage à la cible de départ. Les différences éventuelles sont dues à ce fenêtrage en temps et en fréquence. Compte tenu des élévations cibles utilisées, qui décroissent bien vers zéro aux bords, le fenêtrage en temps a peu de conséquence. L'effet du fenêtrage en fréquence est plus important. Si l'on coupe à une fréquence trop faible l'intervalle de fréquence utilisé pour décomposer la cible, on enlève des ondes de haute fréquence d'énergie non négligeable : le paquet de vague résultant présentera des différences avec la cible autour du pic central.

Ensuite on effectue des simulations dans le domaine temporel et/ou des expériences pour valider la commande du batteur pour un cas de faible amplitude.

La figure IV.1.3 (a) montre l'élévation de surface libre sur la sonde placée au point de focalisation (à une distance de 24.6 m du batteur) en fonction du temps, pour une amplitude focalisée de 10 cm. On a superposé l'élévation cible, l'élévation résultant de la décomposition linéaire et l'élévation mesurée expérimentalement. On constate tout d'abord que la cible et la

décomposition sont confondues (courbes indiscernables, superposées), ce qui justifie les choix d'échantillonnage et de fenêtrages temporel et fréquentiel. L'élévation expérimentale reproduit bien la cible visée, avec toutefois des différences d'amplitudes modérées des deux creux latéraux. La figure IV.1.3 (b) compare dans le domaine fréquentiel cette fois la cible et la mesure. Conformément aux observations précédentes, l'accord est satisfaisant, à la fois en phase où l'écart entre cible et mesure est très faible dès que l'énergie est non-négligeable, et en amplitude où l'on peut constater tout de même des écarts de l'ordre de 5 % pour des fréquences proches du pic.

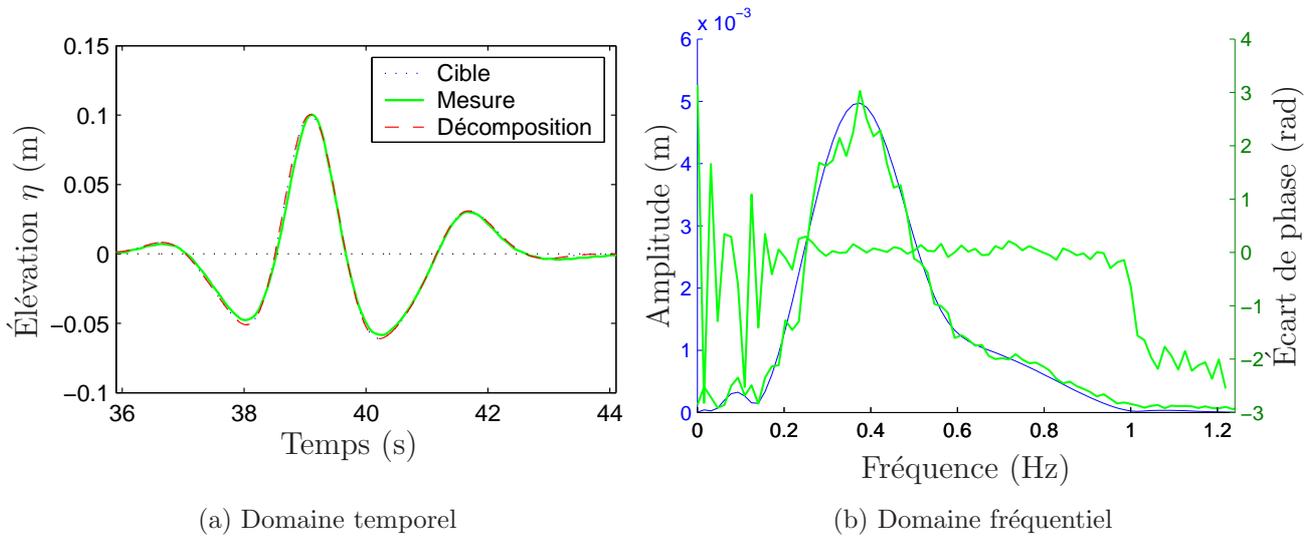


FIG. IV.1.3 – Comparaisons au paquet de vague cible (amplitude 10 cm)

La reproduction d'un paquet de vague cible d'amplitude plus faible (5 cm) accentue les différences observées sur le paquet d'amplitude 10 cm. La figure IV.1.4 montre la même superposition que la figure IV.1.3 de l'élévation cible, de l'élévation décomposée et de la mesure, pour le paquet d'amplitude 5 cm cette fois. À nouveau, cible et décomposition sont très proches. La

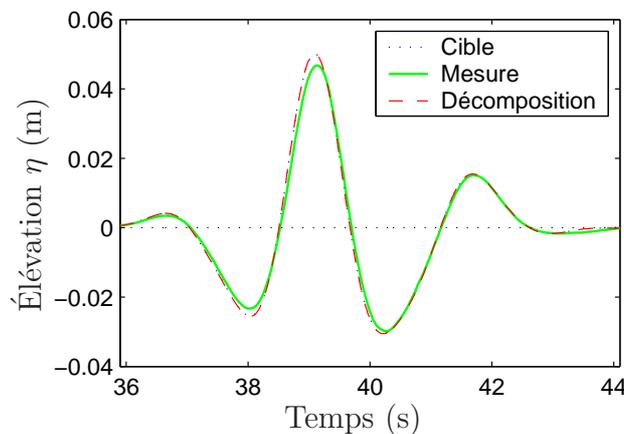


FIG. IV.1.4 – Élévations de surface libre (amplitude 5 cm)

différence entre la cible et la mesure concerne cette fois l'amplitude à la fois du pic central et des creux latéraux. L'origine de ces différences peut provenir du mouvement réel du batteur qui s'éloigne de la consigne (limites basses du batteur *i.e.* pour les faibles amplitudes (voir ondes libres)). La figure IV.1.5 donne la superposition de trois mouvements du batteur : le mouvement demandé (par le biais des composantes fréquentielles), le mouvement quantifié du batteur (transmis par le logiciel aux volets) et le mouvement mesuré du volet central. On remarque que les trois signaux sont bien en phase lorsque l'amplitude est importante. Le mouvement demandé est bien reproduit pour  $t > 20$  s, lorsque l'amplitude des oscillations dépasse 1 cm. En dessous, pour  $t < 20$  s, on constate que l'effet de la quantification (ou discrétisation liée au codage du débattement angulaire sur 12 bits) se fait ressentir sur le mouvement transmis aux volets : le mouvement mesuré s'éloigne sensiblement de la cible demandée.

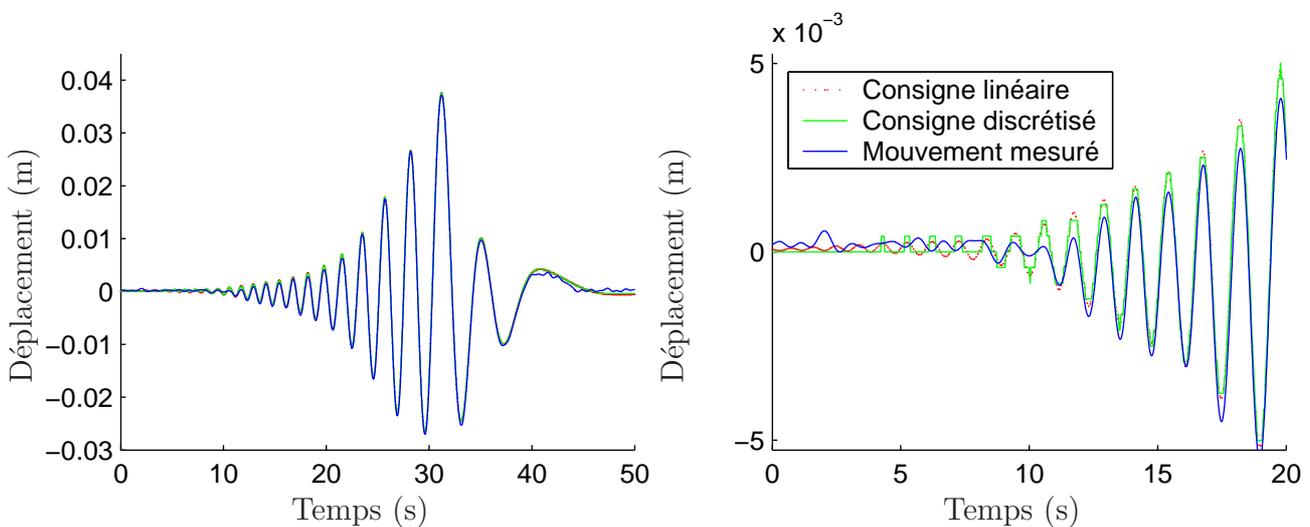


FIG. IV.1.5 – *Mouvements du batteur (amplitude 5 cm)*

La figure IV.1.6 représente à gauche le spectre d'amplitude du mouvement batteur demandé, du mouvement batteur imposé aux volets et du mouvement mesuré sur un volet. On constate que jusqu'à 0.7 Hz, les trois mouvements sont très proches. Au delà de 0.7 HZ, la mesure s'éloigne de la consigne, cela concerne des très faibles amplitudes. Le graphique de droite sur la figure IV.1.6 représente la différence de phase entre le mouvement voulu et d'une part la consigne envoyé par le logiciel aux volets et d'autre part la mesure de la position d'un volet. On remarque que du fait de la quantification de la consigne sur 12 bits<sup>4</sup>, les fréquences au delà de 1 Hz, qui sont de faible amplitude, ont également une phase incorrecte. L'écart entre mouvement mesuré et mouvement imposé est accentué, les incorrections intervenant dès 0.8 Hz sur cet essai de faible amplitude.

Afin de vérifier si cette hypothèse est correcte pour expliquer les différences entre l'élévation mesurée et l'élévation cible, il conviendrait par exemple de faire une simulation en donnant comme loi d'entrée au batteur numérique la mesure du mouvement du batteur expérimental. Cette possibilité n'est encore pas implémentée dans les codes à disposition, on peut cependant très simplement le faire en utilisant la transformée de Fourier utilisée précédemment pour produire un fichier de fréquences. On constate alors que la loi de mouvement réelle n'explique

4. Voir la partie sur les ondes libres page III.2.2

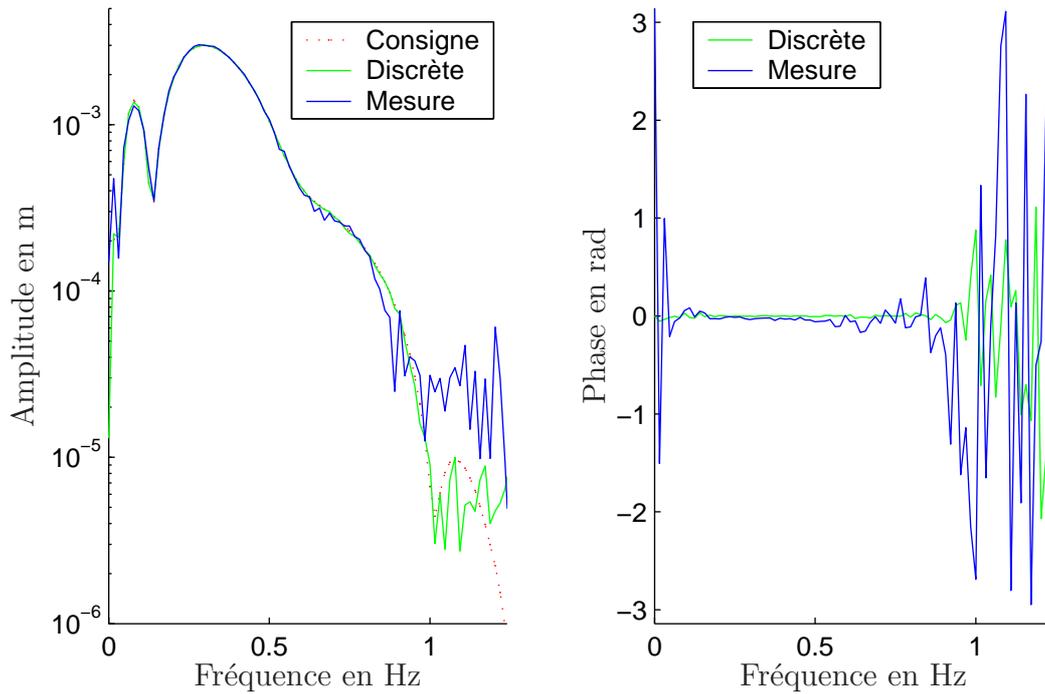


FIG. IV.1.6 – Spectre d'amplitude et de phase du mouvements du batteur (amplitude 5 cm)

pas complètement les différences observées sur le signal expérimental pour une amplitude de 5 cm. Les écarts identifiés sur les spectres d'amplitude et de phase du mouvement réel ne concernent que des fréquences d'énergie faibles et ne suffisent pas à interpréter les différences mentionnées précédemment.

Avant de passer à des cas de plus forte amplitude pour lesquels la méthode linéaire est mise en défaut, on compare expériences et simulations sur la cible artificielle d'amplitude 10 cm. La figure IV.1.7 reproduit les élévations premier et second ordre obtenues avec le code SWEET pour le même fichier d'entrée que le batteur. On peut observer une très bonne reproduction de

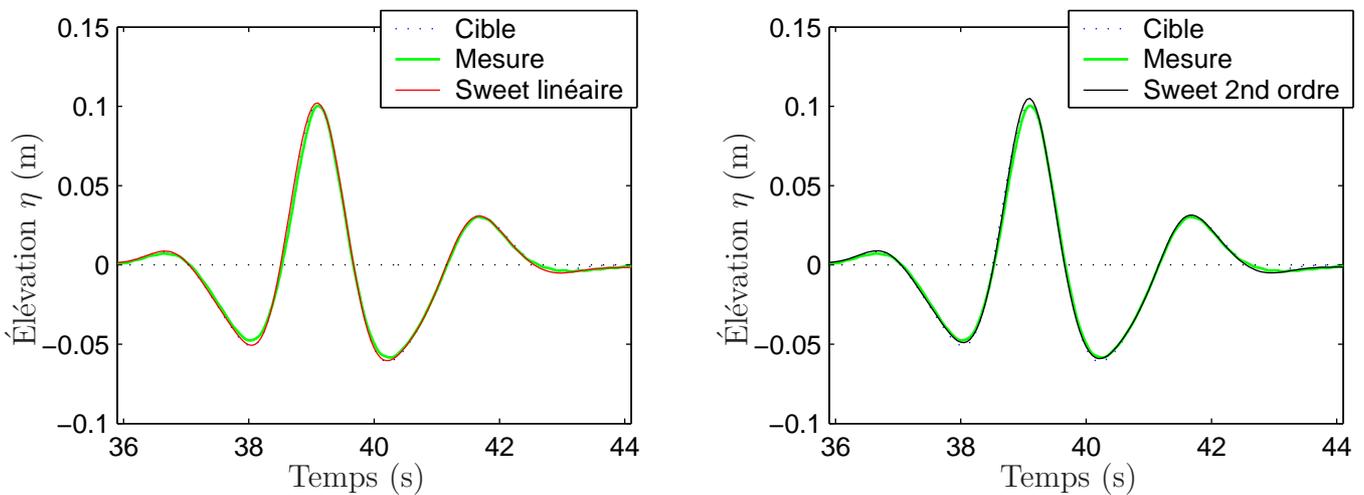


FIG. IV.1.7 – Élévations de surface libre (amplitude 10 cm)

la cible par le modèle linéaire (courbe superposée à la précédente), les modifications apportées par le second ordre qui concernent les amplitudes du pic central et des creux latéraux étant très faibles dans ce cas de faible amplitude (courbe légèrement au-dessus des deux précédentes au pic central).

Si l'on passe maintenant à des paquets de vague de plus forte amplitude, l'effet des non-linéarités de l'écoulement vient mettre en défaut la technique de reproduction déterministe linéaire décrite précédemment. Sur la figure IV.1.8, qui correspond à une cible artificielle d'amplitude 20 cm, on peut observer que le modèle second ordre (courbe noire) suit correctement l'élévation de surface libre mesurée (courbe verte ou gris clair en NB), et que cette mesure s'éloigne sensiblement de la cible recherchée (courbe bleue à nouveau superposée avec la courbe rouge qui représente la solution linéaire simulée en domaine temporel).

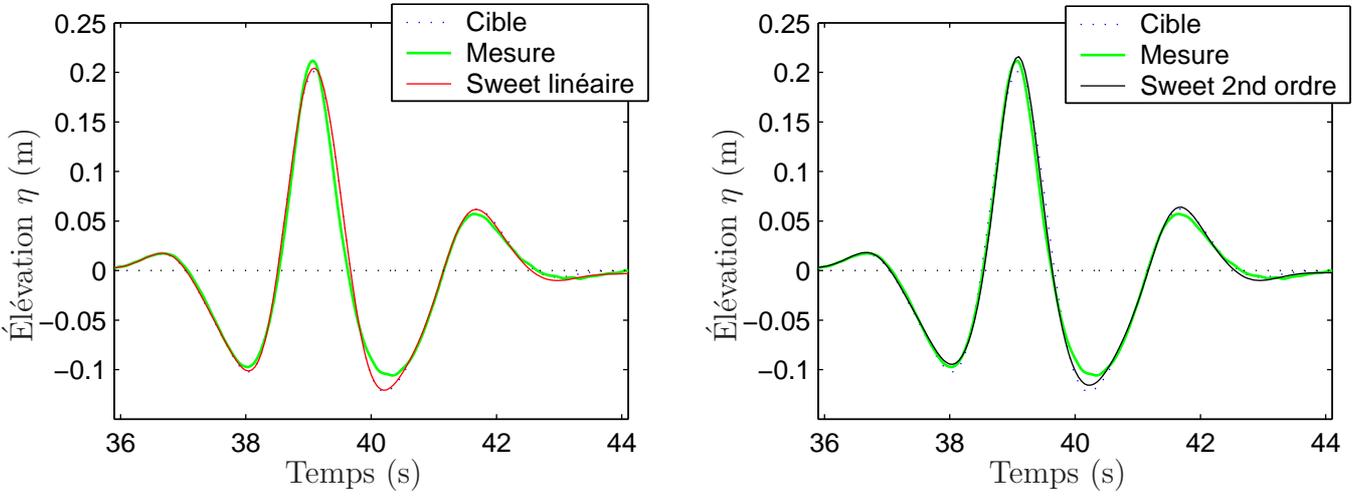


FIG. IV.1.8 – Élévations de surface libre (amplitude 20 cm)

On présente dans les parties suivantes trois approches qui ont permis d'améliorer la détermination du mouvement batteur approprié à la reproduction correcte du paquet de vague cible.

## IV.1.2 Approche au second-ordre de perturbation

Une première approche consiste à décomposer l'élévation cible en une élévation linéaire plus son élévation second ordre liée au sens des perturbations<sup>5</sup>.

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$$

Pour cela, on reprend la technique décrite par exemple par Duncan et Drake [43] et utilisée par P. Ferrant [47]. On rappelle rapidement la méthode et on l'applique ensuite à la fois à des expériences et à des simulations.

Après une décomposition linéaire comme en IV.1.1, l'élévation cible second-ordre  $\eta_2$  est construite à partir des composantes élémentaires  $\underline{a}_m$  du premier ordre suivant l'expression

$$\eta^{(2)} = \sum_{m \geq n} \underline{a}_m \underline{a}_n^\pm G_{mn}^\pm e^{i((\omega_m \pm \omega_n)t - (k_m \pm k_n)x)} \quad (\text{IV.1.2})$$

5. On dira par la suite qu'on a décomposé l'élévation cible  $\eta$  au second ordre et on parlera d'élévation cible premier ordre et second ordre respectivement pour  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

avec  $\underline{a}_n^+ = \underline{a}_n$  et avec  $\underline{a}_n^-$  son conjugué. On soustrait cette élévation second ordre à l'élévation cible, puis on recommence plusieurs itérations à partir de la cible ainsi modifiée (décomposition linéaire, construction du second-ordre lié, soustraction) jusqu'à convergence. Cette méthode a été appliquée initialement par Duncan et Drake [43] pour les termes somme uniquement, en profondeur infinie. On inclut ici les termes différence et la profondeur finie en suivant Dalzell [39]. Les termes de couplage  $G_{mn}^\pm$  utilisés pour le calcul de l'élévation second ordre liée sont donnés en annexe E. À l'issue de cette décomposition, on obtient un jeu de composantes linéaires permettant de reproduire l'élévation cible en incluant les effets du second ordre lié. Autrement dit, on a décomposé le spectre de la cible en deux contributions linéaire et second ordre :

$$\underline{a}_n = \underline{a}_n^{(1)} + \underline{a}_n^{(2)}$$

Le spectre premier ordre  $\underline{a}_n^{(1)}$  sert d'entrée pour calculer le mouvement du batteur<sup>6</sup>. Le second ordre lié apparaît naturellement au cours de la propagation et apporte la contribution  $\underline{a}_n^{(2)}$  pour une représentation correcte  $\underline{a}_n = \underline{a}_n^{(1)} + \underline{a}_n^{(2)}$  de la cible. Les spectres d'amplitude et de phase pour la cible et pour la décomposition obtenue sont montrés sur la figure IV.1.9. À

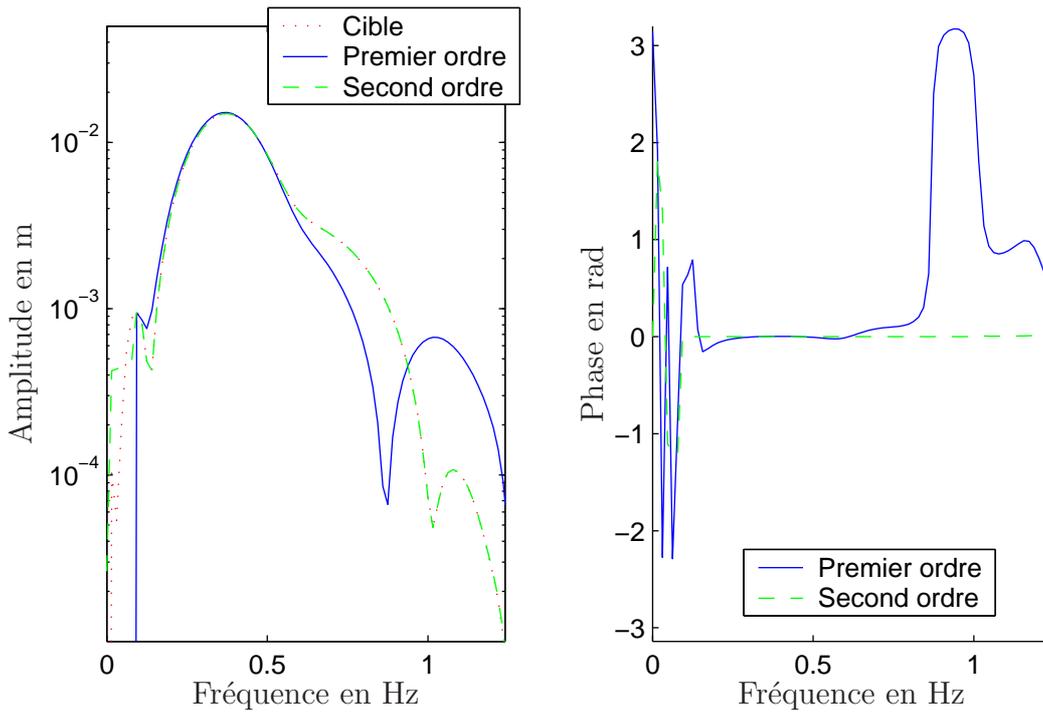


FIG. IV.1.9 – Spectre d'amplitude et de phase du mouvement du batteur (amplitude 30 cm)

gauche, on peut voir les spectres d'amplitude de la cible, de la décomposition premier et second ordres  $\underline{a}_n^{(1)} + \underline{a}_n^{(2)}$  et du premier seul  $\underline{a}_n^{(1)}$ . Les courbes pour la cible et la décomposition second ordre sont confondues et indiscernables. La courbe du premier ordre seul permet de voir que l'apport du second ordre se situe principalement à haute fréquence  $f > 0.7$  Hz (modes somme) et basse fréquence  $f < 0.2$  Hz (modes différence). Pour  $f = 0.8$  Hz, l'écart entre linéaire et cible est important : il s'agit du pic somme, à la fréquence double de celle du pic

6. On parlera de loi de commande développée au second ordre

linéaire. À droite sont tracés les différences de phase entre d'une part la cible, et d'autre part, soit la décomposition premier et second ordres  $\underline{a}_n^{(1)} + \underline{a}_n^{(2)}$ , soit le premier ordre seul  $\underline{a}_n^{(1)}$ . On constate que la décomposition premier et second ordres permet de retrouver complètement les phases du paquet de vagues cible. À nouveau le premier ordre seul permet de localiser les effets du second ordre dans les hautes et basses fréquences (les deux parties de la figure IV.1.9 ont été tracées pour un paquet de vague d'amplitude élevée 30 cm de manière à rendre bien visibles les différences entre solution au premier et au second ordre).

On peut, avant de tester cette approche, regarder l'importance des différents termes composant l'élévation second ordre obtenue (lié de Stokes<sup>7</sup>, modes somme et différence). La figure IV.1.10 à gauche montre les élévations second ordre correspondant aux termes de Stokes, somme et différence. On constate que la contribution du terme de Stokes est négligeable par rapport aux termes somme et différence. Le terme somme contribue à une modification locale du paquet focalisé en surélevant les creux latéraux et la crête principale. Sa contribution est négative lors des passages à zéro attendant à la crête principale : cette crête paraîtra plus fine. Le terme différence apporte une baisse du niveau moyen sous la crête principale et une légère surélévation sous les creux latéraux.

La carte de fréquence à droite sur la figure IV.1.10 montre l'amplitude des interactions second ordre  $\underline{a}_m \underline{a}_n^\pm G_{mn}^\pm$  en fonction des fréquences  $f_m$  et  $f_n$  des paires de composantes premier ordre interagissant. En utilisant la symétrie entre les paires  $\{m; n\}$  et  $\{n; m\}$ , on a représenté les interactions somme et différence sur une moitié seulement du quart de plan  $(f_m; f_n)$ . Sur le

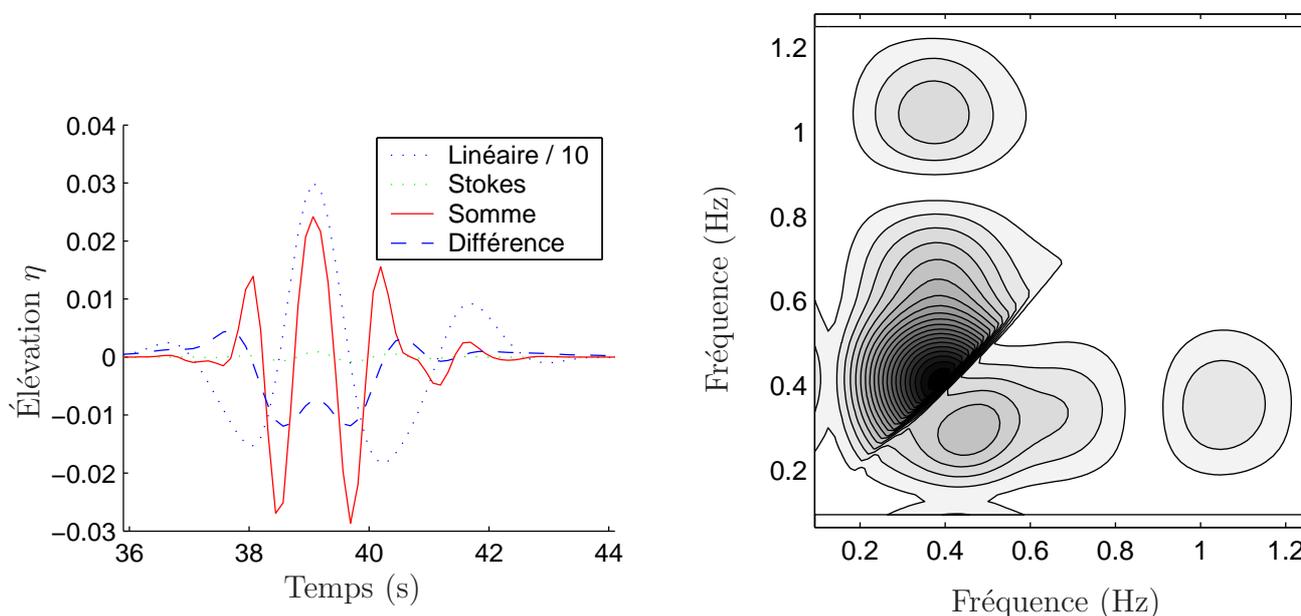


FIG. IV.1.10 – Décomposition second ordre de la cible et carte d'amplitude des interactions

triangle en bas à droite, l'amplitude des interactions différence et celles des interactions somme sur le triangle en haut à gauche. On peut observer un pic très marqué pour les interactions somme. Ces interactions prépondérantes interviennent pour le couple de fréquences [0.4; 0.4] Hz et produisent les oscillations bien distinctes de fréquence 0.8 Hz observées sur le graphique de gauche de la figure IV.1.10 ou précédemment sur la figure IV.1.9. Les interactions différence

7. On appelle ici terme lié de Stokes les composantes de fréquences  $2\omega_n$  et de nombre d'onde  $2k_n$  issues de l'interaction de chacune des composantes avec elle-même.

ne présentent pas de pic marqué en amplitude comme pour les interactions somme : l'élevation résultante sur le graphique de gauche de la figure IV.1.10 ne présente pas d'oscillations à fréquence donnée comme pour les interactions somme.

Il importe de choisir une bande de fréquence pour le premier ordre limitée aux fréquences ayant une énergie suffisante. Comme on peut le voir dans Duncan et Drake [43], lorsque l'énergie est trop faible, la solution fournie par l'algorithme itératif précédent consiste en des composantes fréquentielles erronées premier ordre et second-ordre associé de même amplitude et en opposition de phase.

Pratiquement, il apparaît que le second ordre obtenu varie peu si l'on coupe l'intervalle de fréquence attribué au premier ordre entre 1.2 et 1.5 Hz. Pour information, la décomposition ne converge pas si cet intervalle de fréquence est étendu jusqu'à 2 Hz (voir la figure de droite IV.1.1).

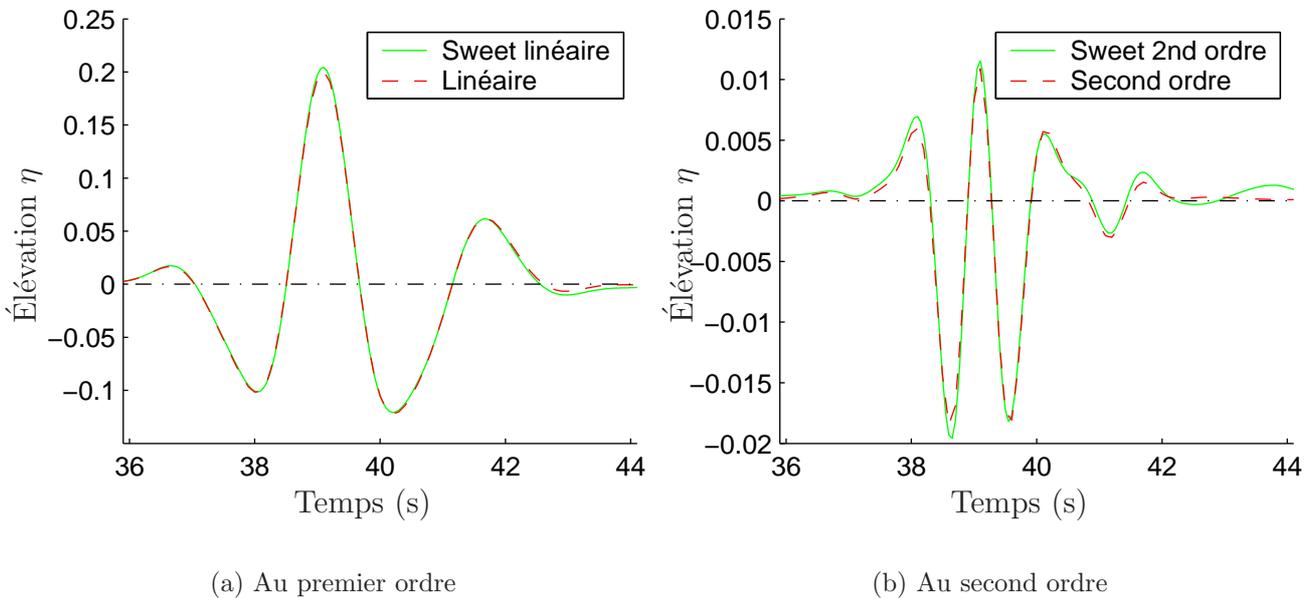


FIG. IV.1.11 – Comparaisons des simulations (*Sweet*) et des décompositions (amplitude 20 cm)

La figure IV.1.11 montre le résultat des simulations au second ordre avec la loi de commande décomposée au second ordre pour un paquet d'amplitude 20 cm. On a représenté sur la même figure quatre courbes allant par paires. D'une part l'élevation cible premier ordre est comparée à l'élevation linéaire de la simulation. D'autre part, on montre également l'élevation second ordre issue de la décomposition et celle obtenue en simulation. Pour les deux ordres, les courbes tracées se superposent parfaitement. En observant l'élevation second ordre, on peut noter que les deux creux autour du pic central apportent la modification la plus importante (en amplitude). Il s'agit de la combinaison des modes somme et différence qui tend à diminuer la largeur du pic central.

L'application de cette approche au second ordre lors des essais expérimentaux a permis de constater qu'à faible amplitude (10 cm), les différences sont minimales entre les paquets de vagues générés avec la décomposition initiale linéaire ou la décomposition initiale second ordre (voir figure IV.1.12 à droite). En regardant en détail, on peut remarquer que la décomposition second ordre conduit à des creux latéraux de meilleure amplitude. Pour un paquet de vague d'amplitude

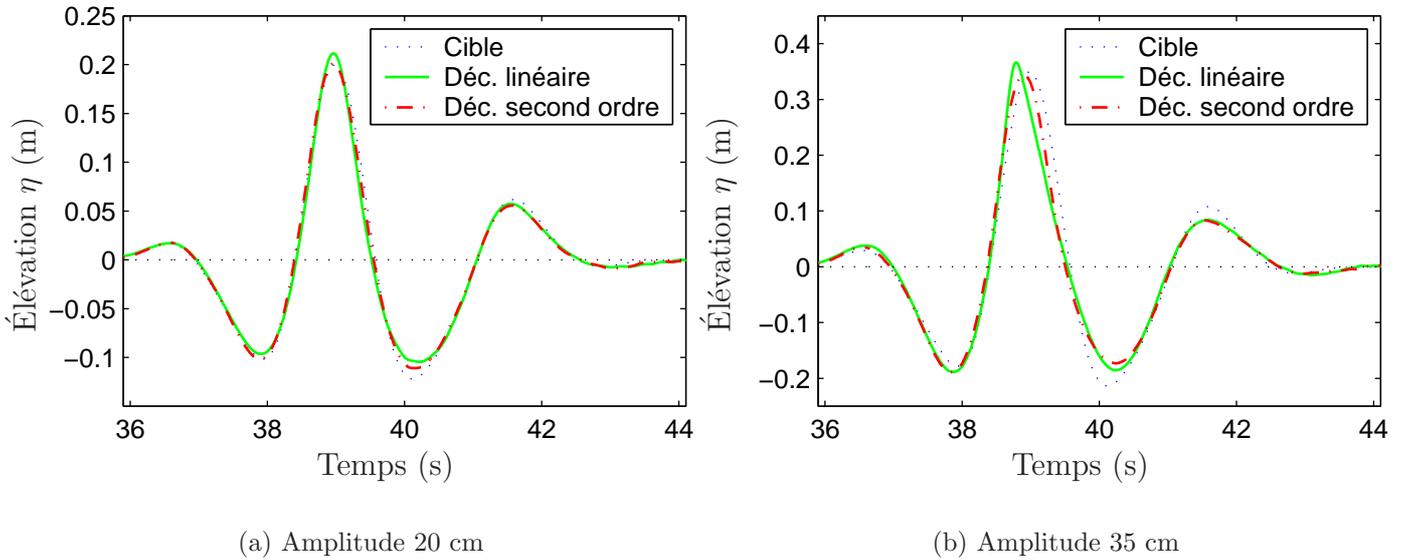


FIG. IV.1.12 – Paquets de vagues expérimentaux obtenus après décomposition linéaire et second ordre

moyenne (20 cm), on obtient une meilleure reproduction grâce à l’approche second ordre. La crête principale et les creux latéraux sont plus proches de la cible que pour la décomposition linéaire (figure IV.1.12 au centre). On peut déjà noter l’apparition d’un déphasage entre la cible et les élévations mesurées. Enfin, l’application à un cas de plus forte amplitude (35 cm) montre les limites de cette méthode au second ordre. Si dans ce cas, la méthode fournit une meilleure reproduction du pic central en amplitude, il n’en est plus de même pour les creux latéraux. Le déphasage observé précédemment s’est accentué : dans le cas linéaire, les hautes fréquences sont de plus fortes amplitudes que dans le cas second ordre. Elles arrivent visiblement plus tôt du fait des non-linéarités d’ordre supérieur (voir IV.1.4). Dans le cas second ordre où les amplitudes linéaires de ces hautes fréquences sont plus faibles, les effets déphasants non linéaires sont aussi plus faibles et le pic central est mieux reproduit.

La décomposition au premier et second ordre présentée ici fait apparaître les limitations d’une cible artificielle. Lorsqu’une telle cible est construite à *la main* il est probable qu’elle ne représente pas un paquet de vague réalisable physiquement par la focalisation d’un paquet de vague. La cible artificielle utilisée décomposée au second ordre donne ainsi un mouvement batteur constitué de deux paquets de vagues distincts. Le premier d’amplitude faible regroupe des hautes fréquences et passe au niveau de la sonde en avance par rapport à l’instant de focalisation. La contribution de ces hautes fréquences est perdue pour reproduire la cible et explique la difficulté rencontrée au niveau du pic central. La figure IV.1.13 reproduit le mouvement batteur mesuré pour un paquet de vague d’amplitude 35 cm (cible artificielle présentée sur la figure IV.1.1). On remarque pour  $t$  entre 0 et 12 s un premier paquet distinct du suivant.

Avant de passer aux approches suivantes qui ont pour objectif de prendre en compte les effets non linéaires d’ordre supérieurs, on s’intéresse aux capacités du modèle numérique non linéaire complet à reproduire ces effets. La figure IV.1.14 montre la comparaison des élévations cible, expérimentale et numérique pour des cas de fortes amplitudes (30 et 40 cm). La simulation non linéaire complet permet de reproduire correctement l’amplitude et le déphasage du pic focalisé

expérimental par rapport à la cible. Cela valide les simulations. On note une différence dans le creux précédant le pic.

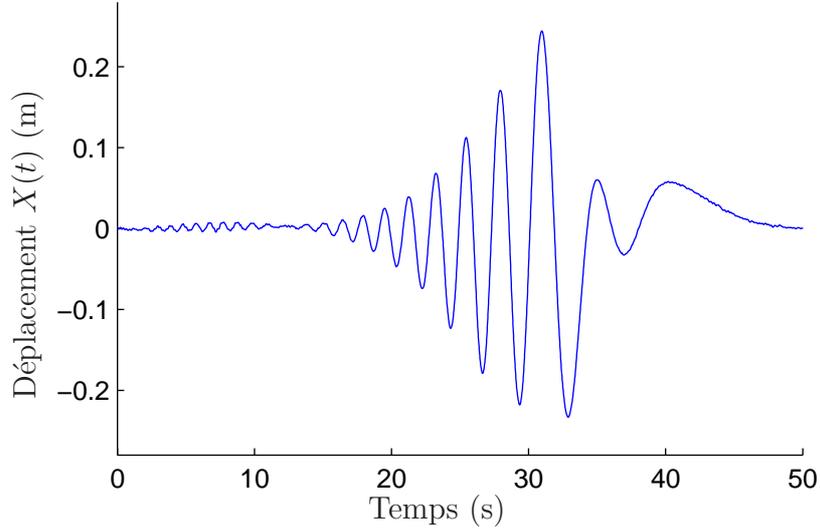
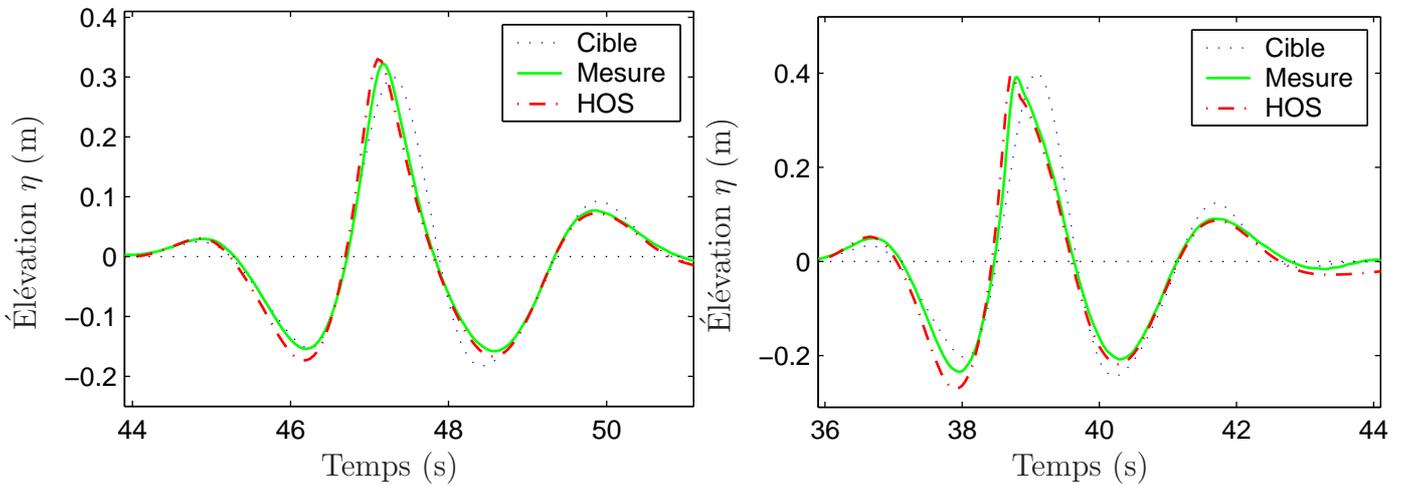


FIG. IV.1.13 – Déplacement du batteur (amplitude 35 cm)



(a) Amplitude 30 cm

(b) Amplitude 40 cm

FIG. IV.1.14 – Comparaisons entre expériences et simulations HOS

### IV.1.3 Approche itérative

Les approches de décompositions initiales linéaires et second-ordre précédentes conduisent à des déviations importantes entre la cible et le pic focalisé expérimental ou simulé en non

linéaire complet. Clairement des effets d'ordre supérieur interviennent. Il est nécessaire de corriger les lois de commande utilisées si l'on veut reproduire correctement la cible. L'approche présentée ici s'inspire du cas linéaire présenté ci-après et tente de corriger par itérations successives les différences entre élévation mesurée et cible en modifiant les composantes fréquentielles définissant le mouvement du batteur [13]. Cette technique est utilisée par exemple lorsqu'on veut obtenir un paquet de vague par la mise en phase d'un spectre de houle (Lugni [87], Chaplin [26], Contento *et al.* [36]) ou lorsque la cible est un paquet artificiel (Maisondieu *et al.* [91]). On présente tout d'abord la technique puis on l'appliquera à des essais et des simulations<sup>8</sup>.

Dans le cas d'un processus linéaire de génération et propagation<sup>9</sup> de la houle, si l'on a mesuré une élévation  $\eta_m$  différente de la cible  $\eta_c$  et que l'on souhaite corriger le mouvement batteur  $X$  alors il existe une correction  $\underline{c}$  dans le domaine de Fourier telle que

$$\underline{\hat{X}}' = \underline{c} \underline{\hat{X}}$$

où  $\underline{\hat{X}}'$  est la transformée de Fourier du mouvement corrigé. Les indices des fréquences ont été omis pour plus de clarté. On détermine la correction  $\underline{c}$  à partir des transformées de Fourier de l'élévation sur la sonde  $\underline{a_m}$  et de l'élévation cible  $\underline{a_c} = a \exp(i\phi)$

$$\underline{c} = \frac{\underline{a_c}}{\underline{a_m}}$$

L'approche développée ici consiste à appliquer itérativement cette correction linéaire aux cas de focalisation non linéaires, à la manière de Maisondieu *et al.* [91]. On s'attend à la convergence du processus comme dans Chaplin [26] et Lugni [87]. On part des décompositions précédentes (linéaire ou second-ordre). À chaque itération  $n$ , la loi de commande est spécifiée par la donnée d'un spectre d'amplitude complexe  $\underline{\hat{X}}_n$ . Cette information fréquentielle est modifiée à l'itération suivante

$$\underline{\hat{X}}_{n+1} = \underline{c}_n \underline{\hat{X}}_n$$

Plusieurs corrections  $\underline{c}_n$  ont été envisagées : sur la phase seulement, sur l'amplitude seulement, sur les deux à la fois. Cette correction est obtenue toujours en comparant les transformées de Fourier de l'élévation sur la sonde  $\underline{a_n} = a_n \exp(i\phi_n)$  à l'itération  $n$  et de l'élévation cible  $\underline{a_c}$ .

La correction d'amplitude est supposée faible et l'on adopte alors une formule de correction linéarisée.

$$\underline{c}_n = \frac{\underline{a_c}}{\underline{a_n}} = \frac{a}{a - \Delta a} \exp(i\Delta\phi) \simeq \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \exp(i\Delta\phi) \simeq \left(1 + \frac{|TF|\Delta a}{|\hat{X}_n|}\right) \exp(i\Delta\phi)$$

où  $\Delta a = a - a_n$  est la différence en amplitude et  $\Delta\phi = \phi - \phi_n$  la différence en phase entre la mesure et la cible.

La figure IV.1.15 montre le résultat obtenu avec des simulations HOS après cinq itérations. On a tracé sur cette figure la cible, l'élévation obtenue avec une décomposition initiale premier et second ordre, et l'élévation obtenue après cinq itérations de correction portant sur la phase uniquement. On observe bien une amélioration des phases du paquet généré, des différences

8. Les simulations ne seront effectuées qu'avec le code HOS en non linéaire complet puisque la méthode précédente IV.1.2 au second ordre permet de déterminer complètement le mouvement batteur nécessaire à la reproduction correcte des paquets de vagues cibles dans le code SWEET second ordre

9. On pourra se reporter à Maisondieu *et al.* [91] pour une approche *système linéaire* complète du processus de génération et de propagation de la houle linéaire et des corrections de la loi de mouvement

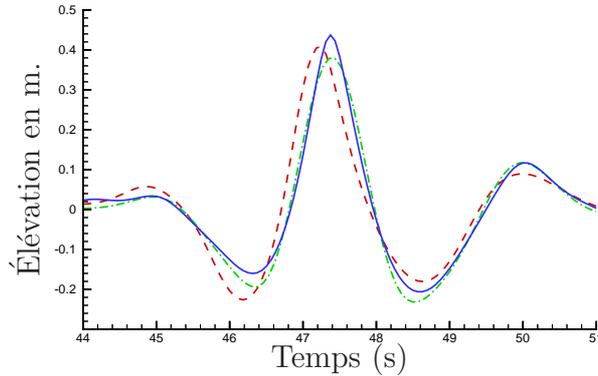


FIG. IV.1.15 – *Itérations successives lors de la correction en phase seule pour un paquet d'amplitude 38 cm (- · - cible, - - décomposition initiale et — résultat après cinq itérations)*

subsistant pour les amplitudes du pic central et des creux latéraux. La figure IV.1.16 montre les mêmes courbes avec cette fois une correction portant à la fois sur l'amplitude et la phase des composantes fréquentielles du mouvement batteur. On peut remarquer une nette amélioration concernant les creux latéraux qui sont bien reproduits avec cette correction. L'amplitude du pic central est quant à elle toujours surestimée, ce qui traduit un contrôle inadéquat des fréquences élevées.

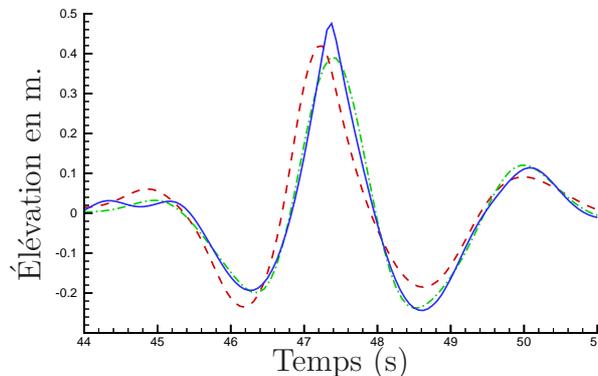


FIG. IV.1.16 – *Itérations successives lors de la correction en amplitude-phase pour un paquet d'amplitude 38 cm (- · - cible, - - décomposition initiale et — résultat après cinq itérations)*

Cet essai met en évidence les limitations de la correction itérative : à la fois la contribution des faibles fréquences est mal contrôlée au niveau du pic central (on peut également remarquer des oscillations apparaissant avant le paquet focalisé à  $t = 45$  s sur la figure IV.1.16). Le mouvement batteur observé pendant les essais témoigne aussi d'une forte excitation des basses fréquences. Ces défauts observés sont de plus en plus prononcés au fur et à mesure des itérations, ce qui limite le nombre d'itérations possibles (cinq dans les exemples précédents).

Plusieurs tentatives ont été effectuées pour améliorer le résultat. La première est de n'appliquer la correction qu'aux composantes possédant une énergie non négligeable. Différents seuils en énergie ont été testés sans noter d'amélioration probante. Une seconde précaution a été

appliquée qui consiste à relaxer les itérations

$$\underline{c}_n = \left(1 + \alpha \frac{\Delta a}{a}\right) \exp(i\beta\Delta\phi)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes inférieures à un. Là encore cette tentative s'est révélée inefficace.

La surestimation du pic est liée au mauvais contrôle des faibles longueurs d'onde. Le contrôle des hautes fréquences s'avère difficile avec la technique itérative mise au point. La raison principale est une mauvaise prise en compte des effets du second ordre. Après la décomposition initiale qui tient compte de ces effets, les itérations suivantes sont une approche linéaire. La transformée de Fourier pour une fréquence  $f$  donnée, est interprétée comme un signal linéaire alors qu'elle contient à la fois les informations du signal linéaire à cette fréquence  $f$  et également les informations de toutes les interactions somme et différence à cette fréquence (par exemple elle contient la correction de Stokes pour l'onde élémentaire de fréquence  $f' = f/2$ ).

Un remède simple consiste à appliquer la décomposition linéaire et second ordre à chaque itération et se baser uniquement sur la partie linéaire pour effectuer la correction. Ce remède n'a toutefois pas été mis en place car une autre approche, plus simple et facilement extensible à l'ordre suivant, est présentée dans la section suivante.

En résumé, l'approche itérative consiste en une première prise en compte, indirecte, des effets non linéaires d'ordre supérieur à deux, qui aboutit à une nette amélioration des paquets de vague reproduits. Les différences résiduelles à la cible ont permis une bonne analyse des phénomènes à contrôler, à savoir les hautes fréquences pour le pic central.

## IV.1.4 Approche vitesse de phase non linéaire

Cette approche vise à vérifier que les principales différences observées entre les paquets de vague générés à partir d'une décomposition second ordre et le paquet cible peuvent s'expliquer par les effets du troisième ordre et à tenir compte de ces effets pour produire une loi de commande plus performante. Dans cette section, on présentera tout d'abord le principe de base qui vise à séparer les effets d'ordre pair et impair en non-linéarités. Il sera validé sur un cas de faible amplitude puis on simplifiera l'expression (IV.1.4a) obtenue pour déterminer simplement la vitesse de phase réelle des ondes. Enfin, on emploiera cette vitesse pour corriger le mouvement du batteur sur des cas de fortes amplitudes qui valideront cette approche.

On peut séparer ces effets du troisième ordre en termes résonnants, responsables par exemple en houle régulière de l'augmentation de la vitesse de phase ou d'instabilités comme celle de Benjamin-Feir, et en termes non résonnants (par exemple les termes analogues aux modes somme et différence du second ordre, qui n'entrent pas dans la catégorie précédente). On pense que les différences constatées entre la cible et les expériences s'expliquent principalement par la modification de la vitesse de phase (voir *e.g.* Longuet-Higgins et Phillips [85]) des composantes linéaires d'entrée de la commande batteur. Cette approche a été utilisée par exemple par Maisondieu *et al.* [91] où la vitesse de phase réelle était mesurée directement à partir de la Transformée de Fourier de l'élévation mesurée. L'interprétation de la phase de la TF en terme de vitesse de phase de l'onde n'est correcte que si l'onde à cette fréquence se propage librement. Dans le cas des hautes fréquences qu'on a du mal à contrôler correctement, ce n'est pas le cas puisqu'on a superposition de l'onde linéaire et des ondes second ordre liées. La technique mise en œuvre ici permet de s'affranchir des effets du second ordre qui viennent perturber cette évaluation de la vitesse de phase réelle. Le principe de base est de séparer les effets d'ordre

pairs et impairs en perturbation. On a vu en IV.1.2 comment faire au second ordre à partir d'une élévation cible. La même technique étendue au troisième ordre nécessiterait de longs calculs pour évaluer les coefficients d'interactions du troisième ordre, donnés partiellement par Longuet-Higgins [83] par exemple. On propose ici une nouvelle technique plus simple, qui utilise deux élévations et fournit la modification de la vitesse de phase par les effets du troisième ordre.

#### IV.1.4.1 Principe de base

On se place dans le cas où une première estimation de la loi de commande du batteur a été effectuée, par exemple à partir des composantes  $\underline{a}_n$  linéaires de la cible (voir la section IV.1.1). On suppose qu'un premier paquet de vague a été généré et mesuré grâce à cette loi de commande. En suivant Johannessen et Swan [70], on génère un second paquet avec des composantes de même amplitude mais déphasées<sup>10</sup> de  $\pi$ . Le premier essai présentant un pic focalisé (crête), le second verra la formation d'un creux focalisé. La figure IV.1.17 montre l'élévation cible pour un paquet de vague d'amplitude 40 cm ainsi que l'élévation mesurée  $\eta(t)$  dans le cas d'une focalisation en crête et l'élévation mesurée lors de la focalisation en creux  $\eta_\pi(t)$  grâce au déphasage de  $\pi$  sur toutes les composantes du mouvement batteur. On voit

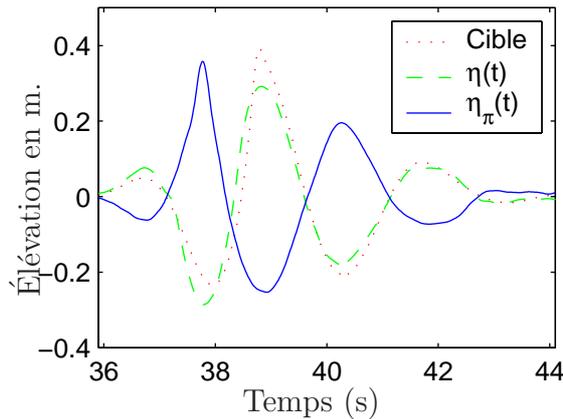


FIG. IV.1.17 – Focalisations expérimentales en crête et en creux pour un paquet de vague d'amplitude 40 cm

apparaître les effets attendus des non-linéarités : les creux sont aplatis et les crêtes accentuées entre le paquet en crête et celui en creux, ce qui témoigne des effets d'ordre deux. Ces crêtes et creux sont de plus déphasés par rapport à la cible, ce qui s'explique au troisième ordre en série de perturbations.

À partir des deux paquets de vague ainsi générés, on construit deux élévations impaire et paire :

$$\eta_{odd} = (\eta - \eta_\pi)/2 \quad (\text{IV.1.3a})$$

$$\eta_{even} = (\eta + \eta_\pi)/2 \quad (\text{IV.1.3b})$$

Dans une description en série de perturbation de l'élévation de surface libre, les composantes dont l'amplitude fait intervenir des produits d'ordre impair des amplitudes linéaires d'entrée se

<sup>10</sup>. Ou autrement dit avec des amplitudes complexes opposées  $-\underline{a}_n$ . Cette deuxième description rend évidente la décomposition suivant la parité, intervenant dans l'équation (IV.1.3).

retrouvent dans l'élévation de surface libre impaire  $\eta_{odd}$  donnée par l'équation (IV.1.3a). Ce sera le cas pour la partie linéaire et le troisième ordre. De même, les composantes dont l'amplitude fait intervenir des produits d'ordre pair d'amplitudes se retrouvent dans l'élévation de surface libre paire  $\eta_{even}$  donnée par l'équation (IV.1.3b). Ce sera le cas du second ordre. La génération des deux paquets en crête et en creux et la décomposition (IV.1.3) permettent donc de séparer les composantes de la série de perturbation en fonction de la parité de leurs amplitudes vis-à-vis des amplitudes d'entrée<sup>11</sup>.

Si on part d'une décomposition linéaire initiale donnée par l'équation (IV.1.1) :

$$\eta = \sum_n \underline{a}_n e^{i(\omega_n t - k_n x)}$$

avec  $\omega_n^2 = gk_n \tanh k_n h$ , alors on pose qu'au troisième ordre, les élévations paires et impaires sont approchées par l'expression suivante<sup>12</sup>

$$\eta_{odd} = \sum_n \underline{a}'_n e^{i(\omega_n t - k'_n x)} + \sum_{m,n,p} \underline{a}_m \underline{a}_n^\pm \underline{a}_p^\pm F_{mnp}^{\pm,\pm} e^{i((\omega_m \pm \omega_n \pm \omega_p)t - (k'_m \pm k'_n \pm k'_p)x)} \quad (\text{IV.1.4a})$$

$$\eta_{even} = \sum_{m \geq n} \underline{a}_m \underline{a}_n^\pm G_{mn}^\pm e^{i((\omega_m \pm \omega_n)t - (k'_m \pm k'_n)x)} \quad (\text{IV.1.4b})$$

Dans cette expression, le premier ordre initial est représenté par la première somme dans  $\eta_{odd}$  où  $\underline{a}'_n = \underline{a}_n(1 + A_n)$  est l'amplitude modifiée par le troisième ordre et  $k'_n = k_n(1 + K_n)$  le nombre d'onde modifié par des interactions résonnantes (de manière équivalente, on peut parler de vitesse de phase modifiée). Le deuxième ordre est contenu dans  $\eta_{even}$  et correspond à la décomposition classique somme et différence : le terme somme correspond à avec  $\underline{a}_n^+ = \underline{a}_n$  et

11. Il est intéressant de noter pour la suite que la séparation concerne seulement les amplitudes. Les effets non linéaires sur les phases ne sont pas séparés par cette technique et apparaissent dans les deux élévations paire et impaire.

