



**HAL**  
open science

# Cohésion par capillarité et comportement mécanique de milieux granulaires

Fabien Soulié

► **To cite this version:**

Fabien Soulié. Cohésion par capillarité et comportement mécanique de milieux granulaires. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2005. Français. NNT: . tel-00010079

**HAL Id: tel-00010079**

**<https://theses.hal.science/tel-00010079>**

Submitted on 8 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II  
– Sciences et Techniques du Languedoc –

# THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil  
Formation Doctorale : Mécanique des matériaux et des milieux complexes,  
des structures et des systèmes  
École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

Présentée et soutenue publiquement par

Fabien SOULIÉ

Le 6 juillet 2005

## Cohésion par capillarité et comportement mécanique de milieux granulaires

JURY :

J.J. MOREAU	Professeur émérite à l'Université Montpellier II	Président
F. CHERBLANC	Maître de Conférences à l'Université Montpellier II	Co-directeur de Thèse
F. DARVE	Professeur à l'INP de Grenoble	Rapporteur
M.S. EL YOUSOUFI	Maître de Conférences à l'Université Montpellier II	Co-directeur de Thèse
J. MARTINEZ	Professeur à l'INSA de Rennes	Rapporteur
C. SAIX	Professeur à l'Université Montpellier II	Directeur de Thèse



*La réalisation d'une thèse s'apparente à un voyage en terre inconnue. En cours de route, on effectue de nombreuses rencontres, parfois ponctuelles, aux hasards des chemins ou des carrefours, d'autres fois, certaines personnes se joignent à nous pour parcourir un bout de chemin ensemble... enfin, certains nous accompagnent tout au long de la route, permettant d'éviter bien des embûches... Chacune de ces rencontres, à un degré ou à un autre, contribue au bon déroulement d'une thèse.*

*Le nombre de participants à ce voyage étant considérable, il m'est impossible de remercier individuellement chacun d'eux sans commettre d'oublis, et donc d'injustices.*

*J'accorde cependant une pensée particulière à Christian Saix, à Moulay Saïd El Youssoufi et à Fabien Cherblanc, sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. C'est un réel plaisir de travailler et d'apprendre à leur côté et je tiens à les remercier chaleureusement pour leur pédagogie, leurs compétences scientifiques et techniques, mais aussi pour leurs qualités humaines exceptionnelles.*

*Merci aussi aux autres membres de mon jury : Jean Jacques Moreau qui a bien voulu présider le jury de la soutenance, ainsi que Félix Darve et Juan Martinez qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs.*

*Merci à Jean-Yves et Vincent, deux amis qui triturent eux aussi des grains dans tous les sens (même lorsqu'ils sont virtuels), pour les nombreux échanges fructueux. Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe "Couplages en Milieux Hétérogènes" pour leur accueil et leur gentillesse. Merci aux "jeunes" de l'équipe : Simon, Jérôme, Anne-Laure... et aux autres doctorants et stagiaires pour toutes les discussions de travail (et sur bien d'autres sujets encore...). Merci à Reine pour sa gentillesse, sa patience et son aide précieuse (notamment dans les méandres administratifs)... Merci à Alain et Gilles pour leur disponibilité et leur savoir-faire dans la réalisation de tous les appareillages insolites qui naissent au cours d'une thèse... De façon plus générale, merci à tous les membres du laboratoire de Mécanique et Génie Civil et au personnel du département Génie Civil de l'IUT de Nîmes, avec qui j'ai passé de très bons moments au cours de ces trois années de recherche et d'enseignement. Merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ces travaux de recherche.*

*Merci également à ma famille, et plus particulièrement à mes parents et à mon frère, qui ont suivi avec intérêt les pérégrinations de mon parcours scolaire, étudiantin, et plus encore...*

*Enfin, merci à Delphine, à qui, comme le veut la formule, je dédie ce travail...*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Interactions de type cohésif au sein des milieux granulaires humides</b>	<b>9</b>
1.1 L'eau dans les milieux granulaires - Cas des sols . . . . .	9
1.2 Mécanismes de cohésion entre grains en présence d'eau . . . . .	12
1.2.1 Les forces de Van der Waals . . . . .	12
1.2.2 Les forces électrostatiques . . . . .	12
1.2.3 Liens solides et cimentation . . . . .	13
1.2.4 Ponts liquides : forces capillaires . . . . .	14
1.2.5 Effets de géométrie et de surface . . . . .	14
1.2.6 Liaisons chimiques . . . . .	15
1.2.7 Synthèse . . . . .	15
1.3 Importance relative des différents mécanismes . . . . .	16
1.4 La cohésion par capillarité . . . . .	18
1.4.1 Origines physiques de la capillarité . . . . .	18
1.4.2 Modèles de cohésion par capillarité à l'échelle locale . . . . .	20
1.4.3 Rupture du pont liquide . . . . .	24
1.4.4 Conclusion . . . . .	24
<b>2 Influence de l'eau à l'échelle locale</b>	<b>27</b>
2.1 Modélisation d'un doublet capillaire . . . . .	27
2.1.1 Cadre de l'étude et hypothèses . . . . .	27
2.1.2 Profil du pont liquide entre deux grains de tailles différentes . . . . .	29
2.1.3 Géométrie du pont liquide . . . . .	34
2.1.4 La force de cohésion par capillarité . . . . .	35
2.1.5 Conclusion . . . . .	35
2.2 Étude numérique du doublet capillaire . . . . .	36
2.2.1 Préliminaire à l'étude : paramétrage et adimensionnement du modèle . . . . .	36
2.2.2 Principe de l'étude numérique . . . . .	37
2.2.3 Modèle théorique de cohésion par capillarité . . . . .	39
2.3 Confrontation du modèle théorique avec des données de la littérature . . . . .	43
2.4 Études expérimentales à l'échelle locale . . . . .	43
2.4.1 Dispositif et protocole expérimentaux . . . . .	43
2.4.2 Résultats expérimentaux . . . . .	45
2.4.3 Validation du modèle théorique . . . . .	52
2.4.4 Effet de la présence d'eau sur le frottement entre grains . . . . .	52
2.5 Conclusion . . . . .	56

<b>3</b>	<b>De l'échelle locale à l'échelle macroscopique</b>	<b>57</b>
3.1	Simulation numérique : la méthode des éléments discrets . . . . .	57
3.1.1	Quelques éléments sur les simulations numériques . . . . .	57
3.1.2	Description de la méthode numérique utilisée . . . . .	58
3.2	Prise en compte de la capillarité dans le code de calcul . . . . .	63
3.2.1	Loi locale d'interaction de type capillaire . . . . .	63
3.2.2	Répartition de l'eau au sein de l'échantillon numérique . . . . .	66
3.2.3	Gestion de la répartition de l'eau au sein du matériau granulaire . . . . .	67
3.3	Quelques remarques sur les effets de la taille des grains . . . . .	68
3.4	Essai de compression simple . . . . .	71
3.4.1	Simulation numérique . . . . .	71
3.4.2	Étude expérimentale . . . . .	77
3.4.3	Confrontation simulation-expérience . . . . .	80
3.5	Essai de compression diamétrale . . . . .	84
3.5.1	Description de l'essai . . . . .	84
3.5.2	Résultats et grandeurs locales . . . . .	84
3.6	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Couplages dans les milieux granulaires humides</b>	<b>91</b>
4.1	Température et capillarité . . . . .	91
4.1.1	Influence de la température sur les caractéristiques physiques du pont liquide	91
4.1.2	Influence de la température sur la force capillaire à l'échelle locale . . . . .	93
4.1.3	Influence de la température sur le comportement macroscopique de milieux granulaires humides . . . . .	95
4.2	Soluté et capillarité . . . . .	99
4.2.1	Influence d'un soluté sur les caractéristiques physiques du pont liquide . . . . .	99
4.2.2	Influence d'un soluté sur la force capillaire à l'échelle locale . . . . .	99
4.2.3	Influence d'un soluté sur le comportement macroscopique d'un matériau granulaire . . . . .	100
4.3	Une approche expérimentale de la cristallisation . . . . .	103
4.3.1	Influence de la cristallisation sur la force de cohésion à l'échelle locale . . . . .	103
4.3.2	Influence de la cristallisation sur le comportement macroscopique d'un matériau granulaire . . . . .	104
4.4	Conclusion . . . . .	110
	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>
	<b>Nomenclature</b>	<b>121</b>
	<b>Liste des figures</b>	<b>127</b>
	<b>Annexe A - Exemple détaillé de recherche de triplet de valeurs (<math>D^*</math>, <math>V^*</math>, <math>F^*</math>)</b>	<b>129</b>
	<b>Annexe B - Choc frontal entre deux grains</b>	<b>133</b>
	<b>Annexe C - Gestion de la répartition de l'eau au sein du matériau granulaire</b>	<b>135</b>

# Introduction

Les matériaux granulaires sont universellement répandus dans la nature et entrent dans de nombreux domaines de l'activité humaine ; ils sont omniprésents sous bien des formes et des tailles différentes dans notre environnement. Du château de sable à l'exploration spatiale, en passant par les industries de transformation, pharmaceutiques, agro-alimentaires, les matériaux de construction, le stockage des céréales et des minerais, etc..., la matière granulaire fait partie de notre vie quotidienne. A l'heure actuelle, près de 80 % des produits (ou intermédiaires) des industries de procédés se trouvent être sous forme de grains ou de poudres. Pour répondre à l'ensemble des besoins de notre société, l'industrie extractive nationale doit traiter chaque année 7 tonnes de granulats par habitant, soit l'équivalent de 20 *kg* par jour et par personne.

L'importance de la matière en grains dans notre vie quotidienne, mais aussi les propriétés parfois surprenantes qui y sont associées, expliquent le nombre croissant de travaux de recherche sur les matériaux granulaires et l'abondante littérature qui s'y rapporte [Guyon et Troadec, 1994; Claudin, 1999; Duran, 1999, 2003]. En effet, même les matériaux granulaires sans cohésion (pulvérulents), où seules des interactions de contact et de frottement interviennent entre les grains, présentent des comportements complexes. On peut citer par exemple les phénomènes de ségrégations granulaires, d'avalanches, de répartition des forces, d'écoulements, de formations de voûtes... Certains de ces phénomènes sont connus depuis longtemps - Coulomb s'est intéressé dès le *XVIII<sup>e</sup>* siècle aux angles d'avalanches du sable - mais la connaissance des mécanismes physiques mis en oeuvre n'est souvent que partielle. Cette méconnaissance s'explique notamment par la difficulté d'accéder à des informations locales, à l'échelle des grains, et par la compréhension imparfaite des relations entre les interactions locales et le comportement macroscopique des matériaux granulaires.

Depuis une trentaine d'années, les méthodes numériques en éléments discrets offrent des possibilités croissantes grâce à la progression des outils de calcul et apportent des éléments permettant de compléter notre connaissance de la matière en grains. Ces méthodes discrètes proposent une modélisation des matériaux granulaires par un ensemble de grains numériques. Chacun de ces grains présente un comportement propre régi par les mécanismes physiques agissant sur le grain ; il est ainsi possible d'accéder à des informations locales et au comportement macroscopique du matériau granulaire. Ces approches numériques sont bien sûr des modélisations des matériaux granulaires ; elles ne permettent pas la prise en compte de toute la complexité des matériaux granulaires réels, aussi bien en terme de description des phénomènes physiques qu'en terme de géométrie et nombre de grains. Cependant, ces méthodes discrètes constituent un outil d'étude efficace qui permet de mieux comprendre la physique des matériaux granulaires, en particulier dans le cas pulvérulent, mais aussi, plus récemment, dans le cas des matériaux granulaires cohésifs.

Le développement des méthodes discrètes permet la prise en compte d'interactions de plus en plus complexes entre les grains. Parmi ces interactions, la cohésion par capillarité, due à la présence de ponts liquides entre les grains, est un mécanisme qui suscite l'intérêt de nombreuses disciplines : les sciences des sols [Mohtar et Braudeau, 2003], les applications géotechniques

[Harr, 1981; Holtz et Kovacs, 1991; Mitchell, 1993], l'industrie cosmétique et pharmaceutique [Nokhodchi, 2005], les industries de procédés à travers par exemple le frittage, les procédés de granulation [Iveson et al., 2001] ou la nano-manipulation [Rollot et Régnier, 2000]... L'importance du mécanisme de cohésion par capillarité dans la matière en grains a donné naissance à de nombreux travaux sur le sujet. La plupart de ces travaux proposent des études dans le cas monodisperse, c'est-à-dire pour des grains de même taille. Les études abordant le cas polydispersé (grains de tailles différentes) sont encore peu nombreuses.

Le travail présenté ici a pour but d'étudier les forces capillaires entre grains de tailles différentes et l'influence de ces forces locales sur le comportement mécanique macroscopique de matériaux granulaires polydispersés.

Le mémoire comporte quatre chapitres.

Le premier chapitre aborde la question des interactions de type cohésif au sein des milieux granulaires humides. Ce chapitre présente une revue bibliographique des interactions cohésives à l'échelle locale. Le cas de la cohésion par capillarité et des différents modèles qui s'y rapportent est plus particulièrement détaillé.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse de la cohésion par capillarité à l'échelle d'une paire de grains. Cette analyse repose sur une étude théorique, couplée à une étude expérimentale, et permet de comprendre comment deux grains de tailles différentes peuvent être liés par un pont liquide. Ce travail a pour objectif de proposer un modèle explicite décrivant la force capillaire en fonction des caractéristiques physiques et géométriques de l'ensemble grains-pont liquide. Le modèle comporte une relation décrivant la force capillaire et un critère de rupture des ponts liquides ; ces relations ont été écrites sous une forme qui se veut simple en vue d'une implémentation dans un code de calcul.

Le troisième chapitre présente la méthode numérique en éléments discrets utilisée pour effectuer des simulations à l'échelle macroscopique, dans une configuration tridimensionnelle. La méthode de prise en compte de la cohésion par capillarité dans le code de calcul est détaillée à travers la loi locale d'interaction et la gestion de l'eau au sein des échantillons numériques. Une validation expérimentale de l'approche sur un matériau granulaire modèle est effectuée. Ce chapitre présente également les avantages des simulations en éléments discrets sur un cas d'étude.

Le quatrième chapitre présente des extensions possibles de l'étude. Les milieux granulaires présentent un comportement mécanique sensible aux variations environnementales. Les cas d'une élévation de température, de la présence d'un soluté dans les ponts liquides et de la cristallisation de ce soluté sont abordés à travers l'étude de leurs influences respectives sur le comportement mécanique du matériau granulaire.

# Chapitre 1

## Interactions de type cohésif au sein des milieux granulaires humides

### 1.1 L'eau dans les milieux granulaires - Cas des sols

Les manifestations de l'effet de l'eau dans les sols sont multiples et parfois surprenantes. En effet, la présence d'eau dans un sol peut modifier significativement son comportement. A titre d'exemple, les problèmes de tenue mécanique, de compactage, de gonflement des sols et l'action du gel révèlent sans ambiguïté l'importance du rôle de l'eau dans le comportement et le fonctionnement des sols [Holtz et Kovacs, 1991].

#### État et comportement des sols

L'état et le comportement des sols sont très sensibles à la quantité d'eau qu'ils contiennent. La quantité d'eau est caractérisée par la grandeur "teneur en eau" : il s'agit de la masse d'eau dans le sol pour une masse de particules sèches unité, cette grandeur est notée  $w$ . Dans le cas des sols à particules fines comme les argiles, l'état du sol peut ainsi varier de l'état solide à l'état liquide selon la teneur en eau. Les limites de consistance ou limites d'Atterberg permettent de délimiter différentes plages de teneurs en eau dans lesquelles le comportement du sol peut se révéler très différent [Atterberg, 1911] (Fig. 1.1). Les valeurs limites couramment utilisées sont la limite de liquidité ( $w_L$ ), la limite de plasticité ( $w_P$ ) et, quelquefois, la limite de retrait ( $w_S$ ). Lorsque la teneur en eau augmente, le sol passe graduellement du comportement d'un matériau solide ( $w < w_P$ ) au comportement d'un matériau plastique ( $w_P < w < w_L$ ), puis au comportement d'un liquide visqueux ( $w > w_L$ ).

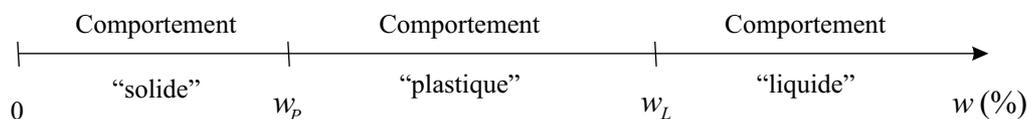


FIG. 1.1 – Teneurs en eau et différents états d'un sol.

#### Compactage

La teneur en eau est également un paramètre important dans le compactage des sols. Le compactage consiste en une densification des sols par application d'énergie mécanique dans le but d'améliorer les propriétés géotechniques des sols. Les principes du compactage ont été exposés dans les années 1930 par Proctor [1933]. Celui-ci a mis au point un essai de compactage normalisé,

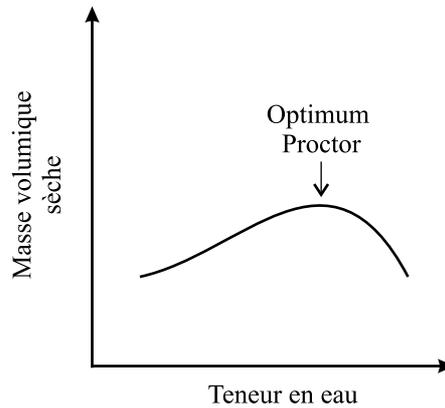


FIG. 1.2 – Allure typique d'une courbe de compactage. L'optimum Proctor correspond à la teneur en eau qui permet d'obtenir la masse volumique sèche maximale, pour un sol donné, un mode de compactage et une énergie de compactage donnés.

l'essai Proctor, et a démontré que le compactage dépend de trois facteurs : la teneur en eau, l'énergie de compactage, et le type de sol à compacter. L'essai Proctor, pour un sol donné, pour un mode de compactage et une énergie de compactage donnés, permet de déterminer l'évolution de la masse volumique finale du sol sec en fonction de la teneur en eau, comme l'illustre le figure 1.2. Selon le type de sol et le procédé de compactage utilisé, la masse volumique du sol sec varie avec la teneur en eau dans des proportions plus ou moins grandes. Le sommet de la courbe correspond à l'optimum Proctor : il s'agit de la teneur en eau optimale qui permet d'obtenir le compactage maximal du sol. La teneur en eau est donc un paramètre important dans le sol puisqu'elle peut modifier considérablement l'efficacité des opérations de compactage.

### Retraits et gonflements

Les variations de teneurs en eau peuvent engendrer des phénomènes de retrait ou de gonflement des sols, entraînant parfois l'apparition de fissures ou des soulèvements dans les sols. Le retrait et les fissures qui en résultent sont la conséquence d'une diminution de la teneur en eau engendrée soit par une évaporation de surface, soit par des causes internes au sol (abaissement de la nappe phréatique ou dessiccation des sols par la végétation). Les phénomènes de gonflement sont quant à eux dus à une augmentation de la teneur en eau. Ces phénomènes de retrait et de gonflement sont surtout significatifs dans les sols à grains fins de type argileux où ils peuvent créer des dommages importants de par les tassements différentiels qu'ils occasionnent.

### Action du gel

La présence d'eau dans les sols, combinée à une baisse de la température, est à l'origine de l'apparition du gel, ce qui peut également entraîner des conséquences néfastes sur le comportement des sols. En effet, lorsque la température de l'air devient négative, l'eau interstitielle peut geler. Le volume du sol peut alors augmenter de près de 10% à cause de l'expansion volumétrique de l'eau due au gel. Des lentilles de glace peuvent également apparaître dans le sol et créer des dommages aux ouvrages ou des soulèvements de sol. Le gel et le dégel du sol ne s'effectuant pas uniformément, des tassements différentiels peuvent en résulter et engendrer des dommages significatifs.

Ces effets de l'eau sur le comportement des sols sont les conséquences à l'échelle macroscopique de phénomènes qui se produisent à l'échelle locale, c'est-à-dire à l'échelle de la particule de sol (également appelée grain). A l'échelle du grain, la présence d'eau a de multiples effets. L'eau

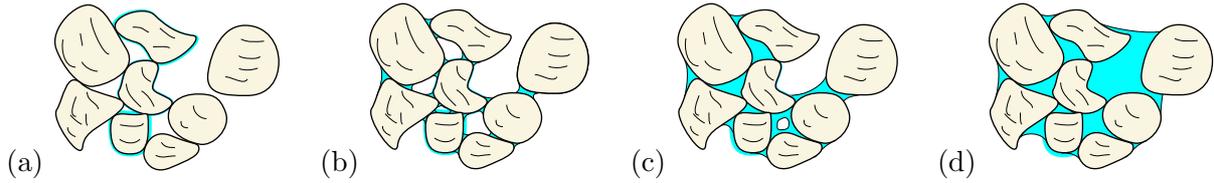


FIG. 1.3 – Représentation schématique des différents états de l'eau dans un sol : (a) régime hygroscopique, (b) régime pendulaire, (c) régime funiculaire, (d) saturation.

peut en particulier interagir avec les minéraux des particules du sol. Ces interactions physico-chimiques sont particulièrement importantes dans le cas des argiles [Delage et Cui, 2000]. L'attraction particulière exercée par les argiles sur l'eau s'explique notamment par des phénomènes électriques interfaciaux (double couche électrique) et par la création de liaisons hydrogène [Mitchell, 1993]. Le phénomène de double couche électrique joue également un rôle important dans l'organisation des plaquettes d'argiles [Chappuis, 1999]. Dans un sol, l'eau se comporte comme un solvant, ce qui favorise les phénomènes de dissolution. La concentration d'éléments dissous dans l'eau est à l'origine de phénomènes osmotiques qui influencent la migration des molécules d'eau dans les pores du sol. L'eau se comporte alors comme un vecteur de constituants à l'intérieur du sol. Les sols humides sont également le siège de phénomènes de cohésion. La tenue des sols granulaires humides peut ainsi être assurée par de nombreux mécanismes à l'échelle du grain et notamment par la présence de ponts liquides entre les grains. Quelques uns des mécanismes cohésifs significatifs seront abordés dans la section 1.2.

Comme le montrent ces différents exemples, l'eau joue un rôle majeur dans le comportement des sols. Dans le cas des sols non saturés, la phase liquide (l'eau) et la phase gazeuse (l'air) cohabitent dans les pores de façon différente suivant la teneur en eau [Magnan, 1999]. Il est possible de distinguer plusieurs régimes selon l'état que l'eau prend dans le sol. L'eau peut être liée ou adsorbée à la surface des grains très fins de par l'action de phénomènes d'attraction moléculaire et électrostatique. Il s'agit du régime hygroscopique pour lequel la phase liquide est discontinue (Fig. 1.3(a)). La présence d'eau de constitution et d'eau liée est surtout marquée pour les sols fins argileux. Dans le cas de matériaux granulaires tels que les sables, il n'y a pas d'eau de constitution et en général pas d'eau liée. Lorsque la teneur en eau augmente, des ponts liquides peuvent apparaître entre les grains mais la phase liquide reste discontinue (Fig. 1.3(b)) : il s'agit du régime pendulaire. Si la teneur en eau augmente, les ponts liquides se développent ; le régime funiculaire, pour lequel il existe une continuité de la phase liquide, est atteint (Fig. 1.3(c)). Enfin, le régime de saturation est atteint lorsque l'espace poral est rempli d'eau et que seules quelques poches d'air occlus peuvent subsister (Fig. 1.3(d)).

Dans la suite de ce manuscrit, le cas du régime pendulaire sera retenu pour l'étude de la cohésion par capillarité dans les milieux granulaires humides.

## 1.2 Mécanismes de cohésion entre grains en présence d'eau

La cohésion dans les milieux granulaires a de multiples origines possibles, aussi bien de type physique que chimique. Les mécanismes de cohésion sont pour la plupart des phénomènes locaux qui permettent de lier des grains entre eux, contribuant ainsi à la tenue mécanique du milieu granulaire dans son ensemble. Quelques uns des principaux mécanismes de cohésion fréquemment rencontrés dans les milieux granulaires humides sont présentés dans cette section, la présence d'eau n'étant pas forcément une condition nécessaire (sauf dans le cas de la cohésion par capillarité, bien sûr!).

### 1.2.1 Les forces de Van der Waals

Les forces de Van der Waals ont été étudiées dès les années 1930 par Hamaker [1937]. Ces forces dépendent des matériaux en contact, à travers la constante de Hamaker, et de la distance d'interaction. L'évaluation de la constante, qui détermine le calcul de la force, nécessite de nombreuses données physiques sur les matériaux. Contrairement à d'autres types d'interactions, les forces de Van der Waals existent quels que soient les corps que l'on considère [Israelachvili, 1992; Gerschel, 1995]. Ces forces sont omniprésentes dans le monde qui nous entoure, c'est d'ailleurs grâce à elles que les geckos peuvent se déplacer sur des murs verticaux [Eisner, 2002]. L'expression "forces de Van der Waals" est en fait un terme collectif qui regroupe différents phénomènes d'interactions pouvant survenir entre des molécules ou des particules. L'interaction totale de Van der Waals résulte de la combinaison de trois types d'interactions :

- les forces dipôlares correspondant au terme de *Keesom*,
- les forces de polarisation traduites par le terme de *Debye*,
- les forces de dispersion exprimées par le terme de *London*.

Le terme de *London* est le terme prépondérant en intensité au niveau de l'interaction totale. De plus, ce terme est toujours présent car, contrairement aux autres termes, il ne dépend pas des propriétés des molécules : c'est pour cette raison que les forces de Van der Waals sont présentes quelle que soit la nature des surfaces en interaction. Ces forces intermoléculaires dépendent de la distance de séparation  $D$  des molécules ; elles sont inversement proportionnelles à  $D^7$ . Lorsque ces actions intermoléculaires sont intégrées entre des corps macroscopiques, comme par exemple des particules sphériques, la force résultante est moins sensible à la distance de séparation, elle est inversement proportionnelle à  $D^2$  dans le cas d'interaction sphère-sphère [Seville et al., 2000] :

$$F_{VW} = \frac{A R}{12 D^2} \quad (1.1)$$

où  $R$  est le rayon des sphères,  $A$  est la constante de Hamaker. Les forces de Van der Waals sont des actions longues distances (en théorie à l'infini!...) et ne présentent pas de rupture. En pratique, la distance d'action correspond à la plage de distance pour laquelle les forces sont significatives : la distance effective est alors comprise entre  $0,2 \text{ nm}$  (espaces interatomiques) et  $10 \text{ nm}$  (en pratique, la distance n'excède pas  $100 \text{ nm}$ ) [Gerschel, 1995].

### 1.2.2 Les forces électrostatiques

Dans un système de deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , chaque charge exerce sur l'autre une force électrostatique, dirigée selon la droite qui relie les deux charges et dont l'intensité est donnée par la loi de Coulomb [Gerschel, 1995] :

$$F_{\text{électrostatique}} = \frac{|q_1 q_2|}{4 \pi \varepsilon_0 \varepsilon_r D^2} \quad (1.2)$$

où  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$  est la permittivité du vide,  $\varepsilon_r = 80$  est la permittivité relative de l'eau et  $D$  la distance entre les charges. Cette force est attractive si  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes



FIG. 1.4 – Un exemple de structure naturelle composée de grains liés par cimentation : la rose des sables.

opposés et répulsive si  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signe. Un corps chargé peut donc attirer et être attiré par les corps portant une charge de signe opposé à la sienne. Au contraire, il repousse ceux qui portent une charge de même signe. Les forces électrostatiques peuvent donc être soit répulsives soit attractives, et contribuer dans ce dernier cas à la cohésion entre les particules. Cependant cette action est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les grains, et son action devient vite négligeable lorsque la distance inter-particulaire augmente. De plus, sauf dans le cas de milieux particuliers, la matière contient en général autant de charges positives que de charges négatives et donc, au-delà de l'échelle des inhomogénéités, leurs influences se compensent.

### 1.2.3 Liens solides et cimentation

Les particules peuvent être liées par des joints solides de natures très diverses : présence de liant (colle, résine...), ponts de neige [Nicot et Darve, 2005], ponts de glace résultant du gel de ponts capillaires, phénomène de cimentation... Le comportement de la liaison dépend de la nature du lien, de sa composition (la présence d'impuretés ou de porosités, comme des bulles d'air dans un pont de glace, fragilise le lien), mais aussi de l'interaction du lien avec les particules. Il est ainsi possible de distinguer des ruptures adhésives, dues à la fragilisation de l'interface lien-particule, et des ruptures cohésives.

Le phénomène de cimentation est un mécanisme majeur de cohésion dans les milieux naturels tels que les sols. En effet, de nombreux liens peuvent se développer suite à la cimentation de carbonates, silices, alumines, oxydes de fer et composés organiques. Un exemple concret de cette cohésion par cimentation est l'existence de structures comme les roses des sables (Fig. 1.4).

Les phénomènes de précipitation et de cristallisation de composés tels que les sels participent également au mécanisme de cohésion. Ces liaisons entre particules peuvent être dues à la décomposition puis recombinaison des grains eux-mêmes ou à un apport d'éléments provenant du fluide circulant dans le milieu. Ce phénomène de cimentation peut générer des contraintes de cohésion de plusieurs centaines de kPa et joue un rôle considérable dans le comportement mécanique des sols. En effet, même de faibles pourcentages de cimentation (2% à 4%) modifient de façon notable l'allure des courbes contraintes-déformations (Fig. 1.5).

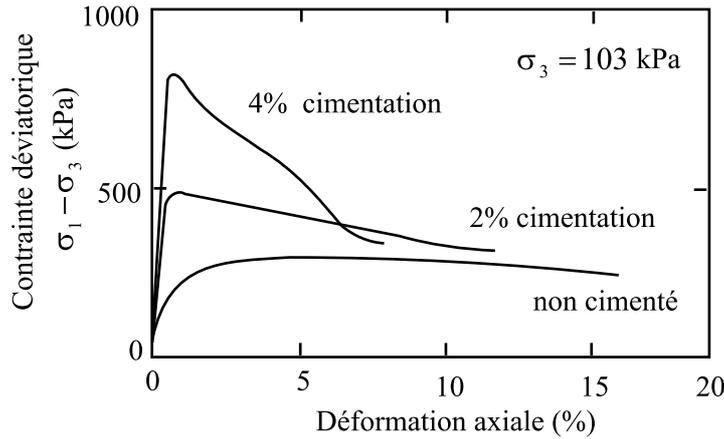


FIG. 1.5 – Courbes de contraintes-déformations pour un sable à différents degrés de cimentation (d’après Mitchell [1993]).

### 1.2.4 Ponts liquides : forces capillaires

La présence de ponts liquides au sein de milieux granulaires génère des forces de cohésion entre les grains. Ces forces dépendent de la quantité de liquide présent dans le milieu et de ses propriétés. Haines [1925] et Fisher [1926] furent les premiers à proposer une expression pour la force capillaire entre deux particules sphériques. Afin d’estimer la force capillaire, nous nous limiterons dans un premier temps au cas d’un pont liquide entre particules de même taille (Fig. 1.6). Le rayon de courbure  $r_1$  est considéré constant, le pont liquide a ainsi la forme d’un toroïde. La force  $F_{capillaire}$  générée par le pont liquide est la somme de la force due à la tension superficielle  $\sigma$  et de la force due à la dépression dans le pont liquide :

$$F_{capillaire} = 2 \pi r_2 \sigma + \pi r_2^2 \Delta p \quad (1.3)$$

où  $\Delta p = p_{gaz} - p_{liquide}$  est la différence de pression entre l’air et le pont liquide et  $r_2$  est le rayon de courbure intérieur.

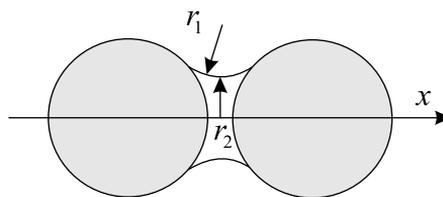


FIG. 1.6 – Pont liquide entre deux grains de même taille dans le cas de l’approximation toroïdale.

Les différents modèles associés à la cohésion par capillarité seront plus amplement développés dans la section 1.4.

### 1.2.5 Effets de géométrie et de surface

La forme des particules et leur position relative peuvent créer une sorte de “cohésion apparente” au sein du milieu granulaire sans qu’il y ait pour autant attraction physique ou chimique entre les particules [Mitchell, 1993]. Ce type de cohésion est qualifiée d’“apparente” car il n’existe pas à proprement parler d’actions cohésives entre les grains, mais on observe une résistance au déplacement relatif des grains, ce qui s’apparente à de la cohésion. La géométrie des surfaces

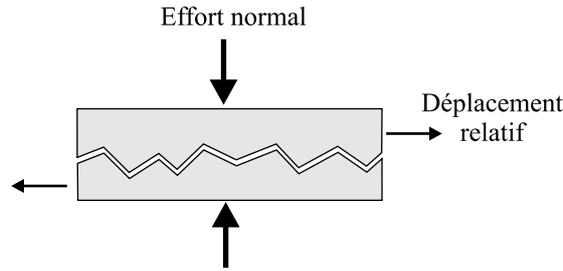


FIG. 1.7 – Effets géométriques de surface entre deux particules.

en contact peut créer des blocages à cause de reliefs macroscopiques et donc une résistance au déplacement dans une direction (Fig. 1.7). Cette résistance au déplacement due à la géométrie des particules ou à des irrégularités de surface contribue à la cohésion globale en limitant le mouvement des particules en contact les unes par rapport aux autres.

### 1.2.6 Liaisons chimiques

De nombreux phénomènes de liaisons chimiques peuvent intervenir dans la cohésion entre particules solides : liaisons hydrogène, métalliques, covalentes.

Les liaisons hydrogène peuvent créer des regroupements de molécules : les molécules “s’associent entre elles” [Gerschel, 1995; Israelachvili, 1992]. Les atomes H créent des liaisons avec des atomes électronégatifs comme O, N, F, Cl... Ce phénomène est très fréquent en présence de molécules d’eau. La liaison hydrogène est une liaison très sensible à la température ; elle est stable dans le cas de températures constantes, mais les variations de température peuvent entraîner très rapidement la rupture de la liaison. Sa distance d’action est limitée de par sa nature à la distance intermoléculaire O-H, c’est-à-dire  $0,176 \text{ nm}$ .

La liaison métallique est due à un phénomène d’origine collective qui assure des liaisons de forte énergie entre atomes métalliques [Gerschel, 1995]. Ce type de liaison est limité au cas des éléments métalliques et à des distances très faibles entre particules.

Les liaisons covalentes [Israelachvili, 1992] peuvent avoir des effets importants pour de très petites particules comme les feuillets d’argiles et générer une sorte de soudage à froid entre particules. Même si l’intensité de ces liaisons est significative, ce mécanisme n’intervient qu’à l’échelle inter-atomiques, c’est-à-dire pour des distances inférieures à  $0,3 \text{ nm}$ .

De manière générale, les liaisons chimiques génèrent des forces de cohésion importantes mais interviennent pour des distances très faibles entre particules, de l’ordre de la distance interatomique. De plus, en dehors de lieux extrêmement contraints, les liaisons chimiques à la surface des corps solides ont tendance à être saturées par des substances contaminantes (oxydation...) et ne peuvent alors plus créer de liaisons lors du contact entre corps.

### 1.2.7 Synthèse

La figure 1.8 récapitule les mécanismes de cohésion en présence d’eau qui ont été abordés dans cette section.

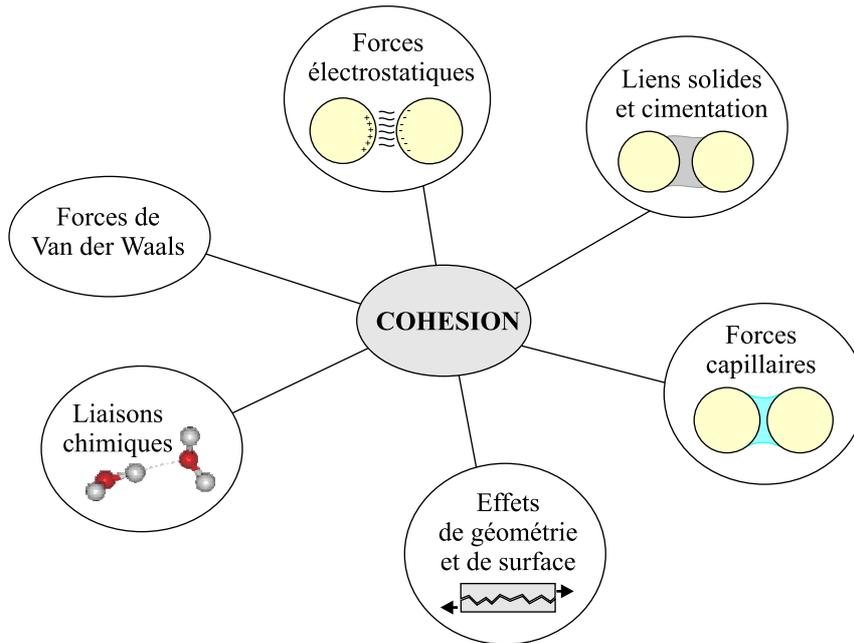


FIG. 1.8 – Illustration synthétique des mécanismes de cohésion au sein des milieux granulaires humides.

### 1.3 Importance relative des différents mécanismes

Bien entendu, les différents mécanismes cohésifs n'interviennent pas de la même façon selon la nature du matériau granulaire et les conditions environnementales que l'on considère. Les mécanismes de cohésion par liaisons chimiques ne seront pas considérés : ces liaisons n'interviennent pas, de façon générale, dans la cohésion entre corps solides. De même, la résistance au déplacement due aux effets de surface ne sera pas prise en compte dans la comparaison des mécanismes cohésifs : il ne s'agit pas, à proprement parler, d'un mécanisme de cohésion, mais plutôt d'un effet de géométrie de surface qui est appréhendé à travers la géométrie des grains ou le frottement en fonction des tailles caractéristiques des reliefs surfaciques. Nous ne considérons donc, dans cette comparaison, que les cas de la cimentation, des forces de Van der Waals et des forces capillaires.

La figure 1.9 présente l'évolution comparée des forces de Van der Waals, de la force capillaire, de la force électrostatique et de la force gravitaire en fonction de la taille des grains. Plus la taille des grains est faible, plus les forces de capillarité et de Van der Waals sont prédominantes par rapport à la force électrostatique et au poids. Même pour des particules de taille caractéristique égale au millimètre, l'action de la pesanteur est compensée par les forces capillaires et de Van der Waals. Cette étude comparative montre également que, quelle que soit la taille des particules, la force capillaire génère une action d'intensité plus importante que la force de Van der Waals. Aveyard et al. [1999] ont également étudié le phénomène de condensation capillaire entre deux surfaces solides en tenant compte de l'influence des forces de Van der Waals sur le phénomène de cohésion par capillarité. Leur étude montre que la contribution des forces de Van der Waals à la cohésion par capillarité est faible pour des distances de séparation entre surfaces solides supérieures à  $2\text{ nm}$ .

Dans le cas des sols, quelle que soit la nature des particules constitutives (argiles ou sables), les mécanismes de cohésion prépondérants sont la cimentation et la capillarité (Fig. 1.10) [Mitchell, 1993]. Les mécanismes de cohésion par cimentation et par capillarité sont d'autant plus

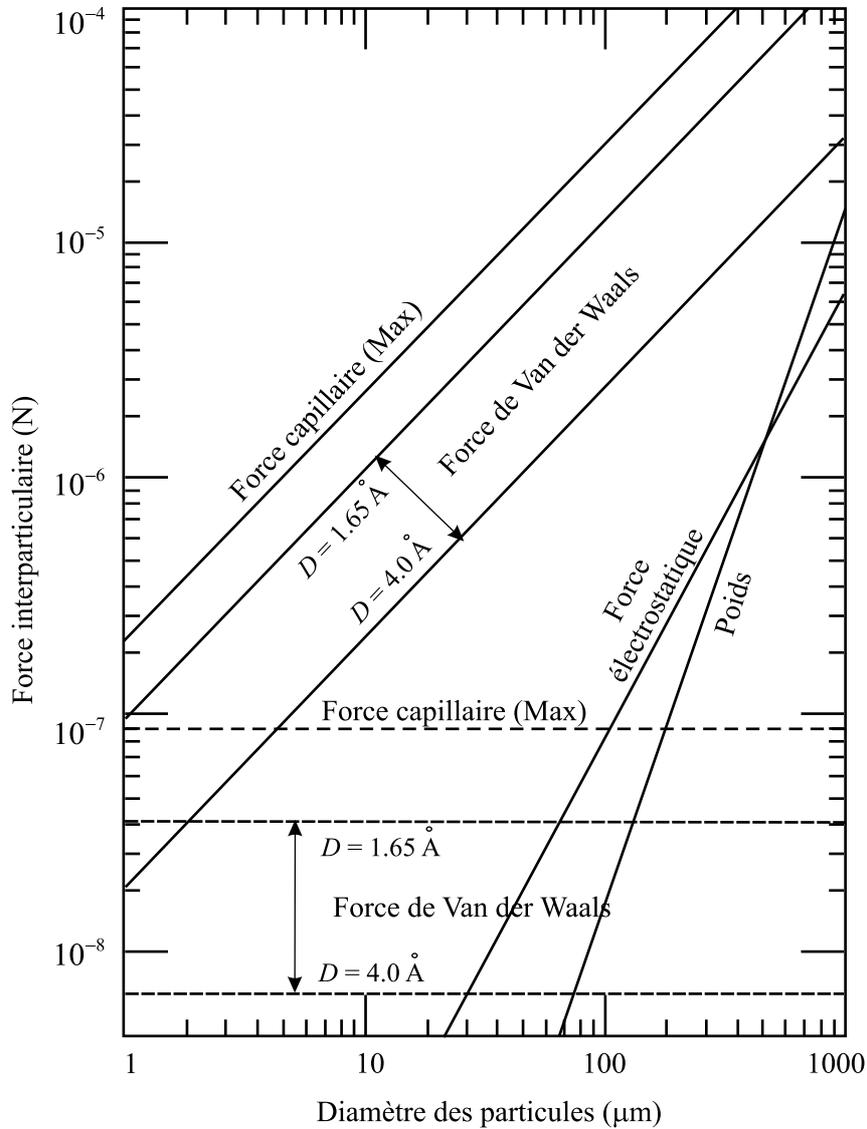


FIG. 1.9 – Comparaison des intensités de différentes forces interparticulaires pour des contacts ponctuels, dans l'air (d'après Seville et al. [2000]) ; en traits pleins, pour des grains de même taille, en pointillés, pour une aspérité de taille caractéristique  $0,1 \mu m$  en contact avec un plan. La force de Van der Waals est déterminée pour une constante de Hamaker  $A = 6,5 \cdot 10^{-20} J$  (cas du quartz) et des distances entre particules variant entre  $1,65 \text{ \AA}$  et  $4,0 \text{ \AA}$ . La force de capillarité est estimée à sa valeur maximale, lorsque les grains sont en contact :  $F_{capillaire} = 2 \pi R \sigma$ , avec  $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} N \cdot m^{-1}$  (cas de l'eau). La force électrostatique est considérée à son intensité maximale (charge de signe opposé), pour une charge surfacique de  $10 \mu C m^{-2}$ . Le poids est évalué pour une masse volumique  $\rho = 3 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$ .

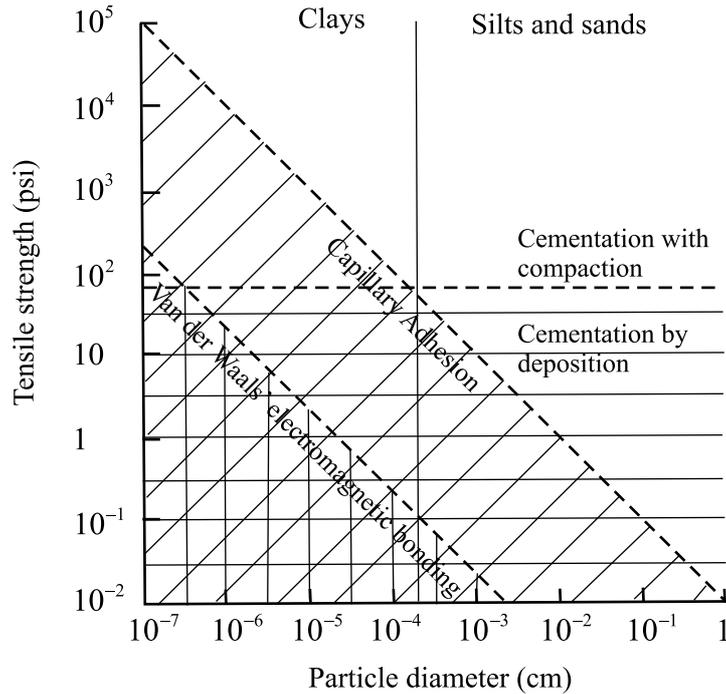


FIG. 1.10 – Contributions comparées des forces de Van der Waals, de la capillarité et de la cimentation dans le cas des sols [Mitchell, 1993].

importants que les tailles des particules sont élevées : c'est en particulier le cas pour des particules de diamètre supérieur au centième de millimètre, ce qui correspond au cas des milieux granulaires (sables).

Dans la suite, le cas de la cohésion par capillarité sera plus particulièrement étudié. Ce choix est justifié par l'importance de ce phénomène dans de nombreux domaines où la matière granulaire intervient, et sur le fait que ce mécanisme de cohésion n'est dû qu'à la seule présence de fluides (en l'occurrence l'eau et l'air) au sein du milieu granulaire.

## 1.4 La cohésion par capillarité

Dans les paragraphes précédents, on a montré qu'à l'échelle locale, les forces de capillarité jouent un rôle très important dans la cohésion entre les grains. En effet, pour des particules de tailles suffisamment petites, les forces de capillarité peuvent compenser - et même surpasser - l'action de la gravité [Duran, 1999]. Il est ainsi possible de maintenir un doublet de billes de verre par un ménisque d'eau dans le champ de pesanteur, comme le montre la figure 1.11(a). L'importance des forces de cohésion par capillarité se retrouve également à l'échelle d'un petit échantillon macroscopique. La seule présence de ponts liquides permet, par exemple, d'assurer la tenue mécanique d'un petit échantillon macroscopique composé de billes de verre de diamètre 1,5 mm (Fig. 1.11(b)).

### 1.4.1 Origines physiques de la capillarité

Les phénomènes de tension superficielle se produisent à l'interface entre deux liquides non miscibles ou entre un liquide et un gaz. L'interface liquide-gaz se comporte comme une membrane tendue caractérisée par une tension superficielle  $\sigma$  qui s'oppose à ses déformations.

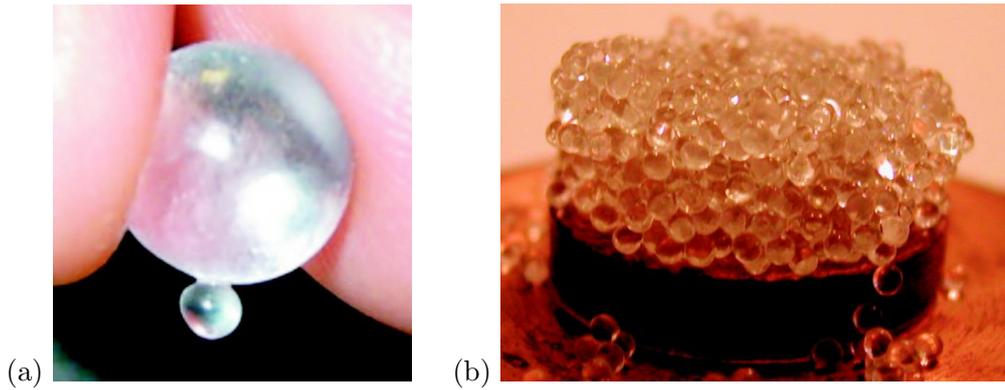


FIG. 1.11 – Effets de la cohésion par capillarité : (a) billes de verre liées par un pont liquide constitué d'eau, (b) échantillon composé de billes de verre de  $1,5\text{ mm}$  de diamètre maintenues par des ponts liquides constitués d'eau.

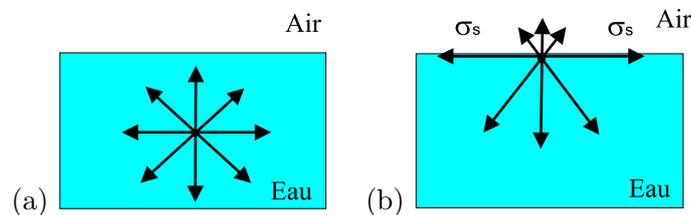


FIG. 1.12 – Forces agissant sur une molécule d'eau : (a) au sein d'une masse d'eau, (b) à l'interface eau-air.

L'origine physique de la tension superficielle est une différence dans le nombre et la nature des interactions attractives entre les molécules. A l'interface entre le liquide et le gaz, les molécules sont soumises à un ensemble de forces d'interactions non équilibrées, à la différence d'une molécule située au sein du liquide. Une molécule de liquide au sein d'une masse de liquide est soumise à des actions de même nature (Fig. 1.12(a)), alors que celle à l'interface liquide-gaz, est soumise à des actions différentes : actions dues au liquide et actions dues au gaz (Fig. 1.12(b)). Les molécules de liquide situées à l'interface sont donc attirées vers la masse de liquide et la surface du liquide est soumise à une force perpendiculaire à cette surface. C'est cette attraction qui engendre la tension superficielle  $\sigma$  à l'interface [De Gennes et al., 2002; Delage et Cui, 2000].

Bien que son origine s'explique au niveau moléculaire, la tension superficielle  $\sigma$  est une grandeur macroscopique qui peut être considérée comme une force par unité de longueur. La tension superficielle varie considérablement d'un liquide à l'autre. Pour l'eau, grâce aux liaisons hydrogène, la tension superficielle est relativement élevée (de l'ordre de  $72 \cdot 10^{-3}\text{ N/m}$  à  $25^\circ\text{C}$ ). L'effet de la tension superficielle est impressionnant : elle permet aux insectes de se tenir sur l'eau. Par contre, la tension superficielle est très sensible à la modification de la composition du liquide : l'ajout de polluants (comme les détergents par exemple) peut faire chuter considérablement sa valeur et ainsi faire couler les insectes...

Au niveau d'un pont liquide entre deux grains, grâce à la tension superficielle, l'interface liquide-gaz se comporte donc comme une membrane tendue, ce qui a pour effet de maintenir les grains ensemble. La tension superficielle est également à l'origine d'une dépression à l'intérieur du pont liquide. Lorsqu'on traverse l'interface liquide-gaz, il y a un saut de pression entre la phase gazeuse et la phase liquide. Le théorème de Laplace (1805) exprime cette différence de pression  $\Delta p = p_{\text{gaz}} - p_{\text{liquide}}$  comme le produit de la tension superficielle  $\sigma$  par la courbure  $C$  de

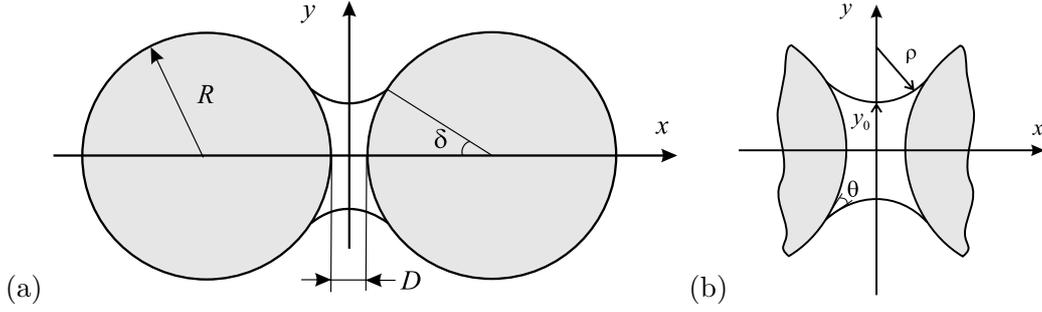


FIG. 1.13 – Pont liquide entre deux grains de même taille (cas monodisperse) : (a) vue d’ensemble du doublet capillaire, (b) détail du pont liquide.

la surface enveloppe du pont liquide au niveau de l’interface liquide-gaz :

$$\Delta p = \sigma C \quad (1.4)$$

Dans le cas d’un pont liquide de forme concave, la pression du gaz est supérieure à la pression du liquide. La différence de pression génère une action attractive entre les grains. La tension superficielle est ainsi à l’origine de la cohésion par capillarité entre deux grains grâce, d’une part, à l’interface liquide-gaz qui se comporte comme une membrane tendue et, d’autre part, grâce à l’action de la différence de pression qui a tendance à rapprocher les grains.

#### 1.4.2 Modèles de cohésion par capillarité à l’échelle locale

Devant la complexité et la diversité des formes possibles pour les grains, le milieu granulaire est très généralement assimilé à un milieu granulaire idéal pour étudier la cohésion par capillarité. Cette description du milieu granulaire est basée sur les hypothèses suivantes : les grains sont supposés sphériques et parfaitement lisses (rugosité nulle). De plus, pour l’étude de la cohésion par capillarité, le pont liquide est considéré dans une situation quasi-statique, les phénomènes de viscosité du liquide n’interviennent donc pas. L’action de la pesanteur est également négligée, en terme de force et de distorsion du pont liquide.

