



HAL
open science

Champs aléatoires: autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle

Hermine Biermé

► **To cite this version:**

Hermine Biermé. Champs aléatoires: autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2005. Français. NNT: . tel-00010227

HAL Id: tel-00010227

<https://theses.hal.science/tel-00010227v1>

Submitted on 21 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Discipline : **Mathématiques**

par

Hermine BIERMÉ

Champs aléatoires : autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle

Soutenue le : **01 juillet 2005**

MEMBRES DU JURY :

-C. Laurent Benhamou (Professeur associé, <i>Hôpital d'Orléans IPROS</i>)	Examineur
-Aline Bonami (Professeur, <i>Université d'Orléans</i>)	Directrice de Thèse
-Anne Estrade (Professeur, <i>Université de Paris 5</i>)	Co-directrice de Thèse
-Xavier Guyon (Professeur émérite, <i>Université de Paris 1</i>)	Président
-Stéphane Jaffard (Professeur, <i>Université de Paris 12</i>)	Rapporteur
-José R. Leon (Professeur, <i>Université centrale du Venezuela</i>)	Rapporteur

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Aline Bonami. Elle m'a proposé ce sujet de thèse qu'elle savait correspondre à mes envies de recherche. Malgré son emploi du temps chargé, elle a toujours su se rendre disponible pour me guider dans ce travail. Ses remarques judicieuses et ses relectures attentives m'ont beaucoup aidée.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Anne Estrade qui m'a transmis le goût prononcé des probabilités. J'ai énormément appris grâce à elle. Son soutien sans faille, son enthousiasme et sa bienveillance ont été les moteurs de l'aboutissement de mon travail. Je lui suis très redevable pour le travail qu'elle a fourni et les longues heures qu'elle a consacrées à me faire profiter de son expérience.

Un grand merci à Stéphane Jaffard et José R. Léon qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et de participer à mon jury. Je suis très honorée de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. J'ai ainsi eu la chance de bénéficier de leurs remarques pertinentes et de leurs suggestions sur de possibles prolongements de mes travaux.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Xavier Guyon et C. Laurent Benhamou qui me font l'honneur d'être membres de mon jury. Je suis très heureuse que C. Laurent Benhamou, directeur de l'Institut de Prévention et de Recherche sur l'Ostéoporose, ait pu se dégager de ses obligations pour préférer faire partie de mon jury.

J'ai beaucoup apprécié ma collaboration avec le LESI pendant ces trois années. Même si la communication n'a pas toujours été facile, cette approche interdisciplinaire a été un atout indéniable pour concrétiser l'application de certains de mes travaux. Je remercie particulièrement Rachid Harba et Rachid Jennane pour leurs questions et leur bonne humeur, Gérald Lemineur qui a su travailler en un temps record pour que je puisse apporter notre poster à Luminy. Je compte maintenant sur Gabriel Aafort pour avoir de belles simulations des "microballs"! Au cours de cette collaboration, j'ai rencontré Iléana Irribarren, venue du Venezuela pour travailler avec le LESI. Sa joie de vivre et ses conseils ont ensoleillé mon quotidien et je l'en remercie.

Je remercie la "communauté du fractionnaire" pour son accueil chaleureux et la richesse des discussions que j'ai eu l'occasion d'avoir. Merci à Jacques Istas pour son hospitalité. Je pense aussi à Céline Lacaux et Aurélia Fraysse avec qui j'ai découvert les joies des recherches bibliographiques et des simulations informatiques. L'annexe A n'aurait sans doute pas vu le jour sans leur aide!

Je tiens à témoigner ma reconnaissance envers Yimin Xiao pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et les démarches qu'il a entreprises pour que je puisse venir faire un stage post-doctoral. Grâce à lui je vais connaître la recherche américaine !

Je ne pourrais jamais assez exprimer ma gratitude envers les membres du MAPMO. J'ai beaucoup apprécié mes années passées à l'université d'Orléans. Merci notamment à Claire Anantharaman dont j'ai adoré les cours en tant qu'étudiante. Épaulée par Yves Denizeau et Olivier Garet, j'ai fait mes premiers pas en tant qu'enseignante. Enfin, en tant que doctorante, je remercie de tout coeur l'équipe de probabilités, et plus particulièrement Dominique Lépingle et Romain Abraham. J'ai ainsi pu mesurer la richesse et la diversité de ce domaine de recherche. Je n'oublie pas l'équipe d'analyse et la qualité de ses séminaires. Je tiens particulièrement à remercier Sandrine Grellier pour tous les conseils qu'elle m'a donnés et son intérêt pour mes travaux. Philippe Jaming nous a aidé pour la création de nos pageweb et je l'en remercie.

Un grand merci à Jean-Philippe Anker qui m'a toujours encouragée à assister aux colloques et écoles d'été malgré les dépenses engagées !

Impossible d'oublier l'équipe du secrétariat, Anne Liger, Christelle Morillon, Virginie Foucault et Anne-Sophie Jaïs. Merci à toutes les quatre qui sont pour beaucoup dans l'ambiance chaleureuse du laboratoire et dont la disponibilité sans faille m'a été d'une aide précieuse.

Je remercie les doctorants pour tous les bons moments passés et tout particulièrement Barbara Schapira pour son accueil chaleureux et ses conseils, lorsque j'ai débuté ma thèse. Elle a créé le groupe de travail des thésards que j'ai plaisir à co-organiser aujourd'hui. Je n'oublie pas Olivier Prot. Je lui suis très reconnaissante de son aide indispensable lorsque je me battais avec l'informatique. J'ai apprécié nos discussions enrichissantes, partagées avec Bruno Demange et Dominique Vieugué.

J'ai toujours été très fière de figurer sur la première page de la thèse de médecine de ma mère et je suis heureuse de pouvoir en faire autant aujourd'hui. Ses encouragements et sa confiance m'ont beaucoup aidée pendant mes études.

Je ne peux remercier Hervé en quelques lignes. Son soutien et ses conseils me sont indispensables. Il m'a épaulée avec patience tout au long de mes études, subissant mon stress et mes doutes. Merci à ses parents qui m'ont constamment encouragée.

Table des matières

Introduction	9
1 Représentation spectrale	17
1.1 Champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires	18
1.2 Les champs généralisés	20
1.2.1 Définition	20
1.2.2 Les champs généralisés stationnaires	21
1.2.3 Les champs généralisés à accroissements d'ordre m stationnaires	22
1.3 Champs généralisés et champs ponctuels	24
1.3.1 Des champs ponctuels aux champs généralisés	26
1.3.2 Des champs généralisés aux champs ponctuels	28
1.4 Représentation spectrale	31
1.4.1 Mesure aléatoire et champs généralisés stationnaires	31
1.4.2 Champs à accroissements d'ordre m stationnaires et représentation spectrale	32
2 Mesure spectrale et propriétés associées	35
2.1 Régularité	37
2.1.1 Régularité en moyenne quadratique	37
a) Caractérisation par la mesure spectrale	37
b) Régularité et anisotropie	45
2.1.2 Champs ponctuels gaussiens	48
a) Régularité des trajectoires	48
b) Dimensions de Hausdorff et de boîtes	49
2.2 Autosimilarité	52
2.2.1 Représentation spectrale des champs à accroissement d'ordre m autosimilaires	52
2.2.2 Autosimilarité asymptotique	58
2.3 Identification de l'exposant d'un champ gaussien	63
3 Transformées de Radon à fenêtre	73
3.1 Transformées de Radon à fenêtre de champs ponctuels	75
3.2 Transformées de Radon à fenêtre de mesures spectrales	79
3.2.1 Comportement asymptotique directionnel	79
3.2.2 Développement asymptotique	85
3.2.3 Réciproque partielle pour les fenêtres gaussiennes	89

4	Sur l'injectivité des transformées de Radon à fenêtre	97
4.1	Introduction	99
4.2	Definition and preliminary results	100
4.3	Gaussian functions	103
4.4	Injectivity for radial functions	104
4.5	General case	106
5	Au delà du gaussien	111
5.1	Introduction	113
5.2	The microball model	115
5.2.1	Poisson point process	115
5.2.2	The microball model	116
5.3	Self-similarity	119
5.3.1	Local asymptotic self-similarities	119
5.3.2	The lass Theorem	120
5.3.3	Homogenization	127
5.4	X-Ray Transform	128
5.5	Conclusion	133
A	Illustrations numériques	135
A.1	Processus gaussiens en dimension 1	136
A.1.1	Méthodes de simulation	136
	a) Principe de la méthode de la matrice circulante	136
	b) Méthode de la densité spectrale	140
A.1.2	Application au mouvement brownien fractionnaire	141
	a) Méthode de la matrice circulante	142
	b) Méthode de la densité spectrale	144
	c) Estimation du paramètre de Hurst	146
A.2	Champs gaussiens en dimension 2	149
A.2.1	Méthodes de simulation	149
A.2.2	Application au mouvement brownien fractionnaire	150
	a) Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire 2D	150
	b) Estimation du paramètre de Hurst	155
A.3	Simulation des transformées de Radon à fenêtre de MBF	158
A.3.1	Simulation	158
A.3.2	Estimation	161
A.3.3	Comparaison aux radiographies d'os	166
B	Distributions et harmoniques sphériques	169
B.1	Rappels et notations concernant les distributions tempérées	169
B.1.1	Notations concernant les multi-indices	169
B.1.2	L'espace de Schwartz	169
	Définitions et notations	169
	Propriétés	170
B.1.3	L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$	170
B.2	Harmoniques sphériques et décomposition de la transformée de Radon in- variante par rotation	171
B.2.1	Harmoniques sphériques	171

B.2.2	Décomposition de la transformée de Radon	177
B.2.3	Inversion des coordonnées sphériques de la transformée de Radon . .	179

Bibliographie		183
----------------------	--	------------

Introduction

Ce travail a pour origine le problème du diagnostic précoce de l'ostéoporose à partir des radiographies d'os. C'est un problème qui nécessite la collaboration de deux acteurs principaux : les médecins, pour établir des critères de diagnostic et les valider par une étude comparative, et les spécialistes du traitement de l'image, pour analyser les radiographies. Les mathématiciens peuvent les aider pour trouver des modèles validant les méthodes de diagnostic proposées. Ainsi, cette thèse s'inscrit dans la continuité de la collaboration entre les médecins de l'IPROS (Institut de Prévention et de Recherche sur l'Ostéoporose de l'hôpital d'Orléans), le LESI (Laboratoire d'Électronique, Signaux, Images de l'université d'Orléans) et le MAPMO (Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans). Nous cherchons des modèles aléatoires pour les os et les radiographies, dépendant de paramètres, discriminant les patients souffrant d'ostéoporose et pouvant être estimés à partir des radiographies.

Rappelons que l'ostéoporose est une maladie des os de plus en plus courante, essentiellement en raison du vieillissement de la population. Elle se caractérise par deux manifestations principales : la perte de masse osseuse, d'une part, et une altération de la micro-architecture osseuse, d'autre part. Actuellement, une seule technique de diagnostic en prévention est systématiquement utilisée. Il s'agit de la densitométrie osseuse qui ne mesure que la perte de masse osseuse. Pour évaluer l'altération de la micro-architecture osseuse, deux types de techniques sont actuellement explorés. La première, l'imagerie 3D, est encore à la fois soit trop coûteuse, soit trop irradiante pour le patient. La seconde, l'imagerie 2D à partir des radiographies, présente l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre. Les médecins de l'IPROS cherchent donc à caractériser l'ostéoporose par simple lecture de radiographies d'os. Plus spécifiquement, ils ont choisi d'étudier les radiographies d'os du calcaneum (os du talon).

L'équipe de traitement du signal du LESI a proposé une méthode d'analyse fractale des radiographies [HJJ⁺94]. Le mouvement brownien fractionnaire, implicitement utilisé par Kolmogorov en 1940 puis défini par Mandelbrot et Van Ness en 1968 [MVN68] au moyen d'une intégrale stochastique, intervient naturellement dans la modélisation des milieux irréguliers homogènes. Il est caractérisé par un unique paramètre $H \in (0, 1)$ (paramètre de Hurst) qui gouverne son autosimilarité, propriété d'invariance en loi par changement d'échelle, la régularité höldérienne de ses trajectoires et la dimension de Hausdorff de leurs graphes. Dans [HJJ⁺94], les auteurs procèdent à une analyse fractale orientée des radiographies. Ils extraient des lignes des radiographies, dans différentes directions, qu'ils modélisent par des mouvements browniens fractionnaires dont ils estiment le paramètre de Hurst. Ils obtiennent un paramètre H , en faisant la moyenne des paramètres obtenus dans les différentes directions. Ce paramètre estimé est plus faible dans le cas ostéoporo-

tique (0.679 ± 0.053) que dans le cas témoin (0.696 ± 0.030) [BPL⁺01]. Ces résultats sont encourageants pour une aide au diagnostic mais ne sont pas suffisamment discriminants. En particulier, les médecins ont constaté que les radiographies des ostéoporotiques étaient plus anisotropes que celles des témoins. Cette constatation incite à déterminer un modèle dépendant de paramètres qui rendent compte de l'anisotropie.

Il existe en fait plusieurs extensions possibles du mouvement brownien en dimension supérieure liées à la généralisation de sa fonction de covariance. En effet, le mouvement brownien est un processus gaussien centré à accroissements indépendants et stationnaires de fonction de covariance

$$K(s, t) = \frac{1}{2} (|t| + |s| - |t - s|). \quad (1)$$

Afin de conserver une notion d'indépendance des accroissements il est nécessaire d'établir un ordre sur \mathbb{R}^d en imposant $s \leq t$ si $s_i \leq t_i$ pour tout $i = 1, \dots, d$, où $s = (s_i)_{1 \leq i \leq d}$ et $t = (t_i)_{1 \leq i \leq d}$, et donc d'accorder un rôle particulier aux axes. Si $s \leq t$, le rectangle $[s, t]$ est alors défini par $[s, t] = \{v \in \mathbb{R}^d; s \leq v \leq t\}$. Ces rectangles vont jouer le rôle des intervalles, et le champ de Wiener-Chentsov est défini comme un champ gaussien centré de fonction de covariance

$$K(s, t) = \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^d (|t_i| + |s_i| - |t_i - s_i|).$$

Ce champ est à accroissements rectangles indépendants mais n'est pas à accroissements stationnaires. On renvoie à [Lif95] et [AMSW83] pour plus de précisions.

Une autre généralisation du mouvement brownien à la dimension supérieure consiste à remplacer la valeur absolue dans le second membre de (1) par la norme euclidienne. On obtient alors le mouvement brownien de Lévy qui est un champ gaussien centré à accroissements stationnaires et isotrope.

Par analogie, deux sortes de modèles browniens fractionnaires ont été considérées dans le but de définir des modèles anisotropes pour les radiographies d'os. D'une part, S. Léger a généralisé le mouvement brownien fractionnaire à la façon de Wiener-Chentsov et défini dans sa thèse [Leg00] le drap brownien fractionnaire. D'autre part, A. Bonami et A. Estrade [BE03] ont considéré des généralisations anisotropes du mouvement brownien fractionnaire d -dimensionnel (obtenu de la deuxième façon). Pour un milieu isotrope d -dimensionnel, le mouvement brownien fractionnaire, qu'on peut définir comme une intégrale stochastique à partir d'une mesure de Wiener

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it \cdot \xi} - 1) |\xi|^{-H - \frac{d}{2}} dW(\xi)$$

apparaît en effet comme un modèle naturel. C'est un champ gaussien centré isotrope, à accroissements stationnaires et autosimilaire d'ordre H : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ B_H(\lambda t); t \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{\cong} \lambda^H \left\{ B_H(t); t \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (\text{en loi}). \quad (2)$$

Le paramètre H caractérise l'invariance par changement d'échelle du mouvement brownien fractionnaire et peut ainsi être estimé. Plusieurs auteurs [BJR97, PV96] ont étudié des modèles plus généraux, pour lesquels le paramètre H est remplacé par une fonction qui

dépend du point t . Cette généralisation, qui a permis de rendre compte de phénomènes multifractaux paraît adaptée à des milieux non homogènes. Or, on peut considérer, en première approximation, l'os comme un milieu homogène. A. Bonami et A. Estrade se sont intéressées à des généralisations non isotropes, où le paramètre H est maintenant remplacé par une fonction h dépendant de la direction ξ .

Dans cette thèse, nous regardons les problèmes posés par ce type de modélisation. Nous considérons des champs aléatoires à valeurs réelles, indicés par \mathbb{R}^d , centrés et du second ordre (admettant un moment d'ordre 2). Nous nous affranchissons de l'hypothèse de loi gaussienne de [BE03] en ne considérant que les propriétés du second ordre. Ceci est motivé par le fait que, même si les radiographies d'os peuvent être modélisées par des champs gaussiens [Jen95], ce cadre est trop restrictif, à priori, pour les os eux-mêmes. La propriété d'autosimilarité (2) devient au second ordre

$$\text{Cov}(B_H(\lambda t), B_H(\lambda s)) = \lambda^{2H} \text{Cov}(B_H(t), B_H(s)). \quad (3)$$

La théorie spectrale des champs à accroissements d'ordre m stationnaires [Yag97] permet de caractériser un champ centré à accroissements stationnaires d'ordre m par une mesure déterministe appelée mesure spectrale. La mesure spectrale détermine un certain nombre de propriétés du champ. Ainsi, la mesure spectrale du mouvement brownien fractionnaire B_H est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par la fonction radiale

$$f_H(\xi) = |\xi|^{-2H-d}.$$

L'homogénéité de degré $-2H - d$ de cette fonction implique la propriété (3). La propriété d'autosimilarité globale est très restrictive pour le choix du modèle et nous nous intéressons plutôt à une propriété d'autosimilarité asymptotique locale [BJR97] (lass), au second ordre. Un champ X est dit localement autosimilaire d'ordre H au point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ si la fonction de covariance du champ normalisé

$$\frac{X(t_0 + \lambda t) - X(t_0)}{\lambda^H}$$

converge vers une fonction de covariance non nulle quand $\lambda \rightarrow 0^+$. En particulier, si X est à accroissements d'ordre m stationnaires et admet une densité spectrale f qui satisfait

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2H+d}} + o_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d}} \right),$$

avec $c \in L^1(S^{d-1})$ une fonction positive, homogène de degré 0, non identiquement nulle, et $H \in (0, 1)$, alors le champ X est lass d'ordre H au second ordre en tout point.

Lorsque on considère des densités spectrales obtenues par déformation anisotrope de celle du mouvement brownien fractionnaire, du type $|\xi|^{-2h(\xi)-d}$, avec h une fonction positive, homogène de degré 0, une des difficultés est alors de retrouver la fonction d'anisotropie h , au vu d'une ou plusieurs réalisations. Une étude directionnelle ne permet pas de rendre compte de l'anisotropie. Ceci est une conséquence de la stationnarité des accroissements (cf. [DH99] et [BE03]) et ne dépend pas de l'ordre de stationnarité. De façon similaire, les résultats obtenus par l'analyse fractale orientée, effectuée sur les radiographies d'os, ne permettent pas non plus de mettre en évidence l'anisotropie. Ceci peut conforter le choix

d'un modèle mathématique à accroissements d'ordre m stationnaires.

Dans [BE03], les auteurs donnent une méthode théorique afin de retrouver la fonction d'anisotropie dans le cas d'un champ gaussien à accroissements stationnaires. Ils choisissent une fenêtre adaptée et effectuent une transformée de Radon à fenêtre classique du modèle d -dimensionnel. Alors, pour chaque direction, ils obtiennent un processus gaussien centré, encore à accroissements stationnaires, et dont la densité spectrale est obtenue par transformée de Radon à fenêtre de l'originale, dans la même direction.

Ce résultat nous a conduit à étudier, dans un premier temps, le comportement asymptotique des transformées de Radon à fenêtre. Une simple généralisation des résultats de [BE03] nous permet de définir des transformées de Radon à fenêtre de champs. Pour un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d , noté V , on donne un sens au champ

$$P_{V,\rho}(X) = \left\{ \int_{V^\perp} X(s+t)\rho(s)ds; t \in V \right\},$$

appelé transformée de Radon à fenêtre de X sur V , en choisissant ρ une fenêtre déterministe sur V^\perp adaptée. La stationnarité est préservée par cette transformation et, lorsque X admet f pour densité spectrale, le champ $P_{V,\rho}(X)$ admet la densité spectrale donnée par

$$\mathcal{P}_{V,|\widehat{\rho}|^2}f(\zeta) = \int_{V^\perp} f(\zeta + \eta) |\widehat{\rho}(\eta)|^2 d\eta, \text{ pour } \zeta \in V.$$

Nous montrons le résultat suivant en choisissant une fenêtre et $\delta > 0$ adaptés.

Théorème. Soit f une densité spectrale qui vérifie

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2h(\xi)+d}} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2h(\xi)+d+\delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty,$$

avec h et c homogènes de degré 0 et positives. Si h et c sont Lipschitziennes sur la sphère, alors

$$\mathcal{P}_{V,|\widehat{\rho}|^2}f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2h(\xi)+d}} \int_{V^\perp} |\widehat{\rho}(\gamma)|^2 d\gamma + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2h(\xi)+d+\delta}}\right) \text{ quand } \xi \in V \text{ et } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

Lorsque V est engendré par une direction \mathbf{u} , le processus $P_{\mathbf{u},\rho}(X)$ admet la transformée de Radon à fenêtre classique de f sur $\langle \mathbf{u} \rangle$, notée $R_{|\widehat{\rho}|^2}f(\mathbf{u}, \cdot)$. Dans le cas gaussien, le résultat précédent permet d'obtenir une vitesse de convergence pour l'estimateur de $h(\mathbf{u}) + \frac{d-1}{2}$ par les variations quadratiques généralisées du processus $P_{\mathbf{u},\rho}(X)$.

Cette étude nous a naturellement amené à la question de l'injectivité d'une telle transformation. Bien que la transformée de Radon classique soit injective sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ (cf. [RK96] par exemple), il n'en est rien en général pour les transformées de Radon à fenêtre. D'après [Qui83], le choix d'une fenêtre invariante par rotation permet tout de même d'obtenir l'injectivité pour les fonctions de carré intégrable à support compact. Nous avons étendu cette classe de fonctions à celles qui décroissent plus vite que n'importe quelle fonction gaussienne. Ce résultat, qui fait l'objet du chapitre 4, a donné lieu à un article accepté dans Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Théorème. Soit ρ une fenêtre radiale telle que $\rho(x) = \varphi(|x|^2)$ avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $F \in L^2\left(\mathbb{R}^d, e^{\delta|x|^2} dx\right)$, pour tout $\delta > 0$. On suppose que $\varphi(0) \neq 0$. Si, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, $R_\rho F(\mathbf{u}, \cdot) \equiv 0$ alors $F \equiv 0$.

Cependant, il est facile de voir que la transformée de Radon à fenêtre est injective sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ lorsque la fenêtre est gaussienne. On obtient alors des formules d'inversion en utilisant les formules d'inversion classiques. Nous avons cherché, dans ce cas, à retrouver le comportement asymptotique de la fonction initiale dans la partie 3.2.3. L'instabilité des formules d'inversion ne le permet pas. Il est nécessaire d'utiliser une décomposition en harmoniques sphériques. On peut alors inverser chaque coordonnée et estimer son propre comportement asymptotique. Ceci est suffisant dans le cas d'une fonction initiale radiale mais ne permet pas de conclure dans le cas général.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation des milieux poreux par des champs non gaussiens. Nous nous sommes inspirés du modèle de Micro-pulses introduit par Ciosek-Georges et Mandelbrot [CGM95]. Nous avons considéré un modèle d'agrégation de petites boules $B(\xi, r)$, dont les centres et rayons sont donnés par un processus de Poisson ponctuel, avec une intensité en loi de puissance du rayon :

$$\nu_h(d\xi, dr) = r^{-d-1+2h(\xi)} \mathbf{1}_{(0,1)}(r) d\xi dr ,$$

où h une fonction homogène de degré 0 sur \mathbb{R}^d . On construit le champ X de la façon suivante. En un point x de \mathbb{R}^d on compte le nombre de boules contenant x et on définit $X(x)$ comme ce nombre aléatoire après lui avoir soustrait sa moyenne. Lorsque l'intensité est isotrope, ce modèle est isotrope et stationnaire. Nous avons réalisé que des variantes de tels modèles étaient utilisées par les physiciens des milieux poreux. On considère une généralisation anisotrope en déformant de façon anisotrope l'intensité du processus de Poisson ponctuel. Cette déformation engendre un modèle qui n'est plus stationnaire ni même à accroissements stationnaires. Nous nous intéressons aux propriétés d'autosimilarité asymptotique locale. A la différence du cas gaussien, les études en loi d'une part, au second ordre d'autre part, ne donnent pas les mêmes paramètres d'autosimilarité. Nous avons considéré le champ obtenu par transformée X-ray à fenêtre de ce modèle (qui est associé au procédé de radiographie). Cette fois-ci, les paramètres d'autosimilarité asymptotique locale en loi et au second ordre coïncident et sont reliés avec le paramètre d'autosimilarité au second ordre initial par un facteur $+\frac{1}{2}$, comme dans le cas gaussien. Le modèle faisant jouer un rôle particulier à 0, nous énonçons les propriétés lass en 0.

Théorème. Soit h une fonction définie sur \mathbb{R}^d homogène de degré 0 et Lipschitzienne sur la sphère. On suppose que h atteint son minimum $m > 0$ sur un ensemble de mesure non nulle.

- Si $m < \frac{1}{2}$, alors le champ X est lass au second ordre en 0 d'ordre m .
- Pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, si $h(\mathbf{u}) < \frac{1}{2}$, alors le champ $P_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp} X$ est lass au second ordre et en loi en 0 d'ordre $h(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}$.

Dans le cas isotrope, par stationnarité du champ cette propriété est vérifiée en tout point. Le champ tangent obtenu à la limite en loi pour $P_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp} X$ est un mouvement brownien

fractionnaire. Ceci peut permettre la validation de la modélisation des radiographies d'os par des champs gaussiens. Ces résultats font l'objet d'un article en collaboration avec A. Estrade, soumis, repris dans le chapitre 5.

Venons-en à la description de ce travail, chapitre par chapitre.

Le chapitre 1 revient sur la représentation spectrale des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. Face au peu de littérature consacrée à ce sujet ([Yag97], [GV67]), il nous a paru nécessaire de rappeler sa démonstration. Cette représentation est obtenue à partir de la représentation spectrale de la fonction de covariance, qui généralise le théorème de Bochner. Pour la démonstration, nous avons besoin de considérer des champs généralisés dont nous rappelons la définition. Nous explicitons le lien avec les champs ponctuels. Cette théorie est particulièrement bien adaptée au cas gaussien puisque basée sur les propriétés au second ordre.

Dans le chapitre 2, nous considérons des propriétés connues pour les champs gaussiens, et montrons comment, de façon plus générale, les propriétés d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre peuvent être lues sur sa mesure spectrale (déterministe). Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas où la mesure spectrale est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, appelée densité spectrale. La régularité au second ordre est régie par le comportement asymptotique en loi de puissance de la mesure spectrale et fait l'objet d'une première partie. On énonce des résultats trajectoriels dans le cas gaussien, obtenus facilement par le théorème de Kolmogorov-Centsov (cf. [KS98] par exemple).

Dans une seconde partie nous avons étudié les propriétés d'autosimilarité et d'autosimilarité asymptotique locale (à petite échelle) liées au développement asymptotique de la densité spectrale. Enfin, nous donnons un résultat d'identification de l'exposant d'un champ gaussien où le développement asymptotique de la densité spectrale permet d'obtenir une vitesse de convergence. Ce chapitre met en évidence la nécessité d'introduire d'autres outils pour déterminer l'anisotropie du champ.

Nous définissons dans le chapitre 3 des transformées de Radon à fenêtre de champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. Ce procédé permet l'obtention de champs ponctuels définis sur des sous-espaces vectoriels stricts de \mathbb{R}^d , encore à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. De plus les mesures spectrales sont obtenues par le même type de transformations puisque seule la fenêtre change. Nous avons mis en évidence des liens entre les propriétés asymptotiques des fonctions et celles de leurs transformées de Radon à fenêtre, qui permettent l'utilisation des résultats du chapitre 2.

Le chapitre 4 traite des questions d'injectivité des transformées de Radon à fenêtre invariantes par rotation.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude d'un modèle géométrique aléatoire pour l'os lui-même. Cette étude présente un double intérêt. D'une part, elle permet, en sortant du cadre gaussien, d'exhiber des propriétés d'autosimilarité asymptotique locale différentes en loi et au second ordre et donc, de poser la question du choix du paramètre d'autosimilarité. D'autre part, elle donne un nouvel exemple pour lequel on peut définir des transformées X-ray à fenêtre dont les paramètres d'autosimilarité asymptotique locale sont obtenus en

ajoutant $1/2$. Ce modèle semble adapté à la modélisation des milieux granulaires.

Nous avons choisi de mettre en annexe une partie numérique et une partie théorique.

La partie numérique traite du problème de la simulation de mouvements browniens fractionnaires en dimension 2 et de l'estimation des paramètres du modèle et de ses transformée de Radon à fenêtre verticale et horizontale. Ces essais numériques sont utilisés par le LESI pour une comparaison avec les os et leurs radiographies. Nous rappelons les méthodes connues en dimension 1, pour lesquelles nous donnons les programmes de simulation et les résultats d'estimation. Nous insistons sur les difficultés liées au passage à la dimension 2. Nous utilisons une méthode de simulation de mouvements browniens fractionnaires en dimension 2 introduite par [Ste02] sur laquelle on estime les paramètres de Hurst. Enfin, nous procédons à des transformées de Radon à fenêtre dans les directions verticales et horizontales pour lesquelles nous estimons la régularité.

La partie théorique se compose d'une section constituée de rappels de définitions et notations concernant les distributions tempérées. Cette section est surtout utilisée dans le chapitre 1 consacré à la représentation spectrale des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. La seconde section, concernant les décompositions en harmoniques sphériques, est utilisée dans les chapitres 3 et 5, dans le cadre des transformées de Radon à fenêtre invariantes par rotation.

Chapitre 1

Représentation spectrale

Nous nous intéressons dans cette partie à la représentation spectrale de champs ponctuels, centrés et admettant un moment d'ordre 2, vus comme fonctions aléatoires définies sur \mathbb{R}^d . Des hypothèses supplémentaires de stationnarité permettent d'obtenir leur fonction de covariance comme une sorte de transformée de Fourier d'une mesure positive, définie sur l'ensemble des boréliens de \mathbb{R}^d . On leur associe alors une mesure aléatoire dont la covariance est donnée par cette mesure déterministe, au moyen d'une intégrale stochastique. Cette théorie, largement développée dans [Yag97] et [GV67], est une généralisation du cas stationnaire qui repose sur le théorème de Bochner. La stationnarité d'un champ permet d'écrire sa fonction de covariance, qui dépend de deux variables, comme une fonction d'une variable, de type positif. Or, le théorème de Bochner permet d'écrire toute fonction continue de type positif sur \mathbb{R}^d comme transformée de Fourier d'une mesure positive à croissance lente sur \mathbb{R}^d , vue comme forme linéaire continue sur la classe de Schwartz.

Ceci nous amène à sortir du cadre des champs ponctuels. On souhaite associer à chaque champ ponctuel un champ généralisé, vu comme distribution aléatoire associée à la fonction aléatoire représentée par le champ.

Le cadre stationnaire est bien connu mais ne permet pas de refléter certains phénomènes d'échelles. C'est une des raisons pour lesquelles les champs ponctuels à accroissements stationnaires ont connu un large développement depuis l'introduction du mouvement brownien fractionnaire par Kolmogorov en 1940 et sa définition comme intégrale stochastique par Mandelbrot et Van Ness [MVN68]. En revanche, peu de littérature est consacrée à des champs à accroissements d'ordre supérieur stationnaires ([Yag97],[GV67],[Gué00]...) pour lesquels nous n'avons pas trouvé de définition rigoureuse.

Nous verrons donc comment définir la stationnarité et ses généralisations pour un champ ponctuel. Nous rappellerons la définition des champs généralisés pour lesquels on obtiendra facilement une représentation spectrale. Enfin, nous regarderons quelles hypothèses du second ordre permettent de considérer un champ ponctuel comme un champ généralisé, et réciproquement. On en déduira la représentation spectrale des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires. Cette partie reprend des résultats connus mais pour lesquels il est difficile de trouver des démonstrations. Nous nous sommes particulièrement efforcés d'explicitier le passage d'un champ ponctuel à un champ généralisé.

Dans tout ce qui suit on se place sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

1.1 Champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires

Nous nous intéressons ici à des champs ponctuels définis sur \mathbb{R}^d , centrés et admettant un moment d'ordre 2. Rappelons ici qu'un champ ponctuel

$$X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$$

est dit **continu en moyenne quadratique** au point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ si $X(t)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $X(t_0)$, autrement dit si

$$\|X(t) - X(t_0)\|_2^2 := \mathbf{E} \left(|X(t) - X(t_0)|^2 \right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

Il suffit que sa fonction de covariance soit continue au point $(t_0, t_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par rapport à chacune de ses variables pour que le champ soit continu en moyenne quadratique en t_0 . Nous faisons donc l'hypothèse que les champs ponctuels considérés sont continus en moyenne quadratique sur \mathbb{R}^d . Ceci implique l'existence d'une version mesurable de tels champs [GS71]. On définit les accroissements d'ordre m de X sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par

$$\Delta^m X(t, s) = \sum_{p=0}^m C_m^p (-1)^{m-p} X(t + ps).$$

On dit que X est à **accroissements d'ordre m stationnaires en loi** si, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$,

$$\left\{ \Delta^m X(t + \tau, s); (t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{ \Delta^m X(t, s); (t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \right\} \quad (\text{égalité en loi}).$$

On impose cette égalité sur les deux indices car nous aurons besoin dans la suite de pouvoir considérer ces champs à un point fixé ou à un pas fixé. En particulier, pour tout pas $s \in \mathbb{R}^d$, le champ $\Delta^m X(\cdot, s)$ est stationnaire. De plus, comme

$$\Delta^{m+1} X(t, s) = \Delta^m X(t + s, s) - \Delta^m X(t, s),$$

si X est à accroissements d'ordre m stationnaires en loi, il est à accroissements d'ordre p stationnaires en loi, pour tout $p \geq m$. Remarquons que le champ ponctuel X est à accroissements stationnaires (d'ordre 1) si, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$,

$$\left\{ X(t + \tau) - X(\tau); t \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{ X(t) - X(0); t \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

On déduit de cette propriété en loi une notion de stationnarité au second ordre. Si X est du second ordre, il est dit à **accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre** si, pour tout $t, s, u \in \mathbb{R}^d$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{E} \left(\Delta^m X(t + \tau, s) \overline{\Delta^m X(\tau, u)} \right) = \mathbf{E} \left(\Delta^m X(t, s) \overline{\Delta^m X(0, u)} \right).$$

Si un champ du second ordre est à accroissements d'ordre m stationnaires en loi alors il est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. La réciproque est fautive dans le cas général mis à part pour les champs ponctuels gaussiens. Lorsque on suppose de plus que X est continu en moyenne quadratique, sa fonction de covariance est continue et on a une estimation polynomiale de sa croissance. Ce comportement au second ordre va nous permettre de lui associer un champ généralisé. Nous démontrons le lemme suivant, inspiré de [Gué00] qui le démontre dans le cas $d = 1$.