12. Dans cette expression, les interactions à quatre vagues non-résonnantes sont incluses en totalité, mais il n'en est pas de même pour les interactions à quatre vagues résonnantes. En effet sont négligées ici les interactions résonnantes responsables d'instabilités : elles fourniraient des ondes dont l'amplitude croît avec la distance au batteur. Plusieurs justifications sont avancées :

- la comparaison du spectre d'entrée et du spectre mesuré ou simulé au point de focalisation ne met pas en évidence l'apparition de nouvelles composantes dues à un effet du troisième ordre
- le point de focalisation des paquets de vague où a lieu la mesure de l'élévation se trouve relativement proche du batteur en comparaison des distances d'interaction nécessaires au développement des instabilités de type Benjamin-Feir. La simulation des expériences de Johannessen et Swan a montré qu'il s'agissait d'une fausse piste (voir la section IV.1.4.5).
- on pense que la forme du spectre joue un rôle important. Les instabilités apparaissent d'autant plus facilement que le spectre est étroit. Une coupure nette à haute fréquence semble aussi propice à l'apparition des instabilités.

Cette approximation est fondamentale et distingue notre approche de celle de Johannessen et Swan [70] qui observent pour leurs paquets de vagues l'apparition de nouvelles composantes qu'ils interprètent comme un élargissement du régime dit libre (ce régime libre correspond à l'ensemble des ondes de tout ordre se propageant à leurs propres vitesses de phase par opposition aux ondes liées). Plutôt qu'un élargissement du régime d'ondes libres dû au transfert d'énergie entre ondes, les modifications des paquets de vagues générés ici sont interprétées comme la modification des vitesses de phase du régime d'ondes libres initial d'ordre un. Nous considérons ici que les transferts d'énergie vers des ondes libres non incluses dans le jeu d'entrée linéaire conduisent à des ondes d'amplitude très faible au niveau du point de focalisation que l'on néglige. Comme dans tout modèle physique, cette approximation, qui a apporté jusqu'à présent de bons résultats, sera conservée tant qu'aucun calcul ou expérience ne viendra la contredire.

$G_{mn}^+$ , le terme différence à  $\underline{a}_n^- = \overline{a}_n$  et  $G_{mn}^-$ . Les facteurs de couplage  $G_{mn}^\pm$  ne dépendent que de  $k_m$  et  $k_n$  (on se reportera à l'annexe E pour l'expression des coefficients  $G_{mn}^\pm$  en remarquant qu'ici les auto-interactions ont été intégrées dans les termes somme pour ne pas alourdir la formulation). Seul est modifié à nouveau le nombre d'onde comme dans le cas d'une houle régulière. L'effet du troisième ordre, en plus de la modification de phase et d'amplitude sur les premier et second ordres, apporte une contribution d'amplitude faible à l'élévation impaire, donnée par la somme triple dans l'équation (IV.1.4a).

#### IV.1.4.2 Validation à faible amplitude

Avant d'utiliser la décomposition (IV.1.4) pour déterminer les vitesses de phase réelles, on valide dans un premier temps cette expression sur un paquet de faible amplitude. On applique la double génération à un paquet de vague d'amplitude 10 cm, pour lequel les effets de troisième ordre sont faibles, de manière à vérifier l'interprétation des élévations  $\eta_{odd}$  et  $\eta_{even}$  au premier et second ordre.

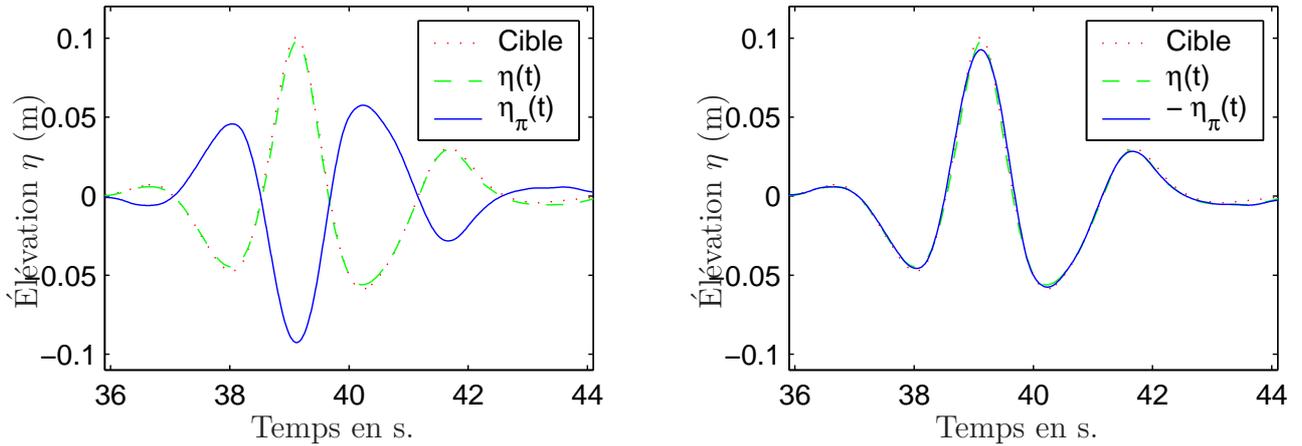


FIG. IV.1.18 – Focalisations expérimentales en crête et en creux pour un paquet de vague d'amplitude  $A=10$  cm

On part d'une cible expérimentale à savoir un paquet de vague focalisé mesuré sur une sonde à 25 m du batteur. On applique une décomposition initiale linéaire de l'élévation mesurée pour obtenir la loi de commande du batteur permettant de reproduire ce paquet (voir la section IV.1.1). On génère le paquet de vague grâce à cette prédiction de la loi de mouvement ainsi que le paquet avec un déphasage de  $\pi$  pour chaque composante fréquentielle du mouvement batteur. Les deux élévations  $\eta(t)$  et  $\eta_\pi(t)$  ainsi obtenues sont combinées selon les équations (IV.1.3) pour fournir l'élévation linéarisée  $\eta_{odd}$  et l'élévation paire  $\eta_{even}$ . On peut alors comparer  $\eta_{odd}$  et  $\eta_{even}$  avec respectivement l'élévation linéaire et l'élévation second ordre reconstruites à partir des composantes fréquentielles du mouvement batteur, grâce aux formules (IV.1.1) et (IV.1.2). La figure IV.1.18 montre ainsi à gauche les relevés de la sonde pour la cible, la focalisation en crête  $\eta(t)$  et la focalisation en creux  $\eta_\pi(t)$ . À droite, la superposition de l'élévation en crête et l'opposé de l'élévation en creux permet déjà de dire que les effets du troisième ordre sont négligeables.

La figure IV.1.19 compare cette fois les élévations paire et impaire combinées d'après les équations (IV.1.3) et les élévations théoriques, calculées à partir des composantes du batteur.

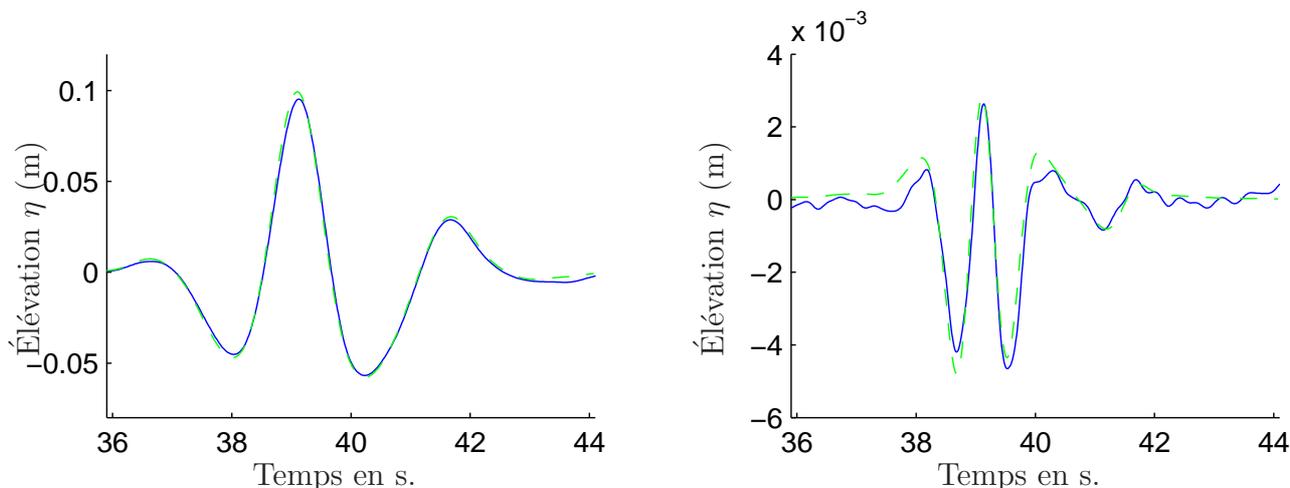


FIG. IV.1.19 – Décompositions pair/impair et solutions analytiques (paquet de vague d'amplitude  $A=10$  cm : à gauche  $\eta_{odd}$  (—), linéaire théorique (---), à droite  $\eta_{even}$  (—) et second ordre théorique (---))

À gauche au premier ordre et à droite au second ordre, on constate un très bon accord entre les élévations déduites des mesures et celles prédites par les composantes fréquentielles d'entrée.

### IV.1.4.3 Simplification

Lorsqu'on traite de paquet de vague de plus forte amplitude, on tente de conserver les effets d'ordre supérieur dans l'expression (IV.1.4). On simplifie l'expression de l'élévation de surface libre impaire (IV.1.4) pour ne retenir que les termes d'amplitude non négligeable. Cette élévation impaire est donc décomposée en la superposition de composantes ayant l'amplitude et la phase linéaires d'entrée ( $a_n$ ), mais une vitesse de phase modifiée (ou de manière équivalente un vecteur d'onde modifié  $k'_n$ ).

$$\eta_{odd} = (\eta - \eta_\pi)/2 \simeq \sum_n \frac{a_n}{x} e^{i(\omega_n t - k'_n x)}$$

Connaissant les phases initiales  $\arg a_n$ , on peut après TF de  $\eta_{odd}$  obtenir la variation de phase liée à la modification du nombre d'onde :

$$k'_n = \frac{\arg a_n - \arg a_{odd}}{x}$$

On peut également estimer la vitesse de phase non linéaire  $v_\varphi = \omega_n/k'_n$ . On propose la validation suivante :

L'élévation impaire  $\eta_{odd}$  a fourni les phases. La décomposition initiale (simple TF en linéaire, ou méthode second ordre plus élaborée) fournit elle les amplitudes. On peut alors calculer l'élévation théorique tenant compte des effets du troisième ordre sur la vitesse de phase, au premier ordre et au second ordre. L'élévation premier ordre théorique corrigée s'écrit

$$\eta_c^{(1)} = \sum_n \frac{a_n}{x} e^{i(\omega_n t - k'_n x)}$$

et l'élévation second ordre théorique corrigée

$$\eta_c^{(2)} = \sum_{m \geq n} \underline{a}_m \underline{a}_n^\pm G_{mn}^\pm e^{i((\omega_m \pm \omega_n)t - (k'_m \pm k'_n)x)}$$

avec  $\underline{a}_n^+ = \underline{a}_n$  et avec  $\underline{a}_n^-$  son conjugué. On peut les comparer respectivement aux élévations impaire et paire et aux élévations linéaires et second ordre calculées à partir des composantes d'entrée sans correction.

Les trois figures suivantes IV.1.20, IV.1.21 et IV.1.22 montrent ces comparaisons pour des paquets de vagues d'amplitude 20, 30 et 40 cm. Les élévations notées 'linéaire' et 'second ordre' correspondent aux composantes d'entrée non corrigées. Sur la première, on peut voir à gauche que pour cette amplitude modérée, les effets déphasants du troisième ordre ont encore peu d'influence sur l'élévation linéaire. La correction proposée est très faible. Sur la figure IV.1.20 de droite en revanche, au second ordre, on constate que la correction des vitesses de phase permet d'expliquer les différences entre l'élévation théorique purement second ordre et l'élévation paire déduite des expériences. En effet, l'élévation second ordre corrigée se superpose bien avec l'élévation paire.

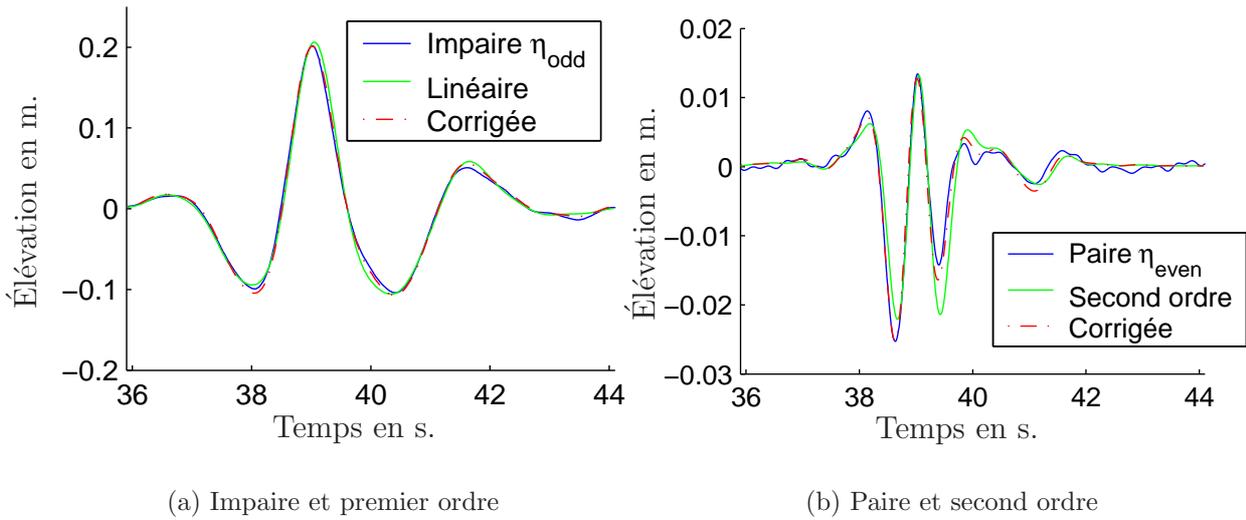


FIG. IV.1.20 – Décompositions paire/impair, solution théorique et correction de la vitesse de phase (paquet de vague d'amplitude  $A=20$  cm)

La figure IV.1.21 s'applique à un paquet de vague d'amplitude 30 cm cette fois. On constate tout d'abord, sur la figure de gauche, que les effets du troisième ordre sur la phase se font sentir sur l'élévation impaire qui diffère de l'élévation purement linéaire. La correction des phases permet de rattraper l'essentiel des différences entre l'élévation linéaire et l'élévation impaire, comme attendue. La figure de droite apporte une validation très nette: l'élévation second ordre corrigée se superpose bien avec l'élévation paire. La correction de phase tirée de l'élévation impaire est donc bien cohérente avec le second ordre associé. La prise en compte des modifications de phase par les effets du troisième ordre permet d'expliquer les déphasages observés entre les expériences paires et impaires et les élévations théoriques du premier et du second ordre. Enfin, la figure IV.1.22 montre le comportement de la méthode pour un paquet de vagues de 40 cm, à la limite du déferlement.

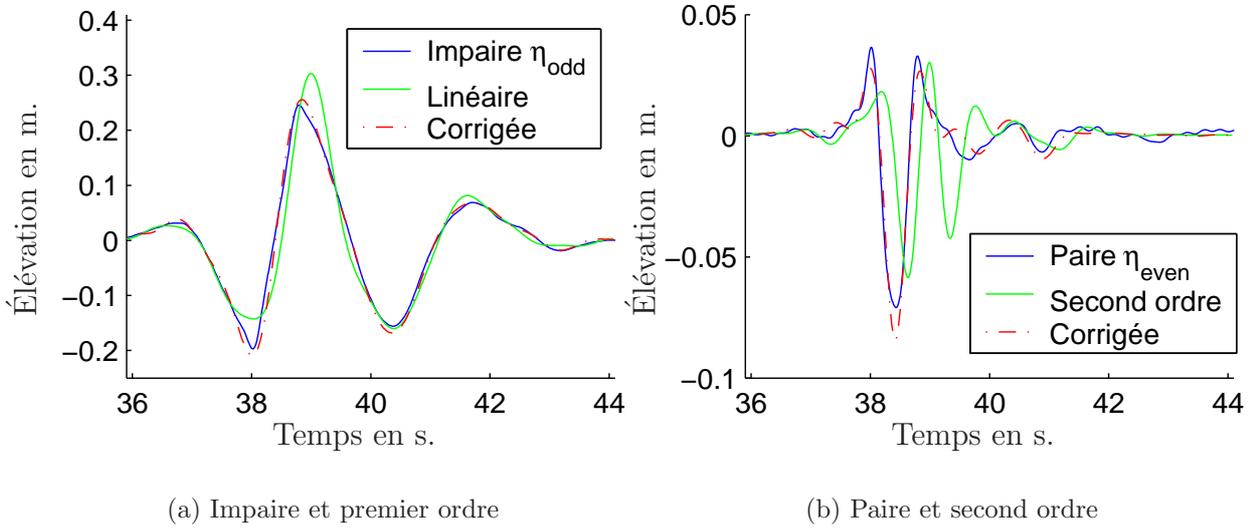


FIG. IV.1.21 – Décompositions paire/impaire, solution théorique et correction de la vitesse de phase (paquet de vague d'amplitude  $A=30$  cm)

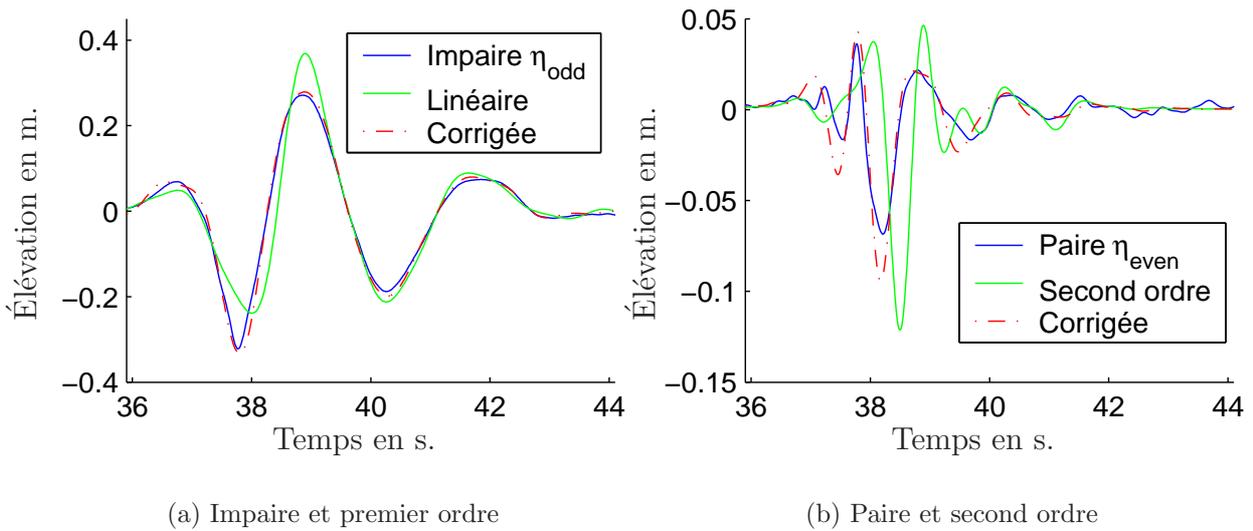


FIG. IV.1.22 – Décompositions paire/impaire, solution théorique et correction de la vitesse de phase (paquet de vague d'amplitude  $A=40$  cm)

#### IV.1.4.4 Application à la reproduction déterministe

La figure IV.1.23 présente les résultats obtenus pour un paquet de vagues d'amplitude 30 cm. On montre l'élévation de surface libre simulée au point de focalisation théorique du paquet de vague à partir de deux lois de mouvement différentes, calculées à partir de

- la décomposition initiale (premier à gauche et second ordre à droite)
- la décomposition corrigée grâce à la vitesse de phase non linéaire

On constate tout d'abord que la décomposition initiale au second ordre produit à nouveau un paquet de vagues initial plus proche de la cible que la décomposition linéaire, comme on l'a vu en IV.1.2. Ensuite, la correction de cette entrée initiale grâce aux vitesses non linéaires estimées par la méthode décrite précédemment donne un accord encore meilleur avec la cible. À la fois l'amplitude et la phase du pic central sont correctement reproduits avec cette correction. Pour obtenir cette amélioration, trois essais ont été nécessaires (focalisation en crête, en creux et focalisation corrigée). Au troisième essai l'écart avec la cible à reproduire est plus faible qu'avec le même nombre d'essais par la méthode itérative présentée en IV.1.3 (focalisation en crête puis deux corrections successives).

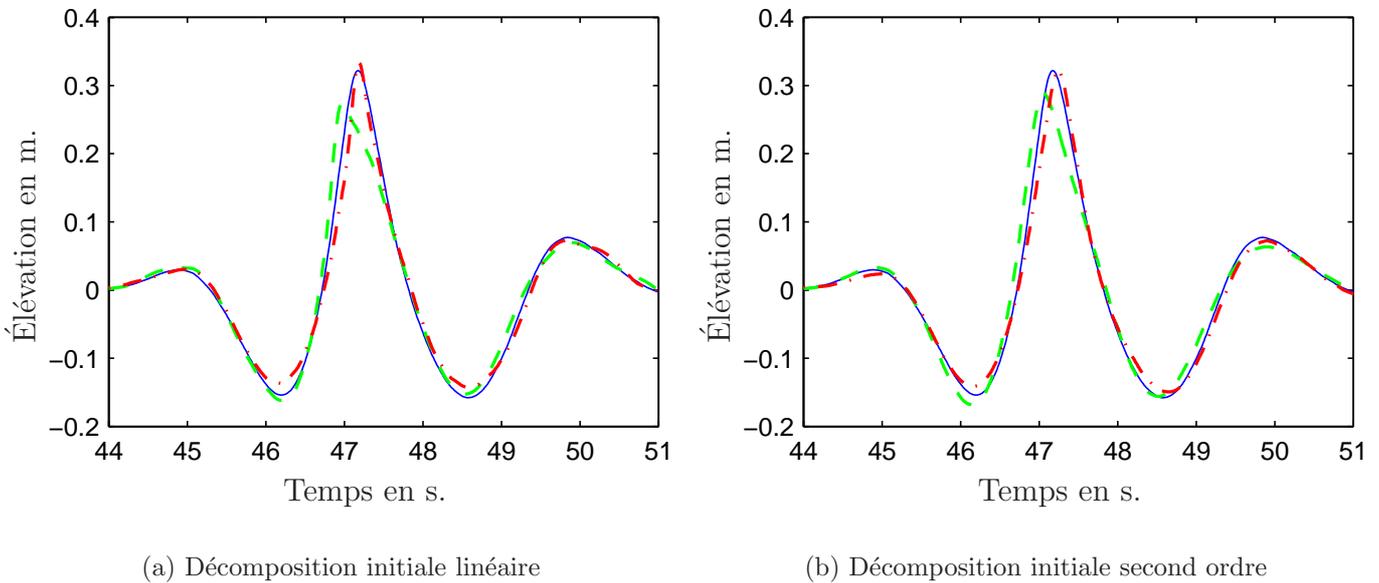


FIG. IV.1.23 – *Reproduction déterministe pour un paquet de vagues d'amplitude 30 cm : cible (—), entrée initiale (- -) et entrée corrigée (- . -)*

La figure IV.1.24 applique l'estimation des vitesses de phase non linéaires à un paquet de 40 cm d'amplitude, proche du déferlement. Seule l'expérience avec une décomposition linéaire a été réalisée cette fois.

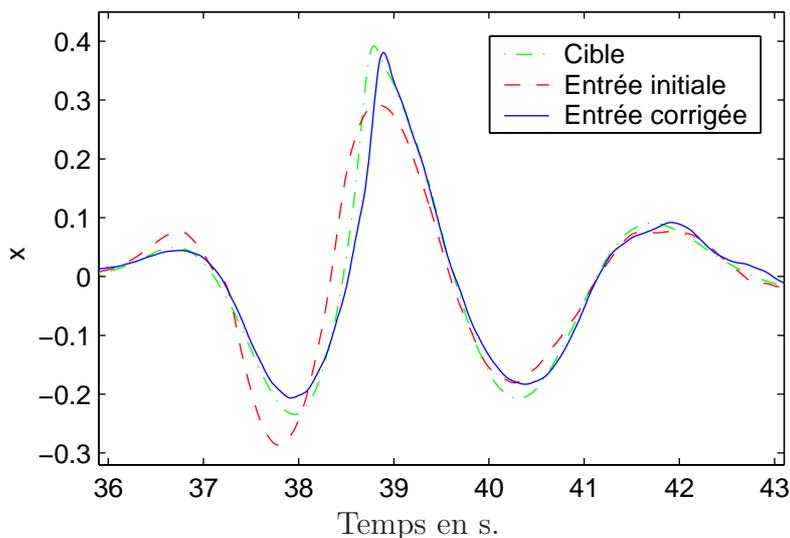


FIG. IV.1.24 – *Reproduction déterministe pour un paquet de vagues d’amplitude 40 cm (décomposition initiale linéaire)*

#### IV.1.4.5 Théorie et instabilités

##### Approche théorique au troisième ordre

L’étude des interactions résonantes à quatre ondes fournit une évaluation théorique de la modification de vitesse de phase. Les conditions de résonance s’écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_4 &= \pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 \\ \omega_4 &= \pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \end{aligned}$$

Selon Longuet-Higgins et Phillips [85], le cas le plus général d’interactions résonantes intervenant sur la phase est le jeu de nombres d’onde  $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$  et de même pour les fréquences avec le jeu de signe  $++-$ . La généralisation de ces interactions à un spectre de fréquences  $f_n = n\delta f$  conduit, pour la fréquence  $f_n$ , à une modification de nombre d’onde :

$$k'_n - k_n = -k_n \left( 2 \sum_{p < n} \frac{\omega_p}{\omega_n} k_n k_p |a_p|^2 + k_n^2 |a_n|^2 + 2 \sum_{p > n} \frac{\omega_p}{\omega_n} k_n^2 |a_p|^2 \right) \quad (\text{IV.1.5})$$

Par rapport à l’article de cité ci-dessus, un facteur deux a été appliqué : on suppose ici que la fréquence est fixée alors que LHP travaillent à longueur d’onde fixée. D’après Bredmose [22], ce facteur deux en profondeur infinie est plus précisément égal au rapport de la vitesse de phase sur la vitesse de groupe,  $v_\phi/c_g$  (qui vaut bien deux en profondeur infinie). L’équation (IV.1.5) montre que la contribution de Stokes (le terme  $k_n^3 |a_n|^2$ ) qui provient de l’interaction de l’onde avec elle-même, sera négligeable par rapport à la somme des interactions avec les autres fréquences.

Les figures IV.1.25, IV.1.26 et IV.1.27 comparent la modification du nombre d’onde théorique du troisième ordre donnée par l’expression (IV.1.5) et la modification mesurée dans les essais expérimentaux correspondants aux trois paquets de vagues d’amplitude 20, 30 et 40 cm.

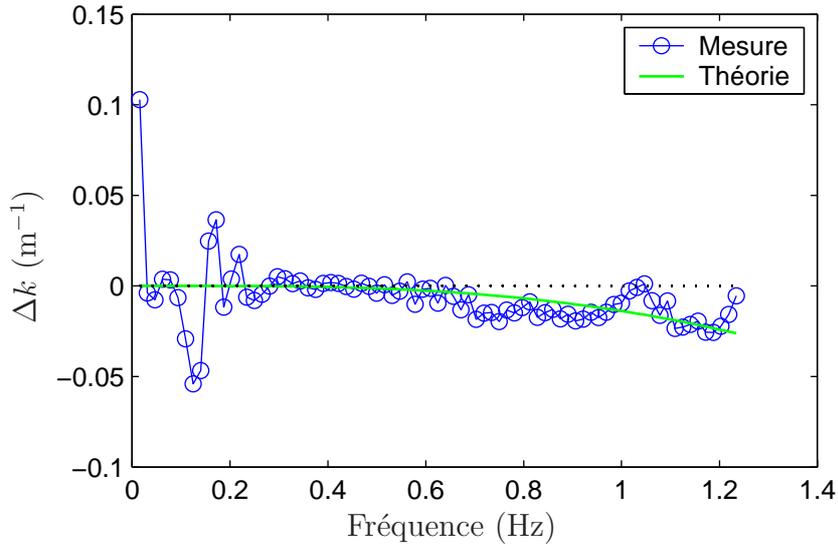


FIG. IV.1.25 – Modification du nombre d'onde (paquet de vagues d'amplitude 20 cm)

L'accord est correct pour l'amplitude 20 cm sur la figure IV.1.25, pour les fréquences supérieures à 0.2 Hz. Les oscillations qui apparaissent à basse fréquence ( $f < 0.2$  Hz) correspondent à des ondes de très faible amplitude. À plus forte amplitude, 30 et 40 cm, on constate cette fois que la courbe théorique s'écarte des mesures. Il apparaît que la modification mesurée lors des expériences est environ deux fois celle prévue par la théorie.

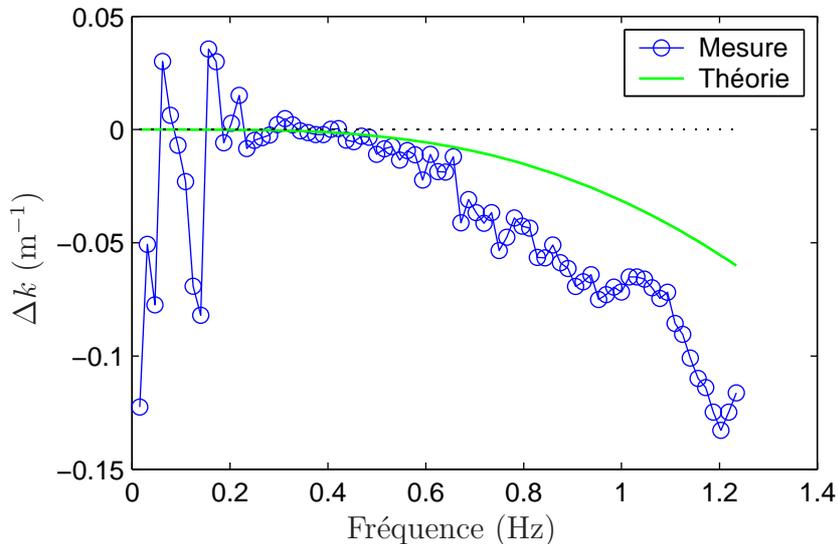


FIG. IV.1.26 – Modification du nombre d'onde (paquet de vagues d'amplitude 30 cm)

L'expression (IV.1.5) a été établie en profondeur infinie pour des effets du troisième ordre. On peut penser que la différence entre les mesures et l'expression théorique (IV.1.5) s'explique par la non prise en compte de la profondeur finie et par des effets d'ordre supérieur. On peut envisager d'étudier plus en détails ces hypothèses à l'aide de simulation non linéaires en limitant l'ordre HOS  $M$  à 3.

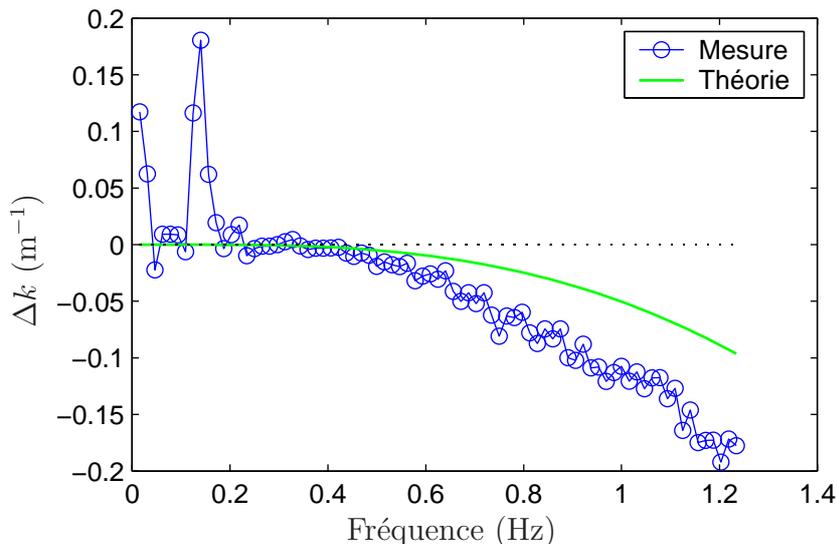


FIG. IV.1.27 – Modification du nombre d'onde (paquet de vagues d'amplitude 40 cm)

### Instabilités

Les expériences effectuées par Johannessen et Swan montrent le développement d'instabilités qui provoquent un élargissement du régime libre. Les spectres d'entrée pour générer le mouvement batteur sont discontinus : on suppose que cette discontinuité notamment à haute fréquence, là où le régime libre gagne des composantes, est responsable de ces instabilités.

Des simulations ont été effectuées avec ce genre de spectre d'entrée (CWS ou cambrure constante = CWT ou Top Hat period spectrum in Bateman). L'idée est de vérifier dans un premier temps si cette apparition d'instabilités est due à la gamme de fréquences utilisées.

On a reproduit numériquement un cas expérimental tiré de Johannessen et Swan [70] pour lequel on peut observer une croissance importante de l'amplitude pour des fréquences hors du spectre de départ (instabilités). Le cas étudié est appelé Dud61 dans leur article : il s'agit d'un essai uni-directionnel (ud) d'amplitude au point de focalisation  $A = 61$  mm. La fréquence moyenne est de  $f_m = 0.99$  Hz et le spectre d'entrée décroissant en  $1/f^2$  entre 0.83 et 1.25 Hz donne une largeur de bande de  $\Delta_f = 0.13$  Hz. La sonde est positionnée à 5.5 m du batteur dans un bassin de profondeur 1.2 m.

On a voulu vérifier qu'il ne s'agissait pas d'un effet d'échelle, la gammes de fréquence étant différente de celles utilisées dans les parties précédentes. On a ainsi reproduit le cas expérimental de Johannessen et Swan pour trois facteurs d'échelle différents, 1, 5 et 0.5. Le cas de facteur 1 correspond à la géométrie de Johannessen et Swan, le cas de facteur 0.5 à une géométrie plus petite et enfin le cas de facteur 5 nous ramène aux dimensions utilisées au cours des expériences précédentes ( $f_m = 0.44$ Hz,  $\Delta_f = 0.058$ Hz,  $A = 30.5$  cm à une distance de 25 m du batteur). La figure IV.1.28 montre les spectres d'amplitudes obtenu sur la sonde pour les trois échelles différentes. Les gammes de fréquence d'entrée sont indiquées en tiret noir, pour le premier et le second ordre lié. Le spectre linéaire d'entrée est représenté en trait plein noir. Enfin, les spectres mesurés lors de simulations numériques en non linéaire complet (HOS) sont présentés, pour la focalisation en crête, l'élévation impaire et l'élévation paire. On peut constater l'apparition d'instabilité pour les fréquences comprises entre les gammes linéaire et second ordre. Ces composantes supplémentaires sont présentes sur l'élévation impaire : elles

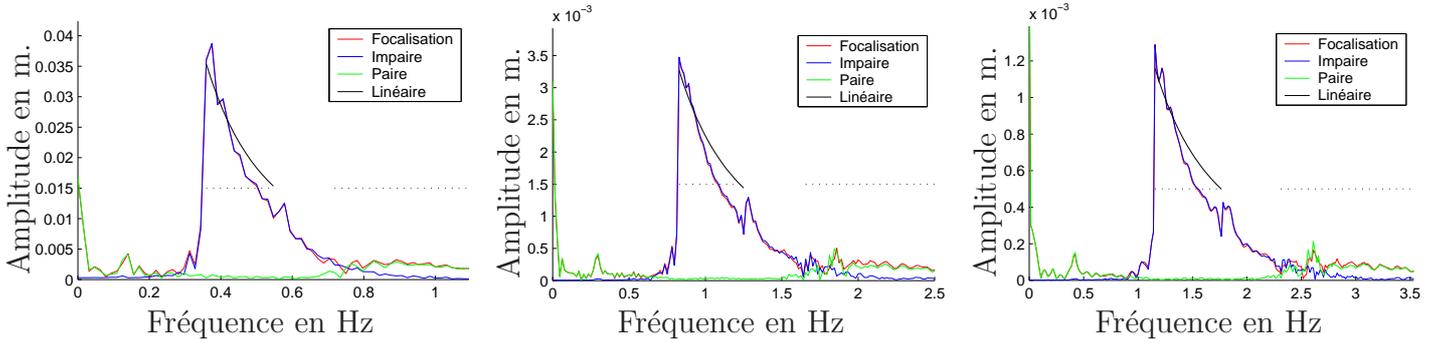


FIG. IV.1.28 – Spectre d’amplitude pour le cas *Dud61* et trois facteurs d’échelle différents (de gauche à droite : 5, 1 et 0.5)

proviennent d’effets d’ordre trois. L’amplitude obtenu au niveau de la sonde est la même pour les trois gammes de fréquences : la croissance de ces instabilités entre le batteur est la sonde est indépendante de la gamme de fréquence.

De telles instabilités n’ont pas été observées lors des essais effectués au cours de cette thèse. On vient de voir que la raison de cette absence dans notre cas ne provient pas de la gamme différente de fréquence employée. L’origine de ces instabilité vient à notre avis de la forme du spectre d’entrée utilisé par Johannessen et Swan, qui passe brusquement à zéro pour  $f = 1.25$  Hz. Une telle rupture entraîne un fort transfert d’énergie vers les fréquences juste supérieures à la fréquence de coupure.

On peut penser que dans notre cas, les amplitudes pour deux fréquences adjacentes sont voisines  $a(f) \simeq a(f + df)$  alors les transferts d’énergie réciproques sont équilibrés. Sinon ces transferts sont déséquilibrés et on observe la croissance de la fréquence  $f + df$  au détriment de  $f$  sous forme d’instabilité.

Pour mieux appréhender la nature des ondes supplémentaires, on s’est penché sur leurs fréquences. En générant dix paquets de vague successifs, on peut vérifier par une analyse fréquentielle que les composantes qui apparaissent sont bien des harmoniques des fréquences d’entrée. Il n’y a apparemment pas tendance à l’apparition d’un spectre continu (voir figure IV.1.29).

## IV.1.5 Paquets de vagues tri-dimensionnels

### Introduction

Le principe est simple et proche du cas bi-dimensionnel, la directionnalité en plus. À partir d’un état de mer sévère, un paquet de vagues de forte amplitude qu’on a préalablement mesuré grâce à un réseau de sondes, on cherche à reproduire dans le bassin ce paquet de vagues à l’échelle. L’objectif est de trouver la loi de commande du batteur qui génère ce paquet dans le bassin.

La cible utilisée dans cette partie est la focalisation d’un spectre directionnel : toutes les ondes élémentaires de la décomposition linéaire sont mises en phase en un point du bassin et à un instant donné. Ces ondes élémentaires linéaires convergent vers le point de focalisation et forment si l’étalement est conséquent des crêtes concentriques de longueur d’onde croissante lorsqu’on s’éloigne du point de focalisation. Ce genre de cible a été généré et mesuré dans le

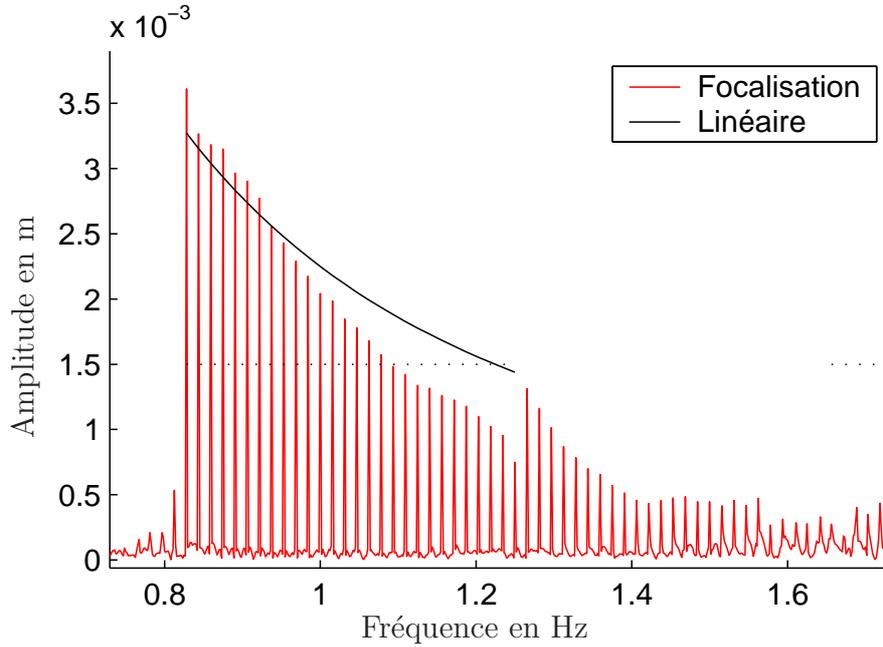


FIG. IV.1.29 – Spectre d’amplitude pour dix répétitions de l’essai Dud61

bassin de houle ; on tente de le reproduire dans ce même bassin et dans les bassins numériques.

### IV.1.5.1 Paquets de vagues cibles

#### Description

Les paquets de vague cibles sont définis par des signaux d’élévation en fonction du temps sur un jeu de sondes. Plusieurs aspects sont à définir au préalable, notamment la nature des élévations cibles (artificielles ou issues de mesure), le nombre de sondes *etc.* En vue d’obtenir à coup sûr des paquets de vague physiques, *i.e.* réalisables expérimentalement, on évite ici de construire des signaux artificiels (voir les travaux sur les paquets bi-dimensionnels de IV.1.1 à IV.1.4). Les signaux cibles employés dans cette partie sont donc des mesures expérimentales de paquets focalisés. Ces paquets ont été générés en bassin à partir d’un spectre multi-directionnel dont on focalise les différentes composantes à un instant donné en un point donné du bassin.

Dans notre cas, les signaux expérimentaux ont été obtenus par focalisation spectrale directionnelle, à partir d’un spectre fréquentielle de Pierson-Moskowitz à deux paramètres et d’un étalement directionnel en  $\cos^n \theta$ . Les paramètres caractéristiques correspondant aux essais sont donnés dans les 3 premières colonnes du tableau IV.1.1. On désignera les deux jeux de paramètres par les lettres *A* et *B*.

	$H_s$	$f_p$	$n$	$N_f$	$R$	$x_f$	$t_f$
<i>A</i>	4 cm	0.5 Hz	10	256	1 m	21.35 m	45 s
<i>B</i>	5 cm	0.5 Hz	20	512	1 m	24.6 m	70 s

TAB. IV.1.1 – Caractéristiques des paquets cibles et réseaux de sondes

Les cinq sondes en réseau étant placées au centre du bassin, les phases des composantes ont

été ajustées de telle manière que les ondes se retrouvent en phase sur la sonde au centre du réseau, au bout d'un temps suffisamment long pour que les ondes les plus lentes soient arrivées au réseau. Dans le montage *B*, la sonde centrale était effectivement confondue avec le point de focalisation demandé. Dans le cas *A* en revanche, le point de focalisation donné au batteur est

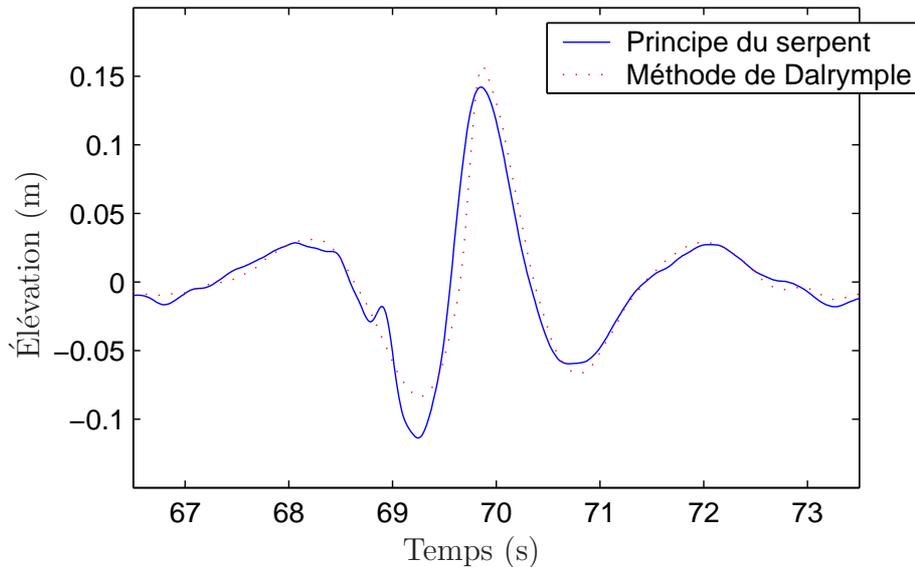
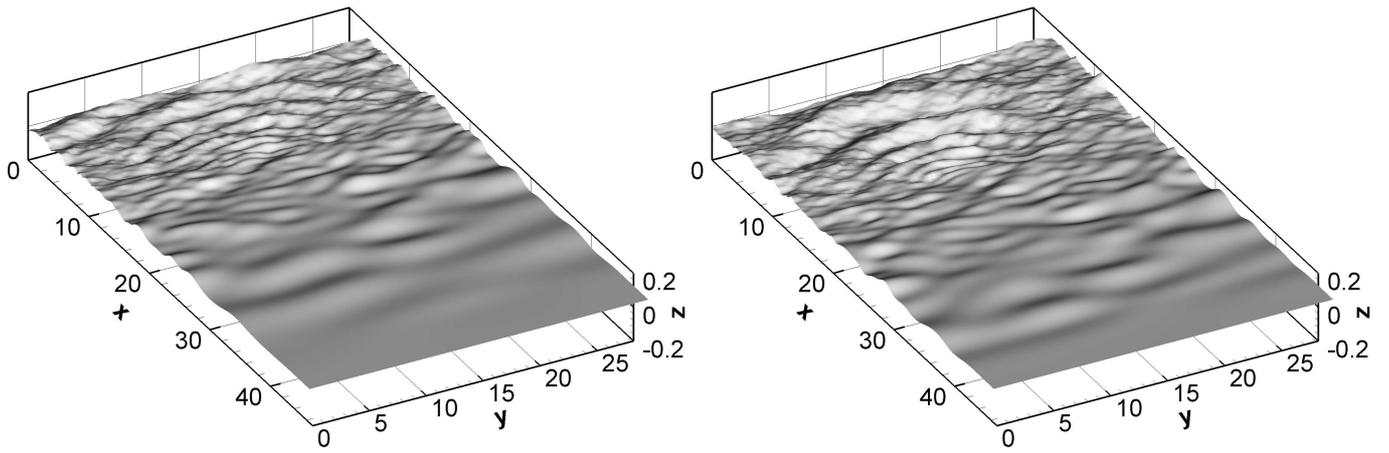


FIG. IV.1.30 – Paquet de vagues focalisé sur la sonde centrale (cas *B*).

décalé dans la direction principale et se situe 1.35 m derrière la sonde centrale du réseau (située à 20 m du batteur). Dans les deux montages, la coordonnée transverse du point de focalisation correspond bien à celle de la sonde. Le mouvement du batteur est construit avec  $N_f$  fréquences comprises entre 0 et 2 Hz (voir tableau IV.1.1). Les composantes obliques sont générées avec la méthode de Dalrymple. Dans le cas *B*, le champ de vagues obtenu par cette méthode est comparé sur la figure IV.1.30 avec le principe du serpent (voir le chapitre II.2), pour la sonde centrale du réseau lors de l'essai *B*. On constate que les deux signaux sont différents : la prise en compte des réflexions sur les murs latéraux est nécessaire.

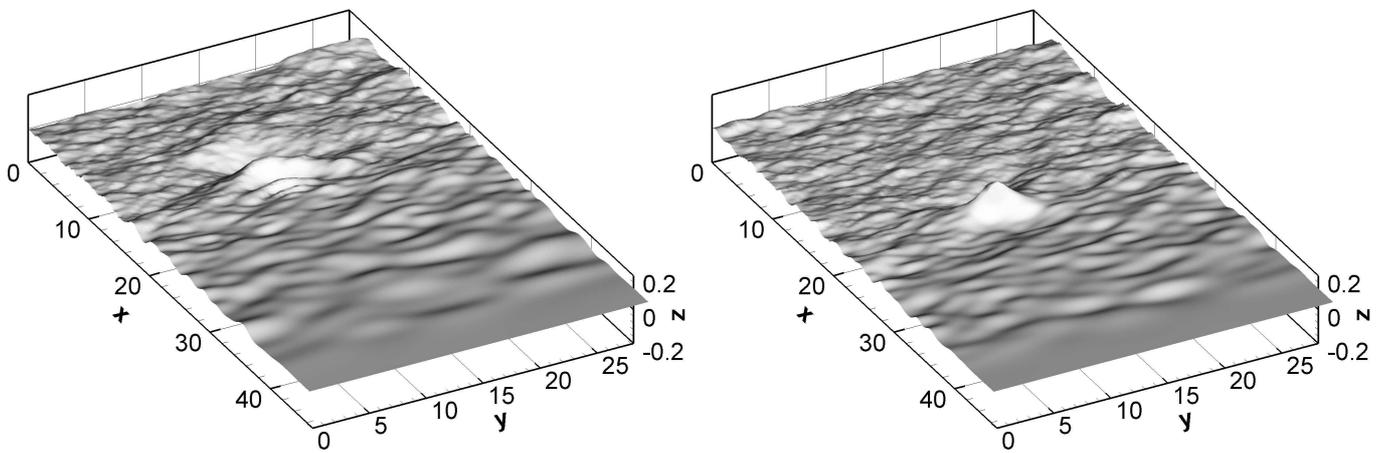
L'effet de la loi de commande s'observe aussi lorsqu'on regarde le signal des sondes avant le paquet. Le paquet de vagues cible possède une élévation nulle avant le passage du fait de sa construction. L'élévation mesurée avec une loi de commande serpent montre une certaine agitation avant le passage contrairement à l'élévation avec la méthode de Dalrymple (non reproduit ici).

La figure IV.1.31 montre quatre vues de la surface libre au cours de la focalisation du paquet cible *B*. Elles ont été obtenues avec le modèle non linéaire HOS. On peut noter qu'un champ de vagues irrégulier semble s'installer avant l'apparition du paquet convergent au centre. Il est lié à plusieurs effets, notamment aux réflexions sur les murs latéraux. Dans un bassin infini dans la direction transverse, on observerait des crêtes concentriques de longueur d'onde croissante. Avec des murs latéraux, les directions avant et après réflexion sont superposées ce qui donne cet aspect irrégulier.



(a) à  $t = 28$  s

(b) à  $t = 33$  s



(c) à  $t = 39$  s

(d) à  $t = 45$  s

FIG. IV.1.31 – Vues du paquet de vagues cible (cas A).

### Réseau de sondes

Un paramètre important est le nombre d'informations disponibles, par exemple le nombre de mesures pour un paquet de vagues cible expérimental. Plus les sondes seront nombreuses et meilleure sera la résolution angulaire obtenue et par là la qualité de la reproduction déterministe. Dans le cas de mesures en mer, les bouées {pilonnement–tangage–roulis} (heave–pitch–roll buoys) ainsi que des capteurs immergés {pression–vitesses horizontales} fournissent trois grandeurs. Près des structures offshore, des réseaux de sondes plus fournis sont parfois utilisés. Dans le cas de nos essais en bassin, on peut utiliser un nombre élevé de sondes. Pour garder un nombre raisonnable de sondes, on a choisi d'utiliser un réseau de cinq sondes à houle, réparties en pentagone tronqué (voir le schéma V.2.1). Ce type de réseau est communément utilisé lors de la mesure et l'analyse de houle irrégulière directionnelle en bassin par exemple (*e.g.* Benoît et Teisson [11]).

Les deux paquets de vagues sont mesuré dans le bassin à l'aide d'un réseau de cinq sondes à houle réparties en pentagone tronqué. Le rayon  $R$  du réseau de un mètre permet de résoudre correctement la longueur d'onde du pic du spectre ( $\lambda_p = 5$  m). Le schéma du réseau est

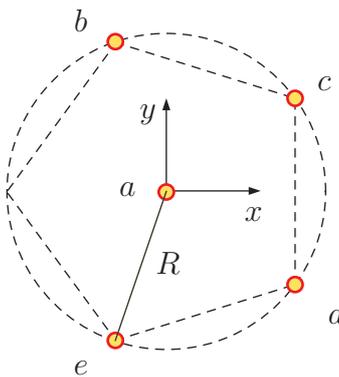


FIG. IV.1.32 – Schéma du réseau de sondes

reproduit sur la figure IV.1.32, sur laquelle on a identifié chacune des sondes par une lettre de  $a$  à  $e$ , utile pour la suite. Le batteur est situé sur la gauche, parallèle à la ligne  $(b-e)$ . Les élévations mesurées, qui servent de cible à la reproduction déterministe sont données sur la figure IV.1.33 autour de l'instant de focalisation. Le pic focalisé intervient plus ou moins tôt sur les sondes suivant leur position.

### Expériences et simulations

Au cours de cette étude tri-dimensionnelle, simulations et expériences ont été effectuées d'où la possibilité de comparer les résultats de ces deux approches. Les figures IV.1.34 et IV.1.35 montrent la superposition élévations mesurées et simulées sur les cinq sondes du réseau, autour du pic focalisé, respectivement pour les montages  $A$  et  $B$ . On constate que les simulations numériques reproduisent bien les expériences, non seulement pour la sonde centrale mais aussi pour les sondes extérieures. Le modèle non linéaire reproduit correctement la propagation directionnelle du paquet de vagues. On a ajouté également l'élévation linéaire construite à partir des composantes fréquentielles fournies au batteur. Pour le cas  $A$ , les trois sondes les plus proches du bassin montrent deux crêtes principales d'amplitude proche,

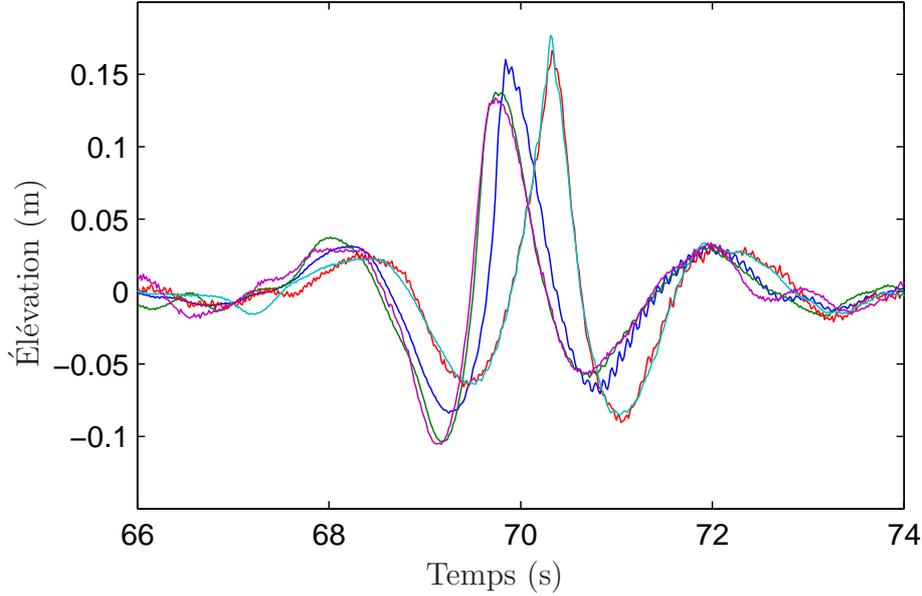


FIG. IV.1.33 – Élévations cibles sur les cinq sondes (cas B).

Pour le cas  $B$ , l'effet des non-linéarité se traduit par une diminution de l'amplitude de la crête principale sur la sonde centrale et les deux sondes en avant du réseau. Les élévations sur les sondes en arrière montrent une augmentation d'amplitude de la crête mesurée et une diminution importante de la profondeur du creux suivant cette crête.

## IV.1.5.2 Principe de la reproduction déterministe

### Décomposition linéaire

On considère que le champ de vagues se décompose en une superposition linéaire de houles élémentaires

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N a_n \exp i (\omega_n t - k_n (x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) + \varphi_n) \right] \quad (\text{IV.1.6})$$

Pour reprendre le terme employé en génération de houle, il s'agit d'une sommation simple. On attribue une direction  $\theta_n$  à chaque fréquence  $f_n = n\Delta f$  et le champ de vagues est complètement déterminé par le jeu des amplitudes, phases et directions à chaque fréquence  $f_n$ . Pour identifier ces inconnues, on utilise les signaux temporels  $\eta_p(t)$  des  $P$  sondes placées en réseau.

Une fenêtre temporelle  $w_p(t)$  sert à pondérer éventuellement telle ou telle partie du paquet de vagues cible à reproduire (on peut ainsi éviter des réflexions parasites sur les murs latéraux).