Le phénomène capillaire est appréhendé à l’échelle d’un “doublet capillaire” : le doublet capillaire est constitué d’une paire de grains sphériques et lisses liés par un pont liquide. Les modèles les plus fréquemment rencontrés concernent le cas de grains de même taille, que l’on appelle cas monodisperse. La description géométrique d’un doublet capillaire dans le cas monodisperse est représentée sur la figure 1.13(a). Les deux grains solides de rayon  $R$  sont séparés par une distance appelée distance intergranulaire et notée  $D$ . L’angle  $\delta$  représente l’angle de remplissage correspondant à la portion de grain solide “mouillée” par le liquide. La façon dont le liquide mouille les grains solides est caractérisée par un angle de mouillage noté  $\theta$ . L’axe  $x$  du doublet est défini comme la droite passant par les centres des grains. Cet axe  $x$  constitue un axe de symétrie pour le doublet capillaire, le pont liquide se présentant comme un volume axisymétrique dont la forme est décrite par le profil  $y(x)$ .

En ce qui concerne la force capillaire, une première expression fut proposée par Haines [1925]. La force exercée par le pont liquide entre les deux grains est calculée à partir de la différence de pression  $\Delta p = p_{\text{gaz}} - p_{\text{liquide}}$  :

$$F_H = \Delta p \pi R^2 \sin^2 \delta \quad (1.5)$$

Une correction fut apportée par Fisher [1926] qui montra qu’un deuxième terme, associé à

l'action de la tension superficielle le long du périmètre de mouillage des grains, intervenait dans l'expression de la force capillaire :

$$F_F = 2 \pi R \sigma \sin \delta \sin(\delta + \theta) \quad (1.6)$$

Il est depuis reconnu que la force capillaire est la somme des deux expressions précédentes, soit :

$$F_{capillaire} = F_H + F_F = \Delta p \pi R^2 \sin^2 \delta + 2 \pi R \sigma \sin \delta \sin(\delta + \theta) \quad (1.7)$$

ce qui correspond au double effet de la tension superficielle décrit précédemment.

Le profil  $y(x)$  du pont liquide est défini par l'équation de Laplace (Eq. 1.4) qui impose une courbure moyenne constante à l'interface liquide-gaz. Une approximation classique consiste à considérer que le profil du pont liquide prend la forme d'un arc de cercle : il s'agit de l'approximation toroïdale. Cette approche permet de décrire le doublet capillaire et la force capillaire en fonction de paramètres intimement liés à la géométrie du pont liquide [Hotta et al., 1974; Kim et Hwang, 2003; Lian et al., 1993; Pierrat et Caram, 1997; Seville et al., 2000; Urso et al., 2002]. La forme du pont liquide est définie par le rayon de courbure extérieur du pont liquide  $\rho$  et par le rayon de courbure intérieur à la demi distance intergranulaire  $y_0$  (Fig. 1.13(b)). Se pose la question de savoir dans quelle section du pont liquide exprimer la force de capillarité. Plusieurs expressions de la force de capillarité existent [Hotta et al., 1974]. Une première possibilité consiste à calculer la force de capillarité au niveau de la ligne triple (ligne de contact correspondant à l'interface liquide-solide-gaz sur le grain), ce qui permet de retrouver la relation (1.7) :

$$F_{Boundary} = \Delta p \pi R^2 \sin^2 \delta + 2 \pi R \sigma \sin \delta \sin(\delta + \theta) \quad (1.8)$$

où la valeur de  $\Delta p$  est déterminée par l'équation de Laplace au niveau de la ligne triple. Cette formulation de la force de capillarité s'appelle "Boundary method". Une alternative à cette expression est de déterminer la valeur de  $\Delta p$  au niveau du rayon de gorge  $y_0$  du pont liquide, pour obtenir :

$$F_{modif} = \pi R^2 \sin^2 \delta \sigma \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{y_0} \right) + 2 \pi R \sigma \sin \delta \sin(\delta + \theta) \quad (1.9)$$

Cette expression est également utilisée pour estimer la force de capillarité [Pierrat et Caram, 1997].

Une troisième possibilité consiste à utiliser l'aire de projection correspondant au rayon de gorge  $y_0$  du pont liquide pour déterminer le terme associé à  $\Delta p$ , et la tangente à ce rayon de gorge pour le terme associé à la tension superficielle. Cette méthode est connue sous le nom de "Gorge method" et donne :

$$F_{Gorge} = \pi y_0^2 \Delta p + 2 \pi y_0 \sigma \quad (1.10)$$

Cette relation semble donner une bonne approximation de la force capillaire [Lian et al., 1993].

A partir de ce modèle, des expressions simplifiées de la force capillaire sont possibles [Gröger et al., 2003; Lian et al., 1998]. La force capillaire est directement exprimée en fonction des rayons de courbure principaux  $\rho$  et  $y_0$  du pont liquide :

$$F = \pi \sigma y_0 \left( 1 + \frac{y_0}{\rho} \right) \quad (1.11)$$

Ces modèles décrivent la force capillaire en fonction de paramètres liés directement à la géométrie du pont liquide ; ces paramètres ne sont pas facilement accessibles par la mesure ou à partir de paramètres macroscopiques.

Les paramètres permettant de décrire le doublet capillaire peuvent être classés en deux catégories. La première catégorie concerne les paramètres que l'on peut qualifier de "géométriques", c'est-à-dire directement liés à la géométrie du pont liquide : il s'agit en particulier des rayons de courbure intérieur et extérieur du pont liquide (notés ici respectivement  $y_0$  et  $\rho$ ). La deuxième catégorie concerne les paramètres plus "physiques" qui sont liés à la configuration générale du doublet capillaire et potentiellement reliés à des grandeurs macroscopiques. Il s'agit notamment de :

- paramètres liés à la nature du liquide et de l'environnement (gaz et solide) : la tension superficielle  $\sigma$  et l'angle de mouillage  $\theta$ ,
- paramètre lié à la quantité de liquide mise en oeuvre : le volume du pont liquide  $V$  (à relier à la teneur en liquide macroscopique),
- paramètres liés à la géométrie du doublet : les rayons des grains  $R_1$  et  $R_2$  (à relier à la granularité), la distance intergranulaire  $D$  (à relier à la texture du squelette solide).

Il est intéressant d'exprimer de façon explicite la force de cohésion par capillarité en fonction de paramètres aisément mesurables (ou accessibles) et pouvant être éventuellement reliés aux paramètres macroscopiques teneur en liquide et texture du matériau. Dans cette optique, les paramètres retenus pour la description du doublet capillaire sont ceux de la deuxième catégorie.

En considérant toujours le cas monodisperse dans le cadre de l'approximation toroïdale, les travaux d'Israelachvili [1992] suggèrent une relation décrivant la force capillaire comme une fonction de la distance intergranulaire  $D$  [Bocquet et al., 2002] :

$$F = 2\pi\sigma R \cos\theta \left(1 - \frac{D}{2\rho}\right) \quad (1.12)$$

Cette relation tient compte de la distance intergranulaire  $D$ , mais également du rayon  $\rho$  de l'arc de cercle décrivant le profil du pont liquide. En poursuivant les développements théoriques, il est possible d'obtenir une relation entre la force capillaire, la distance intergranulaire  $D$  et le volume du pont liquide  $V$  [Maugis, 1987; Pitois et al., 2000] :

$$F = 2\pi\sigma R \cos\theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2V}{\pi R D^2}}}\right) \quad (1.13)$$

Cette relation s'inscrit dans le cadre d'un matériau monodisperse avec approximation toroïdale. Elle suppose un pont liquide de forme cylindrique afin de déterminer le volume de liquide mis en oeuvre pour former le pont. Cette relation présente l'inconvénient de ne pas être définie pour les distances intergranulaires nulles. De plus, l'approche toroïdale ne permet pas de conserver une courbure constante au pont liquide et pose des problèmes quant à la définition de la rupture du pont liquide.

Pour s'affranchir de ces difficultés, un modèle a été développé par Mikami et al. [1998], dans le cas d'un matériau monodisperse, en tenant compte de la forme exacte du profil du pont liquide. A partir du modèle théorique, une résolution numérique des équations est réalisée. Une approximation des solutions numériques obtenues permet de proposer une relation explicite

décrivant la force capillaire en fonction des paramètres du doublet capillaire  $D$ ,  $V$ ,  $\sigma$  et  $\theta$  :

$$F = 2\pi R\sigma \left[ c + \exp\left(a \frac{D}{R} + b\right) \right]$$

$$a = -1,1 \left(\frac{V}{R^3}\right)^{-0,53} \quad (1.14)$$

$$b = (-0,34 \ln\left(\frac{V}{R^3}\right) - 0,96) \theta^2 - 0,019 \ln\left(\frac{V}{R^3}\right) + 0,48$$

$$c = 0,0042 \ln\left(\frac{V}{R^3}\right) + 0,078$$

Cette relation est fort intéressante de par son caractère explicite lié à des paramètres aisément mesurables et potentiellement reliés à des paramètres macroscopiques du matériau.

L'inconvénient de cette modélisation, comme toutes les précédentes, réside dans le fait que l'étude de la capillarité est limitée au cas de grains de même taille. Cette restriction au cas monodisperse ne permet pas de tenir compte de la diversité des tailles des grains rencontrés dans les milieux granulaires. En particulier, cette restriction condamne beaucoup d'applications aux sols pour lesquelles la granularité joue un rôle important dans l'organisation de la texture et dans le comportement mécanique

A notre connaissance, peu d'études ont été réalisées dans le cas de grains de tailles différentes (cas polydisperse). Des modèles ont été développés en adoptant une approche toroïdale [Fairbrother et Simons, 1998; Rossetti et Simons, 2003] ou une fonction polynomiale du second degré [Pepin et al., 2000] pour décrire la forme du profil du pont liquide entre deux grains de tailles différentes. Cependant ces modèles ne proposent pas de relation explicite force capillaire  $F = F(D, V...)$ , mais décrivent la force capillaire à l'aide de paramètres géométriques définissant la forme du pont liquide. On peut citer dans ce cadre les travaux de Willett et al. [2000] qui proposent une relation explicite du type  $F = F(D, V...)$  pour la force capillaire. Le cas de ponts liquides entre grains de tailles différentes est ramené au cas monodisperse en utilisant l'approximation de Derjaguin : le rayon équivalent considéré pour les grains est :  $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ . La force capillaire adimensionnée est notée  $F^* = F/2\pi R\sigma$ , le volume adimensionné s'écrit  $V^* = \frac{V}{R^3}$ . La relation décrivant la force est obtenue par une approximation des solutions numériques. Elle s'exprime en fonction de  $S^+ = \frac{D}{R} \sqrt{V^*}$  sous la forme :

$$\ln F^* = f_1 - f_2 \exp(f_3 \ln S^+ + f_4 (\ln S^+)^2) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (-0,44507 + 0,050832\theta - 1,1466\theta^2) + (-0,1119 - 0,000411\theta - 0,149\theta^2) \ln V^* \\ &\quad + (-0,012101 - 0,0036456\theta - 0,01255\theta^2) (\ln V^*)^2 \\ &\quad + (-0,0005 - 0,0003505\theta - 0,00029076\theta^2) (\ln V^*)^3 \\ f_2 &= (1,9222 - 0,57473\theta - 1,2918\theta^2) + (-0,0668 - 0,1201\theta - 0,22574\theta^2) \ln V^* \\ &\quad + (-0,0013375 - 0,0068988\theta - 0,01137\theta^2) (\ln V^*)^2 \\ f_3 &= (1,268 - 0,01396\theta - 0,23566\theta^2) + (0,198 + 0,092\theta - 0,06418\theta^2) \ln V^* \\ &\quad + (0,02232 + 0,02238\theta - 0,009853\theta^2) (\ln V^*)^2 \\ &\quad + (0,0008585 + 0,001318\theta - 0,00053\theta^2) (\ln V^*)^3 \\ f_4 &= (-0,010703 + 0,073776\theta - 0,34742\theta^2) + (0,03345 + 0,04543\theta - 0,09056\theta^2) \ln V^* \\ &\quad + (0,0018574 + 0,004456\theta - 0,006257\theta^2) (\ln V^*)^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cette relation  $F_{capillaire}^* = F_{capillaire}^*(S^+, V^*)$  est établie dans le cas d'un pont liquide dont le volume est approximé par une forme cylindrique, le profil par un arc de cercle, la force capillaire

est réduite à la seule contribution de la différence de pressions, et les rayons sont remplacés par un rayon équivalent, se ramenant ainsi au cas monodisperse. De plus, la relation explicite obtenue est fort complexe et n'est pas définie dans le cas d'une distance intergranulaire nulle. Afin de s'affranchir de ces deux derniers points, une relation plus simple a également été proposée par Willett et al. [2000] sous la forme :

$$F = 2\pi R\sigma \frac{(1 - \cos\delta)\cos\theta}{(1 - \cos\delta) + 2D} \quad (1.17)$$

Dans ce cas, la force est exprimée en fonction des paramètres géométriques du pont liquide qui sont difficilement accessibles.

### 1.4.3 Rupture du pont liquide

L'étude de la rupture des ponts liquides est également un aspect important de la compréhension de la cohésion par capillarité. La rupture du pont liquide est gouvernée par des considérations énergétiques. En effet, la rupture du pont liquide se produit afin de minimiser la surface de l'interface liquide-gaz : lorsque la surface du pont liquide en contact avec l'air ne correspond plus à une surface d'énergie minimale, le pont liquide est rompu. Deux gouttes se forment à la surface des grains. L'aire totale de l'interface liquide-gaz formé par ces deux gouttes est inférieure à l'aire de l'interface liquide-gaz du pont liquide originel [Pepin et al., 2000].

Un pont liquide entre deux grains est donc "stable" jusqu'à une certaine valeur de la distance intergranulaire, à laquelle il se rompt. A partir de résolutions numériques de l'équation de Laplace-Young, certains auteurs ont mis en évidence l'existence de deux solutions qui convergent en une seule pour une distance intergranulaire critique qui est assimilée à la distance de rupture [Erle et al., 1971; Bisschop et Rigole, 1982]. Des critères de rupture arbitraires, basés sur le rayon de gorge ou l'angle de remplissage, ont alors été proposés.

En se basant sur des considérations énergétiques, dans le cas monodisperse, Lian et al. [1993] ont proposé la relation (1.18) entre la distance de rupture  $D_{rupture}$ , le volume du pont liquide  $V$ , et l'angle de remplissage  $\theta$  :

$$D_{rupture} = (1 + 0,5\theta) V^{1/3} \quad (1.18)$$

Cette relation est valable pour les angles de mouillage inférieurs à  $40^\circ$ . Fairbrother et Simons [1998] ont vérifié le bon accord entre des valeurs de distances de rupture déterminées expérimentalement et les valeurs calculées à l'aide de la relation (1.18) dans les mêmes conditions. La validité de la relation (1.18) a aussi été confirmée théoriquement par Dai et Lu [1998] grâce à l'étude de la stabilité d'un pont liquide de forme cylindrique.

Dans le cas polydisperse, Willett et al. [2000] ont proposé un critère théorique de rupture qui exprime la distance de rupture  $D_{rupture}$  en fonction de la taille des grains  $R_1$  et  $R_2$ , du volume du pont liquide  $V$ , et de l'angle de remplissage  $\theta$  :

$$D_{rupture} = \left(1 + 0,25\theta \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)\right) \left(V^{1/3} + \left(\frac{R_1}{2R_2} - \frac{2}{5}\right) V^{2/3}\right) \quad (1.19)$$

### 1.4.4 Conclusion

De nombreux modèles permettent d'évaluer la force de capillarité aussi bien dans le cas monodisperse que dans le cas polydisperse. Cependant, beaucoup d'entre eux expriment la force capillaire en fonction de paramètres géométriques du pont liquide, ou proposent des relations

relativement mal adaptées à une implémentation dans un code de calcul.

Pour améliorer la compréhension de la cohésion capillaire dans les milieux granulaires humides polydisperses, il s'avère utile de disposer d'une expression simple de la force de capillarité à l'échelle locale. Cette expression doit, en particulier, répondre aux deux exigences suivantes :

- décrire l'évolution de la force de façon explicite en fonction de paramètres accessibles par la mesure et reliables à des grandeurs macroscopiques du matériau granulaire (à savoir la distance intergranulaire  $D$ , le volume de pont liquide  $V$ , la taille des particules...),
- être suffisamment simple pour que son implémentation dans un code de calcul en éléments discrets permette des simulations de durée "raisonnable". En effet, le développement des moyens de calcul et l'utilisation de méthodes numériques en éléments discrets permettent d'effectuer des simulations sur des milieux granulaires humides en prenant en compte des lois de capillarité. De nombreux travaux de simulations numériques [Gröger et al., 2003; Lian et al., 1998; Mikami et al., 1998] ont été réalisés sur des milieux granulaires humides monodisperses ; l'utilisation d'un modèle local de cohésion capillaire dans le cas polydisperse devrait permettre de compléter la connaissance des effets de la capillarité dans les milieux granulaires.

L'étude complète d'un doublet capillaire constitué de grains de tailles différentes et la détermination d'une expression de la force capillaire de ce type font l'objet du deuxième chapitre.



# Chapitre 2

## Influence de l'eau à l'échelle locale

### 2.1 Modélisation d'un doublet capillaire

La cohésion par capillarité est appréhendée à l'échelle d'une paire de grains : il s'agit d'étudier la façon dont deux grains de tailles différentes sont liés par un pont liquide. L'objectif est d'exprimer la force de capillarité en fonction de paramètres physiques : distance intergranulaire, volume de pont liquide, taille des grains... Par la suite, on parlera de "doublet capillaire" pour désigner une paire de grains liés par un pont liquide.

#### 2.1.1 Cadre de l'étude et hypothèses

Afin d'établir un modèle local de cohésion par capillarité, le milieu granulaire est assimilé à un milieu granulaire idéal en retenant un certain nombre d'hypothèses.

Devant la diversité des formes possibles pour les grains, la première hypothèse consiste à assimiler les grains à des sphères. Les grains sont de plus supposés de même nature, c'est-à-dire que les propriétés physiques et chimiques des grains sont identiques. Les grains sont donc supposés être tous constitués du même matériau, ou du moins de matériaux équivalents.

La modélisation géométrique du doublet capillaire retenue pour l'étude est représentée sur la figure 2.1(a). Les rayons des grains sont notés  $R_1$  et  $R_2$  ;  $R_2$  désignera par la suite le rayon du grain de plus grande taille. La distance intergranulaire est notée  $D$ , les angles  $\delta_1$  et  $\delta_2$  représentent les angles de remplissage, qui correspondent aux portions de grains "mouillées" par le liquide. La façon dont le liquide mouille les grains solides est caractérisée par un angle de mouillage noté  $\theta$ . L'axe  $x$  du doublet est défini comme la droite passant par les centres des grains. Le pont liquide se présente alors comme un volume axisymétrique d'axe  $x$ , dont la forme est décrite par le profil  $y(x)$ . Au niveau de la plus petite section du pont liquide se trouve le rayon de gorge  $y_0$  qui correspond au point le plus bas du profil du pont liquide (Fig. 2.1(b)).

La surface des grains présente toujours une certaine rugosité qui peut modifier la force capillaire [Bocquet et al., 2002]. En relation avec cette rugosité, plusieurs régimes de variation du phénomène de capillarité peuvent être distingués, pour de faibles teneurs en liquide [Halsey et Levine, 1998] :

- Le "régime d'aspérités" (Fig. 2.2(a)) apparaît lorsque de très faibles quantités de liquide se trouvent dans le milieu. Le mécanisme capillaire se traduit par l'accumulation de liquide autour d'un petit nombre d'aspérités en contact. Ce régime se maintient tant que la région mouillée par le pont liquide n'excède pas la distance séparant deux irrégularités (stries ou sillons).
- Lorsque la quantité de liquide augmente, une extension latérale des ponts liquides se produit, il s'agit du "régime de rugosité" (Fig. 2.2(b)). Les ponts liquides grossissent, remplissant de liquide certains microsillons.

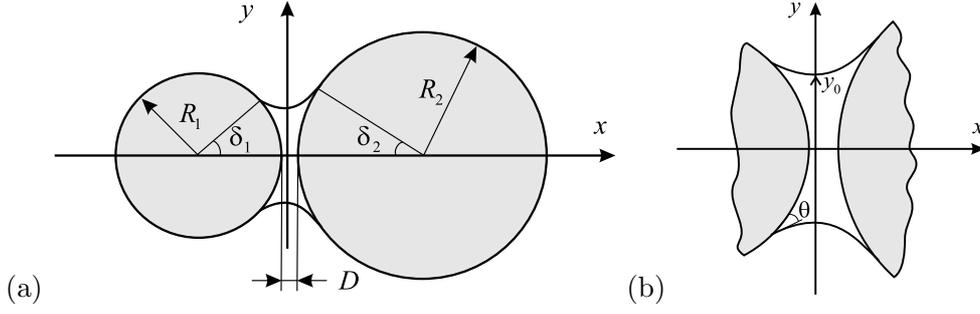


FIG. 2.1 – Pont liquide entre deux grains de tailles différentes (cas polydisperse) : (a) vue d’ensemble du doublet capillaire, (b) détail du pont liquide.

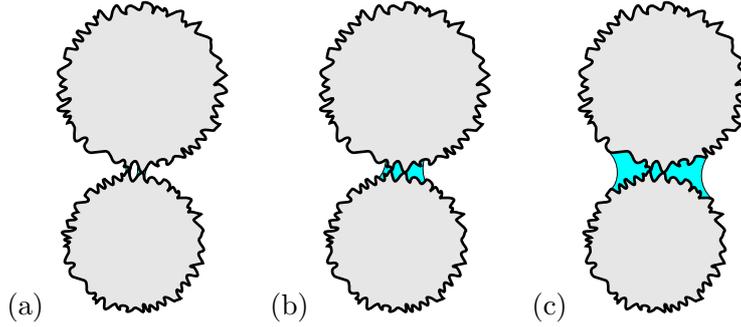


FIG. 2.2 – Capillarité et rugosité : (a) régime d’aspérités, (b) régime de rugosité, (c) régime sphérique.

- Quand l’extension latérale de l’ensemble liquide entre grains se stabilise, le rayon de courbure moyen des grains devient prépondérant par rapport aux grandeurs caractéristiques des aspérités, le “régime sphérique” est atteint (Fig. 2.2(c)). Dans ce régime, la rugosité n’influe que très peu la force de capillarité et celle-ci peut être étudiée avec l’hypothèse de surfaces lisses pour les grains.

Dans la suite de l’étude, la surface des grains est supposée parfaitement lisse : ce qui induit une rugosité nulle.

Il paraît raisonnable de négliger les effets de la gravité pour les faibles volumes de ponts liquides. D’une manière générale, ces effets peuvent être négligés pour de faibles valeurs du nombre de Bond [Pitois, 1999], soit :

$$B_o = \frac{L^2 \Delta\rho g}{\sigma} \ll 1 \quad (2.1)$$

où  $\Delta\rho$  est la différence de masse volumique entre les deux phases constituant l’interface et  $L$  une longueur caractéristique du système. Dans le cas de particules de sols liées par un pont liquide constitué d’eau, la tension superficielle  $\sigma$  est de l’ordre de  $73.10^{-3} N/m$  pour une température d’environ  $20^\circ C$  et la différence de densité est telle que  $\Delta\rho \approx 1000 kg/m^3$ . Si on considère comme longueur caractéristique  $L$  du système le rayon moyen  $R$  des grains avec  $R = 1 mm$ , alors  $B_o = 0,13$ , ce qui vérifie la relation (2.1). Pour la modélisation du doublet capillaire, l’effet de la gravité sera donc négligé, aussi bien en terme de distorsion du pont liquide qu’en terme de force.

Le pont liquide est étudié dans une configuration quasi-statique. Les effets de viscosité sont négligés : en effet, la viscosité du liquide et les vitesses relatives entre grains sont supposées être

suffisamment faibles pour que la force dynamique du pont liquide soit négligée. Pour vérifier la validité de cette hypothèse, il faut examiner la contribution de la viscosité d'une part, et de la tension superficielle, d'autre part, au niveau des forces exercées sur le pont liquide ; le nombre capillaire adimensionné  $C_a = \frac{\mu v}{\sigma}$ , c'est-à-dire le rapport de la force dynamique à la force statique, permet de réaliser cette comparaison [Mikami et al., 1998]. Les effets de la viscosité dominent les effets de la force de cohésion par capillarité quand  $C_a$  est plus grand que 1 ; au contraire, les effets de la tension superficielle sont prédominants quand  $C_a \leq 10^{-3}$ . Iveson et al. [2002] ont également observé que, pour des valeurs du nombre capillaire inférieures à  $10^{-4}$ , le comportement macroscopique d'échantillons granulaires est indépendant de la vitesse de déformation. Dans le cas de l'eau à  $20^\circ C$ , la tension superficielle  $\sigma$  vaut  $73.10^{-3} N/m$  et la viscosité  $\mu$  est de  $1,01.10^{-3} Pa.s$ . En estimant que la vitesse relative entre les grains n'excède pas  $0,01 m/s$ , le nombre capillaire est tel que  $C_a < 1,38.10^{-4}$ . L'hypothèse est donc vérifiée et, de ce fait, on peut considérer que les grains peuvent se déplacer tangentiellement sans résistance visqueuse : le pont liquide n'exerce qu'une force normale entre les grains.

En conclusion, les hypothèses suivantes sont retenues pour la modélisation de la cohésion par capillarité à l'échelle d'un doublet capillaire :

- les grains sont supposés parfaitement sphériques et de même nature (propriétés physiques et chimiques),
- la surface des grains est supposée parfaitement lisse (rugosité nulle),
- l'action de la pesanteur est négligée aussi bien en terme de force qu'en terme de distorsion du pont liquide,
- le pont liquide est étudié dans une configuration quasi-statique ; les effets de la viscosité sont négligés.

### 2.1.2 Profil du pont liquide entre deux grains de tailles différentes

Le profil du pont liquide, qui n'est pas connu de façon explicite, est régi par une équation différentielle qui conditionne la forme du pont liquide entre les deux grains. Cette équation peut être établie en se basant sur des approches a priori différentes : l'étude de l'équilibre d'une portion de pont liquide, la recherche de la forme d'une surface d'énergie minimale ou bien l'équation de Laplace.

#### Équilibre d'une portion de pont liquide

En isolant un élément du pont liquide de très faible épaisseur  $dx$ , on obtient une portion de pont liquide centrée sur l'axe  $x$  du doublet ayant sensiblement la même forme qu'un tronc de cône de petit rayon  $y(x_1)$  et de grand rayon  $y(x_2)$  (Fig. 2.3).

Les actions mécaniques exercées sur cet élément du pont liquide sont, d'une part, les forces dues aux pressions et, d'autre part, les forces générées par la tension superficielle  $\sigma$  du liquide.

Le liquide en contact avec cette portion du pont liquide exerce une force de pression sur les deux sections circulaires orthogonales à l'axe  $x$  du doublet. Le gaz présent dans l'espace poral génère quant à lui une action de pression orthogonalement à la surface libre. La résultante de ces actions de pression est portée par l'axe du doublet et vaut :

$$(p_{\text{gaz}} - p_{\text{liquide}}) \pi (y^2(x_2) - y^2(x_1)) = \Delta p \pi (y^2(x_2) - y^2(x_1)) \quad (2.2)$$

Dans chacune des sections extrémales, la tension superficielle  $\sigma$  du liquide génère une action en chacun des points de la membrane extérieure du pont liquide (c'est-à-dire au niveau de l'interface liquide-gaz). Ces actions élémentaires sont orientées d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $x$  du doublet et s'écrivent en projection sur l'axe  $x$ , au niveau de la section d'abscisse  $x_i$  :

$$2 \pi y(x_i) \sigma \cos \beta_i \quad (2.3)$$

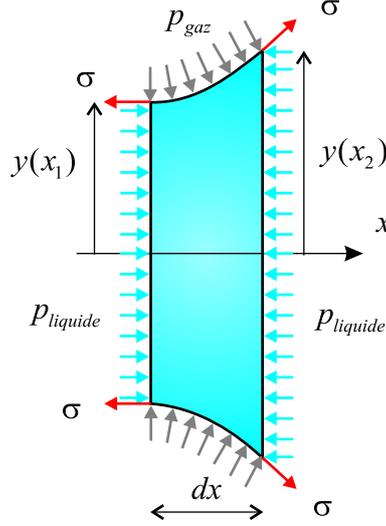


FIG. 2.3 – Equilibre mécanique d'une portion de pont liquide.

L'équilibre mécanique de cet élément de pont liquide permet alors d'écrire (projection sur  $x$ ) :

$$\Delta p \pi (y^2(x_2) - y^2(x_1)) + 2 \pi y(x_2) \sigma \cos \beta_2 - 2 \pi y(x_1) \sigma \cos \beta_1 = 0 \quad (2.4)$$

Les angles  $\beta_i$  peuvent être exprimés en fonction des dérivées du profil du ménisque à travers la relation  $\tan \beta_i = y'(x_i)$ . De plus, en utilisant le fait que  $\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ , il est possible de réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\Delta p \pi (y^2(x_2) - y^2(x_1)) + 2 \pi y(x_2) \sigma \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x_2)}} - 2 \pi y(x_1) \sigma \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}} = 0 \quad (2.5)$$

ou encore :

$$\Delta p \pi (y(x_2) - y(x_1))(y(x_2) + y(x_1)) + 2 \pi \sigma \left( \frac{y(x_2)}{\sqrt{1+y'^2(x_2)}} - \frac{y(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}} \right) = 0 \quad (2.6)$$

En divisant cette équation par  $dx$  (non nul), et en effectuant un passage à la limite pour  $dx$  tendant vers zéro, on obtient les expressions suivantes pour les différents termes constitutifs de l'équation :

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(y(x_2) - y(x_1))}{dx} = y'(x) \quad (2.7)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} (y(x_2) + y(x_1)) = 2y(x) \quad (2.8)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{y(x_2)}{\sqrt{1+y'^2(x_2)}} - \frac{y(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}} \right)}{dx} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} - \frac{y(x) y'(x) y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} \quad (2.9)$$

On obtient ainsi l'équation suivante :

$$2 \Delta p \pi y(x) y'(x) + 2 \pi \sigma \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} - \frac{y(x) y'(x) y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} \right) = 0 \quad (2.10)$$

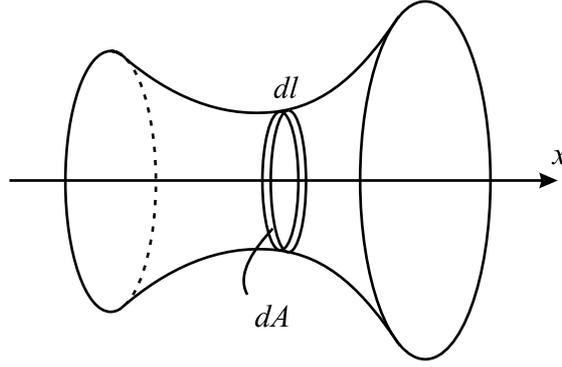


FIG. 2.4 – Surface d'énergie minimale

soit :

$$y'(x) \left( \Delta p y(x) + \sigma \frac{1 + y'^2(x) - y(x) y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} \right) = 0 \quad (2.11)$$

En écartant le cas où la dérivée du profil est nulle pour tout  $x$ , on obtient l'équation différentielle régissant la forme du profil du ménisque :

$$\Delta p y(x) + \sigma \frac{1 + y'^2(x) - y(x) y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} = 0 \quad (2.12)$$

### Approche thermodynamique : recherche d'une surface d'énergie minimale

Le pont liquide prend une forme telle que l'interface liquide-gaz corresponde à une surface d'énergie minimale. La température et la pression externe (pression du gaz) sont considérées comme constantes. Le potentiel thermodynamique considéré pour l'étude s'écrit :  $G^* = F + p_{ext} V$ , où  $F$  est l'énergie libre.

Une petite variation de  $G^*$  s'écrit alors :

$$\delta G^* = \sigma \delta A - p_{int} \delta V + p_{ext} \delta V \quad (2.13)$$

où  $A$  est l'aire de la surface considérée,  $p_{int}$  la pression de liquide et  $p_{ext}$  la pression du gaz.

L'interface liquide-gaz est une surface de révolution d'axe  $x$ , dont la forme est définie par la fonction  $y(x)$  qui représente l'ordonnée du profil au point d'abscisse  $x$ . La surface étant à l'équilibre, une variation  $\delta y$  de la fonction  $y(x)$  doit entraîner une variation  $\delta G^* = 0$  (le potentiel  $G^*$  est minimum).

En utilisant les notations de la figure 2.4, il est possible de définir :

– la longueur d'un élément de profil de dimension à la base  $dx$  :

$$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (2.14)$$

– l'aire d'un élément de surface de dimension à la base  $dx$  :

$$dA = 2 \pi y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (2.15)$$

– le volume de ce même élément :

$$dV = \pi y^2(x) dx \quad (2.16)$$

L'équation (Eq. 2.13) s'écrit alors :

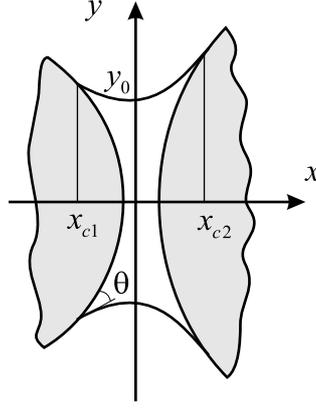


FIG. 2.5 – Position de la ligne triple sur les grains.

$$0 = \delta G^* = (p_{ext} - p_{int}) \int \delta(dV) + \sigma \int \delta(dA) \quad (2.17)$$

ou encore, en notant  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$  les abscisses correspondant au contact entre le pont liquide et les grains (ligne triple définissant l'interface solide-liquide-gaz) (Fig. 2.5) :

$$0 = 2\pi \Delta p \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y(x) \delta y(x) dx + 2\pi \sigma \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \left( \delta y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} + \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \delta y'(x) \right) dx \quad (2.18)$$

En effectuant une intégration par parties, l'équation devient :

$$0 = \Delta p \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y(x) \delta y(x) dx + \sigma \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \sqrt{1 + y'^2(x)} \delta y(x) dx + \sigma \left[ \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \delta y(x) \right]_{x_{c1}}^{x_{c2}} - \sigma \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} d \left( \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \right) \delta y(x) dx \quad (2.19)$$

Cette dernière expression est nulle pour toutes valeurs de la fonction  $\delta y$ . Il est donc possible de choisir  $\delta y$  telle que  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  :

$$0 = \Delta p \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y(x) \delta y(x) dx + \sigma \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \sqrt{1 + y'^2(x)} \delta y(x) dx - \sigma \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} d \left( \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \right) \delta y(x) dx \quad (2.20)$$

de plus

$$d \left( \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \right) = \frac{(y'^2(x) + y(x) y''(x)) (1 + y'^2(x)) - y(x) y'^2(x) y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} \quad (2.21)$$

d'où

$$0 = \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \left( \Delta p y(x) + \sigma \left( \frac{1 + y'^2(x) - y(x) y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} \right) \right) \delta y dx \quad (2.22)$$

Les fonctions considérées étant continues, il faut, pour que cette intégrale s'annule partout quelle que soit la valeur de  $\delta y(x)$ , que l'on ait en tout point :

$$\Delta p y(x) + \sigma \frac{1 + y'^2(x) - y(x) y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} = 0 \quad (2.23)$$

On obtient ainsi la même équation différentielle (Eq. 2.12).

### Équation de Laplace

Le théorème de Laplace (1805) établit que l'accroissement de pression hydrostatique  $\Delta p$  qui se produit quand on traverse la surface de séparation de deux fluides, est égal au produit de la tension superficielle  $\sigma$  par la courbure de la surface  $C = \frac{1}{\rho_{int}} + \frac{1}{\rho_{ext}}$ , soit :

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{\rho_{int}} + \frac{1}{\rho_{ext}} \right) \quad (2.24)$$

où  $\rho_{int}$  et  $\rho_{ext}$  sont les rayons de courbure algébriques de la surface [De Gennes et al., 2002].

Dans le cas d'un pont liquide dont la forme est définie par le profil  $y(x)$ , l'équation de Laplace permet d'écrire au niveau de l'interface liquide-gaz :

$$\frac{p_{liquide} - p_{gaz}}{\sigma} = \frac{1}{\rho_{int}} + \frac{1}{\rho_{ext}} \quad (2.25)$$

avec la courbure intérieure de la surface du pont liquide :

$$\frac{1}{\rho_{int}} = \frac{1}{y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}} \quad (2.26)$$

et la courbure extérieure de la surface du pont liquide :

$$\frac{1}{\rho_{ext}} = \frac{-y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} \quad (2.27)$$

l'équation (Eq. 2.25) peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}} - \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} = \frac{p_{liquide} - p_{gaz}}{\sigma} \quad (2.28)$$

ce qui donne :

$$\frac{(1 + y'^2(x)) - y(x) y''(x)}{y(x) (1 + y'^2(x))^{3/2}} = \frac{p_{liquide} - p_{gaz}}{\sigma} \quad (2.29)$$

et donc finalement :

$$\Delta p y(x) (1 + y'^2(x))^{3/2} + \sigma (1 + y'^2(x) - y(x) y''(x)) = 0 \quad (2.30)$$

### Conclusion : Équation différentielle définissant la forme du pont liquide

Les trois approches précédentes, bien que différentes dans leur nature, conduisent à une même équation différentielle définissant la forme de la surface du pont liquide entre deux grains :

$$\Delta p y(x) + \sigma \frac{1 + y'^2(x) - y(x) y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} = 0 \quad (2.31)$$

Il est intéressant de remarquer que lorsque  $\Delta p = 0$ , le profil  $y(x)$  est celui d'une surface de révolution à courbure nulle comme le montre l'équation (2.25). Le profil a alors la forme d'une "chaînette" et peut s'écrire, en notant  $y_0$  le rayon de gorge (ordonnée à l'origine), sous la forme :

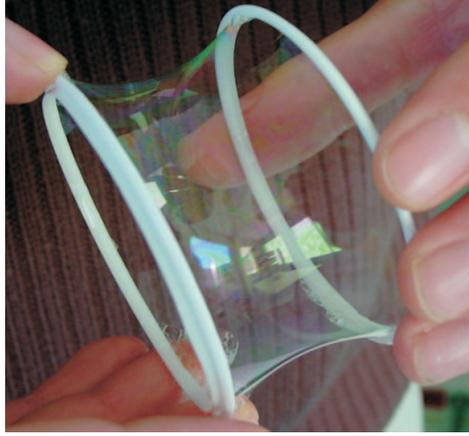


FIG. 2.6 – Film de savon entre deux anneaux circulaires : le profil du film de savon correspond à une “chaînette”.

$$y(x) = y_0 \cosh\left(\frac{x}{y_0}\right) \quad (2.32)$$

Il s’agit par exemple de la forme d’un film de savon tendu entre deux anneaux circulaires, comme l’illustre la photographie de la figure 2.6.

### 2.1.3 Géométrie du pont liquide

La modélisation du pont liquide doit intégrer les deux grandeurs  $V$  (volume de pont liquide), d’une part, et  $D$  (distance intergranulaire), d’autre part, afin de conserver un lien avec les grandeurs macroscopiques teneur en eau et structure du milieu granulaire. Les deux grandeurs  $V$  et  $D$  dépendent de la configuration géométrique du pont liquide et sont liées à la position de l’interface solide-liquide-gaz sur les grains.

#### Volume du pont liquide

Le volume du pont liquide entre les grains est calculé comme étant égal au volume recouvert par la surface correspondant à l’interface liquide-gaz, auquel sont soustraits les volumes correspondants aux portions de grains “mouillées” par le pont liquide. Le volume  $V$  du pont liquide s’exprime alors sous la forme suivante :

$$V = \pi \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y^2(x) dx - V_1 - V_2 \quad (2.33)$$

Dans cette expression, les termes  $V_1$  et  $V_2$  désignent les volumes des portions de grains solides recouvertes par le pont liquide. Ces portions “mouillées” par le pont liquide sont des calottes sphériques (parties grisées sur la figure 2.7 (a)), de volumes respectifs :

$$V_j = \frac{1}{3} \pi R_j^3 (1 - \cos\delta_j)^2 (2 + \cos\delta_j), \quad j = 1, 2 \quad (2.34)$$

Les termes  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$  sont les abscisses correspondant à la position de la ligne triple, c’est-à-dire la ligne définissant l’interface solide-liquide-gaz, respectivement sur le grain 1 et sur le grain 2. Le volume  $V$  du pont liquide s’écrit donc :

$$V = \pi \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y^2(x) dx - \frac{1}{3} \pi R_1^3 (1 - \cos\delta_1)^2 (2 + \cos\delta_1) - \frac{1}{3} \pi R_2^3 (1 - \cos\delta_2)^2 (2 + \cos\delta_2) \quad (2.35)$$

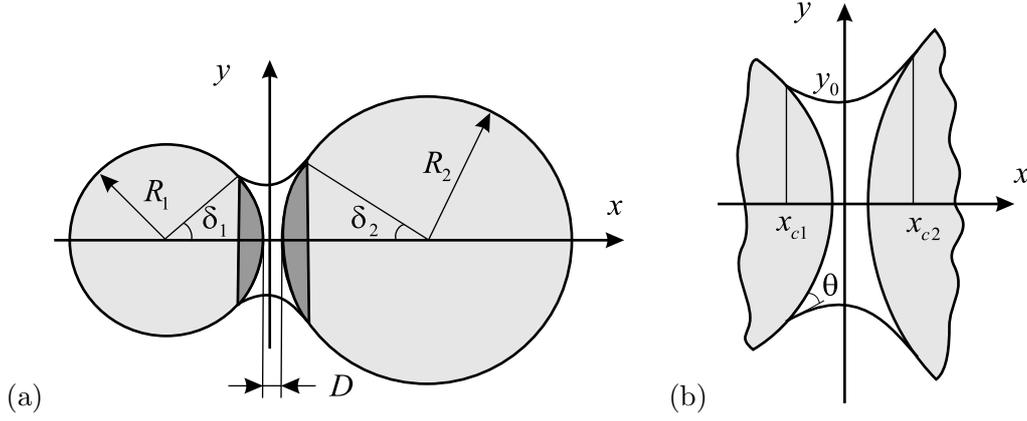


FIG. 2.7 – Pont liquide entre deux grains de tailles différentes : (a) portions de grains recouvertes par le pont liquide, (b) position de la ligne triple sur les grains.

### Distance intergranulaire

La distance intergranulaire  $D$  est la distance de séparation entre les deux grains. Son expression est déterminée grâce à la géométrie du pont liquide, à travers les valeurs de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$  :

$$D = x_{c2} - R_2(1 - \cos\delta_2) - x_{c1} - R_1(1 - \cos\delta_1) \quad (2.36)$$

#### 2.1.4 La force de cohésion par capillarité

La force capillaire entre les grains résulte de la combinaison de deux forces : d'une part, la force de tension superficielle du liquide et, d'autre part, la force due à la différence de pression entre l'air présent dans l'espace poral et l'eau constituant le pont liquide (voir chapitre 1).

La force capillaire est calculée au niveau de la plus petite section du pont liquide, c'est-à-dire au niveau du rayon de "gorge"  $y_0$ , et s'écrit :

$$F_{capillaire} = 2\pi y_0 \sigma + \pi y_0^2 \Delta p \quad (2.37)$$

#### 2.1.5 Conclusion

Le cas d'un pont liquide entre deux grains constitue une parfaite illustration d'un système avec couplage forme-force. En effet, la forme du pont liquide et la force capillaire sont intimement liées comme le montrent les équations précédentes (Eq. 2.31 à 2.37). La détermination de la configuration du pont liquide et de la force capillaire nécessite la résolution d'un système couplé dans lequel intervient une équation différentielle du second degré non linéaire dont la résolution analytique est particulièrement délicate. L'étude de la cohésion par capillarité nécessite donc une résolution numérique des équations :

$$\begin{aligned} \Delta p y(x) + \sigma \frac{1+y'^2(x)-y(x)y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} &= 0 \\ V &= \pi \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y^2(x) dx - \frac{1}{3} \pi R_1^3 (1 - \cos\delta_1)^2 (2 + \cos\delta_1) - \frac{1}{3} \pi R_2^3 (1 - \cos\delta_2)^2 (2 + \cos\delta_2) \\ D &= x_{c2} - R_2(1 - \cos\delta_2) - x_{c1} - R_1(1 - \cos\delta_1) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$F_{capillaire} = 2\pi y_0 \sigma + \pi y_0^2 \Delta p$$

Ce système d'équations est complété par les équations définissant les conditions de raccordement du pont liquide sur les grains (ces équations sont détaillées à la section suivante). Dans le système d'équations, interviennent les grandeurs  $D, V, R_1, R_2, \theta, \sigma, \Delta p, y, x_{c1}, x_{c2}, \delta_1$  et  $\delta_2$ . Les grandeurs  $R_1, R_2, \theta$  et  $\sigma$  seront considérées comme des paramètres, c'est-à-dire qu'ils sont connus au cours d'une résolution numérique. Les grandeurs  $\Delta p$  et  $\delta_1$  constituent les variables d'entrée pour la résolution numérique. Au cours de la résolution numérique, les inconnues  $y, x_{c1}, x_{c2}$  et  $\delta_2$  sont calculées et permettent de déterminer les grandeurs de sortie  $D, V$  et  $F_{capillaire}$ .

## 2.2 Étude numérique du doublet capillaire

Le but de cette étude est de trouver, à partir du modèle local, une relation liant, d'une part, la force capillaire entre deux grains de tailles différentes et, d'autre part, les paramètres décrivant la configuration du doublet capillaire ( $D, V, R_1, R_2, \theta, \sigma$ ).

### 2.2.1 Préliminaire à l'étude : paramétrage et adimensionnement du modèle

Afin d'étudier l'ensemble des configurations possibles en s'affranchissant d'une géométrie particulière des grains, les équations établies au paragraphe précédent sont adimensionnées. Le modèle local est alors étudié numériquement en fonction du paramètre  $r = \frac{R_1}{R_2}$  (rapport des rayons des deux grains constitutifs du doublet). Les différentes grandeurs géométriques sont adimensionnées par une grandeur caractéristique qui est  $R_2$ , à savoir le rayon du grain de plus grande taille. Les grandeurs adimensionnées, notées avec une astérisque, sont définies ci-après :

$$\begin{aligned} R_1^* &= \frac{R_1}{R_2} = r \\ V^* &= \frac{V}{R_2^3} \\ x^* &= \frac{x}{R_2} \\ y^* &= \frac{y}{R_2} \\ y_0^* &= \frac{y_0}{R_2} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Les dérivées s'écrivent sous la forme suivante<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} y'(x) &= y^{*\prime}(x^*) \\ y''(x) &= \frac{y^{*\prime\prime}(x^*)}{R_2} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Grâce à ces grandeurs adimensionnées, les équations obtenues précédemment s'expriment sous forme adimensionnelle.

L'équation différentielle (2.31) régissant la forme du pont liquide s'écrit :

$$\frac{\Delta p R_2}{\sigma} y^*(x^*) + \frac{1 + y^{*\prime 2}(x^*) - y^*(x^*) y^{*\prime\prime}(x^*)}{\left(1 + y^{*\prime 2}(x^*)\right)^{3/2}} = 0 \tag{2.41}$$

---

<sup>1</sup>En notant  $y(x) = y^* \cdot R_2$  et  $x = x^* \cdot R_2$ , on a :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy^* \cdot R_2}{dx^* \cdot R_2} = \frac{R_2}{R_2} \frac{dy^*}{dx^*} = y^{*\prime}(x^*) \\ y''(x) &= \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{dy^{*\prime}(x^*)}{dx^* \cdot R_2} = \frac{y^{*\prime\prime}(x^*)}{R_2} \end{aligned}$$

en notant  $H$  le terme adimensionnel  $\frac{\Delta p R_2}{\sigma}$ , l'équation différentielle devient :

$$H y^*(x^*) + \frac{1 + y^{*'}(x^*) - y^*(x^*) y^{*''}(x^*)}{(1 + y^{*'}(x^*))^{3/2}} = 0 \quad (2.42)$$

La force de cohésion par capillarité est adimensionnée<sup>2</sup> par le terme  $2 \pi R_2 \sigma$ , ce qui donne, en l'exprimant au niveau du rayon de gorge :

$$F_{capillaire}^* = \frac{F_{capillaire}}{2 \pi R_2 \sigma} = \frac{\pi y_0^2 \Delta p + 2 \pi y_0 \sigma}{2 \pi R_2 \sigma} = \frac{1}{2} y_0^{*2} H + y_0^* \quad (2.43)$$

## 2.2.2 Principe de l'étude numérique

La forme du pont liquide est régie par une équation différentielle du second degré non linéaire. La première étape de l'étude numérique du doublet capillaire consiste à résoudre cette équation différentielle.

### Définition de la forme du pont liquide : résolution de l'équation de Laplace

Le profil du pont liquide est défini par l'équation (2.42) :

$$\frac{y^{*''}}{(1 + y^{*'}(x^*))^{3/2}} - \frac{1}{y^* \sqrt{1 + y^{*'}(x^*)}} = H \quad (2.44)$$

Pour résoudre cette équation différentielle, deux conditions aux limites sont nécessaires. La première condition est définie par la dérivée du profil du pont liquide au niveau de la gorge du pont : pour  $x^* = 0$ ,  $y^{*'}(0) = 0$ . La deuxième condition est donnée par la valeur du rayon de gorge : pour  $x = 0$ ,  $y^*(0) = y_0^*$ . Cette valeur  $y_0^*$  du rayon de gorge doit être déterminée. Pour cela, le changement de variables suivant est effectué :  $Q = 1 + y^{*'}(x^*)$ . L'équation (2.44) s'écrit alors :

$$\frac{1}{2 Q^{3/2}} \frac{dQ}{dy^*} - \frac{1}{y^* Q^{1/2}} = H \quad (2.45)$$

ce qui conduit à

$$\frac{dQ}{dy^*} - \frac{2Q}{y^*} = 2H Q^{3/2} \quad (2.46)$$

Il s'agit d'une équation différentielle de type Bernoulli dont la solution<sup>3</sup> est :

$$Q = \frac{4y^{*2}}{(2K - Hy^{*2})^2} \quad (2.47)$$

où  $K$  est une constante d'intégration. En remplaçant  $Q$  par sa valeur, à savoir  $1 + y^{*'}(x^*)$ , il est possible d'écrire :

<sup>2</sup>Pour adimensionner la force capillaire, il faut utiliser une grandeur de même dimension qu'une force. L'utilisation du terme de tension superficielle  $\sigma$  permet de s'affranchir d'un liquide particulier. Pour être de même dimension qu'une force, le terme  $\sigma$  doit être multiplié par une longueur ; le choix de la grandeur  $R_2$  permet de conserver l'homogénéité de l'ensemble des adimensionnements.

<sup>3</sup>Le cas  $y^* = \sqrt{\frac{2K}{H}}$  ne pose pas de problème. En effet, les équations (Eq. 2.51 et 2.52) permettent de vérifier que  $y^* < y_1^* < \sqrt{\frac{2K}{H}}$ , d'une part, et  $y^* < y_2^* < \sqrt{\frac{2K}{H}}$ , d'autre part.

$$\frac{y^*}{\sqrt{1+y^{*2}}} + \frac{1}{2} H y^{*2} = K \quad (2.48)$$

La constante  $K$  est déterminée en utilisant les conditions de contact entre les grains et le pont liquide, c'est-à-dire les conditions au niveau de la ligne triple. Au niveau de la ligne triple sur le grain 1,  $y_1^* = r \sin \delta_1$  et  $y_1^{*'} = \frac{1}{\tan(\delta_1 + \theta)}$ , en utilisant ces expressions dans l'équation (2.48), on obtient :

$$\frac{r \sin \delta_1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\delta_1 + \theta)}}} + \frac{1}{2} H r^2 \sin^2 \delta_1 = K \quad (2.49)$$

comme  $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$ , l'équation (2.49) s'écrit :

$$r \sin \delta_1 \cos(\delta_1 + \theta) \tan(\delta_1 + \theta) + \frac{1}{2} H r^2 \sin^2 \delta_1 = K \quad (2.50)$$

ce qui donne finalement :

$$r \sin \delta_1 \sin(\delta_1 + \theta) + \frac{1}{2} H r^2 \sin^2 \delta_1 = K \quad (2.51)$$

La constante  $K$  peut également être calculée au niveau de la ligne triple du grain 2, avec  $y_2^* = \sin \delta_2$  et  $y_2^{*'} = \frac{1}{\tan(\delta_2 + \theta)}$  :

$$\sin \delta_2 \sin(\delta_2 + \theta) + \frac{1}{2} H \sin^2 \delta_2 = K \quad (2.52)$$

Les deux expressions précédentes de  $K$  sont bien entendu équivalentes et permettent donc de relier les angles de remplissage  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

Le repère définissant le doublet capillaire est centré sur l'axe du doublet au niveau de la gorge du pont liquide. Au niveau du rayon de gorge, c'est-à-dire pour  $x^* = 0$ , le profil du pont liquide est tel que  $y^*(0) = 0$ . Avec cette condition, l'ordonnée du profil à l'origine  $y_0^*$ , correspondant au rayon de gorge, peut-être calculée à l'aide de la relation (2.48) :

$$\frac{1}{2} H y_0^{*2} + y_0^* = K \quad (2.53)$$

La constante  $K$  correspond à la force capillaire  $F_{capillaire}^*$ . Cette constante étant connue, le rayon de gorge peut être déterminé :

$$y_0^* = \begin{cases} K & \text{si } H = 0 \\ \frac{-1 + \sqrt{1 + 2HK}}{H} & \text{si } H \neq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Les deux conditions aux limites sont donc connues, il est donc maintenant possible de résoudre l'équation différentielle (Eq. 2.44).