Lemme 1.1.1. *Soit X un champ continu en moyenne quadratique admettant des accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathbf{E} \left(|X(t)|^2 \right) \leq C^2 (1 + |t|)^{2m}. \quad (1.1)$$

Démonstration. Si $m = 0$ c'est évident par stationnarité de X . On suppose que $m \geq 1$. On considère dans un premier temps un processus $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$. Si X a des accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E} \left(|\Delta^m X(t, 1)|^2 \right) = \mathbf{E} \left(|\Delta^m X(0, 1)|^2 \right).$$

De plus, l'hypothèse de continuité en moyenne quadratique permet de majorer uniformément $\mathbf{E} \left(|X(t)|^2 \right)$ sur le segment $[0, m]$. On cherche donc à ramener un point de $(m, +\infty)$ dans le segment $[0, m]$ en faisant intervenir les accroissements d'ordre m de X . On montre par récurrence sur $m \geq 1$ que, pour tout $t \in [0, 1)$ et $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geq m$,

$$X(t+k) = \sum_{l=0}^{k-m} a_m(k, l) \Delta^m X(t+l, 1) + \sum_{p=0}^{m-1} b_m(k, p) \Delta^p X(t, 1),$$

avec

$$|a_m(k, l)| \leq (1+k)^{m-1}, \quad \text{et} \quad |b_m(k, p)| \leq C_m^p (1+k)^{m-1}. \quad (1.2)$$

En effet, si $m = 1$, il suffit d'écrire

$$X(t+k) = \sum_{l=0}^{k-1} \Delta^1 X(t+l, 1) + X(t),$$

et $a_1(k, l) = 1$, $b_1(k, 0) = 1$. Lorsque $m > 1$, on écrit

$$X(t+k) = \sum_{l=m-1}^{k-1} \Delta^1 X(t+l, 1) + X(t+m-1).$$

En utilisant d'une part le fait que

$$X(t+m-1) = \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-1}^p \Delta^p X(t, 1),$$

et d'autre part l'hypothèse de récurrence sur $\Delta^1 X$, on obtient l'expression recherchée avec

$$a_m(k, l) = \sum_{j=m-1+l}^{k-1} a_{m-1}(j, l),$$

et

$$b_m(k, 0) = 1, \quad b_m(k, p) = C_{m-1}^p + \sum_{j=m-1}^{k-1} b_{m-1}(j, p-1), \quad p \geq 1,$$

de sorte que $a_m(k, l)$ et $b_m(k, p)$ vérifient bien (1.2). On en déduit que si X est à accroissements d'ordre m stationnaires et $k \geq m$, alors, pour tout $t \in [0, 1)$,

$$\|X(t+k)\|_2 \leq (1+k)^m \|\Delta^m X(0, 1)\|_2 + 3^m (1+k)^{m-1} \sup_{t \in [0, m]} \|X(t)\|_2,$$

puisque

$$\left| \sum_{p=0}^{m-1} b_m(k, p) \Delta^p X(t, 1) \right| \leq \left(\sum_{p=0}^{m-1} 2^p |b_m(k, p)| \right) \sup_{t \in [0, m]} \|X(t)\|_2.$$

Ceci conclut la démonstration dans le cas des processus. Dans le cas général, il suffit de remarquer que si $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre alors, pour chaque direction $\alpha \in S^{d-1}$, le processus $\{X(t\alpha), t \in \mathbb{R}\}$ est lui aussi à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. En utilisant la continuité en moyenne en quadratique et ce qui précède on en conclut que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\|X(t)\|_2 \leq C(1 + |t|)^m, \text{ avec } C = \sup_{\alpha \in S^{d-1}} \|\Delta^m X(0, \alpha)\|_2 + 3^m \sup_{t \in B(0, m)} \|X(t)\|_2.$$

□

Nous cherchons une représentation spectrale de tels champs. Pour l'obtenir, nous allons d'abord étudier les propriétés de stationnarité des champs généralisés.

1.2 Les champs généralisés

1.2.1 Définition

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz sur \mathbb{R}^d . On renvoie à l'annexe B.1 pour les définitions et notations utilisées. On considère une fonction aléatoire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, notée Φ qui, à chaque élément φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, fait correspondre une variable aléatoire complexe $\Phi(\varphi)$. La fonction aléatoire Φ est dite **linéaire** si, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi) \text{ presque sûrement.}$$

La fonction aléatoire Φ est dite **continue** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq n$, lorsque les suites $(\varphi_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers φ^j dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de sa topologie naturelle,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\Phi(\varphi_k^1), \dots, \Phi(\varphi_k^n)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\Phi(\varphi^1), \dots, \Phi(\varphi^n)) \text{ (convergence en loi).}$$

Une fonction aléatoire linéaire et continue est appelée **champ généralisé** (sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). On note dans ce cas $\Phi(\varphi) := \langle \Phi, \varphi \rangle$.

On s'intéresse, comme dans le cas des champs ponctuels, aux moments des champs généralisés. Cependant, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire de continuité par rapport aux fonctions tests. Ainsi, si X est un champ généralisé, on dit que X est du **premier ordre** si, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire $\langle X, \varphi \rangle$ admet un moment d'ordre 1 dépendant continûment de φ . On définit alors la **valeur moyenne** de X , notée $m_X : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$, par

$$m_X(\varphi) = \mathbf{E}(\langle X, \varphi \rangle) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

La fonction m_X est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Si la valeur moyenne est identiquement nulle, le champ généralisé est dit **centré**.

De même, on dit que X est du **second ordre** si, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire

$\langle X, \varphi \rangle$ admet un moment d'ordre 2 dépendant continûment de φ . On définit alors la **fonction de covariance** de X , notée $\Gamma_X : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$, par

$$\Gamma_X(\varphi, \psi) = \mathbf{E}(\langle X, \varphi \rangle \overline{\langle X, \psi \rangle}), \text{ pour tout } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

La fonction Γ_X est une forme bilinéaire positive continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Ces hypothèses sont vérifiées dans le cas où $X : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est une application linéaire continue. La fonction aléatoire X définit alors un champ généralisé du second ordre sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Les champs généralisés gaussiens constituent une classe importante des champs généralisés du second ordre que nous allons décrire. On se restreint au cas des variables aléatoires gaussiennes réelles. On note $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions de l'espace de Schwartz à valeurs réelles. Soit X un champ généralisé du second ordre.

On dit que X est un champ généralisé **gaussien** si pour toutes fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\langle X, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \varphi_n \rangle) \text{ est un vecteur gaussien (réel).}$$

Son espérance est alors $(m_X(\varphi_1), \dots, m_X(\varphi_n))$ et sa matrice de covariance $(\Gamma_X(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarquons que, puisque $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$ est un \mathbb{R} espace vectoriel, il suffit, par linéarité, de vérifier que, pour tout $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire $\langle X, \varphi \rangle$ est réelle et de loi gaussienne.

Un champ généralisé gaussien est alors entièrement déterminé par sa valeur moyenne et sa fonction de covariance sur $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle := \langle X, \Re(\varphi) \rangle + i \langle X, \Im(\varphi) \rangle,$$

dont la loi est déterminée par celle du vecteur gaussien

$$(\langle X, \Re(\varphi) \rangle, \langle X, \Im(\varphi) \rangle).$$

De même que pour les champs ponctuels, à chaque fonction de covariance correspond un champ généralisé gaussien.

Théorème 1.2.1 ([GV67] p. 250). *Soit $\Gamma : \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \times \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue positive. Alors il existe un unique champ généralisé gaussien centré X tel que $\Gamma_X = \Gamma$ sur $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \times \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d)$.*

Ainsi, un champ généralisé gaussien est caractérisé par sa fonction de covariance. Par le théorème de Bochner, des hypothèses supplémentaires de stationnarité vont nous permettre d'écrire cette forme bilinéaire en fonction d'une mesure spectrale.

Le cas stationnaire est bien connu. Nous le rappelons dans la partie suivante.

1.2.2 Les champs généralisés stationnaires

Un champ généralisé X est dit **stationnaire en loi** si, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\langle X, \tau_t \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \tau_t \varphi_n \rangle) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\langle X, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \varphi_n \rangle),$$

où τ_t est l'opérateur de translation par t [cf. définition B.1.3].

Lorsque X est du second ordre, il est dit **stationnaire au second ordre** si sa fonction de covariance est invariante par translation : pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\tau_t \varphi, \tau_t \psi) = \Gamma_X(\varphi, \psi).$$

Si un champ généralisé du second ordre est stationnaire en loi alors il est stationnaire au second ordre. Réciproquement, si on fait l'hypothèse supplémentaire que le champ généralisé est gaussien centré, sa stationnarité au second ordre implique sa stationnarité en loi.

Théorème 1.2.2 (Bochner). *Soit X un champ généralisé stationnaire au second ordre. Il existe une unique mesure de Radon positive, à croissance lente, μ_X telle que*

$$\Gamma_X(\varphi, \psi) = \langle \widehat{\mu}_X, \varphi * \check{\psi} \rangle, \text{ pour toutes fonctions } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

où $\widehat{\mu}_X$ est la transformée de Fourier de μ_X , $*$ désigne le produit de convolution et $\check{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$ [cf. B.1.3].

On appellera μ_X mesure spectrale du champ généralisé X . Rappelons que μ_X est dite à croissance lente s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{-N} d\mu_X(\xi) < +\infty.$$

Lorsque μ_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une fonction f_X , localement intégrable, à croissance lente (c'est à dire au plus polynomiale), positive et paire telle que $d\mu_X(\xi) = f_X(\xi)d\xi$. On appelle f_X **densité spectrale** du champ généralisé X . Remarquons que si X est un champ généralisé gaussien centré stationnaire en loi alors il est entièrement déterminé par μ_X ou $\widehat{\mu}_X$.

1.2.3 Les champs généralisés à accroissements d'ordre m stationnaires

Dans le cas ponctuel, on généralise la propriété de stationnarité en regardant la stationnarité des accroissements d'ordre supérieur. Dans le cas des champs généralisés, ce sont les dérivées, définies par dualité, qui vont jouer un rôle analogue. Ainsi, pour $m \in \mathbb{N}$, on dit que X , champ généralisé, est à **accroissements d'ordre m stationnaires en loi** (resp. **au second ordre**), si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_n \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\mathbf{j}_i| = m$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \tau_t D^{\mathbf{j}_1} \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \tau_t D^{\mathbf{j}_n} \varphi_n \rangle \stackrel{\mathcal{L}}{=} \langle X, D^{\mathbf{j}_1} \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, D^{\mathbf{j}_n} \varphi_n \rangle$$

(resp., pour tout $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\mathbf{j}_i| = m$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\tau_t D^{\mathbf{j}_1} \varphi, \tau_t D^{\mathbf{j}_2} \psi) = \Gamma_X(D^{\mathbf{j}_1} \varphi, D^{\mathbf{j}_2} \psi).$$

On renvoie à l'annexe B.1.1 pour les notations. En particulier, toutes les dérivées partielles d'ordre m de X sont des champs généralisés stationnaires en loi (resp. au second ordre). Si $m = 1$, X est dit à **accroissements stationnaires** en loi (resp. au second ordre). Remarquons aussi que si un champ généralisé est à accroissements d'ordre m stationnaires en loi (resp. au second ordre) il est à accroissements d'ordre p stationnaires en loi (resp.

au second ordre) pour tout $p \geq m$.

On a encore équivalence des notions en loi et au second ordre lorsque X est un champ généralisé gaussien centré.

En nous ramenant au cas des champs stationnaires, nous allons obtenir à nouveau une représentation spectrale de la fonction de covariance d'un champ généralisé à accroissements d'ordre m stationnaires. Il nous faut pour cela introduire quelques notations. On définit comme [Dob79], pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d) := \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) x^{\mathbf{j}} dx = 0, |\mathbf{j}| < m \right\},$$

avec les notations de l'annexe B.1.1. Nous allons voir que l'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$ est l'espace engendré par les dérivées d'ordre m des fonctions de la classe de Schwartz.

Lemme 1.2.1.

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d) = \text{Vect} \left\{ D^{\mathbf{j}} \varphi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\mathbf{j}| = m \right\}.$$

Démonstration. L'inclusion du second membre dans le premier découle immédiatement d'intégrations par parties. Pour l'autre inclusion, par isométrie de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier s'écrit $\sum_{|\mathbf{j}|=m} \xi^{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}(\xi)$, avec les fonctions $\psi_{\mathbf{j}}$ dans la classe de Schwartz. Si $m = 0$ il n'y a rien à démontrer donc on peut supposer $m \geq 1$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, puisque $\widehat{\varphi}$ s'annule en 0 à l'ordre $m - 1$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{|\mathbf{j}|=m} \frac{m!}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(t\xi) dt.$$

Soit θ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact, qui vaut 1 au voisinage de 0. On écrit

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \theta(\xi) \sum_{|\mathbf{j}|=m} \xi^{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}^1(\xi) + (1 - \theta(\xi)) \widehat{\varphi}(\xi),$$

avec

$$\psi_{\mathbf{j}}^1(\xi) = \frac{m}{\mathbf{j}!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(t\xi) dt,$$

de sorte que $\theta \psi_{\mathbf{j}}^1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, puisque $1 - \theta$ s'annule au voisinage de 0, en choisissant N un entier pair supérieur à m

$$(1 - \theta)(\xi) = |\xi|^N \frac{(1 - \theta)(\xi)}{|\xi|^N}.$$

On pose alors

$$\psi_{\mathbf{j}}^2(\xi) = \left(\sum_{|\mathbf{k}|=N-m} \frac{N!}{(\mathbf{j} + \mathbf{k})!} \xi^{\mathbf{k}} \right) \frac{(1 - \theta)(\xi)}{|\xi|^N} \widehat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

et $\psi_{\mathbf{j}} = \theta \psi_{\mathbf{j}}^1 + \psi_{\mathbf{j}}^2$ convient. □

Par linéarité des champs généralisés on peut formuler une définition équivalente à la précédente. Le champ généralisé X est **à accroissements d'ordre m stationnaires en loi** (resp. **au second ordre**) si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$(\langle X, \tau_t \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \tau_t \varphi_n \rangle) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\langle X, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \varphi_n \rangle)$$

(resp., pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\tau_t \varphi, \tau_t \psi) = \Gamma_X(\varphi, \psi).$$

Théorème 1.2.3 (Bochner). [GV67] p.260. Soit X un champ généralisé à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. Il existe

- une unique mesure positive à croissance lente σ , de Radon sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\xi| \leq \epsilon} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) = 0;$$

- une unique matrice symétrique positive $A = \{a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}; |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = m\}$ telles que, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\sigma(\xi) + \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{j}}(\varphi) \overline{\alpha_{\mathbf{k}}(\psi)} \quad (1.3)$$

où

$$\alpha_{\mathbf{j}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) x^{\mathbf{j}} dx = i^{|\mathbf{j}|} D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0).$$

Remarquons que si $m = 0$, on retrouve le théorème 1.2.2, avec

$$\mu_X = \sigma + a_{\mathbf{0}, \mathbf{0}} \delta_0.$$

Dans le cas général on rappelle que, pour $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, on peut définir la dérivée partielle d'ordre \mathbf{j} de X par dualité. On note $D^{\mathbf{j}}X$ le champ généralisé obtenu en considérant, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(-1)^{|\mathbf{j}|} \langle X, D^{\mathbf{j}} \varphi \rangle.$$

Alors, si $|\mathbf{j}| = m$, le champ généralisé $D^{\mathbf{j}}X$ est stationnaire et sa mesure spectrale est donnée par

$$d\mu_{D^{\mathbf{j}}X}(\xi) = \xi^{2\mathbf{j}} d\sigma(\xi) + \left(\sum_{|\mathbf{k}|=m} \mathbf{j}! \mathbf{k}! a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \right) \delta_0.$$

On appellera encore la mesure σ **mesure spectrale** du champ.

1.3 Champs généralisés et champs ponctuels

Dans cette partie les démonstrations reposent essentiellement sur des variations autour du lemme suivant.

Lemme 1.3.1. Soit $(Z^n = \{Z^n(t); t \in \mathbb{R}^d\})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de champs centrés définis sur \mathbb{R}^d . On suppose qu'il existe une fonction $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d, \forall n, n' \in \mathbb{N}, \mathbf{E} \left(Z^n(t_1) \overline{Z^{n'}(t_2)} \right) \xrightarrow{n, n' \rightarrow +\infty} \Gamma(t_1, t_2);$$

alors il existe $Z = \{Z(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ centré défini sur \mathbb{R}^d , de fonction de covariance Γ , tel que, pour tout $t_1, t_2, \dots, t_l \in \mathbb{R}^d$,

$$(Z^n(t_1), Z^n(t_2), \dots, Z^n(t_l))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_l)) \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^l). \quad (1.4)$$

Si on fait de plus l'hypothèse que les champs sont à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi), alors Z est lui aussi à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi). De même, si les champs sont gaussiens, Z est gaussien.

Lorsque une suite de champ $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de (1.4) on dira que $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions fini-dimensionnelles**.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^d$, pour $n, n' \in \mathbb{N}$,

$$\|Z^n(t) - Z^{n'}(t)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R})}^2 = \mathbf{E} \left(Z^n(t) \overline{Z^n(t)} \right) - 2\Re \mathbf{E} \left(Z^n(t) \overline{Z^{n'}(t)} \right) + \mathbf{E} \left(Z^{n'}(t) \overline{Z^{n'}(t)} \right),$$

donc la suite $(Z^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ et on appelle $Z(t)$ sa limite.

Alors, si $t_1, t_2, \dots, t_l \in \mathbb{R}^d$, $n, n' \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \| (Z^n(t_1) - Z^{n'}(t_1), Z^n(t_2) - Z^{n'}(t_2), \dots, Z^n(t_l) - Z^{n'}(t_l)) \|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)}^2 \\ &= \left(\mathbf{E} \left(Z^n(t_i) \overline{Z^n(t_j)} \right) - \mathbf{E} \left(Z^n(t_i) \overline{Z^{n'}(t_j)} \right) - \mathbf{E} \left(Z^{n'}(t_i) \overline{Z^n(t_j)} \right) + \mathbf{E} \left(Z^{n'}(t_i) \overline{Z^{n'}(t_j)} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq l}, \end{aligned}$$

donc la suite $(Z^n(t_1), Z^n(t_2), \dots, Z^n(t_l))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$ et, par unicité, sa limite est le vecteur $(Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_l))$. Enfin, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(Z(t_1) \overline{Z(t_2)} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(Z^n(t_1) \overline{Z^n(t_2)} \right) \\ &= \Gamma(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Si on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le champ ponctuel Z^n est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, alors, pour tout $t, s, u \in \mathbb{R}^d$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\Delta^m Z(t + \tau, s) \overline{\Delta^m Z(\tau, u)} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(\Delta^m Z^n(t + \tau, s) \overline{\Delta^m Z^n(\tau, u)} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\Delta^m Z^n(t, s) \overline{\Delta^m Z^n(0, u)} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\Delta^m Z(t, s) \overline{\Delta^m Z(0, u)} \right). \end{aligned}$$

Lorsque Z^n est à accroissements d'ordre m stationnaires en loi, il suffit d'écrire les accroissements de Z comme limite dans $L^2(\Omega)$, et donc en loi, des accroissements de Z^n . De même, si on suppose que pour tout n , le champ ponctuel Z^n est gaussien, il suffit de remarquer que, pour tout $t_1, t_2, \dots, t_l \in \mathbb{R}^d$, et $a_1, a_2, \dots, a_l \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^l a_i Z(t_i)$ est obtenue comme limite dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ d'une suite de variables aléatoires gaussiennes et elle est donc aussi gaussienne. \square

Remarquons que le lemme est encore vrai si on remplace les champs ponctuels par des champs généralisés et les vecteurs par des fonctions tests de la classe de Schwartz.

1.3.1 Des champs ponctuels aux champs généralisés

Si X est un champ ponctuel sur \mathbb{R}^d , on souhaite lui associer un champ généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en donnant un sens à

$$\int_{\mathbb{R}^d} X(t)\varphi(t)dt,$$

si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Cependant, définir cette intégrale nécessite de trop fortes hypothèses sur le champ ponctuel alors que l'on s'intéresse essentiellement aux statistiques du second ordre. De plus, dans les applications, dès qu'on s'occupe de simulation ou d'estimation, on ne dispose que d'un nombre fini de valeurs du champ. Ceci nous conduit à définir le champ généralisé en discrétisant l'intégrale. On définit alors, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-nd} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} X(s)\varphi(s).$$

L'existence de la série et de cette limite est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. *Soit X un champ ponctuel centré défini sur \mathbb{R}^d tel que sa fonction de covariance $(t, s) \mapsto \mathbf{E}\left(X(t)\overline{X(s)}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à croissance lente. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour $n \in \mathbb{N}$, on peut définir dans $L^2(\Omega)$*

$$Y_n(\varphi) = 2^{-nd} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} X(s)\varphi(s).$$

Alors, il existe un champ généralisé Φ , du second ordre, centré, tel que, pour tout $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(Y_n(\varphi_1), Y_n(\varphi_2), \dots, Y_n(\varphi_l))_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2), \dots, \Phi(\varphi_l)) \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^l).$$

On note $\Phi(\varphi) = \langle X, \varphi \rangle$. De plus, si $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une unité approchée, le champ ponctuel

$$X * \theta_k := \left\{ \langle X, \tau_t \check{\theta}_k \rangle; t \in \mathbb{R}^d \right\}$$

converge vers X dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions fini-dimensionnelles lorsque k tend vers l'infini.

Démonstration. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $n, n' \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}\left(Y_n(\varphi_1)\overline{Y_{n'}(\varphi_2)}\right) = 2^{-(n+n')d} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} \sum_{s' \in 2^{-n'}\mathbb{Z}^d} \varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s')}\mathbf{E}\left(X(s)\overline{X(s')}\right).$$

Les séries convergent par l'hypothèse de croissance lente de la fonction covariance de X . Le lemme 1.3.1 nous donne l'existence de Y_n en tant que fonction aléatoire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus, la continuité de la fonction de covariance de X implique que la fonction de covariance de Y_n est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La fonction aléatoire Y_n définit bien un champ généralisé du second ordre. La continuité de la fonction $(s, s') \mapsto \varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s')}\mathbf{E}\left(X(s)\overline{X(s')}\right)$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ permet de conclure que la suite $\mathbf{E}\left(Y_n(\varphi_1)\overline{Y_{n'}(\varphi_2)}\right)$ converge vers

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}\left(X(s)\overline{X(s')}\right) \varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s')} ds ds'$$

en tant que somme de Riemann. Ainsi, il existe Φ une de fonction aléatoire telle que pour tout $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, le vecteur $(Y_n(\varphi_1), Y_n(\varphi_2), \dots, Y_n(\varphi_l))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2), \dots, \Phi(\varphi_l))$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$. De plus, pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbf{E}(\Phi(\varphi_1)\Phi(\varphi_2)) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}\left(X(s)\overline{X(s')}\right) \varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s')} ds ds'.$$

La fonction de covariance de Φ étant continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, Φ est un champ généralisé du second ordre.

Soit $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une unité approchée, on peut alors définir pour $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X * \theta_k(t) = \langle X, \tau_t \check{\theta}_k \rangle.$$

Si $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\overline{(X * \theta_k(t_0) - X(t_0))(X * \theta_l(t_1) - X(t_1))}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}\left(\overline{(X(t) - X(t_0))(X(s) - X(t_1))}\right) \tau_{t_0} \check{\theta}_k(t) \tau_{t_1} \check{\theta}_l(s) dt ds. \end{aligned}$$

Par convergence dominée et en utilisant à nouveau le lemme 1.3.1, on obtient la convergence de $X * \theta_k$ vers X . \square

Lorsque on considère un champ ponctuel X à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre et continu en moyenne quadratique, on peut lui associer un champ généralisé défini comme précédemment. En effet, le lemme 1.1.1 montre que X satisfait les hypothèses de la proposition 1.3.1. Voyons comment se traduit l'hypothèse de stationnarité sur ce champ généralisé. Si $s \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta_m^* X(t, s) \varphi(t) dt = \langle X, \Delta_m^* \varphi(\cdot, s) \rangle,$$

avec $\Delta_m^* \varphi(t, s) = \Delta_m \varphi(t, -s)$. Alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle X, \tau_{t_0} \Delta_m^* \varphi(\cdot, s) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_m^* X(t + t_0, s) \varphi(t) dt.$$

Remarquons que

$$\widehat{\Delta_m^* \varphi(\cdot, s)}(\xi) = \left(e^{-is \cdot \xi} - 1\right)^m \widehat{\varphi}(\xi).$$

On en déduit que $\Delta_m^* \varphi(\cdot, s) \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. En fait nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.3.2.

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d) = \overline{\text{Vect}\{\Delta_m^* \varphi(\cdot, s), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), s \in \mathbb{R}^d\}}.$$

Démonstration. Supposons que $\varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. D'après le lemme 1.2.1, on peut supposer que $\varphi = D^{\mathbf{j}}\psi$, avec $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $|\mathbf{j}| = m$. Alors $\widehat{\varphi}(\xi) = (i\xi)^{\mathbf{j}} \widehat{\psi}(\xi)$ avec

$$(i\xi)^{\mathbf{j}} = \frac{1}{m!} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{j}} C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} (-1)^{|\mathbf{j}-\mathbf{k}|} (i\xi \cdot \mathbf{k})^m.$$

Posons $g(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , bornée ainsi que ses dérivées et $|g(t)| \geq \frac{2}{\pi}$ pour $|t| \leq \frac{\pi}{2}$. Ceci permet de conclure que g^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, bornée ainsi que ses dérivées. Supposons que $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ soit de support inclus dans la

boule $B(0, A)$, avec $A > 0$. Alors $g^{-m} \left(\frac{\xi, \mathbf{k}}{A} \right) \widehat{\psi}(\xi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on note $\varphi_{\mathbf{k}, A} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la fonction dont elle est la transformée de Fourier. On peut donc écrire φ sous la forme d'une combinaison linéaire d'accroissements d'ordre m de fonctions de la classe de Schwartz

$$\varphi = \frac{A^m}{m!} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{j}} C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} (-1)^{|\mathbf{j}-\mathbf{k}|} \Delta_m^* \varphi_{\mathbf{k}, A}(\cdot, -\frac{\mathbf{k}}{A}).$$

Par densité des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$ on obtient l'inclusion souhaitée. \square

Ainsi lorsque X est accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi), le champ généralisé qui lui correspond est aussi à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi). D'après le théorème 1.2.3, il existe σ une mesure positive à croissance lente sur \mathbb{R}^d , telle que

$$\int_{|\xi| < 1} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) < \infty,$$

et $A = \{a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}; |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = m\}$, une matrice symétrique positive, telles que, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \Gamma_X(\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\sigma(\xi) + \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{j}}(\varphi) \overline{\alpha_{\mathbf{k}}(\psi)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E} \left(X(t) \overline{X(s)} \right) \varphi(t) \overline{\psi(s)} dt ds. \end{aligned}$$

En fait, σ est une mesure de masse finie à l'infini. En effet, il suffit de choisir une fonction plateau $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 si $|x| \leq 1/2$ et 0 si $|x| \geq 1$. On pose alors $\widehat{\psi}_n(\xi) = \theta \left(\frac{\xi}{n} \right) (1 - \theta(\xi))$. En remarquant que, d'une part

$$\Gamma_X(\psi_n, \psi_n) \geq \int_{1 \leq |\xi| \leq n/2} d\sigma(\xi),$$

et d'autre part

$$\Gamma_X(\psi_n, \psi_n) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |t|)^m |\psi_n(t)| dt \right)^2 \leq C,$$

on obtient que

$$\int_{|\xi| \geq 1} d\sigma(\xi) < +\infty.$$

La partie suivante est consacrée à la réciproque. Elle va nous permettre de donner la représentation spectrale de la fonction de covariance des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre et continu en moyenne quadratique.

1.3.2 Des champs généralisés aux champs ponctuels

Proposition 1.3.2. [Yag97] *Soit X un champ généralisé à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi) et σ sa mesure spectrale. Alors X admet une représentation ponctuelle si*

$$\int_{|\xi| > 1} d\sigma(\xi) < \infty.$$

Dans ce cas, X est un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi), continu en moyenne quadratique.

Démonstration. Nous avons vu dans la proposition 1.3.1 qu'un champ ponctuel X s'obtient comme limite de $X * \theta_n$. Lorsque X est un champ généralisé à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, on cherche donc la limite du champ ponctuel $X * \theta_n$. Nous voulons utiliser le lemme 1.3.1. Or (1.3) nous donne l'expression de la fonction de covariance de X pour des fonctions de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. Dès que $m \neq 0$, on a $\theta_n \notin \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$ puisque $\widehat{\theta}_n(0) \neq 0$. On approche θ_n par une fonction de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. Dans ce but on choisit $\Theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{\Theta}(0) = 1$ et $D^j \widehat{\Theta}(0) = 0$, $|j| \leq m$. Pour $t \in \mathbb{R}^d$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\varphi_{t,n} := \tau_t \widehat{\theta}_n - \sum_{|j| \leq m-1} \frac{D^j \widehat{\tau}_t \widehat{\theta}_n(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|j|} D^j \Theta$$

est dans $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. De plus,

$$X * \theta_n(t) = \langle X, \varphi_{t,n} \rangle + \sum_{|j| \leq m-1} \frac{D^j \widehat{\tau}_t \widehat{\theta}_n(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|j|} \langle X, D^j \Theta \rangle.$$

Puisque $\widehat{\theta}_n(\xi) = \widehat{\theta}(\xi/n)$ et

$$D^{\mathbf{j}} \widehat{\tau}_t \widehat{\theta}_n(\xi) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{j}} C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{k}} e^{-it \cdot \xi} D^{\mathbf{j}-\mathbf{k}} \widehat{\theta}_n(\xi) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{j}} C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} (-it)^{\mathbf{k}} e^{-it \cdot \xi} D^{\mathbf{j}-\mathbf{k}} \widehat{\theta}_n(\xi),$$

$$D^{\mathbf{j}} \widehat{\tau}_t \widehat{\theta}_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (-it)^{\mathbf{j}}.$$

D'autre part, pour $s \in \mathbb{R}^d$ et $n' \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E} (\langle X, \varphi_{t,n} \rangle \overline{\langle X, \varphi_{s,n'} \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_{t,n} \overline{\widehat{\varphi}_{s,n'}} d\sigma(\xi) + \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j},\mathbf{k}} (-1)^n D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}_{t,n}(0) \overline{D^{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}_{s,n'}(0)}.$$

Mais

$$\widehat{\varphi}_{t,n}(\xi) = e^{-it \cdot \xi} \widehat{\theta}_n(\xi) - \sum_{|j| \leq m-1} \frac{D^j \widehat{\tau}_t \widehat{\theta}_n(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \widehat{\Theta}(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!},$$

et, si $|\mathbf{j}| = m$, par choix de Θ ,

$$D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}_{t,n}(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (-it)^{\mathbf{j}}.$$

D'après les hypothèses, $\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, |\xi|^{2m}) d\sigma(\xi) < +\infty$. Par le théorème de convergence dominée, la fonction de covariance $\mathbf{E} (\langle X, \varphi_{t,n} \rangle \overline{\langle X, \varphi_{s,n'} \rangle})$ converge lorsque n et n' tendent vers $+\infty$. Par le lemme 1.3.1, on en déduit que le champ $\{\langle X, \varphi_{t,n} \rangle, t \in \mathbb{R}^d\}$ converge dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions fini-dimensionnelles. Ceci nous permet de conclure à la convergence du champ $X * \theta_n$. On peut définir le champ limite encore noté $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$. De plus, si Y_{Θ} est le champ dégénéré

$$\left\{ \sum_{|j| \leq m-1} (-1)^{|j|} \frac{t^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle, t \in \mathbb{R}^d \right\},$$

la fonction de covariance de $X - Y_\Theta$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma_{X-Y_\Theta}(t, s) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) \overline{\left(e^{-is \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-is \cdot \xi)^l}{l!} \right)} d\sigma(\xi) \\ &\quad + \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} t^{\mathbf{j}} s^{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, puisque

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, |\xi|^{2m}) d\sigma(\xi) < +\infty,$$

la fonction Γ_{X-Y_Θ} est continue par rapport à chacune de ses variables. On en déduit que $X - Y_\Theta$, puis X , est continu en moyenne quadratique.

Rappelons que, pour $t, s \in \mathbb{R}^d$, les accroissements d'ordre m d'une fonction définie sur \mathbb{R}^d sont donnés par

$$\Delta^m f(t, s) = \sum_{p=0}^m C_m^p (-1)^{m-p} f(t + ps).$$

Lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m ,

$$\Delta^m f(t, s) = \sum_{|\mathbf{j}|=m} \frac{m!}{\mathbf{j}!} D^{\mathbf{j}} f(0) s^{\mathbf{j}}.$$

Par ailleurs, si $f(t) = e^{-it \cdot \xi}$,

$$\Delta^m f(t, s) = e^{-it \cdot \xi} \left(e^{-is \cdot \xi} - 1 \right)^m.$$

Puisque Y_Θ est donné par un polynôme de degré inférieur strictement à m , ses accroissements d'ordre m sont nuls et donc

$$\Delta^m X(t, s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^m C_m^p (-1)^{m-p} \langle X, \varphi_{t+ps, n} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^m C_m^p (-1)^{m-p} \langle X, \tau_{t+ps} \theta_n \rangle.$$

Ceci permet de conclure à la stationnarité en loi du champ ponctuel lorsque le champ généralisé est à accroissements d'ordre m stationnaires en loi. Pour la stationnarité au second ordre on utilise le fait que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\Delta^m X(t, s) \overline{\Delta^m X(u, v)} \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t-u) \cdot \xi} \left(e^{-is \cdot \xi} - 1 \right)^m \overline{\left(e^{-iv \cdot \xi} - 1 \right)^m} d\sigma(\xi) \\ &\quad + m!^2 \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} s^{\mathbf{j}} v^{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Ainsi, X est bien un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. \square

On peut alors donner la représentation spectrale de la fonction de covariance des accroissements d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique.

Théorème 1.3.1 (Bochner). Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique. Il existe

- une unique mesure positive σ , telle que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{|\xi|>\epsilon} d\sigma(\xi) < +\infty \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\xi|<\epsilon} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) = 0;$$

- une unique matrice symétrique positive $A = \{a_{\mathbf{j},\mathbf{k}}; |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = m\}$ telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\Delta^m X(t, s) \overline{\Delta^m X(u, v)} \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t-u)\cdot\xi} \left(e^{-is\cdot\xi} - 1 \right)^m \overline{\left(e^{-iv\cdot\xi} - 1 \right)^m} d\sigma(\xi) \\ &+ m!^2 \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j},\mathbf{k}} s^{\mathbf{j}} v^{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nous nous intéressons dans la suite à la représentation spectrale des champs généralisés et ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires.

1.4 Représentation spectrale

1.4.1 Mesure aléatoire et champs généralisés stationnaires

Nous reprenons ici la définition de [GV67] concernant les mesures aléatoires. A tout $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$) on associe une variable aléatoire $Z(\Delta)$. On dit que Z est une mesure aléatoire si :

- Z est complètement additive c'est à dire si

$$Z(\Delta) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} Z(\Delta_n)$$

lorsque Δ est réunion disjointe des Δ_n .

- Il existe σ une mesure de Radon positive sur \mathbb{R}^d (resp. $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$), telle que, pour tout $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$),

$$\mathbf{E}(Z(\Delta_1) \overline{Z(\Delta_2)}) = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

- Pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$), $\mathbf{E}(Z(\Delta)) = 0$.