Les signaux temporels de  $P$  sondes ainsi fenêtrés fournissent par transformée de Fourier une information fréquentielle qui permet de déterminer les inconnues décrivant le champ de vague tri-dimensionnel. Pour la sonde  $p = 1$  à  $P$ , on obtient à la fréquence  $f_n$

$$\underline{b}_n = a_n \exp i (\varphi_n - k_n (x_p \cos \theta_n + y_p \sin \theta_n)) \quad (\text{IV.1.7})$$

Ces équations forment un système non linéaire à  $2P$  équations (les parties réelles et imaginaires

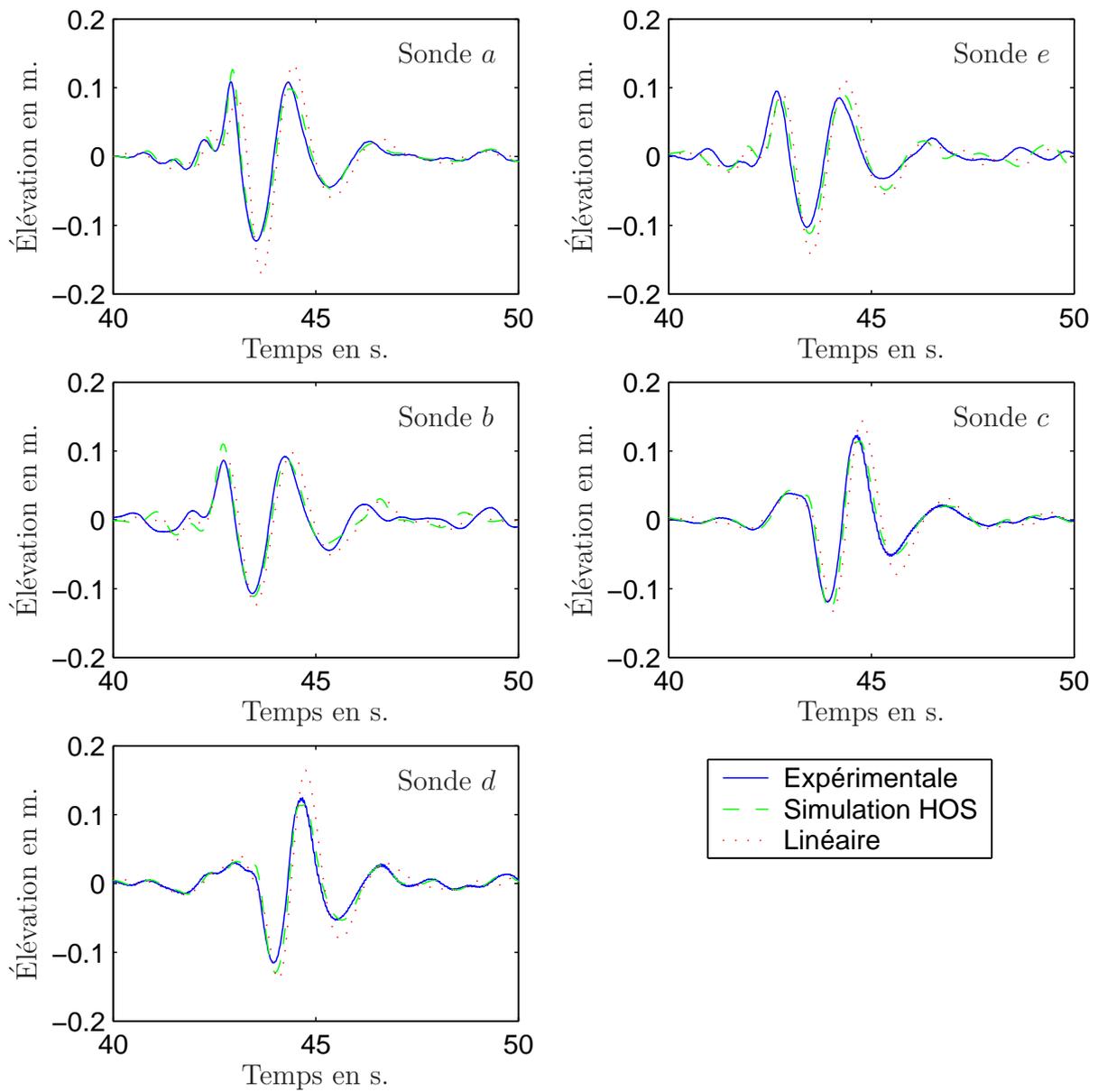


FIG. IV.1.34 – Élévation de surface libre cible sur les cinq sondes (cas A).

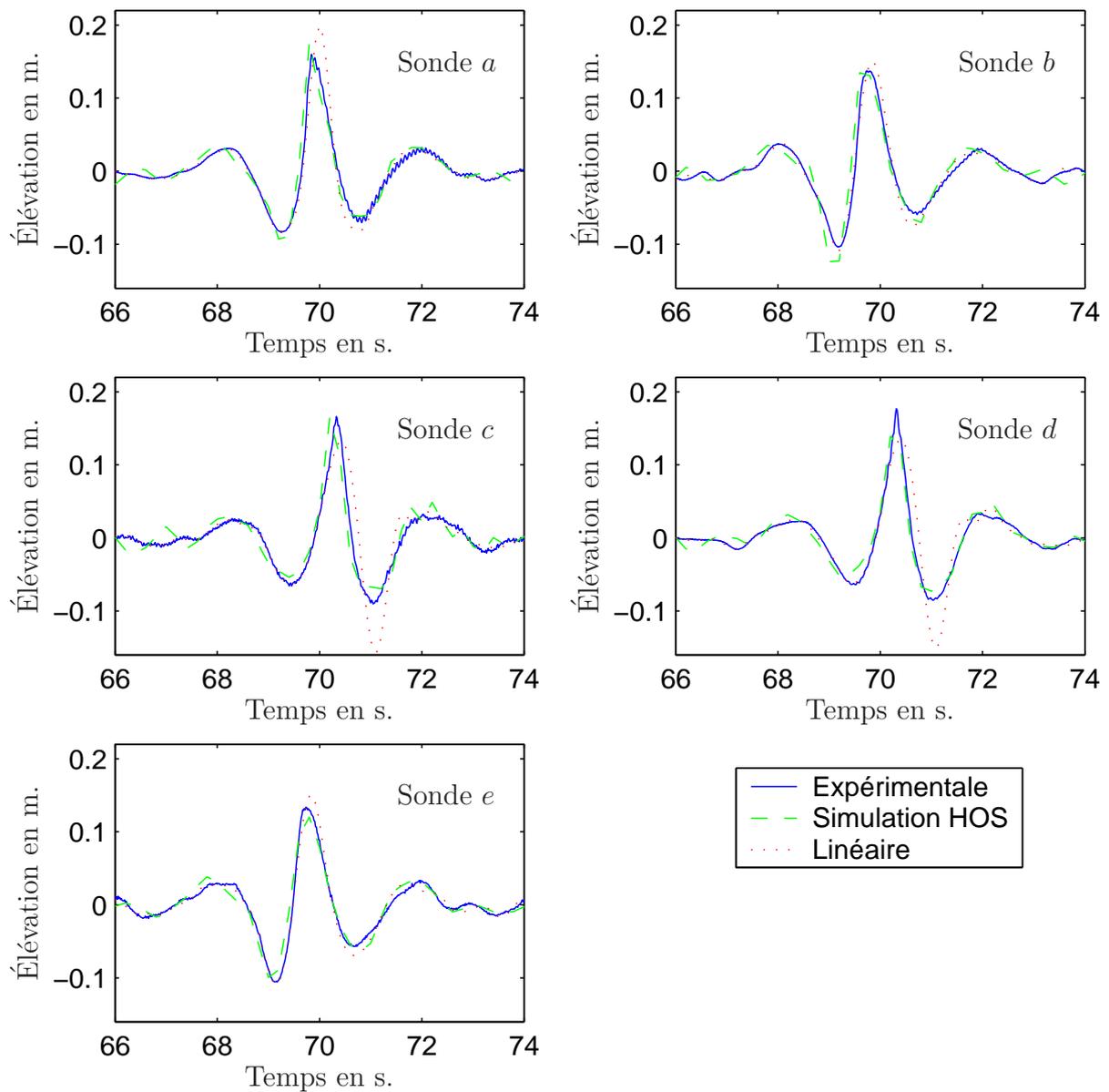


FIG. IV.1.35 – Élévation de surface libre cible sur les cinq sondes (cas B).

des équations (IV.1.7)) et trois inconnues<sup>13</sup>, l'amplitude  $a_n$ , la direction  $\theta_n$  et la phase  $\varphi_n$ , le nombre d'onde étant donné par la relation de dispersion linéaire. Deux sondes sont nécessaires au minimum pour résoudre ce système, à condition que leurs positions ne conduisent pas à des équations redondantes. Pour pallier cette éventualité, on utilise alors plus de sondes (5 dans notre cas). Dans ce cas le système est sur-déterminé: on le résout par une méthode des moindres carrés non linéaire. Des hypothèses simples en accord avec les essais permettent de réduire l'intervalle de définition des inconnues :

- les amplitudes sont bornées
- les directions comprises entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ , la direction nulle étant dans l'axe principal du bassin

Le choix de la solution initiale conditionne la résolution du système. On adopte la démarche suivante :

- l'amplitude initiale est la moyenne des modules des TF des cinq sondes.
- la direction initiale est tirée aléatoirement. Si les paramètres caractéristiques de l'état de mer sont connus (direction moyenne  $\theta_m$  et écart-type  $\sigma_\theta$ ) alors le tirage aléatoire est pris de répartition gaussienne, de moyenne  $\theta_m$  et d'écart-type  $\sigma_\theta$  celles estimées de l'état de mer étudié. Ce choix particulier du tirage aléatoire n'est pas indispensable et a pour objectif initial d'accélérer le processus de résolution.
- La phase initiale est quant à elle tirée aléatoirement avec une répartition uniforme entre 0 et  $2\pi$ .

## Reproduction

On obtient finalement un jeu de composantes directionnelles; leur propagation linéaire inverse en direction du batteur permet de calculer le mouvement de ce dernier. Si l'angle de propagation de certaines composantes est trop élevé au regard des dimensions du bassin, de la longueur et des capacités du batteur serpent, la méthode de Dalrymple est utilisée pour contrôler le mouvement et éviter des réflexions parasites sur les murs latéraux du bassin.

## Validation

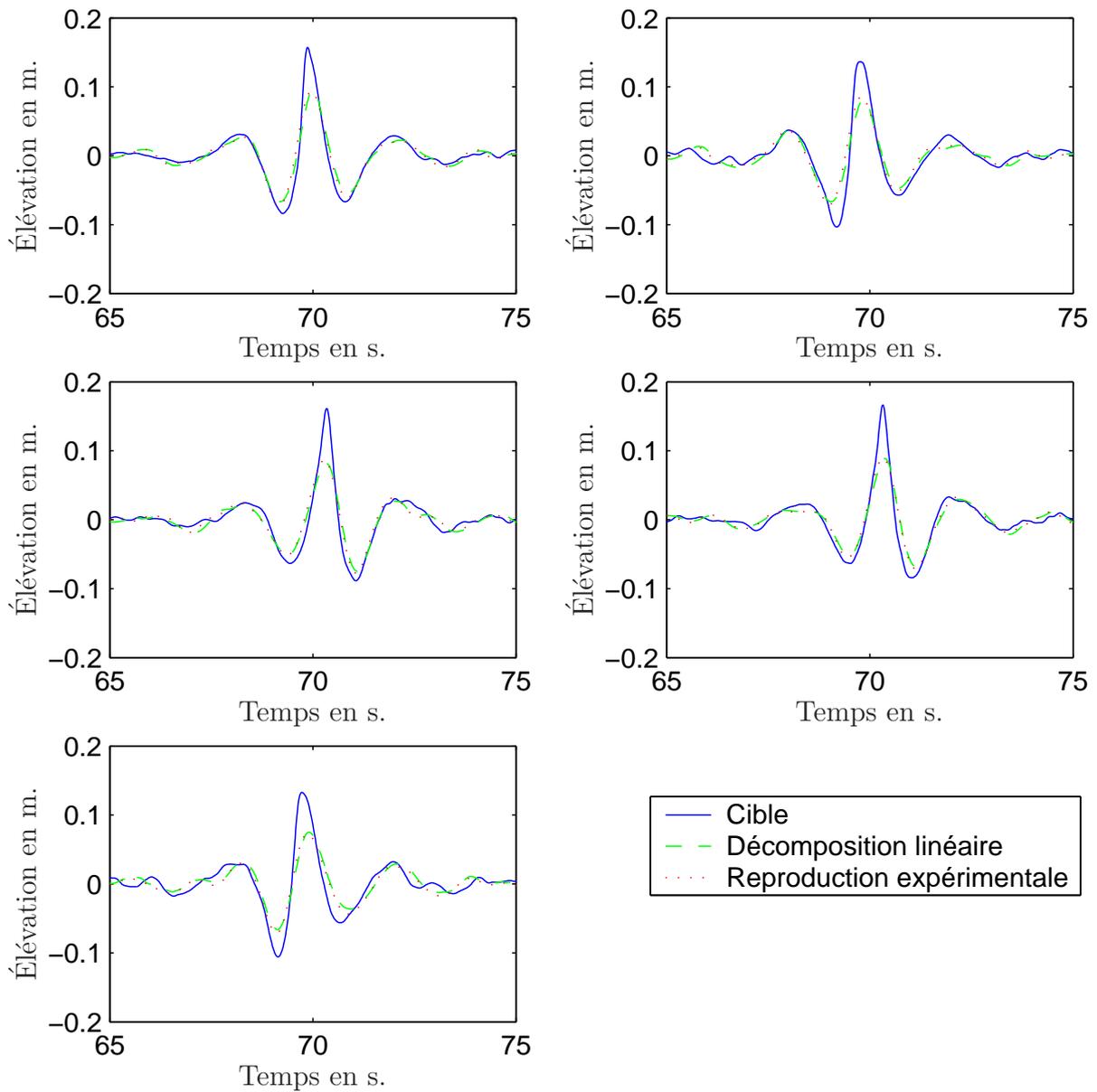
On peut comparer l'élévation cible  $\eta_p$  et l'élévation  $\hat{\eta}_p$  reconstruite linéairement à partir de la solution obtenue

$$\hat{\eta}_p(t) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N a_n \exp i (\omega_n t - k_n (x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) + \varphi_n) \right]$$

La figure IV.1.36 montre la superposition des élévations cible, linéaire et reproduite en bassin pour l'essai *B* sur les cinq sondes du réseau. La décomposition linéaire est obtenue avec une solution initiale de direction gaussienne ( $\sigma_\theta = \pi/4$ ). On constate dans ce cas que l'amplitude du pic principal du paquet de vagues est sous-estimée, ce qu'on retrouve aussi bien sur la surface reconstruite linéairement que sur la reproduction, très proches l'une de l'autre. Les creux latéraux et les crêtes secondaires sont mieux reproduits sauf sur les deux sondes en

---

13. Dans le modèle de Zhang *et al.* [131], la direction est déterminée en premier lieu à l'aide d'une estimation du spectre directionnel (un jeu de 1 à 7 directions par fréquence). Puis l'amplitude est évaluée de manière à assurer la conservation de l'énergie à chaque fréquence. Enfin, les phases sont ajustées pour représenter l'élévation mesurée sur les sondes.

FIG. IV.1.36 – *Élévations de surface libre cible, décomposée et reproduite sur les cinq sondes*

avant du réseau où le creux antérieur au pic central est sous-estimé. On observe donc déjà ici un contrôle délicat des hautes fréquences qui interviennent comme en 2D au niveau de la crête principal.

### IV.1.5.3 Améliorations proposées

Plusieurs améliorations de la décomposition linéaire ont été proposées pour pallier la sous-estimation de l'amplitude de la crête principale. Des minima locaux sont attendus lors de la résolution du système non linéaire par les moindres carrés. L'utilisation d'une unique solution initiale peut donc nous conduire à un de ces minima locaux et non au minimum global. De manière à mieux approcher ce dernier, le système est résolu avec plusieurs solutions initiales (plusieurs tirages aléatoires) et on choisit la solution la plus proche de la cible. Pour cela, on compare l'élévation cible  $\eta_p$  et l'élévation  $\hat{\eta}_p$  reconstruite linéairement à partir de chaque solution obtenue

$$\hat{\eta}_p(t) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N a_n \exp i (\omega_n t - k_n (x \cos \theta_n + y \sin \theta_n) + \varphi_n) \right]$$

Parmi l'ensemble des solutions, la solution retenue est celle qui minimise une erreur globale, définie comme la somme sur les cinq sondes de l'intégrale en temps de l'erreur quadratique entre l'élévation cible  $\eta_p$  et l'élévation reconstruite  $\hat{\eta}_p$

$$E = \sum_{p=1}^P \int_0^T w_p(t) |\eta_p(t) - \hat{\eta}_p(t)|^2 dt$$

Il reste à choisir les solutions initiales ; on s'inspire pour cela de l'approche décrite plus haut. Les amplitudes initiales les même pour toutes les solutions initiales, *i.e.* égales à la moyenne des TF sur les cinq sondes. Les phases sont choisies avec un nouveau tirage aléatoire pour chaque solution initiale. Enfin, pour les directions initiales, deux stratégies ont été tentées.

La première stratégie consiste simplement à effectuer un nouveau tirage aléatoire avec la loi normale décrite plus haut, en conservant la même direction  $\theta_m = 0$  moyenne et le même écart-type  $\sigma_\theta = \pi/4$  pour chaque tirage. La figure IV.1.37 montre les élévations linéaires obtenues avec vingt solutions initiales différentes, sur une des cinq sondes du réseau pour le spectre d'entrée  $B$ . On constate que les différentes solutions initiales donnent bien des élévations de surface libre différentes sur la sonde. La variation d'amplitude sur la crête principale entre les différentes solutions obtenues atteint 20 % de l'amplitude du pic central cible ; la meilleure des solutions obtenues reste cependant assez éloignée de la cible (sous-estimation de 30 % de l'amplitude du pic principal).

Cette stratégie a été également appliquée au paquet cible  $A$ , moins cambré ( $H_s = 4$  cm) et plus étalé ( $n = 10$ ). La focalisation se produit à 21.35 m du batteur, la sonde centrale du réseau étant fixée à 20 m. Cinquante solutions initiales sont utilisées avec un écart-type fixe de  $\pi/4$  pour les directions de propagation. La figure IV.1.38 donne quatre vues de la surface libre aux instants  $t = 28, 33, 39$  et  $45$  s. Elles sont à comparer au paquet cible montré sur la figure IV.1.31. On constate que le pic focalisé reproduit est plus étalé et moins cambré que la cible.

La deuxième stratégie consiste à autoriser une variation de l'écart-type du tirage aléatoire des directions de propagation. La direction moyenne est gardée fixe ( $\theta_m = 0$ ) et l'écart-type  $\sigma_\theta$  est tiré aléatoirement entre 0 et  $\sigma$  avec une répartition uniforme. Avec  $\sigma = \pi/4$  (comme précédemment pour l'écart-type fixé), on autorise par exemple des solutions initiales moins étalées en direction que précédemment.

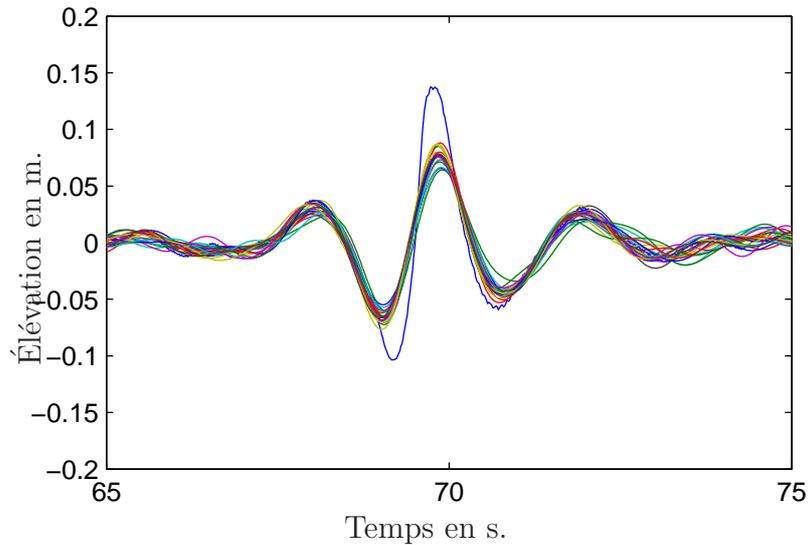


FIG. IV.1.37 – *Élévations de surface libre cible et décomposées pour 20 solutions initiales sur une sonde*

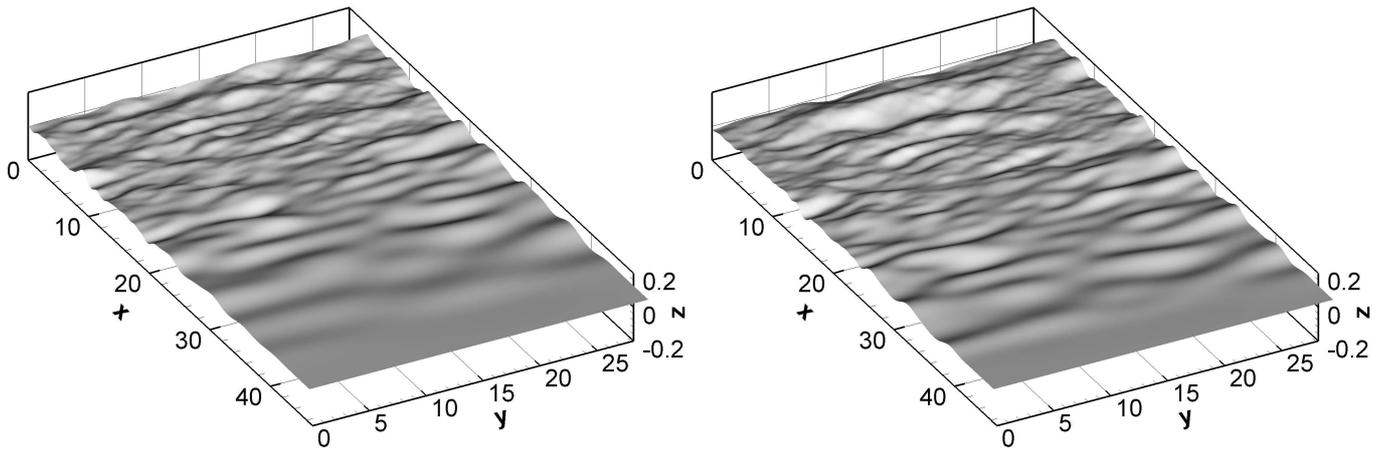
## Conclusion

L'étude de la reproduction déterministe a débuté par l'emploi des méthodes de base de décomposition linéaire et second ordre. Celles-ci ont mis en évidence des effets d'ordre supérieur qu'on a pris en compte ensuite. L'application de corrections itératives déduites d'une analyse de Fourier directe de l'élévation obtenue à l'itération précédente a apporté une amélioration certaine tout en montrant un contrôle inadapté à hautes fréquences. Il est apparu nécessaire de séparer à ces fréquences, les effets linéaire et du second ordre, ce qui a été entrepris par la séparation des effets pairs/impairs à l'aide d'une double génération en crête et en creux. Cette technique a rendu possible l'estimation correcte des vitesses de phase non linéaires à l'aide d'un modèle simplifié au troisième ordre. L'utilisation de ce modèle théorique intégrant plus d'effets physiques que les modèles testés au départ conduit à une solution plus proche de la cible. On peut alors envisager d'utiliser une méthode d'optimisation pour se rapprocher encore de la solution. Une grande partie du chemin a été parcourue grâce au modèle au troisième ordre proposé.

Les essais expérimentaux effectués ont permis de mettre en lumière les paramètres caractéristiques du batteur qui interviennent lors de son mouvement (résolution angulaire pour les faibles amplitudes, intervalle de fréquence avec la TF utilisé, décalage en temps au démarrage) et fournissent des idées intéressantes à mettre ou déjà mises en œuvre pour améliorer son contrôle (trigger au démarrage du batteur, résolution sur 16 bits au lieu de 12).

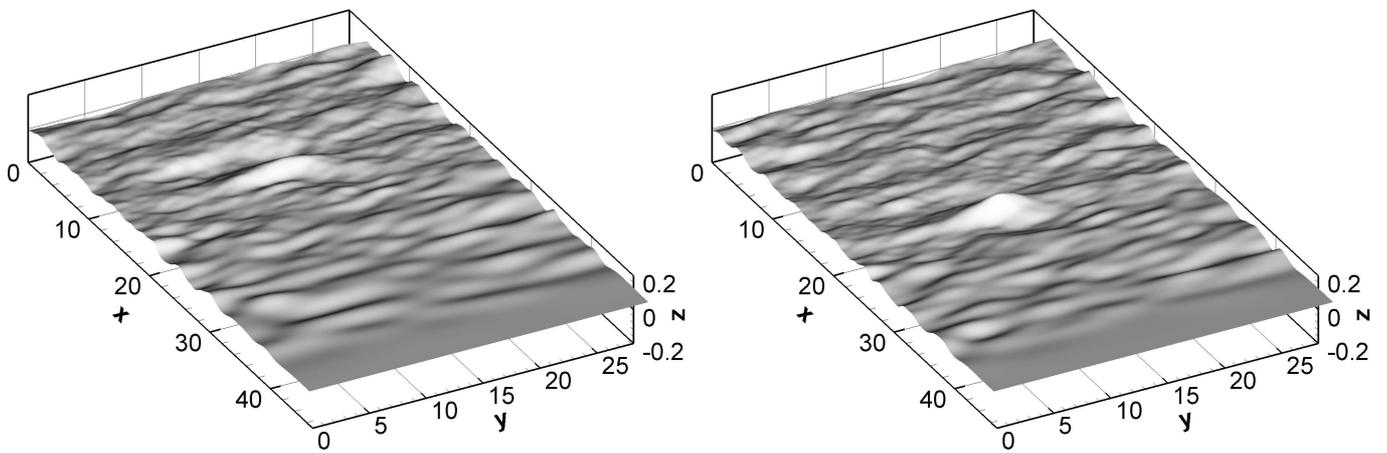
## Perspectives

La reproduction déterministe par estimation des vitesses de phase non linéaires doit être appliquée à d'autres paquets de vagues cibles. Au vu des résultats très encourageants obtenus avec les cibles simples testées, on peut envisager avec confiance l'application à des cibles plus complexes, comme la vague Draupner ou d'autres enregistrements réalisés en mer dans des conditions extrêmes.



(a) à  $t = 28$  s

(b) à  $t = 33$  s



(c) à  $t = 39$  s

(d) à  $t = 45$  s

FIG. IV.1.38 – Vues du paquet de vagues reproduit (cas A).

La technique de séparation des termes pairs/impairs en non-linéarités s'applique non seulement à un paquet focalisé mais à tout type de houle. On a déjà évoqué précédemment l'utilité d'une telle séparation pour l'analyse des ondes libres par exemple. De même pour l'estimation des vitesses de phase non linéaires au troisième ordre également. Ces vitesses pourront être utilisées lors de la séparation houle incidente/houle réfléchie. Ces deux techniques ont bien sûr un coup, celui de doubler le nombre d'essais nécessaires.

La technique de reproduction déterministe développée dans ce chapitre pourra être associée avec les calculs de vitesses en cours de développement (Guillaume Ducrozet, en thèse) de manière à estimer la cinématique du fluide sous les crêtes de forte cambrure et à servir d'entrée pour les modèles de chargement hydrodynamiques.



**Cinquième partie**

**Génération et analyse de houles  
irrégulières**



# Chapitre V.1

## Houle irrégulière bi-dimensionnelle

Cette partie traite de génération et d'analyse de houle irrégulière droite (en 2D). Les objectifs sont d'une part de vérifier la qualité des champs de vagues générés au moyen de l'estimation des spectres de houle et des paramètres associés à la houle irrégulière. D'autre part, on cherche à mettre en évidence les phénomènes parasites, analyse de la réflexion sur la plage, étude détaillée de l'excitation des modes propres du bassin au cours des essais. Enfin, cette étude permet d'illustrer les capacités des modèles numériques de génération et propagation de houle.

Ce type d'essais bien qu'étant bi-dimensionnel dans un chapitre dédié au multi-directionnel, est très riche d'enseignement. Il nécessite de mettre en place les méthodes d'analyse fréquentielle et statistique vague par vague, fournit des informations sur le comportement de la plage absorbante.

D'un point de vue expérimental, les essais effectués font partie des premières tentatives de qualification des houles irrégulières bi-dimensionnelles que l'on peut obtenir simplement dans le bassin de houle. Il s'agit donc en partie de tester les outils d'une part de génération à disposition à la date des essais (à savoir le logiciel OCEAN pour générer les séquences de houle et l'asservissement (ou pilotage) du batteur en position), et d'autre part d'absorption (plage passive métallique). On cherche à savoir si cet ensemble permet de reproduire des états de mer aléatoires corrects.

Au niveau numérique, ces essais correspondent à des simulations de longs temps physiques, ce qui met en valeur la rapidité des codes spectraux utilisés. Les simulations offrent un regard simple sur l'influence des non-linéarités en fournissant des résultats linéaire, second ordre et non linéaire complet facilement comparables. Ces observations sont validées par les comparaisons avec les expériences.

Enfin, comme on l'a dit plus haut, pour exploiter ces essais numériques et expérimentaux, des techniques d'analyse de houle irrégulière ont été mises en place, validées sur des tests analytiques puis appliquées à ces essais.

Un des aspects très enrichissant de cette étude est qu'on a pu ainsi aborder chaque étape, depuis la génération jusqu'à l'analyse, à la fois pour des simulations et des essais expérimentaux. Il convient de préciser tout de suite l'approche choisie dans cette étude. Lors de la génération de houle aléatoire en bassin, on passe généralement par une phase d'étalonnage de la houle dans laquelle, à partir du mouvement batteur calculé à partir de la théorie linéaire, on effectue une série d'itérations {génération—mesure—correction} pour obtenir finalement le spectre désiré dans le bassin (voir par exemple [66] et Daoud [40]). Les mesures lors des premières itérations peuvent en effet différer de la cible en raison des non-linéarités; la correction peut alors s'interpréter comme la modification de la fonction de transfert linéaire par exemple. Ici, on n'a pas

cherché à corriger le mouvement du batteur pour obtenir le bon spectre dans le bassin. Mais partant du mouvement linéaire, on observe les différences entre les mesures et la cible et on essaie de les reproduire dans les simulations.

On présente en première partie V.1.1 les caractéristiques des essais effectués, communes aux expériences et simulations. On détaille ensuite séparément le dispositif expérimental V.1.2 et les paramètres propres aux simulations numériques V.1.3. Après avoir décrit les méthodes d'analyse statistique V.1.4 et fréquentielle V.1.5 mises en œuvre, on s'attache à deux aspects : l'influence de la longueur d'onde et de l'amplitude. On termine cette étude de la houle irrégulière bi-dimensionnelle par l'observation et l'analyse de l'excitation des modes propres au cours des essais.

### V.1.1 Houles irrégulières générées

Expériences et simulations ont été réalisées avec les mêmes données d'entrée pour effectuer des comparaisons aisées entre les deux approches. Pour réduire le nombre de paramètres à faire varier, le spectre généré sera toujours du même type, un spectre de Bretschneider autrement appelé de Pierson-Moskowitz modifié à deux paramètres :

$$S(f) = 5 \frac{m_o}{f_p} \left( \frac{f_p}{f} \right)^5 \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{f_p}{f} \right)^4 \right] \quad (\text{V.1.1})$$

avec  $f_p$  la fréquence de pic et  $m_o$  le moment d'ordre zéro du spectre. Ces deux paramètres sont reliés à la période moyenne up-crossing  $T_Z = 0.7104 T_p$  et à la hauteur significative spectrale  $H_s = 4\sqrt{m_o}$  qui sont plus usitées.

Les essais étudiés dans ce chapitre proviennent de deux campagnes d'essais. Lors de la première (juin 2004), deux périodes up-crossing ont été étudiées,  $T_Z = 1.42$  et  $0.99$  s, soit des longueurs d'ondes de pic de  $\lambda_p = 5$  et  $3$  m respectivement. Pour chaque période, différentes hauteurs significatives ont été testées (voir tableau V.1.1). La deuxième campagne (septembre

$T_Z$	en s	1.42	1.42	1.42	0.99	0.99
$T_p$	en s	2	2	2	1.4	1.4
$f_p$	en Hz	0.5	0.5	0.5	0.7	0.7
$\lambda_p$	en m	5	5	5	3	3
$H_s$	en m	0.08	0.16	0.32	0.08	0.16
Cambrure	en %	1.6	3.2	6.4	2.7	5.3
$m_o$	en $10^{-4} \text{ m}^2$	4	16	64	4	16
$S_{max}$	en $10^{-3} \text{ m}^2\text{s}$	1.14	4.57	18.3	1.14	4.57

TAB. V.1.1 – Valeurs caractéristiques des essais effectués

2004) a permis de réaliser des études sur la stationnarité des houles obtenues pendant un long temps d'essai. Pour des raisons de clarté, les données correspondantes seront fournies dans la partie V.1.9 dédiée à cette étude. On revient donc pour la suite à la première campagne.

Le mouvement du batteur est synthétisé en discrétisant le domaine fréquentiel et en donnant à chaque composante l'énergie présente dans la bande de largeur  $\Delta f$  centrée sur  $f$ , et une phase aléatoire (Approche Déterministe Spectrale ou DSA, cf. e.g. [65]). La période de répétition du

batteur<sup>1</sup> a été choisie suffisamment longue (512 s soit 8 min et 32 s), de manière à permettre une analyse spectrale correcte. Chaque essai d'une durée de 900 s comprend un nombre élevé de vagues (respectivement 640 et 900 pour les périodes up-crossing 1.42 et 0.99 s), ce qui rend possible un premier suivi de l'évolution temporelle du spectre. La figure V.1.1 reproduit un signal expérimental type, adimensionné par la hauteur significative et la période de pic. On

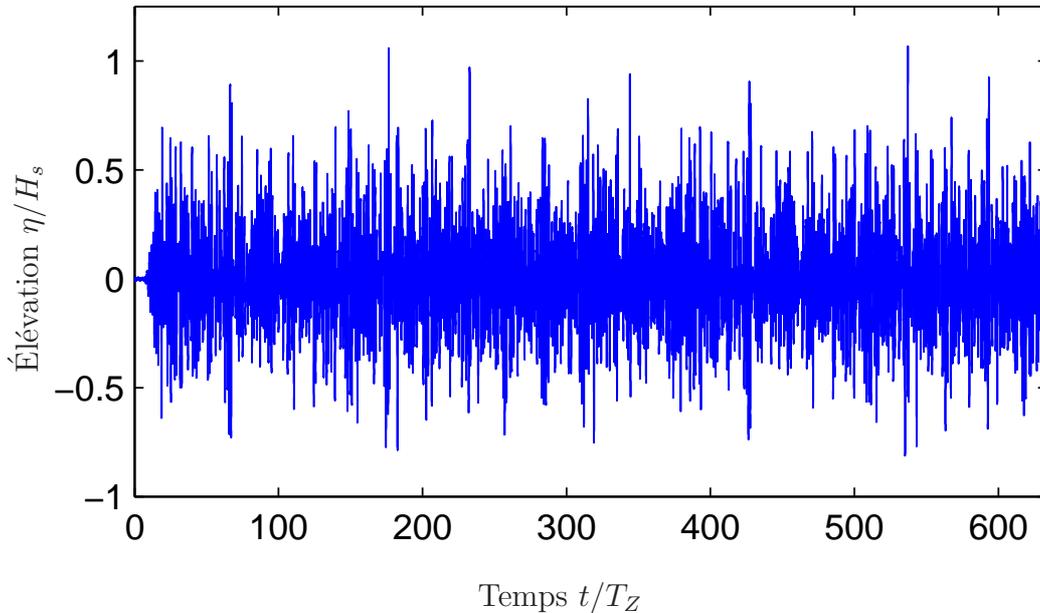


FIG. V.1.1 – Exemple de signal, sonde "5mm",  $T_Z = 1.42$  s,  $H_s = 16$  cm

observe l'arrivée du front d'onde vers  $t = 14 T_Z$ , puis vers  $t = 380 T_Z$  apparaît la répétition du signal. On retrouve par exemple les mêmes crêtes à  $t = 70 T_Z$  et  $t = 450 T_Z$ ; à  $t = 180 T_Z$  et  $t = 560 T_Z$ .

Les différents essais ont tous été réalisés, par simplicité là-encore, avec le même jeu de phases aléatoires. Les essais de même période up-crossing auront donc la même succession de paquets de vague, les différences entre deux signaux temporels résidant notamment dans les non-linéarités de l'écoulement (voir la comparaison dans la partie V.1.7).

## V.1.2 Description des essais expérimentaux

On évoque ici quelques unes des observations effectuées au cours des essais, puis on s'intéressera aux mesures proprement dites (capteurs, acquisition, incertitudes). Certains des essais réalisés s'accompagnent de déferlement. D'après l'observation visuelle des essais, celui-ci ne concerne apparemment pas toutes les longueurs d'onde. Bien souvent, il semble en effet que ce soient les plus petites longueurs d'onde qui déferlent. Il s'agit comme le montre la figure V.1.2 des longueurs d'onde les plus cambrées si l'on considère la cambrure d'entrée comme le rapport de la hauteur linéaire imposée sur la longueur d'onde.

L'observation visuelle du champ de vague révèle aussi qu'il devient vite perturbé dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation. Certains essais voient une forte exci-

<sup>1</sup>. Conséquence logique de la discrétisation régulière en fréquence, voir la description du fonctionnement du batteur

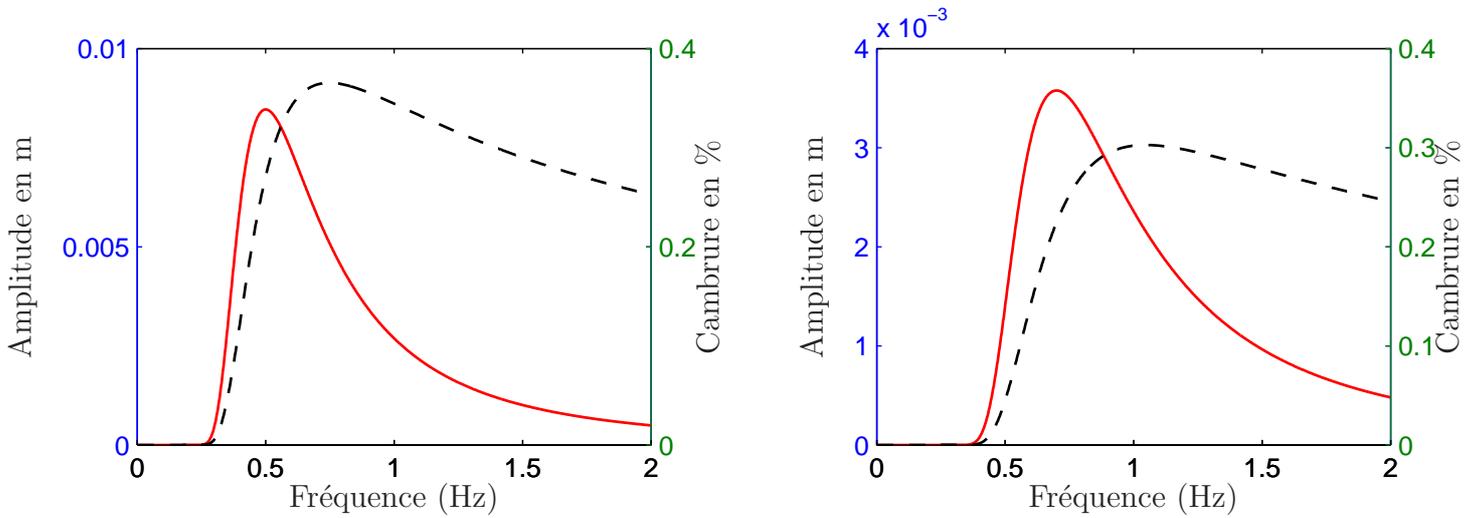


FIG. V.1.2 – Amplitude cible (—) et cambrure (- -) (à gauche :  $H_s = 32$  cm,  $T_Z = 1.42$  s ; à droite :  $H_s = 16$  cm,  $T_Z = 1$  s))

tation de modes transverses bien particuliers. D'autres s'accompagnent d'un fort déferlement dans la direction de propagation. Il est donc nécessaire de garder à l'esprit tout au long de cette analyse que le champ de vague n'est pas parfaitement bi-dimensionnel et que de l'énergie peut être présente pour des ondes se propageant perpendiculairement à la direction de propagation. On abordera ce point spécifique des modes transverses dans une dernière partie.

Le dispositif de mesure comporte sept sondes mesurant chacune une élévation ponctuelle de surface libre et placées dans la direction de propagation. Il s'agit d'une part de 6 sondes résistives dont trois de marque SEREPS de 1 m de long (et conditionneur SEREPS) et trois autres fabriquées récemment au Laboratoire, utilisées avec des conditionneurs Wave Monitor de Churchill Controls et constituées de deux tiges d'incox parallèles de 80 ou 100 cm de long. Des détails sur le comportement de ces sondes sont donnés en Annexe. La septième sonde est une sonde asservie de type ORCA prêtée pour l'occasion par l'IFREMER. Ce prêt avait entre autres pour objectif de comparer le comportement dynamique de différentes sondes à houle. Une campagne a ainsi été menée [17] pour étudier l'influence de la flexion des sondes résistives en houle régulière. La sonde ORCA par son principe de fonctionnement différent, sans flexion, aurait dû servir de référence mais elle n'a malheureusement pas pu être montée sur le système de mise en mouvement forcé {Tripode–Hexapode} du fait d'un encombrement important<sup>2</sup>.

La connaissance de la position des sondes dans le bassin est nécessaire pour la comparaison avec des simulations numériques et s'est révélée être un certain challenge vis-à-vis des dimensions du bassin. Pratiquement, chaque sonde est reliée à un bras-support par une fixation individuelle. Ce montage s'effectue sur la terre ferme et l'on peut donc mesurer les positions relatives des sondes par rapport au bras-support. Une incertitude de  $\pm 1$  mm peut-être raisonnablement obtenue sur la position relative de la fixation des sondes. Cette incertitude se dégrade malheureusement lorsqu'on tente de repérer la position de l'intersection sonde/surface libre, en raison des déformations des tiges et de leur flexion au cours des manipulations. L'écart entre les sondes (position relative) n'est donc pas estimé à mieux de  $\pm 5$  mm.

Une fois les sondes montées sur le bras-support, ce dernier est fixé sur la passerelle enjambant

2. Voir le rapport [17] pour plus de détails.

le bassin. Une fois prise en compte la non-perpendicularité de la passerelle aux murs latéraux du bassin, on estime à  $\pm 1$  cm l'incertitude sur la position du support par rapport au batteur.

La position absolue des sondes est donnée dans le tableau V.1.2. Finalement, on dira que la position relative est suffisamment bien estimée (c'est celle qui est utilisée par les méthodes d'analyse) alors que la position absolue par rapport au bassin souffre d'une incertitude plus élevée.

Sondes <sup>3</sup>		5mm	3mm1	3mm2	SEREPS 5	SEREPS 6	SEREPS 7	ORCA
Position (en m)	X	18.734	18.397	16.847	17.443	18.016	19.979	19.953
	Y	13.481	13.486	13.472	13.471	13.482	13.486	13.480
Coefficient (en m/V)		0.0417	0.0412	0.0385	0.0931	0.1002	0.1001	0.09997

TAB. V.1.2 – Position des sondes et coefficient d'étalonnage pour les essais de houle irrégulière droite

L'étalonnage des sondes a été réalisé préalablement en statique (relevé des tensions de sorties pour différentes immersions) et fournit par régression linéaire<sup>4</sup> un coefficient de conversion en m/V pour chaque sonde (voir tableau V.1.1).

La répétition de plusieurs étalonnages statiques au cours des essais révèle une très faible variation du coefficient d'étalonnage obtenu par régression linéaire et une bonne répétabilité des écarts constatés à cette droite de régression ; on obtient donc une incertitude de 2 ou 3% sur les coefficients d'étalonnage.

### V.1.3 Descriptions des simulations

Les simulations ont été réalisées avec les codes SWEET et HOS en deux dimensions. Ces deux approches seront utilisées à tour de rôle selon le besoin. Dans les deux cas, les dimensions du bassin et du batteur simulés sont identiques aux dimensions réelles. Le démarrage du batteur reproduit la forme linéaire et la durée (3 secondes) de la rampe du batteur physique.

Avant de fournir les résultats qui seront utilisés ensuite, une première étude a permis de régler les différents paramètres des simulations. Il s'agit des nombres de modes horizontaux et verticaux, des deux paramètres, longueur et intensité, qui définissent la zone absorbante, et pour le HOS, de l'ordre de développement et du filtrage éventuel.

Les paramètres de la plage sont ceux déterminés lors de l'analyse de la réflexion numérique. Sur la surface libre, 512 modes sont utilisés avec le pic du spectre correspondant au 20<sup>ième</sup> mode. Le dernier mode correspond à une fréquence de 3 Hz, pour laquelle les amplitudes seront négligeables à la fois au premier et au second ordre.

Au premier ordre, l'observation des amplitudes modales montrent une amplitude maximale du dernier mode  $10^4$  fois plus faible que l'amplitude maximale au cours de la simulation du 20<sup>ième</sup> mode. Au second ordre, on relève un rapport  $10^3$  entre l'amplitude maximale des modes longs et l'amplitude maximale du dernier mode.

Des deux types de générateurs implémentés dans le code non linéaire, doublets tournants ou condition de flux sur un mur, c'est la deuxième méthode qui a été utilisée. La première raison de ce choix est que le fonctionnement est plus proche du batteur physique (exact au premier ordre).

3. la sonde ORCA n'a pas été utilisée lors des essais avec  $T_Z = 1.42$  s et  $H_s = 8$  et 16 cm.

4. On peut utiliser également un étalonnage plus sophistiqué à l'aide d'un polynôme d'ordre supérieur à un.

La deuxième est que l'utilisation des doublets, qui n'a pas encore été correctement implémentée avec la description du mouvement batteur expérimental, reste coûteuse. Pour l'instant, les fichiers batteurs sont utilisés en associant un doublet par fréquence, en calculant le potentiel et la vitesse de chaque doublet séparément puis en sommant pour obtenir la contribution additionnelle. Cette suite d'opérations aboutit à des temps de calcul trop élevés. La solution à mettre en œuvre est celle employée dans [79] qui consiste à utiliser un doublet instationnaire. Son moment instantané est calculé par une somme sur les fréquences et la contribution additionnelle déterminée ensuite grâce à ce seul doublet. Cette approche *doublet instationnaire* n'est pas encore couplée avec la prise en compte des fichiers batteur, ce qui ne posera pas de problème particulier. Les simulations HOS sont effectuées avec un ordre HOS  $M = 5$ . Parmi les trois hauteurs significatives générées lors des essais expérimentaux à la période  $T_z = 1.4$  s, la plus importante n'a pas pu être simulée avec la condition de flux linéaire. Dans ce cas en effet, la houle est localement cambrée près du mur où se produit le flux et la détermination des gradients au voisinage de  $x = 0$  est délicate. Là encore, la technique mise au point dans [79] apportera une amélioration notable. On peut noter également que le code HOS est basé sur l'hypothèse d'une houle non déferlante alors que le déferlement est fréquemment observé pendant les essais à cette cambrure.

Des sondes sont placées dans le domaine de calcul aux mêmes positions que lors des essais expérimentaux dans le but de comparer les signaux temporels d'élévation de surface libre.

On décrit maintenant les techniques d'analyse mises en place, statistique et fréquentielle, ainsi que certaines applications directes de ces méthodes.

## V.1.4 Analyse statistique

L'analyse statistique des signaux de houle aléatoire peut se faire à plusieurs niveaux. La première approche est de considérer l'élévation de surface libre  $\eta(t)$  en un point comme une variable aléatoire.

### V.1.4.1 Loi de répartition de l'élévation

Sa répartition est donnée sur la figure V.1.3 pour un essai expérimental de période moyenne up-crossing 1.42 s et de hauteur significative 32 cm. L'hypothèse couramment utilisée et justifiable en théorie linéaire, est celle d'une répartition gaussienne de l'élévation de surface libre en un point. L'histogramme de la figure V.1.3 atteste bien de ce type de répartition. La courbe en trait plein représente la répartition gaussienne de même moyenne  $\bar{\eta}$  et de même écart-type<sup>5</sup>  $\sigma = \sqrt{\mu_2}$ . On reviendra un peu plus loin sur le fait que la moyenne soit non nulle. D'autres paramètres, liés aux moments d'ordre trois et quatre (skewness  $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$  et kurtosis  $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ , la constante 3 étant la valeur typique du moment réduit d'ordre 4 d'une gaussienne) permettent de quantifier l'écart à une telle gaussienne.

L'histogramme présente des caractéristiques remarquables : on note une plus forte probabilité pour les élévations négatives faibles entre -0.1 et 0 : il s'agit des creux plus plats. La répartition expérimentale est plus faible pour des élévations entre 0 et 15 cm et on note une probabilité plus forte d'avoir une crête très élevée qu'un creux profond en observant les ailes de l'histogramme. Cette asymétrie verticale des vagues est une propriété classique des vagues cambrées non linéaires et se traduit par un coefficient de skewness  $\gamma_1$  positif. On peut également

---

5. Les moments  $\mu_k$  d'ordre  $k$  sont définis en annexe B, ainsi que les formules employées pour les calculer.

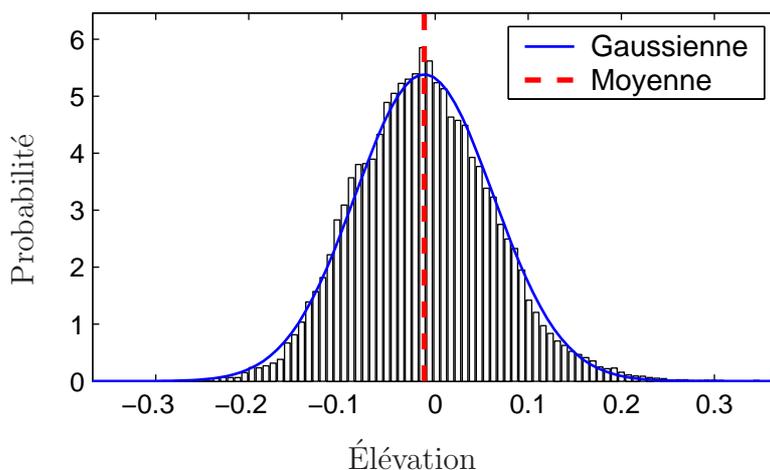


FIG. V.1.3 – Histogramme de répartition de l'élévation de surface libre (essai  $H_s = 32$  cm,  $T_Z = 1.42$  s)

relier les répartitions de l'élévation et de ses dérivées temporelles  $\dot{\eta}(t)$  et  $\ddot{\eta}(t)$  à des grandeurs caractéristiques de l'état de mer telles que la période moyenne ou la hauteur significative :

$$H_s = 4\sigma$$

$$T_Z = 2\pi \sqrt{\frac{E[\eta^2]}{E[\dot{\eta}^2]}}$$

### V.1.4.2 Analyse vague par vague

La seconde approche de l'analyse statistique développée ici consiste à étudier cette fois le signal vague par vague. Ces vagues sont isolées par la technique du passage à zéro (zero-crossing, voir le schéma V.1.4), *i.e.* une vague est définie par la portion de signal entre deux passages à zéro montants (up-crossing) ou descendants (down-crossing).

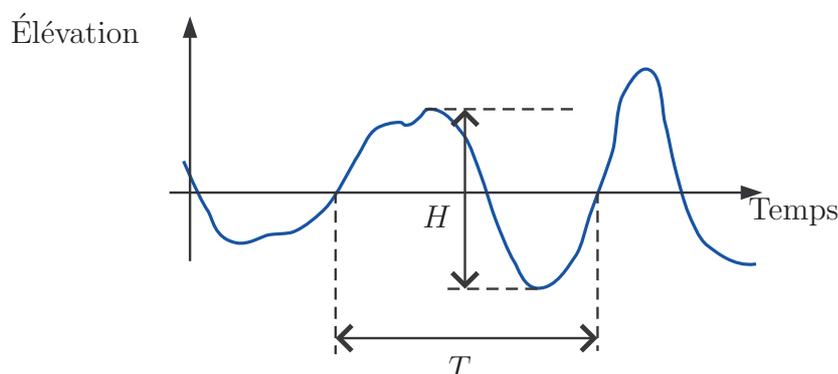


FIG. V.1.4 – Définition d'une vague up-crossing, de sa hauteur et de sa période

Pour chaque vague, après avoir repéré les maximum et minimum d'élévation, on peut en déduire la hauteur  $H$ , alors que l'intervalle de temps correspondant définit une période  $T$ .

L'ensemble des  $n_v$  vagues ainsi isolées permet d'établir des grandeurs caractéristiques dont la période moyenne dite up- ou down-crossing, largement utilisée en pratique. En prenant ensuite la hauteur moyenne du tiers le plus haut des vagues, on obtient la "hauteur un tiers" notée  $H_{1/3}$ . Ces deux paramètres sont ceux retenus ici pour caractériser les essais de houle avec l'étalement du spectre  $\varepsilon$ , obtenu en évaluant le nombre de maxima dans le signal, *i.e.* le nombre de crêtes.

### V.1.4.3 Filtrage préliminaire du signal

Avant d'effectuer l'une ou l'autre des deux analyses statistiques précédentes, il convient d'ajouter une étape de filtrage du signal pour éliminer les bruits éventuels qui perturberont soit la dérivation temporelle du signal, soit la recherche des passages à zéro ou des crêtes. Le choix du filtrage est critique et peut influencer grandement sur les résultats statistiques obtenus, notamment pour le nombre de crêtes détectées. Hughes [65] préconise d'utiliser un seuil à dépasser avant de rechercher un nouveau passage à zéro. Le filtre utilisé ici est un passe-bas idéal de fréquence de coupure  $f_c = 5$  Hz.

## V.1.5 Analyse fréquentielle

Il convient probablement de redonner les définitions des principaux termes de traitement du signal employés ici. On peut se reporter à mon rapport de DEA [14].

L'estimation des spectres de houle irrégulière à partir des signaux des sondes se fait grâce à la méthode de Welch ou méthode du périodogramme modifiée. Le spectre du signal supposé aléatoire, est obtenu comme la moyenne de spectres individuels. Il s'agit en effet de découper le signal utile en segments, d'appliquer une fenêtre temporelle sur chaque segment et de moyenniser les spectres de chaque segment de signal, obtenus par Transformée de Fourier.

Avant d'aller plus loin, on peut se poser la question de savoir si le signal que l'on désire analyser est bien aléatoire (ce qui est supposé lorsque l'on utilise l'estimateur de Welch). Replaçons-nous dans le cas d'une simulation SWEET. On a vu que l'analyse fréquentielle du signal linéaire correctement échantillonné, sur une période de répétition du batteur, grâce à une simple Transformée de Fourier, permet de retrouver complètement le spectre incident, aux réflexions près. Dans ce cas, le spectre obtenu ne présente pas d'oscillations importantes en fonction de la fréquence comme souvent lors de l'analyse de houle irrégulière. On considère dans ce cas le signal comme déterministe et on peut retrouver complètement les amplitudes et phases d'entrée. Or, lorsque l'on analyse de la même manière le signal non linéaire premier plus second ordre, le résultat de la Transformée de Fourier présente cette fois les oscillations décrites précédemment. Il apparaît donc que ces oscillations sont dues non pas à un caractère aléatoire du signal mais aux non-linéarités de l'écoulement.

Lors des expériences en bassin cette fois, les spectres présentent généralement ces oscillations, y compris à faible cambrure. On peut raisonnablement penser que dans ce dernier cas d'autres phénomènes physiques entrent en jeu qui sont détectés lors de l'analyse de Fourier.

Cet estimateur de Welch possède une variance plus faible que le périodogramme classique du fait de la moyenne sur les segments, mais en contrepartie une résolution moins bonne puisque la durée d'un segment est plus faible que la durée du signal total sur lequel s'appuie le périodogramme.

Des exemples sont donnés dans la figure V.1.5 pour trois longueurs  $T_w$  différentes de segments respectivement de 26, 51 et 102 s (les valeurs de  $f_p$  et  $S_{max}$  sont données dans le tableau

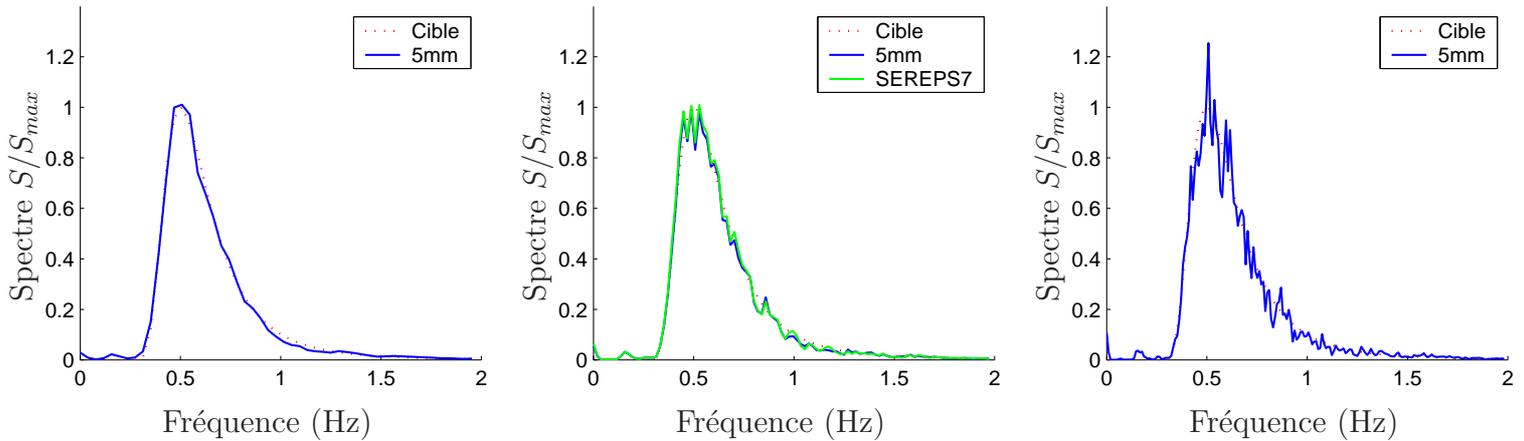


FIG. V.1.5 – Influence de la largeur  $T_w$  des segments de la méthode de Welch pour  $H_s = 16$  cm,  $T_Z = 1.42$  s (de gauche à droite,  $T_w = 26, 51$  et  $102$  s)

V.1.1). Il convient de trouver un bon compromis entre l'aspect régulier du spectre et la résolution en fréquence qui évoluent en sens opposé lorsqu'on fait varier le nombre de segments. Cette résolution en fréquence pour les trois spectres présentés est de 0.039, 0.02 et 0.01 Hz de gauche à droite (respectivement 126, 60 et 28 degrés de liberté). Les énergies calculées à partir de ces trois spectres sont respectivement de 16, 15.7 et  $15.7 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>s, très proches de l'énergie d'entrée (linéaire) de  $16 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>s entre 0 et 2 Hz.