### Recherche de triplets ( $D^*$ , $V^*$ , $F^*$ )

L'objectif est d'obtenir par résolution numérique un ensemble de triplets ( $D^*$ ,  $V^*$ ,  $F^*$ ) pour différentes valeurs du rapport de tailles des grains  $r$  et de l'angle de mouillage  $\theta$ . Au cours de la résolution numérique, les paramètres  $r$  et  $\theta$  sont constants. Les paramètres d'entrée de la résolution numérique sont l'angle de remplissage  $\delta_1$  et le terme adimensionnel  $H$ . Les paramètres de sortie sont la distance intergranulaire  $D^*$ , le volume du pont liquide  $V^*$  et la force capillaire  $F_{capillaire}^*$ . Pour des valeurs de  $\delta_1$  et  $H$  données :

1. La force capillaire  $F_{capillaire}^*$  et la constante  $K$  sont déterminées en premier :

$$F_{capillaire}^* = K = \frac{1}{2} y_0^{*2} H + y_0^* \quad (2.55)$$

2. Le profil du pont liquide est ensuite déterminé par résolution de l'équation différentielle (Eq. 2.44) en tenant compte des conditions aux limites  $y_0^*$  et  $y^*(0) = 0$ . Pour cela, la fonction *ode23t* du logiciel MATLAB est utilisée<sup>4</sup>. On obtient ainsi un profil par points défini par les valeurs discrètes  $y_k^*$ .
3. A partir de ce profil, une recherche de la position de la ligne triple (contact entre les grains et le pont liquide) est effectuée. Les ordonnées correspondant à la position de la ligne triple sur les grains sont connues. Pour le grain 1, l'ordonnée du contact pont liquide-grain est  $y_{c1}^* = r \sin \delta_1$ . Pour le grain 2, il s'agit de  $y_{c2}^* = r \sin \delta_2$ , l'angle de remplissage  $\delta_2$  étant déterminé grâce aux relations (2.51) et (2.52) définissant la constante  $K$ . Les abscisses  $x_{c1}^*$  et  $x_{c2}^*$  sont obtenues par la recherche des points du profil dont l'ordonnée vaut respectivement  $y_{c1}^*$  et  $y_{c2}^*$ .
4. On peut alors déterminer la distance intergranulaire  $D^*$ , d'une part :

$$D^* = x_{c2}^* - (1 - \cos \delta_2) - x_{c1}^* - r(1 - \cos \delta_1) \quad (2.56)$$

et le volume de pont liquide  $V^*$ , d'autre part :

$$V^* = \sum_{k=c1}^{c2} \pi y_k^{*2} - \frac{1}{3} \pi r^3 (1 - \cos \delta_1)^2 (2 + \cos \delta_1) - \frac{1}{3} \pi (1 - \cos \delta_2)^2 (2 + \cos \delta_2) \quad (2.57)$$

Il est ainsi possible d'obtenir la valeur de la force capillaire pour une configuration de doublet capillaire donnée. Par itération sur les paramètres  $\delta_1$  et  $H$ , un ensemble de solutions numériques discrètes est obtenu, pour un rapport de rayons  $r$  et un angle de mouillage  $\theta$  donnés. Un exemple illustré de la méthode numérique utilisée est présenté en annexe A.

### 2.2.3 Modèle théorique de cohésion par capillarité

#### Relation explicite

L'étude numérique du modèle de cohésion par capillarité à l'échelle locale permet d'obtenir un ensemble de valeurs discrètes reliant la force de capillarité  $F_{capillaire}^*$  aux paramètres décrivant la configuration du doublet capillaire à savoir la distance intergranulaire  $D^*$ , le volume du pont liquide  $V^*$ , le rapport des rayons des grains  $r$ , et l'angle de mouillage  $\theta$ . Grâce à un ajustement mathématique effectué sur ces valeurs numériques discrètes, il est possible d'obtenir une relation explicite du type  $F_{capillaire}^* = F_{capillaire}^*(D^*, V^*, r, \theta)$ . Cette relation explicite constitue une extension au cas polydisperse du modèle proposé par Mikami et al. [1998] dans le cas monodisperse. Cette relation s'écrit :

$$F_{capillaire}^* = \frac{\sqrt{r}}{2} (c + \exp(a D^* + b)) \quad (2.58)$$

où  $r = \frac{R_1}{R_2}$  est le rapport des rayons des grains et  $D^* = \frac{D}{R_2}$  est la distance intergranulaire. Les coefficients  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont des fonctions du volume de pont liquide  $V^* = \frac{V}{R_2^3}$ , et de l'angle de

---

<sup>4</sup>Les "pas" de calcul et les tolérances utilisés sont de  $10^{-6}$ . Pour plus d'informations, on pourra consulter les travaux de Champine et Reichelt [1997].

moillage  $\theta$  (en radians) :

$$\begin{aligned}
 a &= -1,1 (V^*)^{-0,53} \\
 b &= (-0,148 \ln(V^*) - 0,96) \theta^2 - 0,0082 \ln(V^*) + 0,48 \\
 c &= 0,0018 \ln(V^*) + 0,078
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

### Critère de rupture

Afin de compléter ce modèle théorique de cohésion par capillarité, il est nécessaire de disposer d'un critère simple qui permet de définir la rupture du pont liquide. Dans le cas monodisperse, Lian et al. [1993] ont proposé la relation suivante entre la distance de rupture  $D_{rupture}$ , le volume du pont liquide  $V$ , et l'angle de mouillage  $\theta$  :

$$D_{rupture} = (1 + 0,5\theta) V^{1/3} \tag{2.60}$$

Dans le cas polydisperse, Willett et al. [2000] ont proposé un critère théorique de rupture qui exprime la distance de rupture  $D_{rupture}$  en fonction des rayons des grains  $R_1$  et  $R_2$ , du volume du pont liquide  $V$ , et de l'angle de mouillage  $\theta$  :

$$D_{rupture} = \left(1 + 0,25\theta \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)\right) \left(V^{1/3} + \left(\frac{R_1}{2R_2} - \frac{2}{5}\right) V^{2/3}\right) \tag{2.61}$$

L'utilisation de l'un de ces critères théoriques de rupture, basés sur des grandeurs accessibles par la mesure, permet de compléter le modèle théorique de cohésion par capillarité décrit par les relations (2.58) et (2.59).

### Analyse du modèle théorique

Le modèle théorique de cohésion par capillarité (Eq. 2.58 et 2.59) permet d'évaluer l'influence des différents paramètres  $D$ ,  $V$ ,  $r$  et  $\theta$  sur la force capillaire. De façon générale, quelle que soit la configuration du doublet capillaire, la force capillaire diminue avec la distance intergranulaire (Fig. 2.8).

Dans le cas d'un angle de mouillage  $\theta$  nul (cas fréquemment rencontré dans la littérature en ce qui concerne le mouillage de l'eau sur du verre [Taylor, 1948]), il est possible de dégager les tendances générales de l'évolution de la force de capillarité. Pour un rapport  $r$  des rayons des grains donné, la force capillaire est quasiment identique pour une distance intergranulaire nulle quel que soit le volume du pont liquide. Par contre, pour une distance intergranulaire non nulle donnée, la force capillaire augmente lorsque le volume du pont liquide augmente (Fig. 2.8(a)). Ces observations sont en adéquation avec les constatations déjà effectuées par de nombreux auteurs, en particulier Pitois [1999]. Le paramètre  $r$  a aussi un effet sur l'intensité de la force capillaire : à distances intergranulaires égales et volumes de pont liquide égaux, la force capillaire augmente avec le rapport  $r$  (Fig. 2.8(b)). Ces constatations soulignent l'importance du rôle des paramètres  $D$ ,  $V$ , et  $r$  dans la détermination de la force capillaire.

Le paramètre angle de mouillage  $\theta$  joue également un rôle important dans l'évolution de l'intensité de la force capillaire. Globalement, l'intensité de la force capillaire diminue quand la valeur de l'angle de mouillage augmente, tous les autres paramètres étant égaux par ailleurs (figures 2.8 (a), (c) et (e), d'une part, et figures 2.8 (b), (d) et (f), d'autre part). Lorsque la valeur de l'angle de mouillage augmente, l'effet du volume du pont liquide sur l'intensité de la force capillaire dépend de la distance intergranulaire (Fig. 2.8 (c) et (e)) : pour les distances

intergranulaires faibles, la force est d'autant plus élevée que le volume est faible. Au contraire, à partir d'une certaine valeur de distance intergranulaire, le comportement "classique" est observé, c'est-à-dire qu'à distances intergranulaires égales, la force capillaire est d'autant plus élevée que le volume du pont liquide est important. Ce point d'inversion de l'évolution de la force capillaire se produit pour des valeurs de distance intergranulaire d'autant plus élevées que la valeur de  $\theta$  est importante.

Cette analyse montre que la force capillaire est particulièrement sensible à l'évolution des paramètres qui la décrivent.

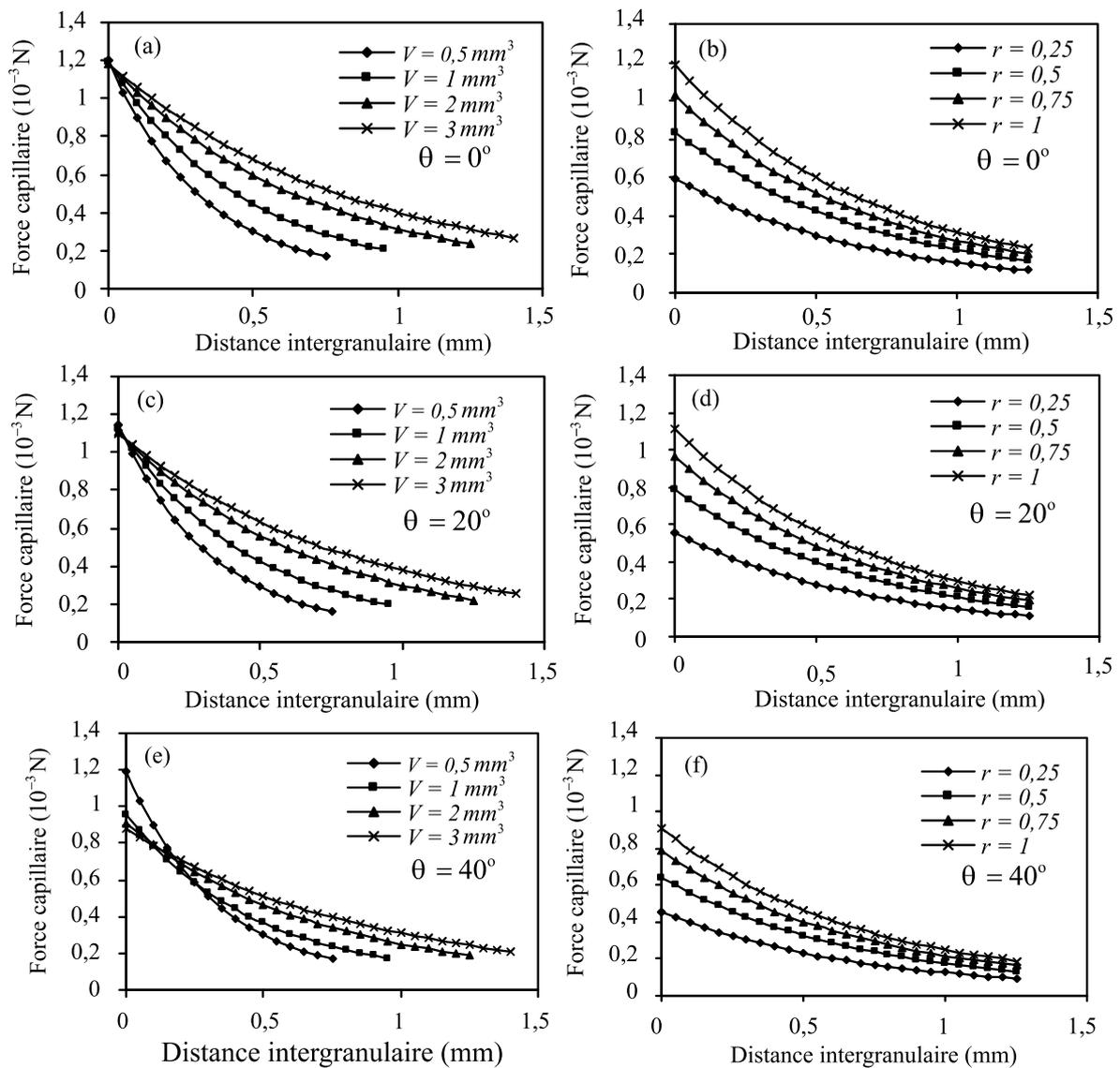


FIG. 2.8 – Évolution de la force capillaire en fonction des paramètres  $D$ ,  $V$ ,  $r$  et  $\theta$  sur quelques exemples : (a)  $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$  et  $\theta = 0^\circ$ , (b)  $R_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $V = 2 \text{ mm}^3$  et  $\theta = 0^\circ$ , (c)  $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$  et  $\theta = 20^\circ$ , (d)  $R_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $V = 2 \text{ mm}^3$  et  $\theta = 20^\circ$ , (e)  $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$  et  $\theta = 40^\circ$ , (f)  $R_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $V = 2 \text{ mm}^3$  et  $\theta = 40^\circ$ .

## 2.3 Confrontation du modèle théorique avec des données de la littérature

La pertinence du modèle théorique proposé au paragraphe 2.2.3 a été vérifiée par confrontation avec les résultats de Willett et al. [2000].

Ces auteurs ont réalisé des expériences sur des doublets polydisperses constitués de billes de saphir de différentes tailles. Les rayons des billes sont respectivement  $R = 2,381 \text{ mm}$ ,  $R = 1,588 \text{ mm}$  et  $R = 1,191 \text{ mm}$ , ce qui permet de constituer différentes configurations de doublets capillaires. Leurs résultats expérimentaux corroborent les résultats théoriques fournis par la résolution numérique de l'équation de Laplace-Young. En se plaçant dans les mêmes conditions que celles utilisées par Willett et al. [2000], la figure 2.9 présente les valeurs déterminées par Willett et al. [2000], d'une part, et déterminées par le modèle théorique, d'autre part : la bonne concordance des valeurs permet de vérifier la pertinence du modèle théorique.

## 2.4 Études expérimentales à l'échelle locale

Des expériences à l'échelle locale sont effectuées sur différentes configurations de doublets capillaires afin, d'une part, de vérifier la pertinence du modèle sur d'autres configurations et, d'autre part, de mieux comprendre l'influence des différents paramètres intervenant dans la cohésion par capillarité.

### 2.4.1 Dispositif et protocole expérimentaux

#### Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est illustré sur la figure 2.10. Une vue d'ensemble du dispositif est présentée sur la figure 2.11(a).

Les grains sont constitués de billes en acier inoxydable 18/10 (AFNOR ZCN 18-09, fournisseur Marteau-Lemarie), dont le diamètre varie de  $2 \text{ mm}$  à  $10 \text{ mm}$  avec un incrément de  $1 \text{ mm}$  (Fig. 2.11(b)). La tolérance sur le diamètre nominal est de  $12,5 \mu\text{m}$ , l'erreur de sphéricité vaut  $2,5 \mu\text{m}$ , et la rugosité est  $R_a = 0,125 \mu\text{m}$ . La bille inférieure est fixée sur un support positionné sur le plateau d'une balance de précision (la précision est le dixième de milligramme). La bille supérieure est fixée sur une table micrométrique. Une potence permet de maintenir la table micrométrique à la verticale au-dessus du plateau de la balance (Fig. 2.11(c)). De l'eau déminéralisée est utilisée pour former les ponts liquides entre les deux billes. Une microseringue de marque Hamilton série 700 de  $10 \mu\text{l}$  de contenance, graduée tous les  $0,1 \mu\text{l}$ , sert à mesurer le volume d'eau et à introduire l'eau entre les billes pour former le pont liquide.

La diversité des tailles de billes permet de réaliser différentes configurations de doublets capillaires (Fig. 2.11(d)), aussi bien en terme de volumes de pont liquide que de tailles de grains.

#### Protocole expérimental

Le principe des expériences consiste à effectuer des essais de traction contrôlés en déplacement sur des doublets capillaires de configurations variées. Après dégraissage à l'acétone, rinçage et séchage, les billes sont mises en place dans le dispositif expérimental : la bille inférieure est positionnée sur le plateau de la balance et la bille supérieure est fixée à la table micrométrique (Fig. 2.10). La microseringue permet d'introduire un volume d'eau donné entre les grains afin de créer le pont liquide. La distance intergranulaire est contrôlée par la vis micrométrique. L'état initial de l'essai correspond au contact entre les billes d'acier inoxydable (distance intergranulaire nulle). L'état final correspond à la rupture du pont liquide. La traction exercée sur le pont liquide

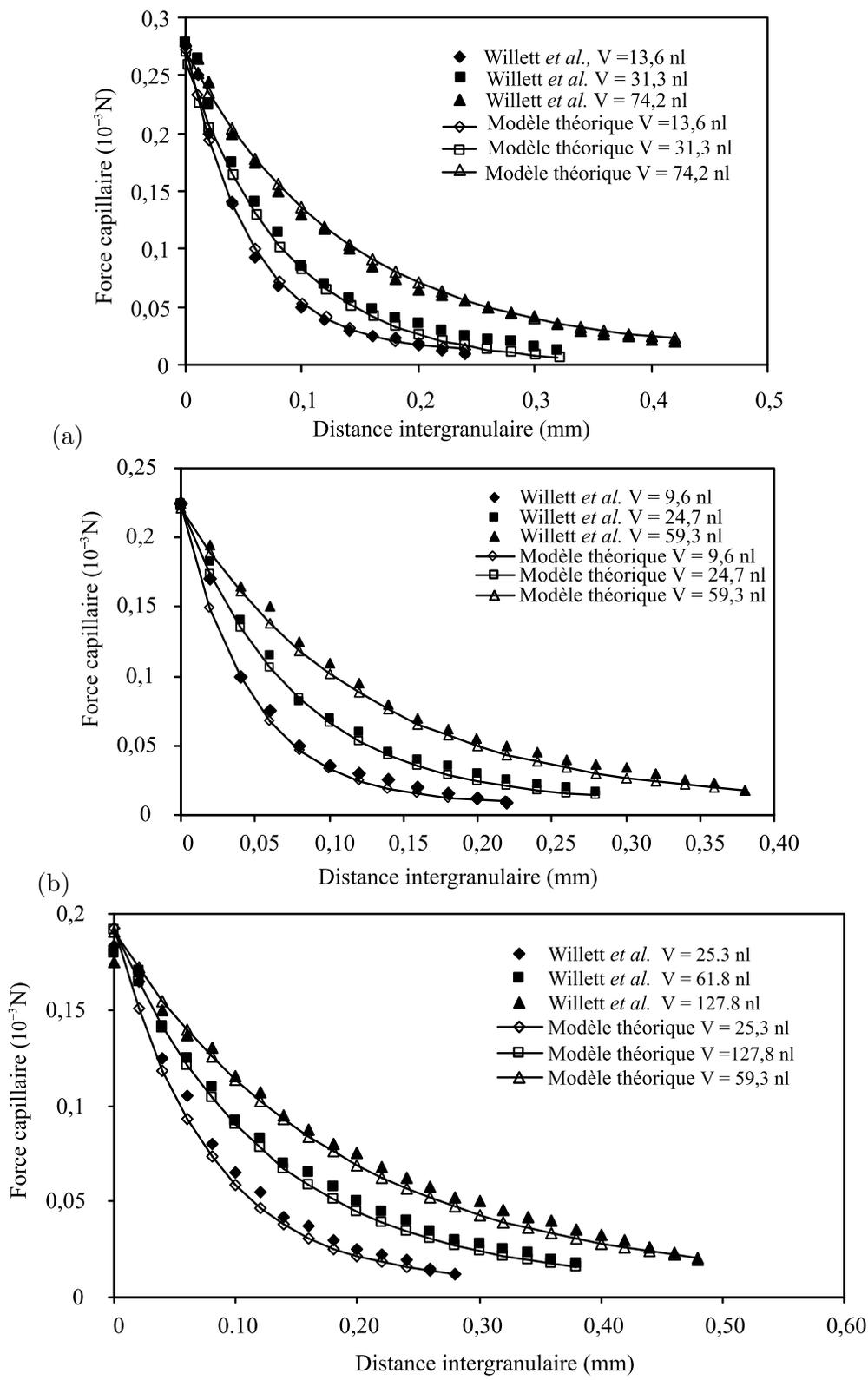


FIG. 2.9 – Comparaison du modèle théorique avec les résultats de Willett et al. [2000] obtenus pour des ponts liquides de volume  $V$  réalisés avec une huile silicone de tension superficielle  $\sigma = 20,6 \cdot 10^{-3} N/m$  pour les rayons de billes suivant : (a)  $R_1 = 2,381 mm$  et  $R_2 = 2,381 mm$  (soit  $r = 1$ ), (b)  $R_1 = 1,588 mm$  et  $R_2 = 2,381 mm$  (soit  $r = 2/3$ ), (c)  $R_1 = 1,191 mm$  et  $R_2 = 2,381 mm$  (soit  $r = 0,5$ ).

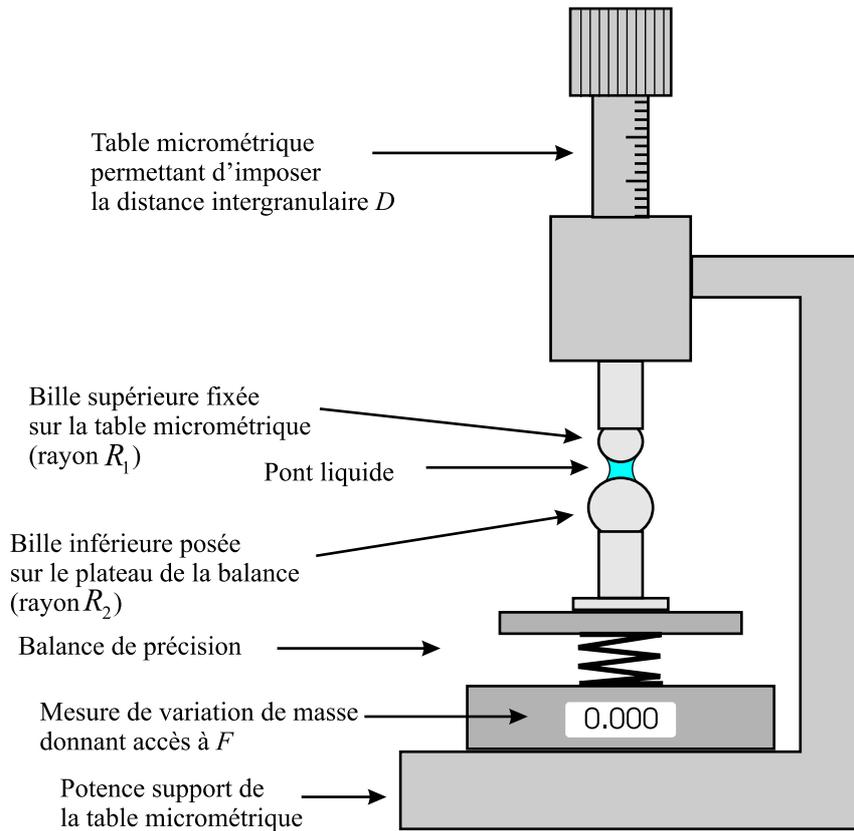


FIG. 2.10 – Illustration du dispositif expérimental.

est effectuée par incréments de distance intergranulaire de  $50 \mu m$ . Pour chaque incrément, la force capillaire est obtenue par pesée différentielle :

$$F_{capillaire} = (m_s - m_a) g \quad (2.62)$$

où  $m_s$  correspond à la masse sèche de la bille inférieure et de son support,  $m_a$  est la masse apparente relevée pour chaque valeur de la distance intergranulaire et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Chaque mesure nécessite approximativement  $20 s$ , le temps que le pont liquide soit à l'équilibre et que la balance se stabilise. Environ 40 mesures sont effectuées pour suivre l'évolution de la force capillaire depuis le contact entre les grains jusqu'à la rupture du pont liquide, ce qui correspond à une durée moyenne d'essai de  $15 min$ .

## 2.4.2 Résultats expérimentaux

### Premières constatations

Les figures 2.12 (a) et (b) mettent en évidence une variation non monotone de la force capillaire au cours des essais et l'existence de deux phases. Dans une première phase, pour de faibles valeurs de la distance intergranulaire, la force capillaire croît avec la distance intergranulaire jusqu'à une valeur maximale. De plus, dans cette phase, à distances intergranulaires égales, plus le volume de pont liquide est faible, plus la force capillaire est élevée. Dans une deuxième phase, la force capillaire diminue avec la distance intergranulaire quelle que soit la configuration du doublet capillaire (en terme de tailles de grains et de volume de pont liquide). Dans cette phase, à distances intergranulaires égales, la force capillaire augmente avec le volume du pont liquide. Ces observations expérimentales correspondent aux constatations effectuées au paragraphe 2.2.3 à partir du modèle théorique. L'existence de ces deux phases peut être expliquée grâce au paramètre angle de mouillage.

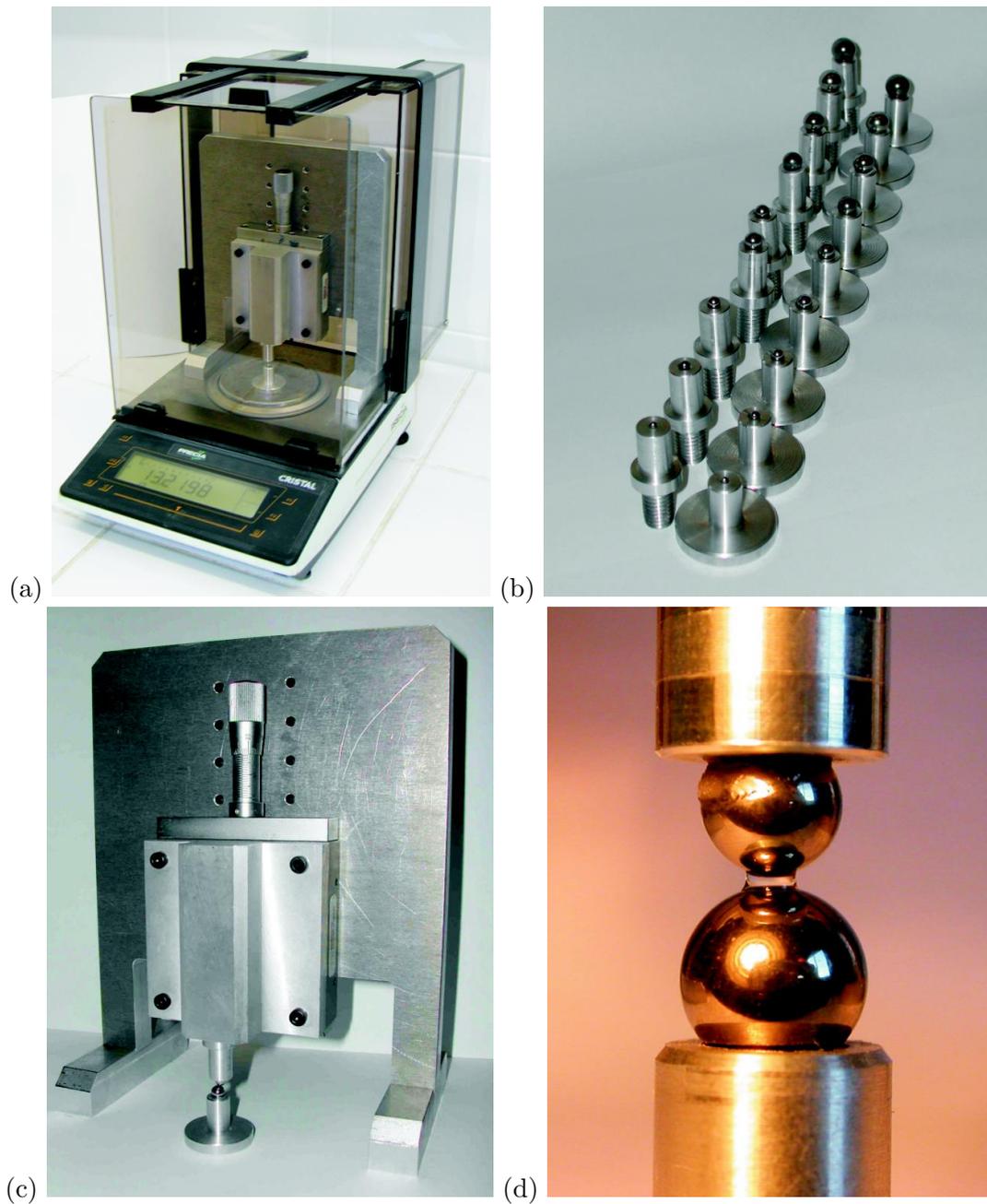


FIG. 2.11 – Dispositif expérimental : (a) Présentation d'ensemble, (b) billes en acier inoxydable présentées sur leurs supports inférieurs et supérieurs, (c) potence et table micrométrique, (d) doublet capillaire en cours d'essai.

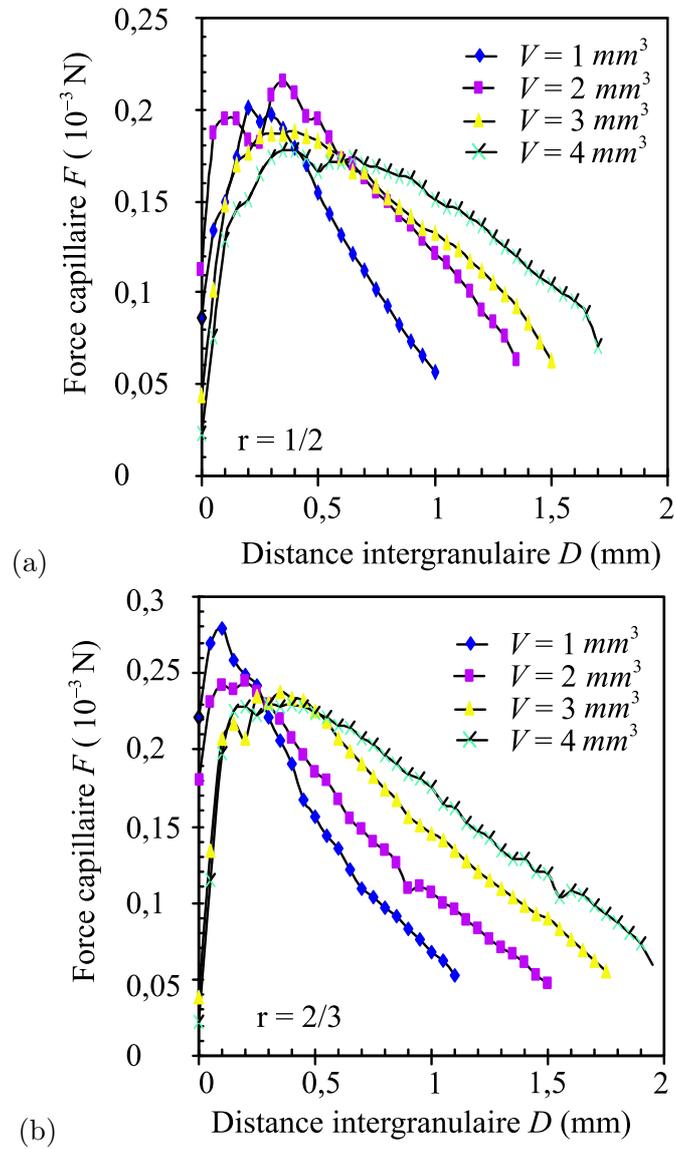


FIG. 2.12 – Évolution de la force capillaire obtenue expérimentalement pour différents volumes de ponts liquides et deux rapports de rayons de grains : (a)  $R_1 = 1,5 \text{ mm}$  et  $R_2 = 3 \text{ mm}$ , (b)  $R_1 = 2 \text{ mm}$  et  $R_2 = 3 \text{ mm}$ .



FIG. 2.13 – Photographie d’un doublet capillaire.

### Influence de l’angle de mouillage $\theta$

L’angle de mouillage  $\theta$  est un paramètre sensible dans la description de la force capillaire comme le montre l’analyse du paragraphe 2.2.3. Afin d’apprécier la valeur de ce paramètre, des photographies ont été effectuées au cours d’essais de mesure de la force capillaire. La figure 2.13 présente un exemple de photographie d’un doublet capillaire. Il est possible de constater sur cette photographie que l’angle de mouillage est non nul. En effet, la valeur de l’angle de mouillage peut varier considérablement en fonction de nombreux facteurs parfois difficiles à évaluer : la présence d’impuretés à la surface des billes ou dans l’eau, la rugosité des billes...[De Gennes et al., 2002]

De plus, l’angle de mouillage n’est pas constant, il varie notablement en cours d’essai comme le montre la figure 2.14.

Dans la première phase, le pont liquide prend une forme convexe et les valeurs de l’angle de mouillage sont élevées. Cette phase correspond à la mise en place du pont liquide et explique l’évolution inattendue de la force capillaire par rapport au modèle théorique pour les faibles distances intergranulaires (augmentation de la force capillaire avec la distance intergranulaire). Dans la deuxième phase, le pont liquide prend une forme concave qui correspond à la modélisation géométrique de la section 2.1 : l’évolution de la force est alors en adéquation avec les résultats de l’étude théorique du paragraphe 2.2.3.

Une série de photographies effectuées au cours d’essais permet d’étudier graphiquement l’évolution de l’angle de mouillage en fonction de la distance intergranulaire (Fig. 2.15). L’évolution obtenue pour l’angle de mouillage corrobore les mesures effectuées par Pepin et al. [2000]. Grâce à une approximation effectuée sur les résultats des mesures, une relation donnant la valeur de l’angle de mouillage  $\theta$  en fonction du rapport  $D/D_{rupture}$  peut être proposée :

$$\theta(D) = 38 - 16 \ln \frac{D}{D_{rupture}} \quad (2.63)$$

où la valeur de  $\theta$  est obtenue en degrés.

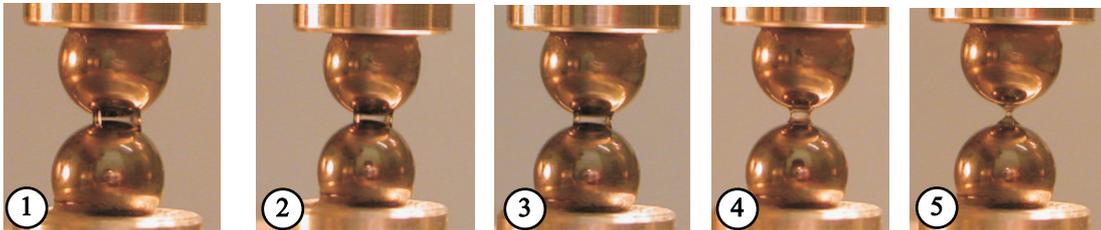
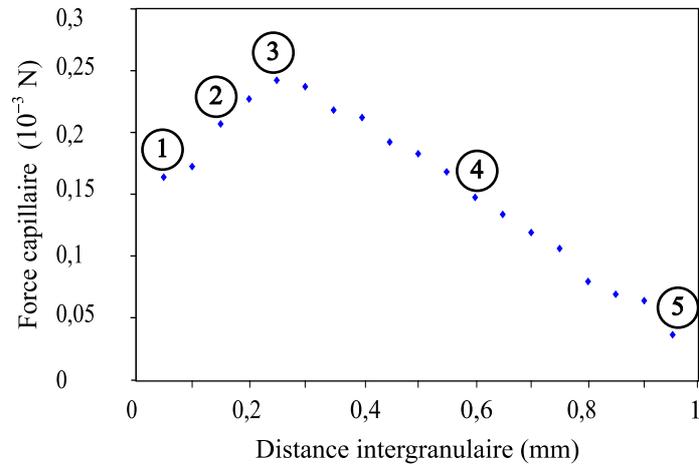


FIG. 2.14 – Illustration de l'évolution de l'angle de mouillage  $\theta$  au cours d'un essai de traction sur un doublet capillaire avec  $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$  et  $V = 3 \text{ mm}^3$ .

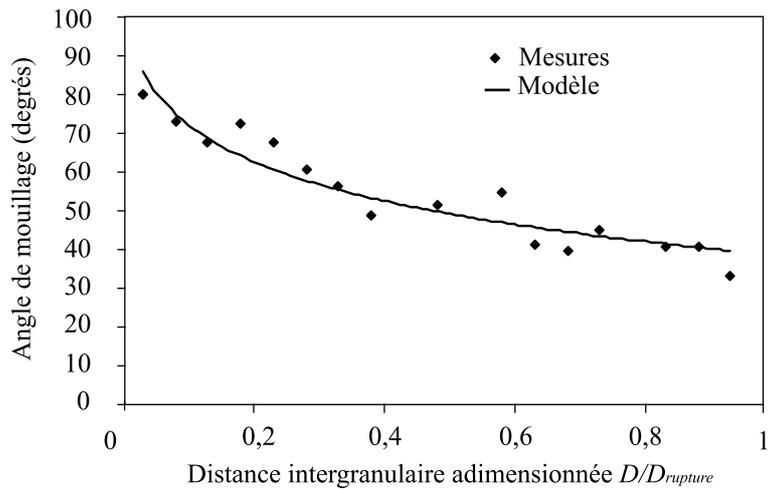


FIG. 2.15 – Évolution de l'angle de mouillage en fonction du paramètre  $D/D_{rupture}$  (détermination expérimentale et modélisation).

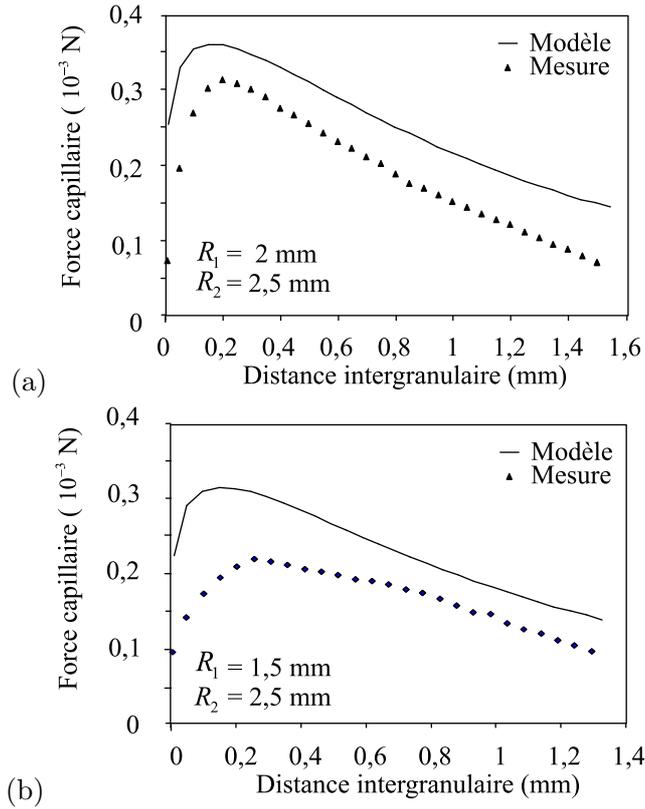


FIG. 2.16 – Évolution de la force capillaire en prenant en compte la variation de l’angle de mouillage (Eq. 2.63). Pour (a) et (b), le volume de pont liquide considéré est  $V = 3 \text{ mm}^3$ .



FIG. 2.17 – Illustrations des valeurs limites de l’angle de mouillage : angle d’avancée  $\theta_a$  et angle de reculée  $\theta_r$ .

La relation (2.63) peut être utilisée dans le modèle théorique (Eq. 2.58) et (Eq. 2.59). Pour un rapport  $r$  de rayons des grains et un volume  $V$  de pont liquide donnés, l’évolution de la force de capillarité dépend alors à la fois de la distance intergranulaire  $D$  et de l’angle de mouillage  $\theta$ . La prise en compte de cette évolution de l’angle de mouillage permet d’expliquer l’allure des courbes obtenues expérimentalement : en effet, l’intégration de l’évolution de l’angle de mouillage dans le modèle théorique permet de retrouver l’évolution de la force capillaire observée expérimentalement (Fig. 2.16 (a) et (b)).

L’angle de mouillage présente également une certaine hystérésis : sans que la ligne triple ne se déplace, l’angle de mouillage  $\theta$  peut prendre différentes valeurs comprises entre les valeurs seuils  $\theta_a$  et  $\theta_r$  (Fig. 2.17). L’angle d’avancée  $\theta_a$  correspond à la valeur de l’angle de mouillage pour laquelle la ligne triple se déplace lorsqu’on augmente le volume de liquide. L’angle de reculée  $\theta_r$  correspond quant à lui à la valeur pour laquelle la ligne triple décroche lorsqu’on diminue le volume de liquide. Pour une surface “propre”, l’intervalle  $\theta_a - \theta_r$  peut être inférieur à  $5^\circ$ . Par contre sur une surface rugueuse, ou sale, cet intervalle peut être grand (jusqu’à  $50^\circ$ ) [De Gennes et al., 2002]. Dans le cas de sols en présence d’eau naturelle, l’angle de mouillage peut même varier dans une plage de  $25^\circ$  à  $110^\circ$  [Bachmann et al., 2000].

Ce phénomène d’hystérésis se retrouve également au niveau de l’évolution de la force de

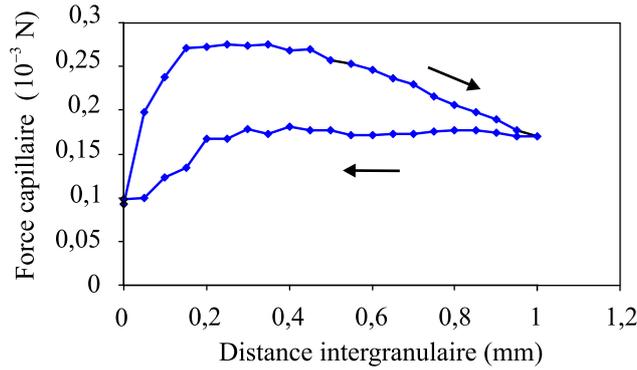


FIG. 2.18 – Mise en évidence expérimentale de l’hystérésis de la force capillaire dans le cas de billes de rayons  $R_1 = R_2 = 2,5 \text{ mm}$  et  $V = 3 \text{ mm}^3$ .

capillarité en fonction de la distance intergranulaire comme le montre la figure 2.18. La partie supérieure de la courbe correspond à une augmentation de la distance intergranulaire : les deux billes sont éloignées progressivement l’une de l’autre jusqu’à une distance limite inférieure à la distance de rupture. La partie inférieure de la courbe correspond à une diminution de la distance intergranulaire : à partir de la distance limite, les deux billes sont rapprochées progressivement l’une de l’autre jusqu’au contact. Au contact, il est intéressant de constater que l’on retrouve la force capillaire initiale. La présence de l’hystérésis de mouillage participe au phénomène d’hystérésis de la force capillaire comme le montre cette courbe expérimentale. Ces phénomènes d’hystérésis au niveau de la force capillaire ont également été étudiés par Willett et al. [2003].

### La force capillaire

La figure 2.19 présente l’évolution comparée de la force de capillarité calculée avec le modèle théorique et mesurée expérimentalement pour un volume de pont liquide  $V = 3 \text{ mm}^3$  et différents rapports  $r$  de rayons de grains. Afin de conserver la simplicité du modèle théorique, l’évolution (Eq. 2.63) de l’angle de mouillage n’est pas intégrée dans le modèle. Pour calculer la force capillaire, la valeur moyenne de  $50^\circ$  observée expérimentalement est utilisée pour l’angle de mouillage  $\theta$ . La valeur de la tension superficielle  $\sigma$  est estimée expérimentalement par des mesures d’ascension capillaire : la valeur  $\sigma = 65.10^{-3} \text{ N/m}$  est retenue.

Excepté dans la première phase des essais, pour les distances intergranulaires faibles, les valeurs expérimentales et théoriques de la force capillaire sont assez proches, bien que le modèle théorique surestime la force capillaire. Par nécessité expérimentale, les billes utilisées ont des tailles peu représentatives des tailles caractéristiques des grains de sol et les volumes de ponts liquides sont aussi assez importants. Au cours des essais, le nombre de Bond est donc élevé et les effets de la gravité se font ressentir : la gravité déforme le pont liquide et diminue la force capillaire. De par la position du doublet capillaire dans le champ de pesanteur, une fraction indéterminée de la masse d’eau qui constitue le pont liquide vient nuancer la mesure de la force capillaire. Il est possible de donner un ordre de grandeur approximatif de la contribution maximale de la masse du pont liquide : pour un pont liquide de volume  $V = 3 \text{ }\mu\text{l}$ , le poids de la totalité du pont liquide peut nuancer la valeur de la force capillaire à hauteur de  $3.10^{-5} \text{ N}$ . L’évaporation du pont liquide peut également expliquer les écarts entre modèle théorique et résultats expérimentaux. En effet, des essais ont permis d’évaluer à 20 minutes la durée de l’évaporation conduisant à la rupture d’un pont liquide de  $3 \text{ }\mu\text{l}$  d’eau. Les mesures durant une dizaine de minutes, le volume du pont liquide diminue au cours des essais, ce qui n’est pas pris en compte dans le modèle.

De nombreux facteurs peuvent donc expliquer les écarts observés. Cependant, bien que quelque peu éloignées du cadre de la modélisation, les expériences à l'échelle locale permettent de valider les estimations théoriques de la force capillaire.

## La distance de rupture

Les essais de traction sur les doublets capillaires sont conduits jusqu'à la rupture des ponts liquides. Comme le montre la figure 2.15, l'angle de mouillage diminue avec la distance intergranulaire au cours des essais. Juste avant la rupture du pont liquide, la valeur moyenne observée de l'angle de mouillage est  $30^\circ$ . La figure 2.20 présente l'évolution de la distance de rupture en fonction du volume du pont liquide. Les critères théoriques (Eq. 2.60) et (Eq. 2.61) sont également représentés sur ce graphe. Les valeurs théoriques des distances de rupture sont calculées avec la valeur  $\theta = 30^\circ$ . Les deux critères théoriques donnent des valeurs similaires pour les distances de rupture. Ces valeurs théoriques sont proches des valeurs expérimentales. Cependant, les critères théoriques surestiment les distances de rupture réelles des ponts liquides. Ce phénomène peut lui aussi s'expliquer par l'effet de la gravité sur les ponts liquides, effet qui a tendance à diminuer la distance de rupture [Pitois, 1999].

Les critères théoriques permettent d'estimer de façon satisfaisante la rupture des ponts liquides. Les deux critères étant équivalents en terme de pertinence, le plus simple, à savoir le critère (Eq. 2.60) est utilisé pour compléter le modèle théorique de cohésion par capillarité.

### 2.4.3 Validation du modèle théorique

En testant la cohésion capillaire dans différentes configurations du doublet capillaire, les expériences à l'échelle locale ont permis :

- d'apprécier et de vérifier l'effet de la variation des différents paramètres sur l'intensité de la force capillaire, et en particulier l'effet de l'angle de mouillage  $\theta$ ,
- de valider le modèle théorique de cohésion par capillarité en terme de force capillaire et de sélectionner un critère théorique de rupture du pont liquide pertinent.

### 2.4.4 Effet de la présence d'eau sur le frottement entre grains

La présence d'eau dans le matériau granulaire génère des actions cohésives mais peut également modifier le frottement entre grains. Afin d'évaluer l'effet de l'eau sur le frottement, des expériences ont été effectuées à l'échelle locale.

## Principe des expériences

Le principe des essais de frottement est représenté sur la figure 2.21. Une plaque de verre<sup>5</sup> est fixée sur un support immobile. Trois billes de verre sont collées sur un support mobile. Ces billes de verre sont en contact avec la plaque de verre. Une masse calibrée est posée sur le support mobile qui est lui-même relié par un câble à un récipient. Le récipient est progressivement rempli de sable. La masse de sable qui engendre le déplacement du support mobile permet d'accéder à la valeur de la force tangentielle qui engendre le glissement entre les grains et la plaque de verre, pour une force normale donnée.

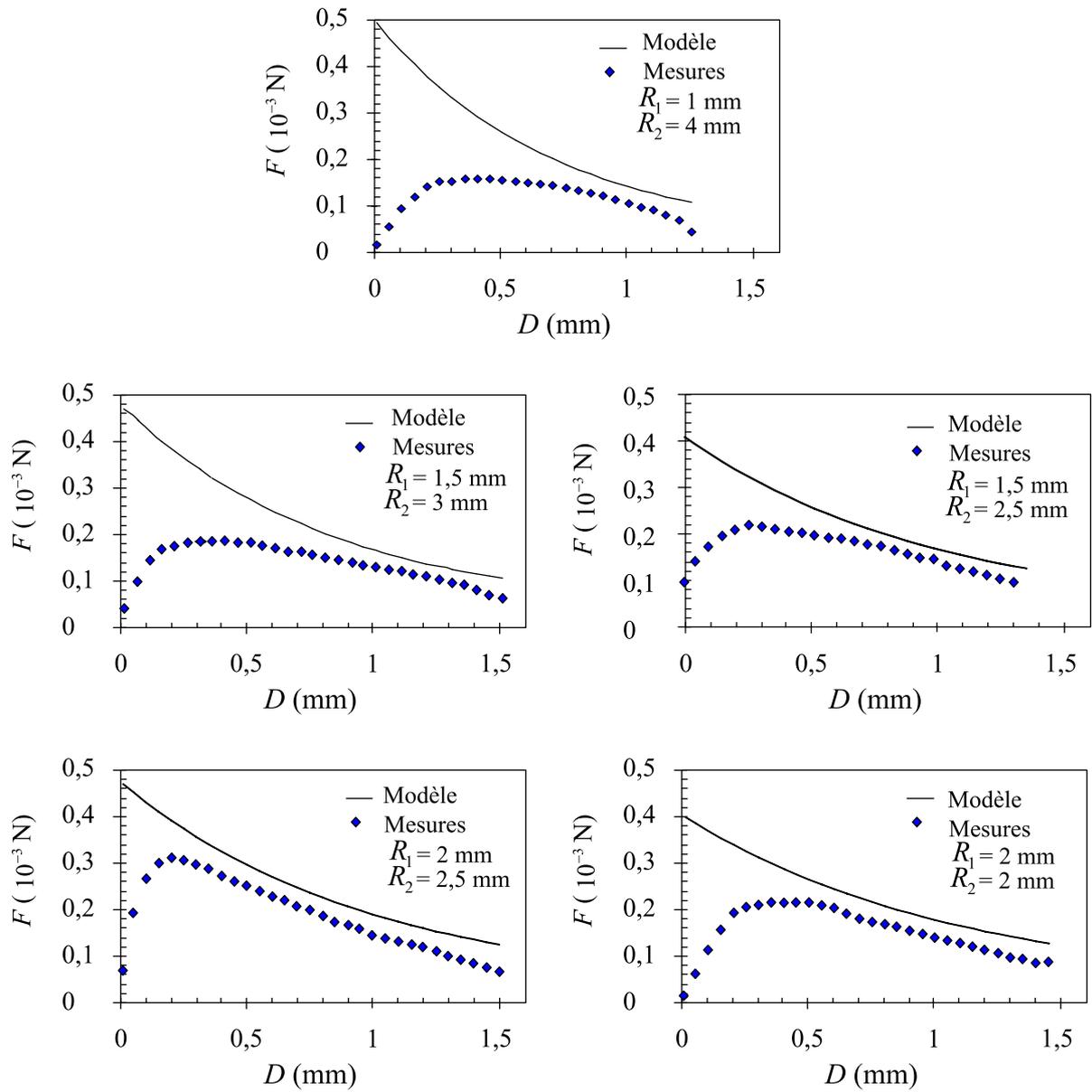


FIG. 2.19 – Exemples de forces capillaires déterminées expérimentalement et théoriquement pour un volume de pont liquide  $V = 3 \text{ mm}^3$  et différents rapports  $r$  de rayons de grains.