Si on suppose en plus que la mesure aléatoire est gaussienne, la définition précédente coïncide avec celle des *Gaussian σ -noise* de [AT05].

Lorsque σ est une mesure positive sur \mathbb{R}^d (resp. $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$), pour toute fonction f de $L^2(d\sigma)$, on peut définir l'intégrale stochastique

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dZ(x) \left(\text{resp. } \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(x) dZ(x) \right),$$

en tant que limite dans $L^2(\Omega)$ (cf. lemme 1.3.1). En particulier, lorsque σ est une mesure positive à croissance lente, on peut définir un champ généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle Z, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dZ(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

La linéarité est immédiate. Quant à la continuité, il suffit de voir que, par isométrie, Z est continu dans $L^2(\Omega)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la convergence de $L^2(d\sigma)$. Puisque $\sigma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique la convergence dans $L^2(d\sigma)$ et Z est continu.

Puisque la classe de Schwartz est stable par transformée de Fourier, il est naturel de définir la transformée de Fourier d'une mesure aléatoire Z . On obtient alors le champ généralisé donné par $\langle Z, \widehat{\varphi} \rangle$ qui est stationnaire au second ordre, de mesure spectrale σ . En effet, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\widehat{Z}}(\tau_t \varphi, \tau_t \psi) &= \mathbf{E} \left(\langle Z, \widehat{\tau_t \varphi} \rangle, \overline{\langle Z, \widehat{\tau_t \psi} \rangle} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_t \varphi}(\xi) \overline{\widehat{\tau_t \psi}(\xi)} d\sigma(\xi) \\ &= \Gamma_{\widehat{Z}}(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne la réciproque.

Théorème 1.4.1. [Yag97] *Soit X un champ généralisé stationnaire au second ordre et soit σ sa mesure spectrale. Il existe une mesure aléatoire Z sur \mathbb{R}^d telle que $X \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \widehat{Z}$ avec*

$$\mathbf{E}(Z(\Delta_1) \overline{Z(\Delta_2)}) = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2), \quad \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

On peut alors écrire, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ(\xi) + \widehat{\varphi}(0)Z(\{0\}).$$

La partie suivante est consacrée à la généralisation de ce théorème dans le cas des accroissements d'ordre m stationnaires.

1.4.2 Champs à accroissements d'ordre m stationnaires et représentation spectrale

Soit X un champ généralisé à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. Le théorème 1.2.3 donne une représentation spectrale de la fonction de covariance de X . Cette expression nous permet encore de lui associer une mesure aléatoire et une représentation spectrale.

Théorème 1.4.2. [Yag97] *Soit X un champ généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. On reprend les notations du théorème 1.2.3. Alors, il existe*

- une mesure aléatoire Z sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ associée à la mesure spectrale σ ;
- un vecteur aléatoire $(X_{\mathbf{k}})_{|\mathbf{k}|=m}$ de matrice de covariance A , non corrélé avec Z ;

tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=m} \alpha_{\mathbf{k}}(\varphi) X_{\mathbf{k}}. \quad (1.7)$$

Démonstration. Soit $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\mathbf{j}| = m$. Le champ généralisé $D^{\mathbf{j}}X$ est stationnaire et admet donc une représentation spectrale. Si $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_{D^{\mathbf{j}}X}(\Phi, \Psi) = \Gamma_X(D^{\mathbf{j}}\Phi, D^{\mathbf{j}}\Psi).$$

Nous pouvons appliquer le théorème de Bochner. En remarquant que, pour $|\mathbf{k}| = m$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^{\mathbf{j}}\Phi(x)x^{\mathbf{k}}dx = (-1)^m \delta_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \widehat{\Phi}(0),$$

on obtient

$$\Gamma_{D^{\mathbf{j}}X}(\Phi, \Psi) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\Phi}(\xi) \overline{\widehat{\Psi}(\xi)} \xi^{2\mathbf{j}} d\sigma(\xi) + a_{\mathbf{j},\mathbf{j}} (\mathbf{j}!)^2 \widehat{\Phi}(0) \overline{\widehat{\Psi}(0)}.$$

Notons $d\sigma_{\mathbf{j}} = \xi^{2\mathbf{j}} d\sigma$. On prolonge $\sigma_{\mathbf{j}}$ en une mesure positive à croissance lente sur \mathbb{R}^d en posant $\sigma_{\mathbf{j}}(\{0\}) = a_{\mathbf{j},\mathbf{j}} (\mathbf{j}!)^2$. On peut alors écrire

$$\Gamma_{D^{\mathbf{j}}X}(\Phi, \Psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\Phi}(\xi) \overline{\widehat{\Psi}(\xi)} d\sigma_{\mathbf{j}}(\xi),$$

et $\sigma_{\mathbf{j}}$ est la mesure spectrale du champ stationnaire $D^{\mathbf{j}}X$. On note $Z_{\mathbf{j}}$ la mesure aléatoire de $D^{\mathbf{j}}X$ qui lui est associée. Alors, si $\varphi = D^{\mathbf{j}}\Phi$, puisque $\varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle = (-1)^m \langle D^{\mathbf{j}}X, \Phi \rangle = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\Phi}(\xi) dZ_{\mathbf{j}}(\xi).$$

Afin d'obtenir une expression en fonction de φ , on écrit

$$\begin{aligned} \langle X, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) (-1)^m \frac{dZ_{\mathbf{j}}(\xi)}{(i\xi)^{\mathbf{j}}} + (-1)^m \widehat{\Phi}(0) Z_{\mathbf{j}}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ^{\mathbf{j}}(\xi) + \frac{\alpha_{\mathbf{j}}(\varphi)}{\mathbf{j}!} Z_{\mathbf{j}}(0), \end{aligned}$$

où la mesure aléatoire $Z^{\mathbf{j}}$ est définie sur $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ par

$$Z^{\mathbf{j}}(\Delta) \stackrel{L^2}{=} \int_{\Delta} (-1)^m \frac{dZ_{\mathbf{j}}}{(i\xi)^{\mathbf{j}}}, \quad \text{pour } \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}),$$

et $\alpha_{\mathbf{j}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) x^{\mathbf{j}} dx$. Il faut à présent voir que $Z^{\mathbf{j}}$ ne dépend pas de \mathbf{j} . Or, si $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\psi = D^{\mathbf{k}}\Psi$ avec $|\mathbf{k}| = m$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ^{\mathbf{j}}(\xi) + \frac{\alpha_{\mathbf{j}}(\varphi)}{\mathbf{j}!} Z_{\mathbf{j}}(0) \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\psi}(\xi) dZ^{\mathbf{k}}(\xi) + \frac{\alpha_{\mathbf{k}}(\psi)}{\mathbf{k}!} Z_{\mathbf{k}}(0) \right)} \right) \\ = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\sigma(\xi) + \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{j}}(\varphi) \overline{\alpha_{\mathbf{k}}(\psi)}. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$\mathbf{E} \left(Z^{\mathbf{j}}(\Delta_1) \overline{Z^{\mathbf{k}}(\Delta_2)} \right) = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

puis que

$$\mathbf{E} \left(Z_{\mathbf{j}}(0) \overline{Z_{\mathbf{k}}(0)} \right) = \mathbf{j}! \mathbf{k}! a_{\mathbf{j},\mathbf{k}}.$$

Ainsi la mesure aléatoire $Z^{\mathbf{j}}$ ne dépend pas de \mathbf{j} et on la note Z . Alors, si $|\mathbf{j}| = m$ et $\varphi = D^{\mathbf{j}}\Phi$,

$$\langle X, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=m} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}(\varphi)}{\mathbf{k}!} Z_{\mathbf{k}}(0).$$

Par linéarité cette égalité est vraie pour tout $\varphi \in \text{Vect} \{ D^{\mathbf{j}}\varphi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\mathbf{j}| = m \} = \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. \square

On en déduit la représentation spectrale des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires.

Corollaire 1.4.1. *Soit X un champ ponctuel sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique. On reprend les notations du théorème 1.3.1. Alors, il existe*

- une mesure aléatoire Z sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ associée à la mesure spectrale σ ;
- un vecteur aléatoire $(X_{\mathbf{k}})_{|\mathbf{k}|=m}$ de matrice de covariance A , non corrélé avec Z ;

tels que, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$\Delta^m X(t, s) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{-it \cdot \xi} \left(e^{-is \cdot \xi} - 1 \right)^m dZ(\xi) + m! \sum_{|\mathbf{k}|=m} s^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}. \quad (1.8)$$

De plus, si $\Theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\widehat{\Theta}(0) = 1$ et $D^j \widehat{\Theta}(0) = 0$, $|j| \leq m$,

$$X(t) - Y_{\Theta}(t) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=m} t^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}},$$

avec

$$Y_{\Theta} = \left\{ \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} (-1)^{|\mathbf{j}|} \frac{t^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle, t \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Chapitre 2

Mesure spectrale et propriétés associées

Nous nous intéressons ici aux propriétés trajectorielles de champs ponctuels telles que la régularité et l'autosimilarité. Le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$ est l'exemple le plus connu de champ autosimilaire d'ordre H . Rappelons qu'il peut être défini comme étant un champ ponctuel gaussien centré B_H dont la fonction de covariance est donnée par

$$\mathbf{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

pour $t, s \in \mathbb{R}^d$. Alors,

$$\mathbf{E}\left(|B_H(t) - B_H(s)|^2\right) = |t - s|^{2H}. \quad (2.1)$$

Puisque B_H est un champ gaussien, on peut montrer que, presque sûrement, son exposant de Hölder ponctuel est constant égal à H [AJT04]. Il suffit en fait de connaître (2.1) pour des petites valeurs de $|t - s|$. La majoration (resp. minoration) donnée par (2.1) permet de majorer (resp. minorer) l'exposant de Hölder ponctuel. On peut ainsi voir H comme une valeur critique. R. Adler [Adl81] parle alors de *index- H fields*. Si de plus, (2.1) est vérifiée asymptotiquement, le champ ponctuel possède une propriété d'autosimilarité locale asymptotique (lass) [BJR97]. Un autre point de vue consiste à considérer la représentation spectrale du mouvement brownien fractionnaire. En effet, ce champ est à accroissements stationnaires et sa fonction de covariance est donc caractérisée par une mesure spectrale σ d'après le théorème 1.3.1. Sa mesure spectrale admet la densité donnée par, à une constante près,

$$f_H(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{2H+d}}.$$

C'est une fonction homogène de degré $-2H - d$. De tels champs sont appelés *1/ f noise* en théorie du signal (cf. [Sol92, AGS95] par exemple). Dans [BE03], les auteurs considèrent un champ ponctuel gaussien à accroissements stationnaires de densité spectrale f . D'une part, ils montrent que la comparaison de f avec f_H pour des grandes valeurs de ξ suffit à conclure sur la régularité hölderienne du champ. D'autre part, ils montrent que l'homogénéité asymptotique de f implique que le champ est lass en tout point.

Remarquons que seule la fonction de covariance importe dans le cas gaussien et nous nous affranchissons dans cette partie de cette hypothèse en définissant, par analogie avec

les propriétés presque sûres ou en loi, des propriétés au second ordre. On se place dans le contexte un peu plus général des champs à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continus en moyenne quadratique. Nous nous efforçons de relier le comportement de leur mesure spectrale σ aux propriétés du second ordre.

Dans une première section, nous nous intéressons aux propriétés de type régularité höldérienne. Nous pouvons considérer des valeurs de H supérieures ou égales à 1 en utilisant la notion de dérivabilité en moyenne quadratique [Adl81]. En adaptant les démonstrations de [BE03], qui traitent du cas gaussien à accroissements stationnaires et de mesure spectrale à densité, nous relierons alors la régularité au second ordre du champ au comportement de

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi).$$

Nous nous intéressons à la régularité directionnelle. Nous verrons que les résultats de [BE03] se généralisent facilement dans notre cadre d'étude. Enfin, nous ferons le lien évident avec les propriétés presque sûres et en loi lorsque on fait l'hypothèse supplémentaire de loi gaussienne. On peut dans ce cas estimer la dimension fractale du graphe du modèle.

Dans une seconde partie, nous étudions les propriétés d'autosimilarité qui correspondent à une estimation plus précise du comportement de la mesure spectrale pour la valeur critique de H . Nous utilisons le résultat de [Dob79], obtenu dans le cadre des champs généralisés gaussiens à accroissements d'ordre m stationnaires, pour caractériser les champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires autosimilaires au second ordre. Nous voyons que, mis à part le cas où le champ ponctuel est nul, l'autosimilarité d'ordre $H > -1$ implique que $m \in [H, H + 1)$. Ainsi, on ne peut obtenir des paramètres d'autosimilarité $H > -1$ qu'en considérant des champs ponctuels à accroissements d'ordre suffisamment grand stationnaires comme définis par [BJR97] dans le cas gaussien. Nous nous intéressons ensuite à la propriété lass. On considère une mesure spectrale admettant f pour densité. Lorsque on connaît un développement asymptotique de f autour d'une fonction homogène de degré $-2H - d$, d'après [BE03], si $H < 1$, le champ est lass d'ordre H en tout point. En revanche pour des valeurs de H supérieures nous devons regarder des accroissements d'ordre supérieur [Est02].

La dernière partie précise ces résultats dans le cas gaussien. On cherche à estimer le paramètre H au moyen des variations quadratiques généralisées. Dans [IL97], les auteurs construisent un estimateur consistant de l'exposant de Hölder des trajectoires d'un processus gaussien ($d = 1$) à accroissements stationnaires sous l'hypothèse où un développement asymptotique au voisinage de 0 du variogramme est connu. Dans le domaine spectral, sous des hypothèses d'homogénéité asymptotique de la densité spectrale, les auteurs de [ABE04] donnent un estimateur de H qui se généralise en dimension supérieure. Pour déterminer la vitesse de convergence de cet estimateur il faut en fait connaître un développement asymptotique de f . Dans ce cas nous donnons des résultats précis. L'erreur commise par l'approximation de f par f_H est directement liée à la norme dans $L^2(\Omega)$ de l'erreur des estimateurs. Lorsque celle-ci est suffisamment petite on obtient en plus une normalité asymptotique de l'estimateur.

2.1 Régularité

2.1.1 Régularité en moyenne quadratique

a) Caractérisation par la mesure spectrale

Nous avons déjà vu précédemment qu'un champ X est dit continu en moyenne quadratique au point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ si

$$\mathbf{E} \left(|X(t) - X(t_0)|^2 \right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

On s'intéresse à présent à la vitesse de convergence. Rappelons que si f est une fonction continue sur \mathbb{R}^d , à valeurs complexes, on lui associe une fonction H_f appelée **exposant de Hölder ponctuel** et définie par

$$H_f(x) = \sup \left\{ \alpha \geq 0; |f(x+y) - f(x)| = o_{|y| \rightarrow 0}(|y|^\alpha) \right\}.$$

Par analogie, on définit l'**exposant de Hölder ponctuel quadratique** d'un champ X , continu en moyenne quadratique sur \mathbb{R}^d ,

$$H_X^q(t_0) = \sup \left\{ \alpha \geq 0; \mathbf{E} \left(|X(t_0+t) - X(t_0)|^2 \right) = o_{|t| \rightarrow 0}(|t|^{2\alpha}) \right\}.$$

Pour $H \in [0, 1)$ on dit que X est **de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact**, si, pour tout compact K de \mathbb{R}^d , il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\forall t, s \in K, \quad \mathbf{E} \left(|X(t) - X(s)|^2 \right) \leq C_K |t - s|^{2H}, \quad (2.2)$$

lorsque $H > 0$ ou, pour $H = 0$, si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta_K > 0$ tel que

$$\forall t, s \in K, \quad |t - s| \leq \eta_K \Rightarrow \mathbf{E} \left(|X(t) - X(s)|^2 \right) \leq \epsilon. \quad (2.3)$$

Cette condition implique en particulier que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$, $H_X^q(t_0) \geq H$.

On obtient une estimation plus précise de cet exposant en regardant ce qui se passe pour des valeurs plus grandes que H .

On dit que X admet $H \in [0, 1)$ pour **exposant de Hölder quadratique critique** si :

- pour tout $\alpha \in (0, H)$ et $\alpha = 0$, le champ X est de classe \mathcal{C}^α en moyenne quadratique uniformément sur tout compact ;
- pour tout $\alpha \in (H, 1)$, pour tout compact K de \mathbb{R}^d , il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout $t, s \in K$ avec $|t - s|$ suffisamment petit,

$$\mathbf{E} \left(|X(t) - X(s)|^2 \right) \geq C_K |t - s|^{2\alpha}. \quad (2.4)$$

Cette condition implique que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$H_X^q(t_0) = H = \inf \left\{ \alpha \geq 0; |t|^{2\alpha} = o_{|t| \rightarrow 0} \left(\mathbf{E} \left(|X(t_0+t) - X(t_0)|^2 \right) \right) \right\}.$$

La réciproque est vraie dans le cas d'un champ à accroissements stationnaires. R. Adler [Adl81] appelle *index- H fields* les champs gaussiens centrés à accroissements stationnaires

qui vérifient cette condition. C'est en particulier le cas du mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H .

Nous verrons dans la partie 2.1.2 que cette régularité höldérienne en moyenne quadratique détermine la régularité höldérienne presque sûre des trajectoires dans le cas de champs gaussiens. Il est facile de voir que cette relation est liée à la loi gaussienne. Considérons par exemple pour X , un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ sur la droite réelle que l'on a centré. C'est un processus de saut qui satisfait

$$\mathbf{E} \left(|X(t) - X(s)|^2 \right) = \lambda |t - s|.$$

Il admet donc, comme le mouvement brownien, $1/2$ comme exposant de Hölder quadratique critique. Il existe cependant des exemples de champs non gaussiens pour lesquels la régularité höldérienne en moyenne quadratique coïncide avec la régularité höldérienne presque sûre des trajectoires. Citons par exemple les *real harmonizable fractional Lévy motions*, introduit dans [BCI02], qui ont la même régularité et la même fonction de covariance que le mouvement brownien fractionnaire.

Pour définir une régularité supérieure, nous reprenons ici la notion de dérivabilité en moyenne quadratique de R. Adler [Adl81]. On note $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de \mathbb{R}^d . Le champ X admet une dérivée partielle dans la i -ème direction **au sens d'Adler** au point t si les variables aléatoires

$$\frac{X(t + h\mathbf{e}_i) - X(t)}{h}$$

convergent dans $L^2(\Omega)$ lorsque h tend vers 0. Ceci correspond à la notion de dérivabilité pour des fonctions de \mathbb{R}^d à valeurs dans un espace vectoriel normé. Dans ce cas, on appelle $D^{\mathbf{e}_i} X(t)$ la limite. Si ceci a lieu pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, alors on dit que X possède une dérivée partielle dans la i -ème direction au sens d'Adler. Lorsque X admet une dérivée partielle dans la i -ème direction au sens d'Adler au point t , sa fonction de covariance Γ admet des dérivées partielles dans la i -ème direction au point (t, t) par rapport à chacune de ses variables. De plus, lorsque $D^{\mathbf{e}_i} X(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, la fonction de covariance du champ $D^{\mathbf{e}_i} X$ est donnée par $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_i \partial t_i}(s, t)$. La réciproque est donnée par le théorème 2.2.2 p.27.

Théorème 2.1.1 ([Adl81]). *Soit X un champ du second ordre de fonction de covariance Γ . Si la dérivée $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_i \partial t_i}$ existe au point $(t, t) \in \mathbb{R}^d$ alors la limite*

$$D^{\mathbf{e}_i} X(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t + h\mathbf{e}_i) - X(t)}{h}$$

existe dans $L^2(\Omega)$.

Ainsi, lorsque $H = n + s$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1)$, on dit que X est **de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique** si X possède des dérivées d'ordre $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ au sens d'Adler, pour tout $|\mathbf{j}| \leq n$, qui sont de classe \mathcal{C}^s en moyenne quadratique uniformément sur tout compact lorsque $|\mathbf{j}| = n$. Regardons dans un premier temps à quoi correspond la dérivabilité en moyenne quadratique dans le cas d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre continu en moyenne quadratique.

Proposition 2.1.1. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et σ sa mesure spectrale. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. Le champ X possède une dérivée partielle dans la i -ème direction au sens d'Adler, continue en moyenne quadratique, si et seulement si*

$$\int_{|\xi|>1} \xi_i^2 d\sigma(\xi) < +\infty.$$

Dans ce cas, le champ $D^{\mathbf{e}_i} X$ est à accroissements d'ordre $\max(0, m-1)$ stationnaires au second ordre et admet $\xi_i^2 d\sigma(\xi)$ pour mesure spectrale.

Démonstration. D'après la représentation spectrale donnée dans le corollaire 1.4.1, on peut écrire, pour $\Theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{\Theta}(0) = 1$ et $D^{\mathbf{j}}\widehat{\Theta}(0) = 0$ pour $|\mathbf{j}| \leq m$,

$$X(t) - Y_{\Theta}(t) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=m} t^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}},$$

avec

$$Y_{\Theta} = \left\{ \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} (-1)^{|\mathbf{j}|} \frac{t^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!} \langle X, D^{\mathbf{j}}\Theta \rangle, t \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

En choisissant $\widehat{\Theta}$ à support dans la boule unité on peut découper l'intégrale en deux. On note $P_m(t)$ le polynôme à coefficients aléatoires de degré m donné par $\sum_{|\mathbf{k}|=m} t^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}} + Y_{\Theta}(t)$. On pose

$$X_{\varsigma}(t) = \int_{|\xi|>1} e^{-it \cdot \xi} dZ(\xi),$$

et

$$X_{\varrho}(t) = \int_{0 < |\xi| \leq 1} \left(e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) dZ(\xi) + P_m(t),$$

de sorte que $X = X_{\varsigma} + X_{\varrho}$. Alors,

$$\Gamma_{X-P_m}(t, s) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) \overline{\left(e^{-is \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-is \cdot \xi)^l}{l!} \right)} d\sigma(\xi).$$

Supposons que σ vérifie

$$\int_{|\xi|>1} \xi_i^2 d\sigma(\xi) < \infty.$$

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction de covariance Γ_{X-P_m} admet des dérivées partielles dans la i -ème direction par rapport à chacune de ses variables. Alors, si $m \geq 2$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial^2 \Gamma_{X-P_m}(s, t)}{\partial s_i \partial t_i} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-it \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-2} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) \overline{\left(e^{-is \cdot \xi} - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{l=0}^{m-2} \frac{(-is \cdot \xi)^l}{l!} \right)} \xi_i^2 d\sigma(\xi),$$

et, lorsque $m \leq 1$,

$$\frac{\partial^2 \Gamma_{X-P_m}(s, t)}{\partial s_i \partial t_i} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t-s) \cdot \xi} \xi_i^2 d\sigma(\xi) + \delta_{1,m} a_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i}.$$

D'après le théorème 2.1.1, le champ $X - P_m$ possède une dérivée partielle dans la i -ème direction. Puisque P_m est de classe \mathcal{C}^∞ en moyenne quadratique, le champ X possède bien une dérivée partielle dans la i -ème direction. De plus, par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction de covariance de $D^{\mathbf{e}_i}(X - P_m)$ est continue par rapport à chacune de ses variables et donc $D^{\mathbf{e}_i}X$ est continu en moyenne quadratique. On reconnaît la fonction de covariance d'un champ à accroissements d'ordre $\max(0, m - 1)$ stationnaires au second ordre d'après le théorème 1.2.3. Puisque $D^{\mathbf{e}_i}P_m$ est un polynôme aléatoire de degré $\max(0, m - 1)$ on en déduit que $D^{\mathbf{e}_i}X$ est à accroissements d'ordre $\max(0, m - 1)$ stationnaires au second ordre et admet $\xi_i^2 d\sigma(\xi)$ pour mesure spectrale.

Réciproquement, supposons que X possède une dérivée partielle dans la i -ème direction au sens d'Adler continue en moyenne quadratique. Nous voulons montrer que

$$\int_{|\xi|>1} \xi_i^2 d\sigma(\xi) < \infty.$$

Or, pour $h \neq 0$,

$$\mathbf{E} \left(\left| \frac{X_\zeta(h\mathbf{e}_i) - X_\zeta(0)}{h} \right|^2 \right) = \frac{4}{h^2} \int_{|\xi|>1} \sin^2 \left(\frac{h\xi_i}{2} \right) d\xi.$$

Par le lemme de Fatou, il suffit donc de montrer que cette quantité est bornée lorsque h tend vers 0. Mais, puisque $X = X_\zeta + X_\varrho$,

$$\mathbf{E} \left(\left| \frac{X_\zeta(h\mathbf{e}_i) - X_\zeta(0)}{h} \right|^2 \right) \leq 2\mathbf{E} \left(\left| \frac{X(h\mathbf{e}_i) - X(0)}{h} \right|^2 \right) + 2\mathbf{E} \left(\left| \frac{X_\varrho(h\mathbf{e}_i) - X_\varrho(0)}{h} \right|^2 \right).$$

Le même raisonnement que précédemment montre que X_ϱ possède une dérivée partielle dans la i -ème direction au sens d'Adler continue en moyenne quadratique ce qui conclut la preuve. \square

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.1. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et σ sa mesure spectrale. Alors, X peut se décomposer sous la forme*

$$X \stackrel{L^2(\Omega)}{=} X_\zeta + X_\varrho,$$

avec

- X_ζ un champ ponctuel stationnaire au second ordre admettant $\mathbf{1}_{|\xi|>1} d\sigma(\xi)$ pour mesure spectrale.
- X_ϱ un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre admettant $\mathbf{1}_{|\xi|\leq 1} d\sigma(\xi)$ pour mesure spectrale et de classe \mathcal{C}^∞ en moyenne quadratique.

Les champs X_ζ et X_ϱ sont corrélés mais ceci n'influence pas l'étude de la régularité en moyenne quadratique de X . Par ailleurs X_ζ et $X_\varrho - Y_\Theta$ sont non corrélés.

Remarque : Si un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre admet une dérivée partielle dans la i -ème direction au sens d'Adler qui est continue en moyenne quadratique, alors celle-ci coïncide avec la même dérivée partielle au sens généralisé.

Démonstration. Il est facile de voir que $D^{\mathbf{e}_i} X$ est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre et par hypothèse il est continu en moyenne quadratique. D'après la proposition 1.3.1, on peut lui associer un champ généralisé défini par, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle D^{\mathbf{e}_i} X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-nd} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} D^{\mathbf{e}_i} X(s) \varphi(s).$$

Or, $D^{\mathbf{e}_i} X(s) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h\mathbf{e}_i) - X(t)}{h}$. Par l'inégalité des accroissements finis, si $|h| \leq 1$,

$$\left\| \frac{X(t+h\mathbf{e}_i) - X(t)}{h} \right\|_2 \leq \sup_{t \in [-1,1]} \|D^{\mathbf{e}_i} X(s + t\mathbf{e}_i)\|_2.$$

Et, d'après le lemme 1.1.1, il existe $C > 0$ tel que, pour $|t| \leq 1$,

$$\|D^{\mathbf{e}_i} X(s + t\mathbf{e}_i)\|_2 \leq C 2^{2m} (1 + |s|)^{2m}.$$

On en déduit la convergence de la série et l'uniformité de la limite en h , pour $|h| \leq 1$. On peut donc intervertir les limites de sorte que

$$\langle D^{\mathbf{e}_i} X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-nd} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} \frac{X(s+h\mathbf{e}_i) - X(s)}{h} \varphi(s).$$

Or, pour $h = 2^{-m}$, avec $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} \frac{X(s+h\mathbf{e}_i) - X(s)}{h} \varphi(s) = \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d} X(s) \frac{\varphi(s-h\mathbf{e}_i) - \varphi(s)}{h}.$$

En remarquant à nouveau que les limites sont uniformes on peut les intervertir et on reconnaît

$$\langle D^{\mathbf{e}_i} X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} - \langle X, D^{\mathbf{e}_i} \varphi \rangle.$$

□

Ainsi, il suffit d'étudier la régularité de X_ζ pour connaître celle de X . Une estimation plus précise du comportement de la mesure spectrale donne la régularité du champ.

Proposition 2.1.2. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre continu en moyenne quadratique et σ sa mesure spectrale. Soit $H \in \mathbb{R}^+$. Si*

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi) < +\infty,$$

alors le champ ponctuel X est de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact.

On retrouve le fait que dès qu'un champ généralisé à accroissements d'ordre m stationnaires admet une représentation ponctuelle, celle-ci est continue en moyenne quadratique et il en existe donc une version mesurable et séparable. Remarquons que cette condition permet juste de conclure que le mouvement brownien fractionnaire est de classe $\mathcal{C}^{H'}$ en moyenne quadratique uniformément sur tout compact, pour tout $H' < H$. En effet, sa mesure spectrale vérifie $d\sigma(\xi) = |\xi|^{-2H-d} d\xi$. Ceci est donc lié au fait que H est la valeur

critique pour la régularité höldérienne quadratique. En effet, on peut montrer la loi du module uniforme pour le mouvement brownien fractionnaire (cf. [BJR97]), si U est un ouvert borné de \mathbb{R}^d ,

$$\limsup_{t,s \in U, |t-s| \rightarrow 0} \frac{|B_H(t) - B_H(s)|}{|t-s|^H \sqrt{\log(|t-s|)}} = \sqrt{8d \sup_{|t|=1} \int_{\mathbb{R}^d} \sin^2\left(\frac{t \cdot \xi}{2}\right) |\xi|^{-2H-d} d\xi}.$$

Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre et σ sa mesure spectrale. On définit la fonction r_σ sur \mathbb{R}^d par

$$r_\sigma(t) = \mathbf{E} \left(|X_\zeta(t) - X_\zeta(0)|^2 \right) = 4 \int_{|\xi|>1} \sin^2\left(\frac{t \cdot \xi}{2}\right) d\sigma(\xi),$$

où X_ζ est la partie stationnaire de X définie dans le corollaire 2.1.1. On utilise le lemme suivant qui est une simple reformulation de l'égalité précédente en utilisant la stationnarité de X_ζ .

Lemme 2.1.1. *Pour tout $H < \min(1, H_{r_\sigma}(0)/2)$, le champ X_ζ est de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact.*

De plus, si $H_{r_\sigma}(0) < 2$ alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$H_{X_\zeta}^q(t_0) = H_{r_\sigma}(0)/2.$$

Enfin, si on a aussi

$$H_{r_\sigma}(0) = \inf \{ \alpha \geq 0; |t|^\alpha = o_{|t| \rightarrow 0}(r_\sigma(t)) \},$$

alors X_ζ admet $H_{r_\sigma}(0)/2$ pour exposant de Hölder quadratique critique.

Réciproquement, si X_ζ admet $H \in [0, 1)$ pour exposant de Hölder quadratique critique alors

$$H_{r_\sigma}(0) = \inf \{ \alpha \geq 0; |t|^\alpha = o_{|t| \rightarrow 0}(r_\sigma(t)) \} = 2H.$$

Démonstration de la proposition 2.1.2. On a déjà vu qu'il suffisait d'étudier la régularité de X_ζ . On suppose dans un premier temps que $H < 1$. Alors, pour t et s dans un compact K de \mathbb{R}^d , on peut trouver $C_K > 0$ telle que

$$r_\sigma(t-s) = \int_{|\xi|>1} \sin^2\left(\frac{(t-s) \cdot \xi}{2}\right) d\sigma(\xi) \leq C_K |t-s|^{2H} \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi).$$

Si $H \geq 1$ on écrit $H = k + H'$ avec $0 \leq H' < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\mathbf{j}| \leq k$, puisque

$$\int_{|\xi|>1} \xi^{2\mathbf{j}} d\sigma(\xi) \leq \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2k} d\sigma(\xi) < +\infty,$$

en itérant la proposition 2.1.1, le champ X_ζ admet des dérivées partielles d'ordre \mathbf{j} , continues en moyenne quadratique, de mesure spectrale $d\sigma_{\mathbf{j}}(\xi) = \xi^{2\mathbf{j}} d\sigma(\xi)$, pour tout $|\mathbf{j}| \leq k$. Alors, si $|\mathbf{j}| = k$, d'après le premier cas, puisque

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2H'} d\sigma_{\mathbf{j}}(\xi) \leq \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi) < +\infty,$$

le champ $D^{\mathbf{j}}X_\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^{H'}$ en moyenne quadratique uniformément sur tout compact. \square

Dans le cas de la dimension 1 on peut définir la notion d'exposant de Hölder quadratique critique pour des valeurs plus grandes que 1. On dira que le processus $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ admet $H = n + s$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1)$ pour exposant de Hölder quadratique critique si X est de classe \mathcal{C}^n en moyenne quadratique et si $X^{(n)}$ admet s pour exposant de Hölder quadratique critique. On peut alors énoncer la proposition suivante qui complète celle de [BE03] par une équivalence.

Proposition 2.1.3. *Soit $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ un processus ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et σ sa mesure spectrale. Soit $H = n + s$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1)$.*

Le processus X admet H pour exposant de Hölder quadratique critique si et seulement si r_σ est de classe \mathcal{C}^{2n} au voisinage de 0 et

$$\begin{aligned} 2s &= \sup \left\{ \alpha \geq 0; |r_\sigma^{(2n)}(t) - r_\sigma^{(2n)}(0)| = o_{|y| \rightarrow 0}(|t|^\alpha) \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha \geq 0; |t|^\alpha = o_{|t| \rightarrow 0}(|r_\sigma^{(2n)}(t) - r_\sigma^{(2n)}(0)|) \right\}, \end{aligned}$$

Démonstration. En itérant la proposition 2.1.1 on obtient cette fois une équivalence. Le processus X possède une dérivée d'ordre n si et seulement si $\int_{|\xi|>1} \xi^{2n} d\sigma(\xi) < +\infty$. Nous allons montrer que ceci est équivalent à ce que r_σ soit de classe \mathcal{C}^{2n} au voisinage de 0. On note $d\sigma_n(\xi) = \xi^{2n} d\sigma(\xi)$ qui correspond à la mesure spectrale de $X^{(n)}$. Regardons dans un premier temps le cas où $n = 1$. Par le théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre la première implication est évidente. En fait, la fonction r_σ est de classe \mathcal{C}^2 sur tout \mathbb{R} . Réciproquement, supposons que r_σ soit de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de 0. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$2 \int_{|\xi|>1} \frac{1 - \cosh \xi}{h^2} d\xi = -\frac{r_\sigma(h) - 2r_\sigma(0) + r_\sigma(h)}{h^2}.$$

Par le lemme de Fatou,

$$\int_{|\xi|>1} \xi^2 d\sigma(\xi) \leq -r_\sigma''(0) < +\infty.$$

Par récurrence sur n on montre alors que le processus X possède une dérivée d'ordre n si et seulement si r_σ est de classe \mathcal{C}^{2n} au voisinage de 0. Pour montrer la seconde équivalence concernant l'exposant de Hölder quadratique critique du processus $X^{(n)}$, il suffit de remarquer que

$$r_\sigma^{(2n)}(t) - r_\sigma^{(2n)}(0) = (-1)^n r_{\sigma_n}(t),$$

et d'appliquer le lemme 2.1.1. □

Dans le cas général, si

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2(m-1)} d\sigma(\xi) < +\infty,$$

on va donner une représentation spectrale qui ne dépend pas du choix d'une fonction Θ . En effet, dans ce cas on peut définir ponctuellement les dérivées d'ordre \mathbf{j} de X pour $|\mathbf{j}| \leq m - 1$. Alors

$$X(t) - \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} X(0)}{\mathbf{j}!} t^{\mathbf{j}} \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=m} t^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}. \quad (2.5)$$

En particulier, un champ à accroissements stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, s'écrit

$$X(t) - X(0) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - 1 \right) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=1} t^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}.$$

Lorsque σ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m}) d\xi)$ positive, appelée **densité spectrale**, telle que $d\sigma(\xi) = f(\xi) d\xi$. C'est alors le comportement asymptotique de f qui détermine la régularité du champ ponctuel. On retrouve les conditions énoncées sur la densité spectrale dans [BE03] lorsque H est supposé inférieur à 1, pour étudier la régularité höldérienne presque sûre de champs gaussiens à accroissements stationnaires. Le cadre de notre étude permet de dépasser la valeur 1.