Le signal utile est défini ici par la période de répétition du mouvement batteur. Celle-ci ayant été choisi à 512 s, il semble que des segments<sup>6</sup> de 51 s réalisent un bon compromis.

Un deuxième estimateur de spectre a été testé. Il s'agit d'une moyenne sur plusieurs fréquences adjacentes du spectre obtenu par une Transformée de Fourier sur la durée de répétition du signal (frequency band averaging, cf. e.g. [73]). La figure V.1.6 montre trois spectres correspondant à des moyennes sur  $N_f = 19, 11$  et 5 fréquences, de gauche à droite. La résolution de chacun des estimateurs, respectivement 0.037, 0.021 et 0.01 Hz est équivalente à celle des trois spectres précédemment obtenus par la méthode de Welch. Les trois nombres  $N_f$  de fréquences moyennées donnent la même énergie totale, celle de la Transformée de Fourier initiale soit  $15.5 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup> entre 0 et 2 Hz, semblable aux valeurs obtenues avec l'estimateur de Welch. La comparaison des deux estimateurs de spectre montre un comportement similaire aux différentes résolutions. L'estimateur par moyenne de fréquences fournit des spectres moins oscillants près du pic du spectre. Les deux estimateurs permettent d'identifier le même comportement particulier entre 0.8 et 0.9 Hz.

### V.1.5.1 Comparaison des différentes sondes

Lors des analyses statistique et fréquentielle précédentes, on a considéré que le signal issu de la sonde était bien représentatif du champ de vague cible. Ce sera effectivement le cas si et seulement si l'absorption de la plage est parfaite. En fait, une légère variation des grandeurs statistiques ou des spectres est donc attendue d'une sonde à l'autre compte tenu de la réflexion de la plage.

6. Associés également à un recouvrement de moitié et une fenêtre temporelle de Hanning, ce qui correspond à 60 degrés de liberté, valeur typique de celles préconisées par Kirby [73] par exemple.

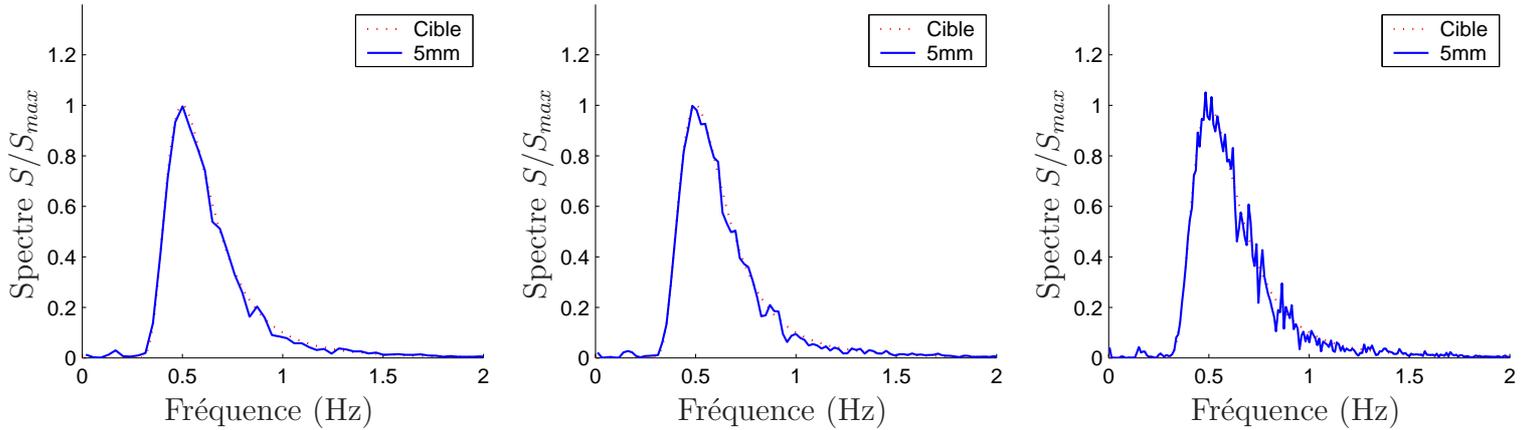


FIG. V.1.6 – Influence du nombre  $N_f$  de fréquences moyennées pour  $H_s = 16$  cm,  $T_Z = 1.42$  s (de gauche à droite,  $N_f = 19, 11$  et  $5$ )

On passe maintenant aux essais expérimentaux. Les différents essais effectués permettent d’investiguer l’influence de plusieurs paramètres tels la hauteur significative ou la période de pic.

## V.1.6 Comparaison de deux périodes up-crossing

On compare ici les spectres mesurés en bassin pour les deux périodes de pics générées dans deux cas de cambrures caractéristiques (définies comme le rapport de la hauteur significative sur la longueur d’onde du pic). Un premier couple d’essai correspond à un état de mer qu’on qualifiera de sévère (la cambrure caractéristique  $\varepsilon_c = H_s/\lambda_p$  vaut environ 6%). La cambrure du deuxième couple d’essais est plus faible, environ 3%. On applique aux deux jeux d’essais une estimation spectrale de Welch basée sur les paramètres choisis dans la partie V.1.5.

Les deux essais de mer sévère présentés sur la figure V.1.7 amènent à des conclusions semblables. Dans les deux cas on constate un assez bon accord entre spectre cible et mesurés pour les fréquences inférieures au pic, alors qu’un déficit en énergie apparaît pour les fréquences de 0.7 à 1.5 Hz. On peut attribuer ce déficit en énergie au déferlement observé au cours des deux essais (voir également la discussion sur le mouvement batteur page V.1.7.4).

Pour les états de mer plus doux de la figure V.1.8, les conclusions sont à nouveau similaires suivant la période du pic. On observe peu ou pas de déficit aux hautes fréquences. Sur la figure de droite, on peut déjà remarquer un pic marqué très proche de la fréquence de pic.

En observant à nouveau la figure V.1.7, on peut noter de façon plus marquée sur la figure de gauche deux pics secondaires, aux fréquences de 0.7 et 0.86 Hz. La figure de droite comporte aussi deux pics du même type, aux fréquences de 0.76 et 0.86 Hz. Il est possible que cette réponse très forte soit liée à l’excitation de modes propres. Il est cependant nécessaire de savoir si ces pics sont dépendants ou non de la technique utilisée pour l’estimation spectrale et du type de sondes employées (ORCA, 5mm et SEREPS) : ces pics secondaires apparaissent sur les spectres issus des deux méthodes d’estimation utilisées (non montré ici) et ils sont également présents sur les 7 sondes (sondes 5mm et ORCA sur la figure V.1.7, sondes 5mm et SEREPS7 sur la figure V.1.8). On peut donc vraisemblablement penser qu’il y a bien un phénomène physique à l’origine de ces pics.

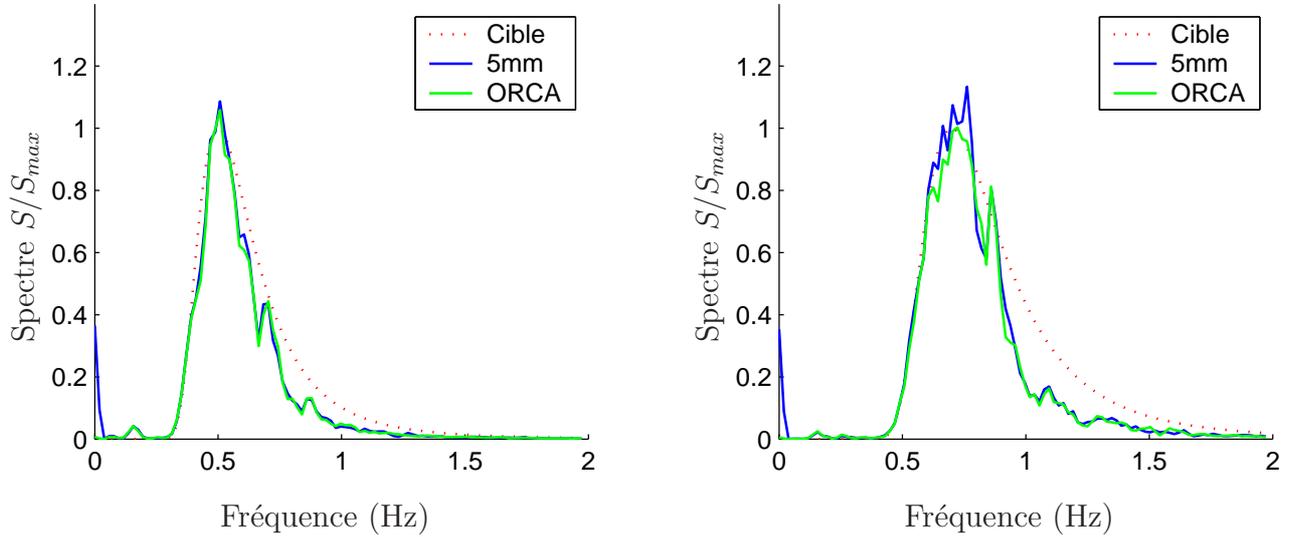


FIG. V.1.7 – Influence de la période de pic pour un état de mer sévère  $\varepsilon_c = 6 \%$  (gauche :  $T_Z=1.42$  s,  $H_s = 32$  cm; droite,  $T_Z=1$  s,  $H_s=16$  cm)

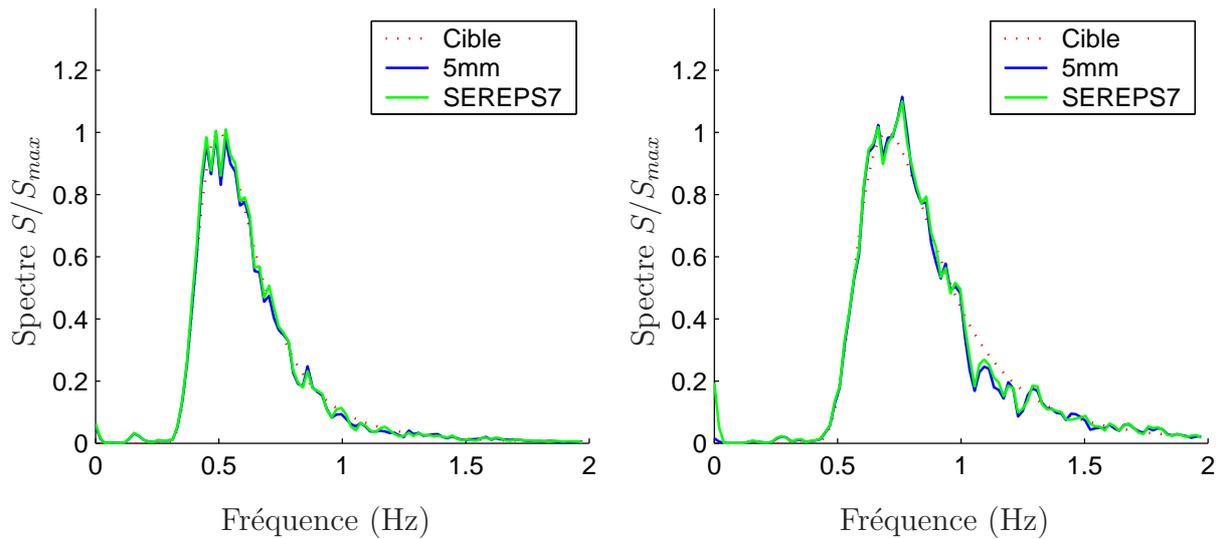


FIG. V.1.8 – Influence de la période de pic pour un état de mer doux  $\varepsilon_c = 3 \%$  (gauche :  $T_p=1.4$  s,  $H_s = 16$  cm; droite,  $T_Z=1$  s,  $H_s=8$  cm)

## V.1.7 Influence de la hauteur significative

On s'intéresse ici à la période up-crossing  $T_Z = 1.42$  s, dont on étudie le champ de vagues pour différentes hauteurs significatives. À chaque fois, des calculs au second ordre et en non linéaire complet ont été réalisés pour comparaison. On dispose de trois essais de hauteurs significatives  $H_s = 8, 16$  et  $32$  cm, soit trois cambrures caractéristiques  $\varepsilon_c = 1.5, 3$  et  $6$  %.

### V.1.7.1 Domaine temporel

Avant même de réaliser les analyses statistique et fréquentielle décrites précédemment, on peut comparer les signaux temporels des différents essais entre eux en adimensionnant l'élévation par la hauteur significative pour mettre en évidence l'effet des non-linéarités.

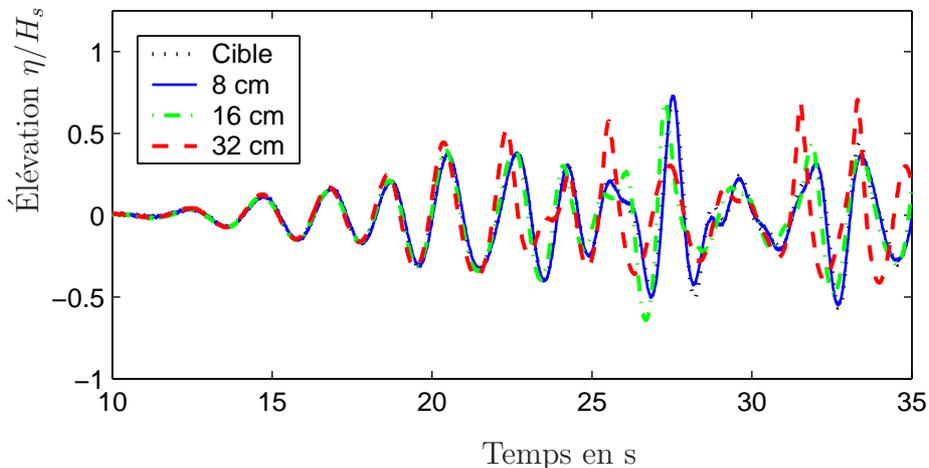


FIG. V.1.9 – Comparaison des signaux expérimentaux adimensionnés, front d'onde

La figure V.1.9 montre qu'entre 10 et 20 s, le front d'onde adimensionné est quasi identique pour les trois essais, puis progressivement, les crêtes et les creux se déphasent, *i.e.* arrivent plus tôt pour les cambrures plus élevées.

La figure V.1.10 montre les signaux un peu plus tard. On observe un comportement bien différent entre le signal  $\varepsilon_c = 6$  % et les deux autres, 3 et 1.5 % qui sont plus semblables, y compris dans les vagues de faibles cambrures. Le troisième pic à  $t = 96$  s est absent dans l'essai  $\varepsilon_c = 6$  % : on peut penser soit qu'un déferlement a eu lieu avant soit que les variations de phase dues aux non-linéarités sont très importantes.

On peut également comparer les signaux expérimentaux et les résultats des calculs numériques sur tout le signal. La figure V.1.11 présente ainsi l'évolution temporelle sur une sonde placée à 25 m du batteur pour le cas  $\varepsilon_c = 3$  %

On constate que les simulations sont proches des expériences, y compris après un long temps d'essai. Des différences sont visibles lorsqu'un paquet de vague de grande amplitude passe au niveau de la sonde. Pour s'intéresser à ces différences, on retourne un court instant à une hauteur significative de  $\varepsilon_c = 1.5$  %. La figure V.1.12 montre ainsi en haut la comparaison entre les simulations SWEET premier et second ordre pour un paquet de vague de forte amplitude vers  $t = 760$  s. On constate qu'après un long temps d'essai le modèle second ordre fournit une élévation très proche des mesures pour cette hauteur significative (en haut). L'accord entre le modèle non linéaire complet HOS et les expériences est encore meilleur (en bas).

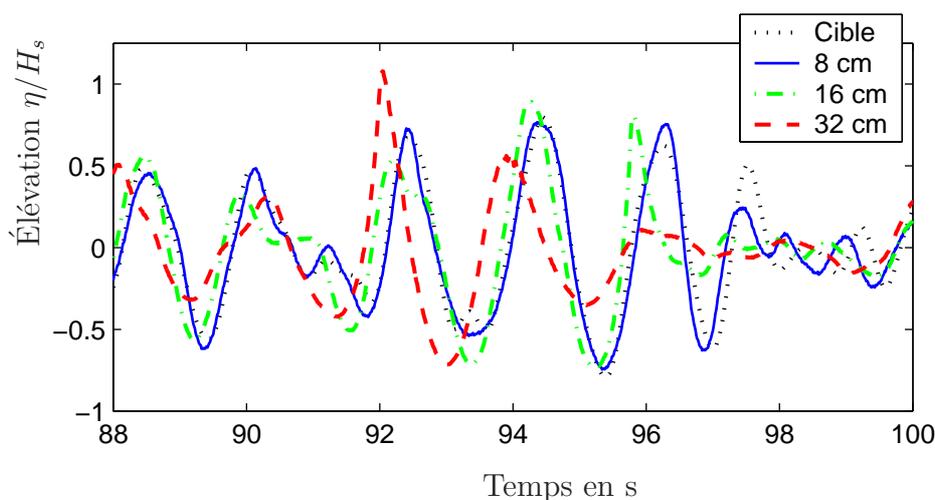


FIG. V.1.10 – Comparaison des signaux expérimentaux adimensionnés, haute crête

En revenant maintenant à  $\varepsilon_c = 3\%$ , et en observant la même portion du signal dans la figure V.1.15, on peut noter l'insuffisance des modèles linéaire et second ordre pour cette hauteur significative. On remarque à l'inverse l'excellent accord entre l'élevation non linéaire complet tirée du modèle HOS et la mesure : le modèle HOS reproduit bien l'essentiel du phénomène de propagation intervenant dans le cas d'essais de houle irrégulière de  $\varepsilon_c$  intermédiaire<sup>7</sup>.

Les figures V.1.13 et V.1.14 viennent compléter la comparaison entre expériences et modèles pour d'autres paquets de vagues de fortes amplitudes au cours de l'essai  $\varepsilon_c = 3\%$ . Le modèle HOS décrit correctement l'élevation de surface libre expérimentale alors que le modèle second ordre est insuffisant pour reproduire ces deux paquets de vagues<sup>8</sup>.

### V.1.7.2 Analyse statistique de la répartition de l'élevation

Le tableau V.1.3 fournit les résultats de l'analyse statistique<sup>9</sup> de l'élevation, en hauteur 1/3 et période up-crossing. La colonne entrée correspond aux valeurs tirées du spectre (V.1.1) ayant servi à construire le mouvement batteur : elles sont données pour identifier l'essai correspondant plutôt que comme valeurs cibles, le champ de vague ayant été généré avec une loi de commande linéaire, sans itération pour reproduire le bon spectre cible. La période évaluée à partir des simulations numériques linéaires est évidemment la même pour les trois cas, les hauteurs étant, elles, proportionnelles. L'effet des non-linéarités du second ordre est d'augmenter à la fois la hauteur significative et la période up-crossing par rapport aux valeurs linéaires. Expérimentalement, on observe bien une augmentation de la période mais beaucoup plus forte que la prédiction second

7. La simulation de la cambrure  $\varepsilon_c = 6\%$  s'arrête après quelques périodes. D'une part, la condition de flux linéaire sur le batteur ne permet pas de générer de houles cambrées à proximité de ce dernier, et d'autre part, le traitement de la surface libre n'autorise pas le déferlement alors que celui-ci est observé au cours de l'essai correspondant.

8. On peut noter au passage que ces trois paquets de vagues à  $t = 488, 606$  et  $760$  s ne constituent pas des vagues scélérates au sens du critère  $H/H_s > 2$ .

9. Les valeurs données dans les tableaux sont calculées sur un signal sélectionné à partir de 80 s de manière à éviter le front d'onde et jusqu'à la fin de l'enregistrement soit une durée de 820 s. Une moyenne est réalisée sur les différentes sondes présentes pour tenter d'effacer les variations dues à la réflexion. Dans les deux cas, simulations et expériences, on a noté une variation faible des périodes et hauteurs entre les sondes, alors que les variations sont plus importantes pour les paramètres statistiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

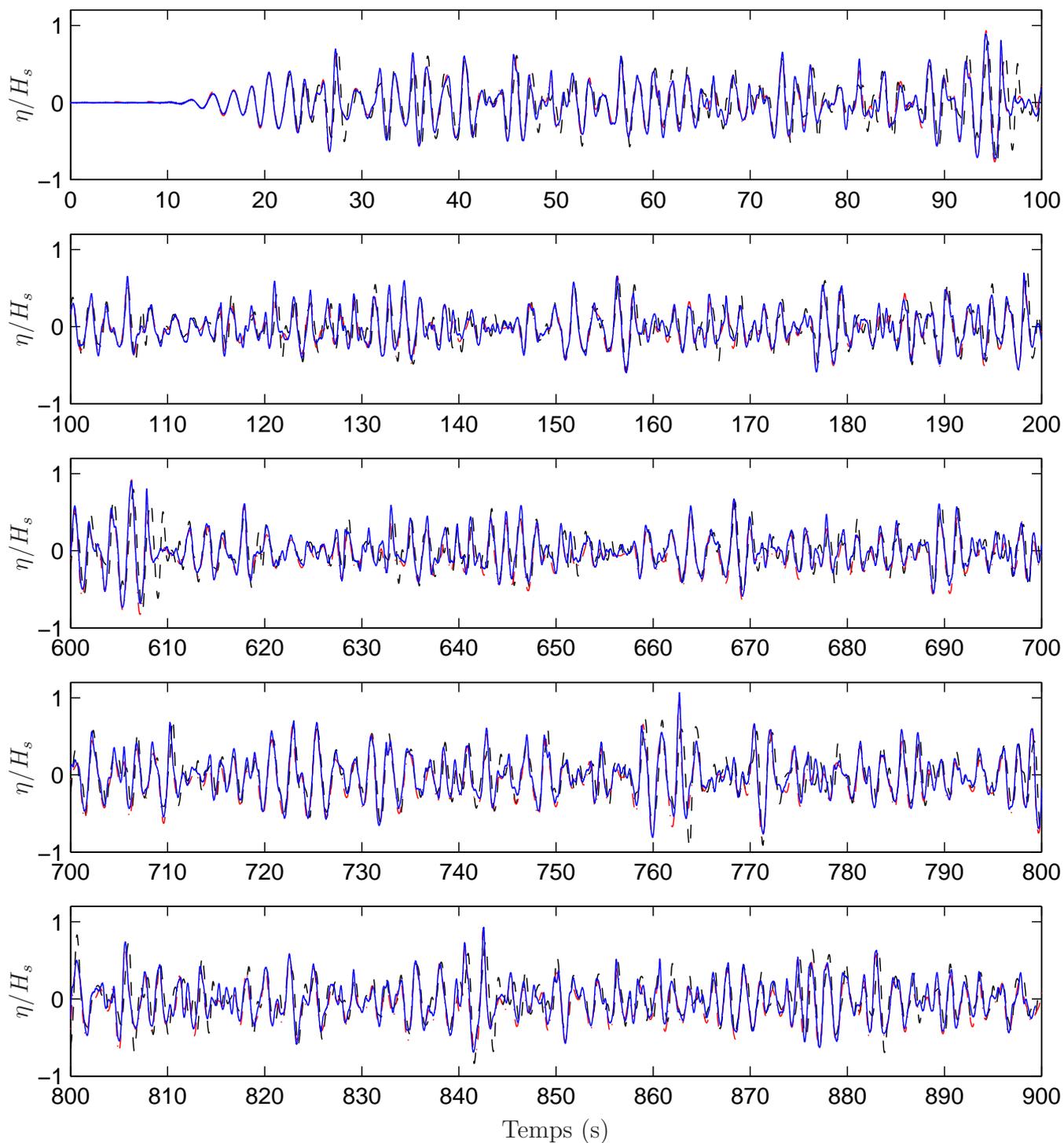


FIG. V.1.11 – Comparaison des signaux expérimental (—) numérique linéaire SWEET (---) et numérique non linéaire HOS (-.-) pour un état de mer  $\varepsilon_c = 3\%$

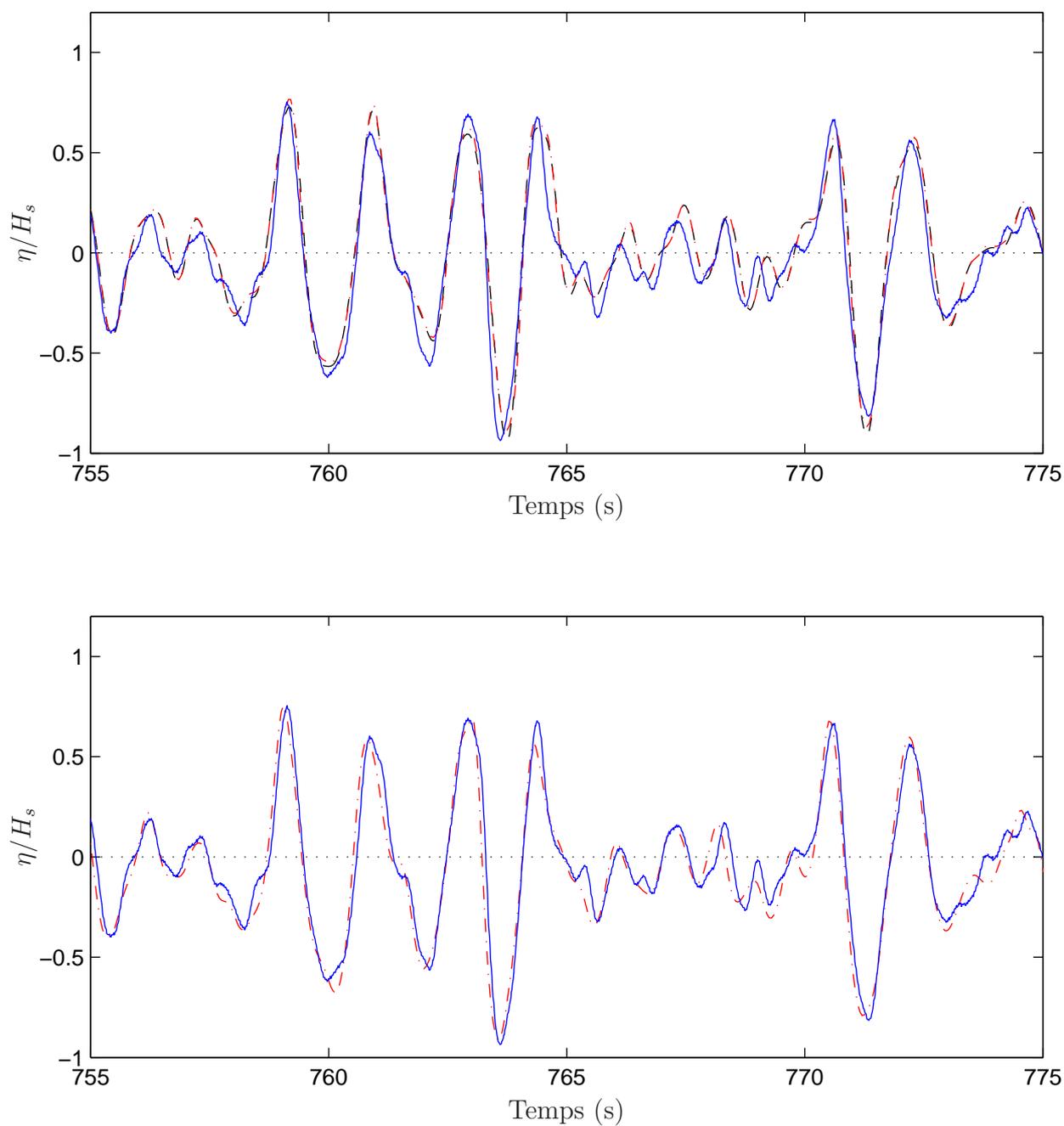


FIG. V.1.12 – Comparaison des signaux expérimental et numériques (en haut: expérimental (—) linéaire SWEET (---) et second ordre SWEET (-.-.); en bas: expérimental (—) et non linéaire complet HOS (-.-.)) pour un état de mer  $\varepsilon_c = 1.5\%$

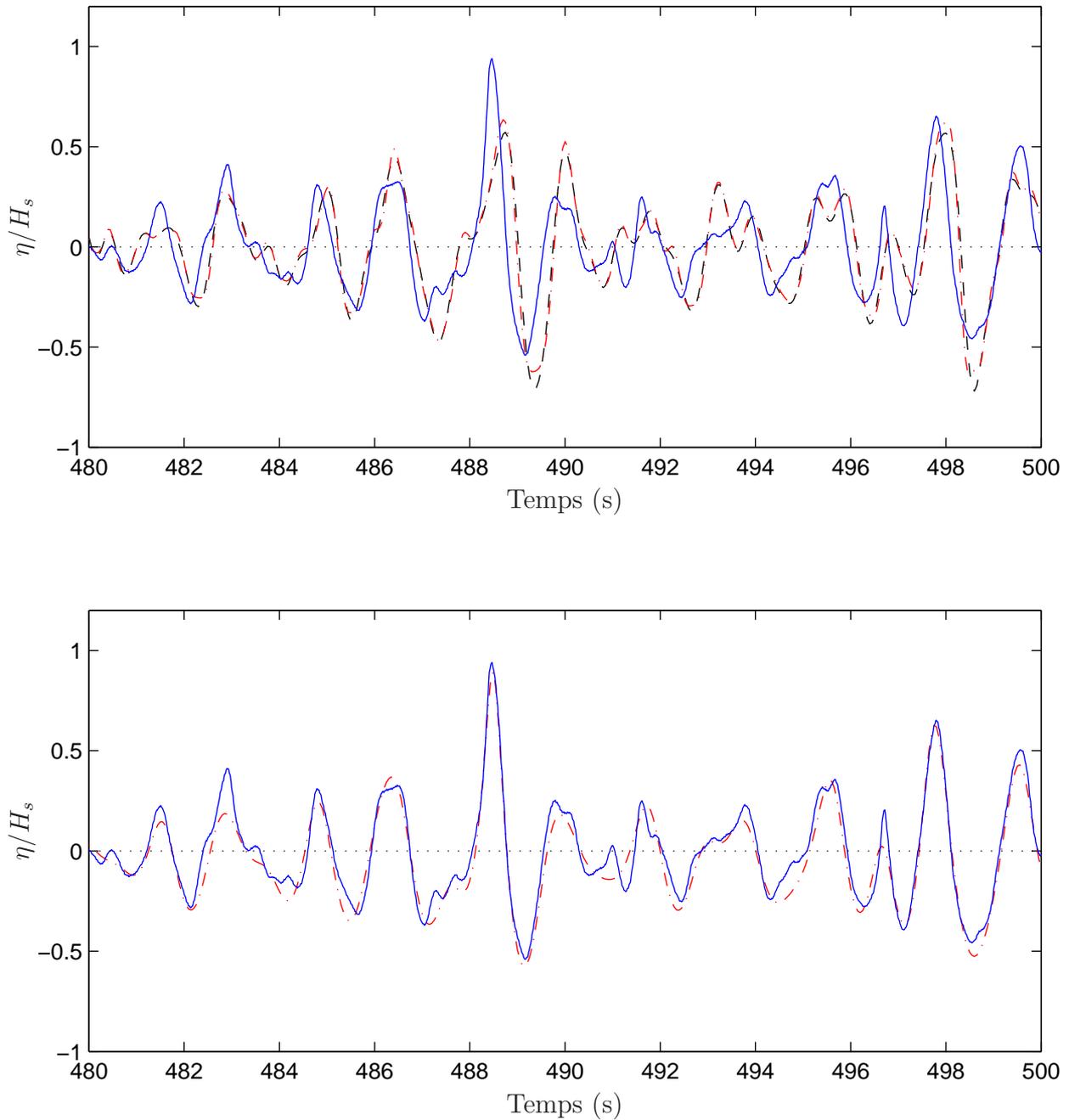


FIG. V.1.13 – Comparaison des signaux expérimental et numériques (en haut : expérimental (—) linéaire SWEET (---) et second ordre SWEET (-.-.); en bas : expérimental (—) et non linéaire complet HOS (-.-.)) pour un état de mer  $\varepsilon_c = 3\%$

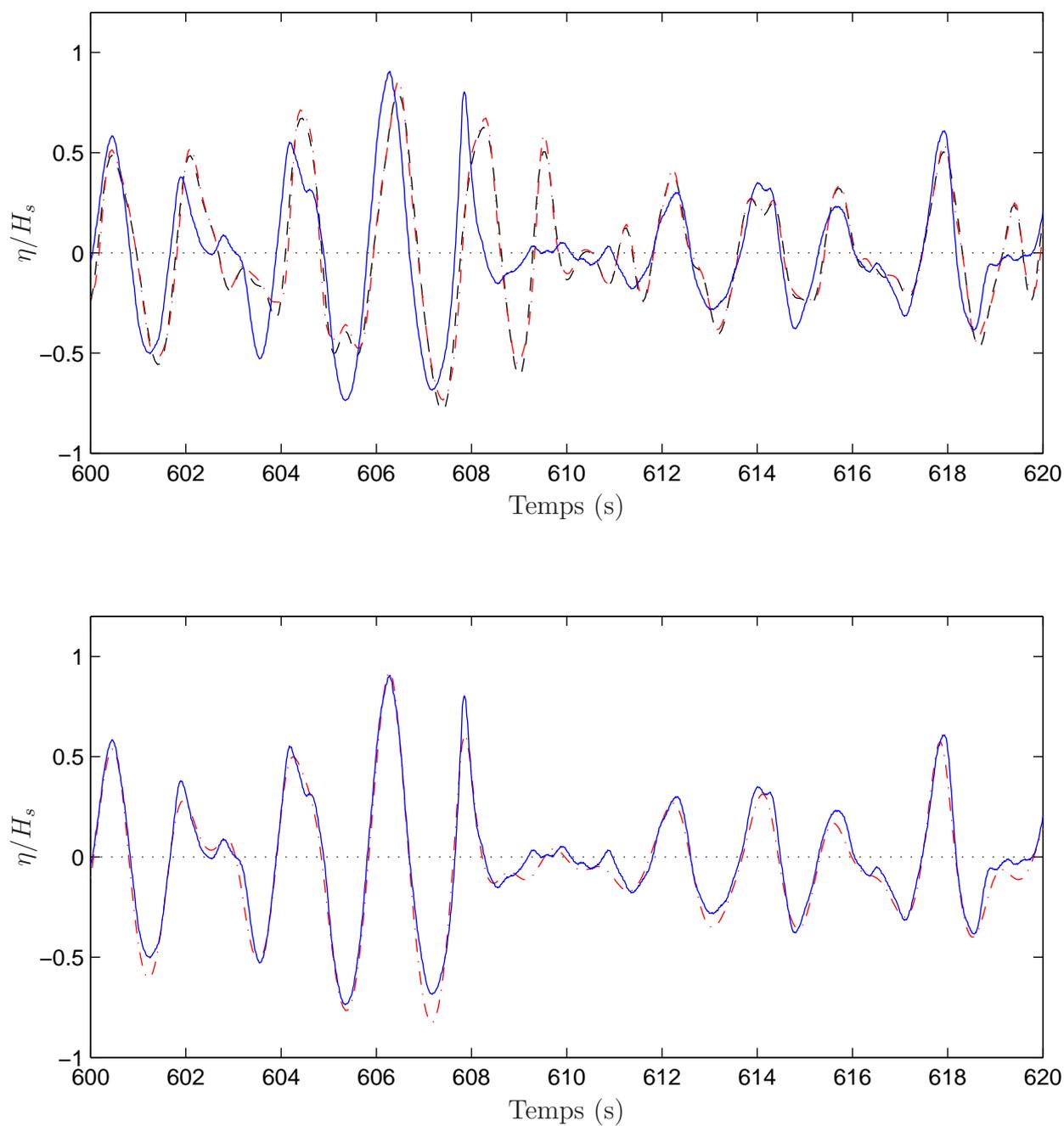


FIG. V.1.14 – Comparaison des signaux expérimental et numériques (en haut : expérimental (—) linéaire SWEET (---) et second ordre SWEET (-.-.); en bas : expérimental (—) et non linéaire complet HOS (-.-)) pour un état de mer  $\varepsilon_c = 3\%$

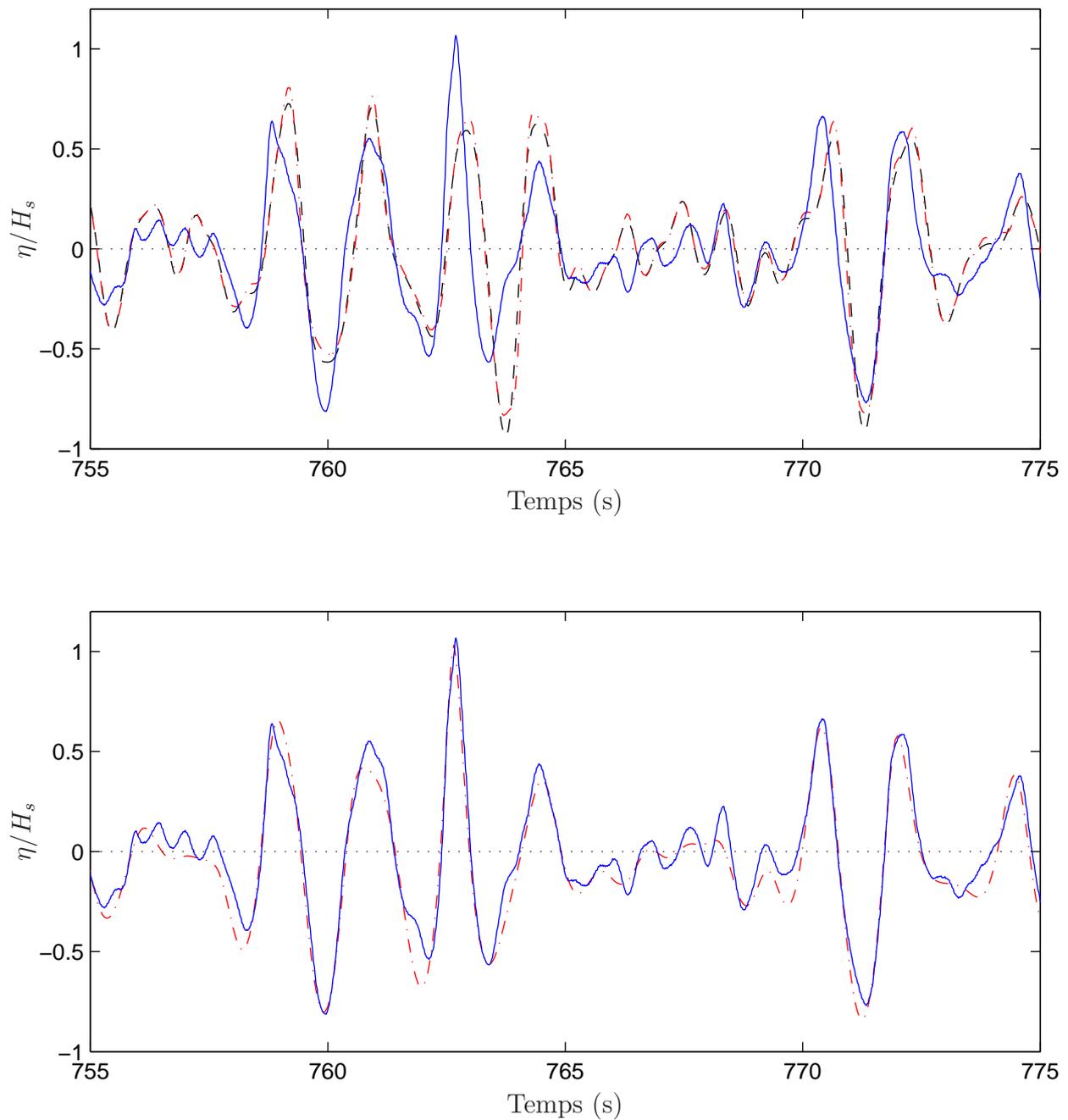


FIG. V.1.15 – Comparaison des signaux expérimental et numériques (en haut : expérimental (—) linéaire SWEET (---) et second ordre SWEET (-.-.); en bas : expérimental (—) et non linéaire complet HOS (-.-.)) pour un état de mer  $\varepsilon_c = 3\%$

ordre. Le comportement de la hauteur significative est également différent à forte cambrure : la valeur mesurée passe en dessous de la prédiction linéaire.

		Entrée	Expérience	Simulations		
				Linéaire	Second ordre	Non linéaire
$\varepsilon_c = 1.5 \%$	$H_{1/3}$	8	8.09	8.06	8.06	8.06
	$T_Z$	1.42	1.41	1.48	1.48	1.48
$\varepsilon_c = 3 \%$	$H_{1/3}$	16	15.9	16.1	16.2	16.3
	$T_Z$	1.42	1.45	1.48	1.49	1.46
$\varepsilon_c = 6 \%$	$H_{1/3}$	32	29.1	32.2	33.0	—
	$T_Z$	1.42	1.60	1.48	1.52	—

TAB. V.1.3 – Hauteurs 1/3 en cm et périodes up-crossing en s issues de l'analyse de l'élévation pour  $T_Z = 1.42$  s

Le tableau V.1.4 donne les valeurs des paramètres caractéristiques de la répartition statistique de l'élévation pour trois hauteurs significatives différentes. La colonne prédiction correspond au modèle développé par Vinje et Haver [124]. Au second ordre, on s'attend à ce que le skewness augmente linéairement avec la cambrure :

$$\gamma_1 = 5.41 \frac{H_s}{\lambda_p}$$

Les valeurs de skewness du tableau V.1.4, pour le cas linéaire, sont là encore identiques pour toutes les cambrures car elles ont été adimensionnées grâce à la hauteur significative. Elles sont faibles, ce qui va dans le sens d'une distribution gaussienne. Dans tous les autres cas, le skewness  $\gamma_1$  est positif et supérieur à la valeur du modèle linéaire : dès le second ordre, les effets non linéaires qui aplatissent les creux et surélèvent les crêtes asymétrisent la distribution des élévations et rendent ce paramètre positif.

		Expérience	Simulations			Prédiction
			Linéaire	Second ordre	Non linéaire	
$\varepsilon_c = 1.5 \%$	$\gamma_1$	0.10	0.024	0.095	0.10	0.087
$\varepsilon_c = 3 \%$	$\gamma_1$	0.17	0.024	0.16	0.13	0.17
$\varepsilon_c = 6 \%$	$\gamma_1$	0.23	0.024	0.27	—	0.35

TAB. V.1.4 – Skewness  $\gamma_1$  de la répartition statistique de l'élévation de surface libre (pour les essais à  $T_Z = 1.42$  s)

### V.1.7.3 Analyse statistique vague par vague

Le tableau V.1.5 donne les hauteurs 1/3 et périodes up-crossing fournies par l'analyse vague par vague des essais et simulations de période  $T_Z = 1.42$  s. À nouveau on retrouve des périodes up-crossing identiques et des hauteurs 1/3 proportionnelles au premier ordre. Les essais expérimentaux montrent une période up-crossing croissante et une hauteur significative inférieure au cas linéaire. Les effets du second ordre tendent à augmenter la hauteur 1/3 légèrement moins vite que le cas linéaire, en accord avec les expériences, alors qu'ils donnent

		Entrée	Expérience	Simulations		
				Linéaire	Second ordre	Non linéaire
$\varepsilon_c = 1.5 \%$	$H_{1/3}$	8	7.2	7.2	7.2	7.2
	$T_Z$	1.42	1.40	1.45	1.43	1.46
$\varepsilon_c = 3 \%$	$H_{1/3}$	16	14.3	14.5	14.4	14.6
	$T_Z$	1.42	1.47	1.45	1.43	1.47
$\varepsilon_c = 6 \%$	$H_{1/3}$	32	26.6	29.0	28.5	—
	$T_Z$	1.42	1.68	1.45	1.38	—

TAB. V.1.5 – Hauteurs 1/3 en cm et période up-crossing en s issues de l'analyse vague par vague pour  $T_Z = 1.42$  s

		Expérience	Simulations		
			Linéaire	Second ordre	Non linéaire
$\varepsilon_c = 1.5 \%$	$n_v$	582	565	570	561
	$\varepsilon$	0.59	0.43	0.45	0.47
$\varepsilon_c = 3 \%$	$n_v$	554	565	573	557
	$\varepsilon$	0.55	0.43	0.50	0.53
$\varepsilon_c = 6 \%$	$n_v$	550	565	591	—
	$\varepsilon$	0.47	0.43	0.7	—

TAB. V.1.6 – Nombre de vagues et étalement issus de l'analyse vague par vague (pour les essais à  $T_Z = 1.42$  s)

une période décroissante lorsque la hauteur significative augmente. Les simulations non linéaires semblent mieux prédire l'évolution de la période.

Le tableau V.1.6 présente les valeurs du nombre de vagues et de l'étalement du spectre tirés de l'analyse vague par vague des mêmes essais et simulations à  $T_Z = 1.42$  s. Les résultats expérimentaux révèlent une diminution à la fois du nombre de vagues détectées et de l'étalement à mesure que la hauteur significative augmente alors que les simulations second ordre et non linéaire complet montrent un comportement opposé pour l'étalement et pour le nombre de vagues dans le cas du second ordre.

#### V.1.7.4 Analyse fréquentielle

Une fois l'analyse fréquentielle effectuée, on peut tenter d'interpréter dans un premier temps les résultats expérimentaux. On va retrouver ici des résultats expérimentaux classiques, évoqués par exemple dans la thèse de Bénaouda Daoud [40]. La figure V.1.17 compare les spectres estimés grâce aux paramètres évoqués précédemment, pour les trois hauteurs significatives étudiées à la période  $T_Z$  de 1.4 s (les valeurs de  $f_p$  et  $S_{max}$  sont données dans le tableau V.1.1). On observe sur la figure V.1.17 des spectres estimés proches de la cible pour les deux hauteurs significatives les plus faibles. Pour la plus haute, on peut noter un fort écart en amplitude pour les fréquences supérieures à 0.7 Hz (période inférieure à 1.4 s) entre la cible linéaire et les mesures. Ce déficit est très probablement à attribuer au fort déferlement observé lors de cet essai. Une autre cause possible peut être un mouvement réel du batteur différent de la consigne. Lors de la campagne de juin 2004, on ne disposait pas de recopie du mouvement batteur pour confirmer ou non cette hypothèse. Cette fonctionnalité ayant été ajoutée au logiciel de commande durant l'été 2004,

on a pu refaire en septembre un essai (un seul en raison du temps limité disponible), pendant lequel on a enregistré le déplacement d'un volet. La figure V.1.16 montre l'amplitude de la

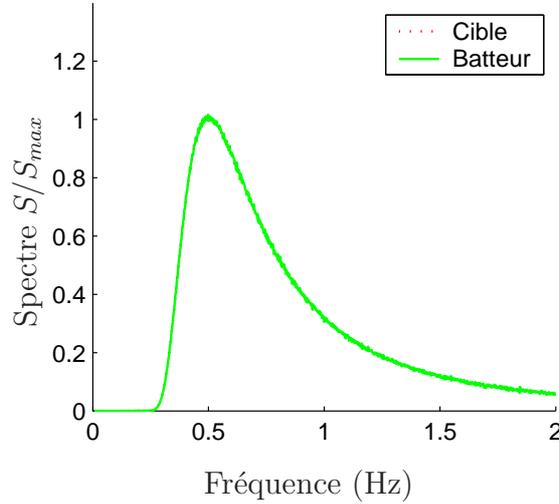


FIG. V.1.16 – Spectre d'amplitude de la cible et du mouvement batteur

TF du mouvement, calculée sur une portion du signal de durée égale à la durée de répétition (512 s). Amplitude cible et mesure sont parfaitement superposées : le mouvement du batteur est bien conforme à la consigne pour ces essais de houle irrégulière 2D.

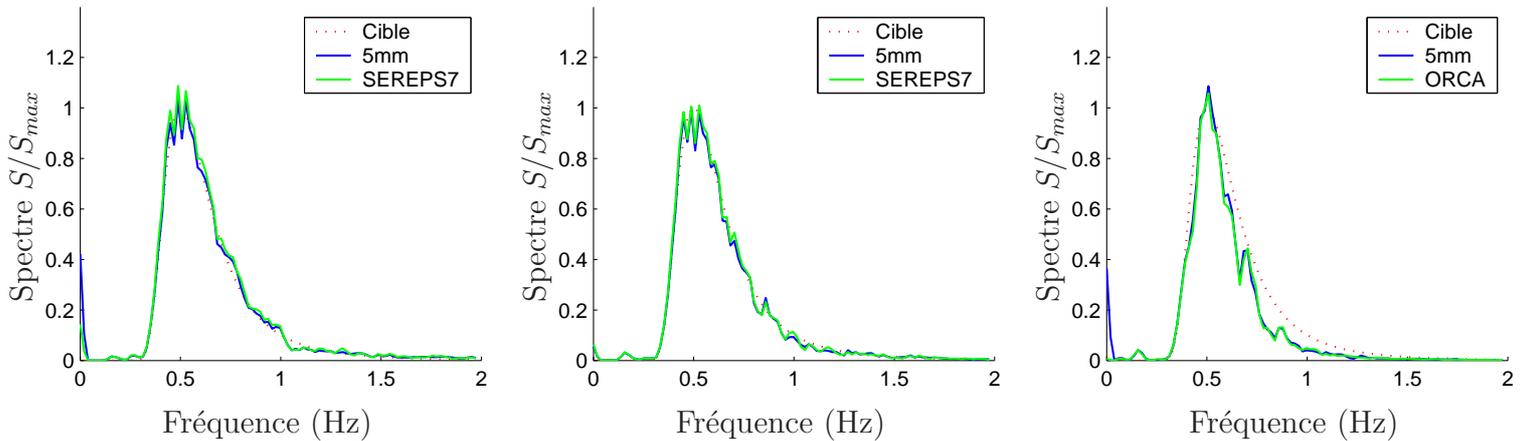


FIG. V.1.17 – Exemples de spectres bidimensionnels ( $T_Z=1.4$  s et de gauche à droite,  $H_s = 8, 16$  et  $32$  cm)

Dans les trois cas, on peut remarquer que les basses fréquences (inférieures à 0.3 Hz soit 3 s) sont fortement excitées. Les spectres montrent un pic secondaire entre 0.15 et 0.2 Hz. Ce phénomène pourra être dommageable et/ou à contrôler pour les essais de corps à forte réponse à ces fréquences. On y reviendra lors de la comparaison entre les expériences et les simulations qu'on effectue maintenant. Pour un cas de faible hauteur significative ( $\varepsilon_c = 1.5$  %), la figure V.1.18 montre les spectres de l'élévation d'une sonde pour l'expérience (5mm) et les simulations second ordre (SWEET) et non linéaire complet (HOS). On constate que les trois spectres se

superposent bien pour l'ensemble des fréquences, conformément aux conclusions relatives aux tableaux V.1.3 et V.1.5.

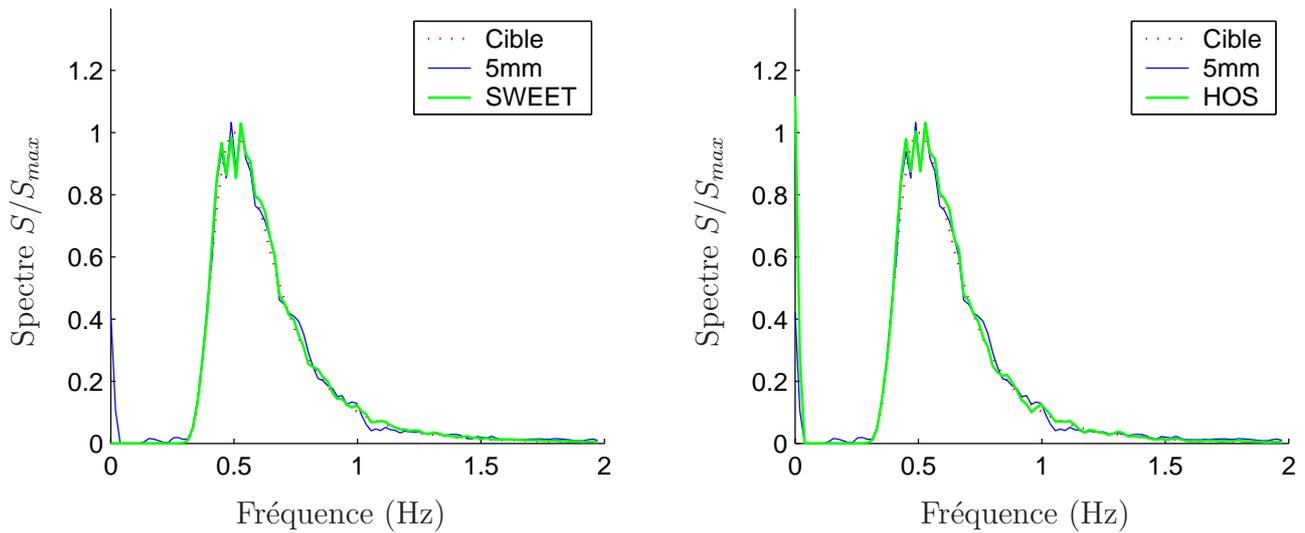


FIG. V.1.18 – Comparaisons des spectres pour  $\varepsilon_c = 1.5 \%$

Pour une hauteur significative plus élevée,  $\varepsilon_c = 3 \%$ , on observe pour les hautes fréquences, une différence nette entre le spectre second ordre d'une part et les spectres HOS et expérimental d'autre part, qui sont assez proches (figure V.1.19). Pour les fréquences proches du pic, on observe une surestimation par le HOS.

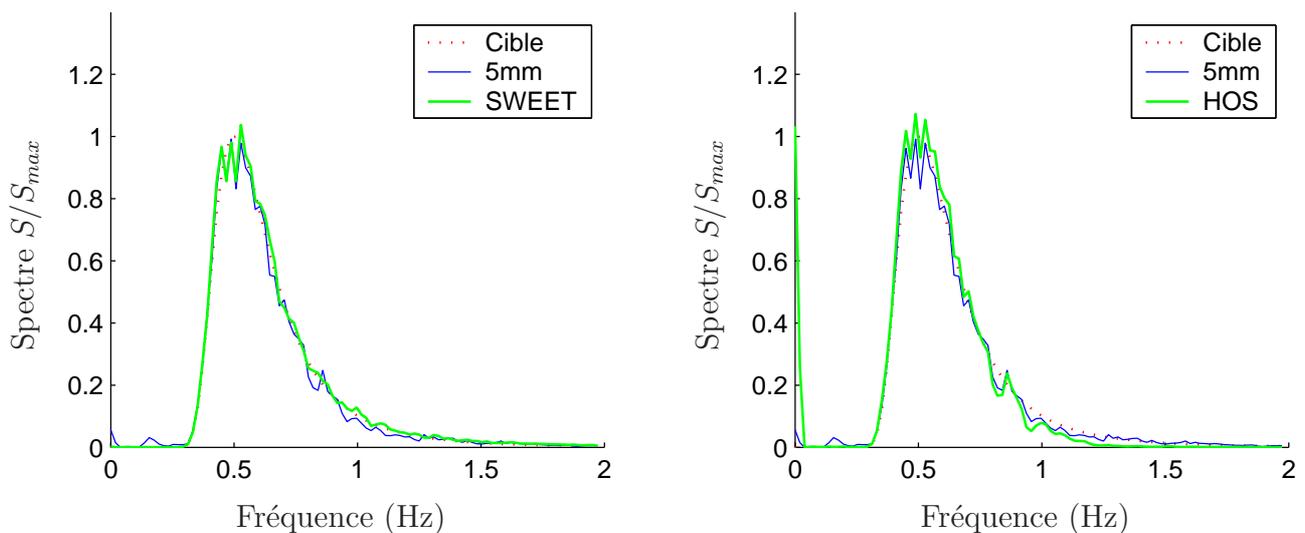


FIG. V.1.19 – Comparaisons des spectres pour  $\varepsilon_c = 3 \%$

## V.1.8 Influence du second ordre lors des simulations

Les simulations effectuées avec le code second ordre offrent la possibilité d'identifier l'effet du second ordre sur les spectres mesurés. Les calculs utilisés ici correspondent à une hauteur significative de  $H_s = 32$  cm pour une période up-crossing  $T_Z = 1.42$  s. La figure V.1.20 montre

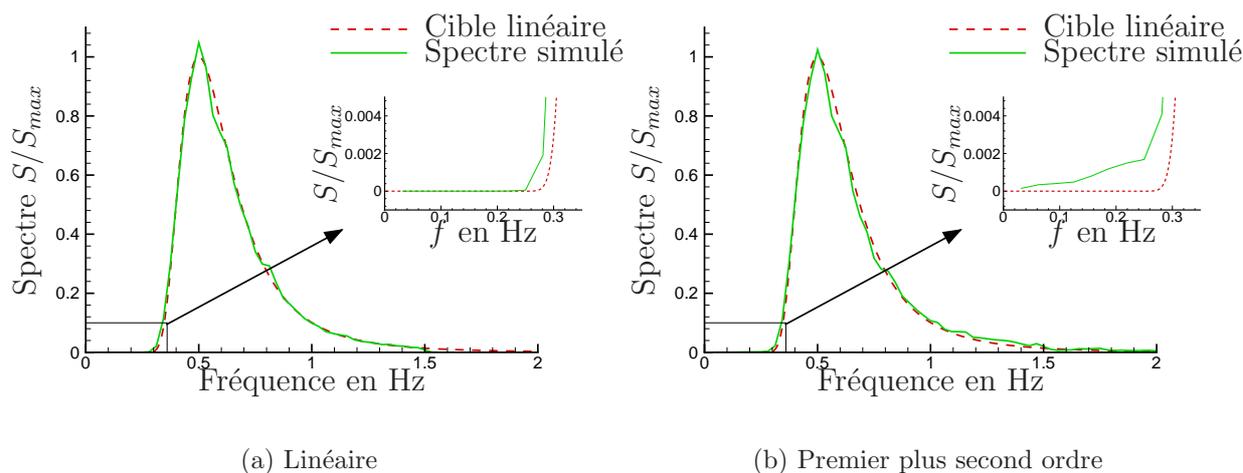


FIG. V.1.20 – Spectres des élévations simulés ( $T_Z=1.42$  s et  $H_s = 32$  cm)

les spectres obtenus par la méthode de Welch avec des segments de durée 32 s (résolution 0.03 Hz et 60 degrés de liberté) sur 512 s de simulation. À gauche le spectre de l'élévation linéaire reproduit correctement le spectre imposé. À droite, le spectre de l'élévation premier plus second ordre montre des différences avec la figure de gauche au niveau des basses et hautes fréquences. À haute fréquence, au-dessus de 1 Hz l'énergie au second ordre est plus élevée qu'en linéaire du fait des interactions somme. Au-dessous de 0.3 Hz cette fois, on observe également une énergie plus importante au second ordre du fait des interactions différence. Ce surplus d'énergie à basse fréquence est moins important que celui observé à haute fréquence comme c'est le cas en milieu ouvert et profondeur infinie (*cf. e.g.* Molin [100]). Il faut noter que sont également présentes dans les simulations au second ordre, les ondes libres dues à l'inadéquation entre les profils verticaux de vitesse des ondes liées et du batteur. La méthode de suppression des ondes libres présentée en houle régulière oblique devra être adaptée en houle irrégulière droite de manière à éviter ces ondes parasites qui interviennent notamment à basse fréquence et peuvent modifier les mouvements de dérive lente de corps flottants par exemple. Une telle correction existe dans la littérature, par exemple Schäffer [113].