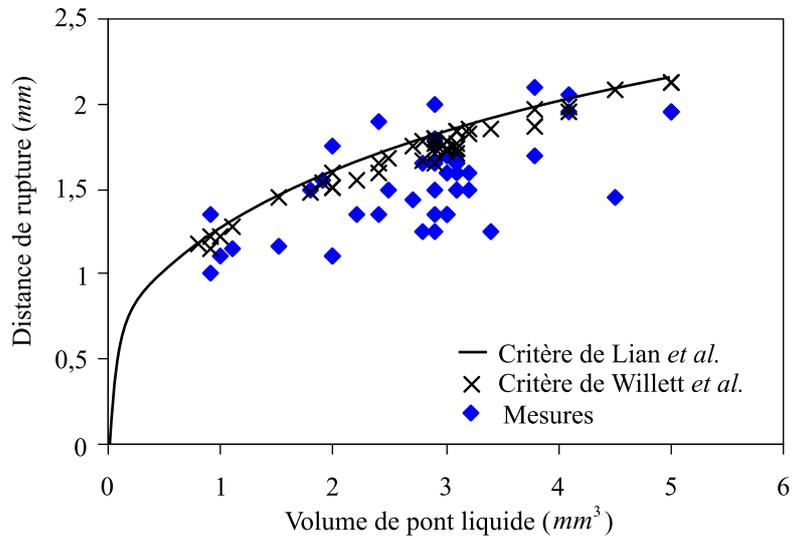


FIG. 2.20 – Évolution de la distance de rupture en fonction du volume du pont liquide : données expérimentales et critères théoriques de Lian et al. [1993] et de Willett et al. [2000].

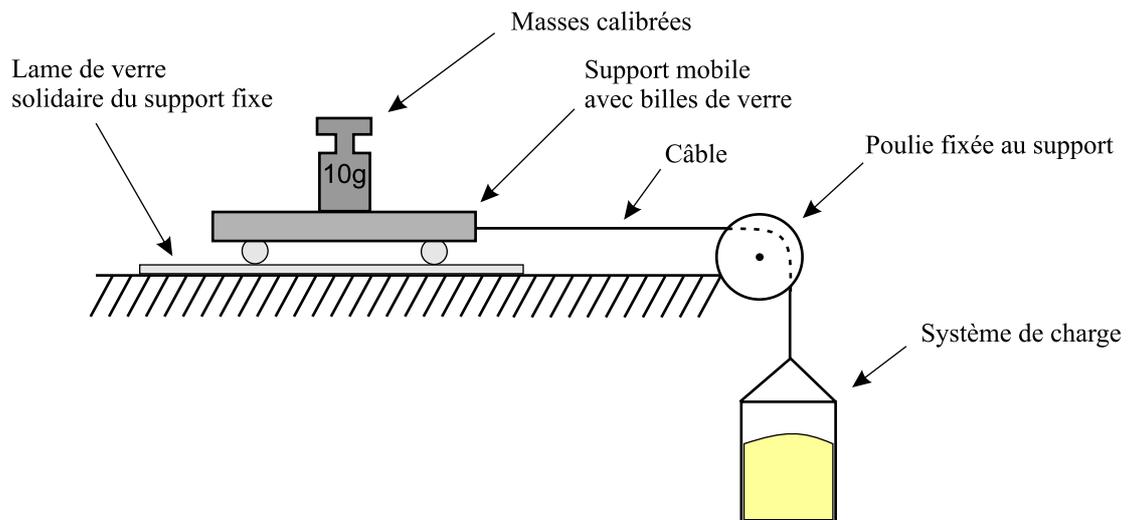


FIG. 2.21 – Dispositif expérimental permettant d'estimer le coefficient de frottement verre-verre.

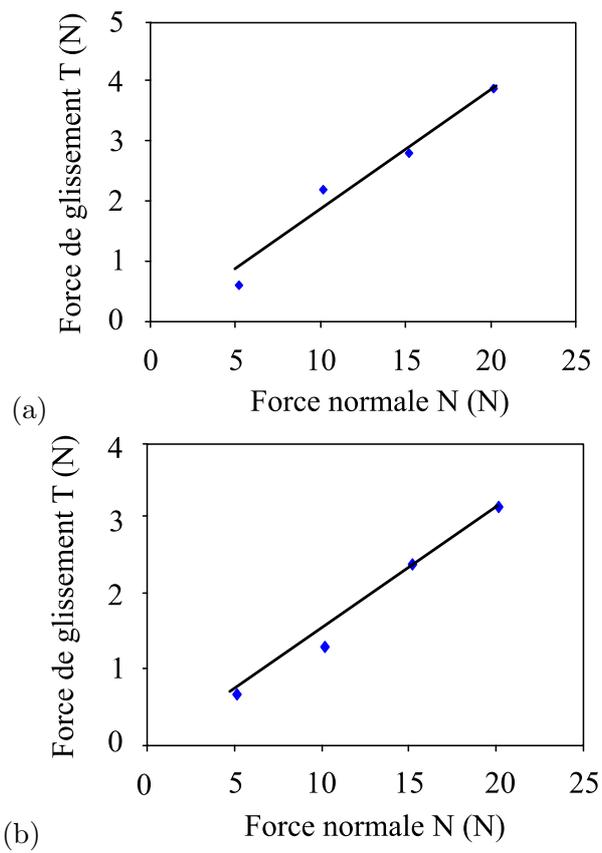


FIG. 2.22 – Résultats des mesures du coefficient de frottement et approximations linéaires des résultats : (a) vaporisation d'eau sur la plaque de verre, (b) immersion de la plaque et des billes dans l'eau.

## Résultats obtenus

Les essais de frottement sont réalisés pour différentes configurations : état sec, vaporisation d'eau déminéralisée sur la plaque de verre, immersion de la plaque et des billes dans un bain d'eau déminéralisée. Les mesures sont effectuées pour plusieurs valeurs de la force normale. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 2.22. Il existe une relation linéaire entre la force normale  $N$  et l'effort tangentiel  $T$  donnée par la loi de Coulomb :

$$T = N.f \quad (2.64)$$

où  $f$  est le coefficient de frottement. D'après les résultats obtenus, le coefficient de frottement à l'état sec est  $f = 0,19$ , dans le cas de l'eau vaporisée  $f = 0,21$  et dans le cas de l'immersion dans l'eau  $f = 0,17$ . La présence d'eau modifie donc quelque peu le coefficient de frottement, mais une valeur moyenne acceptable pour le frottement est  $f = 0,2$ .

## 2.5 Conclusion

La modélisation d'un doublet capillaire constitué de grains de tailles différentes, associée à une étude expérimentale à l'échelle locale, a permis de définir une relation explicite simple qui exprime la force capillaire entre les grains en fonction des caractéristiques du doublet :

$$F_{capillaire} = \pi \sigma \sqrt{R_1 R_2} \left( c + \exp \left( a \frac{D}{R_2} + b \right) \right) \quad (2.65)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des grains et  $D$  est la distance intergranulaire. Les coefficients  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont des fonctions du volume du pont liquide  $V$ , de l'angle de mouillage  $\theta$  (exprimé en radians), et du rayon du plus grand grain  $R_2$  :

$$\begin{aligned} a &= -1,1 \left( \frac{V}{R_2^3} \right)^{-,53} \\ b &= \left( -0,148 \ln \left( \frac{V}{R_2^3} \right) - 0,96 \right) \theta^2 - 0,0082 \ln \left( \frac{V}{R_2^3} \right) + 0,48 \\ c &= 0,0018 \ln \left( \frac{V}{R_2^3} \right) + 0,078 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Un critère de rupture théorique permet de définir la distance de rupture  $D_{rupture}$  du pont liquide en fonction du volume du pont liquide et de l'angle de mouillage :

$$D_{rupture} = (1 + 0,5\theta) V^{1/3} \quad (2.67)$$

Ce modèle local de cohésion par capillarité, défini par les relations (Eq. 2.65 à 2.67), sera utilisé, dans le chapitre 3, dans un code de calcul en éléments discrets afin d'évaluer l'influence de la cohésion locale par capillarité sur le comportement macroscopique des matériaux granulaires.

---

<sup>5</sup>Dans la suite de l'étude, des essais macroscopiques seront effectués sur des milieux granulaires constitués de billes de verre. C'est pour cette raison que le frottement est étudié dans le cas verre-verre et non entre billes de métal.

## Chapitre 3

# De l'échelle locale à l'échelle macroscopique

### 3.1 Simulation numérique : la méthode des éléments discrets

#### 3.1.1 Quelques éléments sur les simulations numériques

Les milieux granulaires sont le siège de nombreux phénomènes physiques qui trouvent leur origine à l'échelle locale, comme nous l'avons vu dans les chapitres 1 et 2 avec le cas de la cohésion par capillarité. Dans ce contexte, les modélisations numériques basées sur des approches en éléments discrets constituent un outil privilégié pour étudier l'influence des phénomènes locaux sur le comportement macroscopique des milieux granulaires. En effet, dans ce type d'approches, les grains sont considérés indépendamment les uns des autres. Chaque grain présente un mouvement qui lui est propre, et qui est régi par les équations du mouvement. L'approche en éléments discrets est basée sur un processus itératif combinant des calculs dynamiques et des calculs d'interactions.

Depuis les premières simulations effectuées par Cundall et Strack [1979], plusieurs méthodes en éléments discrets ont été développées dans le but d'étudier le comportement des matériaux granulaires. On peut distinguer, en particulier, deux grandes familles :

- Les méthodes de type explicite. Parmi ces méthodes, la méthode “Non Smooth Contact Dynamics”, développée par Moreau [2000] et Jean [1999], est une méthode couramment utilisée et permettant de prendre en compte les contacts multiples.
- Les méthodes de type implicite. Parmi ces méthodes, les méthodes “Molecular Dynamics” sont, à l'origine, destinées aux particules de gaz en collision, et s'intéressent à des particules de faibles dimensions telles que les atomes et les molécules [Allen et Tildesley, 1987; Gerschel, 1995]. Les méthodes “Discrete Element Method”, initiées par Cundall et Strack [1979], considèrent les actions mécaniques entre grains sous forme de ressorts, patins et amortisseurs.

Ces méthodes ont été, le plus souvent, appliquées au cas de matériaux granulaires sans cohésion [Masson et Martinez, 1997, 2001; Moreau, 1994, 2001; Radjaï et al., 1997; Radjaï, 1999].

Le cas de la cohésion entre grains a aussi été étudié, aussi bien en terme d'actions normales et tangentielles entre grains [Preechawuttipong et al., 2001; Nicot et Darve, 2005], qu'en terme d'actions combinées [Delenne et al., 2004]. Le cas de la cohésion par capillarité a également été appréhendé par des méthodes de simulations numériques en éléments discrets, mais essentiellement dans le cas monodisperse [Lian et al., 1998; Mikami et al., 1998; Gröger et al., 2003; Thornton et al., 2004]. L'objectif est ici d'étudier l'influence des forces capillaires locales sur le comportement macroscopique des matériaux granulaires polydisperses.

### 3.1.2 Description de la méthode numérique utilisée

Le code de calcul utilisé, dénommé `tapio-K`, a été développé au sein de l'équipe "Milieux Hétérogènes" du LMGC de Montpellier, en s'inspirant du code de calcul développé par J.Y. Delenne [2002] pour la cohésion solide en 2D. Le code `tapio-K` est une extension au cas cohésif et au cas 3D de la méthode DEM ("Discrete Element Method") initiée par Cundall [1974]. La méthode DEM est une méthode newtonienne de type explicite, c'est-à-dire que cette méthode utilise des lois d'interactions régulières qui s'écrivent sous la forme de fonctions régulières. Trois grandes étapes se succèdent au cours d'une simulation numérique :

1. L'étape de pré-traitement.

Cette étape consiste à définir :

- la géométrie des grains et leurs arrangements respectifs dans la configuration initiale, ce qui constitue la texture du squelette solide,
- les caractéristiques physiques de l'échantillon : masses des grains, paramètres des lois d'interactions...
- les conditions initiales en terme de forces ou de déplacements au temps initial,
- les conditions aux limites en terme de forces ou de vitesses de déplacements.

2. L'étape de calcul.

L'étape de calcul se décompose en deux volets exécutés de façon itérative :

- Le premier volet consiste à calculer les efforts en fonction des déplacements des grains obtenus au pas de temps précédent. Ces déplacements sont calculés à partir des grandeurs cinématiques de position, vitesse et accélération.
- Le deuxième volet consiste à calculer les grandeurs cinématiques à partir d'une intégration des équations de la dynamique, en tenant compte des efforts calculés à l'étape précédente et des grandeurs cinématiques déterminées au pas de temps précédent.

3. L'étape de post-traitement.

Cette étape regroupe toutes les opérations qui permettent d'exploiter les données issues de la simulation numérique : études statistiques, suivi des grandeurs au cours des essais, visualisation de l'évolution des échantillons... Pour cette étape de post-traitement, les outils de visualisation des milieux granulaires sont fort utiles et appréciés des chercheurs; pour ces travaux de thèse, on utilise l'outil `mgpost` développé par V. Richefeu [2004] au LMGC de Montpellier.

L'étape de calcul constitue évidemment le coeur des simulations numériques. C'est cette étape qui est plus particulièrement détaillée dans la suite.

### Description du milieu granulaire

Les échantillons sont constitués de grains sphériques; pour un grain repéré  $i$ , le centre est noté  $O_i$  et le rayon  $R_i$ . Les positions, vitesses et accélérations des grains sont calculées dans un référentiel global  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  galiléen (Fig. 3.1). A chaque grain est associé un repère  $(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  dont le trièdre de base est initialement confondu avec le trièdre de base du repère global.

Lorsque le grain  $i$  considéré (appelé candidat) est susceptible d'interagir avec un grain  $j$  (appelé antagoniste), un repère d'interaction de base  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{s})$  est défini (Fig. 3.1) :

- le vecteur  $\vec{n}$  est porté par la normale entrante par rapport au grain  $i$  et s'écrit

$$\vec{n} = \frac{O_j \vec{O}_i}{\|O_j \vec{O}_i\|} \quad (3.1)$$

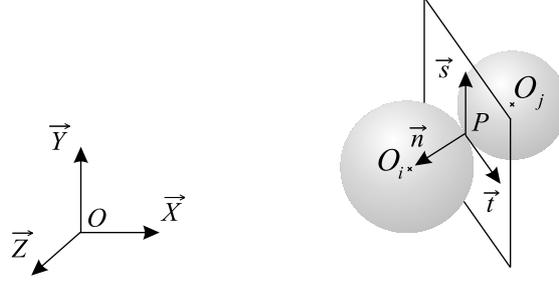


FIG. 3.1 – Définition des notations utilisées pour les simulations numériques.

– les vecteurs unitaires tangents<sup>1</sup>  $\vec{t}$  et  $\vec{s}$  s'écrivent

$$\vec{s} = \frac{\vec{Y} \wedge \vec{n}}{\|\vec{Y} \wedge \vec{n}\|} \quad (3.2)$$

$$\vec{t} = \vec{s} \wedge \vec{n} \quad (3.3)$$

La distance qui sépare deux grains  $i$  et  $j$  est dénommée distance intergranulaire. Elle est notée  $D$ . Cette distance est calculée grâce à la relation :

$$D = \|\vec{O}_j \vec{O}_i\| - (R_i + R_j) \quad (3.4)$$

On peut ainsi distinguer trois situations possibles :

- les grains sont en contact et s'interpénètrent lorsque  $D < 0$ ,
- les grains sont en contact sans s'interpénétrer lorsque  $D = 0$ ,
- les grains ne sont pas en contact lorsque  $D > 0$ .

La capillarité est abordée à travers un comportement normal entre grains, le repérage angulaire d'un point matériel à la surface du grain n'est donc pas nécessaire. A partir de cette description géométrique de l'échantillon granulaire, il est possible de définir les grandeurs cinématiques associées aux grains. A chaque grain est associé un torseur cinématique qui décrit le mouvement du centre du grain :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/0} \\ \vec{V}(O_i, i/0) \end{array} \right\}_{O_i} \quad (3.5)$$

où  $\vec{\Omega}_{i/0}$  est le vecteur rotation du repère associé au grain  $i$  par rapport au repère global noté 0, et  $\vec{V}(O_i, i/0)$  est le vecteur vitesse du centre  $O_i$  du grain  $i$  dans le repère global.

## Interactions

Les grains interagissent à travers des actions de contact frottant et de cohésion capillaire. De nombreux modèles existent quant à la description du contact et du frottement entre grains [Cambou et Jean, 2001; Maugis, 2000]. Les lois de contact et de frottement utilisées dans le code de calcul sont des lois simples classiques.

Par convention, dans le code de calcul **tapio-K**, les forces de compression sont comptées positivement et les forces de traction sont comptées négativement.

<sup>1</sup>Un cas particulier peut exister si  $\vec{n}$  et  $\vec{Y}$  sont colinéaires. Si  $\vec{n}$  et  $\vec{Y}$  sont de même sens, alors  $\vec{t} = -\vec{X}$  et  $\vec{s} = \vec{Z}$ ; si  $\vec{n}$  et  $\vec{Y}$  sont de sens opposés, alors  $\vec{t} = \vec{X}$  et  $\vec{s} = \vec{Z}$ .

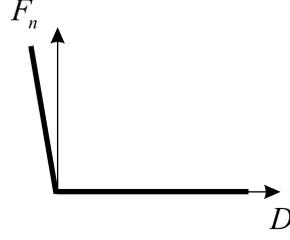


FIG. 3.2 – Loi de contact linéaire.

Le code de calcul est basé sur une méthode explicite ; les lois d'interaction considérées sont donc des lois régulières, présentées sous la forme de fonctions bijectives.

L'action de contact entre grains est décrite par une loi régularisée (Fig. 3.1.2) inspirée de la loi de Signorini. Cette loi permet de déterminer la force normale  $F_n$  en fonction de la distance intergranulaire  $D$  :

$$F_n = \begin{cases} -K_n D & \text{si } D \leq 0 \\ 0 & \text{si } D > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

le terme  $K_n$  est un coefficient de régularisation, il correspond à une raideur de contact ; le comportement au contact est assimilé au comportement d'un ressort qui empêcherait l'interpénétration.

Le frottement entre les grains  $i$  et  $j$  génère une force de frottement  $\vec{F}_{frot}$  dans le plan tangent  $(\vec{n}, \vec{t})$  opposée à la vitesse de glissement entre les grains. La prise en compte du frottement entre les grains nécessitent donc l'étude de la cinématique entre grains. Le point de contact entre deux grains  $i$  et  $j$  est noté  $P$  (Fig. 3.1). Le point matériel du grain  $i$  correspondant à ce contact est noté  $P_i$ , celui du grain  $j$  est noté  $P_j$ . La vitesse relative  $\vec{V}_{ij}$  du grain  $j$  par rapport au grain  $i$  est exprimée dans le repère global  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{ij} &= \vec{V}(P_j, j/0) - \vec{V}(P_i, i/0) \\ &= \vec{V}(O_j, j/0) + P_j \vec{O}_j \wedge \vec{\Omega}_{j/0} - \vec{V}(O_i, i/0) - P_i \vec{O}_i \wedge \vec{\Omega}_{i/0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Cette vitesse relative est exprimée dans le repère local d'interaction moyennant les composantes normale et tangentielles :

$$\vec{V}_{ij} = V_{ijn} \vec{n} + V_{ijt} \vec{t} + V_{ijs} \vec{s} \quad (3.8)$$

La vitesse de glissement  $\vec{V}_{ijG}$  du grain  $j$  par rapport au grain  $i$  s'écrit :

$$\vec{V}_{ijG} = V_{ijt} \vec{t} + V_{ijs} \vec{s} = \vec{V}_{ij} - V_{ijn} \vec{n} \quad (3.9)$$

La force de frottement  $F_{frot}$  est donnée par la loi de Coulomb "régularisée" (Fig. 3.1.2). La force de frottement est alors telle que :

$$F_{frot} = -\min(K_t |V_{ijG}|, \mu F_n) \text{sgn}(V_{ijG}) \quad (3.10)$$

où  $|V_{ijG}|$  est la norme de la vitesse de glissement,  $K_t$  est le coefficient de régularisation tangentiel et  $\mu$  le coefficient de frottement [Cambou et Jean, 2001].

Le cas de la cohésion par capillarité et son influence sur les lois de contact et de frottement sont détaillés à la section 3.2.

Au niveau des contacts entre grains, des dissipations d'énergie apparaissent. Ces dissipations peuvent provenir des actions de frottement mais aussi de phénomènes d'amortissement. Pour

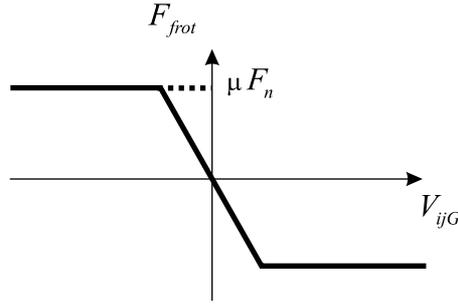


FIG. 3.3 – Loi de frottement régularisée.

tenir compte de ces dissipations dans le code de calcul, on introduit généralement un coefficient d’amortissement normal  $\nu$ . La loi de contact (Eq. 3.6) s’écrit alors :

$$F_n = \begin{cases} -K_n D + \nu V_{ijN} & \text{si } D \leq 0 \\ 0 & \text{si } D > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

### Intégration des équations du mouvement

La cohésion par capillarité étant appréhendée seulement au niveau d’une description normale entre les grains, la position angulaire du grain n’est pas nécessaire et seule la cinématique des centres des grains est prise en compte pour obtenir la position des grains.

La cinématique des grains est obtenue grâce à l’utilisation d’algorithmes d’intégration. Ces algorithmes consistent à déterminer, au temps  $t + \Delta t$ , les vecteurs positions  $\vec{X}_i$ , vitesses  $\vec{V}_i$  et accélérations  $\vec{A}_i$  des centres des grains dans le repère global, à partir des positions, des vitesses et accélérations au temps  $t$ .

Les méthodes d’intégration couramment employées pour les méthodes de type DEM sont des méthodes explicites basées sur une discrétisation temporelle par différences finies [Allen et Tildesley, 1987; Cambou et Jean, 2001]. L’algorithme utilisé dans le code de calcul est l’algorithme “velocity Verlet”. Connaissant les variables cinématiques  $\vec{X}_i$ ,  $\vec{V}_i$ , et  $\vec{A}_i$  au temps  $t$ , les nouvelles positions au temps  $t + \Delta t$  sont calculées en utilisant le développement limité au second ordre :

$$\vec{X}_i(t + \Delta t) = \vec{X}_i(t) + \Delta t \vec{V}_i(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{A}_i(t) + \bar{o}(\Delta t^3) \quad (3.12)$$

L’algorithme “velocity Verlet” permet une bonne détermination des vitesses des grains grâce à un calcul en plusieurs étapes.

Les vitesses sont d’abord calculées à un pas de temps intermédiaire en l’utilisant l’équation aux différences finies à droite :

$$\vec{V}_i(t + \frac{1}{2} \Delta t) = \vec{V}_i(t) + \frac{1}{2} \Delta t \vec{A}_i(t) + \bar{o}(\Delta t^2) \quad (3.13)$$

Ensuite, les accélérations  $\vec{A}_i(t + \Delta t)$  sont déterminées en utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, les actions mécaniques exercées sur le grain  $i$  étant déterminées grâce aux positions  $\vec{X}_i(t + \Delta t)$  et aux vitesses  $\vec{V}_i(t + \frac{1}{2} \Delta t)$ . Le calcul des vitesses peut alors être réajusté en utilisant l’équation aux différences finies à gauche :

$$\vec{V}_i(t + \Delta t) = \vec{V}_i(t + \frac{1}{2} \Delta t) + \frac{1}{2} \Delta t \vec{A}_i(t + \Delta t) + \bar{o}(\Delta t^2) \quad (3.14)$$

L'algorithme d'intégration nécessite le choix d'un pas de temps  $\Delta t$ . Afin de pouvoir décrire de façon satisfaisante le comportement mécanique des grains, le pas de temps ne doit pas dépasser un pas de temps critique  $\Delta t_{critique}$ . Le pas de temps critique, qui correspond à la durée d'un choc entre deux grains, peut être déterminé en considérant le cas du choc frontal entre un grain  $i$  et un grain  $j$  liés par un système ressort-amortisseur (pour plus de détail, voir annexe B) [Duran, 1999]. Tant que les grains sont en contact, il y a interpénétration et on peut écrire :

$$m\ddot{D} + \nu\dot{D} + K_n D = 0 \quad (3.15)$$

où  $m$  est la masse réduite ( $m = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$  pour deux grains de masses différentes),  $\dot{D}$  est la dérivée de la distance intergranulaire  $D$  par rapport au temps, et  $\ddot{D}$  la dérivée seconde. A partir de la relation (Eq. 3.15), il est possible de déterminer l'amortissement critique qui correspond à une interpénétration minimale des grains ( $0 \leq \nu < \nu_{critique}$ ) :

$$\nu_{critique} = 2\sqrt{mK_n} \quad (3.16)$$

et le pas de temps critique qui correspond à la durée du choc entre les deux grains :

$$\Delta t_{critique} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{K_n}{m} - \left(\frac{\nu}{m}\right)^2}} \quad (3.17)$$

Le pas de temps doit être suffisamment faible par rapport au pas de temps critique. Par précaution, le pas de temps critique est considéré dans le cas le plus défavorable, en considérant qu'il n'y a pas d'amortissement :

$$\Delta t_{critique} = \pi\sqrt{\frac{m}{K_n}} \quad (3.18)$$

La relation (3.18) montre que le pas de temps critique est proportionnel à  $\sqrt{m}$  et inversement proportionnel à  $\sqrt{K_n}$ . La méthode DEM considérée nécessite l'utilisation de pas de temps très petits. Pour réduire la durée globale des temps de calcul, c'est-à-dire conserver des pas de temps compris entre  $10^{-7}$  s et  $10^{-5}$  s tout en assurant la stabilité des calculs, il est possible de modifier "artificiellement" la valeur du pas de temps critique en agissant sur l'un ou l'autre des paramètres  $m$  et  $K_n$ . Dans le but de conserver une raideur au contact élevée, le paramètre  $K_n$  n'est pas modifié. Les masses des grains, par contre, sont pondérées par un facteur de masse afin d'augmenter le paramètre  $m$  et donc diminuer artificiellement la valeur du pas de temps critique. Les simulations sont effectuées pour des configurations quasi-statique, l'inertie des grains n'a donc que peu d'influence et l'utilisation de ce facteur de masse ne perturbe pas les résultats des essais. Cette méthode est fréquemment utilisée dans les simulations de milieux granulaires en quasi-statique [Thornton et Antony, 2000; Gröger et al., 2003].

### Optimisation par voisinage

De par sa nature même, la méthode utilisée implique un calcul des distances intergranulaires à chaque pas de temps  $\Delta t$ . Cette opération est particulièrement coûteuse en temps de calcul ; elle l'est d'autant plus que les pas de temps sont en général petits (de  $10^{-7}$  s à  $10^{-5}$  s) et que le nombre de grains est élevé. En effet, si le nombre de grains dans l'échantillon est égal à  $N$ , il faut, a priori, déterminer  $\frac{N(N-1)}{2}$  distances intergranulaires.

Afin de limiter ce nombre d'opérations, une solution consiste à ne prendre en compte que les grains  $j$  contenus dans un voisinage proche du grain  $i$  et donc susceptibles d'interagir directement avec le grain  $i$ . Plusieurs techniques d'optimisation par voisinage peuvent être utilisées [Müller, 1996].

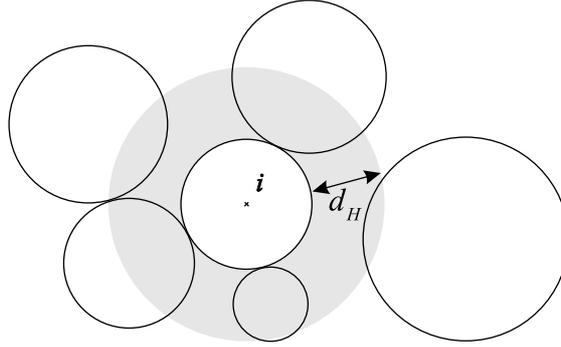


FIG. 3.4 – Illustration de la technique du “halo”.

La technique retenue pour nos simulations numériques est la technique dite du “halo” ou “voisinage de Verlet” (Fig. 3.4) qui est particulièrement bien adaptée aux situations polydisperses. Cette technique consiste à conserver la liste des plus proches voisins de  $i$ , c’est-à-dire la liste de l’ensemble des grains situés dans un périmètre défini par une distance  $d_H$  par rapport au grain  $i$ . La liste définissant le voisinage de chaque grain  $i$  est mise à jour à des intervalles de temps réguliers  $\Delta t_v$ , supérieurs au pas de temps  $\Delta t$  (dans les simulations numériques présentées dans ce mémoire,  $\Delta t_v = 100 \Delta t$ ). Au cours de la simulation, entre chaque mise à jour du voisinage, pour un grain  $i$ , il suffit d’évaluer les distances aux grains contenus dans la liste de voisinage de  $i$ , les autres grains étant situés à des distances trop grandes pour qu’il y ait des contacts possibles. Cette technique permet de réduire sensiblement les temps de calcul.

## 3.2 Prise en compte de la capillarité dans le code de calcul

La prise en compte en simulations numériques de la capillarité dans un milieu granulaire s’effectue à travers deux aspects : la description de la force capillaire entre grains, d’une part, et la gestion de l’eau au sein du milieu granulaire, d’autre part.

### 3.2.1 Loi locale d’interaction de type capillaire

#### Description de la loi

Les études théoriques et expérimentales du chapitre 2 permettent de proposer une loi locale d’interaction de type capillaire. Cette loi relie la force normale  $F_n$  entre grains à la distance intergranulaire  $D$ , en se basant sur les considérations suivantes :

1. Le volume du pont liquide entre deux grains est supposé constant tant que le pont n’est pas rompu. Si on suppose que les grains sont en contact à l’instant initial et qu’un pont liquide existe, cela revient à effectuer un essai de traction sur le doublet capillaire à volume de liquide constant.
2. Lorsque les grains sont en contact, c’est-à-dire  $D \leq 0$ , une loi de contact est utilisée pour décrire la relation force-déplacement. Une loi linéaire, dont la pente est donnée par une raideur  $K_n$  grande devant la “raideur capillaire” (au moins six ordres), est utilisée pour établir la relation force-déplacement (Fig. 3.5(a)).
3. Tant que  $0 \leq D < D_{rupture}$ , et donc qu’un pont liquide existe entre les grains, l’effort normal entre les grains est donné par les relations (2.65 et 2.66) de façon réversible, c’est-à-dire que la distance intergranulaire  $D$  soit croissante (les grains s’écartent) ou décroissante (les grains se rapprochent). Dans cette approche, le phénomène d’hystérésis qui existe au niveau de la force de capillarité n’est pas pris en compte.

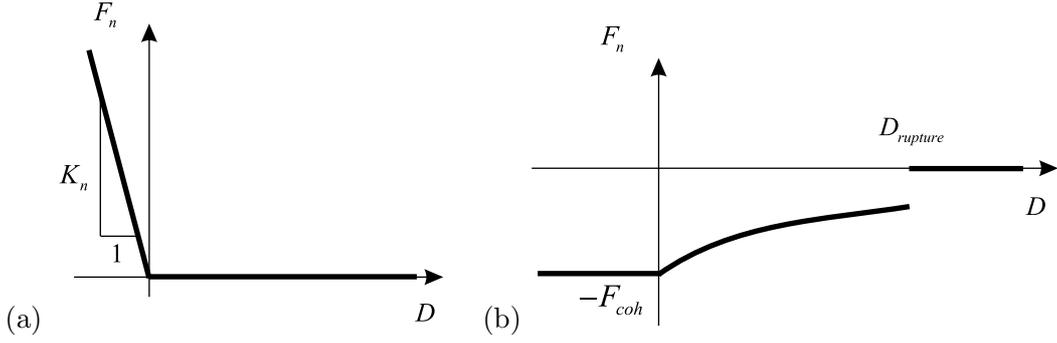


FIG. 3.5 – (a) Loi de contact linéaire, (b) loi de cohésion par capillarité.

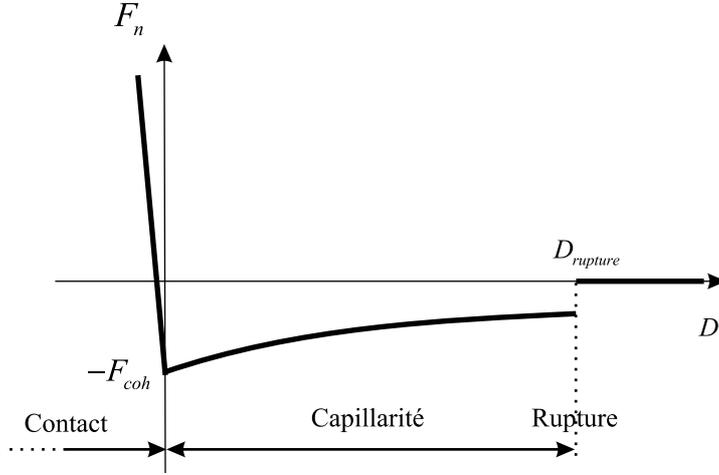


FIG. 3.6 – Allure de la loi d'interaction normale entre grains.

4. Lorsque la distance intergranulaire atteint la distance de rupture, le pont liquide entre les grains est rompu ; il n'existe donc plus de force de cohésion par capillarité, l'effort normal entre grains est nul (Fig. 3.5(b)).

A partir de ces considérations, il est possible d'établir une relation force normale ( $F_n$ ) - distance intergranulaire ( $D$ ) qui traduit le comportement normal entre grains. Cette relation  $F_n$  -  $D$  correspond à la combinaison d'une loi de contact et de la loi de cohésion par capillarité : la figure 3.6 donne l'allure de cette relation pour un volume de pont liquide donné dans le cas général. Cette loi locale permet, pour  $D \geq 0$ , de déterminer la force de cohésion générée par le pont liquide entre les grains jusqu'à sa rupture. Le terme  $F_{coh}$  correspond à l'intensité de la force capillaire lorsque les grains sont en contact ( $D = 0$ ).

La présence de la cohésion nécessite une modification dans le calcul de la force de frottement. La relation (3.10) devient, en tenant compte de  $F_{coh}$  :

$$F_{frot} = -\min(K_t |V_{ijG}|, \mu (F_n + F_{coh})) \operatorname{sgn}(V_{ijG}) \quad (3.19)$$

### Possibilité de formation de ponts liquides

La loi d'interaction normale entre grains n'est pas réversible une fois que le pont liquide est rompu. Pourtant, même si un pont liquide entre deux grains s'est rompu, il est tout à fait

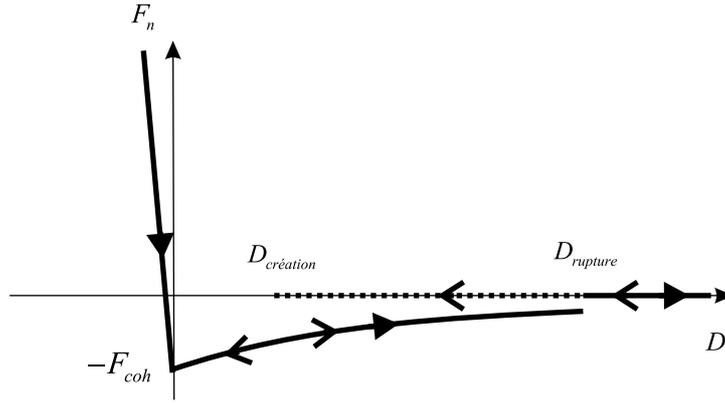


FIG. 3.7 – Illustration d’un type de loi locale de cohésion par capillarité réversible.

possible qu’un nouveau pont se forme. De même, selon la situation, des grains, initialement trop éloignés pour être liés par un pont liquide, peuvent se rapprocher, permettant ainsi à un pont liquide de s’établir.

Il est donc nécessaire de disposer d’un critère définissant la formation de ponts liquides. Une solution simple consiste à créer un pont liquide entre deux grains lorsque ceux-ci sont au contact. Cependant, dans un milieu granulaire contenant de l’eau, des gouttes peuvent se former à la surface des grains, et des essais simples permettent de se rendre compte qu’un pont liquide peut s’établir sans que les grains se touchent. Il paraît judicieux d’utiliser un critère de formation de pont liquide à l’image du critère de rupture : il s’agit donc de définir une distance  $D_{création}$  qui permet de définir la distance intergranulaire pour laquelle un pont liquide peut se former entre les grains. Le critère proposé est basé sur une pondération de la distance de rupture (donc du volume du pont liquide) par un coefficient  $k_{création}$  :

$$D_{création} = k_{création} D_{rupture} \quad (3.20)$$

La distance de formation, et donc le facteur  $k_{création}$ , sont particulièrement délicats à évaluer car fortement tributaires des facteurs environnementaux et de la disposition spatiale des grains. Des essais effectués à l’échelle locale lors des essais de traction sur les ponts liquides (chapitre 2) permettent d’estimer la distance de reformation d’un pont liquide rompu à environ 20% de la distance de rupture. Même si ces essais ne sont pas forcément représentatifs de ce qui se passe dans un matériau granulaire réel, la valeur  $k_{création} = 0,2$  est utilisée pour définir le critère de formation d’un pont liquide au cours des calculs numériques<sup>2</sup>.

Une fois qu’un nouveau pont liquide est établi, il se comporte suivant la relation  $F_n - D$  établie précédemment (Fig. 3.6). La figure 3.7 présente l’évolution de la relation  $F_n - D$  pour un doublet de grains initialement liés par un pont liquide (courbes en trait plein, flèches pleines), jusqu’à la rupture du pont liquide, puis la reformation du pont liquide (courbes en traits pointillés, flèches ouvertes) : cela revient à éloigner deux grains initialement en contact jusqu’à la rupture du pont liquide, puis à les rapprocher jusqu’à la reformation du pont liquide.

### Avantage de la loi capillaire

La loi utilisée pour décrire la cohésion par capillarité dans le cas polydisperse est particulièrement bien adaptée aux simulations numériques. En effet, des simulations de compression

<sup>2</sup>Des simulations ont été effectuées dans des conditions identiques avec une valeur de  $k_{création} = 0,1$  et  $k_{création} = 0,3$  pour tester l’influence de ce paramètre : les résultats macroscopiques en terme d’évolution de la force de compression avec le déplacement du plateau ne sont pas sensibles à ce paramètre.



FIG. 3.8 – Photographie d’une couche polydisperse de billes de verre en présence d’eau colorée.

diamétrale d’un échantillon polydisperse de 1000 grains ont été effectuées dans les mêmes conditions en utilisant la loi proposée par Willett et al. [2000] et la loi capillaire décrite au chapitre 2 : pour des résultats macroscopiques similaires (écart relatif maximum : 14%), la simulation effectuée avec la première loi nécessite près de 312 minutes alors que la simulation utilisant la deuxième loi ne dure que 128 minutes. De plus, la loi proposée par Willett *et al.* ne prend pas en compte les distances intergranulaires nulles. On comprend dès lors l’intérêt de posséder des lois capables de décrire de façon satisfaisante les phénomènes physiques tout en permettant des simulations rapides.

### 3.2.2 Répartition de l’eau au sein de l’échantillon numérique

L’intégration de la cohésion par capillarité dans un code de calcul en éléments discrets nécessite la prise en compte de la gestion de l’eau au sein de l’échantillon granulaire. En effet, la force capillaire dépend du volume du pont liquide entre les grains. Se pose donc la question de savoir comment répartir numériquement au sein de l’échantillon un volume d’eau macroscopique donné pour former les ponts liquides.

L’étude de la répartition de l’eau est d’autant plus délicate que les échantillons sont polydispersés et que la configuration est tridimensionnelle. Pour tenter d’apporter des éléments de réponse, des expériences ont été réalisées sur un milieu modèle. Une couche de billes de verre de rayons 2, 3 et 4 mm est déposée dans une coupelle en verre. De l’eau colorée est introduite dans cet échantillon jusqu’à saturation du milieu. L’ensemble est placé dans une étuve afin d’abaisser la teneur en eau par évaporation et ainsi obtenir des ponts liquides disjoints entre les grains. Des séries de photographies sont réalisées en cours de séchage (Fig. 3.8).

A partir de ces photographies, il est possible d’identifier des ponts liquides entre les grains et d’estimer la taille de ces ponts liquides. Cependant, ces observations ne permettent pas d’identifier de façon satisfaisante une relation entre la taille du pont liquide et la configuration du doublet.

Une possibilité consiste à répartir l’eau de façon uniforme dans tout l’échantillon, ce qui

implique que tous les ponts liquides ont le même volume. Cette distribution semble tout à fait pertinente dans le cas monodisperse. Cependant, dans le cas polydisperse, il n’y a, a priori, aucune raison pour que l’eau soit répartie uniformément dans l’échantillon. Le critère de répartition de l’eau doit respecter les deux contraintes suivantes :

- tenir compte de la diversité des tailles des grains ; a priori, plus les grains sont de tailles importantes, plus un pont liquide de volume important peut s’établir entre eux,
- lorsqu’on se rapproche d’une configuration monodisperse, les volumes des différents ponts liquides doivent tendre vers une même valeur.

Le critère utilisé tient compte de ces deux contraintes ; la répartition de l’eau est effectuée en fonction de la taille des grains du doublet. Pour chaque pont liquide  $k$  susceptible de se former entre deux grains  $i$  et  $j$ , un volume indicateur  $\widetilde{V}_k$  est calculé :

$$\widetilde{V}_k = R_i R_j (R_i + R_j) \quad (3.21)$$

Ce volume indicateur permet d’attribuer à chaque doublet capillaire un volume d’eau correspondant à une fraction du volume d’eau macroscopique  $V_{liquide}$  et qui dépend de la taille des grains<sup>3</sup>. Ainsi, au niveau d’un pont liquide  $k$ , le volume d’eau utilisé pour le calcul de la force capillaire est :

$$V_k = \frac{\widetilde{V}_k}{\sum_l \widetilde{V}_l} V_{liquide} \quad (3.22)$$

La somme de ces volumes locaux correspond ainsi au volume d’eau macroscopique introduit dans l’échantillon.

### 3.2.3 Gestion de la répartition de l’eau au sein du matériau granulaire

En plus du critère de distribution de l’eau, la prise en compte de la capillarité dans le code nécessite un suivi de l’état des interactions. Chaque interaction possède un “statut” qui constitue une mémoire numérique de son état, à savoir présence ou absence de pont liquide entre les grains.

Une première étape du calcul numérique consiste à initialiser les statuts, c’est-à-dire à définir la présence ou l’absence de pont liquide entre les grains dans la configuration initiale.

Une fois les statuts des interactions définis, chaque interaction de type pont liquide se voit attribuer un volume de liquide à l’aide du critère (3.22). Le calcul de ces volumes locaux est effectué à chaque actualisation de la liste de voisinage de Verlet.

Entre deux réactualisations de la liste de voisinage, des ponts liquides peuvent disparaître ou au contraire se former ; les statuts sont modifiés au cours des calculs. Lorsqu’un pont liquide est formé entre deux actualisations de la liste de voisinage, un volume de pont liquide moyen  $V_{moyen}$  est utilisé pour le calcul de la force capillaire. Ce volume moyen est calculé au cours de l’actualisation de la liste de voisinage :

$$V_{moyen} = \frac{V_{liquide}}{Z_{ponts}} \quad (3.23)$$

où  $Z_{ponts}$  est le nombre de ponts liquides au moment de l’actualisation de la liste de voisinage.

La méthode globale de gestion numérique de l’eau au sein de l’échantillon granulaire est illustrée en annexe C. La figure 3.9 montre l’évolution du volume de liquide contenu dans un échantillon au cours d’un essai de compression simple. Cet échantillon polydisperse est constitué de 8000 grains, le volume de liquide introduit initialement dans l’échantillon est  $2,58.10^{-7} m^3$ . Le volume global en cours d’essai est obtenu par sommation des volumes des différents ponts

---

<sup>3</sup>On peut remarquer que lorsque  $R_i = R_j = R$ ,  $V_{indic_k} = 2R^3$ , ce qui permet d’obtenir des ponts liquides de volumes identiques.

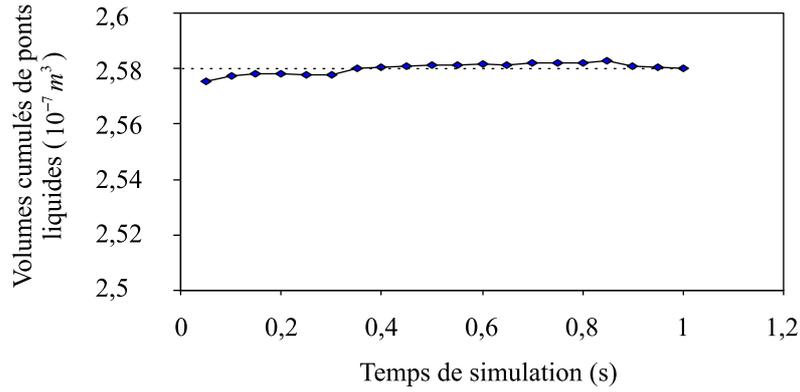


FIG. 3.9 – Évolution du volume de liquide global au cours d’une simulation de compression simple. Le volume global introduit initialement dans l’échantillon granulaire est  $2,58 \cdot 10^{-7} m^3$ .

liquides. L’erreur relative maximale entre le volume global et le volume initialement introduit est de 0,18%, ce qui permet de vérifier l’efficacité la méthode globale de gestion numérique de l’eau au sein de l’échantillon granulaire.

### 3.3 Quelques remarques sur les effets de la taille des grains

Afin d’appréhender les effets de la taille des grains sur les simulations numériques, des essais sont réalisés sur des échantillons cubiques monodisperses (les grains qui composent un échantillon sont tous de la même taille). Les échantillons sont des cubes de  $18 mm$  de côté ayant une même teneur en eau massique  $w = 3 \%$  (Fig. 3.10).

Les rayons de grains utilisés sont :  $0,5$ ;  $0,75$ ;  $1$  et  $1,5 mm$ . Des simulations d’essais de compression sont réalisées à une vitesse de  $2 mm/s$  durant  $1 s$ .

A partir de ces simulations de compression, il est possible d’étudier l’effet de la taille des grains sur le nombre de grains dans l’échantillon, sur le poids des grains et sur les valeurs moyennes en cours d’essai des paramètres suivants : nombre de coordination global, nombres de contacts, nombres de ponts liquides sollicités en traction, efforts moyens de contact et efforts capillaires moyens (Fig. 3.11). Si on considère que la taille caractéristique des grains est donnée par leur rayon  $R$ , alors on peut constater que pour un même volume d’échantillon, une même configuration et une même teneur en eau :

- le nombre moyen d’interaction par grain atteint 6 pour les faibles valeurs de  $R$  et 4 pour  $R = 1,5 mm$ ,
- le temps de calcul<sup>4</sup> est lié à  $R^{-3,7}$ ,
- le nombre de grains dans l’échantillon dépend de  $R^{-3}$ ,
- le poids d’un grain est bien sûr directement lié à  $R^3$ ,
- le nombre moyen de contacts entre grains au sein de l’échantillon évolue en  $R^{-3,7}$ ,
- le nombre moyen de ponts liquides sollicités en traction évolue en  $R^{-2,9}$ ,
- les efforts moyens de contact évoluent en  $R^{4,2}$ ,
- les efforts moyens de capillarité dépendent de  $R$ .

Ces résultats sont toutefois à nuancer ; les valeurs obtenues sont à la fois conditionnées par le nombre de grains et par les conditions aux limites choisies pour ces essais. Pour être significative,

<sup>4</sup>Il faut distinguer la durée de simulation qui correspond à la durée de l’essai “simulé”, et le temps de calcul qui correspond au temps de calcul réel nécessaire pour effectuer cette simulation numérique.

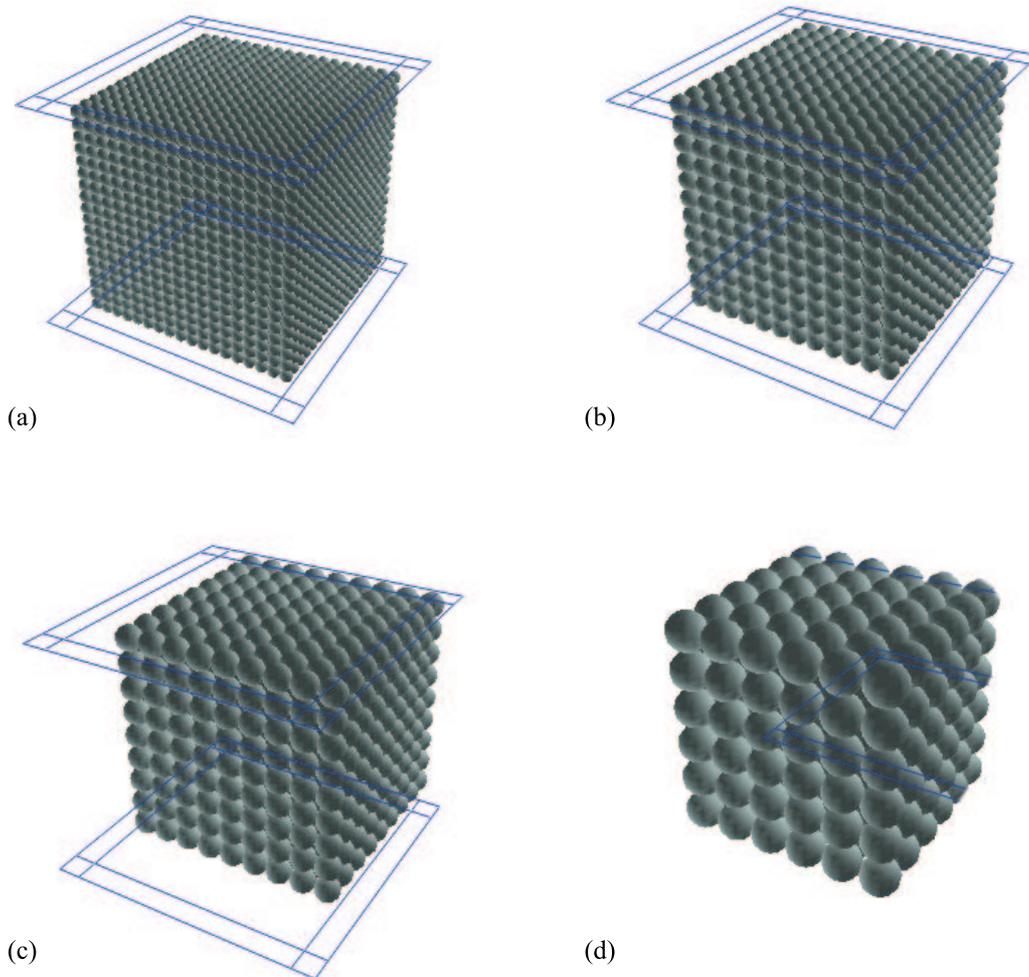


FIG. 3.10 – Configurations géométriques des échantillons cubiques monodisperses : (a) rayon des grains  $R = 0,5 \text{ mm}$ , (b)  $R = 0,75 \text{ mm}$ , (c)  $R = 1 \text{ mm}$  et (d)  $R = 1,5 \text{ mm}$ . Illustrations réalisées avec `mgpost` [Richefeu, 2004].

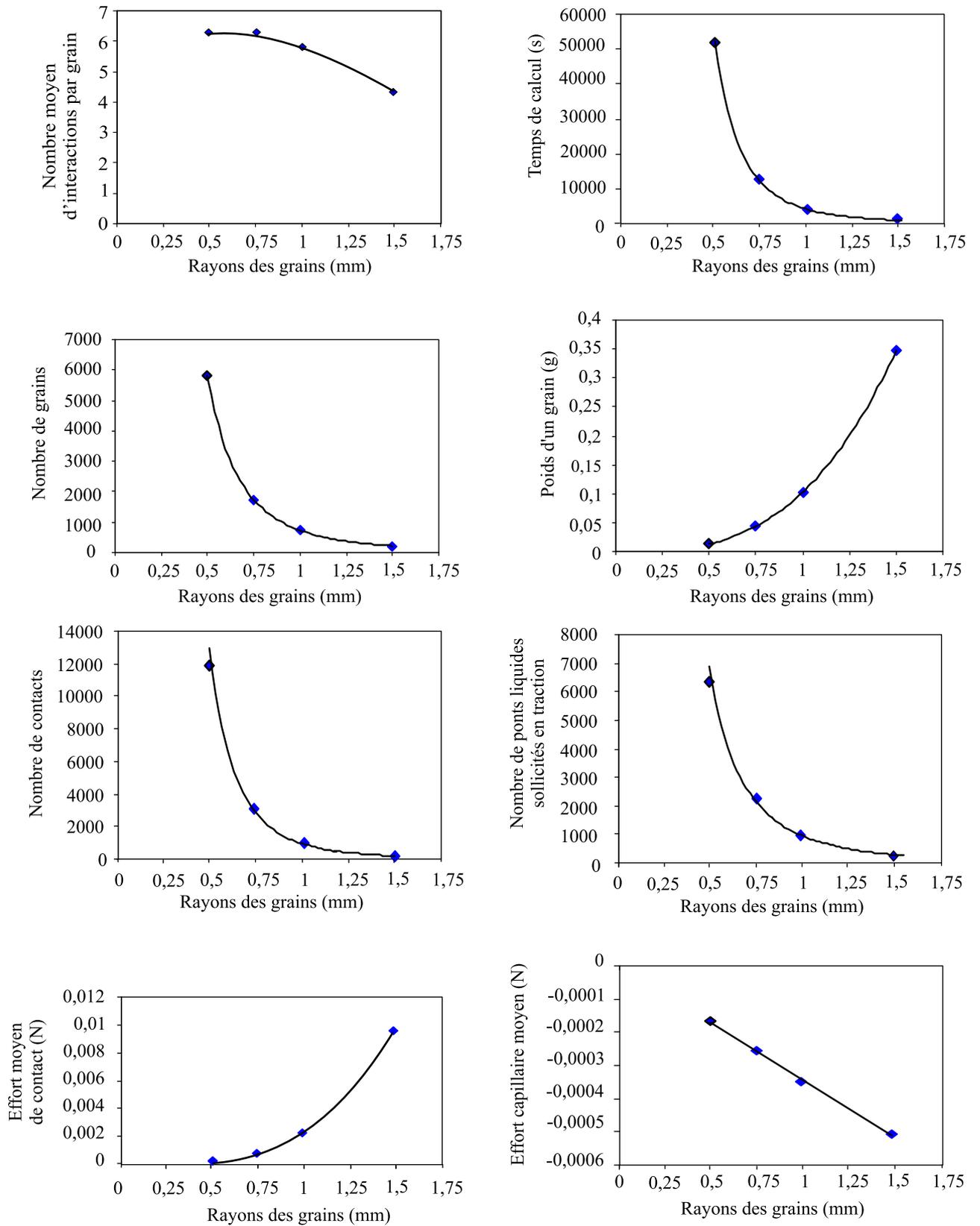


FIG. 3.11 – Évolution des paramètres moyens en fonction de la taille des grains : nombre d'interactions par grain, temps de calcul, nombre de grains, poids des grains, nombres de contacts et de ponts liquides sollicités en traction, efforts moyens de contact et de capillarité.

une simulation numérique nécessite donc un choix du nombre de grains (et donc de tailles de grains) adaptées aux conditions aux limites utilisées dans l’essai.