Corollaire 2.1.2. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, qui admet f pour densité spectrale. On suppose qu'il existe H , A , et B strictement positives, telles que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$|\xi| > A \Rightarrow |f(\xi)| \leq B |\xi|^{-(2H+d)}.$$

Alors, pour tout $\alpha < H$, le champ X est de classe \mathcal{C}^α en moyenne quadratique uniformément sur tout compact.

Le lemme 2.1.1 nous permet d'énoncer une condition sur la mesure spectrale pour que le champ ne soit de classe \mathcal{C}^α en moyenne quadratique uniformément sur aucun compact.

Proposition 2.1.4. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, qui admet σ pour densité spectrale. Soit $H \in (0, 1]$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\mu > 0$ suffisamment grand*

$$\sigma(\{\mu < |\xi| < 2\mu\}) \geq C \mu^{-2H}.$$

Alors, $H_{r_\sigma}(0) \leq 2H$ et, pour tout $\alpha > H$, le champ X n'est pas de classe \mathcal{C}^α en moyenne quadratique uniformément sur aucun compact.

Démonstration. Si $H < 1$, d'après le lemme 2.1.1, il suffit de trouver, pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit, une direction $\mathbf{e}_\lambda \in \{\mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq d\}$ pour laquelle

$$r_\sigma(\lambda \mathbf{e}_\lambda) \geq C \lambda^{2H},$$

avec C une constante strictement positive. Or, pour $\lambda < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d r_\sigma(\lambda \mathbf{e}_i) &= \sum_{i=1}^d \int_{|\xi|>1} \sin^2\left(\lambda \frac{\xi \cdot \mathbf{e}_i}{2}\right) d\sigma(\xi) \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \sigma(\{\lambda^{-1} < |\xi| < 2\lambda^{-1}\}). \end{aligned}$$

Dans le cas où $H = 1$, il suffit de remarquer que le champ ponctuel ne peut pas admettre de dérivées en moyenne quadratique dans toutes les directions. En effet, si c'était le cas, pour $1 \leq i \leq d$, le champ ponctuel dérivé dans la direction \mathbf{e}_i admettrait $d\sigma_i = \xi_i^2 d\sigma$ pour mesure spectrale et donc $\int_{|\xi|>1} \xi_i^2 d\sigma(\xi) < +\infty$. On aboutit à une contradiction puisque $\int_{\lambda^{-1} < |\xi| < 2\lambda^{-1}} |\xi|^2 d\sigma(\xi) \geq C$. \square

Remarquons que l'on peut énoncer des résultats similaires pour $H > 1$. On obtient alors des résultats plus précis en considérant les mesures spectrales des dérivées en moyenne quadratique dans les différentes directions.

On n'obtient pas de minoration uniforme de r_σ par ce biais. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la mesure $d\sigma = |\xi_1|^{-2H-1} \times \delta_0$. Alors,

$$\sigma(\{\mu < |\xi| < 2\mu\}) = \frac{1 - 2^{-2H}}{H} \mu^{-2H},$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, si $t \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, $r_\sigma(t) = 0$.

En revanche, lorsque σ est à densité une simple minoration de la densité spectrale permet de conclure comme le montre le corollaire suivant énoncé dans [BE03] pour des champs gaussiens à accroissements stationnaires.

Corollaire 2.1.3. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre continu en moyenne quadratique qui admet f pour densité spectrale. On suppose qu'il existe $H \in (0, 1)$ tel que pour tout $\alpha > H$, il existe une constante $A > 0$ et un ensemble $E_\alpha \subset S^{d-1}$ de mesure non nulle tels que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$|\xi| > A \text{ et } \frac{\xi}{|\xi|} \in E_\alpha \Rightarrow f(\xi) > |\xi|^{-(2\alpha+d)}.$$

Alors, pour tout $\alpha > H$, le champ X n'est pas de classe C^α en moyenne quadratique uniformément sur tout compact. De plus, X vérifie (2.4) et

$$2H = \inf \{ \alpha \geq 0; |t|^\alpha = o_{|t| \rightarrow 0}(r_\sigma(t)) \}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $\alpha > H$, pour $\mu > A$,

$$\sigma(\{\mu < |\xi| < 2\mu\}) \geq \frac{1 - 2^{-2\alpha}}{1 + 2\alpha} |E_\alpha| \mu^{-2\alpha}.$$

De plus, si $\alpha > H$ et $|t| < \min(A^{-1}, 1)$,

$$\begin{aligned} r_\sigma(t) &\geq \int_{|t|^{-1} \leq |\xi| \leq 2|t|^{-1}, \frac{\xi}{|\xi|} \in E_\alpha} \sin^2\left(\frac{t \cdot \xi}{2}\right) |\xi|^{-(2\alpha+d)} d\xi \\ &\geq C_\alpha \left(\int_{E_\alpha} \left| \frac{t}{|t|} \cdot \theta \right|^2 d\theta \right) |t|^{2\alpha}, \end{aligned}$$

avec $C_\alpha = \frac{1}{\pi^2} \int_1^2 r^{1-2\alpha} dr > 0$. □

b) Régularité et anisotropie

Rappelons que un champ ponctuel $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ est dit **isotrope en loi** si, pour toute rotation $\kappa \in O(d)$,

$$\{X(\kappa t); t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Si X est du second ordre, on dit qu'il est **isotrope au second ordre** si sa fonction de covariance est invariante par rotation : pour toute rotation $\kappa \in O(d)$, si $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{E} \left(X(\kappa t) \overline{X(\kappa s)} \right) = \mathbf{E} \left(X(t) \overline{X(s)} \right).$$

Il est facile de voir que si X est à accroissements d'ordre m stationnaires et isotrope au second ordre, sa mesure spectrale est invariante par rotation (isotrope).

On généralise la notion d'isotropie en disant qu'un champ généralisé X est **isotrope en loi** si, pour toute rotation $\kappa \in O(d)$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\langle X, \varphi_1 \circ \kappa \rangle, \dots, \langle X, \varphi_n \circ \kappa \rangle) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\langle X, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \varphi_n \rangle).$$

Lorsque le champ généralisé X est du second ordre, il est dit **isotrope au second ordre** si sa fonction de covariance est invariante par rotation : pour toute rotation $\kappa \in O(d)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\varphi \circ \kappa, \psi \circ \kappa) = \Gamma_X(\varphi, \psi).$$

On peut caractériser les champs à accroissements d'ordre m stationnaires isotropes au second ordre par l'expression de leur mesure spectrale. Ceci est fait par exemple dans la partie 5.3 p.285 de [GV67] qui traite de la représentation spectrale des champs généralisés à accroissements d'ordre m stationnaires et isotropes au second ordre.

Comme dans [BE03], nous sommes particulièrement intéressés par des champs ponctuels anisotropes dont les densités spectrales sont asymptotiquement de la forme

$$\frac{c(\xi)}{|\xi|^{d+2h(\xi)}},$$

avec c et h des fonctions positives homogènes de degré 0. Lorsque on choisit ces fonctions de telle sorte que la densité spectrale vérifie les hypothèses des corollaires 2.1.2 et 2.1.3 (par exemple, pour $c = 1$ et $H = \min_{S^{d-1}} h$), le champ ponctuel X à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre correspondant va admettre en tout point un exposant de Hölder ponctuel quadratique égal à son exposant de Hölder quadratique critique H . Cette régularité, déterminée par l'exposant de Hölder ponctuel en 0 de r_σ , ne reflète pas l'anisotropie de la densité spectrale. Il est naturel alors d'étudier la régularité directionnelle du champ, c'est à dire sa régularité le long de droites. Si Δ est une droite de \mathbb{R}^d dirigée par $\mathbf{u} \in S^{d-1}$ et passant par $a \in \mathbb{R}^d$, le processus ponctuel $\{X(a + t\mathbf{u}); t \in \mathbb{R}\}$ est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et sa mesure spectrale vérifie, pour tout borélien I de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\sigma_\Delta(I) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_I(\mathbf{u} \cdot \xi) d\sigma(\xi) \quad \text{et} \quad r_{\sigma_\Delta}(t) = r_\sigma(t\mathbf{u}).$$

La mesure ne dépend pas du point a ce qui implique que le processus $\{X(a + t\mathbf{u}); t \in \mathbb{R}\}$ a la même régularité quelque soit a . Si ce processus admet $\beta(\mathbf{u}) \in [0, 1)$ comme exposant de Hölder quadratique critique, on dit que X admet $\beta(\mathbf{u})$ comme **régularité directionnelle quadratique dans la direction \mathbf{u}** . D'après le lemme 2.1.1, si X est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre continu en moyenne quadratique, ceci est équivalent à dire que

$$H_{r_{\sigma_\Delta}}(0) = \beta(\mathbf{u}) = \inf \{ \alpha \geq 0; |t|^\alpha = o_{|t| \rightarrow 0}(r_{\sigma_\Delta}(t)) \}.$$

Supposons qu'il existe β une fonction définie sur la sphère telle que, pour toute direction \mathbf{u} , X admet $\beta(\mathbf{u})$ comme régularité directionnelle quadratique dans la direction \mathbf{u} . Alors,

le champ ponctuel admet $\inf_{S^{d-1}} \beta$ comme exposant de Hölder quadratique critique. Dans le cadre des champs stationnaires définis sur \mathbb{R}^2 les auteurs de [DH99] montrent que la régularité directionnelle est constante sauf au plus le long d'une direction où elle peut être plus grande. Dans [BE03], les auteurs généralisent cette propriété au cas de la dimension d , dans le cadre des champs à accroissements stationnaires. En fait, on a vu que, pour un champ à accroissements d'ordre m stationnaires, l'étude de la régularité se réduit à celle d'un champ stationnaire. L'ordre de stationnarité n'a donc pas d'influence sur ce phénomène et, malheureusement, la mesure de la régularité directionnelle quadratique d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre ne permet pas de rendre compte de l'anisotropie comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.1.5. *Soit X un champ à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre. On suppose qu'il existe β une fonction définie sur la sphère, à valeurs dans $(0, 1)$, telle que, pour toute direction \mathbf{u} , X admet $\beta(\mathbf{u})$ comme régularité directionnelle quadratique dans la direction \mathbf{u} . Alors l'application $\beta : \mathbf{u} \mapsto \beta(\mathbf{u})$ prend au plus d valeurs. De plus, si β prend $k \in [2, d]$ valeurs $\beta_1 < \dots < \beta_k$, il existe $V_{k-1} \subsetneq \dots \subsetneq V_1 \subsetneq \mathbb{R}^d := V_0$ des sous-espaces vectoriels stricts de \mathbb{R}^d non vides tels que $\beta(u) = \beta_i$ si et seulement si $u \in (V_{i-1} \setminus V_i) \cap S^{d-1}$.*

Démonstration. On reprend ici la démonstration donnée dans [BE03] où nous allons voir que l'ordre de stationnarité des accroissements n'a pas d'influence. En effet, β étant à valeurs dans $(0, 1)$, la régularité de X est donnée par celle de sa partie stationnaire X_ζ . On note encore β son extension en une fonction homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Choisissons u_1, \dots, u_k dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et u dans l'espace engendré par ces vecteurs. Alors $u = \sum_{j=1}^k a_j u_j$, avec a_1, \dots, a_k dans \mathbb{R} , et

$$X_\zeta(tu) - X_\zeta(0) = \sum_{j=1}^k \left(X_\zeta \left(t \sum_{i=1}^j a_i u_i \right) - X_\zeta \left(t \sum_{i=1}^{j-1} a_i u_i \right) \right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(|X_\zeta(tu) - X_\zeta(0)|^2 \right) \\ & \leq k \sum_{j=1}^k \mathbf{E} \left(\left| X_\zeta \left(t \sum_{i=1}^j a_i u_i \right) - X_\zeta \left(t \sum_{i=1}^{j-1} a_i u_i \right) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Si $\alpha < \min(\beta(u_1), \dots, \beta(u_k))$, la quantité $|t-s|^{2\alpha} \mathbf{E} |X_\zeta(tu) - X_\zeta(su)|^2$ converge vers 0 avec $|t-s|$. On en déduit que $\beta(u) \geq \min(\beta(u_1), \dots, \beta(u_k))$, pour tout u dans l'espace engendré par u_1, \dots, u_k .

Supposons à présent qu'il existe $d+1$ vecteurs avec $d+1$ valeurs de β . Alors, l'un deux, que l'on note u est dans l'espace engendré par les d autres, notés u_1, \dots, u_d , et $\beta(u) > \min(\beta(u_1), \dots, \beta(u_d))$. On peut supposer avoir ordonné les vecteurs tels que $\beta(u_1) < \dots < \beta(u_d)$. Puisque $\beta(u) > \beta(u_1)$, u doit appartenir à l'espace engendré par u_2, \dots, u_d , car sinon, en échangeant le rôle de u et u_1 on obtient que $\beta(u_1) \geq \beta(u)$, puisque l'on a supposé $\beta(u_1) < \min(\beta(u_2), \dots, \beta(u_d))$. Mais alors, $\beta(u) > \min(\beta(u_2), \dots, \beta(u_d))$. En itérant ce raisonnement, on obtient une contradiction qui prouve que β prend au plus d valeurs.

Supposons que β prenne k valeurs avec $2 \leq k \leq d$ que l'on ordonne $\beta_1 < \dots < \beta_k$. Pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$ l'ensemble des vecteurs u pour lesquels $\beta(u) > \beta_i$ engendre un espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d non vide par hypothèse. On a clairement la suite d'inclusions $V_{k-1} \subsetneq \dots \subsetneq V_1 \subsetneq \mathbb{R}^d := V_0$ et $\beta(u) = \beta_i$ si et seulement si $u \in (V_{i-1} \setminus V_i) \cap S^{d-1}$. \square

En fait, les hypothèses que l'on fait sur la densité spectrale impliquent que le champ admet une régularité directionnelle constante dans chaque direction. En effet, on montre facilement la proposition suivante, énoncée dans [BE03] pour l'étude de la régularité hölderienne presque sûre des trajectoires de champs gaussiens à accroissements stationnaires.

Proposition 2.1.6. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre et f sa densité spectrale. On suppose qu'il existe $H \in (0, 1)$ tel que :*

i) pour tout $\alpha < H$, il existe A , et B strictement positives, telles que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi| > A \Rightarrow |f(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2\alpha+d)}.$$

ii) pour tout $\alpha > H$, il existe une constante $A > 0$ et un ensemble $E_\alpha \subset S^{d-1}$ de mesure non nulle tels que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi| > A \text{ et } \frac{\xi}{|\xi|} \in E_\alpha \Rightarrow f(\xi) > |\xi|^{-(2\alpha+d)}.$$

Alors X admet H comme régularité directionnelle quadratique dans chaque direction.

Lorsque les champs ponctuels considérés sont gaussiens, ces propriétés au second ordre se traduisent en propriétés presque sûre à l'aide notamment du critère de Kolmogorov-Centsov.

2.1.2 Champs ponctuels gaussiens

a) Régularité des trajectoires

Un champ ponctuel $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ est dit satisfaire **une condition de Hölder d'ordre $H \in (0, 1)$ uniforme sur tout compact** si, pour tout compact K de \mathbb{R}^d , il existe une variable aléatoire A_K positive et finie presque sûrement telle que, presque sûrement,

$$\forall t, s \in K, \quad |X(t) - X(s)| \leq A_K |t - s|^H.$$

Lorsque X est du second ordre et $A_K \in L^2(\Omega)$, cette propriété implique que X est de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact.

Des arguments classiques permettent d'énoncer des résultats similaires à ceux de [BE03] obtenus dans le cadre accroissements stationnaires.

Proposition 2.1.7. *Soit X un champ gaussien centré sur \mathbb{R}^d . Soit $H \in (0, 1)$. On suppose que X est de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact. Alors il existe un champ \tilde{X} , défini sur le même espace de probabilité que X , avec, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $X(t) = \tilde{X}(t)$ presque sûrement, et qui satisfait une condition de Hölder d'ordre $H - \epsilon$ uniforme sur tout compact, pour tout $\epsilon > 0$.*

Démonstration. On utilise le critère de Kolmogorov-Centsov ([KS98]) : si V est de dimension k , et s'il existe des constantes positives α et β , avec $\beta < \alpha$, telles que, pour tout compact K de V , il existe une constante positive C_K telle que

$$\mathbf{E}(|X(t) - X(s)|^\alpha) \leq C_K |t - s|^{k+\beta} \text{ pour } s, t \in K,$$

alors il existe un champ \tilde{X} , défini sur le même espace de probabilité que X , avec, pour tout $t \in V$, $X(t) = \tilde{X}(t)$ presque sûrement, et qui satisfait une condition de Hölder d'ordre

$\frac{\beta}{\alpha} - \epsilon$ uniforme sur tout compact, pour tout $\epsilon > 0$.
 Soit K un compact de \mathbb{R}^d , $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque X est gaussien, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{E} (|X(t) - X(s)|^{2n}) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \mathbf{E} (|X(t) - X(s)|^2)^n$$

Comme X est de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact, il existe $C_K > 0$ telle que

$$\mathbf{E} (|X(t) - X(s)|^2) \leq C_K |t - s|^{2H}.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t, s \in K$,

$$\mathbf{E} (|X(t) - X(s)|^{2n}) \leq C_{K,n} |t - s|^{2Hn}.$$

□

En particulier, dans ce cas, presque sûrement, $H_X(t) \geq H_X^q(t)$. On a égalité lorsque on considère l'exposant de Hölder quadratique critique.

Proposition 2.1.8. *Soit X un champ gaussien centré sur \mathbb{R}^d . Soit $H \in (0, 1)$. On suppose que X admet H pour exposant de Hölder quadratique critique. Alors, il existe une version continue de X telle que, presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $H_X(t) = H$.*

Démonstration. La proposition précédente permet de voir que, presque sûrement, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$, $H_X(t_0) \geq H$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^d$, on veut montrer que, presque sûrement, $H_X(t_0) \leq H$. Il suffit alors de montrer que, pour $\epsilon > 0$, le quotient $\frac{X(t_0+t) - X(t_0)}{\|t\|^{H+\epsilon}}$ est presque sûrement non borné quand $t \rightarrow 0$. Mais ce quotient suit une loi normale centrée, avec une variance plus grande que $C\|t\|^{-\epsilon}$ avec $C > 0$, puisque X admet H pour exposant de Hölder quadratique critique. Ainsi, ce quotient devient presque sûrement non borné à la limite (théorème 8.3.2 [Adl81] p.202). Nous avons donc démontré que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$, presque sûrement, $H_X(t_0) = H$. Or l'exposant de Hölder ponctuel d'un champ gaussien est une fonction déterministe [AJT04]. On en déduit que, presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $H_X(t) = H$. □

b) Dimensions de Hausdorff et de boîtes

Nous rappelons ici quelques propriétés des dimensions de Hausdorff et de boîtes. Les démonstrations peuvent se trouver dans [Fal90]. Soit U une partie non vide bornée de \mathbb{R}^d . Si $s \geq 0$, pour tout $\delta > 0$ on définit

$$\mathcal{H}_\delta^s(U) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s; U_i \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } U \right\}.$$

Lorsque δ décroît, l'ensemble des recouvrements de U de diamètre au plus δ diminue, de sorte que \mathcal{H}_δ^s croît. On peut alors définir

$$\mathcal{H}^s(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(U).$$

De même, lorsque s croît, $\mathcal{H}^s(U)$ décroît et saute de l'infini à 0. La valeur critique est appelée dimension de Hausdorff de U et notée $\dim_{\mathcal{H}} U$.

Cependant, la définition de la dimension de Hausdorff la rend difficile à calculer. On estime alors la dimension par la méthode des boîtes. On appelle $N_\delta(U)$ le plus petit nombre d'ensembles de diamètre au plus δ qui recouvrent U . Les dimensions de boîtes inférieure et supérieure de U sont alors définies par

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}U = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(U)}{\log(\delta)} \text{ et } \overline{\dim}_{\mathcal{B}}U = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(U)}{\log(\delta)}.$$

Si ces quantités sont égales, la limite commune est appelée dimension de boîtes de U ,

$$\dim_{\mathcal{B}}U = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(U)}{\log(\delta)}.$$

On dispose de la relation suivante entre dimension de Hausdorff et de boîtes ([Fal90] p.43)

$$\dim_{\mathcal{H}}U \leq \underline{\dim}_{\mathcal{B}}U \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}U.$$

De nombreux auteurs se sont intéressés au calcul des dimensions de Hausdorff et de boîtes des graphes de champs aléatoires ([Rou00],[Adl81],[AR03],[Xia98],...). Ces dimensions sont fortement reliées à la régularité du champ comme nous le rappelons ici. On considère $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ ponctuel gaussien centré, continu en moyenne quadratique. Voyons sous quelles hypothèses on peut calculer les dimensions de Hausdorff et de boîtes de son graphe sur un compact K de \mathbb{R}^d , notées $\dim_{\mathcal{H}}X$ et $\dim_{\mathcal{B}}X$. On reprend ici le point de vu de R. Adler [Adl81] qui calcule les dimensions de boîtes et de Hausdorff des *index-H fields*.

Il est toujours, en général, plus facile de donner une majoration de la dimension de boîtes et donc de Hausdorff du graphe d'un champ lorsque l'on connaît sa régularité.

Majoration. On suppose qu'il existe $H \in (0, 1)$ tel que, pour tout $0 < \alpha < H$,

$$\mathbf{E}(|X(t) - X(s)|^2) \leq C_\alpha |t - s|^{2\alpha}, \text{ pour tout } t, s \in K, \quad (2.6)$$

où $C_\alpha > 0$. Lorsque de plus X est supposé à accroissements d'ordre m stationnaires, cette majoration est vérifiée si sa mesure spectrale satisfait, pour tout $0 < \alpha < H$,

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} d\xi < +\infty.$$

D'après ce qui précède, en choisissant une version continue de X , si $\alpha < H$, presque sûrement, les trajectoires de X satisfont une condition de Hölder d'ordre α , uniforme sur K . On en déduit (cf. [Fal90]) que, presque sûrement,

$$\dim_{\mathcal{H}}X \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}X \leq d + 1 - H.$$

La minoration de la dimension de Hausdorff et donc de la dimension de boîtes est plus délicate en général.

Minoration. On suppose qu'il existe $H \in (0, 1)$ tel que, pour tout $\alpha > H$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\mathbf{E}(|X(t) - X(s)|^2) \geq C_\alpha |t - s|^\alpha, \text{ pour tout } t, s \in K \text{ avec } |t - s| \leq \eta, \quad (2.7)$$

où $C_\alpha > 0$. Alors, presque sûrement,

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}X \geq \dim_{\mathcal{H}}X \geq d + 1 - H.$$

Il suffit d'adapter la démonstration de [BCI03] qui détermine la dimension de Hausdorff du graphe d'un processus ($d = 1$) localement autosimilaire sous une hypothèse de majoration de sa fonction caractéristique. La minoration de la dimension est obtenue en utilisant une formulation en Fourier du critère de Frostman [AR03].

Soit $s > 1$ un réel fixé. D'après le critère de Frostman (cf. [Fal90]), si on démontre que l'intégrale I_s , définie par

$$I_s = \int_{K \times K} \mathbf{E} \left((X(t) - X(u))^2 + |t - u|^2 \right)^{-s/2} dt du,$$

est finie, alors, presque sûrement, $\dim_{\mathcal{H}} X \geq s$. Puisque l'on choisit s plus grand que 1, $g_s(x) := (x^2 + 1)^{-s/2} \in L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier \widehat{g}_s est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on peut écrire (lemme fondamental [BCI03] et [AR03])

$$(x^2 + 1)^{-s/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{g}_s(\xi) d\xi.$$

On en déduit que, pour t et u dans K ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left((X(t) - X(u))^2 + |t - u|^2 \right)^{-s/2} &= \frac{1}{2\pi} |t - u|^{-s} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E} \left(e^{i\xi \frac{X(t) - X(u)}{|t - u|}} \right) \widehat{g}_s(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} |t - u|^{-s} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2|t - u|^2}} \mathbf{E}(|X(t) - X(u)|^2) \widehat{g}_s(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Soit $\alpha > H$. On effectue le changement de variables $\omega = |t - u|^{\alpha-1} \xi$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left((X(t) - X(u))^2 + |t - u|^2 \right)^{-s/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} |t - u|^{1-\alpha-s} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} (\mathbf{E}(|X(t) - X(u)|^2)/|t - u|^{2\alpha}) \widehat{g}_s(\omega |t - u|^{1-\alpha}) d\omega. \end{aligned}$$

Puisque X vérifie (2.7) et $\widehat{g}_s \in L^\infty(\mathbb{R})$ en tant que transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, en choisissant $|t - u| \leq \eta$,

$$\mathbf{E} \left((X(t) - X(u))^2 + |t - u|^2 \right)^{-s/2} \leq \frac{\|f_s\|_\infty}{C_\alpha \sqrt{2\pi}} |t - u|^{1-\alpha-s}.$$

Ainsi, si $1 - \alpha - s + d > 0$, I_s est fini. Puisque ceci est vérifié quelque soit $\alpha > H$, on en conclut que $\dim_{\mathcal{H}} X \geq d + 1 - H$.

Corollaire 2.1.4. *Soit X un champ gaussien centré sur \mathbb{R}^d . Soit $H \in (0, 1)$. On suppose que X admet H pour exposant de Hölder quadratique critique. Alors, en choisissant une version continue de X , pour tout compact K de \mathbb{R}^d , presque sûrement,*

$$\dim_{\mathcal{B}} X = \dim_{\mathcal{H}} X = d + 1 - H.$$

Nous venons, dans cette partie, de relier la régularité d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires, au comportement asymptotique en loi de puissance de sa mesure spectrale. Nous nous intéressons dans la suivante aux propriétés d'autosimilarité (invariance par changement d'échelle) en loi (resp. au second ordre) des champs ponctuels. Nous verrons comment des estimations plus fines, pour la valeur critique, du comportement asymptotique en loi de puissance des mesures spectrales, permettent de rendre compte de phénomènes d'autosimilarité lorsque on considère des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires, continus en moyenne quadratique.

2.2 Autosimilarité

L'autosimilarité reflète une invariance par changement d'échelle. Ce phénomène est souvent observé dans la nature et son estimation donne une mesure de l'irrégularité du phénomène. Si $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ est un champ ponctuel et $H \in \mathbb{R}$, le champ ponctuel X est **autosimilaire d'ordre H en loi** si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\{X(\lambda t); t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^H X(t); t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Le champ ponctuel X est **autosimilaire d'ordre H au second ordre** si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, t et $s \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{E} \left(X(\lambda t) \overline{X(\lambda s)} \right) = \lambda^{2H} \mathbf{E} \left(X(t) \overline{X(s)} \right).$$

Remarquons que si X est un champ ponctuel du second ordre autosimilaire d'ordre H en loi, il est autosimilaire d'ordre H au second ordre. La réciproque n'est vraie que dans le cas gaussien. L'objet de cette première partie est de donner une représentation spectrale des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires et autosimilaire d'ordre H au second ordre. On l'obtient en considérant les champs généralisés associés et en utilisant le résultat de R. L. Dobrushin [Dob79]. On s'intéresse particulièrement à l'influence de la mesure spectrale sur l'autosimilarité et sur ses généralisations dans la deuxième partie.

2.2.1 Représentation spectrale des champs à accroissement d'ordre m autosimilaires

On a vu qu'un champ ponctuel $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ se généralise en considérant, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} X(t) \varphi(t) dt.$$

Il suffit alors de voir comment l'autosimilarité se traduit sur les fonctions tests pour la généraliser. Soit $H \in \mathbb{R}$. Soit X un champ généralisé, il est dit **autosimilaire d'ordre H en loi** si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \delta_\lambda \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \delta_\lambda \varphi_n \rangle \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda^{-H-d} \langle X, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle X, \varphi_n \rangle, \quad (2.8)$$

avec δ_λ l'opérateur de dilatation par λ (cf. Annexe B.1).

R.L. Dobrushin [Dob79] donne une caractérisation des mesures spectrales des champs généralisés gaussiens autosimilaires et à accroissements d'ordre m stationnaires. La loi d'un champ généralisé gaussien étant déterminée par sa fonction de covariance il suffit de voir comment (2.8) se traduit sur celle-ci. Soit $H \in \mathbb{R}$. Soit X un champ généralisé du second ordre, il est dit **autosimilaire d'ordre H au second ordre** si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\delta_\lambda \varphi, \delta_\lambda \psi) = \lambda^{-2H-2d} \Gamma_X(\varphi, \psi). \quad (2.9)$$

Bien entendu, pour un champ généralisé du second ordre, l'autosimilarité en loi implique l'autosimilarité au second ordre. La réciproque est vraie dans le cas gaussien centré.

Le théorème 1.2.3 caractérise la fonction de covariance d'un champ généralisé du second ordre à accroissements d'ordre m stationnaires par une mesure spectrale sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et une matrice symétrique positive. On introduit la bijection

$$\chi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \longrightarrow S^{d-1} \times (0, +\infty) \quad \xi \mapsto (\alpha, r), \quad \xi = r\alpha.$$

Par cette bijection qui correspond aux coordonnées polaires, on peut interpréter une mesure sur $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ comme une mesure définie sur $S^{d-1} \times (0, +\infty)$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty))$.

On rappelle que si X est un champ généralisé du second ordre à accroissements d'ordre m stationnaires d'après le théorème 1.2.3, il existe σ une mesure positive à croissance lente, de Radon sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\xi| \leq \epsilon} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) = 0$$

et A une matrice symétrique positive telles que la fonction de covariance de X s'écrive sous la forme (1.3).

Théorème 2.2.1. [Dob79] Soit X un champ généralisé du second ordre à accroissements d'ordre m stationnaires. Soient σ sa mesure spectrale et A la matrice qui lui est associée. Si X est autosimilaire d'ordre $H < m$ au second ordre alors $A = 0$ et il existe $\bar{\sigma}$ une mesure positive finie sur $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1}))$ telle que

$$\sigma(E \times I) = \bar{\sigma}(E) \int_I r^{-2H-1} dr, \quad (E, I) \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty)).$$

Si X est autosimilaire d'ordre $H = m$ au second ordre alors $\sigma \equiv 0$.

Si X est autosimilaire d'ordre $H > m$ au second ordre alors $\sigma \equiv 0$ et $A = 0$.

Démonstration. Si le champ généralisé X est autosimilaire d'ordre H au second ordre alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\Gamma_X(\partial_\lambda \varphi, \partial_\lambda \psi) = \lambda^{-2H-2d} \Gamma_X(\varphi, \psi).$$

Par unicité de la mesure spectrale et de la matrice, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$\sigma(\lambda B) = \lambda^{-2H} \sigma(B), \quad \text{où } \lambda B := \left\{ \lambda x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}; x \in B \right\}, \quad (2.10)$$

$$\lambda^{-2n} a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} = \lambda^{-2H} a_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}, \quad |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = m. \quad (2.11)$$

La condition d'intégrabilité au voisinage de 0 portant sur σ nous permet de définir la fonction Σ sur $(0, +\infty) \times \mathcal{B}(S^{d-1})$ par

$$\Sigma(a, E) = \int_{E \times (0, a)} r^{2m+d-1} \sigma(d\alpha, dr). \quad (2.12)$$

En approximant $r \in (0, a) \mapsto r^{2m+d-1}$ par des fonctions étagées on peut écrire

$$\begin{aligned} \Sigma(a, E) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a 2^{-p(n+1)} \right)^{2m+d-1} \sigma \left(E \times (a 2^{-pn}, a 2^{-p(n+1)}) \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a 2^{-p(n+1)} \right)^{2m+d-1} a^{-2H} \sigma \left(E \times (2^{-pn}, 2^{-p(n+1)}) \right) \quad \text{d'après (2.10)} \\ &= a^{2m+d-1-2H} \Sigma(1, E). \end{aligned}$$

La fonction $\Sigma(1, \cdot)$ définit une mesure positive finie sur $\mathcal{B}(S^{d-1})$ que l'on note $\bar{\sigma}$. On en déduit que, pour tout $E \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ et $a > 0$,

$$\int_{E \times (0, a)} r^{2m+d-1} \sigma(d\alpha, dr) = \int_{E \times (0, a)} r^{2m+d-1} \bar{\sigma}(d\alpha) r^{-2H-1} dr.$$

Par conséquent, pour tout $(E, I) \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty))$,

$$\sigma(E \times I) = \bar{\sigma}(E) \int_I r^{-2H-1} dr.$$

Puisque $\int_{|\xi| < 1} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) < \infty$, $\bar{\sigma} \equiv 0$ si $H \geq m$. Enfin, la condition (2.11) montre que la matrice A est nulle si $H \neq m$. \square

Remarquons que cette démonstration utilise uniquement l'autosimilarité du champ généralisé sur $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. Ce théorème donne alors une caractérisation des dérivées d'ordre m des champs généralisés à accroissements d'ordre m stationnaires, autosimilaires d'ordre H , au second ordre. Il donne en particulier une restriction sur le paramètre d'autosimilarité en fonction de l'ordre de stationnarité des accroissements. L'hypothèse d'autosimilarité sur le champ lui-même nous permet alors, non seulement de déterminer sa représentation spectrale, mais d'affiner la relation qui lie ordre d'autosimilarité et ordre de stationnarité. Regardons le cas particulier des champs généralisés stationnaires ($m = 0$). Le théorème précédent nous permet directement de conclure sur la représentation spectrale du champ.

- X est autosimilaire d'ordre $H > 0$ au second ordre si et seulement si $X = 0$.
- X est autosimilaire d'ordre $H = 0$ au second ordre si et seulement si il existe une variable aléatoire X_0 de $L^2(\Omega)$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} X_0 \alpha_0(\varphi) \text{ avec } \alpha_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx.$$

- X est autosimilaire d'ordre $H < 0$ au second ordre si et seulement si il existe $\bar{\sigma}$ une mesure positive finie sur $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1}))$ telle que si

$$\sigma(E \times I) = \bar{\sigma}(E) \int_I r^{-2H-1} dr, \quad (E, I) \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty)),$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) dZ(\xi),$$

où Z est une mesure aléatoire sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ associée à σ .

Les égalités précédentes et suivantes, entre les champs, ont lieu dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions fini-dimensionnelles.

Nous allons démontrer la proposition suivante qui traite du cas où $m \geq 1$.

