



**HAL**  
open science

# Sur l' $(A,B)$ -invariance de polyèdres convexes ; application à la commande sous contraintes et au problème l1

Carlos Eduardo Trabuco Dórea

► **To cite this version:**

Carlos Eduardo Trabuco Dórea. Sur l' $(A,B)$ -invariance de polyèdres convexes ; application à la commande sous contraintes et au problème l1. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1997. Français. NNT: . tel-00010088

**HAL Id: tel-00010088**

**<https://theses.hal.science/tel-00010088>**

Submitted on 9 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2757 - Année 1997

## Thèse

préparée au

**Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS**

en vue de l'obtention du

**Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse**

**Spécialité : Automatique**

par

**Carlos Eduardo TRABUCO DÓREA**

Engenheiro Eletricista - Universidade Federal da Bahia (Brésil)

Mestre em Engenharia Elétrica - UNICAMP (Brésil)

---

# **Sur l' $(A, B)$ -Invariance de Polyèdres Convexes ; Application à la Commande sous Contraintes et au Problème $\ell^1$**

---

Soutenue le 13 octobre 1997 devant le jury:

Président	<b>J.-L.</b>	<b>CALVET</b>
Rapporteurs	<b>G.</b>	<b>BITSORIS</b>
	<b>C.</b>	<b>COMMAULT</b>
	<b>J.-P.</b>	<b>RICHARD</b>
Examineur	<b>B.E.A.</b>	<b>MILANI</b>
Directeur de thèse	<b>J.-C.</b>	<b>HENNET</b>

Cette thèse a été préparée au LAAS-CNRS  
7, Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex 4

Rapport LAAS N° 97403

## Avant-propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS (LAAS - CNRS) au sein du groupe Systèmes de Production. Je tiens à remercier M. Alain Costes, Directeur du LAAS à l'époque, de m'avoir accueilli dans ce laboratoire et d'avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à la réalisation de ce travail. Je voudrais également exprimer ma gratitude à l'égard de tout le personnel du LAAS pour le support matériel qui s'est avéré fondamental au bon déroulement de mes activités de recherche.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements au peuple brésilien qui par le biais du *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) a assuré le financement de mes quatre années d'étude en France. J'espère très sincèrement avoir la force nécessaire pour être à la hauteur de ses attentes.

C'est avec un très grand plaisir que je fais part de ma reconnaissance envers M. Jean-Claude Hennet, directeur de recherche au LAAS. Je le remercie d'abord de la confiance accordée à mon égard, en acceptant d'encadrer ce travail. Sa compétence, son esprit critique, ses remarques et son engagement ont sans aucun doute contribué de façon décisive à l'aboutissement de cette thèse. D'autre part, la gentillesse, le respect et l'amitié, dont il m'a honoré durant ces années de travail en commun, ont été d'une importance capitale sur le plan humain.

Je tiens à remercier MM. Georges Bitsoris, professeur à l'Université de Patras, Christian Commault, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, et Jean-Pierre Richard, professeur à l'École Centrale de Lille, d'avoir accepté de juger ce travail, et d'en avoir été les rapporteurs. Leurs remarques ainsi que les discussions que nous avons pu avoir ont largement contribué à la forme définitive de ce manuscrit.

Je remercie également M. Jean-Louis Calvet, professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.

Je voudrais exprimer ici toute ma reconnaissance envers M. Basílio Ernesto de Almeida Milani, professeur à l'Université de Campinas, qui m'a suivi lors de mes premiers pas dans le monde de la recherche, et qui m'a fait le très grand honneur de participer au jury de

cette thèse. Je lui fais part ici de toute mon amitié, et je le remercie vivement, car il n'est certainement pas étranger au succès de ce travail.

Je remercie également M. Pedro Luis Dias Peres, lui aussi professeur à l'Université de Campinas, de m'avoir aidé à nouer les contacts avec le LAAS en vue de la préparation de cette thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à toutes les personnes que j'ai pu rencontrer tout au long de ces quatre années à Toulouse, et qui ont contribué à rendre inoubliable mon séjour dans la Ville Rose. Un remerciement spécial est adressé à mes camarades du LAAS et, je ne pourrais surtout pas l'oublier, à la « communauté » brésilienne du LAAS et de Toulouse.

Enfin, je voudrais dire un grand merci à mes parents, Adelino et Mirtes. Painho e Mainha, muito obrigado por tudo.

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Approche par Invariance Positive de Problèmes de Commande sous Contraintes</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Domaines Positivement Invariants de Systèmes Dynamiques . . . . .	6
1.2.1 Domaines d'espaces linéaires . . . . .	6
1.2.2 Invariance positive de domaines de l'espace d'état . . . . .	7
1.2.3 Domaines positivement invariants de systèmes linéaires . . . . .	8
1.3 Invariance Positive de Polyèdres Convexes . . . . .	9
1.3.1 Relations d'invariance positive . . . . .	9
1.3.2 Fonctions de Lyapunov polyédriques . . . . .	12
1.3.3 Le domaine positivement invariant suprémal . . . . .	12
1.3.4 Systèmes soumis à des perturbations additives . . . . .	13
1.4 Commande par Retour d'État Linéaire de Systèmes Linéaires Contraints .	14
1.4.1 Systèmes soumis à des contraintes sur la commande . . . . .	16
1.5 Approche par Invariance Positive de Problèmes de Commande Robuste sous Contraintes . . . . .	18
1.5.1 Incertitudes non structurées . . . . .	18
1.5.2 Incertitudes structurées . . . . .	21
1.6 Conclusion . . . . .	25
<b>2 Sur <math>P(A, B)</math>-Invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Discret</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Caractérisation de $P(A, B)$ -invariance . . . . .	29
2.2.1 $(A, B)$ -invariance de polyèdres - cas général . . . . .	30
2.2.2 $(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques . . . . .	31
2.2.3 Domaines $(A, B)$ - $\lambda$ -contractifs . . . . .	35

2.3	Le Domaine $(A, B)$ -invariant Suprémal . . . . .	36
2.4	Calcul d'Une Loi de Commande . . . . .	42
2.4.1	Cas général . . . . .	42
2.4.2	Cas symétrique . . . . .	44
2.4.3	Existence d'une loi de commande linéaire . . . . .	45
2.5	Systèmes Soumis à des Contraintes sur la Commande . . . . .	48
2.5.1	$\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariance de polyèdres - cas général . . . . .	49
2.5.2	$\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques . . . . .	50
2.5.3	Le domaine $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant suprémal . . . . .	51
2.6	Conclusion . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Sur l'<math>(A, B)</math>-Invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Continu</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Caractérisation de l' $(A, B)$ -invariance . . . . .	56
3.2.1	$(A, B)$ -invariance de polyèdres - cas général . . . . .	57
3.2.2	$(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques . . . . .	60
3.2.3	$(A, B)$ -invariance avec taux de convergence exponentiel . . . . .	62
3.3	Approximation du Domaine $(A, B)$ -invariant Suprémal . . . . .	64
3.4	Calcul d'Une Loi de Commande . . . . .	68
3.4.1	Existence d'une loi de commande linéaire . . . . .	69
3.5	Systèmes Soumis à des Contraintes sur la Commande . . . . .	73
3.6	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Atténuation de Perturbations Persistantes - Le Problème <math>\ell^1</math></b>	<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Présentation du Problème $\ell^1$ . . . . .	81
4.3	Systèmes Soumis à des Perturbations Additives Bornées - $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance de Polyèdres . . . . .	83
4.3.1	Polyèdres convexes généraux . . . . .	84
4.3.2	Le domaine $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant suprémal . . . . .	85
4.3.3	Polyèdres symétriques . . . . .	86
4.4	Polyèdres $(A, B)$ -invariants Intérieurement Stabilisables . . . . .	88
4.4.1	Polyèdres convexes généraux . . . . .	90
4.4.2	Polyèdres symétriques . . . . .	91
4.5	Solution du Problème $\ell^1$ . . . . .	94
4.5.1	Polyèdres $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables . . . . .	94

4.5.2	Existence de solutions au problème $\ell^1$ . . . . .	97
4.5.3	Synthèse d'une solution . . . . .	97
4.5.4	Optimisation de la norme $\ell^1$ . . . . .	100
4.6	Optimisation de la Norme $\ell^1$ pour une Classe de Systèmes . . . . .	102
4.7	Extension aux Systèmes en Temps Continu - Le problème $\mathcal{L}^1$ . . . . .	104
4.7.1	Présentation du problème $\mathcal{L}^1$ . . . . .	104
4.7.2	$\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariance de polyèdres - systèmes en temps continu	106
4.7.3	Approximation du domaine intérieurement stabilisable suprémal . .	108
4.7.4	Solution du problème $\mathcal{L}^1$ . . . . .	109
4.8	Conclusion . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Sur l'(<math>A, B</math>)-invariance de Polyèdres - Systèmes à Modèle Incertain</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	$\Delta$ - ( $A, B$ )-invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Discret . . . . .	114
5.2.1	$\Delta$ - ( $A, B$ )-invariance de polyèdres - cas général . . . . .	115
5.2.2	$\Delta$ - ( $A, B$ )-invariance de polyèdres symétriques . . . . .	117
5.2.3	Le domaine $\Delta$ - ( $A, B$ )-invariant suprémal . . . . .	118
5.3	$\Delta$ - ( $A, B$ )-invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Continu . . . . .	120
5.4	Conclusion . . . . .	126
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Cônes et Polyèdres</b>	<b>141</b>
A.1	Domaines Polyédriques . . . . .	141
A.2	Générateurs de Cônes Polyédriques . . . . .	142
A.3	Décomposition de Polyèdres . . . . .	142
A.3.1	Polyèdres généraux . . . . .	142
A.3.2	Polyèdres symétriques . . . . .	143
A.4	Le Lemme de Farkas . . . . .	143





# Notation

$\mathcal{N}$	- ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	- ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	- ensemble des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{R}^n$	- ensemble des vecteurs réels de dimension $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	- ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$ .
$\mathbf{1}$	- vecteur de composantes égales à 1.
$\{x_i\}$	- séquence de vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$
$I_n$	- matrice unité de dimension $n$ .
$A_{ij}$	- élément de la ligne $i$ et de la colonne $j$ de la matrice $A$ .
$A_i$	- $i$ -ème ligne de la matrice $A$ .
$A^T$	- matrice transposée de $A$ .
$ A $	- matrice des valeurs absolues des éléments de la matrice $A$ .
$A _{\mathcal{V}}$	- restriction de l'application $A$ au sous-espace $\mathcal{V}$ .
$\sigma(A)$	- spectre de la matrice $A$ .
$\text{rang}(A)$	- rang de la matrice $A$ .
$\ker(A)$	- noyau de la matrice $A$ .
$A \geq B$	- Les éléments $(i, j)$ des matrices $A$ et $B$ vérifient $A_{ij} \geq B_{ij}$ .
$\text{card}(\mathcal{I})$	- nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{I}$ .
$\triangleq$	- « égal par définition ».
;	- « tel que ».
$\exists$	- « il existe ».
$\forall$	- « quel que soit ».
$\in$	- « appartient à ».
$\subset$	- « contenu dans ».
$\equiv$	- « équivaut à ».



# Introduction Générale

Du fait de sa simplicité et de son applicabilité assez large, la modélisation linéaire de systèmes dynamiques a toujours été très employée dans l'analyse, mais également dans la résolution d'un grand nombre de problèmes d'Automatique. La prise en compte, dans le processus de modélisation, de contraintes d'ordre physique et d'ordre technologique est pour sa part relativement récente, bien que de telles contraintes soient présentes dans la quasi totalité des problèmes réels. Auparavant, on concevait généralement les asservissements sans prendre en compte les contraintes, et l'on espérait que le comportement réel du système reste dans les limites de linéarité. Cette approche s'est vite révélée peu satisfaisante, car elle entraînait des pertes significatives en performance, et était même, parfois, incapable de garantir la stabilité du système.

C'est dans ce contexte que l'on a commencé à s'intéresser de plus en plus à des systèmes à modélisation linéaire soumis à des contraintes sur leurs variables d'état et sur leurs variables de commande, car de telles contraintes sont associées soit à des limitations physiques inhérentes à un processus de comportement linéaire, soit au domaine de validité de la linéarisation d'un système non linéaire. Les asservissements conçus pour de tels systèmes doivent évidemment être capables d'accomplir les spécifications de performance, tout en respectant les contraintes.

L'intégration des contraintes dans la formulation d'un problème de commande optimale semble assez naturelle, et cette approche a, en effet, produit les premières méthodes pour traiter les problèmes de commande sous contraintes. Cependant, ces techniques conduisent généralement à des lois de commande en boucle ouverte, parfois du type « bang-bang ». En outre, leur complexité rend leur mise en œuvre difficile, car elles nécessitent une grande capacité de stockage de données.

Une approche alternative est celle basée sur le concept d'*invariance positive*. L'invariance positive d'un domaine fermé de l'espace d'état, relativement à un système dynamique, implique que toutes les trajectoires issues de ce domaine y restent. Étant donné que les contraintes définissent en général un domaine dont la trajectoire du système ne doit pas s'échapper, une façon de garantir le respect de ces contraintes est de forcer les états initiaux du système à appartenir à un domaine positivement invariant inclus dans

le domaine de contraintes.

Le concept d'invariance positive est étroitement lié à celui de *fonction de Lyapunov*. Des domaines positivement invariants peuvent en effet être directement déduits d'une fonction de Lyapunov d'un système dynamique, et la forme de ces domaines dépend évidemment de la fonction de Lyapunov choisie. C'est ainsi que dans quelques travaux, dont nous pouvons citer [47], le problème du respect de contraintes a été traité à travers l'étude de domaines positivement invariants quadratiques. Ce choix a été motivé par une connaissance plus approfondie des propriétés et surtout des outils de calcul de fonctions de Lyapunov quadratiques, issus de l'étude intensive, dans les années 60 et 70, de problèmes de commande optimale Linéaire Quadratique et de stabilisation de systèmes linéaires.

Il se trouve néanmoins qu'en pratique, les limitations physiques propres au fonctionnement des systèmes dynamiques se traduisent souvent par des contraintes linéaires sur leurs variables. Les domaines quadratiques étant inappropriés au traitement de ce type de contraintes, l'intérêt pour l'étude de domaines positivement invariants polyédriques a logiquement grandi. C'est alors que quelques travaux portant sur l'invariance positive de polyèdres convexes, pour des systèmes en temps discret dans un premier temps, ont commencé à apparaître [4, 5, 9, 10]. Depuis, des progrès importants ont été faits dans ce thème de recherche, mais la force principale de la théorie des polyèdres positivement invariants demeure la caractérisation de l'invariance positive au moyen de relations matricielles linéaires.

L'application la plus simple de cette théorie à la résolution de problèmes de commande sous contraintes consiste à vérifier l'existence (et en cas d'une réponse positive, à effectuer le calcul) d'une loi de commande par retour d'état linéaire qui rende positivement invariant le polyèdre défini par les contraintes. Cette approche présente toutefois quelques limitations importantes. Premièrement, il est relativement rare qu'il existe une commande capable de rendre positivement invariant le polyèdre défini par les contraintes. Deuxièmement, l'utilisation de lois de commande par retour d'état linéaire peut restreindre les possibilités de faire respecter les contraintes. On est alors amené à considérer, d'une part, d'autres domaines que celui défini par les contraintes, et d'autre part, des lois de commande plus générales.

C'est dans ce cadre plus général que le concept d' $(A, B)$ -invariance trouve sa place. L' $(A, B)$ -invariance d'un domaine fermé de l'espace d'état, relativement à un système dynamique linéaire représenté par la paire  $(A, B)$ , implique la possibilité de forcer toutes les trajectoires issues de ce domaine à y rester. Un domaine  $(A, B)$ -invariant est donc un domaine susceptible d'être rendu positivement invariant au moyen d'une action de commande appropriée. L'utilisation de ce concept élargit nettement les possibilités de commande d'un système contraint.

La propriété d' $(A, B)$ -invariance appliquée à des polyèdres convexes avait en effet déjà

fait l'objet de quelques travaux, lesquels utilisaient la description de polyèdres compacts en termes de sommets pour obtenir une caractérisation de l' $(A, B)$ -invariance. Cette caractérisation par sommets présente néanmoins quelques inconvénients de taille, notamment l'impossibilité de traiter le cas de polyèdres non compacts, l'effort numérique important requis par le calcul des sommets, et la difficulté de caractériser l' $(A, B)$ -invariance pour des systèmes en temps continu.

Il a alors paru important de poser la question de savoir si, à partir de la description de polyèdres par un ensemble d'inégalités linéaires, il était possible, à l'instar de ce qui avait été fait pour l'invariance positive, d'obtenir une caractérisation de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes généraux, en termes de relations matricielles linéaires. C'est en grande partie à la réponse à cette question que ce mémoire est consacré.

L'ensemble des contributions de ce travail s'inscrit donc dans l'étude de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes et de son application à quelques problèmes de commande de systèmes linéaires sous contraintes. Les systèmes en temps discret et continu ont été analysés. En particulier, nous avons mené une étude approfondie du problème d'atténuation de perturbations persistantes, connu dans la littérature sous la dénomination de *problème de commande optimale*  $\ell^1$ . Des systèmes à modèle incertain ont également été analysés.

Ce mémoire est structuré en cinq chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre nous présentons des concepts et résultats de base concernant l'approche par invariance positive de problèmes de commande sous contraintes. Une attention plus particulière est portée à ceux qui seront utilisés par la suite. Nous nous attardons davantage sur l'étude de l'invariance positive de polyèdres symétriques non bornés. En particulier, nous obtenons des conditions structurelles nécessaires et suffisantes pour que de tels polyèdres soient positivement invariants relativement à des systèmes dont le modèle est incertain.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes pour des systèmes en temps discret. Une caractérisation en termes de conditions nécessaires et suffisantes, sous la forme de relations matricielles linéaires, est initialement proposée. L'existence d'un domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre donné est alors caractérisée et une méthode numérique est proposée pour le calculer. Une attention spéciale est portée au cas de polyèdres symétriques par rapport à l'origine. Nous montrons en particulier que le calcul du domaine suprémal peut être fait de façon décomposée. Ensuite nous nous intéressons au calcul d'une loi de commande qui rende positivement invariant un polyèdre  $(A, B)$ -invariant. Nous étendons au cas général une loi linéaire par morceaux proposée dans la littérature pour des polyèdres compacts, et nous montrons qu'une loi plus simple peut être obtenue à condition que des relations légèrement plus fortes que les relations d' $(A, B)$ -invariance soient satisfaites. Enfin, nous

étendons l'étude à des systèmes soumis à des contraintes linéaires sur le vecteur de commande.

L'étude menée pour le cas discret dans le deuxième chapitre est étendue dans le troisième chapitre aux systèmes en temps continu. En raison du caractère continu des trajectoires, ce type de système présente quelques difficultés supplémentaires qui nous ont amenés à avoir recours à des résultats d'analyse différentielle pour obtenir les relations d' $(A, B)$ -invariance. Une autre différence par rapport au cas discret est l'impossibilité, dans la plupart des cas, de calculer avec exactitude le domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre donné (car ce domaine n'est pas polyédrique en général). Nous nous servons dans ce cas d'un système approché en temps discret, proposé dans la littérature, pour montrer comment une approximation polyédrique du domaine réel peut être obtenue.

À la lumière des résultats d' $(A, B)$ -invariance obtenus précédemment, une approche géométrique est proposée dans le quatrième chapitre pour la résolution du problème d'atténuation de perturbations persistantes, dans un premier temps pour le cas discret (*problème  $\ell^1$* ). L'étude de l' $(A, B)$ -invariance de polyèdres est initialement étendue à des systèmes soumis à des perturbations additives bornées. Nous proposons ensuite d'étudier le problème de respect de contraintes avec stabilisation simultanée des trajectoires du système à travers le concept de domaines *intérieurement stabilisables*. L'existence d'un domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans un polyèdre donné est montrée et une méthode numérique est proposée pour le calculer. Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions au problème  $\ell^1$  sont alors présentées, et une méthode numérique est proposée pour le calcul d'une loi de commande associée. Une classe de systèmes pour lesquels la solution au problème peut être obtenue de façon directe est étudiée. Le cas continu est finalement étudié (*problème  $\mathcal{L}^1$* ). Sa spécificité principale est l'impossibilité de calculer précisément les domaines intérieurement stabilisables suprémaux, et, par conséquent, la solution au problème d'atténuation de perturbations. Une solution approchée peut néanmoins être obtenue dans ce cas.

Pour terminer, nous étudions dans le cinquième chapitre la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres par rapport à des systèmes dont le modèle est soumis à des incertitudes du type structuré.

En outre, à la fin du mémoire, une annexe présente quelques concepts et résultats concernant les polyèdres convexes, utiles pour la compréhension de la théorie développée tout au long du mémoire.

# Chapitre 1

## Approche par Invariance Positive de Problèmes de Commande sous Contraintes

### 1.1 Introduction

En pratique, les limitations physiques rencontrées dans le fonctionnement des processus industriels se traduisent presque toujours par des contraintes du type inégalité sur les variables d'état et/ou sur les variables de commande des modèles considérés. L'avènement de nouvelles techniques pour la conception de contrôleurs pour des systèmes linéaires soumis à ce genre de contraintes a été relancé par le développement de la théorie des polyèdres positivement invariants, qui sont des domaines de l'espace d'état d'où les trajectoires du vecteur d'état ne peuvent pas s'échapper. L'idée de base derrière les techniques dérivées de cette théorie, est de déterminer une loi de commande qui impose l'invariance positive du polyèdre défini dans l'espace d'état par les contraintes. Ainsi, depuis quelques années, cette approche a été utilisée pour résoudre différents problèmes de commande de systèmes linéaires sous contraintes. Citons en particulier les travaux de thèse développés au sein du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS) [27, 80, 3, 7, 77, 23].

Que ce soit dans le cas de systèmes linéaires en temps discret ou continu, la propriété d'invariance positive d'un polyèdre convexe est caractérisée par l'existence de solutions à deux relations matricielles linéaires, appelées *relations d'invariance positive*. La satisfaction de ces deux relations implique en fait la décroissance d'une fonction scalaire non négative associée au polyèdre, au long des trajectoires du système considéré.

Dans ce chapitre nous faisons un tour d'horizon des principaux résultats concernant l'approche par invariance positive de problèmes de commande de systèmes linéaires sous contraintes. Une attention particulière est portée à ceux qui seront utilisés par la suite de ce mémoire. Les relations d'invariance positive sont ainsi présentées pour les cas discret et continu. Nous présentons ensuite quelques approches développées pour la commande de systèmes contraints, ayant les relations d'invariance positive comme base.

Une étude plus approfondie est alors menée sur la propriété d'invariance positive de polyèdres pour des systèmes dont le modèle n'est pas précisément connu. Nous obtenons en particulier des conditions structurelles pour l'existence d'une loi de commande par retour d'état linéaire rendant positivement invariant un polyèdre symétrique non borné, par rapport à un système linéaire dont le modèle est soumis à des incertitudes structurées.

## 1.2 Domaines Positivement Invariants de Systèmes Dynamiques

### 1.2.1 Domaines d'espaces linéaires

Tout d'abord, rappelons quelques concepts fondamentaux concernant les domaines d'espaces linéaires. Pour plus de détails, voir l'ouvrage [59].

Soit  $\Omega$  un domaine d'un espace linéaire normé  $\mathcal{X}$ . Un point  $p \in \Omega$  est un *point intérieur* de  $\Omega$  s'il existe un scalaire  $\epsilon > 0$  tel que tout point  $x$  vérifiant  $\|x - p\| \leq \epsilon$  appartienne également à  $\Omega$ . Le symbole  $\|\cdot\|$  représente une *norme* définie dans  $\mathcal{X}$ . La collection de tous les points intérieurs de  $\Omega$  est nommée l'*intérieur* de  $\Omega$ . Un domaine  $\Omega$  est *ouvert* s'il coïncide avec son intérieur.

Un point  $x \in \mathcal{X}$  est un *point de fermeture* d'un domaine  $\Omega$  si pour tout scalaire  $\epsilon > 0$  il existe un point  $p \in \Omega$  vérifiant  $\|x - p\| < \epsilon$ . La collection de tous les points de fermeture de  $\Omega$  est nommée la *fermeture* de  $\Omega$ . Un domaine est *fermé* s'il coïncide avec sa fermeture.

Dans ce travail nous étudierons uniquement des domaines fermés.

Un domaine  $\Omega$  est *borné* s'il existe un scalaire  $s > 0$  tel que  $\|x\| < s, \forall x \in \Omega$ .

Un domaine  $\Omega$  d'un espace normé de dimension finie est *compact* s'il est borné et fermé.



### 1.2.2 Invariance positive de domaines de l'espace d'état

Soit le système dynamique, en temps discret, invariant dans le temps, décrit par :

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (1.1)$$

où  $k \in \mathcal{N}$ , et  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur de variables d'état (ou tout simplement vecteur d'état).

L'invariance positive d'un domaine non vide fermé  $\Omega$ , relativement à (1.1), est définie ainsi [53, 57] :

**Définition 1.1** Un domaine non vide fermé  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est un *domaine positivement invariant* du système (1.1) si pour tout état initial  $x_0 \in \Omega$ , la trajectoire du vecteur de variables d'état reste dans  $\Omega$ .

Cette définition est générale et peut être exactement transposée aux systèmes en temps continu. Le domaine fermé  $\Omega$  est lui aussi général, pouvant être, par exemple, un polyèdre, un cône ou un sous-espace vectoriel. Dans ce dernier cas, pour des systèmes linéaires, l'invariance positive équivaut au concept classique d' $A$ -invariance de sous-espaces [85].

L'invariance positive de  $\Omega$  équivaut à la condition :

$$x_k \in \Omega \quad \forall k \in \mathcal{N}, \quad \forall x_0 \in \Omega.$$

Soit  $\partial\Omega$  la *frontière* de  $\Omega$  et  $\lambda\Omega$  l'ensemble de tous les vecteurs  $\lambda x$ ,  $x \in \Omega$ . Une propriété plus forte que l'invariance positive, définie uniquement pour des domaines compacts, est la suivante.

**Définition 1.2** Le domaine non vide compact  $\Omega$  est un *domaine contractif* du système (1.1) si  $\forall x_0 \in \lambda_0\partial\Omega$ , avec  $\lambda_0 \in \mathfrak{R}$ ,  $0 < \lambda_0 \leq 1$ , et pour tous les instants de temps distincts  $k_1$  et  $k_2$ , avec  $k_2 > k_1 > 0$ , il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}$  satisfaisant  $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$ , tels que :  $x_{k_1} \in \lambda_1\partial\Omega$  et  $x_{k_2} \in \lambda_2\partial\Omega$ .

L'étude de domaines positivement invariants de systèmes non linéaires a fait l'objet d'un certain nombre de travaux, parmi lesquels on peut citer [13, 63] et les travaux de l'école lilloise [69, 66, 67]. C'est néanmoins dans le cadre des systèmes linéaires que l'on peut trouver la majorité des résultats concernant l'invariance positive.

### 1.2.3 Domaines positivement invariants de systèmes linéaires

Soit le système linéaire, en temps discret, invariant dans le temps, décrit par :

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (1.2)$$

où  $k \in \mathcal{N}$  et  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

Le concept d'invariance positive est fortement lié à celui de fonctions de Lyapunov, dont nous rappelons la définition, particularisée au cas linéaire :

**Définition 1.3** Une fonction continue  $V(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  est une *fonction de Lyapunov* du système (1.2) si elle vérifie :

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$ ,
3.  $V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq 0 \forall k \in \mathcal{N}$ .

Si une telle fonction existe, alors le système (1.2) est stable. De plus, si l'on a également  $V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \forall k \in \mathcal{N}$ ,  $x_k \neq 0$ , alors le système est asymptotiquement stable.

Considérons maintenant le domaine de l'espace d'état,  $\mathcal{F}(V, \alpha)$ , associé à la fonction de Lyapunov  $V(x)$ , défini par :

$$\mathcal{F}(V, \alpha) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; V(x) \leq \alpha, \alpha > 0\}.$$

Alors, à partir de la définition de fonctions de Lyapunov, on peut voir que pour toute valeur  $\alpha > 0$ ,  $\mathcal{F}(V, \alpha)$  est un domaine positivement invariant par rapport à (1.2).

Considérons réciproquement un domaine compact de l'espace d'état,  $\Omega$ , contenant l'origine, et la *fonctionnelle de Minkowski* de  $\Omega$  définie sur chaque point de  $\mathfrak{R}^n$  par [59] :

$$\Psi(x) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \inf\{r\} ; \frac{x}{r} \in \Omega & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Supposons que  $\Omega$  soit positivement invariant. Dans ce cas, on peut voir que  $\Psi(x)$  est une fonction de Lyapunov du système (1.2), lequel est, pour sa part, stable. Si en plus  $\Omega$  est contractif, alors le système (1.2) est asymptotiquement stable. Il est important de souligner que l'hypothèse de compacité de  $\Omega$  est fondamentale pour garantir la stabilité du système. L'invariance positive d'un domaine non borné n'implique pas forcément la stabilité.

Des concepts et résultats équivalents à ceux présentés ci-dessus existent également pour les systèmes en temps continu.

## 1.3 Invariance Positive de Polyèdres Convexes

### 1.3.1 Relations d'invariance positive

Dans ce travail, nous nous intéressons à commander des systèmes soumis à des contraintes linéaires sur le vecteur de variables d'état, décrites par  $Gx \leq \rho$ , avec  $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$ . Ces contraintes définissent dans l'espace d'état le polyèdre convexe :

$$R[G, \rho] = \{x \in \mathbb{R}^n; Gx \leq \rho\}. \quad (1.3)$$

Tout au long de ce mémoire, nous nous restreindrons à l'étude de polyèdres  $R[G, \rho]$  qui contiennent l'origine, c'est-à-dire au cas :  $\rho \geq 0$ .

L'invariance positive de  $R[G, \rho]$  relativement à (1.2) peut être caractérisée comme suit :

**Proposition 1.1** [5, 10, 48] *Le polyèdre  $R[G, \rho]$  est un domaine positivement invariant du système (1.2) si et seulement s'il existe une matrice non négative  $H$  ( $H \geq 0$ ) telle que :*

$$HG = GA, \quad (1.4)$$

$$H\rho \leq \rho. \quad (1.5)$$

Tout au long de ce mémoire, on entendra par matrice non négative une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls.

Supposons à présent que la trajectoire du vecteur d'état soit soumise aux contraintes symétriques par rapport à l'origine :  $|Qx_k| \leq \mu$ , avec  $\mu \geq 0$ . Ces contraintes définissent le polyèdre convexe symétrique :

$$S(Q, \mu) = \{x; |Qx| \leq \mu\}.$$

Des relations d'invariance positive spécifiques de polyèdres symétriques  $S(Q, \mu)$  peuvent être obtenues. Elles sont décrites en particulier sous les trois formes suivantes :

**Corollaire 1.1** [9] *Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.2) si et seulement s'il existe une matrice  $H$  telle que :*

$$HQ = QA, \quad (1.6)$$

$$|H|\mu \leq \mu. \quad (1.7)$$

Supposons  $\mu = \mathbf{1}$ , où  $\mathbf{1}$  est un vecteur de même dimension que  $\mu$ , et dont tous les éléments sont égaux à 1. Sans perte de généralité, tout polyèdre symétrique contenant l'origine peut être mis sous la forme  $S(Q, \mathbf{1})$  par un ajustement approprié des normes des vecteurs lignes de  $Q$ . Le corollaire précédent peut être réécrit en utilisant la norme  $\|\cdot\|_\infty$  :

**Corollaire 1.2** [55, 68] *Le polyèdre  $S(Q, \mathbf{1})$  est positivement invariant par rapport au système (1.2) si et seulement s'il existe une matrice  $H$  telle que :*

$$HQ = QA, \quad (1.8)$$

$$\|H\|_\infty \leq 1. \quad (1.9)$$

$$\text{où } \|H\|_\infty = \max_i \left( \sum_j |H_{ij}| \right).$$

**Corollaire 1.3** [9] *Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.2) si et seulement s'il existe des matrices  $H^+, H^- \geq 0$  telles que :*

$$(H^+ - H^-)Q = QA, \quad (1.10)$$

$$(H^+ + H^-)\mu \leq \mu. \quad (1.11)$$

En fonction du problème à traiter, l'une ou l'autre de ces formulations peut être la plus appropriée.

Des conditions d'invariance positive, basées sur la représentation par sommets de polyèdres compacts, ont également été proposées dans [15].

### Systèmes en temps continu

Soit le système linéaire, en temps continu, invariant dans le temps, décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.12)$$

où  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur de variables d'état.

Un domaine positivement invariant pour ce type de système est défini de la même façon que pour le cas discret. Des conditions pour qu'un polyèdre convexe  $R[G, \rho]$  soit positivement invariant sont maintenant données par le résultat suivant :

**Proposition 1.2** [81, 11, 26] *Le polyèdre  $R[G, \rho]$  est un domaine positivement invariant du système (1.2) si et seulement s'il existe une matrice  $H$  telle que :*

$$HG = GA, \quad (1.13)$$

$$H\rho \leq 0, \quad (1.14)$$

$$H_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j. \quad (1.15)$$

Une matrice qui vérifie la condition (1.15) est appelée *matrice essentiellement non négative*.

Des relations d'invariance positive spécialisées à des polyèdres symétriques  $S(Q, \mu)$  peuvent également être obtenues dans le cas continu :

**Corollaire 1.4** [11] *Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.12) si et seulement s'il existe une matrice  $H$  telle que :*

$$HQ = QA, \quad (1.16)$$

$$\widehat{H}\mu \leq 0, \quad (1.17)$$

$$\text{où } \widehat{H}_{ij} = \begin{cases} H_{ii} & \text{si } i = j \\ |H_{ij}| & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Avec  $\mu = \mathbf{1}$ , cette proposition peut être réécrite en utilisant la norme logarithmique  $\mu_\infty(\cdot)$  :

**Corollaire 1.5** [55, 68] *Le polyèdre  $S(Q, \mathbf{1})$  est positivement invariant par rapport au système (1.12) si et seulement s'il existe une matrice  $H$  telle que :*

$$HQ = QA, \quad (1.18)$$

$$\mu_\infty(H) \leq 0, \quad (1.19)$$

$$\text{où } \mu_\infty(H) = \max_i \left( H_{ii} + \sum_{j \neq i} |H_{ij}| \right).$$

**Corollaire 1.6** [11, 40] *Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.12) si et seulement s'il existe des matrices  $H^+$ ,  $H^-$  telles que :*

$$(H^+ - H^-)Q = QA, \quad (1.20)$$

$$(H^+ + H^-)\mu \leq 0, \quad (1.21)$$

$$H_{ij}^+ \geq 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad (1.22)$$

$$H^- \geq 0. \quad (1.23)$$

Des conditions d'invariance positive, basées sur la représentation par sommets de polyèdres compacts, et sur une approximation en temps discret du système en temps continu, ont été proposées dans [15]. Dans [78], des conditions d'invariance positive ont été présentées pour un domaine formé par l'intersection de deux cônes, par rapport à des systèmes pour lesquels la matrice  $e^{At}$  a la propriété de rendre positivement invariant un cône propre.

### 1.3.2 Fonctions de Lyapunov polyédriques

On peut montrer que l'invariance positive du polyèdre  $R[G, \rho]$  est équivalente à la non croissance au long des trajectoires du système (1.2), ou (1.12), de la fonction scalaire [9, 81, 23]:

$$v(x) = \max_i \left\{ \max \left( \frac{G_i}{\rho_i} x, 0 \right) \right\}.$$

Dans le cas d'un polyèdre compact, on peut voir que cette fonction devient la fonctionnelle de Minkowski de  $R[G, \rho]$ :

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{G_i}{\rho_i} x \right\}.$$

L'invariance positive de  $R[G, \rho]$  implique, dans le cas d'un polyèdre compact, que  $\Psi(x)$  est une fonction de Lyapunov polyédrique du système (1.2), ou (1.12).

À partir de cette propriété, quelques travaux ont proposé des techniques de construction de domaines positivement invariants pour des systèmes stables. Dans [10, 11, 23, 26], des polyèdres symétriques positivement invariants, définis par  $n$  contraintes ( $n$  étant la dimension du système), sont construits pour des systèmes stables dont les valeurs propres satisfont, en outre, une condition spectrale. Dans le cas où ces conditions spectrales ne sont pas respectées, les méthodes proposées dans [52, 49, 68] (voir aussi [63]) permettent de construire des polytopes positivement invariants définis par un nombre de contraintes plus grand que  $n$ .

### 1.3.3 Le domaine positivement invariant suprémal

Étant donné un domaine de contraintes dans l'espace d'état, un problème de grand intérêt est de déterminer le domaine de toutes les conditions initiales pour lesquelles ces contraintes sont respectées. Il se trouve que ce domaine est le plus grand domaine positivement invariant (ou domaine positivement invariant suprémal) inclus dans le domaine de contraintes. Dans le cas où le domaine de contraintes d'un système en temps discret stable est un polyèdre convexe  $R[G, \rho]$ , il peut être montré que ce domaine suprémal est

donné par l'ensemble d'inégalités [42] :

$$GA^k x \leq \rho \quad \forall k \in \mathcal{N}.$$

Il a également été montré dans [42] que si le système est asymptotiquement stable, si la paire  $(G, A)$  est observable, et si  $R[G, \rho]$  est borné, alors ce domaine suprémal est défini par un nombre fini de contraintes. Dans [34] nous avons proposé une méthode numérique efficace pour le calcul de ce domaine. Cette méthode génère, à chaque pas, uniquement des contraintes qui ne sont pas redondantes.

### 1.3.4 Systèmes soumis à des perturbations additives

Soit maintenant un système linéaire, en temps discret, soumis à des perturbations additives, décrit par :

$$x_{k+1} = Ax_k + Ed_k, \quad (1.24)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $d \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur d'entrées de perturbation, que l'on suppose contraint d'évoluer dans un domaine de  $\mathbb{R}^q$  :

$$d_k \in \mathcal{D} \quad \forall k \in \mathcal{N}. \quad (1.25)$$

La définition qui suit étend le concept d'invariance positive à ce type de système.

**Définition 1.4** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit *positivement  $\mathcal{D}$ -invariant* par rapport au système (1.24), (1.25) si pour tout état initial  $x_0 \in \Omega$ , la trajectoire du vecteur de variables d'état reste dans  $\Omega$ , quelle que soit la séquence de perturbations  $\{d\}$ , avec  $d_k \in \mathcal{D} \forall k \in \mathcal{N}$ .

Supposons maintenant que le domaine de perturbations,  $\mathcal{D}$ , soit un polyèdre convexe décrit par :

$$R[D, \omega] = \{d \in \mathbb{R}^q ; Dd \leq \omega\}.$$

La  $\mathcal{D}$ -invariance positive d'un polyèdre  $R[G, \rho]$  peut être caractérisée comme suit :

**Proposition 1.3** [61] *Le polyèdre  $R[G, \rho]$  est un domaine positivement  $\mathcal{D}$ -invariant du système (1.24), (1.25), avec  $\mathcal{D} = R[D, \omega]$ , si et seulement s'il existe des matrices non négatives  $H$  et  $K$  telles que :*

$$HG = GA, \quad (1.26)$$

$$KD = GE, \quad (1.27)$$

$$H\rho + K\omega \leq \rho. \quad (1.28)$$

Un résultat équivalent pour le cas continu a été obtenu dans [62].

Des conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance positive, basées sur la représentation par sommets de polyèdres compacts, ont été proposées dans [15].

Citons enfin l'article [31], où quelques propriétés des domaines  $\mathcal{D}$ -invariants sont présentées. En particulier, une étude y est menée sur le plus grand domaine de perturbations admissible,  $\mathcal{D}^*$ . Étant donné un polyèdre de l'espace d'état,  $\mathcal{D}^*$  est le plus grand domaine de perturbations telles que ce polyèdre soit positivement  $\mathcal{D}$ -invariant.

## 1.4 Commande par Retour d'État Linéaire de Systèmes Linéaires Contraints

Soit maintenant le système commandé :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1.29)$$

avec  $x_k \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u_k \in \mathfrak{R}^m$ . Dans un premier temps nous considérerons que seul le vecteur de variables d'état est soumis à des contraintes linéaires du type :  $x_k \in R[G, \rho]$ .

Si l'on utilise une loi linéaire de commande par retour d'état statique  $u_k = Fx_k$ , l'évolution du système en boucle fermée est décrite par :

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k. \quad (1.30)$$

Le problème à étudier ici est le suivant :

**Problème de Régulation Linéaire sous Contraintes (PRLC) :** Étant donné un domaine d'états initiaux admissibles,  $\mathcal{X}_0$ , calculer une matrice  $F$  telle que pour tout état initial  $x_0 \in \mathcal{X}_0$ , la trajectoire du vecteur de variables d'état soit amenée asymptotiquement à l'origine, tout en respectant la contrainte  $x_k \in R[G, \rho]$ ,  $\forall k \in \mathcal{N}$ .

Le PRLC peut être résolu en imposant l'invariance positive en boucle fermée de  $R[G, \rho]$  et la stabilité asymptotique de (1.30). En effet, en interprétant géométriquement les relations d'invariance positive, et en prenant en compte les propriétés spectrales impliquées par ces mêmes relations, des techniques de placement de structure propre ont été proposées pour la résolution du PRLC dans [23, 25, 26].

Une autre approche possible est d'utiliser les relations d'invariance positive comme contraintes d'un problème de programmation linéaire. Nous étudions à présent cette approche dans le cas de polyèdres symétriques de systèmes en temps discret, mais elle peut



facilement être étendue au cas de polyèdres généraux, et au cas de systèmes en temps continu.

Dans le cas de polyèdres symétriques compacts,  $S(Q, \mu)$ , on peut donc résoudre le PRLC à partir de la formulation d'un problème de programmation linéaire ayant comme contraintes les conditions :

$$(H^+ - H^-)Q = Q(A + BF), \quad (1.31)$$

avec  $H^+, H^- \geq 0$ , et (1.11) (voir le corollaire 1.3). Il est en outre important pour la performance du système commandé que la vitesse de convergence de l'état vers l'équilibre soit aussi grande que possible. Une mesure de cette vitesse peut alors être utilisée comme fonction objectif à optimiser. La solution du PRLC peut être obtenue à partir du programme linéaire (PL) [82] :

$$\begin{aligned} & \min_{F, H^+, H^-} \epsilon \\ \text{sous } & (H^+ - H^-)Q = Q(A + BF), \\ & (H^+ - H^-)\mu - \epsilon\mu \leq 0, \\ & H^+, H^- \geq 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Alors, si la solution à ce PL est telle que  $\epsilon^* < 1$ , le polyèdre symétrique compact  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant et le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

En revanche, lorsque  $\text{rang}(Q) < n$ , le polyèdre  $S(Q, \mu)$  possède des directions infinies. Dans ce cas, l'invariance positive n'implique pas la stabilité en boucle fermée. D'autre part, la condition (1.31) ne peut être vérifiée ni pour toute paire  $(A, B)$  ni pour tout domaine  $S(Q, \mu)$ . Des conditions structurelles doivent aussi être satisfaites.