Néanmoins, ces résultats permettent de souligner l’influence de la taille des grains sur les simulations numériques. Comme on peut s’en douter, le nombre de grains peut très vite augmenter si on diminue la taille des grains, pour un même volume macroscopique. La conséquence est une augmentation du nombre d’interactions et des temps de calculs. Parmi ces interactions, le nombre d’interactions de contact est prédominant par rapport au nombre d’interactions capillaires pures (nombre de ponts liquides sollicités seulement en traction). Le nombre de grains apparaît comme un facteur limitant par rapport aux temps de calcul. Cependant, plus les grains sont de tailles importantes, plus les effets relatifs de l’accélération de la pesanteur sont sensibles. De plus, il est nécessaire d’utiliser en simulation numérique un nombre de grains suffisant pour se rapprocher de la réalité et pour solliciter un maximum d’interactions, et donc mettre en évidence les phénomènes locaux à l’échelle des grains. Le nombre de grains utilisé pour les échantillons numériques résulte donc d’un compromis entre un niveau de description suffisamment fin du matériau granulaire et un temps de calcul jugé raisonnable.

### 3.4 Essai de compression simple

Afin d’évaluer l’influence de la cohésion locale par capillarité sur le comportement macroscopique des matériaux granulaires, des essais de compression simple sont réalisés sur des échantillons polydisperses pour différentes teneurs en eau. Cette étude macroscopique est effectuée à la fois par simulation numérique grâce au code de calcul `tapio-K` et par expériences sur un matériau modèle.

#### 3.4.1 Simulation numérique

Avant de réaliser des simulations de compression simple, il est nécessaire de définir une géométrie des échantillons granulaires. Les échantillons sont constitués de 8000 grains dont le diamètre est compris entre  $0,8\text{ mm}$  et  $1,3\text{ mm}$ ; la répartition granulométrique est donnée par la figure 3.12. La géométrie de l’échantillon est obtenue par dépôt des grains sous gravité dans un cylindre enveloppe de diamètre  $25\text{ mm}$  (Fig. 3.13). Une fois le dépôt effectué, la surface supérieure de l’échantillon est “aplanie” par l’application d’une compression de  $1\text{ N}$  à l’aide du plateau supérieur. A l’équilibre, l’échantillon est libéré du cylindre enveloppe. L’échantillon numérique obtenu se présente ainsi sous la forme d’un cylindre de  $25\text{ mm}$  de diamètre et d’une hauteur de  $17\text{ mm}$  dont la compacité<sup>5</sup> est :  $c = 0,62$ .

La géométrie de cet échantillon numérique polydisperse sert de base aux simulations de compression simple. Les paramètres de simulation sont donnés dans le tableau 3.1. La masse volumique des grains est celle du verre et l’angle de mouillage est nul, ce qui correspond au cas du mouillage de l’eau pure sur du verre [Taylor, 1948]. Le coefficient de frottement entre grains  $\mu$  est égal à  $0,2$ ; cette valeur correspond à la valeur moyenne déterminée au chapitre 2. Le coefficient de frottement avec murs correspond au coefficient de frottement entre les grains et les plateaux de compression. La raideur normale  $K_n$  est choisie de façon à être suffisamment grande devant la “raideur capillaire” (au moins six ordres). La raideur tangentielle est déterminée en utilisant la relation  $K_t = \frac{2}{7}K_n$  [Luding, 1998; Landry et al., 2004]. Les compressions sont réalisées à une vitesse constante de  $1\text{ mm/s}$ ; seul le plateau supérieur est mobile, le plateau inférieur est fixe. La figure 3.14 illustre les essais de compression de deux échantillons : le premier est considéré à l’état sec ( $w = 0\%$ ) et le deuxième dans un état humide avec une teneur en eau

---

<sup>5</sup>La compacité correspond au volume solide divisé par le volume total. La porosité  $n$  correspond au volume des vides divisé par le volume total, pour cet échantillon :  $n = 1 - c = 0,38$ .

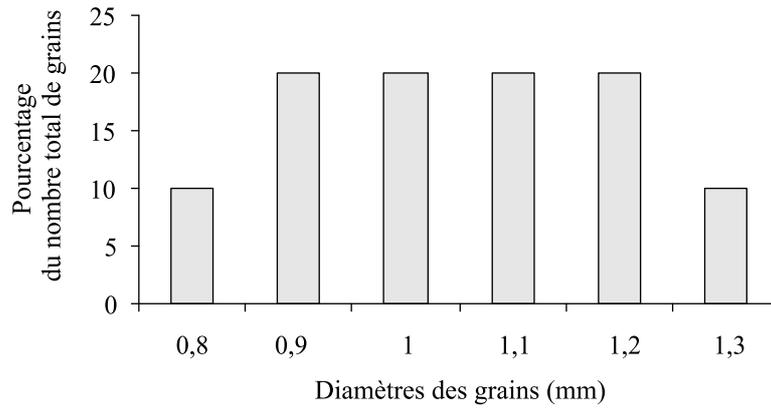


FIG. 3.12 – Répartition granulométrique au sein de l'échantillon numérique.

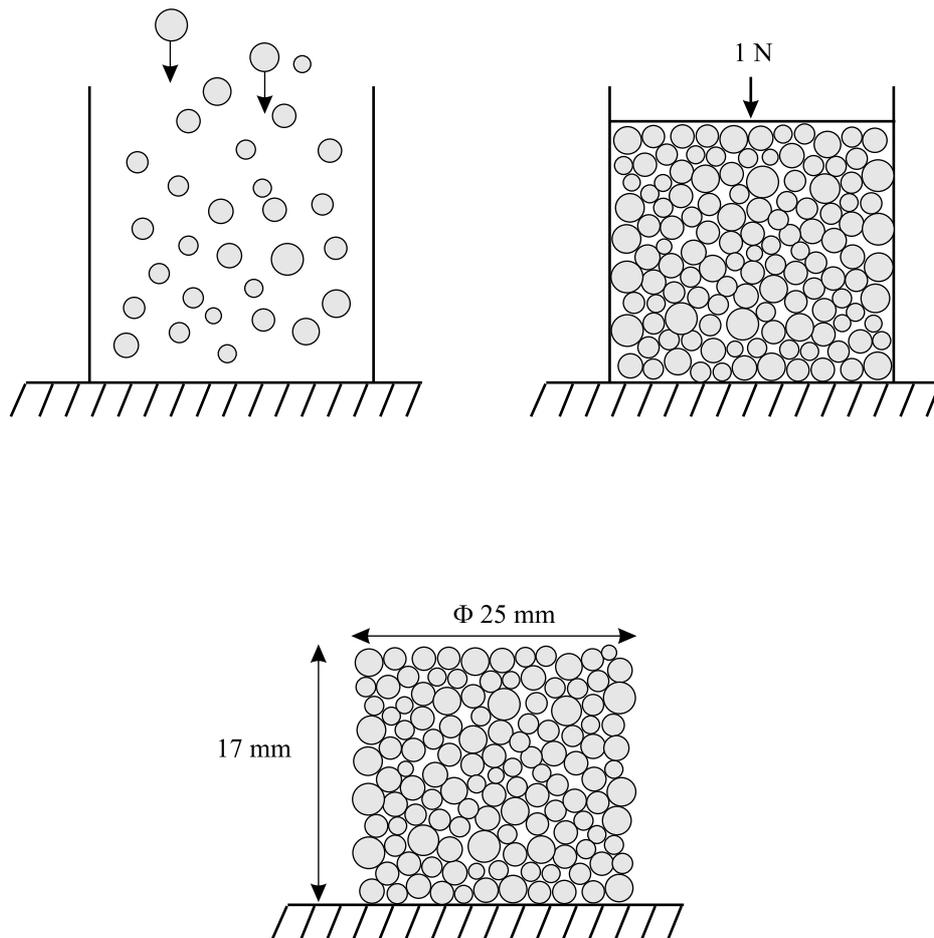


FIG. 3.13 – Illustration de la fabrication de l'échantillon granulaire numérique.

TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations de compression simple.

Paramètres	Valeurs
Masse volumique des grains ( $kg/m^3$ )	2500
Facteur de masse	$10^2$
Angle de mouillage $\theta$ ( $rad$ )	0
Tension superficielle $\sigma$ ( $N.m^{-1}$ )	$73.10^{-3}$
Raideur normale $K_n$ ( $N.m^{-1}$ )	$10^6$
Coefficient de régularisation tangentiel $K_t$ ( $N.s.m^{-1}$ )	$2,85.10^5$
Coefficient de frottement entre grains $\mu$	0,2
Coefficient de frottement avec les plateaux	0,3
Pas de temps ( $\Delta t$ en s)	$10^{-6}$

$w = 1$  %. Le déplacement final du plateau supérieur est de 1 mm. Ces deux essais montrent déjà de façon qualitative l'effet de la cohésion par capillarité sur le comportement macroscopique des échantillons : l'échantillon humide conserve une tenue mécanique pendant toute la durée de la compression alors que l'échantillon sec perd sa forme dès le début de l'essai.

Des essais numériques de compression simple sont réalisés pour différents teneurs en eau massiques :  $w = 0$  %, 0,5 %, 1 %, 2 %, 3 %, 5 %, 7 %, 8 %, et 10 %. Les essais de compression sont réalisés pour un déplacement total du plateau supérieur de 1 mm, ce qui correspond à une déformation de 5,9 %. La figure 3.15 présente l'évolution de la force de compression en fonction du déplacement du plateau supérieur pour ces différents teneurs en eau<sup>6</sup>. La courbe correspondant à l'état sec n'est pas représentée : l'échantillon s'écroule sous son poids propre, la valeur retenue pour la force à la rupture est donc 0. Toutes les courbes ont globalement la même allure : dans une première phase, la force de compression croît rapidement avec le déplacement du plateau jusqu'à une valeur maximale, puis décroît. Dans la première phase de la compression, pour un même déplacement du plateau supérieur, la force de compression est d'autant plus élevée que la teneur en eau est importante. Ceci est également vrai pour les valeurs maximales des forces de compression. Ce comportement macroscopique est qualitativement en accord avec les observations effectuées à l'échelle locale dans le chapitre 2. Par contre, lorsque les essais de compression dépassent la force maximale, il ne se dégage pas d'effet notable de la teneur en eau sur la décroissance de la force de compression.

La valeur maximale de la force de compression pour un essai donné correspond à la force maximale que peut supporter l'échantillon ; cette force est appelée "force à la rupture". La figure 3.16 représente l'évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Cette courbe met en évidence l'augmentation de la résistance à la compression de l'échantillon granulaire avec la teneur en eau.

Afin d'appréhender l'influence de la tension superficielle sur la résistance à la compression des échantillons, des simulations sont effectuées dans les mêmes conditions en considérant une tension superficielle  $\sigma = 65.10^{-3} N/m$ , qui est la valeur observée au cours des essais locaux (chapitre 2). La figure 3.17 montre l'évolution comparée de la force à la compression en fonction de la teneur en eau pour les deux valeurs de la tension superficielle. Les deux courbes ont sensiblement la même allure, pour une même teneur en eau, la résistance à la compression est plus faible lorsque la tension superficielle est  $65.10^{-3} N/m$ . Ces deux courbes montrent l'influence de la tension superficielle sur le comportement macroscopique des échantillons granulaires.

<sup>6</sup>Certaines courbes ne sont pas complètes, les simulations ont été interrompues avant la fin de l'essai, une fois que la force maximale a été atteinte, pour des raisons de temps de calcul.

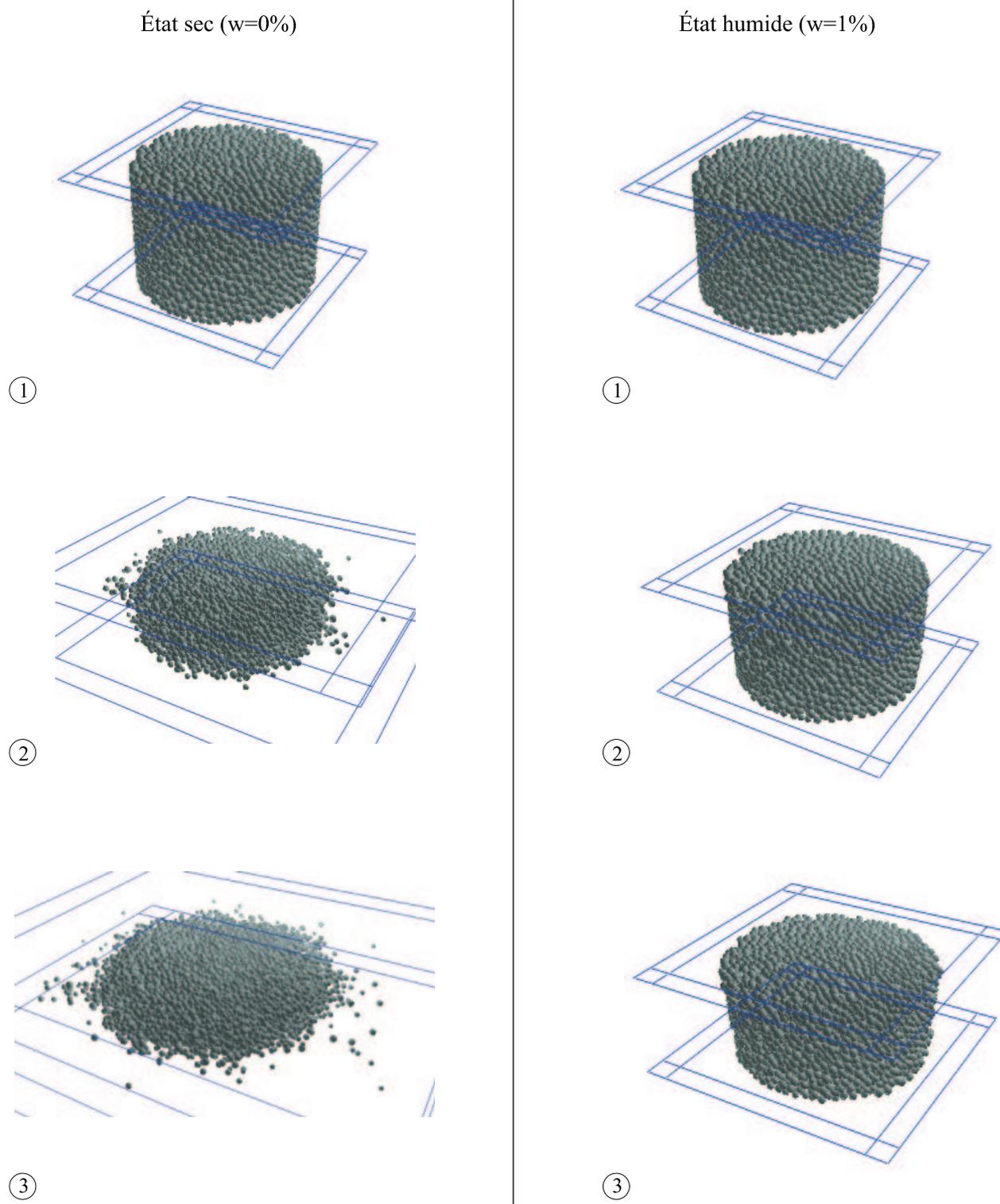


FIG. 3.14 – Images en cours de simulation : état sec ( $w = 0 \%$ ) et état humide ( $w = 1 \%$ ). Les numéros correspondent aux étapes de simulation : état initial (1), état intermédiaire (2), état final (3). Illustrations réalisées avec mgpost [Richefeu, 2004].

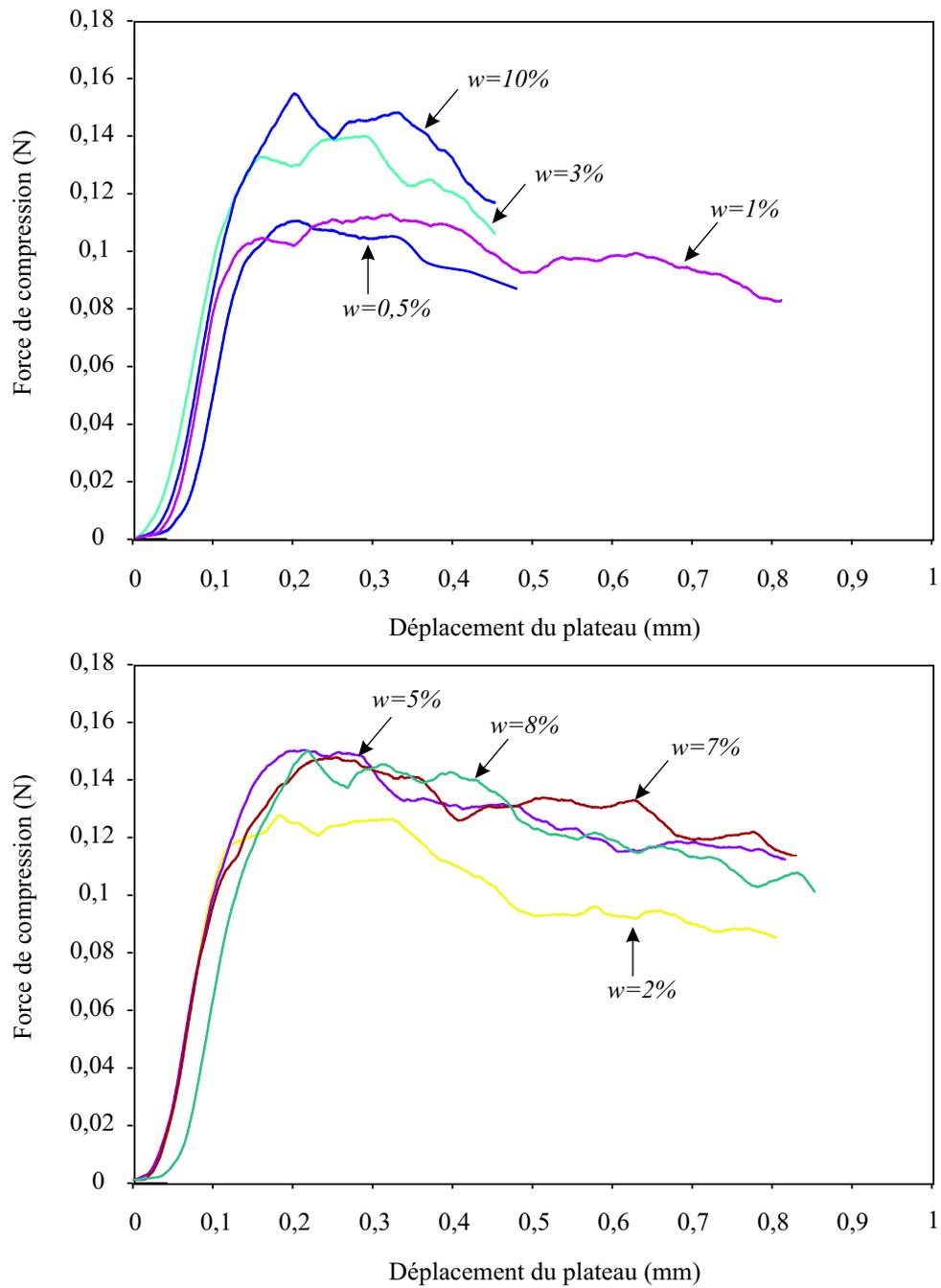


FIG. 3.15 – Essais numériques de compression simple pour différentes teneurs en eau massiques des échantillons.

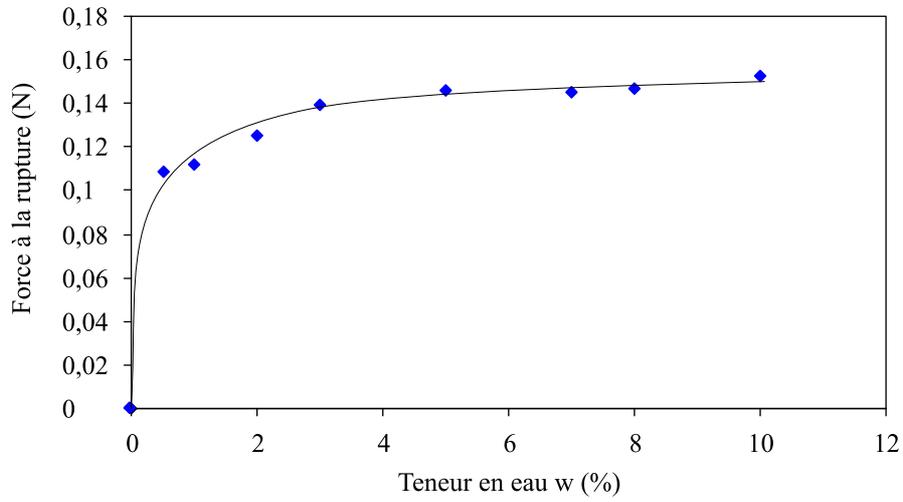


FIG. 3.16 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Courbe obtenue à partir des simulations numériques de compression simple avec une tension superficielle  $\sigma = 73.10^{-3} \text{ N/m}$ .

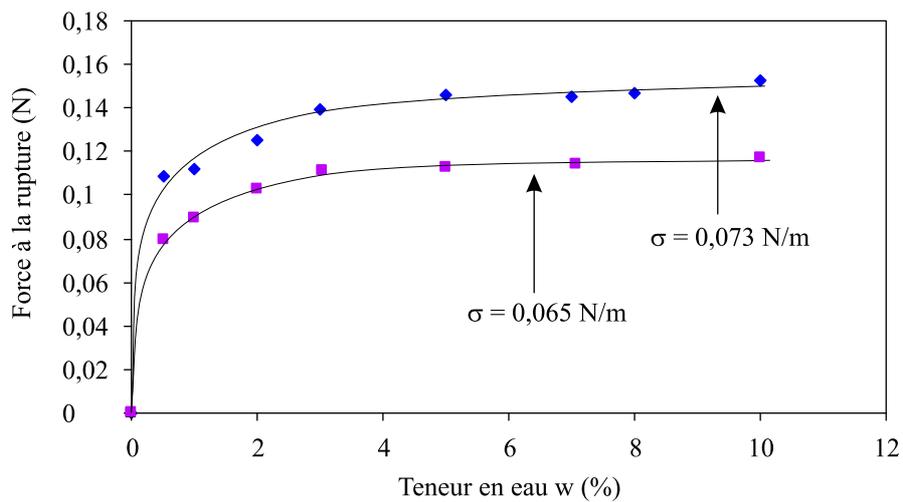


FIG. 3.17 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Influence de la tension superficielle.

### 3.4.2 Étude expérimentale

Afin de vérifier les résultats de compression simple obtenus numériquement, des essais similaires sont effectués sur des échantillons de billes de verre. Les échantillons sont constitués de billes de verre dont les diamètres sont répartis entre  $0,8\text{ mm}$  et  $1,3\text{ mm}$ . Les échantillons ont une forme identique à celle des échantillons numériques : il s'agit de cylindre de  $25\text{ mm}$  de diamètre et de  $17\text{ mm}$  de hauteur. Le diamètre  $25\text{ mm}$  correspond au diamètre intérieur du moule. Pour obtenir la hauteur souhaitée, plusieurs essais préliminaires ont été effectués pour déterminer la masse de billes nécessaire.

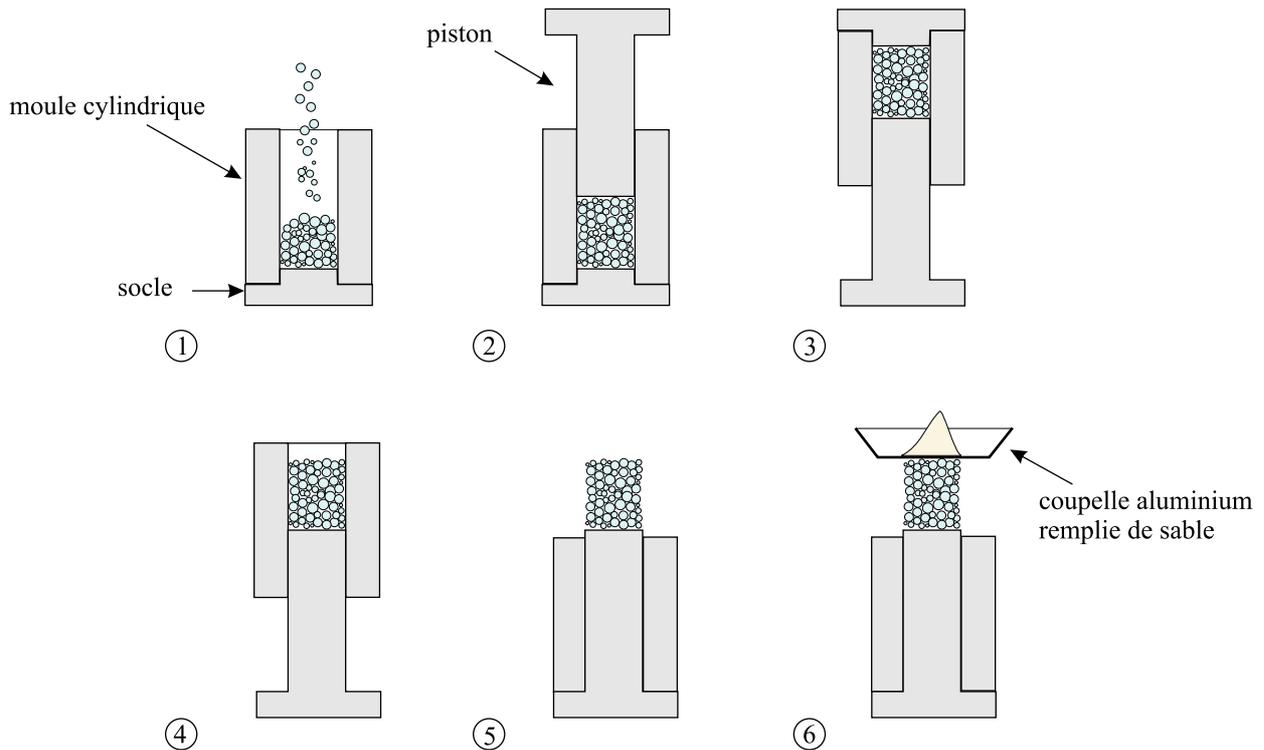


FIG. 3.18 – Processus expérimental pour les essais de compression simple : (1) remplissage du moule cylindrique avec des billes de verre humides, (2) compactage de l'échantillon, (3) retournement de l'ensemble moule-socle-piston, (4) retrait du socle, (5) dégagement du moule, (6) chargement de l'échantillon à l'aide d'une coupelle en aluminium remplie de sable.

Le principe des essais expérimentaux est illustré sur la figure 3.18. Ces essais sont effectués pour différentes teneurs en eau de  $0,5\%$  à  $12\%$ . La teneur en eau des échantillons est contrôlée par pesée différentielle. Les essais ne sont pas poursuivis au-delà de  $12\%$  de teneur en eau car cette valeur correspond à une limite à partir de laquelle les échantillons ne retiennent plus la totalité de l'eau introduite au cours de la préparation. Les échantillons humides sont obtenus par mélange dans un récipient hermétique de  $100\text{ g}$  de billes de verre sèches et de la quantité d'eau nécessaire à l'obtention de la teneur en eau désirée. Une masse de billes humides est prélevée au sein du récipient puis versée dans un moule cylindrique dont la face inférieure est fermée par un socle. Un piston permet de compacter l'échantillon. L'ensemble moule-socle-piston est retourné pour venir s'appuyer sur le piston. Le socle est alors retiré et le moule est abaissé pour libérer l'échantillon (Fig. 3.19).

Une coupelle en aluminium est positionnée sur la face supérieure de l'échantillon. Cette coupelle est progressivement remplie de sable jusqu'à l'obtention de la rupture de l'échantillon. La rupture de l'échantillon n'est pas immédiate. Il existe une sorte d'adaptation de l'échantillon à la



FIG. 3.19 – Échantillon constitué de billes de verre de diamètres compris entre  $0,8 \text{ mm}$  et  $1,3 \text{ mm}$ , pour une teneur en eau  $w = 3 \%$ .

charge : l'échantillon se déforme progressivement jusqu'à la rupture qui est soudaine. Les masses cumulées de la coupelle, d'une part, et de la quantité de sable déposé au moment de la rupture, d'autre part, permettent de déterminer la valeur de la force à la rupture. Le comportement des échantillons est fortement influencé par la teneur en eau. Les échantillons à faibles teneurs en eau présentent un comportement qui se rapproche de celui d'un matériau de type plastique fragile (Fig. 3.20(a)), alors que ceux à teneurs en eau élevées ont un comportement qui se rapproche plutôt de celui d'un matériau de type plastique ductile (Fig. 3.20(b)).

L'influence de la teneur en eau se manifeste également au niveau de la force à la rupture : celle-ci dépend de la teneur en eau de l'échantillon. La figure 3.21 présente l'évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau de l'échantillon.

Les résultats expérimentaux présentent une certaine dispersion qui est inhérente au protocole expérimental et au matériau testé lui-même ; l'incertitude absolue de chaque mesure est de  $\pm 0,01 \text{ N}$ . Les résultats expérimentaux montrent une augmentation de la force à la rupture avec la teneur en eau. Cette tendance est en accord avec les observations expérimentales effectuées à l'échelle locale (chapitre 2).

Une deuxième campagne d'essais a été réalisée, dans les mêmes conditions, sur des échantillons de billes de verre dont les diamètres sont compris entre  $0,5 \text{ mm}$  et  $1 \text{ mm}$ . Les échantillons sont composés à  $60\%$ <sup>7</sup> de billes de verre de diamètres compris entre  $0,5 \text{ mm}$  et  $0,8 \text{ mm}$ , et de  $40\%$  de billes de verre de diamètres compris entre  $0,8 \text{ mm}$  et  $1 \text{ mm}$ . Les échantillons sont des cylindres de  $25 \text{ mm}$  de diamètre et de  $17 \text{ mm}$  de hauteur. Les essais de compression simple sont effectués pour différentes teneurs en eau.

Les forces à la rupture observées expérimentalement en fonction de la teneur en eau sont

---

<sup>7</sup>Il s'agit du pourcentage en masse.

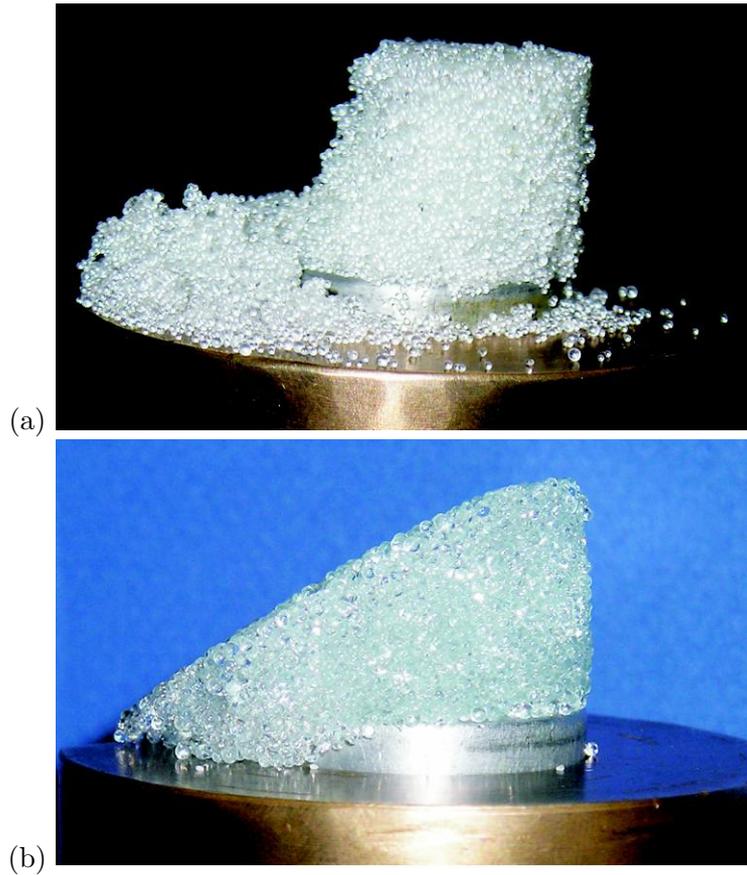


FIG. 3.20 – Échantillons après rupture : (a)  $w = 1\%$ , (b)  $w = 12\%$ .

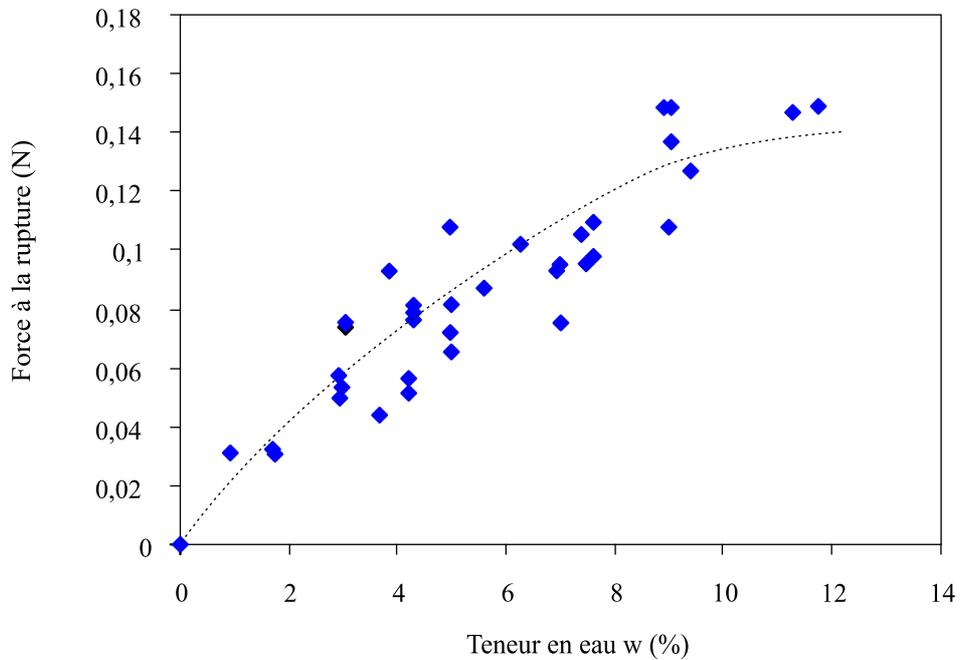


FIG. 3.21 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Détermination expérimentale sur des échantillons constitués de billes de verre de diamètres compris entre  $0,8\text{ mm}$  et  $1,3\text{ mm}$ .

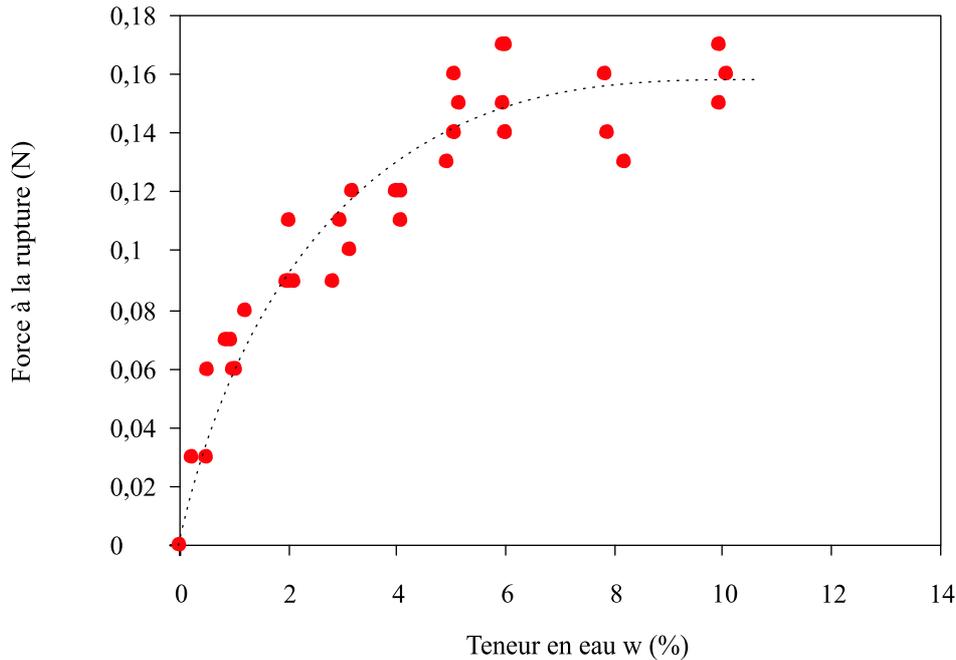


FIG. 3.22 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Détermination expérimentale sur des échantillons constitués de billes de verre de diamètres compris entre 0,5 mm et 1 mm.

indiquées sur la figure 3.22. On observe la même tendance que pour les essais effectués pour la granularité 0,8 – 1,3 mm, à savoir une augmentation de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Cependant, pour une même teneur en eau, dans le cas de la granularité 0,5 – 1 mm, la force à la rupture est plus importante que celle obtenue pour la granularité 0,8 – 1,3 mm (Fig. 3.23). Cette différence peut notamment s’expliquer par un effet de texture des échantillons granulaires. Les échantillons réalisés pour la granularité 0,5 – 1 mm contiennent plus de billes de verre que ceux réalisés pour la granularité 0,8 – 1,3 mm, pour un même volume macroscopique. Les interactions de type contact-frottant et les ponts liquides sont donc plus nombreux, ce qui peut expliquer la meilleure résistance à la compression. De plus, l’effet de la force gravitaire est relativement moins important dans le cas de billes de plus petites tailles. Il y a donc un effet significatif de la taille des grains sur la résistance à la rupture des échantillons granulaires.

### 3.4.3 Confrontation simulation-expérience

Les essais numériques et les expériences sont effectués dans des conditions similaires, ce qui autorise une confrontation des résultats numériques et expérimentaux. La figure 3.24 présente l’évolution comparée de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau déterminée numériquement (avec  $\sigma = 65 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$  et  $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ ) et expérimentalement pour la granularité 0,8 – 1,3 mm.

L’évolution globale de la force à la rupture avec la teneur en eau est la même pour les essais numériques et les expériences. Dans une première phase, la force à la rupture augmente rapidement avec la teneur en eau, puis dans une deuxième phase, la force à la rupture se stabilise et n’évolue que très peu.

Les résultats numériques surestiment les valeurs des forces à la rupture mesurées expérimentalement, pour les faibles teneurs en eau. Plusieurs facteurs peuvent expliquer ces écarts :

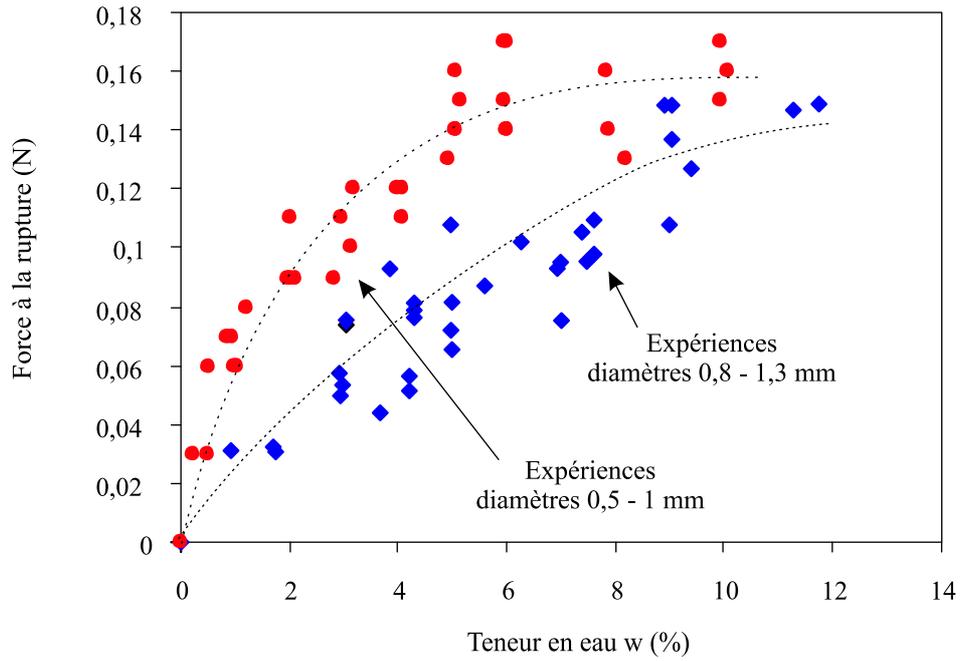


FIG. 3.23 – Évolution comparée de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Détermination expérimentale pour la granularité 0,5 – 1 mm et pour la granularité 0,8 – 1,3 mm.

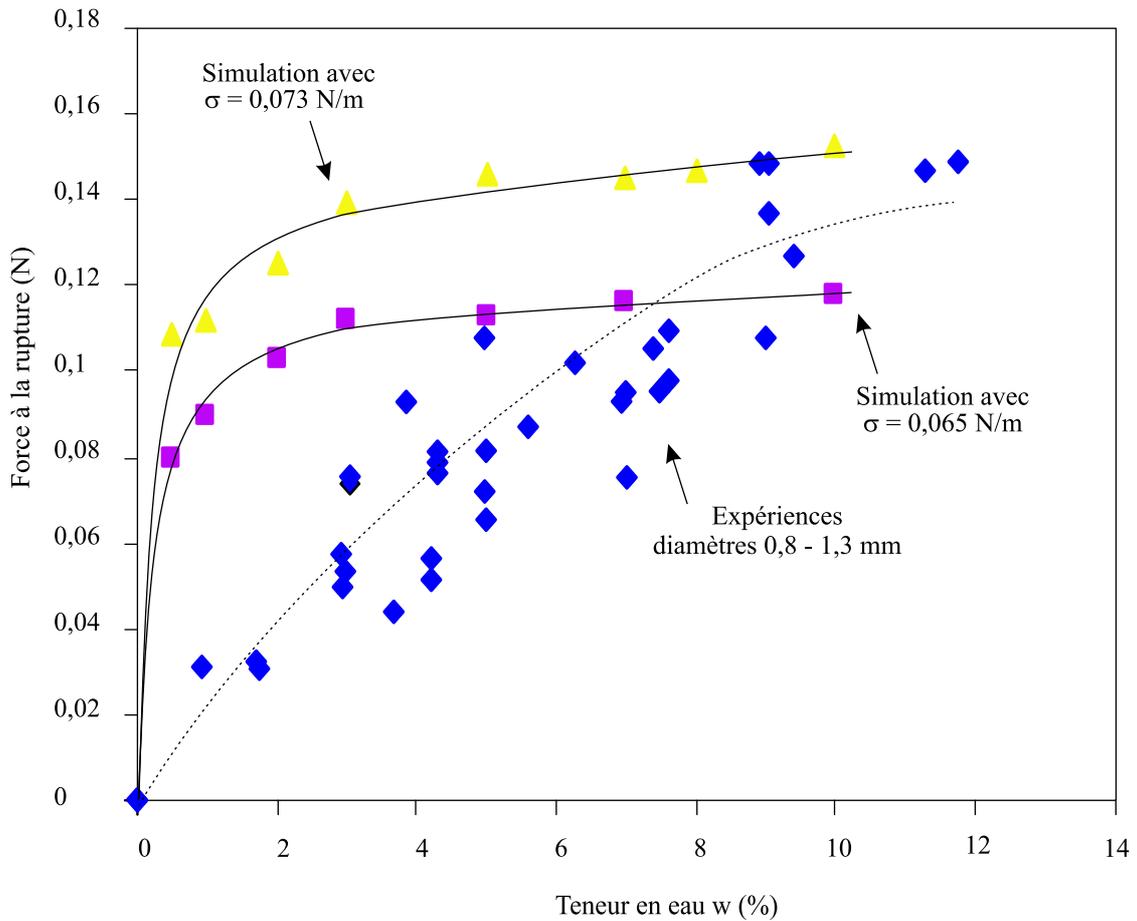


FIG. 3.24 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Confrontation des résultats numériques et expérimentaux dans le cas de la granularité 0,8 – 1,3 mm.

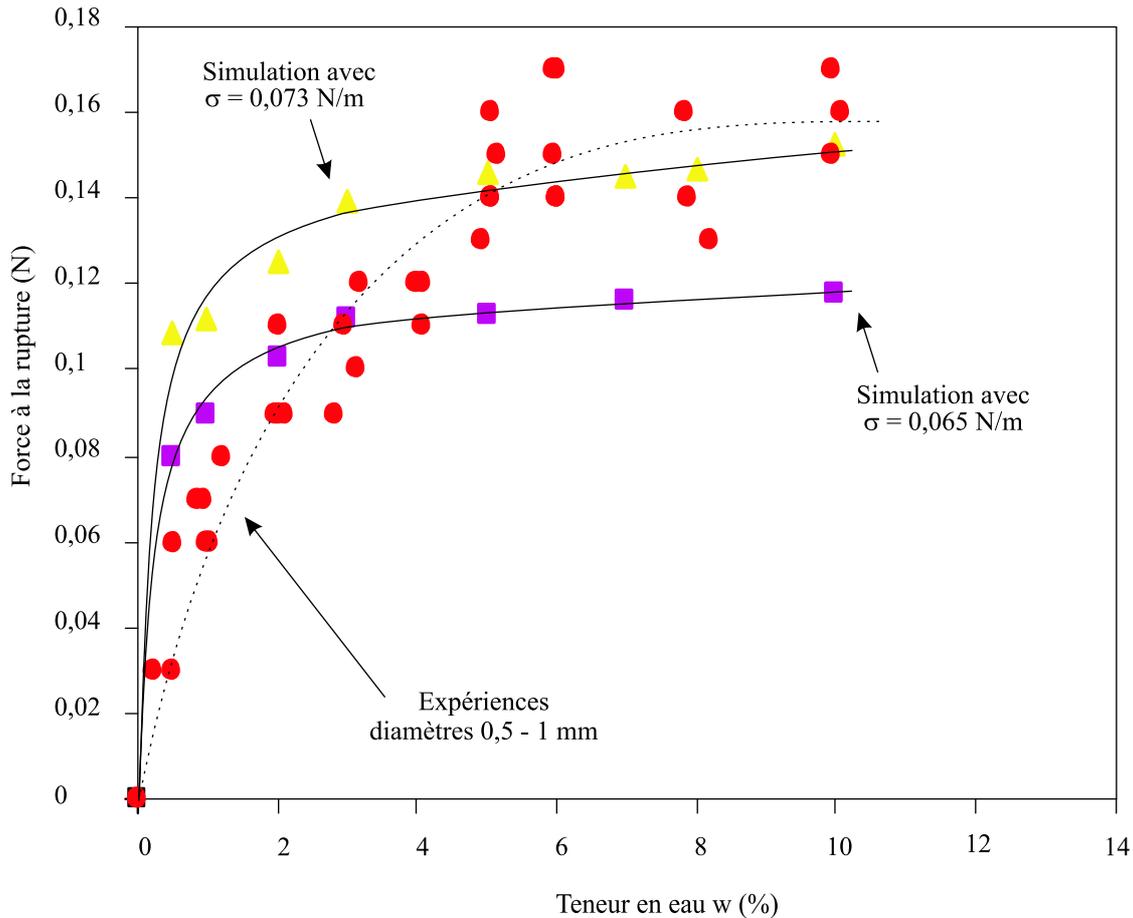


FIG. 3.25 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Confrontation des résultats numériques et expérimentaux dans le cas de la granularité 0,5 – 1 mm.

1. La forme et la rugosité des grains, considérés sphériques et lisses dans les simulations numériques, peuvent influencer le comportement des échantillons.
2. La granularité de l'échantillon n'est pas connue de façon précise; elle a été déterminée par reconnaissance d'images sur quelques échantillons. Il peut donc y avoir des écarts avec la granularité utilisée numériquement. La granularité est un facteur important qui peut modifier de façon notable le comportement mécanique d'un échantillon granulaire. La figure 3.25 présente l'évolution comparée de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau obtenue à partir des simulations numériques (granularité 0,8 – 1,3 mm et tension superficielle de  $65 \cdot 10^{-3}$  N/m ou  $73 \cdot 10^{-3}$  N/m) et à partir des expériences (granularités 0,5 – 1 mm). Cette figure montre une bonne adéquation entre simulations numériques et expériences avec une granularité 0,5 – 1 mm. Il est donc possible que la répartition granulométrique utilisée numériquement ne corresponde pas tout à fait à la répartition granulométrique des essais expérimentaux réalisés avec la granularité 0,8 – 1,3 mm; il se peut que la proportion de grains de tailles élevées soit plus importante expérimentalement que numériquement, ce qui peut expliquer l'importance des écarts entre les forces à la rupture pour les faibles teneurs en eau.
3. La gravité peut modifier sensiblement la distribution de l'eau au sein de l'échantillon. Cependant, pour les faibles teneurs en eau, l'effet devrait être relativement faible.

4. Les deux paramètres angle de mouillage et tension superficielle peuvent modifier de façon sensible la force capillaire à l'échelle locale (voir chapitre 2) et donc la force à la rupture du matériau granulaire. Les simulations numériques ont été effectuées pour deux valeurs de tension superficielle :  $\sigma = 73.10^{-3} \text{ N/m}$  qui est la valeur correspondant au cas de l'eau pure, et  $\sigma = 65.10^{-3} \text{ N/m}$  qui est la valeur observée expérimentalement pour les essais locaux. La figure 3.24 montre que le cas de l'eau pure constitue une sorte de limite supérieure des essais expérimentaux, alors que le cas  $\sigma = 65.10^{-3} \text{ N/m}$  permet une meilleure estimation des forces à la rupture observée expérimentalement.
5. L'hystérésis de la force capillaire, liée à l'hystérésis de l'angle de mouillage, n'est pas prise en compte dans les simulations numériques. Cette hystérésis est à l'origine d'un écart de force capillaire important à l'échelle locale, pouvant atteindre 50%. Le fait de négliger l'hystérésis de la force capillaire peut ainsi contribuer à surestimer la résistance à la compression des échantillons numériques. En effet, bien que le chargement macroscopique soit monotone, les interactions locales peuvent osciller compte tenu des réarrangements granulaires.
6. Le frottement entre grains contribue à la tenue et à la résistance mécanique des matériaux granulaires. Le coefficient de frottement entre grains en présence d'eau a été évalué expérimentalement au chapitre 2 dans une configuration spécifique (billes de verre sur plaque de verre) ; la valeur du coefficient de frottement déterminée à partir de ces essais est utilisée dans les calculs numériques. Il est possible que cette valeur ne corresponde pas exactement à la valeur réelle du coefficient de frottement dans les échantillons granulaires, ce qui peut expliquer partiellement les écarts observés entre les simulations et les expériences.
7. Dans les essais numériques, on utilise un critère de répartition de l'eau qui permet une distribution de l'eau "équitable" dans la totalité de l'échantillon. Expérimentalement, les échantillons sont préparés avec toutes les précautions d'usage afin d'obtenir un mélange intime des billes de verre et de l'eau. Cependant, il est très délicat d'accéder à la répartition de l'eau au sein des échantillons et il n'est donc pas possible d'assurer une distribution de l'eau identique dans les échantillons réels et les échantillons numériques.
8. Le phénomène d'évaporation peut expliquer au moins partiellement les écarts qu'on observe pour les faibles teneurs en eau entre les courbes numériques et la courbe expérimentale. En effet l'évaporation peut être rapide, notamment pour les faibles teneurs en eau, et être à l'origine d'une diminution du volume d'eau : les volumes de ponts liquides peuvent donc diminuer au cours des essais expérimentaux, ce qui entraîne une chute des forces capillaires qui n'est pas prise en compte numériquement.
9. La méthode de chargement utilisée expérimentalement diffère de la méthode utilisée au cours des simulations numériques. Dans le cas expérimental, une charge est appliquée à l'échantillon de façon progressive mais non continue, alors que dans les simulations numériques, le chargement est piloté en déplacement ; ces deux modes de chargements peuvent créer des réarrangements différents dans les échantillons et donc modifier le résultat en terme de force à la rupture.