Proposition 2.2.1. *Soit X un champ généralisé du second ordre à accroissements d'ordre $m \geq 1$ stationnaires. Soient σ sa mesure spectrale et A la matrice qui lui est associée.*

- X est autosimilaire d'ordre $H > m$ au second ordre si et seulement si $X = 0$.
- X est autosimilaire d'ordre $H = m$ au second ordre si et seulement si il existe $(X_{\mathbf{k}})_{|\mathbf{k}|=m}$ de matrice de covariance A tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \sum_{|\mathbf{k}|=m} \alpha_{\mathbf{k}}(\varphi) X_{\mathbf{k}} \text{ avec } \alpha_{\mathbf{k}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) x^{\mathbf{k}} dx.$$

- X est autosimilaire d'ordre $H \in (m-1, m)$ si et seulement si il existe $\bar{\sigma}$ une mesure positive finie sur $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1}))$ telle que

$$\sigma(E \times I) = \bar{\sigma}(E) \int_I r^{-2H-1} dr, \quad (E, I) \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty)),$$

et, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(\widehat{\varphi}(\xi) - \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \right) dZ(\xi),$$

où Z est une mesure aléatoire sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ associée à σ .

- X est autosimilaire d'ordre $H \leq m-1$ au second ordre si et seulement si X à accroissements d'ordre $m-1$ stationnaire, autosimilaire d'ordre H , au second ordre.

Démonstration. D'après le théorème 1.4.2, il existe une mesure aléatoire Z sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ associée à la mesure spectrale σ et un vecteur aléatoire $(X_{\mathbf{k}})_{|\mathbf{k}|=m}$ de matrice de covariance A , non corrélé avec Z tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{k}|=m} \alpha_{\mathbf{k}}(\varphi) X_{\mathbf{k}}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, dès que $\Theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\widehat{\Theta}(0) = 1$ et $D^{\mathbf{j}} \widehat{\Theta}(0) = 0$, $|\mathbf{j}| \leq m$, la fonction

$$\varphi_{\Theta} := \varphi - \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|\mathbf{j}|} D^{\mathbf{j}} \Theta$$

est dans $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$. Par linéarité, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle X, \varphi \rangle &\stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \right) dZ(\xi) \\ &+ \sum_{|\mathbf{k}|=m} \alpha_{\mathbf{k}}(\varphi) X_{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|\mathbf{j}|} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque $H > m$, d'après le théorème 2.2.1, la mesure spectrale σ et la matrice de covariance A sont nulles. Alors, $Z = 0$, $X_{\mathbf{k}} \stackrel{L^2(\Omega)}{=} 0$ et

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|\mathbf{j}|} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle.$$

Ainsi X est autosimilaire d'ordre H si et seulement si $\langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle = 0$, pour $|\mathbf{j}| \leq m-1$, ce qui signifie que X est nul.

Si $H = m$, la matrice de covariance A n'est plus nulle et l'autosimilarité de X implique que

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \sum_{|\mathbf{k}|=m} \alpha_{\mathbf{k}}(\varphi) X_{\mathbf{k}}.$$

Dès que $H < m$, le théorème 2.2.1 nous donne l'existence d'une mesure positive finie sur $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1}))$ telle que

$$\sigma(E \times I) = \bar{\sigma}(E) \int_I r^{-2H-1} dr, \quad (E, I) \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty)),$$

et, puisque la matrice de covariance A est nulle,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\Theta}(\xi) \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \right) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|\mathbf{j}|} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle.$$

Par autosimilarité, pour tout $\lambda > 0$, la variable aléatoire $\langle X, \varphi \rangle$ est aussi égale à

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\Theta}(\lambda \xi) \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \right) dZ(\xi) + \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \lambda^{H-|\mathbf{j}|} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{|\mathbf{j}|} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle.$$

Si $H \in (m-1, m)$, il suffit alors de faire tendre λ vers 0 en remarquant que $\widehat{\varphi}(\xi) - \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \in L^2(d\sigma)$.

Enfin, si $H \leq m-1$, nous allons montrer que X est à accroissements d'ordre $m-1$ stationnaires. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle X, \varphi \rangle &\stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\Theta}(\lambda \xi) \sum_{|\mathbf{j}|=m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \right) dZ(\xi) \quad (2.13) \\ &+ \lambda^{H-(m-1)} \sum_{|\mathbf{j}|=m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{m-1} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque $H = m-1$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(\widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(\lambda \xi) \right) \left(\sum_{|\mathbf{j}|=m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} \xi^{\mathbf{j}} \right) dZ(\xi) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} 0,$$

ce qui implique que $\bar{\sigma} = 0$ et alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \sum_{|\mathbf{j}|=m-1} \frac{D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(0)}{\mathbf{j}!} (-i)^{m-1} \langle X, D^{\mathbf{j}} \Theta \rangle,$$

donc X est à accroissements d'ordre $m-1$ stationnaires.

Puis, si $H < m-1$, puisque $\widehat{\varphi} \in L^2(d\sigma)$ dès que $\varphi \in \mathcal{S}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$, en faisant tendre λ vers l'infini dans (2.13), on obtient

$$\langle X, \varphi \rangle \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\xi) dZ(\xi),$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Les résultats des parties précédentes permettent de donner la représentation spectrale des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires, continus en moyenne quadratique, et autosimilaires au second ordre.

Le cas stationnaire se réduit aux champs triviaux puisque les conditions d'intégrabilités portant sur la mesure spectrale permettent de dire qu'un champ ponctuel stationnaire au second ordre, continu en moyenne quadratique, est autosimilaire au second ordre d'ordre H si et seulement si il est nul ou constant et dans ce cas $H = 0$. La proposition suivante porte sur le cas non stationnaire.

Proposition 2.2.2. *Soit X un champ ponctuel du second ordre à accroissements d'ordre $m \geq 1$ stationnaires, continu en moyenne quadratique. Soient σ sa mesure spectrale et A la matrice qui lui est associée.*

- X est autosimilaire d'ordre $H > m$ au second ordre si et seulement si $X = 0$.
- X est autosimilaire d'ordre $H = m$ au second ordre si et seulement si il existe $(X_{\mathbf{k}})_{|\mathbf{k}|=m}$ de matrice de covariance A tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \sum_{|\mathbf{k}|=m} t^{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}.$$

- X est autosimilaire d'ordre $H \in (m-1, m)$ au second ordre si et seulement si il existe $\bar{\sigma}$ une mesure positive finie sur $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1}))$ telle que

$$\sigma(E \times I) = \bar{\sigma}(E) \int_I r^{-2H-1} dr, \quad (E, I) \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}((0, +\infty)),$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) dZ(\xi).$$

où Z est une mesure aléatoire sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ associée à σ .

- X est autosimilaire d'ordre $H \leq m-1$ au second ordre si et seulement si X à accroissements d'ordre $m-1$ stationnaires, autosimilaire d'ordre H , au second ordre.

Les égalités données entre les champs sont à entendre dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions fini-dimensionnelles. Remarquons que dans le cas où $H \in (m-1, m)$, le champ ponctuel est alors de classe $\mathcal{C}^{H-\epsilon}$, pour tout $\epsilon > 0$, et $D^{\mathbf{j}}X(0) = 0$ pour tout $|\mathbf{j}| \leq m-1$. Lorsque on suppose de plus que le champ ponctuel est gaussien, la mesure aléatoire qui lui est associée est gaussienne. On en déduit que les seuls champs ponctuels gaussiens à accroissements d'ordre m stationnaire, autosimilaire d'ordre $H \in (m-1, m)$ et isotropes sont de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) |\xi|^{-H-d/2} dW(\xi),$$

où W est une mesure brownienne complexe. Lorsque $m = 1$ on reconnaît la représentation harmonisable du mouvement brownien fractionnaire de paramètre H . En dimension 1, ces

processus correspondent à des primitives d'ordre $m - 1$ du mouvement brownien fractionnaire appelées mouvements brownien fractionnaires d'ordre m dans [PHBJ⁺01]. Enfin, si on s'affranchit de l'isotropie mais on suppose que la mesure spectrale à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, alors, il existe c une fonction positive de $L^1(S^{d-1})$ telle que

$$d\sigma(\xi) = \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} d\xi.$$

Dans le cas gaussien, on peut encore écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{-it \cdot \xi} - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-it \cdot \xi)^l}{l!} \right) \frac{c(\xi/|\xi|)^{1/2}}{|\xi|^{H+d/2}} dW(\xi).$$

De tels champs sont considérés dans [BJR97]. Les auteurs y donnent des résultats plus précis sur leur régularité (loi du logarithme itéré,...) en les décomposant en ondelettes. Nous venons de caractériser les champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires et autosimilaires au second ordre, ce qui les rend peu nombreux. Cependant, un grand nombre de phénomènes présentent des propriétés associées à l'autosimilarité. On s'intéresse dans la section suivante à des notions d'autosimilarité plus souples.

2.2.2 Autosimilarité asymptotique

La notion d'autosimilarité asymptotique locale a été introduite par [BJR97]. Un champ ponctuel $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ est dit **localement asymptotiquement autosimilaire en loi** (lass en loi) d'ordre $H > 0$ en $t_0 \in \mathbb{R}^d$ si

$$\left\{ \frac{X(t_0 + \lambda t) - X(t_0)}{\lambda^H}; t \in \mathbb{R}^d \right\}$$

converge au sens des distributions fini-dimensionnelles vers un champ non trivial lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$. Le champ obtenu à la limite est appelé champ tangent de X au point t_0 et noté $T_{t_0}X$.

Lorsque X est un champ ponctuel gaussien centré, il suffit d'étudier la convergence de la covariance du champ normalisé. Ceci nous conduit à introduire une notion d'autosimilarité asymptotique locale au second ordre.

Ainsi X est **localement asymptotiquement autosimilaire au second ordre** (lass au second ordre) d'ordre $H > 0$ en $t_0 \in \mathbb{R}^d$ s'il existe $\Gamma_{t_0} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction de covariance non triviale telle que, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$\text{Cov} \left(\frac{X(t_0 + \lambda t) - X(t_0)}{\lambda^H}, \frac{X(t_0 + \lambda s) - X(t_0)}{\lambda^H} \right)$$

converge vers Γ_{t_0} lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$. On peut alors définir un champ non trivial $T_{t_0}X$ de fonction de covariance Γ_{t_0} . On l'appelle champ tangent au second ordre de X au point t_0 , puisque nous nous intéresserons uniquement à ses statistiques au second ordre.

Remarquons qu'aucune de ces deux propriétés n'implique l'autre, excepté dans le cas des champs gaussiens centrés où elles sont équivalentes. En revanche, si un champ est lass au second ordre d'ordre $H_{cov} > 0$, il ne peut être lass en loi qu'avec un ordre $H_{loi} \geq H_{cov}$. Il suffit de remarquer que, pour tout $H < H_{cov}$, le champ normalisé converge vers 0 dans

$L^2(\Omega)$ et donc en loi. Nous verrons dans le chapitre 5 un exemple de champ pour lequel ces paramètres diffèrent.

Le champ tangent hérite de certaines propriétés du champ initial.

Proposition 2.2.3. *Soit X un champ ponctuel lass d'ordre $H > 0$ au point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ en loi (resp. au second ordre).*

1. $T_{t_0}X$, le champ tangent (resp. au second ordre) de X , est autosimilaire d'ordre H en loi (resp. au second ordre).
2. Si X est à accroissements stationnaires en loi (resp. au second ordre), alors il est lass d'ordre H en tout point $t_1 \in \mathbb{R}^d$ en loi (resp. au second ordre). Le champs tangent $T_{t_1}X$ a même loi (resp. même covariance), que $T_{t_0}X$. Si de plus, X est isotrope en loi (resp. au second ordre), $T_{t_0}X$ est isotrope en loi (resp. au second ordre).

Démonstration. La première assertion est évidente. Pour la seconde, il suffit de remarquer que si $m \geq 1$,

$$\Delta^m X(t_0 + \lambda t, \lambda s) = \sum_{p=0}^m C_m^p (-1)^{m-p} (X(t_0 + \lambda(t + ps)) - X(t_0)).$$

Alors, le champ $\{\Delta^m T_{t_0}X(t + \tau, s); (t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\}$ (resp. sa fonction de covariance) s'obtient comme la limite en loi des distributions fini-dimensionnelles (resp. de la fonction de covariance), lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$, du champ

$$\left\{ \frac{\Delta^m X(t_0 + \lambda t, \lambda s)}{\lambda^H}; (t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \right\}.$$

Si $m = 1$, pour $t_1 \in \mathbb{R}^d$, $X(t_1 + \lambda t) - X(t_1) = \Delta^1 X(t_1, \lambda t)$ et

$$\left\{ \frac{\Delta^1 X(t_1, \lambda t)}{\lambda^H}; t \in \mathbb{R}^d \right\} = \left\{ \frac{\Delta^1 X(t_0, \lambda t)}{\lambda^H}; t \in \mathbb{R}^d \right\},$$

par stationnarité, l'égalité ayant lieu en loi (resp. au second ordre). On en déduit que X est lass d'ordre H en t_1 en loi (resp. au second ordre), de champ tangent (resp. au second ordre) $T_{t_0}X$. Lorsque X est isotrope (resp. au second ordre), son champ tangent (resp. au second ordre) en 0 est clairement isotrope et ainsi $T_{t_0}X$ est isotrope (resp. au second ordre). \square

Remarquons que lorsque le champ est à accroissements d'ordre m stationnaires en loi (resp. au second ordre), avec $m \geq 1$, et lass en un point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ d'ordre H , son champ tangent est aussi à accroissements d'ordre m stationnaires en loi (resp. au second ordre). Puisque un champ à accroissements d'ordre m stationnaires autosimilaire d'ordre $H > m$ est nul, nécessairement $H \leq m$. De plus, pour l'autosimilarité au second ordre, c'est la partie stationnaire du champ qui détermine son comportement lass.

Corollaire 2.2.1. *Soit X un champ à accroissements d'ordre $m \geq 1$ stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et lass d'ordre H au point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ au second ordre.*

- Si $1 < H \leq m$ alors X est de classe \mathcal{C}^∞ en moyenne quadratique et $H \in \mathbb{N}$. Le champ tangent au second ordre, donné par

$$T_{t_0}X(t) = \sum_{|\mathbf{k}|=H} D^{\mathbf{e}_i} X(t_0) \frac{t^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!},$$

est à accroissements d'ordre H stationnaires au second ordre.

- Si $H = 1$ alors X est de classe \mathcal{C}^1 en moyenne quadratique et lass d'ordre 1 au second ordre en tout point $t_1 \in \mathbb{R}^d$. Le champ tangent au second ordre, donné par

$$T_{t_1}X(t) = \sum_{i=1}^d D^{\mathbf{e}_i} X(t_1) t_i,$$

est à accroissements stationnaires au second ordre.

- Si $H \in (0, 1)$ alors X est lass d'ordre H au second ordre en tout point $t_1 \in \mathbb{R}^d$. Le champ tangent au second ordre $T_{t_1}X$ est à accroissements stationnaires au second ordre.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la décomposition $X_\zeta + X_\varrho$ du corollaire 2.1.1. Pour $H \geq 1$ on écrit, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\Delta^2 X(-\lambda \mathbf{e}_i, \lambda \mathbf{e}_i) = (X(-\lambda \mathbf{e}_i) - X(0)) - (X(\lambda \mathbf{e}_i) - X(0)) = \Delta^2 X_\zeta(-\lambda \mathbf{e}_i, \lambda \mathbf{e}_i) + \Delta^2 X_\varrho(-\lambda \mathbf{e}_i, \lambda \mathbf{e}_i).$$

Par régularité de X_ϱ ,

$$\frac{\Delta^2 X_\varrho(-\lambda \mathbf{e}_i, \lambda \mathbf{e}_i)}{\lambda} \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0,$$

et, par hypothèse, si σ est la mesure spectrale de X ,

$$\mathbf{E} \left(\left| \frac{\Delta^2 X_\zeta(-\lambda \mathbf{e}_i, \lambda \mathbf{e}_i)}{\lambda} \right|^2 \right) = -4\lambda^{-2} \int_{|\xi|>1} \sin^2 \left(\frac{\lambda \xi_i}{2} \right) d\sigma(\xi)$$

est bornée quand $\lambda \rightarrow 0^+$, puisque $H \geq 1$. Par le lemme de Fatou,

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^2 d\sigma(\xi) < +\infty \text{ et } \int_{|\xi|>1} |\xi|^2 d\sigma(\xi) = 0 \text{ si } H > 1.$$

Si $H > 1$ le champ X_ζ est nul et la régularité de X_ϱ détermine le comportement lass. Il suffit d'utiliser un développement de Taylor pour conclure.

Si $H = 1$, on en déduit que le champ X est de classe \mathcal{C}^1 en moyenne quadratique. Alors, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{X(t_1 + \lambda t) - X(t_1)}{\lambda} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^d D^{\mathbf{e}_i} X(t_1) t_i.$$

Si $H < 1$, puisque X_ϱ est de classe \mathcal{C}^1 en moyenne quadratique, c'est le comportement lass au second ordre de X_ζ qui détermine celui de X . Puisque X_ζ est stationnaire, la proposition 2.2.3 conclut la démonstration. \square

On peut remarquer que l'autosimilarité asymptotique locale généralise la notion d'autosimilarité dans le cas où $H \in (0, 1]$. En effet, si X est à accroissements stationnaires d'ordre m en loi (resp. au second ordre), et autosimilaire d'ordre $H \in (0, 1]$ en loi (resp. au second ordre), alors il est localement asymptotiquement autosimilaire (lass) en loi d'ordre H en tout point de \mathbb{R}^d (resp. au second ordre). C'est l'homogénéité asymptotique de sa mesure spectrale qui va déterminer le comportement lass au second ordre. On peut énoncer la proposition suivante dans le cas où la mesure spectrale est à densité. On retrouve le résultat de [BE03], énoncé pour un champ gaussien à accroissements stationnaires de densité spectrale asymptotiquement homogène avec $H \in (0, 1)$.

Proposition 2.2.4. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et f sa densité spectrale. Soit $H > 0$, on suppose qu'il existe $c \in L^1(S^{d-1})$, positive avec $c \neq 0$, telle que*

$$f(\xi) = \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} + o_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d}} \right).$$

Alors, si $H \in (0, 1)$, le champ ponctuel X est lass d'ordre H au second ordre en tout point. Si de plus, le champ ponctuel X est gaussien, il est lass d'ordre H en loi en tout point et, en prenant une version continu de X , le champ normalisé converge en loi sur l'espace des trajectoires continues.

Si $H \geq 1$, le champ ponctuel X n'est lass d'ordre H au second ordre en aucun point.

Démonstration. Pour $H \in (0, 1)$, il suffit de remarquer que f vérifie bien les hypothèses d'homogénéité asymptotique et de domination de la proposition 2 de [BE03]. Si $H = 1$, X_ζ doit être de classe \mathcal{C}^1 ce qui n'est pas. Comme f est non nulle, X_ζ est non nul et X ne peut être lass d'ordre $H > 1$. \square

Cette propriété semble donc mieux adaptée pour des valeurs de H inférieures à 1. Cependant, dans ce cas, seule l'autosimilarité locale au point 0 est considérée. Rappelons que lorsque un champ est autosimilaire d'ordre H en loi (resp. au second ordre), pour tout $\lambda > 0$, $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$\Delta^m X(\lambda t, \lambda s) = \lambda^H \Delta^m X(t, s),$$

en loi (resp. au second ordre). Il est donc plus naturel, dans le cas des champs à accroissements d'ordre m stationnaires, de regarder si

$$\left\{ \lambda^{-H} \Delta^m X(\lambda t, \lambda s); (t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \right\}$$

converge en loi vers un champ non trivial (resp. si

$$\lambda^{-2H} \text{Cov}(\Delta^m X(\lambda t, \lambda s), \Delta^m X(\lambda u, \lambda v))$$

converge vers la fonction de covariance d'un champ non trivial). Il est clair que si X est à accroissements stationnaires en loi (resp. au second ordre) cette propriété implique la précédente. On parlera alors d'autosimilarité asymptotique. L'autosimilarité asymptotique d'un champ à accroissements d'ordre m stationnaires est encore reliée à l'homogénéité asymptotique de sa mesure spectrale. La proposition suivante, qui traite du cas où la mesure est à densité, est une généralisation de la proposition 2.2.4 qui permet de s'affranchir de l'hypothèse que $H < 1$. Elle généralise les résultats de [Est02] qui ne considère l'autosimilarité asymptotique qu'au voisinage d'un point, dans le cadre de champs gaussiens à accroissements stationnaires.

Proposition 2.2.5. *Soit X un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, et f sa densité spectrale. Soit $H > 0$, on suppose qu'il existe $c \in L^1(S^{d-1})$, positive avec $c \neq 0$, telle que*

$$f(\xi) = \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} + o_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d}} \right).$$

Alors X est asymptotiquement autosimilaire d'ordre H au second ordre, au sens où, pour tout $k \geq m$, si $k > H$,

$$\lambda^{-2H} \text{Cov} \left(\Delta^k X(\lambda t, \lambda s), \Delta^k X(\lambda u, \lambda v) \right)$$

converge vers la fonction de covariance d'un champ non trivial.

Démonstration. D'après le Théorème 1.3.1

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\Delta^m X(\lambda t, \lambda s) \overline{\Delta^m X(\lambda u, \lambda v)} \right) &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{-i\lambda(t-u)\cdot\xi} \left(e^{-i\lambda s\cdot\xi} - 1 \right)^m \overline{\left(e^{-i\lambda v\cdot\xi} - 1 \right)^m} f(\xi) d\xi \\ &\quad + a_m^2 \lambda^{2m} \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j},\mathbf{k}} s^{\mathbf{j}} v^{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

où $A = \{a_{\mathbf{j},\mathbf{k}}; |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = m\}$ est une matrice symétrique positive et $a_m = \sum_{p=0}^m C_m^p (-1)^{m-p} p^m$. On en déduit que si $k > m$,

$$\mathbf{E} \left(\Delta^k X(\lambda t, \lambda s) \overline{\Delta^k X(\lambda u, \lambda v)} \right) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{-i\lambda(t-u)\cdot\xi} \left(e^{-i\lambda s\cdot\xi} - 1 \right)^k \overline{\left(e^{-i\lambda v\cdot\xi} - 1 \right)^k} f(\xi) d\xi.$$

On choisit $k > H$ et $k \geq m$. Si $\epsilon > 0$, par hypothèse sur f , il existe $A > 0$ tel que, pour presque tout ξ ,

$$|\xi| > A \Rightarrow \left| f(\xi) - \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} \right| \leq \frac{\epsilon}{|\xi|^{2H+d}}.$$

On découpe alors l'intégrale en deux.

$$\left| \int_{0 < |\xi| < A} e^{-i\lambda(t-u)\cdot\xi} \left(e^{-i\lambda s\cdot\xi} - 1 \right)^k \overline{\left(e^{-i\lambda v\cdot\xi} - 1 \right)^k} f(\xi) d\xi \right| \leq \lambda^{2k} |s|^k |v|^k \int_{0 < |\xi| < A} |\xi|^{2k} f(\xi) d\xi,$$

et, par un changement de variables,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|\xi| > A} -\lambda^{2H} \int_{|\xi| > A\lambda} e^{-i(t-u)\cdot\xi} \left(e^{-is\cdot\xi} - 1 \right)^k \overline{\left(e^{-iv\cdot\xi} - 1 \right)^k} \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} d\xi \right| \\ &\leq \epsilon \lambda^{2H} \int_{\mathbb{R}^d} |\sin(s\cdot\xi)|^k |\sin(v\cdot\xi)|^k |\xi|^{-2H-d} d\xi. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $k > H$ et $k \geq m$,

$$\lambda^{-2H} \mathbf{E} \left(\Delta^k X(\lambda t, \lambda s) \overline{\Delta^k X(\lambda u, \lambda v)} \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{-i(t-u)\cdot\xi} \left(e^{-is\cdot\xi} - 1 \right)^k \overline{\left(e^{-iv\cdot\xi} - 1 \right)^k} \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} d\xi.$$

Lorsque $H \notin \mathbb{N}$, on reconnaît la fonction de covariance des accroissements d'ordre k d'un champ à accroissements d'ordre $[H] + 1$ stationnaire et autosimilaire d'ordre H au second ordre (avec $[H]$ la partie entière de H). \square

Cette convergence permet l'estimation du paramètre H comme nous allons le voir dans la partie suivante.

2.3 Identification de l'exposant d'un champ gaussien

Dans cette partie on considère $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ ponctuel gaussien centré, à accroissements d'ordre m stationnaires, admettant une densité spectrale f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m})d\xi)$. Nous avons vu dans les parties précédentes que le comportement asymptotique de f en loi de puissance déterminait la régularité du champ. Nous cherchons ici à estimer le degré d'homogénéité asymptotique de la densité spectrale à partir des observations discrètes de X sur $[0, 1]^d$. Rappelons que, dans le cas d'un processus ($d = 1$), Istas et Lang [IL97] ont étudié les **variations quadratiques généralisées** de X , données par

$$V_{N,K}(X) = \sum_{p=0}^{N-K} \left(\Delta^K X \left(\frac{p}{N}, \frac{1}{N} \right) \right)^2, \quad (2.14)$$

où N est un entier supérieur ou égal à 2 ($\frac{1}{N}$ correspond au pas de discrétisation des trajectoires de X) et K est un entier compris entre 1 et N (l'ordre des accroissements de X).

On peut aussi s'intéresser aux k -variations du processus. Nous nous limiterons ici aux variations quadratiques ($k = 2$). Ceci est motivé par le résultat de J. F. Coeurjolly [Coe01] qui montre que, dans le cas du mouvement brownien fractionnaire, la variance asymptotique de l'estimateur du paramètre de Hurst est minimale pour $k = 2$.

Lorsque la dimension de l'espace est supérieur à 1, on connaît en général X sur un réseau de \mathbb{R}^d . On note $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de \mathbb{R}^d et $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\Delta_{N,i}^K X(t) := \Delta^K X \left(t, \frac{\mathbf{e}_i}{N} \right),$$

et

$$Z_{N,K}(t) = \Delta_{N,d}^K \circ \dots \circ \Delta_{N,1}^K X \left(\frac{t}{N} \right) = \sum_{\mathbf{j} \leq \mathbf{K}} C_{\mathbf{K}}^{\mathbf{j}} (-1)^{|\mathbf{K}-\mathbf{j}|} X \left(\frac{t + \mathbf{j}}{N} \right), \quad (2.15)$$

où $\mathbf{0} = 0\mathbf{e}$ et $\mathbf{K} = K\mathbf{e}$. On renvoie à l'annexe B.1.1 pour les notations. On définit alors comme dans [BCI02] les variations quadratiques généralisées de X par

$$V_{N,K}(X) = \sum_{\mathbf{p}=0}^{\mathbf{N}-\mathbf{K}} (Z_{N,K}(\mathbf{p}))^2, \quad (2.16)$$

où $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{N} - \mathbf{K} = (N - K)\mathbf{e}$. Nous allons démontrer un résultat d'identification. Il établit que l'exposant de Hölder critique d'un champ gaussien à accroissements d'ordre m stationnaires, lorsque il est donné par le comportement asymptotique de sa densité spectrale, peut être identifié en utilisant ses variations quadratiques généralisées. Ce résultat n'est qu'une généralisation à une dimension supérieure et à des accroissements stationnaires d'ordre supérieur de [ABE04].

Proposition 2.3.1. *Soit $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ gaussien centré, à accroissements d'ordre m stationnaires et de densité spectrale f . On suppose que f est de classe C^d sur $B(0, r)^c$ pour r assez grand et qu'il existe $H > 0$ tel que*

- pour tout $\alpha < H$, il existe des constantes A et B strictement positives, telles que, pour tout $\mathbf{j} \leq \mathbf{e}$,

$$|\xi| > A \Rightarrow \left| D^{\mathbf{j}} f(\xi) \right| \leq B |\xi|^{-(2\alpha + d + |\mathbf{j}|)}.$$

- pour tout $\alpha > H$, il existe une constante $A > 0$ et un ensemble $E_\alpha \subset S^{d-1}$ de mesure non nulle tels que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi| > A \text{ et } \frac{\xi}{|\xi|} \in E_\alpha \Rightarrow f(\xi) > |\xi|^{-(2\alpha+d)}.$$

Alors pour $K > \frac{H}{d} + \frac{1}{2}$ et $K \geq \frac{m}{d}$, presque sûrement,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log V_{N,K}(X)}{\log N} = -2H + d.$$

Dorénavant on note

$$f_H(\xi) = |\xi|^{-2H-d},$$

puisque cette fonction, qui est la densité spectrale du mouvement brownien fractionnaire, joue un rôle particulier.

Démonstration. La démonstration est classique. On suppose que X est à accroissements d'ordre m stationnaires de densité spectrale f . D'après le corollaire 1.4.1 il existe une mesure aléatoire gaussienne Z sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ associée à f et $X_{\mathbf{K}}$ une variable aléatoire centrée non corrélée avec Z telle que, pour $Kd \geq m$,

$$Z_{N,K}(\mathbf{p}) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} e^{-i\frac{\mathbf{p}}{N} \cdot \xi} \prod_{l=1}^d \left(e^{-i\frac{\xi_l}{N}} - 1 \right)^K dZ(\xi) + \delta_{Kd,m} (K!)^d N^{-m} X_{\mathbf{K}}.$$

Ainsi, si $Kd \geq m$, le champ $(Z_{N,K}(\mathbf{p}))_{\mathbf{p} \in \mathbb{N}^d}$ est gaussien centré et stationnaire. De plus,

$$\mathbf{E}(V_{N,K}(X)) = (N - K + 1)^d \text{Var}(Z_{N,K}(\mathbf{0})), \quad (2.17)$$

$$\text{Var}(V_{N,K}(X)) = 2(N - K + 1)^d \sum_{\mathbf{p} = -\mathbf{N}-\mathbf{K}}^{\mathbf{N}-\mathbf{K}} \text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p}), Z_{N,K}(\mathbf{0}))^2, \quad (2.18)$$

où l'égalité (2.18) est obtenue en utilisant d'une part que $\text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p})^2, Z_{N,K}(\mathbf{p}')^2) = 2\text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p}), Z_{N,K}(\mathbf{p}'))^2$ puisque $Z_{N,K}$ est gaussien et, d'autre part la stationnarité de $Z_{N,K}$. Calculons la covariance de $Z_{N,K}$ et estimons la en fonction du comportement asymptotique de la densité spectrale f . Pour $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$, on note $\Gamma_{N,K}(\mathbf{p}) = \text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p}), Z_{N,K}(\mathbf{0}))$.

Alors

$$\Gamma_{N,K}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \frac{\xi}{N}) f(\xi) d\xi + \delta_{Kd,m} (K!)^{2d} N^{-2m} \mathbf{E}(X_{\mathbf{K}}^2).$$

avec

$$h_K(\mathbf{p}, \xi) = 4^{dK} \cos(\mathbf{p} \cdot \xi) \prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2} \right).$$

Supposons à présent que f vérifie les hypothèses de la proposition 2.3.1. La minoration de f nous donne, pour $\alpha > H$, A suffisamment grand, $2Kd > 2H$ et $N > A$,

$$\Gamma_{N,K}(\mathbf{0}) \geq \int_{|\xi| > A} \geq N^{-2\alpha} \left(\int_{|\xi| > 1} h_K(\mathbf{0}, \xi) f_\alpha(\xi) \mathbf{1}_{E_\alpha} \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \right). \quad (2.19)$$

Pour majorer $\Gamma_{N,K}(\mathbf{p})$, on fixe $\alpha < H$ et on choisit r suffisamment grand. On écrit alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \frac{\xi}{N}) f(\xi) d\xi = \int_{|\xi| \leq r} + \int_{|\xi| > r}.$$

Pour le premier terme, on remarque que si $2Kd \geq 2m$, puisque $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2Kd}) d\xi)$,

$$\left| \int_{|\xi| \leq r} h_K(\mathbf{p}, \frac{\xi}{N}) f(\xi) d\xi \right| \leq C(r) N^{-2Kd}.$$

Pour le second terme, puisque f est de classe \mathcal{C}^d sur $B(0, r)^c$, nous pouvons intégrer par parties. Soit $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ tel que $\mathbf{j} \leq \mathbf{e}$. Si $2Kd > 2H + |\mathbf{j}|$ alors, en intégrant par parties par rapport à chaque coordonnée non nulle de \mathbf{j} , on obtient, pour $\mathbf{p}^{\mathbf{j}} \neq 0$, si $|\mathbf{j}|$ est impair

$$\int_{|\xi| > r} = (-1)^{\frac{|\mathbf{j}|+1}{2}} \frac{N^{|\mathbf{j}|}}{\mathbf{p}^{\mathbf{j}}} \int_{|\xi| > r} \sin(\mathbf{p} \cdot \frac{\xi}{N}) D^{\mathbf{j}} \left(\prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) f(\xi) \right) d\xi + \mathcal{O} \left(N^{-2Kd+1} \sum_{l: j_l \neq 0} p_l^{-1} \right),$$

et, si $|\mathbf{j}|$ est pair,

$$\int_{|\xi| > r} = (-1)^{\frac{|\mathbf{j}|}{2}} \frac{N^{|\mathbf{j}|}}{\mathbf{p}^{\mathbf{j}}} \int_{|\xi| > r} \cos(\mathbf{p} \cdot \frac{\xi}{N}) D^{\mathbf{j}} \left(\prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) f(\xi) \right) d\xi + \mathcal{O} \left(N^{-2Kd+1} \sum_{l: j_l \neq 0} p_l^{-1} \right).$$

Par la formule de Leibnitz,

$$D^{\mathbf{j}} \left(\prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) f(\xi) \right) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{j}} C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} D^{\mathbf{k}} \left(\prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) \right) D^{\mathbf{j}-\mathbf{k}} f(\xi),$$

avec

$$D^{\mathbf{k}} \left(\prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) \right) = \left(\frac{2K}{N} \right)^{|\mathbf{k}|} \prod_{l: k_l \neq 0} \cos \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) \sin^{2K-1} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) \prod_{l: k_l = 0} \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right).$$

Par hypothèse, en ayant choisi r assez grand, il existe $B > 0$ telle que, pour tout $\mathbf{j} \leq \mathbf{e}$,

$$|\xi| > r \Rightarrow \left| D^{\mathbf{j}} f(\xi) \right| \leq B f_{\alpha+|\mathbf{j}|/2}(\xi).$$

Donc, puisque $2Kd > 2H + |\mathbf{j}| > 2\alpha + |\mathbf{j}|$, si C désigne une constante que l'on adapte,

$$\left| \int_{|\xi| > r} D^{\mathbf{k}} \left(\prod_{l=1}^d \sin^{2K} \left(\frac{\xi_l}{2N} \right) \right) D^{\mathbf{j}-\mathbf{k}} f(\xi) d\xi \right| \leq C N^{-2\alpha-|\mathbf{j}|}.$$

Alors, pour tout $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\left| \int_{|\xi| > r} h_K(\mathbf{p}, \frac{\xi}{N}) f(\xi) d\xi \right| \leq C \prod_{i=1}^d (1 + |p_i|)^{-1} \left(N^{-2\alpha} + \mathcal{O} \left(N^{-2Kd+d} \right) \right).$$

Ainsi, pour $2Kd > 2H + d$, si $\alpha < H$ et N est suffisamment grand

$$|\Gamma_{N,K}(\mathbf{p})| \leq C N^{-2\alpha} \prod_{i=1}^d (1 + |p_i|)^{-1}. \quad (2.20)$$

On en déduit que, si $2Kd \geq 2m$ et $2Kd > 2H + d$ alors, pour $\epsilon \in (0, \frac{1}{6})$, il existe des constantes strictement positives c et C telles que, pour N assez grand,

$$c N^{-2H+d-\epsilon} \leq \mathbf{E}(V_{N,K}(X)) \leq C N^{-2H+d+\epsilon} \quad (2.21)$$

$$c N^{-4H+d-\epsilon} \leq \text{Var}(V_{N,K}(X)) \leq C N^{-4H+d+\epsilon} . \quad (2.22)$$

Fixons $\eta > 0$ et notons A_N l'évènement

$$A_N = \left\{ \left| \frac{V_{N,K}(X)}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))} - 1 \right| > \eta \right\} .$$

Par l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}(A_N) \leq \eta^{-4} |\mathbf{E}(V_{N,K}(X))|^{-4} \mathbf{E}(|V_{N,K}(X) - \mathbf{E}(V_{N,K}(X))|^4) .$$

Un calcul simple mais fastidieux montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbf{E}(|V_{N,K}(X) - \mathbf{E}(V_{N,K}(X))|^4) \leq c \text{Var}(V_{N,K}(X))^2 .$$

Les inégalités (2.21) et (2.22) permettent de trouver une constante $C > 0$ telle que pour tout N suffisamment grand,

$$\mathbf{P}(A_N) \leq C \eta^{-4} N^{-2d+6\epsilon}$$

et donc la série $\sum_N \mathbf{P}(A_N)$ converge. Par le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement,

$$\left| \frac{V_{N,K}(X)}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))} - 1 \right| \leq \eta \text{ pour tout } N \text{ suffisamment grand.}$$

On en conclut que, presque sûrement,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V_{N,K}(X)}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))} = 1.$$

A nouveau l'inégalité (2.21) permet de conclure. □

Ce résultat théorique ne donne pas la vitesse de convergence. Il utilise le fait que $V_{N,K}(X)$ est de l'ordre de son espérance qui est elle même de l'ordre d'une puissance de N . En s'inspirant de [IL97] qui fournit un estimateur de la régularité höldérienne d'un processus ($d = 1$) gaussien à accroissements stationnaires par ses variations quadratiques généralisées, dans le cas où un développement asymptotique au voisinage de 0 du variogramme est connu, voici l'estimation dont on dispose.