## V.1.9 Évolution dans le temps

Les signaux de houle mesurés étant plus longs que la période de répétition du batteur, on peut tenter de suivre l'évolution dans le temps à la fois des élévations (domaine temporel) et des spectres d'amplitude obtenus (domaine fréquentiel).

### V.1.9.1 Élévation

On peut mener cette étude temporelle pour le cas précédent de forte cambrure  $T_Z = 1.4$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %. Pour cela, un essai a été mené avec une période de répétition de 64 s (résolution en fréquence  $\Delta f = 0.016$  Hz), enregistré pendant 700 s. On dispose alors de dix répétitions complètes du signal, compte tenu du front d'onde initial. La figure V.1.21 montre la superposition des dix répétitions sur une sonde à 25 m du batteur. On constate que les signaux ne

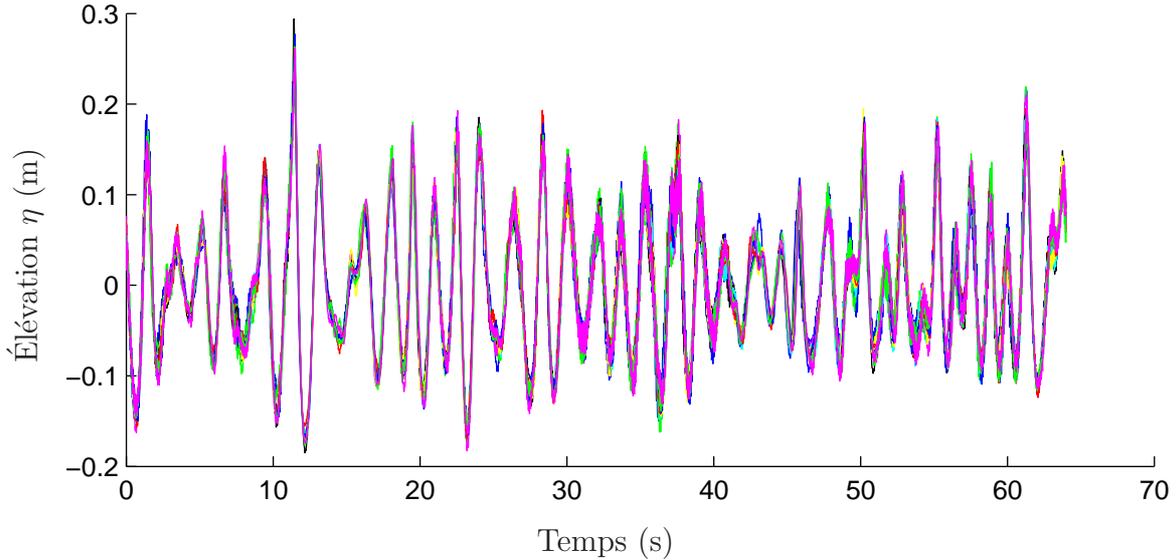


FIG. V.1.21 – Répétition du signal ( $T_Z=1.4$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %)

se superposent pas exactement. L'amplitude et la durée de chaque vague varie au cours des répétitions en raison des différentes perturbations qui se mettent en place dans le bassin au fur et à mesure de l'essai (réflexions sur la plage absorbante, modes propres...). La figure V.1.22 présente une vue rapprochée sur la vague passant à  $t = 11.5$  s et permet d'évaluer les variations de hauteur et de période pour les différentes répétitions. Pour cette vague, la variation d'amplitude est d'environ  $\pm 2$  cm pour la crête ( $A = 27$  cm) et  $\pm 1.5$  cm pour le creux ( $A = -16$  cm) soit respectivement une variation de 7 et 10 % au cours des répétitions.

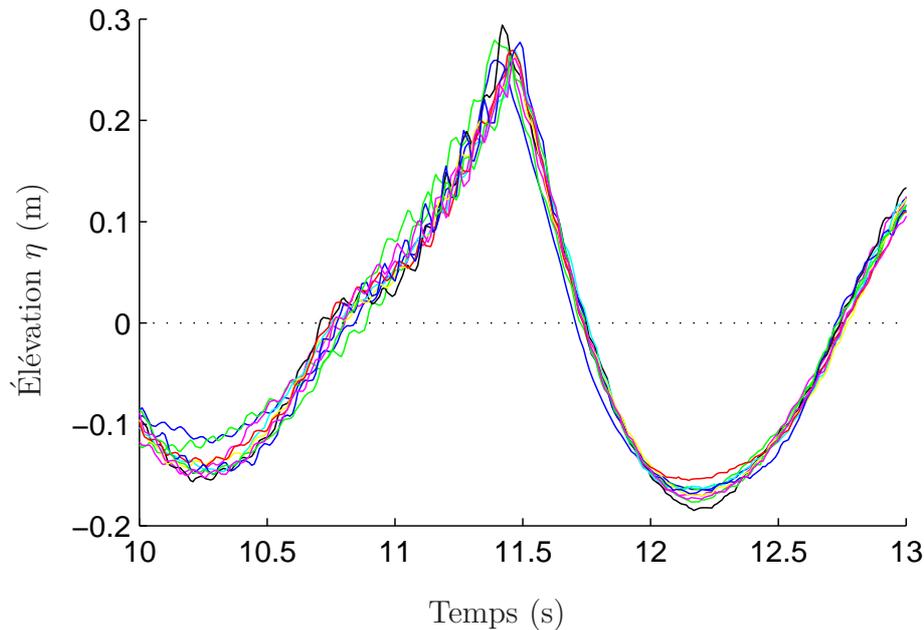
### V.1.9.2 Spectres

On passe maintenant dans le domaine fréquentiel pour étudier le comportement des composantes fréquentielles dans le temps. Une analyse de Fourier sur les dix répétitions est représentée en module<sup>10</sup> sur la figure V.1.23. Grâce à cette fenêtre d'analyse de grande durée, on obtient une résolution en fréquence dix fois plus petite que la résolution de génération. On peut donc

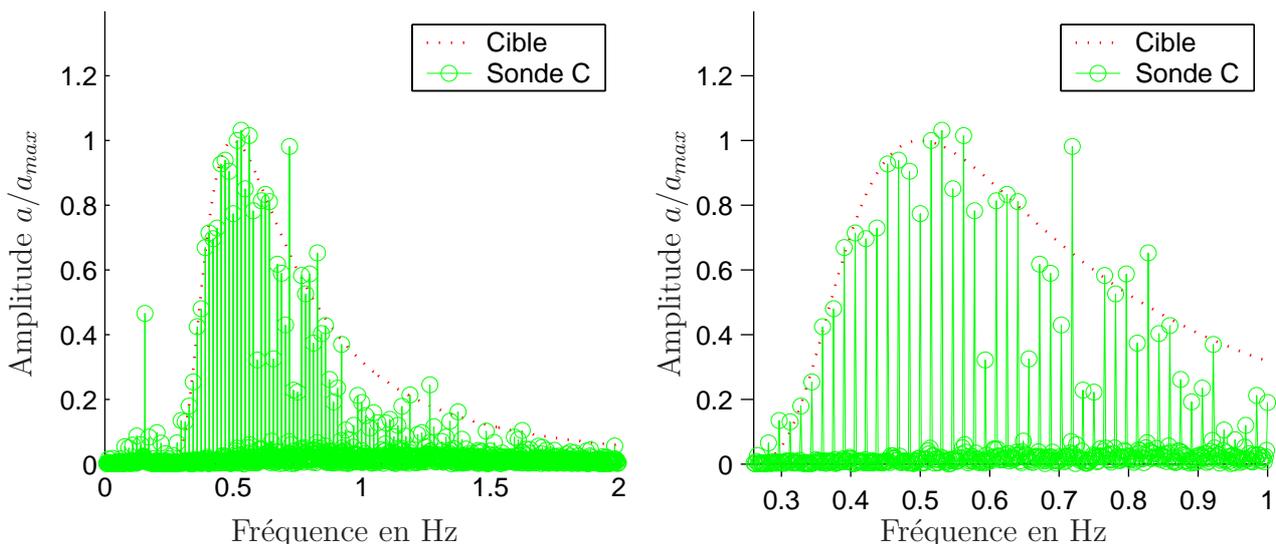
10. Comme on a choisi d'exprimer les amplitudes des TF directement en mètre et *i.e.* en amplitude de la houle à cette fréquence, il est nécessaire, pour être cohérent, d'utiliser la résolution en fréquence utilisée lors de la génération pour calculer le spectre d'amplitude cible et non la résolution en fréquence de l'analyse, soit

$$a_n^{cible} = \sqrt{2S(f_n)\Delta f^{gen}}$$

Dans notre cas, la fréquence d'analyse est 10 fois plus faible que celle de génération et conduirait à un spectre  $\sqrt{2S(f_n)\Delta f^{ana}}$  d'amplitude  $\sqrt{10}$  fois trop faible.


 FIG. V.1.22 – Répétition du signal ( $T_Z=1.4$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %)

voir sur la figure V.1.23 qu'une fréquence sur dix présente une amplitude non négligeable : il s'agit des fréquences générées par le batteur. L'amplitude des fréquences intermédiaires est très faible ce qui signifie, comme en IV.1.4.5, que l'énergie reste confinée aux fréquences générées (et les harmoniques correspondantes, voir également Chaplin [26]). À droite sur la figure V.1.23,


 FIG. V.1.23 – Spectre d'amplitude sur dix répétitions ( $T_Z=1.42$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %)

il apparaît qu'un certain nombre de fréquences n'ont pas l'amplitude imposée au niveau du batteur. On observe ainsi une alternance de creux (à 0.6, 0.65 et 0.75 Hz notamment), de pics (0.72 et 0.82 Hz). Ces différences d'amplitude sont dues aux échanges non linéaires entre les

composantes fréquentielles. Le pic très marqué à basse fréquence visible sur la figure de droite est lié à l'excitation des modes transverses longitudinaux (voir la section V.1.9.4).

On peut également analyser en fréquence chacune des dix répétitions et suivre ainsi l'évolution des composantes fréquentielles dans le temps. La figure V.1.24 montre la superposition

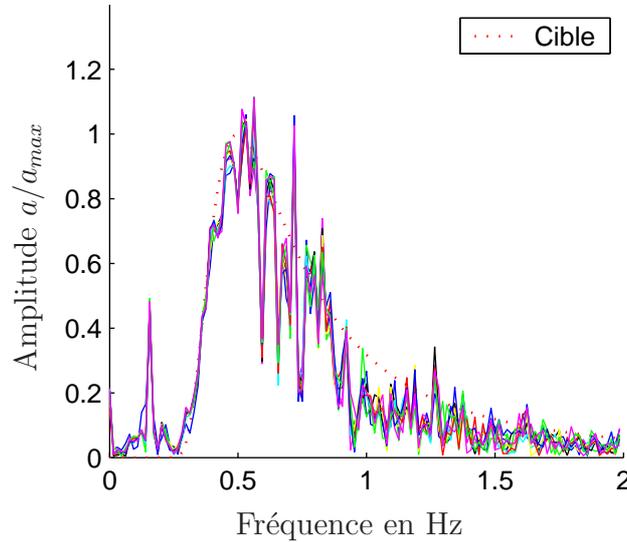


FIG. V.1.24 – Spectres d'amplitude des dix répétitions ( $T_Z=1.42$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %)

des dix spectres de Fourier obtenus. On peut remarquer une variation de l'amplitude au cours des répétitions. La figure V.1.25 montre le spectre moyen ainsi que l'écart-type sur les dix

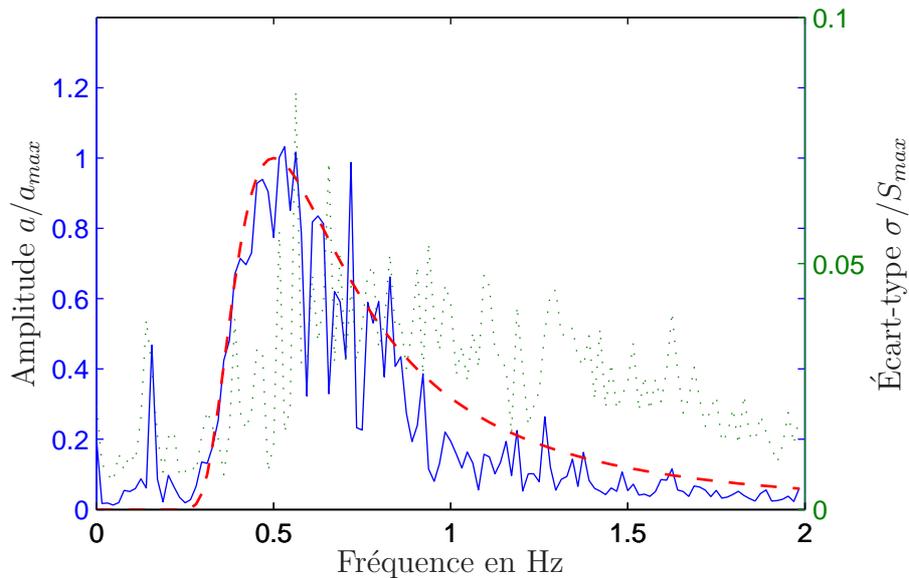


FIG. V.1.25 – Spectre d'amplitude moyen et écart-type pour dix répétitions ( $T_Z=1.42$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %, légende : (---) cible, (—) moyenne et (···) écart-type)

répétitions. Le spectre moyen sur les dix répétitions est équivalent, comme attendu les amplitudes des fréquences générées sur le spectre de la figure V.1.23 obtenu sur l'ensemble des dix

répétitions. L'écart-type sur les dix répétitions présentent des valeurs élevées, autour de 5 % de  $S_{max}$  pour une large gamme de fréquences supérieures à la fréquence de pic. La variation d'amplitude correspondante, de 5 % pour les fréquences près du pic, augmente pour les hautes fréquences au fur et à mesure que l'énergie diminue.

### V.1.9.3 Niveau moyen

Le tableau V.1.7 montre le niveau moyen mesuré au début et à la fin de l'enregistrement. Pour chaque hauteur significative, la première ligne correspond aux 320 secondes du signal après

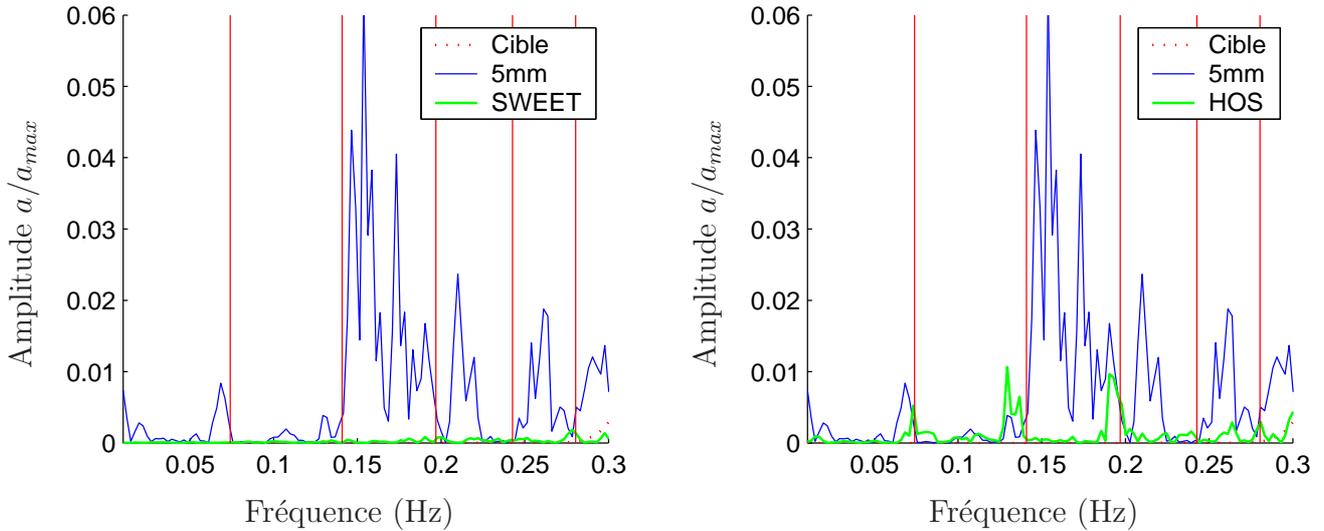
Sondes	5mm	3mm1	3mm2	SEREPS 5	SEREPS 6	SEREPS 7	ORCA
$\varepsilon_c = 1.5 \%$	-2.1	-1.4	-0.4	-0.1	-0.5	-1.3	-
	-2.7	-2.1	-0.7	-0.9	-0.9	-1.6	-
$\varepsilon_c = 3 \%$	-1.3	-0.3	-0.7	-0.8	-0.7	-1.6	-
	-2.1	-1.3	-2.1	-1.3	-1.2	-2.3	-
$\varepsilon_c = 6 \%$	-4.8	-4.7	-3.5	-7.2	-7.9	-9.2	-0.83
	-11.1	-10.4	-11.4	-12.9	-13.0	-13.3	-1.7

TAB. V.1.7 – *Élévation moyenne en mm et répétition ( $T_Z=1.4$  s)*

le front d'onde, la deuxième aux 320 dernières (les signaux utilisés sont donc censés être les mêmes vis à vis du batteur). La valeur moyenne du signal n'est pas nulle (voir le tableau V.1.7). Elle est négative, de l'ordre de quelques mm, dépend de la sonde et augmente avec la cambrure. Elle est plus faible pour la sonde ORCA que pour les sondes résistives (malheureusement, on ne dispose que d'un seul enregistrement avec  $\varepsilon_c = 6 \%$ ). On observe une baisse du niveau moyen plus importante dans la deuxième partie du signal, notamment sur les sondes résistives (colonnes "5mm" à "SEREPS 7"). La valeur faible relevée sur la sonde ORCA prouve que la baisse du niveau moyen détectée par les autres sondes est artificielle. Elle est due au principe de fonctionnement de ces sondes résistives. Les essais de houle irrégulière, longs, s'accompagnent d'un brassage important de l'eau du bassin. Celui-ci a pour effet d'homogénéiser la température de l'eau, stratifiée et plus fraîche au fond avant l'essai. La température de l'eau diminue donc à la surface, près des sondes, et la résistivité également. Par conséquent, la sensibilité des sondes varie et se traduit par la baisse du niveau moyen mesuré par ces sondes (voir l'annexe H sur la température).

### V.1.9.4 Modes longitudinaux

On a vu précédemment que les essais révèlent une forte excitation de modes à basses fréquences. Pour identifier la nature de ces modes, des simulations au second ordre et en non linéaire complet ont été effectuées en deux dimensions. Pour les fréquences faibles, on remarque des pics secondaires dans le spectre tiré des simulations HOS, à droite sur la figure V.1.26, obtenue par analyse de Fourier sur une fenêtre longue, de 400 s, soit une résolution en fréquence de 0.0025 Hz. La fréquence de ces pics correspondent assez bien aux fréquences des modes propres longitudinaux (traits plein verticaux (rouges)). Ces pics secondaires sont inexistant dans les simulations au second ordre (à gauche). Il s'agit donc d'effets non linéaires d'ordre supérieur à deux qui excitent les modes propres longitudinaux du bassin au cours du temps. De tels pics à basse fréquence sont également présents lors des essais : ils sont visibles sur le


 FIG. V.1.26 – Comportement à basse fréquence ( $\varepsilon_c = 3 \%$ )

spectre expérimental, calculé pour la sonde "5mm" à 19 m du batteur, et superposé aux spectres numériques de la figure V.1.26. On observe ainsi un premier pic fin, marqué, à la fréquence de 0.068 Hz très proche de celle du premier mode propre (0.074 Hz). Un deuxième pic apparaît, très large, entre 0.15 et 0.2 Hz. L'amplitude mesurée expérimentalement est plus importante que celle observée dans les simulations HOS en non linéaire complet (figure de droite). On peut penser qu'il s'agit là aussi d'une excitation non linéaire des modes propres longitudinaux, la différence avec les simulations pouvant s'expliquer par la présence de la plage parabolique dans les neuf derniers mètres du bassin qui modifie la signature spectrale de ces modes.

Enfin, l'analyse à basse fréquence des essais effectués sur dix périodes de répétition du mouvement batteur est reportée sur la figure V.1.27. Elle permet une description plus détaillée de la réponse à base fréquence. On retrouve ainsi une série de pics dont la fréquence correspond aux harmoniques des fréquences de génération. L'un de ces pics est d'amplitude très élevée, pour la fréquence 0.156 Hz. Celle-ci tombe entre les fréquences des deux modes propres longitudinaux 2 et 3 du bassin sans plage (respectivement 0.141 et 0.170 Hz).

### V.1.9.5 Modes transverses

On s'intéresse ici à l'excitation des modes transverses au cours des essais de houle irrégulière. Ces modes transverses sont présents même en houle droite. L'étude s'est faite sur l'essai constitué de dix périodes de répétition d'une même séquence de houle aléatoire, ce qui permet lors de l'analyse fréquentielle par transformée de Fourier, d'une part d'avoir une résolution fine en fréquence et d'autre part d'analyser exactement les fréquences de génération. Deux jeux de sondes sont utilisés, le premier près du batteur (sondes "SEREPS 6" et "SEREPS 7" respectivement à 5 et 8 m du batteur) et le deuxième à 25 m du batteur (sonde "C"). La figure V.1.28 présente à gauche le spectre complet mesuré<sup>11</sup> sur la sonde "SEREPS 7". La figure de droite montre un zoom en fréquence *sous* le spectre de la sonde "SEREPS 6", autour de la fréquence

11. En le comparant à celui de la figure V.1.23, on remarque que le mode  $f = 0.156\text{Hz}$  est moins marqué : la sonde est située proche d'un nœud d'oscillation de ce mode. Le premier mode longitudinal est en revanche lui plus apparent (ventre).

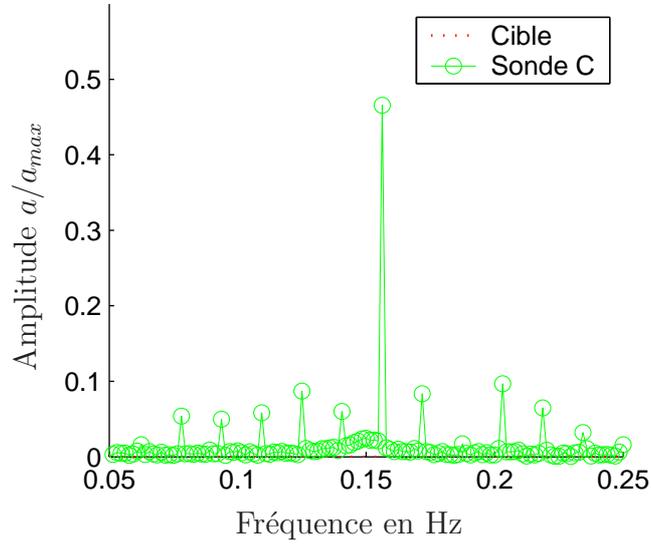


FIG. V.1.27 – Spectre d'amplitude de dix répétitions ( $T_Z=1.42$  s et  $\varepsilon_c = 6$  %)

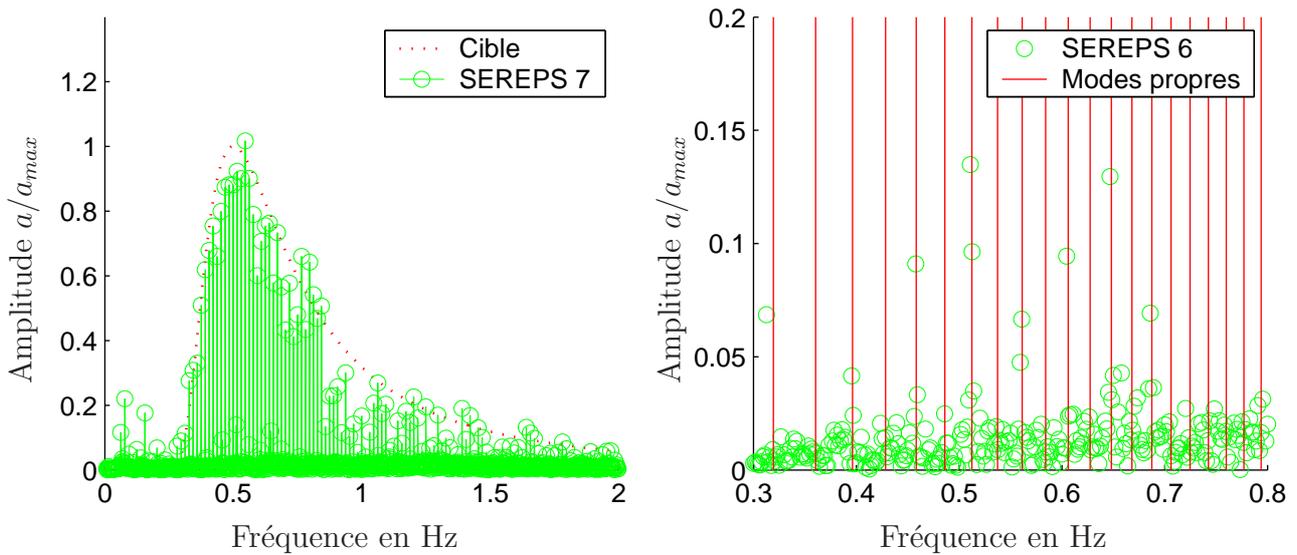


FIG. V.1.28 – Spectre d'amplitude de dix répétitions ( $T_Z=1.42$  s et  $H_s = 32$  cm)

de pic (notez l'échelle d'amplitude 10 fois plus faible que l'amplitude au pic du spectre). On observe la présence de modes d'amplitude non négligeable, dont les fréquences coïncident très bien avec les fréquences des modes propres transverses (traits verticaux). Seulement un mode sur deux est détecté, à savoir les modes pairs, puisque les sondes sont placées à égale distance des deux murs latéraux, *i.e.* sur nœud de vibration des modes transverses impairs. L'amplitude des modes transverses excités varie entre 5 et 15 % de l'amplitude au pic, ce qui ne sera pas négligeable lors de l'étude de la réponse de corps immergés à une excitation aléatoire. Enfin,

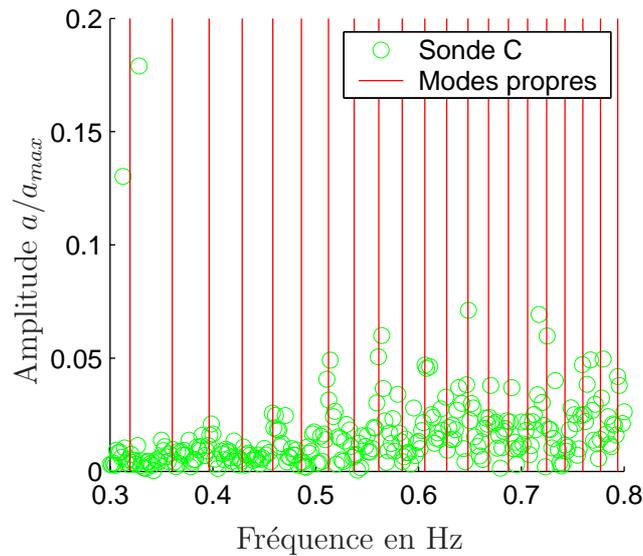


FIG. V.1.29 – Spectre d'amplitude de dix répétitions ( $T_Z=1.42$  s et  $H_s = 32$  cm)

la figure V.1.29 présente le même zoom autour de la fréquence de pic que précédemment, mais pour la sonde au centre du bassin cette fois. À nouveau, on observe l'excitation des modes transverses pairs, les amplitudes étant plus faibles, de l'ordre de 5 %, que pour les sondes près du batteur. Ces modes transverses excités ont donc une composante évanescente, ce qui atténue un peu la remarque précédente sur les essais avec corps.

Une autre étude des modes transverses excités a été initiée en s'intéressant au retour au calme du bassin après un essai. Pour cela l'acquisition a été continuée après l'arrêt du batteur (généralement pendant plusieurs centaines de seconde). Au vu des faibles coefficients de réflexion obtenus dans la partie V.1.10.3 suivante, on peut s'attendre à ce que le bassin retourne rapidement au calme. C'est effectivement ce que l'on observe au début des fichiers où l'amplitude des vagues résiduelles diminue assez rapidement. Ensuite il s'installe un régime quasi-stationnaire où cette amplitude reste constante. On s'attend à ce que les ondes correspondantes ne propagent pas dans la direction de la plage mais il s'agisse d'ondes transverses. Une simple analyse de Fourier du signal confirme rapidement cette hypothèse. Le spectre (en amplitude ici) se compose de pics marqués dont les fréquences coïncident parfaitement avec celles des modes propres transverses.

## V.1.10 Réflexion de la plage

On s'intéresse ici aux performances de la plage absorbante située en bout de bassin. En complément des études réalisées en houle régulière, les essais de houle aléatoires donnent accès à des informations sur le comportement de cette plage. Il s'agit de valider notre utilisation de la méthode de Mansard et Funke au cas de la houle irrégulière. Comme précédemment, la plage est qualifiée par son coefficient de réflexion linéaire<sup>12</sup> en amplitude, en fonction de la fréquence de la houle incidente.

Après une brève description de la méthode employée pour analyser les signaux en terme de réflexion, on donnera les résultats obtenus qu'on comparera à ceux tirés des essais de houle régulière.

### V.1.10.1 Séparation houle incidente et houle réfléchie

Le coefficient de réflexion de la plage absorbante est estimé en utilisant les signaux de plusieurs sondes à des distances différentes du batteur. On utilise comme en houle régulière la méthode de Mansard et Funke [92] à plusieurs sondes ( $p \geq 3$ ). L'information fréquentielle *i.e.* le second membre du système d'équations (II.1.1), est obtenue par Transformée de Fourier directement ou par une estimation des spectres croisés.

À chaque fréquence, la décomposition de l'élévation comme une onde incidente et une onde réfléchie est valide tant que l'onde réfléchie par la plage n'a pas atteint le batteur. Ensuite, celui-ci se comportant comme un mur (le générateur employé ne dispose pas encore d'une absorption dynamique), le champ de vague est la superposition des deux composantes précédentes plus une onde réfléchie par le batteur, de même amplitude que l'onde réfléchie par la plage. La décomposition de l'élévation mesurée devient alors<sup>13</sup> (*cf. e.g.* Ursell *et al.* [123])

$$\begin{aligned} \underline{a}_i e^{-ikx_{1n}} + \underline{a}_r e^{ikx_{1n}} + \underline{a}_r e^{-ikx_{1n}} &= \underline{b}_n \\ \underline{a}_i e^{-ikx_{1n}} + 2\underline{a}_r \cos kx_{1n} &= \underline{b}_n \end{aligned}$$

Il reste à calculer l'information  $\underline{b}_n$  sur la houle. La méthode de Mansard et Funke choisit comme module de  $\underline{b}_n$  l'amplitude associée à l'auto-spectre de la sonde  $n$  soit  $|\underline{b}_n| = \sqrt{2S_n(f)\Delta f}$ , et comme phase de  $\underline{b}_n$  celle du spectre croisé entre la sonde 1 et la sonde  $n$ . Le système des trois équations à deux inconnues est résolu par la méthode des moindres carrés.

Dans notre cas, on conserve la même reconstruction des seconds membres  $\underline{b}_n$  tout en utilisant un nombre plus important de sondes (6 ou 7 suivant les essais).

Une fois les amplitudes incidentes et réfléchies séparées, on calcule les spectres en énergie incident  $S_i = |\underline{a}_i|^2/2\Delta f$  et réfléchi  $S_r = |\underline{a}_r|^2/2\Delta f$ , le coefficient de réflexion en amplitude en fonction de la fréquence  $|\underline{a}_r|/|\underline{a}_i|$  ainsi que les énergies totales incidentes et réfléchies.

Lors des essais avec sept sondes, le conditionnement du système est bon sur toute la gamme de fréquence utile (voir la section II.1.3.4). Aux basses fréquences, ce conditionnement se détériore mais peu d'énergie est présente à ces fréquences.

---

12. C'est-à-dire défini comme le rapport des amplitudes incidente et réfléchie à la fréquence du fondamental.

13. Près d'un mur parfaitement réfléchissant, on trouve un ventre de vibration ce qui donne la phase de l'onde réfléchie par le batteur.

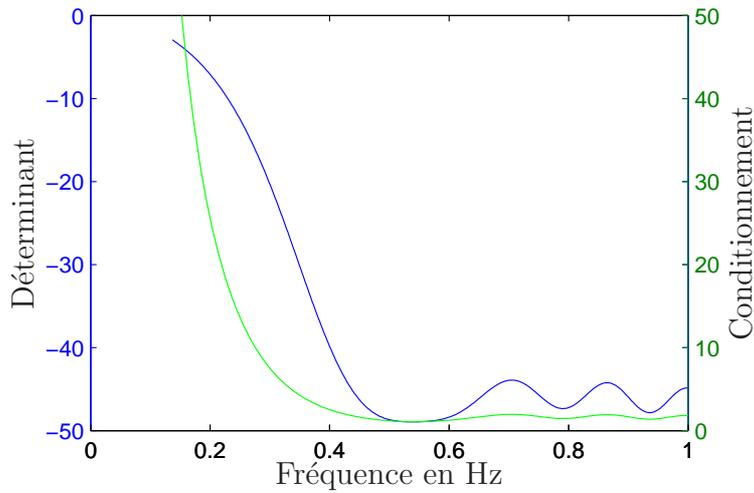


FIG. V.1.30 – Évolution du déterminant (—) et du conditionnement (—) du système linéaire

### V.1.10.2 Résultats pour les simulations

Les simulations au second ordre avec le modèle SWEET permettent de comparer les coefficients de réflexion obtenus à partir de l'élévation premier ordre et de l'élévation second ordre total et de connaître l'influence de la composante du second ordre sur l'estimation du coefficient de réflexion. L'analyse d'un champ de vague irrégulier linéaire est portée sur la figure V.1.31. Il s'agit d'un essai numérique, de période up-crossing  $T_z = 1.4\text{s}$  et de cambrure caractéristique 6 %. L'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence est superposée au spectre d'entrée (échelles différentes). On a également ajouté les coefficients de réflexion mesurés sur des houles numériques régulières (voir la section II.1.5). On peut constater qu'on retrouve bien lors de l'analyse de la houle aléatoire l'évolution obtenue en houle régulière. Ensuite, il est

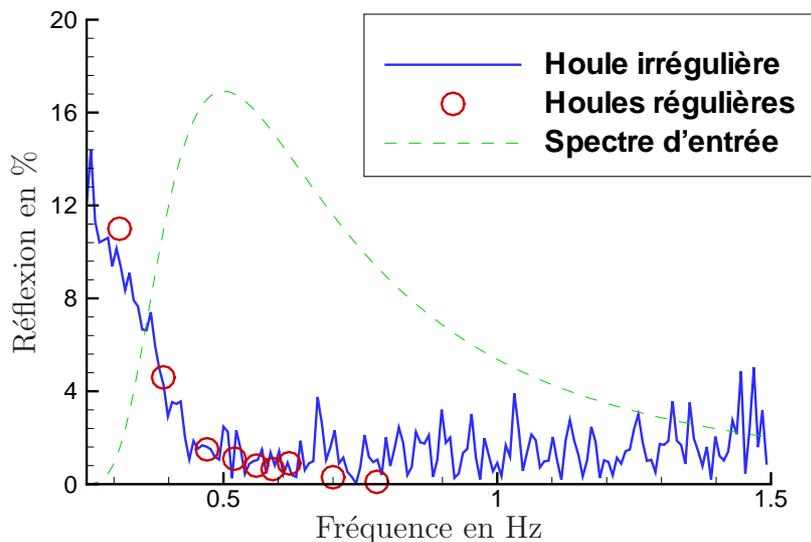


FIG. V.1.31 – Coefficient de réflexion, élévation linéaire ( $T_z=1.42\text{ s}$  et  $H_s = 32\text{ cm}$ )

intéressant d'analyser cette fois le signal premier plus second ordre. Les résultats sont reproduits sur la figure V.1.32. Pour les fréquences inférieures à la fréquence de pic, la composante second ordre, majoritairement des termes différence, modifie peu les résultats par rapport à l'analyse en linéaire seul. En revanche, pour les fréquences supérieures au pic, on observe de grandes différences avec le cas linéaire, les coefficients obtenus cette fois étant plus importants. À ces fréquences, la composante second ordre devient vite prépondérante : vers 1 Hz, on trouve le pic des termes somme alors que l'énergie d'entrée est très faible. La méthode d'analyse de la réflexion étant linéaire, elle considère les ondes second ordre de fréquence  $2\omega$  comme des ondes libres alors que la vitesse de phase de ces ondes liées ne vérifie pas la relation de dispersion. On

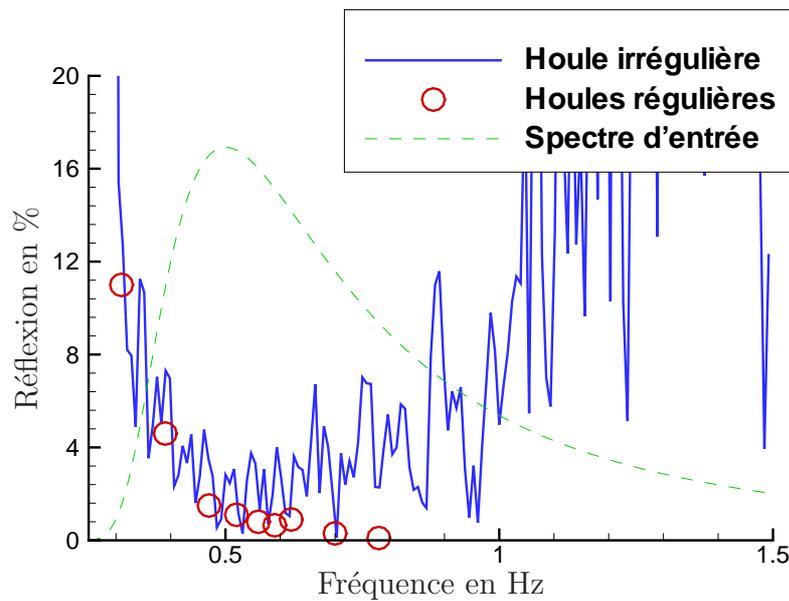


FIG. V.1.32 – Coefficient de réflexion ( $T_Z=1.42$  s et  $H_s = 32$  cm)

peut donc s'attendre à ce que les coefficients de réflexion obtenus pour les essais de forte cambrure caractéristique soient erronés pour les fréquences supérieures au pic. Un remède possible serait de séparer itérativement les élévations mesurées sur les sondes en deux composantes, l'une linéaire et l'autre le second ordre lié associé. Cette méthode a été appliquée avec succès dans le cas d'une houle mono-directionnelle et nécessiterait une adaptation au cas incident–réfléchi. Enfin, la cambrure caractéristique de l'essai numérique étudié est élevée (6 %) et met en jeu des effets d'ordre supérieur qui peuvent eux-aussi influencer sur l'analyse de la réflexion.

### V.1.10.3 Résultats pour les essais expérimentaux

On donne tout d'abord un premier résultat global, les énergies incidentes et réfléchies pour les différents essais effectués. Les trois lignes correspondent aux trois durées de segment testées. On voit que les trois durées donnent des résultats similaires (sauf pour  $H_s = 8$  cm où l'estimateur surestime l'énergie incidente présente autour de la fréquence de pic et aux fréquences proches de 0.8 Hz).

On s'intéresse ensuite au coefficient de réflexion de la plage en fonction de la fréquence. Il faut s'assurer avant le calcul de ce coefficient que les amplitudes obtenues sont correctes. En suivant Mansard et Funke, on utilise pour cela une fonction de cohérence des signaux. Il s'agit

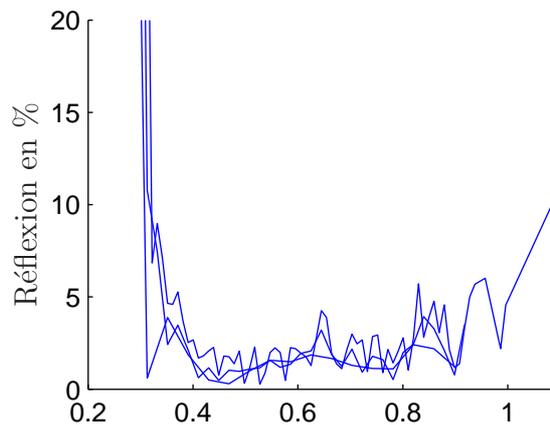
Période $s$	$H_s$ $cm$	Energie cible $m^2$	Energie incidente $m^2$	Energie réfléchie $m^2$
2	8	0.0004	0.000456	0.000039
2	8	0.0004	0.000409	0.000001
2	8	0.0004	0.000408	0.000001
2	16	0.0016	0.00160	0.000007
2	16	0.0016	0.00156	0.000006
2	16	0.0016	0.00155	0.000008
2	32	0.0064	0.00503	0.000050
2	32	0.0064	0.00506	0.000036
2	32	0.0064	0.00492	0.000044

TAB. V.1.8 – Énergies et réflexion

du rapport du spectre croisé sur les auto-spectres

$$C_{1n} = \left| \frac{S_{1n}^2}{S_1 S_n} \right|$$

Si la fonction de cohérence est proche de un, les signaux ont le même contenu fréquentiel en module, les différences se trouvant au niveau de la phase. Il s'agit donc d'un test qui valide l'hypothèse de linéarité de la houle. Pratiquement, on ne retient les valeurs du coefficient de réflexion donnée par l'analyse seulement pour les fréquences où la cohérence est supérieure à un seuil fixé ici à 0.95.


 FIG. V.1.33 – Coefficient de réflexion ( $T_Z=1.42$  s et  $H_s = 16$  cm)

La figure V.1.33 montre le coefficient de réflexion  $C_{ref}$  obtenu pour la cambrure de 3 %. Les trois courbes superposées correspondent à trois largeurs  $T_w$  de segments d'analyse lors de l'estimation spectrale (méthode de Welch avec 26, 51 et 102 s). Les coefficients sont faibles et le résultat dépend peu de la largeur des segments. Les très fortes valeurs observées pour les basses fréquences sont dues à une mauvaise analyse. Il est peu probable que le plage change si brusquement de comportement entre 0.3 et 0.35 Hz.

La figure V.1.34 présente cette fois les résultats obtenus avec les trois cambrures testées. On a superposé également les coefficients de réflexion obtenus en houle régulière pour trois jeux de cambrure à chaque fréquence. On constate que les trois cambrures donnent des coefficients

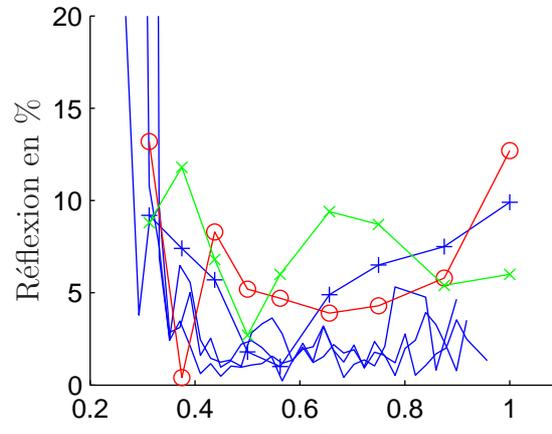


FIG. V.1.34 – Coefficient de réflexion (houle irrégulière  $T_Z=1.42$  s (en trait plein), houle régulière avec les symboles)

de réflexion semblables, ce qui est attendu en linéaire. En revanche, les valeurs tirées des essais de houle irrégulière sont globalement plus faibles que les coefficients de réflexion obtenus en houle régulière précédemment.

## Conclusion

Cette étude fait partie des premiers essais de houle irrégulière droite dans le bassin de houle. Elle a consisté tout à la fois en une découverte des contraintes expérimentales liées à de tels essais, des contraintes numériques et une prise en main des méthodes d'analyse.

La comparaison des résultats expérimentaux et numériques dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel montre la capacité du code SWEET au second ordre de modéliser correctement la génération et la propagation de houle irrégulière en 2D pour des cambrures faibles. On a pu souligner l'intérêt du modèle HOS non linéaire complet lorsque la cambrure augmente et que des effets non linéaires d'ordre supérieur à deux interviennent. Les comparaisons dans le domaine temporel attestent de la qualité et des performances de ce modèle.

L'étude des écarts observés dans les deux types de bassin entre le spectre désiré et le spectre estimé a mis en évidence l'excitation des modes propres du bassin, longitudinaux et transverses, comme le laissaient supposer les observations visuelles du champ de vagues en cours d'essais. L'interprétation des mesures futures en houle irrégulière devra tenir compte de ces modes propres.

## Perspectives

La prochaine étape sera de tenir compte de ces observations pour corriger le cas échéant la consigne de mouvement de manière à obtenir le spectre désiré dans le bassin.

Pour une étude plus complète des modes propres, un réseau de sondes adapté est nécessaire. Aux sondes au centre du bassin, sensibles seulement aux modes pairs, il convient d'ajouter des sondes aux bords qui voient à la fois les modes pairs et impairs.

Au niveau numérique, il est nécessaire de rendre compatibles la génération de houle par des doublets tournants instationnaires ([79]) et la lecture des fichiers fréquentiels du batteur expérimental, pour avoir accès à des simulations de plus forte hauteur significative.

## Chapitre V.2

# Houle irrégulière multi-directionnelle

Cette partie concerne les méthodes d'analyse de la houle multi-directionnelle, outils indispensables pour l'exploitation des mesures en bassin de houle. Suite au travail bibliographique effectué en DEA [14], les méthodes d'analyse les plus performantes présentes dans la littérature ont été programmées et validées, ce chapitre constituant ainsi le point final du développement initié en DEA sur ces outils d'analyse. Après la mise en place des dites méthodes, on les emploiera pour qualifier les houles directionnelles générées expérimentalement et numériquement.

Plusieurs très bonnes références traitent des méthodes d'analyse et présentent une comparaison très complète de leurs performances. Benoît *et al.* [9] fournissent ainsi un aperçu des méthodes existantes, des plus simples aux plus complexes. Force est de constater que très peu se placent dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel en revanche, Benoît *et al.* [9] recensent ainsi plus de treize différentes méthodes basées sur l'hypothèse d'une superposition d'ondes de phases aléatoires. De nombreux tests comparatifs sont présents dans la littérature, soit des tests numériques (Benoît [8]), soit des tests en bassin (Benoît et Teisson [11]) ou en mer (Benoît et Goasguen [10]). Il faut signaler également des approches déterministes qui visent à évaluer à la fois phases et amplitudes des différentes composantes (Zhang *et al.* [131]).

Ce chapitre rappelle tout d'abord le cadre théorique de l'analyse ainsi que le principe de trois méthodes tirées de la littérature pour leur efficacité. Des tests numériques apportent la validation de la mise en œuvre de ces méthodes. Une première application de ces méthodes à des houles directionnelles obtenues par simulation avec le code SWEET au second ordre sont utilisées pour montrer l'influence de la loi de commande du batteur et l'effet des non-linéarités du second ordre. Enfin, une application expérimentale a été réalisée suite à la campagne d'essais de mai-juin 2004 pour analyser les premières mesures de houle irrégulière 3D effectuées dans le bassin de houle de l'ECN.

## Introduction

Les méthodes d'analyse de houle irrégulière directionnelle présentes dans la littérature [14] reposent généralement sur une description linéaire du champ de vague en la somme de différentes composantes, chacune de fréquence et longueur d'onde reliées par la dispersion linéaire. Le spectre directionnel est décomposé en un terme fréquentiel analogue au cas bi-dimensionnel, et un terme d'étalement directionnel

$$S(f,\theta) = S(f)D(\theta,f)$$

La fonction d'étalement  $D$  est positive et normée, soit  $\int_{-\pi}^{\pi} D(\theta, f) d\theta = 1$ . L'objectif de l'analyse de la houle irrégulière est d'estimer le terme d'étalement  $D(\theta, f)$  pour chaque fréquence d'analyse<sup>1</sup>. Pour cela, on peut distinguer trois étapes (Benoît et Teisson [11]) :

- mesurer des grandeurs de houle (élévation, pente, pression, vitesses...)  $y_1(t), y_2(t) \dots y_P(t)$  (il faut au minimum  $P = 3$  grandeurs) aux positions  $\mathbf{x}_m, m = 1 \dots P$ .
- calculer une estimation des spectres croisés  $G_{mn}(f)$  pour chaque paire de capteur  $m \neq n$ , par exemple à l'aide de la méthode de Welch présentée au chapitre précédent.
- estimer, pour chaque fréquence la fonction d'étalement directionnel en inversant le système d'équations suivant

$$G_{mn}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} H_m(f, \theta) \overline{H_n(f, \theta)} S(f) D(\theta, f) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{mn}} d\theta \text{ pour } m \neq n \quad (\text{V.2.1})$$

où  $\mathbf{k} = k(\cos \theta; \sin \theta)$  est le vecteur d'onde,  $\mathbf{x}_{mn} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n$ , et où les fonctions  $H_m(f, \theta)$  sont les fonctions de transfert linéaires qui permettent de relier la grandeur mesurée (pente, vitesse, pression...) à l'élévation de surface libre (voir par exemple Hashimoto *et al.* [59]). La littérature recèle une nombreuse famille de méthodes permettant l'inversion désirée. Les performances de chacune sont très variables et les articles comparatifs riches d'enseignements. Benoît [8, 10, 11] par exemple a réalisé plusieurs études comparatives, à la fois numériques et expérimentales. Notre choix s'est alors porté vers trois méthodes principales qui semblent très efficaces pour des réseaux de sonde utilisés en laboratoire :

**MEP** la Méthode du Maximum d'Entropie ou Maximum Entropy Principle (MME ou MEP) appliquée à un réseau de sondes par Nwogu [102]

**EMEP** la Méthode du Maximum d'Entropie Étendue ou Extended Maximum Entropy Principle (MMEE ou EMEP) qui comme son nom l'indique, est une variante de la première, décrite par Hashimoto *et al.* [60]

**BDM** la méthode d'estimation bayésienne ou Bayesian Directional Method (BDM) et décrite par Hashimoto *et al.* [59]

L'analyse bibliographique des différentes méthodes a été réalisée en stage de DEA [14]. Le travail effectué en thèse s'inscrit dans la suite du travail de DEA, à savoir l'implémentation des méthodes, le test et l'application aux essais réalisés dans le bassin de houle. On rappelle ici brièvement le principe des différentes méthodes (se reporter au rapport [14] pour plus de détails, notamment sur la bibliographie).

Les trois méthodes choisies sont réputées pour être plus ardues à programmer que d'autres, mais fournissent dans toutes les comparaisons citées précédemment les meilleurs résultats.

Avant de passer à la description des méthodes, on peut simplifier l'équation (V.2.1). En effet, dans les cas des sondes à houle utilisées dans les essais, on mesure directement l'élévation de surface libre et les fonctions de transfert valent un. L'équation (V.2.1) est ensuite réarrangée, premièrement en normalisant<sup>2</sup> les spectres croisés à l'aide des auto-spectres  $S_m(f)$  des signaux, qui estiment le spectre fréquentiel

$$S(f) \simeq S_m(f) = G_{mm}(f) \text{ pour tout } m$$

---

1. Le premier terme  $S(f)$  est estimé de la même manière qu'en 2D

2. un avantage de cette normalisation est qu'un étalonnage défectueux des sondes est sans conséquence (à condition que leur comportement soit bien linéaire toutefois)

et deuxièmement en séparant la partie réelle et la partie imaginaire des spectres croisés (nommées respectivement spectre en phase (coïncident) ou co-spectre, et spectre en quadrature ou quad-spectre), soit, pour des sondes à houle (dans toute la suite, la fréquence sera omise pour plus de clarté) :

$$\phi_i = \operatorname{Re} \left[ \frac{G_{mn}}{\sqrt{S_m S_n}} \right] = \int_{-\pi}^{\pi} D(\theta) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{mn}) d\theta \quad (\text{V.2.2})$$

$$\phi_{i+M} = \operatorname{Im} \left[ \frac{G_{mn}}{\sqrt{S_m S_n}} \right] = \int_{-\pi}^{\pi} D(\theta) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{mn}) d\theta \quad (\text{V.2.3})$$

pour  $m = 1$  à  $P - 1$  et  $n > m$ , avec  $M = \frac{P(P-1)}{2}$  le nombre de paires de sondes indépendantes et  $i = P(m - 1) - \frac{m(m+1)}{2} + n$  un indice de rangement des équations et des inconnues.

## V.2.1 Description des méthodes

Les deux premières méthodes MEP et EMEP décrivent  $D$  comme l'exponentielle d'une décomposition linéaire sur une base de fonctions, autrement dit, elles supposent que  $D$  est positive et décomposent le logarithme de  $D$  sur une base de fonctions. Elles diffèrent par la base de fonction employée.

### V.2.1.1 Méthode du Maximum d'Entropie (MEP)

La MEP utilise la base naturelle  $\{q_i(\theta)\}$  tirée des équations (V.2.2) et (V.2.3)

$$\ln D(\theta) = a_0 + \sum_{i=1}^{2M} a_i q_i(\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } q_i(\theta) &= \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{mn}) \text{ pour } m = 1 \text{ à } P - 1 \text{ et } n > m \\ \text{et } q_{i+M}(\theta) &= \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{mn}) \text{ pour } m = 1 \text{ à } P - 1 \text{ et } n > m \end{aligned}$$

où  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{mn} = kr_{mn} \cos(\theta - \beta_{mn})$  avec  $r_{mn}$  et  $\beta_{mn}$  la distance et la direction de la paire  $m - n$ . Pour estimer l'étalement directionnel  $D(\theta)$ , il faut déterminer les inconnues  $a_i$ ,  $i = 0$  à  $2M$  à l'aide des équations (V.2.2) et (V.2.3) et du fait que  $D$  soit normé<sup>3</sup>. Nwogu [102] propose de construire une base orthogonale à partir des fonctions  $q_i$  et d'éliminer en même temps les fonctions nulles ou colinéaires. Cela a pour effet de réduire d'une part le nombre d'inconnues, et d'autre part cela aide à la résolution du système non linéaire. Pour cela, les valeurs propres de la matrice de covariance définie par

$$Q_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} q_i(\theta) q_j(\theta) d\theta$$

sont ordonnées et seules les plus grandes sont conservées. Les coefficients de la matrice de covariance sont exprimés simplement, pour le cas d'un réseau de sondes à l'aide de fonction de Bessel de première espèce (voir Nwogu [102]). Les vecteurs propres orthogonaux associés aux valeurs propres conservées forment la nouvelle base servant à la décomposition de l'étalement. On a procédé de cette manière en gardant  $N$  nouvelles inconnues<sup>3</sup>  $\tilde{a}_i$ ,  $i = 1$  à  $N$ . Nwogu applique ensuite de la même matrice de changement de base pour combiner les équations (V.2.2) et (V.2.3) et sélectionne autant de nouvelles équations qu'il a conservé de termes dans la base

de décomposition. On a préféré garder ici toutes les équations (V.2.2) et (V.2.3) et résoudre le système non linéaire surdéterminé résultant au sens des moindres carrés (voir la section V.2.1.4).

### V.2.1.2 Méthode du Maximum d'Entropie Étendue (EMEP)

La EMEP utilise quant à elle une série de Fourier tronquée

$$\ln D(\theta) = b_o + \sum_{n=1}^N b_n \cos n\theta + c_n \sin n\theta$$

à  $2N \leq 2M$  éléments  $\{b_n; c_n\}$ ,  $n = 1$  à  $N$  dans la base plus un terme  $b_o$  pour la normalisation<sup>3</sup>. L'estimation de  $D$  par cette méthode se fait en augmentant successivement le nombre d'éléments retenus dans la base. A chaque étape, un critère de choix est évalué (Akaike's Information Criterion), faisant intervenir le nombre d'équations à disposition, le nombre d'inconnues et l'écart-type des résidus des équations à résoudre. Le nombre d'éléments optimal est celui qui donne un AIC minimum.

### V.2.1.3 Méthode Bayésienne (BDM)

La méthode BDM exprime l'étalement angulaire comme une fonction positive constante par morceaux sur  $[-\pi; \pi]$ . Pour cela l'intervalle est divisé en  $K$  segments de longueur  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{K}$ . L'étalement directionnel s'exprime alors par

$$D(\theta) = \sum_{k=1}^K e^{x_k} I_k(\theta) \quad \text{où} \quad I_k(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il reste alors à déterminer les  $K$  valeurs  $x_k$  en se servant des équations (V.2.2) et (V.2.3). Le nombre de segments choisi étant en général grand pour avoir une bonne résolution, on dispose de plus d'inconnues que d'équations  $K \geq 2M$ . En supposant alors que le comportement local de l'étalement est linéaire, on ajoute une série d'équations assurant la nullité de la dérivée seconde par un schéma simple de différences finies. Cela vise à assurer une forme suffisamment régulière ou lisse de l'étalement obtenu. Les  $K$  équations supplémentaires sont les suivantes :

$$x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} = 0 \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } K$$

avec  $x_0 = x_K$  et  $x_{K+1} = x_1$ . Il faudra trouver un compromis entre ce lissage et une reproduction correcte de l'étalement. Ceci est obtenue en pondérant plus ou moins le lissage par un coefficient  $u$  appelé hyper-paramètre et en appliquant un nouveau critère de choix (Akaike's Bayesian Information Criterion). L'étalement  $D$  est estimé pour plusieurs valeurs de  $u$ , le critère ABIC évalué à chaque fois et l'hyper-paramètre optimal est celui qui donne un critère ABIC minimum.

---

3. Dans les deux cas, MEP et EMEP, on prendra en compte directement le fait que  $D$  soit normée pour éliminer la composante  $a_o$  en écrivant alors

$$D(\theta) = \frac{e^{a_n f_n(\theta)}}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{a_n f_n(\theta)} d\theta}$$

la somme de  $n = 1$  à  $N$  ayant été omise pour plus de clarté.