Considérons donc l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathfrak{R}^n}{\ker(Q)}$  et soit  $P : \mathfrak{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Les applications suivantes peuvent alors être définies [85] :

- .  $\bar{A}$ , l'application induite dans  $\bar{\mathcal{X}}$  par l'application  $A$ , donnée par  $\bar{A}P = PA$ ,
- .  $\bar{B}$ , donnée par  $\bar{B} = PB$ ,
- .  $\bar{Q}$ , donnée par  $\bar{Q}P = Q$ .
- .  $\bar{F}$ , donnée par  $\bar{F}P = F$ .

Alors, le « système quotient » suivant peut être défini dans  $\bar{\mathcal{X}}$  [85] :

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k, \quad (1.33)$$

et en boucle fermée, sous une loi de commande du type  $u_k = Fx_k$ , on a :

$$\bar{x}_{k+1} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{F})\bar{x}_k. \quad (1.34)$$

On peut également définir le polyèdre :

$$\bar{S}(\bar{Q}, \mu) = \{\bar{x}; |\bar{Q}\bar{x}| \leq \mu\}, \quad (1.35)$$

et son extension à  $\mathfrak{R}^n$  :

$$S(\bar{Q}, \mu) = \bar{S}(\bar{Q}, \mu)P. \quad (1.36)$$

Le résultat suivant peut être énoncé :

**Proposition 1.4** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.29) si et seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $(A, B)$ -invariant.*
2. *Le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.34).*

Si en outre l'on souhaite que le système en boucle fermée soit stable, alors  $\ker(Q)$  doit être  $(A, B)$ -invariant avec stabilité.

Notons au passage que puisque  $\ker(Q)$  doit être  $(A, B)$ -invariant, les applications qui représentent le système réduit (1.33) sont alors bien définies [85]. Cette observation est valable pour tous les systèmes de ce type qui seront définis tout au long du mémoire.

Une preuve constructive de la proposition précédente peut être trouvée dans [40], où sont proposées des techniques basées sur des changements de la base de représentation du système (1.29) pour aboutir à une représentation matricielle du système (1.33). Un tel changement de base permet de tester directement les conditions structurelles d'invariance positive avec stabilité à partir des matrices qui définissent le système.

### 1.4.1 Systèmes soumis à des contraintes sur la commande

Considérons à présent un système (1.29) dont le vecteur de commande est soumis aux contraintes :

$$u_k \in \mathcal{U} = \{u \in \mathfrak{R}^m; -u_m \leq u_k \leq u_M\}, \text{ avec } u_m, u_M > 0.$$

Une première difficulté posée par ces contraintes est le fait qu'elles restreignent le domaine de commandabilité du système. Autrement dit, tous les états d'un tel système

ne sont pas atteignables. Il est alors important de déterminer l'ensemble d'états atteignables. Ce problème a été traité dans l'article [58], où une technique a été proposée pour déterminer l'ensemble d'états atteignables à  $N$  pas, pour un système en temps discret.

Supposons maintenant que l'on stabilise le système au moyen d'une loi par retour d'état linéaire  $u_k = Fx_k$ . Le modèle linéaire (1.30) n'est alors valable que pour les états appartenant au domaine :

$$S(F, u_m, u_M) = \{x ; -u_m \leq Fx \leq u_M\}.$$

Il est intéressant dans ce cas de connaître le comportement du système en dehors de  $S(F, u_m, u_M)$ . Des réponses à ce genre de question peuvent être obtenues à partir de l'étude de *régulateurs saturés* (voir par exemple [77, 56, 44] et ses références). Une première question est de savoir s'il est possible de construire de tels régulateurs de manière que le système en boucle fermée soit globalement asymptotiquement stable. Cela n'est en fait possible que lorsque le système en boucle ouverte est asymptotiquement ou critiqueusement stable [77, 22].

Un autre problème intéressant est de calculer un domaine positivement invariant, qui soit aussi large que possible, par rapport à un système commandé au moyen d'un régulateur saturé, (voir par exemple [79, 44] et ses références). Un système commandé par un régulateur saturé a un comportement non linéaire en dehors de la région de linéarité, ce qui rend difficile l'étude de l'invariance positive.

Si l'on souhaite cependant que le système contraint garde un comportement linéaire, une solution est d'essayer d'imposer soit l'inclusion d'un polyèdre positivement invariant dans  $S(F, u_m, u_M)$  [82], ce qui est toujours possible si le système est stabilisable, soit l'invariance positive du polyèdre  $S(F, u_m, u_M)$  lui-même, supposé contenir l'ensemble des états initiaux admissibles. Dans ce dernier cas, par application de la proposition 1.1, une condition nécessaire est l'existence d'une matrice  $H$  telle que :

$$HF = F(A + BF).$$

À partir de l'analyse de cette équation, il a été montré que l'invariance positive de  $S(F, u_m, u_M)$  avec stabilité asymptotique de  $(A + BF)$  n'est possible que si la paire  $(A, B)$  est stabilisable et si le sous-espace engendré par les modes instables en boucle ouverte a une dimension  $r \leq m$ ,  $m$  étant la dimension du vecteur de commande [51, 14]. Dans [51] une technique est proposée pour la construction d'autres domaines positivement invariants admissibles lorsque cette condition n'est pas satisfaite. Finalement, dans [24] une méthode numérique, basée sur des changements de la base de représentation du système, permet de traiter le problème relativement à un système d'ordre réduit.

## 1.5 Approche par Invariance Positive de Problèmes de Commande Robuste sous Contraintes

Une autre difficulté qui découle des problèmes pratiques, est que souvent le modèle des systèmes n'est pas précisément connu. Le concept de robustesse est alors apparu : la robustesse est la qualité qui caractérise un système peu affecté par des incertitudes et perturbations inhérentes ou extérieures au système. Un système est robuste lorsqu'il garde ses caractéristiques et qualités (stabilité, performance, etc.) même sous l'influence de ces perturbations. Une commande robuste doit donc garantir au système toutes ces propriétés soit en prenant en compte, au niveau de la synthèse, les incertitudes, soit en garantissant des marges de stabilité et/ou de performance données. Depuis une douzaine d'années, une grande partie des travaux dans le domaine de l'Automatique ont utilisé le concept de robustesse pour l'analyse et/ou la commande des systèmes linéaires. Pour un tour d'horizon dans ce domaine, voir par exemple l'ouvrage [65].

Nous nous intéressons maintenant à des systèmes linéaires qui sont soumis à la fois à des contraintes linéaires sur l'état et/ou sur la commande et à des incertitudes sur leurs modèles. L'étude est divisée selon la nature des incertitudes : non structurées ou structurées.

### 1.5.1 Incertitudes non structurées

Soit le système linéaire en temps discret décrit par :

$$x_{k+1} = (A_0 + \Delta A)x_k + (B_0 + \Delta B)u_k \quad (1.37)$$

où  $\Delta A$  et  $\Delta B$  appartiennent respectivement aux domaines de perturbations  $\mathcal{D}_A \subset \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{D}_B \subset \mathfrak{R}^{n \times m}$ .

Dans un souci de simplifier la présentation, nous considérerons que le vecteur de variables d'état de (1.37) est soumis aux contraintes linéaires symétriques :  $|Qx_k| \leq \mathbf{1}$ , où  $Q \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  est une matrice de rang  $n$ . Ces contraintes définissent dans l'espace d'état le polyèdre symétrique compact :

$$S(Q, \mathbf{1}) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; |Qx| \leq \mathbf{1}\} \quad (1.38)$$

En général, il y a deux problèmes que l'on peut se poser :

**Problème d'analyse :** Étant donné le système (1.37) et une loi de commande par retour d'état linéaire statique  $u_k = Fx_k$ , déterminer si  $S(Q, \mathbf{1})$  est positivement invariant pour le système nominal en boucle fermée et, si c'est le cas, déterminer le niveau permis d'incertitude (dans le sens d'une norme définie *a priori*) de façon à ce que  $S(Q, \mathbf{1})$  soit positivement invariant pour tous les modèles admissibles.

Un problème classique de synthèse serait de déterminer une loi de commande par retour d'état pour laquelle  $S(Q, \mathbf{1})$  soit positivement invariant pour le système en boucle fermée pour tout  $\Delta A \in \mathcal{D}_A$  et  $\Delta B \in \mathcal{D}_B$ . Cependant, pour des systèmes où la structure des incertitudes n'est pas connue, la résolution de ce problème n'est pas évidente, ce qui explique que le problème de synthèse soit posé différemment :

**Problème de synthèse :** Déterminer une loi de commande par retour d'état linéaire pour laquelle  $S(Q, \mathbf{1})$  soit positivement invariant pour le système nominal en boucle fermée, et la robustesse vis-à-vis des perturbations  $\Delta A \in \mathcal{D}_A$  et  $\Delta B \in \mathcal{D}_B$  soit maximisée.

Ces problèmes ont déjà été objet de quelques études. Dans [50], non seulement une mesure de robustesse est maximisée, mais aussi des conditions suffisantes pour l'invariance positive robuste de  $S(Q, \mathbf{1})$  ont été établies. Dans [75], à partir d'un formalisme qui permet de considérer une classe plus riche de contraintes sur l'état, des résultats équivalents ont été trouvés pour la maximisation de la robustesse. Le problème d'analyse y a été également traité, ceci pour des incertitudes uniquement sur la matrice  $A$ . Dans [76], des contraintes sur la commande sont aussi considérées.

Nous résumons ici les résultats présentés dans [50]. À partir du corollaire 1.2, si l'on applique un retour d'état  $u_k = Fx_k$ , une condition nécessaire et suffisante pour l'invariance positive robuste de  $S(Q, \mathbf{1})$  pour le système en boucle fermée est donnée par :

$$\|H_0 + \Delta H\|_\infty \leq 1 \quad (1.39)$$

où  $H_0$  et  $\Delta H$  sont données par :

$$H_0 Q = Q(A_0 + B_0 F), \quad \Delta H Q = Q(\Delta A + \Delta B F). \quad (1.40)$$

À partir des propriétés de l'opérateur  $\|\cdot\|_\infty$ , on arrive donc à la condition suffisante :

$$\|\Delta H\|_\infty \leq 1 - \varphi \quad \text{où } \varphi = \|H_0\|_\infty. \quad (1.41)$$

Il est donc clair à partir de cette relation qu'une petite valeur de  $\varphi$  permettrait au terme de perturbation  $\Delta H$  d'atteindre des valeurs importantes, ce qui permet d'utiliser

$1 - \varphi$  comme une mesure de robustesse. Le problème de synthèse peut donc être posé ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{F, H_0} \varphi &= \|H_0\|_\infty \\ \text{sous : } H_0 Q &= Q(A_0 + B_0 F) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Si la solution à ce problème est telle que  $\varphi^* < 1$ ,  $S(Q, \mathbf{1})$  est positivement invariant pour le système nominal en boucle fermée, et la robustesse aux perturbations  $\Delta A \in \mathcal{D}_A$  et  $\Delta B \in \mathcal{D}_B$  est maximisée. Il est intéressant de remarquer la ressemblance de cet algorithme avec le PL (1.32). Cela indique que la maximisation de la vitesse de convergence de l'état vers l'équilibre pour le système nominal, implique la maximisation de la robustesse de ce système vis-à-vis des perturbations additives  $\Delta A$  et  $\Delta B$ .

La solution du problème précédent, cependant, ne garantit pas l'invariance positive de  $S(Q, \mathbf{1})$  pour toute perturbation  $\Delta A$  et  $\Delta B$ . Seules des conditions suffisantes peuvent être obtenues.

Considérons donc les matrices  $H_0$  et  $\Delta H$  (1.40), lesquelles peuvent être paramétrées sous la forme :

$$H_0 = Q(A_0 + B_0 F)Q^\#, \quad \Delta H = Q(\Delta A + \Delta B F)Q^\#,$$

où  $Q^\#$  est une matrice qui vérifie :  $Q^\# Q = I$ . Un choix possible pour  $Q^\#$  est la *pseudo-inverse* de  $Q$ , c'est-à-dire la matrice  $(Q^T Q)^{-1} Q^T$ . À partir de (1.41) et des propriétés de l'opérateur  $\|\cdot\|_\infty$ , une condition suffisante pour l'invariance positive robuste de  $S(Q, \mathbf{1})$  est donc :

$$\|Q \Delta A Q^\#\|_\infty + \|Q\|_\infty \|\Delta B\|_\infty \|F\|_\infty \|Q^\#\|_\infty \leq 1 - \varphi.$$

Si l'on impose

$$\|F\|_\infty \leq \gamma, \quad (1.43)$$

et si les incertitudes vérifient :  $\|Q \Delta A Q^\#\|_\infty \leq \delta_A$ ,  $\|\Delta B\|_\infty \leq \delta_B$ , alors la condition (1.41) est satisfaite si :

$$\delta_A < 1 - \varphi \quad (1.44)$$

$$\delta_B \leq \frac{1 - \varphi - \delta_A}{\gamma \|Q\|_\infty \|Q^\#\|_\infty} \quad (1.45)$$

Le problème à résoudre est maintenant :

$$\begin{aligned} \min_{F, H_0} \varphi &= \|H_0\|_\infty \\ \text{sous : } H_0 G &= G(A_0 + B_0 F) \\ \|F\|_\infty &\leq \gamma \end{aligned} \quad (1.46)$$

Si la solution à ce problème existe et est telle que  $\varphi^*$  satisfait (1.44), (1.45), l'invariance positive de  $S(Q, \mathbf{1})$  est garantie pour tout  $\Delta A$  et  $\Delta B$  admissibles. Sinon, la valeur de  $\gamma$  peut être diminuée jusqu'à ce que l'admissibilité du domaine de perturbations soit éventuellement atteinte.

Il faut remarquer que les conditions (1.44), (1.45) sont uniquement suffisantes et peuvent être, par conséquent, excessivement conservatrices. L'absence de solution à (1.46) est donc loin d'impliquer l'impossibilité de trouver une loi de commande robuste aux perturbations  $\Delta A$  et  $\Delta B$ . L'obtention de résultats plus forts n'est généralement possible que lorsque  $\Delta A$  et  $\Delta B$  ont une structure particulière. Cela sera le cas dans la section qui suit.

### 1.5.2 Incertitudes structurées

Seront considérés des systèmes linéaires en temps discret décrits par :

$$x_{k+1} = A(\underline{\alpha})x_k + B(\underline{\beta})u_k, \quad (1.47)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur des variables d'état,  $u \in \mathfrak{R}^m$  le vecteur des variables de commande et les éléments de  $A(\underline{\alpha})$  et  $B(\underline{\beta})$  sont des fonctions linéaires de ces paramètres, c'est-à-dire :

$$A(\underline{\alpha}) = A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p = A_0 + \Delta A(\underline{\alpha}), \quad (1.48)$$

$$B(\underline{\beta}) = B_0 + \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q = B_0 + \Delta B(\underline{\beta}), \quad (1.49)$$

où les vecteurs de paramètres incertains  $\underline{\alpha} \in \mathfrak{R}^p$  et  $\underline{\beta} \in \mathfrak{R}^q$  sont compris dans les intervalles :

$$-\underline{\alpha}_M \leq \underline{\alpha} \leq \underline{\alpha}_M, \quad (1.50)$$

$$-\underline{\beta}_M \leq \underline{\beta} \leq \underline{\beta}_M. \quad (1.51)$$

Nous considérerons les  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  et les  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  indépendants entre eux.

Les relations (1.50), (1.51) définissent des bornes supérieures et inférieures pour chacun des éléments incertains de  $A(\underline{\alpha})$  et  $B(\underline{\beta})$ , ce qui permet de définir des hypercubes  $\Delta_A$  avec  $n_A = 2^p$  sommets et  $\Delta_B$  avec  $n_B = 2^q$  sommets auxquels doivent appartenir respectivement toutes les matrices incertaines  $A$  et  $B$ . Soit donc  $A^i$  la valeur de  $A(\underline{\alpha})$  au sommet  $i$  et  $B^j$  la valeur de  $B(\underline{\beta})$  au sommet  $j$ . Toutes les matrices  $A \in \Delta_A$  et  $B \in \Delta_B$  peuvent donc être écrites comme une combinaison linéaire convexe des matrices  $A^i$  et  $B^j$  respectivement :

$$\Delta_A \triangleq \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} ; A = \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i A^i, \quad \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0 \right\}, \quad (1.52)$$

$$\Delta_B \triangleq \left\{ B \in \mathfrak{R}^{n \times m} ; B = \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j B^j, \quad \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0 \right\}. \quad (1.53)$$

On considère maintenant que le vecteur des variables d'état du système (1.47) est soumis aux contraintes linéaires symétriques:  $|Qx| \leq \mu$ , lesquelles définissent le polyèdre symétrique compact :

$$S(Q, \mu) = \{x ; |Qx| \leq \mu\}.$$

Le problème que l'on se pose est de trouver une loi de commande par retour linéaire d'état  $u_k = Fx_k$  pour laquelle le polyèdre  $S(Q, \mu)$  soit positivement invariant pour le système en boucle fermée

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k, \quad (1.54)$$

$$\forall A \in \Delta_A, B \in \Delta_B.$$

Ce problème, avec aussi des incertitudes sur la commande, a été étudié dans [16]. La méthode qui y est proposée consiste à résoudre des inégalités linéaires dont le nombre est déterminé par la combinaison de tous les sommets de  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$  et  $S(Q, \mu)$ , ce qui la rend coûteuse du point de vue numérique. En outre, la synthèse d'une solution pour des systèmes en temps continu nécessite soit le calcul de cônes tangents, soit l'approximation du système en temps continu par un autre en temps discret, ce qui complique énormément la résolution du problème.

Dans [12], pour des systèmes en temps discret avec des incertitudes du type « interval matrices » sur la matrice  $A$  seulement, et avec aussi des contraintes sur la commande, un algorithme, qui exige également un effort de calcul très important, a été proposé.

Une amélioration des résultats de [12, 16] a été proposée dans [60] où ont été établies des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions au PRLC pour des systèmes incertains décrits par (1.47)-(1.53). Si l'on ne considère que des contraintes sur l'état, le résultat suivant peut être énoncé :

**Proposition 1.5** [60] *Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.54) si et seulement s'il existe des matrices  $F$  et  $H^{ij}$  telles que,  $\forall i = 1, \dots, n_A$ ,  $j = 1, \dots, n_B$ ,*

$$H^{ij}Q = Q(A^i + B^jF), \quad (1.55)$$

$$|H^{ij}| \mu \leq \mu. \quad (1.56)$$

Si le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  n'est pas compact ( $\text{rang}(Q) < n$ ), les conditions (1.55) ne peuvent être vérifiées ni pour tout système (1.47)-(1.51) ni pour tout polyèdre  $S(Q, \mu)$ . Des conditions structurelles doivent également être satisfaites.

Pour que  $S(Q, \mu)$  soit positivement invariant en boucle fermée, il faut qu'il vérifie la condition (1.31) pour le système incertain, c'est-à-dire, il faut qu'il existe un ensemble de



matrices  $H(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  vérifiant

$$H(\underline{\alpha}, \underline{\beta})Q = Q(A(\underline{\alpha}) + B(\underline{\beta})F) \quad (1.57)$$

pour tous les  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  admissibles.

Puisque l'on suppose que les paramètres  $\underline{\alpha}$ ,  $\underline{\beta}$  sont indépendants, à partir de (1.48), (1.49), la condition (1.57) peut être réécrite ainsi :

$$(H_0 + \Delta H(\underline{\alpha}) + \Delta H(\underline{\beta}))Q = Q(A_0 + \Delta A(\underline{\alpha}) + (B_0 + \Delta B(\underline{\beta}))F) \quad (1.58)$$

En raison, à nouveau, de l'indépendance entre  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$ , les trois conditions suivantes doivent donc être satisfaites à la fois :

$$H_0Q = Q(A_0 + B_0F) \quad (1.59)$$

$$\Delta H(\underline{\alpha})Q = Q\Delta A(\underline{\alpha}) \quad (1.60)$$

$$\Delta M(\underline{\beta})G = G\Delta B(\underline{\beta})F \quad (1.61)$$

On peut démontrer [2, 25] que ces conditions sont équivalentes à :

- a)  $\ker(Q)$  est un sous-espace  $(A_0 + B_0F)$ -invariant.
- b)  $\ker(Q)$  est un sous-espace  $\Delta A(\underline{\alpha})$ -invariant pour tout  $\underline{\alpha}$  admissible.
- c) Il existe une matrice  $F$  vérifiant (1.59) telle que  $\ker(Q)$  soit un sous-espace  $\Delta B(\underline{\beta})F$ -invariant pour tout  $\underline{\beta}$  admissible.

Puisque les deux dernières conditions doivent être satisfaites respectivement pour tous les  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  admissibles, on peut les réécrire autrement :

- b.1)**  $\ker(Q)$  est un sous-espace  $A_i$ -invariant pour  $i = 1, \dots, p$ .
- c.1)** Il existe une matrice  $F$  vérifiant (1.59) telle que  $\ker(Q)$  soit un sous-espace  $B_jF$ -invariant pour  $j = 1, \dots, q$ .

La condition (b.1) ne dépend que de  $Q$ , matrice qui définit les contraintes, et des  $A_i$ , matrices qui définissent la structure des incertitudes. Dans le cas où elle est vérifiée, la matrice de retour d'état  $F$  doit donc être choisie de façon à vérifier les conditions (a) et (c.1). Les conditions d'existence d'une telle matrice ont été établies dans [8]. Soit

$$B_j^{-1} \ker(Q) \hat{=} \{v \in \mathfrak{R}^m ; B_j v \in \ker(Q)\}, \quad j = 1, \dots, q \quad (1.62)$$

$$\mathcal{R} \triangleq \bigcap_{j=1}^q B_j^{-1} \ker(Q) \quad (1.63)$$

où  $B_j^{-1}$  représente l'image inverse de l'application  $B_j$ . Soit encore  $P_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  la projection de  $\mathbb{R}^m$  sur  $\mathcal{R}$ .

**Proposition 1.6** [8] *Il existe une matrice  $F$  telle que  $\ker(Q)$  soit  $(A_0 + B_0 F)$ -invariant et  $B_j F$ -invariant,  $j = 1, \dots, q$ , si et seulement si  $\ker(Q)$  est un sous-espace  $(A_0, B_0 P_{\mathcal{R}})$ -invariant.*

Les conditions algébriques d'existence d'un retour d'état vérifiant (1.57) peuvent donc être établies :

**Corollaire 1.7** *Il existe des matrices  $F$  et  $H(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  telles que  $H(\underline{\alpha}, \underline{\beta})Q = Q(A(\underline{\alpha}) + B(\underline{\beta})F)$  pour tous les  $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$  admissibles si et seulement si*

$$A_0 \ker(Q) \subset \text{Im}(B_0 P_{\mathcal{R}}) + \ker(Q)$$

$$A_i \ker(Q) \subset \ker(Q), \quad i = 1, \dots, p$$

Considérons à présent l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(Q)}$  et soit  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Les applications suivantes peuvent alors être définies :

- .  $\bar{A}_i, i = 1, \dots, p$ , les applications induites dans  $\bar{\mathcal{X}}$  par les applications  $A_i$ , données par  $\bar{A}_i P = P A_i$ ,
- .  $\bar{B}_j, j = 1, \dots, q$ , données par  $\bar{B}_j = P B_j$ ,
- .  $\bar{Q}$ , donnée par  $\bar{Q} P = Q$ .
- .  $\bar{F}$ , donnée par  $\bar{F} P = F$ .

Alors, le « système quotient » suivant peut être défini dans  $\bar{\mathcal{X}}$  :

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}(\underline{\alpha}) \bar{x}_k + \bar{B}(\underline{\beta}) u_k, \quad (1.64)$$

et en boucle fermée, sous une loi de commande du type  $u_k = F x_k$  :

$$\bar{x}_{k+1} = (\bar{A}(\underline{\alpha}) + \bar{B}(\underline{\beta}) \bar{F}) \bar{x}_k. \quad (1.65)$$

Soit aussi les polyèdres (1.35), (1.36). On peut établir le résultat suivant :

**Proposition 1.7** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système (1.54) si et seulement si :*

1. *Les conditions du corollaire 1.7 sont vérifiées.*
2. *Le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est positivement invariant par rapport au système incertain (1.65).*

Une preuve constructive de cette proposition peut être trouvée dans [33], où sont proposées, pour des systèmes en temps continu, des techniques basées sur des changements de la base de représentation du système (1.47) pour aboutir à une représentation matricielle du système (1.64). Un tel changement de base permet de tester directement les conditions structurelles d'invariance positive robuste avec stabilité robuste à partir des matrices qui définissent le système.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tracé un panorama général des travaux portant sur l'invariance positive de polyèdres convexes et son application à la commande de systèmes linéaires sous contraintes, réalisés ces dernières années. Nous avons pu constater que la plupart des techniques dérivées de cette approche sont basées sur l'utilisation des relations d'invariance positive. Cette utilisation est rendue facile par la forme linéaire de ces relations.

Notre contribution dans ce chapitre a porté sur l'étude de la possibilité de rendre positivement invariant, par un retour d'état linéaire, des polyèdres symétriques et non bornés de systèmes à modèle incertain, les incertitudes étant du type structuré. Nous avons en particulier obtenu des conditions structurelles nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel retour d'état.

Quelques conclusions importantes peuvent être tirées des résultats présentés tout au long de ce chapitre. En premier lieu, il est relativement rare qu'un polyèdre donné puisse être rendu positivement invariant. On doit dans ce cas considérer d'autres domaines que celui défini par les contraintes. Deuxièmement, le choix d'une loi de commande par retour d'état linéaire peut restreindre considérablement les possibilités de commande d'un système contraint. Une solution à cette difficulté est de considérer des lois de commande plus générales.

Ces considérations peuvent être prises en compte de façon naturelle à travers le concept d' $(A, B)$ -invariance, qui sera l'objet d'étude des deux chapitres suivants, d'abord pour le cas de systèmes en temps discret dans le chapitre 2, et ensuite pour le cas continu dans le chapitre 3.



## Chapitre 2

# Sur l' $(A, B)$ -Invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Discret

### 2.1 Introduction

Dans le cadre de l'approche géométrique pour la commande de systèmes linéaires, le concept d' $(A, B)$ -invariance de sous-espaces joue un rôle fondamental. En particulier, ce concept a été intensivement utilisé dans la solution de quelques problèmes classiques de commande, tels que rejet de perturbations et découplage entrée/sortie. Une étude détaillée de l' $(A, B)$ -invariance de sous-espaces et de ses applications peut être trouvée dans les ouvrages de Wonham [85] et Basile et Marro [2].

Le concept d' $(A, B)$ -invariance, bien que sous une dénomination différente, a également été appliqué à des polyèdres convexes pour caractériser la possibilité de commander un système en temps discret soumis à des contraintes dures de trajectoire. Les premiers travaux, dont on peut citer les articles [84, 43, 6], remontent aux années 60 et 70, et se situent à un niveau plutôt conceptuel. Pour ce qui est de résultats plus appliqués, une caractérisation sommet par sommet a été proposée dans [45] pour des polyèdres compacts. Plus précisément, il y est montré qu'un polyèdre compact est  $(A, B)$ -invariant si et seulement s'il existe pour chaque sommet une commande admissible telle que, à un pas, le vecteur d'état reste dans le polyèdre. En outre, une loi de commande à structure variable est proposée pour imposer l'invariance positive en boucle fermée. Dans [54], cette approche est utilisée pour résoudre un problème de commande en temps minimum. Finalement dans [17], les résultats de [45] ont été étendus à des systèmes à modèle incertain soumis à des perturbations bornées en norme.

Deux inconvénients majeurs peuvent cependant être décelés dans cette approche. Premièrement, elle ne s'applique qu'aux polyèdres compacts. Or, il est bien connu que, dans un nombre important de problèmes, le polyèdre engendré par des contraintes sur l'état ou sur la commande n'est pas forcément compact. Ceci est le cas, par exemple, du problème  $\ell^1$ , qui sera étudié dans le Chapitre 4. En second lieu, en fonction de la complexité du polyèdre considéré, le calcul de ses sommets, et par conséquent le test des conditions d' $(A, B)$ -invariance, peut s'avérer excessivement coûteux du point de vue numérique.

Il est vrai néanmoins que les polyèdres engendrés par des contraintes linéaires sur l'état ou la commande ne sont pas  $(A, B)$ -invariants en général. Les contraintes peuvent malgré cela être respectées si l'on restreint l'état initial à un domaine  $(A, B)$ -invariant inclus dans le domaine de contraintes. Le domaine généralement choisi, car il est celui que l'on peut le plus facilement caractériser et calculer, est le domaine suprémal, c'est-à-dire, celui qui contient tous les autres. Des algorithmes pour le calcul de ce domaine ont ainsi été proposés [46, 17]. Puisqu'il sont basés sur la caractérisation sommet par sommet de l' $(A, B)$ -invariance, ces algorithmes souffrent également de problèmes numériques importants.

La contribution principale de ce chapitre s'inscrit dans la caractérisation de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes pour des systèmes en temps discret. Au moyen de l'application du Lemme de Farkas, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre convexe général soit  $(A, B)$ -invariant sont établies sous la forme de relations matricielles linéaires. Une forme particulière de ces relations est dérivée pour le cas de polyèdres symétriques par rapport à l'origine. Les domaines  $(A, B)$ - $\lambda$ -contractifs sont alors introduits et caractérisés. Une section est alors consacrée à l'étude des domaines  $(A, B)$ -invariants suprémaux inclus dans un polyèdre donné. Ces domaines sont caractérisés théoriquement et une méthode numérique basée sur les relations d' $(A, B)$ -invariance est proposée pour les calculer. Ensuite, des lois de commande qui rendent positivement invariant en boucle fermée un polyèdre  $(A, B)$ -invariant sont étudiées. Une loi de commande linéaire par morceaux, laquelle est une extension au cas non compact de celle proposée dans [45], est dérivée pour le cas général. Il est en outre montré que l'invariance positive en boucle fermée peut être obtenue au moyen d'une loi de commande par retour d'état linéaire, à condition que deux relations matricielles linéaires particulières, légèrement plus fortes que les relations d' $(A, B)$ -invariance, soient vérifiées. Finalement, l'étude de l' $(A, B)$ -invariance est étendue à des systèmes soumis à des contraintes sur la commande. Une partie de ces résultats ont également été présentés dans les articles [34, 35].

## 2.2 Caractérisation de l'(A, B)-invariance

Soit le système linéaire, en temps discret, stationnaire, décrit par :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2.1)$$

avec  $k \in \mathcal{N}$ .  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de commande. Un domaine (A, B)-invariant est défini comme suit :

**Définition 2.1** Un domaine non vide fermé  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est dit (A, B)-invariant par rapport au système (2.1) si  $\forall x \in \Omega$  il existe un vecteur de commande  $u \in \mathfrak{R}^m$  tel que  $Ax + Bu \in \Omega$ .

On peut dire également que  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est (A, B)-invariant vis-à-vis de (2.1) si  $\forall x_0 \in \Omega$  il existe une séquence de commande  $\{u_k\}$ ,  $k \in \mathcal{N}$  telle que la trajectoire du vecteur d'état du système commandé soit entièrement incluse dans  $\Omega$ . Autrement dit, l'état  $x_k$  peut être forcé à rester dans  $\Omega$  par un choix adéquat de la commande.

Cette définition est analogue à celle de sous-espaces (A, B)-invariants [85] ou « invariants contrôlés » [2] de l'approche géométrique, mais dans un cadre plus général.

Il convient ici de faire la différence entre les concepts d'(A, B)-invariance et d'invariance positive d'un système commandé. L'(A, B)-invariance d'un domaine  $\Omega$  indique la « possibilité » de commander un système de façon à forcer sa trajectoire à rester dans  $\Omega$ , alors que concernant l'invariance positive cette action de commande a déjà été appliquée. En bref, un domaine (A, B)-invariant est un domaine susceptible d'être rendu positivement invariant par une action de commande adéquate.

Le concept suivant sera fondamental pour la caractérisation de l'(A, B)-invariance.

**Définition 2.2** Le plus grand domaine admissible à un pas du domaine  $\Omega$  est défini ainsi [17]:

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; \exists u \in \mathfrak{R}^m ; Ax + Bu \in \Omega\}. \quad (2.2)$$

On peut voir que  $\mathcal{Q}(\Omega)$  est l'ensemble de tous les états qui peuvent être ramenés vers  $\Omega$  en un pas. Il est donc clair que l'(A, B)-invariance de  $\Omega$  équivaut à la condition géométrique suivante :

**Proposition 2.1** [43, 6] *Le domaine  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est (A, B)-invariant par rapport au système (2.1) si et seulement si*

$$\Omega \subset \mathcal{Q}(\Omega). \quad (2.3)$$

### 2.2.1 $(A, B)$ -invariance de polyèdres - cas général

Nous nous restreindrons désormais à l'étude de l' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes contenant l'origine, c'est-à-dire, au cas :

$$\Omega = R[G, \rho] = \{x; Gx \leq \rho\}, \quad \rho \geq 0.$$

Pour un instant  $k$  donné, l'admissibilité du vecteur d'état à l'instant suivant est caractérisée par les contraintes :

$$GAx_k + GBu_k \leq \rho. \quad (2.4)$$

Ces contraintes définissent le polyèdre convexe  $\Pi$  dans l'espace vectoriel défini par le vecteur étendu  $\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}$ . Le plus grand domaine d'états admissibles à un pas associé à (2.4) est donc la projection de  $\Pi$  sur l'espace d'état. À partir du lemme A.2, une expression explicite de cette projection peut être obtenue :

**Proposition 2.2** *Le plus grand domaine admissible à un pas,  $\mathcal{Q}(R[G, \rho])$ , est le polyèdre convexe  $R[TGA, T\rho]$ , où les vecteurs ligne de la matrice  $T$  forment un ensemble générateur minimum du noyau non négatif à gauche de la matrice  $GB$ , défini par :*

$$\Gamma = \{w \in \mathfrak{R}^g ; w \geq 0, (GB)^T w = 0\}. \quad (2.5)$$

**Démonstration :** Immédiate, à partir du lemme A.2.  $\square$

À partir des Propositions 2.1 et 2.2, l' $(A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$  peut donc être caractérisée géométriquement par :

$$R[G, \rho] \subset R[TGA, T\rho]. \quad (2.6)$$

Cette caractérisation est traduite en relations matricielles à travers le résultat suivant :

**Proposition 2.3** *Le polyèdre convexe  $R[G, \rho] \subset \mathfrak{R}^n$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1) si et seulement s'il existe une matrice non négative  $Y$  telle que :*

$$YG = TGA, \quad (2.7)$$

$$Y\rho \leq T\rho. \quad (2.8)$$



**Démonstration :** Immédiate à partir de la condition (2.6) et du lemme A.4.  $\square$

Il convient ici d'insister sur les avantages de cette caractérisation par rapport à d'autres trouvées dans la littérature. L'avantage majeur est lié au fait que la proposition 2.3 s'applique à tout polyèdre convexe, contrairement à la caractérisation proposée dans [45, 17] qui ne s'applique qu'à des polyèdres compacts. Nous avons précédemment supposé  $\rho \geq 0$ . Cependant, la proposition 2.3 reste valable quel que soit  $\rho$ , c'est-à-dire, aussi pour des polyèdres convexes qui ne contiennent pas l'origine.

Le deuxième avantage est de nature numérique. Dans l'approche proposée dans [45, 17], pour tester  $l'(A, B)$ -invariance il faut d'abord calculer les sommets du polyèdre, ce qui constitue déjà une tâche numérique très complexe, surtout pour des systèmes de grande dimension. Ensuite il faut tester, pour chaque sommet, l'existence d'une commande admissible. En revanche, en ce qui concerne la proposition 2.3, une fois que l'on a calculé la matrice  $T$ , calcul pour lequel des méthodes efficaces (et en général moins coûteuses que celles destinées au calcul de sommets) sont disponibles (voir l'annexe), le test de  $l'(A, B)$ -invariance à travers les relations (2.7), (2.8) peut se faire au moyen de la résolution d'un simple programme linéaire.

Les deux cas suivants sont importants à signaler :

- Dans le cas où  $T$  est le vecteur ligne nul, le domaine  $R[TGA, T\rho]$  est tout l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ , la condition (2.6) est trivialement vérifiée, ainsi que les relations (2.7), (2.8), avec  $Y = 0$ . Le polyèdre convexe  $R[G, \rho]$  est alors trivialement  $(A, B)$ -invariant.
- Dans le cas d'un système non commandé ( $B = 0$ ),  $\Gamma$  est tout le cône  $\mathbb{R}_+^q$ ,  $T = I_g$ , et les relations (2.7), (2.8) deviennent les relations classiques d'invariance positive pour des systèmes autonomes (1.4), (1.5).

Il est enfin intéressant de noter à partir des relations (2.7), (2.8) que  $l'(A, B)$ -invariance du cône caractéristique  $R[G, 0]$  est une condition nécessaire pour  $l'(A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$ .

### 2.2.2 $(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques

Nous nous intéressons à présent au cas de polyèdres symétriques par rapport à l'origine, c'est-à-dire au cas :

$$\Omega = S(Q, \mu) = \{x ; |Qx| \leq \mu\}.$$

Soit la matrice  $[T_1 \ T_2]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur mi-

nimum du cône polyédrique  $\Gamma$  (2.5), avec  $G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ . Soit également la matrice  $\mathcal{T}$ , sous-matrice de la matrice  $T_1 - T_2$ , formée en supprimant les lignes  $T_{1i} - T_{2i}$  pour lesquelles ou bien  $T_{1i} - T_{2i} = 0$  ou alors  $T_{1i} - T_{2i} = -T_{1j} + T_{2j}$  pour  $j < i$ . Le résultat suivant peut donc être établi :

**Corollaire 2.1** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1) si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = \mathcal{T}QA, \quad (2.9)$$

$$|Y|\mu \leq |\mathcal{T}|\mu. \quad (2.10)$$

**Démonstration :** D'après la Proposition 2.3,  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant si et seulement s'il existe des matrices non négatives  $Y_1$  et  $Y_2$  telles que :

$$(Y_1 - Y_2)Q = (T_1 - T_2)QA, \quad (2.11)$$

$$(Y_1 + Y_2)\mu \leq (T_1 + T_2)\mu. \quad (2.12)$$

Les lignes  $i$  pour lesquelles  $T_{1i} - T_{2i} = 0$  n'ont pas besoin d'être considérées parce que dans ce cas les relations (2.11), (2.12) sont vérifiées trivialement avec  $Y_{1i} = Y_{2i} = 0$ . Le même raisonnement s'applique aux lignes  $i$  pour lesquelles  $T_{1i} - T_{2i} = -T_{1j} + T_{2j}$  pour  $j < i$ , car si pour la ligne  $j$  il existe des vecteurs ligne  $Y_{1j}$  et  $Y_{2j}$  vérifiant les relations (2.11), (2.12), alors les mêmes relations seront vérifiées pour la ligne  $i$  avec  $Y_{1i} = Y_{2j}$  et  $Y_{2i} = Y_{1j}$ .

Considérons à présent la matrice  $\mathcal{T}$  et ses lignes  $\mathcal{T}_i$ . Les affirmations suivantes sont vraies (autrement les générateurs associés à la ligne  $i$  de  $\mathcal{T}$  dans  $[T_1 \ T_2]$  n'appartiendraient pas à l'ensemble générateur minimum) :

- $\mathcal{T}_{ij} = 0$  seulement si les éléments associés dans  $T_1$  et  $T_2$  sont également nuls.
- $\mathcal{T}_{ij} > 0$  ( $< 0$ ) seulement si les éléments associés dans  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement positif (nul) et nul (positif).

En raison de ces faits, à partir des relations (2.11), (2.12), l' $(A, B)$ -invariance de  $S(Q, \mu)$  équivaut à l'existence de matrices non négatives  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  qui vérifient :

$$(\mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_2)Q = \mathcal{T}QA, \quad (2.13)$$

$$(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mu \leq |\mathcal{T}|\mu. \quad (2.14)$$

Maintenant, soit  $Y = \mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_2$  et considérons les matrices  $Y^+$  et  $Y^-$  définies par :

$$Y_{ij}^+ = \max\{Y_{ij}, 0\} \quad (2.15)$$

$$Y_{ij}^- = \max\{-Y_{ij}, 0\}. \quad (2.16)$$

La nécessité des conditions (2.9), (2.10) est déduite du fait que ces matrices sont telles que  $Y^+ - Y^- = Y = \mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_2$  et  $(Y^+ + Y^-)\mu = |Y|\mu \leq (\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mu \leq |\mathcal{T}|\mu$ . La suffisance est également démontrée puisque  $Y^+$  et  $Y^-$  vérifient les relations (2.13), (2.14).  $\square$

Remarquons que tout vecteur ligne  $t$  appartenant au noyau à gauche de l'application  $QB$  peut être mis sous la forme :  $t = t_1 - t_2$ ;  $t_1, t_2 \geq 0$ . Cela veut dire que  $[t_1 \ t_2]^T$  appartient à  $\Gamma$  (2.5), avec  $G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ . Par conséquent, la matrice  $\mathcal{T}$  contient nécessairement, comme une sous-matrice, une base de vecteurs ligne du noyau à gauche de l'application  $QB$ .

Pour un système non commandé, on a  $\mathcal{T} = I_q$ , et les relations (2.9), (2.10) deviennent les relations d'invariance positive (1.6), (1.7).

Le Corollaire 2.1 peut être spécialisé au cas de sous-espaces vectoriels :

**Corollaire 2.2** *Le sous-espace  $\ker(Q) \subset \mathfrak{R}^n$  est (A, B)-invariant si et seulement s'il existe une matrice M telle que*

$$MQ = KQA$$

*où les vecteurs ligne de K engendrent le noyau à gauche de l'application QB.*

**Démonstration:** À partir du corollaire 2.1,  $\ker(Q) = S(Q, 0)$  est (A, B)-invariant si et seulement s'il existe une matrice Y vérifiant (2.9) (la condition (2.10) étant trivialement vérifiée). Comme les vecteurs ligne de  $\mathcal{T}$  engendrent  $\ker(QB)$ , la condition (2.9) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} K \\ LK \end{bmatrix} QA,$$

où les vecteurs ligne de K sont sélectionnés en  $\mathcal{T}$  de façon à engendrer le noyau à gauche de QB. Puisque  $MQ = KQA$ , alors  $NQ = LKQA$  est vérifiée sous le choix  $N = LM$ .  $\square$

Considérons à présent l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathfrak{R}^n}{\ker(Q)}$  et soit  $P : \mathfrak{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Les applications suivantes peuvent être définies [85] :

- $\bar{A}$ , l'application induite dans  $\bar{\mathcal{X}}$  par l'application A, donnée par  $\bar{A}P = PA$ ,
- $\bar{B}$ , donnée par  $\bar{B} = PB$ ,

- $\bar{Q}$ , donnée par  $\bar{Q}P = Q$ .