De nombreux facteurs peuvent contribuer à expliquer les différences observées entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux. Cependant, malgré ces différences, les deux approches donnent des résultats comparables en terme d'évolution et de valeurs de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau.

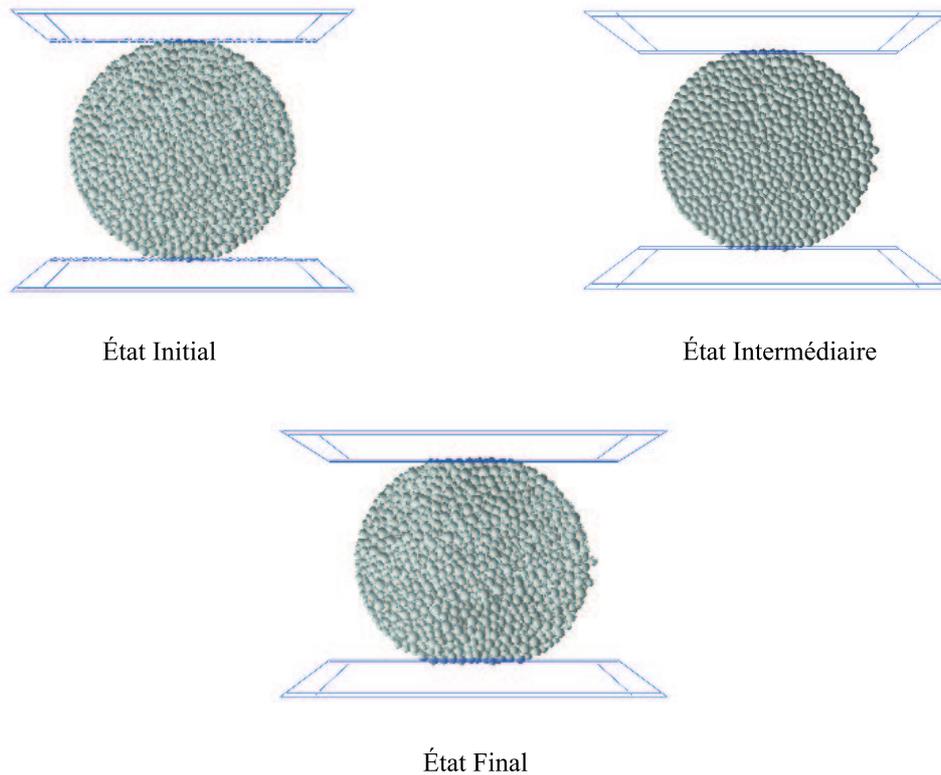


FIG. 3.26 – Simulation de la compression diamétrale d’un échantillon granulaire cylindrique composé de 8000 grains polydisperses, pour une teneur en eau massique  $w = 3\%$ .

## 3.5 Essai de compression diamétrale

Grâce au calcul numérique, il est possible d’effectuer des essais de compression diamétrale sur des échantillons cylindriques, ce qui est beaucoup plus délicat, voire impossible, à réaliser expérimentalement !

### 3.5.1 Description de l’essai

Les échantillons utilisés ont la même configuration géométrique que ceux des essais en compression simple ; la différence concerne la sollicitation de compression qui est exercée suivant deux génératrices diamétralement opposées. Le plateau inférieur est immobile, seul le plateau supérieur est mobile. Les essais de compression sont réalisés à une vitesse constante de  $2,5\text{ mm/s}$ , jusqu’à un déplacement final du plateau de  $2\text{ mm}$ , ce qui correspond à une déformation de  $8\%$ . La figure 3.26 présente trois captures d’image effectuées au cours d’une simulation afin d’illustrer le principe de l’essai.

Les essais de compression diamétrale sont réalisés pour trois teneurs en eau massiques différentes :  $w = 1\%$  ;  $w = 3\%$  et  $w = 6\%$ . Les caractéristiques physiques considérées pour le calcul des forces capillaires correspondent au cas de l’eau pure à savoir : une tension superficielle  $\sigma$  égale à  $73.10^{-3}\text{ N/m}$  et un angle de mouillage  $\theta = 0^\circ$ . L’accélération de la pesanteur n’est pas prise en compte afin de ne mettre en évidence que les effets de la capillarité.

### 3.5.2 Résultats et grandeurs locales

La figure 3.27 montre l’évolution de la force de compression en fonction du déplacement du plateau supérieur pour les trois teneurs en eau. Dans une première phase de l’essai, pour des déplacements de plateau inférieurs à  $0,15\text{ mm}$ , les trois courbes sont identiques. Cette obser-

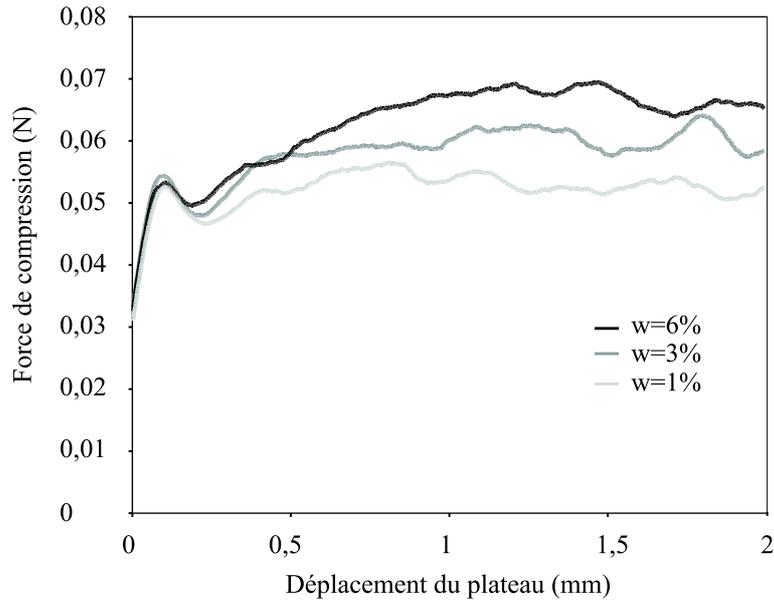


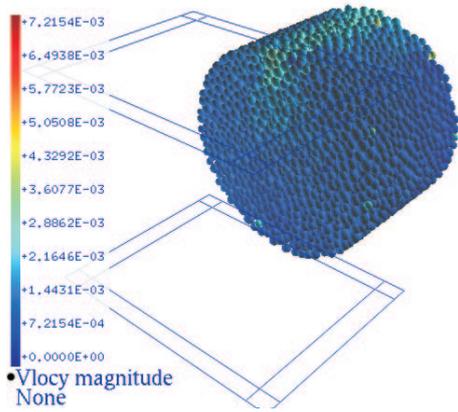
FIG. 3.27 – Évolution de la force de compression avec le déplacement du plateau supérieur durant la compression diamétrale d'échantillons granulaires humides.

variation est à mettre en relation avec les observations effectuées à l'échelle locale (chapitre 2) ; lorsque l'angle de mouillage est nul, pour les distances intergranulaires proches de zéro, les forces capillaires sont identiques. Par contre, pour les déplacements de plateau supérieurs à  $0,15 \text{ mm}$ , l'effet de la teneur en eau sur la force de compression est perceptible : pour un même déplacement du plateau supérieur, la force de compression est d'autant plus élevée que la teneur en eau est importante. De la même façon, à l'échelle locale, pour une même distance intergranulaire, la force capillaire entre deux grains est d'autant plus élevée que le volume du pont liquide est important. L'effet de la capillarité à l'échelle macroscopique est donc en adéquation avec les tendances observées à l'échelle locale.

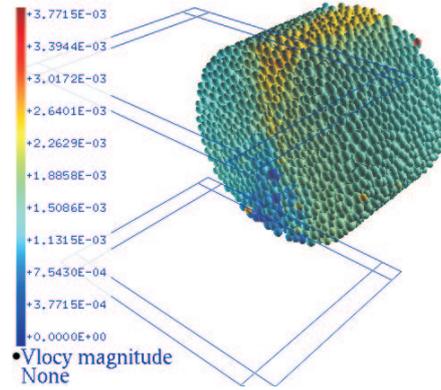
L'intérêt de la simulation numérique réside également dans la possibilité d'accéder à des informations locales telles que les vitesses des grains, les efforts normaux entre grains, les interactions granulaires... Quelques uns de ces aspects sont abordés sur cet exemple de compression diamétrale.

La figure 3.28 montre l'évolution des intensités des vitesses au cours de l'essai de compression diamétrale d'un échantillon de teneur en eau  $w = 1\%$ . Les couleurs chaudes correspondent aux vitesses élevées et les couleurs froides aux vitesses faibles. Cette figure met en évidence un comportement symétrique de l'échantillon au cours de l'essai, laissant apparaître deux "coins". Dans la zone supérieure (grains de couleurs chaudes), les grains ont des vitesses de déplacement élevées. Il s'agit des grains entraînés par frottement par le plateau supérieur, ces grains se comportent comme un "coin" qui pénètre à l'intérieur de l'échantillon. Symétriquement, il existe un "coin" inférieur pour lequel les vitesses des grains sont très faibles ou nulles : il s'agit d'une zone de l'échantillon où les grains sont immobiles au cours de l'essai. L'existence de ce comportement de type "coins" entraîne l'existence de deux zones latérales assez homogènes pour lesquelles les vitesses des grains sont relativement faibles.

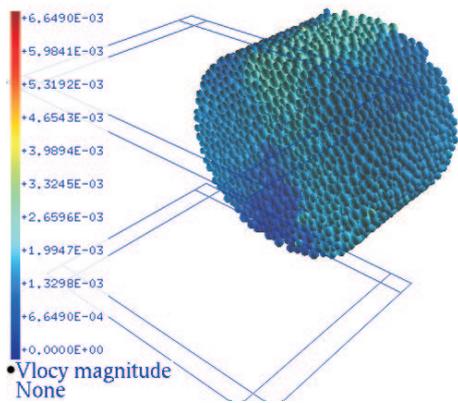
Il est également possible de suivre l'évolution des forces capillaires au cours de l'essai. La figure 3.29 présente l'évolution des forces de traction exercées par les ponts liquides entre les grains dans la section médiane de l'échantillon. Les actions entre grains sont représentées par des traits qui lient les centres des grains ; l'épaisseur du trait est proportionnelle à l'intensité



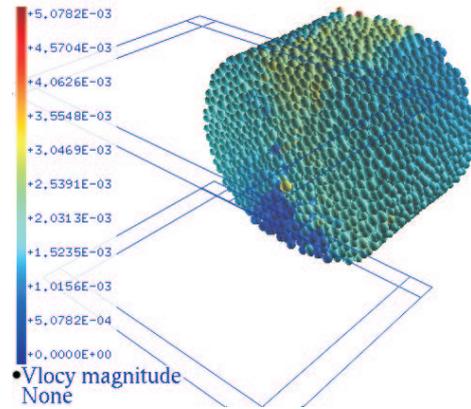
Temps de simulation : 0,05 s



Temps de simulation : 0,35 s

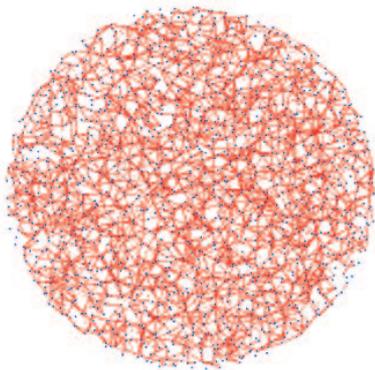


Temps de simulation : 0,65 s

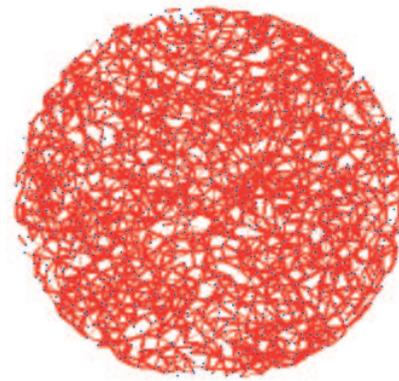


Temps de simulation : 0,95 s

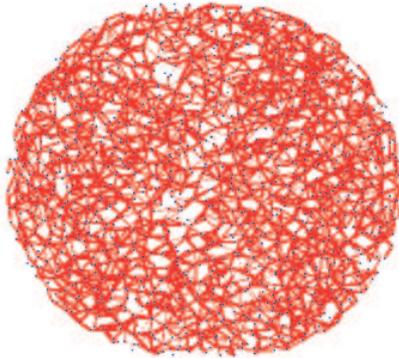
FIG. 3.28 – Évolution de la vitesse des grains (S.I.), au cours de la simulation (échantillon avec une teneur en eau  $w = 1\%$ ).



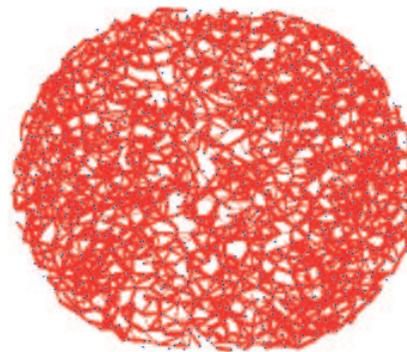
Temps de simulation : 0,05 s



Temps de simulation : 0,35 s



Temps de simulation : 0,65 s



Temps de simulation : 0,95 s

FIG. 3.29 – Évolution des forces capillaires entre les grains contenus dans la section médiane (d'épaisseur 2 mm), au cours de la simulation (échantillon avec une teneur en eau  $w = 1\%$ ).

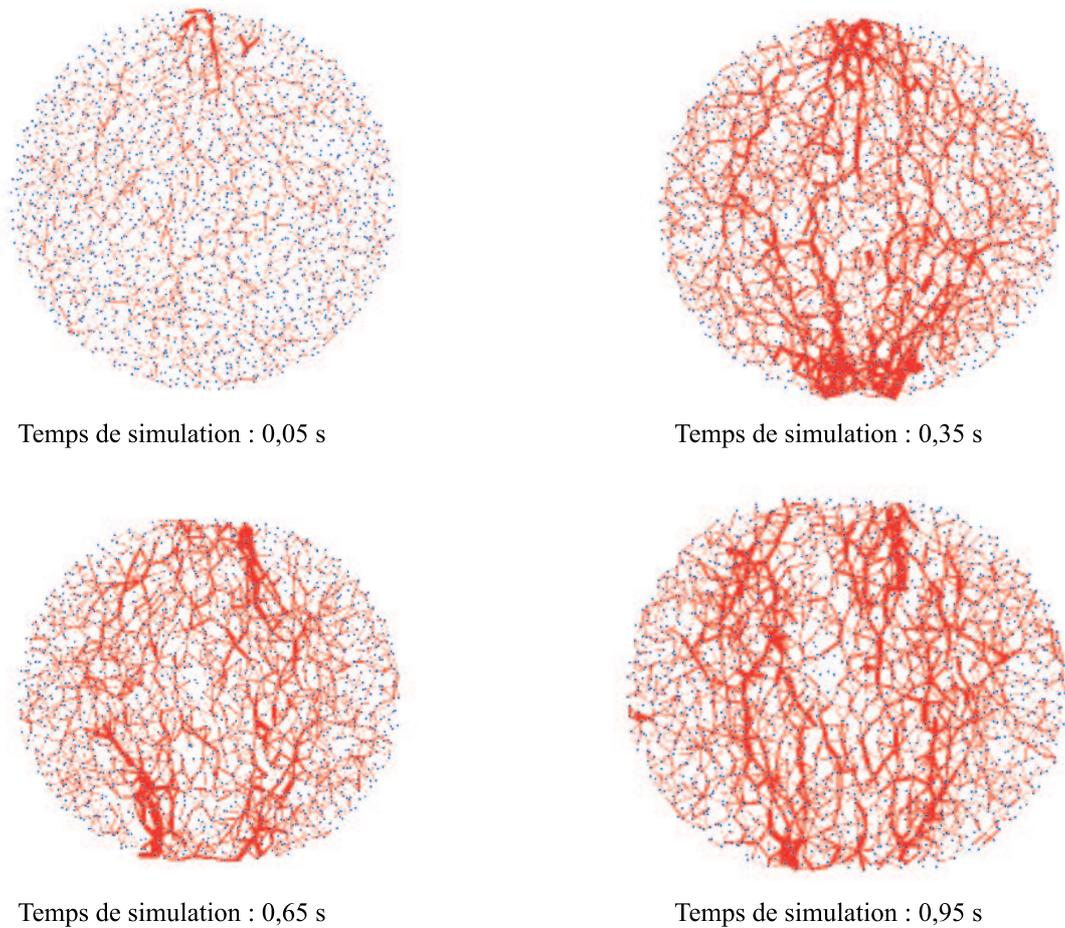


FIG. 3.30 – Évolution des forces de contact entre les grains contenus dans la section médiane (d'épaisseur  $2\text{ mm}$ ), au cours de la simulation (échantillon avec une teneur en eau  $w = 1\%$ ).

de la force, le trait le plus épais correspondant à la force maximale de traction à un temps de simulation donné. La répartition des forces de traction est assez uniforme au début de l'essai. En cours d'essai, on peut constater une plus faible densité de forces au centre de l'échantillon, alors que les deux zones latérales présentent une densité assez élevée d'interactions capillaires. Cette répartition témoigne de la rupture progressive des ponts liquides au centre de l'échantillon, alors que les deux zones latérales restent cohésives. Ce comportement est en adéquation avec les observations effectuées en terme de vitesse des grains. La localisation de la zone de rupture privilégiée des ponts liquides correspond aux observations effectuées par Thornton et al. [2004] dans le cas de la compression diamétrale d'échantillons granulaires cohésifs denses. Ce type d'essai, inspiré de l'essai "brésilien", est particulièrement intéressant dans le cas qui nous intéresse. En effet, il est difficile de réaliser des essais autres que dérivés de la compression sur les matériaux granulaires, alors que la cohésion par capillarité est plutôt mise en évidence au cours d'essais de traction. Les essais de compression diamétrale permettent de concilier ces deux aspects : la compression est utilisée pour solliciter l'échantillon en traction en son centre.

La figure 3.30 présente la distribution des forces de contact dans la section médiane de l'échantillon. Au cours de la compression, un réseau de force de contact s'établit entre le plateau supérieur et le plateau inférieur. Ce réseau se développe symétriquement à partir de la zone supérieure de l'échantillon en contact avec le plateau supérieur et de la zone inférieure de l'échantillon en contact avec le plateau inférieur. Au fur et à mesure de la compression, ce réseau se scinde en deux réseaux ; de part et d'autre de la zone centrale, deux réseaux de forces de

contact s'établissent, correspondant aux deux zones latérales cohésives de l'échantillon en fin d'essai.

L'analyse combinée de l'évolution des grandeurs cinématiques et des forces locales et de compression permet de mettre en évidence l'effet de la présence d'eau dans le comportement macroscopique d'un échantillon granulaire.

### 3.6 Conclusion

La prise en compte de la cohésion par capillarité dans un code de calcul en éléments discrets nécessite l'intégration d'une loi locale d'interaction et une gestion de l'eau au sein des échantillons granulaires. Une loi locale d'interaction de type capillaire a été proposée en tenant compte du contact entre les grains et de la cohésion par capillarité. Cette loi est complétée par un critère de rupture qui permet de définir la rupture des ponts liquides. Une méthode numérique de répartition de l'eau est utilisée au sein du code de calcul. Elle permet de distribuer le volume d'eau macroscopique entre les ponts liquides en tenant compte des tailles respectives des doublets de grains.

Des simulations numériques de compression simple sur des échantillons humides polydispersés ont permis de tester le code de calcul et l'implémentation d'un comportement de type capillaire. Des expériences similaires ont été effectuées sur des échantillons constitués de billes de verre. On observe une bonne adéquation des résultats numériques et expérimentaux, aussi bien sur le plan qualitatif que sur le plan quantitatif. Ces essais de compression simple montrent l'influence de la cohésion capillaire à l'échelle locale sur le comportement macroscopique des matériaux granulaires.

Des essais de compression diamétrale sur des échantillons granulaires ont permis d'illustrer l'intérêt des approches discrètes pour l'étude des milieux granulaires, notamment en ce qui concerne l'accès et l'analyse d'informations locales, à l'échelle des grains. Ce type d'approche ne constitue pas un outil de prédiction, mais offre des possibilités de représentation et d'analyse des phénomènes physiques particulièrement intéressantes, en particulier pour la mécanique des sols [Liu et al., 2003; Delenne et al., 2004].



## Chapitre 4

# Couplages dans les milieux granulaires humides

L'objectif de ce chapitre est de montrer les potentialités de l'approche de type milieux granulaires pour l'étude des milieux complexes. Il s'agit ici de présenter quelques éléments concernant les couplages associés à la présence d'eau au sein des milieux granulaires, accompagnés des premiers résultats. La réflexion porte en particulier sur les effets de variations de température, la présence de solutés dans l'eau, et sur la cristallisation de ces solutés.

### 4.1 Température et capillarité

Les changements de température peuvent modifier les propriétés des ponts liquides entre les grains et donc modifier le comportement macroscopique des matériaux granulaires. Le cas d'une élévation de température est étudié ici à l'échelle locale et à l'échelle macroscopique. On considère que les grains ne se dilatent pas (le coefficient de dilatation volumique de la silice est de l'ordre de  $5,6 \cdot 10^{-7} K^{-1}$ , alors que celui de l'eau est de l'ordre de  $4 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ ). L'atmosphère est considérée saturée en vapeur d'eau, ce qui exclue toute évaporation des ponts liquides. L'effet de la température sur la cohésion par capillarité est abordée ici de façon théorique. Nous considérons le cas de l'eau pure pour la détermination des propriétés physiques, à l'exception de l'évolution de l'angle de mouillage qui est déterminée expérimentalement.

#### 4.1.1 Influence de la température sur les caractéristiques physiques du pont liquide

Les liquides sont très sensibles aux variations de température. Ces variations modifient en effet les propriétés physiques des liquides, ce qui peut avoir des conséquences sur la force locale de capillarité. L'effet de la température sur la cohésion par capillarité est abordé à travers l'évolution de la tension superficielle et du coefficient de dilatation volumique de l'eau, supposée pure par ailleurs. L'évolution de l'angle de mouillage, déterminée expérimentalement, en fonction de la température est également prise en compte.

#### Influence de la température sur les caractéristiques physiques de l'eau

La variation de tension superficielle de l'eau pure en fonction de la température est donnée par la relation [Tidestrom, 1961] :

$$\sigma(T) = 7,35 \cdot 10^{-2} - 1,65 \cdot 10^{-4}(T - 15) \quad (4.1)$$

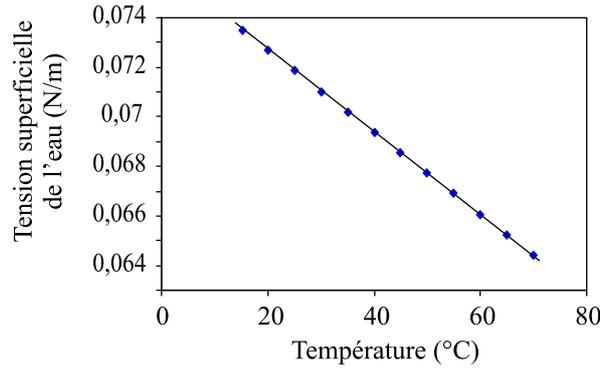


FIG. 4.1 – Évolution de la tension superficielle de l'eau pure en fonction de la température.

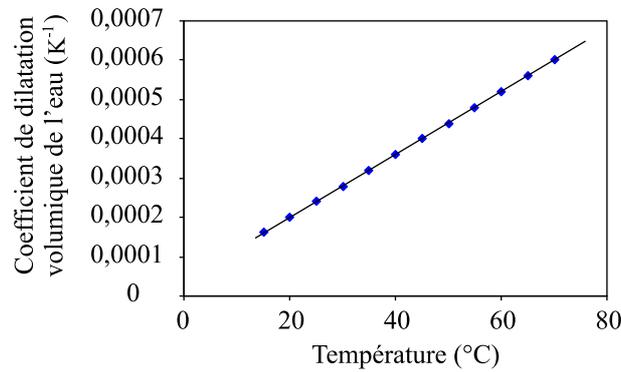


FIG. 4.2 – Évolution du coefficient de dilatation volumique de l'eau pure en fonction de la température.

pour des températures  $T$  comprises entre  $15^{\circ}C$  et  $70^{\circ}C$  (où  $T$  est exprimée en  $^{\circ}C$  et  $\sigma$  en  $N/m$ ). La tension superficielle décroît donc linéairement en fonction de la température (Fig. 4.1).

Les variations de température engendrent également des variations de volume. Le pont liquide est considéré dans le cas d'une atmosphère saturée en vapeur d'eau, il n'y a donc pas d'évaporation d'eau au niveau du pont et celui-ci ne subit qu'une dilatation volumique due à la modification de la température. Le volume de liquide à une température  $T$  est donné par la relation :

$$V(T) = (1 + \beta(T)T)V_0 \quad (4.2)$$

où  $V_0$  est le volume de liquide à la température  $T = 0^{\circ}C$  et  $\beta(T)$  le coefficient de dilatation volumique du liquide. Dans le cas de l'eau pure, pour des températures  $T$  comprises entre  $15^{\circ}C$  et  $70^{\circ}C$  (où  $T$  est exprimée en  $^{\circ}C$  et  $\beta$  en  $K^{-1}$ ), le coefficient de dilatation volumique est donné par la relation [Handbook, 1976] :

$$\beta(T) = 1,6 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}(T - 15) \quad (4.3)$$

Le coefficient de dilatation volumique de l'eau augmente donc linéairement avec la température (Fig. 4.2).

## Influence de la température sur la géométrie du pont liquide : évolution de l'angle de mouillage

L'angle de mouillage est également un paramètre sensible aux variations de température. Ce paramètre présente un comportement complexe fortement influencé par les conditions environnementales. Son évolution en fonction de la température semble être un problème ouvert compte tenu du peu d'informations disponibles dans la littérature. Pour pallier ce manque, l'évolution de l'angle de mouillage en fonction de la température a été déterminée expérimentalement, à partir d'une première étude prospective. Un pont liquide constitué d'eau colorée est établi entre deux anneaux métalliques. L'ensemble est placé dans une enceinte contrôlée en température et en humidité. L'humidité relative de l'enceinte a été fixée à  $HR = 100\%$ , ce qui permet d'éviter toute évaporation du pont liquide. La température de l'enceinte est augmentée par paliers de  $5^\circ C$ , en conservant la condition  $HR = 100\%$ . Des photographies du pont liquide sont réalisées à l'équilibre, pour différentes températures comme le montre la figure 4.3.

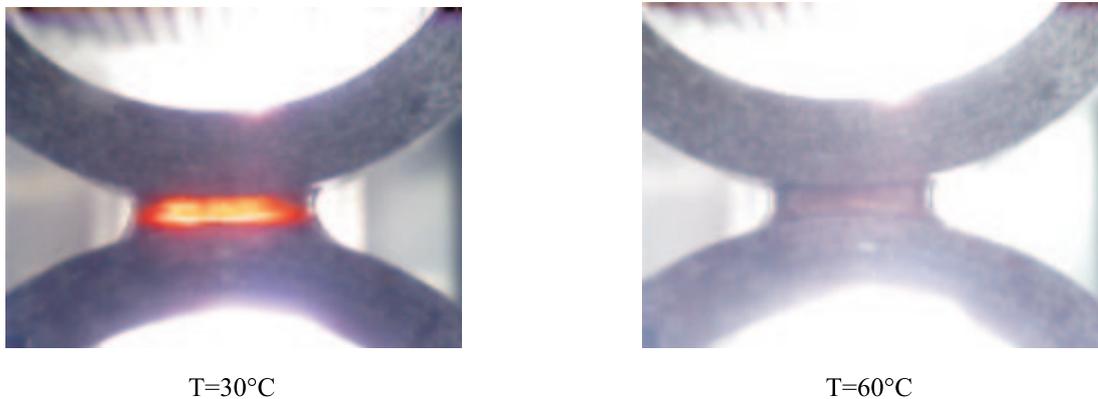


FIG. 4.3 – Effet de la température sur la géométrie d'un pont liquide pour une humidité relative  $HR = 100\%$ .

Le contraste des photographies s'altère avec l'augmentation de la température ; cette altération est due à l'effet des températures élevées et de  $HR = 100\%$  sur l'appareil numérique utilisé pour l'acquisition des images. Cependant, même pour la température de  $60^\circ C$ , le pont liquide est identifiable. Chaque photographie permet d'obtenir par mesure graphique quatre valeurs de l'angle de mouillage. Les valeurs obtenues pour chacune des températures sont moyennées afin de déterminer l'évolution de l'angle de mouillage moyen en fonction de la température. La figure 4.4 montre que, dans ces conditions d'essai, l'angle de mouillage moyen diminue avec la température.

Pour effectuer ces mesures expérimentales basées sur une détermination graphique, il a fallu utiliser des volumes de ponts liquides importants et de l'eau colorée. Les valeurs obtenues ne correspondent donc pas aux valeurs de l'angle de mouillage dans le cas de l'eau pure. Bien que réalisés dans un contexte particulier, ces essais permettent d'obtenir des informations sur les valeurs de l'angle de mouillage qui sont utilisées pour déterminer la force capillaire dans le cas de différentes températures.

### 4.1.2 Influence de la température sur la force capillaire à l'échelle locale

#### Prise en compte de la température dans le modèle local

Par l'intermédiaire des grandeurs tension superficielle, volume de pont liquide et angle de mouillage, la force capillaire semble sensible aux variations de température. La force capillaire,

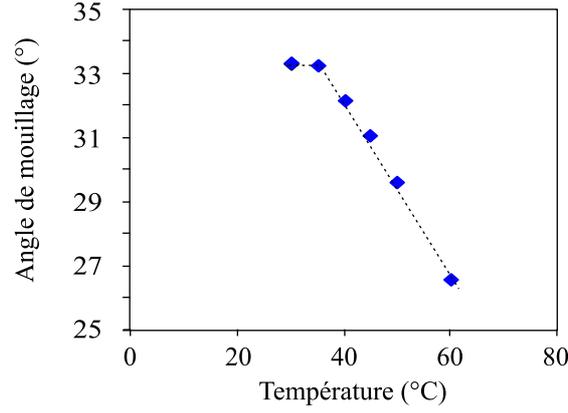


FIG. 4.4 – Évolution de l'angle de mouillage moyen en fonction de la température. Détermination expérimentale.

entre deux grains sphériques de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , s'écrit donc en fonction de la température sous la forme (voir chapitre 2) :

$$F_{capillaire}(T) = \pi \sigma(T) \sqrt{R_1 R_2} \left( c(T) + \exp \left( a(T) \frac{D}{R_2} + b(T) \right) \right) \quad (4.4)$$

avec les coefficients  $a(T)$ ,  $b(T)$ , et  $c(T)$  fonction du volume du pont liquide  $V(T)$ , de l'angle de mouillage  $\theta(T)$  (exprimé en radians) et du rayon du plus grand grain  $R_2$  :

$$\begin{aligned} a(T) &= -1,1 \left( \frac{V(T)}{R_2^3} \right)^{-0,53} \\ b(T) &= \left( -0,148 \ln \left( \frac{V(T)}{R_2^3} \right) - 0,96 \right) \theta^2(T) - 0,0082 \ln \left( \frac{V(T)}{R_2^3} \right) + 0,48 \\ c(T) &= 0,0018 \ln \left( \frac{V(T)}{R_2^3} \right) + 0,078 \end{aligned} \quad (4.5)$$

La distance de rupture du pont liquide est également modifiée par les changements de température par l'intermédiaire des termes  $\theta(T)$  et  $V(T)$  (chapitre 2). Le critère de rupture devient :

$$D_{rupture}(T) = (1 + 0,5\theta(T))(V(T))^{1/3} \quad (4.6)$$

## Calcul

L'effet de la température sur la force capillaire est déterminé pour trois températures :  $30^\circ C$ ,  $45^\circ C$  et  $60^\circ C$ . Les valeurs de la tension superficielle, du coefficient de dilatation volumique et de l'angle de mouillage sont déterminées à l'aide des relations (4.1), (4.3) et de la figure 4.4. Le calcul des volumes des ponts liquides à la température  $T$  est effectué avec la relation (4.7) qui prend, comme référence, le volume du pont liquide à la température  $30^\circ C$  :

$$V(T) = \frac{1 + \beta(T) T}{1 + \beta(30) 30} V_{30} = \alpha(T) V_{30} \quad (4.7)$$

Les valeurs des paramètres utilisées pour le calcul de la force capillaire locale en fonction de la température sont synthétisées dans le tableau 4.1. Les rayons des grains et les volumes de ponts liquides considérés pour le calcul des forces capillaires à l'échelle locale correspondent à des configurations rencontrées dans l'étude macroscopique (paragraphe 4.1.3).

Température	Angle de mouillage $\theta$ (radians)	Tension superficielle $\sigma$ (N/m)	Coefficient volumique $\alpha(T)$
$30^{\circ}C$	0,575	0,071	1
$45^{\circ}C$	0,541	0,0685	1,0095
$60^{\circ}C$	0,464	0,066	1,0226

TAB. 4.1 – Valeurs des paramètres utilisées pour le calcul des forces capillaires à l'échelle locale.

## Résultats

La figure 4.5 présente l'évolution de la force capillaire en fonction de la température pour différentes configurations de doublets capillaires. Les distances de rupture sont déterminées à l'aide de la relation (4.6). Dans tous les cas étudiés, l'intensité de la force capillaire à l'échelle locale est très peu influencée par la température. Pour une même configuration du doublet capillaire, la force capillaire est plus faible pour une température de  $45^{\circ}C$  que pour une température de  $30^{\circ}C$  (Fig. 4.6). La force capillaire est également plus faible pour une température de  $60^{\circ}C$  que pour une température de  $45^{\circ}C$ , excepté pour certaines valeurs de distance intergranulaire et de volume de pont liquide (Fig. 4.6). Le volume du pont liquide apparaît ainsi comme un paramètre clé, puisqu'il peut modifier l'intensité de la force capillaire d'une façon importante. Cependant, comme le montre la figure 4.6, les écarts relatifs en terme de forces sont très faibles, et dans ces conditions d'étude, la température a peu d'effet sur l'intensité de la force capillaire. Cette faible dépendance de la force capillaire avec la température peut s'expliquer par les faibles variations engendrées par la température sur les paramètres tension superficielle, coefficient de dilatation volumique et angle de mouillage. De plus, les variations de ces différents paramètres ont tendance à se compenser :

- la tension superficielle diminue avec la température, ce qui diminue l'intensité de la force capillaire,
- le volume du pont liquide augmente avec la température (par l'intermédiaire du coefficient de dilatation volumique), ce qui a tendance à augmenter la force capillaire,
- d'après nos essais, l'angle de mouillage semble diminuer avec la température. Cependant, ces résultats sont à considérer avec précaution. En effet, ce paramètre présente un comportement sensible aux conditions environnementales et sa dépendance avec la température n'est pas maîtrisée. L'influence de ce paramètre sur la force capillaire est complexe (voir chapitre 2), il est donc difficile d'identifier l'effet de l'angle de mouillage et de la température sur la force capillaire.

L'évolution de la force capillaire à l'échelle locale est fortement influencée par l'évolution combinée de ces différents paramètres et par la combinaison des valeurs qu'ils prennent ; il est difficile, dans ces conditions, de dégager une évolution de la force capillaire avec la température.

### 4.1.3 Influence de la température sur le comportement macroscopique de milieux granulaires humides

Afin d'évaluer l'effet de la température sur la cohésion par capillarité à l'échelle macroscopique, des essais de compression simple sont effectués numériquement sur des échantillons ayant la même configuration géométrique que ceux utilisés au chapitre 3 (à savoir échantillon cylindrique polydisperse dont les diamètres des grains sont compris entre  $0,8\text{ mm}$  et  $1,3\text{ mm}$ , figure 4.7). Les conditions d'essai sont les mêmes exceptée la durée de simulation ( $0,5\text{ s}$ ) et la vitesse de compression ( $2\text{ mm/s}$ ). Ces deux paramètres de simulation sont modifiés afin de réduire les temps de calcul.

La teneur en eau massique des échantillons est  $w = 3\%$ . Les essais de compression sont réalisés pour les trois températures :  $30^{\circ}C$ ,  $45^{\circ}C$  et  $60^{\circ}C$ , en prenant en compte à l'échelle locale les relations (4.4) à (4.7).

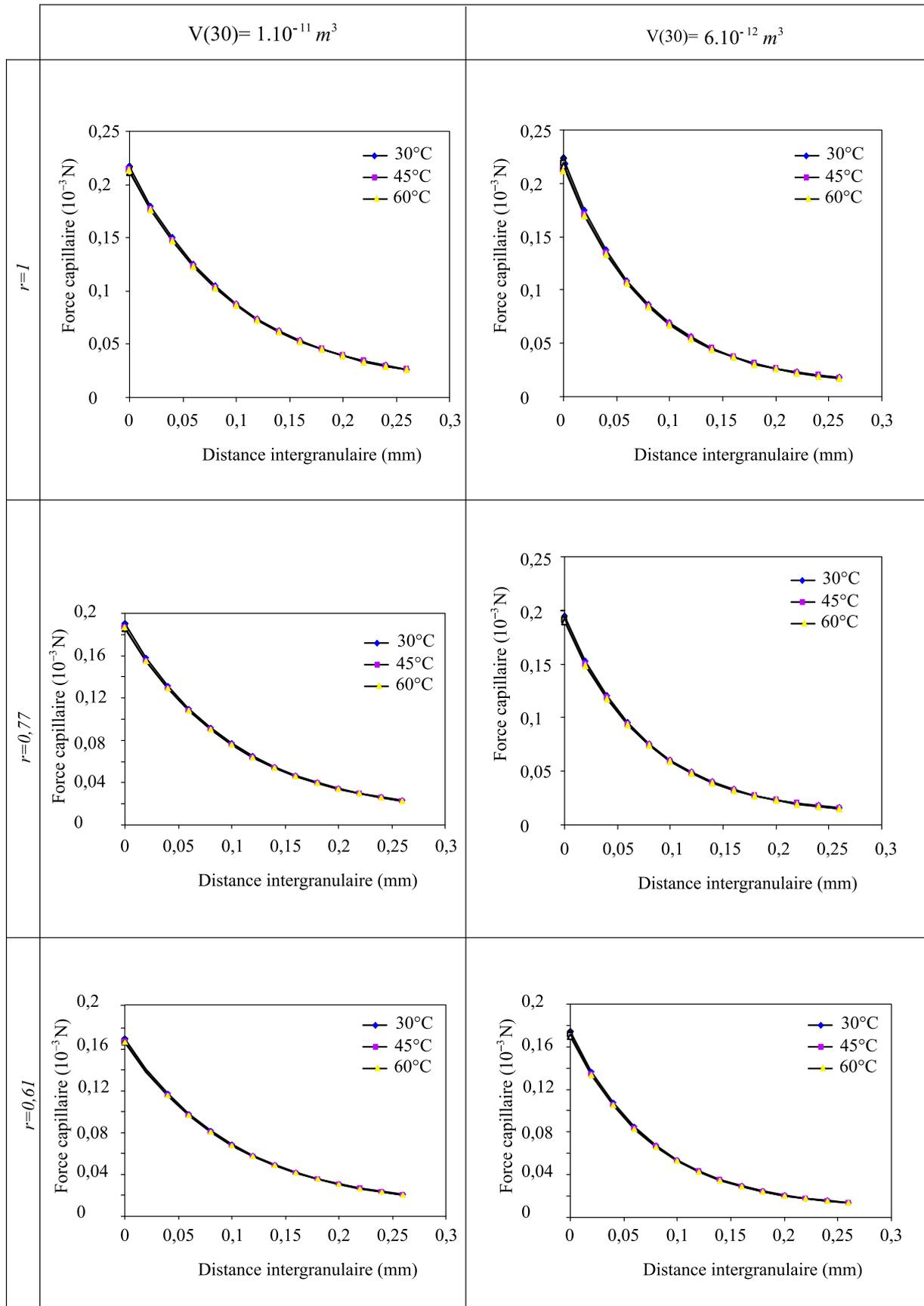


FIG. 4.5 – Évolution de la force capillaire en fonction de la température pour différentes configurations de doublets capillaires ( $R_2 = 0,65 \text{ mm}$ ).

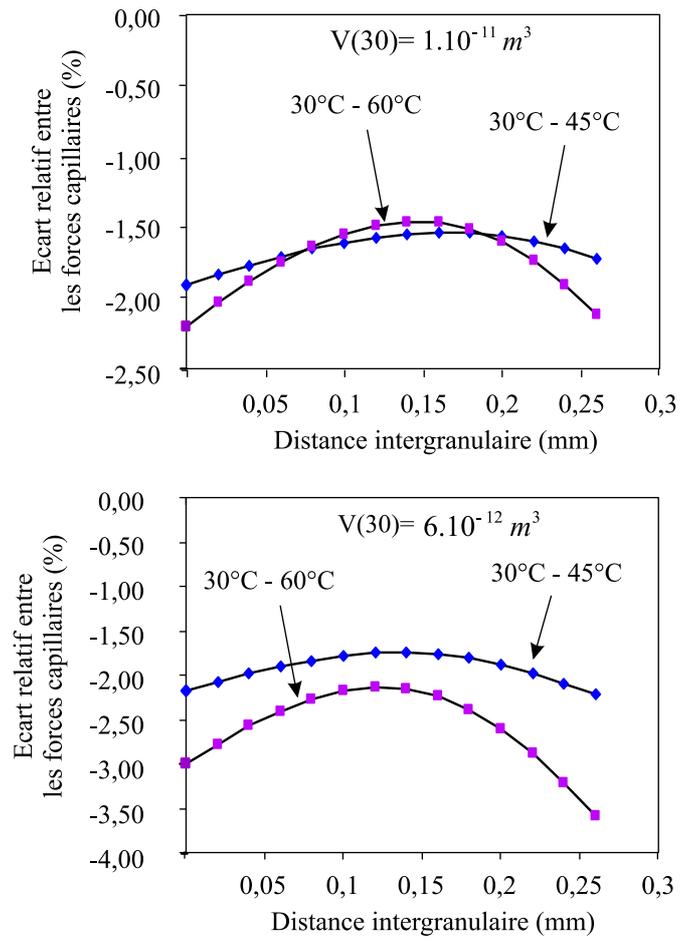


FIG. 4.6 – Évolution des écarts relatifs entre les forces capillaires avec la température; la force capillaire à 30°C étant prise comme référence.

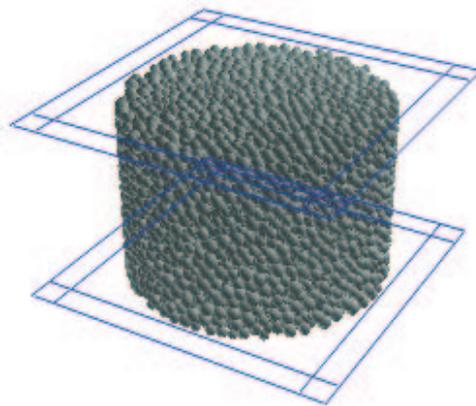


FIG. 4.7 – Échantillon numérique utilisé pour les essais de compression simple à différentes températures.

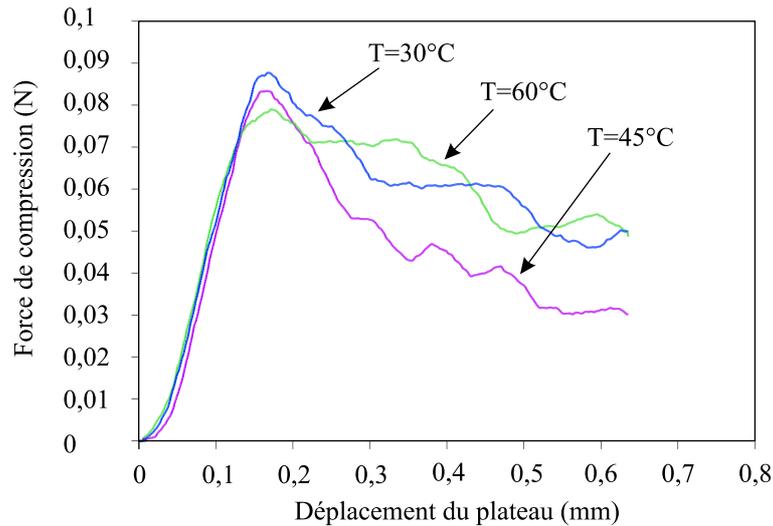


FIG. 4.8 – Effet de la température sur la force de compression, dans le cas de la compression simple d'échantillons de teneur en eau  $w = 3\%$ .

La figure 4.8 montre l'évolution de la force de compression pour les trois températures. La force maximale de compression est d'autant plus élevée que la température est faible. L'écart entre les forces à la rupture pour les différentes températures n'est cependant pas très important : l'écart entre la force à la rupture pour  $30^{\circ}\text{C}$  et la force à la rupture pour  $60^{\circ}\text{C}$  est inférieur à 10%. Lorsque le déplacement du plateau supérieur dépasse  $0,2\text{ mm}$ , l'évolution des forces de compression est assez singulière. En effet, la force de compression correspondant à la température  $60^{\circ}\text{C}$  augmente pour devenir la plus élevée. Ce comportement est à analyser avec réserve car il doit s'agir des effets combinés de la température et de réarrangements géométriques des grains à l'intérieur de l'échantillon.

La prise en compte des effets de la température sur la cohésion par capillarité nécessiterait une étude plus approfondie, en particulier en ce qui concerne l'évolution de l'angle de mouillage.

Dans le cas d'une atmosphère à pression de vapeur non saturante, les élévations de température peuvent également engendrer des phénomènes d'évaporation accrus et donc des modifications des volumes de ponts liquides et de la répartition de l'eau au sein des matériaux granulaires, modifiant ainsi l'intensité des forces capillaires. Pour tenir compte de cette évaporation, il faudrait compléter le modèle de cohésion par capillarité par des cinétiques d'évaporation.

A l'inverse, une diminution de la température peut aussi modifier les propriétés physiques des ponts liquides ; ces modifications peuvent même aller jusqu'au gel des ponts liquides, introduisant ainsi un comportement de type ponts solides entre les grains.

## 4.2 Soluté et capillarité

Dans les chapitres et paragraphes précédents, la cohésion par capillarité a été étudiée dans le cas de ponts liquides constitués d'eau pure. Dans le but d'appréhender l'effet de la présence d'un constituant en solution dans l'eau sur la cohésion par capillarité, nous nous intéressons ici au cas d'une solution de chlorure de sodium saturée, appelée saumure saturée<sup>1</sup>.

### 4.2.1 Influence d'un soluté sur les caractéristiques physiques du pont liquide

La présence de chlorure de sodium (NaCl) en solution dans l'eau génère une augmentation de la tension superficielle du liquide (Fig. 4.9) [Kaufmann, 1960]; pour une solution aqueuse saturée en chlorure de sodium, l'augmentation de tension superficielle par rapport à la tension superficielle de l'eau pure est de  $9,8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ . La tension superficielle de la saumure saturée est donc  $82,8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ , en considérant que la tension superficielle de l'eau pure est  $73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$  (la température ambiante est ici supposée constante).

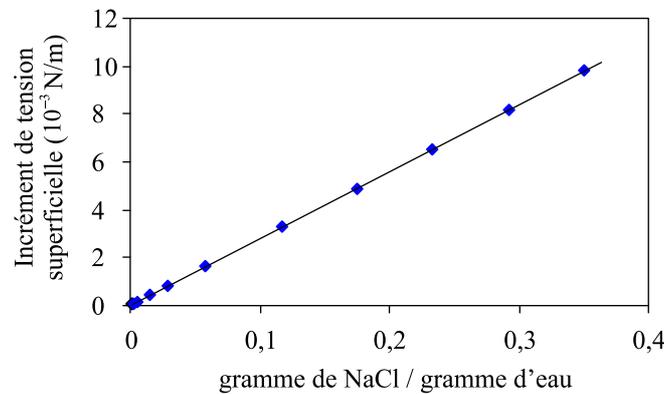


FIG. 4.9 – Effet de la quantité de chlorure de sodium par gramme d'eau sur la tension superficielle d'une solution aqueuse [Kaufmann, 1960].

L'influence de la quantité de chlorure de sodium par gramme d'eau sur l'évolution de l'angle de mouillage de la solution n'est pas connue et mériterait une étude détaillée. La présence de chlorure de sodium est supposée ici ne pas avoir d'effet sur l'angle de mouillage. La valeur  $\theta = 0$  correspondant au cas théorique de l'eau pure est retenue pour le calcul de la force capillaire.

### 4.2.2 Influence d'un soluté sur la force capillaire à l'échelle locale

L'augmentation de la tension superficielle avec la concentration en chlorure de sodium d'une solution aqueuse est à l'origine d'une augmentation de la force capillaire. La figure 4.10 illustre cet effet dans le cas d'un pont liquide de volume  $V = 2 \text{ mm}^3$  entre deux billes de rayons  $R_1 = R_2 = 2 \text{ mm}$ . L'intensité de la force capillaire étant proportionnelle à la valeur de la tension superficielle (voir chapitre 2), une concentration en chlorure de sodium donnée du pont liquide engendre une augmentation de la force capillaire dans des proportions identiques, quelle que soit la configuration du pont liquide. Dans le cas d'une saumure saturée, la force capillaire est ainsi supérieure de 13,4% au cas de l'eau pure, pour une configuration de doublet capillaire donnée.

---

<sup>1</sup>Saumure saturée : solution aqueuse de chlorure de sodium contenant environ 351 g de chlorure de sodium pour 1000 g d'eau.

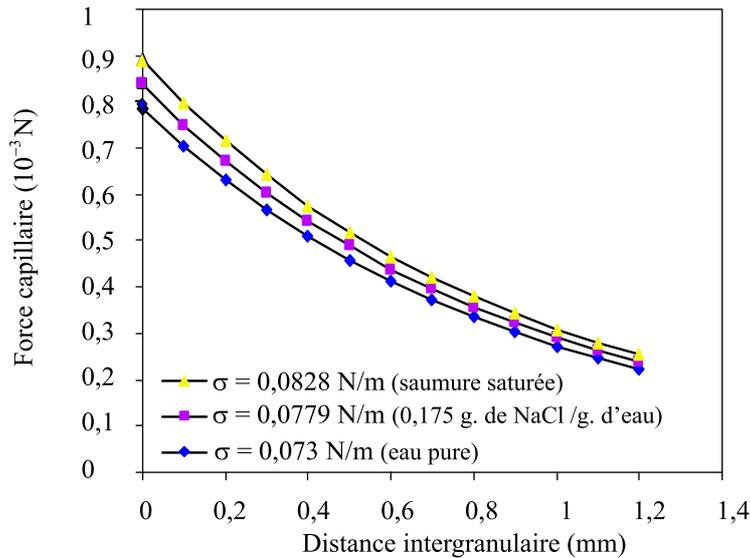


FIG. 4.10 – Effet de la variation de la tension superficielle, due à la quantité de chlorure de sodium par gramme d'eau, sur l'intensité de la force capillaire ( $R_1 = R_2 = 2 \text{ mm}$  et  $V = 2 \text{ mm}^3$ ).

### 4.2.3 Influence d'un soluté sur le comportement macroscopique d'un matériau granulaire

#### Approche numérique

Des essais de compression simple sont effectués numériquement pour évaluer l'influence de la cohésion capillaire en présence de saumure saturée sur la résistance à la compression. Les échantillons considérés sont ceux présentés au chapitre 3, les conditions de simulation sont les mêmes que celles utilisées au paragraphe 4.1.3. Les essais de compression sont effectués pour différents teneurs en saumure saturée :  $w = 0, 5\%, 1\%, 2\%, 3\%, 5\%$  et  $7\%$ .

La figure 4.11 présente l'évolution de la force de compression en fonction du déplacement du plateau supérieur pour les différentes teneurs en saumure saturée. A partir de ces essais, il est possible d'identifier la force à la rupture pour chacune des teneurs en saumure saturée. Ces valeurs sont reportées sur le graphe de la figure 4.12. Dans le cas sec, l'échantillon s'écroule sous son poids propre, la valeur retenue pour la force à la rupture est donc 0. Pour comparaison, les forces à la rupture dans le cas de l'eau pure ont été reportées sur ce même graphe. Les deux courbes ont globalement la même allure : la force à la rupture augmente avec la teneur en liquide. Cette augmentation est d'autant plus rapide que les teneurs en liquide sont faibles. A partir d'une teneur en liquide de  $5\%$ , la force à la rupture semble se stabiliser. L'écart relatif moyen entre les forces à la rupture pour les deux liquides est de l'ordre de  $24\%$ . Ces essais numériques montrent la sensibilité au paramètre tension superficielle de la résistance à la compression des échantillons granulaires, dans le cas de la cohésion par capillarité.