### V.2.1.4 Points communs et comparaisons

Chaque méthode aboutit finalement, à chaque estimation de  $D$ , à un système d'équations non linéaires  $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = 0$  issues des équations (V.2.2), (V.2.3) et éventuellement des conditions de régularité pour la méthode BDM. Ce système est linéarisé par la technique de Newton et résolu par itérations successives, ce qui conduit schématiquement à

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{y}_n) + \mathbf{y}'_n \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}_n) = 0$$

où  $\mathbf{y}_n$  est la solution approchée à l'itération  $n$  et  $\mathbf{y}'_n$  le résidu à estimer en résolvant le système linéaire, pour trouver la solution  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \alpha \mathbf{y}'_n$  (avec  $\alpha$  un coefficient de relaxation). Le système linéaire comportant généralement plus d'équations que d'inconnues, il est résolu par la méthode des moindres carrés. Comme on l'a vu, la trame des trois méthodes est similaire et leur codage également.

Suite aux validations effectuées, on peut observer certains comportements représentatifs des méthodes. Tout d'abord, le temps de calcul est plus important pour la méthode BDM. En effet, les systèmes linéaires à inverser, étape la plus demandeuse en temps de calcul, comportent  $2M + K$  équations pour  $K$  inconnues contre  $2M$  équations et  $2N$  inconnues pour les méthodes MEP et EMEP. Or, pour une résolution suffisante le nombre de segment  $K$  doit toujours être beaucoup plus élevé (100) que le nombre d'éléments dans la base (2 à 6). Ce nombre de fonctions de base nécessaires varie également selon le type d'étalement étudié. Ainsi, pour un étalement uni-modal étroit, on observe que l'analyse EMEP diverge pour un nombre d'éléments supérieur à deux malgré les précautions d'itération et de relaxation prise lors de la résolution du système. De plus, le résultat obtenu avec seulement ces deux modes pour représenter le logarithme de  $D$  est satisfaisant, à savoir que le critère AIC est minimum pour  $N = 2$  et que l'étalement cible est bien reproduit (voir les validations numériques V.2.2). On peut donc en déduire que la représentation choisie par la méthode EMEP est bien adaptée à un étalement uni-modal puisque deux modes suffisent. En effet, en réécrivant la forme à deux modes comme

$$D(\theta) = A e^{d_n \cos(\theta - \beta_n)} = A (e^{\cos(\theta - \beta_n)})^{d_n}$$

on retrouve schématiquement une loi en puissance et une direction moyenne de propagation représentée par  $\beta_n$ , semblable aux cibles utilisées en  $\cos^s(\theta - \theta_m)$ . En revanche, pour un étalement pluri-modal, un nombre plus important de modes est nécessaire (4,6...). Dans ce cas, l'analyse converge bien et le résultat à 6 modes est meilleur que celui à deux (à nouveau, AIC minimum et estimation plus proche de la cible).

## V.2.2 Validation numérique

On présente ici rapidement quelques uns des tests numériques effectués pour valider les méthodes mises en œuvre. On calcule numériquement à partir de cibles  $S(f)$  et  $D(\theta)$  connues les données d'entrée et on compare ces cibles aux résultats de l'analyse. Cette entrée artificielle peut s'effectuer à plusieurs étages dans l'analyse, au niveau des signaux de houle et au niveau des spectres croisés. Les tests présentés ici ne concerneront que le deuxième cas des spectres croisés numériques car on s'affranchit de l'estimation même de ces spectres à partir des signaux de houle, déjà validée en deux dimensions (voir la section V.1.5) et pouvant fausser l'interprétation des tests. Les résultats seront représentés entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  pour anticiper le cas du bassin de houle.

Conformément à la littérature, plusieurs types de résultats sont utiles pour qualifier les méthodes, qui mettent plus ou moins en avant leurs qualités ou leurs défauts. Les plus couramment utilisés sont des courbes  $D = D(\theta)$  pour une fréquence donnée. Souvent la fréquence choisie est celle du pic du spectre : elle est en général bien adaptée car l'énergie présente à cette fréquence est importante. En superposant les étalements estimés à l'étalement cible, on obtient une qualification visuelle de la solution qui permet de comparer les méthodes entre elles. Des cartes en deux dimensions  $S(f, \theta) = S(f)D(\theta)$  sont également employées. Celles-ci représentent un test plus sévère puisqu'on affiche toute la gamme de fréquence et notamment les hautes fréquences pour lesquelles il est plus difficile d'estimer l'étalement. Cependant, l'énergie, l'énergie est plus faible à ces fréquences et la décroissance de  $S(f)$  vient masquer les irrégularités observables sur  $D$ .

: les difficultés à HF sont masquées par la décroissance de  $S(f)$  à ces fréquences, qui traduit aussi le fait qu'il y a peu d'énergie à ces fréquences donc faut pas trop s'inquiéter

On trouve dans la littérature une mesure quantitative de l'efficacité d'un estimateur d'étalement. Il s'agit de l'erreur WAPE (Weighted Average Percent Error, *cf. e.g.* Benoît [8]) caractérisant l'écart entre la cible  $D_c$  et l'étalement estimé  $D_e$  par

$$WAPE = 100 \int_{-\pi}^{\pi} |D_c(\theta) - D_e(\theta)| d\theta$$

On utilise pour ces tests numériques un étalement cible de la forme

$$D_c(\theta) = \begin{cases} A_n \cos^n(\theta - \theta_o) & \text{si } |\theta - \theta_o| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.2.4})$$

La direction moyenne  $\theta_o$  sera nulle, *i.e.* la direction principale ( $0x$ ) du bassin. Un seul paramètre, un entier  $n$  régit l'étalement cible. L'étalement est large pour  $n$  faible, étroit pour  $n$  élevé. Le coefficient  $A_n$  sert à normaliser<sup>4</sup> l'étalement. Cet étalement suffit à définir les spectres croisés normalisés  $\phi_i$  d'après les équations (V.2.2) et (V.2.3). On remarque d'après ces formules qu'il n'est pas nécessaire de se donner un spectre cible  $S(f)$ . La fréquence intervient cependant par le biais du nombre d'onde lors du calcul des  $\phi_i$ .

Les sondes sont disposées en réseau, de la forme d'un pentagone tronqué avec la cinquième sonde au centre, comme indiqué sur la figure V.2.1. Le batteur, non représenté, est situé côté gauche de la figure et la plage côté droit. Cette disposition est communément utilisée dans les bassins de houle. Le choix du rayon  $R$  du réseau est fait en suivant les valeurs optimales trouvées dans la littérature (*e.g.* Benoît [8]) : le rapport du rayon sur la longueur d'onde du pic doit être de  $R/\lambda_p = 0.2$ .

### V.2.2.1 Étalement uni-modal

Ce type d'étalement directionnel est le plus courant en pratique. On utilise ici deux étalements différents  $n = 15$  et  $90$ . La figure V.2.2 montre le résultat de l'analyse pour le cas

4. La forme de l'étalement donne un calcul simple du facteur  $A_n$ :

$$A_n = \begin{cases} \frac{(2^p p!)^2}{\pi(2p)!} & \text{si } n = 2p \\ \frac{(2p+1)!}{2(2^p p!)^2} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

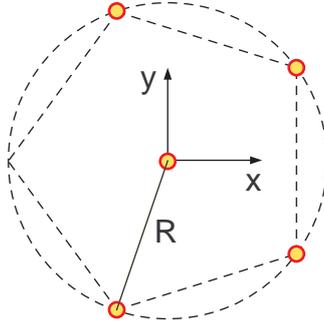
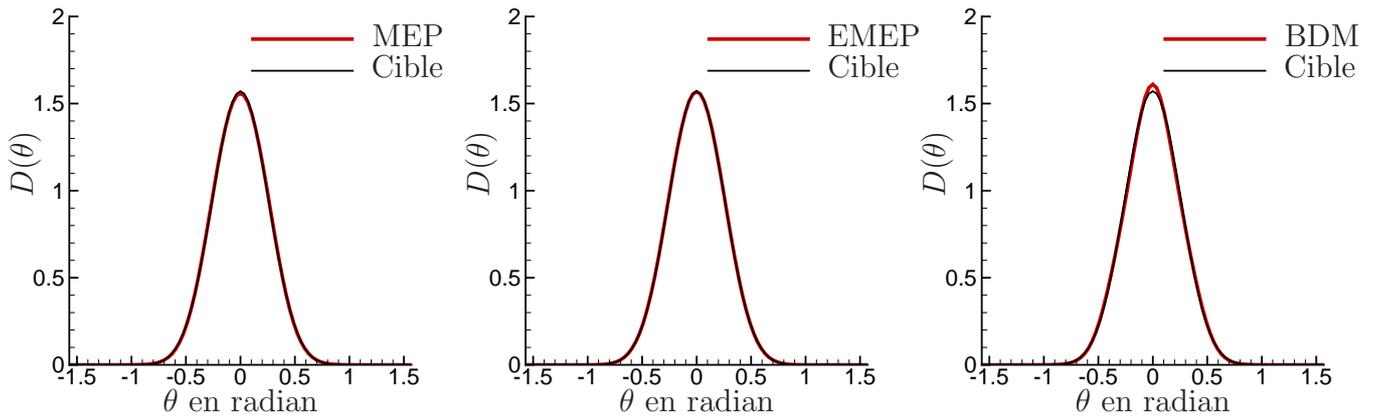
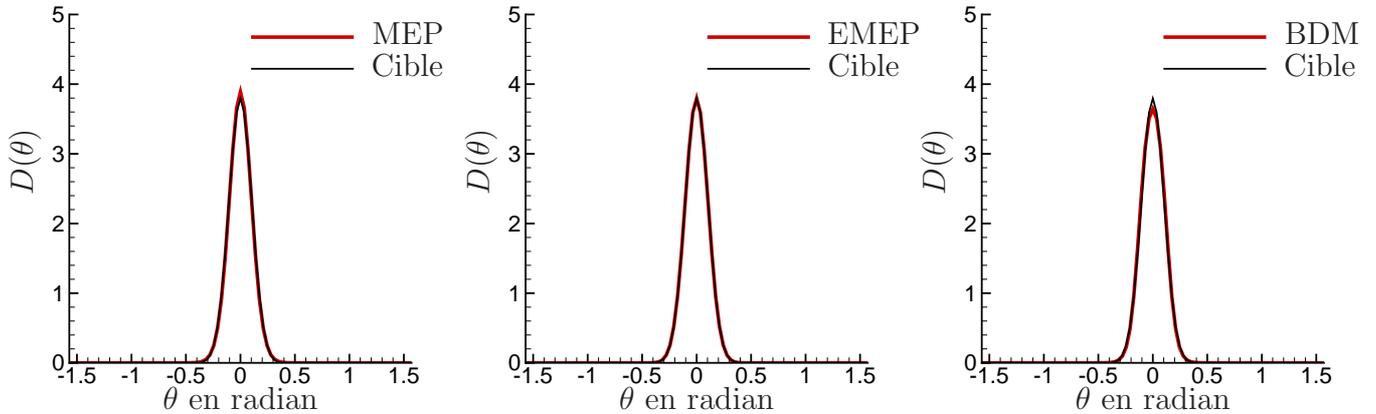


FIG. V.2.1 – Schéma du réseau de sondes

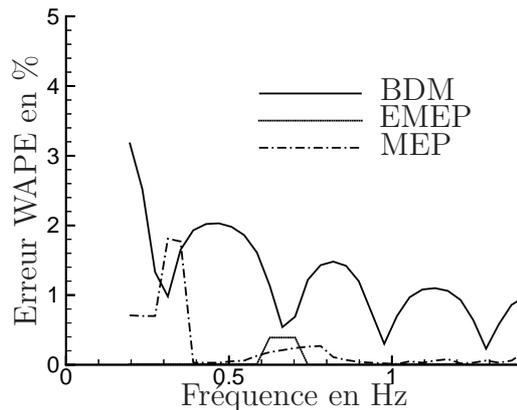
d'étalement large  $n = 15$ . Dans les trois cas, la direction moyenne est parfaitement identifiée. La cible et le résultat des méthodes MEP et EMEP sont peu discernables, tandis qu'on note une très légère différence d'amplitude du pic pour la méthode BDM. On peut dire que l'étalement

FIG. V.2.2 – Étalement directionnel estimé par les trois méthodes ( $n = 15$ , fréquence 0.5 Hz)

directionnel est correctement résolu à la fréquence utilisée de 0.5 Hz. La figure suivante V.2.3 montre le même type de résultat mais pour un étalement très étroit, paramétré par  $n = 90$ . Les trois méthodes produisent un très bon résultat avec toujours une légère différence d'amplitude pour BDM. Pour établir plus en détail les performances et les limites des analyses, il convient de s'intéresser au comportement en fréquence des méthodes. Les deux figures V.2.2 et V.2.3 sont en effet obtenues pour une fréquence de houle de 0.5 Hz dont la longueur d'onde, d'environ 5 m est en bien accord avec les proportions données dans la littérature vis-à-vis de la taille du réseau de sonde. Pour s'intéresser au résultat obtenu pour d'autres fréquences d'analyse, la figure V.2.4 donne l'erreur WAPE définie précédemment en fonction de la fréquence. Les paramètres utilisés pour chaque méthode permettent d'obtenir une erreur WAPE inférieure à 2% dans toute la gamme de fréquence, pour des spectres croisés simulés : on peut donc en déduire que les trois méthodes sont adaptées à une large gamme de fréquence pour une taille de réseau donnée. On a pu remarquer également que la méthode BDM semblait un peu moins performante que les deux autres pour ces tests numériques. Il apparaîtra au cours des essais


 FIG. V.2.3 – Étalement directionnel estimé par les trois méthodes ( $n = 90$ , fréquence 0.5 Hz)

expérimentaux que les performances relative pourront être inversées.


 FIG. V.2.4 – Erreur WAPE lors de l'estimation ( $n = 90$ )

D'autres informations données par ces tests numériques concernent les valeurs des paramètres propres à chaque méthode. En effet, chacune possède sept à huit paramètres portant par exemple sur les critères de convergence, l'évaluation des intégrales en  $\theta$ , les bases de décomposition, la résolution des systèmes non linéaires *etc.* Elles nécessitent donc une certaine expérience : ces tests numériques ont été riches d'enseignements quant à leur fonctionnement. En voici quelques uns :

**MEP** *nombre de fonctions de base* : la recherche de  $D$  pour différentes longueurs d'onde montre que les petites longueurs d'ondes (2m et moins), qui peuvent être sensibles à la redondance des informations entre sondes (si  $\Delta x = n\lambda/2$  par exemple) nécessitent un nombre élevé de fonctions de base dans la décomposition de  $D$ .

*intégration* : ces modes élevés présentent en outre des oscillations nombreuses entre 0 et  $2\pi$  nécessitant une discrétisation fine lors des intégrations en  $\theta$ .

**EMEP** *nombre de fonctions de base* : moins de modes nécessaires que pour MEP.

*intégration* : les quelques modes utilisés oscillent peu et les intégrations ne nécessitent pas un grand nombre de points de discrétisation.

**BDM** *critère ABIC* : on observe une évolution monotone décroissante de ses valeurs en fonction de l'hyper-paramètre.

*intégration* : le nombre de points de discrétisation n'est pas déterminant pour la précision du résultat.

*choix de l'hyper-paramètre* : ce test d'étalement uni-modal avec des spectres simulés n'est pas suffisant pour fournir des indices sur le choix de l'hyper-paramètre  $u$  qui règle la balance entre les données et la régularité de la fonction  $D$ . En effet, dans ce cas trop parfait, on constate simplement que le critère d'arrêt ABIC se contente de décroître avec  $u$ , sans minimum.

### V.2.2.2 Étalement bi-modal

Il s'agit de tester les méthodes dans un cas rencontré souvent en pratique lorsque deux systèmes de houle de directions moyennes différentes se superposent. L'étalement directionnel comporte alors deux pics, de largeurs éventuellement différentes comme dans le cas d'une mer du vent (d'étalement large) superposée à la houle (d'étalement étroit).

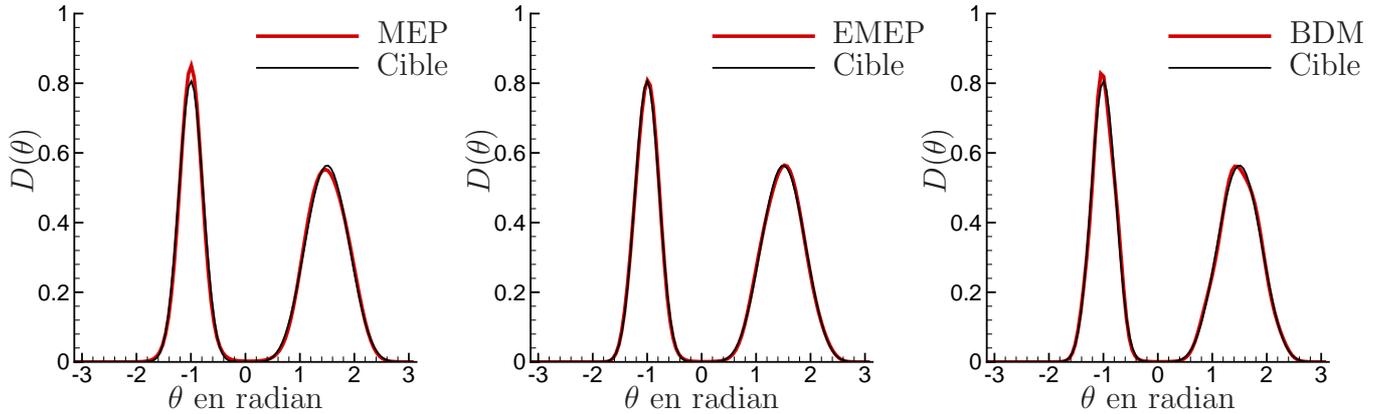


FIG. V.2.5 – *Étalement directionnel bi-modal estimé par les trois méthodes (fréquence 0.5 Hz,  $\{\theta_1 = -1; n_1 = 20\}$   $\{\theta_2 = 1.5; n_2 = 6\}$ )*

Pour le test numérique présenté ici, les valeurs utilisées sont respectivement  $\theta_1 = -1$  et  $\theta_2 = 1.5$  pour les directions de propagation et  $n_1 = 20$  et  $n_2 = 6$  pour les étalements. Sur la figure V.2.5, on constate que l'étalement bimodal est bien résolu par les trois méthodes. À la fois la direction moyenne des deux trains de houle, la largeur de l'étalement et les amplitudes respectives des deux pics sont correctement évalués. Les résultats de l'analyse à d'autres fréquences sont reproduits sur la carte  $S(f, \theta)$  en figure V.2.6. Cette représentation, qui atténue les difficultés observées par ailleurs à hautes fréquences tient cependant compte de la plus faible énergie présente à ces fréquences dans l'interprétation des résultats. La comparaison entre la cible à gauche et les trois méthodes est tout à fait satisfaisante. Le cas d'un étalement tri-modal a été testé numériquement. Il donne des résultats comparables à ceux obtenus en bi-modal. Plus loin de la réalité qu'un étalement uni- ou bi-modal, le tri-modal a permis de sonder le potentiel des méthodes implémentées. Les résultats ne sont pas présentés ici pour ne pas s'appesantir.

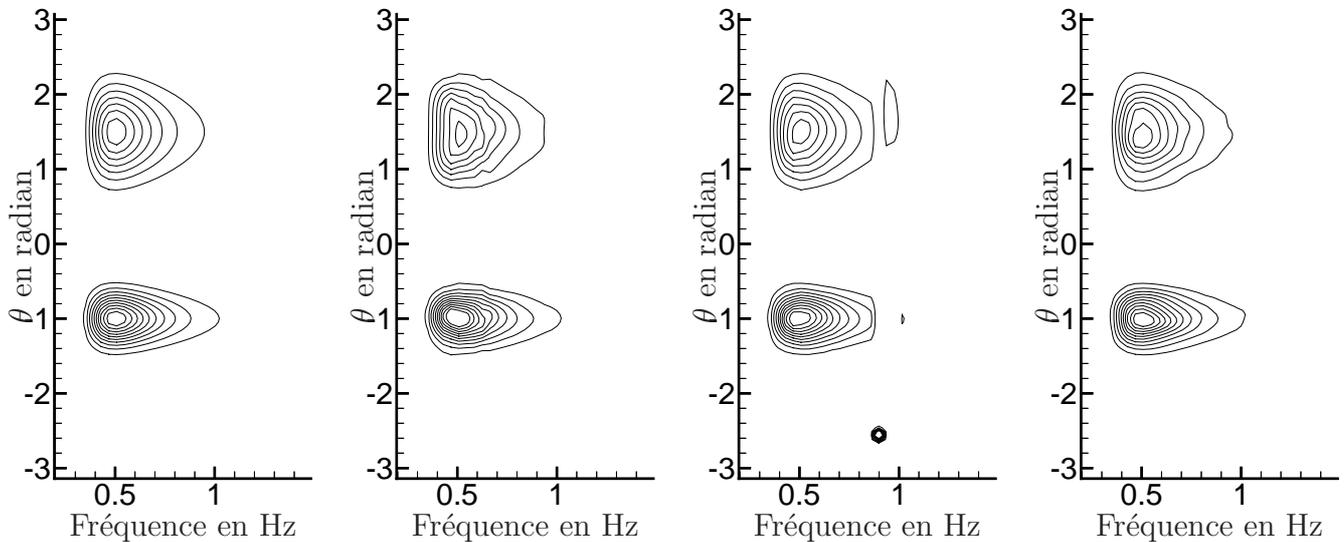


FIG. V.2.6 – Carte de l'étalement directionnel bi-modal (de gauche à droite : cible, MEP, EMEP, BDM)

### V.2.2.3 Conclusions sur les tests numériques

Ces validations à partir de spectres croisés normalisés  $\phi_i$  évalués numériquement à partir des équations (V.2.2) et (V.2.3) et d'un étalement cible ont permis de tester l'efficacité des méthodes choisies. Les résultats obtenus sont en accord avec les attentes formulées à la suite du travail de bibliographie effectué en DEA. Ces tests donnent une bonne prise en main des méthodes, des paramètres de résolution dans plusieurs configurations usuelles, *i.e.* étalement uni-modal ou bi-modal.

En perspective il conviendrait d'étudier le cas d'un double pic avec à la fois deux fréquences, deux directions et deux étalements différents. On peut être confiant dans le résultat d'un tel test. Enfin, il reste à tester le couple estimateur en fréquence – estimateur en direction. Pour cela des houles simulées numériquement ont été utilisées. Les résultats, corrects, ne sont pas reproduit ici : on passe maintenant aux simulations temporelles et aux expériences, plus riches d'enseignements et véritables raisons d'être de cette étude de l'analyse directionnelle.

## V.2.3 Simulations numériques

Des simulations numériques au second ordre ont été réalisés pour étudier l'influence de la loi de commande sur l'état de mer aléatoire généré ainsi que l'influence du second ordre sur l'analyse directionnelle. On présente ici les résultats obtenus pour un spectre en fréquence de Bretschneider de pic  $f_p = 0.5$  Hz et de 32 cm de hauteur significative (6 % de cambrure). L'étalement directionnel est en  $\cos^n \theta$  avec  $n = 15$  (fort étalement). Les simulations ont tournées dans la géométrie du bassin océanique de l'ECN, pour les lois de commande serpent et Dalrymple. Les élévations sur cinq sondes en réseau, aux mêmes positions que lors des essais expérimentaux présentés dans la section suivante, sont analysées grâce à la méthode EMEP, après une analyse fréquentielle par la méthode de Welch avec des segments de 20 s (résolution fréquentielle de 0.05

Hz). La figure V.2.7 montre les étalements directionnels estimés à partir des élévations linéaires pour le principe du serpent à gauche et la méthode de Dalrymple à droite. On constate que

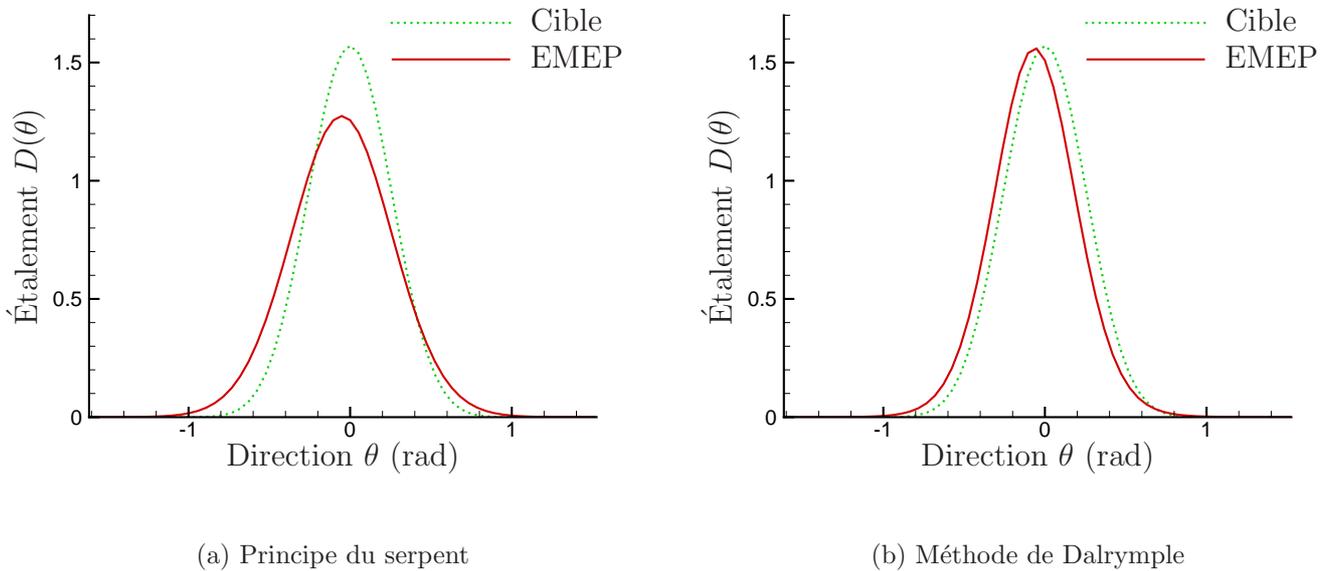


FIG. V.2.7 – Étalement directionnel des simulations linéaires ( $f = f_p$ )

le principe du serpent conduit à un étalement directionnel différent de la cible. La méthode de Dalrymple produit, elle, un étalement très proche de la cible. La largeur de l'étalement est correctement estimée, avec cependant un léger écart sur la direction moyenne (celui-ci est aussi présent avec le principe du serpent).

La figure V.2.8 étudie l'effet du second ordre sur l'analyse directionnelle pour la fréquence pic. On compare l'étalement directionnel estimé à partir des élévations premier ordre et des élévations premier plus second ordres. Pour cette fréquence, les effets du second ordre sont faibles et les deux étalements sont bien superposés.

La figure V.2.9 donne la carte *fréquence-direction* du spectre directionnel pour les deux types d'élévations. On observe peu de différences entre les spectres directionnels linéaire et second ordre: l'analyse des spectres de fréquence révèle que jusqu'à la fréquence de 1 Hz, la contribution du second ordre reste faible par rapport à celle du linéaire. Au-delà les deux contributions deviennent du même ordre de grandeur et on peut s'attendre à ce que l'estimateur fonctionne moins bien. Ces ondes courtes représentent cependant peu d'énergie.

## V.2.4 Essais expérimentaux

Les objectifs de ces essais sont multiples. Suite aux tests numériques précédents, ils doivent permettre de comparer les méthodes d'analyse. Ils constituent également les premières mesures et analyses de houle multi-directionnelle dans le bassin de houle; ils donnent une première idée des capacités de reproduction de tels champs de vagues dans ce bassin.

Au cours des essais, un réseau en pentagone tronqué du type de celui reproduit sur la figure V.2.1 est utilisé. Le diamètre du cercle de base est de un mètre, adapté d'après la littérature

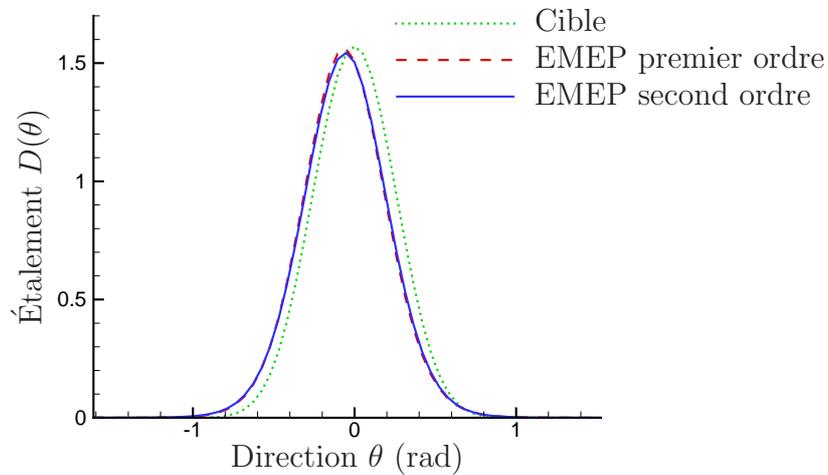


FIG. V.2.8 – Influence des non-linéarités sur l'étalement estimé (Dalrymple,  $f = f_p$ )

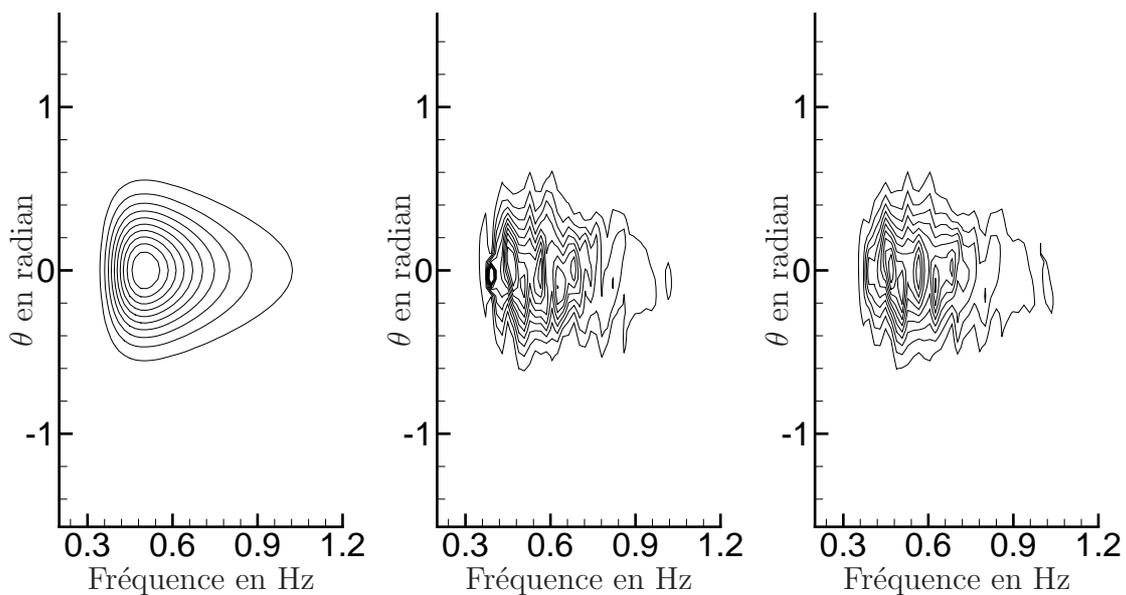


FIG. V.2.9 – Étalement directionnel pour  $n = 15$  ( $H_s = 32$  cm et  $T_Z = 1.4$  s et de gauche à droite : cible, EMEP premier ordre, EMEP second ordre)

(*e.g.* Benoît [8]) à des houles de longueur d'onde au pic cinq fois plus grandes soit de 5 mètres environ. La période de pic correspondante est de deux secondes. La houle est générée pendant 900 s avec une période de répétition de 512 s du batteur. Le mouvement du batteur est construit linéairement à partir d'un jeu discret de composantes fréquentielles entre 0 et 2 Hz. La méthode employée dans le logiciel OCEAN est une sommation simple qui attribue une seule direction<sup>5</sup> à chaque fréquence, par opposition à la méthode de sommation double qui associe plusieurs directions à chaque fréquence. Chacune de ces fréquences  $f_n$  se voit attribuer une amplitude  $S(f_n)$ , une phase tirée aléatoirement entre 0 et  $2\pi$  avec une répartition uniforme, et un angle tiré également aléatoirement entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  avec une loi de répartition en  $D(\theta)$ . Ce tirage aléatoire des directions est décrit par exemple par Sand et Mynett [112] ou Miles [96].

### V.2.4.1 Incertitudes

La position des sondes a été mesurée une fois les sondes montées sur le support, à côté du bassin. Cela permet une mesure relativement précise des positions des sondes. On estime de l'ordre du millimètre l'incertitude sur les positions relatives des fixations des sondes. Comme lors des essais en 2D, la position du support par rapport au bassin, une fois installé, est plus délicate et une incertitude d'au moins 5 mm est supposée (grandes distances mesurées en plusieurs parties, passerelle non parallèle au batteur...). De plus, les sondes, flexibles, ont tendance à se tordre un peu au passage de chaque crête lors des essais. La position de la fixation de la sonde est donc légèrement différente de la position où la hauteur est réellement mesurée. On considère une incertitude totale de 5 mm sur la position relative des sondes.

L'étalonnage des sondes n'influe pas sur le calcul des spectres croisés normalisés  $\phi_i$  si l'on considère le comportement des sondes linéaire. Une autre source d'incertitude est l'estimation des spectres fréquentiels proprement dite qu'il est difficile d'évaluer.

### V.2.4.2 Spectres en fréquence

Avant de regarder le résultat de l'analyse directionnelle, on peut s'intéresser aux spectres en fréquence. La figure V.2.10 reproduit ainsi les spectres<sup>6</sup> moyennés sur les sondes pour les trois étalements étudiés. On observe une diminution de l'énergie près du pic lorsque l'étalement diminue. Les énergies mesurées sont pour  $n = 15, 30$  et  $90$  respectivement de 13.5, 13.2 et 12.6  $m^2$ . Cette diminution d'énergie est en accord avec les observations visuelles du déferlement, plus fort pour les cas plus mono-directionnels.

Indépendamment de l'étalement directionnel, on peut également constater dans la figure V.2.10 que l'énergie mesurée dans le bassin est en deçà de la cible pour les fréquences supérieures au pic. Cette observation, présentée pour une période  $T_Z = 1$  s est aussi valable pour la période  $T_Z = 1.4$  s également générée. La hauteur significative importante et par conséquent la cambrure caractéristique élevée et les déferlements fréquents observés pendant les essais expliquent sans

---

5. Le principe du serpent est appliqué pour générer les houles obliques, la méthode de Dalrymple n'ayant pas été appliquée au batteur expérimental à l'époque de ces essais.

6. tous les spectres, croisés ou non de ce chapitre sont estimés avec les paramètres suivants :

- durée des segments 51.2 s (4096 points)
- fenêtre temporelle uniforme (peu d'influence sur  $D$ )
- recouvrement de 50% des segments

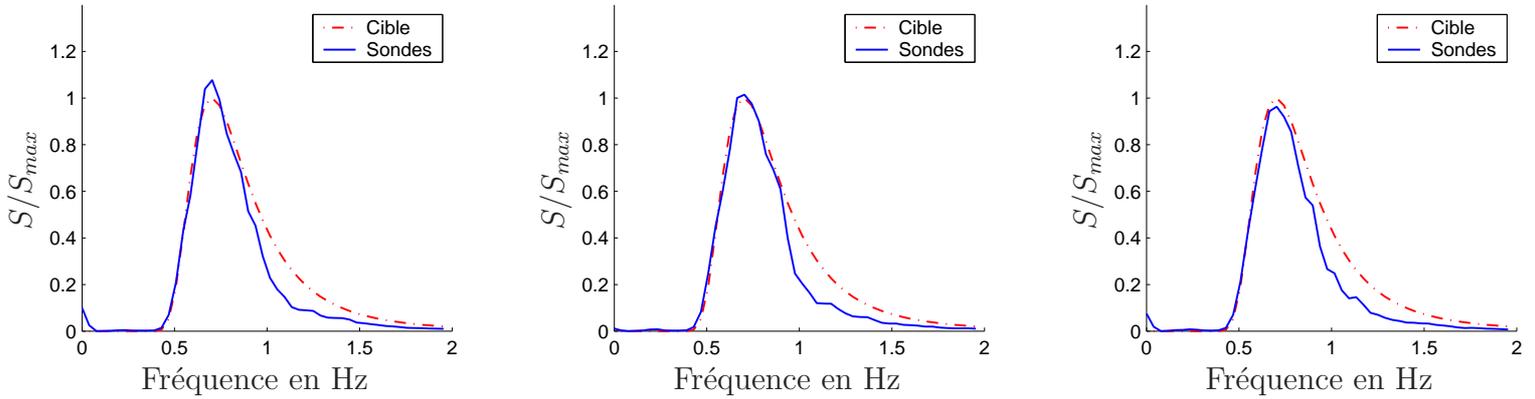


FIG. V.2.10 – Spectres en fréquence pour  $H_s = 16$  cm et  $T_Z = 1$  s (de gauche à droite :  $n = 15, 30$  et  $90$ )

doute en grande partie cette énergie faible aux hautes fréquences comme on l’a déjà évoqué en houle irrégulière 2D.

### V.2.4.3 Étalement directionnel

On donne ici les résultats de l’analyse directionnelle pour six essais de houle irrégulière, de période up-crossing  $T_Z = 1.4$  s et 1 s et de paramètres d’étalement  $n = 15, 30$  et  $90$ . La forme de l’étalement cible est celle utilisée pour les tests numériques (voir la formule (V.2.4)) et le spectre fréquentiel est un spectre de Pierson-Moskowitz modifié à deux paramètres (formule (V.1.1)). Les hauteurs significatives sont respectivement  $H_s = 32$  et  $16$  cm pour les deux périodes.

Pour le cas d’étalement très étroit ( $n = 90$  sur la figure V.2.11), les résultats sont comparables à ceux de Benoît [8] qui utilisait les méthodes BDM et MEP :

- à la fréquence de pic (0.7 Hz en haut, 0.5 Hz en bas), on remarque une bonne reproduction de l’étalement  $D$ , avec dans les deux cas un étalement prédit par la méthode MEP plus étroit que la cible et les autres méthodes,
- la décroissance en fréquence est plus rapide que la cible pour les méthodes BDM et MEP (dans notre cas, des tentatives d’explication ont été apportées, comme on l’a vu précédemment dans l’analyse des spectres fréquentiels ou en houle 2D),
- la méthode BDM fournit une prédiction très proche de la cible

On constate de plus que la méthode EMEP, publiée après l’article de Benoît [8], donne des résultats similaires à ceux de la méthode BDM<sup>7</sup> (bon accord avec la cible), parfois un peu meilleure.

Si l’on regarde plus en détails les cartes d’étalement de la figure V.2.11, il apparaît tout d’abord que la méthode MEP peine à estimer l’étalement pour un certain nombre de fréquences, d’où l’aspect fragmenté du spectre directionnel. Ensuite, il semble que l’étalement prédit pour la plus grande période soit plus large que l’étalement cible. On peut se demander si cet élargissement provient de la méthode d’analyse ou du champ de vague mesuré (présence de réflexion des murs latéraux par exemple). Des essais à plus faible hauteur significative, pour être dans les hypothèses de linéarité sont nécessaires avant de répondre à cette question.

7. La méthode BDM, qui était un peu moins performante sur les cas tests numériques simples (voir la section V.2.2, s’avère plus efficace appliquée aux cas réels.

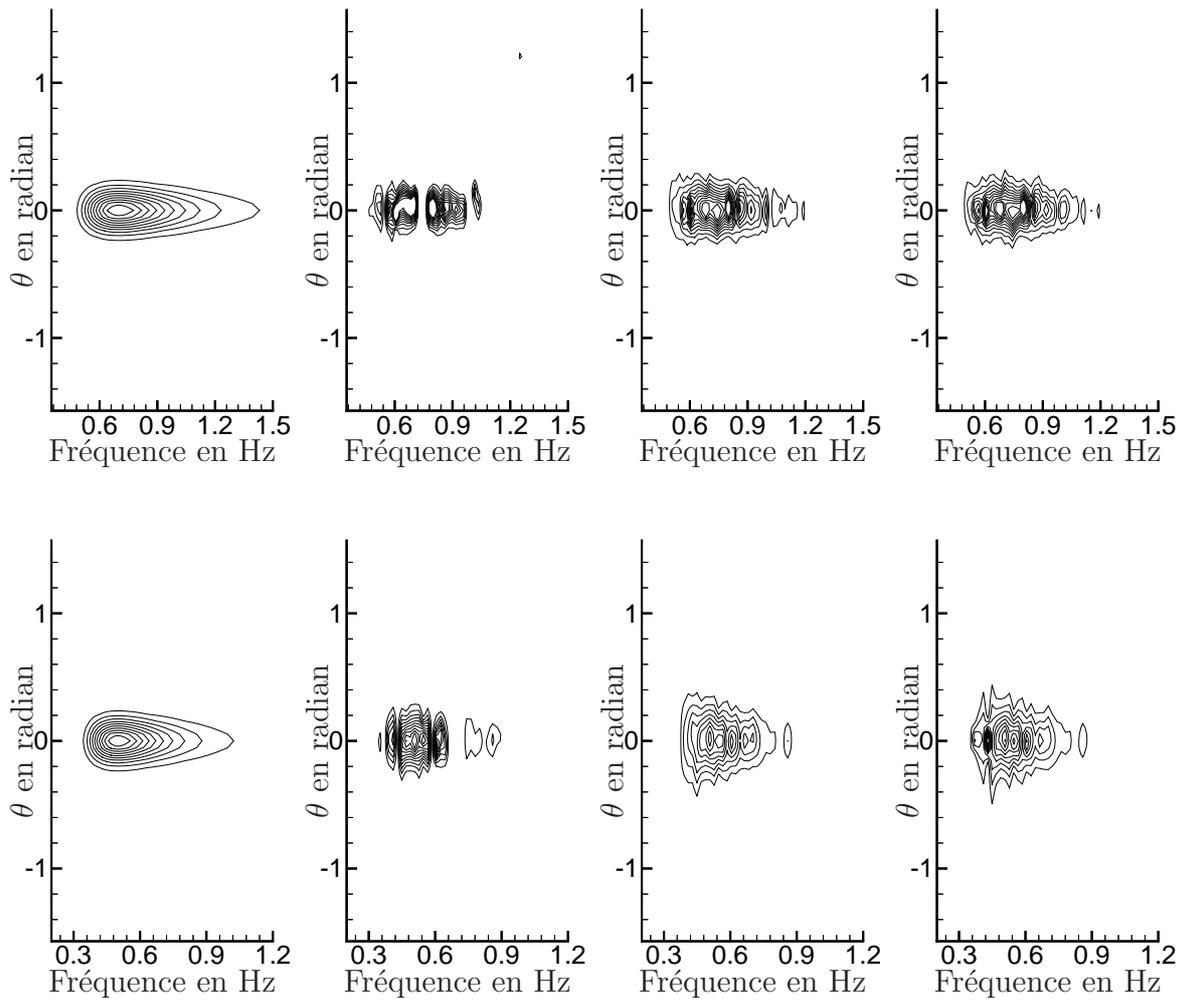


FIG. V.2.11 – *Étalement directionnel pour  $n = 90$  (en haut :  $H_s = 16$  cm et  $T_Z = 1$  s, en bas :  $H_s = 32$  cm et  $T_Z = 1.4$  s et de gauche à droite : cible, MEP, EMEP, BDM)*

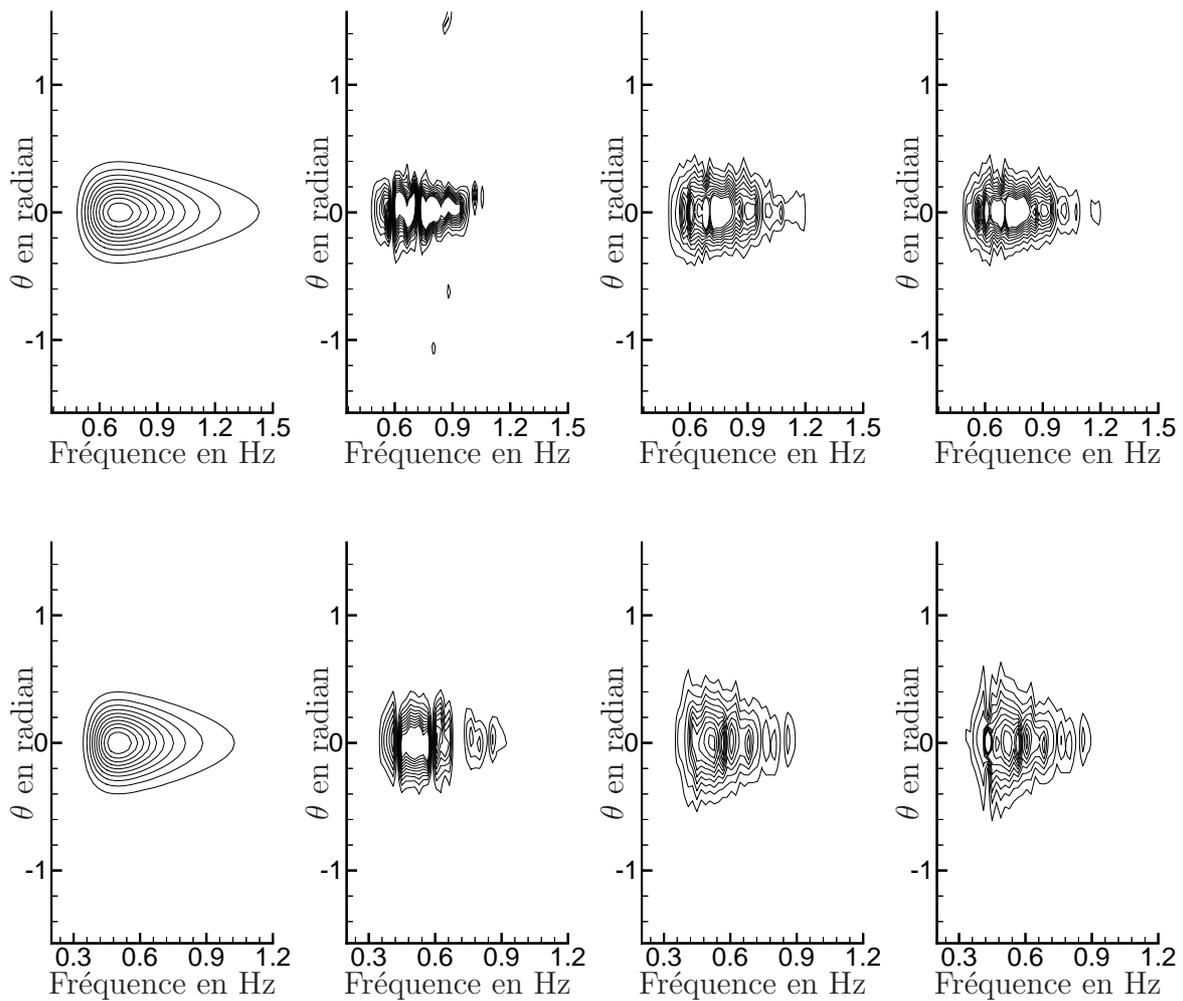


FIG. V.2.12 – Étalement directionnel pour  $n = 30$  (en haut :  $H_s = 16$  cm et  $T_Z = 1$  s, en bas :  $H_s = 32$  cm et  $T_Z = 1.4$  s et de gauche à droite : cible, MEP, EMEP, BDM)

Pour les cas d'étalement étroit ( $n = 30$ ) et large ( $n = 15$ ), on retrouve les mêmes comportements des méthodes d'analyse, à savoir que la méthode MEP fournit un étalement plus étroit que la cible alors que l'étalement donné par les méthodes EMEP et BDM est plus large (voir les figures V.2.12 et V.2.13).

Pour ces deux étalements, on observe que pour les fréquences  $f > 1$  Hz, on ne retrouve plus le bon  $D$  (pour toutes les méthodes, y compris les plus simples). Cela apparaît déjà dans les spectres croisés qui ne suivent plus les spectres théoriques (la limite 1 Hz est bien visible sur  $D$  dans un plan  $f - \theta$ , moins sur les spectres croisés). Cependant, on a bien la bonne décroissance, *i.e.*  $D$  est bien retrouvé sur la gamme  $f < 1$  Hz (pic bien estimé en amplitude).

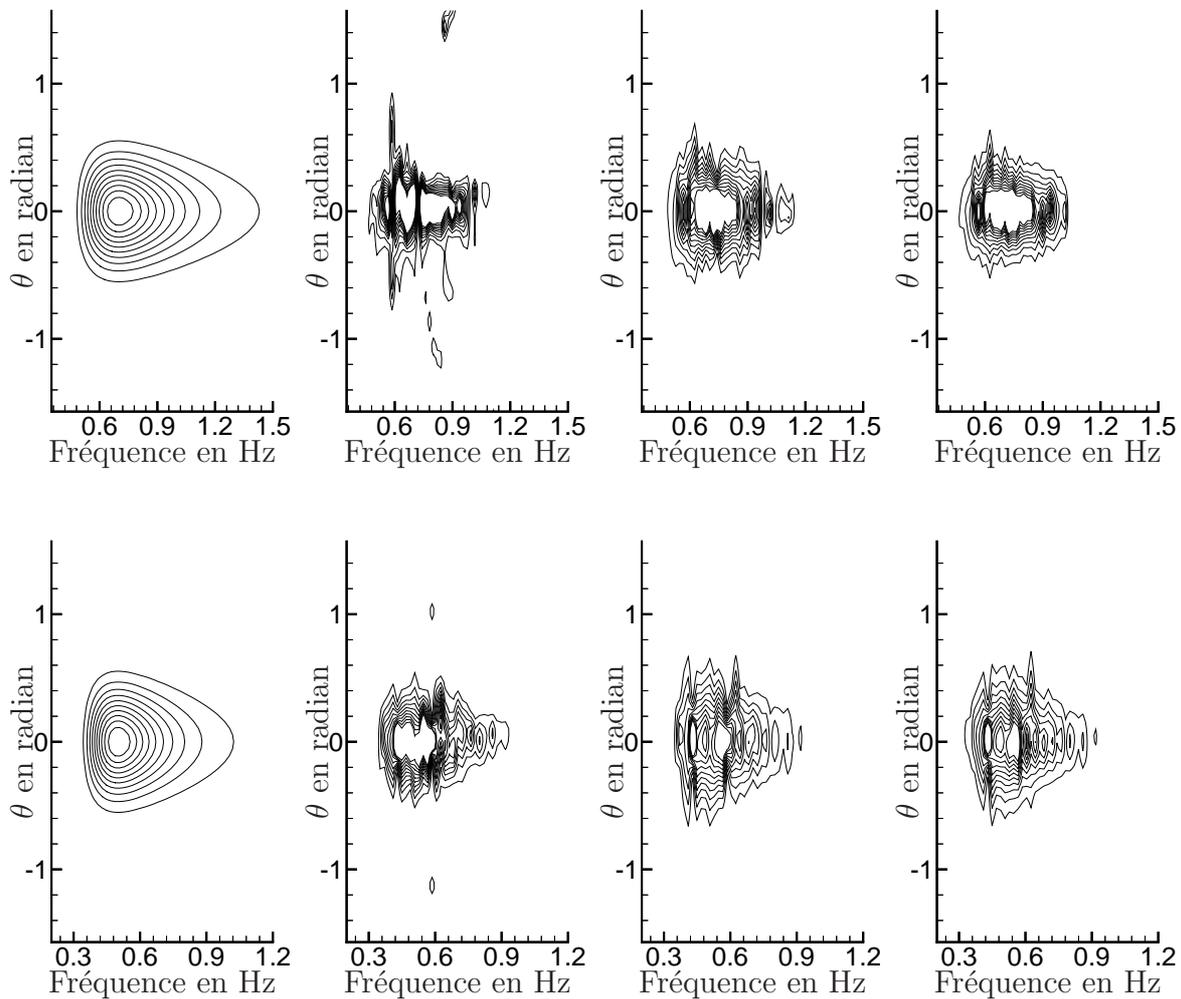


FIG. V.2.13 – Étalement directionnel pour  $n = 15$  (en haut :  $H_s = 16$  cm et  $T_Z = 1$  s, en bas :  $H_s = 32$  cm et  $T_Z = 1.4$  s et de gauche à droite : cible, MEP, EMEP, BDM)

Afin de mieux quantifier la correspondance entre l'étalement mesuré et l'étalement cible en fonction de la fréquence, la figure V.2.14 montre l'erreur WAPE pour la méthode EMEP appliquée aux six essais. Dans la gamme de fréquence contenant suffisamment d'énergie (autour de 0.7 Hz pour la période de 1s et 0.5 Hz pour la période de 1.4 s), on observe une erreur WAPE de l'ordre de 20 %.

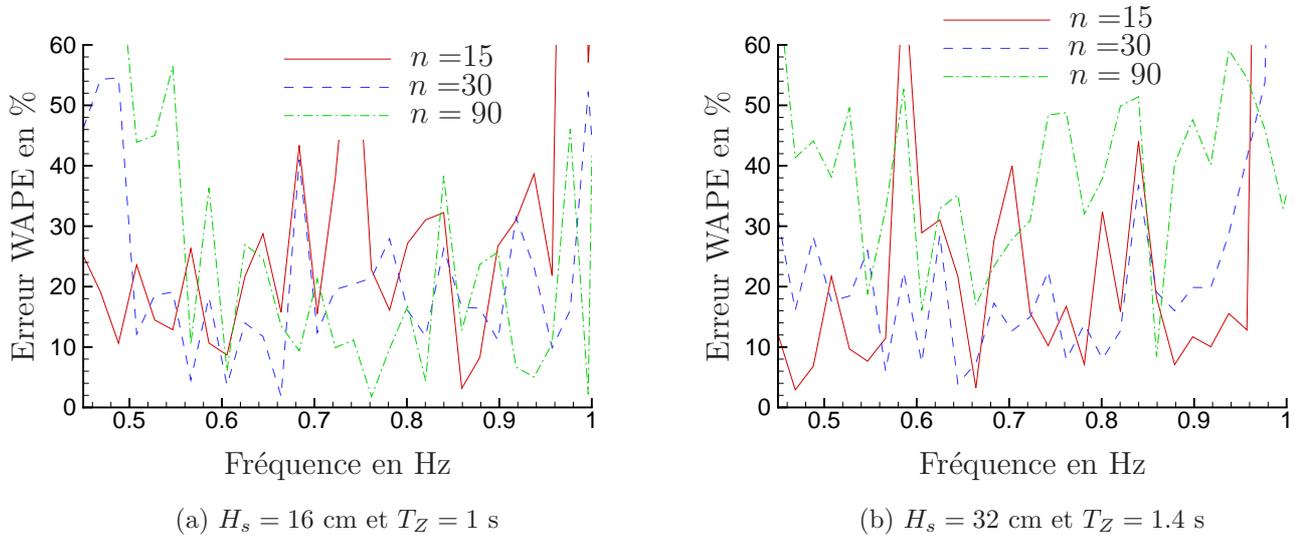


FIG. V.2.14 – Erreur WAPE expérimentale pour la méthode EMEP

Ces essais expérimentaux fournissent à nouveau des informations quant au choix des paramètres des méthodes. Une remarque commune concerne les fréquences d'énergie faible supérieures à 1 Hz : aucune des trois méthodes ne converge dans ces cas-là, les fortes non-linéarités observées (jusqu'au déferlement) mettant un obstacle à ces méthodes linéaires.

**MEP** nombre d'éléments dans la base : on doit réduire ici à 4 éléments au maximum la base de décomposition,

*convergence* : on observe une absence de convergence pour certaines fréquences intermédiaires (d'où des bandes blanches dans les carte  $(f, \theta)$  précédentes) ;

**EMEP** les paramètres utilisés lors des tests numériques conviennent également dans le cas des essais ;

**BDM** *discrétisation* : contrairement aux tests numériques précédents, un nombre suffisant de points de discrétisation (120) est nécessaire ici pour assurer une erreur WAPE comparable aux autres méthodes. Ceci pénalise un peu la méthode BDM qui voit son temps de calcul s'allonger en conséquence,

*hyper-paramètre* : les valeurs de l'hyper-paramètre  $u$  à convergence sont entre 0.01 et 1 pour la gamme de fréquence d'énergie suffisante. On a observé également pour les plus hautes fréquences que le critère ABIC n'est pas forcément monotone décroissant en fonction de  $u$  mais peut être croissant pour les fortes valeurs de  $u$ . Cela modifie les critères d'arrêt pour la recherche du ABIC minimum par rapport à l'article de Hashimoto *et al.* [59]. Ce dernier préconise simplement de partir de "u" grand en diminuant, et de s'arrêter dès que le critère ABIC augmente. Ici, on continue de tester plusieurs valeurs de "u" plus faibles pour voir si le critère ABIC croît bien ensuite ou s'il décroît à nouveau.

## Conclusion

Le diagramme V.2.15 montre les étapes majeures de la génération et de l'analyse de houle multi-directionnelle abordée dans ce chapitre. L'étude en houle irrégulière droite (chapitre V.1) avait permis de mettre en place l'estimation des spectres. Les tests numériques présentés en V.2.2 valident l'estimation de l'étalement directionnel effectuée grâce à trois méthodes tirées de la littérature, Méthode du Maximum d'Entropie, Méthode du Maximum d'Entropie Étendue et Méthode d'Estimation Bayésienne. Ces trois méthodes ont été correctement implémentées et ont toutes révélé un très bon fonctionnement (dans leurs limites), en accord avec les résultats déjà présents dans la littérature. Ces tests numériques nous ont également apporté une bonne expérience des différents paramètres, savoir-faire indispensable pour obtenir des résultats pertinents.



FIG. V.2.15 – *Diagramme de l'analyse de houle multi-directionnelle*

Les essais expérimentaux ont ensuite permis de valider la génération de houle irrégulière dans le bassin de houle de l'ECN. Ces premières expériences de génération de houles multi-directionnelles donnent un aperçu des capacités du bassin de houle. Elles ont aussi montré la moindre performance de la méthode MEP par rapport aux deux autres.