Alors, le « système quotient » suivant peut être défini dans  $\bar{\mathcal{X}}$  [85] :

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k, \quad (2.17)$$

ainsi que le polyèdre :

$$\bar{S}(\bar{Q}, \mu) = \{\bar{x}; |\bar{Q}\bar{x}| \leq \mu\}, \quad (2.18)$$

et son extension à  $\mathfrak{R}^n$  :

$$S(\bar{Q}, \mu) = \bar{S}(\bar{Q}, \mu)P. \quad (2.19)$$

Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est donc décomposé sous la forme suivante (voir l'annexe) :

$$S(Q, \mu) = \ker(Q) + S(\bar{Q}, \mu). \quad (2.20)$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du corollaire 2.1 :

**Corollaire 2.3** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1) si et seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $(A, B)$ -invariant.*
2. *Le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (2.17).*

**Démonstration :** Supposons d'abord que  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant. L' $(A, B)$ -invariance de  $\ker(Q)$  découle de (2.9), du fait que les vecteurs ligne de la matrice  $T$  engendrent le noyau à gauche de l'application  $QB$ , et du corollaire 2.2. Encore à partir de (2.9), il existe une matrice  $Y$  telle que  $Y\bar{Q}P = T\bar{Q}PA = T\bar{Q}\bar{A}P$ , et donc,  $Y\bar{Q} = T\bar{Q}\bar{A}$ . Ceci, avec (2.10), montre l' $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariance de  $S(\bar{Q}, \mu)$ .

Supposons en revanche que  $\ker(Q)$  est  $(A, B)$ -invariant et que  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (2.17). Tout vecteur  $x \in S(Q, \mu)$  peut être écrit sous la forme  $x = x^Q + x^S$ , avec  $x^Q \in \ker(Q)$ ,  $x^S \in S(\bar{Q}, \mu)$ . Par hypothèse, il existe une matrice  $F^Q$  telle que  $\ker(Q)$  est  $(A + BF^Q)$ -invariant, et une séquence de commande  $\{u_k^S\}$ ,  $k \in \mathcal{N}$  telle que  $x_k^S \in \ker(Q) + S(\bar{Q}, \mu)$ . Il est donc clair que  $S(Q, \mu)$  est positivement invariant sous la loi de commande  $u_k = F^Q x^Q + u_k^S$ .  $\square$

### 2.2.3 Domaines ( $A, B$ )- $\lambda$ -contractifs

Dans le cas où l'origine est à l'intérieur d'un domaine compact, il est souvent important de doter la trajectoire du système d'un certain taux de convergence, soit pour justement accélérer la convergence vers l'état d'équilibre, soit pour incorporer les effets de perturbations et/ou d'incertitudes. D'où la définition suivante :

**Définition 2.3** Étant donné  $0 < \lambda \leq 1$ , un domaine compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit ( $A, B$ )-invariant  $\lambda$ -contractif par rapport au système (2.1) si  $\forall x \in \Omega$  il existe un vecteur de commande  $u \in \mathbb{R}^m$  tel que  $Ax + Bu \in \lambda\Omega$ .

Les domaines ( $A, B$ )-invariants  $\lambda$ -contractifs seront désormais appelés plus simplement *domaines ( $A, B$ )- $\lambda$ -contractifs* ce qui permettra de les différencier des domaines positivement invariants contractifs définis dans le chapitre 1.

Il est clair qu'un domaine ( $A, B$ )-invariant est un domaine ( $A, B$ )- $\lambda$ -contractif avec  $\lambda = 1$ .

Étant donné le taux de contraction  $\lambda$ , le plus grand domaine admissible à un pas est maintenant défini ainsi :

$$\mathcal{Q}(\lambda\Omega) = \{x ; \exists u ; Ax + Bu \in \lambda\Omega\}.$$

Dans le cas où l'origine est à l'intérieur du polyèdre convexe  $R[G, \rho]$  ( $\rho > 0$ ), la condition d'admissibilité à un pas (2.4) peut donc être remplacée par la condition d'( $A, B$ )- $\lambda$ -contractivité :

$$GAx_k + GBu_k \leq \lambda\rho.$$

Les résultats suivants en découlent :

- Étant donné le taux de contraction  $\lambda$ , le plus grand domaine admissible à un pas du polyèdre  $R[G, \rho]$  est le polyèdre convexe  $R[TGA, \lambda T\rho]$ , où la matrice  $T$  est définie comme dans la Proposition 2.3.
- Le polyèdre convexe  $R[G, \rho] \subset \mathbb{R}^n$  est ( $A, B$ )- $\lambda$ -contractif par rapport au système (2.1) si et seulement s'il existe une matrice non négative  $Y$  telle que (2.7) soit vérifiée et :

$$Y\rho \leq \lambda T\rho, \tag{2.21}$$

- Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est ( $A, B$ )- $\lambda$ -contractif par rapport au système (2.1) si et seulement s'il existe une matrice non négative  $Y$  telle que (2.9) soit vérifiée et :

$$|Y|\mu \leq \lambda|T|\mu. \tag{2.22}$$

### 2.3 Le Domaine $(A, B)$ -invariant Suprémal

Supposons à présent que l'état du système (2.1) soit soumis aux contraintes  $x \in \Omega$ . En général, le domaine  $\Omega$  n'est pas  $(A, B)$ -invariant, donc il y a des états dans  $\Omega$  pour lesquels les contraintes ne peuvent pas être respectées à un pas. Une solution possible à ce problème est donc de restreindre l'état initial à un domaine  $(A, B)$ -invariant inclus dans  $\Omega$ . Il est en outre souhaitable que ce domaine soit le plus grand possible. Il s'avère qu'un domaine suprémal existe, ce qui découle de la propriété suivante :

**Proposition 2.4** *La famille de tous les domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans un domaine convexe fermé  $\Omega$  est fermée sous l'opération « enveloppe convexe de l'union ».*

**Démonstration :** Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $\Omega$ . Alors, pour  $x_1 \in \mathcal{S}_1$  et  $x_2 \in \mathcal{S}_2$ , il existe des commandes  $u_{1k}$  et  $u_{2k}$  telles que :

$$x_{1k+1} = Ax_{1k} + Bu_{1k} \in \mathcal{S}_1,$$

$$x_{2k+1} = Ax_{2k} + Bu_{2k} \in \mathcal{S}_2.$$

Soit maintenant  $x$  un point appartenant à l'enveloppe convexe de l'union de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  :  $x \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ . Alors,  $x$  peut être écrit sous la forme :  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ , avec  $x_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{S}_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Soit aussi la commande :  $u_k = \alpha u_{1k} + (1 - \alpha)u_{2k}$ . Alors, pour  $x_k = x \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ ,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ &= A(\alpha x_{1k} + (1 - \alpha)x_{2k}) + B(\alpha u_{1k} + (1 - \alpha)u_{2k}) \\ &= \alpha x_{1k+1} + (1 - \alpha)x_{2k+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2), \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.  $\square$

Puisque le domaine  $\Omega$  est fermé, cette proposition garantit l'existence dans la famille des domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $\Omega$  d'un élément *suprémal* (un élément qui contient tous les autres) :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \triangleq \text{domaine } (A, B)\text{-invariant suprémal inclus dans } \Omega.$$

Ce domaine suprémal peut être caractérisé par la formule de récurrence suivante [17] :

$$\mathcal{C}_{i+1} = \mathcal{Q}(\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{C}_i, \quad \text{avec } \mathcal{C}_0 = \Omega, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{C}_i. \quad (2.24)$$

On peut voir que le domaine  $\mathcal{C}_i$  est l'ensemble d'états pour lesquels il existe une séquence de commande telle qu'ils restent dans  $\Omega$  en  $i$  pas. D'après (2.23),  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_{i-1}$ , et le domaine suprémal est obtenu quand  $i \rightarrow \infty$ .

Si l'on souhaite doter les trajectoires du système d'un taux de convergence  $\lambda$ , on doit alors calculer le domaine :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \lambda) \triangleq \text{domaine } (A, B)\text{-}\lambda\text{-contractif suprémal inclus dans } \Omega.$$

Pour ce faire, il suffit de remplacer la récurrence (2.23), (2.24) par :

$$\mathcal{C}_{i+1} = \mathcal{Q}(\lambda\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{C}_i, \quad \text{avec } \mathcal{C}_0 = \Omega, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \lambda) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{C}_i. \quad (2.26)$$

Nous nous intéresserons désormais au calcul de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  pour  $\Omega = R[G, \rho]$ .

Dans [46] une formule de récurrence autre que (2.23), (2.24) est utilisée. La méthode numérique qui en résulte est néanmoins très complexe puisqu'elle se sert alternativement de la représentation de polyèdres par sommets et par inégalités linéaires. En outre, elle exige que la matrice  $A$  soit régulière. L'article [17] utilise la formule (2.23), (2.24) sous l'hypothèse que  $R[G, \rho]$  est compact (puisque l' $(A, B)$ -invariance y est testée sommet par sommet).

D'après la Proposition 2.2, le plus grand domaine admissible à un pas de  $R[G, \rho]$ ,  $\mathcal{Q}(R[G, \rho])$ , coïncide avec le polyèdre  $R[TGA, T\rho]$ . Ce résultat permet donc de construire le plus grand domaine  $(A, B)$ -invariant inclus dans  $R[G, \rho]$ , au moyen de la récurrence (2.23), (2.24). Cette construction demande en général un effort de calcul très important. Au cours du processus itératif beaucoup de contraintes redondantes peuvent être générées. Il est donc particulièrement souhaitable de construire un algorithme qui génère uniquement des contraintes non redondantes (par rapport au domaine de contraintes de l'itération précédente) à chaque itération. Cette propriété peut être obtenue en utilisant les relations d' $(A, B)$ -invariance (2.7), (2.8).

**Algorithme 2.1** Calcul du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans le polyèdre convexe  $R[G, \rho]$ .

1. Initialiser  $i = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $T^0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $G^0 = G$ ,  $\rho^0 = \rho$ ,  $g_0 = g$ . Définir une précision  $\epsilon$ .
2. Calculer la matrice  $T^i \in \mathbb{R}^{l_i \times g_i}$ , dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur du cône polyédrique  $\Gamma^i = \{w; (G^i B)^T w = 0, w \geq 0\}$  et décomposer  $T^i$  comme suit :

$$T^i = \left[ \begin{array}{c|c} T^{i-1} & 0 \\ \hline U^i & \end{array} \right]; \quad U^i \in \mathbb{R}^{r_i \times g_i}. \quad (2.27)$$

3. Résoudre par programmation linéaire les problèmes suivants, pour  $j = 1, \dots, r_i$ :

$$\min_{Y_j^i} Y_j^i \rho^i \quad (2.28)$$

$$\text{sous } \begin{cases} Y_j^i G^i = U_j^i G^i A \\ Y_j^i \geq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Si  $\forall j, Y_j^i \rho^i - U_j^i \rho^i \leq \epsilon$ , alors  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho]) = R[G^i, \rho^i]$ , arrêter.

Si  $\exists j ; Y_j^i \rho^i - U_j^i \rho^i > \epsilon$ , ordonner les lignes de  $U^i$  et  $Y^i$ , en utilisant une matrice de permutation  $P_i$ , sous la forme :

$$P_i U^i = \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \end{bmatrix}, \quad P_i Y^i = \begin{bmatrix} Y_1^i \\ Y_2^i \end{bmatrix},$$

avec  $Y_2^i \in \mathfrak{R}^{l_i \times r_i}$ , de manière que :

$$Y_1^i \rho^i - U_1^i \rho^i \leq \epsilon, \quad (2.30)$$

$$Y_2^i \rho^i - U_2^i \rho^i > \epsilon. \quad (2.31)$$

4. Construire les matrices

$$G^{i+1} = \begin{bmatrix} G^i \\ T_2^i G^i A \end{bmatrix}, \quad \rho^{i+1} = \begin{bmatrix} \rho^i \\ T_2^i \rho^i \end{bmatrix}.$$

Faire  $g_{i+1} = g_i + l_i$ .

5. Faire  $i = i + 1$  et retourner au 2ème pas.

□

Le fait que l'algorithme proposé converge vers  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho])$  découle du résultat suivant :

**Proposition 2.5** *Le polyèdre  $R[G^{i+1}, \rho^{i+1}]$  est identique au domaine  $\mathcal{Q}(R[G^i, \rho^i]) \cap R[G^i, \rho^i]$ .*

**Démonstration :** D'après la Proposition 2.2 et (2.27), le domaine  $\mathcal{Q}(R[G^i, \rho^i]) \cap R[G^i, \rho^i]$  est défini par le domaine de contraintes :

$$\begin{cases} G^i x \leq \rho^i \\ U_1^i G^i A x \leq U_1^i \rho^i \\ U_2^i G^i A x \leq U_2^i \rho^i \end{cases}.$$

Notons que les lignes relatives à  $T^{i-1}$  en (2.27) ont déjà été prises en compte dans le calcul de  $R[G^i, \rho^i]$ .



L'inclusion de  $\mathcal{Q}(R[G^i, \rho^i]) \cap R[G^i, \rho^i]$  dans  $R[G^{i+1}, \rho^{i+1}]$  est évidente. Inversement, tout point  $x \in R[G^{i+1}, \rho^{i+1}]$  vérifie, avec la matrice non négative  $Y_1^i$  vérifiant (2.29), (2.30) :

$$U_1^i G^i A x = Y_1^i G^i x \quad (2.32)$$

$$\leq Y_1^i \rho^i \quad (2.33)$$

$$\leq U_1^i \rho^i \quad (2.34)$$

ce qui implique  $R[G^{i+1}, \rho^{i+1}] \subset \mathcal{Q}(R[G^i, \rho^i]) \cap R[G^i, \rho^i]$ .  $\square$

Quelques remarques sur cet algorithme se font nécessaires :

- Il se peut que dans certains cas (notamment quand  $\text{rang}(G^i) < n$ ) le PL (2.29) n'ait pas de solution admissible pour certaines valeurs de  $j$ . Les lignes  $U_j^i$  et  $Y_j^i$  associées doivent alors faire partie respectivement des matrices  $U_2^i$  et  $Y_2^i$  (2.31).
- Le domaine  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  n'est pas obligatoirement polyédrique. Il ne l'est que s'il est généré par un nombre fini d'itérations. Il peut néanmoins être approché par un polyèdre. En effet, il a été montré dans [17] que, étant donné le domaine  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \lambda)$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ , alors  $\forall \lambda' ; \lambda \leq \lambda' \leq 1, \exists i' ; \mathcal{C}_{i'}$  est  $\lambda'$ -contractif, avec  $\mathcal{C}_{i'}$  donné par la récurrence (2.25). Une approximation de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  peut donc être obtenue à travers la récurrence (2.25), avec une valeur de  $\lambda$  proche de 1, jusqu'à l'obtention d'un polyèdre  $\mathcal{C}_i$  qui soit  $(A, B)$ -invariant.

### Exemple 2.1

Soit le système (2.1) pour lequel :

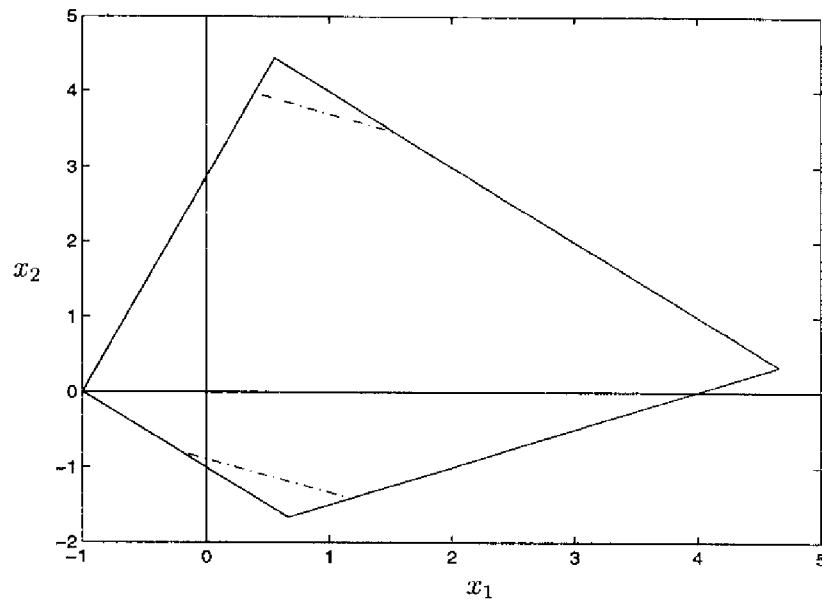
$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et le polyèdre  $R[G, \rho]$  avec

$$G = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0.35 \\ 0.25 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul du plus grand domaine  $(A, B)$ - $\lambda$ -contractif inclus dans  $R[G, \rho]$ , avec  $\lambda = 0.8$ , donne  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \lambda) = R[G^1, \rho^1]$ , avec :

$$G^1 = \begin{bmatrix} G \\ 0.6 & 1.35 \\ -1.5429 & -3.4714 \end{bmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{bmatrix} \rho \\ 5.6 \\ 3.0857 \end{bmatrix}.$$

FIG. 2.1 -  $R[G, \rho]$  et  $C^\infty(R[G, \rho], \lambda)$ .

Les polyèdres  $R[G, \rho]$  et  $R[G^1, \rho^1]$  sont représentés dans la figure 2.1.

Pour  $R[G^1, \rho^1]$ , une matrice  $T^1$  dont les vecteurs ligne génèrent le noyau non négatif à gauche de  $G^1 B$  est donnée par :

$$T^1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2881 \\ 0 & 1 & 2.8571 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8571 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8571 & 0 & 0 & 0.2881 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.7407 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0.7407 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7407 & 0.2881 \end{bmatrix}.$$

Les conditions d' $(A, B)$ - $\lambda$ -contractivité (2.7), (2.21) sont vérifiées par la matrice :

$$Y^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3889 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1440 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1440 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2449 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Il est intéressant de remarquer que pour des polyèdres symétriques non bornés le calcul de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  peut se faire d'une façon décomposée. Soit donc un polyèdre symétrique non borné  $S(Q, \mu)$  et  $\mathcal{V}^*$  le sous-espace  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans  $\ker(Q)$ . Considérons également l'espace quotient  $\hat{\mathcal{X}} = \frac{\mathfrak{R}^n}{\mathcal{V}^*}$  et le système d'ordre réduit :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}u_k. \quad (2.35)$$

Les applications  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont définies à partir de la projection orthogonale  $P_v : \mathfrak{R}^n \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ , comme leurs équivalents dans le système (2.17). Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est maintenant décomposé ainsi :

$$S(Q, \mu) = \mathcal{V}^* + S(\hat{Q}, \mu),$$

où  $S(\hat{Q}, \mu) = \hat{S}(\hat{Q}, \mu)P_v$ , avec  $\hat{S}(\hat{Q}, \mu) \triangleq \{\hat{x} ; |\hat{Q}\hat{x}| \leq \mu\}$ .

Définissons aussi les domaines :

$$\mathcal{C}^\infty(\hat{S}(\hat{Q}, \mu)) \triangleq \text{domaine } (\hat{A}, \hat{B})\text{-invariant suprémal inclus dans } \hat{S}(\hat{Q}, \mu),$$

et son extension à  $\mathfrak{R}^n$ ,

$$\mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu)) = \mathcal{C}^\infty(\hat{S}(\hat{Q}, \mu))P_v.$$

Le résultat suivant peut alors être établi :

**Proposition 2.6**

$$\mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu)) = \mathcal{V}^* + \mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu)).$$

**Démonstration :**  $\forall x \in \mathcal{V}^* + \hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu))$ , il existe  $x^v \in \mathcal{V}^*$  et  $x^C \in \hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu))$  tels que  $x = x^v + x^C$ . À partir de la construction de  $\mathcal{V}^*$  et  $\hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu))$ ,  $\exists F^v$  tel que  $\mathcal{V}^*$  est  $(A + BF^v)$ -invariant et il existe une séquence de commande  $\{u_k^C\}$ ,  $k \in \mathcal{N}$  telle que  $x_k^C \in \mathcal{V}^* + \hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu))$ .

Considérons en revanche un point générique  $x_k \in \mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu))$ . Puisque  $\mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu))$  est  $(A, B)$ -invariant, il existe une commande  $u_k$  telle que  $x_{k+1} \in S(Q, \mu)$ . Maintenant, le vecteur  $x_k \in S(Q, \mu)$  peut être décomposé sous la forme:  $x_k = x_k^v + x_k^s$  avec  $x_k^v \in \mathcal{V}^*$  et  $x_k^s \in S(\hat{Q}, \mu)$ . Le vecteur de commande  $u_k$  peut être décomposé comme:  $u_k = F^v x_k^v + u_k^s$ , avec  $\mathcal{V}^*$   $(A + BF^v)$ -invariant. Alors,  $x_{k+1}^v = (A + BF^v)x_k^v \in \mathcal{V}^*$ . Considérons à présent le système (2.35) et supposons que  $x_k^s \notin \hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu))$ . Donc, on peut voir que  $\hat{x}_{k+1}^s = \hat{A}\hat{x}_k^s + \hat{B}u_k^s \notin \hat{S}(\hat{Q}, \mu)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $x_k \in \mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu))$ .  $\square$

## 2.4 Calcul d'Une Loi de Commande

La vérification des relations d' $(A, B)$ -invariance présentées auparavant garantissent, pour tout point appartenant au polyèdre en question, l'existence d'une séquence de commande qui force la trajectoire du vecteur d'état à rester dans le dit polyèdre. Cela ne présuppose pas pour autant un type particulier de loi de commande. Il est cependant important, voire impératif en pratique, de commander le système au moyen d'une loi de commande en boucle fermée.

Une réponse à cette question a été donnée dans [45] et perfectionnée dans [17]. Une loi de commande à structure variable du type linéaire par morceaux a été proposée pour garantir l'invariance positive en boucle fermée de polyèdres  $(A, B)$ -invariants compacts. Pour ce faire, les polyèdres y sont divisés en secteurs définis par l'enveloppe convexe de l'origine et de  $n$  sommets ( $n$  étant la dimension du système). Une loi de commande par retour d'état linéaire est alors calculée pour chacun des secteurs.

La loi de commande décrite par la suite étend cette loi au cas de polyèdres non compacts.

### 2.4.1 Cas général

Considérons la décomposition du polyèdre  $R[G, \rho]$ , présentée dans l'annexe, comme la somme du cône caractéristique  $R[G, 0]$  avec un polytope  $\Pi$ . Un ensemble de commandes admissibles  $(v_1, \dots, v_p)$  peut être associé aux sommets  $(x_1, \dots, x_p)$  du polytope  $\Pi$ . Elles vérifient :

$$GAx_i + GBv_i \leq \rho.$$

De même, un ensemble de commandes  $(w_1, \dots, w_q)$  peut être associé à l'ensemble des générateurs  $M_j$  de  $R[G, 0]$ , de manière que :

$$GAM_j + GBw_j \leq \rho.$$

Chaque point de  $R[G, \rho]$  est représenté par l'ensemble de coordonnées  $(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ , à travers la relation :

$$x = \sum_{j=1}^q \alpha_j M_j + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i, \quad (2.36)$$

avec  $\alpha_j \geq 0 \forall j$ ;  $0 \leq \beta_i \leq 1 \forall i$ ;  $\sum_{i=1}^p \beta_i \leq 1$ . La fonction de commande suivante peut alors être considérée :

$$u(x) = \sum_{j=1}^q \alpha_j w_j + \sum_{i=1}^p \beta_i v_i. \quad (2.37)$$

Pour  $\rho \geq 0$ , une partition de  $R[G, \rho]$  peut être dérivée du paramétrage (2.36). Chaque région  $\mathcal{X}_r$  de  $R[G, \rho]$  est générée à partir de la relation (2.36) par un ensemble de générateurs et/ou sommets  $(M_{j'}, x_{i'})$ ,  $j' \in \mathcal{J}_r$ ,  $i' \in \mathcal{I}_r$ , tels que :

- $\text{card}(\mathcal{J}_r) + \text{card}(\mathcal{I}_r) = n$ .
- Un point  $x \in \mathcal{X}_r$  est donné par :

$$x = \sum_{j' \in \mathcal{J}_r} \alpha_{j'} M_{j'} + \sum_{i' \in \mathcal{I}_r} \beta_{i'} x_{i'}, \quad (2.38)$$

avec  $\alpha_{j'} \geq 0$ ;  $0 \leq \beta_{i'} \leq 1$ ;  $\sum_{i' \in \mathcal{I}_r} \beta_{i'} \leq 1$ .

La transition entre deux régions adjacentes est caractérisée par une opération de pivotage à travers laquelle un des coefficients  $(\alpha_{j'}, \beta_{i'})$  devient nul et, ou bien un générateur  $M_j$ ,  $j \notin \mathcal{J}_r$ , ou alors un vecteur  $x_i$ ,  $i \notin \mathcal{I}_r$  remplace dans la représentation (2.38) le générateur ou vecteur pour lequel  $\alpha_{j'}$  ou  $\beta_{i'}$  est devenu nul. L'intersection entre deux régions adjacentes a l'intérieur vide, et l'union de toutes les régions  $\mathcal{X}_r$  forme le polyèdre  $R[G, \rho]$ .

Un exemple de décomposition de polyèdre est donné par la Figure 2.2.

Soit maintenant  $X_r$  une matrice carrée dont les colonnes sont les générateurs/sommets définissant la région  $\mathcal{X}_r$ , et  $U_r$  une matrice dont les colonnes sont les vecteurs de commande  $w_j$ ,  $v_i$ , associés. Une commande à structure variable du type linéaire par morceaux est donc donnée par :

$$u_k = F_r x_k = U_r (X_r)^{-1} x_k, \quad \text{pour } x_k \in \mathcal{X}_r. \quad (2.39)$$

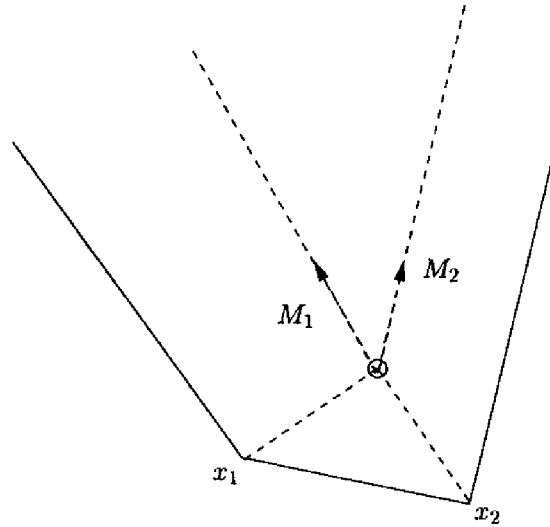


FIG. 2.2 – Un polyèdre  $R[G, \rho]$  et les régions associées.

Cette commande est une réalisation possible de la loi (2.37).

Les polyèdres compacts sont complètement représentés par ses sommets car le cône caractéristique est nul. Dans ce cas les régions dans lesquelles ils sont divisés sont des polyèdres compacts formés par l'enveloppe convexe entre l'origine et  $n$  sommets. La loi de commande (2.39) devient alors exactement celle proposée dans [45, 17].

## 2.4.2 Cas symétrique

Pour des polyèdres symétriques non bornés, la loi de commande peut être calculée d'une façon décomposée. Soit donc un polyèdre symétrique non borné  $S(Q, \mu)$ ;  $\mathcal{V}^*$  le sous-espace  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans  $\ker(Q)$ ; le « système quotient » (2.17). Le résultat suivant, peut alors être établi :

**Corollaire 2.4** *Si le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1), alors une loi de commande le rendant positivement invariant en boucle fermée est donnée par :*

$$u_k = F^v x_k + u_k^s,$$

où  $F^v$  est tel que  $\ker(Q)$  soit  $(A + BF^v)$ -invariant, et  $u_k^s$  est une loi de commande qui rende positivement invariant en boucle fermée le polyèdre compact  $\tilde{S}(\tilde{Q}, \mu)$  (2.18) défini pour le système (2.17)

**Démonstration :** Directe à partir du corollaire 2.3.

### 2.4.3 Existence d'une loi de commande linéaire

Nous avons observé que dans beaucoup de cas l'invariance positive en boucle fermée d'un polyèdre  $(A, B)$ -invariant peut également être obtenue en utilisant des lois de commande en boucle fermée bien plus simples. Il s'agit de lois de commande linéaires, lesquelles sont caractérisées par des conditions d' $(A, B)$ -invariance légèrement plus fortes que celles établies dans la Proposition 2.3.

**Proposition 2.7** *Soit la matrice  $T$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma$  (2.5) et la matrice  $\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$  dont les vecteurs ligne engendrent le noyau à gauche de l'application  $GB$ . S'il existe une matrice non négative  $H$  telle que*

$$\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} HG = \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} GA, \quad (2.40)$$

$$TH\rho \leq T\rho, \quad (2.41)$$

alors il existe une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u = Fx + u_c, \quad (2.42)$$

sous laquelle le polyèdre  $R[G, \rho]$  est positivement invariant par rapport au système (2.1).

**Démonstration :** Considérons la matrice  $K = \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$ , dont les vecteurs ligne engendrent le noyau à gauche de l'application  $GB$ . La relation  $K(HG - GA) = 0$  implique, à partir du lemme A.3, l'existence d'une matrice  $F$  telle que :

$$HG = GA + GBF. \quad (2.43)$$

Également, par application du lemme A.2, la condition (2.41) équivaut à l'existence d'un vecteur constant  $u_c$  tel que :

$$H\rho + GBu_c \leq \rho. \quad (2.44)$$

Par conséquent, le choix d'une loi de commande (2.42) qui vérifie (2.43), (2.44) garantit, quel que soit  $x \in R[G, \rho]$ ,  $GAx + GBu = (GA + GBF)x + GBu_c = HGx + GBu_c$ . La matrice  $H$  étant non négative, la condition  $Gx \leq \rho$  implique  $HGx \leq H\rho$ . Donc, avec l'inégalité (2.44),  $GAx + GBu \leq \rho$ .  $\square$

Il peut être facilement démontré que les conditions (2.40), (2.41) sont également nécessaires à l'existence d'une loi de commande par retour d'état (2.42) pour laquelle  $R[G, \rho]$  est

positivement invariant. Même si ces conditions sont seulement suffisantes pour l' $(A, B)$ -invariance, nous avons observé qu'elles sont vérifiées dans beaucoup de cas.

En pratique, l'existence des matrices  $F$ ,  $H$  et du vecteur  $u_c$  vérifiant les relations (2.43), (2.44) peut être testée directement, et une solution peut être calculée par programmation linéaire, en utilisant une extension du PL (1.32).

Si le terme de commande constant  $u_c$  n'est pas nul, alors la trajectoire du système en boucle fermée ne converge pas vers l'origine. Si elle converge, l'équilibre est atteint à l'état  $x_f \in R[G, \rho]$  qui vérifie:  $(I_n - A - BF)x_f = Bu_c$ .

Cependant si  $R[G, \rho]$  est compact, alors la convergence vers l'origine peut être imposée par une loi de commande à structure variable. Le polyèdre  $R[G, \rho]$  peut être partagé en  $g$  secteurs, chacun étant défini par l'enveloppe convexe entre l'origine et une facette. Un vecteur  $x \in R[G, \rho]$  appartient au secteur associé à l' $i$ -ème facette, pour laquelle  $i = \operatorname{argmax}_j \frac{G_j}{\rho_j} x$ . Considérons à présent la fonction :

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{G_i}{\rho_i} x \right\} \quad (2.45)$$

Pour des polyèdres compacts contenant l'origine,  $\Psi(x)$  est la *fonctionnelle de Minkowski* de  $R[G, \rho]$  [59]. Il peut être démontré que dans ce cas  $\Psi(x)$  est défini positif et continu.

**Proposition 2.8** *Si  $R[G, \rho]$  est positivement invariant  $\lambda$ -contractif avec  $0 < \lambda < 1$  sous une loi de commande (2.42), alors la trajectoire du système (2.1) converge vers l'origine sous la loi de commande à structure variable :*

$$u = Fx + u_c \Psi(x). \quad (2.46)$$

**Démonstration:** Puisque  $\Psi(x)$  est défini positif, pour démontrer la convergence vers l'origine il suffit de démontrer que  $\Psi(x)$  est strictement décroissant. En effet,

$$Gx_{k+1} = GAx_k + GB(Fx_k + u_c \Psi(x_k)) \quad (2.47)$$

$$= G(A + BF)x_k + GBu_c \Psi(x_k) \quad (2.48)$$

$$= HGx_k + GBu_c \Psi(x_k) \quad (2.49)$$

Par définition de  $\Psi(x)$ ,  $Gx_k \leq \rho \Psi(x_k)$ . Par conséquent,  $Gx_{k+1} \leq (H\rho + GBu_c) \Psi(x_k) < \rho \Psi(x_k)$  (en raison de (2.44) et de l'hypothèse de  $\lambda$ -contractivité,  $0 < \lambda < 1$ ) et finalement

$$\max_i \left\{ \frac{G_i}{\rho_i} x_{k+1} \right\} = \Psi(x_{k+1}) < \Psi(x_k).$$

□



Remarquons qu'à l'intérieur du  $i$ -ème secteur la loi de commande est tout simplement le retour d'état linéaire :

$$u = (F + u_c \frac{G_i}{\rho_i})x.$$

En plus, en raison de la continuité de  $\Psi(x)$ , la commande est définie de façon unique sur la frontière entre deux secteurs  $i$  et  $j$  (notons que la frontière est caractérisée par  $\frac{G_i}{\rho_i}x = \frac{G_j}{\rho_j}x$ ).

Il est important de noter que la loi de commande (2.46) est moins complexe que celle proposée dans [45, 17], car pour cette dernière le nombre de secteurs dans lequel le polytope est divisé est toujours plus grand ou égal à  $g$ .

### Exemple 2.2

Reprenons l'exemple 2.1. Pour le polyèdre  $R[G^1, \rho^1]$ , les conditions de la proposition 2.7 sont vérifiées avec :

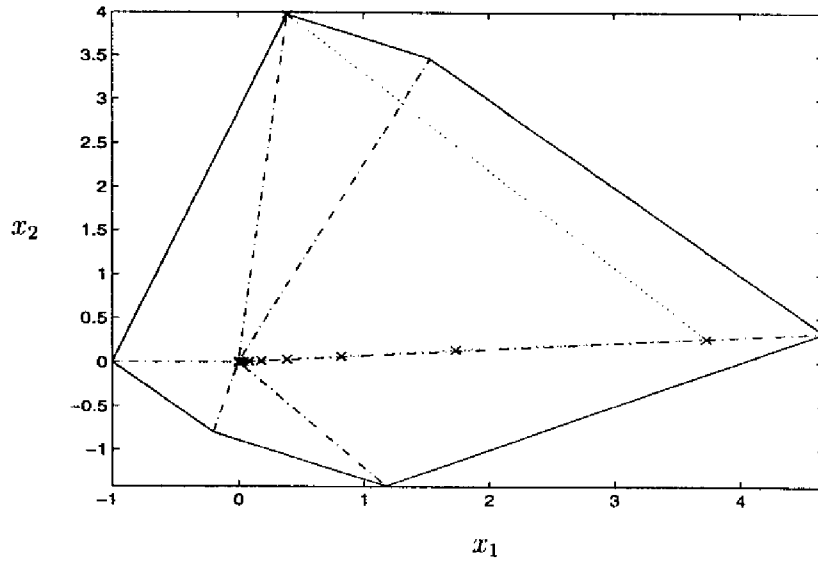
$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1412 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2745 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2539 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1471 & 0 \\ 2.6170 & 0 & 0.2516 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4965 & 0 & 0.0477 & 0 & 0.0863 & 0.5199 \end{bmatrix}$$

Une loi de commande admissible est alors donnée par :  $u_k = F_1 x_k + u_{c1}$ , avec  $F_1 = \begin{bmatrix} -0.5765 & -1.7471 \end{bmatrix}$ ,  $u_{c1} = 0.0471$ .

Sous cette loi, la trajectoire du système en boucle fermée converge vers  $x_f = \begin{bmatrix} 0.0774 \\ 0.0516 \end{bmatrix}$ .

La convergence vers l'origine peut être obtenue sous la loi de commande à structure variable (2.46), le domaine  $R[G^1, \rho^1]$  étant divisé en six secteurs.

Le domaine  $R[G^1, \rho^1]$  divisé en secteurs est représenté par la Figure 2.3, ainsi qu'une trajectoire partant du sommet d'en haut, obtenue sous la loi de commande (2.46).

FIG. 2.3 -  $R[G^1, \rho^1]$  divisé en secteurs.

## 2.5 Systèmes Soumis à des Contraintes sur la Commande

Soit le système (2.1) dont le vecteur de commande est maintenant soumis aux contraintes :

$$u_k \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \quad \forall k \in \mathcal{N} \quad (2.50)$$

**Définition 2.4** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1), (2.50) si,  $\forall x \in \mathcal{S}$ , il existe un vecteur de commande  $u \in \mathcal{U}$  tel que  $Ax + Bu \in \Omega$ .

Le plus grand domaine admissible à un pas est défini maintenant ainsi [17] :

$$\mathcal{Q}(\Omega, \mathcal{U}) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \exists u \in \mathcal{U} ; Ax + Bu \in \Omega\}. \quad (2.51)$$

Le domaine  $\Omega$  est donc  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1), (2.50) si et seulement si :

$$\Omega \subset \mathcal{Q}(\Omega, \mathcal{U}).$$

### 2.5.1 $\mathcal{U}$ -( $A, B$ )-invariance de polyèdres - cas général

Nous nous consacrons désormais à l'étude de la propriété d' $\mathcal{U}$ -( $A, B$ )-invariance de polyèdres  $R[G, \rho]$  pour des systèmes soumis à des contraintes du type (2.50) sur la commande, avec :

$$\mathcal{U} = R[U, \psi] = \{u \in \mathfrak{R}^m ; Uu \leq \psi\}.$$

À un instant  $k$  donné, l'admissibilité du vecteur d'état à l'instant suivant est caractérisée par les contraintes :

$$\begin{aligned} GAx_k + GBu_k &\leq \rho, \\ Uu_k &\leq \psi. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le plus grand domaine admissible à un pas peut donc être caractérisé de la façon suivante :

#### Proposition 2.9

$$\mathcal{Q}(R[G, \rho], R[U, \psi]) = R[T_g GA, T_g \rho + T_u \psi],$$

où les vecteurs ligne de la matrice  $[T_g \ T_u]$  forment un ensemble générateur minimum du noyau non négatif à gauche de la matrice  $\begin{bmatrix} GB \\ U \end{bmatrix}$ , défini par :

$$\Gamma_u = \left\{ \begin{bmatrix} w_g \\ w_u \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} w_g \\ w_u \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} w_g \\ w_u \end{bmatrix} [(GB)^T \ U^T] = 0, \right\}. \quad (2.53)$$

**Démonstration :** Immédiate à partir des conditions (2.52) est du lemme A.2.  $\square$

La  $\mathcal{U}$ -( $A, B$ )-invariance de  $R[G, \rho]$ , avec  $\mathcal{U} = R[U, \psi]$ , peut donc être caractérisée par la condition géométrique :

$$R[G, \rho] \subset R[T_g GA, T_g \rho + T_u \psi], \quad (2.54)$$

et par la condition algébrique donné par la Proposition suivante :

**Proposition 2.10** *Le polyèdre  $R[G, \rho]$  est  $\mathcal{U}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (2.1), (2.50), avec  $\mathcal{U} = R[U, \psi]$ , si et seulement s'il existe une matrice non négative  $Y$  telle que :*

$$YG = T_g GA, \quad (2.55)$$

$$Y\rho \leq T_g \rho + T_u \psi. \quad (2.56)$$

**Démonstration :** Immédiate à partir de la condition (2.54) et du lemme A.4.  $\square$

À partir de cette Proposition, on peut remarquer que l' $(A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$  est une condition nécessaire pour l' $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariance. Ceci découle du fait que les vecteurs ligne de la matrice  $[T \ 0]$ , où les lignes de  $T$  forment un ensemble générateur du cône  $\Gamma$  (2.5), appartiennent au cône  $\Gamma_u$  (2.53).

### 2.5.2 $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques

La Proposition 2.10 peut être spécialisée au cas de polyèdres symétriques. Soit donc  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ . Soit aussi la matrice  $[T_{q_1} \ T_{q_2} \ T_{v_1} \ T_{v_2}]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma_u$  (2.53), avec  $G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ ,  $U = \begin{bmatrix} V \\ -V \end{bmatrix}$ . Soit également la matrice  $[\mathcal{T}_q \ \mathcal{T}_u]$ , sous-matrice de la matrice  $[T_{q_1} - T_{q_2} \ T_{u_1} - T_{u_2}]$ , formée en supprimant les lignes  $T_{1_i} - T_{2_i}$  pour lesquelles une des égalités suivantes sont vérifiées :

- $T_{q_{1i}} - T_{q_{2i}} = 0$ ,
- $T_{q_{1i}} - T_{q_{2i}} = -T_{q_{1j}} + T_{q_{2j}}$ , pour  $j < i$ ,
- $T_{u_{1i}} - T_{u_{2i}} = 0$ ,
- $T_{u_{1i}} - T_{u_{2i}} = -T_{u_{1j}} + T_{u_{2j}}$ , pour  $j < i$ .

Le résultat suivant peut donc être établi. Sa démonstration est omise car elle peut être facilement déduite de celles du corollaire 2.1 et de la proposition 2.10.

**Corollaire 2.5** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1), (2.50), avec  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ , si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = \mathcal{T}_qQA, \quad (2.57)$$

$$|Y|\mu \leq |\mathcal{T}_q|\mu + |\mathcal{T}_v|\phi. \quad (2.58)$$

Des conditions pour qu'un sous-espace  $\ker(Q)$  soit  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant peuvent être obtenues :

**Corollaire 2.6** *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1), (2.50), avec  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ , si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :  $YQ = T_qQA$ .*

En général cette condition n'est vérifiée que lorsque  $\ker(Q)$  est  $A$ -invariant, ceci en raison des contraintes sur la commande. C'est la raison pour laquelle il n'est pas possible d'étendre le corollaire 2.3 à des systèmes soumis à des contraintes du type (2.50). Seules des conditions nécessaires peuvent être établies dans ce cas.