Proposition 2.3.2. *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.1*

$$\frac{V_{N,K}(X) - \mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\sqrt{\text{Var}(V_{N,K}(X))}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

quand N tend vers l'infini.

Démonstration. Nous utilisons une condition de Lindeberg .

Lemme 2.3.1. [CR81] *Considérons la suite de variables aléatoires*

$$V_n = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} (\epsilon_{j,n}^2 - 1),$$

où les variables $\epsilon_{j,n}$ sont indépendantes de loi normale centrée réduite et les $\lambda_{j,n}$ sont des réels positifs. On note λ_n la plus grande valeur des $\lambda_{j,n}$. Si $\lambda_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\text{Var}(V_n)} \right)$ alors $\frac{V_n}{\sqrt{\text{Var}(V_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

On pose $n = (N - K + 1)^d$ et Z_n le vecteur correspondant à $(Z_{N,K}(\mathbf{p}))_{\mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{N}-\mathbf{K}}$ en réordonnant les termes. On note Γ_n la matrice de covariance de Z_n , D_n la matrice diagonale correspondant à ses valeurs propres (positives) et P_n celle d'une base orthonormée de vecteurs propres correspondant de sorte que

$$\Gamma_n = P_n D_n P_n^T.$$

Soient $Y_n \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ et $\epsilon_n = P_n Y \sim \mathcal{N}(0, I_n)$. Alors $D_n^{1/2} P_n^T \epsilon \sim Z_n$ et

$$V_{N,K}(X) = Z_n^T Z_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_{j,n} \epsilon_{j,n}^2,$$

avec $D_n = \text{Diag}(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n})$. Il est clair que si λ_n est la plus grande valeur des $\lambda_{j,n}$, alors

$$\lambda_n \leq \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}-\mathbf{K}} \Gamma_{N,K}(\mathbf{p}).$$

La majoration de $\Gamma_{N,K}(\mathbf{p})$ donnée précédemment permet, pour $\epsilon \in (0, 2/5)$, de trouver une constante telle que

$$\lambda_n \leq C N^{-2H+2\epsilon} (\ln N)^d.$$

Par l'inégalité (2.22) $\lambda_n = o_{N \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\text{Var}(V_{N,K}(X))} \right)$ ce qui conclut la démonstration de la proposition. \square

La proposition 2.3.2 traduit la normalité asymptotique de $V_{N,K}(X)$ mais ce que nous recherchons c'est la normalité asymptotique ou une vitesse de convergence pour un estimateur de H . Voyons comment on obtient un tel résultat lorsque on connaît un développement asymptotique de la densité spectrale.

Proposition 2.3.3. *Soit $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ gaussien centré, à accroissements d'ordre m stationnaires et de densité spectrale f . On suppose que f est de classe \mathcal{C}^d sur $B(0, r)^c$ pour r assez grand et qu'il existe $H > 0$ et $s \geq 0$ tels que pour tout $\mathbf{j} \leq \mathbf{e}$,*

$$D^{\mathbf{j}}(f(\xi) - f_H(\xi)) = o_{|\xi| \rightarrow +\infty} (f_{H+|\mathbf{j}|/2+s/2}(\xi)).$$

Soit $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \geq \frac{m}{d}$. Si $K > \frac{H}{d} + \frac{1}{2}$ alors, presque sûrement,

$$\widehat{H}_{N,K} = \frac{1}{2} \left(\log_2 \left(\frac{V_{N,K}(X)}{V_{2N,K}(X)} \right) + d \right) \rightarrow H.$$

De plus, pour tout $s' \in [0, s]$ avec $s' < 2Kd - 2H - d$, si $s' < \frac{d}{2}$,

$$N^{s'} \left(\widehat{H}_{N,K} - H \right) \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0,$$

et si $s' \geq \frac{d}{2}$, il existe $\gamma^2 > 0$ tel que

$$N^d \mathbf{E} \left(\left(\widehat{H_{N,K}} - H \right)^2 \right) \longrightarrow \gamma^2,$$

avec

$$N^{d/2} \left(\widehat{H_{N,K}} - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma^2).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.3.1, presque sûrement,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V_{N,K}(X)}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))} = 1.$$

Le développement asymptotique de f va nous permettre de donner un développement asymptotique de $\mathbf{E}(V_{N,K}(X))$ qui suffit à démontrer la convergence presque sûre de l'estimateur $\widehat{H_{N,K}}$. On suppose que $2Kd \geq 2m$. Pour $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ on écrit

$$\Gamma_{N,K}(\mathbf{p}) = \Gamma_{N,K}^H(\mathbf{p}) + \int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \frac{\xi}{N}) (f(\xi) - f_H(\xi)) d\xi + \delta_{Kd,m} (K!)^{2d} N^{-2m} \mathbf{E}(X_{\mathbf{K}}^2),$$

où

$$\Gamma_{N,K}^H(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \frac{\xi}{N}) f_H(\xi) d\xi = N^{-2H} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \xi) f_H(\xi) d\xi \right).$$

Les estimations de la proposition 2.3.1 permettent d'écrire, pour $s' \in [0, s]$ et $2Kd > 2H + d + s'$,

$$\Gamma_{N,K}(\mathbf{p}) = N^{-2H} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \xi) f_H(\xi) d\xi \right) + \left(\prod_{i=1}^d (1 + |p_i|)^{-1} \right) o(N^{-2H-s'}).$$

Ainsi

$$\mathbf{E}(V_{N,K}(X)) = C_1 N^{-2H+d} + o(N^{-2H-s'+d}), \quad (2.23)$$

$$\text{Var}(V_{N,K}(X)) = C_2 N^{-4H+d} + o(N^{-4H-s'+d}), \quad (2.24)$$

où

$$C_1 = \int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{0}, \xi) f_H(\xi) d\xi \text{ et } C_2 = 2 \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_K(\mathbf{p}, \xi) f_H(\xi) d\xi \right)^2.$$

Puisque $C_1 \neq 1$ en général, la vitesse de convergence de l'estimateur $\frac{\log V_{N,K}(X)}{\log N}$ est inférieure à $\log N$ (puisque elle est liée à celle de $\frac{\log \mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\log N}$). C'est pour cette raison que l'on définit un nouvel estimateur de H . Posons $T_N = \frac{V_{N,K}(X)}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))}$. Nous nous intéressons au couple (T_N, T_{2N}) .

Le résultat suivant, concernant la normalité asymptotique d'un estimateur, est une simple généralisation à une vitesse de convergence en n^s , avec $s > 0$, du théorème 3.3.11 de [DCD83] énoncé dans le cas naturel où $s = \frac{1}{2}$.

Lemme 2.3.2. *Soit (T_n) une suite de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^k . Soient $m \in \mathbb{R}^k$ et $s > 0$. Soit g une fonction définie sur un voisinage U de m à valeurs réelles. On suppose que g est deux fois différentiable sur U et que ses dérivées partielles secondes sont bornées sur U .*

1. Si $T_n \xrightarrow{\mathbf{P}} m$ (convergence en probabilité) et $n^s (T_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma)$, alors

$$n^s (g(T_n) - g(m)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \nabla g(m)^T \Gamma \nabla g(m)).$$

2. Si $T_n \rightarrow m$ presque sûrement, $n^{2s} \mathbf{E} \left((T_n - m)(T_n - m)^T \right) \rightarrow \Gamma$ et $n^{2s} \mathbf{E} \left(((T_n - m)^T (T_n - m))^2 \right) \rightarrow 0$, alors

$$n^{2s} \mathbf{E} \left((g(T_n) - g(m))^2 \right) \rightarrow \nabla g(m)^T \Gamma \nabla g(m).$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor pour g sur U :

$$|g(x) - g(m) - (x - m)^T \nabla g(m)| \leq \|D^{(2)}g\|_\infty (x - m)^T (x - m),$$

où $\|D^{(2)}g\|_\infty$ désigne la norme infinie de la différentielle seconde de g sur U .

1) Pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(n^s |g(T_n) - g(m) - (T_n - m)^T \nabla g(m)| > \eta) \\ & \leq \mathbf{P}(n^s \|D^{(2)}g\|_\infty (T_n - m)^T (T_n - m) > \eta) + \mathbf{P}(T_n \notin U). \end{aligned}$$

Puisque T_n converge en probabilité vers m et $n^s (T_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma)$,

$$n^s \|D^{(2)}g\|_\infty (T_n - m)^T (T_n - m) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Ainsi $n^s (g(T_n) - g(m) - (T_n - m)^T \nabla g(m))$ converge vers 0 en probabilité donc en loi ce qui conclut la démonstration.

2) Puisque $T_n \rightarrow m$ presque sûrement, pour n assez grand, d'après la formule de Taylor et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & \left| n^{2s} \mathbf{E} \left((g(T_n) - g(m))^2 \right) - n^{2s} \nabla g(m)^T \mathbf{E} \left((T_n - m)(T_n - m)^T \right) \nabla g(m) \right| \\ & \leq \left(2\sqrt{n^{2s} \nabla g(m)^T \mathbf{E} \left((T_n - m)(T_n - m)^T \right) \nabla g(m)} + \|D^{(2)}g\|_\infty \sqrt{n^{2s} \mathbf{E} \left(((T_n - m)^T (T_n - m))^2 \right)} \right) \\ & \times \|D^{(2)}g\|_\infty \sqrt{n^{2s} \mathbf{E} \left(((T_n - m)^T (T_n - m))^2 \right)}. \end{aligned}$$

□

Nous voulons appliquer ce lemme au couple (T_N, T_{2N}) qui converge presque sûrement vers $(1, 1)$, d'après la proposition 2.3.1. De plus, puisque $2Kd > 2H + d + s'$,

$$\frac{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\sqrt{\text{Var}(V_{N,K}(X))}} = \frac{C_1}{C_2^{1/2}} N^{d/2} \left(1 + o(N^{-s'}) \right).$$

Alors, d'une part, d'après la proposition 2.3.2,

$$N^{d/2} (T_N - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{C_2}{C_1^2} \right) \text{ et } N^{d/2} (T_{2N} - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{C_2}{2^d C_1^2} \right),$$

d'autre part,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^d \mathbf{E} \left((T_N - 1)^2 \right) = \frac{C_2}{C_1^2}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} N^d \mathbf{E} \left((T_{2N} - 1)^2 \right) = \frac{C_2}{2^d C_1^2},$$

et

$$N^d \mathbf{E} \left((T_N - 1)^4 \right) \leq cN^d \frac{\text{Var}(V_{N,K}(X))^2}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))^4} \leq CN^{-d}.$$

Nous cherchons à montrer que le couple $N^{d/2} (T_N - 1, T_{2N} - 1)$ converge en loi vers un vecteur gaussien. Pour cela remarquons que si a et b sont deux réels positifs on a encore

$$\frac{aV_{N,K}(X) + bV_{2N,K}(X) - \mathbf{E}(aV_{N,K}(X) + bV_{2N,K}(X))}{\sqrt{\text{Var}(aV_{N,K}(X) + bV_{2N,K}(X))}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.25)$$

En effet il suffit encore de vérifier la condition de Lindeberg. Or, pour $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{N}^d$,

$$\text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p}), Z_{2N,K}(\mathbf{p}')) = \int_{\mathbb{R}^d} g_K(2\mathbf{p} - \mathbf{p}', \frac{\xi}{N}) f(\xi) d\xi,$$

avec

$$g_K(\mathbf{p}, \xi) = e^{-i\frac{\mathbf{p} \cdot \xi}{2}} \prod_{j=1}^d \left(e^{-i\xi_j} - 1 \right)^K \left(e^{i\xi_j/2} - 1 \right)^K.$$

On peut donc majorer comme précédemment

$$\text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p}), Z_{2N,K}(\mathbf{p}')) \leq CN^{-2H} \prod_{i=1}^d (1 + |2p_i - p'_i|)^{-1}.$$

De plus,

$$\text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p})^2, Z_{2N,K}(\mathbf{p}')^2) = 2\text{Cov}(Z_{N,K}(\mathbf{p}), Z_{2N,K}(\mathbf{p}'))^2,$$

ce qui permet d'un côté de majorer les valeurs propres et de l'autre côté de minorer la variance,

$$\text{Var}(aV_{N,K}(X) + bV_{2N,K}(X)) \geq a^2 \text{Var}(V_{N,K}(X)) + b^2 \text{Var}(V_{2N,K}(X)) \geq cN^{-4H+d}.$$

Regardons plus précisément la loi limite de

$$N^{d/2} (a(T_N - 1) + b(T_{2N} - 1)),$$

lorsque a et b sont des réels positifs. En remplaçant les estimateurs par leur expression en fonction des variations quadratiques généralisées, il suffit d'étudier la convergence de

$$\frac{N^{d/2}}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))} \left(a(V_{N,K}(X) - \mathbf{E}(V_{N,K}(X))) + b \frac{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\mathbf{E}(V_{2N,K}(X))} (V_{2N,K}(X) - \mathbf{E}(V_{2N,K}(X))) \right).$$

Or

$$\frac{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\mathbf{E}(V_{2N,K}(X))} = \frac{1}{2^{-2H+d}} + o(N^{-s'}).$$

On cherche donc à utiliser (2.25) pour a et $\frac{b}{2^{-2H+d}}$. Puisque

$$\text{Cov}(V_{N,K}(X), V_{2N,K}(X)) = N^{-4H+d} C_3 + o\left(N^{-4H+d-s'}\right), \quad (2.26)$$

avec

$$C_3 = 2 \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g_K(\mathbf{p}, \xi) f_H(\xi) d\xi \right)^2,$$

on obtient

$$\frac{N^{d/2}}{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))} \sqrt{\text{Var} \left(aV_{N,K}(X) + \frac{b}{2^{-2H+d}} V_{2N,K}(X) \right)} = \sqrt{(a \ b)\Gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} + o(N^{-s'}),$$

avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{C_2}{C_1^2} & \frac{C_3}{2^{-2H+d}C_1^2} \\ \frac{C_3}{2^{-2H+d}C_1^2} & \frac{C_2}{2^d C_1^2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$N^{d/2} (a(T_N - 1) + b(T_{2N} - 1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, (a \ b)\Gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right).$$

Remarquons que nous avons aussi démontré que

$$N^d \mathbf{E}((T_N - 1)(T_{2N} - 1)) \longrightarrow \frac{C_3}{2^{-2H+d}C_1^2}.$$

Il faut à présent voir que ceci est suffisant pour conclure que

$$N^{d/2} ((T_N, T_{2N}) - (1, 1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma). \quad (2.27)$$

Posons $U_N = N^{d/2} (T_N - 1)$ et $V_N = N^{d/2} (T_{2N} - 1)$. Les variables aléatoires U_N et V_N convergent en loi donc la loi de probabilités du couple est tendue. Pour montrer que le couple converge en loi il suffit donc de démontrer qu'il n'y a qu'une seule valeur d'adhérence. Supposons que (U, V) en soit une. On sait déjà que pour tout a et b positifs $aU + bV$ est une loi normale. Nous allons montrer que ceci implique que (U, V) est un vecteur gaussien. Fixons $b \geq 0$, on cherche à appliquer le principe des zéros isolés à la fonction caractéristique de (U, V) , notée Φ . La variable aléatoire U est gaussienne donc la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{E}(|U|^n)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini. On en déduit que $\Phi(\cdot, b)$ est analytique sur \mathbb{R} avec, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(a, b) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^2} (iu)^n e^{ibv} d\mathbf{P}_{(U,V)}(u, v) \right) a^n.$$

Par le principe des zéros isolés, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $\Phi(a, b)$ est la fonction caractéristique d'une loi normale centrée de variance $(a \ b)\Gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le même argument sur la deuxième variable permet de conclure que (U, V) est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Γ ce qui achève la démonstration de (2.27).

Enfin

$$N^d \begin{pmatrix} \mathbf{E}((T_N - 1)^2) & \mathbf{E}((T_N - 1)(T_{2N} - 1)) \\ \mathbf{E}((T_N - 1)(T_{2N} - 1)) & \mathbf{E}((T_{2N} - 1)^2) \end{pmatrix} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \Gamma.$$

On peut alors appliquer le lemme 2.3.2 avec $g(x, y) = \log_2 \left(\frac{x}{y} \right)$. On en déduit que

$$N^{d/2} \log_2 \left(\frac{T_N}{T_{2N}} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, (2\gamma)^2 \right),$$

et

$$N^d \mathbf{E} \left(\left(\log_2 \left(\frac{T_N}{T_{2N}} \right) \right)^2 \right) \rightarrow (2\gamma)^2,$$

avec

$$(2\gamma)^2 = \frac{1}{(\log 2)^2} \left((1 \ -1) \Gamma \left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right) \right) = \frac{1}{(\log 2C_1)^2} \left(C_2 \left(1 + \frac{1}{2^d} \right) - 2C_3 \frac{1}{2^{-2H+d}} \right).$$

Or

$$\log_2 \left(\frac{T_N}{T_{2N}} \right) = \log_2 \left(\frac{V_{N,K}(X)}{V_{2N,K}(X)} \right) - \log_2 \left(\frac{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\mathbf{E}(V_{2N,K}(X))} \right)$$

et d'après (2.23), puisque $2Kd > 2H + d + s'$,

$$\log_2 \left(\frac{\mathbf{E}(V_{N,K}(X))}{\mathbf{E}(V_{2N,K}(X))} \right) = 2H - d + o(N^{-s'}).$$

Rappelons que, presque sûrement,

$$\widehat{H}_{N,K} = \frac{1}{2} \left(\log_2 \left(\frac{V_{N,K}(X)}{V_{2N,K}(X)} \right) + d \right) \rightarrow H.$$

Alors, si $s' < \frac{d}{2}$,

$$N^{s'} \left(\widehat{H}_{N,K} - H \right) \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0,$$

et si $s' \geq \frac{d}{2}$,

$$N^d \mathbf{E} \left(\left(\widehat{H}_{N,K} - H \right)^2 \right) \rightarrow \gamma^2,$$

avec

$$N^{d/2} \left(\widehat{H}_{N,K} - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma^2).$$

□

Remarquons que, dans le cas unidimensionnel, d'après le développement asymptotique de la densité spectrale, le processus X correspond à un cas simple des bruits blancs filtrés introduit dans [BCIJ98]. Nous avons fait ici l'hypothèse que la densité spectrale f était proche de f_H , densité spectrale du mouvement brownien fractionnaire. On obtient un résultat analogue dans le cas où f_H est remplacé par af_H avec $a > 0$. Les auteurs de [BCIJ98] donnent alors un estimateur de la constante a en fonction de $\widehat{H}_{N,K}$ qui se généralise en dimension supérieure. Ceci est d'ailleurs à rapprocher de [IL97]. En effet, dans le cas d'un processus à accroissements stationnaires ($d = 1$ et $m = 1$), le développement asymptotique de la densité spectrale fournit un développement asymptotique du variogramme $t \mapsto v_X(t) = \mathbf{E}(|X_t - X_0|^2)$, et c'est précisément sur v_X que portent les hypothèses de [IL97].

Chapitre 3

Transformées de Radon à fenêtre

D'après la partie 2.1.1, lorsque on considère des champs ponctuels à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre continu en moyenne quadratique, en dépit d'une mesure spectrale anisotrope, leur régularité semble isotrope lorsque on la mesure droite par droite. Ainsi, une étude trajectorielle directe ne permet pas de rendre compte de leur anisotropie. Dans [BE03], A. Bonami et A. Estrade considèrent des champs ponctuels à accroissements stationnaires de mesure spectrale anisotrope avec une densité asymptotiquement de la forme

$$\frac{1}{|\xi|^{d+2h(\xi)}},$$

où h est une fonction positive homogène de degré 0. Pour identifier la fonction d'anisotropie h à partir d'une réalisation du champ, elles étudient la régularité des processus obtenus, pour chaque direction, en moyennant le champ contre une fenêtre le long de l'hyperplan orthogonal. Sans la fenêtre, ce procédé correspond à une transformée de Radon classique (cf. [RK96] par exemple).

Dans une première partie, nous adaptons aisément leur résultat pour définir des transformées de Radon à fenêtre de champs ponctuels. Pour un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d , noté V , on donne un sens au champ

$$P_{V,\rho}(X) = \left\{ \int_{V^\perp} X(s+t)\rho(s)ds; t \in V \right\},$$

appelé transformée de Radon à fenêtre de X sur V , en choisissant ρ une fenêtre déterministe sur V^\perp , adaptée. Les hypothèses portant sur les champs permettent de définir ces transformées pour un champ ponctuel X à accroissements d'ordre m stationnaires, continu en moyenne quadratique. Par linéarité de la transformation, le champ obtenu est encore à accroissements d'ordre m stationnaires, continu en moyenne quadratique et gaussien, si X l'est. De plus, sa mesure spectrale est aussi donnée par une transformée de Radon à fenêtre, celle de la mesure spectrale σ de X :

$$\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma(\Delta) = \int_{\mathbb{R}^d=V\oplus V^\perp} \mathbf{1}_\Delta(\zeta) |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\sigma(\zeta + \eta),$$

pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(V)$, avec $\hat{\rho}$ la transformée de Fourier de ρ sur V^\perp . Lorsque la mesure spectrale admet une densité f , la mesure $\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma$ admet aussi une densité donnée par la

transformée de Radon à fenêtre de f sur V avec la fenêtre $|\widehat{\rho}|^2$.

Puisque, d'après le chapitre 2, la régularité d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires continu en moyenne quadratique est liée au comportement asymptotique de sa mesure spectrale, nous nous intéressons, dans une deuxième partie, au comportement asymptotique des mesures spectrales obtenues par transformée de Radon à fenêtre.

Pour refléter l'anisotropie de la mesure spectrale, nous lui imposons, dans un premier temps, des hypothèses d'homogénéité asymptotique dans des cônes. Nous montrons que ces hypothèses sont préservées par transformée de Radon à fenêtre, ce qui implique que les transformées de Radon à fenêtre du champ ont au moins la même régularité que lui. De plus, lorsque la mesure spectrale est à densité, si la densité est asymptotiquement homogène, le même type d'arguments que dans [BE03] montre que, en fait, la régularité est augmentée de $\frac{\dim V^\perp}{2}$. On retrouve alors le résultat de [BE03] qui, lorsque X est gaussien, permet d'estimer $h(\mathbf{u}) + \frac{d-1}{2}$, pour $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, en considérant le processus $P_{\mathbf{u},\rho}(X)$. Cependant, ces seules hypothèses ne permettent pas d'obtenir de vitesse de convergence pour l'estimateur des variations quadratiques généralisées, comme nous l'avons vu dans la partie 2.3.

On s'intéresse donc, dans un second temps, aux densités spectrales f qui admettent un développement asymptotique de la forme

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2h(\xi)+d}} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2h(\xi)+d+\delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty,$$

avec h et c homogènes de degré 0 et positives. Lorsque h et c sont Lipschitziennes sur la sphère, on montre que, pour une fenêtre et un $\delta > 0$ adaptés, ce développement asymptotique est préservé par transformée de Radon à fenêtre. En particulier, lorsque $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, la transformée de Radon à fenêtre classique de f sur $\langle \mathbf{u} \rangle$, notée $R_{|\widehat{\rho}|^2} f(\mathbf{u}, \cdot)$ est asymptotiquement de la forme

$$\frac{c(\mathbf{u})}{|p|^{2h(\mathbf{u})+d}} \int_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp} |\widehat{\rho}(\gamma)|^2 d\gamma + o\left(\frac{1}{|p|^{2h(\mathbf{u})+d+\delta}}\right) \text{ quand } p \in \mathbb{R} \text{ et } |p| \rightarrow +\infty.$$

La stabilité de la transformée de Radon à fenêtre par dérivation permet d'appliquer les résultats de la partie 2.3 et d'obtenir une vitesse de convergence pour l'estimateur de $h(\mathbf{u}) + \frac{d-1}{2}$ par les variations quadratiques généralisées du processus $P_{\mathbf{u},\rho}(X)$.

Enfin, nous donnons une réciproque partielle de ces résultats pour les transformées de Radon à fenêtre au sens classique (lorsque V est un hyperplan). Dans le chapitre suivant nous verrons que la transformée de Radon à fenêtre n'est pas forcément injective, autrement dit, connaissant

$$R_{|\widehat{\rho}|^2} f(\mathbf{u}, \cdot)$$

pour toute direction $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, on ne peut pas déterminer de façon univoque la fonction f .

Le choix d'une fenêtre ρ gaussienne (de la forme $e^{-\frac{|x|^2}{2\nu^2}}$, pour $x \in \mathbb{R}^d$) permet d'y remédier et même d'obtenir des formules d'inversion pour $R_{|\widehat{\rho}|^2} f$. Cependant, la formule d'inversion globale n'est pas exploitable lorsque on s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f . En revanche, on détermine le comportement asymptotique de chaque coordonnée de f dans sa décomposition en harmoniques sphériques (cf. annexe B.2).

3.1 Transformées de Radon à fenêtre de champs ponctuels

On suppose ici que la dimension de l'espace est supérieure ou égale à 2, ie $d \geq 2$. Soit $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ ponctuel du second ordre centré et continu en moyenne quadratique. On fait l'hypothèse supplémentaire que sa fonction de covariance est à croissance lente par rapport à chacune de ses variables, ce qui est en particulier vérifié si X est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre.

Soient k un entier compris entre 1 et $d-1$ et $V \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel de dimension k . On cherche à définir un champ correspondant à la transformée de Radon de X sur V . Dans le cas d'une fonction f , intégrable sur \mathbb{R}^d , on peut naturellement définir sa transformée de Radon ([RK96]) sur V par

$$\mathcal{P}_V f(t) = \int_{V^\perp} f(s+t) ds, \text{ pour tout } t \in V.$$

Supposons que f ne soit pas suffisamment décroissante à l'infini mais à croissance modérée. Il suffit alors de l'intégrer avec une fenêtre ρ continue qui compense son comportement à l'infini :

$$\mathcal{P}_{V,\rho} f(t) = \int_{V^\perp} f(s+t) \rho(s) ds, \text{ pour tout } t \in V.$$

Pour définir la transformée de Radon à fenêtre du champ X sur V , nous avons besoin d'un espace de fenêtres adaptées. Nous appelons \mathcal{W}_{d-k} l'espace formé par les fonctions continues ρ de \mathbb{R}^{d-k} dans \mathbb{R} à décroissance rapide, ie telles que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{d-k}, |\rho(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}.$$

Ne nous intéressant qu'aux statistiques au second ordre de ce nouveau champ, il serait trop contraignant de donner un sens à l'intégrale elle-même. Pour les mêmes raisons qui nous ont permis de définir des champs généralisés à partir de champs ponctuels, nous définissons la transformée de Radon à fenêtre d'un champ ponctuel en discrétisant l'intégrale. Dans ce but, on choisit une base orthonormée de $(f_i)_{1 \leq i \leq d-k}$ de V^\perp . On définit alors, pour $\rho \in \mathcal{W}_{d-k}$, la transformée de Radon de X sur V avec fenêtre ρ par

$$P_{V,\rho}(X)(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n(d-k)} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^{d-k}} X \left(\sum_{i=1}^{d-k} s_i f_i + t \right) \rho(s), \forall t \in V.$$

Remarquons que cette définition dépend de la base orthonormée de V^\perp choisie. On peut cependant supprimer cette dépendance par le choix d'une fenêtre invariante par rotation. L'existence des limites et les propriétés de $P_{V,\rho}(X)$ sont données dans la proposition suivante.

Proposition 3.1.1. *Soit $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ ponctuel centré et continu en moyenne quadratique tel que sa fonction de covariance est à croissance lente par rapport à chacune de ses variables.*

Soit $\rho \in \mathcal{W}_{d-k}$, V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d de dimension k et $(f_i)_{1 \leq i \leq d-k}$ une base orthonormée de V^\perp . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in V$, on peut définir le champ du second ordre

$$Y_n(t) = 2^{-n(d-k)} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^{d-k}} X \left(\sum_{i=1}^{d-k} s_i f_i + t \right) \rho(s).$$

Alors il existe $P_{V,\rho}(X) = \{P_{V,\rho}(X)(t), t \in V\}$ un champ ponctuel défini sur V , centré et continu en moyenne quadratique, tel que Y_n converge vers $P_{V,\rho}(X)$ dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions fini-dimensionnelles lorsque n tend vers l'infini.

La fonction de covariance de $P_{V,\rho}(X)$ est donnée par

$$\mathbf{E} \left(P_{V,\rho}(X)(t_1) \overline{P_{V,\rho}(X)(t_2)} \right) = \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \mathbf{E} \left(X \left(\sum_{i=1}^{d-k} s_i f_i + t_1 \right) \overline{X \left(\sum_{i=1}^{d-k} s'_i f_i + t_2 \right)} \right) \rho(s) \rho(s') ds ds'.$$

De plus, si X est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi), $P_{V,\rho}(X)$ est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi) et si σ désigne la mesure spectrale de X , le champ $P_{V,\rho}(X)$ admet pour mesure spectrale $\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma$ donnée par

$$\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma(\Delta) = \int_{V \times \mathbb{R}^{d-k}} \mathbf{1}_\Delta(\zeta) |\hat{\rho}(\eta)|^2 d\sigma(\zeta + \sum_{i=1}^{d-k} \eta_i f_i), \quad (3.1)$$

pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(V)$.

Remarquons que les hypothèses portant sur la mesure spectrale et la fenêtre ρ permettent de définir la mesure $\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma$ par (3.1). De plus,

$$\int_{|\zeta|>1} d\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma(\zeta) \leq \|\hat{\rho}\|_\infty^2 \int_{|\xi|>1} d\sigma(\xi) < +\infty.$$

Et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{|\zeta|\leq\epsilon} |\zeta|^{2m} d\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma(\zeta) \leq \int_{|\xi|\leq\sqrt{\epsilon}} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) + \epsilon^{2m} \int_{|\xi|>\sqrt{\epsilon}} d\sigma(\xi).$$

Or, comme $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\xi|\leq\epsilon} |\xi|^{2m} d\sigma(\xi) = 0$ et $\int_{|\xi|>1} d\sigma(\xi) < +\infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{|\xi|>\sqrt{\epsilon}} d\sigma(\xi) \leq C \sqrt{\epsilon}^{-2m}.$$

On en déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\zeta|>\epsilon} d\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma(\zeta) = 0.$$

Ceci montre que $\mathcal{P}_{V,|\hat{\rho}|^2}\sigma$ peut bien définir une mesure spectrale sur V .

Démonstration. Nous utilisons une première fois le lemme 1.3.1 pour définir le champ Y_n . Pour alléger les notations, on suppose que $V = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ et on identifie un point de V à un point de \mathbb{R}^k .

Soit $t_1, t_2 \in V$, $n, n' \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E} \left(Y_n(t_1) \overline{Y_{n'}(t_2)} \right) = 2^{-(n+n')(d-k)} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^{d-k}} \sum_{s' \in 2^{-n'}\mathbb{Z}^{d-k}} \rho(s) \rho(s') \mathbf{E} \left(X(t_1, s) \overline{X(t_2, s')} \right).$$

La fenêtre $\rho \in \mathcal{W}_{d-k}$ et la fonction de covariance de X est continue à croissance lente. On a donc

$$\mathbf{E} \left(Y_n(t_1) \overline{Y_{n'}(t_2)} \right) \xrightarrow{n, n' \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \mathbf{E} \left(X(t_1, s) \overline{X(t_2, s')} \right) \rho(s) \rho(s') ds ds',$$

en tant que somme de Riemann. De plus, si $m \geq 0$,

$$\Delta^m Y_n(t_1, t_2) = 2^{-n(d-k)} \sum_{s \in 2^{-n}\mathbb{Z}^{d-k}} \Delta^m X((t_1, s), (t_2, 0)) \rho(s).$$

Ainsi, lorsque X est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi), le champ Y_n est aussi à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi). D'après le lemme 1.3.1, il existe $P_{V,\rho}(X)$ un champ défini sur V centré tel que, pour tout $t_1, t_2, \dots, t_l \in V$,

$$(Y_n(t_1), Y_n(t_2), \dots, Y_n(t_l)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (P_{V,\rho}(X)(t_1), P_{V,\rho}(X)(t_2), \dots, P_{V,\rho}(X)(t_l)),$$

dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$ avec, pour tout $t_1, t_2 \in V$,

$$\mathbf{E} \left(P_{V,\rho}(X)(t_1) \overline{P_{V,\rho}(X)(t_2)} \right) = \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \mathbf{E} \left(X(t_1, s) \overline{X(t_2, s')} \right) \rho(s) \rho(s') ds ds'.$$

De plus, lorsque X est à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi), le champ $P_{V,\rho}(X)$ est aussi à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre (resp. en loi).