### Une méthode meilleure?

Si les tests numériques entrepris nous montrent trois méthodes à peu près équivalentes, les essais expérimentaux tendent à faire pencher la balance en faveur de la Méthode du Maximum d'Entropie Étendue ou EMEP de Hashimoto *et al.* [60]. Le temps de calcul plus conséquent ainsi qu'une plus grande sensibilité des paramètres rendent en effet la méthode BDM un peu moins attractive, avec toutefois des résultats très satisfaisants.

### Perspectives

Les essais réalisés se sont révélés sévères à la fois comme test de la houle générée dans le bassin (on compare à une cible linéaire  $D$  alors qu'on est en dehors des hypothèses de linéarité) et comme test des méthodes d'analyse (elles aussi basées sur le linéaire). Une quantification plus complète des performances du bassin nécessite des essais à plus faible  $H_s$ . L'analyse de houle multi-directionnelles cambrées nécessite une méthode plus élaborée tenant compte des non-linéarités. En ce sens, le modèle développé par Zhang *et al.* [131] traite des effets non-linéaires approchés au second ordre. Il constitue une étape supplémentaire aux méthodes présentées ici, qui sont utilisées au sein de la partie linéaire de ce modèle.

L'utilisation des simulations numériques permettra l'étude de la stationnarité spatiale du champ de vagues, de manière à dégager l'importance de la dégradation par les réflexions sur les murs latéraux et l'apport des lois de commande élaborées utilisant ces réflexions pour agrandir la zone utile.

Enfin, une quantification de l'excitation des modes propres transverses du bassin, comme celle mise en place en houle droite en V.1.9.5, s'avère indispensable à court terme. On a vu

précédemment que ces modes transverses étaient excités même avec un mouvement plan du batteur (bi-dimensionnel). Il est naturel de penser, en trois dimensions cette fois, que le mouvement segmenté du batteur produira une excitation plus importante de ces modes et une analyse de ces derniers est nécessaire.

## Conclusion générale

L'objectif principal de cette thèse était la génération et l'analyse d'états de mer complexes en bassin de houle, à la fois dans des essais en bassin et dans des simulations.

Les caractéristiques du bassin de houle expérimental ont été recensées et modélisées au sein de deux codes numériques instationnaires.

Au niveau numérique, un travail important a été mené pour implémenter des mouvements complexes de batteur incluant tous les déplacements possibles dans le bassin réel. L'approche envisagée consiste à utiliser soit directement des fichiers de sortie provenant du batteur physique comme base de calcul des mouvements du batteur numérique (dans ce cas, on peut simuler très simplement une expérience déjà réalisée), soit des fichiers auxiliaires d'entrée pour construire à la fois les mouvements expérimentaux et numériques (une procédure d'écriture de ces fichiers d'entrée a été mise en place). De cette façon, les programmations de la génération de houle régulière oblique avec la méthode de Dalrymple, de houle irrégulière 2D en reproduction déterministe, de houle irrégulière multi-directionnelle sont rendues très faciles.

La participation active au codage des modèles a permis de bien connaître le fonctionnement des modèles développés. Le calcul des volumes et énergies a été entrepris pour vérifier la pertinence des solutions numériques. L'étude de la convergence des solutions en fonction du nombre de modes utilisés permet de régler correctement ces paramètres lors des simulations. L'étude du comportement du modèle non linéaire complet à forte cambrure, en formulation périodique, a montré l'importance du repliement et la nécessité de mettre en place un traitement complet dans les simulations instationnaires, à la place du traitement partiel actuel.

La compréhension fine des modèles sera gage d'une utilisation correcte lors d'applications futures (SWENSE, ...).

Une grande variété d'applications ont pu ensuite être menées grâce à ces codes de simulations (validation des méthodes d'analyse, lois de commande, suppression des ondes libres...) ainsi que l'identification des phénomènes physiques (vitesses de phase non linéaires, modes longitudinaux en houle irrégulière droite non linéaire) intervenant dans le bassin.

Une étude des techniques de génération linéaires et faiblement non linéaires a permis l'amélioration des champs de vagues générables dans les bassins numériques et expérimentaux. La mise en place de la technique existante de Dalrymple a été réalisée, tout en préparant celles d'autres techniques plus élaborées à l'aide d'une formulation simple faisant intervenir les amplitudes modales. L'efficacité de la méthode de Dalrymple est illustrée par quelques exemples, dont certains à forte angulation montrent sa nécessité par rapport à la méthode du serpent totalement inefficace dans ces situations.

Ces mêmes techniques élaborées qui imposent des mouvements batteurs importants, s'accompagnent d'un fort taux d'ondes libres parasites dues aux non-linéarités sur la paroi du batteur. Une méthode de suppression des ondes libres en houle oblique a donc été développée pour produire des champs de vagues propres au second ordre.

Les méthodes de reproduction déterministes présentes dans la littérature en deux dimensions ont été étudiées en détail et mises en œuvre pour certaines d'entre elles, de manière à mettre en évidence leurs limitations. Partant de là, une nouvelle méthode d'estimation des vitesses de phases non linéaires a été proposée, basée sur la séparation des effets pairs/impairs.

Une étude expérimentale de la réflexion de la plage absorbante a servi de base pour régler les paramètres de la zone absorbante numérique. Cette même étude a nécessité l'emploi d'une méthode d'analyse de houle régulière de type méthode de Mansard et Funke à  $P \geq 3$  sondes. Celle-ci a été améliorée pour tenir compte des effets d'amplitude finie sur la vitesse de phase des ondes qui interviennent lorsque la cambrure est élevée.

En houle irrégulière, en deux dimensions, une analyse approfondie d'essais a été menée pour évaluer la qualité des houles produites en bassin et tenter de quantifier l'excitation des modes propres au cours de l'essai, qui perturbent les mesures.

Ces travaux de thèse ont été riches d'apprentissages, de compréhension et de savoir accumulés sur la houle en général et bien d'autres domaines. Ils ont donné l'occasion d'appréhender la rigueur nécessaire tant lors d'essais expérimentaux que lors du codage des modèles numériques. Contre toute attente, les deux univers numérique et expérimental sont finalement révélés très similaires quant à leurs exigences. Dans ces deux domaines, le fait d'avoir participé aux différentes étapes a été très formateur ; en expérimental, depuis la mise au point du système de mesure, jusqu'aux résultats d'analyse, en passant par la calibration, l'étalonnage, le montage, la mise en place, les séries d'essais, au traitement des données ; en numérique, depuis l'écriture des équations à résoudre jusqu'à l'analyse des résultats, en passant par le choix de la méthode de résolution, le développement de l'algorithme, le codage, la sortie des données et leurs traitements.

La rédaction de la thèse elle-même a permis de faire un bilan des compétences acquises, d'ouvrir une quantité de voies nouvelles et de susciter une curiosité et une soif d'apprendre toujours plus grandes.

# Annexe A

## Génération de houle oblique

### A.1 Position du problème

#### A.1.1 Établissement des équations

On considère l'écoulement d'un fluide dans un domaine  $D$  rectangulaire semi-infini représentant un bassin, en trois dimensions nommées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le bassin est de profondeur  $h$ , semi-infini dans la direction des  $x$  croissants, fermé en  $x = 0$  par un batteur. L'axe vertical ( $Oz$ ) est dirigé vers le haut. On utilise les mêmes hypothèses que pour les codes numériques

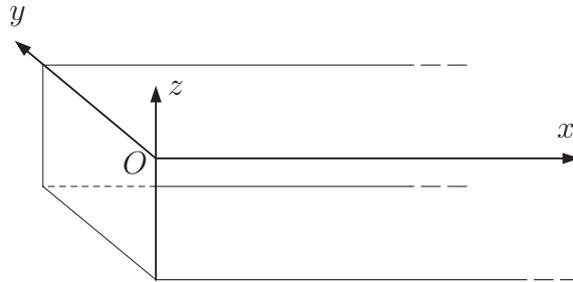


FIG. A.1 – Schéma du bassin 3D semi-infini

pour décrire l'écoulement du fluide. On suppose le fluide parfait, incompressible, en écoulement irrotationnel. Le champ de vitesse est décrit alors par le potentiel des vitesses  $\phi$  tel que

$$\mathbf{V} = \tilde{\nabla} \phi(\mathbf{x}, z, t)$$

où le vecteur  $\mathbf{x}$  représente les coordonnées horizontales et  $t$  le temps. La houle générée est supposée non déferlante et la surface libre est représenté par une fonction mono-valuée  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ . Le fluide étant incompressible, le potentiel vérifie l'équation de Laplace dans le domaine  $D$ . Sur les parois, mobiles ou fixes, le fluide suit une condition de glissement du type  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{U}$  est la vitesse de la paroi et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au fluide. On a montré en I.1 que cette condition de glissement s'exprime sur les différentes parois

**sur le fond :** on le suppose plat et de profondeur constante  $h$  dans tout le bassin, d'où

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h$$

**sur les murs latéraux :** à nouveau on les considère immobiles et plats, soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } L_y$$

**sur le batteur :** comme en I.1.2 on le suppose continu. Son mouvement est décrit par une fonction du type  $x = X(y, z, t) = g_v(z) \tilde{X}(y, t)$  où  $g_v(z)$  est la géométrie verticale du batteur (volet articulé ou piston) et  $\tilde{X}(y, t)$  la loi de commande contrôlant le mouvement, la condition de glissement s'exprimant alors par

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nabla_v X \cdot \nabla_v \phi \quad \text{en } x = X(y, z, t) \quad (\text{A.1})$$

**sur la surface libre :** on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \eta \cdot \nabla \phi \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

La conservation de la quantité de mouvement intégré dans le volume exprime la conservation de l'énergie et s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g z + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = B(t) \quad (\text{A.2})$$

valable dans tout le domaine  $D$ . Après un changement d'inconnue en posant  $\phi' = \phi + \int B(t) dt$ , cette relation est exprimée sur la surface libre où la pression est supposée constante et où sont négligés les effets de tension superficielle :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \eta + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

On peut réarranger le système d'équations obtenu en écrivant une condition sur la surface libre pour le potentiel seulement. Il suffit pour cela de prendre la dérivée particulaire de la condition dynamique de surface libre. On obtient ainsi

$$E \phi + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \phi \cdot \tilde{\nabla}) \right) |\tilde{\nabla} \phi|^2 = 0 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

où  $E$  est l'opérateur différentiel linéaire suivant

$$E = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z}$$

A l'opposé du batteur, pour  $x \rightarrow +\infty$ , l'écoulement aura la forme d'une onde. On impose que cette onde se déplace dans le sens des  $x$  croissants (absence d'onde se déplaçant dans le sens des  $x$  décroissants<sup>1</sup>). On parle de condition de radiation. On ne considérera aussi que les ondes d'amplitude finie pour  $x \rightarrow +\infty$ . Pour générer des vagues, on anime le batteur d'un mouvement périodique de période  $T$ . On s'attend alors à ce que loin du batteur, les grandeurs  $\phi$  et  $\eta$  soient périodiques en temps et en espace

$$\begin{aligned} \eta(x + \lambda, t) &= \eta(x, t) & \text{pour tout } (x, t) \\ \eta(x, t + T) &= \eta(x, t) & \text{pour tout } (x, t) \end{aligned}$$

---

1. Onde réfléchiée sur une plage ou sur la paroi du bassin

où  $\lambda$  est la longueur d'onde des vagues créées.

On dispose de trois longueurs caractéristiques de l'écoulement : longueur d'onde  $\lambda$ , profondeur  $h$  et amplitude de la houle  $a$ . On peut donc identifier deux nombres sans dimension  $\varepsilon = 2a/\lambda$ , et  $kh$ . Les déplacements  $X$  et  $\eta$  des surfaces mobiles sont supposés faibles devant la longueur d'onde. On fixe donc  $\varepsilon \ll 1$  et on développe les conditions aux limites sur ces surfaces mobiles en série de Taylor autour de la position moyenne ( $x = 0$  et  $z = 0$ ). Les inconnues sont également décomposées en série de perturbation en fonction d'un petit paramètre choisi comme la cambrure de la houle. Aucune hypothèse n'est faite sur la profondeur du bassin et on prend donc  $kh = O(1)$ . On se limite au premier ordre (équations linéarisées) qui permet de traiter de la prise en compte des réflexions sur les murs latéraux.

Dans la suite, toutes les grandeurs seront adimensionnées à l'aide de la profondeur  $h$  et de l'accélération  $g$  de la gravité pour simplifier les notations.

### A.1.2 Équations au premier ordre

Les inconnues au premier ordre sont le potentiel  $\phi_1$  qui fournit la vitesse  $\mathbf{V}_1 = \tilde{\nabla} \phi_1$ , l'élévation de surface libre  $\eta_1$  et la pression  $P_1$ . Cette dernière est obtenue grâce à la relation de Bernoulli exprimée dans le domaine de fluide. L'élévation de surface libre est obtenue, elle, par la condition de surface libre dynamique. Le système d'équations pour le potentiel s'écrit :

$$\Delta \phi_1 = 0 \quad \text{en } (x, y, z) \in D \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -1 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = b \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial X_1}{\partial t} \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$E \phi_1 = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$+\text{condition de radiation en } x \rightarrow \infty \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Solution en régime établi

On cherche une solution en régime établi lorsque le mouvement du batteur est sinusoïdal d'amplitude constante, soit

$$X_1(y, z, t) = \text{Re} [\underline{X}_1(y, z) e^{i\omega t}]$$

La solution est une superposition de modes élémentaires qu'on obtient aisément par séparation des variables en posant  $\phi_1 = \text{Re} [\underline{\phi}_1 e^{i\omega t}]$  avec  $\underline{\phi}_1 = f(x) g(y) h(z)$ . L'équation de Laplace (A.3) combinée avec la condition de glissement sur les murs latéraux (A.5) conduit à des modes propres transverses du bassin, dont le potentiel est de la forme  $\cos(\mu_n y)$  avec  $\mu_n = n\pi/L_y$  pour  $n = 0$  à l'infini. Le premier mode  $n = 0$  correspond à la solution bidimensionnelle (indépendante de  $y$ ), les suivants à des ondes stationnaires transverses avec  $n$  noeuds sur la largeur du bassin. La condition sur le fond (A.4) fournit des modes verticaux de la forme

$$\frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{2}$$

pour  $m = 0$  à l'infini. La condition combinée (A.7) permet de trouver la valeur des  $\alpha_m$ . Ils appartiennent à  $\mathbb{R}$  ou  $i\mathbb{R}$ , et vérifient la relation de dispersion généralisée

$$\omega^2 = i\alpha_m \frac{e^{i\alpha_m} - e^{-i\alpha_m}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}}$$

Il s'agit pour  $m = 0$  de la relation de dispersion classique  $\omega^2 = k \tanh k$  avec  $\alpha_o = ik$  imaginaire pur et une dépendance verticale en  $\cosh k(z + 1)$ . Pour  $m > 0$ , les  $\alpha_m$  sont réels et solutions de l'équation  $\omega^2 = -\alpha_m \tan \alpha_m$ . Celle-ci peut être résolue graphiquement par exemple. La

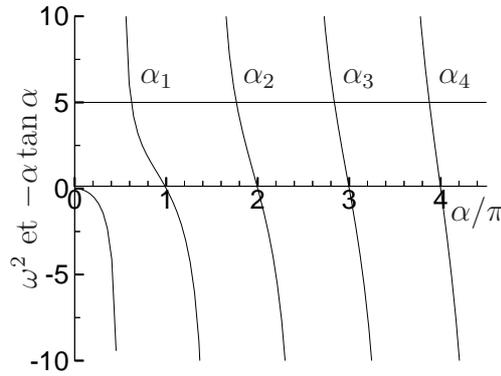


FIG. A.2 – Résolution graphique de  $\omega^2 = -\alpha_m \tan \alpha_m$

figure A.2 donne un exemple de résolution graphique des  $\alpha_m$  pour  $\omega^2 = 5$  : on a tracé la droite  $f(\alpha/\pi) = \omega^2$  et la fonction  $f(\alpha/\pi) = -\alpha * \tan \alpha$ . Les points d'intersection de ces deux courbes donnent en abscisse la valeur des  $\alpha_n$ . On peut remarquer que pour  $n$  tendant vers l'infini<sup>2</sup>  $\alpha_m \sim m\pi$ . La dépendance verticale s'écrit  $\cos \alpha_m(z + 1)$ .

Les modes longitudinaux, en  $x$ , se déduisent de (A.3) et de (A.8) et sont de la forme  $e^{-k_{mn}x}$ . avec  $k_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \mu_n^2$ . Quels que soient  $m$  et  $n$ , on a toujours  $k_{mn}^2 \in \mathbb{R}$ . Suivant le signe de  $k_{mn}^2$ , les modes longitudinaux sont de différents natures. Traitons du cas  $m = 0$  en premier.

$m = 0$		$m \geq 1$	
$n \leq N_1$	progressif	$n \in \mathbb{N}$	évanescent
$n > N_1$	évanescent		

TAB. A.1 – Nature des modes longitudinaux

Pour les composantes  $n$  transverses longues telles que<sup>3</sup>  $n \leq N_1 = E \left[ \frac{kL_y}{\pi} \right]$ , où  $E[\cdot]$  désigne la

2. Cet équivalent servira notamment pour étudier la convergence de la décomposition en modes évanescents

3. Le nombre  $N_1 + 1$  représente le nombre de modes progressifs existant pour cette longueur d'onde. Il est égale au double nombre de longueurs d'onde qu'on peut mettre dans la largeur du bassin.

partie entière, alors  $k_{on}^2 \leq 0$ , *i.e.*  $k_{on} \in i\mathbb{R}^+$  d'après la condition de radiation. On en déduit que le mode longitudinal est progressif, de sorte que le mode élémentaire  $(0,n)$  est progressif également. Pour les composantes transverses plus courtes, *i.e.*  $n > N_1$ , alors  $k_{on}$  est réel négatif et le mode longitudinal est évanescent. Deuxièmement si  $m \geq 1$  alors les modes longitudinaux associés sont évanescents quels que soit la composante  $n$  transverse. La figure A.3 montre deux

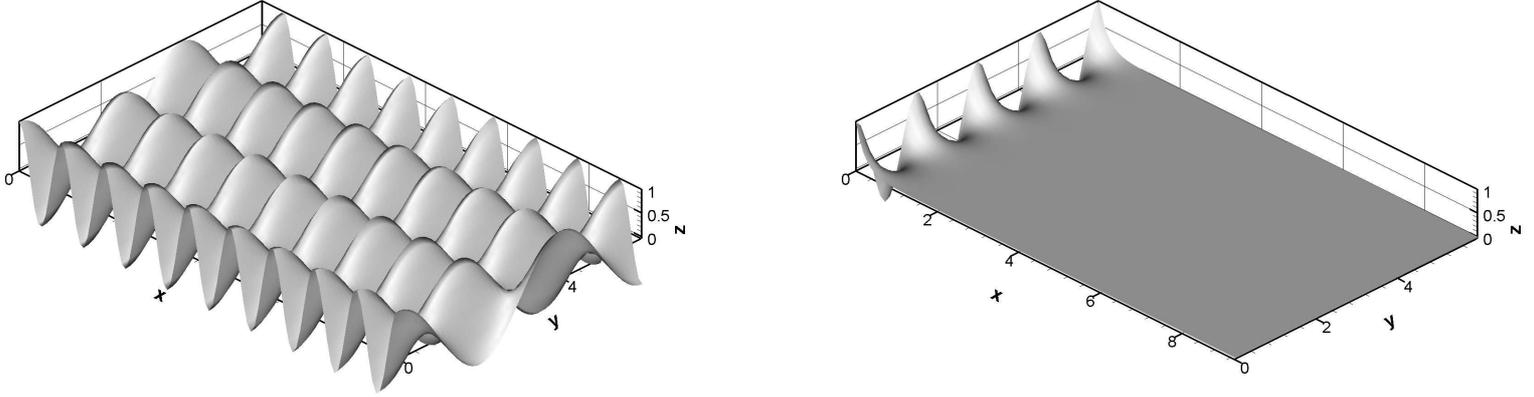


FIG. A.3 – Exemples de modes propres ( $f = 0.56$  Hz,  $(m,n) = (0,3)$  à gauche et  $(1,8)$  à droite).

exemples de modes élémentaires pour la fréquence  $f = 0.4$ . À gauche on observe un mode progressif ( $m = 0$ ) et  $n = 3 \leq N_1 = 11$ ; à droite un mode évanescent ( $m = 1$ ,  $n = 8$ ).

Pour les modes évanescents, on définit une longueur caractéristique  $\widehat{\delta}_{mn}$  d'atténuation, utile pour les expériences par

$$\widehat{\delta}_{mn} = \frac{1}{k_{mn}}$$

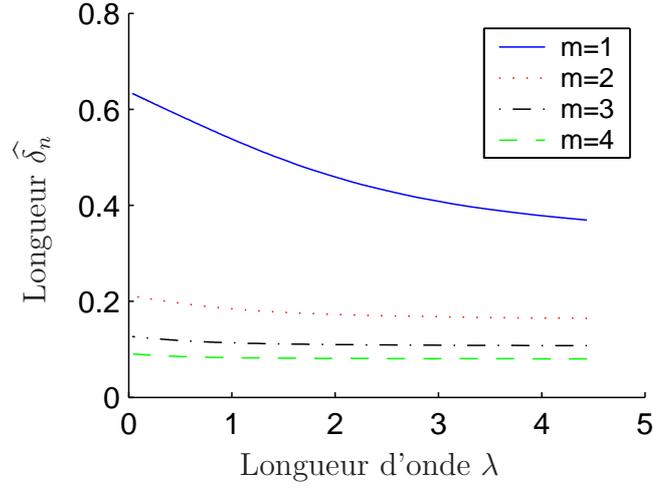
On doit distinguer deux cas distincts suivant la valeur de  $m$  :

**Pour  $m \geq 1$  :** on peut remarquer qu'à  $m$  fixé, on a  $k_{mn} > k_{m0}$  donc les modes transverses  $n \neq 0$  décroissent sur une plus courte distance que le mode évanescent purement longitudinal correspondant ( $n = 0$ ). Pour savoir à quelle distance du batteur le champ évanescent est négligeable, on s'intéresse donc à ce mode  $n = 0$  pour différentes valeurs de  $m$  : la figure A.4 donne une visualisation graphique de la variation, en fonction de la longueur d'onde, de la longueur caractéristique  $\widehat{\delta}_{m0}$ , pour les quatre premiers modes évanescents en deux dimensions ( $n = 0$  et  $m = 1 \dots 4$ ). On constate que le mode  $m = 1$  est le plus long à s'amortir. Sa longueur d'atténuation est toujours de l'ordre d'une demie profondeur (*cf.* Molin [100] : à une distance de plus de deux profondeurs de bassin, les modes évanescents sont négligeables). Lorsque la longueur d'onde augmente, la distance d'amortissement diminue légèrement.

**Lorsque  $m = 0$  :** on peut remarquer cette fois que pour tous les modes évanescents concernés, on a  $k_{on} \geq k_{oN_1+1}$  : le premier mode évanescent rencontré ( $n = N_1 + 1$ ) est le plus long à s'amortir. Il possède une longueur d'onde d'atténuation

$$\widehat{\delta}_{oN_1+1} = \frac{1}{k_{oN_1+1}}$$

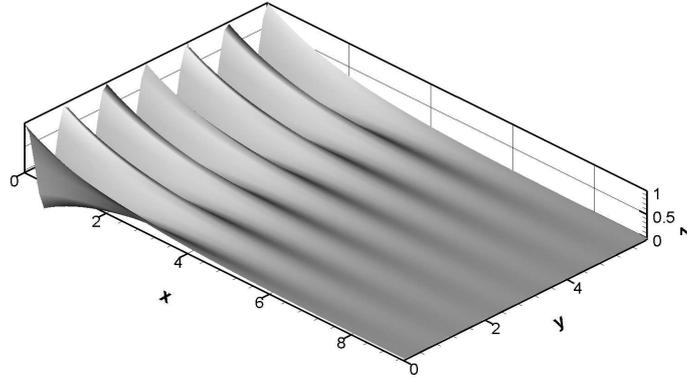
qui peut être importante lorsque la fréquence de la houle est inférieure et proche d'une fréquence propre transverse (voir la section A.4.2). Les modes suivants  $n > N_1 + 1$  s'amor-


 FIG. A.4 – Variation de  $\widehat{\delta}_n$  en fonction de  $\lambda$ 

tissent plus rapidement.

$$\widehat{\delta}_{on} \leq \widehat{\delta}_{oN_1+2} \leq \frac{L_y}{\pi\sqrt{2N_1+3}} \quad \text{pour } n > N_1 + 1$$

La figure A.5 montre l'élévation de surface libre pour le mode évanescent  $m = 0$  et  $n = N_1 + 1$  pour une fréquence  $f = 0.56$  Hz.


 FIG. A.5 – Exemple de mode évanescent à éviter ( $f = 0.56$  Hz,  $(m,n) = (0,12)$ ).

Grâce à la condition de surface libre dynamique  $\eta_1 = -\frac{\partial\phi_1}{\partial t}$  en  $z = 0$ , on peut relier les coefficients du potentiel à ceux de la hauteur d'eau et réécrire ces deux inconnues sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_1 &= \frac{ia_{mn}}{\omega} e^{-k_{mn}x} \cos(\mu_n y) \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{a_{mn}} e^{-k_{mn}x} \cos(\mu_n y) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Il reste à relier l'amplitude des modes de la houle  $\underline{a_{mn}}$  au mouvement du batteur. Pour cela, on

utilise la condition (A.6) sur le batteur, qui s'écrit, en notation complexe

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = i\omega \underline{X}_1 \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{A.10})$$

Le mouvement du batteur s'écrit  $\underline{X}_1 = \underline{b} f(y) g_v(z)$  où  $g_v(z)$  est la forme verticale d'un volet du batteur et  $\underline{b}$  une amplitude caractéristique du mouvement. On se sert ensuite de l'orthogonalité d'une part des fonctions  $\{\cos(\mu_n y)\}$ , et d'autre part des fonctions  $\left\{ \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \right\}$ . La condition sur le batteur (A.10) fournit ainsi deux relations. La première relie les modes évanescents  $m \neq 0$  aux modes  $m = 0$  en définissant une fonction de transfert  $TF_{mn}$  :

$$\begin{aligned} \underline{TF}_{mn} &= \frac{\underline{a}_{mn}}{\underline{a}_{on}} \\ &= \frac{e^{i\alpha_n} + e^{-i\alpha_n}}{e^{i\alpha_o} + e^{-i\alpha_o}} \frac{\int_{-1}^0 g_v(z) (e^{i\alpha_n(z+1)} + e^{-i\alpha_n(z+1)}) dz}{\int_{-1}^0 (e^{i\alpha_n(z+1)} + e^{-i\alpha_n(z+1)})^2 dz} \frac{\int_{-1}^0 (e^{i\alpha_o(z+1)} + e^{-i\alpha_o(z+1)})^2 dz}{\int_{-1}^0 g_v(z) (e^{i\alpha_o(z+1)} + e^{-i\alpha_o(z+1)}) dz} \\ &= \frac{k_{on}}{k_{mn}} \frac{\alpha_m}{\alpha_o} \underline{TF}_m \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où  $\underline{TF}_m$  est la fonction de transfert bi-dimensionnelle (voir la section A.3 suivante). Cette fonction de transfert sera utile lors du calculs des amplitudes  $\underline{a}_{mn}$ . Une fois les coefficients pour  $m = 0$  calculés, on obtiendra les coefficients  $m \geq 1$  grâce à la fonction de transfert  $\underline{TF}_m$  issue de la théorie 2D.

La deuxième relation donne les amplitudes  $\underline{a}_{on}$  des modes  $m = 0$  en fonction de celles du batteur. Des exemples sont donnés pour le principe du serpent et la méthode de Dalrymple dans la section II.2.2.

### A.3 Fonctions de transfert

En deux dimensions, on définit deux fonctions de transfert pour le fonctionnement du batteur. La première relie le mouvement du batteur  $\underline{X}_1(z) = \underline{b} g_v(z)$  et la houle loin du batteur  $\underline{\eta}_1(x) = \underline{a} e^{-ikx}$  et s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{TF} &= \frac{i}{e^{i\alpha_o} - e^{-i\alpha_o}} \frac{\int_{-1}^0 (e^{i\alpha_o(z+1)} + e^{-i\alpha_o(z+1)})^2 dz}{\int_{-1}^0 g_v(z) (e^{i\alpha_o(z+1)} + e^{-i\alpha_o(z+1)}) dz} \\ &= -i |\underline{TF}| \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

La deuxième relie les modes évanescents près du batteur  $\underline{\eta}_1^m(x) = \underline{a}_m e^{-\alpha_m x}$  à la houle loin du batteur :

$$\underline{TF}_m = \frac{\underline{a}_m}{\underline{a}} = \underline{TF} \frac{e^{i\alpha_m} - e^{-i\alpha_m}}{i} \frac{\int_{-1}^0 g_v(z) (e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}) dz}{\int_{-1}^0 (e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)})^2 dz}$$

### A.3.1 Batteur piston

Dans le cas d'un batteur piston ( $g_v(z) = 1$ , voir la figure I.1.2 à gauche), elles s'écrivent

$$\begin{aligned} \underline{TF} &= -i \frac{2k + \sinh 2k}{4 \sinh^2 k} \\ \underline{TF}_m &= \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \underline{TF} \frac{4 \sin^2 \alpha_m}{2\alpha_m + \sin 2\alpha_m} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

### A.3.2 Batteur volet

Dans le cas d'un batteur volet (voir la figure I.1.2 à droite) articulé à une hauteur  $d$  du fond, dont la forme verticale est nulle entre  $z = -1$  et  $z = -1 + d$ , et vaut  $\frac{z+1-d}{1-d}$  au dessus de  $z = -1 + d$ , on obtient

$$\begin{aligned} \underline{TF} &= -i \frac{k(1-d)}{4 \sinh k} \frac{2k + \sinh 2k}{k(1-d) \sinh k + \cosh(kd) - \cosh k} \\ \underline{TF}_m &= \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \underline{TF} \frac{4 \sin \alpha_m}{\alpha_m(1-d)} \frac{\alpha_m(1-d) \sin \alpha_m + \cos \alpha_m - \cos \alpha_m d}{2\alpha_m + \sin 2\alpha_m} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la fonction de transfert  $\underline{TF}$  est imaginaire pure, mouvement du batteur et houle étant en quadrature de phase.

### A.3.3 Terme transverse

Intéressons-nous à l'intégrale en  $y$  apparaissant lorsqu'on regarde les lois de commande du batteur 3D. Après calculs, on obtient

$$I_n = \frac{\int_0^b e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy} = \begin{cases} \delta_{on} & \text{si } \theta = 0 \\ 1 & \text{si } \theta \neq 0 \text{ et } \mu_n = |k \sin \theta| \\ \frac{2ik \sin \theta}{(k \sin \theta)^2 - \mu_n^2} \frac{e^{-ik \sin \theta b} (-1)^n - 1}{b(1 + \delta_{on})} & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction  $I_n(\theta)$  est continue lorsque  $\mu_n = |k \sin \theta|$ , malgré la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$  pour  $\mu_n \rightarrow |k \sin \theta|$ . On l'évalue numériquement dans ce cas à l'aide d'un développement limité.

### A.3.4 Comparaison des lois de commande serpent et Dalrymple

On peut noter également la relation entre les amplitudes  $\underline{a}_{on}$  pour la méthode de Dalrymple et le principe du serpent

$$\underline{a}_{on}^{dal} = \underline{a}_{on}^{ser} \frac{k_{on}}{\alpha_o \cos \theta} e^{(k_{on} - \alpha_o \cos \theta) X_d}$$

En trois dimensions (houle oblique), on remarque un terme de déphasage  $e^{(k_{on} - \alpha_o \cos \theta) X_d}$  entre les deux méthodes, dû au fait que la condition sur le potentiel cible n'est pas imposée au même endroit dans le bassin ( $x = 0$  pour le batteur serpent,  $x = X_d$  pour la loi de commande de Dalrymple). Il apparaît en outre un terme d'amplitude  $\frac{k_{on}}{\alpha_o \cos \theta}$  : la houle cible est imposée en terme de mouvement batteur directement dans le principe du serpent, en terme de vitesse dans la méthode de Dalrymple.

## A.4 Modes transverses

### A.4.1 Fréquences propres

Dans cette section, on revient aux grandeurs dimensionnelles. La fréquence des modes transverses du bassin de houle de l'ECN ( $50 \times 30 \times 5$ ) est donnée par

$$\nu_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g k_n \tanh k_n h} \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L_y}$$

avec  $L_y = 29.74$  m.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquence (Hz)	0.113	0.203	0.269	0.319	0.360	0.396	0.428	0.458	0.486	0.512	0.537
Période (s)	8.87	4.93	3.72	3.13	2.77	2.52	2.33	2.18	2.06	1.95	1.86
Longueur d'onde (m)	59.5	29.7	19.8	14.9	11.9	9.9	8.5	7.4	6.6	5.95	5.41
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Fréquence (Hz)	0.561	0.584	0.606	0.627	0.648	0.668	0.687	0.706	0.725	0.742	0.760
Période (s)	1.78	1.71	1.65	1.59	1.54	1.50	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
Longueur d'onde (m)	4.96	4.58	4.25	3.97	3.72	3.50	3.30	3.13	2.97	2.83	2.70

TAB. A.2 – Modes propres transverses

### A.4.2 Résonance

Une résonance transverse se produit lorsqu'on approche une fréquence propre transverse du bassin, par valeurs inférieures. Si on s'approche<sup>4</sup> du mode  $N_o$ , le premier mode évanescent  $n = N_1 + 1 = N_o$  voit alors son nombre d'onde tendre vers zéro : sa longueur d'atténuation est grande. Pour savoir si cette résonance sera gênante lors des essais, il faut s'intéresser à l'amplitude du mode évanescent : elle vaut par exemple pour le principe du serpent

$$\underline{a_{oN_1+1}} = \underline{a} \frac{\alpha_o \cos \theta}{k_{oN_1+1}} I_{N_1+1} \quad (\text{A.12})$$

Si l'on génère une houle droite, on a  $N_1 + 1 > 0$  donc  $I_{N_1+1} = 0$ . L'amplitude du premier mode évanescent est théoriquement nulle même si on se rapproche de la fréquence propre  $\nu_{N_o}$ . Il n'y a pas de phénomène de résonance transverse au premier ordre en houle droite. Cependant on observe lors des essais que le mode transverse est bien excité : l'excitation est vraisemblablement due à un effet d'ordre trois (*cf.* Yao *et al.* [129]).

Si l'on génère une houle oblique ( $\theta \neq 0$ ) à une fréquence proche mais inférieure à la fréquence du mode propre  $N_1 + 1$  transverse du bassin, l'amplitude du premier mode évanescent n'est plus nulle. Dans l'expression (A.12) de l'amplitude, le terme en  $y$  vaut

$$I_{N_1+1} = \frac{2ik \sin \theta}{(k \sin \theta)^2 - \mu_{N_1+1}^2} \frac{e^{-ik \sin \theta b} (-1)^{N_1+1} - 1}{b}$$

4. Dans ce cas,  $k \rightarrow \mu_{N_o}^-$ .

qui est borné quand  $k \longrightarrow \mu_{N_1+1}^-$  donc l'amplitude  $\underline{a_{oN_1+1}}$  diverge<sup>5</sup> comme  $1/k_{oN_1+1}$ . L'amplitude du premier mode évanescant tend vers l'infini pour un mouvement fini du batteur. Cette résonance est bien sûr à éviter, sous peine d'un débordement du bassin près du batteur. Au premier ordre, avec le principe du serpent, on devra prendre des précautions lorsqu'on veut générer un spectre directionnel de houle ou une houle oblique.

Pratiquement, il pourra être intéressant de se donner des marges de sécurité sur la longueur d'atténuation du premier mode évanescant (ne pas utiliser les fréquences telles que  $\widehat{\delta_{oN_1+1}} > \lambda$  ou  $> h$ ), sur son amplitude (idem si  $\underline{a_{oN_1+1}} > \alpha \underline{a}$  avec  $\alpha$  un facteur de sécurité).

Comme on l'a dit pour la méthode de Dalrymple, une autre façon de faire est de ne pas exciter ce mode  $N_1 + 1$  avec le batteur, *i.e.* d'imposer  $\underline{a_{on}} = 0$  pour tout  $n > N_1$ . Le mouvement résultant est légèrement différent du mouvement serpent original. Pour le principe du serpent, cela enlève des modes évanescents qui n'ont qu'une contribution près du batteur. Cela ne modifie pas le champ lointain.

Pour une loi de commande de type Dalrymple, on impose la cible à une certaine distance du batteur. L'amplitude du premier mode évanescant vaut cette fois

$$\underline{a_{oN_1+1}} = \underline{a} I_{N_1+1} e^{(k_{oN_1+1} - \alpha_o \cos \theta) X_d}$$

Cette fois, cette amplitude du premier mode évanescant ne diverge pas<sup>6</sup> lorsque  $k \longrightarrow \mu_{N_1+1}^-$ . Cependant, l'amplitude du mouvement batteur vaut elle

$$\underline{b_{N_1+1}} = \frac{TF}{\alpha_o} \frac{k_{oN_1+1}}{\alpha_o} \underline{a_{oN_1+1}} = \frac{TF}{\alpha_o} \underline{a} I_{N_1+1} \frac{k_{oN_1+1}}{\alpha_o} e^{(k_{oN_1+1} - \alpha_o \cos \theta) X_d}$$

Elle pourra prendre des valeurs importantes du fait de l'exponentielle.

On peut également, comme mentionné plus haut, arrêter la génération des modes propres transverses à  $n = N_1$ . Lorsqu'on supprime les modes  $n > N_1$ , on ôte des éléments de la famille  $\{\cos(\mu_n y)\}$ . La solution obtenue sera incomplète<sup>7</sup>. Je veux dire ici que la hauteur de surface libre sur la ligne  $x = X_d$  ne sera pas uniforme. On observe des oscillations sur les bords. Ceci est d'autant plus flagrant pour les grandes longueurs d'ondes pour lesquelles  $N_1$  est faible.

Comme en houle droite, il est probable que le premier mode évanescant d'amplitude nulle au premier ordre soit excité par des effets non linéaires.

## A.5 Segmentation dans le cas d'un bassin infini en latéral

L'étude de la segmentation du batteur a été réalisée initialement par Biéssel [44] qui exprime le mouvement segmenté  $X_s$  à partir du mouvement continu  $X$  sous la forme

$$X_s(y) = X\left(y + B f\left(\frac{y}{B}\right)\right) \quad \text{avec} \quad X(y) = e^{-ik \sin \theta y}$$

5. On peut définir  $\varepsilon > 0$  tel que  $k = \mu_{N_1+1} - \varepsilon/b$ . En reportant cette expression de  $k$  dans  $k_{oN_1+1}^2 = \mu_{N_1+1}^2 - k^2$  alors on en déduit que  $k_{oN_1+1} = \sqrt{2\varepsilon\mu_{N_1+1}/b}$  à l'ordre le plus faible en  $\varepsilon$ . Tous les autres termes dans l'expression de  $\underline{a_{oN_1+1}}$  sont d'ordre zéro en  $\varepsilon$

6. Il semble que la différence soit due au fait que pour le principe du serpent, on passe directement du potentiel cible vers le mouvement batteur (terme  $k \cos \theta$  de dérivée selon  $x$  puis terme  $1/k_{on}$  dans la solution) alors que pour la méthode de Dalrymple, on projette d'abord le potentiel cible sur les modes propres transverses du bassin (terme en  $k_{on}$  puis en  $1/k_{on}$  qui se simplifient).

7. On peut interpréter l'expression de  $I_n$  comme la décomposition de Fourier d'une fonction rectangle. Si on tronque la série de Fourier à un ordre donné, la série reconstruite est différente de la fonction rectangle. Elle présente des oscillations aux bords!

où  $B$  est la largeur d'un volet<sup>8</sup> et  $f(u)$  la fonction 1-périodique valant  $\frac{1}{2} - u$  sur  $[0; 1]$  (fonction en dents de scie). Ainsi, le mouvement d'un volet est choisi comme le mouvement du batteur continu pris au centre du volet. Pour une discrétisation correcte du mouvement batteur, le critère de Shannon impose de prendre  $\lambda_y > 2B$  soit

$$\sin \theta < \frac{\lambda}{2B}$$

Cette condition n'est pas restrictive si la longueur d'onde est suffisante ( $\lambda > 2B$ ) et n'intervient que pour les longueurs d'onde très courtes, inférieures à deux largeurs de batteur.

Grâce à la périodicité de  $f$ , Biésel décompose ensuite la fonction  $\exp(-ikB \sin \theta f(y/B))$ , elle-même  $B$ -périodique, en série de Fourier dans la direction  $y$ , de fondamental de longueur d'onde  $B$

$$e^{-ikB \sin \theta f(\frac{y}{B})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underline{c}_n e^{2i\pi \frac{ny}{B}}$$

En posant<sup>9</sup>  $\tau = \frac{1}{2}kB \sin \theta$ , on obtient après calcul

$$\underline{c}_n = \frac{1}{B} \int_0^B e^{-ikB \sin \theta (\frac{1}{2} - \frac{y}{B})} e^{-2i\pi \frac{ny}{B}} dy = \frac{\sin \tau}{\tau - n\pi}$$

Le mouvement du batteur s'écrit

$$X_s(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin \tau}{\tau - n\pi} e^{-i(k \sin \theta - \frac{2\pi n}{B})y}$$

Dans le cas du batteur infini (serpent) en négligeant les modes évanescents ( $m \neq 0$ ), le potentiel en champ lointain résultant de ce mouvement batteur s'écrit

$$\phi = \frac{ia \cosh k(z+1)}{\omega \cosh k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin \tau}{\tau - n\pi} e^{-i\widehat{\mu}_n y} e^{-\widehat{k}_{on} x}$$

avec  $\widehat{\mu}_n = k \sin \theta - \frac{2\pi n}{B}$  et  $\widehat{k}_{on}^2 = -k^2 + \widehat{\mu}_n^2$ . La nature évanescence ou progressive des modes dépend du signe de  $\widehat{k}_{on}^2$ . On obtient

$$\widehat{k}_{on}^2 = \frac{4\pi^2}{B^2} \left( n - \frac{\tau}{\pi} - \frac{kB}{2\pi} \right) \left( n - \frac{\tau}{\pi} + \frac{kB}{2\pi} \right)$$

Le polynôme du second degré en  $n$  admet deux racines réelles dont l'une est négative<sup>10</sup>  $n_1 = \frac{\tau}{\pi} - \frac{kB}{2\pi}$  et l'autre positive  $n_2 = \frac{\tau}{\pi} + \frac{kB}{2\pi}$ . Si  $n \in [n_1; n_2]$ ,  $\widehat{k}_{on}^2$  est négatif: le mode est progressif, sinon, il est évanescence. Le mode progressif  $n = 0$  est toujours présent, c'est celui qu'on observe dans le cas d'un batteur continu. Les autres modes progressifs, s'ils existent, viennent perturber le champ de vagues désiré. On suppose ici que la largeur  $B$  des batteurs et la longueur d'onde sont fixées et on cherche une limite sur l'angle de propagation.

En imposant qu'aucun mode progressif supplémentaire n'existe, *i.e.*  $n_2 < 1$  (alors on a aussi  $n_1 > -1$ ), on obtient la condition

$$\sin \theta < \frac{\lambda - B}{B}$$

8. Le batteur contient un nombre entier  $M$  de volets sur toute la largeur soit  $L_y = MB$ .

9. La condition de Shannon évoquée plus haut s'écrit alors  $\tau < \pi$ .

10. On considère ici le cas  $\theta \geq 0$  *i.e.*  $\tau \geq 0$ . Le raisonnement dans le cas  $\theta < 0$  est exactement le même.

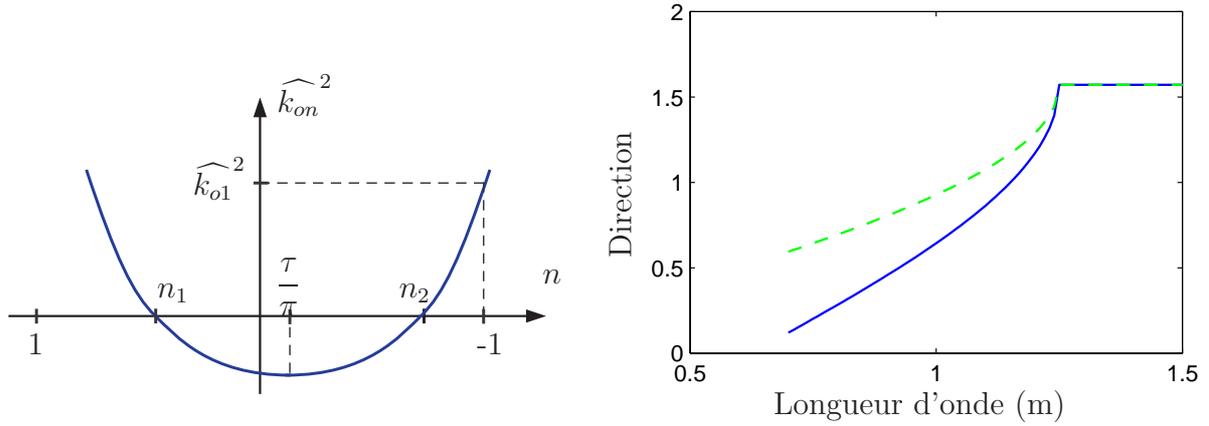


FIG. A.6 – Évolution du nombre d'onde  $\widehat{k}_{on}^2$  (à gauche) et direction maximale admissible (à droite avec Shannon --, évanescent —)

Cette condition restreint l'angle de propagation seulement si  $\lambda < 2B$  (longueurs d'onde très courtes) comme pour le critère de Shannon mais la restriction est ici plus sévère ( $\frac{\lambda-B}{B} < \frac{\lambda}{2B}$ ), comme le montre la figure A.6 à droite. Pour une gamme de longueurs d'onde usuelles, supérieures à 1.5 m, la segmentation ne vient pas modifier le champ de vagues progressif lointain.

Il faut également vérifier que la longueur d'atténuation des modes évanescents soit faible, par rapport à la profondeur par exemple, comme on l'a fait pour les modes évanescents en continu. Le premier mode concerné sera  $n = 1$ , dont la longueur d'atténuation est définie par

$$\widehat{\delta}_{o1} = \frac{1}{\widehat{k}_{o1}} = \frac{B}{\sqrt{(2\tau - 2\pi - kB)(2\tau - 2\pi + kB)}}$$

La figure A.7 donne la longueur d'atténuation du mode évanescent  $n = 1$  pour quatre longueurs d'onde usuelles. On constate que ces longueurs sont plus faibles que pour les modes évanescents obtenus en houle droite qui étaient les plus longs à s'amortir.

Si  $n_2 \approx 1$  (toujours avec  $n_2 < 1$ ), alors on a intérêt à se placer assez loin du seuil  $\sin \theta < (\lambda - B)/B$ . Près du seuil, la longueur d'atténuation pourra être grande (*i.e.*  $\widehat{k}_{o1}$  faible).

Les deux conditions trouvées, par le critère de Shannon et pour éviter un mode parasite progressif, ne concernent que les très courtes longueurs d'onde et dépendent de la direction de propagation ; pour une houle droite, les conditions sont vérifiées, c'est-à-dire que la largeur des volets n'a aucune influence, ce à quoi on s'attend bien évidemment.

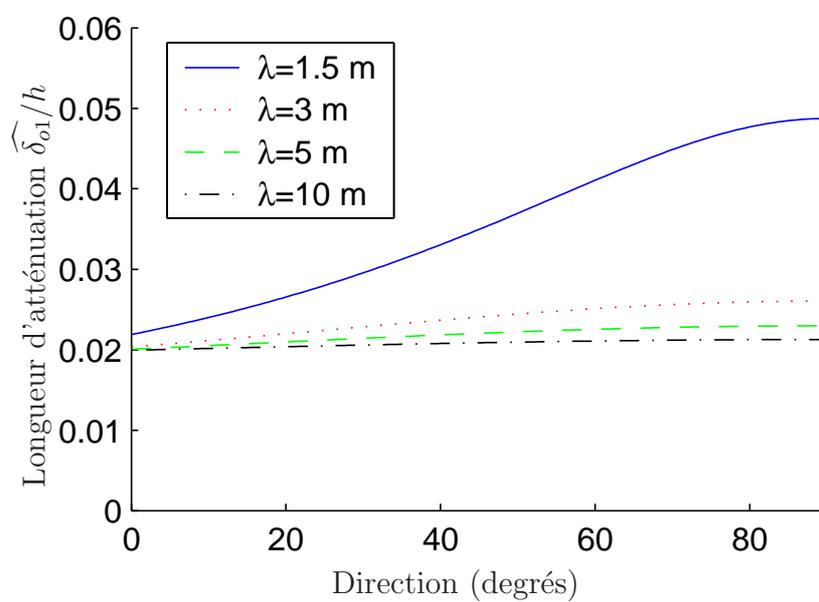


FIG. A.7 – Longueur d'atténuation du premier mode évanescent pour quatre longueurs d'onde



# Annexe B

## Analyse statistique

On rappelle ici la définitions des moments statistiques ainsi que les formules de calcul utilisées ( $E[\cdot]$  désigne l'espérance mathématique).

$$\bar{\eta} = E[\eta] = \frac{1}{N} \sum_n \eta_n$$

$$\mu_2 = E[(\eta - \bar{\eta})^2] = \frac{1}{N-1} \sum_n (\eta_n - \bar{\eta})^2$$

$$\mu_3 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} m_3$$

$$\mu_4 = \frac{N(N^2 - 2N + 3)m_4 - 3N(2N - 3)m_2^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}$$

avec  $m_k = \frac{1}{N} \sum_n (\eta_n - \bar{\eta})^k$  le moment d'ordre  $k$  autour de la moyenne.



# Annexe C

## Analyse de Fourier

Soit un signal périodique  $x(t) = \cos 2\pi ft$  qu'on mesure entre  $t = 0$  et  $t = T_a$ . On cherche à quantifier l'erreur commise sur le module et la phase obtenues à partir de la Transformée de Fourier Discrète du signal, suivant qu'on sélectionne ou non un nombre entier de période. On considère pour l'instant l'effet de la durée finie  $T_a$  du signal<sup>1</sup>. On s'intéresse aux coefficients de Fourier complexes

$$\underline{Y}_n = \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} x(t) e^{-2i\pi nt/T_a} dt$$

Le signal qu'on a mesuré est  $y(t) = \Pi_{T_a}(t) x(t)$  où  $\Pi_{T_a}$  est une fonction porte valant 1 entre  $t = 0$  et  $t = T_a$  et 0 ailleurs. On peut calculer la TF continue de  $y$  de manière simple et la relier ensuite aux coefficients de Fourier. Elle vaut

$$\underline{\hat{Y}}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \underline{\hat{\Pi}}_{T_a} * \underline{\hat{X}}(\nu)$$

où  $*$  désigne le produit de convolution. On sait que

$$\underline{\hat{\Pi}}_{T_a}(\nu) = 2T_a \operatorname{sinc}(\nu T_a) e^{-i\pi\nu T_a}$$

La fonction sinus cardinal est définie par  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  et le terme de phase provient du fait que la fonction porte  $\Pi_{T_a}(t)$  est centrée en  $t = T_a/2$ . De plus, on a

$$\underline{\hat{X}}(\nu) = \delta(\nu - f)$$

d'où pour tout  $n$  entier :

$$\underline{Y}_n = \frac{1}{T_a} \underline{\hat{Y}}(\nu = \frac{n}{T_a}) = \operatorname{sinc}(n - fT_a) e^{-i\pi(n-fT_a)}$$

Considérons tout d'abord qu'on a choisi un nombre entier de périodes, *i.e.* on a  $f = \frac{m}{T_a}$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . On trouve alors  $\underline{Y}_n = 0$  pour tout entier  $n$  sauf pour  $n = m$  où  $\underline{Y}_m = 1$ . Un exemple est donnée sur la figure C.1 à gauche, avec  $T_a = 5$  et  $m = 5$ . Grâce à la sélection du nombre entier de période, on résout parfaitement la fréquence, l'amplitude et la phase du signal périodique à analyser.

---

1. On rappelle aussi que l'échantillonnage en temps du signal implique des précautions à prendre entre la fréquence d'échantillonnage et les fréquences présentes dans le signal (critère de Shannon). On suppose ici ce critère vérifié *i.e.* l'absence de repliement de spectre.

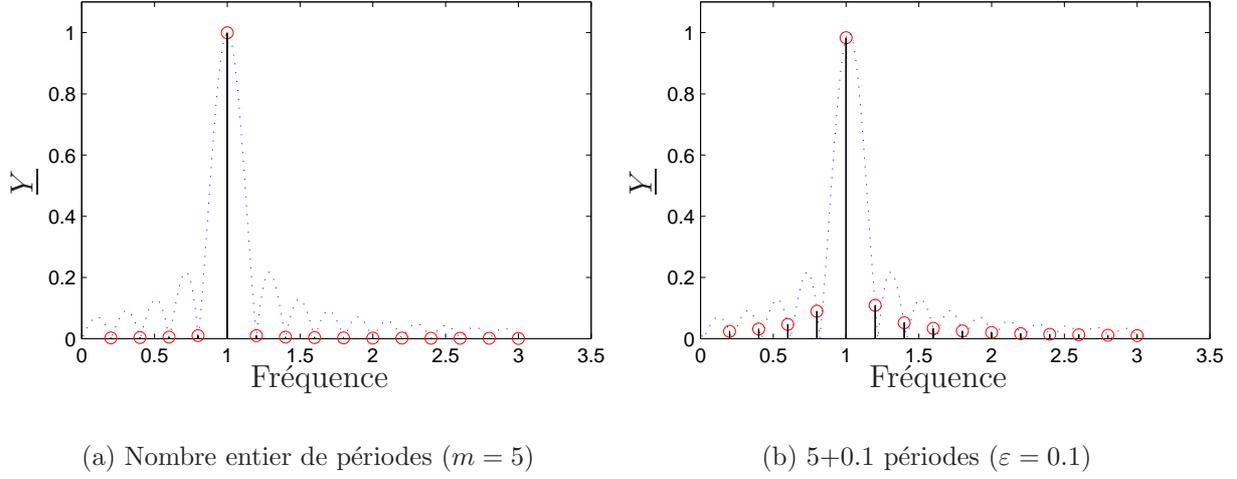


FIG. C.1 – Allure de  $\hat{Y}$  en pointillés et valeurs de  $\tilde{Y}[n]$  (ronds), pour  $T_a = 5$  et  $m = 5$

Considérons maintenant qu'on a choisi un nombre presque entier de période, *i.e.* on pose  $f = \frac{m-\varepsilon}{T_a}$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon \ll 1$ . On a

$$\underline{Y}_m = \text{sinc}(\varepsilon) e^{-i\pi\varepsilon}$$

En développant le module de  $\underline{Y}_m$  pour  $\varepsilon \ll 1$ , on trouve que l'erreur sur le module vaut  $\frac{(\pi\varepsilon)^2}{6}$  et l'erreur sur la phase  $\varepsilon$ . Il s'agit des erreurs qu'on fait en regardant le module et la phase du pic de fréquence. La même figure C.1 montre à droite cette fois, le même exemple que précédemment avec cette fois  $\varepsilon = 0.1$ . On constate que l'amplitude du pic est sous-évaluée. On remarque aussi que l'amplitude des fréquences adjacentes est non nulle. En effet, pour  $n \neq m$ , on a

$$\underline{Y}_n = \text{sinc}(n - m + \varepsilon) e^{-i\pi(n-m+\varepsilon)}$$

Cette fois, l'erreur sur le module vaut  $\frac{\varepsilon}{n-m}$  et sur la phase  $\pm\varepsilon$ . Si on regarde par exemple le premier harmonique, *i.e.*  $f' = 2f$  ( $n = 2m$ ), on obtient une erreur sur l'amplitude  $\frac{\varepsilon}{m}$ .

Pratiquement, on a une incertitude de mesure  $\Delta t$  lorsqu'on sélectionne  $m$  périodes du signal, soit  $mT = T_a \pm \Delta t$  d'où  $T = \frac{T_a}{m} \pm \frac{\Delta t}{m}$ . L'incertitude sur la mesure de la période vaut  $\frac{\Delta t}{m}$  et diminue lorsqu'on augmente le nombre  $m$  de périodes sélectionnées. Si l'on s'intéresse maintenant à l'incertitude sur le module et la phase du signal, l'incertitude en temps est reliée au petit paramètre  $\varepsilon$  par  $\varepsilon = \Delta t/T$ . Les erreurs sur le module et la phase, respectivement  $\frac{(\pi\varepsilon)^2}{6}$  et  $\varepsilon$  sont cette fois indépendantes du nombre  $m$  de périodes sélectionnées. L'interprétation est que lorsqu'on augmente le nombre  $m$  de périodes sélectionnées, la fréquence  $f_m = \frac{m}{T_a}$  d'analyse se rapproche bien de la fréquence réelle  $f$  mais la largeur du sinus cardinal (courbe en pointillé sur la figure C.1) se réduit d'autant, si bien que les erreurs commises sur l'amplitude et la phase restent constantes.

# Annexe D

## Volumes et énergies numériques

On donne ici la décomposition du volume et de l'énergie effectuée lors du contrôle de la conservation de ces deux grandeurs. On étudie le système composé du fluide contenu dans le bassin. On note  $D$  le domaine fluide,  $S$  sa surface et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure. Dans les expressions suivantes, toutes les grandeurs ont été adimensionnalisées à partir de la profondeur  $h$  et de l'accélération de la gravité  $g$ . Les énergies ont également été normalisées par la densité  $\rho$ .

### D.1 Volumes

Le volume du domaine fluide  $D$  est constant au cours du temps et vaut :

$$\mathcal{V} = \int_D d\mathcal{V} = \int_{X(z,t)}^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz$$

Le domaine fluide est délimité par les parois du bassin (mobile dans le cas du batteur, fixes pour le fond, le mur opposé au batteur et les murs latéraux). On peut décomposer l'expression précédente en série de perturbation  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots$  et de Taylor en utilisant les développements des bornes d'intégration selon la cambrure<sup>1</sup>. Les conditions aux limites I.1.2 signifient que les parois fixes ou mobiles sont imperméables : le volume doit se conserver, et ce indépendamment à chaque ordre. À l'ordre zéro, le volume  $\mathcal{V}_0$  correspond au volume du bassin au repos<sup>2</sup> :

$$\mathcal{V}_0(t) = \int_{-1}^0 dz \int_0^L dx = L$$

Au premier ordre, le volume s'écrit

$$\mathcal{V}_1(t) = - \int_{-1}^0 X_1(z,t) dz + \int_0^L \eta_1(x,t) dx \quad (\text{D.1})$$

---

1. On peut anticiper légèrement en notant que le mouvement batteur  $X(z,t)$  intervient dans la borne inférieure de l'intégrale sur  $x$  : un signe moins accompagnera les développements en série de perturbation de cette borne aussi bien pour le volume que pour les énergies, alors qu'un signe plus accompagne l'élévation  $\eta$ .