**Corollaire 2.7** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (2.1), (2.50) avec  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ , seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant.*
2. *Le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $\mathcal{U}$ - $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (2.17), (2.50).*

**Démonstration :** Supposons que  $S(Q, \mu)$  soit  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant avec  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ . L' $(A, B)$ -invariance de  $\ker(Q)$  découle de :

- La relation (2.57),
- Le fait que les vecteurs ligne de la matrice  $[T_1 \ T_2 \ 0 \ 0]$ , où les lignes de  $[T_1 \ T_2]$  forment un ensemble générateur du cône  $\Gamma$  (2.5) avec  $G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ , appartiennent au cône  $\Gamma_u$  (2.53),
- Le fait que les vecteurs ligne de la matrice  $T_1 - T_2$  engendrent le noyau à gauche de l'application  $QB$ ,
- Le corollaire 2.2.

Encore à partir de (2.57), il existe une matrice  $Y$  telle que  $Y\bar{Q}P = T_q\bar{Q}PA = T_q\bar{Q}\bar{A}P$ , et donc,  $Y\bar{Q} = T_q\bar{Q}\bar{A}$ . Ceci, avec (2.10), montre l' $\mathcal{U} - (\bar{A}, \bar{B})$ -invariance de  $S(\bar{Q}, \mu)$ .  $\square$

### 2.5.3 Le domaine $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant suprémal

Il peut être démontré que la famille de tous les domaines  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariants inclus dans un domaine  $\Omega$  est fermé sous l'opération « enveloppe convexe de l'union », ce qui garantit l'existence du domaine suprémal :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{U}) \triangleq \text{domaine } \mathcal{U}\text{-}(A, B)\text{-invariant suprémal inclus dans } \Omega.$$

À partir de la définition du domaine admissible à un pas, et à exemple de la formule (2.23), (2.24) pour les systèmes non contraints, ce domaine suprémal est donné par la formule de récurrence :

$$\mathcal{C}_{i+1} = \mathcal{Q}(\mathcal{C}_i, \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}_i, \quad \text{avec } \mathcal{C}_0 = \Omega,$$

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{U}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{C}_i.$$

Un algorithme de calcul de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{U})$  pour  $\Omega = R[G, \rho]$ ,  $\mathcal{U} = R[U, \psi]$  peut alors être facilement dérivé de l'algorithme 2.1.

### Exemple 2.3

Reprenons le système de l'exemple 2.1 et supposons maintenant qu'il est soumis aux contraintes sur la commande :  $\{-2 \leq u_k \leq 1\}$ . Le calcul du domaine  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant  $\lambda$ -contractif suprémal inclus dans  $R[G, \rho]$ , toujours avec  $\lambda = 0.8$ , donne, au bout de 13 itérations,  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \mathcal{U}, \lambda) = R[G^{13}, \rho^{13}]$ , avec :

$$G^{13} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0.35 \\ 0.25 & -0.5 \\ -1 & -2.7 \\ 0.7400 & 2.1149 \end{bmatrix}, \quad \rho^{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1.8 \\ 3.2168 \end{bmatrix}.$$

Pour  $R[G^{13}, \rho^{13}]$ , une matrice dont les lignes forment un ensemble générateur du cône  $\Gamma_u$  (2.53) est donnée par :

$$[T_g^{13} \quad T_u^{13}] = \begin{bmatrix} 1 & 2.8571 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8571 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8571 & 0 & 0.3704 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8571 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4728 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0.4728 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3704 & 0.4728 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4728 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3704 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Une matrice  $Y^{13}$  qui vérifie les conditions de la proposition 2.10 est :

$$Y^{13} = \begin{bmatrix} 0.4084 & 0 & 0 & 1.1345 & 0 \\ 0.2496 & 0 & 0 & 0.6933 & 0 \\ 0.3417 & 0 & 0 & 0.9493 & 0 \\ 0.4084 & 0 & 0 & 0.1345 & 0 \\ 0.0688 & 0 & 0 & 0.1912 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.1702 & 0 & 0.4019 \\ 0.0022 & 0 & 0 & 0.0060 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2298 & 0.4574 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0965 & 0.7723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les polyèdres  $R[G, \rho]$  et  $R[G^{13}, \rho^{13}]$  sont représentés dans la Figure 2.4

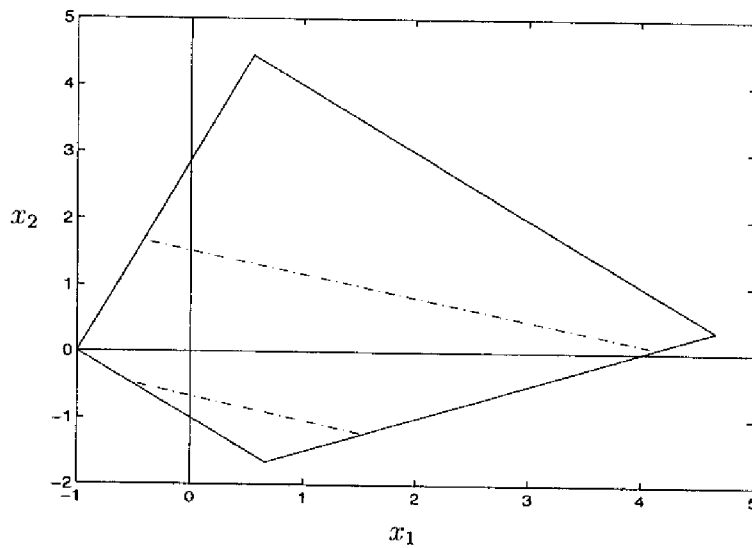


FIG. 2.4 -  $R[G, \rho]$  et  $C^\infty(R[G, \rho], \mathcal{U}, \lambda)$ .

## 2.6 Conclusion

Le concept d' $(A, B)$ -invariance a depuis longtemps été appliqué à des sous-espaces dans le cadre de l'approche géométrique pour la commande de systèmes linéaires. Son

application à des polyèdres, même si elle est plus récente, s'est révélée très utile dans le cadre de la commande de systèmes soumis à des contraintes linéaires.

Dans ce contexte, pour des systèmes en temps discret, nous avons proposé une caractérisation explicite de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres, laquelle se traduit par des conditions nécessaires et suffisantes sous la forme de relations matricielles linéaires. Cette caractérisation présente deux avantages majeurs vis-à-vis de celles rencontrées dans la littérature : elle s'applique à tous les polyèdres convexes, et non seulement à des polyèdres compacts ; elle ne nécessite pas le calcul de sommets, tâche numériquement très coûteuse. Ces avantages se font sentir notamment dans le calcul du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre donné, pour lequel nous avons proposé une méthode numérique. Cette méthode se sert des relations d' $(A, B)$ -invariance pour d'une part générer d'un pas à l'autre uniquement des contraintes qui ne sont pas redondantes, et d'autre part fournir un test de convergence efficace.

Tous ces résultats ont en outre été particularisés au cas de polyèdres symétriques par rapport à l'origine. En particulier, nous avons montré que l' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre symétrique non borné équivaut à l' $(A, B)$ -invariance d'un sous-espace et à l' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre compact défini pour un système d'ordre réduit.

Le problème de calculer une loi de commande rendant positivement invariant en boucle fermée un polyèdre  $(A, B)$ -invariant a également été traité. Une loi par retour d'état linéaire par morceaux proposée dans la littérature pour le cas de polyèdres compacts a ainsi été étendue au cas général. En outre, nous avons observé que, dans un grand nombre de cas, l'invariance positive en boucle fermée peut être obtenue au moyen d'une loi de commande simplement linéaire. Ce cas particulier est caractérisé par des relations qui sont à peine plus fortes que les relations d' $(A, B)$ -invariance. Dans le cas où cette loi ne force pas la trajectoire du système vers l'origine, nous avons proposé une loi à structure variable, linéaire par morceaux, moins complexe cependant que celle trouvée dans la littérature.

Nous avons également généralisé les relations à des systèmes soumis à des contraintes linéaires sur le vecteur de commande. Les systèmes soumis à des perturbations additives dont la norme infinie est limitée seront l'objet d'étude du chapitre 4, qui sera consacré au problème d'atténuation de la norme  $\ell^1$ .



## Chapitre 3

# Sur l' $(A, B)$ -Invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Continu

### 3.1 Introduction

Les travaux concernant l'étude de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes pour des systèmes en temps continu sont moins nombreux que ceux relatifs à des systèmes en temps discret. Si pour ces derniers l' $(A, B)$ -invariance peut être facilement caractérisée par l'évolution du système à un pas, pour des systèmes continus on est obligé en revanche d'étudier les déplacements infinitésimaux des variables d'état.

Quelques résultats ont malgré cela été établis. Dans [18], une caractérisation de l' $(A, B)$ -invariance, basée sur la représentation par sommets de polyèdres compacts, pour des systèmes en temps continu incertains, est obtenue à travers l'étude d'un système en temps discret qui est une approximation du système en temps continu d'origine. Les problèmes posés par la caractérisation par sommets ont été soulevés dans le chapitre précédent. Le fait d'utiliser une approximation du système en temps continu entraîne quelques problèmes supplémentaires. Il est en effet particulièrement difficile de déterminer un degré d'approximation qui permette de bien représenter le système d'origine.

Une autre difficulté inhérente au caractère continu des trajectoires se fait sentir dans le calcul du plus grand domaine  $(A, B)$ -invariant inclus dans un domaine de contraintes polyédrique. Là encore, dans [19] il est proposé de calculer une approximation du domaine suprémal, obtenue à partir d'un système discret approché.

Pour ce qui est du calcul d'une loi de commande, le même type de loi linéaire par morceaux proposée pour le cas de systèmes discrets peut être utilisée [18]. Une loi du même type, mais moins complexe dans le sens où le nombre de régions dans lesquelles

le polyèdre compact est divisée est inférieure, a été proposée dans [19]. Cette loi a pour défaut d'être discontinue, et applicable uniquement à des systèmes mono-entrées.

Dans ce chapitre nous étendons aux systèmes en temps continu l'étude de l' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes menée dans le chapitre 2 pour des systèmes en temps discret. En faisant appel à des techniques d'analyse différentielle, l' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre convexe est caractérisée par des relations matricielles linéaires. Ces relations sont alors généralisées au cas où un taux de convergence exponentiel est imposé aux trajectoires du système. Ensuite, au moyen d'une approximation en temps discret du système continu, à l'instar de [19], mais cette fois-ci à la lumière des relations d' $(A, B)$ -invariance, nous étudions la possibilité de calculer une approximation du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre. Le problème de calculer une loi de commande qui rende positivement invariant un polyèdre  $(A, B)$ -invariant est alors abordé. Des systèmes en temps continu dont la commande est contrainte sont finalement considérés. Une partie des résultats de ce chapitre ont été rapportés dans l'article [36].

### 3.2 Caractérisation de l' $(A, B)$ -invariance

Soit le système linéaire, en temps continu, stationnaire, décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1)$$

avec  $t \geq 0$ .  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de commande. Un domaine  $(A, B)$ -invariant du système (3.1) est défini ainsi :

**Définition 3.1** Un domaine  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est dit  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1) si pour tout état initial  $x(0) \in \Omega$  il existe une fonction de commande  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , telle que  $x(t) \in \Omega \forall t \geq 0$ .

On définit la classe de fonctions de commande  $\mathcal{C}_L$  de la façon suivante :

**Définition 3.2** La fonction de commande  $u(t, x)$  est dite appartenir à la classe  $\mathcal{C}_L$  si elle est continue et Lipschitz par rapport au vecteur d'état.

La proposition suivante est démontrée dans un cadre légèrement différent dans [71], corollaire 1, page 295.

**Proposition 3.1** Une condition nécessaire et suffisante pour l'(A, B)-invariance d'un domaine convexe  $\Omega$  par rapport au système (3.1), avec une fonction de commande dans la classe  $\mathcal{C}_L$ , est l'existence d'une fonction de commande dans la classe  $\mathcal{C}_L$  définie sur la frontière de  $\Omega$  pour laquelle, sur tout point  $x$  de cette frontière, le déplacement infinitésimal partant de  $x$  reste dans  $\Omega$ .

### 3.2.1 (A, B)-invariance de polyèdres - cas général

Considérons désormais un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega = R[G, \rho]$ , incluant l'origine ( $\rho \geq 0$ ). Soit  $T$  une matrice dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du noyau non négatif à gauche,  $\Gamma$ , de l'application  $GB$ , défini comme dans (2.5) par :

$$\Gamma = \{w \in \mathbb{R}^g ; w \geq 0, (GB)^T w = 0\}.$$

**Proposition 3.2** Le polyèdre convexe  $R[G, \rho] \subset \mathbb{R}^n$  est (A, B)-invariant par rapport au système (3.1) si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :

$$YG = TGA, \quad (3.2)$$

$$Y\rho \leq 0, \quad (3.3)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \quad \text{si } T_{ij} = 0. \quad (3.4)$$

**Démonstration :**

**Nécessité :** Supposons que  $R[G, \rho]$  soit (A, B)-invariant par rapport au système (3.1). Soit  $T_i$  un vecteur ligne de  $T$ . À partir de la définition de la matrice  $T$ , ce vecteur est un générateur du cône  $\Gamma$ . Il est non négatif et vérifie :

$$T_i GB = 0. \quad (3.5)$$

Le programme linéaire suivant, noté  $(P_i)$ , peut être associé à ce vecteur :

$$\max_x z_i = T_i GAx$$

$$\text{sous : } G_j x = \rho_j \quad \text{si } T_{ij} \neq 0 \quad (3.6)$$

$$G_j x \leq \rho_j \quad \text{si } T_{ij} = 0 \quad (3.7)$$

Le problème dual de  $(P_i)$ , noté  $(D_i)$ , est défini comme suit :

$$\min_{Y_i} y_i = Y_i \rho$$

$$\text{sous : } Y_i G = T_i G A \quad (3.8)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \text{ si } T_{ij} = 0 \quad (3.9)$$

Deux situations sont donc possibles :

- Si l'ensemble de conditions (3.6), (3.7) est admissible, alors il définit une face de  $R[G, \rho]$ . Pour que  $R[G, \rho]$  soit  $(A, B)$ -invariant, il faut que sur chaque point  $x$  de cette face le déplacement infinitésimal soit admissible. Il faut donc qu'il existe un vecteur de commande  $u$  tel que :

$$G_j \dot{x} = G_j A x + G_j B u \leq 0 \quad \forall j ; T_{ij} \neq 0. \quad (3.10)$$

La condition (3.5) implique  $\sum_{j: T_{ij} \neq 0} T_{ij} G_j B = 0$ . Et puisque  $T_{ij} \geq 0$ , la multiplication à gauche de chaque condition (3.10) par  $T_{ij}$  donne, pour tout  $x$  vérifiant (3.6), (3.7) :

$$z_i = T_i G A x = \sum_{j: T_{ij} \neq 0} T_{ij} G_j A x \leq 0.$$

Par conséquent, la solution optimale au problème  $(P_i)$ , notée  $z_i^*$ , vérifie  $z_i^* \leq 0$ . Alors, la valeur optimale de la fonction objectif du problème dual  $(D_i)$ ,  $y_i^*$ , vérifie :

$$y_i^* = z_i^* = Y_i^* \rho \leq 0$$

- Si les conditions (3.6), (3.7) ne sont pas admissibles, alors le problème primal  $(P_i)$  n'a pas de solution. Cependant, puisque  $R[G, \rho]$  n'est pas vide, les conditions (3.6), (3.7) peuvent être rendues admissibles si l'on remplace certaines contraintes égalité  $G_j x = \rho_j$  par la contrainte inégalité associée  $G_j x \leq \rho_j$ . Une solution au problème dual relaxé est alors admissible pour le problème dual de départ  $(D_i)$ . Par conséquent, la solution optimale à  $(D_i)$  est non bornée. Il existe alors un vecteur ligne  $Y_i$  vérifiant (3.8), (3.9) et tel que  $Y_i \rho \leq 0$ .

**Suffisance :** Supposons à présent qu'il existe une matrice  $Y$  vérifiant les conditions (3.2)-(3.4). Soit un point  $x$  sur la frontière de  $R[G, \rho]$ . Les lignes de la matrice  $G$  et du vecteur  $\rho$  peuvent être séparées en deux sous-ensembles, d'indices 1, 2, de dimensions  $g_1, g_2$ , et réordonnés comme suit :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix},$$

tels que :

$$\begin{cases} G_1 x = \rho_1 \\ G_2 x \leq \rho_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Soit la matrice non négative  $T_b$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\{w \geq 0 ; w^T(G_1 B) = 0\}$ . Tout vecteur ligne  $T_{b_i}$  peut être complété de manière à générer un vecteur  $t_i \in \Gamma$  défini par :

$$t_i = [T_{b_i} \ 0].$$

Alors, d'après la définition de  $T$ ,  $\exists \xi_i \geq 0$  tel que  $t_i = \xi_i T$ . Il est donc clair que tous les vecteurs ligne de la matrice  $t = [T_b \ 0]$  appartiennent à  $\Gamma$ , et par conséquent,  $\exists \Xi \geq 0$  tel que :

$$t = \Xi T$$

La multiplication à gauche des relations (3.2), (3.3) par  $\Xi$  donne :

$$ZG = tGA = T_b G_1 A \quad (3.12)$$

$$Z\rho \leq 0. \quad (3.13)$$

où  $Z = \Xi Y$ . En plus, les conditions

$$\begin{cases} t_{ij} = \sum_k \xi_{ik} T_{kj} \\ Z_{ij} = \sum_k \xi_{ik} Y_{kj} \end{cases},$$

et  $\Xi \geq 0$ , montrent que  $t_{ij} = 0$  si, pour chaque  $k$ , ou bien  $\xi_{ik} = 0$  ou alors  $T_{kj} = 0$ . À partir de la condition (3.4), cela implique, respectivement, ou bien  $\xi_{ik} = 0$  ou alors  $Y_{kj} \geq 0$ , et donc,

$$Z_{ij} \geq 0 \text{ si } t_{ij} = 0 \quad (3.14)$$

Les conditions (3.12)-(3.14) montrent, par dualité, que pour tout  $x$  vérifiant (3.11) :

$$T_b G_1 A x \leq 0. \quad (3.15)$$

D'après le lemme A.2, cette relation équivaut à l'existence d'un vecteur  $u \in \mathfrak{R}^m$  tel que :

$$G_1 \dot{x} = G_1 A x + G_1 B u \leq 0. \quad (3.16)$$

Considérons à présent la décomposition du polyèdre  $R[G, \rho]$  comme la somme du cône caractéristique  $R[G, 0]$  avec un polytope  $\Pi$ , présenté dans l'Annexe. La relation (3.16) s'applique à tous les points sur la frontière de  $R[G, \rho]$ , et en particulier à tous les sommets  $(x_1, \dots, x_p)$  du polytope  $\Pi$ . Un ensemble de commandes admissibles  $(v_1, \dots, v_p)$  peut y être associé. Elles vérifient :

$$G_k A x_i + G_k B v_i \leq 0 \quad \forall k ; G_k x_i = \rho_k. \quad (3.17)$$

De même, le cône caractéristique  $R[G, 0]$  vérifie trivialement les relations (3.2)-(3.4) (avec  $\rho = 0, Y = 0$ ). Par conséquent, un ensemble de commandes  $(w_1, \dots, w_q)$  peut être associé à l'ensemble des générateurs  $M_j$  de  $R[G, 0]$ , de façon à satisfaire :

$$G_k A M_j + G_k B w_j \leq 0 \quad \forall k ; G_k M_j = 0. \quad (3.18)$$

Chaque point de  $R[G, \rho]$  peut être représenté par l'ensemble de coordonnées  $(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$  à travers la relation

$$x = \sum_{j=1}^q \alpha_j M_j + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i, \quad (3.19)$$

avec  $\alpha_j \geq 0 \quad \forall j ; 0 \leq \beta_i \leq 1 \quad \forall i ; \sum_{i=1}^p \beta_i \leq 1$ . La fonction de commande suivante peut alors être considérée :

$$u(x) = \sum_{j=1}^q \alpha_j w_j + \sum_{i=1}^p \beta_i v_i. \quad (3.20)$$

En choisissant convenablement l'ensemble de coordonnées (comme par exemple dans (2.38)), on peut donc montrer que cette fonction de commande est définie sur chaque point de  $R[G, \rho]$ , est continue et Lipschitz. Elle génère un déplacement admissible à partir de chaque point de la frontière de  $R[G, \rho]$ . Par conséquent, d'après la proposition 3.1, le polyèdre  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1), avec une fonction de commande dans la classe  $\mathcal{C}_L$ .  $\square$

Comme pour le cas des systèmes en temps discret, si le noyau non négatif à gauche de l'application  $GB$  est l'ensemble vide, alors  $T = 0$  et les conditions (3.2)-(3.4) sont trivialement vérifiées avec  $Y = 0$ . Le polyèdre  $R[G, \rho]$  est alors trivialement  $(A, B)$ -invariant.

Également, dans le cas des systèmes autonomes ( $B = 0$ ), le cône  $\Gamma$  est le cône  $\mathfrak{R}_+^g$ ,  $T = I_g$ , et les relations (3.2)-(3.4) deviennent les relations classiques d'invariance positive pour des systèmes continus autonomes (1.13)-(1.15).

Enfin, on peut voir à partir des relations (3.2)-(3.4) que l' $(A, B)$ -invariance du cône caractéristique  $R[G, 0]$  est une condition nécessaire pour l' $(A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$ .

### 3.2.2 $(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques

La proposition 3.2 peut être spécialisée au cas symétrique:  $\Omega = S(Q, \mu)$ . Soit la matrice  $[T_1 \quad T_2]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma$  (2.5), avec  $G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ . Soit également la matrice  $\mathcal{T}$ , sous-matrice de la matrice  $T_1 - T_2$ , formée en supprimant les lignes  $T_{1i} - T_{2i}$  pour lesquelles ou bien

$T_{1i} - T_{2i} = 0$ , ou alors  $T_{1i} - T_{2i} = -T_{1j} + T_{2j}$  pour  $j < i$ . Le résultat suivant peut être établi :

**Corollaire 3.1** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathfrak{R}^n$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1) si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = TQA, \quad (3.21)$$

$$\tilde{Y}\mu \leq 0, \quad (3.22)$$

où  $\tilde{Y}$  est donné par :

$$\tilde{Y}_{ij} = \begin{cases} |Y_{ij}| & \text{si } \mathcal{T}_{ij} = 0 \\ Y_{ij} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} > 0 \\ -Y_{ij} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} < 0 \end{cases} .$$

**Démonstration :** D'après la proposition 3.2,  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant si et seulement s'il existe des matrices  $Y_1$  et  $Y_2$  telles que :

$$(Y_1 - Y_2)Q = (T_1 - T_2)QA, \quad (3.23)$$

$$(Y_1 + Y_2)\mu \leq 0, \quad (3.24)$$

$$Y_{1ij} \geq 0 \text{ si } T_{1ij} = 0, \quad Y_{2ij} \geq 0 \text{ si } T_{2ij} = 0. \quad (3.25)$$

Comme pour le cas discret (voir la démonstration du corollaire 2.1), les lignes  $i$  pour lesquelles ou bien  $T_{1i} - T_{2i} = 0$  ou alors  $T_{1i} - T_{2i} = -T_{1j} + T_{2j}$  pour  $j < i$ , n'ont pas besoin d'être considérées. En outre, les éléments de la matrice  $\mathcal{T}$  sont tels que (voir encore la démonstration du corollaire 2.1) :  $\mathcal{T}_{ij} = 0$  seulement si les éléments associés dans  $T_1$  et  $T_2$  sont également nuls ;  $\mathcal{T}_{ij} > 0$  ( $< 0$ ) seulement si les éléments associés dans  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement positif (nul) et nul (positif).

En raison de ces faits, à partir des relations (3.23)-(3.25),  $l'(A, B)$ -invariance de  $S(Q, \mu)$  équivaut à l'existence de matrices non négatives  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  vérifiant :

$$(\mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_2)Q = TQA, \quad (3.26)$$

$$(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mu \leq 0, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{Y}_{1ij} \geq 0 \text{ si } \mathcal{T}_{ij} = 0 \text{ ou } \mathcal{T}_{ij} < 0, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{Y}_{2ij} \geq 0 \text{ si } \mathcal{T}_{ij} = 0 \text{ ou } \mathcal{T}_{ij} > 0. \quad (3.29)$$

Maintenant, soit  $Y = \mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_2$  et considérons les matrices  $Y^+$  et  $Y^-$  définies par :

$$Y_{ij}^+ = \begin{cases} \max\{Y_{ij}, 0\} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} = 0 \\ Y_{ij} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} > 0 \\ 0 & \text{si } \mathcal{T}_{ij} < 0 \end{cases}, \quad Y_{ij}^- = \begin{cases} \max\{-Y_{ij}, 0\} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} = 0 \\ 0 & \text{si } \mathcal{T}_{ij} > 0 \\ -Y_{ij} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} < 0 \end{cases}. \quad (3.30)$$

La nécessité des conditions (3.21), (3.22) est déduite du fait que ces matrices sont telles que  $Y^+ - Y^- = Y = \mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_2$  et  $(Y^+ + Y^-)\mu = \tilde{Y}\mu \leq (\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mu \leq 0$ . La suffisance est également démontrée puisque  $Y^+$  et  $Y^-$  vérifient les relations (3.26)-(3.29).  $\square$

Considérons encore une fois l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(Q)}$ ; la projection canonique  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ ; les applications:  $\bar{A}$  donnée par  $\bar{A}P = PA$ ,  $\bar{B} = PB$ ,  $\bar{Q}$  donnée par  $\bar{Q}P = Q$ . Le « système quotient » suivant peut alors être défini dans  $\bar{\mathcal{X}}$ :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad (3.31)$$

ainsi que le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu) = \{\bar{x}; |\bar{Q}\bar{x}| \leq \mu\}$ , et son extension à  $\mathbb{R}^n$ ,  $S(\bar{Q}, \mu) = \bar{S}(\bar{Q}, \mu)P$ .

L' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre symétrique par rapport à un système continu peut également être caractérisée selon le résultat suivant, lequel peut être démontré de la même façon que le corollaire 2.3.

**Corollaire 3.2** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1) si et seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $(A, B)$ -invariant.*
2. *Le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (3.31).*

### 3.2.3 $(A, B)$ -invariance avec taux de convergence exponentiel

Comme pour les systèmes en temps discret, dans le cas où l'origine appartient à l'intérieur d'un domaine compact, il est possible de doter la trajectoire du système d'un certain taux de convergence. Soit donc la fonctionnelle de Minkowski de  $R[G, \rho]$ :

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{G_i}{\rho_i} x \right\}. \quad (3.32)$$

La dérivé totale de  $\Psi(x)$  par rapport au système (3.1) est donnée par :

$$\mathcal{D}^+(x, u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{\Psi(x + \Delta t(Ax + Bu)) - \Psi(x)}{\Delta t} \right\}.$$

**Définition 3.3** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $(A, B)$ -invariant avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , si  $\forall x(0) \in R[G, \rho]$  il existe une fonction de commande  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , telle que la trajectoire du vecteur d'état vérifie :

$$\mathcal{D}^+(x, u) \leq -\epsilon\Psi(x).$$



Le résultat suivant peut donc être établi :

**Proposition 3.3** *Un polyèdre convexe  $R[G, \rho] \subset \mathbb{R}^n$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1), avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon$ , si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YG = TGA \quad (3.33)$$

$$Y\rho \leq -\epsilon T\rho \quad (3.34)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \text{ si } T_{ij} = 0. \quad (3.35)$$

**Démonstration :** La démonstration se sert des mêmes idées que celle de la proposition 3.2. Seules les lignes générales de la démonstration de la suffisance seront donc présentées.

Soit  $I(x)$  l'ensemble d'indices  $k$  pour lesquels  $\Psi(x) = \frac{G_k x}{\rho_k}$ . Par définition de  $\Psi(x)$ ,

$$\begin{cases} G_k x = \rho_k \Psi(x) & \text{pour } k \in I(x) \\ G_l x < \rho_l \Psi(x) & \text{pour } l \notin I(x) \end{cases}$$

En outre, en raison de la continuité de  $\Psi(x)$ , il peut être démontré que [81] :

$$\mathcal{D}^+(x, u) = \max_{k \in I(x)} \left\{ \frac{G_k(Ax + Bu)}{\rho_k} \right\}. \quad (3.36)$$

Considérons à présent la matrice  $T_b = [T_{bk} \ 0]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur du cône polyédrique  $\{w \geq 0 : w^T(G_k B) = 0\}$ . À partir des relations (3.33)-(3.35) et de la démonstration de la proposition 3.2, il existe une matrice  $Y_b$ , avec  $Y_{bij} \geq 0$  si  $T_{bij} = 0$ , telle que  $T_b G A x = Y_b G x \leq Y_b \rho \Psi(x) \leq -\epsilon T_b \rho \Psi(x)$ . Alors, d'après le lemme A.2, il existe un vecteur  $u$  tel que  $G_k A x + G_k B u \leq -\epsilon \rho_k \Psi(x)$ , et donc,  $\mathcal{D}^+(x, u) \leq -\epsilon \Psi(x)$ .  $\square$

On peut remarquer que dans le cas considéré (domaine compact contenant l'origine),  $\Psi(x)$  est une fonction de Lyapunov du système (3.1).

Le résultat décrit par la proposition précédente peut être facilement spécialisé au cas de polyèdres symétriques. Soit donc la matrice  $\mathcal{T}$ , définie comme dans l'énoncé du corollaire 3.1.

**Corollaire 3.3** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est  $(A, B)$ -invariant avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon$ , par rapport au système (3.1), si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = TQA, \quad (3.37)$$

$$\tilde{Y}\mu \leq -\epsilon |\mathcal{T}|\mu, \quad (3.38)$$

où  $\tilde{Y}$  est donné par :

$$\tilde{Y}_{ij} = \begin{cases} |Y_{ij}| & \text{si } \mathcal{T}_{ij} = 0 \\ Y_{ij} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} > 0 \\ -Y_{ij} & \text{si } \mathcal{T}_{ij} < 0 \end{cases} .$$

**Démonstration :** Immédiate, à partir des démonstrations de la proposition 3.2 et du corollaire 3.1.

### 3.3 Approximation du Domaine $(A, B)$ -invariant Suprémal

Comme pour le cas discret, étant donné un domaine convexe  $\Omega$ , il est possible de démontrer que la classe de tous les domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $R[G, \rho]$  possède un élément supremum,  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Ceci découle de la propriété suivante :

**Proposition 3.4** *La famille de tous les domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans un domaine convexe  $\Omega$  est fermée sous l'opération « enveloppe convexe de l'union ».*

**Démonstration :** Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $\Omega$ . Alors, pour  $x(0) = x_1 \in \mathcal{S}_1$  et  $x(0) = x_2 \in \mathcal{S}_2$ , il existe respectivement des commandes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  telles que :

$$x_1(t) = e^{At}x_1 + \int_0^t e^{A(t-\theta)}Bu_1(\theta)d\theta \in \mathcal{S}_1 \quad \forall t \geq 0,$$

$$x_2(t) = e^{At}x_2 + \int_0^t e^{A(t-\theta)}Bu_2(\theta)d\theta \in \mathcal{S}_2 \quad \forall t \geq 0,$$

Soit maintenant  $x$  un point appartenant à l'enveloppe convexe de l'union de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  :  $x \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ . Alors,  $x$  peut être écrit sous la forme :  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ , avec  $x_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{S}_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Soit aussi la commande :  $u(t) = \alpha u_1(t) + (1 - \alpha)u_2(t)$ . Alors, pour  $x(0) = x \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta \\ &= e^{At}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) + \int_0^t e^{A(t-\theta)}B(\alpha u_1(\theta) + (1 - \alpha)u_2(\theta)) \\ &= \alpha x_1(t) + (1 - \alpha)x_2(t) \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

□

Ce résultat garantit l'existence dans la famille des domaines  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $\Omega$  de l'élément suprémal :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \triangleq \text{domaine } (A, B)\text{-invariant suprémal inclus dans } \Omega.$$

Étudions à présent le cas polyédrique:  $\Omega = R[G, \rho]$ . Contrairement aux systèmes en temps discret, le domaine suprémal  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  n'est pas polyédrique en général dans le cas continu, ce qui rend très difficile son calcul exact. Une approximation polyédrique arbitrairement proche de  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho])$  peut néanmoins être obtenue si l'on considère le système approché d'Euler (SAE) de (3.1), décrit par [18, 19] :

$$x_{k+1} = (I + \tau A)x_k + \tau B u_k, \quad \tau > 0. \quad (3.39)$$

**Proposition 3.5** *Si  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au SAE (3.39), alors  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1).*

**Démonstration :** Puisque  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport à (3.39), alors, d'après la proposition 2.3, il existe une matrice non négative  $K$  telle que :

$$KG = \frac{1}{\tau}TG(I + \tau A), \quad (3.40)$$

$$K\rho \leq \frac{1}{\tau}T\rho, \quad (3.41)$$

où les lignes de  $T$  forment un ensemble générateur du cône polyédrique  $\Gamma$  (2.5). Les expressions précédentes peuvent être mises sous la forme :

$$(K - \frac{1}{\tau}T)G = TGA,$$

$$(K - \frac{1}{\tau}T)\rho \leq 0,$$

ce qui implique, d'après la proposition 3.2, l' $(A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$  par rapport au système (3.1).  $\square$

**Proposition 3.6** *Si  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au SAE (3.39), alors  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au SAE  $x_{k+1} = (I + \tau' A)x_k + \tau' B u_k, \forall \tau' \leq \tau$ .*

**Démonstration :** Puisque  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport à (3.39), alors, d'après la proposition 2.3, il existe une matrice non négative  $K$  telle que (3.40), (3.41) soient vérifiées. Ces expressions peuvent être réécrites sous la forme :

$$(K + (1 - \frac{\tau'}{\tau})\frac{T}{\tau'})G = \frac{1}{\tau'}TG(I + \tau' A),$$

$$(K + (1 - \frac{\tau'}{\tau})\frac{T}{\tau'})\rho \leq \frac{1}{\tau'}T\rho,$$

ce qui implique, d'après la proposition 2.3, l' $(A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$  par rapport au système  $x_{k+1} = (I + \tau'A)x_k + \tau'Bu_k, \forall \tau' \leq \tau. \square$

**Corollaire 3.4** Soient  $\mathcal{C}_1^\infty(R[G, \rho])$  et  $\mathcal{C}_2^\infty(R[G, \rho])$  les domaines  $(A, B)$ -invariants suprémaux inclus dans  $R[G, \rho]$  par rapport au SAE (3.39) avec  $\tau = \tau_1$  et  $\tau = \tau_2$  respectivement. Si  $\tau_1 < \tau_2$ , alors  $\mathcal{C}_2^\infty(R[G, \rho]) \subset \mathcal{C}_1^\infty(R[G, \rho])$ .

**Démonstration :** Immédiate à partir de la proposition 3.6.  $\square$

Des approximations arbitrairement proches de  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho])$  peuvent donc être obtenues en calculant le domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans  $R[G, \rho]$ , par rapport à un système en temps discret (3.39), avec  $\tau$  suffisamment petit.

Une approximation du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans  $R[G, \rho]$  avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon$ ,  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \epsilon)$ , peut également être obtenue à partir d'un SAE. Ceci est basé sur le résultat suivant, lequel peut être démontré de la même façon que la proposition 3.5 :

**Proposition 3.7** Si  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ - $\lambda$ -contractif par rapport au SAE (3.39), alors  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon = \frac{(1-\lambda)}{\tau}$  par rapport au système (3.1).

Pour ce qui est de polyèdres symétriques non bornés, il peut être démontré sans peine que la proposition 2.6 est également valable pour les systèmes en temps continu.

### Exemple 3.1

Soit le système (3.1) pour lequel :

$$A = \begin{bmatrix} -0.14 & -1.27 \\ -1.35 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et le polyèdre  $R[G, \rho]$  avec

$$G = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0.35 \\ 0.25 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le but est de calculer une approximation de  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \epsilon)$ , le domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans  $R[G, \rho]$  avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon = 0.5$ . Soit donc le SAE (3.39) avec  $\tau = 0.1$ . D'après la proposition 3.7, une telle approximation peut être obtenue en calculant  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \lambda)$ , avec  $\lambda = 0.95$ , par rapport à (3.39), ce qui donne au bout de 89 itérations,  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \lambda) = R[G^{89}, \rho^{89}]$ , avec :

$$G^{89} = \begin{bmatrix} G \\ -86.4109 & 11.1300 \\ 86.4109 & -11.1300 \end{bmatrix}, \quad \rho^{89} = \begin{bmatrix} \rho \\ 64.8682 \\ 324.3406 \end{bmatrix}.$$

Les polyèdres  $R[G, \rho]$  et  $R[G^{89}, \rho^{89}]$  sont représentés dans la figure 3.1.

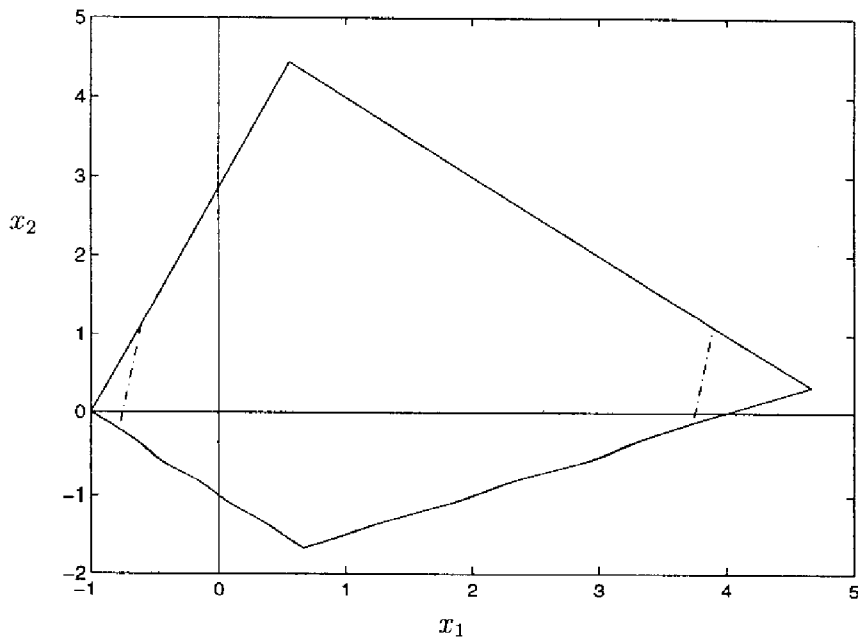


FIG. 3.1 –  $R[G, \rho]$  et une approximation de  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \epsilon)$ .

Pour  $R[G^{89}, \rho^{89}]$ , une matrice  $T^{89}$  dont les vecteurs ligne génèrent le noyau non négatif à gauche de  $G^{89}B$  est donnée par :

$$T^{89} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0898 \\ 0 & 1 & 2.8571 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8571 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8571 & 0 & 0 & 0.0898 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.0898 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0.0898 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0898 & 0.0898 \end{bmatrix}.$$

Les conditions d' $(A, B)$ -invariance avec taux de convergence  $\epsilon$  (3.33)-(3.35) sont vérifiées par la matrice :

$$Y^{89} = \begin{bmatrix} -100.0000 & -20.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100.0000 & 0 & 0 & -44.1301 & 0 & 0.3567 \\ -50.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1015 \\ 0 & -23.9969 & -100.0000 & 0 & 1.4287 & 0 \\ 0 & 19.1567 & -100.0000 & -100.0000 & 0.6424 & 0 \\ 69.9846 & 0 & -100.0000 & 0 & 0 & -1.3272 \\ 0 & -10.0000 & 0 & 0 & 0.1015 & 0 \\ 0 & 33.1536 & 0 & -100.0000 & -0.6848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100.0000 & -100.0000 \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Calcul d'Une Loi de Commande

À l'exemple des systèmes en temps discret, l' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre pour un système en temps continu ne présuppose pas un type particulier de loi de commande. Le même type de loi de commande à structure variable que celui proposé dans le chapitre 2 pour des systèmes discrets peut néanmoins être utilisé pour imposer l'invariance positive en boucle fermée d'un polyèdre  $(A, B)$ -invariant. Une telle loi a été proposée dans [18] pour des polyèdres compacts. Son extension au cas de polyèdres non compacts a été présentée dans la démonstration de la proposition 3.2. La fonction de commande  $u(x)$  (3.20) peut donc être implémentée à travers la partition (2.38), résultant ainsi en la loi de commande :

$$u(t) = F_r x(t) = U_r (X_r)^{-1} x(t), \quad \text{pour } x(t) \in \mathcal{X}_r. \quad (3.42)$$

Pour des polyèdres symétriques non bornés, la loi de commande peut être calculée d'une façon décomposée, à l'exemple des systèmes en temps discret. Le résultat suivant, lequel peut être facilement montré à partir du corollaire 3.2, peut donc être établi :

**Corollaire 3.5** *Si le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1), alors une loi de commande le rendant positivement invariant en boucle fermée est donnée par :*

$$u(t) = F^v x(t) + u^s(t),$$

où  $F^v$  est tel que  $\ker(Q)$  soit  $(A + BF^v)$ -invariant, et  $u^s(t)$  est une loi de commande qui rende positivement invariant en boucle fermée le polyèdre  $\tilde{S}(\tilde{Q}, \mu)$  défini pour le système (3.31)

Il convient de mentionner encore que dans [19] une autre loi de commande à structure variable à été proposée, toujours pour des polyèdres compacts. Elle est certes plus simple que la loi (3.42), mais elle est discontinue et ne s'applique qu'à des systèmes mono-entrées.

### 3.4.1 Existence d'une loi de commande linéaire

Comme pour les systèmes en temps discret, nous avons observé que dans beaucoup de cas il est possible d'obtenir l'invariance positive en boucle fermée à partir de lois de commande bien plus simples que la loi (3.42).