Pour déterminer la représentation spectrale de $P_{V,\rho}(X)$, il suffit d'écrire, pour $t, s, u, v \in V$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\Delta^m P_{V,\rho}(X)(t, s) \overline{\Delta^m P_{V,\rho}(X)(u, v)} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \mathbf{E} \left(\Delta^m X(((t, w), (s, 0)) \overline{\Delta^m X(((u, w'), (v, 0))}) \right) \rho(w) \rho(w') dw dw'. \end{aligned}$$

Avec les notations du théorème 1.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}} e^{-i(t-u)\cdot\zeta} \left(e^{-is\cdot\zeta} - 1 \right)^m \overline{\left(e^{-iv\cdot\zeta} - 1 \right)^m} |\widehat{\rho}|^2(\eta) d\sigma((\zeta, \eta)) \\ & + (m!)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^{d-k}} \rho \right)^2 \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j},\mathbf{k}} s^{\mathbf{j}} v^{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\Delta^m P_{V,\rho}(X)(t, s) \overline{\Delta^m P_{V,\rho}(X)(u, v)} \right) &= \int_V e^{-i(t-u)\cdot\zeta} \left(e^{-is\cdot\zeta} - 1 \right)^m \overline{\left(e^{-iv\cdot\zeta} - 1 \right)^m} d\mathcal{P}_{V,|\widehat{\rho}|^2\sigma}(\zeta) \\ & + (m!)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^{d-k}} \rho \right)^2 \sum_{|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=m} a_{\mathbf{j},\mathbf{k}} s^{\mathbf{j}} v^{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{P}_{V,|\widehat{\rho}|^2\sigma}(\Delta)$ donnée par (3.1). □

Lorsque X est un champ généralisé et ρ une fenêtre de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-k})$, on peut aussi définir sa transformée de Radon sur V avec la fenêtre ρ par dualité, en posant, pour $\varphi \in \mathcal{S}(V)$,

$$\langle P_{V,\rho} X, \varphi \rangle = \langle X, \mathcal{P}_{V,\rho}^* \varphi \rangle,$$

où, en notant π_V la projection orthogonale sur V , pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{P}_{V,\rho}^* \varphi(x) = \varphi(\pi_V(x)) \rho(x.f_1, \dots, x.f_{d-k}).$$

Si X est un champ ponctuel satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.1.1 alors, on montre que sa transformée de Radon sur V avec la fenêtre ρ , vue comme champ généralisé sur $\mathcal{S}(V)$, coïncide avec la transformée de Radon sur V avec la fenêtre ρ de X , vu comme champ généralisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, que l'on vient de définir.

Les transformées de Radon vont nous permettre de rendre compte de l'anisotropie du champ ponctuel. En effet, on démontre facilement la proposition suivante.

Proposition 3.1.2. *Soit $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ ponctuel vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1.1. Soit $\rho \in \mathcal{W}_{d-k}$ une fenêtre **radiale**. Si V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d de dimension k alors, quelque soit la base orthonormée de V^\perp choisie, les transformées de Radon à fenêtre de X sur V sont égales dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions finidimensionnelles.*

De plus, si X est isotrope en loi (resp. au second ordre), pour toute rotation $\kappa \in O(d)$, si V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d de dimension k ,

$$\{P_{V,\rho}(X)(t); t \in V\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{P_{\kappa V,\rho}(X)(\kappa t); t \in V\}$$

(resp., pour t_1 et t_2 dans V ,

$$\mathbf{E} \left(P_{V,\rho}(X)(t_1) \overline{P_{V,\rho}(X)(t_2)} \right) = \mathbf{E} \left(P_{\kappa V,\rho}(X)(\kappa t_1) \overline{P_{\kappa V,\rho}(X)(\kappa t_2)} \right).$$

Démonstration. Pour démontrer la première assertion il suffit de voir que la différence des deux discrétisations converge dans $L^2(\Omega)$ vers 0, en utilisant l'invariance par rotation de la fenêtre après des changements de variables dans l'intégrale obtenue à la limite.

Soit κ une rotation de $O(d)$. On choisit $(f_i)_{1 \leq i \leq d-k}$ une base orthonormée de V^\perp , alors $(\kappa f_i)_{1 \leq i \leq d-k}$ est une base orthonormée de κV^\perp . On note $Y_n(V)$ (resp. $Y_n(\kappa V)$), la discrétisation de $P_{V,\rho}(X)$ (resp. de $P_{\kappa V,\rho}(X)$). Si X est isotrope en loi (resp. au second ordre), il suffit de remarquer que, par un changement de variables, en utilisant le fait que ρ est radiale,

$$\{Y_n(V)(t); t \in V\} = \{Y_n(\kappa V)(\kappa t); t \in V\},$$

en loi (resp. au second ordre). □

Remarquons que, si $H > 0$, pour tout sous-espace V ,

$$\int_{V, |\zeta| > 1} |\zeta|^{2H} d\mathcal{P}_{V,|\rho|^2}(\zeta) \leq \|\widehat{\rho}\|_\infty^2 \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi).$$

Or, nous avons vu dans la partie 2.1 que le champ ponctuel X est de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact si $\int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi) < +\infty$ (proposition 2.1.2). Ainsi, lorsque $\int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi) < +\infty$, les transformées de Radon à fenêtre $P_{V,\rho}(X)$ sont aussi de classe \mathcal{C}^H en moyenne quadratique uniformément sur tout compact de V . Lorsque en plus X est un champ ponctuel gaussien, le champ $P_{V,\rho}(X)$ l'est aussi. On peut alors choisir \widetilde{X} et $\widetilde{P_{V,\rho}(X)}$ des versions continues de X et $P_{V,\rho}(X)$. Comme on s'y attend, le champ \widetilde{Y}_n obtenu en remplaçant X par \widetilde{X} dans Y_n converge vers $\widetilde{P_{V,\rho}(X)}$ au sens de la convergence en loi sur l'espace des trajectoires continues sur V .

Nous donnons des résultats de régularité plus précis dans la partie suivante.

3.2 Transformées de Radon à fenêtre de mesures spectrales

Dans la partie 2.1, nous avons vu que la régularité en moyenne quadratique d'un champ ponctuel X , à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, se déduit du fait que

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi) < +\infty.$$

Nous venons de voir que cette condition implique la même condition sur les mesures spectrales des transformées de Radon à fenêtre de X et donc que la régularité de X est préservée. Or, les estimations, dans les espaces de Sobolev d'indice positif, de la transformée de Radon classique mettent en évidence un gain de régularité égal à $\frac{d-1}{2}$ (cf. [RK96] par exemple). Nous allons donc regarder attentivement ce qui se passe lorsque la mesure spectrale est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans ce cas sa densité est une fonction de $L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m})d\xi)$. De plus, la mesure spectrale de la transformée de Radon à fenêtre de X sur V a aussi une densité spectrale, donnée par la transformée de Radon de f avec la fenêtre $|\widehat{\rho}|^2$,

$$\mathcal{P}_{V,|\widehat{\rho}|^2}f(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^{d-k}} f\left(\zeta + \sum_{i=1}^{d-k} \gamma_i f_i\right) |\widehat{\rho}(\gamma)|^2 d\gamma, \quad \text{pour presque tout } \zeta \in V. \quad (3.2)$$

En particulier, si $k = d - 1$ et $V^\perp = \langle \mathbf{u} \rangle$ avec $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, on effectue une **transformée "X-ray"** (cf. [RK96]) à fenêtre du champ X dans la direction \mathbf{u} :

$$P_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp, \rho}(X)(t) = \int_{\mathbb{R}} X(t + s\mathbf{u})\rho(s)ds := P_\rho X(\mathbf{u}, t), t \in \langle \mathbf{u} \rangle^\perp.$$

Le champ obtenu admet pour densité spectrale la transformée "X-ray" de f avec la fenêtre $|\widehat{\rho}|^2$, dans la direction \mathbf{u} ,

$$\mathcal{P}_{|\widehat{\rho}|^2}f(\mathbf{u}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} f(\sigma + p\mathbf{u})|\widehat{\rho}(p)|^2 dp, \sigma \in \langle \mathbf{u} \rangle^\perp.$$

De la même façon, si $k = 1$ et $V = \langle \mathbf{u} \rangle$ avec $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, c'est une transformée de Radon (cf. [RK96]) au sens classique, à fenêtre, dans la direction \mathbf{u} , que l'on effectue:

$$P_{\langle \mathbf{u} \rangle, \rho}(X)(t\mathbf{u}) = \int_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp} X(s + t\mathbf{u})\rho(s)ds := R_\rho X(\mathbf{u}, t), t \in \mathbb{R},$$

où on a identifié la fenêtre avec une fonction de $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp$ en choisissant une base orthonormée de cet espace. Le processus obtenu admet pour densité spectrale la transformée de Radon de f avec la fenêtre $|\widehat{\rho}|^2$, dans la direction \mathbf{u} ,

$$R_{|\widehat{\rho}|^2}f(\mathbf{u}, p) = \int_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp} f(\xi + p\mathbf{u})|\widehat{\rho}(\xi)|^2 d\xi, p \in \mathbb{R}.$$

3.2.1 Comportement asymptotique directionnel

Soit σ une mesure spectrale (resp. $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m})d\xi)$ une densité spectrale). Lorsque V est un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d , le choix d'une fenêtre ρ définie sur V^\perp

nous permet de définir la transformée de Radon de σ (resp. f) avec la fenêtre ρ . Il est facile de voir que si $f(\xi) = |\xi|^{-2H-d}$

$$\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) = |\zeta|^{-2H-d} \left(\int_{V^\perp} \rho(\gamma) d\gamma \right) + o(|\zeta|^{-2H-d}) \text{ lorsque } \zeta \in V \text{ et } |\zeta| \rightarrow +\infty.$$

Cependant, dans le cas où la mesure spectrale n'est pas à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, ce gain peut ne pas se faire comme le montre l'exemple suivant déjà introduit dans la partie 2.1.1. Il suffit de considérer sur \mathbb{R}^d la mesure produit donnée par $\sigma := |\xi_1|^{-2H-1} d\xi_1 \times \delta_{\mathbf{0}}$ où $\mathbf{0}$ est l'élément nul de \mathbb{R}^{d-1} . Alors, si $\mu > 0$, et $\mathbf{e}_1 \in V$,

$$\mathcal{P}_{V,\rho}\sigma(\{\mu < |\zeta| < 2\mu\}) = \rho(0)\sigma(\{\mu < |\xi| < 2\mu\}) = C\rho(0)\mu^{-2H}.$$

Nous nous intéressons donc au comportement asymptotique de $\mathcal{P}_{V,\rho}\sigma$ (resp. $\mathcal{P}_{V,\rho}f$) dans les différentes directions de V .

On définit dans ce but des cônes symétriques dont l'axe est dirigé par chaque direction de \mathbb{R}^d . Soit $\mathbf{u} \in S^{d-1}$ une direction de \mathbb{R}^d , pour $\eta > 0$ on pose

$$E(\mathbf{u}, \eta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d; |\pi_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp}(x)| < \eta|x.\mathbf{u}| \right\},$$

où $\pi_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp}$ désigne l'opérateur de projection orthogonale sur $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp$.

Ceci permet de définir des voisinages de \mathbf{u} et $-\mathbf{u}$. En effet que si $x \in E(\mathbf{u}, \eta) \cap S^{d-1}$, alors $x.\mathbf{u} \neq 0$ et

$$\left| x - \frac{x.\mathbf{u}}{|x.\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right|^2 = 2(1 - |x.\mathbf{u}|) < 2(1 - (1 + \eta^2)^{-1/2}) < \eta.$$

Réciproquement, pour tout voisinage de \mathbf{u} , non vide, $E_{\mathbf{u}} \subset S^{d-1}$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\xi \in E(\mathbf{u}, \eta) \text{ et } \xi.\mathbf{u} > 0 \Rightarrow \frac{\xi}{|\xi|} \in E_{\mathbf{u}}.$$

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d de dimension $d_W > 0$. Lorsque X est un champ ponctuel sur W à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique de mesure spectrale σ , d'après la proposition 2.1.2, on obtient une minoration de son exposant de hölder quadratique en déterminant $H > 0$ tel que

$$\int_{\xi \in W, |\xi| > 1} |\xi|^{2H} d\sigma(\xi) < \infty.$$

On peut localiser cette condition d'intégrabilité en choisissant V un sous-espace vectoriel de W et h une fonction définie sur $S^{d-1} \cap V$ à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$. On regarde alors si pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1} \cap V$, pour tout $\alpha < h(\mathbf{u})$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int_{\xi \in W, |\xi| > 1} |\xi|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u}, \eta)}(\xi) d\sigma(\xi) < +\infty. \quad (3.3)$$

Lorsque σ admet une densité $g \in L^1(W, \min(1, |\xi|^{2m}) d\xi)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, cette condition est remplacé par un contrôle de la décroissance de g par des fonctions homogènes, au voisinage de cônes de W . On suppose alors que, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1} \cap V$, pour tout $\alpha < h(\mathbf{u})$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\xi \in W$,

$$|\xi| > A \text{ et } \xi \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow |g(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2\alpha + d_W)}. \quad (3.4)$$

Lorsque $V = W$, on en déduit des majorations uniformes. Si σ satisfait (3.3) avec $V = W$ alors, pour tout $\alpha < H$,

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} d\sigma(\xi) < +\infty.$$

De même, si g satisfait (3.4) avec $V = W$ alors, pour tout $\alpha < H$, il existe $A, B > 0$ tel que, pour presque tout $\xi \in W$,

$$|\xi| > A \Rightarrow |g(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2H+d_W)}. \quad (3.5)$$

En effet, par compacité de $S^{d-1} \cap W$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ et $(\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille de directions de $S^{d-1} \cap W$ telle que

$$(S^{d-1} \cap W) \subset \cup_{i=1}^N (E(\mathbf{u}_i, \eta_i) \cap S^{d-1}),$$

avec η_i donné par (3.4). Il suffit alors de choisir $A = \max_{1 \leq i \leq N} A_i$ et $B = \min_{1 \leq i \leq N} B_i$.

Proposition 3.2.1. *Soient V un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d de dimension k et ρ une fenêtre bornée sur V^\perp . Soit h une fonction définie sur $S^{d-1} \cap V$ à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$. Soit σ une mesure spectrale sur \mathbb{R}^d .*

- Si, pour tout $\alpha < H$, $\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} d\sigma(\xi) < +\infty$, alors, pour tout $\alpha < H$,

$$\int_{\zeta \in V, |\zeta|>1} |\zeta|^{2\alpha} d\mathcal{P}_{V,\rho}\sigma(\zeta) < +\infty.$$

- Si de plus, σ satisfait (3.3) et, pour tout $\gamma \in V^\perp$, $|\rho(\gamma)| \leq C(1 + |\gamma|)^{-2\beta}$, alors, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1} \cap V$, pour tout $\alpha < h(\mathbf{u})$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int_{\zeta \in V, |\zeta|>1} |\zeta|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta)}(\zeta) d\mathcal{P}_{V,\rho}\sigma(\zeta) < +\infty.$$

Démonstration. Pour la première assertion il suffit d'écrire que, pour tout $\alpha < H$,

$$\int_{|\zeta|>1} |\zeta|^{2\alpha} d\mathcal{P}_{V,\rho}\sigma(\zeta) \leq \|\rho\|_\infty \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} d\sigma(\xi) < +\infty.$$

Pour la seconde, par hypothèse sur σ , si $\alpha < h(\mathbf{u})$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta)}(\xi) d\sigma(\xi) < +\infty.$$

On pose $\eta' = \eta/2$ de sorte que pour tout $\zeta \in V$ et $\gamma \in V^\perp$,

$$\zeta \in E(\mathbf{u}, \eta') \text{ et } |\gamma| \leq \eta' |\mathbf{u} \cdot \zeta| \Rightarrow \gamma + \zeta \in E(\mathbf{u}, \eta).$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|>1} |\zeta|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta')}(\zeta) d\mathcal{P}_{V,\rho}\sigma(\zeta) &= \int_{|\zeta|>1, |\gamma| \leq \eta' |\mathbf{u} \cdot \zeta|} |\zeta|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta')}(\zeta) \rho(\gamma) d\sigma(\gamma + \zeta) \\ &+ \int_{|\zeta|>1, |\gamma| > \eta' |\mathbf{u} \cdot \zeta|} |\zeta|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta')}(\zeta) \rho(\gamma) d\sigma(\gamma + \zeta). \end{aligned}$$

En notant $\|\rho\|_\infty$ la borne de ρ ,

$$\int_{|\zeta|>1, |\gamma|\leq\eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} \leq \|\rho\|_\infty \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta)}(\xi) d\sigma(\xi) < +\infty.$$

Majorons le second terme. Puisque $|\rho(\gamma)| \leq C(1+|\gamma|)^{-2\beta}$,

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|>1, |\gamma|>\eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} |\zeta|^{2\alpha} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta')}(\zeta) \rho(\gamma) d\sigma(\gamma+\zeta) &\leq C\eta'^{-2\beta} \int_{|\zeta|>1} |\zeta|^{2\alpha} |\zeta\cdot\mathbf{u}|^{-2\beta} \mathbf{1}_{E(\mathbf{u},\eta')}(\zeta) d\sigma(\gamma+\zeta) \\ &\leq C \int_{|\xi|>1} d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

□

Ces résultats sur la mesure spectrale impliquent notamment que la régularité en moyenne quadratique d'un champ de mesure spectrale σ est au moins préservée par transformée de Radon. Nous obtenons des résultats similaires à ceux obtenus dans [BE03] dans le cas d'une densité spectrale vérifiant des conditions d'homogénéité asymptotique. Dans ce cas, la régularité en moyenne quadratique des transformées de Radon est en fait augmentée de $\frac{d-k}{2}$.

Proposition 3.2.2. *Soient V un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d de dimension k et ρ une fenêtre de $L^1(V^\perp)$. Soit h une fonction définie sur $S^{d-1} \cap V$ à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m}) d\xi)$.*

- Si, pour tout $\alpha < H$, il existe $A, B > 0$ tel que, pour presque tout $\xi \in W$,

$$|\xi| > A \Rightarrow |f(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2\alpha+d)},$$

alors, pour tout $\alpha < H + \frac{d-k}{2}$, il existe $A, B > 0$ tel que, pour presque tout $\zeta \in V$,

$$|\zeta| > A \Rightarrow |\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta)| \leq B|\zeta|^{-(2\alpha+k)}.$$

- Si de plus, f satisfait (3.4) et ρ vérifie $|\rho(\gamma)| \leq C(1+|\gamma|)^{-(2\beta+d-k)}$, alors, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1} \cap V$, pour tout $\alpha < h(\mathbf{u}) + \frac{d-k}{2}$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\zeta \in V$,

$$|\zeta| > A \text{ et } \zeta \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow |\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta)| \leq B|\zeta|^{-(2\alpha+k)}.$$

Démonstration. Pour la première assertion, par hypothèse sur f , pour $\alpha < H + \frac{d-k}{2}$, il existe $A, B > 0$ tel que

$$|\xi| > A \Rightarrow |f(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2(\alpha-\frac{d-k}{2})+d)} = B|\xi|^{-(2\alpha+k)}.$$

Alors, pour presque tout $\zeta \in V$, si $|\zeta| > A$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta)| &\leq B \int_{V^\perp} |\gamma+\zeta|^{-(2\alpha+k)} |\rho(\gamma)| d\gamma \\ &\leq B|\zeta|^{-(2\alpha+k)} \int_{V^\perp} |\rho(\gamma)| d\gamma. \end{aligned}$$

Supposons à présent que f satisfait aussi (3.4). Soit $\mathbf{u} \in V \cap S^{d-1}$. Par hypothèse sur f , si $\alpha < h(\mathbf{u}) + \frac{d-k}{2}$, il existe $\eta > 0$ et $A, B > 0$ tels que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\xi \in E(\mathbf{u}, \eta) \text{ et } |\xi| > A \Rightarrow |f(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2(\alpha - \frac{d-k}{2}) + d)}.$$

On pose à nouveau $\eta' = \eta/2$ et, pour presque tout $\zeta \in V$, on décompose $\mathcal{P}_{V,\rho}f$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) &= \int_{V^\perp} f(\gamma + \zeta)\rho(\gamma)d\gamma \\ &= \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| \leq \eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} f(\gamma + \zeta)\rho(\gamma)d\gamma + \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| > \eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} f(\gamma + \zeta)\rho(\gamma)d\gamma. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, si $\zeta \in E(\mathbf{u}, \eta')$ et $|\zeta| > A$, puisque dans ce cas $\gamma + \eta \in E(\mathbf{u}, \eta)$,

$$\int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| \leq \eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} |f(\gamma + \zeta)|d\gamma \leq B|\zeta|^{-(2\alpha+k)} \int_{V^\perp} |\rho(\gamma)|d\gamma.$$

Pour le second terme, on majore f en utilisant (3.5) avec $W = \mathbb{R}^d$. De plus, puisque $|\rho(\gamma)| \leq C(1 + |\gamma|)^{-(2\beta+d-k)}$ pour presque tout $\zeta \in E(\mathbf{u}, \eta') \cap V$ tels que $|\zeta| > A$, si C désigne une constante qui peut changer,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| > \eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} |f(\gamma + \zeta)|d\gamma &\leq C \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| > \eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} |\gamma + \zeta|^{-(2H+d)} |\gamma|^{-(2\beta+d-k)} d\gamma \\ &\leq C|\mathbf{u}\cdot\zeta|^{-(2H+2\beta+d)}. \end{aligned}$$

Enfin, puisque $|\zeta| \leq (1 + \eta'^2)^{1/2}|\mathbf{u}\cdot\zeta|$ et comme $\beta \geq h(\mathbf{u})$, on trouve

$$\int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| > \eta'|\mathbf{u}\cdot\zeta|} |f(\gamma + \zeta)|d\gamma \leq C|\zeta|^{-(2\alpha+k)}.$$

□

Nous cherchons à présent une condition sur la mesure spectrale d'un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique permettant de majorer l'exposant de hölder quadratique de sa transformée de Radon. L'exemple de la mesure $|\xi_1|^{-2H-1}d\xi_1 \times \delta_{\mathbf{0}}$ montre que des hypothèses de minoration sur σ , seules, ne peuvent permettre de conclure à la minoration de ses transformées de Radon à fenêtre. Nous définissons donc une condition de minoration qui porte uniquement sur les densités spectrales. Nous nous intéressons à des densités spectrales g sur \mathbb{R}^d qui satisfont, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1} \cap V$, pour tout $\alpha > h(\mathbf{u})$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi| > A \text{ et } \xi \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow g(\xi) > B|\xi|^{-(2\alpha+d)}. \quad (3.6)$$

Remarquons que cette condition est analogue à la condition de [BE03]. On peut ainsi minorer les transformées de Radon à fenêtre. Une simple adaptation de la démonstration de [BE03] permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 3.2.3. *Soient V un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d de dimension k et ρ une fenêtre positive de $L^1(V^\perp)$ non identiquement nulle. Soit h une fonction définie sur $S^{d-1} \cap V$ à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$.*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m})d\xi)$ une fonction positive. Si f satisfait (3.6), alors, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1} \cap V$, pour tout $\alpha > h(\mathbf{u}) + \frac{d-k}{2}$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\zeta \in V$,

$$|\zeta| > A \text{ et } \zeta \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow \mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) > B|\zeta|^{-(2\alpha+k)}.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in V \cap S^{d-1}$, si $\alpha > h(\mathbf{u}) + \frac{d-k}{2}$, par hypothèse sur f , il existe $\eta > 0$ et $A, B > 0$ tels que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\xi \in E(\mathbf{u}, \eta) \text{ et } |\xi| > A \Rightarrow f(\xi) > B|\xi|^{-(2(\alpha - \frac{d-k}{2}) + d)}.$$

En reprenant les notations précédentes, pour presque tout $\zeta \in V$, si $\zeta \in E(\mathbf{u}, \eta')$ et $|\zeta| > A$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) &\geq \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| \leq \eta' |\mathbf{u} \cdot \zeta|} f(\gamma + \zeta) \rho(\gamma) d\gamma \\ &\geq B|\zeta|^{-(2(\alpha - \frac{d-k}{2}) + d)} \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| \leq \eta'(1+\eta'^2)^{-1/2} |\zeta|} \rho(\gamma) d\gamma \\ &\geq B|\zeta|^{-(2(\alpha - \frac{d-k}{2}) + d)} \int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| \leq \eta'(1+\eta'^2)^{-1/2} A} \rho(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Quitte à prendre A plus grand, puisque $\rho \in L^1(V^\perp)$ est non identiquement nulle, on peut supposer que

$$\int_{\gamma \in V^\perp; |\gamma| \leq \eta'(1+\eta'^2)^{-1/2} A} \rho(\gamma) d\gamma \neq 0.$$

Ceci prouve que $\mathcal{P}_{V,\rho}$ satisfait la minoration souhaitée. □

Considérons X , un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre, continu en moyenne quadratique, admettant f pour densité spectrale. Supposons que f satisfait les conditions de majoration et de minoration précédentes pour h une fonction définie sur S^{d-1} à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$. D'après la proposition 2.1.6, en choisissant pour H la plus petite valeur de h , si $H < 1$, le champ X admet H comme régularité directionnelle quadratique dans chaque direction. Une étude directionnelle ne permet donc pas de déterminer la fonction h . Cependant, le processus $R_\rho X(\mathbf{u}, \cdot)$ obtenu en effectuant sa transformée de Radon à fenêtre dans la direction $\mathbf{u} \in S^{d-1}$ admet la fonction $R_{|\hat{\rho}|^2} f(\mathbf{u}, \cdot)$ pour densité spectrale. Alors, le processus $R_\rho X(\mathbf{u})$ permet de rendre compte de l'anisotropie du champ X puisque le comportement asymptotique de $R_{|\hat{\rho}|^2} f(\mathbf{u}, \cdot)$ va dépendre de la fonction h comme le montre le corollaire suivant qui se déduit directement de ce qui précède.

Corollaire 3.2.1. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m}) d\xi)$ une fonction positive et ρ est une fenêtre positive de $L^1(V^\perp)$ non identiquement nulle. On suppose qu'il existe h une fonction définie sur S^{d-1} à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$ telle que f satisfait (3.4) et (3.6).*

On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|\rho(\gamma)| \leq C(1 + |\gamma|)^{-(2\beta + d - k)}.$$

Alors, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1}$,

- *pour tout $\alpha < h(\mathbf{u}) + \frac{d-k}{2}$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\zeta \in V$,*

$$|\zeta| > A \text{ et } \zeta \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow \mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) \leq B|\zeta|^{-(2\alpha + k)};$$

- *pour tout $\alpha > h(\mathbf{u}) + \frac{d-k}{2}$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\zeta \in V$,*

$$|\zeta| > A \text{ et } \zeta \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow \mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) > B|\zeta|^{-(2\alpha + k)}.$$

Ce corollaire nous permet ainsi de déterminer la régularité des processus obtenu par transformée de Radon à fenêtre de X . En utilisant la proposition 2.1.3, on peut désormais énoncer dans notre cadre d'étude le théorème des moyennes directionnelles [BE03], obtenu pour des champs gaussiens à accroissements stationnaires et à densité spectrale.

Théorème 3.2.1. *Soit X un champ à accroissements d'ordre m stationnaires sur \mathbb{R}^d au second ordre, continu en moyenne quadratique, de densité spectrale $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^{2m})d\xi)$. On suppose qu'il existe h une fonction définie sur S^{d-1} à valeurs dans $[H, \beta] \subset (0, +\infty)$ telle que f satisfait (3.4) et (3.6).*

Soit $\rho \in \mathcal{W}_{d-1}$ une fenêtre non nulle dans $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que il existe $C > 0$,

$$|\widehat{\rho}(\gamma)|^2 \leq C(1 + |\gamma|)^{-(2\beta+d-1)}.$$

Alors le processus $R_\rho X(\mathbf{u}) = \{R_\rho X(\mathbf{u}, t); t \in \mathbb{R}\}$ obtenu en effectuant la transformée de Radon de X avec la fenêtre ρ dans la direction \mathbf{u} admet $h(\mathbf{u}) + \frac{d-1}{2}$ pour exposant de Hölder quadratique critique.

Nous venons de voir dans ce paragraphe que, sous certaines conditions, le comportement d'une fonction à l'infini est stable par transformée de Radon à fenêtre. Nous cherchons dans la suite des estimations plus précises de ce résultat qui permettront d'obtenir des résultats d'autosimilarité asymptotique et d'identification pour les transformées de Radon de champs.

3.2.2 Développement asymptotique

Nous supposons connu le comportement directionnel asymptotique à l'infini d'une fonction et nous cherchons celui de sa transformée de Radon à fenêtre.

Théorème 3.2.2. *Soient h et c deux fonctions définies sur \mathbb{R}^d . Soient $\alpha > 0$ et H, β deux constantes avec $0 < H \leq \beta$. On suppose que :*

i) h homogène de degré 0, Lipschitzienne d'ordre α sur la sphère, minorée par H et majorée par β ;

ii) c homogène de degré 0, Lipschitzienne d'ordre α sur la sphère.

Soit $\delta_0 > 0$. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^d telle que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$,

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{h(\xi)}} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{h(\xi)+\delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

Soient V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d de dimension k avec $1 \leq k \leq d-1$, et ρ une fonction de $L^1(V^\perp)$ qui vérifie

$$|\rho(\gamma)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\gamma|^{M+d-k}}\right) \text{ quand } \gamma \in V^\perp \text{ et } |\gamma| \rightarrow +\infty,$$

avec $M > \beta - H$.

Alors, la transformée de Radon de f sur V avec la fenêtre ρ vérifie, pour tout $\delta \in (0, \delta_1)$,

$$\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) = \frac{c(\zeta)}{|\zeta|^{2h(\zeta)+d}} \int_{V^\perp} \rho(\gamma) d\gamma + o\left(\frac{1}{|\zeta|^{2h(\zeta)+d+\delta}}\right) \text{ quand } \zeta \in V \text{ et } |\zeta| \rightarrow +\infty,$$

avec $\delta_1 = \min\left(\delta_0, \alpha \frac{M+H-\beta}{M+\alpha}\right)$.

Démonstration. Soit ρ une fonction de $L^1(V^\perp)$ vérifiant (3.7), pour $\xi \in V$, avec $|\xi|$ suffisamment grand, on peut définir l'intégrale

$$\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) = \int_{V^\perp} f(\gamma + \zeta)\rho(\gamma)d\gamma.$$

On veut estimer son comportement asymptotique lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$. Supposons dans un premier temps qu'il existe $A > 0$ tel que, pour $|\xi| > A$,

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{h(\xi)}}.$$

On cherche à montrer que, dans ce cas, pour tout $0 < \delta < \alpha \frac{M+H-\beta}{M+\alpha}$,

$$\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) = f(\zeta) \int_{V^\perp} \rho(\gamma)d\gamma + o(|\zeta|^{-h(\zeta)-\delta}) \text{ quand } \zeta \in V \text{ et } |\zeta| \rightarrow +\infty.$$

On écrit pour $|\zeta| > A$

$$\mathcal{P}_{V,\rho}f(\zeta) = f(\zeta) \int_{V^\perp} \rho(\gamma)d\gamma + \int_{V^\perp} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma)d\gamma.$$

Il suffit de majorer

$$\int_{V^\perp} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma)d\gamma.$$

Puisque ρ vérifie (3.7), pour tout réel $s > 0$,

$$\int_{|\gamma| > |\zeta|^s} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma)d\gamma = \mathcal{O}(|\zeta|^{-H-Ms}),$$

ce qui est négligeable devant $|\zeta|^{-h(\zeta)-\delta}$ dès que $\delta < Ms + H - \beta$.

Il suffit donc de considérer

$$\int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma)d\gamma.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma)d\gamma \right| &\leq \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} |c(\gamma + \zeta)| \left| \frac{1}{|\gamma + \zeta|^{h(\gamma+\zeta)}} - \frac{1}{|\zeta|^{h(\zeta)}} \right| |\rho(\gamma)|d\gamma \\ &+ \frac{1}{|\zeta|^{h(\zeta)}} \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} |c(\gamma + \zeta) - c(\zeta)| |\rho(\gamma)|d\gamma. \end{aligned}$$

Voyons à présent comment s'applique l'hypothèse de régularité Lipschitzienne de h et c .

Lemme 3.2.1. *Si g est homogène de degré 0, Lipschitzienne d'ordre α sur la sphère S^{d-1} , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\zeta \in V \setminus \{0\}$ et $\gamma \in V^\perp$,*

$$|g(\gamma + \zeta) - g(\zeta)| \leq C \min \left(\left(\frac{|\gamma|}{|\zeta|} \right)^\alpha, 1 \right).$$

Démonstration. La fonction g est continue sur la sphère donc bornée. Si $\zeta \in V$ et $\gamma \in V^\perp$,

$$|g(\gamma + \zeta) - g(\zeta)| \leq 2\|g\|_\infty.$$

De plus, g est Lipschitzienne d'ordre α sur la sphère, donc, si $\zeta \neq 0$,

$$|g(\gamma + \zeta) - g(\zeta)| \leq \left| \frac{\gamma + \zeta}{(|\gamma|^2 + |\zeta|^2)^{1/2}} - \frac{\zeta}{|\zeta|} \right|^\alpha.$$

Or,

$$\left| \frac{\gamma + \zeta}{(|\gamma|^2 + |\zeta|^2)^{1/2}} - \frac{\zeta}{|\zeta|} \right|^2 = 2 \left(1 - \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{|\zeta|^2} \right)^{-1/2} \right) \leq \frac{|\gamma|^2}{|\zeta|^2},$$

et $C = 2\|g\|_\infty$ convient. □

On en déduit qu'il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\frac{1}{|\zeta|^{h(\zeta)}} \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} |c(\gamma + \zeta) - c(\zeta)| |\rho(\gamma)| d\gamma \leq C_1 |\zeta|^{-h(\zeta) - \alpha(1-s)},$$

ce qui est négligeable devant $|\zeta|^{-h(\zeta) - \delta}$ dès que $\delta < \alpha(1-s)$.