#### Approche expérimentale

Des essais de compression simple sont effectués sur des échantillons identiques à ceux du chapitre 2. Le mode opératoire est également le même. Les échantillons sont des cylindres de  $17 \text{ mm}$  de hauteur et de  $25 \text{ mm}$  de diamètre. Ils sont constitués de billes de verre dont les diamètres sont compris entre  $0,8 \text{ mm}$  et  $1,3 \text{ mm}$ . Les essais de compression sont réalisés pour différentes teneurs en eau pure et différentes teneurs en saumure saturée. La figure 4.13 présente l'évolution de la force à la rupture moyenne en fonction de la teneur en liquide dans ces deux cas. Pour chaque teneur en liquide, la force à la rupture moyenne est obtenue par le calcul de la moyenne de cinq résultats de mesure, excepté pour la teneur  $w = 1\%$  en eau pure pour laquelle

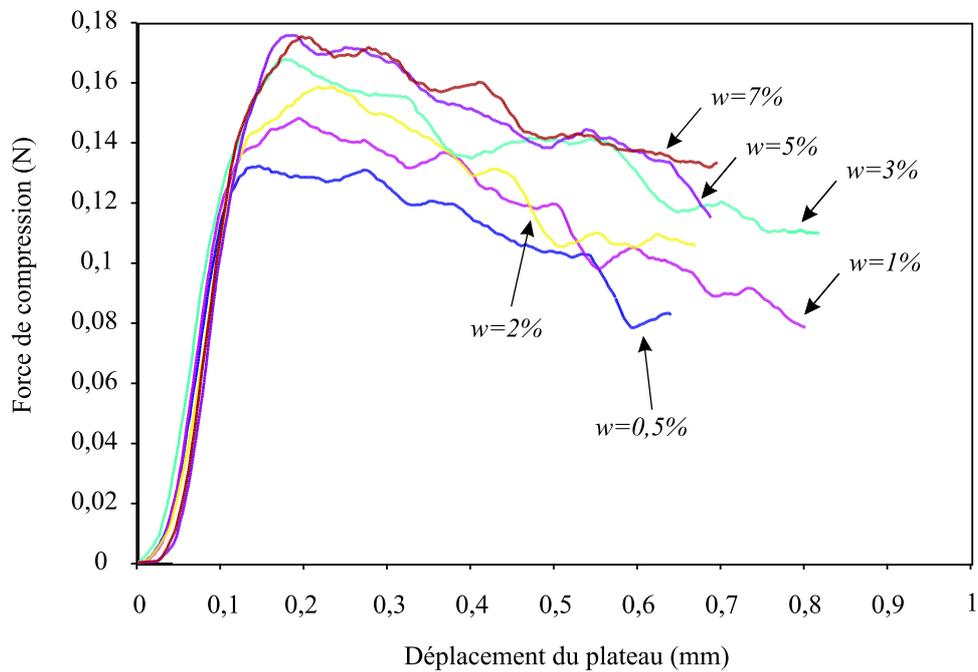


FIG. 4.11 – Essais de compression simple sur des échantillons numériques pour différentes teneurs en saumure saturée.

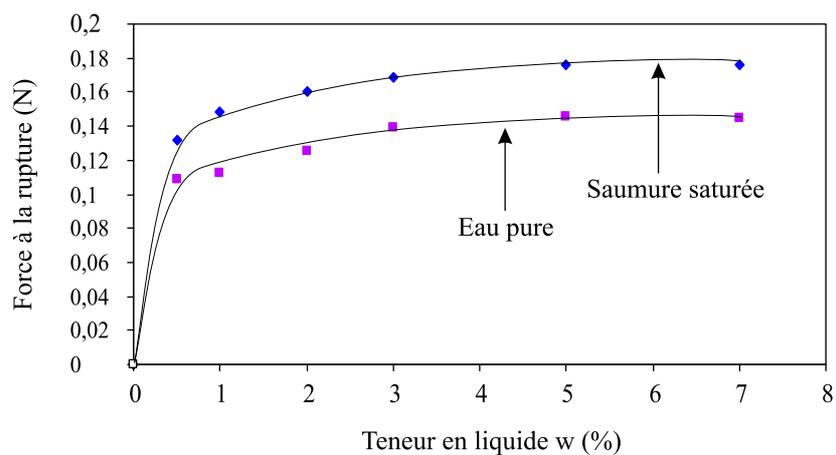


FIG. 4.12 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en liquide : comparaison eau pure et saumure saturée. Étude numérique.

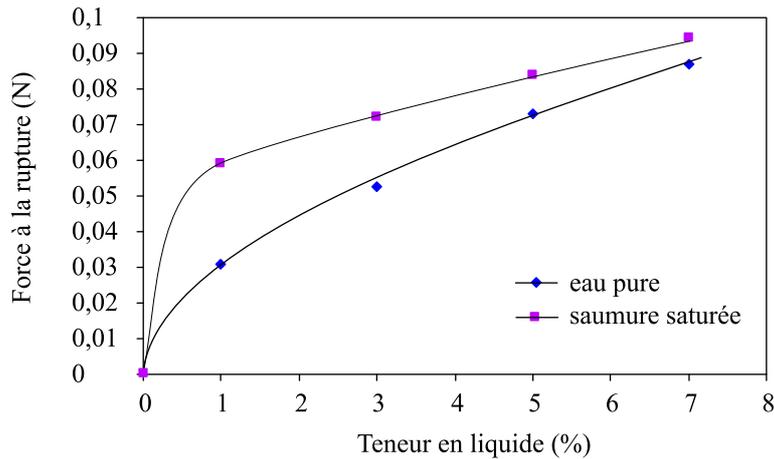


FIG. 4.13 – Évolution de la force à la rupture moyenne en fonction de la teneur en liquide : comparaison eau pure et saumure saturée. Étude expérimentale.

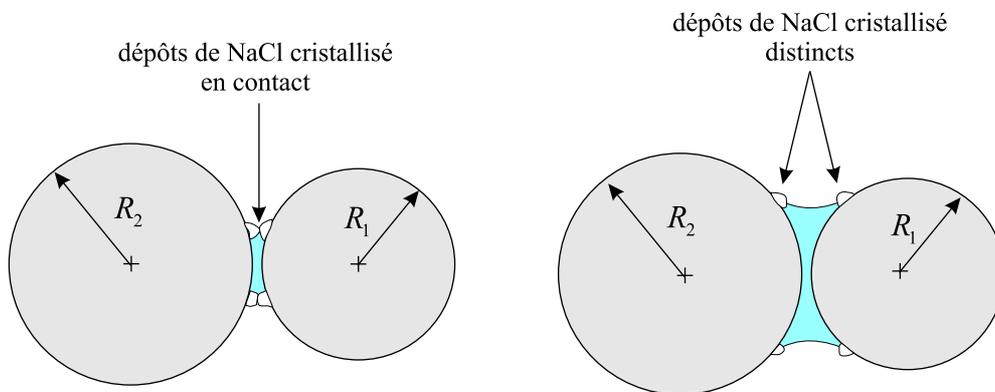


FIG. 4.14 – Effet du volume de pont liquide et de la présence de NaCl cristallisé au niveau de la ligne triple sur les grains d'un doublet capillaire.

les difficultés de réalisation des échantillons n'ont pas permis de multiplier les essais. Pour une même teneur en liquide, la force à la rupture est plus élevée dans le cas de la saumure saturée, ce qui confirme les tendances obtenues numériquement. Cependant, les forces sont globalement plus faibles que dans le cas numérique. Plusieurs facteurs peuvent expliquer cette différence comme nous l'avons évoqué au chapitre 3 (forme et rugosité des grains, granularité réelle des échantillons, effets de gravité, effets de l'angle de mouillage, effets d'hystérésis, répartition du liquide au sein des échantillons...).

La figure 4.13 montre que, pour les faibles teneurs en liquide, l'écart relatif entre les forces à la rupture est important (de l'ordre de 90%). Cet écart diminue lorsque la teneur en liquide augmente. Une explication physique possible de cette tendance réside dans la présence de dépôts de NaCl cristallisé au niveau des lignes triples sur les grains. Pour les faibles teneurs en liquide, les ponts liquides sont de petites dimensions ; lorsque la cristallisation du NaCl débute, les dépôts de cristaux peuvent rapidement se trouver en contact, créant ainsi des aspérités et des blocages qui augmentent la résistance à la compression des échantillons. Pour les teneurs en saumure saturée plus élevées, les ponts liquides sont de tailles plus conséquentes et les cristaux de NaCl ne sont pas en contact, l'interaction cohésive entre les grains reste donc de type capillaire (Fig. 4.14).

## 4.3 Une approche expérimentale de la cristallisation

L'influence de l'eau sur le comportement mécanique des matériaux granulaires ne se limite pas seulement au mécanisme de cohésion par capillarité. En effet, l'eau peut également jouer le rôle de vecteur pour d'autres constituants et, par exemple, favoriser les phénomènes de dissolution et/ou de cristallisation de solutés entre les grains. L'effet de la cristallisation est abordé dans cette section à travers l'exemple de la compression simple d'échantillons granulaires [Voivret, 2005]. Pour préparer les échantillons, une saumure saturée est utilisée. Les échantillons sont sollicités en compression après des temps de repos différents, ce qui permet de réaliser des essais pour différents états de cristallisation. La cristallisation est ici une conséquence de l'augmentation de concentration en NaCl dans l'eau due à l'évaporation.

### 4.3.1 Influence de la cristallisation sur la force de cohésion à l'échelle locale

L'étude expérimentale de la force de cohésion générée par un pont cristallisé de chlorure de sodium entre deux grains est particulièrement délicate. Lorsqu'un pont liquide constitué de saumure saturée est établi entre deux billes, la cristallisation du NaCl s'initie très rapidement au niveau des lignes triples (lignes définissant l'interface solide-liquide-gaz sur les grains). La cristallisation du pont liquide se développe à partir de cette zone, au niveau de l'interface liquide-gaz. On observe ainsi une cristallisation en périphérie du pont liquide, conduisant à la formation d'un "volcan" de NaCl cristallisé entre les grains (Fig. 4.15 et 4.16). Ce phénomène de cristallisation du NaCl à l'interface liquide-gaz est également observé dans des tubes capillaires [Benavente et al., 2004]. Le pont cristallisé est relativement fragile, ce qui rend délicate toute manipulation du doublet. Un essai de traction à l'échelle locale sur un doublet cristallisé avec le dispositif utilisé au chapitre 2 dans le cas des ponts liquides est donc délicate. Outre la résistance à la traction, le pont cristallisé présente une résistance élevée au cisaillement. L'étude expérimentale d'un doublet cristallisé nécessiterait donc la définition d'un protocole expérimental et d'un dispositif d'essai adaptés, d'où le passage à une étude expérimentale macroscopique.

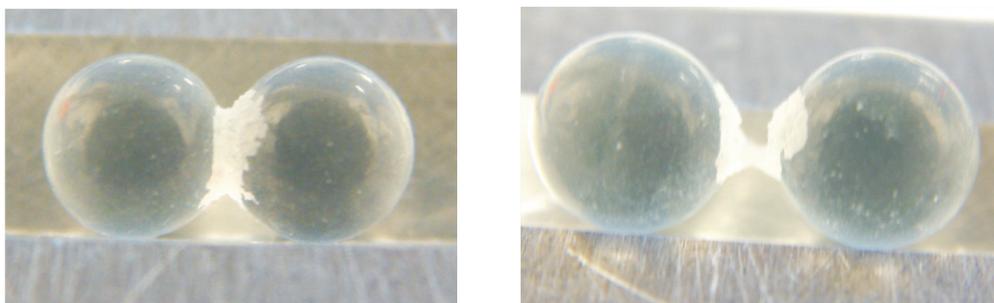


FIG. 4.15 – Pont de NaCl cristallisé entre deux billes de verre.

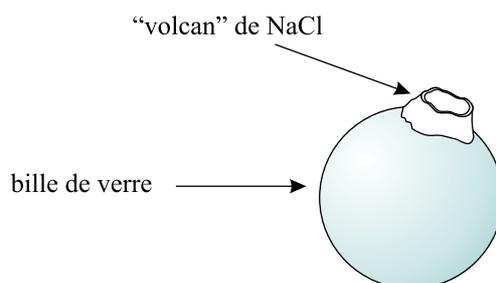


FIG. 4.16 – Illustration de la cristallisation du NaCl contenu dans un pont de saumure saturée.

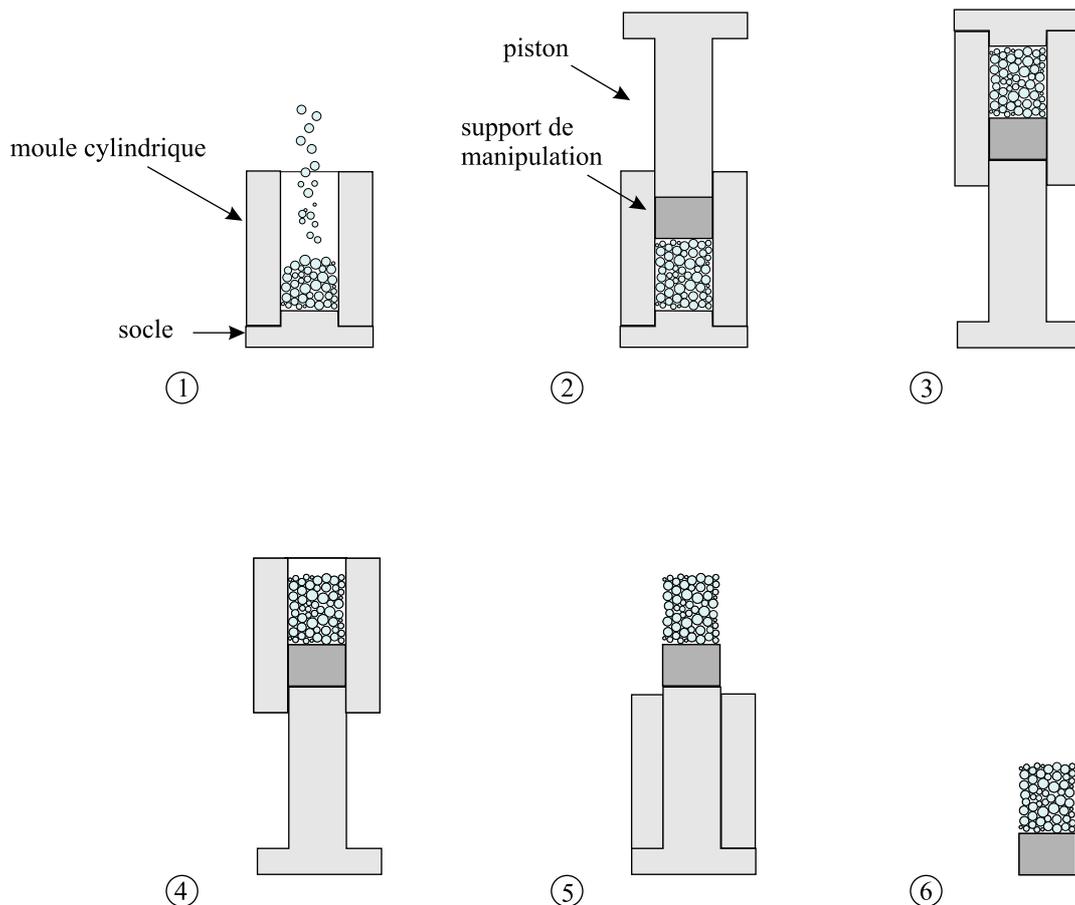


FIG. 4.17 – Processus de fabrication des échantillons granulaires pour les essais de compression simple : (1) remplissage du moule cylindrique avec un mélange de billes de verre et de saumure saturée, (2) compactage de l'échantillon, (3) retournement de l'ensemble moule-socle-piston, (4) retrait du socle, (5) dégagement du moule, (6) échantillon sur son support de manipulation, prêt à l'emploi.

### 4.3.2 Influence de la cristallisation sur le comportement macroscopique d'un matériau granulaire

#### Description des essais

Les échantillons granulaires sont constitués de billes de verre de diamètre nominal  $1\text{ mm}$ . Les échantillons sont fabriqués selon le même mode opératoire que celui utilisé au chapitre 3 (Fig. 4.17). Contrairement aux essais macroscopiques réalisés dans le cas de l'eau pure, les essais de compression ne sont pas effectués juste après démoulage. Pour chaque teneur initiale en saumure saturée, les échantillons sont soumis à des temps d'évaporation différents, ce qui permet d'obtenir des résultats de compression pour des échantillons contenant des masses de chlorure de sodium cristallisé variables. Il est donc nécessaire d'utiliser un support permettant la manipulation et le stockage des échantillons pendant la cristallisation du chlorure de sodium. Pour cela, un plot métallique est placé à l'intérieur du moule en cours de fabrication (ce plot métallique est appelé support de manipulation).

La masse sèche de billes utilisée pour fabriquer les échantillons est toujours la même, à savoir  $13,8\text{ g}$ . Des échantillons sont fabriqués pour deux teneurs initiales en saumure saturée :  $w = 3\%$  et  $w = 5\%$ . Les échantillons obtenus au démoulage sont des cylindres de diamètre  $25\text{ mm}$  et de hauteur  $17\text{ mm}$ . La cristallisation du chlorure de sodium est obtenue en plaçant les échantillons à l'air libre sur leurs supports de manipulation (Fig. 4.18).

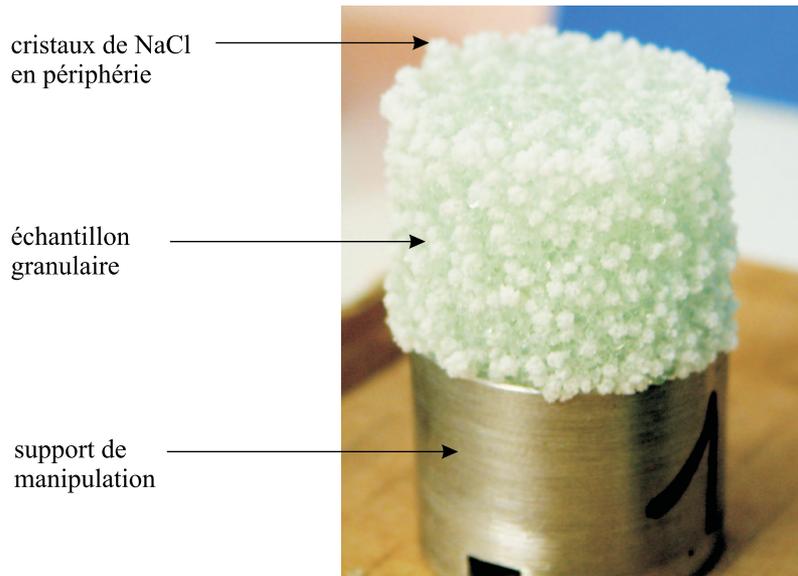


FIG. 4.18 – Échantillon granulaire cimenté par cristallisation de NaCl. La cristallisation du chlorure de sodium s’effectue de façon préférentielle à la surface des billes de verre situées sur la surface latérale de l’échantillon.

L’appareil utilisé pour réaliser les essais de compression est un texturomètre ; il s’agit d’une machine d’essai permettant d’effectuer des essais de traction et/ou de compression sur des échantillons de faibles dimensions et pour des forces relativement faibles (Fig. 4.19). Le texturomètre est piloté en déplacement, à une vitesse de  $5 \text{ mm/min}$ , pour un déplacement total de  $5 \text{ mm}$ . Une coupelle de verre est placée sous le support de manipulation afin de retenir les parties de l’échantillon détachées en cours d’essai. La figure 4.20 présente un échantillon granulaire contenant du NaCl cristallisé en début d’essai de compression.

### Résultats et conclusion

Les échantillons sont pesés juste après leur fabrication, pour obtenir la masse  $m_{fabr}$ , et juste avant l’essai de compression pour obtenir la masse  $m_{essai}$ . Ces deux masses permettent de définir la masse d’eau évaporée  $m_{évap}$  et donc la masse de sel cristallisé  $m_{crist}$  :

$$\begin{aligned}
 m_{évap} &= m_{fabr} - m_{essai} \\
 m_{crist} &= \frac{351}{1000} m_{évap}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

La figure 4.21 présente les cinétiques de cristallisation du chlorure de sodium pour les deux teneurs initiales en saumure saturée. Pour des temps de séchage égaux, la masse de sel cristallisé est d’autant plus importante que la teneur initiale en saumure saturée est élevée. La quantité d’eau évaporée, et donc la masse de sel cristallisé, augmentent rapidement au cours des premières heures de séchage puis ce phénomène se stabilise dans le temps pour atteindre un état d’équilibre.

Après séchage, on peut observer une cristallisation privilégiée du NaCl en périphérie des échantillons macroscopiques (Fig. 4.22 (a) et (b)). De la même façon, dans le cas de pierres poreuses non saturées en présence d’une saumure, on observe une cristallisation du NaCl à la surface des pierres [Benavente et al., 2004]. Pour les faibles temps de séchage, la périphérie de l’échantillon est cimentée par cristallisation de NaCl alors que le coeur de l’échantillon est encore humide. Ce phénomène est à l’origine de la création des croûtes de billes de verre cimentées par



FIG. 4.19 – Vue d’ensemble du texturomètre utilisé pour la compression des échantillons granulaires cimentés par cristallisation de NaCl.

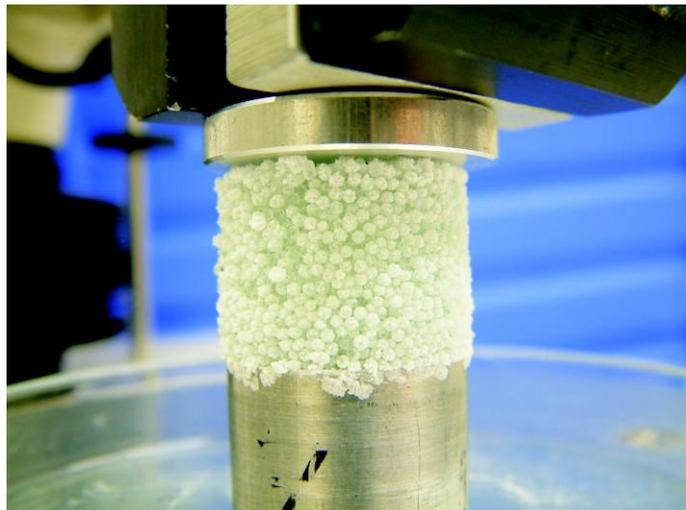


FIG. 4.20 – Essai de compression simple sur un échantillon granulaire contenant du NaCl cristallisé.

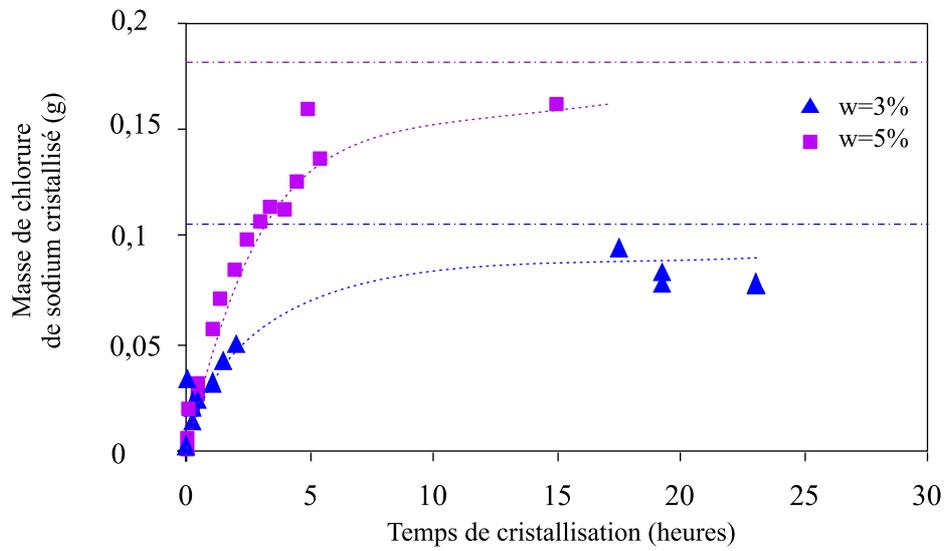


FIG. 4.21 – Cinétiques de cristallisation. Les traits horizontaux en pointillés correspondent aux masses de chlorure de sodium totales contenues dans un échantillon pour les deux teneurs initiales en solution.

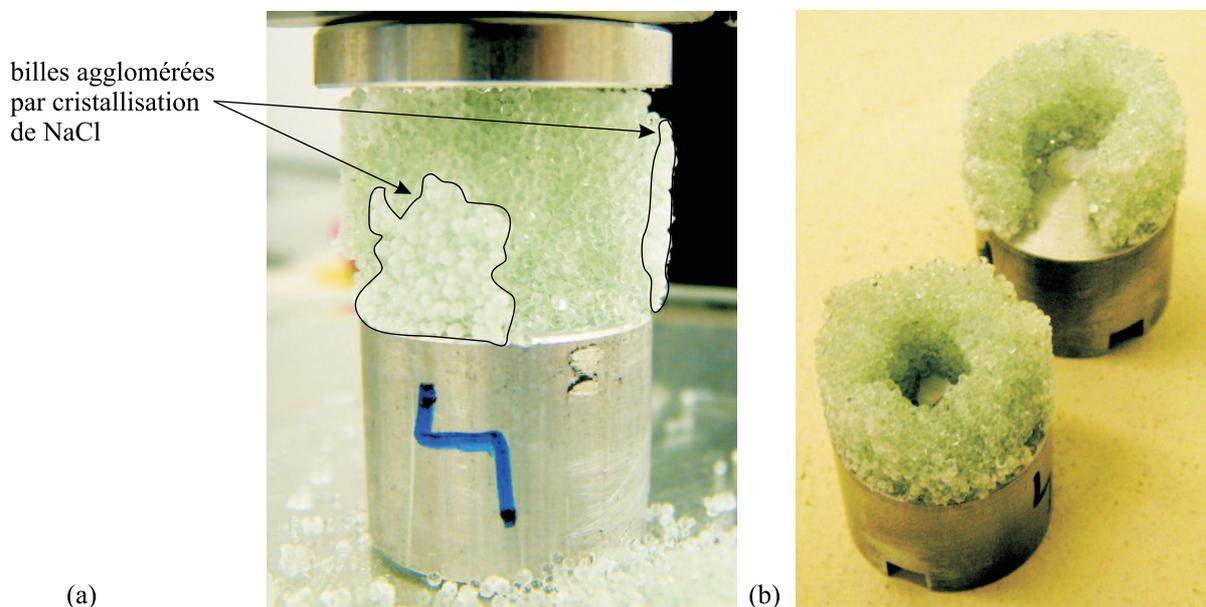


FIG. 4.22 – Cristallisation privilégiée en périphérie : (a) détachement de billes agglomérées par cristallisation de NaCl en périphérie, pendant l’essai de compression, (b) couronnes de billes agglomérées par cristallisation de NaCl en périphérie d’échantillons, observées après l’essai de compression.

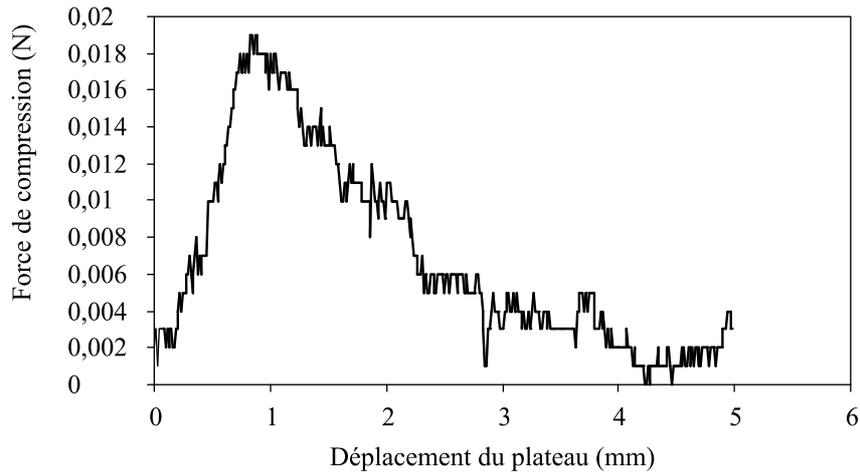


FIG. 4.23 – Courbe force-déplacement obtenue avec le texturomètre pour un échantillon à une teneur initiale en saumure saturée de 3% après un temps d'évaporation de 1/4 d'heure.

du NaCl qui se détachent parfois de l'échantillon en cours d'essai de compression. L'épaisseur de la couronne de NaCl cristallisé augmente avec la teneur initiale en saumure saturée et le temps de séchage. Ce phénomène de cristallisation en périphérie est l'image à l'échelle macroscopique de la cristallisation à l'interface liquide-gaz observée à l'échelle locale.

Le texturomètre permet d'étudier l'évolution de la force de compression en fonction du déplacement du plateau supérieur, et ce pour des chargements de niveau relativement faible comme c'est le cas pour les essais réalisés. La figure 4.23 présente un exemple de courbe force-déplacement obtenue pour un échantillon contenant une teneur initiale en saumure saturée de 3% après un temps d'évaporation de 1/4 d'heure. La figure 4.24 présente un exemple de courbe force-déplacement obtenue pour un échantillon contenant une teneur initiale en saumure saturée de 3% après un temps d'évaporation de 19 heures. On observe un écart important entre les deux forces à la rupture données par les valeurs au pic. Cet écart montre que la cimentation peut améliorer de façon considérable la résistance à la compression des échantillons granulaires. Des essais similaires à ceux présentés dans les figures 4.23 et 4.24 ont été réalisés pour deux teneurs initiales en saumure et différents temps d'évaporation. Pour chacun de ces essais, on a relevé la force à la rupture et calculé la masse de chlorure de sodium cristallisé lors de l'évaporation de l'eau. La figure 4.25 présente l'évolution de la force à la rupture en fonction de la masse de chlorure de sodium cristallisé pour les deux teneurs initiales en saumure saturée. Cette figure montre que, pour les deux teneurs en saumure saturée, les allures des courbes sont identiques.

Par ailleurs, pour chaque teneur initiale en saumure saturée, lorsque la masse de chlorure de sodium cristallisé est faible, les valeurs des forces à la rupture sont très faibles et varient peu avec une tangente quasiment nulle. Cette tangente croît rapidement à partir d'une masse de NaCl cristallisé donnée. Ce comportement traduit l'évolution du matériau entre deux états extrêmes que l'on pourrait qualifier de "mou" et "raide" pour des masses de NaCl cristallisé respectivement faibles et élevées. Entre ces deux états, l'évolution de l'évaporation conduit à une formation progressive de ponts solides qui augmentent naturellement la résistance du matériau granulaire.

Il est ainsi possible d'identifier deux types de comportements limites correspondant à ces deux états extrêmes. Pour l'état "mou", l'échantillon granulaire contient essentiellement une solution liquide. Son comportement est celui d'un milieu granulaire humide. Ceci explique que les valeurs des forces à la rupture observées correspondent aux valeurs obtenues dans le cas de la cohésion par capillarité : on peut ainsi parler d'un comportement de type capillaire. Pour l'état "raide", les liens entre les grains sont des ponts de chlorure de sodium cristallisé, c'est-à-dire des liens solides : les forces à la rupture atteignent alors des valeurs plus élevées puisque le compor-

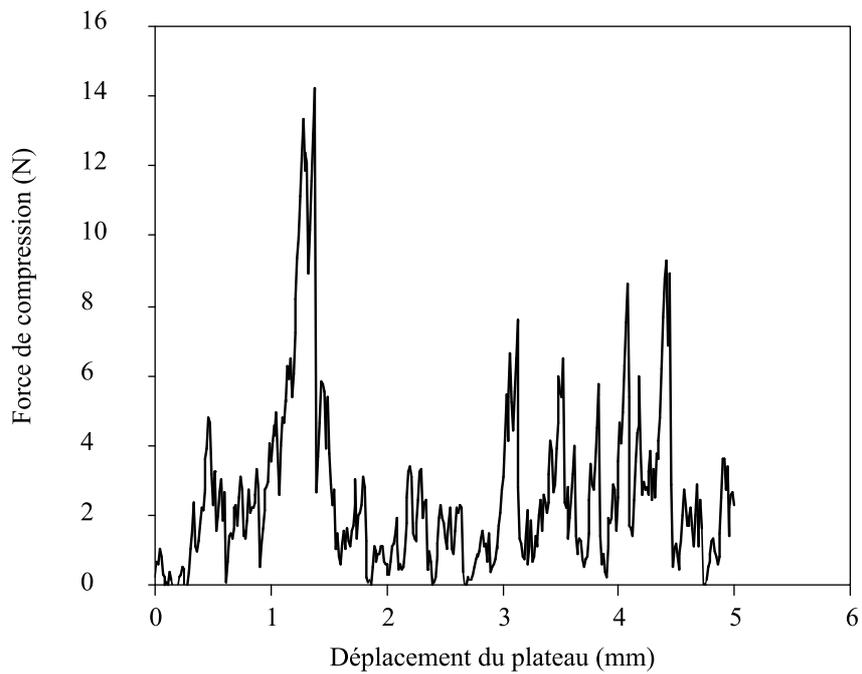


FIG. 4.24 – Courbe force-déplacement obtenue avec le texturomètre pour un échantillon à une teneur initiale en saumure saturée de 3% après un temps d'évaporation de 19 heures.

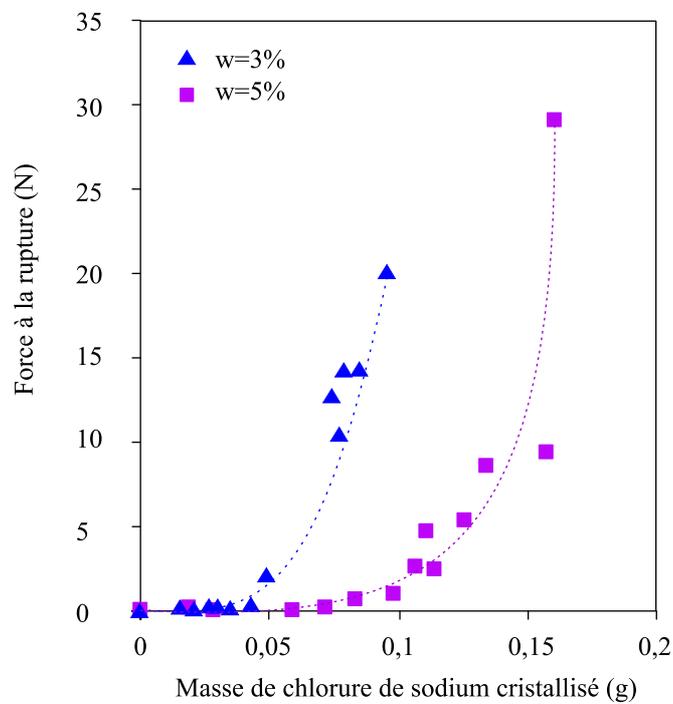


FIG. 4.25 – Évolution de la force à la rupture en fonction de la masse de chlorure de sodium cristallisé.

tement des échantillons est de type cimenté.

Cependant, les courbes présentées dans la figure 4.25 doivent être interprétées avec précaution. En effet, pour une masse de NaCl cristallisé donnée, la force à la rupture dépend fortement de la teneur initiale en saumure saturée. Cette remarque soulève une interrogation quant à la pertinence du paramètre masse de NaCl cristallisé. En effet, on pourrait s'attendre à ce que, à une masse de NaCl cristallisé, corresponde un nombre de liens solides, indépendamment de la teneur initiale en saumure. Cette hypothèse semble remise en cause par les résultats de la figure 4.25. En fait, le phénomène de cristallisation s'avère fortement dépendant de la quantité de solvant (eau) présent dans le milieu. En particulier, ce phénomène conduit à la formation d'aggrégats de NaCl isolés dans le cas de teneurs en solvant fortes, et à la formation d'aggrégats de NaCl localisés aux points de contact pour les faibles teneurs en solvant. Ce sont ces derniers qui se traduisent en réalité par des ponts solides entre les grains.

La prise en compte de ces phénomènes de cristallisation dans un code de calcul en éléments discrets nécessite, d'une part, l'utilisation d'un modèle de cohésion par cimentation et, d'autre part, l'introduction d'un modèle de cristallisation.

Des modèles discrets tenant compte de la cohésion à l'échelle locale ont été utilisés pour l'étude des effets de cimentation [Magnier et Donzé, 1998; Potapov et Campbell, 1998; Pisarenko et Gland, 2001]. Cependant, le plus souvent, ces modèles ne prennent pas en compte le caractère multidirectionnel du comportement mécanique des liens cimentés. En effet, les ponts solides entre grains présentent une résistance mécanique aux sollicitations normales (traction et compression), aux sollicitations tangentielles, mais aussi aux sollicitations combinées (traction, compression, cisaillement et couple). La prise en compte de ces interactions dans un code de calcul en éléments discrets a été proposée par Delenne [2002] dans le cas 2D. L'extension au cas 3D de ce type d'approche nécessite, en particulier, le repérage des points d'ancrage des ponts solides à la surface des grains et la définition de la cinématique de ces points. Cette approche numérique doit également être couplée à une étude locale pour déterminer les paramètres pertinents, et les valeurs associées, pour caractériser les ponts solides de NaCl.

La prise en compte de la cristallisation nécessite aussi de connaître la cinétique de pénétration du front de cristallisation dans le matériau granulaire.

## 4.4 Conclusion

La cohésion par capillarité au sein des matériaux granulaires est très sensible aux variations des paramètres environnementaux. Des modifications de paramètres physiques ou de constituants peuvent avoir des effets significatifs sur la force capillaire et donc sur le comportement macroscopique des matériaux granulaires. Les différents exemples abordés dans ce chapitre concernent l'augmentation de température et la sensibilité de la cohésion par capillarité à la présence d'un soluté dans l'eau.

L'eau joue également le rôle d'un vecteur de solutés au sein des matériaux granulaires. Les ponts liquides peuvent devenir des points privilégiés de cristallisation entre les grains et favoriser ainsi l'apparition de ponts solides. Les matériaux granulaires humides sont le siège de phénomènes cohésifs complexes qui évoluent progressivement d'une cohésion de type capillaire jusqu'à une cohésion de type solide. Concernant ce dernier aspect, la première approche qui a été proposée mérite d'être poursuivie et développée.

# Bilan et perspectives

## Bilan

L'objectif de ce travail était double. Il s'agissait d'étudier les interactions de cohésion d'origine capillaire entre les particules d'un milieu granulaire, d'une part, et l'effet de ces interactions sur le comportement macroscopique, d'autre part. Le bilan ci-dessous met en lumière quatre aspects importants de cette thèse. Les trois premiers aspects sont consacrés à l'étude de la cohésion par capillarité en présence d'une solution d'eau pure. Le quatrième aspect constitue une ouverture vers la prise en compte de considérations thermodynamiques telles que l'effet de la température et la présence d'un soluté dans l'eau. En effet, une des particularités du phénomène de cohésion par capillarité réside dans sa cohabitation incontournable avec des phénomènes de transferts.

\* Une analyse bibliographique a montré que la capillarité constitue un mécanisme de cohésion important à prendre en compte, dès lors qu'on s'intéresse à des milieux granulaires humides. Il a également été montré à quel point ce phénomène est complexe, compte tenu de la multiplicité des paramètres qui le conditionnent. Une possibilité d'étude de la sensibilité de la cohésion par capillarité à ces différents paramètres passe par des approches de type micro-macro. Ces approches nécessitent une bonne caractérisation des interactions locales et leur intégration dans une modélisation macroscopique. Le choix qui a été fait ici consiste à privilégier une approche en éléments discrets de type DEM en configuration tridimensionnelle. Une telle approche comporte deux volets. Le premier se rapporte à la proposition d'une loi de cohésion par capillarité adaptée aux conditions de l'étude. Le deuxième volet consiste à construire un code de calcul prenant en compte les phénomènes capillaires en vue du passage micro-macro.

\* Les points mis en avant dans la caractérisation d'une loi de cohésion par capillarité découlent d'une volonté de partir de la physique des phénomènes à l'échelle locale. Cette physique devait intégrer le caractère polydisperse traduisant ainsi la granularité souvent étalée des milieux granulaires. De plus, cette physique devait prendre en compte les caractéristiques des constituants et leurs éventuelles évolutions thermodynamiques. Ces considérations ont orienté le choix d'une expression explicite de la loi de cohésion par capillarité. Par ailleurs, ce choix a semblé le mieux adapté à une implémentation dans le code de calcul. La loi proposée exprime la force capillaire en fonction de la configuration géométrique des grains, de la distance intergranulaire, du volume du pont liquide ainsi que des caractéristiques des constituants telles que la tension superficielle, l'angle de mouillage... Elle a été élaborée sur la base d'une approche couplée théorique et expérimentale, à l'échelle locale, dans différentes configurations du doublet capillaire. L'originalité de cette loi réside dans son caractère explicite nécessitant un minimum d'opérations de calcul tout en prenant en compte les différents paramètres qui influent sur la capillarité.

\* Outre la loi de cohésion par capillarité, la construction du code de calcul en éléments discrets a nécessité la prise en compte du contact-frottant, de la rupture des ponts liquides, ainsi que la répartition de l'eau au sein du milieu granulaire. Concernant le contact-frottant, une loi classique de type Signorini-Coulomb a été utilisée. Le critère de rupture proposé par Lian et al. [1993] a été testé expérimentalement avec succès, ce qui a conduit à l'adopter dans sa formulation originale. La répartition de l'eau dans un milieu polydisperse tridimensionnel est difficile d'accès. Une première approche a consisté à répartir l'eau en fonction de la taille des grains constituant les doublets capillaires. Dans un but de validation, un essai de compression simple, réalisé sur un échantillon granulaire cylindrique humide et polydisperse, a été choisi. Les simulations et les expériences ont été effectuées dans les mêmes conditions de géométrie, teneurs en eau, et des conditions similaires de granularité. Comme pour l'expérimentation, les simulations ont confirmé l'augmentation attendue de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Les courbes présentant les résultats obtenus numériquement et expérimentalement sont tout à fait similaires en terme d'allure et d'ordre de grandeur. Ceci a montré la capacité du code de calcul à décrire, de façon satisfaisante, l'influence de la cohésion par capillarité sur le comportement d'un matériau granulaire humide.

\* Par leur nature, les phénomènes capillaires sont associés à la présence d'eau liquide dans le milieu granulaire. Contrairement au squelette solide, cette eau est un constituant particulièrement sensible aux interactions avec l'environnement. Elle peut être le siège de transferts, de changements de phase et jouer le rôle de vecteur de solutés. Ces phénomènes sont eux-mêmes dépendants de la température. Dans ce contexte, et sans aller vers une étude thermodynamique complète du pont liquide, il a été choisi de privilégier dans une première approche l'effet de la température et de la présence d'un soluté qui peut éventuellement cristalliser.

L'effet d'une augmentation de température sur la cohésion par capillarité a été abordé de façon théorique et numérique. Cette étude préliminaire a permis de souligner la complexité de l'analyse des effets de la température. Elle a montré le caractère antagoniste des effets de la tension superficielle, de la dilatation de l'eau et de l'angle de mouillage, sur la force capillaire lors d'un changement de température.

En ce qui concerne la présence de solutés dans l'eau, on a choisi le cas d'un milieu granulaire contenant une saumure saturée de NaCl. Une étude expérimentale et numérique a permis de mettre en évidence la sensibilité du phénomène de cohésion par capillarité aux constituants qui composent les ponts liquides. Elle a également montré que la nature des interactions peut changer lors de l'évaporation du solvant qui peut entraîner une cristallisation partielle ou totale du soluté. Une première approche expérimentale a ainsi montré l'existence de deux comportements limites au cours de l'évaporation du solvant, à savoir un comportement de type capillaire en début d'évaporation, et un comportement de type solide en fin d'évaporation.

## Perspectives

Au terme de cette étude, des prolongements directs de ce travail nous semblent naturels pour aller vers une meilleure connaissance des effets de la présence des liquides sur le comportement mécanique des milieux granulaires. Ces prolongements sont présentés ici en deux catégories. La première se rapporte aux trois premiers aspects du bilan, portant sur l'étude de la cohésion par capillarité en présence d'eau pure. La seconde concerne le quatrième aspect du bilan, traitant d'une ouverture vers des études thermodynamiques plus complètes du comportement mécanique de milieux granulaires humides.

\* Lors de la présente étude, une série de difficultés a été mise en évidence et a été contournée dans une première approche. Ces difficultés sont liées à une méconnaissance de l'évolution de l'angle de mouillage, des phénomènes d'hystérésis et des effets de la viscosité du liquide sur les contacts frottants et sur la cohésion.

En effet, l'angle de mouillage présente une évolution complexe et une forte dépendance avec les conditions environnementales. Il influence de façon significative l'intensité de la force capillaire au point de justifier une étude approfondie. En ce qui concerne les phénomènes d'hystérésis, il conviendrait d'envisager une analyse détaillée de ces effets à l'échelle macroscopique, en particulier dans le cas de chargements cycliques. Pour ce qui est des effets de la viscosité du liquide, il serait intéressant d'étudier l'évolution du coefficient de frottement entre grains, et l'influence des forces de viscosité au niveau des ponts liquides.

Par ailleurs, la répartition du liquide au sein des matériaux granulaires est aussi un point clé de l'étude des matériaux granulaires humides. Une étude expérimentale approfondie de la distribution et de la taille des ponts liquides au sein des matériaux granulaires est nécessaire pour vérifier la validité du critère de répartition utilisé, et le cas échéant, en proposer un autre.

\* Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4 consacré à des aspects de couplages complexes dans les milieux granulaires, un vaste domaine d'exploration se présente comme une perspective directe du travail préliminaire réalisé. En effet, l'influence de l'eau sur le comportement mécanique du matériau granulaire résulte de plusieurs phénomènes dépassant le cadre de la cohésion par capillarité. Ainsi, les approches en éléments discrets peuvent constituer des outils d'analyse pertinents pour étudier d'autres phénomènes associés à la présence d'eau. Parmi ces phénomènes, le cas des changements de phase, liés à des variations de température et à la présence de solutés dans les ponts liquides, constitue une ouverture intéressante de l'approche granulaire vers les domaines de la thermodynamique et de la chimie.

Par ailleurs, tout au long de cette étude, les grains solides ont été supposés insensibles à la présence d'eau. Pourtant, dans plusieurs applications, le retrait ou le gonflement de grains lors du séchage ou de l'imbibition, peut présenter un intérêt certain. Des extensions de l'approche présentée dans cette étude sont donc envisageables dans cette direction. Il est possible de modéliser numériquement la déformation des grains en introduisant dans le code de calcul des cinétiques de retrait ou de gonflement issues de l'expérience.

Enfin, les paramètres géométriques, physiques et thermodynamiques intervenant dans la description des phénomènes associés à la présence de liquide dans le milieu granulaire n'ont évidemment pas le même degré d'importance pour une situation donnée. Ce constat impose une vision de synthèse afin de hiérarchiser les effets respectifs de ces paramètres et de dégager leur pertinence selon le contexte.



# Bibliographie

- Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, Cleveland, OH, 57 edition, 1976.
- M.P. Allen et D.J. Tildesley. *Computer simulations of liquids*. Oxford University Press, Oxford, 1987.
- A. Atterberg. The behavior of clays with water, their limits of plasticity and their degrees of plasticity. *Kunglia Lantbruksakademiens Handlingar och Tidskrift*, 50(2) :132–158, 1911.
- R. Aveyard, J.H. Clint, V.N. Paunov, et D. Nees. Capillary condensation of vapours between two solid surfaces : Effects of line tension and surface forces. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 1 :155–163, 1999.
- J. Bachmann, A. Ellies, et K.H. Hartge. Development and application of a new sessile drop contact angle method to assess soil water repellency. *Journal of Hydrology*, 231-232 :66–75, 2000.
- D. Benavente, M.A. Garcia Del Cura, J. Garcia-Guinea, S. Sanchez-Moral, et S. Ordoñez. Role of pore structure in salt crystallisation in unsaturated porous stone. *Journal of Crystal Growth*, 260 :532–544, 2004.
- F.R.E. De Bisschop et W.J.L. Rigole. A physical model for liquid capillary bridges between adsorptive solid spheres : The nodoïd of plateau. *Journal of Colloid and Interface Science*, 88 :117–128, 1982.
- L. Bocquet, E. Charlaix, et F. Restagno. Physics of humid granular media. *Compte Rendu de Physique de l'Académie des Sciences*, 3 :207–215, 2002.
- B. Cambou et M. Jean. *Micromécanique des milieux granulaires*. Hermes Sciences, mars 2001.
- J. Chappuis. A new model for a better understanding of the cohesion of hardened hydraulic materials. *Colloids and Surfaces*, 156(1-3) :223–241, 1999.
- P. Claudin. *La physique des tas de sable*, volume 24 of *Annales de Physique*. EDP Sciences, Les Ulis, France, 1999.
- P.A. Cundall. A computer model for rock-mass behavior using interactive graphics for the input and output of geometrical data. Technical report, Departement of civil and mineral engineering, University of Minnesota, Mineapolis, Minnesota, 1974.
- P.A. Cundall et O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- Z. Dai et S. Lu. Liquid bridge rupture distance criterion between spheres. *International Journal of Mineral Processing*, 53(3) :171–181, 1998.
- P.-G. De Gennes, F. Brochard-Wyart, et D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Collection Echelles. Belin, Paris, 2002.

- P. Delage et Y.J. Cui. L'eau dans les sols non saturés. *Techniques de l'Ingénieur*, Traité Construction C2(C 301), 2000.
- J.-Y. Delenne. *Milieux granulaires à comportement solide. Modélisation, analyse expérimentale de la cohésion, validation et applications*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2002.
- J.-Y. Delenne, M.S. El Youssoufi, F. Cherblanc, et J.-C. Bénét. Mechanical behaviour and failure of cohesive granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28 :1577–1594, 2004.
- J. Duran. *Sables émouvants*. Belin, 2003.
- J. Duran. *Sables, poudres et grains, introduction à la physique des milieux granulaires*. Eyrolles Sciences, Paris, janvier 1999.
- Thomas Eisner, editor. *Evidence for Van der Waals Adhesion in Gecko Setae*, 2002. PNAS Early Edition.
- M.A. Erle, D.C. Dyson, et N.R. Morrow. Liquid bridges between cylinders, in a torus and between spheres. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 17 :115–121, 1971.
- R.J. Fairbrother et S.J.R. Simons. Modelling of binder-induced agglomeration. *Part. Part. Syst. Charact.*, 15 :16–20, 1998.
- R.A. Fisher. On the capillarity forces in an ideal soil; correction of formulae given by W.B. Haines. *Journal of Agricultural Science*, 16 :492–505, 1926.
- A. Gerschel. *Liaisons intermoléculaires*. InterEditions, CNRS Editions, Paris, mars 1995.
- T. Gröger, U. Tüzün, et D.M. Heyes. Modelling and measuring of cohesion in wet granular media. *Powder Technology*, 133 :203–215, 2003.
- E. Guyon et J.P. Troadec. *Du sac de billes au tas de sable*. Odile Jacob, 1994.
- W.B. Haines. Studies of the physical properties of soils. II. A note on the cohesion developed by capillarity forces in an ideal soil. *Journal of Agricultural Science*, 15 :529–535, 1925.
- T.C. Halsey et A.J. Levine. How sandcastles fall. *Physical Review Letters*, 80(14) :3141–3144, 1998.
- A. Hamaker. The London Van der Waals attraction between spherical particles. *Physica*, 10 : 1058–1072, 1937.
- M.E. Harr. *Mécanique des milieux formés de particules*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1981.
- R.D. Holtz et W.D. Kovacs. *Introduction à la géotechnique*. Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, 1991.
- K. Hotta, K. Takeda, et K. Iionya. The capillary binding force of a liquid bridge. *Powder Technology*, 10 :231–242, 1974.
- J. Israelachvili. *Intermolecular and surface forces*. Academic Press, Londres, second edition, 1992.
- S.M. Iveson, J.D. Litster, K. Hapgood, et B.J. Ennis. Nucleation, growth and breakage phenomena in agitated wet granulation processes : A review. *Powder Technology*, 117 :3–39, 2001.