**Proposition 3.8** *Soit la matrice  $T$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma$  (2.5) et la matrice  $\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}$  dont les vecteurs ligne engendrent le noyau à gauche de l'application  $GB$ . S'il existe une matrice essentiellement non négative  $H$  ( $H_{ij} \geq 0 \forall i \neq j$ ) telle que :*

$$\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} HG = \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} GA, \quad (3.43)$$

$$TH\rho \leq 0, \quad (3.44)$$

alors le polyèdre  $R[G, \rho] \subset \mathfrak{R}^n$  est  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1) et positivement invariant sous une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u = Fx + u_c. \quad (3.45)$$

**Démonstration :** L'(A, B)-invariance de  $R[G, \rho]$  peut être démontrée facilement par application de la proposition 3.2 sous le choix  $Y = TH$ . La relation (3.43) implique l'existence d'une matrice  $F$  pour laquelle (voir la démonstration de la proposition 2.7) :

$$HG = GA + GBF. \quad (3.46)$$

Par application du lemme A.2, la condition (3.44) équivaut à l'existence d'un vecteur constant  $u_c$  tel que :

$$H\rho + GBu_c \leq 0. \quad (3.47)$$

À partir du développement en série de  $e^{(A+BF)t}$  et  $e^{Ht}$ , et de (3.46), les propriétés suivantes peuvent être facilement démontrées [62] :

$$Ge^{(A+BF)t} = e^{Ht}G,$$

$$e^{Ht} = I + \int_0^t e^{H\theta} d\theta H, \quad \int_0^t e^{H\theta} d\theta = \int_0^t e^{H(t-\theta)} d\theta.$$

En plus, si  $H$  est essentiellement non négative, alors  $e^{Ht} \geq 0 \forall t \geq 0$ . Par conséquent, le choix d'une loi de commande par retour d'état (3.45) vérifiant (3.46), (3.47) garantit,  $\forall x(0) \in R[G, \rho]$ ,

$$\begin{aligned} Gx(t) &= Ge^{(A+BF)t}x(0) + \int_0^t Ge^{(A+BF)(t-\theta)} Bu_c d\theta = \\ &e^{Ht}Gx(0) + \int_0^t e^{H(t-\theta)} GBu_c d\theta \leq \\ &e^{Ht}\rho + \int_0^t e^{H(t-\theta)} GBu_c d\theta = \\ &(I + \int_0^t e^{H(t-\theta)} d\theta H)\rho + \int_0^t e^{H(t-\theta)} GBu_c d\theta = \\ &\rho + \int_0^t e^{H(t-\theta)} d\theta (H\rho + GBu_c) \leq \rho. \end{aligned}$$

□

Il peut être montré que les conditions (3.43), (3.44) sont également nécessaires pour qu'il existe une loi de commande du type (3.45).

Si le terme de commande constant  $u_c$  n'est pas nul, alors la trajectoire du système en boucle fermée ne converge pas vers l'origine. Si elle converge, l'équilibre est atteint à l'état  $x_f \in R[G, \rho]$  qui vérifie  $(A + BF)x_f = -Bu_c$ .

Cependant, à l'exemple du cas discret, si  $R[G, \rho]$  est compact, alors la convergence vers l'origine peut être imposée par une loi de commande à structure variable. Reconsidérons donc la fonctionnelle de Minkowski (3.32).

**Proposition 3.9** *Si  $R[G, \rho]$  est positivement invariant avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon$  sous une loi de commande (3.45), alors la trajectoire du système (2.1) converge*



vers l'origine sous la loi de commande à structure variable :

$$u = Fx + u_c \Psi(x). \quad (3.48)$$

**Démonstration :** La dérivé totale de  $\Psi(x)$  par rapport au système (3.1) est donnée par (3.36) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+(x, u) &= \max_{k \in I(x)} \left\{ \frac{G_k(Ax + Bu)}{\rho_k} \right\} \\ &= \max_{k \in I(x)} \left\{ \frac{G_k((A + BF)x + Bu_c \Psi(x))}{\rho_k} \right\} \\ &= \max_{k \in I(x)} \left\{ \frac{H_k Gx + G_k B u_c \Psi(x)}{\rho_k} \right\} \quad (\text{à partir de (3.46)}). \end{aligned}$$

Par définition de  $\Psi(x)$ ,  $\begin{cases} G_k x = \rho_k \Psi(x) & \text{pour } k \in I(x) \\ G_l x < \rho_l \Psi(x) & \text{pour } l \notin I(x) \end{cases}$ . Alors, puisque  $H$  est essentiellement non négative,

$$\mathcal{D}^+(x, u) \leq \max_{k \in I(x)} \left\{ \frac{(H_k \rho + G_k B u_c) \Psi(x)}{\rho_k} \right\} < 0 \quad (3.49)$$

en raison de (3.47), de l'hypothèse  $\epsilon > 0$  et de la définition positive de  $\Psi(x)$ .  $\square$

Une loi discontinue avec la même structure que (3.48) en ce qui concerne le partage des régions a été proposée dans [19] pour des systèmes mono-entrées.

### Exemple 3.2

Reprenons le système (3.1) représenté par la paire  $(A, B)$  de l'exemple 3.1, et soit le polyèdre  $R[G, \rho]$  défini par :

$$G = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Une matrice  $T$  dont les lignes génèrent le noyau non négatif à gauche de  $GB$  est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2.8561 \end{bmatrix},$$

et les conditions de la proposition 3.2 sont vérifiées avec :

$$Y = \begin{bmatrix} -100 & -20 & 0 \\ 0 & -3.7686 & 3.2286 \end{bmatrix}.$$

Le polyèdre  $R[G, \rho]$  peut être représenté sous la forme (3.19) à partir des sommets :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 4.4444 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et du générateur :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

partageant donc  $R[G, \rho]$  en trois régions :

- $\mathcal{X}_1$  définie par les sommets  $x_1$  et  $x_2$ ,
- $\mathcal{X}_2$  définie par le sommet  $x_1$  et le générateur  $M_1$ ,
- $\mathcal{X}_3$  définie par le sommet  $x_2$  et le générateur  $M_1$ .

Des commandes admissibles associées (vérifiant (3.17) ou (3.18)) sont données respectivement par :

$$v_1 = -100, \quad v_2 = -1.35, \quad w_1 = 0.8485.$$

Une loi de commande du type (3.42) peut donc être utilisée, avec :

- $F_1 = \begin{bmatrix} 1.3500 & -22.6688 \end{bmatrix}$ ,
- $F_2 = \begin{bmatrix} -18.9333 & -20.1333 \end{bmatrix}$ ,
- $F_3 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0.15 \end{bmatrix}$ .

Il est néanmoins possible d'imposer l'invariance positive de  $R[G, \rho]$  au moyen d'une loi de commande linéaire du type (3.45). En effet, les conditions de la proposition 3.8 sont vérifiées avec

$$H = \begin{bmatrix} -0.1400 & 0.7257 & 0 \\ 0 & -3.7686 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1300 \end{bmatrix}.$$

Une loi de commande admissible est alors donnée par  $u(t) = Fx(t) + u_c$ , avec  $F = \begin{bmatrix} -2.2786 & -3.4786 \end{bmatrix}$ ,  $u_c = -3.6286$ . Pour cet exemple, il n'est pas possible d'obtenir l'invariance positive en boucle fermée de  $R[G, \rho]$  avec  $u_c = 0$ .

Le polyèdre  $R[G, \rho]$  divisé en régions est représenté dans la figure 3.2, ainsi que deux trajectoires partant du point  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  : l'une sous la loi linéaire (3.45) et l'autre sous la loi linéaire par morceaux (3.42).

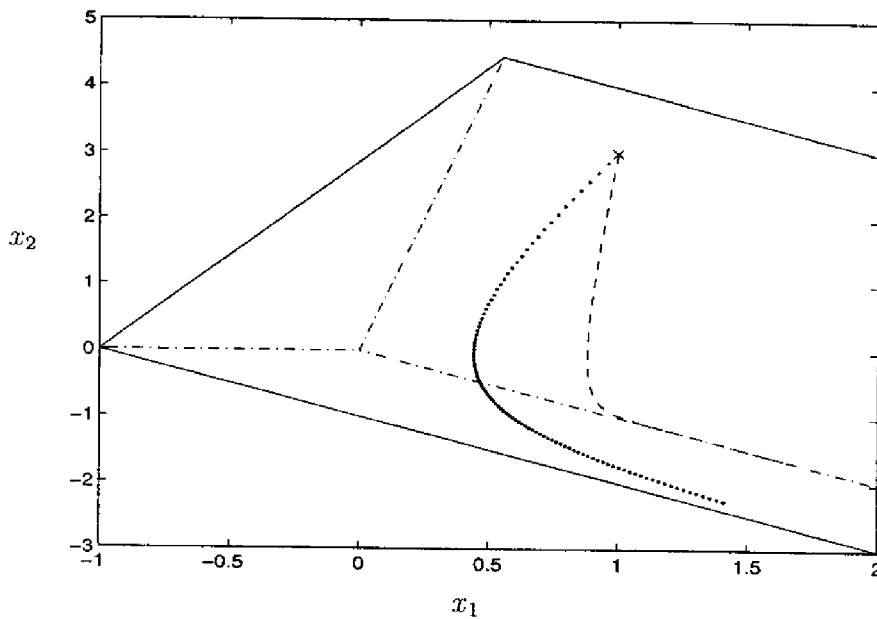


FIG. 3.2 -  $R[G, \rho]$  divisé en secteurs, avec des trajectoires résultant:  $\cdots$  de la loi de commande linéaire;  $---$  de la loi de commande linéaire par morceaux.

Il est intéressant de remarquer que la trajectoire obtenue sous la loi de commande linéaire par morceaux reste dans le cône  $R[G, 0]$  à partir du moment où elle l'atteint. Ceci est dû au fait que cette loi, par construction, rend le cône caractéristique positivement invariant.

On peut également noter que le système en boucle fermée est instable.

### 3.5 Systèmes Soumis à des Contraintes sur la Commande

Supposons à présent que les entrées du système (3.1) soient soumises aux contraintes :

$$u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.50)$$

**Définition 3.4** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1), (3.50) si pour tout état initial  $x(0) \in \Omega$  il existe une fonction de commande  $u(t) \in \mathcal{U} \forall t \geq 0$ , telle que  $x(t) \in \Omega \forall t \geq 0$ .

Nous étudierons à présent cette propriété appliquée à des polyèdres convexes  $R[G, \rho]$  pour des systèmes soumis à des contraintes (3.50) du type polyédriques, c'est-à-dire avec :

$\mathcal{U} = R[U, \psi] = \{u \in \mathfrak{R}^m ; Uu \leq \psi\}$ . Pour ce faire, considérons à nouveau la matrice  $[T_g \ T_u]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma_u$ , défini comme dans (2.53) par :

$$\Gamma_u = \left\{ \left[ \begin{array}{c} w_g \\ w_u \end{array} \right] ; \left[ \begin{array}{c} w_g \\ w_u \end{array} \right] \geq 0, \left[ \begin{array}{c} w_g \\ w_u \end{array} \right] [(GB)^T \ U^T] = 0, \right\}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l' $\mathcal{U}$ -(A, B)-invariance de  $R[G, \rho]$  est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 3.10** *Le polyèdre  $R[G, \rho] \subset \mathfrak{R}^n$  est  $\mathcal{U}$ -(A, B)-invariant par rapport au système (3.1), (3.50), avec  $\mathcal{U} = R[U, \psi]$ , si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YG = T_g GA \quad (3.51)$$

$$Y\rho \leq T_u \psi \quad (3.52)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \quad \text{si } T_{g_{ij}} = 0. \quad (3.53)$$

**Démonstration :** Cette proposition peut être montrée essentiellement de la même façon que la proposition 3.2. C'est pourquoi quelques détails sont omis.

**Nécessité :** Supposons que  $R[G, \rho]$  soit  $\mathcal{U}$ -(A, B)-invariant par rapport au système (3.1), (3.50). Soit  $[T_{g_i} \ T_{u_i}]$  un vecteur ligne de la matrice non négative  $[T_g \ T_u]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône  $\Gamma_u$  (2.53). Le programme linéaire  $(P_i)$  suivant peut être associé à ce vecteur :

$$\max_x z_i = T_{g_i} GAx$$

$$\text{sous : } G_j x = \rho_j \quad \text{si } T_{g_{ij}} \neq 0 \quad (3.54)$$

$$G_j x \leq \rho_j \quad \text{si } T_{g_{ij}} = 0 \quad (3.55)$$

ainsi que son dual  $(D_i)$  :

$$\min_{Y_i} y_i = Y_i \rho$$

$$\text{sous : } Y_i G = T_{g_i} GA \quad (3.56)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \quad \text{si } T_{g_{ij}} = 0 \quad (3.57)$$

Deux situations sont alors possibles :

- Si l'ensemble de conditions (3.54), (3.55) est admissible, alors il faut qu'il existe un vecteur de commande  $u$  tel que :

$$G_j \hat{x} = G_j Ax + G_j Bu \leq 0, \quad \forall j; T_{ij} \neq 0. \quad (3.58)$$

$$Uu \leq \psi$$

La multiplication à gauche de chaque condition (3.58) par  $[T_{gij} \ T_{uij}]$  donne, pour tout  $x$  vérifiant (3.54), (3.55) :

$$z_i = T_{g_i} G A x \leq T_{u_i} \psi.$$

Par conséquent, la solution optimale du problème dual ( $D_i$ ) vérifie :

$$Y_i^* \rho \leq T_{u_i} \psi$$

- Si les conditions (3.54), (3.55) ne sont pas admissibles, alors la solution optimale à ( $D_i$ ) est non bornée. Il existe alors un vecteur ligne  $Y_i^*$  vérifiant (3.56), (3.57) et tel que  $Y_i^* \rho \leq T_{u_i} \psi$ .

### Suffisance :

Supposons qu'il existe une matrice  $Y$  vérifiant les conditions (3.51)-(3.53). Soit un point  $x$  sur la frontière représenté par (3.11). Soit aussi la matrice non négative  $[T_{gb} \ T_{ub}]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum de  $\left\{ \begin{bmatrix} w_g \\ w_u \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} w_g \\ w_u \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} w_g \\ w_u \end{bmatrix} [(G_1 B)^T \ U^T] = 0, \right\}$ . Tout vecteur ligne  $[T_{gb} \ T_{ub}]_i$  peut être complété de manière à former un vecteur  $t_i = [t_g \ t_u]_i \in \Gamma_u$  donné par :  $[T_{gb} \ 0 \ T_{ub}]_i$ . Alors,  $\exists \Xi \geq 0$  tel que :  $t = \Xi [T_g \ T_u]$ . La multiplication à gauche des relations (3.51)-(3.53) par  $\Xi$  donne, avec  $Z = \Xi Y$  :

$$ZG = tGA = T_{gb} G_1 A,$$

$$Z\rho \leq T_{ub} \psi,$$

$$Z_{ij} \geq 0 \text{ si } t_{gij} = 0,$$

ce qui montre, par dualité, que pour  $x$  vérifiant (3.11) :

$$T_{gb} G_1 A x \leq T_{ub} \psi.$$

D'après le lemme A.2, cette relation équivaut à l'existence d'un vecteur  $u \in \mathfrak{R}^m$  tel que :

$$\begin{aligned} G_1 \dot{x} &= G_1 A x + G_1 B u \leq 0 \\ U u &\leq \psi \end{aligned}$$

À partir de là, en utilisant les mêmes arguments développés dans la démonstration de la proposition 3.2, on peut montrer l'existence d'une loi de commande dans la classe  $\mathcal{C}_L$  qui génère un déplacement admissible à partir de chaque point de la frontière de  $R[G, \rho]$ .

□

Supposons maintenant que le domaine  $\mathcal{U}$  soit symétrique :  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ , et considérons la matrice  $[\mathcal{T}_q \ \mathcal{T}_u]$  définie avant le corollaire 2.5. Les résultats suivants peuvent être montrés de la même façon que leurs équivalents en temps discret.

**Corollaire 3.6** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1), (3.50), avec  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ , si et seulement si il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = \mathcal{T}_qQA, \quad (3.59)$$

$$\tilde{Y}\mu \leq |\mathcal{T}_v|\phi, \quad (3.60)$$

avec  $\tilde{Y}$  définie comme dans le corollaire 3.3.

Pour terminer, les conditions nécessaires suivantes peuvent être établies pour l' $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques non bornés.

**Corollaire 3.7** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (3.1), (3.50), avec  $\mathcal{U} = S(V, \phi)$ , seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $\mathcal{U}$ - $(A, B)$ -invariant.*
2. *Le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $\mathcal{U} - (\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (3.31).*

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étendu aux systèmes linéaires en temps continu les résultats obtenus dans le chapitre 2 pour le cas discret, concernant la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes. Cette extension n'a pas été sans difficulté, car en raison du caractère continu des trajectoires nous avons dû étudier le comportement infinitésimal des trajectoires du vecteur d'état.

Nous avons donc proposé des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre convexe soit  $(A, B)$ -invariant, sous la forme de relations matricielles linéaires, lesquelles ne dépendent que des matrices définissant le système et le polyèdre. Nous estimons que ce résultat, ainsi que ses extensions, sont assez originaux, car jusqu'à présent, à notre connaissance, aucune caractérisation équivalente n'était disponible. La seule que nous ayons pu trouver dans la littérature fait appel à une approximation en temps discret du système d'origine, ce qui résulte en des conditions seulement suffisantes puisqu'il n'y a pas de méthode systématique pour déterminer un degré d'approximation adéquat.

Nous avons cependant été contraints de faire appel à l'approximation en temps discret pour pouvoir calculer une approximation du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre.

Enfin, nous avons étendu au cas continu les résultats relatifs aux polyèdres symétriques, au calcul d'une loi de commande, et aux systèmes dont la commande est contrainte.





## Chapitre 4

# Atténuation de Perturbations Persistantes - Le Problème $\ell^1$

### 4.1 Introduction

À l'instar du problème de commande optimale  $\mathcal{H}_\infty$ , le problème de commande optimale  $\ell^1$ , pour des systèmes en temps discret ( $\mathcal{L}^1$  pour des systèmes en temps continu), cherche à minimiser l'influence de perturbations additives sur les sorties du système. Pour le problème  $\mathcal{H}_\infty$ , cette influence est mesurée en termes de l'amplification de l'énergie de l'entrée de perturbations, alors que pour le problème  $\ell^1$ , c'est l'amplification maximale de l'amplitude de l'entrée de perturbations qui est prise en compte. Plus précisément, le but du problème  $\ell^1$  est d'obtenir un compensateur qui stabilise le système en boucle fermée, et qui minimise l'amplitude maximale de la sortie du système, excité par des perturbations d'amplitude unitaire. Cela correspond à avoir une atténuation de perturbations uniforme dans le temps, d'où l'autre dénomination du problème  $\ell^1$  : problème d'atténuation (ou rejet pour quelques auteurs) optimale de perturbations persistantes.

Ce problème a initialement été formulé dans [83], où des solutions à des cas simples ont également été proposées. Une solution complète au problème  $\ell^1$  a été proposée dans [28] : à partir d'un paramétrage de tous les compensateurs qui stabilisent le système, un compensateur optimal linéaire, éventuellement dynamique, est obtenu à travers la résolution de programmes linéaires appropriés. Dans [72] il a été montré que des compensateurs statiques mais non linéaires peuvent accomplir la même performance que celle obtenue par des compensateurs dynamiques. Un résultat similaire a été obtenu de façon constructive dans [21] : un compensateur à structure variable y est construit en associant l'obtention d'une performance  $\ell^1$  à l'existence d'un domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant de l'espace d'état. Un domaine est  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant s'il existe une commande capable de forcer la trajectoire

du système à y rester même en présence de perturbations arbitraires, mais appartenant à un domaine borné.

Cette même idée a été employée dans [73]. Cependant, contrairement à [21] qui fait appel à un compensateur linéaire dynamique pour en construire un statique, on y cherche à déterminer directement le meilleur niveau de performance pour lequel il existe un domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant associé. Un niveau de performance donné définit un domaine admissible pour le vecteur d'état. Une condition nécessaire pour l'obtention d'une telle performance est que le domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans le domaine admissible ne soit pas vide.

Cette condition n'est cependant pas suffisante en général, car le domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant suprémal peut ne pas être compact, auquel cas la  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance ne garantit pas la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. Dans [73], ce problème est résolu en bornant artificiellement le domaine de performance. Une telle approche n'est évidemment pas satisfaisante en général, car en fonction de la manière dont le domaine de performance est borné, le domaine suprémal qui en résulte peut s'avérer vide même si une solution existe.

Dans ce chapitre nous étudions dans un premier temps le problème d'atténuation de perturbations persistantes bornées en norme infinie, pour des systèmes en temps discret. Ce problème est connu dans la littérature sous la dénomination de *problème de commande optimale*  $\ell^1$ . Tout d'abord, nous étudions la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes de systèmes soumis à des perturbations appartenant à un domaine borné. En étendant l'étude menée dans le chapitre 2, nous définissons un ensemble  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant, et nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes, sous la forme de relations matricielles linéaires, pour la  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre convexe.

L' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre non compact ne garantit pas l'existence d'une loi de commande qui, à la fois, le rende positivement invariant et stabilise les trajectoires à son intérieur. Cette question peut être traitée à partir de la définition de domaines  $(A, B)$ -invariants *intérieurement stabilisables*. Nous montrons donc que la famille des domaines intérieurement stabilisables, inclus dans un domaine convexe donné, admet un élément suprémal, pour lequel nous proposons un algorithme de calcul. Nous montrons en outre que pour un polyèdre symétrique non borné, ce domaine suprémal est égal à la somme d'un sous-espace intérieurement stabilisable avec un domaine qui est l'extension à l'espace d'état d'un domaine intérieurement stabilisable compact défini dans un espace de dimension réduite.

À partir de l'extension aux systèmes perturbés du concept d' $(A, B)$ -invariance avec stabilisabilité interne, nous établissons donc des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un compensateur qui impose au système un niveau de performance  $\ell^1$  donné. Une solution existe si et seulement si le domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement sta-

bilisable suprémal inclus dans le domaine de performance n'est pas vide. Une approche décomposée, débouchant sur une méthode numérique efficace, est alors proposée pour le calcul de ce domaine suprémal. Cette approche géométrique va nous permettre notamment de déterminer de façon directe la solution au problème de commande optimale  $\ell^1$  pour une classe importante de systèmes à déphasage minimal.

Finalement, nous montrons comment ces résultats peuvent être étendus à la solution du problème d'atténuation de perturbations bornées en norme pour des systèmes en temps continu. Il est connu que le compensateur qui fournit l'atténuation maximale n'est pas rationnel en général. Il est néanmoins possible de calculer un compensateur rationnel sous-optimal à partir d'un système en temps discret qui est une approximation du système en temps continu. Le calcul de ce compensateur est basé sur une approximation du domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable suprémal inclus dans le domaine de performance.

Une grande partie des résultats de ce chapitre ont été rapportés dans les articles [37, 39, 38].

## 4.2 Présentation du Problème $\ell^1$

Soient les espaces :

- $\ell^1$  : l'espace de séquences  $h = \{h_k\}$  telles que :

$$\|h\|_{\ell^1} \triangleq \sum_{k \in \mathcal{N}} |h_k| < \infty,$$

- $\ell^\infty$  : l'espace de séquences  $h = \{h_k\}$  telles que :

$$\|h\|_{\ell^\infty} \triangleq \sup_{k \in \mathcal{N}} |h_k| < \infty,$$

- $\ell_q^\infty$  : l'espace de séquences bornées de vecteurs de  $\mathfrak{R}^q$ ,  $v = \{v_k\}$ , avec une norme définie par :

$$\|v\|_{\ell^\infty} \triangleq \max_{k \in \mathcal{N}} \|v_k\|_\infty = \max_i \|v_{ik}\|_{\ell^\infty}.$$

Soit maintenant un opérateur (fonction de transfert)  $\mathcal{W} : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ . La norme induite  $\ell^\infty$  vers  $\ell^\infty$  de  $\mathcal{W}$  est définie ainsi :

$$\|\mathcal{W}\|_{\ell^\infty \rightarrow \ell^\infty} \triangleq \sup_{\|v\|_{\ell^\infty} \neq 0} \frac{\|\mathcal{W}v\|_{\ell^\infty}}{\|v\|_{\ell^\infty}}.$$

Il se trouve que dans le cas où  $\mathcal{W}$  est un opérateur linéaire, représenté par une matrice  $W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , la norme  $\|W\|_{\ell^\infty \rightarrow \ell^\infty}$  est égale à la norme  $\|W\|_{\ell^1}$  de la matrice de séquences de pondération définie par  $\|W\|_{\ell^1} \triangleq \max_i \sum_{j=1}^q \|W_{ij}\|_{\ell^1}$ . C'est pourquoi, par abus de langage, même dans le cas où  $\mathcal{W}$  n'est pas linéaire, la norme  $\|W\|_{\ell^\infty \rightarrow \ell^\infty}$  est notée  $\|\mathcal{W}\|_{\ell^1}$  [74].

Les systèmes considérés sont linéaires, en temps discret et stationnaires. Ils sont décrits par :

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1 d_k + B_2 u_k, \quad (4.1)$$

$$z_k = Cx_k, \quad (4.2)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état, supposé complètement accessible,  $d \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur d'entrées de perturbation,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrées de commande, et  $z \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sorties commandées.

Le vecteur de perturbations  $d_k$  est supposé contraint d'évoluer dans un domaine borné  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^q$  :

$$d_k \in \mathcal{D} \quad \forall k \in \mathcal{N}. \quad (4.3)$$

On peut voir que ce genre de perturbations agit continûment dans le temps, n'ayant donc pas une énergie finie. C'est précisément la raison pour laquelle ces perturbations sont appelées *perturbations persistantes*. En raison de cette énergie infinie, elles ne peuvent pas être traitées dans le cadre de l'approche  $\mathcal{H}_\infty$ .

La norme induite  $\ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$  du système (4.1)-(4.3), qui sera nommée désormais *norme  $\ell^1$* , est égale à  $\gamma$  si

$$\sup_{\|d\|_{\ell^\infty} \leq 1} \|z\|_{\ell^\infty} = \gamma. \quad (4.4)$$

Ceci implique,  $\forall k \in \mathcal{N}$  :

$$|Cx_k| \leq \gamma \mathbf{1}; \quad \forall \{d_l\}; \quad |d_l| \leq 1, \quad l = 0, 1, \dots, k. \quad (4.5)$$

Selon cette formulation, le domaine d'entrées de perturbation admissibles est donné par :

$$\mathcal{D} = S(I_q, \mathbf{1}) = \{d; |d| \leq \mathbf{1}\} \quad (4.6)$$

et pour une performance  $\ell^1$  donnée,  $\gamma$ , le domaine de vecteurs d'état admissibles est donné par :

$$\Omega = S(C, \gamma \mathbf{1}) = \{x; |Cx| \leq \gamma \mathbf{1}\}. \quad (4.7)$$

Le domaine défini dans l'espace d'état par ces contraintes  $\ell^1$  sera désormais appelé tout simplement *domaine de contraintes*.

Le problème  $\ell^1$  qui sera traité ici peut être formulé ainsi :

**Formulation du Problème  $\ell^1$  :** Étant donnée une performance  $\ell^1, \gamma$ , vérifier s'il existe une séquence de commande qui accomplisse cette performance tout en stabilisant asymptotiquement le système (4.1)-(4.3) avec  $\mathcal{D} = \{0\}$ , et le cas échéant calculer cette séquence de commande.

Le but du problème de commande optimale  $\ell^1$  est donc de calculer la valeur minimale admissible pour  $\gamma$ .

Il a été montré dans [21, 73], et cela est d'ailleurs intuitivement évident à partir de la formulation du problème  $\ell^1$ , que le respect des contraintes de performance (4.7) n'est possible que s'il existe un domaine inclus dans  $\Omega$  tel que la trajectoire du vecteur d'état puisse y être confinée, même en présence de perturbations bornées. De tels domaines seront l'objet d'étude de la section suivante.

### 4.3 Systèmes Soumis à des Perturbations Additives Bornées - $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariance de Polyèdres

Soit le système linéaire, en temps discret, stationnaire, soumis à des perturbations additives, décrit par l'équation (4.1), pour lequel le vecteur de perturbations  $d$  est contraint d'évoluer à l'intérieur d'un domaine borné  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^q$  (4.3). La définition suivante étend le concept d'( $A, B$ )-invariance à ce type de système.

**Définition 4.1** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (4.1), (4.3) si  $\forall x \in \Omega$  il existe un vecteur de commande  $u \in \mathbb{R}^m$  tel que  $Ax + B_1d + B_2u \in \Omega$ ,  $\forall d \in \mathcal{D}$ .

Dans cette définition, il est sous-entendu que le vecteur d'entrées de perturbation n'est pas mesuré, ce qui constitue le cas de plus grand intérêt en pratique. Cette hypothèse sera retenue par la suite. Le cas où les entrées de perturbation sont mesurables a été étudié dans [35].

Le plus grand domaine admissible à un pas du domaine  $\Omega$  par rapport au système (4.1), (4.3) est défini maintenant ainsi [17] :

$$\mathcal{Q}(\Omega, \mathcal{D}) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \exists u \in \mathbb{R}^m ; Ax + Bu \in \Omega \quad \forall d \in \mathcal{D}\}. \quad (4.8)$$

Comme pour le cas non perturbé, il est clair que la  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance de  $\Omega$  équivaut à la condition :

$$\Omega \subset \mathcal{Q}(\Omega, \mathcal{D}). \quad (4.9)$$

### 4.3.1 Polyèdres convexes généraux

Nous nous intéressons à présent à l'étude de la  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes, c'est-à-dire, au cas  $\Omega = R[G, \rho]$ . Les perturbations considérées appartiennent également à un domaine polyédrique borné,

$$\mathcal{D} = R[D, \omega] = \{d \in \mathbb{R}^q ; Dd \leq \omega\}.$$

À un instant  $k$  donné, l'admissibilité du vecteur d'état à l'instant suivant est caractérisée par :

$$GAx_k + GB_1d_k + GB_2u_k \leq \rho \quad \forall d_k \in R[D, \omega].$$

On peut voir que cette condition est satisfaite si et seulement si :

$$GAx_k + GB_2u_k \leq \rho - \delta, \quad (4.10)$$

où les éléments  $\delta_i$  du vecteur  $\delta$  sont donnés par :

$$\delta_i = \max_{d \in R[D, \omega]} G_i B_1 d. \quad (4.11)$$

Le résultat suivant peut donc être énoncé :

**Proposition 4.1**

$$\mathcal{Q}(R[G, \rho], R[D, \omega]) = R[TGA, T(\rho - \delta)],$$

où les vecteurs ligne de la matrice  $T$  forment un ensemble générateur minimum du noyau non négatif à gauche de la matrice  $GB_2$ , défini par :

$$\Gamma = \{w \in \mathbb{R}^q ; w \geq 0, (GB_2)^T w = 0\}. \quad (4.12)$$

**Démonstration :** Immédiate, à partir des relations (4.10), (4.11) et du lemme A.2.  $\square$

La  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance du polyèdre  $R[G, \rho]$  peut donc être caractérisée par la condition géométrique :

$$R[G, \rho] \subset R[TGA, T(\rho - \delta)]. \quad (4.13)$$

Cette condition peut être traduite en une condition algébrique par le biais de la proposition suivante :

**Proposition 4.2** *Le polyèdre convexe  $R[G, \rho]$  est  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (4.1), (4.3), avec  $\mathcal{D} = R[D, \omega]$ , si et seulement s'il existe une matrice non négative  $Y$  telle que :*

$$YG = TGA, \tag{4.14}$$

$$Y\rho \leq T(\rho - \delta). \tag{4.15}$$

**Démonstration :** Immédiate à partir de la condition (4.13) et du lemme A.4.  $\square$

### 4.3.2 Le domaine $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant suprémal

Comme pour le cas de systèmes non perturbés, il est possible de montrer l'existence d'un domaine  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant suprémal, inclus dans un domaine convexe  $\Omega$  :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) \triangleq \text{domaine } \mathcal{D}\text{-(}A, B\text{)-invariant suprémal inclus dans } \Omega.$$

Ce domaine est donné par la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{i+1} &= \mathcal{Q}(\mathcal{C}_i, \mathcal{D}) \cap \mathcal{C}_i, \quad \text{avec } \mathcal{C}_0 = \Omega, \\ \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{C}_i. \end{aligned}$$

Un algorithme de calcul de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  pour  $\Omega = R[G, \rho]$ ,  $\mathcal{D} = R[D, \omega]$  peut également être dérivé de l'algorithme 2.1.

#### Exemple 4.1

Supposons qu'une entrée de perturbations soit rajoutée au système de l'exemple 2.1. Nous nous retrouvons donc avec un système du type (4.1), (4.3).

Avec

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \{d; 0 \leq d \leq 0.2\},$$

le calcul du domaine  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )- $\lambda$ -contractif suprémal (avec  $\lambda = 0.8$ ) inclus dans  $R[G, \rho]$  donne, au bout d'une itération,  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \mathcal{D}, \lambda) = R[G^1, \rho^1]$ , où :

$$G^1 = \begin{bmatrix} G \\ 0.6 & 1.35 \\ -1.5429 & -3.4714 \end{bmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{bmatrix} \rho \\ 5.2 \\ 3.0857 \end{bmatrix}.$$

Puisque la matrice  $G^1$  est la même que celle de l'exemple, 2.1, les lignes de sa matrice  $T^1$  forment un ensemble générateur du cône  $\Gamma$  (4.12).

$$\text{Le vecteur } \delta^1 \text{ (4.11) est donné par : } \delta^1 = \begin{bmatrix} 0.0800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3900 \\ 0 \end{bmatrix},$$

La même matrice  $Y^1$  de l'exemple 2.1 vérifie les conditions de la proposition 4.2.

### 4.3.3 Polyèdres symétriques

La proposition 4.2 peut être spécialisée au cas symétrique, c'est-à-dire, avec  $\Omega = S(Q, \mu)$ , et

$$\mathcal{D} = S(E, \eta) = \{d ; |Ed| \leq \eta\}.$$

Soit la matrice  $[T_1 \ T_2]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma$  (4.12), avec  $G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}$ . Soit également la matrice  $\mathcal{T}$ , sous-matrice de la matrice  $T_1 - T_2$ , formée en supprimant les lignes  $T_{1i} - T_{2i}$  pour lesquelles ou bien  $T_{1i} - T_{2i} = 0$  ou alors  $T_{1i} - T_{2i} = -T_{1j} + T_{2j}$  pour  $j < i$ . Soit enfin le vecteur  $\xi$  dont les éléments  $\xi_i$  sont définis par :

$$\xi_i = \max_{d \in S(E, \eta)} Q_i B_1 d. \quad (4.16)$$

Le résultat suivant peut donc être établi :

**Corollaire 4.1** *Le polyèdre  $S(Q, \mu) \subset \mathfrak{R}^n$  est  $\mathcal{D}$ -(A, B)-invariant par rapport au système (4.1), (4.3) avec  $\mathcal{D} = S(E, \eta)$  si et seulement si  $\mu \geq \xi$  et il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = \mathcal{T}QA, \quad (4.17)$$

$$|Y|\mu \leq |\mathcal{T}|(\mu - \xi). \quad (4.18)$$

**Démonstration :** Il est clair que si  $\mu_i < \xi_i$  pour un certain indice  $i$ , alors le domaine admissible à un pas,  $\mathcal{Q}(S(Q, \mu), S(E, \eta))$ , est vide, d'où la condition nécessaire  $\mu \geq \xi$ . Pour le reste, la démonstration est similaire à celle du corollaire 2.1.  $\square$



Considérons à présent un polyèdre  $S(Q, \mu)$  non borné et sa décomposition sous la forme :

$$S(Q, \mu) = \ker(Q) + S(\bar{Q}, \mu), \quad (4.19)$$

où le polyèdre symétrique compact  $S(\bar{Q}, \mu)$  est la projection de  $S(Q, \mu)$  sur le sous-espace  $\ker(Q)^\perp$ . Considérons également l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(Q)}$  et soit  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Les applications suivantes peuvent alors être définies :

- $\bar{A}$ , l'application induite dans  $\bar{\mathcal{X}}$  par l'application  $A$ , donnée par  $\bar{A}P = PA$ ,
- $\bar{B}_1$ , donnée par  $\bar{B}_1 = PB_1$ ,
- $\bar{B}_2$ , donnée par  $\bar{B}_2 = PB_2$ ,
- $\bar{Q}$ , donnée par  $\bar{Q}P = Q$ .

Alors, le «système quotient» suivant peut être défini dans  $\bar{\mathcal{X}}$  :

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}_1 d_k + \bar{B}_2 u_k, \quad (4.20)$$

ainsi que le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu) = \{\bar{x} ; |\bar{Q}\bar{x}| \leq \mu\}$ .

Pour des polyèdres symétriques non bornés, des résultats analogues à ceux des corollaires 2.3 et 2.4 peuvent donc être établis.

**Corollaire 4.2** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (4.1), (4.3), avec  $\mathcal{D} = S(E, \eta)$ , si et seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est ( $A, B$ )-invariant,*
2. *Le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $\mathcal{D} - (\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (4.20).*

**Corollaire 4.3** *Si le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant avec  $\mathcal{D} = S(E, \eta)$ , alors une loi de commande le rendant positivement  $\mathcal{D}$ -invariant en boucle fermée est donnée par :*

$$u_k = F^v x_k + u_k^s,$$

où  $F^v$  est tel que  $\ker(Q)$  soit  $(A + BF^v)$ -invariant, et  $u_k^s$  est une loi de commande qui rende positivement  $\mathcal{D}$ -invariant en boucle fermée le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  (2.18) défini pour le système (4.20).

Considérons maintenant l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathcal{V}^*}$  et soit  $P_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Le système d'ordre réduit suivant peut être défini :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}_1 d_k + \hat{B}_2 u_k,$$

ainsi que le polyèdre  $\hat{S}(\hat{Q}, \mu) \triangleq \{\hat{x} ; |\hat{Q}\hat{x}| \leq \mu\}$  et son extension à  $\mathbb{R}^n$ ,  $S(\hat{Q}, \mu) = \hat{S}(\hat{Q}, \mu)P_v$ . Un résultat analogue à la proposition 2.6 peut être établi :

**Proposition 4.3**

$$\mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu), S(E, \eta)) = \mathcal{V}^* + \hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu), S(E, \eta)).$$

où  $\hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu), S(E, \eta))$  est défini de façon analogue à celle utilisée pour le domaine  $\hat{\mathcal{C}}^\infty(S(Q, \mu))$  dans la proposition 2.6.

## 4.4 Polyèdres $(A, B)$ -invariants Intérieurement Stabilisables

Reconsidérons maintenant des systèmes non perturbés, étudiés dans le chapitre 2, décrits par (2.1) :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

L' $(A, B)$ -invariance d'un domaine non borné n'implique pas la stabilité asymptotique des trajectoires commandées du vecteur d'état. C'est pourquoi le concept d' $(A, B)$ -invariance avec stabilisabilité interne est d'importance capital pour l'étude de la stabilité de systèmes contraints. Dans ce mémoire, le terme *stabilité interne* par rapport à un domaine convexe donné, veut dire que les trajectoires intérieures à ce domaine convergent vers l'origine.

**Définition 4.2** Un domaine non vide fermé  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable (ou tout simplement *intérieurement stabilisable*) par rapport au système (2.1) si  $\forall x \in \Omega$  il existe une séquence de commande  $\{u_k\}$ ,  $k \in \mathcal{N}$  telle que  $x_k \in \Omega \forall k \in \mathcal{N}$  et  $x_k$  converge asymptotiquement vers l'origine.

Ce concept est la généralisation de celui de sous-espaces  $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables de l'approche géométrique [85, 2].

**Proposition 4.4** La famille de tous les domaines intérieurement stabilisables inclus dans un domaine  $\Omega$  est fermée sous l'opération « enveloppe convexe de l'union ».

**Démonstration :** Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux domaines intérieurement stabilisables inclus dans  $\Omega$ . Soit  $x$  un point appartenant à l'enveloppe convexe de l'union de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  :  $x \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ . Alors,  $x$  peut être écrit sous la forme :  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ , avec  $x_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{S}_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Puisque  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont intérieurement stabilisables, il existe des séquences de commande  $\{u_1\}$  et  $\{u_2\}$  telles que :

$$x_{1k} = A^k x_1 + A^{k-1} B u_{10} + \cdots + B u_{1k-1} \in \mathcal{S}_1,$$

$$x_{2k} = A^k x_2 + A^{k-1} B u_{20} + \cdots + B u_{2k-1} \in \mathcal{S}_2.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe également un nombre entier  $k'$  tel que  $\|x_{1k}\| < \epsilon$ ,  $\|x_{2k}\| < \epsilon$   $\forall k \geq k'$ .

Soit maintenant la séquence de commande :  $\{u\} = \alpha\{u_1\} + (1 - \alpha)\{u_2\}$ . Alors, pour  $x_0 = x \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ ,

$$\begin{aligned} x_k &= A^k x + A^{k-1} B u_0 + \cdots + B u_{k-1} \\ &= A^k (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) + A^{k-1} B (\alpha u_{10} + (1 - \alpha)u_{20}) + \cdots \\ &\quad + B (\alpha u_{1k-1} + (1 - \alpha)u_{2k-1}) \\ &= \alpha x_{1k} + (1 - \alpha)x_{2k} \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2). \end{aligned}$$

En outre, pour tout  $k \geq k'$ ,

$$\|x_k\| = \|\alpha x_{1k} + (1 - \alpha)x_{2k}\| \leq \alpha \|x_{1k}\| + (1 - \alpha) \|x_{2k}\| < \epsilon,$$

ce qui démontre la proposition.  $\square$

Ce résultat garantit l'existence dans la famille des domaines intérieurement stabilisables inclus dans  $\Omega$  d'un élément suprémal :

$$\mathcal{S}^\infty(\Omega) \triangleq \text{domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans } \Omega.$$

Ce domaine suprémal peut être caractérisé comme suit :

**Proposition 4.5** *Soit la formule de récurrence :*

$$\mathcal{S}^0 = 0 \tag{4.21}$$

$$\mathcal{S}^\mu = \{x \in \Omega; \exists u; Ax + Bu \in \mathcal{S}^{\mu-1}\}, \quad \mu = 1, 2, \dots \tag{4.22}$$

Le domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans  $\Omega$  est donné par :  $\mathcal{S}^\infty(\Omega) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{S}^\mu$ .

**Démonstration :** Il suffit de noter que  $\mathcal{S}^\mu$  est l'ensemble d'états qui peuvent être ramenés vers l'origine dans  $\mu$  pas sans sortir de  $\Omega$ . Donc, il est clair que  $\mathcal{S}^{\mu-1} \subset \mathcal{S}^\mu$  et que le domaine intérieurement stabilisable suprémal dans  $\Omega$  est obtenu quand  $\mu \rightarrow \infty$ .  $\square$

On peut également remarquer que chaque domaine  $\mathcal{S}^\mu$  de la récurrence de la proposition 4.5 est lui même intérieurement stabilisable.