2. Pour plus de clarté, les expressions de volume sont données dans un bassin en deux dimensions. En trois dimensions, il convient de rajouter à tous les termes de volume une intégration selon la direction transverse  $y$ . Cette remarque tient aussi pour la partie D.2 sur les énergies.

Le premier terme de (D.1) correspond au volume déplacé par le batteur (représenté en gris foncé sur la figure D.1) ; il fait varier le niveau d'eau dans le bassin<sup>3</sup>, variation représentée par le second terme de (D.1). Au second ordre, le volume s'exprime par

$$\mathcal{V}_2(t) = - \int_{-1}^0 X_2(z,t) dz - X_1(0,t) \eta_1(0,t) + \int_0^L \eta_2(x,t) dx \quad (\text{D.2})$$

Près du batteur, la variation de volume est liée cette fois à la fois au mouvement second ordre du batteur éventuel (premier terme de (D.2), lors de la suppression des ondes libres par exemple) et à un second terme, croisé, correspondant au volume déplacé par le mouvement premier ordre au-dessus du niveau moyen. Ce dernier terme appelé *de coin* par la suite (sans aucun lien avec les points anguleux en méthode intégrale), est représenté en gris clair sur la figure D.1.

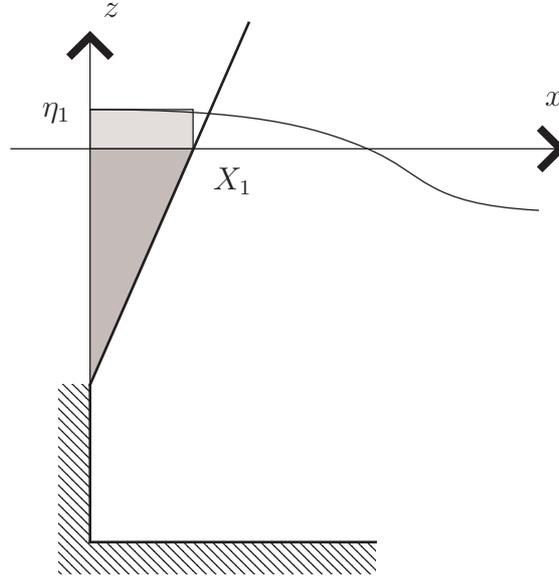


FIG. D.1 – Schéma descriptif des volumes

## D.2 Énergies

L'évolution de l'énergie pour le volume fluide  $D$  exprime la conversion du travail des forces de pressions sur les parois mobiles en énergie cinétique et potentielle conformément au théorème de l'énergie cinétique. L'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie potentielle  $E_p$  (de pesanteur) s'expriment par :

$$E_c = \int_D \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 d\mathcal{V} = \int_D \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 d\mathcal{V} \quad \text{et} \quad E_p = \int_D z d\mathcal{V} \quad (\text{D.3})$$

L'intégrale volumique pour  $E_c$  se transforme en intégrale surfacique :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_S \phi \tilde{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n} dS$$

3. La solution analytique nous en dit un peu plus : ce sont les modes évanescents qui traduisent cette variation du niveau d'eau ; elle est par conséquent locale, confinée près du batteur.

Sur les murs latéraux et le fond, cette intégrale disparaîtra car la vitesse normale est identiquement nulle. Il restera à intégrer sur les surfaces mobiles du domaine, à savoir la paroi du batteur et la surface libre.

Dans la suite, l'énergie potentielle sera comptée avec l'énergie potentielle du bassin au repos comme référence et s'écrit, après une séparation lorsque c'est possible des intégrations en  $x$  et en  $z$  :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \eta^2(x,t) dx - \int_{-1}^0 X(z,t) z dz - \int_0^X \int_0^\eta z dx dz$$

On reconnaît ici le premier terme qui apparaît également en milieu ouvert. Les deux autres termes sont spécifiques au cas du batteur. L'énergie mécanique  $E$  est la somme de ces deux énergies  $E = E_c + E_p$ . Elle est nulle au démarrage du batteur d'après notre choix de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur. Ensuite elle sera égale au travail des forces de pression à la surface du domaine fluide. La puissance  $d\mathcal{P}$  de la force de pression sur un élément de surface  $dS$  de la paroi du domaine fluide s'écrit  $d\mathcal{P} = \mathbf{df} \cdot \mathbf{V} = (-p \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{V}$ . Le travail  $W$  des forces de pression s'écrit donc :

$$W = - \int_0^t \int_S d\mathcal{P} dt = - \int_0^t \int_S p \tilde{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n} dS dt$$

La vitesse normale  $\tilde{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n}$  sur les frontières du domaine est donnée par les conditions aux limites dans le système (I.2.3), sur la surface libre et le batteur au premier ordre et au second ordre (I.2.4) et la pression  $p$  par la relation de Bernoulli (I.2.1) et (I.2.2). On s'attend à vérifier le théorème de l'énergie cinétique à chaque ordre séparément. On décompose à nouveau l'énergie mécanique et travail en ordres  $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$  et  $W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$ . L'ordre zéro est ici absent car les intégrands sont d'ordre supérieur ou égal à un. À l'ordre un, le bilan d'énergie est assez simple ; l'énergie cinétique, terme quadratique, est nulle. On trouve alors que la variation d'énergie potentielle (première intégrale de (D.4)) est compensée par le travail de la force de pression hydrostatique sur le batteur mobile (deuxième intégrale de (D.4)), effectué entre 0 et  $t$  :

$$E_1 = E_p^1 = - \int_{-1}^0 X_1(z,t) z dz = W_1 = - \int_0^t \int_{-1}^0 \frac{\partial X_1}{\partial t} z dz dt \quad (\text{D.4})$$

Numériquement, l'énergie mécanique est calculée à chaque pas de temps ainsi que la puissance des forces de pression. L'énergie est ensuite comparée à l'intégration en temps de la puissance des forces de pression. Cette intégration est réalisée par un schéma simple, décentré d'ordre un  $W^n = W^{n-1} + \frac{1}{2}(\mathcal{P}^{n-1} + \mathcal{P}^n)\Delta t$  avec  $\mathcal{P}$  la puissance des forces de pression (méthode des trapèzes entre  $t^{n-1}$  et  $t^n$ ).

Aux ordres supérieurs, l'énergie cinétique n'est plus nulle. Ainsi, à l'ordre deux, on a cette fois :

$$\begin{aligned} E_2 = E_{c2} + E_{p2} &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \phi_1(0,z,t) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \phi_1(x,0,t) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \eta_1^2(x,t) dx - \int_{-1}^0 X_2(z,t) z dz \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Les deux premières intégrales de (D.5) donnent l'énergie cinétique (intégration sur respectivement le batteur et la surface libre) et les deux dernières représentent l'énergie potentielle

de pesanteur. Les termes deux et trois, correspondant à l'énergie cinétique et potentielle sur la surface libre apparaissent de la même manière si l'on modélise l'océan ouvert alors que le premier terme d'énergie cinétique sur le batteur et le terme d'énergie potentielle en  $X_2$  sont spécifiques au cas du bassin. Le travail des forces de pression intervient au niveau du batteur et de la plage absorbante (l'absorption numérique mise en œuvre est équivalente à une pression proportionnelle à la vitesse normale) :

$$W_2 = - \int_0^t \left[ \int_{-1}^0 \frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz + \int_{-1}^0 \frac{\partial X_2}{\partial t} z dz + \int_0^L \nu(x) \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 dx \right] dt \quad (D.6)$$

En terme de bilan, à nouveau l'énergie mécanique  $E_2$  évaluée grâce à (D.5) à l'instant  $t$  doit être égale au travail  $W_2$  évalué lui par (D.6). Ce travail se compose de trois termes. Le premier correspond à l'apport<sup>4</sup> d'énergie par le batteur. Le second est similaire au travail  $W_1$  : il s'agit du travail des forces de pression hydrostatique dû au mouvement au second ordre. Enfin, le dernier terme, dont l'intégrand est toujours positif représente la diminution de l'énergie au niveau de la plage.

Au troisième ordre, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_{p3} = \int_0^L \eta_1(x,t) \eta_2(x,t) dx - \frac{1}{2} \eta_1^2(0,t) X_1(0,t) \quad (D.7)$$

Le premier terme est semblable à celui qu'on trouve en milieu ouvert. On retrouve ensuite un terme de coin qu'on peut réécrire  $\frac{1}{2} \eta_1 X_1 \eta_1$  en  $x = 0$  et  $z = 0$  : il correspond à l'énergie potentielle moyenne du volume de fluide au niveau du batteur (surface gris clair sur la figure D.1). L'énergie cinétique est décomposée en un terme sur la surface libre, un terme sur le batteur et un terme de coin. Celui-ci vaut :

$$E_{c3}\{coin\} = -\frac{1}{2} \eta_1 \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{1}{2} X_1 \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}$$

en  $x = 0$  et  $z = 0$ . Le terme sur la surface libre (SL) semblable à ce qui se passe en milieu ouvert vaut lui :

$$E_{c3}\{SL\} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \eta_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 + \eta_1 \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - \phi_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right] dx$$

Le terme sur le batteur (B) est identique à l'opposé du précédent en changeant  $\eta_1$  par  $X_1$ , en intervertissant les dérivées en  $x$  et  $z$  et en intégrant sur le batteur pour  $z = -1$  à  $0$  :

$$E_{c3}\{B\} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left[ X_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + X_1 \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \phi_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] dz$$

Le travail des forces de pression se décompose aussi en trois termes. Le terme de coin s'écrit, avec  $x = 0$  et  $z = 0$  :

$$W^3\{coin\} = - \int_0^t \eta_1 \frac{\partial X_1}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \eta_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) dt - \nu(0) \int_0^t X_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 dt$$

4. Dans le cas d'une houle régulière, le mouvement du batteur et le potentiel au premier ordre sont en opposition de phase en  $x = 0$ . La valeur moyenne sur une période de  $\frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$  est négative et le travail moyen est positif :

$$- \int_{t_o}^{t_o+T} \int_{-1}^0 \frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz dt \geq 0$$

où le dernier terme est généralement nul car la plage absorbante s'arrête avant le batteur *i.e.*  $\nu(x = 0) = 0$ . Le terme sur la surface libre correspond à l'amortissement de la houle par la plage :

$$W^3\{SL\} = -2 \int_0^t \int_0^L \nu(x) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \left( \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) dx dt$$

Enfin, l'expression du travail des forces de pression sur la surface du batteur, celui qui correspond à la génération de la houle est :

$$W^3\{B\} = - \int_0^t \int_{-1}^0 \frac{\partial X_1}{\partial t} \left( \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 + X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) dz dt - \int_0^t \int_{-1}^0 \frac{\partial X_2}{\partial t} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz dt$$



# Annexe E

## Solution partielle au second ordre en régime stationnaire

Élévation de surface libre linéaire et second ordre

L'élévation de surface libre linéaire est décomposée en la superposition d'ondes élémentaires

$$\eta^{(1)} = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N \underline{a}_n e^{i(\omega_n t - k_n x)} \right]$$

où  $\underline{a}_n$  représente l'amplitude complexe de la composante  $n$ . La pulsation  $\omega_n$  de chaque composante est imposée par le mouvement du batteur, et le nombre d'onde correspondant obtenu par la relation de dispersion linéaire  $\omega_n^2 = gk_n \tanh k_n h$ .

L'élévation de surface libre liée au second ordre en série de perturbation s'écrit de manière compacte comme une double somme

$$\eta^{(2)} = \sum_{m \geq n} \underline{a}_m \underline{a}_n^\pm G_{mn}^\pm e^{i((\omega_m \pm \omega_n)t - (k'_m \pm k'_n)x)} \quad (\text{E.1})$$

avec  $\underline{a}_n^+ = \underline{a}_n$  et avec  $\underline{a}_n^-$  son conjugué. On peut la décomposer en quatre termes : constant, de Stokes, somme (plus) et différence (moins) :

$$\eta^{(2)} = \eta_c + \eta_s + \eta_+ + \eta_-$$

Les deux premières composantes  $\eta_c$  et  $\eta_s$  correspondent à l'interaction des ondes élémentaires premier ordre avec elles-mêmes Il s'agit des termes diagonaux dans (E.1).

$$\begin{aligned} \eta_c &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N G_{nn}^- |\underline{a}_n|^2 \right] \\ \eta_s &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N G_{nn}^+ \underline{a}_n^2 e^{2i(\omega_n t - k_n x)} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_{nn}^- &= -\frac{k_n}{4T_n(1+S_n^2)} \\ G_{nn}^+ &= \frac{k_n}{4T_n} \left( 2 + \frac{3}{S_n^2} \right) \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{cases} T_n = \tanh k_n h \\ S_n = \sinh k_n h \end{cases}$$

Les deux dernières composantes  $\eta_+$  et  $\eta_-$  correspondent aux interactions somme et différence entre deux ondes élémentaires différentes.

$$\eta_{\pm} = \operatorname{Re} \left[ \sum_{m>n} G_{mn}^{\pm} \underline{a}_m \right] \frac{a_n^{\pm} e^{i((\omega_m \pm \omega_n)t - (k_m \pm k_n)x)}}{\quad} \quad (\text{E.2})$$

où

$$2gG_{mn}^{\pm} = \omega_m^2 + \omega_n^2 + (\omega_m \omega_n (1/(T_m T_n) \mp 1) D_{mn}^{\pm\pm} + (\omega_m \pm \omega_n) (\omega_m^3/S_m^2 \pm \omega_n^3/S_n^2)) / D_{mn}^{\pm-}$$

$$D_{mn}^{+\pm} = (\omega_m + \omega_n)^2 \pm g(k_m + k_n) \tanh(k_m + k_n)h$$

$$D_{mn}^{-\pm} = (\omega_m - \omega_n)^2 \pm g|k_m - k_n| \tanh|k_m - k_n|h$$

# Annexe F

## Étalonnage dynamique des sondes

Une campagne d'étalonnage dynamique [17] a été menée avant la campagne de validation de la méthode de suppression des ondes libres, dans le but de sonder l'influence de la flexion des sondes sur les mesures à la fréquence double. Les sondes sont constituées de deux tiges métalliques parallèles trempant dans l'eau. La hauteur d'eau est donnée par la mesure de la résistance entre les deux tiges (sondes résistives). La partie droite de la figure F.1 montre l'orientation de la flexion considérée. Pour cela, trois sondes ont été étudiées. Ces sondes ont

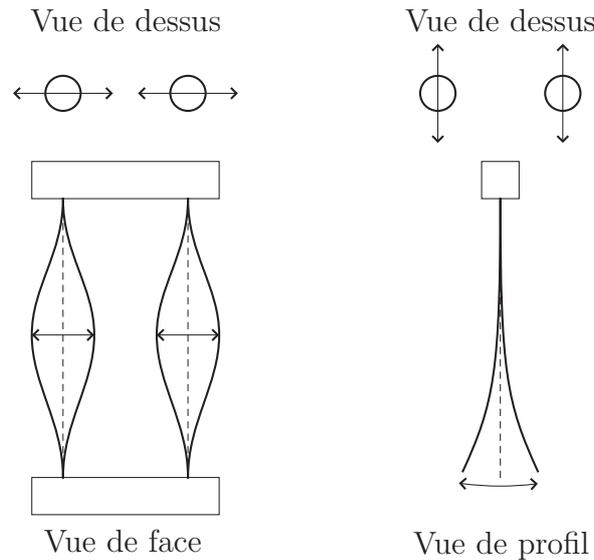


FIG. F.1 – *Vibration (à gauche) et flexion (à droite) des sondes*

été fixées à l'ensemble Tripode + Hexapode permettant d'agiter les sondes dans l'eau d'un mouvement contrôlé. L'idée est de reproduire le mouvement relatif de la sonde par rapport à l'eau, et de quantifier, pour un mouvement sinusoïdal à la fréquence  $f$ , l'amplitude parasite mesurée à la fréquence double. L'effort de traînée prédominant<sup>1</sup> subi par la sonde (en phase

1. Le nombre de Keulegan Carpenter  $K_c = 2\pi \frac{a}{D}$  est de l'ordre de 500 pour les amplitudes  $a$  élevées de houle et les diamètres  $D$  usuels des sondes. L'effort de traînée est de la forme, en profondeur infinie,

$$f = \frac{1}{2} \rho C_D D |U| U \simeq \frac{1}{2} \rho C_D D (a\omega)^2 \frac{8}{3\pi} e^{2kz} \cos(\omega t + \phi)$$

avec la houle) provoque une flexion de la sonde qui se traduit par une variation de la hauteur immergée en  $2\omega$ . Cette variation vient perturber la mesure des ondes du second ordre en  $2\omega$  également. Les mesures ont été effectuées pour cinq longueurs d'onde entre 1 et 8 m, et quatre cambrures (1, 2, 4 et 8 %).

Avec des mouvements orbitaux circulaires

$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin(\omega t + \phi) \\z(t) &= a \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

représentant le mouvement relatif de la sonde et de la surface libre, on a pu quantifier l'erreur de mesure sur la fréquence et l'amplitude du fondamental  $\omega$  et l'amplitude parasite du premier harmonique  $2\omega$ . Ces tests révèlent un très bon comportement des sondes au fondamental, avec des erreurs toujours inférieures à 0.5 et 2 % respectivement sur la fréquence et l'amplitude, sur l'ensemble des cambrures testées. En revanche, l'amplitude du premier harmonique s'est avérée importante. Les essais réalisés à faible cambrure montrent que l'amplitude parasite est de l'ordre de l'amplitude de l'onde liée. À cambrure plus élevée (4 %), l'erreur moyenne sur 5 longueurs d'onde varie entre 10 et 20 % suivant les sondes. Il faut toutefois noter que les profils de vitesse sur les sondes étaient uniformes lors de cet étalonnage, alors que les profils en houle réels décroissent avec la profondeur.

Avec des mouvements orbitaux en  $\omega$  et  $2\omega$  représentant une houle premier plus second ordre (amplitude  $\frac{1}{2}ka^2$  en  $2\omega$ ), l'erreur sur l'évaluation de l'amplitude en  $2\omega$  est légèrement plus faible en moyenne, entre 5 et 10 %. Là encore, les profils uniformes employés lors des essais provoquent une flexion plus importante que lors du passage de la houle réel.

---

La vitesse maximale  $a\omega$  du courant local ressentie par la sonde donne un régime sub-critique d'où un coefficient de traînée  $C_D$  proche de 1.2.

# Annexe G

## Vibrations des sondes

Lors des essais de houle, on observe très nettement dans certains la mise en vibration des sondes au passage des crêtes. Le mode de vibration concerné est dessiné sur la gauche de la figure F.1. Cette vibration apparaît dans les fichiers de mesure comme une oscillation de haute fréquence localisée sur les crêtes : la figure donne un exemple pour une sonde SEREPS. Ces

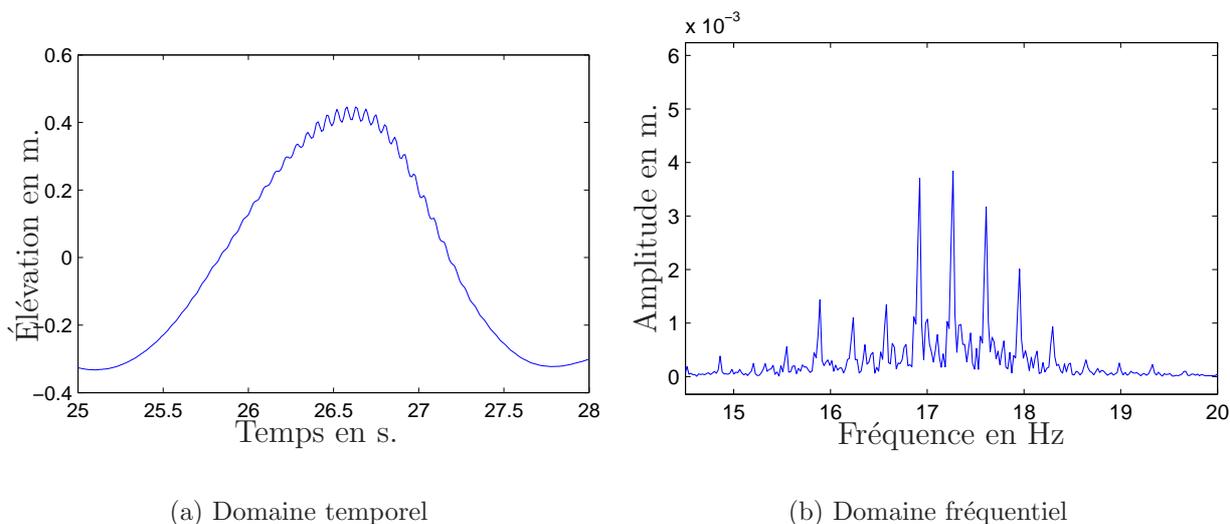


FIG. G.1 – *Exemple de vibration sur une sonde SEREPS (houle régulière de fréquence 0.34 Hz et 17 cm d’amplitude)*

oscillations possèdent une haute fréquence bien distincte de celle de la houle et pourront *a priori* être éliminées par filtrage. C’est ce que confirme une analyse fréquentielle<sup>1</sup> du signal : on peut observer à droite sur la figure G.1 autour de 17 Hz un motif en fréquence dû à la modulation liée au passage des crêtes (courant ressenti par la sonde insuffisant et moins bien placé dans les creux). Chacune des tiges de la sonde est encastrée à ses deux extrémités. Un calcul de la

---

1. La fréquence d’acquisition de 100 Hz a permis d’enregistrer correctement cette oscillation autour de 17 Hz sans souci de repliement

fréquence du premier mode propre de vibration d'une telle tige fournit par Luc Verdure donne

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{4.73}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

avec  $L$  la longueur de la tige,  $S$  sa section,  $\rho$  la densité du métal,  $E$  le module d'Young et  $I$  le moment d'inertie<sup>2</sup>. L'application numérique pour les trois sondes utilisées (inox :  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$ ) donne :

Sondes	3 mm	SEREPS	5mm
Diamètre extérieur (mm)	3	4	5
Diamètre intérieur (mm)	0	2	0
Section (mm <sup>2</sup> )	7.1	9.4	19.6
Moment d'inertie (mm <sup>4</sup> )	4.0	11.8	30.7
Fréquence (Hz)	14	19	23

TAB. G.1 – *Fréquences du premier mode de vibration des sondes*

Les modes suivants se situent au delà de 40 Hz. Durant la campagne d'étalonnage dynamique, les fréquences de vibrations mesurées sont de On retrouve bien des fréquences mesurées

Sondes	3 mm	SEREPS	5mm
Fréquence (Hz)	20	17	23

TAB. G.2 – *Fréquences mesurées de vibration des sondes*

de l'ordre de grandeur des valeurs théoriques. Les différences observées peuvent provenir à la fois du fait que les sondes sont immergées à mi-hauteur dans l'eau ce qui modifie leur inertie, et qu'un couplage mécanique peut intervenir entre les deux tiges.

Ces oscillations ne sont pas gênantes pour l'analyse du signal aux fréquences de houle car leur fréquence est bien supérieure à celle de la houle. On peut vouloir les éliminer pour examiner visuellement les signaux de houle : dans ce cas, le traitement appliqué aux signaux est un filtrage numérique *parfait* de fréquence de coupure  $f_c = 5 \text{ Hz}$ . Un tel filtrage consiste à annuler tous les coefficients de Fourier au dessus de  $f_c$  sans toucher aux fréquences inférieures. Ni l'amplitude et ni la phase de ces fréquences ne sont modifiées par ce filtrage.

Lors de mesures de houle, les vibrations apparaissent différemment suivant les caractéristiques des vagues et suivant les sondes employées. Dans certains cas, ces vibrations sont observables au niveau des crêtes seulement, comme sur la figure G.1 pour la sonde SEREPS ; dans d'autres cas elles sont présentes à la fois dans les crêtes et dans les creux, notamment pour la sonde 3mm de plus faible diamètre.

2. Avec pour une tige creuse de diamètres extérieur  $D$  et intérieur  $d$  les expressions suivantes pour  $S$  et  $I$

$$S = \pi \frac{D^2 - d^2}{4} \quad \text{et} \quad I = \pi \frac{(D^2 - d^2)(D^2 + d^2)}{64}$$

## Annexe H

# Température de l'eau et coefficient d'étalonnage

Il s'agit de savoir un peu comment réagissent les sondes en fonction de la température de l'eau. Cette étude répond aux questions soulevées lors des essais de houles irrégulières : on s'est aperçu que le niveau moyen baissait sur les sondes résistives utilisées (sondes Sereps et sondes fabriquées au Laboratoire). Comme indiqué dans l'article de Johannessen et Swan [70], on pense que le brassage important pour de tels essais homogénéise la température de l'eau auparavant stratifiée au repos. La baisse de température de l'eau autour de la sonde, à la surface, modifie la réponse de cette dernière. On essaie de quantifier cela dans ce qui suit.

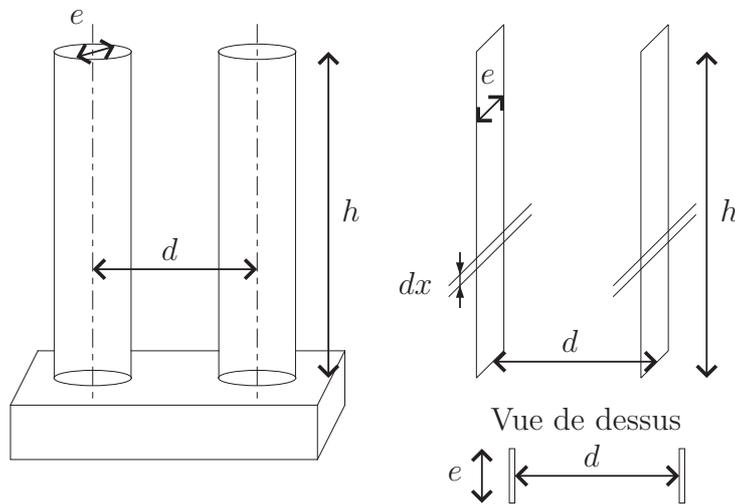


FIG. H.1 – Schéma des tiges immergées et modèle simplifié

On cherche donc à évaluer la résistance entre les deux tiges de diamètre  $e$ , écartées d'une distance  $d$  (inter-axes) et immergées dans l'eau (longueur immergée  $h$ ). On modélise les tiges cylindriques par deux plaques planes parallèles de largeur  $e$ , d'écartement  $d$  et d'immersion  $h$ .

La résistance  $dR$  ou la conductance  $dS$  dans une tranche horizontale d'épaisseur  $dx$  valent

$$dR = \rho \frac{d}{e dx} \quad \text{et} \quad dS = \frac{e dx}{\rho d}$$

Les tranches sont en parallèle donc les conductances s'ajoutent :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{R} = \int_0^h d\mathcal{S} = \frac{e}{\rho d} \int_0^h dx = \frac{eh}{\rho d}$$

Le conditionneur est conçu pour fournir une tension proportionnelle  $U$  à la conductance  $\mathcal{S}$ , soit  $U = \alpha\mathcal{S}$ . La constante  $\alpha$  ne dépend que du réglage du conditionneur. On obtient alors

$$h_m = \rho\mathcal{S}\frac{d}{e} = \frac{\rho d}{\alpha e}U = sU$$

où  $s = \rho d/\alpha e$  est la sensibilité de la sonde, qu'on établit lors de l'étalonnage statique ( $s$  est le coefficient d'étalonnage de la sonde). On voit que si la conductivité de l'eau varie avec la température, le coefficient d'étalonnage varie lui aussi avec elle.

Des manipulations ont été réalisées par Bruno Pettinotti sur les sondes fabriquées au Laboratoire en utilisant des conditionneurs Churchill et un bain thermostaté. Lors de ces essais, l'immersion, l'écartement et le diamètre des tiges étaient fixés. Le gain du conditionneur est réglé à une température  $T_o = 46$  °C en annulant la tension de sortie. Comme le conditionneur indique toujours-10 V pour une sonde hors de l'eau, on en déduit que la sensibilité de la sonde vaut  $s_o = 180/10 = 18$  mm/V,  $h = 180$  mm étant la longueur immergée de la sonde.

À une autre température  $T_1 = 21$  °C, la tension de sortie est passée de 0 à -4 V : la sensibilité vaut maintenant  $s_1 = 180/6 = 30$  mm/V. Pour une large variation de température (25 °C), la variation de sensibilité est importante. Il faut plutôt regarder ce qui se passe pour des variations de température plus faibles, de l'ordre du degré Celsius. L'ensemble des mesures effectuées par Bruno Pettinotti montrent que la variation de tension évolue linéairement avec la température. On en déduit que la sensibilité de la sonde varie linéairement avec la température selon une formule du type :

$$s = s_o + \frac{T - T_o}{T_1 - T_o}(s_1 - s_o)$$

Autrement dit, le coefficient d'étalonnage  $s$  de la sonde évolue linéairement en fonction de la température. Lorsqu'on effectue l'étalonnage à une température  $T_o$ , on utilise le coefficient  $s(T_o)$  obtenu même si la température  $T$  change. L'élévation estimée est  $h_e = s(T_o)U$  alors que la vraie élévation réelle est  $h_r = s(T)U$ . L'élévation estimée est différente de la vraie hauteur d'eau : on a

$$h_e = \frac{s(T_o)}{s(T)} h_r$$

La pente  $p$  de la droite  $s = a + pT$ , qui vaut

$$p = \frac{s_1 - s_o}{T_1 - T_o} \simeq -0.48\text{mm/V/}^\circ\text{C}$$

est négative. Cela signifie que si la température  $T$  augmente, alors  $s(T) < s(T_o)$  d'où  $h_e > h_r$  : le niveau d'eau apparent  $h_e$  est plus élevé que le niveau d'eau réel.

On donne quelques exemples de valeurs numériques

- dans le cas du bassin au repos, si une sonde de 1 m de longueur est plongée à mi-hauteur (hauteur d'eau réelle 50 cm), alors si  $T$  varie de 1 °C, la hauteur d'eau mesurée  $h_e$  varie de 8 mm, soit 1.6 % d'erreur.
- dans le cas d'une houle de 60 cm de hauteur crête à creux, si  $T$  augmente de 1 °C, la crête est vue à 81.3 cm, le creux lui à 20.3 cm. La hauteur crête à creux mesurée vaut 61 cm soit 1.6 % d'erreur.

---

Les sondes SEREPS possèdent un dispositif de compensation (électrode implantée dans le pied en plastique ) pour les variations de conductivité. Les essais de houle irrégulière où l'on relève une variation du niveau moyen montrent que ce dispositif n'est peut-être pas bien réglé (la variation mesurée est cependant beaucoup plus faible que pour les sondes résistives sondes fabriquées au Laboratoire). Enfin, la variation de la sensibilité des sondes fabriquées au Laboratoire étant linéaire avec la température, une correction de cette sensibilité est envisageable. Par exemple si la température varie entre deux essais courts (et pendant lesquels la température peut être considérée constante), on peut ajuster la sensibilité en mesurant la température à chaque essai. En cours d'essai, une telle correction s'avère plus difficile, la sensibilité variant alors au cours du temps.



# Annexe I

## Instabilité de Benjamin-Feir

L'observation de l'évolution à grande distance du batteur d'une houle régulière montre la dégradation de celle-ci sous forme d'une modulation d'amplitude. Éventuellement, à distance encore plus grande, la modulation disparaît et ainsi de suite. Ce phénomène, connu sous le nom d'instabilité de Benjamin-Feir, est due aux non-linéarités d'ordre trois (Benjamin et Feir [7], Lake *et al.* [75], Melville [95], Tulin et Waseda [122]).

Si on considère une houle régulière, d'amplitude  $a$ , de fréquence  $f$  et de cambrure  $ka$  dont l'élévation linéaire s'écrit

$$\eta(x,t) = a \cos(2\pi f t - k x)$$

perturbée par deux bandes latérales de fréquence<sup>1</sup>  $f_{\pm} = f \pm \Delta f$ , d'amplitude faible  $b_{\pm} \ll a$  et de phase  $\phi_{\pm}$

$$\Delta\eta(x,t) = b_{\pm} \cos(2\pi f_{\pm} t - k_{\pm} x + \phi_{\pm})$$

alors on observe que l'amplitude des bandes latérales augmente exponentiellement lorsqu'on s'éloigne du batteur. En pratique, dans un bassin expérimental, ce sont les perturbations près du batteur qui excitent des fréquences adjacentes à la houle (vibrations des volets par exemple). Une étude théorique à l'ordre trois en profondeur infinie pour les perturbations longues ( $\Delta f \ll f$ ) montre que les perturbations telles que  $0 < \delta \leq \sqrt{2}ka$  sont instables (avec  $\delta = \Delta f/f$ ), et fournit le taux de croissance spatial  $\Omega_x$

$$\Omega_x = \frac{d \ln b_{\pm}}{dx} = k \delta \sqrt{2(ka)^2 - \delta^2}$$

La croissance est maximale pour les bandes latérales  $\delta = ka$  et le taux correspondant vaut  $\Omega_{max} = k(ka)^2$ . On obtient ainsi un ordre de grandeur de la distance à laquelle apparaît la modulation d'amplitude

$$L = \frac{1}{\Omega_{max}} = \frac{1}{k(ka)^2}$$

---

1. Si on pose  $k_{\pm} = k \pm \Delta k$ , la relation de dispersion donne  $\Delta k \simeq 2k\delta$  lorsque  $\delta \ll 1$ .



# Bibliographie

- [1] Yehuda AGNON et Harry B. BINGHAM. A non-periodic spectral method with applications to non linear water waves. *European Journal Mechanics B/ Fluids*, 18:527–534, 1999.
- [2] ANDONOWATI et E. VAN GROESEN. Maximal Temporal Amplitude, a new tool for deterministic extreme wave generation. Dans *Rogue Waves*, Brest, France, 2004.
- [3] T.E. BALDOCK et C. SWAN. Numerical calculations of large transient water waves. *Applied Ocean Research*, 16:101–112, 1994.
- [4] William J. D. BATEMAN, Chris SWAN et Paul H. TAYLOR. On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves. *Journal of Computational Physics*, 174:277–305, 2001.
- [5] William J. D. BATEMAN, Chris SWAN et Paul H. TAYLOR. On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionally spread wavefield. *Journal of Computational Physics*, 186:70–92, 2003.
- [6] Williams J.D. BATEMAN. *A numerical investigation of three-dimensional extreme water waves*. Thèse de Doctorat, Imperial College, University of London, Londres, Royaume-Uni, 2000.
- [7] T.B. BENJAMIN et J.E. FEIR. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:417–430, 1967.
- [8] Michel BENOÎT. Extensive comparison of directional wave analysis methods from gauge array data. Dans *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Ocean Wave Measurement and Analysis, WAVES'93*, pages 740–756, New Orleans, July 25-28 1993. ASCE.
- [9] Michel BENOÎT, Peter FRIGAARD et Hemming A. SCHÄFFER. Analysing multidirectional wave spectra: a tentative classification of available methods. Dans *Compte-rendu du Séminaire spécial AIRH sur les Vagues Multidirectionnelles et leurs Interactions avec des Ouvrages*, pages 131–158, San Fransisco, USA, août 1997.
- [10] Michel BENOÎT et Gérard GOASGUEN. Comparative evaluation of directional wave analysis techniques applied to field measurements. Dans *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE'99*, volume III, pages 87–94, Brest, June 1999.
- [11] Michel BENOÎT et Charles TEISSON. Laboratory comparison of directional wave measurement systems and analysis techniques. Dans *Proceedings of the 24<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, pages 42–56, Kobe, 1994. ASCE.
- [12] Félicien BONNEFOY, David LE TOUZÉ et Pierre FERRANT. Second order wavemaker theory: prediction and control of free waves. Dans *Proceedings of the 18<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, 2003.
- [13] Félicien BONNEFOY, David LE TOUZÉ et Pierre FERRANT. Generation of fully-nonlinear prescribed wave fields using a high-order spectral method. Dans *Proceedings of the 14<sup>th</sup>*

- International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE'04*, Toulon, France, mai 2004.
- [14] Félicien BONNEFOY. Analyse des champs de vagues 2D et 3D : étude bibliographique et mise en œuvre. Rapport de DEA, Laboratoire de Mécanique des Fluides – École Centrale de Nantes, 2001.
- [15] Félicien BONNEFOY. Génération de houle oblique et limitations en amplitude. Rapport interne, 5 pages, Laboratoire de Mécanique des Fluides – École Centrale de Nantes, octobre 2004.
- [16] Félicien BONNEFOY, David LE TOUZÉ et Pierre FERRANT. Étude numérique de la faisabilité de la génération de houles obliques au B600 avec un batteur latéral. Rapport d'Étude, 28 pages + dvd de données, Laboratoire de Mécanique des Fluides – École Centrale de Nantes, juillet 2004.
- [17] Félicien BONNEFOY et Pierre ROUX DE REILHAC. Étude partielle du comportement dynamique de trois sondes à houle. Influence de la flexion en houle régulière. Rapport interne, 32 pages, Laboratoire de Mécanique des Fluides – École Centrale de Nantes, octobre 2004.
- [18] Loïc BOUDET et Raymond COINTE. Analyse au second ordre de la houle générée en bassin. Dans *Compte-Rendu des Troisièmes Journées de l'Hydrodynamique*, pages 163–177, Grenoble, février 1991.
- [19] Loïc BOUDET et Olivier MÉNARD. Recette du batteur de la cuve à houle Roger Brard. Évaluation des performances en houle régulière. Rapport Interne E10420–A, Direction Générale de l'Armement, Bassin d'Essais des Carènes, Val de Reuil, France, 2000.
- [20] Loïc BOUDET et Jean-Phillipe PÉROIS. Nouvelles techniques de pilotage d'un batteur segmenté pour la génération de houle oblique. Dans *Compte-Rendu des Huitièmes Journées de l'Hydrodynamique*, ISSN 1161-1847, Nantes, France, 2001.
- [21] Carlo BRANDINI et Stephan T. GRILLI. Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT. Dans *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE'01*, volume 3, pages 124–131, Stavanger, Norvège, juin 2001.
- [22] Henrik BREDMOSE. *Deterministic modelling of water waves in the frequency domain*. Thèse de Doctorat, Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby, Danemark, novembre 2002.
- [23] J. BROSSARD, A. HEMON et E. RIVOALEN. Mesure de houle par une ou deux sondes mobiles. Dans *Compte-Rendu des Sixièmes Journées de l'Hydrodynamique*, pages 329–340, Nantes, février 1997.
- [24] J. BROSSARD, A. HEMON et E. RIVOALEN. Improved analysis of regular gravity waves and coefficient of reflexion using one or two moving probes. *Coastal Engineering*, 39:193–212, 2000.
- [25] Claudio CANUTO, M. Youssuff HUSSAINI, Alfio QUARTERONI et Thomas A. ZANG. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer series in computational physics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [26] John R. CHAPLIN. On frequency-focusing unidirectional waves. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 6(2):131–137, juin 1996.
- [27] Didier CLAMOND, Dorian FRUCTUS, John GRUE et Øyvind KRISTIANSEN. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part II: Generation and absorption. *Journal of Computational Physics*, juin 2004.
- [28] Didier CLAMOND et John GRUE. A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *Journal of Fluid Mechanics*, 447:337–355, 2001.

- 
- [29] Günther F. CLAUSS. Task-related rogue waves embedded in extreme seas. Dans ASME, éditeur, *Proceedings of the 21<sup>st</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE'02*, Oslo, Norvège, juin 2002.
- [30] Günther F. CLAUSS, Janou HENNIG, Christian E. SCHMITTNER et Walter L. KÜHNLEIN. Non-linear calculation of tailored wave trains for experimental investigations of extreme structure behaviour. Dans *Proceedings of the 22<sup>st</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE'04*, Vancouver, Canada, 2004.
- [31] Günther F. CLAUSS et Walter L. KÜHNLEIN. Transient wave packets - an efficient technique for seakeeping tests of self-propelled models in oblique waves. Dans *Proceedings of the 3rd International Conference on Fast Sea Transportation, FAST'95*, page 211, Lübeck - Travemünde, Allemagne, septembre 1995.
- [32] Alain H. CLÉMENT. Coupling of two absorbing boundary conditions for 2D time-domain simulations of free surface gravity waves. *Journal of Computational Physics*, 126:139–151, 1996.
- [33] Alain H. CLÉMENT. The spinning dipole: an efficient unsymmetrical numerical wavemaker. Dans *Proceedings of the 14<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, pages 29 – 32, Port Huron (MI), États-Unis, 1999.
- [34] Alain H. CLÉMENT et Luis GIL. Fully nonlinear numerical simulation of self and dual wave-wave interaction. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 9(4):264–271, 1999.
- [35] R. COINTE, B. MOLIN et P. NAYS. Nonlinear and second-order transient waves in a rectangular tank. Dans *Proceedings of the 1988 Behavior of Offshore Structural Systems Conference BOSS'88*, Trondheim, Norvège, 1988.
- [36] Giorgio CONTENTO, Riccardo CODIGLIA et Fabrizio D'ESTE. Nonlinear effects in 2D transient nonbreaking waves in a closed flume. *Applied Ocean Research*, 23:3–13, 2001.
- [37] Walter CRAIG et Catherine SULEM. Numerical simulation of gravity waves. *Journal of Computational Physics*, 108:73–83, 1993.
- [38] Robert A. DALRYMPLE. Directional wavemaker theory with sidewall reflection. *Journal of Hydraulic Research*, 27(1):23–24, 1989.
- [39] J.F. DALZELL. A note on finite depth second-order wave-wave interactions. *Applied Ocean Research*, 21:105–111, 1999.
- [40] Bénaouda DAOUD. *Génération et analyse de la houle aléatoire en bassin*. Thèse de Doctorat, Université de Nantes – École Centrale de Nantes, France, octobre 2001.
- [41] Paul C.A. DE HAAS. *Numerical simulation of nonlinear water waves using a panel method: domain decomposition and applications*. Thèse de Doctorat, Universiteit Twente, Twente, Hollande, octobre 1997.
- [42] Douglas G. DOMMERMUTH et Dick K.P. YUE. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 184:267–288, 1987.
- [43] P.E. DUNCAN et K.R. DRAKE. A note on the simulation and analysis of irregular nonlinear waves. *Applied Ocean Research*, 17:1–8, 1995.
- [44] Biésel F.. Wave machines. Dans *Proceedings of the First Conference on Ships and Waves*, 1954.
- [45] J.D. FENTON et M.M. RIENECKER. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 118:411–443, 1982.

- [46] Pierre FERRANT. Fully non-linear interactions of long-crested wave packets with a three-dimensional body. Dans *Proceedings of the 22nd ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 403–415, Washington, USA, août 1998.
- [47] Pierre FERRANT. Méthodes de reproduction déterministe d'états de mer non linéaires. Rapport d'étude, projet clarom "houdim", École Centrale de Nantes, décembre 2001.
- [48] Pierre FERRANT, Lionel GENTAZ, Bertrand ALESSANDRINI et David LE TOUZÉ. A potential / RANSE approach for regular water wave diffraction about 2D structures. *Ship Technology Research / Schiffstechnik*, 50(4):165–171, 2003.
- [49] Pierre FERRANT, Šime MALENICA et Bernard MOLIN. *Nonlinear water wave interaction*, Chapitre Chapter 3: Nonlinear Wave Loads and Runup on a Vertical Cylinder, pages 101–135. *Advances in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, 1999.
- [50] Christophe FOCESATO. *Modèles numériques pour les vagues et les ondes internes*. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 2004.
- [51] Bengt FORNBERG. *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, 1995.
- [52] Dorian FRUCTUS, Didier CLAMOND, John GRUE et Øyvind KRISTIANSEN. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: Free space problems. *Journal of Computational Physics*, juin 2004.
- [53] Pierre GAILLARD, Michel GAUTHIER et Holly FORREST. Method of analysis of random wave experiments with reflecting coastal structures. Dans *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, pages 204–220, Sydney, 1980. ASCE.
- [54] Y. GODA et Y. SUZUKI. Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments. Dans *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, volume 1, pages 828–845, Hawaï, 1976. ASCE.
- [55] Ludivine GOUGEON. Caractérisation de l'amortisseur de houle d'un bassin océanique. Rapport de stage, Laboratoire de Mécanique des Fluides – École Centrale de Nantes, 2002.
- [56] S.T. GRILLI et J. HORILLO. Numerical generation and absorption of fully nonlinear periodic waves. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(10):1060–1069, 1997.
- [57] Stephan T. GRILLI, Philippe GUYENNE et Frédéric DIAS. A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35(7):829–867, 2001.
- [58] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique Physique*. InterÉditions / CNRS Éditions, 1991.
- [59] Noriaki HASHIMOTO, Koji KOBUNE et Yutaka KAMEYAMA. Estimation of directional spectrum using the bayesian approach, and its application to field data analysis. Dans *Report of the Port and Harbour Research Institute*, volume 26, N. 5, pages 57–100, December 1987.
- [60] Noriaki HASHIMOTO, Toshihiko NAGAI et Tadashi ASAI. Extension of the maximum entropy principle method for directional wave spectrum estimation. Dans *Proceedings of the 24<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, pages 232–246, Kobe, 1994. ASCE.
- [61] Keyyong HONG et Shuxue LIU. The directional characteristics of breaking waves generated by the directional focusing in a wave basin. Dans ASME, éditeur, *Proceedings of the*

- 
- 21<sup>st</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE'02*, 28072, Oslo, Norvège, juin 2002.
- [62] Keyyong HONG, Eustorgio MEZA et Shuxue LIU. Energy dissipation and transfer in breaking waves generated by directional and multi-frequency focusing in deep water. Dans *Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Offshore and polar Engineering conference*, pages 299–305, Toulon, France, mai 2004.
- [63] Robert T. HUDSPETH, L.E. BORGMAN et B. SAMOSORN. Conditional simulation of laboratory waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 125(6):311–321, novembre 1999.
- [64] Robert T. HUDSPETH et Wojciech SULISZ. Stokes drift in two-dimensional wave flumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 230:209–229, 1991.
- [65] Steven A. HUGHES. *Physical models and laboratory techniques in coastal engineering*, volume 7 de *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific, 1993.
- [66] IFREMER. Qualification de la houle irrégulière: Analyse des essais. CLAROM Projet "Houle générée en bassin et dans les modèles numériques" R04HA99, Ifremer, 1999.
- [67] Michael ISAACSON. Measurement of Regular Wave Reflexion. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 117(6):553–569, novembre 1991.
- [68] Thomas B. JOHANNESSEN et Chris SWAN. Nonlinear transient water waves - part I. A numerical method of computation with comparisons to 2D laboratory data. *Applied Ocean Research*, 19:293–308, 1997.
- [69] Thomas B. JOHANNESSEN et Chris SWAN. Steep transient waves in a directionally spread sea. Dans Jun ZHANG, éditeur, *Proceedings of the 1998 International DTRC Symposium*, Houston, Texas, 1998.
- [70] Thomas B. JOHANNESSEN et Chris SWAN. A laboratory study of the focusing of transient and directionally spread surface water waves. *Proceedings of the Royal Society of London*, A(457):971–1006, 2001.
- [71] Thomas B. JOHANNESSEN et Chris SWAN. On the nonlinear dynamics of wave groups produced by the focusing of surface-water waves. *Proceedings of the Royal Society of London*, A(459):1021–1052, 2003.
- [72] C.H. KIM, A.H. CLÉMENT et K. TANIZAWA. Recent research and development of Numerical Wave Tanks – a review. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 9(4):241–256, décembre 1999.
- [73] James T. KIRBY.  $\ddot{}$  Analysis of regular and random ocean waves. Notes for CIEG 681  $\ddot{}$ , September 2000. CACR, University of Delaware.
- [74] Walter L. KÜHNLEIN, Günther F. CLAUSS et Janou HENNIG. Tailor made freak waves within irregular seas. Dans ASME, éditeur, *Proceedings of the 21<sup>st</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE'02*, Oslo, Norvège, juin 2002.
- [75] Bruce M. LAKE, Henry C. YUEN, Harald RUNGALDIER et Warren E. FERGUSON. Non-linear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *Journal of Fluid Mechanics*, 83:49–74, 1977.
- [76] Kostas F. LAMBRAKOS. Extended velocity potential wave kinematics. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, 107(WW3):159–174, août 1981.
- [77] L. LANDAU et E. LIFCHITZ. *Physique Théorique – Mécanique des Fluides*, volume 6. Éditions MIR, 1989.

- [78] David LE TOUZÉ et Pierre FERRANT. On the optimal use of submerged dipoles for the generation of unsteady nonlinear waves. Dans *Proceedings of the 18<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, pages 109–112, Le Croisic, France, 2003.
- [79] David LE TOUZÉ. *Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, France, 2003.
- [80] A. LEBEAU et Xavier BOMPAIS. Compte-rendu de l'étalonnage dynamique des sodnes à houle Sogreah et Churchill. CLAROM Projet "Houle générée en bassin et dans les modèles numériques" R05HA99, Ifremer DITI/GO/HA, avril 1999.
- [81] W. LI et A.N. WILLIAMS. Second-order waves in a three-dimensional wave basin with perfectly reflecting sidewalls. *Journal of Fluids and Structures*, 14(4):575–592, mai 2000.
- [82] Chun-Yuan LIN et Ching-Jer HUANG. Decomposition of incident and reflected higher harmonic waves using four wave gauges. *Coastal Engineering*, 51:395–406, 2004.
- [83] Michael S. LONGUET-HIGGINS. Resonant interactions between two trains of gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:321–332, 1962.
- [84] Michael S. LONGUET-HIGGINS et David A. DRAZEN. On steep gravity waves meeting a vertical wall: a triple instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 466:305–318, 2002.
- [85] Michael S. LONGUET-HIGGINS et Owen M. PHILLIPS. Phase velocity effects in tertiary wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:333–336, 1962.
- [86] M.S. LONGUET-HIGGINS et N.D. SMITH. An experiment on third order resonant wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 25(3):417–435, 1966.
- [87] Claudio LUGNI. *Un'indagine sull'interazione fra onde di superficie libera e strutture galleggianti*. Thèse de Doctorat, Università di Roma "La Sapienza", Rome, Italie, 2001.
- [88] H. LUNDGREN et S.E. SAND. Natural wave trains: description and reproduction. Dans American Society of CIVIL ENGINEERS, éditeur, *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, volume 1, pages 312–319, 1978.
- [89] Éric LUNÉVILLE. Utilisation de la théorie spectrale dans le cadre des problèmes d'évolution. Notes de cours non publiées.
- [90] Éric LUNÉVILLE. Simulation de la houle par méthode de décomposition modale. Dans *Compte-Rendu des Quatrièmes Journées de l'Hydrodynamique*, pages 417–430, Nantes, mars 1993.
- [91] Christophe MAISONDIEU, Étienne P.D. MANSARD et Alain H. CLÉMENT. Étude sur la génération d'ondes transitoires de grande amplitude. Rapport Technique, CNRC, 1996.
- [92] E.P.D. MANSARD et E.R. FUNKE. The measurement of incident and reflected spectra using a least squares method. Dans *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, pages 154–172, Sydney, 1980.
- [93] E.P.D. MANSARD et E.R. FUNKE. A new approach to transient wave generation. Dans *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*, Cape Town, South Africa, 1982.
- [94] C. MARCOU. *Contribution expérimentale à l'étude de la houle complexe du laboratoire*. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France, 1969.
- [95] W.K. MELVILLE. The instability and breaking of deep-water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 115:165–185, 1982.
- [96] M.D. MILES. A note on directional random wave synthesis by the single summation method. Dans *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> IAHR Congress*, volume C, pages 243–250, Ottawa, Canada, 1989.

- 
- [97] Bernard MOLIN. Génération de houle multidirectionnelle dans le bassin d'Haslar. Note complémentaire au rapport 1.04.32.0390 ba/rec, Bassin d'essais des carènes, ?
- [98] Bernard MOLIN. Génération de houle multidirectionnelle dans un bassin rectangulaire – application à une petite cuve à houle. 1.04.32.0390 ba/rec, Bassin d'essais des carènes, 1991.
- [99] Bernard MOLIN. Numerical and physical wavetanks: making them fit. Dans *22<sup>nd</sup> Georg Weinblum Memorial Lecture*, Michigan, États-Unis, 1999. IWWWF.
- [100] Bernard MOLIN. *Hydrodynamique des structures offshore*. Guides Pratiques sur les Ouvrages en Mer. Éditions TECHNIP, 2002.
- [101] Bernard MOLIN, Yves STASSEN et Sylvie MARIN. Étude théorique et expérimentale des seiches parasites générées dans les bassins de houle. Dans *Compte-Rendu des Septièmes Journées de l'Hydrodynamique*, pages 125–138, Marseille, France, mars 1999.
- [102] Okey NWOGU. Maximum Entropy estimation of directional wave spectra from an array of wave probes. *Applied Ocean Research*, 11(4):176–182, 1989.
- [103] Jong-Chun PARK, Moo-Hyun KIM et Hideaki MIYATA. Three-dimensional numerical wave tank simulations on fully nonlinear wave–current–body interactions. *Journal of Marine Science and Technology*, 6:70–82, 2001.
- [104] William H. PRESS, Saul A. TEUKOLSKY, William T. WETTERLING et Brian P. FLANNERY. *Numerical recipes in Fortran 90: the art of parallel scientific computing*. Cambridge University Press, 2002.
- [105] M.M. RIENECKER et J.D. FENTON. A Fourier approximation for steady water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 104:119–137, 1981.
- [106] D. ROGERS et G. BOLTON KING. *Wave generation using Ocean and wave*. Edinburgh Designs Ltd, Edinburgh, mars 1997. 3.62.
- [107] Douglas ROGERS. Investigation of beach design for 1 meter wave. Rapport Technique, Edinburgh Designs Ltd, 2001.
- [108] Pierre ROUX DE REILHAC. Amélioration de la génération de houle en bassin. Rapport de DEA, Laboratoire de Mécanique des Fluides – École Centrale de Nantes, 2004.
- [109] Martin SANCHEZ. Estimation du coefficient de réflexion en canal à houle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 28(IIb):883–889, 2000.
- [110] S.E. SAND. Deterministic decomposition of pitch-and-roll buoy measurements. *Journal of Coastal Engineering*, 8:243–263, 1984.
- [111] S.E. SAND et Helge LUNDGREN. Three-dimensional structure of waves. Dans *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Behaviour of Off-Shore Structures*, pages 117–120, London, August 1979. BOSS'79.
- [112] S.E. SAND et A.E. MYNETT. Directional wave generation and analysis. Dans *Proceedings of the IAHR Seminar on Wave Analysis and Generation in Laboratory Basins*, pages 209–235, Lausanne, Suisse, september 1987.
- [113] Hemming A. SCHÄFFER. Second-order wavemaker theory for irregular waves. *Ocean Engineering*, 23(1):47–88, 1996.
- [114] Hemming A. SCHÄFFER et Catherine M. STEENBERG. Second-order wavemaker theory for multidirectional waves. *Ocean Engineering*, 30(10):1203–1231, 2003.
- [115] K. SHE, C.A. GREATED et W.J. EASSON. Experimental study of three-dimensional breaking wave kinematics. *Applied Ocean Research*, 19:329–343, 1997.

- [116] C. SKANDRANI, C. KHARIF et J. POITEVIN. Nonlinear evolution of water surface waves: the frequency down-shift phenomenon. *Contemporary Mathematics*, 200:157–171, 1996.
- [117] Yves STASSEN. *Simulation numérique d'un canal à houle bidimensionnel au troisième ordre d'approximation par une méthode intégrale*. Thèse de Doctorat, Université de Nantes – École Centrale de Nantes, France, juin 1999.
- [118] Kyung Doug SUH, Woo Sun PARK et Beom Seok PERK. Separation of incident and reflected waves in wave-current flumes. *Coastal Engineering*, 43:149–159, 2001.
- [119] Mitsuhiro TANAKA. A method of studying nonlinear random field or surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dynamics Research*, 28:41–60, 2001.
- [120] Mitsuhiro TANAKA. Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 444:199–221, 2001.
- [121] Paul H. TAYLOR et Richard H. GIBBS. Wave focusing on deep water - bandwidth, spreading and non-linearity. Dans *Proceedings of the 7th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting*, Banff, Canada, octobre 2002.
- [122] Marshall P. TULIN et Takuji WASEDA. Laboratory observations of wave group evolution, including breaking effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 378:197–232, 1999.
- [123] Fritz URSELL, R.G. DEAN et Y.S. YU. Forced small-amplitude water waves: a comparison of theory and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 7:33–52, 1960.
- [124] T. VINJE et S. HAVER. On the non-gaussian structure of ocean waves. Dans *Proceedings of the 7th BOSS Conference*, volume 2, MIT, USA, 1994.
- [125] Bruce J. WEST, Keith A. BRUECKNER, Ralph S. JANDA, D. Michael MILDER et Robert L. MILTON. A new numerical method for surface hydrodynamics. *Journal of Geophysical Research*, 92(C11):11,803–11,824, octobre 1987.
- [126] Jaap-Harm WESTHUIS. *The numerical simulation of nonlinear waves in a hydrodynamic model test basin*. Thèse de Doctorat, Universiteit Twente – MARIN, Twente, Hollande, 2001.
- [127] Guangyu WU, Yuming LIU et Dick K.P. YUE. Numerical reconstruction of nonlinear irregular wave-field using single or multiple probe data. Dans *Proceedings of the 15th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, février 2000.
- [128] Ming XUE, Hongbo XÜ, Yuming LIU et Dick K.P. YUE. Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part I. Dynamics of steep three-dimensional waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 438:11–39, 2001.
- [129] Yitao YAO, Marshall P. TULIN et Ali R. KOLAINI. Theoretical and experimental studies of three-dimensional wavemaking in narrow tanks, including nonlinear phenomena near resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, 276:211–232, 1994.
- [130] V. ZAKHAROV. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 9:86–94, 1968.
- [131] J. ZHANG, J. YANG, J. WEN, I. PRISLIN et K. HONG. Deterministic wave model for short-crested ocean waves: Part I. Theory and numerical scheme. *Applied Ocean Research*, 21:167–188, 1999.
- [132] Shutang ZHU. Separation of regular waves by a transfer function method. *Ocean Engineering*, 26:1435–1446, 1999. Technical note.