- S.M. Iveson, J.A. Beath, et N.W. Page. The dynamic strength of partially saturated powder compacts : The effect of liquid properties. *Powder Technology*, 127(2) :149–161, 2002.
- M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999.
- Dale W. Kaufmann, editor. *Sodium chloride, the production and properties of salt and brine*. Reinhold Publishing Corporation, New York, 1960.
- T.H. Kim et C. Hwang. Modeling of tensile strength on moist granular earth material at low water content. *Engineering Geology*, 69(2150) :233–244, 2003.
- J.W. Landry, G.S. Grest, et S.J. Plimpton. Discrete element simulations of stress distributions in silos : Crossover from two to three dimensions. *Powder Technology*, 139 :233–239, 2004.
- G. Lian, C. Thornton, et M.J. Adams. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies. *Journal of Colloid and Interface Science*, 161 :138–147, 1993.
- G. Lian, C. Thornton, et M.J. Adams. Discrete particle simulation of agglomerate impact coalescence. *Chemical Engineering Science*, 53(19) :3381–3391, 1998.
- S.H. Liu, D.A. Sun, et Y. Wang. Numerical study of soil collapse behavior by discrete element modelling. *Computer and Geotechnics*, 30 :399–408, 2003.
- S. Luding. Collisions and contacts between two particles. In H.J. Hermaann, J.-P. Hovi, et S. Luding, editors, *Physics of dry granular media*, pages 285–304, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishing.
- J.P. Magnan. L'eau dans le sol. *Technique de l'Ingénieur, Traité Construction C2(C212)*, 1999.
- S.A. Magnier et F.V. Donzé. Numerical simulations of impacts using a discrete element method. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3 :257–276, 1998.
- S. Masson et J. Martinez. Micromechanical analysis of the shear behavior of a granular material. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(10) :1007–1016, 2001.
- S. Masson et J. Martinez. Effect of micromechanical parameters on stresses and displacements in an ensiled granular material using the discrete element method. In Behringer et Jenkins, editors, *Powders and Grains 1997*, pages 87–90, Rotterdam, 1997. A. A Balkema.
- D. Maugis. *Contact, adhesion and rupture of elastic solids*. Springer, 2000.
- D. Maugis. Adherence of elastomers : Fracture mechanics aspects. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 1 :105–134, 1987.
- T. Mikami, H. Kamiya, et M. Horio. Numerical simulation of cohesive powder behavior in a fluidized bed. *Chemical Engineering Science*, 53(10) :1927–1940, 1998.
- J.K. Mitchell. *Fundamentals of soil behavior*. Wiley Inter Science, second edition, 1993.
- R.H. Mohtar et E. Braudeau. New paradigm for modeling soil water in non-rigid aggregated soil medium. *Resource Magazine, ASAE*, 10 :11–12, 2003.
- J.-J. Moreau. Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9(11) :9–28, 2000.
- J.-J. Moreau. Numerical dynamics of granular materials. In *Proceedings of the 3rd Contact Mechanics International Symposium*, Peniche, Portugal, 2001.

- J.-J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 3 :93–114, 1994.
- D. Müller. *Techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d'éléments distincts*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996.
- F. Nicot et F. Darve. A multi-scale approach to granular materials. *Mechanics of Materials*, 37 :980–1006, 2005.
- A. Nokhodchi. An overview of the effect of moisture on compaction and compression. *Pharmaceutical Technology*, pages 46–66, 2005.
- X. Pepin, D. Rossetti, S.M. Iveson, et S.J.R. Simons. Modeling the evolution and rupture of pendular liquid bridges in the presence of large wetting hysteresis. *Journal of Colloid and Interface Science*, 232(2) :289–297, 2000.
- P. Pierrat et H.S. Caram. Tensile strength of wet granular materials. *Powder Technology*, 91(2) :83–93, 1997.
- D. Pisarenko et N. Gland. Modeling of scale effects of damage in cemented granular rocks. *Phys. Chem. Earth (A)*, 26(1-2) :83–88, 2001.
- O. Pitois. *Assemblées de grains lubrifiés : élaboration d'un système modèle expérimental et étude de la loi de contact*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
- O. Pitois, P. Moucheront, et X. Chateau. Liquid bridge between two moving spheres : An experimental study of viscosity effects. *Journal of Colloid and Interface Science*, 231 :26–31, 2000.
- A.V. Potapov et C.S Campbell. The two mechanisms of particle impact breakage and the velocity effect. *Chemical Engineering Science*, 53(10) :3381–3391, 1998.
- I. Preechawuttipong, R. Peyroux, et F. Radjaï. Microscopic features of cohesive granular media. In Y. Kishino, editor, *Powders and Grains 2001*, pages 43–46, Lisse, 2001. A.A. Balkema.
- R.R. Proctor. Fundamental principles of soil compaction. *Engineering News-Record*, 111(9, 10, 12, 13), 1933.
- F. Radjaï. Multicontact dynamics of granular systems. *Computer Physics Communication*, 121-122 :294–298, 1999.
- F. Radjaï, D.E Wolf, M. Jean, S. Roux, et J.-J. Moreau. Force networks in dense granular media. In Behringer et Jenkins, editors, *Powders and Grains 1997*, pages 211–214, Rotterdam, 1997. A. A. Balkema.
- V. Richefeu. *mgpost* guide d'utilisation, <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~richefeu>. Technical report, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR CNRS-UM2 5508, 2004.
- Y. Rollot et S. Régnier. Micromanipulation par adhésion. *Nano et micro technologies*, 1(2) : 213–241, 2000.
- D. Rossetti et S.J.R. Simons. A microscale investigation of liquid bridges in the spherical agglomeration process. *Powder Technology*, 130 :49–55, 2003.
- J.P.K. Seville, C.D. Willett, et P.C. Knight. Interparticle forces in fluidisation : A review. *Powder Technology*, 113 :261–268, 2000.

- L.F. Shampine et M.W. Reichelt. The MATLAB ODE suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18 :1–12, 1997.
- D.W. Taylor. *Fundamentals of soil mechanics*. John Wiley & Sons, New-York, 1948.
- C. Thornton et S.J. Antony. Quasi-static shear deformation of a soft particle system. *Powder Technology*, 109 :179–191, 2000.
- C. Thornton, M.T. Ciomocos, et M.J. Adams. Numerical simulations of diametrical compression tests on agglomerates. *Powder Technology*, 140 :258–267, 2004.
- S.H. Tidestrom. *Manuel de base de l'ingénieur*, volume 2. Dunod, Paris, 1961.
- M.E.D. Urso, C.J. Lawrence, et M.J. Adams. A two-dimensionnal study of the rupture of funicular liquid bridges. *Chemical Engineering Science*, 57(4) :677–692, 2002.
- C. Voivret. Solution aqueuse dans un matériau granulaire. Evaporation, cristallisation et résistance à la rupture. Mémoire de DEA, Université Montpellier II, 2005.
- C.D. Willett, M.J. Adams, S.A. Johnson, et J.P.K. Seville. Capillary bridges between two spherical bodies. *Langmuir*, 16 :9396–9405, 2000.
- C.D. Willett, M.J. Adams, S.A. Johnson, et J.P.K. Seville. Effects of wetting hysteresis on pendular liquid bridges between rigid spheres. *Powder Technology*, 130 :63–69, 2003.



# Notations

## Lettres Grecques

$\delta$	angle de remplissage (représente la portion de grain mouillée par le pont liquide)
$\delta_1$	angle de remplissage du grain 1
$\delta_2$	angle de remplissage du grain 2
$\Delta p$	différence de pression entre la phase gazeuse et la phase liquide, $\Delta p = p_{gaz} - p_{liquide}$
$\Delta t$	pas de temps utilisé
$\theta$	angle de mouillage
$\theta_a$	angle d'avancée (limite supérieure d'un angle de mouillage)
$\theta_r$	angle de reculée (limite inférieure d'un angle de mouillage)
$\mu$	coefficient de frottement (numérique)
$\nu$	coefficient d'amortissement
$\nu_{critique}$	coefficient d'amortissement critique
$\rho$	rayon de courbure extérieur du pont liquide dans l'approximation toroïdale
$\rho_{int}$	rayon de courbure intérieur du pont liquide dans un cas quelconque
$\rho_{ext}$	rayon de courbure extérieur du pont liquide dans un cas quelconque
$\sigma$	tension superficielle

## Lettres Latines modernes

$B_o$	nombre de Bond
$D$	distance intergranulaire
$D^*$	distance intergranulaire adimensionnée, $D^* = \frac{D}{R_2}$
$D_{création}$	distance de création d'un pont liquide
$D_{rupture}$	distance de rupture d'un pont liquide
$F_{capillaire}$	force capillaire
$F_{frot}$	force de frottement
$F_n$	force normale entre les grains
$F_{capillaire}^*$	force capillaire adimensionnée
$g$	accélération de la pesanteur
$H$	paramètre adimensionnel, $H = \frac{\Delta p R_2}{\sigma}$
$k_{création}$	coefficient permettant de définir la distance de création d'un pont liquide
$K$	constante d'intégration
$K_n$	raideur normale
$K_t$	coefficient de régularisation tangentielle
$m$	masse réduite
$m_i$	masse du grain $i$
$m_j$	masse du grain $j$

$m_s$	masse sèche
$m_a$	masse apparente
$O_i$	centre du grain $i$
$O_j$	centre du grain $j$
$r$	rapport des rayons des grains, $r = \frac{R_1}{R_2}$
$r_1$	rayon de courbure extérieur du pont liquide dans l'approximation toroïdale
$r_2$	rayon de courbure intérieur du pont liquide dans l'approximation toroïdale
$R$	rayon de grain (notamment dans le cas d'un milieu granulaire monodisperse)
$R_1$	rayon du plus petit grain d'un doublet capillaire
$R_1^*$	rayon du grain 1 adimensionné, $R_1^* = \frac{R_1}{R_2}$
$R_2$	rayon du plus grand grain d'un doublet capillaire
$R_i$	rayon du grain $i$
$R_j$	rayon du grain $j$
$T$	température
$V$	volume du pont liquide
$V^*$	volume adimensionné du pont liquide, $V^* = \frac{V}{R_2^3}$
$V_k$	volume de pont liquide affecté au pont liquide $k$
$\tilde{V}_k$	volume indicateur affecté au pont liquide $k$
$V_{liquide}$	volume macroscopique de liquide
$V_{moyen}$	volume moyen de pont liquide
$x$	axe du doublet et abscisse associée
$x^*$	abscisse adimensionnée, $x^* = \frac{x}{R_2}$
$x_{c1}$	abscisse correspondant à la position de la ligne triple sur le grain 1
$x_{c1}^*$	abscisse adimensionnée correspondant à la position de la ligne triple sur le grain 1
$x_{c2}$	abscisse correspondant à la position de la ligne triple sur le grain 2
$x_{c2}^*$	abscisse adimensionnée correspondant à la position de la ligne triple sur le grain 2
$y$	ordonnée définissant la forme du profil du pont liquide
$y^*$	ordonnée du profil adimensionnée, $y^* = \frac{y}{R_2}$
$y_0$	ordonnée à l'origine du profil du pont liquide
$y_0^*$	ordonnée du profil à l'origine adimensionnée, $y_0^* = \frac{y_0}{R_2}$
$w$	teneur en liquide massique
$w_L$	teneur en eau correspondant à la limite de liquidité
$w_P$	teneur en eau correspondant à la limite de plasticité
$w_S$	teneur en eau correspondant à la limite de retrait
$Z_{ponts}$	nombre de ponts liquides
$Z_0$	nombre d'antagonistes (numérique)

## Vecteurs et repères

$\vec{V}_{ij}$	vitesse relative entre les grains $i$ et $j$
$\vec{V}_{ijG}$	vitesse de glissement
$\vec{V}_{ijN}, \vec{V}_{ijT}, \vec{V}_{ijS}$	composantes de $\vec{V}_{ij}$ dans $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{s})$
$\vec{V}(O_i, i/0)$	vecteur vitesse du centre du grain $i$ dans le repère global
$\vec{\Omega}_{i/0}$	vecteur rotation du repère associé au grain $i$
$(\vec{n}, \vec{t}, \vec{s})$	base du repère local d'interaction
$(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	repère global
$(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	repère associé au grain $i$

# Table des figures

1.1	Teneurs en eau et différents états d'un sol. . . . .	9
1.2	Allure typique d'une courbe de compactage. L'optimum Proctor correspond à la teneur en eau qui permet d'obtenir la masse volumique sèche maximale, pour un sol donné, un mode de compactage et une énergie de compactage donnés. . . . .	10
1.3	Représentation schématique des différents états de l'eau dans un sol : (a) régime hygroscopique, (b) régime pendulaire, (c) régime funiculaire, (d) saturation. . . . .	11
1.4	Un exemple de structure naturelle composée de grains liés par cimentation : la rose des sables. . . . .	13
1.5	Courbes de contraintes-déformations pour un sable à différents degrés de cimentation (d'après Mitchell [1993]). . . . .	14
1.6	Pont liquide entre deux grains de même taille dans le cas de l'approximation toroïdale. . . . .	14
1.7	Effets géométriques de surface entre deux particules. . . . .	15
1.8	Illustration synthétique des mécanismes de cohésion au sein des milieux granulaires humides. . . . .	16
1.9	Comparaison des intensités de différentes forces interparticulaires pour des contacts ponctuels, dans l'air (d'après Seville et al. [2000]) ; en traits pleins, pour des grains de même taille, en pointillés, pour une aspérité de taille caractéristique $0,1 \mu m$ en contact avec un plan. La force de Van der Waals est déterminée pour une constante de Hamaker $A = 6,5 \cdot 10^{-20} J$ (cas du quartz) et des distances entre particules variant entre $1,65 \text{ \AA}$ et $4,0 \text{ \AA}$ . La force de capillarité est estimée à sa valeur maximale, lorsque les grains sont en contact : $F_{capillaire} = 2 \pi R \sigma$ , avec $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} N \cdot m^{-1}$ (cas de l'eau). La force électrostatique est considérée à son intensité maximale (charge de signe opposé), pour une charge surfacique de $10 \mu C m^{-2}$ . Le poids est évalué pour une masse volumique $\rho = 3 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$ . . . . .	17
1.10	Contributions comparées des forces de Van der Waals, de la capillarité et de la cimentation dans le cas des sols [Mitchell, 1993]. . . . .	18
1.11	Effets de la cohésion par capillarité : (a) billes de verre liées par un pont liquide constitué d'eau, (b) échantillon composé de billes de verre de $1,5 mm$ de diamètre maintenues par des ponts liquides constitués d'eau. . . . .	19
1.12	Forces agissant sur une molécule d'eau : (a) au sein d'une masse d'eau, (b) à l'interface eau-air. . . . .	19
1.13	Pont liquide entre deux grains de même taille (cas monodisperse) : (a) vue d'ensemble du doublet capillaire, (b) détail du pont liquide. . . . .	20
2.1	Pont liquide entre deux grains de tailles différentes (cas polydisperse) : (a) vue d'ensemble du doublet capillaire, (b) détail du pont liquide. . . . .	28
2.2	Capillarité et rugosité : (a) régime d'aspérités, (b) régime de rugosité, (c) régime sphérique. . . . .	28
2.3	Equilibre mécanique d'une portion de pont liquide. . . . .	30
2.4	Surface d'énergie minimale . . . . .	31
2.5	Position de la ligne triple sur les grains. . . . .	32

2.6	Film de savon entre deux anneaux circulaires : le profil du film de savon correspond à une “chaînette” . . . . .	34
2.7	Pont liquide entre deux grains de tailles différentes : (a) portions de grains recouvertes par le pont liquide, (b) position de la ligne triple sur les grains. . . . .	35
2.8	Évolution de la force capillaire en fonction des paramètres $D$ , $V$ , $r$ et $\theta$ sur quelques exemples : (a) $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$ et $\theta = 0^\circ$ , (b) $R_2 = 3 \text{ mm}$ , $V = 2 \text{ mm}^3$ et $\theta = 0^\circ$ , (c) $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$ et $\theta = 20^\circ$ , (d) $R_2 = 3 \text{ mm}$ , $V = 2 \text{ mm}^3$ et $\theta = 20^\circ$ , (e) $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$ et $\theta = 40^\circ$ , (f) $R_2 = 3 \text{ mm}$ , $V = 2 \text{ mm}^3$ et $\theta = 40^\circ$ . . . . .	42
2.9	Comparaison du modèle théorique avec les résultats de Willett et al. [2000] obtenus pour des ponts liquides de volume $V$ réalisés avec une huile silicone de tension superficielle $\sigma = 20,6 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ pour les rayons de billes suivant : (a) $R_1 = 2,381 \text{ mm}$ et $R_2 = 2,381 \text{ mm}$ (soit $r = 1$ ), (b) $R_1 = 1,588 \text{ mm}$ et $R_2 = 2,381 \text{ mm}$ (soit $r = 2/3$ ), (c) $R_1 = 1,191 \text{ mm}$ et $R_2 = 2,381 \text{ mm}$ (soit $r = 0,5$ ). . . . .	44
2.10	Illustration du dispositif expérimental. . . . .	45
2.11	Dispositif expérimental : (a) Présentation d’ensemble, (b) billes en acier inoxydable présentées sur leurs supports inférieurs et supérieurs, (c) potence et table micrométrique, (d) doublet capillaire en cours d’essai. . . . .	46
2.12	Évolution de la force capillaire obtenue expérimentalement pour différents volumes de ponts liquides et deux rapports de rayons de grains : (a) $R_1 = 1,5 \text{ mm}$ et $R_2 = 3 \text{ mm}$ , (b) $R_1 = 2 \text{ mm}$ et $R_2 = 3 \text{ mm}$ . . . . .	47
2.13	Photographie d’un doublet capillaire. . . . .	48
2.14	Illustration de l’évolution de l’angle de mouillage $\theta$ au cours d’un essai de traction sur un doublet capillaire avec $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$ et $V = 3 \text{ mm}^3$ . . . . .	49
2.15	Évolution de l’angle de mouillage en fonction du paramètre $D/D_{rupture}$ (détermination expérimentale et modélisation). . . . .	49
2.16	Évolution de la force capillaire en prenant en compte la variation de l’angle de mouillage (Eq. 2.63). Pour (a) et (b), le volume de pont liquide considéré est $V = 3 \text{ mm}^3$ . . . . .	50
2.17	Illustrations des valeurs limites de l’angle de mouillage : angle d’avancée $\theta_a$ et angle de reculée $\theta_r$ . . . . .	50
2.18	Mise en évidence expérimentale de l’hystérésis de la force capillaire dans le cas de billes de rayons $R_1 = R_2 = 2,5 \text{ mm}$ et $V = 3 \text{ mm}^3$ . . . . .	51
2.19	Exemples de forces capillaires déterminées expérimentalement et théoriquement pour un volume de pont liquide $V = 3 \text{ mm}^3$ et différents rapports $r$ de rayons de grains. . . . .	53
2.20	Évolution de la distance de rupture en fonction du volume du pont liquide : données expérimentales et critères théoriques de Lian et al. [1993] et de Willett et al. [2000]. . . . .	54
2.21	Dispositif expérimental permettant d’estimer le coefficient de frottement verre-verre. . . . .	54
2.22	Résultats des mesures du coefficient de frottement et approximations linéaires des résultats : (a) vaporisation d’eau sur la plaque de verre, (b) immersion de la plaque et des billes dans l’eau. . . . .	55
3.1	Définition des notations utilisées pour les simulations numériques. . . . .	59
3.2	Loi de contact linéaire. . . . .	60
3.3	Loi de frottement régularisée. . . . .	61
3.4	Illustration de la technique du “halo”. . . . .	63
3.5	(a) Loi de contact linéaire, (b) loi de cohésion par capillarité. . . . .	64
3.6	Allure de la loi d’interaction normale entre grains. . . . .	64
3.7	Illustration d’un type de loi locale de cohésion par capillarité réversible. . . . .	65
3.8	Photographie d’une couche polydisperse de billes de verre en présence d’eau colorée. . . . .	66

3.9	Évolution du volume de liquide global au cours d'une simulation de compression simple. Le volume global introduit initialement dans l'échantillon granulaire est $2,58.10^{-7} m^3$ . . . . .	68
3.10	Configurations géométriques des échantillons cubiques monodisperses : (a) rayon des grains $R = 0,5 mm$ , (b) $R = 0,75 mm$ , (c) $R = 1 mm$ et (d) $R = 1,5 mm$ . Illustrations réalisées avec <code>mgpost</code> [Richefeu, 2004]. . . . .	69
3.11	Évolution des paramètres moyens en fonction de la taille des grains : nombre d'interactions par grain, temps de calcul, nombre de grains, poids des grains, nombres de contacts et de ponts liquides sollicités en traction, efforts moyens de contact et de capillarité. . . . .	70
3.12	Répartition granulométrique au sein de l'échantillon numérique. . . . .	72
3.13	Illustration de la fabrication de l'échantillon granulaire numérique. . . . .	72
3.14	Images en cours de simulation : état sec ( $w = 0 \%$ ) et état humide ( $w = 1 \%$ ). Les numéros correspondent aux étapes de simulation : état initial (1), état intermédiaire (2), état final (3). Illustrations réalisées avec <code>mgpost</code> [Richefeu, 2004]. . . . .	74
3.15	Essais numériques de compression simple pour différents teneurs en eau massiques des échantillons. . . . .	75
3.16	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Courbe obtenue à partir des simulations numériques de compression simple avec une tension superficielle $\sigma = 73.10^{-3} N/m$ . . . . .	76
3.17	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Influence de la tension superficielle. . . . .	76
3.18	Processus expérimental pour les essais de compression simple : (1) remplissage du moule cylindrique avec des billes de verre humides, (2) compactage de l'échantillon, (3) retournement de l'ensemble moule-socle-piston, (4) retrait du socle, (5) dégagement du moule, (6) chargement de l'échantillon à l'aide d'une coupelle en aluminium remplie de sable. . . . .	77
3.19	Échantillon constitué de billes de verre de diamètres compris entre $0,8 mm$ et $1,3 mm$ , pour une teneur en eau $w = 3 \%$ . . . . .	78
3.20	Échantillons après rupture : (a) $w = 1 \%$ , (b) $w = 12 \%$ . . . . .	79
3.21	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Détermination expérimentale sur des échantillons constitués de billes de verre de diamètres compris entre $0,8 mm$ et $1,3 mm$ . . . . .	79
3.22	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Détermination expérimentale sur des échantillons constitués de billes de verre de diamètres compris entre $0,5 mm$ et $1 mm$ . . . . .	80
3.23	Évolution comparée de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Détermination expérimentale pour la granularité $0,5 - 1mm$ et pour la granularité $0,8 - 1,3 mm$ . . . . .	81
3.24	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Confrontation des résultats numériques et expérimentaux dans le cas de la granularité $0,8 - 1,3 mm$ . . . . .	81
3.25	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en eau. Confrontation des résultats numériques et expérimentaux dans le cas de la granularité $0,5 - 1mm$ . . . . .	82
3.26	Simulation de la compression diamétrale d'un échantillon granulaire cylindrique composé de 8000 grains polydisperses, pour une teneur en eau massique $w = 3 \%$ . . . . .	84
3.27	Évolution de la force de compression avec le déplacement du plateau supérieur durant la compression diamétrale d'échantillons granulaires humides. . . . .	85
3.28	Évolution de la vitesse des grains (S.I.), au cours de la simulation (échantillon avec une teneur en eau $w = 1\%$ ). . . . .	86

3.29	Évolution des forces capillaires entre les grains contenus dans la section médiane (d'épaisseur 2 mm), au cours de la simulation (échantillon avec une teneur en eau $w = 1\%$ ).	87
3.30	Évolution des forces de contact entre les grains contenus dans la section médiane (d'épaisseur 2 mm), au cours de la simulation (échantillon avec une teneur en eau $w = 1\%$ ).	88
4.1	Évolution de la tension superficielle de l'eau pure en fonction de la température.	92
4.2	Évolution du coefficient de dilatation volumique de l'eau pure en fonction de la température.	92
4.3	Effet de la température sur la géométrie d'un pont liquide pour une humidité relative $HR = 100\%$ .	93
4.4	Évolution de l'angle de mouillage moyen en fonction de la température. Détermination expérimentale.	94
4.5	Évolution de la force capillaire en fonction de la température pour différentes configurations de doublets capillaires ( $R_2 = 0,65\text{ mm}$ ).	96
4.6	Évolution des écarts relatifs entre les forces capillaires avec la température; la force capillaire à $30^\circ\text{C}$ étant prise comme référence.	97
4.7	Échantillon numérique utilisé pour les essais de compression simple à différentes températures.	97
4.8	Effet de la température sur la force de compression, dans le cas de la compression simple d'échantillons de teneur en eau $w = 3\%$ .	98
4.9	Effet de la quantité de chlorure de sodium par gramme d'eau sur la tension superficielle d'une solution aqueuse [Kaufmann, 1960].	99
4.10	Effet de la variation de la tension superficielle, due à la quantité de chlorure de sodium par gramme d'eau, sur l'intensité de la force capillaire ( $R_1 = R_2 = 2\text{ mm}$ et $V = 2\text{ mm}^3$ ).	100
4.11	Essais de compression simple sur des échantillons numériques pour différentes teneurs en saumure saturée.	101
4.12	Évolution de la force à la rupture en fonction de la teneur en liquide : comparaison eau pure et saumure saturée. Étude numérique.	101
4.13	Évolution de la force à la rupture moyenne en fonction de la teneur en liquide : comparaison eau pure et saumure saturée. Étude expérimentale.	102
4.14	Effet du volume de pont liquide et de la présence de NaCl cristallisé au niveau de la ligne triple sur les grains d'un doublet capillaire.	102
4.15	Pont de NaCl cristallisé entre deux billes de verre.	103
4.16	Illustration de la cristallisation du NaCl contenu dans un pont de saumure saturée.	103
4.17	Processus de fabrication des échantillons granulaires pour les essais de compression simple : (1) remplissage du moule cylindrique avec un mélange de billes de verre et de saumure saturée, (2) compactage de l'échantillon, (3) retournement de l'ensemble moule-socle-piston, (4) retrait du socle, (5) dégagement du moule, (6) échantillon sur son support de manipulation, prêt à l'emploi.	104
4.18	Échantillon granulaire cimenté par cristallisation de NaCl. La cristallisation du chlorure de sodium s'effectue de façon préférentielle à la surface des billes de verre situées sur la surface latérale de l'échantillon.	105
4.19	Vue d'ensemble du texturomètre utilisé pour la compression des échantillons granulaires cimentés par cristallisation de NaCl.	106
4.20	Essai de compression simple sur un échantillon granulaire contenant du NaCl cristallisé.	106
4.21	Cinétiques de cristallisation. Les traits horizontaux en pointillés correspondent aux masses de chlorure de sodium totales contenues dans un échantillon pour les deux teneurs initiales en solution.	107

4.22	Cristallisation privilégiée en périphérie : (a) détachement de billes agglomérées par cristallisation de NaCl en périphérie, pendant l'essai de compression, (b) couronnes de billes agglomérées par cristallisation de NaCl en périphérie d'échantillons, observées après l'essai de compression. . . . .	107
4.23	Courbe force-déplacement obtenue avec le texturomètre pour un échantillon à une teneur initiale en saumure saturée de 3% après un temps d'évaporation de 1/4 d'heure. . . . .	108
4.24	Courbe force-déplacement obtenue avec le texturomètre pour un échantillon à une teneur initiale en saumure saturée de 3% après un temps d'évaporation de 19 heures. . . . .	109
4.25	Évolution de la force à la rupture en fonction de la masse de chlorure de sodium cristallisé. . . . .	109
B-1	Modélisation de l'interaction de contact entre deux grains par le système ressort-amortisseur couplé. . . . .	133
C-1	Description de la gestion globale de répartition de l'eau au sein du code <code>tapio-K</code> . . . . .	136
C-2	Description de la gestion de la répartition de l'eau au sein du code <code>tapio-K</code> entre deux mises à jour de la liste de voisinage. . . . .	137

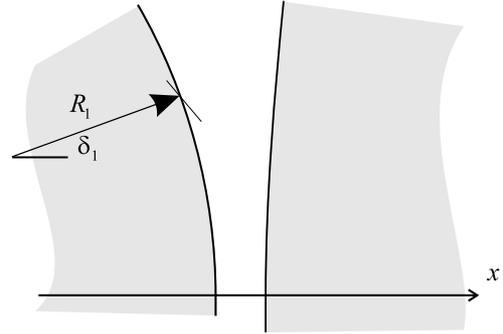


# Annexe A

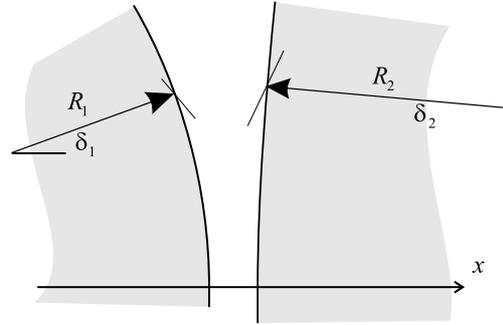
## Exemple détaillé de recherche de triplets de valeurs $(D^*, V^*, F^*)$

Cette annexe a pour objectif de détailler, à l'aide de figures d'illustration, la méthode de détermination de la configuration géométrique du doublet à partir des données de base  $R_1, R_2, \delta_1, \theta$ , de la différence de pression  $\Delta p$  et de l'équation différentielle régissant la forme du profil. La méthode de détermination de la configuration géométrique du doublet suppose que le profil est symétrique par rapport à l'axe  $x$ . Outre l'aspect illustratif de la méthode, le tracé du doublet capillaire permet une vérification du sens physique des résultats numériques obtenus ainsi qu'une vérification des hypothèses utilisées. Les graphes ont été initialement réalisés à l'échelle 1 : 1 à l'aide d'un logiciel graphique, les figures ci-dessous correspondent à des "zooms" de ces graphes afin de faciliter leur lisibilité.

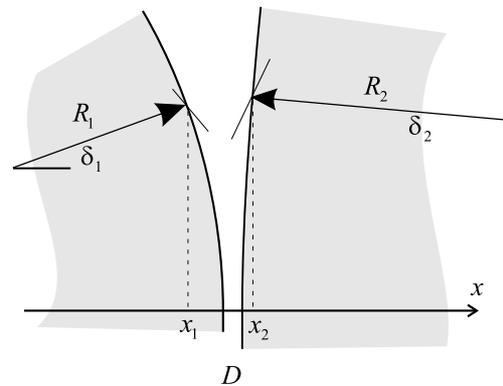
Les données utilisées pour le calcul sont les suivantes : les rayons  $R_1 = 1 \text{ mm}$  et  $R_2 = 4 \text{ mm}$ , l'angle de remplissage du premier grain  $\delta_1 = 20^\circ$  et l'angle de mouillage  $\theta = 20^\circ$ . Le rapport des rayons des grains est donc  $r = 0,25$ . La différence de pression est  $\Delta p = 1000 \text{ Pa}$ , ce qui permet de calculer le paramètre adimensionnel  $H = 55,7$ . Nous pouvons donc représenter les deux grains, l'angle  $\delta_1$ , ainsi que la tangente au point de contact du profil sur le grain 1 (angle de mouillage  $\theta = 20^\circ$ ). Par contre nous ne pouvons pas positionner les grains l'un par rapport à l'autre en ce qui concerne la distance intergranulaire : il s'agit d'une figure "flottante" en  $x$ .



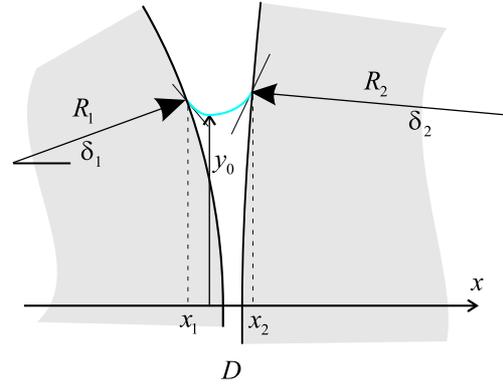
Connaissant les paramètres  $H$  et  $\delta_1$ , on peut calculer la valeur de la constante  $C$  (Eq. 2.48) et donc déterminer  $y_0^*$  (Eq. 2.54). Les résultats numériques donnent  $y_0^* = 0,08$ , ce qui correspond à une ordonnée à l'origine de  $y_0 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Mais nous ne pouvons pas encore placer  $y_0$  sur le graphe. A l'aide de la constante  $K$ , il est possible de déterminer la valeur de  $\delta_2 = 0,089157 \text{ rad} = 5,1^\circ$  : il s'agit de la valeur  $\delta_2$  annulant l'équation (Eq. 2.52). Nous pouvons ainsi positionner l'angle de remplissage du grain 2 sur le graphe ainsi que la tangente au point de contact du profil sur le grain 2 (angle de mouillage  $\theta = 20^\circ$ ). Les conditions initiales étant connues, le profil est déterminé par résolution numérique de l'équation différentielle (Eq. 2.44).



Connaissant le profil numérique, il est possible de déterminer les coordonnées des points de contact du profil sur les grains (points triples). Il s'agit de trouver les abscisses des points qui vérifient :  $y_1^* = r \sin \delta_1 = 0,0855$  et  $y_2^* = \sin \delta_2 = 0,08889$ , c'est-à-dire  $y_1 = 3,42 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  et  $y_2 = 3,5558 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Par dichotomie, nous obtenons les valeurs  $x_{c1}^* = -0,01151$  et  $x_{c2}^* = 0,01376$ , soit  $x_{c1} = -4,604 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  et  $x_{c2} = 5,504 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ . Nous pouvons donc calculer la distance intergranulaire  $D^* = 6,22 \cdot 10^{-3}$  soit  $D = 2,488 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  et positionner les grains sur la figure.



Il est également possible de positionner en abscisse l'origine du repère associé au doublet, ce qui correspond au rayon de gorge  $y_0$ . Le rayon de gorge est positionné par rapport aux centres des grains, son abscisse est nulle. Le profil du pont liquide peut alors être tracé : il relie les deux points de contact en passant par le rayon de gorge  $y_0$  (où la tangente est horizontale) et se raccorde aux grains suivant les tangentes.



### Vérification

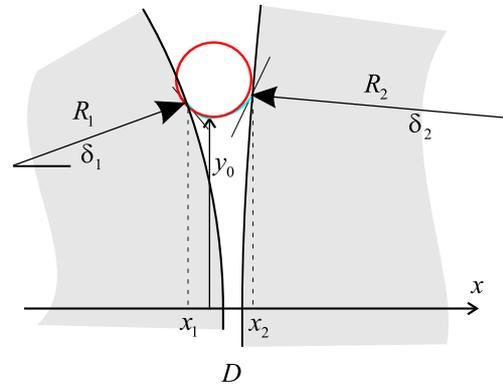
Le tracé du profil peut être utilisé pour déterminer la valeur de la différence de pression  $\Delta p$  associée et ainsi vérifier la pertinence de la méthode de calcul (vérification a posteriori). Le profil est approximé par un arc de cercle de rayon  $R_{ext} = 5,6 \cdot 10^{-5} m$ . La loi de Laplace permet de relier la courbure du pont liquide à la différence de pression  $\Delta p$  et à la tension superficielle  $\sigma$  du liquide :

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_{ext}} - \frac{1}{y_0} \right) \quad (9)$$

en considérant que la valeur de la tension superficielle est  $\sigma = 0,073 N/m$ , nous obtenons une différence de pression  $\Delta p$  :

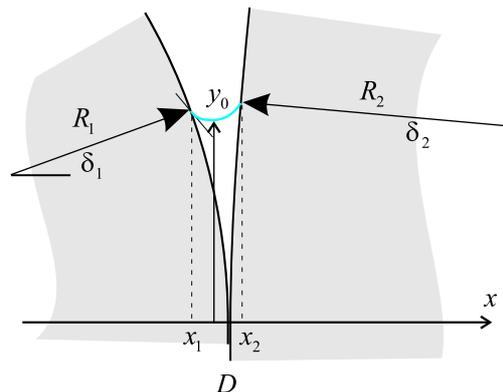
$$\Delta p = 0,073 \left( \frac{1}{5,6 \cdot 10^{-5}} - \frac{1}{3,2 \cdot 10^{-4}} \right) = 1075,4 Pa \quad (10)$$

ce qui est cohérent avec la valeur  $\Delta p$  utilisée pour la détermination du profil.



### Profil "limite"

Il est également possible de tracer le profil "limite" du pont liquide (avant interpénétration des grains). Cette limite est atteinte pour  $H = 77,5$  ce qui correspond à une différence de pression  $\Delta p = 1414,3 Pa$ . Les valeurs géométriques correspondantes sont :  $y_0^* = 0,0814$ ,  $\delta_2 = 0,08824 rad = 5,05^\circ$ ,  $x_{c1}^* = -0,00868$  et  $x_{c2}^* = 0,01035$ . La distance intergranulaire vaut  $D^* = 6,242 \cdot 10^{-5}$ , soit une distance intergranulaire quasi-nulle.





# Annexe B

## Choc frontal entre deux grains

Le cas du choc frontal entre deux grains est envisagé ici dans le cas le plus simple où l'interaction de contact entre les grains est représentée par un modèle à ressort de raideur  $K_n$  (pour rendre compte de la restitution de la force élastique), couplé à un amortisseur linéaire d'amortissement  $\nu$ . Cette modélisation élémentaire ne permet pas de rendre compte de la subtilité des interactions de contact et, en particulier, des déformations plastiques qui accompagnent l'interpénétration. Néanmoins, cette modélisation présente l'avantage de donner un sens physique aux paramètres numériques utilisés.

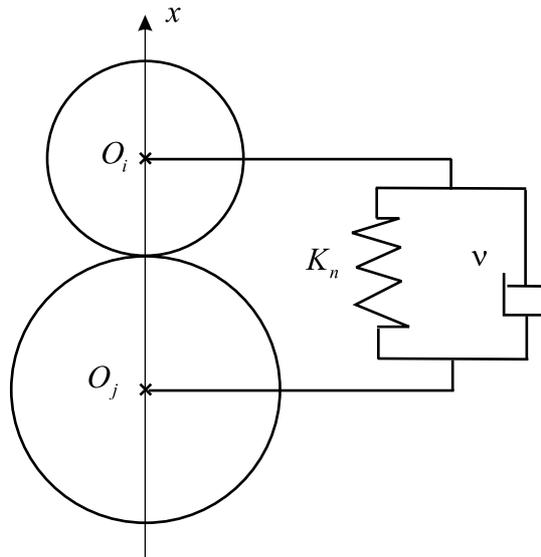


FIG. B-1 – Modélisation de l'interaction de contact entre deux grains par le système ressort-amortisseur couplé.

Les deux grains  $i$  et  $j$  entrent en collision frontale suivant l'axe  $x$  passant par le centre des grains (Fig. B-1).

La distance intergranulaire  $D$  est telle que :

$$D = x_i - x_j - (R_i + R_j) \quad (11)$$

où  $x_i$  et  $x_j$  correspondent à la position des centres des grains  $i$  et  $j$ , et  $R_i$  et  $R_j$  à leurs rayons respectifs. La dérivée première de la distance intergranulaire par rapport au temps est notée  $\dot{D}$  et la dérivée seconde  $\ddot{D}$ .

Considérons le cas du contact entre les grains ( $D \leq 0$ ). En isolant le grain  $i$ , le Principe Fondamental de la Dynamique en projection sur l'axe  $x$  donne :

$$m_i \ddot{x}_i = -K_n D - \nu \dot{D} \quad (12)$$

en considérant comme position de référence pour le système couplé ressort-amortisseur le cas  $D = 0$ , ce qui correspond au contact entre les grains sans interpénétration. Pour le grain  $j$  :

$$m_j \ddot{x}_j = K_n D + \nu \dot{D} \quad (13)$$

Comme  $\ddot{D} = \ddot{x}_i - \ddot{x}_j$ , on obtient :

$$\ddot{D} = \frac{-K_n D - \nu \dot{D}}{m_i} - \frac{K_n D + \nu \dot{D}}{m_j} \quad (14)$$

soit encore :

$$\ddot{D} = -\frac{m_i + m_j}{m_i m_j} (K_n D + \nu \dot{D}) \quad (15)$$

en notant  $m = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$  la masse réduite, on obtient finalement :

$$m \ddot{D} + \nu \dot{D} + K_n D = 0 \quad (16)$$

ce qui correspond à l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\ddot{D} + 2\alpha\omega_0 \dot{D} + \omega_0^2 D = 0 \quad (17)$$

La pulsation propre de cet oscillateur est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_n}{m}} \quad (18)$$

et le taux d'amortissement est :

$$\alpha = \frac{\nu}{2\sqrt{K_n m}} \quad (19)$$

Si  $\alpha \geq 1$ , l'oscillateur est amorti : cela correspond à un choc amorti, c'est-à-dire que les grains restent en contact et ne rebondissent pas, le contact est "permanent". Le cas  $\alpha = 1$  correspond au régime critique ; dans ce cas, l'amortissement prend une valeur appelée amortissement critique :

$$\nu_{critique} = 2\sqrt{K_n m} \quad (20)$$

Cette valeur d'amortissement critique correspond à une interpénétration minimale des grains.

Lorsque  $0 \leq \nu < \nu_{critique}$ , l'oscillateur a un comportement sous-amorti de type sinusoïdal (pour  $\nu = 0$ ) ou sinusoïdal amorti (pour  $\nu > 0$ ) ; le contact entre les grains n'est pas permanent mais de durée limitée. La pseudo-période de cet oscillateur est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K_n}{m} - \left(\frac{\nu}{m}\right)^2}} \quad (21)$$

Le temps de contact entre les deux grains correspond donc à une demi-période  $T/2$ . Ce temps de contact est d'autant plus court que l'amortissement  $\nu$  est faible. L'interpénétration entre les grains, quant à elle, augmente lorsque  $\nu$  diminue. Le choix de l'amortissement  $\nu$  résulte donc d'un compromis entre durée du contact entre les grains et interpénétration.

Dans tous les cas, pour prendre en compte les interactions de contact entre grains, le pas de temps  $\Delta t$  utilisé pour les simulations numériques doit être suffisamment faible par rapport à ce temps de contact. Il existe donc un pas de temps critique qui est :

$$\Delta t_{critique} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{K_n}{m} - \left(\frac{\nu}{m}\right)^2}} \quad (22)$$

Par précaution, le pas de temps critique est considéré dans le cas le plus défavorable, en considérant qu'il n'y a pas d'amortissement :

$$\Delta t_{critique} = \pi \sqrt{\frac{m}{K_n}} \quad (23)$$

# Annexe C

## Gestion de la répartition de l'eau au sein du matériau granulaire

En plus du critère de distribution de l'eau, la prise en compte de la capillarité dans le code nécessite un suivi de l'état des interactions. Chaque interaction possède un "statut" qui constitue une mémoire numérique de son état, à savoir présence ou absence de pont liquide entre les grains.

Une première étape du calcul numérique consiste à initialiser les statuts, c'est-à-dire à définir la présence ou l'absence de pont liquide entre les grains (Fig. C-1).

Pour cela, une distance initiale de création de pont liquide  $D_{création(0)}$ , identique pour toutes les paires de grains, est définie :

$$D_{création(0)} = k_{création} \left( \frac{V_{liquide}}{Z_0} \right)^{1/3} \quad (24)$$

où  $V_{liquide}$  correspond au volume d'eau macroscopique introduit dans l'échantillon et  $Z_0$  le nombre total d'antagonistes contenus dans la liste de voisinage à l'instant initial, c'est-à-dire le nombre de paires de grains susceptibles d'interagir.

Une fois les statuts des interactions définis, chaque interaction de type pont liquide se voit attribuer un volume de liquide à l'aide du critère (3.22). Le calcul de ces volumes locaux est effectué à chaque actualisation de la liste de voisinage.

Entre deux réactualisations de la liste de voisinage, des ponts liquides peuvent disparaître ou au contraire se former ; les statuts sont modifiés au cours des calculs (Fig. C-2). Lorsqu'un pont liquide est formé entre deux actualisations de la liste de voisinage, un volume de pont liquide moyen  $V_{moyen}$  est utilisé pour le calcul de la force capillaire. Ce volume moyen est calculé au cours de l'actualisation de la liste de voisinage :

$$V_{moyen} = \frac{V_{liquide}}{Z_{ponts}} \quad (25)$$

où  $Z_{ponts}$  est le nombre de ponts liquides au moment de l'actualisation de la liste de voisinage.

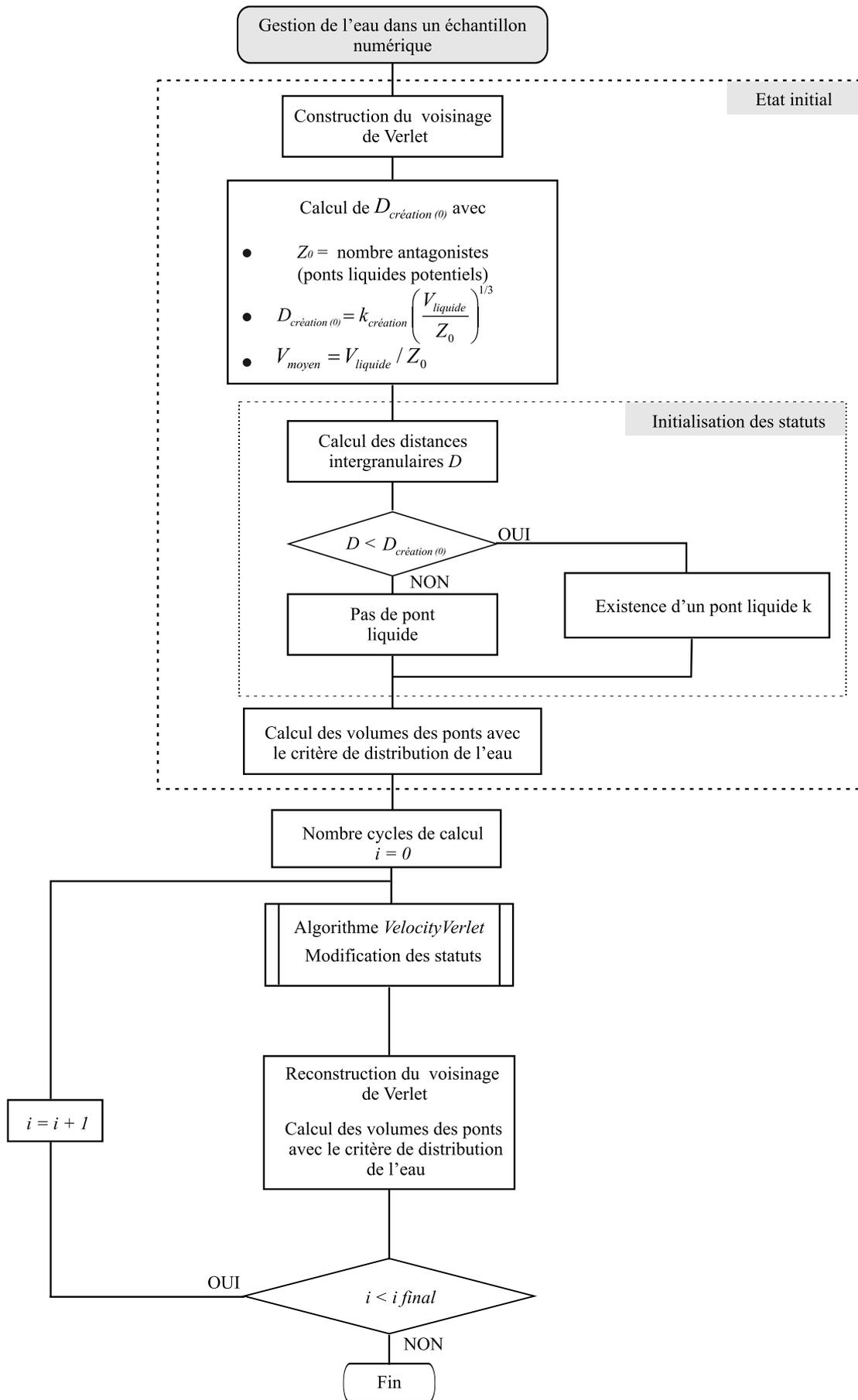


FIG. C-1 – Description de la gestion globale de répartition de l'eau au sein du code `tapiο-K`.

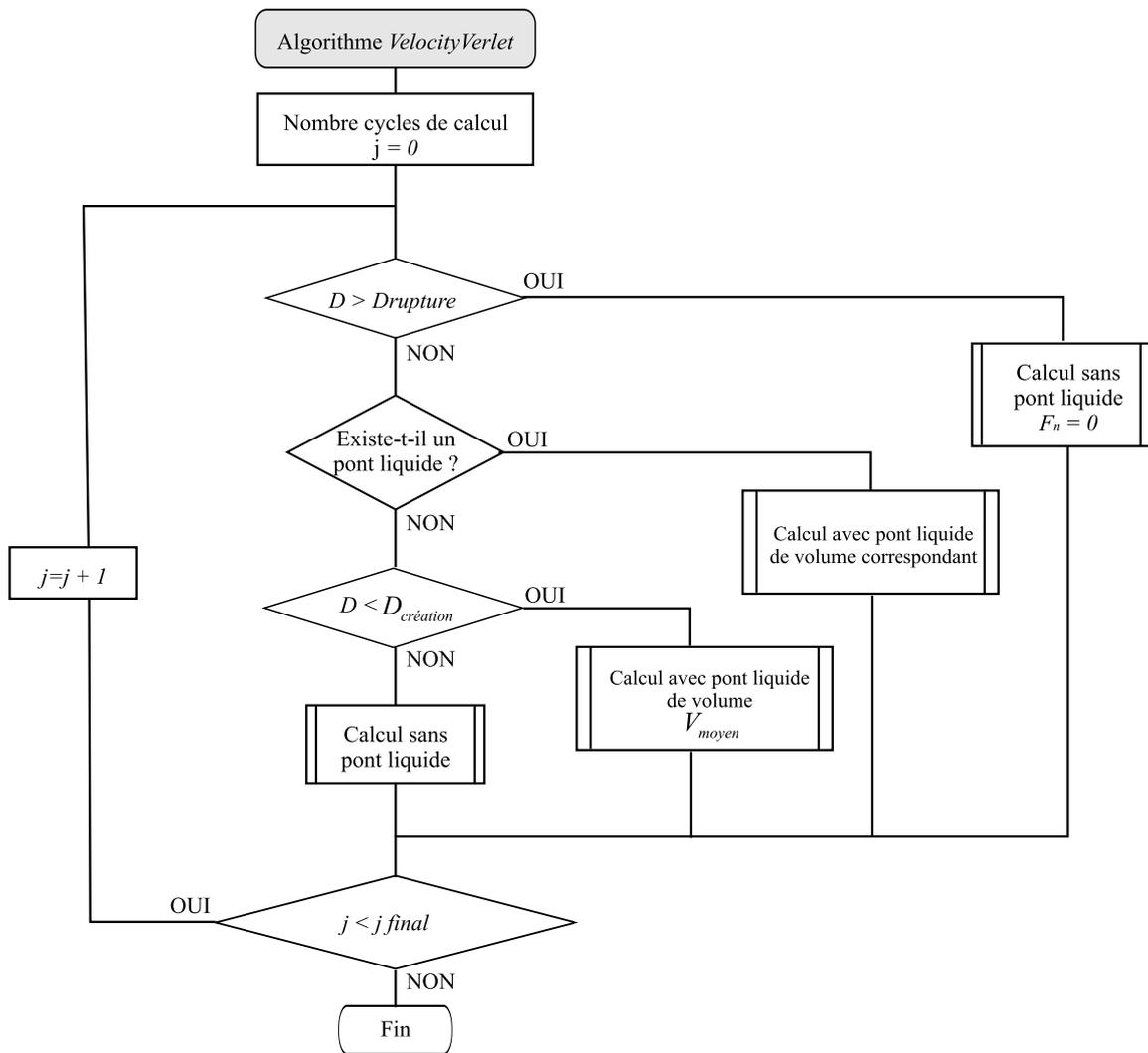


FIG. C-2 – Description de la gestion de la répartition de l'eau au sein du code `tapio-K` entre deux mises à jour de la liste de voisinage.



---

## RESUME

La capillarité dans un milieu granulaire est étudiée aux échelles locale et macroscopique dans le cas 3D polydisperse. A l'échelle locale, un modèle explicite de cohésion par capillarité est proposé. Il comprend une loi de comportement et un critère de rupture locaux fonctions des caractéristiques du doublet. La pertinence du modèle est vérifiée expérimentalement sur des billes de verre. Il est implémenté dans un code de calcul en éléments discrets, en association avec une gestion numérique de la répartition de l'eau dans le milieu. Des essais de compression sont réalisés numériquement et expérimentalement. Leur concordance a permis de valider l'approche en éléments discrets dans le cas de la capillarité, et d'envisager l'étude du comportement macroscopique des matériaux granulaires humides. Enfin, l'influence de certains couplages est abordée afin de montrer la sensibilité de la cohésion par capillarité aux conditions environnementales ainsi que les possibilités offertes par le code.

---

## TITLE

**Capillary cohesion and mechanical behaviour of granular materials**

---

## ABSTRACT

The capillarity is studied in 3D polydisperse granular materials at the local and macroscopic scales. At the local scale, an explicit model of capillary cohesion is proposed. It includes a local behaviour law and a rupture criterion that depend on the characteristics of the grain pair. The model is validated by experiments on reference grain pairs. This model, intentionally simple, is implemented in a numerical code based on a 3D distinct-element algorithm, together with a numerical method for the distribution of water. Successful comparisons between numerical and experimental macroscopic tests approve the approach allowing thus to study the macroscopic behaviour of wet granular materials. Finally, the influence of some couplings is also accounted for in order to show the sensitivity of the capillary cohesion to environmental conditions and to illustrate the potential applications of the code.

---

## DISCIPLINE

Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil

---

## MOTS-CLES

Capillarité, cohésion, pont liquide, éléments discrets, milieux granulaires, approche expérimentale, approche numérique, comportement mécanique

---

## INTITULE ET ADRESSE DU LABORATOIRE

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil  
UMR UMII-CNRS 5508  
cc048 Place Eugène Bataillon  
34095 Montpellier Cedex 5