#### 4.4.1 Polyèdres convexes généraux

Nous nous intéressons maintenant au calcul de  $\mathcal{S}^\infty(\Omega)$  pour  $\Omega = R[G, \rho]$ .

Soit le domaine  $\mathcal{S}^\mu$  de la récurrence de la proposition 4.5 donné par :

$$\mathcal{S}^\mu = \{x; G^\mu x \leq \rho^\mu\}.$$

Le domaine  $\mathcal{S}^{\mu+1}$  est obtenu à partir du pas (4.22) ainsi :

$$\mathcal{S}^{\mu+1} = \left\{ x; \exists u; \begin{cases} G^\mu(Ax + Bu) \leq \rho^\mu \\ Gx \leq \rho \end{cases} \right\}. \quad (4.23)$$

Soit  $T^\mu$  une matrice dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur du cône polyédrique :

$$\Gamma^\mu = \{t \geq 0; t^T G^\mu B = 0\}.$$

L'application du lemme A.2 donne :

$$\mathcal{S}^{\mu+1} = \left\{ x; \begin{bmatrix} T^\mu G^\mu A \\ G \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} T^\mu \rho^\mu \\ \rho \end{bmatrix} \right\}.$$

Après la suppression de contraintes redondantes, le domaine  $\mathcal{S}^{\mu+1}$  peut être écrit sous la forme :

$$\mathcal{S}^{\mu+1} = \{x; G^{\mu+1} x \leq \rho^{\mu+1}\}.$$

L'algorithme est exécuté jusqu'à ce qu'un point fixe soit numériquement atteint. C'est-à-dire, jusqu'à ce que, pour une précision donnée,  $\mathcal{S}^{\mu+1} = \mathcal{S}^\mu$ . Puisqu'il s'agit de polyèdres, ce test peut se faire par programmation linéaire en appliquant le lemme A.4. Le point fixe est un polyèdre :

$$\mathcal{S}^F = \{x; G^F x \leq \rho^F\}.$$

Ce polyèdre coïncide avec  $\mathcal{S}^\infty(R[G, \rho])$  lorsque  $\mathcal{S}^\infty(R[G, \rho])$  est généré de façon finie, et il est une approximation interne finie de  $\mathcal{S}^\infty(R[G, \rho])$  sinon. Dans les deux cas, le domaine calculé est intérieurement stabilisable.

Il est important de signaler qu'un algorithme similaire a été proposée dans [54] pour résoudre un problème de commande à temps minimum.

#### 4.4.2 Polyèdres symétriques

Dans le cas d'un polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  possédant des directions infinies, le calcul de  $\mathcal{S}^\infty(S(Q, \mu))$  peut être rendu plus simple en utilisant une approche décomposée.

Rappelons avant cela le concept de matrice « amie » d'un sous-espace. Une matrice  $F$  est dite amie d'un sous-espace  $(A, B)$ -invariant  $\mathcal{V}$  si elle vérifie:  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ .

Soit donc  $S(Q, \mu)$  décomposé sous la forme (A.4):

$$S(Q, \mu) = \ker(Q) + S(\bar{Q}, \mu), \quad (4.24)$$

où le polyèdre symétrique compact  $S(\bar{Q}, \mu)$  est la projection de  $S(Q, \mu)$  sur le sous-espace  $\ker(Q)^\perp$ , et considérons le système (2.17).

**Corollaire 4.4** *Le polyèdre symétrique convexe  $S(Q, \mu)$  est intérieurement stabilisable si et seulement si :*

1.  $\ker(Q)$  est un sous-espace intérieurement stabilisable,
2. Le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (2.17).

**Démonstration :** Supposons que  $S(Q, \mu)$  soit  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable. Alors, d'après le corollaire 2.3, le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $(A, B)$ -invariant. Raisonnons maintenant par l'absurde. Supposons que  $\ker(Q)$  soit  $(A, B)$ -invariant, mais ne soit pas intérieurement stabilisable. Soit alors  $\mathcal{V}_g^*$  le plus grand sous-espace intérieurement stabilisable inclus dans  $\ker(Q)$  et décomposons  $\ker(Q)$  ainsi:  $\ker(Q) = \mathcal{V}_g^* \oplus \mathcal{L}$ , avec  $\mathcal{L}$  orthogonal à  $\mathcal{V}_g^*$ . Donc, un point  $x_0 \in \ker(Q)$  peut être écrit sous la forme:  $x_0 = x^v + x^L$ , avec  $x^v \in \mathcal{V}_g^*$ ,  $x^L \in \mathcal{L}$ . Décomposons  $u_k$  sous la forme:  $u_k = F^v x_k + u_k^L$ , avec  $F^v$  amie de  $\ker(Q)$  telle que  $(A + BF^v)|_{\mathcal{V}_g^*}$  soit asymptotiquement stable. L'existence d'un tel  $F^v$  est assurée par le fait que toutes les amies de  $\ker(Q)$  sont également amies de  $\mathcal{V}_g^*$  [85]. Alors,

$$x_k = (A + BF^v)^k (x^v + x^L) + A^{k-1} B u_0^L + \dots + B u_{k-1}^L \in S(Q, \mu).$$

Soit maintenant  $x_k^v = (A + BF^v)^k x^v \in \mathcal{V}_g^*$ , et  $X_k^Q + X_k^{\bar{Q}} = A^{k-1} B u_0^L + \dots + B u_{k-1}^L \in S(Q, \mu)$ , avec  $X_k^Q \in \ker(Q)$ ,  $X_k^{\bar{Q}} \in S(\bar{Q}, \mu)$ . On a donc,

$$x_k = x_k^v + (A + BF^v)^k x^L + X_k^Q + X_k^{\bar{Q}}.$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , la norme du terme  $x_k^v$  devient négligeable. De son côté, la norme de  $(A + BF^v)^k x^L + X_k^Q \in \ker(Q)$  devient très importante (en raison de l'hypothèse  $x^L \in \mathcal{L}$ ), et cela est de même pour la somme de ce terme avec le terme  $X_k^Q$  inclus dans le domaine  $S(\bar{Q}, \mu)$ . Il est donc clair que la trajectoire du système ne converge pas vers l'origine, ce qui contredit l'hypothèse d' $(A, B)$ -invariance avec stabilisabilité interne. La nécessité de la partie 1 du corollaire est donc démontrée. La nécessité de la partie 2 découle de la partie 2 du corollaire 2.3, et du fait que le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  soit compact.

Pour montrer la suffisance, il suffit de décomposer les points de  $S(Q, \mu)$  comme dans (4.24) et d'appliquer la loi de commande  $u_k = F^v x_k + u_k^Q$ , avec  $F^v$  ami de  $\ker(Q)$ , tel que  $(A + BF^v)|_{\ker(Q)}$  soit asymptotiquement stable, et  $u_k^Q$  telle que le polyèdre  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  soit positivement invariant (et par conséquent intérieurement stable, car il est compact) par rapport au système (2.17).  $\square$

La démonstration de la proposition précédente suggère en outre une loi de commande qui rende  $S(Q, \mu)$  positivement invariant avec stabilité interne.

**Corollaire 4.5** *Si le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est intérieurement stabilisable par rapport au système (2.1), alors une loi de commande le rendant positivement invariant, avec stabilité asymptotique en boucle fermée, est donnée par :*

$$u_k = F^v x_k + u_k^s,$$

où  $F^v$  est tel que  $\ker(Q)$  est  $(A + BF^v)$ -invariant, les valeurs propres de  $(A + BF^v)|_{\ker(Q)}$  sont à l'intérieur du cercle unité du plan complexe, et  $u_k^s$  est une loi de commande qui rend positivement invariant en boucle fermée le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  (2.18) défini pour le système (2.17)

On peut voir que cette loi de commande stabilise asymptotiquement le système.

Considérons à présent le domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans  $\ker(Q)$ ,  $\mathcal{S}^\infty(\ker(Q))$ . À partir de la définition 4.2 de domaines intérieurement stabilisables, et du fait que  $\ker(Q)$  est un sous-espace, il est clair que [85, 2] :

$\mathcal{S}^\infty(\ker(Q)) = \mathcal{V}_g^*$  = le plus grand sous-espace  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable inclus dans  $\ker(Q)$ ,

où l'indice  $g$  se réfère aux valeurs propres en boucle fermée situées à l'intérieur du cercle unité du plan complexe.

Il est bien connu que l'invariance en boucle fermée de  $\mathcal{V}_g^*$  avec stabilité asymptotique peut être obtenue au moyen d'une loi de commande par retour d'état :

$$u_k = F^v x_k.$$

Soit  $\mathcal{L}$  le sous-espace orthogonal complémentaire à  $\mathcal{V}_g^*$  dans  $\ker(Q)$ , tel que :

$$\ker(Q) = \mathcal{V}_g^* \oplus \mathcal{L}.$$

Le domaine  $S(Q, \mu)$  est maintenant décomposé ainsi :

$$S(Q, \mu) = \mathcal{V}_g^* + \Psi, \quad (4.25)$$

avec, par définition,  $\Psi = \mathcal{L} + S(\bar{Q}, \mu)$ .

Considérons maintenant l'espace quotient  $\tilde{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathcal{V}_g^*}$  et soit  $P_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Les applications suivantes peuvent alors être définies :

- $\tilde{A}$ , l'application induite dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  par l'application  $A$ , donnée par  $\tilde{A}P_g = P_gA$ ,
- $\tilde{B}$ , donnée par  $\tilde{B} = P_gB_1$ ,
- $\tilde{Q}$ , donnée par  $\tilde{Q}P_g = Q$ .

Alors, le «système quotient» suivant peut être défini dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k. \quad (4.26)$$

Définissons également le sous-espace :

- $\tilde{\mathcal{L}}$  donné par  $\tilde{\mathcal{L}}P_g = \mathcal{L}$ ,

et les domaines :

- $\tilde{S}(\bar{Q}, \mu)$  donné par  $\tilde{S}(\bar{Q}, \mu)P_g = S(\bar{Q}, \mu)$ ,
- $\tilde{\Psi}$  donné par  $\tilde{\Psi}P_g = \Psi$ ,

et

$$\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi}) \triangleq \text{domaine } (\tilde{A}, \tilde{B})\text{-invariant intérieurement stabilisable suprémal inclus dans } \tilde{\Psi}. \quad (4.27)$$

On remarque à partir de ces définitions que

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\mathcal{L}} + \tilde{S}(\bar{Q}, \mu). \quad (4.28)$$

Tous ces domaines sont bien définis car  $\Psi$  appartient à un sous-espace orthogonal au sous-espace  $(A, B)$ -invariant  $\mathcal{V}_g^*$  [85].

Le résultat suivant peut donc être établi :

**Proposition 4.6**  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi})$  est un domaine compact de  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

**Démonstration :** Pour montrer que le polyèdre symétrique  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi})$  est compact, il suffit de montrer qu'il ne possède aucune direction infinie. Supposons que :

$$\exists \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi}); \lambda \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi}) \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.29)$$

Puisque  $\tilde{x} \in \tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{x}$  peut être décomposé sous la forme :  $\tilde{x} = x^L + x^Q$ , avec  $x^L \in \tilde{\mathcal{L}}$  et  $x^Q \in \tilde{S}(\tilde{Q}, \mu)$ . Puisque  $S(\tilde{Q}, \mu)$  est borné dans un sous-espace orthogonal à  $\mathcal{L}$ , (4.29) n'est possible que si  $x^Q = 0$ , donc  $\tilde{x} = x^L \in \tilde{\mathcal{L}}$ . À partir de cela et du corollaire 4.4,  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi})$  ne peut être  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable que s'il existe un sous-espace inclus dans  $\mathcal{L}$  qui soit lui aussi  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable. Or, par hypothèse,  $\mathcal{V}_g^* \cap \mathcal{L} = \{0\}$ , donc (4.29) ne peut être vérifiée que si  $\tilde{x} = x^L = 0$ .  $\square$

Soit maintenant  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi)$  le domaine défini par :  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi) = \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi})P_g$ . Le domaine  $\mathcal{S}^\infty(S(Q, \mu))$  peut être caractérisé comme suit :

**Proposition 4.7**

$$\mathcal{S}^\infty(S(Q, \mu)) = \mathcal{V}_g^* + \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi).$$

**Démonstration :**  $\forall x \in \mathcal{V}_g^* + \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi)$ , il existe  $x^v \in \mathcal{V}_g^*$  et  $x^{S\Psi} \in \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi)$  tels que  $x = x^v + x^{S\Psi}$ . Par construction de  $\mathcal{V}_g^*$  et  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi)$ ,  $\exists F^v$  tel que  $\mathcal{V}_g^*$  est  $(A + BF^v)$ -invariant avec stabilité asymptotique interne, et il existe une séquence de commande  $\{u_k^{S\Psi}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  telle que  $x_k^{S\Psi} \in \mathcal{V}_g^* + \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi)$  et  $x_k^{S\Psi}$  converge asymptotiquement vers l'origine.

Considérons en revanche un point générique  $x \in \mathcal{S}^\infty(S(Q, \mu))$ . À partir de la définition 4.2, il existe une séquence de commande  $\{u_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  telle que, pour  $x_0 = x$ ,  $x_k \in S(Q, \mu) \forall k \in \mathcal{N}$  et  $x_k$  converge asymptotiquement vers l'origine. Maintenant, le vecteur  $x \in S(Q, \mu)$  peut être décomposé conformément à (4.25) :  $x = x^v + x^\Psi$  avec  $x^v \in \mathcal{V}_g^*$  et  $x^\Psi \in \Psi$ . Pour tout instant de temps  $k$ , le vecteur de commande  $u_k$  peut être décomposé sous la forme :  $u_k = F^v x_k^v + u_k^\Psi$ , avec  $F^v$  ami de  $\mathcal{V}_g^*$  et tel que  $(A + BF^v)|_{\mathcal{V}_g^*}$  soit asymptotiquement stable. Alors,  $x_k^v \in \mathcal{V}_g^*$ ,  $\forall k \in \mathcal{N}$ , et converge asymptotiquement vers l'origine. Considérons à présent le système (4.26) et supposons que  $x^\Psi \notin \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi)$ . Donc, ou bien  $\tilde{x}_k^\Psi \notin \tilde{\Psi}$  pour au moins un instant  $k$ , ou alors  $\tilde{x}_k^\Psi$  ne converge pas vers l'origine par rapport à (4.26), ce qui contredit l'hypothèse  $x \in \mathcal{S}^\infty(S(Q, \mu))$ .  $\square$

## 4.5 Solution du Problème $\ell^1$

### 4.5.1 Polyèdres $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables

Le respect des contraintes  $\ell^1$  exige que deux propriétés soient vérifiées par un domaine inclus dans le domaine de contraintes :  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance et stabilisabilité interne. La



combinaison de ces deux concepts donne lieu à la définition suivante :

**Définition 4.3** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable par rapport au système (4.1), (4.3) s'il est à la fois  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant, et intérieurement stabilisable par rapport au système non perturbé ( $\mathcal{D} = \{0\}$ ) décrit par :

$$x_{k+1} = Ax_k + B_2 u_k. \quad (4.30)$$

Comme pour le cas non perturbé, il est également possible de montrer que la famille de tous les domaines  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables est fermée sous l'opération «enveloppe convexe de l'union», ce qui garantit l'existence du domaine :

$$\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) \triangleq \text{domaine } \mathcal{D}\text{-}(A, B)\text{-invariant intérieurement stabilisable suprémal} \\ \text{inclus dans } \Omega.$$

La caractérisation suivante de  $\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  découle directement de la définition 4.3.

#### Corollaire 4.6

$$\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^\infty(\Omega), \mathcal{D}).$$

#### Polyèdres symétriques

Soit un polyèdre symétrique possédant des directions infinies,  $S(Q, \mu)$ , décomposé sous la forme (4.19), et le système d'ordre réduit (4.20).

**Corollaire 4.7** *Le polyèdre symétrique convexe  $S(Q, \mu)$  est  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable si et seulement si :*

1.  $\ker(Q)$  est un sous-espace  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable,
2. Le polyèdre compact  $\tilde{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $\mathcal{D}$ - $(\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (4.20).

**Démonstration :** Analogue à celle du corollaire 4.4.

**Corollaire 4.8** *Si le polyèdre  $S(Q, \mu)$  est  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable par rapport au système (4.1), alors une loi de commande le rendant positivement  $\mathcal{D}$ -invariant, avec stabilité asymptotique en boucle fermée est donnée par :*

$$u_k = F^v x_k + u_k^s,$$

où  $F^v$  est tel que  $\ker(Q)$  soit  $(A+BF^v)$ -invariant et les valeurs propres de  $(A+BF^v)|_{\ker(Q)}$  soient à l'intérieur du cercle unité du plan complexe, et  $u_k^s$  est une loi de commande qui rend positivement  $\mathcal{D}$ -invariant en boucle fermée le polyèdre compact  $\tilde{S}(\tilde{Q}, \mu)$ , défini pour le système (4.20).

Soit maintenant  $\mathcal{L}$  le sous-espace orthogonal complémentaire à  $\mathcal{V}_g^*$  dans  $\ker(Q)$ , tel que :  $\ker(Q) = \mathcal{V}_g^* \oplus \mathcal{L}$ . Le polyèdre  $S(Q, \mu)$  peut donc être décomposé sous la forme :  $S(Q, \mu) = \mathcal{V}_g^* + \Psi$ , avec  $\Psi = \mathcal{L} + S(\tilde{Q}, \mu)$ . Considérons également l'espace quotient  $\tilde{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathcal{V}_g^*}$  et soit  $P_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$  la projection canonique. Les applications suivantes peuvent alors être définies :

- $\tilde{A}$ , l'application induite dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  par l'application  $A$ , donnée par  $\tilde{A}P_g = P_g A$ ,
- $\tilde{B}_1$ , donnée par  $\tilde{B}_1 = P_g B_1$ ,
- $\tilde{B}_2$ , donnée par  $\tilde{B}_2 = P_g B_2$ ,
- $\tilde{Q}$ , donnée par  $\tilde{Q}P_g = Q$ .

Alors, le « système quotient » suivant peut être défini dans  $\tilde{\mathcal{X}}$  :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}_1 d_k + \tilde{B}_2 u_k. \quad (4.31)$$

Définissons également le sous-espace  $\tilde{\mathcal{L}}$  donné par  $\tilde{\mathcal{L}}P_g = \mathcal{L}$ , et les domaines :  $\tilde{S}(\tilde{Q}, \mu)$  donné par  $\tilde{S}(\tilde{Q}, \mu)P_g = S(\tilde{Q}, \mu)$ ;  $\tilde{\Psi}$  donné par  $\tilde{\Psi}P_g = \Psi$ , et

$$\tilde{S}^\infty(\tilde{\Psi}, \mathcal{D}) \triangleq \text{domaine } \mathcal{D}\text{-}(\tilde{A}, \tilde{B})\text{-invariant intérieurement stabilisable} \\ \text{suprémal inclus dans } \tilde{\Psi}. \quad (4.32)$$

**Proposition 4.8**  $\tilde{S}^\infty(\tilde{\Psi}, \mathcal{D})$  est un domaine compact de  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

**Démonstration :** Immédiate à partir de la proposition 4.6 et du corollaire 4.6.  $\square$

**Proposition 4.9**

$$\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) = \mathcal{V}_g^* + \tilde{\mathcal{S}}^\infty(\Psi, \mathcal{D}).$$

**Démonstration :** En tenant compte du corollaire 4.6, la démonstration est analogue à celle de la proposition 4.7.  $\square$

### 4.5.2 Existence de solutions au problème $\ell^1$

On est maintenant en mesure d'établir des conditions d'existence d'une solution au problème  $\ell^1$ . Il suffit en effet de particulariser les résultats précédents au domaine de performance  $\Omega = S(C, \gamma \mathbf{1})$ , au domaine de perturbations  $\mathcal{D} = S(I_q, \mathbf{1})$ , et au système quotient défini par (4.31) et l'équation de sorties :

$$z_k = \tilde{C} \tilde{x}_k, \tag{4.33}$$

où  $\tilde{C}$  est donnée par  $\tilde{C}P_g = C$ .

**Proposition 4.10** *Il existe une solution au problème  $\ell^1$  si et seulement si le domaine  $\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  n'est pas vide.*

**Démonstration :** La nécessité est évidente, car si  $\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  est vide, alors il n'y a pas de séquence de commande capable de respecter les contraintes (4.5) tout en stabilisant le système. La suffisance peut être facilement déduite du corollaire 4.7 de la proposition 4.6 et du corollaire 4.8.  $\square$

Un résultat similaire, mais applicable uniquement dans le cas où  $\Omega$  est compact, a été montré dans [73], à partir d'une approche basée sur la *théorie de viabilité* [1]. Il est important aussi de mentionner les études théoriques [43, 6] qui, dans un cadre plus général, ont traité des problèmes de commande de systèmes soumis à des perturbations bornées.

### 4.5.3 Synthèse d'une solution

Nous nous intéressons à présent à la mise en œuvre de la décomposition proposée précédemment pour le calcul d'une solution au problème  $\ell^1$ . En particulier, il est toujours possible, au moyen de matrices orthogonales, d'appliquer au système (4.1), (4.2), un

changement de base du type [41] :

$$x = R\hat{x}, \quad u = Z\hat{u}, \quad (4.34)$$

où les  $e$  premières colonnes de  $R$  engendrent  $\mathcal{V}_g^*$ . Dans la nouvelle base, les matrices définissant le système sont données par

$$\hat{A} = R^T A R = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = R^T B_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} \\ \hat{B}_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\hat{B}_2 = R^T B_2 Z = \begin{bmatrix} \hat{B}_{211} & \hat{B}_{212} \\ \hat{B}_{221} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = C R = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

ou  $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{e \times e}$ ;  $\hat{B}_{221} \in \mathbb{R}^{(n-e) \times b}$  est une matrice de rang de ligne complet;  $\hat{B}_{11} \in \mathbb{R}^{e \times q}$ ;  $\hat{C}_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n-e)}$ . Le domaine de contraintes est maintenant :  $\hat{\Omega} = \{\hat{x}; |\hat{C}\hat{x}| \leq \gamma \mathbf{1}\}$ .

Cette représentation reflète les décompositions suivantes des espaces d'état et d'entrée :

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2, \quad \mathbb{R}^m = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2,$$

où  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{V}_g^*$ ,  $B_2 \mathcal{U}_2 = \text{Im}(B_2) \cap \mathcal{V}_g^*$ ,  $B_2 \mathcal{U}_1 = \text{Im}(B_2)$ .

Si l'on considère une matrice de retour d'état générique  $\hat{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} \end{bmatrix}$ , avec  $\hat{F}_{11} \in \mathbb{R}^{b \times e}$ , la famille d'amies de  $\hat{\mathcal{V}}_g^*$  est donnée par [41] :

$$\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}_g^*) = \left\{ \hat{F}; \hat{A}_{21} + \hat{B}_{221} \hat{F}_{11} = 0 \right\}, \quad (4.37)$$

et puisque  $\mathcal{V}_g^*$  est intérieurement stabilisable, il existe une matrice  $\hat{F} \in \mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}_g^*)$  telle que :

$$\sigma \left( \hat{A}_{11} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{211} & \hat{B}_{212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{21} \end{bmatrix} \right) \subset \mathcal{C}_g. \quad (4.38)$$

où  $\mathcal{C}_g$  représente l'intérieur du cercle unité du plan complexe.

Considérons à présent le système d'ordre réduit :

$$\hat{x}_{2k+1} = \hat{A}_{22} \hat{x}_{2k} + \hat{B}_{12} d_k + \hat{B}_{221} \hat{u}_{1k}, \quad (4.39)$$

$$y_k = \hat{C}_2 \hat{x}_2, \quad (4.40)$$

et le polyèdre :

$$\hat{\Omega}_2 = \{\hat{x}_2; \hat{C}_2 \hat{x}_2 \leq \gamma \mathbf{1}\}. \quad (4.41)$$

Le système (4.39), (4.40) et le domaine  $\hat{\Omega}_2$  sont respectivement équivalents au système (4.31), (4.33) et au domaine  $\tilde{\Psi}$ , projection de  $\Omega$  sur  $\mathcal{V}_g^*$ . Considérons également les domaines :

$$\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2) \triangleq \text{domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans } \hat{\Omega}_2, \quad (4.42)$$

$$\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D}) \triangleq \text{domaine } \mathcal{D}\text{-}(A, B)\text{-invariant intérieurement stabilisable suprémal} \\ \text{inclus dans } \hat{\Omega}_2, \quad (4.43)$$

qui sont les équivalents respectifs de  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi})$  (4.27) et  $\tilde{\mathcal{S}}^\infty(\tilde{\Psi}, \mathcal{D})$  (4.32).

D'après la proposition 4.9,  $\mathcal{S}^\infty(\hat{\Omega}, \mathcal{D})$  est donné par :

$$\mathcal{S}^\infty(\hat{\Omega}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}; \hat{x}_2 \in \hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D}) \right\}.$$

Donc, d'après la proposition 4.10 le problème  $\ell^1$  a une solution si et seulement si le domaine  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D})$  n'est pas vide.

D'après la proposition 4.9,  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D})$  peut être calculé comme le domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2)$ . Le calcul du domaine  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2)$  suit directement la décomposition de la proposition 4.7. Une fois  $\mathcal{V}_g^*$  calculé, il suffit de calculer  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2)$  pour le système d'ordre réduit (4.39), au moyen de la récurrence (4.21)-(4.23).

La convergence numérique de cet algorithme est garantie en raison de la propriété décrite dans la proposition 4.6. Si, par contre, cet algorithme est appliqué au système dans sa base d'origine, il n'est pas capable de générer les directions infinies dans le cas où  $\mathcal{S}^\infty(\Omega)$  en possède.

À partir de la description polyédrique de  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2)$  (ou d'une approximation de celle-ci), le calcul de  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D})$  peut se faire au moyen de l'algorithme 2.1 adapté au cas de systèmes perturbés.

Soit maintenant une loi de commande par retour d'état  $\hat{u}_1(\hat{x}_2)$  sous laquelle  $\hat{\mathcal{S}}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D})$  est positivement  $\mathcal{D}$ -invariant avec stabilité en boucle fermée. Une telle loi peut être calculée comme, par exemple, dans [45, 17, 73]. Conformément au corollaire 4.8, une loi de commande qui impose au système une performance  $\gamma$  est donc donnée par :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1(\hat{x}) \\ \hat{u}_2(\hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{21} \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} \hat{u}_1(\hat{x}_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

où  $\hat{F}_{11}$ ,  $\hat{F}_{21}$  vérifient (4.37), (4.38).

#### 4.5.4 Optimisation de la norme $\ell^1$

Le calcul itératif de  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^\infty(\Omega), \mathcal{D})$ , avec  $\mathcal{S}^\infty(\Omega)$  calculé pour des valeurs décroissantes du coût  $\gamma$ , mène à la valeur minimale atteignable,  $\gamma^*$ . Pour toute valeur  $\gamma < \gamma^*$ , le domaine  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^\infty(\Omega), \mathcal{D})$  est l'ensemble vide.

Une telle construction itérative peut s'avérer très coûteuse du point de vue numérique. Le résultat suivant montre néanmoins qu'il suffit de calculer  $\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  pour une seule valeur positive de  $\gamma$ .

**Proposition 4.11** *Soit le domaine non vide  $\Omega' = \lambda\Omega$ , avec  $\lambda > 0$ . Alors,  $\mathcal{S}^\infty(\Omega') = \lambda\mathcal{S}^\infty(\Omega)$ .*

**Démonstration** : Soit la formule de récurrence présentée dans la proposition 4.5, et supposons que  $\mathcal{S}^{\mu-1} = \lambda\mathcal{S}^{\mu-1}$ . Alors,  $\mathcal{S}^\mu = \{x' \in \lambda\Omega; \exists u'; Ax' + B_2u' \in \lambda\mathcal{S}^{\mu-1}\} = \{\lambda x; x \in \Omega, \exists u; \lambda(Ax + B_2u) \in \lambda\mathcal{S}^{\mu-1}\} = \lambda\mathcal{S}^\mu$ . La proposition est donc démontrée par récurrence puisqu'il est clair que  $\mathcal{S}^1 = \lambda\mathcal{S}^1$ .  $\square$

Soient donc  $\mathcal{S}^\infty(\Omega) = S(G^F, \rho^F)$ , et le domaine de contraintes associé au coût  $\gamma'$ :  $\Omega' = S(C, \gamma'1)$ . Alors, en accord avec la proposition précédente,  $\mathcal{S}^\infty(\Omega') = S(G^F, \frac{\gamma'}{\gamma}\rho^F)$ .

#### Exemple 4.2

Soit le système (4.1), (4.2) pour lequel :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4.6 & -23.5 & 2.7 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad -2.5 \quad 1]$$

Le changement de base (4.34) donne :

$$R = \begin{bmatrix} -0.8729 & 0.3419 & -0.3482 \\ -0.4364 & -0.2279 & 0.8704 \\ -0.2182 & -0.9117 & -0.3482 \end{bmatrix}, \quad Z = 1.$$

Le sous-espace  $\mathcal{V}_g^*$  est engendré par la première colonne de la matrice  $Q$ . Sous la représentation (4.35), (4.36), on a :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.7571 & -0.3780 & 4.4103 \\ -5.2522 & -3.9429 & 21.3417 \\ -2.0057 & -2.2695 & 7.4000 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.2182 \\ -0.9117 \\ -0.3482 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.2182 \\ -0.9117 \\ -0.3482 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.8723 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $\hat{F}$ , amies de  $\hat{V}_g^*$ , ont la forme :  $\hat{F} = \begin{bmatrix} -5.7610 & X & X \end{bmatrix}$ , où les éléments  $X$  sont libres pour assumer n'importe quelle valeur. Si l'on les annule, on a :

$$\hat{A} + \hat{B}_2 \hat{F} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.3780 & 4.4103 \\ 0 & -3.9429 & 21.3417 \\ 0 & -2.2695 & 7.4000 \end{bmatrix}.$$

Le système possède un zéro invariant, 0.5000. Le calcul de  $\hat{S}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D})$  est réalisé pour le système d'ordre réduit (4.39), (4.40) avec :

$$\hat{A}_{22} = \begin{bmatrix} -3.9429 & 21.3417 \\ -2.2695 & 7.4000 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{12} = \begin{bmatrix} -0.9117 \\ -0.3482 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{221} = \begin{bmatrix} -0.9117 \\ -0.3482 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2.8723 \end{bmatrix}.$$

Avec  $\hat{\Omega}_2 = \{\hat{x}_2; |\hat{C}_2 \hat{x}_2| \leq \mathbf{1}\}$  il génère :

$$\hat{S}^\infty(\hat{\Omega}_2) = \{\hat{x}_2; \hat{G}_2 \hat{x}_2 \leq \mathbf{1}\} \quad \text{avec} \quad \hat{G}_2 = \begin{bmatrix} -0.7977 & -0.7834 \\ 0 & -2.8723 \end{bmatrix}.$$

La norme  $\ell^1$  optimale pour cet exemple est  $\gamma^* = 3$ . Avec  $\hat{\Omega}_2 = \{\hat{x}_2; |\hat{C}_2 \hat{x}_2| \leq \gamma^* \mathbf{1}\}$  on a :

$$\hat{S}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D}) = \{\hat{x}_2; \hat{M}_2 \hat{x}_2 \leq \hat{\eta}_2\} \quad \text{avec} \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & -2.8723 \\ 1.5954 & 1.5667 \end{bmatrix}, \quad \hat{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, l'invariance en boucle fermée de  $\hat{S}^\infty(\hat{\Omega}_2, \mathcal{D})$  peut être obtenue au moyen d'une simple loi de commande par retour d'état linéaire :  $\hat{u}(\hat{x}) = \hat{F}_1 \hat{x}_1 + \hat{F}_2 \hat{x}_2$ , avec

$$\hat{F}^* = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.7610 & -4.9231 & 22.8216 \end{bmatrix}.$$

Et dans la base de départ,

$$\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) = \{x; Mx \leq \eta\}, \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -2.5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$F^* = \begin{bmatrix} -4.6 & 23.5 & -2.2 \end{bmatrix}.$$

Le même résultat peut être obtenu par l'approche par fonctions de transfert de [32]. La technique proposée ici est néanmoins plus générale dans le sens où elle s'applique aussi à des systèmes avec plusieurs entrées et sorties (MIMO).

## 4.6 Optimisation de la Norme $\ell^1$ pour une Classe de Systèmes

Les relations de  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariance peuvent s'avérer très utiles dans la résolution du problème d'optimisation de la norme  $\ell^1$ . Nous montrerons par la suite que pour une certaine classe de systèmes linéaires, la solution à ce problème est directe. Pour ce faire, établissons d'abord les conditions sous lesquelles le domaine de contraintes  $\ell^1$ ,  $\Omega = S(C, \gamma \mathbf{1})$ , est  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant intérieurement stabilisable, avec  $\mathcal{D} = S(I_q, \mathbf{1})$ .

Considérons l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(C)}$  et la projection canonique  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ . Un système d'ordre réduit du type (4.20) peut être défini (mais ici avec  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(C)}$ ), ainsi que les domaines :

$$\begin{aligned}\bar{S}(\bar{C}, \gamma \mathbf{1}) &= \{\bar{x}; |\bar{C}\bar{x}| \leq \gamma \mathbf{1}\}, \\ S(\bar{C}, \gamma \mathbf{1}) &= \bar{S}(\bar{C}, \gamma \mathbf{1})P.\end{aligned}$$

Le domaine  $S(C, \gamma \mathbf{1})$  peut être décomposé sous la forme :

$$S(C, \gamma \mathbf{1}) = \ker(C) + S(\bar{C}, \gamma \mathbf{1}). \quad (4.44)$$

Par application directe du corollaire 4.7, le domaine de contraintes  $\Omega = S(C, \gamma \mathbf{1})$  est  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant intérieurement stabilisable si et seulement si :

1.  $\ker(C)$  est un sous-espace intérieurement stabilisable.
2. Le domaine compact  $\bar{S}(\bar{C}, \gamma \mathbf{1})$  est  $\mathcal{D}$  - ( $\bar{A}, \bar{B}$ )-invariant par rapport au système (4.20), avec  $\mathcal{D} = S(I_q, \mathbf{1})$ .

Définissons à présent la classe de systèmes à étudier. Elle est caractérisée par l'hypothèse suivante :

**Hypothèse  $H_1$  :**  $\text{rang}(CB_2) = \text{rang}(C) = p \leq m$ , la paire  $(A, B_2)$  est commandable, et le triplet  $(A, B_2, C)$  est à déphasage minimal.

Cette classe contient comme une sous-classe les systèmes mono-variables à déphasage minimal pour lesquels une solution explicite a été proposée dans [32]. Le résultat suivant peut être établi :



**Proposition 4.12** *Sous l'hypothèse  $H_1$ , la valeur du coût  $\ell^1$  optimum est :*

$$\gamma^* = \|CB_1\|_\infty. \quad (4.45)$$

*Il peut être obtenu au moyen d'une loi de commande par retour d'état linéaire  $u_k = Fx_k$  sous laquelle, pour le système non perturbé (4.30), le sous-espace  $\ker(C)$  est  $(A + B_2F)$ -invariant avec stabilité, et la «réponse pile» est obtenue dans l'espace quotient  $\frac{\mathbb{R}^n}{\ker(C)}$ .*

**Démonstration :** Puisque  $\text{rang}(CB_2) = \text{rang}(C) = p \leq m$ , la matrice  $\mathcal{T}$  définie avant le corollaire 4.1 est nulle. Donc  $\ker(C)$  est trivialement  $(A, B_2)$ -invariant, et puisque le triplet  $(A, B_2, C)$  est à déphasage minimal,  $\ker(C)$  est également intérieurement stabilisable. Il existe donc une matrice  $F^C$  telle que  $\ker(C)$  est  $(A + B_2F^C)$ -invariant et les valeurs propres de  $(A + B_2F^C)|_{\ker(C)}$  sont à l'intérieur du cercle unité.

Soit maintenant le système (4.31), (4.33) défini pour  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(C)}$ . D'après le corollaire 4.1, le polyèdre  $\bar{S}(\bar{C}, \gamma\mathbf{1})$  est trivialement  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant, avec  $Y = 0$ ,  $\gamma \geq \|CB_1\|_\infty$ . En outre, puisque  $\text{rang}(CB_2) = \text{rang}(C) = p \leq m$ , il existe une matrice  $\bar{F}$  telle que les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance positive par retour linéaire d'état :

$$H\bar{C} = \bar{C}(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}), \quad |H|\gamma\mathbf{1} \leq \gamma\mathbf{1} - |CB_1|\mathbf{1},$$

sont satisfaites avec  $H = 0$  (il faut noter que le vecteur  $\xi$  (4.16) pour  $\mathcal{D} = S(I_q, \mathbf{1})$  est donné par  $\xi = |CB_1|\mathbf{1}$ ). Donc, la  $\mathcal{D}$ -invariance positive de  $S(C, \gamma\mathbf{1})$  et le coût  $\ell^1$  optimum  $\gamma^*$  sont obtenus par la loi de commande  $u_k = Fx_k$ , avec  $F = F^C + \bar{F}P$ .  $\square$

### Exemple 4.3

Soit le système pour lequel :

$$A = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.88 & -0.77 \\ -0.61 & 0.65 & -0.96 \\ -0.27 & 0.49 & 0.99 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.53 \\ -0.35 \\ 0.44 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0.84 & 0.42 \\ 0.75 & -0.26 \\ -0.04 & 0.24 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -0.65 & 0.77 & -0.99 \\ 0.49 & -0.96 & -0.84 \end{bmatrix}.$$

Le triple  $(A, B_2, C)$  possède un zéro invariant :  $z = 0.66$ . Dans cet exemple la matrice  $CB_2$  est carrée et non singulière. Le zéro invariant est donc placé comme valeur propre en boucle fermée et la réponse pile est imposée dans  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathbb{R}^n}{\ker(C)}$  à travers la loi de commande  $u_k = Fx_k$ , avec  $F$  donnée uniquement par :

$$F = -(CB_2)^{-1}CA = \begin{bmatrix} 1.2655 & -1.1764 & -1.0583 \\ 1.3470 & -2.7081 & -3.4464 \end{bmatrix}.$$

La performance  $\ell^1$  optimale obtenu par cette loi de commande est  $\gamma^* = \|CB_1\|_\infty = 1.0496$ .

## 4.7 Extension aux Systèmes en Temps Continu - Le problème $\mathcal{L}^1$

Il a été montré dans [29] que le compensateur qui minimise l'influence de perturbations persistantes sur les sorties d'un système linéaire en temps continu n'est pas rationnel en général. La mise en œuvre de ce type de compensateur s'avère extrêmement difficile en pratique. C'est pourquoi la plupart des méthodes proposées jusqu'à maintenant ont cherché à calculer un compensateur sous-optimal rationnel capable d'atteindre un niveau de performance proche de l'optimum [29, 64, 20]. Dans [20] en particulier, à travers l'étude d'un système approché d'Euler (SAE), il est montré qu'un compensateur linéaire rationnel est capable d'atteindre un coût  $\mathcal{L}^1$  arbitrairement proche de l'optimum.

Dans cette section, comme dans [20, 21], nous nous servons d'un SAE pour étudier le problème  $\mathcal{L}^1$  à coût garanti. Nous étendons d'abord au cas continu l'étude de la  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes menée précédemment. Ensuite nous montrons qu'une approximation du domaine intérieurement stabilisable suprémal peut être obtenu à travers l'étude d'un SAE, et nous analysons la façon dont cela se répercute sur le problème  $\mathcal{L}^1$ .

### 4.7.1 Présentation du problème $\mathcal{L}^1$

Soient les espaces :

- $\mathcal{L}^1$  : l'espace de fonctions du temps  $h(t)$  telles que :

$$\|h(t)\|_{\mathcal{L}^1} \triangleq \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty,$$

- $\mathcal{L}^\infty$  : l'espace de fonctions  $h(t)$  telles que :

$$\|h(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \triangleq \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty,$$

- $\mathcal{L}_q^\infty$  : l'espace de fonctions bornées de vecteurs de  $\mathbb{R}^q$ ,  $v(t)$ , avec une norme définie par :

$$\|v(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \triangleq \max_{t \geq 0} \|v(t)\|_\infty = \max_i \|v_i(t)\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

Soit maintenant un opérateur (fonction de transfert)  $\mathcal{W} : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty$ . La norme induite  $\mathcal{L}^\infty$  vers  $\mathcal{L}^\infty$  de  $\mathcal{W}$  est définie ainsi :

$$\|\mathcal{W}\|_{\mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty} \triangleq \sup_{\|v\|_{\mathcal{L}^\infty} \neq 0} \frac{\|\mathcal{W}v\|_{\mathcal{L}^\infty}}{\|v\|_{\mathcal{L}^\infty}}.$$

Il se trouve que dans le cas où  $\mathcal{W}$  est un opérateur linéaire, représenté par une matrice  $W \in \mathfrak{R}^{p \times q}$ , la norme  $\|\mathcal{W}\|_{\mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty}$  est égale à la norme  $\|W\|_{\mathcal{L}^1}$  de la matrice de réponse impulsionnelle définie par  $\|W\|_{\mathcal{L}^1} \triangleq \max_i \sum_{j=1}^q \|h_{ij}\|_{\mathcal{L}^1}$ . C'est pourquoi, par abus de langage, même dans le cas où  $\mathcal{W}$  n'est pas linéaire, la norme  $\|\mathcal{W}\|_{\mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty}$  est notée  $\|\mathcal{W}\|_{\mathcal{L}^1}$ .

Les systèmes linéaires, stationnaires, en temps continu, considérés ici sont décrits par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 u(t), \quad (4.46)$$

$$z(t) = Cx(t). \quad (4.47)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état, supposé complètement accessible,  $d \in \mathfrak{R}^q$  est le vecteur d'entrées de perturbation,  $u \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur d'entrées de commande, et  $z \in \mathfrak{R}^p$  est le vecteur de sorties commandées.

Le vecteur de perturbations  $d(t)$  est supposé contraint d'évoluer dans un domaine borné  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^q$  :

$$d(t) \in \mathcal{D} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.48)$$

La norme induite  $\mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty$  du système (4.46)-(4.48), qui sera appelée désormais *norme  $\mathcal{L}^1$* , est égale à  $\gamma$  si

$$\sup_{\|d\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq 1} \|z\|_{\mathcal{L}^\infty} = \gamma.$$

Ceci implique,  $\forall t \geq 0$  :

$$|Cx(t)| \leq \gamma \mathbf{1}; \quad \forall d(\theta) \leq \mathbf{1}, \quad \theta \in [0, t].$$

Sous cette formulation, le domaine d'entrées de perturbation admissibles est donné par :  $\mathcal{D} = S(I_q, \mathbf{1}) = \{d; |d| \leq \mathbf{1}\}$ , et sous une performance  $\mathcal{L}^1$  donnée,  $\gamma$ , le domaine de vecteurs d'état admissibles est donné par :  $\Omega = S(C, \gamma \mathbf{1}) = \{x; |Cx| \leq \gamma \mathbf{1}\}$ .

Le problème  $\mathcal{L}^1$  qui sera traité ici peut être formulé ainsi :

**Formulation du Problème  $\mathcal{L}^1$  :** Étant donnée une performance  $\mathcal{L}^1$ ,  $\gamma$ , vérifier s'il existe une fonction de commande qui accomplisse cette performance tout en stabilisant asymptotiquement le système (4.46)-(4.48) avec  $\mathcal{D} = \{0\}$ , et le cas échéant calculer cette séquence de commande.

Le but du problème de commande optimale  $\mathcal{L}^1$  est donc de calculer la valeur minimale admissible pour  $\gamma$ .

#### 4.7.2 $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariance de polyèdres - systèmes en temps continu

Soit le système (4.46). Un domaine  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant d'un système en temps continu est défini ainsi :

**Définition 4.4** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (4.46), (4.48) si pour tout état initial  $x(0) \in \Omega$  il existe une fonction de commande  $u(t)$  telle que la trajectoire du vecteur d'état reste dans  $\Omega \forall d(t) \in \mathcal{D}, \forall t \geq 0$ .

Cette définition suppose que le vecteur d'entrées de perturbation n'est pas mesuré.

Nous nous intéressons à l'étude de cette propriété appliquée à des polyèdres convexes, c'est-à-dire au cas  $\Omega = R[G, \rho]$ . Les perturbations appartiennent au domaine polyédrique borné :  $\mathcal{D} = R[D, \omega] = \{d \in \mathbb{R}^q; Dd \leq \omega\}$ .

Soit donc une matrice  $T$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma$  (4.12), et le vecteur  $\delta$  dont les composantes  $\delta_i$  sont données par (4.11).

**Proposition 4.13** *Le polyèdre convexe  $R[G, \rho] \subset \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (4.46), (4.48), avec  $\mathcal{D} = R[D, \omega]$ , si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YG = TGA, \quad (4.49)$$

$$Y\rho \leq -T\delta, \quad (4.50)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \quad \text{si } T_{ij} = 0. \quad (4.51)$$

**Démonstration :**

**Nécessité :** Supposons que  $R[G, \rho]$  soit  $\mathcal{D}$ -( $A, B$ )-invariant par rapport au système (4.46), (4.48). Soit  $T_i$  un vecteur ligne de  $T$ . À partir des Programmes Linéaires ( $P_i$ ) et son dual ( $D_i$ ) définis dans la démonstration de la proposition 2.3, on peut conclure que deux situations sont possibles :

- Si l'ensemble de conditions (3.6), (3.7) est consistant, alors il faut qu'il existe un vecteur de commande  $u$  tel que :

$$G_j \dot{x} = G_j Ax + G_j B_1 d + G_j B_2 u \leq 0, \quad \forall d \in R[D, \omega], \quad \forall j; \quad T_{ij} \neq 0,$$

et donc,

$$G_j Ax + G_j B_2 u \leq -\delta_j, \quad \forall j; \quad T_{ij} \neq 0. \quad (4.52)$$

La multiplication à gauche de chaque condition (4.52) par  $T_{ij}$  donne, pour tout  $x$  vérifiant (3.6), (3.7) :

$$z_i = T_i G A x \leq -T_i \delta.$$

Par conséquent, la solution optimale du problème dual  $(D_i)$  vérifie:

$$Y_i^* \rho \leq -T_i \delta.$$

- Si les conditions (3.6), (3.7) ne sont pas consistantes, alors la solution optimale de  $(D_i)$  est non bornée. Il existe donc un vecteur ligne  $Y_i$  vérifiant (3.8), (3.9) et tel que  $Y_i \rho \leq -T_i \delta$ .

**Suffisance :** Supposons qu'il existe une matrice  $Y$  vérifiant les conditions (4.49)-(4.51). Soit un point  $x$  sur la frontière de  $R[G, \rho]$  représenté par (3.11). Soit aussi la matrice non négative  $T_b$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\{w \geq 0; \quad w^T(G_1 B) = 0\}$ . Tout vecteur ligne  $T_{bi}$  peut être complété de manière à générer un vecteur  $t_i \in \Gamma$  défini par:  $t_i = [T_{bi} \quad 0]$ . Alors,  $\exists \Xi \geq 0$  tel que  $t = \Xi T$ . La multiplication à gauche des relations (4.49)-(4.51) par  $\Xi$  donne, avec  $Z = \Xi Y$ ,

$$\begin{aligned} ZG &= tGA = T_b G_1 A, \\ Z\rho &\leq -T_b \delta_1, \\ Z_{ij} &\geq 0 \text{ si } t_{ij} = 0, \end{aligned}$$

où  $\delta_1$  est un vecteur formé par des éléments du vecteur  $\delta$  selon la partition (3.11). Ces relations montrent, par dualité, que pour  $x$  vérifiant (3.11) :

$$T_b G_1 A x \leq -T_b \delta_1.$$

D'après le lemme A.2, cette relation équivaut à l'existence d'un vecteur  $u \in \mathfrak{R}^m$  tel que :

$$G_1 \dot{x} = G_1 A x + G_1 B_2 u \leq -\delta_1,$$

et donc,

$$G_1 \dot{x} = G_1 A x + G_1 B_1 d + G_1 B_2 u \leq 0, \quad \forall d \in R[D, \omega].$$

À partir de là, en utilisant les mêmes arguments développés dans la démonstration de la proposition 3.2, on peut montrer l'existence d'une loi de commande dans la classe  $\mathcal{C}_L$  qui génère un déplacement admissible à partir de chaque point de la frontière de  $R[G, \rho]$ .  $\square$

Pour le cas symétrique, avec  $\Omega = S(Q, \mu)$ ,  $\mathcal{D} = S(E, \eta)$ , et  $\xi$  donné par (4.16), on a :

**Corollaire 4.9** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant par rapport au système (4.46), (4.48), avec  $\mathcal{D} = S(E, \eta)$ , si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = TQA, \quad (4.53)$$

$$\tilde{Y}\mu \leq -|T|\xi, \quad (4.54)$$

avec  $\tilde{Y}$  définie comme dans le corollaire 3.3.

Les équivalents en temps continu des corollaires 4.2 et 4.3, et de la proposition 4.3 sont également valables.

### 4.7.3 Approximation du domaine intérieurement stabilisable suprémal

Un domaine intérieurement stabilisable dans le cas continu est défini ainsi :

**Définition 4.5** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable (ou tout simplement *intérieurement stabilisable*) par rapport au système (3.1) si  $\forall x(0) \in \Omega$  il existe une fonction de commande  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , telle que  $x(t) \in \Omega \forall t \geq 0$  et  $x(t)$  converge asymptotiquement vers l'origine.

Comme pour le cas discret, la propriété suivante est également valable.

**Proposition 4.14** *La famille de tous les domaines intérieurement stabilisables inclus dans un domaine  $\Omega$  est fermée sous l'opération « enveloppe convexe de l'union ».*

À défaut de pouvoir calculer avec exactitude le domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans un polyèdre, on peut en obtenir une approximation à partir d'un système discret. Ce calcul approché est basé sur la proposition suivante.

**Proposition 4.15** *Si le polyèdre compact  $R[G, \rho]$  est  $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable par rapport au SAE (3.39), alors  $R[G, \rho]$  est intérieurement stabilisable par rapport au système (3.1).*

**Démonstration :**  $L'(A, B)$ -invariance par rapport au SAE découle de la proposition 3.5, et puisque  $R[G, \rho]$  est compact,  $L'(A, B)$ -invariance implique la stabilisabilité interne.  $\square$

Un domaine intérieurement stabilisable arbitrairement proche de  $\mathcal{S}^\infty(R[G, \rho])$  peut donc être obtenu en calculant le domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans  $R[G, \rho]$ , par rapport à un SAE avec  $\tau$  suffisamment petit.

Dans le cas de polyèdres symétriques non bornés, on peut facilement montrer que des résultats équivalents à ceux du corollaire 4.4 et des propositions 4.6 et 4.7 sont également valables pour les systèmes en temps continu. On peut alors voir que dans ce cas, l'hypothèse de compacité dans la proposition précédente peut être levée.

#### 4.7.4 Solution du problème $\mathcal{L}^1$

**Définition 4.6** Un domaine  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est dit  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable par rapport au système (4.46), (4.48) s'il est à la fois  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant et intérieurement stabilisable par rapport au système non perturbé décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t). \quad (4.55)$$

La famille de tous les domaines  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables étant fermée sous l'opération « enveloppe convexe de l'union », on peut définir le domaine :

$$\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D}) \triangleq \begin{array}{l} \text{domaine } \mathcal{D}\text{-}(A, B)\text{-invariant intérieurement stabilisable suprémal} \\ \text{inclus dans } \Omega. \end{array}$$

Il est donc possible d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution au problème  $\mathcal{L}^1$  :

**Proposition 4.16** *Il existe une solution au problème  $\mathcal{L}^1$  si et seulement si le domaine  $\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  n'est pas vide.*

Le corollaire 4.6 et la proposition 4.9 sont aussi valables dans le cas continu. En utilisant un SAE, on peut donc vérifier l'existence de solutions au problème  $\mathcal{L}^1$ , à partir de la technique développée dans la section 4.6. Puisqu'il s'agit d'une approximation, il est clair que la valeur minimale de  $\gamma$  pour laquelle  $\mathcal{S}^\infty(\Omega, \mathcal{D})$  n'est pas vide n'est pas la solution optimale du problème d'origine.

Enfin, les résultats obtenus dans le cas discret pour les systèmes satisfaisant l'hypothèse  $(H_1)$ , formulée dans la section 4.6, sont également valables dans le cas continu.

## 4.8 Conclusion

Le problème de minimiser le transfert crête des entrées de perturbation vers les sorties d'un système linéaire, autrement dit, le problème de commande optimale  $\ell^1$ , a été, depuis quelques années, l'objet de nombreuses études. En revanche, ce n'est que récemment que l'on a commencé à l'interpréter d'un point de vue géométrique. Cette nouvelle interprétation a permis notamment d'envisager des schémas de commande autres que des compensateurs linéaires dynamiques (d'ordre très important parfois).

Les contributions de ce chapitre s'inscrivent dans cette même démarche: traduire en langage géométrique des concepts et des résultats développés initialement en termes de fonctions de transfert. Dans cet esprit, nous avons dans un premier temps étudié la propriété d' $(A, B)$ -invariance appliqué a des systèmes en temps discret soumis à des perturbations additives bornées. Les résultats obtenus sont une extension plus au moins simple de ceux développés dans le chapitre 2 pour des systèmes non perturbés.

Le problème de stabilisation des trajectoires à l'intérieur d'un polyèdre  $(A, B)$ -invariant a alors été traité à travers l'étude des domaines  $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables. Même si ces domaines ont déjà été utilisés dans d'autres contextes, nous estimons que notre approche permet de les interpréter sous une autre optique, c'est-à-dire, comme la généralisation aux polyèdres convexes du concept de sous-espaces intérieurement stabilisables de l'approche géométrique. Nous avons en outre montré que le calcul du plus grand domaine intérieurement stabilisable pour un polyèdre convexe non borné peut être séparé en deux: le calcul d'un sous-espace intérieurement stabilisable suprémal et le calcul d'un domaine intérieurement stabilisable suprémal pour un système réduit. Cette décomposition est utile non seulement pour réduire l'effort de calcul, mais aussi pour faciliter le calcul d'une loi de commande.

Ensuite, les résultats relatifs aux domaines intérieurement stabilisables ont été étendus aux systèmes perturbés. À partir de cette extension, nous avons pu facilement dériver des conditions d'existence de solutions au problème  $\ell^1$  à coût garanti. Ces conditions, établies en termes d'existence d'un domaine  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable suprémal, constituent un progrès par rapport à celles disponibles jusqu'à présent dans la littérature, dans le sens où il n'y a la nécessité ni de tronquer le domaine de performance pour le rendre compact, ni de faire appel à un compensateur dynamique déterminé *a priori*. En plus, l'approche décomposée pour le calcul du domaine suprémal permet de réduire l'effort de calcul et d'interpréter géométriquement le comportement du système en boucle fermée. Cette interprétation géométrique appliquée à une classe particulière de systèmes a donné lieu à la possibilité de calculer directement la solution optimale au problème  $\ell^1$ .



Pour terminer, nous avons étudié le problème d'atténuation de perturbations persistantes pour les systèmes en temps continu, dit problème  $\mathcal{L}^1$ . Cette étude a été basée sur l'extension au cas continu des résultats de la  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariance, et sur une approximation en temps discret, déjà proposée dans la littérature, du système en temps continu.



## Chapitre 5

# Sur l' $(A, B)$ -invariance de Polyèdres - Systèmes à Modèle Incertain

### 5.1 Introduction

Il arrive souvent que quelques paramètres des modèles des systèmes dynamiques ne soient pas connus avec exactitude, mais qu'il soit cependant possible de déterminer des intervalles dans lesquelles ces paramètres prennent leurs valeurs. La commande pour de tels systèmes doit être *robuste* dans le sens où l'objectif que l'on se fixe au niveau de la synthèse doit être atteint quelles que soient les valeurs de ces paramètres.

Dans le cadre d'un problème de commande sous contraintes, comme cela a été le cas tout au long de ce mémoire, le but à atteindre est souvent d'empêcher le vecteur d'état de sortir de l'intérieur d'un domaine défini par les contraintes. Dans le cas d'un système linéaire incertain, cet objectif peut être satisfait en restreignant l'état initial à un domaine qui soit  $(A, B)$ -invariant pour toute paire  $(A, B)$  incluse dans un domaine d'incertitudes défini par le champ de variation des paramètres incertains. Dans ce chapitre, de tels domaines seront appelés *domaines  $\Delta - (A, B)$ -invariants*. Nous montrerons comment les concepts et résultats d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres, obtenus dans les chapitre 2 et 3 dans le cas de modèles précisément connus, peuvent être étendus aux systèmes à modèle incertain. Les incertitudes considérées sont du type structuré, avec les matrices  $A$  et  $B$  appartenant à un domaine convexe nommé « polytope de matrices ».

Ce problème a déjà fait l'objet de quelques études. En se basant sur les résultats obtenus dans [45] pour les systèmes en temps discret et à modèle certain, il a été montré dans [17] qu'il est possible de forcer la trajectoire de l'état à rester dans un polyèdre compact si et seulement s'il existe pour chaque sommet de ce polyèdre une commande admissible telle que, à un pas, le vecteur d'état reste dans le polyèdre, quelles que soient

les valeurs des paramètres incertains de la paire  $(A, B)$ .

Nous avons vu précédemment que l' $(A, B)$ -invariance d'un domaine compact implique l'existence d'une fonction de Lyapunov, associée à ce domaine, garantissant la stabilité des trajectoires du système. À partir de cette observation, une application très intéressante des domaines  $\Delta - (A, B)$ -invariants a été proposée dans [18]. Dans le cadre plus général d'un problème de stabilisation d'un système incertain (en temps continu ou discret), il y a été montré notamment que la classe de fonctions de Lyapunov polyédriques est universelle dans le sens où s'il existe une commande continue et une fonction de Lyapunov qui résolvent le problème de stabilisation robuste du système, alors il existe une commande continue et une fonction de Lyapunov polyédrique qui résolvent le même problème. Autrement dit, la stabilité d'un système incertain dans le sens de Lyapunov implique la stabilité « polyédrique » de ce système. Ce résultat a alors été particularisé aux systèmes soumis à des incertitudes structurées du type polytopique.

Les fonctions de Lyapunov polyédriques sont donc plus générales, en ce qui concerne la stabilité robuste, que les fonctions quadratiques. Il n'en reste pas moins que les méthodes numériques développées pour le calcul de fonctions quadratiques, basées sur les LMI (*linear matrix inequalities*), sont à présent très performantes. L'utilisation de fonctions polyédriques à cet effet présuppose donc que l'on soit capable de développer des méthodes numériques efficaces pour le calcul de telles fonctions.

L'étude menée dans ce chapitre apporte une contribution au développement de techniques d'analyse et de commande robuste de systèmes linéaires, basées sur les fonctions de Lyapunov polyédriques. Nous proposons notamment des conditions nécessaires et suffisantes, en termes de relations matricielles linéaires, pour qu'un polyèdre convexe soit  $\Delta - (A, B)$ -invariant, c'est-à-dire,  $(A, B)$ -invariant par rapport à toute paire de matrices  $(A, B)$  appartenant à un domaine d'incertitudes polytopique. Deux exemples numériques illustrent l'avantage d'utiliser cette caractérisation pour calculer le plus grand domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant inclus dans un polyèdre donné, comparativement à la caractérisation en termes de sommets proposée dans [17, 18].

## 5.2 $\Delta - (A, B)$ -invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Discret

Soit le système linéaire en temps discret décrit par :

$$x_{k+1} = A(\underline{\xi})x_k + B(\underline{\mu})u_k, \quad (5.1)$$

où les matrices incertaines  $A(\xi)$  et  $B(\mu)$  appartiennent aux domaines convexes  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$  définis respectivement par les polytopes de matrices :

$$\Delta_A \triangleq \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} ; A = \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i A^i, \quad \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0 \right\}, \quad (5.2)$$

$$\Delta_B \triangleq \left\{ B \in \mathfrak{R}^{n \times m} ; B = \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j B^j, \quad \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0 \right\}. \quad (5.3)$$

**Définition 5.1** Un domaine  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  est dit  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1)-(5.3) si,  $\forall x \in \Omega$ , il existe un vecteur de commande,  $u \in \mathfrak{R}^m$ , tel que  $Ax + Bu \in \Omega$ ,  $\forall A \in \Delta_A$ ,  $B \in \Delta_B$ .

Le plus grand domaine admissible à un pas est maintenant donné par :

$$\mathcal{Q}(\Omega, \Delta) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; \exists u \in \mathfrak{R}^m ; Ax + Bu \in \Omega, \forall A \in \Delta_A, B \in \Delta_B\}. \quad (5.4)$$

La  $\Delta - (A, B)$ -invariance équivaut donc à la condition géométrique :

$$\Omega \subset \mathcal{Q}(\Omega, \Delta), \quad (5.5)$$

et le domaine  $\Omega$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1)-(5.3) si et seulement si :

$$\Omega \subset \mathcal{Q}(\Omega, \Delta).$$

### 5.2.1 $\Delta - (A, B)$ -invariance de polyèdres - cas général

Considérons maintenant le cas polyédrique,  $\Omega = R[G, \rho]$ . Définissons les matrices suivantes :

$$(GA)^\Delta = \begin{bmatrix} GA^1 \\ GA^2 \\ \vdots \\ GA^{n_A} \\ GA^1 \\ \vdots \\ GA^{n_A} \\ \vdots \\ GA^1 \\ \vdots \\ GA^{n_A} \end{bmatrix}, \quad (GB)^\Delta = \begin{bmatrix} GB^1 \\ GB^1 \\ \vdots \\ GB^1 \\ GB^2 \\ \vdots \\ GB^2 \\ \vdots \\ GB^{n_B} \\ \vdots \\ GB^{n_B} \end{bmatrix}, \quad \rho^\Delta = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \vdots \\ \rho \\ \rho \\ \vdots \\ \rho \\ \vdots \\ \rho \\ \vdots \\ \rho \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Rappelons que  $G \in \mathfrak{R}^{g \times n}$ . Donc:  $(GA)^\Delta \in \mathfrak{R}^{(n_A \cdot n_B \cdot g) \times n}$ ,  $(GB)^\Delta \in \mathfrak{R}^{(n_A \cdot n_B \cdot g) \times m}$  et  $\rho^\Delta \in \mathfrak{R}^{(n_A \cdot n_B \cdot g) \times 1}$ .

Le plus grand domaine admissible à un pas peut être caractérisé ainsi :

**Lemme 5.1**

$$\mathcal{Q}(R[G, \rho], \Delta) = \{x ; \exists u ; (GA)^\Delta x + (GB)^\Delta u \leq \rho^\Delta\}. \quad (5.7)$$

**Démonstration :** La nécessité découle du fait que le vecteur d'état  $x$  doit être admissible par rapport à chaque paire de sommets  $A^i$ ,  $B^j$  des polytopes de matrices  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$ . La suffisance peut être directement démontrée à partir de la définition de ces polytopes de matrices (5.2), (5.3), sous la forme d'une somme convexe de leurs sommets. En effet, on peut voir que, pour tout vecteur  $x$  vérifiant les inégalités (5.7),  $\exists u$  tel que :

$$G \left( \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i A^i \right) x + G \left( \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j B^j \right) u \leq \rho, \quad \forall \xi_i, \mu_j \geq 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j = 1.$$

Par conséquent,  $x$  est admissible quelles que soient les matrices  $A \in \Delta_A$  et  $B \in \Delta_B$ .  $\square$

Définissons maintenant la matrice  $T^\Delta \in \mathfrak{R}^{t \times (n_A \cdot n_B \cdot g)}$  sous la forme suivante :

$$T^\Delta = \left[ \begin{array}{cccccccc} T^{1,1} & T^{2,1} & \dots & T^{n_A,1} & T^{1,2} & \dots & T^{n_A,2} & \dots & T^{1,n_B} & \dots & T^{n_A,n_B} \end{array} \right], \quad (5.8)$$

où les vecteurs ligne de  $T^\Delta$  forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma^\Delta$  défini par :

$$\Gamma^\Delta = \{w \in \mathfrak{R}^{n_A \cdot n_B \cdot g} ; w \geq 0, (GB)^\Delta T w = 0\}. \quad (5.9)$$

À partir du lemme précédent et des techniques employées dans le chapitre 2, la caractérisation explicite suivante de  $\mathcal{Q}(R[G, \rho], \Delta)$  peut être obtenue :

**Proposition 5.1**

$$\mathcal{Q}(R[G, \rho], \Delta) = R[T^\Delta(GA)^\Delta, T^\Delta \rho^\Delta]. \quad (5.10)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour la  $\Delta - (A, B)$ -invariance de  $R[G, \rho]$  est donc donné par la relation d'inclusion

$$R[G, \rho] \subset R[T^\Delta(GA)^\Delta, T^\Delta \rho^\Delta],$$

qui peut être traduite en relations matricielles à travers le résultat suivant :

**Proposition 5.2** *Le polyèdre convexe  $R[G, \rho]$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1)-(5.3) si et seulement s'il existe une matrice non négative  $Y \in \mathfrak{R}^{t \times g}$  telle que :*

$$YG = T^\Delta(GA)^\Delta, \quad (5.11)$$

$$Y\rho \leq T^\Delta \rho^\Delta. \quad (5.12)$$

Il convient ici d'insister à nouveau sur les avantages de tester la  $\Delta - (A, B)$ -invariance au moyen de ces relations matricielles linéaires, comparativement à l'approche utilisée dans [17], qui teste l'admissibilité sur chaque sommet d'un polyèdre compact. En premier lieu, les conditions de la proposition précédente s'appliquent à tout polyèdre convexe, non obligatoirement compact. En second lieu, la méthode proposée dans [17] teste l'existence d'une commande admissible sur tous les sommets du polyèdre en question. Dans le cas de systèmes soumis à des incertitudes du type (5.2), (5.3), cet inconvénient est aggravé par le fait que la commande sur chaque sommet doit être admissible pour toutes les  $n_A \cdot n_B$  paires de matrices  $(A^i, B^j)$ .

### 5.2.2 $\Delta - (A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques

Étudions à présent la  $\Delta - (A, B)$ -invariance de polyèdres symétriques  $S(Q, \mu)$ . Soient d'abord les matrices  $(QA)^\Delta$  et  $(QB)^\Delta$  définies de la même façon que les matrices  $(GA)^\Delta$  et  $(GB)^\Delta$  respectivement, avec  $G$  remplacé par  $Q$ , et la matrice  $\mu^\Delta$  définie comme la matrice  $\rho^\Delta$  avec  $\rho$  remplacé par  $\mu$ . Soient également la matrice  $[T^{\Delta_1} \ T^{\Delta_2}]$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma^\Delta$  (5.9), avec  $(GB)^\Delta = \begin{bmatrix} (QB)^\Delta \\ -(QB)^\Delta \end{bmatrix}$ , et la matrice  $\mathcal{T}^\Delta$ , sous-matrice de  $T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2}$ , formée en supprimant les lignes  $(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_i$  pour lesquelles ou bien  $(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_i = 0$ , ou alors  $(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_i = -(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_j$  pour un  $j < i$ . Le résultat suivant peut être établi :

**Corollaire 5.1** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1)-(5.3) si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que :*

$$YQ = \mathcal{T}^\Delta(QA)^\Delta, \quad (5.13)$$

$$|Y|\mu \leq |\mathcal{T}^\Delta|\mu^\Delta. \quad (5.14)$$

Une conséquence directe de ce résultat sont les conditions suivantes de  $\Delta - (A, B)$ -invariance d'un sous-espace vectoriel :

**Corollaire 5.2** *Le sous-espace  $\ker(Q) \subset \mathfrak{R}^n$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1)-(5.3) si et seulement s'il existe une matrice  $Y$  telle que  $YQ = \mathcal{T}^\Delta(QA)^\Delta$ .*

Considérons maintenant l'espace quotient  $\bar{\mathcal{X}} = \frac{\mathfrak{R}^n}{\mathcal{X}}$ , la projection canonique  $P : \mathfrak{R}^n \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ , et les applications :

- $\bar{A}^i, i = 1, \dots, n_A$ , les applications induites dans  $\bar{\mathcal{X}}$  par les applications  $A^i$ , données par  $\bar{A}^i P = P A^i$ ,

- $\bar{B}^j$ ,  $j = 1, \dots, n_B$ , données par  $\bar{B}^j = PB^j$ ,
- $\bar{Q}$ , donnée par  $\bar{Q}P = Q$ .

Alors, le système d'ordre réduit suivant peut être défini dans  $\bar{\mathcal{X}}$  :

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}(\underline{\xi})\bar{x}_k + \bar{B}(\underline{\mu})u_k, \quad (5.15)$$

ainsi que le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu) = \{\bar{x}; |\bar{Q}\bar{x}| \leq \mu\}$ , et son extension à  $\mathfrak{R}^n$ ,  $S(\bar{Q}, \mu) = \bar{S}(\bar{Q}, \mu)P$ . Le résultat suivant peut être établi de façon analogue à celle employée dans la démonstration du corollaire 2.3.

**Corollaire 5.3** *Le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1)-(5.3) si et seulement si :*

1. *Le sous-espace  $\ker(Q)$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant.*
2. *Le polyèdre compact  $\bar{S}(\bar{Q}, \mu)$  est  $\Delta - (\bar{A}, \bar{B})$ -invariant par rapport au système (5.15).*

On peut observer que la  $\Delta - (A, B)$ -invariance du sous-espace  $\ker(Q)$  est une condition structurelle rarement satisfaite en général. Le cas  $\ker(Q) = 0$ , qui caractérise les polyèdres  $S(Q, \mu)$  compacts, sera en pratique le plus intéressant.

### 5.2.3 Le domaine $\Delta - (A, B)$ -invariant suprémal

On peut montrer que la famille des domaines  $\Delta - (A, B)$ -invariants inclus dans un domaine  $\Omega$  est fermée sous l'opération « enveloppe convexe de l'union », ce qui assure l'existence du domaine suprémal :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \Delta) \triangleq \text{domaine } \Delta - (A, B)\text{-invariant suprémal inclus dans } \Omega,$$

lequel est donné par la récurrence :

$$\mathcal{C}_{i+1} = \mathcal{Q}(\mathcal{C}_i, \Delta) \cap \mathcal{C}_i, \quad \text{avec } \mathcal{C}_0 = \Omega,$$

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \Delta) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{C}_i.$$

Un algorithme de calcul de ce domaine suprémal pour  $\Omega = R[G, \rho]$  peut être dérivé de l'algorithme 2.1. On peut remarquer à partir de la définition de  $\mathcal{Q}(R[G, \rho], \Delta)$  (5.10) que cet algorithme peut générer des domaines polyédriques  $\mathcal{C}_i$  extrêmement complexes, définis par un nombre élevé de sommets. D'où l'avantage d'utiliser la caractérisation (5.11),



(5.12), au lieu de celle basée sur la représentation en termes de sommets du polyèdre, pour tester la  $\Delta - (A, B)$ -invariance à chaque pas de l'algorithme.

Supposons à présent que le domaine  $\mathcal{Q}(R[G, \rho], \Delta)$  (ou une approximation polyédrique), représenté par un polyèdre compact  $R[G^F, \rho^F]$ , ait été obtenu. La fonctionnelle de Minkowski,  $\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{G_i}{\rho_i} x \right\}$  est dans ce cas une fonction de Lyapunov polyédrique du système incertain (5.1)-(5.3), lequel est alors stabilisable.

Les résultats obtenus dans cette section peuvent être étendus sans peine aux systèmes soumis à des contraintes sur la commande et à des perturbations bornées.

### Exemple 5.1

Supposons maintenant que trois paramètres du système de l'exemple 2.1 soient incertains :

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 + \alpha_1 \\ 0.6 + \alpha_2 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \beta \end{bmatrix},$$

avec  $-0.1 \leq \alpha_1 \leq 0.1$ ,  $-0.2 \leq \alpha_2 \leq 0.2$ ,  $-0.1 \leq \beta \leq 0.1$ . Les matrices  $A$  et  $B$  appartiennent donc aux domaines convexes  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$  donnés par :

$$\Delta_A = \left\{ A ; A = \sum_{i=1}^4 \xi_i A^i, \quad \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0 \right\},$$

$$\Delta_B = \left\{ B ; B = \sum_{j=1}^2 \mu_j B^j, \quad \sum_{j=1}^2 \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0 \right\},$$

où :

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.4 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.8 & 1.8 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 0.4 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 0.8 & 1.8 \end{bmatrix},$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1 \end{bmatrix}.$$

Le polyèdre  $R[G, \rho]$  est le même que celui de l'exemple 2.1. Le calcul du domaine  $\Delta - (A, B)$ - $\lambda$ -contractif suprémal inclus dans  $R[G, \rho]$ , avec  $\lambda = 0.8$ , donne, au bout de 23

itérations,  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \Delta, \lambda) = R[G^{23}, \rho^{23}]$ , avec :

$$G^{23} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0.35 \\ 0.25 & -0.5 \\ -2.0087 & -4.0722 \\ -1.2006 & -4.0722 \\ 0.9947 & 1.3025 \\ 0.9947 & 1.3934 \\ 0.1866 & 1.5372 \\ 0.9947 & 1.4462 \\ 0.9947 & 1.5372 \end{bmatrix}, \quad \rho^{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2.9668 \\ 2.9668 \\ 3.4490 \\ 3.4490 \\ 3.4490 \\ 3.4490 \\ 3.4490 \end{bmatrix}.$$

Les polyèdres  $R[G, \rho]$  et  $R[G^{23}, \rho^{23}]$  sont représentés dans la figure 5.1.

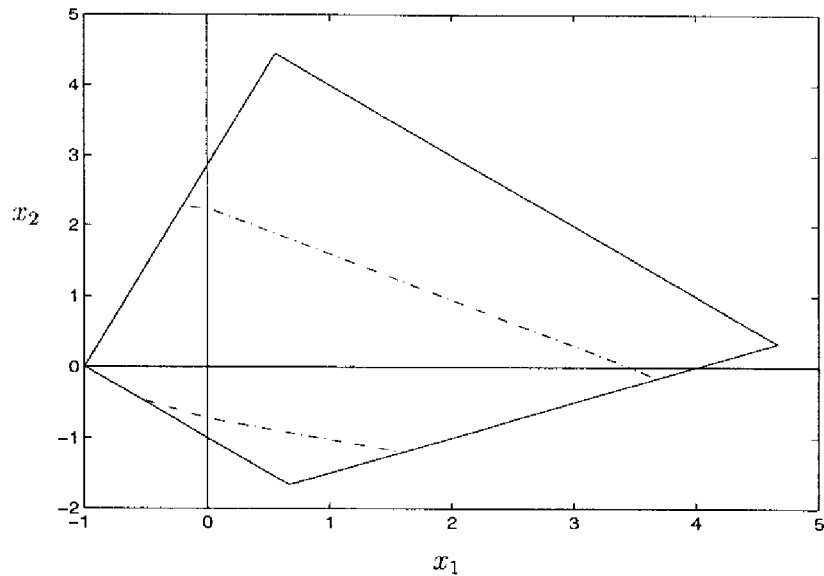


FIG. 5.1 -  $R[G, \rho]$  et  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \Delta, \lambda)$ .

### 5.3 $\Delta - (A, B)$ -invariance de Polyèdres - Systèmes en Temps Continu

Soit le système linéaire en temps continu décrit par :

$$\dot{x}(t) = A(\underline{\xi})x(t) + B(\underline{\mu})u(t), \quad (5.16)$$

où les matrices incertaines  $A(\underline{\xi})$  et  $B(\underline{\mu})$  appartiennent aux domaines convexes  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$  définis comme dans (5.2), (5.3) :

$$\Delta_A \triangleq \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} ; A = \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i A^i, \quad \sum_{i=1}^{n_A} \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0 \right\}, \quad (5.17)$$

$$\Delta_B \triangleq \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times m} ; B = \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j B^j, \quad \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0 \right\}. \quad (5.18)$$

**Définition 5.2** Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.16)-(5.18) si pour tout état initial  $x(0) \in \Omega$  il existe une fonction de commande  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , telle que  $x(t) \in \Omega \forall t \geq 0, \forall A \in \Delta_A, B \in \Delta_B$ .

Des conditions nécessaires et suffisantes pour la  $\Delta - (A, B)$ -invariance d'un polyèdre  $R[G, \rho]$  sont données par le résultat qui suit.

Définissons d'abord l'ensemble d'indices :

$$\mathcal{I}(j) = \{k ; k = j + (s-1).g, s = 1, \dots, n_A.n_B\}, \quad (5.19)$$

et considérons les matrices  $(GA)^\Delta$ ,  $(GB)^\Delta$ ,  $\rho^\Delta$  (5.6) et  $T^\Delta$  (5.8).

**Proposition 5.3** *Le polyèdre convexe  $R[G, \rho]$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.16)-(5.18) si et seulement s'il existe une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{t \times g}$  telle que :*

$$YG = T^\Delta(GA)^\Delta, \quad (5.20)$$

$$Y\rho \leq 0, \quad (5.21)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \text{ si } T^\Delta_{ik} = 0 \forall k \in \mathcal{I}(j). \quad (5.22)$$

**Démonstration :**

**Nécessité :** Supposons que  $R[G, \rho]$  soit  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.16)-(5.18). Soit  $T^\Delta_i$  un vecteur ligne de  $T^\Delta$ . À partir de la définition de la matrice  $T^\Delta$ , ce vecteur est un générateur du cône  $\Gamma^\Delta$ . Il est non négatif et vérifie :

$$T^\Delta_i(GB)^\Delta = 0. \quad (5.23)$$

Le programme linéaire suivant, noté  $(P_i)$ , peut être associé à ce vecteur :

$$\max_x z_i = T^\Delta_i(GA)^\Delta x$$

$$\text{sous : } G_j x = \rho_j \quad \text{si } T^\Delta_{ik} \neq 0 \text{ pour au moins un } k \in \mathcal{I}(j), \quad (5.24)$$

$$G_j x \leq \rho_j \quad \text{si } T^\Delta_{ik} = 0 \forall k \in \mathcal{I}(j). \quad (5.25)$$

Le problème dual de  $(P_i)$ , noté  $(D_i)$ , est défini comme suit :

$$\min_{Y_i} y_i = Y_i \rho$$

$$\text{sous : } Y_i G = T^{\Delta_i} (GA)^{\Delta} \quad (5.26)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \text{ si } T^{\Delta_{ik}} = 0 \forall k \in \mathcal{I}(j). \quad (5.27)$$

Deux situations sont donc possibles :

- Si l'ensemble de conditions (5.24), (5.25) est admissible, alors il définit une face de  $R[G, \rho]$ . Pour que  $R[G, \rho]$  soit  $\Delta - (A, B)$ -invariant, il faut que sur chaque point  $x$  de cette face, et pour chaque modèle appartenant au domaine d'incertitudes, le déplacement infinitésimal soit admissible. Il faut donc qu'il existe un vecteur de commande  $u$  tel que

$$G_j \dot{x} \leq 0 \forall A \in \Delta_A, B \in \Delta_B, \forall j ; T^{\Delta_{ik}} \neq 0 \text{ pour au moins un } k \in \mathcal{I}(j),$$

et donc :

$$(GA)^{\Delta_i} x + (GB)^{\Delta_i} u \leq 0 \forall l \in \mathcal{I}(j), \forall j ; T^{\Delta_{ik}} \neq 0 \text{ pour au moins un } k \in \mathcal{I}(j). \quad (5.28)$$

La multiplication à gauche de chaque condition (5.28) par  $T^{\Delta_{ik}}$  donne, pour tout  $x$  vérifiant (5.24), (5.25) :

$$z_i = T^{\Delta_i} (GA)^{\Delta} x \leq 0.$$

Par conséquent, la solution optimale au problème  $(P_i)$ , notée  $z_i^*$  vérifie  $z_i^* \leq 0$ . Alors, la valeur optimale de la fonction objectif du problème dual  $(D_i)$ ,  $y_i^*$ , vérifie :

$$y_i^* = z_i^* = Y_i^* \rho \leq 0.$$

- Si les conditions (5.24), (5.25) ne sont pas admissibles, alors la solution optimale à  $(D_i)$  est non bornée. Il existe alors un vecteur ligne  $Y_i$  vérifiant (5.26), (5.27) et tel que  $Y_i \rho \leq 0$ .

**Suffisance :** Supposons qu'il existe une matrice  $Y$  vérifiant les conditions (5.20)-(5.22). Soit un point  $x$  sur la frontière de  $R[G, \rho]$ . Les lignes de la matrice  $G$  et du vecteur  $\rho$  peuvent être séparées en deux sous-ensembles, d'indices 1, 2, de dimensions  $g_E, g_I$ , et réordonnés comme suit :

$$G = \begin{bmatrix} G_E \\ G_I \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_E \\ \rho_I \end{bmatrix},$$

tels que :

$$\begin{cases} G_E x = \rho_E \\ G_I x \leq \rho_I \end{cases} \quad (5.29)$$

On peut définir l'ensemble d'indices suivant, associé à ce point sur la frontière :

$\mathcal{I}_E = \{k; k = j + (s - 1).g, s = 1, \dots, n_A.n_B\}$  pour tous les  $j$  tels que  $G_j$  est une ligne de la sous-matrice  $G_E$ ,

ainsi que les sous-matrices :

$$(GA)^\Delta_E = (GA)^\Delta_k, \quad (GB)^\Delta_E = (GB)^\Delta_k, \quad \forall k \in \mathcal{I}_E.$$

Soit la matrice non négative  $T^\Delta_b$  dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\{w \geq 0; w^T(GB)^\Delta_E = 0\}$ . Tout vecteur ligne  $T^\Delta_{b_i}$  peut être complété avec des éléments nuls de manière à former un vecteur  $t^\Delta_i \in \Gamma^\Delta$ . Alors,  $\exists \Xi \geq 0$  tel que :

$$t^\Delta = \Xi T^\Delta$$

La multiplication à gauche des relations (5.20)-(5.22) par  $\Xi$  donne, avec  $Z = \Xi Y$  :

$$ZG = t^\Delta(GA)^\Delta = T^\Delta_b(GA)^\Delta_E, \quad (5.30)$$

$$Z\rho \leq 0, \quad (5.31)$$

$$Z_{ij} \geq 0 \text{ si } t^\Delta_{ik} = 0 \quad \forall k \in \mathcal{I}(j). \quad (5.32)$$

Les conditions (5.30)-(5.32) montrent, par dualité, que pour tout  $x$  vérifiant (5.29) :

$$T^\Delta_b(GA)^\Delta_E x \leq 0. \quad (5.33)$$

D'après le lemme A.2, cette relation équivaut à l'existence d'un vecteur  $u \in \mathfrak{R}^m$  tel que :

$$(GA)^\Delta_E x + (GB)^\Delta_E u \leq 0,$$

et par convexité du domaine d'incertitudes :

$$G_E \dot{x} = G_E A x + G_E B u \leq 0 \quad \forall A \in \Delta_A, B \in \Delta_B.$$

Donc, comme dans la démonstration de la proposition 3.2, on peut montrer l'existence d'une loi de commande dans la classe  $\mathcal{C}_L$  qui résulte en un déplacement admissible pour chaque condition initiale sur la frontière de  $R[G, \rho]$ .  $\square$

Les conditions exprimées par cette proposition sont testées directement sur le système réel, contrairement à celles proposées dans [18] qui sont exprimées en fonction d'un système approché dont l'existence est garantie, mais pour lequel il n'y a pas de méthode systématique de calcul.

Appliquons à présent la proposition précédente au cas de polyèdres symétriques. Soient les matrices  $(QA)^\Delta$  et  $(QB)^\Delta$  définies de la même façon que les matrices  $(GA)^\Delta$  et  $(GB)^\Delta$  respectivement, avec  $G$  remplacé par  $Q$ , et la matrice  $\mu^\Delta$  définie comme la matrice  $\rho^\Delta$  avec  $\rho$  remplacé par  $\mu$ . Soit aussi  $[T^{\Delta_1} \ T^{\Delta_2}]$  une matrice dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum du cône polyédrique  $\Gamma^\Delta$  (5.9), avec  $(GB)^\Delta = \begin{bmatrix} (QB)^\Delta \\ -(QB)^\Delta \end{bmatrix}$ .

Soit également la matrice  $\mathcal{T}^\Delta$ , sous-matrice de  $T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2}$ , formée en supprimant les lignes  $(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_i$  pour lesquelles ou bien  $(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_i = 0$ , ou alors  $(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_i = -(T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})_j$  pour un  $j < i$ . Par application directe de la proposition précédente, les conditions de  $\Delta - (A, B)$ -invariance d'un polyèdre symétrique prennent la forme suivante :

**Corollaire 5.4** *Le polyèdre convexe symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est  $\Delta - (A, B)$ -invariant par rapport au système (5.16)-(5.18) si et seulement s'il existe des matrices  $Y_1$  et  $Y_2$  telles que :*

$$(Y_1 - Y_2)Q = (T^{\Delta_1} - T^{\Delta_2})(QA)^\Delta, \quad (5.34)$$

$$(Y_1 + Y_2)\mu \leq 0, \quad (5.35)$$

$$Y_{1ij} \geq 0 \text{ si } T^{\Delta_{1ik}} = 0 \ \forall k \in \mathcal{I}(j), \quad (5.36)$$

$$Y_{2ij} \geq 0 \text{ si } T^{\Delta_{2ik}} = 0 \ \forall k \in \mathcal{I}(j). \quad (5.37)$$

Une approximation du domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant suprémal, inclus dans un polyèdre  $R[G, \rho]$  donné, noté  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \Delta)$ , peut à nouveau être obtenue en calculant le domaine suprémal par rapport à un système approché d'Euler :

$$x_{k+1} = (I + \tau A(\xi))x_k + \tau B(\mu)u_k. \quad (5.38)$$

Cette approche est utilisée dans [18], où la  $\Delta - (A, B)$ -invariance est testée vis-à-vis du système approché à chaque pas de l'algorithme. L'exemple suivant montre qu'une approximation plus fine de  $\mathcal{C}^\infty(R[G, \rho], \Delta)$  peut être obtenue lorsque l'on utilise les conditions nécessaires et suffisantes de la proposition 5.3 (ou du corollaire 5.4) pour tester la  $\Delta - (A, B)$ -invariance à chaque pas.

### Exemple 5.2

Cet exemple a été emprunté de [18]. Soit le système :

$$\dot{x} = A(\xi)x(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad (5.39)$$

pour lequel :

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & \alpha \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

avec  $1 \leq \alpha \leq 2$ ,  $-0.05 \leq d(t) \leq 0.05$ . La matrice  $A$  appartient donc au domaine convexe d'incertitudes :

$$\Delta_A = \left\{ A ; A = \sum_{i=1}^2 \xi_i A^i, \quad \sum_{i=1}^2 \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0 \right\},$$

où :

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 2 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit d'un système à modèle incertain soumis à des perturbations bornées. Les conditions de  $\Delta - (A, B)$ -invariance de polyèdres, obtenues précédemment pour des systèmes incertains non perturbés, peuvent être facilement étendues au système de cet exemple. Les détails de cette extension sont donc omis.

On souhaite calculer une approximation du domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant suprémal inclus dans le polyèdre symétrique  $S(Q, \mu)$  avec :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En exécutant la procédure de calcul du domaine suprémal  $\mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu), \Delta, \mathcal{D}, \lambda)$  par rapport au SAE (5.38), avec  $\tau = 1$ ,  $\lambda = 0.8$ , on se rend compte qu'au bout d'une seule itération on arrive à un domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant avec un taux de convergence exponentiel  $\epsilon = 0.2$  par rapport au système en temps continu (5.39). Par contre, si l'on teste la  $\Delta - (A, B)$ -invariance par rapport au SAE, alors trois itérations sont nécessaires, ce qui résulte en une approximation moins bonne, comme montrée dans la figure 5.2.

Le domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant obtenu est donné par  $S(Q^1, \mu^1)$ , avec :

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1 & 1 \\ 1.1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mu^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{bmatrix}.$$

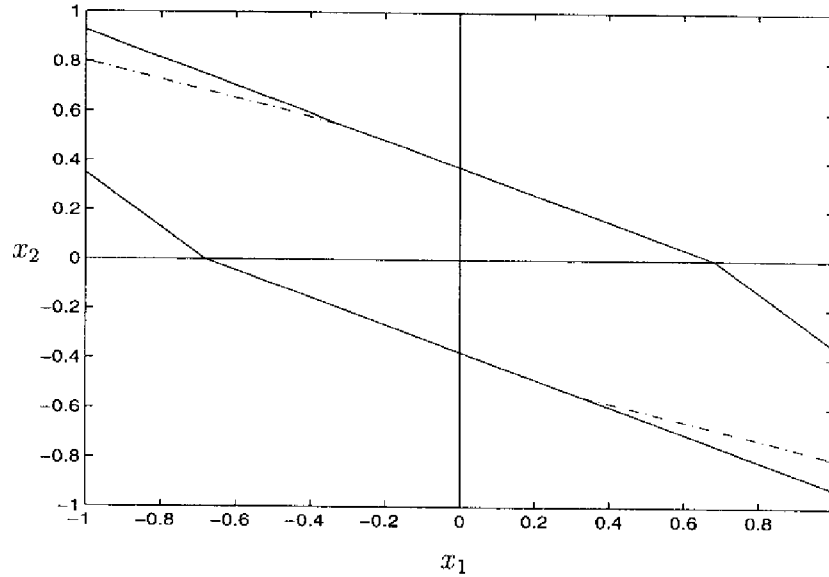


FIG. 5.2 –  $S(Q, \mu)$  et deux approximations de  $\mathcal{C}^\infty(S(Q, \mu), \Delta, \mathcal{D}, \epsilon)$ , avec la  $\Delta - (A, B)$ -invariance testée par rapport au système en temps continu (trait continu) et par rapport à un SAE (trait discontinu).

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes placés dans le cas où quelques paramètres des modèles linéaires de représentation des systèmes dynamiques ne peuvent pas être déterminés avec exactitude. Seules des bornes sur ces paramètres peuvent être établies. Pour traiter ce cas, il a été nécessaire d'étendre la caractérisation de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes, proposée dans les chapitres 2 et 3, à des systèmes dont le modèle est soumis à des incertitudes structurées, la structure de ces incertitudes étant caractérisée par l'appartenance des matrices  $A$  et  $B$  à un domaine convexe polytopique.

Nous avons désigné par *domaines  $\Delta - (A, B)$ -invariants* les domaines de l'espace d'état pour lesquels il existe une commande capable de forcer le vecteur d'état à y rester, pour toutes les paires  $(A, B)$  appartenant au domaine d'incertitudes. Nous avons ensuite établi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre convexe soit  $\Delta - (A, B)$ -invariant, sous la forme de relations matricielles linéaires. Comparativement à d'autres caractérisations trouvées dans la littérature, celle que nous avons proposée a l'avantage de s'appliquer à tout polyèdre convexe, et de ne pas nécessiter le calcul de sommets de polyèdres. Les cas de systèmes en temps discret et en temps continu ont été traités.

Le concept de  $\Delta - (A, B)$ -invariance de polyèdres se révèle particulièrement utile pour la résolution de deux problèmes importants de commande de systèmes linéaires : le problème de commande robuste de systèmes soumis à des contraintes linéaires, et le pro-



blème de stabilisation robuste. Dans les deux cas on peut être amené à calculer le domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdres donné. C'est principalement dans le calcul de ce domaine suprémal que notre contribution trouve son importance. Comme nous avons pu le constater à travers les exemples numériques, plusieurs itérations peuvent être nécessaires pour que l'algorithme de calcul converge. Il est donc souhaitable que le test de  $\Delta - (A, B)$ -invariance soit fait de façon numériquement efficace. Nous estimons qu'à cet égard le test de  $\Delta - (A, B)$ -invariance au moyen des relations matricielles linéaires proposées dans ce chapitre est plus efficace que le test effectué sur chaque sommet du polyèdre. D'autant plus que pour les systèmes incertains les domaines suprémaux sont en général définis par un nombre important de sommets.

L'intérêt de la caractérisation que nous avons proposée est encore plus grand dans le cas de systèmes en temps continu. La  $\Delta - (A, B)$ -invariance peut en effet être testée directement sur le système en temps continu, plutôt que sur un système approché en temps discret. Nous avons montré à travers un exemple que le fait d'éviter d'utiliser ce système approché peut résulter en une approximation plus fine du domaine  $\Delta - (A, B)$ -invariant suprémal.



## Conclusion Générale

Dans la quasi totalité des problèmes réels d'Automatique, on est confronté à des systèmes dynamiques sujets à des limitations d'ordre physique ou d'ordre technologique, ou parfois dictées par des impératifs de sécurité. Ces limitations se traduisent dans la majorité des cas par des contraintes linéaires sur les variables d'état et/ou de commande du modèle de représentation du système. La prise en compte de telles contraintes dans la conception des asservissements des systèmes dynamiques fait depuis quelques années l'objet d'études intensives.

Dans ce mémoire, nous avons présenté un ensemble de contributions portant sur l'analyse et la commande de systèmes linéaires contraints, avec, comme base théorique, l'approche par invariance positive. L'idée maîtresse de cette approche est de contraindre l'état du système à évoluer dans un domaine, alors nommé *domaine positivement invariant*, inclus dans le domaine défini par les contraintes. En l'occurrence, puisque nous nous sommes limités au cas de contraintes linéaires, elles définissent des polyèdres convexes dans l'espace d'état.

En particulier, la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes de l'espace d'état a été étudiée en profondeur. La vérification de cette propriété permet de conclure sur la possibilité de confiner l'état d'un système linéaire à l'intérieur d'un domaine donné, au moyen d'une action de commande adéquate, sans pour autant imposer au préalable des restrictions sur la nature de cette commande. Cet outil théorique nous a permis également de traiter quelques problèmes importants de commande sous contraintes de systèmes linéaires.

Nous avons d'abord fait un bilan succinct des concepts et résultats de base de l'approche par invariance positive. L'invariance positive d'un polyèdre convexe est caractérisée par l'existence de solutions à deux relations matricielles linéaires. Le test d'existence et le calcul d'une loi de commande par retour d'état linéaire rendant positivement invariant un polyèdre donné peut alors se faire de façon simple par résolution d'un problème de programmation linéaire. Nous avons proposé des conditions structurelles pour l'existence d'une telle loi de commande dans le cas de polyèdres symétriques non bornés et pour des systèmes à modèle incertain. Le choix au préalable de ce type de loi commande s'est

toutefois révélé limitatif, car dans de nombreux cas un polyèdre ne peut pas être rendu positivement invariant par une commande linéaire, l'accomplissement de cet objectif au moyen de lois non linéaires étant pourtant possible. Le concept d' $(A, B)$ -invariance permet justement de considérer directement des lois de commande plus générales.

Dans un premier temps, nous avons proposé des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre convexe soit  $(A, B)$ -invariant relativement à un système en temps discret. Étant données la paire  $(A, B)$  qui définit le système et les matrices qui définissent le polyèdre, les conditions d' $(A, B)$ -invariance prennent, à l'instar des conditions d'invariance positive, la forme de relations matricielles linéaires. Cette forme les rend faciles à tester. Elles sont en outre applicables à tout polyèdre convexe.

Dans le cadre d'un problème de satisfaction de contraintes, il se peut que le polyèdre défini par les contraintes ne soit pas  $(A, B)$ -invariant. Une solution possible dans ce cas est de restreindre l'état initial du système au domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans le domaine de contraintes. Nous avons tiré profit des relations d' $(A, B)$ -invariance pour développer un algorithme efficace de calcul de ce domaine suprémal. Nous avons également étendu l'étude de l' $(A, B)$ -invariance à des systèmes linéairement contraints sur la commande. En ce qui concerne le calcul d'une loi de commande rendant positivement invariant un polyèdre  $(A, B)$ -invariant, nous avons présenté une extension au cas général d'une loi linéaire par morceaux proposée dans la littérature. En raison de la complexité de cette loi, nous avons étudié la possibilité de concevoir des lois plus simples. Nous avons alors montré que l'existence d'une loi linéaire est conditionnée à la satisfaction de relations matricielles linéaires particulières, légèrement plus fortes que les relations d' $(A, B)$ -invariance.

Les résultats obtenus en temps discret ont été ensuite étendus aux systèmes en temps continu. Les conditions d' $(A, B)$ -invariance ont à nouveau été exprimées sous la forme de relations matricielles linéaires. Ces conditions, nécessaires et suffisantes, sont testées directement sur le système en temps continu, contrairement à une autre caractérisation trouvée dans la littérature qui fait appel à une approximation en temps discret du système d'origine. Cela a des implications importantes dans le calcul du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre donné. Puisqu'il n'est pas possible, en général, de le faire avec exactitude, on est obligé de calculer une approximation de ce domaine suprémal. Une approximation plus fine peut être obtenue lorsque, à chaque itération de l'algorithme de calcul, l' $(A, B)$ -invariance est testée directement sur le système en temps continu.

La propriété d' $(A, B)$ -invariance a également été étendue au cas de systèmes dont le modèle est soumis à des incertitudes paramétriques appartenant à un domaine convexe. Nous avons présenté des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre convexe de l'espace d'état soit  $\Delta - (A, B)$ -invariant, c'est-à-dire, pour qu'il existe une commande telle que toute trajectoire partant d'un point de ce polyèdre y reste, quelles que soient

les valeurs prises par les paramètres incertains. Une application majeure du concept de  $\Delta - (A, B)$ -invariance est dans la recherche d'une fonction de Lyapunov polyédrique qui prouve l'existence d'une commande qui stabilise de façon robuste le système incertain. Cette application est d'autant plus intéressante qu'il a été montré par ailleurs que, par rapport au problème de stabilisabilité robuste, les fonctions de Lyapunov polyédriques sont plus universelles que les quadratiques, communément employées pour la résolution de ce type de problème. Le calcul de fonctions polyédriques représente toutefois une lourde tâche numérique. Les relations de  $\Delta - (A, B)$ -invariance sous la forme de relations matricielles linéaires peuvent pallier cette difficulté, même si un grand effort dans ce sens reste à accomplir.

En étendant l'étude de l' $(A, B)$ -invariance à des systèmes linéaires soumis à des perturbations additives bornées, à travers la définition du concept de  $\mathcal{D} - (A, B)$ -invariance, nous avons proposé une approche géométrique pour la solution du problème d'atténuation de perturbations persistantes, connu dans la littérature sous la dénomination de *problème  $\ell^1$* . L'objectif de ce problème est de limiter l'amplitude maximale des signaux de sortie d'un système excité par des signaux de perturbation d'amplitude bornée, tout en stabilisant asymptotiquement en boucle fermée les trajectoires de l'état. Cette limitation en amplitude définit un domaine polyédrique symétrique (généralement non borné) de contraintes sur l'état, lesquelles contraintes ne peuvent être respectées que si le polyèdre qu'elles définissent contient un domaine  $\mathcal{D} - (A, B)$ -invariant. Cette condition n'est pas suffisante en général, car l' $(A, B)$ -invariance d'un polyèdre non borné n'implique pas l'existence d'une commande qui accomplisse simultanément les objectifs de rendre ce polyèdre positivement invariant et de stabiliser asymptotiquement le système. Nous avons proposé d'aborder ce problème à partir de la définition de domaines  $(A, B)$ -invariants *intérieurement stabilisables*. Un niveau de performance  $\ell^1$  donné peut être obtenu si et seulement s'il existe un domaine  $\mathcal{D} - (A, B)$ -invariant intérieurement stabilisable inclus dans le domaine de performance. Nous avons donc montré que le domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans un polyèdre symétrique non borné peut être calculé de façon décomposée, ce qui permet de réduire l'effort numérique requis par ce calcul. Cette décomposition se répercute sur le calcul de la loi de commande, et permet également de déduire des propriétés dynamiques du système en boucle fermée. En particulier, nous avons montré qu'à partir de cette interprétation géométrique du problème  $\ell^1$ , une solution directe peut être déduite pour une classe importante de systèmes. Finalement, nous avons discuté la solution du problème d'atténuation de perturbations persistantes pour les systèmes en temps continu. Les résultats théoriques du cas discret peuvent être plus ou moins directement transposés au cas continu. La différence principale se situe au niveau du domaine intérieurement stabilisable suprémal, lequel ne peut pas généralement être calculé avec exactitude. Là encore, les relations de  $\mathcal{D} - (A, B)$ -invariance que nous avons proposées se révèlent très utiles pour le calcul d'un domaine approché.

En termes de perspectives de ce travail, nous estimons qu'un effort important reste à faire dans la recherche de lois de commande plus simples pour imposer l'invariance positive de polyèdres  $(A, B)$ -invariants. Il serait particulièrement souhaitable de pouvoir déduire une telle loi directement des relations d' $(A, B)$ -invariance. Une piste possible serait d'envisager des lois de commande dynamiques.

Concernant la solution du problème  $\ell^1$ , quelques améliorations sont également possibles dans la minimisation de la norme  $\ell^1$ . Dans quelques exemples que nous avons traités, nous avons en effet pu déterminer cette valeur minimale directement à partir du domaine intérieurement stabilisable suprémal relatif au système non perturbé. Nous avons ainsi évité de réaliser le calcul, souvent lourd, de domaines  $\mathcal{D}$ - $(A, B)$ -invariant suprémiaux pour des valeurs décroissantes de la norme  $\ell^1$ , ce qui a permis de réduire considérablement l'effort de calcul requis. Le problème de généralisation de cette approche reste ouvert.

Une autre idée à approfondir est d'utiliser les degrés de liberté offerts par la commande qui accomplit un niveau donné de performance  $\ell^1$ , pour essayer de satisfaire des objectifs de commande complémentaires, comme par exemple la minimisation d'un coût  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , ou le placement de quelques valeurs propres en boucle fermée. Le paramétrage de la loi de commande que nous avons proposé, issu du changement de la base de représentation du système, peut être utile à cet effet.

Un autre axe de recherche d'intérêt pratique certain consiste à étudier des systèmes pour lesquels toutes les variables d'état ne sont pas accessibles. Cela permettrait de trouver des solutions à certains problèmes ouverts, tels que, parmi d'autres, les problèmes de commande sous contraintes, de stabilisabilité robuste, et de minimisation de la norme  $\ell^1$  par retour de sortie. Quelques études préliminaires dans cette direction ont déjà été entamées.

## Bibliographie

- [1] J. P. AUBIN. *Viability Theory*. Birkhäuser, Boston, 1991.
- [2] G. BASILE et G. MARRO. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice-Hall, 1992.
- [3] A. BENZAOUIA. *Le Concept d'Invariance Positive Appliqué à des Problèmes de Commande de Systèmes Linéaires Discrets avec Contraintes*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1988. Rapport LAAS No. 88322.
- [4] A. BENZAOUIA et C. BURGAT. The regulator problem for a class of linear systems with constrained control. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 10 no. 5, p. 357–363, 1988.
- [5] A. BENZAOUIA et C. BURGAT. Regulator problem for discrete-time systems with non-symmetrical constrained control. *Int. J. Contr.*, vol. 48, p. 2441–2451, 1988.
- [6] D. P. BERTSEKAS. Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 17 no. 5, p. 604–613, 1972.
- [7] J.-P. BÉZIAT. *Sur la Commande Adaptative Multivariable sous Contraintes*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1989. Rapport LAAS No. 89093.
- [8] S. P. BHATTACHARYYA. Generalized controllability,  $(A, B)$ -invariant subspaces and parameter invariant control. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, vol. 4, p. 529–533, 1983.
- [9] G. BITSORIS. On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 11, p. 243–248, 1988.
- [10] G. BITSORIS. Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems. *Int. J. Contr.*, vol. 47, p. 1713–1726, 1988.
- [11] G. BITSORIS. Existence of positively invariant polyhedral sets for continuous-time linear systems. *Control - Theory and Advanced Technology*, vol. 7 no. 3, p. 407–427, 1991.

- [12] G. BITSORIS et E. GRAVALOU. Robust linear controller under state and control constraints. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2640–2642, Tucson, USA, 1993.
- [13] G. BITSORIS et E. GRAVALOU. Comparison principle, positive invariance and constrained regulation of nonlinear systems. *Automatica*, vol. 31, p. 217–222, 1995.
- [14] G. BITSORIS et M. VASSILAKI. Constrained regulation of linear systems. *Automatica*, vol. 31 no. 2, p. 223–227, 1995.
- [15] F. BLANCHINI. Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35 no. 11, p. 1231–1234, 1990.
- [16] F. BLANCHINI. Constrained control for uncertain linear systems. *J. Optimiz. Theory Appl.*, vol. 71, p. 465–484, 1991.
- [17] F. BLANCHINI. Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39 no. 2, p. 428–433, 1994.
- [18] F. BLANCHINI. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. *Automatica*, vol. 31 no. 3, p. 451–461, 1995.
- [19] F. BLANCHINI et S. MIANI. Constrained stabilization of continuous-time linear systems. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 28, p. 95–102, 1996.
- [20] F. BLANCHINI et M. SZNAIER. Rational  $L^1$  suboptimal compensators for continuous-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39 no. 7, p. 1487–1492, 1994.
- [21] F. BLANCHINI et M. SZNAIER. Persistent disturbance rejection via static-state feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40 no. 6, p. 1127–1131, 1995.
- [22] C. BURGAT et S. TARBOURIECH. Global stability of linear systems with saturated controls. *Int. J. Syst. Science*, vol. 23 no. 1, p. 37–46, 1992.
- [23] E. B. CASTELAN. *Sur l'Invariance Positive et la Commande sous Contraintes de Systèmes Linéaires Multivariables*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1992. Rapport LAAS No. 92223.
- [24] E. B. CASTELAN, J. M. GOMES DA SILVA JR, et J. E. R. CURY. A reduced-order framework applied to linear systems with constrained controls. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41 no. 2, p. 249–255, 1996.
- [25] E. B. CASTELAN et J.-C. HENNET. Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous-time systems. *Automatica*, vol. 28 no. 3, p. 605–611, 1992.



- [26] E. B. CASTELAN et J.-C. HENNET. On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38 no. 11, p. 1680–1685, 1993.
- [27] J. CHEGANÇAS. *Sur le Concept d'Invariance Positive Appliqué à l'Étude de la Commande Contrainte des Systèmes Dynamiques*. Thèse de Doctorat, 1989. Rapport LAAS No. 85325.
- [28] M. A. DAHLEH et J. B. PEARSON.  $\ell^1$ -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32 no. 4, p. 314–322, 1987.
- [29] M. A. DAHLEH et J. B. PEARSON.  $L^1$ -optimal compensators for continuous-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32 no. 10, p. 889–895, 1987.
- [30] P. D'ALESSANDRO, M. DALLA MORA, et E. DE SANTIS. Techniques of linear programming based on the theory of convex cones. *Optimization*, vol. 20 no. 6, p. 761–777, 1989.
- [31] E. DE SANTIS. On positively invariant sets for discrete-time linear systems with disturbances: An application of maximal disturbance sets. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39 no. 1, 1994.
- [32] I. J. DIAZ-BOBILLO et M. A. DAHLEH. State feedback  $\ell^1$ -optimal controllers can be dynamic. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 19 no. 2, p. 87–93, 1992.
- [33] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET. On robust positive invariance of unbounded polyhedra. In *Proceedings of IFAC Conf. System Structure and Control*, p. 243–248, Nantes, France, 1995.
- [34] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET. Computation of maximal admissible sets of constrained linear systems. In *Proc. 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions on Control and Automation*, p. 286–291, Maleme, Greece, 1996.
- [35] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET. On  $(A, B)$ -invariance of polyhedral domains for discrete-time systems. In *Proc. 35th IEEE Conf. Decision Contr.*, p. 4319–4324. Kobe, Japan, 1996.
- [36] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET.  $(A, B)$ -invariance conditions of polyhedral domains for continuous-time systems. In *Proc. 1997 European Contr. Conf.*, Brussels, Belgium, 1997.
- [37] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET. Applications of controlled invariance to the  $\ell^1$  optimal control problem. In *Proc. 1997 American Contr. Conf.*, p. 3443–3444, Albuquerque, USA, 1997.

- [38] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET. A geometric approach to the  $\ell^1$  linear control problem. Rapport Technique 97065, LAAS-CNRS, 1997. Accepted for presentation at the 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, USA, December 1997.
- [39] C. E. T. DÓREA et J.-C. HENNET. An invariance based algorithm for the  $\ell^1$  optimal control problem. In *Proc. 4th IFAC Conf. System Structure and Control*, p. 315–320, Bucharest, Romania, 1997.
- [40] C. E. T. DÓREA et B. E. A. MILANI. Design of L-Q regulators for state constrained continuous-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40 no. 3, p. 544–548, 1995.
- [41] C. E. T. DÓREA et B. E. A. MILANI. A computational method for optimal L-Q regulation with simultaneous disturbance decoupling. *Automatica*, vol. 31 no. 1, p. 155–160, 1995.
- [42] E. G. GILBERT et K. T. TAN. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36 no. 9, p. 1008–1020, 1991.
- [43] J. D. GLOVER et F. C. SCHWEPPE. Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 16 no. 5, p. 411–423, 1971.
- [44] J. M. GOMES DA SILVA JR. *Sur la Stabilité Locale de Systèmes Linéaires avec Saturation de Commandes*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1997. Rapport LAAS No. 97383.
- [45] P. O. GUTMAN et M. CWIKEL. Admissible sets and feedback control for discrete-time linear systems with bounded control and states. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31 no. 4, p. 373–376, 1986.
- [46] P. O. GUTMAN et M. CWIKEL. An algorithm to find maximal state constraint sets for discrete-time linear dynamical systems with bounded control and states. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32 no. 3, p. 251–254, 1987.
- [47] P. O. GUTMAN et P. HAGANDER. A new design of constrained controllers for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, p. 22–33, 1985.
- [48] J.-C. HENNET. Une extension du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série I*, vol. 308, p. 415–419, 1989.
- [49] J.-C. HENNET. Discrete-time constrained linear systems. In C. LEONDES, éditeur, *Control and Dynamic Systems*, volume 71, p. 157–213. Academic Press, 1995.

- [50] J.-C. HENNET et E. B. CASTELAN. Robust invariant controllers for constrained linear systems. In *Proceedings of 1992 American Contr. Conf.*, p. 993–997, Chicago, USA, 1992.
- [51] J.-C. HENNET et E. B. CASTELAN. Constrained control of unstable multivariable linear systems. In *Proc. 2nd European Contr. Conf.*, p. 2039–2043, Groningen, Netherlands, 1993.
- [52] J.-C. HENNET et J.-B. LASSERRE. Construction of positively invariant polytopes for stable linear systems. In *Proc. 12th IFAC World Congress*, volume 9, p. 285–288, Sydney, Australia, 1993.
- [53] R. E. KALMAN et J. E. BERTRAM. Control systems analysis and design via the second method of Lyapunov. *Trans. A.S.M.E.*, vol. D, p. 394–400, 1960.
- [54] S. S. KEERTHI et E. G. GILBERT. Computation of minimum-time feedback control laws for discrete-time systems with state-control constraints. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32 no. 5, p. 432–435, 1987.
- [55] H. KIENDL, J. ADAMY, et P. STELZNER. Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, p. 839–842, 1992.
- [56] M. KLAÏ. *Stabilisation des Systèmes Linéaires Continus Contraints sur la Commande par Retour d'État et de Sortie Saturés*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1994. Rapport LAAS No. 94323.
- [57] J. P. LASALLE. *The Stability of Dynamical Systems*. SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics. 1976.
- [58] J.-B. LASSERRE. Reachable, controllable sets and stabilizing control of constrained linear systems. *Automatica*, vol. 29 no. 2, p. 531–536, 1993.
- [59] D. G. LUENBERGER. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [60] B. E. A. MILANI et A. N. CARVALHO. Robust linear regulator design for discrete-time systems under polyhedral constraints. *Automatica*, vol. 31, p. 1489–1493, 1995.
- [61] B. E. A. MILANI, E. B. CASTELAN, et S. TARBOURIECH. Linear regulator design for bounded uncertain discrete-time systems with additive disturbances. In *Proc. 13th IFAC World Congress*, volume G, p. 321–326, San Francisco, USA, 1996.
- [62] B. E. A. MILANI et C. E. T. DÓREA. On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances. *Automatica*, vol. 32 no. 5, p. 785–789, May 1996.

- [63] A. P. MOLCHANOV et E. S. PYATINSKI. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear nonstationary control systems - parts I-III. *Automat. Remote Control*, vol. 47, p. 344–354, 443–451, 620–630, 1986.
- [64] Y. OHTA, H. MAEDA, et S. KODAMA. Rational approximation of  $L^1$  optimal controllers for SISO systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, p. 1683–1691, 1992.
- [65] A. OUSTALOUP (COORDONATEUR). *La Robustesse - Analyse et Synthèse de Commandes Robustes*. Hermès, Paris, 1994.
- [66] W. PERRUQUETTI. *Sur la Stabilité et l'Estimation des Comportements Non Linéaires Non Stationnaires Perturbés*. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1994. Thèse préparée au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL URA-CNRS).
- [67] W. PERRUQUETTI, J.-P. RICHARD, et P. BORNE. Vector Lyapunov functions: Recent developments for stability, robustness, practical stability, and constrained control. *Nonlinear Times and Digest*, vol. 2, p. 227–258, 1995.
- [68] A. POLAŃSKI. On infinity norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40 no. 7, p. 1270–1274, 1995.
- [69] N. E. RADHY, P. BORNE, et J.-P. RICHARD. Regulation of nonlinear time-varying continuous systems with constrained state. In P. BORNE et V. MATROSOV, éditeurs, *The Lyapunov Functions Method and Applications*, p. 81–88. J. C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co. IMACS, 1990.
- [70] A. SCHRIJVER. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [71] G. SEIFERT. Positively invariant closed sets for systems of delay differential equations. *J. Differential Equations*, vol. 22, p. 292–304, 1976.
- [72] J. S. SHAMMA. Nonlinear state feedback for  $\ell^1$  optimal control. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 21, p. 265–270, 1993.
- [73] J. S. SHAMMA. Optimization of the  $\ell^\infty$ -induced norm under full state feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41 no. 4, p. 533–544, 1996.
- [74] A. A. STOORVOGEL. Nonlinear  $L_1$  optimal controllers for linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, p. 694–696, 1995.
- [75] M. SZNAIER. Norm based robust control of state-constrained discrete-time linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, p. 1057–1062, 1992.

- [76] M. SZNAIER. A set induced norm approach to the robust control of constrained systems. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 31, p. 733–746, 1993.
- [77] S. TARBOURIECH. *Sur la Stabilité des Régulateurs à Retour d'État Saturé*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1991. Rapport LAAS No. 91047.
- [78] S. TARBOURIECH et C. BURGAT. Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39 no. 2, p. 401–405, 1994.
- [79] S. TARBOURIECH et J. M. GOMES DA SILVA JR. Admissible polyhedra for discrete-time linear systems with saturating controls. In *Proc. 1997 American Contr. Conf.*, p. 3915–3919, Albuquerque, USA, 1997.
- [80] M. VASSILAKI. *Étude de Systèmes sous Contraintes - Application à des Processus de Production*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1987. Rapport LAAS No. 87191.
- [81] M. VASSILAKI et G. BITSORIS. Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. *Syst. Contr. Lett.*, vol. 13, p. 247–253, 1989.
- [82] M. VASSILAKI, J.-C. HENNET, et G. BITSORIS. Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. *Int. J. Contr.*, vol. 47 no. 6, p. 1727–1735, 1988.
- [83] M. VIDYASAGAR. Optimal rejection of persistent bounded disturbances. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31 no. 6, p. 527–534, 1986.
- [84] H. S. WITSENHAUSEN. Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 13, 1968.
- [85] W. M. WONHAM. *Linear Multivariable Control - A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York, 1985.



## Annexe A

### Cônes et Polyèdres

#### A.1 Domaines Polyédriques

Un polyèdre convexe fermé de  $\mathfrak{R}^n$ ,  $R[G, \rho]$ , avec  $G \in \mathfrak{R}^{g \times n}$  et  $\rho \in \mathfrak{R}^g$ , est défini par l'ensemble d'inégalités linéaires :

$$R[G, \rho] = \{x \in \mathfrak{R}^n ; Gx \leq \rho\}.$$

Un cône polyédrique de  $\mathfrak{R}^n$ ,  $R[G, 0]$ , est défini par l'ensemble d'inégalités linéaires :

$$R[G, 0] = \{x \in \mathfrak{R}^n ; Gx \leq 0\}.$$

Un polyèdre convexe symétrique de  $\mathfrak{R}^n$ ,  $S(Q, \mu)$ , est défini, pour  $\mu \geq 0$ , par l'ensemble d'inégalités linéaires :

$$S(Q, \mu) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; |Qx| \leq \mu\}.$$

Le domaine  $S(Q, \mu)$  peut être écrit sous la forme  $R[G, \rho]$ , avec  $g = 2q$  et

$$G = \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Un *polytope* est un polyèdre compact.

## A.2 Générateurs de Cônes Polyédriques

Un ensemble générateur du cône polyédrique  $R[G, 0]$  est défini comme suit :

**Définition A.1** Les vecteurs colonne de la matrice  $M$  forment un *ensemble générateur* du cône polyédrique  $R[G, 0]$  si et seulement s'il existe un vecteur non négatif  $\xi$  tel que  $x = M\xi$ ,  $\forall x \in R[G, 0]$ . Chaque vecteur colonne de  $M$  est un *générateur* de  $R[G, 0]$ .

**Définition A.2** Un ensemble générateur de  $R[G, 0]$  est dit *ensemble générateur minimum* s'il est formé par le plus petit nombre possible de générateurs.

L'*enveloppe affine* de  $R[G, 0]$  est donnée par  $\mathcal{A} = R[G, 0] \cap -R[G, 0] = \{x \in \mathbb{R}^n ; Gx = 0\}$  [70]. La dimension de l'enveloppe affine est  $h = n - \text{rang}(G)$ . Dans le cas général, tout cône polyédrique  $R[G, 0]$  peut être décomposé sous la forme  $R[G, 0] = P + \mathcal{A}$ , où  $P$  est un *cône propre*. Si  $\mathcal{A} = \{0\}$ , le cône est *pointé* et un ensemble générateur peut être obtenu en sélectionnant un vecteur non nul de chaque *rayon extrême* du cône. Cet ensemble de vecteurs forme un ensemble générateur minimum [30].

## A.3 Décomposition de Polyèdres

### A.3.1 Polyèdres généraux

Tout polyèdre  $R[G, \rho] \subset \mathbb{R}^n$  admet une décomposition minimale [70] sous la forme de la somme du *cône caractéristique*  $R[G, 0]$  avec un polytope  $\Pi$  défini par ses sommets  $(x_1, \dots, x_p)$  :

$$R[G, \rho] = R[G, 0] + \Pi, \quad (\text{A.2})$$

L'addition de ces deux domaines est définie par :

$$x \in R[G, \rho] \equiv \exists y \in R[G, 0], z \in \Pi ; x = y + z.$$

Chaque sommet  $(x_1, \dots, x_p)$  du polytope  $\Pi$  est sur une face minimale du polyèdre  $R[G, \rho]$ .

Si les vecteurs  $M_j$ , ( $j = 1, \dots, q$ ) forment un ensemble générateur du cône polyédrique  $R[G, 0]$ , alors tout point  $x \in R[G, \rho]$  peut être défini par l'ensemble de coefficients  $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_p)$  à travers l'expression linéaire :



$$x = \sum_{j=1}^q \alpha_j M_j + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i. \quad (\text{A.3})$$

avec  $\alpha_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, q$ ;  $0 \leq \beta_i \leq 1 \forall i = 1, \dots, p$ ,  $\sum_{i=1}^p \beta_i \leq 1$ .

Il faut remarquer que le polytope  $\Pi$  appartient toujours au polyèdre  $R[G, \rho]$ , ce qui peut être montré en sélectionnant  $y = 0$  dans la décomposition (A.3). Au contraire, le cône caractéristique  $R[G, 0]$  n'appartient à  $R[G, \rho]$  que si le vecteur nul appartient également à  $R[G, \rho]$ .

### A.3.2 Polyèdres symétriques

Le cône caractéristique associé au polyèdre symétrique  $S(Q, \mu) \subset \mathbb{R}^n$  est défini par l'ensemble d'inégalités :  $\begin{cases} Qx \leq 0 \\ -Qx \leq 0 \end{cases}$ , ce qui définit également son enveloppe affine  $\mathcal{A} = \ker(Q)$ , de dimension  $n - r$ , avec  $r = \text{rang}(Q)$ .

Chaque sommet  $(p_1, \dots, p_s)$  du polytope  $\Pi$  associé à  $S(Q, \mu)$  doit être situé sur une face minimale du polyèdre  $R[G, \rho]$ . Ce polyèdre est clairement symétrique. Un choix particulier pour  $\Pi$  peut être défini par la projection de  $S(Q, \mu)$  sur le sous-espace  $\ker(Q)^\perp$ , orthogonal à  $\ker(Q)$ . Ainsi, sous le choix  $\Pi \subset \ker(Q)^\perp$ , la décomposition (A.2) de  $R[G, \rho]$ , avec  $G$  et  $\rho$  définis comme dans (A.1), est unique et minimale [70]. Par conséquent, le polyèdre  $x \in S(Q, \mu)$  peut être uniquement décomposé ainsi :

$$S(Q, \mu) = \ker(Q) + \Pi. \quad (\text{A.4})$$

Tout point  $x \in S(Q, \mu)$  est ainsi donné par :

$$x = x^0 + x^\Pi, \text{ avec } x^0 \in \ker(Q) \text{ et } x^\Pi \in \Pi.$$

## A.4 Le Lemme de Farkas

**Lemme A.1** Soit  $M$  une matrice et  $v$  un vecteur. Alors,  $\exists x ; Mx \leq v$  si et seulement si  $yv \geq 0 \forall y \geq 0 ; yM = 0$ .

L'ensemble de vecteurs ligne candidats  $y$  tels que  $y \geq 0$ ,  $yM = 0$  forme un cône polyédrique pointé. Dans ce mémoire, ce cône est nommé *noyau non négatif à gauche* de la matrice  $M$ .

Soit  $W$  une matrice non négative dont les vecteurs ligne forment un ensemble générateur minimum de noyau non négatif à gauche de  $M$ . Alors, le Lemme (A.1) peut être énoncé autrement comme suit :

**Lemme A.2**  $\exists x ; Mx \leq v$  si et seulement si  $Wv \geq 0$ .

Par convention,  $W = 0$  si le noyau non négatif à gauche de  $M$  ne contient que le vecteur ligne nul.

Comme cela a été montré dans [54], il est possible de calculer la matrice  $W$  par la technique d'élimination de Fourier-Motzkin [70].

Dans le cas de contraintes égalité, la version étendue du Lemme de Farkas suivante peut être énoncée :

**Lemme A.3** Soit  $M$  et  $V$  deux matrices de dimensions appropriées. Alors,  $\exists X ; MX = V$  si et seulement si  $yV = 0 \quad \forall y ; yM = 0$ .

Une autre variante de Lemme de Farkas fournit un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles  $R[G, \rho] \subset R[P, \psi]$ , avec  $P \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  et  $\psi \in \mathfrak{R}^p$  [48] :

**Lemme A.4** Pour  $x \in \mathfrak{R}^n$ , l'ensemble d'inégalités  $Px \leq \psi$  est vérifié pour chaque point du domaine polyédrique convexe non vide défini par l'ensemble d'inégalités  $Gx \leq \rho$  si et seulement s'il existe une matrice duale  $U \in \mathfrak{R}^{p \times q}$  avec toutes ses composantes non négatives et qui vérifie :

$$\begin{aligned} UG &= P, \\ U\rho &\leq \psi. \end{aligned}$$

**Sur l' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes ; application à la commande sous contraintes et au problème  $\ell^1$**

Ce travail porte sur l'étude de la propriété d' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes et son application à la commande sous contraintes et au problème  $\ell^1$ .

D'abord, nous proposons une caractérisation explicite de l' $(A, B)$ -invariance de polyèdres convexes pour des systèmes en temps discret. Cette caractérisation se traduit par des conditions nécessaires et suffisantes sous la forme de relations matricielles linéaires, et présente deux avantages majeurs vis-à-vis de celles rencontrées dans la littérature : elle s'applique à tous les polyèdres convexes et elle ne nécessite pas le calcul de sommets. Ces avantages se font sentir notamment dans le calcul du domaine  $(A, B)$ -invariant suprémal inclus dans un polyèdre donné, pour lequel nous proposons une méthode numérique. Le problème de calculer une loi de commande rendant positivement invariant en boucle fermée un polyèdre  $(A, B)$ -invariant est également traité. Les relations d' $(A, B)$ -invariance sont alors généralisées à des systèmes soumis à des contraintes linéaires sur la commande et à des systèmes soumis à des perturbations additives bornées. Puis, les résultats obtenus en temps discret sont étendus aux systèmes en temps continu.

Ensuite, le problème d'atténuation de perturbations additives persistantes, connu dans la littérature comme problème  $\ell^1$ , est étudié. Les domaines  $(A, B)$ -invariants intérieurement stabilisables sont d'abord caractérisés. Puis, nous proposons une approche décomposée pour le calcul du domaine intérieurement stabilisable suprémal inclus dans le polyèdre défini par les contraintes de performance  $\ell^1$ . Un niveau de performance donné est atteignable si et seulement si ce domaine suprémal n'est pas vide. Cette approche géométrique permet notamment de déterminer directement la solution du problème  $\ell^1$  pour une classe importante de systèmes.

Enfin, nous étendons l'étude de l' $(A, B)$ -invariance de polyèdres à des systèmes dont le modèle est soumis à des incertitudes du type structuré.

**Mots clefs :** Systèmes linéaires, invariance positive, commande sous contraintes,  $(A, B)$ -invariance, atténuation de perturbations, problème  $\ell^1$ .

**On  $(A, B)$ -invariance of convex polyhedra; application to the control of constrained systems and to the  $\ell^1$  control problem**

This work analyses the property of  $(A, B)$ -invariance of convex polyhedra and its application to the control of constrained systems and to the  $\ell^1$  control problem.

Firstly, an explicit characterization of  $(A, B)$ -invariance of convex polyhedra for discrete-time systems is proposed. Such a characterization amounts to necessary and sufficient conditions in the form of linear matrix relations, and presents two major advantages compared to the ones found in the literature: it applies to any convex polyhedron and it does not require the computation of vertices. Such advantages are particularly felt in the computation of the supremal  $(A, B)$ -invariant domain included in a given polyhedron, for which we propose a numerical method. The problem of computing a control law which makes an  $(A, B)$ -invariant polyhedron positively invariant in closed-loop is treated as well. The  $(A, B)$ -invariance relations are then generalized to systems subject to linear constraints on the control vector and to systems subject to bounded additive disturbances. The results obtained for discrete-time systems are then extended to continuous-time systems.

Next, the problem of attenuation of persistent additive disturbances, known in the literature as the  $\ell^1$  control problem, is studied. The internally stabilizable  $(A, B)$ -invariant domains are firstly characterized. Then, a decomposed approach is proposed for the computation of the supremal internally stabilizable domain included in the polyhedron defined by the  $\ell^1$  performance constraints. A given performance is achievable if and only if this associated supremal domain is not empty. Such a geometric approach allows to directly determine the solution of the  $\ell^1$  problem for an important class of systems.

Finally, the study of  $(A, B)$ -invariance of polyhedra is extended to systems whose model is subject to structured uncertainties.

**Keywords:** Linear systems, positive invariance, control under constraints,  $(A, B)$ -invariance, disturbance attenuation,  $\ell^1$  control problem.