Il reste à considérer

$$\begin{aligned} & \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} |c(\gamma + \zeta)| \left| \frac{1}{|\gamma + \zeta|^{h(\gamma+\zeta)}} - \frac{1}{|\zeta|^{h(\zeta)}} \right| |\rho(\gamma)| d\gamma = \\ & \frac{1}{|\zeta|^{h(\zeta)}} \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} |c(\gamma + \zeta)| \left| \frac{|\zeta|^{h(\zeta)}}{|\gamma + \zeta|^{h(\gamma+\zeta)}} - 1 \right| |\rho(\gamma)| d\gamma. \end{aligned}$$

Écrivons

$$\frac{|\zeta|^{h(\zeta)}}{|\gamma + \zeta|^{h(\gamma+\zeta)}} = e^{l(\zeta)}, \text{ avec,}$$

$$\begin{aligned} l(\zeta) &= h(\zeta) \ln(|\zeta|) - \frac{1}{2} h(\gamma + \zeta) \ln(|\zeta|^2 + |\gamma|^2) \\ &= (h(\zeta) - h(\gamma + \zeta)) \ln(|\zeta|) - \frac{1}{2} h(\gamma + \zeta) \ln \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{|\zeta|^2} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2.1 et en supposant que $s < 1$, il existe $C_2 > 0$ telle que, pour $|\zeta| \geq A$ et $|\gamma| \leq |\zeta|^s$,

$$\begin{aligned} |l(\zeta)| &\leq C_2 \left(\left(\frac{|\gamma|}{|\zeta|} \right)^\alpha \ln(|\zeta|) + \frac{|\gamma|^2}{|\zeta|^2} \right) \\ &\leq C_2' \left(\frac{|\gamma|}{|\zeta|} \right)^\alpha \ln(|\zeta|) \leq C_2' |\zeta|^{-\alpha(1-s)} \ln(|\zeta|). \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha(1-s)} \ln(|t|)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang donc il existe un réel positif A_s tel que,

$$|\zeta| > A_s \Rightarrow |l(\zeta)| < 1,$$

et alors,

$$|e^{l(\zeta)} - 1| \leq e|l(\zeta)| \leq eC'_2|\zeta|^{-\alpha(1-s)} \ln(|\zeta|).$$

Finalement, si $|\zeta| > A_s$,

$$\int_{|\gamma| \leq |\zeta|^s} |c(\gamma + \zeta)| \left| \frac{1}{|\gamma + \zeta|^{h(\gamma+\zeta)}} - \frac{1}{|\zeta|^{h(\zeta)}} \right| |\rho(\gamma)| d\gamma \leq eC'_2 \|c\|_\infty |\zeta|^{-h(\zeta) - \alpha(1-s)} \ln(|\zeta|).$$

On choisit $s_0 = \frac{\beta - H + \alpha}{M + \alpha} \in (0, 1)$ de telle sorte que

$$\alpha(1 - s_0) = Ms_0 + H - \beta = \alpha \frac{M + H - \beta}{M + \alpha}.$$

Alors, si $\delta < \alpha \frac{M + H - \beta}{M + \alpha}$,

$$\begin{aligned} \int_{V^\perp} f(\gamma + \zeta) \rho(\gamma) d\gamma &= f(\zeta) + \int_{|\gamma| \leq |\zeta|^{s_0}} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma) d\gamma \\ &+ \int_{|\gamma| > |\zeta|^{s_0}} (f(\gamma + \zeta) - f(\zeta)) \rho(\gamma) d\gamma \\ &= f(\zeta) + o(|\zeta|^{-h(\zeta) - \delta}). \end{aligned}$$

Ceci permet d'achever la démonstration du théorème. Supposons à présent que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$,

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{h(\xi)}} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{h(\xi) + \delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

En remplaçant ρ par $|\rho|$ et h par $h + \delta$ dans ce qui précède, on obtient que,

$$\mathcal{P}_{V,\rho} f(\zeta) = \frac{c(\zeta)}{|\zeta|^{2h(\zeta) + d}} \int_{V^\perp} \rho(\gamma) d\gamma + o\left(\frac{1}{|\zeta|^{2h(\zeta) + d + \delta}}\right) \text{ quand } \zeta \in V \text{ et } |\zeta| \rightarrow +\infty,$$

pour tout $\delta < \min\left(\delta_0, \alpha \frac{M + H - \beta}{M + \alpha}\right)$. □

Dans le cas particulier où l'on effectue une transformée de Radon à fenêtre de densité spectrale, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2. *Soient h et c deux fonctions définies sur \mathbb{R}^d . Soient $\alpha > 0$ et H, β deux constantes avec $0 < H \leq \beta$. On suppose que :*

i) h homogène de degré 0, Lipschitzienne d'ordre α sur la sphère, minorée par H et majorée par β ;

ii) c homogène de degré 0, Lipschitzienne d'ordre α sur la sphère.

Soit $\delta_0 > 0$. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^d telle que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$,

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2h(\xi) + d}} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2h(\xi) + d + \delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

Soit ρ une fonction de $L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ qui vérifie

$$|\rho(\gamma)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\gamma|^{M+d-1}}\right) \text{ quand } \gamma \in \mathbb{R}^{d-1} \text{ et } |\gamma| \rightarrow +\infty, \quad (3.7)$$

avec $M > \beta - H$.

Alors, pour tout $\mathbf{u} \in S^{d-1}$, la transformée de Radon de f sur $\langle \mathbf{u} \rangle$ avec la fenêtre ρ vérifie, pour tout $\delta \in (0, \delta_1)$,

$$R_\rho f(\mathbf{u}, p) = \frac{c(\mathbf{u})}{|p|^{2h(\mathbf{u})+d}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \rho \right) + o\left(\frac{1}{|p|^{-2h(\mathbf{u})-d-\delta}} \right) \text{ quand } p \in \mathbb{R} \text{ et } |p| \rightarrow +\infty,$$

avec $\delta_1 = \min\left(\delta_0, \alpha \frac{M+H-\beta}{M+\alpha}\right)$.

En particulier, supposons que X soit un champ ponctuel à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre admettant une densité spectrale f qui vérifie les hypothèses du corollaire précédent. Alors, si $\rho \in \mathcal{W}_{d-1}$ est une fenêtre non nulle dans $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $|\widehat{\rho}|^2$ satisfait $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbb{R}^{d-1}}(M)$, le processus $R_\rho X(\mathbf{u}) = \{R_\rho X(\mathbf{u}, t); t \in \mathbb{R}\}$ obtenu en effectuant la transformée de Radon de X avec la fenêtre ρ dans la direction \mathbf{u} est asymptotiquement autosimilaire d'ordre $h(\mathbf{u}) + \frac{d-1}{2}$ au second ordre dès que $c(\mathbf{u}) \neq 0$.

En revanche, en choisissant H égal au minimum de h , si la fonction homogène $c\mathbf{1}_{\{h=H\}}$ est non identiquement nulle,

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)\mathbf{1}_{\{h(\xi)=H\}}}{|\xi|^{2H+d}} + o_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d}} \right).$$

D'après la proposition 2.2.5, X est asymptotiquement autosimilaire d'ordre H au second ordre.

Ces résultats nous ont conduit à la question de la réciprocity de ce procédé. Connaissant les transformées de Radon à fenêtre d'un champ ponctuel peut-on le déterminer? Dans le cadre des champs à accroissements d'ordre m stationnaires au second ordre admettant une densité spectrale f , cette question se réduit à savoir si la transformée de Radon à fenêtre est injective sur l'ensemble des densités spectrales. Ce problème est traité dans la partie 4 où l'on exhibe des fenêtres pour lesquelles il n'y a pas injectivité. Dans le paragraphe suivant, on considère des fenêtres radiales gaussiennes pour lesquelles on tente d'obtenir une réciproque des résultats précédents. La motivation de cette tentative réside dans le fait que la transformée de Radon classique (que l'on obtient avec une fenêtre constante), objet de nombreuses études ([Hel99], [RK96],...) est injective sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Cette propriété est assez facile à vérifier puisque la transformée de Fourier de la transformée de Radon d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est donnée par la transformée de Fourier de la fonction elle-même. Autrement dit, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour $\mathbf{u} \in S^{d-1}$,

$$\widehat{Rf(\mathbf{u}, \cdot)}(\sigma) = \widehat{f}(\sigma\mathbf{u}),$$

où $\widehat{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier sur \mathbb{R} (par rapport à p) à droite et sur \mathbb{R}^d à gauche. Ceci découle de l'invariance par translation et rotation de la transformée de Radon. En imposant une fenêtre radiale, la transformée de Radon à fenêtre est invariante par rotation. Enfin, le choix d'une fenêtre gaussienne permet de relier la transformée de Radon à fenêtre à la transformée de Radon classique et d'en utiliser les propriétés connues.

3.2.3 Réciproque partielle pour les fenêtres gaussiennes

On considère donc dans cette partie une fonction gaussienne $\rho_\nu(p) = e^{-\frac{p^2}{2\nu^2}}$, pour $\nu \in \mathbb{R}$. On note $\tilde{\rho}_\nu$ la fonction définie sur \mathbb{R}^d par $\tilde{\rho}_\nu(x) := \rho_\nu(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d$. On appelle

R_ν la transformée de Radon avec la fenêtre $\tilde{\rho}_\nu$. On ne s'intéresse dans cette partie qu'au comportement asymptotique des densités spectrales et de leurs transformées de Radon à fenêtre. Quitte à tronquer les densités spectrales on supposera qu'elles sont de carré intégrables sur \mathbb{R}^d . Il suffit donc d'étudier R_ν sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Voyons comment R_ν est relié à la transformée de Radon classique R (on trouve les principales propriétés de R dans [RK96] ou [Hel99]). Soit $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $F\tilde{\rho}_\nu \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et, pour presque tout $(\theta, p) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} R(F\tilde{\rho}_\nu)(\theta, p) &= \int_{\langle \theta \rangle^\perp} F(y + p\theta)\rho_\nu(|y + p\theta|)dy \\ &= R_\nu F(\theta, p)\rho_\nu(p). \end{aligned}$$

On peut d'ores et déjà en déduire l'injectivité de la transformée de Radon à fenêtre gaussienne puisque la transformée de Radon est injective sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. De plus, en faisant des hypothèses supplémentaires de régularité, on obtient des formules d'inversion en utilisant celles connues pour la transformée de Radon. Ainsi, par exemple, lorsque $F\tilde{\rho}_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, d'après le corollaire 2.2.1 [RK96, p.28], on peut écrire, si d est impair,

$$F(x) = \frac{\pi(-1)^n}{(2\pi)^d} e^{\frac{|x|^2}{2\nu^2}} \int_{S^{d-1}} \frac{\partial^{d-1}(R_\nu F\rho_\nu)}{\partial p^{d-1}}(\theta, \theta \cdot x) d\theta, \quad d = 2n + 1,$$

et si d est pair,

$$F(x) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^d} e^{\frac{|x|^2}{2\nu^2}} \int_{S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{d-1}(R_\nu F\rho_\nu)}{\partial p^{d-1}}(\theta, p)(\theta \cdot x - p)^{-1} dp d\theta, \quad d = 2n,$$

où l'intégrale sur \mathbb{R} est définie au sens de la valeur principale. On notera dans la suite $\mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions F telles que $F\tilde{\rho}_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Il semble cependant difficile d'obtenir des informations sur le comportement à l'infini de la fonction d'origine, à partir de ces formules, en raison du terme $e^{\frac{|x|^2}{2\nu^2}}$. Nous utiliserons plutôt la décomposition en harmoniques sphériques de la transformée de Radon. On montre dans l'annexe B.2 que les coordonnées sphériques $(R_\nu F)_{lm}$ de la transformée de Radon à fenêtre gaussienne s'obtiennent par ce qu'on appelle une transformée de Gegenbauer des coordonnées sphériques f_{lm} de la fonction F , donnée par

$$(R_\nu F)_{lm}(p)\rho_\nu(p) \stackrel{L^2(\mathbb{R}^+)}{=} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_p^{+\infty} f_{lm}(u)u^{d-2}\rho_\nu(u)C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right)\left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} du. \quad (3.8)$$

La proposition suivante donne la formule d'inversion des transformées de Gegenbauer.

Proposition 3.2.4. [RK96] Soit f_l une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Si

$$g_l(p) = \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_p^{+\infty} f_l(u)u^{d-1}C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right)\left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} \frac{du}{u},$$

alors

$$f_l(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p} \int_p^{+\infty} g_l^{(d-1)}(u)C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right)\left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

La démonstration est assez technique et utilise la transformée de Mellin. Pour être complet nous la donnons en annexe dans la partie B.2.3. Remarquons que nous pouvons affaiblir les hypothèses sur la régularité de f_l puisque la démonstration n'utilise que la dérivabilité de f_l jusqu'à l'ordre $d - 1$. Ces formules d'inversion permettent d'inverser les coordonnées sphériques de la transformée de Radon à fenêtre gaussienne.

Corollaire 3.2.3. *Soit F une fonction de $\mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^d)$ et f_{lm} ses coordonnées dans la décomposition en harmoniques sphériques. Alors, pour presque tout $p \geq 0$,*

$$f_{lm}(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} ((R_\nu F)_{lm}\rho_\nu)^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du,$$

où $(R_\nu F)_{lm}$ désigne les coordonnées de $R_\nu F$ dans la décomposition en harmoniques sphériques.

Cette formule d'inversion va nous permettre de donner, dans certain cas, une réciproque partielle du Corollaire 3.2.1 obtenu dans la partie 3.2.1.

Proposition 3.2.5. *Soit $F \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^d)$ une fonction qui s'écrit sous la forme $F(\xi) = f_l(|\xi|)P_l\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$ avec P_l harmonique sphérique solide de degré $l \in \mathbb{N}$. Soit $H > 0$.*

- *Si, pour tout $\alpha < H + \frac{d-1}{2}$, il existe $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$, pour presque tout $p \in \mathbb{R}$ et $\theta \in S^{d-1}$,*

$$|p| > A \Rightarrow \left| \frac{\partial^k}{\partial p^k} R_\nu F(\theta, p) \right| \leq B|p|^{-(2\alpha+1)},$$

alors, pour tout $\alpha < H$, il existe $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi| > A \Rightarrow |F(\xi)| \leq B|\xi|^{-(2\alpha+d)}.$$

- *Si de plus F est positive et s'il existe $\mathbf{u} \in S^{d-1}$ tel que, pour tout $\alpha > H + \frac{d-1}{2}$, il existe $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour presque tout $p \in \mathbb{R}$,*

$$|p| > A \Rightarrow R_\nu F(\mathbf{u}, p) > B|p|^{-(2\alpha+1)},$$

alors, pour tout $\alpha > H$, il existe $A, B > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi| > A \text{ et } \xi \in E(\mathbf{u}, \eta) \Rightarrow F(\xi) > B|\xi|^{-(2\alpha+d)}.$$

Démonstration. Par invariance par rotation de R_ν , en utilisant (3.8),

$$R_\nu F(\theta, p) \stackrel{L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)}{=} g_l(p)P_l(\theta),$$

avec

$$g_l(p) = \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} f_l(u)\rho_\nu(u)u^{d-1}C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right) \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} \frac{du}{u}.$$

D'après le corollaire 3.2.3, pour presque tout $p \geq 0$,

$$f_l(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} (g_l\rho_\nu)^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du. \quad (3.9)$$

Majoration. Soit $\alpha < H$, par hypothèse, il existe $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour tout $k = 0 \dots d-1$, pour presque tout $p \in \mathbb{R}^+$, si $p > A$,

$$\left|g_l^{(k)}(p)\right| \leq Bp^{-(2\alpha+d)}.$$

Alors, par la formule de Leibnitz, il existe une constante $C > 0$, telle que pour presque tout $p > A$,

$$\left|(g_l\rho_\nu)^{(d-1)}(p)\right| \leq Cp^{-(2\alpha+1)}\rho_\nu(p).$$

Nous avons donc besoin de connaître le comportement asymptotique de l'intégrale lorsque $(g_l\rho_\nu)^{(d-1)}$ est remplacé par le produit de ρ_ν et d'une puissance de p .

Lemme 3.2.2. Soit $\alpha > 0$. Lorsque $p \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} u^{-2\alpha-1} \rho_\nu(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du &= \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2} (2\nu^2)^{\frac{d-1}{2}} C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) p^{-(2\alpha+d)} \\ &+ O\left(p^{-(2\alpha+d+1)}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. On cherche le comportement asymptotique de

$$\frac{p^{2\alpha+d}}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} u^{-2\alpha-1} \rho_\nu(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

Après changement de variables il suffit de considérer

$$\begin{aligned} p^{\alpha+1} e^{\frac{p}{2\nu^2}} \int_p^{+\infty} u^{-\alpha-1} e^{-\frac{u}{2\nu^2}} C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\sqrt{\frac{u}{p}}\right) (u-p)^{\frac{d-3}{2}} du \\ = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{p}\right)^{-\alpha-1} e^{-\frac{u}{2\nu^2}} C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{u}{p}}\right) u^{\frac{d-3}{2}} du. \end{aligned}$$

Par convergence dominée, cette intégrale converge vers

$$C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{2\nu^2}} u^{\frac{d-3}{2}} du = C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) (2\nu^2)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right).$$

On veut estimer la vitesse de convergence. Pour cela on écrit

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{p}\right)^{-\alpha-1} e^{-\frac{u}{2\nu^2}} C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{u}{p}}\right) u^{\frac{d-3}{2}} du - C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) (2\nu^2)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{2\nu^2}} u^{\frac{d-3}{2}} \left| \left(1 + \frac{u}{p}\right)^{-\alpha-1} C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{u}{p}}\right) - C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) \right| du. \end{aligned}$$

On veut utiliser le théorème des accroissements finis. On découpe l'intégrale en deux $\int_0^{+\infty} = \int_0^p + \int_p^{+\infty}$. On peut alors trouver une constante $C > 0$ telle que, d'une part

$$\left| \int_0^p \right| \leq C\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)p^{-1},$$

et d'autre part, pour $p > 1$,

$$\left| \int_p^{+\infty} \right| \leq Cp^{\frac{d-3}{2}} e^{-\frac{p}{2\nu^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{2\nu^2}} (2+u)^{\frac{l+d-3}{2}} du.$$

Ceci permet de conclure à la démonstration du lemme. \square

D'après (3.9), on en déduit que, pour presque tout $p > \max(A, 1)$, avec A suffisamment grand,

$$\begin{aligned} |f_l(p)| &\leq C \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} u^{-2\alpha-1} \rho_\nu(u) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du \\ &\leq Cp^{-(2\alpha+d)}, \end{aligned}$$

en notant $C > 0$ une constante à adapter d'une ligne à l'autre. Alors, en utilisant le fait que $F(\xi) = f_l(|\xi|)P_l\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$, on obtient la majoration souhaitée.

Minoration. Soit $\alpha > H$, par hypothèse il existe $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour presque tout $p \in \mathbb{R}$, si $|p| > A$, $R_\nu F(\mathbf{u}, p) > B|p|^{-(2\alpha+d)}$. Or $R_\nu F(\mathbf{u}, -p) = R_\nu F(-\mathbf{u}, p)$ donc en notant $\epsilon \in \{-1, 1\}$, pour presque tout $p > A$,

$$g_l(p)P_l(\epsilon\mathbf{u}) > Bp^{-(2\alpha+d)}.$$

Puisque $\frac{\partial^k}{\partial p^k} R_\nu F(\epsilon\mathbf{u}, \cdot)$ peut être majoré par une puissance de p , quitte à modifier les constantes, on peut supposer que, pour tout $0 \leq k \leq d-1$ et pour tout $p > A$,

$$g_l^{(k)}(p) \leq Cp^{-(2\alpha+d)} \text{ et } g_l(p)P_l(\epsilon\mathbf{u}) > Bp^{-(2\alpha+d)},$$

avec $C > 0$. Par la formule de Leibnitz, quitte à modifier A et B , on peut supposer que, pour tout $p > A$,

$$(-1)^{d-1} (g_l \rho_\nu)^{(d-1)}(p) P_l(\epsilon\mathbf{u}) > Bp^{-(2\alpha+1)} \rho_\nu(p).$$

D'après (3.9),

$$f_l(p)P_l(\epsilon\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} (-1)^{d-1} (g_l \rho_\nu)^{(d-1)}(p) P_l(\epsilon\mathbf{u}) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

On cherche à nouveau à appliquer le lemme 3.2.2. Pour cela il nous faut connaître le signe de $C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right)$.

Lemme 3.2.3. *Pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $d \geq 2$, si $t \geq 1$, $C_l^{\frac{d-2}{2}}(t) \geq C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) > 0$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$ pour montrer que, pour tout $p \geq 0$, $C_l^p(t) \geq C_l^p(1) > 0$. Si $l = 0$, ceci est vérifié puisque $C_0^p(t) = 1$ ([RK96] p.408). On suppose la propriété vérifiée jusqu'au rang l . Si $p > 0$, par hypothèse de récurrence,

$$\frac{d}{dt} C_{l+1}^p(t) = 2p C_l^{p+1}(t) > 0.$$

Ainsi, C_{l+1}^p est croissante sur $[1, +\infty)$ et si $t \geq 1$,

$$C_{l+1}^p(t) \geq C_{l+1}^p(1) = \frac{\Gamma(2p+l+1)}{(l+1)!\Gamma(2p)} > 0.$$

Si $p = 0$, par hypothèse de récurrence,

$$\frac{d}{dt} C_{l+1}^0(t) = 2C_l^1(t) > 0 \text{ et } C_{l+1}^0(t) \geq C_{l+1}^0(1) = \frac{2}{l+1} > 0.$$

□

Alors, en choisissant A suffisamment grand, pour tout $p > A$,

$$\begin{aligned} f_l(p)P_l(\epsilon \mathbf{u}) &\geq C \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} u^{-2\alpha-1} \rho_\nu(u) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du \\ &\geq Cp^{-2\alpha-d} \text{ d'après le lemme 3.2.2,} \end{aligned}$$

avec C une constante strictement positive que l'on adapte d'une ligne à l'autre.

Finalement, puisque $P_l(\epsilon \mathbf{u}) \neq 0$, par continuité de P_l , on peut trouver une constante $\eta > 0$ telle que pour tout $\theta \in E(\mathbf{u}, \eta)$, $|P_l(\theta)| > \frac{1}{2} |P_l(\mathbf{u})|$. Alors, pour $|\xi| > A$ et $\frac{\xi}{|\xi|} \in E(\mathbf{u}, \eta)$

$$F(\xi) = f_l(|\xi|)P_l\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) > \frac{C}{2} |\xi|^{-(2\alpha+d)},$$

et F satisfait la minoration voulue. □

Faisons quelques remarques. Seules les hypothèses sur les dérivées jusqu'à l'ordre $d-1$ sont nécessaires et on peut donc affaiblir les conditions de régularité. Lorsque on fait l'hypothèse supplémentaire que F est paire (ce qui est le cas des densités spectrales), nécessairement l est pair puisque P_l est de même parité que l .

Enfin, c'est sur l'estimation donnée par le lemme 3.2.2 que repose la démonstration. Ainsi, de la même façon que dans la partie 3.2.2, une estimation plus fine du comportement à l'infini de la transformée de Radon avec une fenêtre gaussienne nous donne une réciproque partielle au Corollaire 3.2.2.

Pour $l \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_l(S^{d-1})$ l'espace engendré dans $L^2(S^{d-1})$ par les harmoniques sphériques de degré l et

$$\mathcal{H}_l = \text{Vect} \left(f(|x|)P \left(\frac{x}{|x|} \right), f \in L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} dr), P \in \mathcal{H}_l(S^{d-1}) \right) \subset L^2(\mathbb{R}^d).$$

Pour $L \in \mathbb{N}$, on désigne par \mathcal{P}_L l'opérateur de projection orthogonal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (resp. $L^2(S^{d-1})$) sur $\oplus_{l=0}^L \mathcal{H}_l$ (resp. $\oplus_{l=0}^L \mathcal{H}_l(S^{d-1})$). On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.2.6. Soit $F \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}_\nu(\mathbb{R}^d)$. Soit c une fonction de $L^2(S^{d-1})$. Pour $H > 0$, on pose

$$g(\theta, p) = \frac{c(\theta)}{|p|^{2H+d}}.$$

Soit $\delta_0 \in (0, 1]$. On suppose que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, pour tout $k = 0 \dots d-1$,

$$(R_\nu F(\theta, \cdot) - g(\theta, \cdot))^{(k)}(p) = o\left(|p|^{-(2H+d+\delta)}\right) \text{ quand } |p| \rightarrow +\infty,$$

uniformément sur la sphère.

Alors, pour tout $L \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{P}_L F)(\xi) = \frac{(\mathcal{P}_L c)(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \rho_\nu(|x|) dx \right)^{-1} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d+\delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Soit (Y_{lm}) une base orthonormée de $L^2(S^{d-1})$ formée d'harmoniques sphériques. D'après le Corollaire 3.2.3, en reprenant les notations précédentes, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $m = 0 \dots N(l)$, pour presque tout $p \geq 0$,

$$f_{lm}(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} ((R_\nu F)_{lm} \rho_\nu)^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

Par hypothèse, en notant (c_{lm}) les coordonnées de c dans sa décomposition en harmoniques sphériques, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, pour tout $k = 0 \dots d-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left((R_\nu F)_{lm}(p) - c_{lm} p^{-2H-d} \right) &= \int_{S^{d-1}} (R_\nu F(\theta, \cdot) - g(\theta, \cdot))^{(k)}(p) Y_{lm}(\theta) d\theta \\ &= o\left(p^{-(2H+d+\delta)}\right) \text{ quand } p \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

La démonstration précédente permet de conclure que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$,

$$\begin{aligned} f_{lm}(p) &= \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p\rho_\nu(p)} \int_p^{+\infty} \frac{\partial^{d-1}}{\partial u^{d-1}} \left(c_{lm} u^{-2H-d} \rho_\nu(u) \right) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du \\ &+ o\left(p^{-(2H+d+\delta)}\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial^{d-1}}{\partial p^{d-1}} \left(p^{-(2H+d)} \rho_\nu(p) \right) = (-\nu^2)^{1-d} p^{-(2H+1)} \rho_\nu(p) + O\left(p^{-(2H+3)} \rho_\nu(p)\right).$$

Ainsi, par le lemme 3.2.2, puisque $\delta_0 \leq 1$, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$,

$$f_{lm}(p) = (2\pi\nu^2)^{-\frac{d-1}{2}} c_{lm} p^{-(2H+d)} + o\left(p^{-(2H+d+\delta)}\right),$$

en utilisant le fait que (cf. [RK96] p.412)

$$m(S^{d-2}) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}.$$

On conclut la démonstration en écrivant, pour $L \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{P}_L F)(\xi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=1}^{N(l)} f_{lm}(|\xi|) Y_{lm}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

En sommant les développements asymptotiques précédents, on en déduit que

$$(\mathcal{P}_L F)(\xi) = \frac{(\mathcal{P}_L c)(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \rho_\nu(|x|) dx \right)^{-1} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d+\delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty,$$

puisque

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \rho_\nu(|x|) dx = (2\pi\nu^2)^{\frac{d-1}{2}}.$$

□

Ces résultats concluent ce chapitre. Nous avons obtenu des réciproques partielles pour des fenêtres gaussiennes. La partie suivante est consacrée au problème de l'injectivité de la transformée de Radon à fenêtre en fonction de la fenêtre choisie.

Chapitre 4

Sur l'injectivité des transformées de Radon à fenêtre

Nous présentons dans ce chapitre un article, accepté dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, qui traite du problème de l'injectivité des transformées de Radon à fenêtre dans des espaces fonctionnels à poids.

Résumé

Nous considérons des transformées de Radon à fenêtre invariantes par rotations obtenues en intégrant une fonction sur un hyperplan contre un poids radial (appelé fenêtre). T. Quinto a montré que de telles transformations étaient injectives lorsque les fonctions sont de carré intégrable et à support compact. En général, on ne peut pas se passer de l'hypothèse de compacité du support. En fait, lorsque la transformée de Laplace de la fenêtre admet un zéro de partie réelle δ strictement positive, la transformée de Radon à fenêtre n'est pas injective pour des fonctions qui décroissent moins vite qu'une fonction gaussienne dépendant de δ . Cependant nous donnons des conditions sur la fenêtre qui assurent l'injectivité de la transformée de Radon à fenêtre pour des fonctions qui décroissent plus vite que n'importe quelle gaussienne.

Injectivity of Rotation Invariant Windowed Radon Transforms

Hermine BIERMÉ

abstract

We consider rotation invariant windowed Radon transforms that integrate a function over hyperplanes by using a radial weight (called window). T. Quinto proved their injectivity for square integrable functions of compact support. This cannot be extended in general. Actually, when the Laplace transform of the window has a zero with positive real part δ , the windowed Radon transform is not injective on functions with a Gaussian decay at infinity, depending on δ . Nevertheless, we give conditions on the window that imply injectivity of the windowed Radon transform on functions with a more rapid decay than any Gaussian function.

4.1 Introduction

With the classical Radon transform, one integrates a function over hyperplanes. The Radon transform has developed very rapidly in the early 1970s, with a lot of applications in medicine, optics, physics and other areas. It is well known that one can recover a function from its integrals along all hyperplanes, that is, the Radon transform is injective (see for example [Hel99, RK96]). It is no more the case when the Radon transform is replaced by a more realistic generalization, basically when one integrates with respect to different weights on the hyperplanes. Here we consider a weight that does not depend on the hyperplane. Our starting point has been the work of A. Bonami and A. Estrade [BE03], in relation with the engineering department of the university of Orléans [JHP⁺01], on image processing related to bones radiographs. They model such radiographs by a Gaussian random field with stationary increments, characterized by a function F , called spectral density. They choose a convenient window ψ (smooth and rapidly decreasing for instance), and perform a windowed Radon transform of the radiographs. Then, for each direction $\theta \in S^1$, they obtain a Gaussian random process with stationary increments and spectral density $R_{|\hat{\psi}|_2} F(\theta, \cdot)$. Thus, a natural question is the following: for which windows does one have injectivity? Since ψ and its Fourier transform are used as windows, the choice of a Gaussian window is natural. However we are interested in more general windows. Compared with the Radon Transform, the main difficulty is the loss of translation invariance for the windowed Radon Transform. One can force rotation invariance by choosing a radial window, which we do here. The question of injectivity (in law) is then given by the injectivity of the windowed Radon transform for spectral densities, which satisfy adapted integrability conditions at infinity. Let us recall that their asymptotic behaviour in power law is of particular interest

since it gives the Hölder exponent for the corresponding field [BE03].

For such radial windows, T. Quinto [Qui83] gave an injectivity result for square integrable functions with compact support. In the literature, injectivity for generalized Radon transforms is only studied for compactly supported functions (for instance in the case of attenuated Radon Transforms in the so-called Emission Tomography [BS04, Rul04]...) There are two main reasons for this. On one hand, in general, such transforms appear in experiments and imply real objects, which have compact support. On the other hand, there is a mathematical obstruction for injectivity in a general setting. Actually, one can find windows for which the windowed Radon transform is not injective on square integrable functions with a Gaussian decay at infinity. Here, we proceed further with counter-examples. We state conditions on radial windows which guarantee the injectivity of the windowed Radon transform on square integrable functions that decrease faster than any Gaussian function. The rotation invariance allows us to restrict to a collection of operators defined on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta_0 r^2} dr)$, with $\delta_0 \in \mathbb{R}$ depending on the integrability of the window. For each one, we find $\delta > \delta_0^+$ such that it is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta r^2} dr)$, where $\delta_0^+ := \max(\delta_0, 0)$. The paper is organized as follows. In Section 2, we define the windowed Radon transform and recall Quinto's proof for injectivity results, which allows us to weaken his conditions on the windows. We emphasize in Section 3 the role of Gaussian functions. On one hand, they are examples of windows for which there is injectivity. On the other hand, they give counter-examples for injectivity, as test functions. In Section 4, we consider the special case of radial functions. This case is simpler since the windowed Radon transform can be reduced to an integral convolution operator. The general case is studied in Section 5. By Laplace Transform we obtain an ordinary differential equation with holomorphic coefficients. Using the inverse Laplace transform, we can reduce to an application of the fixed point Theorem. In a final remark, we mention that this injectivity question gives rise to an open problem on outer functions in the complex plane.

4.2 Definition and preliminary results

Let us first define the *windowed Radon transform* under consideration. We fix the dimension $d \geq 2$, as well as the *window* φ , which is assumed to be a smooth function on \mathbb{R} , such that, for $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(r)^2 r^{\frac{d-3}{2}} e^{-\delta r} dr < \infty.$$

We call \mathcal{W}_δ the class of such windows φ . We define the windowed Radon transform (with the window φ), for $\theta \in S^{d-1}$ and $p \in \mathbb{R}$, by

$$R_\varphi F(\theta, p) = \int_{x \in H(\theta, p)} F(x) \varphi(|x - p\theta|^2) dx_H, \quad (4.1)$$

when this make sense. Here, $H(\theta, p)$ is the hyperplane $\{x \in \mathbb{R}^d; \theta \cdot x = p\}$, and dx_H is the Lebesgue measure on this hyperplane. When $F \in L^2_\delta(\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R}^d, e^{\delta|x|^2} dx)$, the second hand of (4.1) is well defined. This follows from the Cauchy-Schwarz Inequality

$$\int_{S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |R_\varphi F(\theta, p)|^2 e^{\delta p^2} dp d\theta \leq C_\varphi \int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 e^{\delta|x|^2} dx,$$

with $d\theta$ the Lebesgue measure on S^{d-1} and $C_\varphi < +\infty$ when $\varphi \in \mathcal{W}_\delta$.

Thus, for $\varphi \in \mathcal{W}_\delta$, $R_\varphi : L^2_\delta(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2_\delta(S^{d-1} \times \mathbb{R}) := L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}, d\theta \otimes e^{\delta p^2} dp)$ is a

bounded operator. Moreover, since $R_\varphi F(\theta, -p) = R_\varphi F(-\theta, p)$, we can restrict our study on $L_\delta^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)$. The choice of a radial window allows us to obtain the rotation invariance of the windowed Radon transform. Namely, for any rotation $k \in O(d)$ and $F \in L_\delta^2(\mathbb{R}^d)$, we have

$$R_\varphi F(k\theta, p) = (R_\varphi(F \circ k))(\theta, p), \text{ for } (\theta, p) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}^+.$$

Using this property, we can decompose $L_\delta^2(\mathbb{R}^d)$ into a Hilbertian sum of subspaces for which the windowed Radon transform simplifies. We denote by $L^2(S)$ the Hilbert space of square integrable functions on the sphere of \mathbb{R}^d . A spherical harmonic of degree l , for $l \in \mathbb{N}$, is the restriction to S of a homogeneous harmonic polynomial on \mathbb{R}^d of degree l . As in [ABR01, p.80], we write $\mathcal{H}_l(S)$ the space of such functions. Then $L^2(S)$ is the Hilbertian sum of the spaces $\mathcal{H}_l(S)$, namely

$$L^2(S) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l(S).$$

We proceed as in [SW71] to obtain decompositions of $L_\delta^2(\mathbb{R}^d)$ and $L_\delta^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)$ in Hilbertian sums. We define

$$\mathcal{H}_{l,\delta} = \text{Vect} \left(f(|x|)P \left(\frac{x}{|x|} \right), f \in L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta r^2} dr), P \in \mathcal{H}_l(S) \right) \subset L_\delta^2(\mathbb{R}^d),$$

and, in a similar way,

$$\tilde{\mathcal{H}}_{l,\delta} = \text{Vect} \left(f(p)P(\theta), f \in L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r^2} dr), P \in \mathcal{H}_l(S) \right) \subset L_\delta^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+).$$

Using an orthonormal basis of $\mathcal{H}_l(S)$, we obtain the following result.

Proposition 1. *For $\delta \in \mathbb{R}$ we can write the Hilbertian decompositions*

$$L_\delta^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_{l,\delta} \quad \text{and} \quad L_\delta^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}_{l,\delta}.$$

The rotation invariance of the windowed Radon transform implies that R_φ maps $\mathcal{H}_{l,\delta}$ into $\tilde{\mathcal{H}}_{l,\delta}$. Let us define, for $f \in L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta r^2} dr)$,

$$S_l f(p) = \int_p^{+\infty} f(u) u^{d-2} \varphi(u^2 - p^2) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{p}{u} \right) \left(1 - \frac{p^2}{u^2} \right)^{\frac{d-3}{2}} du,$$

where $C_l^{\frac{n-2}{2}}$ is the Gegenbauer polynomial of degree l . Then, S_l maps $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta r^2} dr)$ into $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r^2} dr)$ and we can link S_l with R_φ by the following proposition [Qui83].

Proposition 2. *Let $F(x) = f(|x|)P(\frac{x}{|x|})$ be a function of $\mathcal{H}_{l,\delta}$. Then*

$$R_\varphi F(\theta, p) = \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} S_l f(p) P(\theta) \in \tilde{\mathcal{H}}_{l,\delta}.$$

By Proposition 1, the windowed Radon transform R_φ is injective on $L_\delta^2(\mathbb{R}^d)$ if and only if, for all l , the operator S_l is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta r^2} dr)$. However, it is more convenient to consider the operators defined, for $f \in L^2(\mathbb{R}^+, r^{\frac{d-2}{2}} e^{\delta r} dr)$, by

$$T_l f(p) = \int_p^{+\infty} f(u) \varphi(u-p) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\sqrt{\frac{p}{u}} \right) (u-p)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

Then, T_l maps $L^2(\mathbb{R}^+, r^{\frac{d-2}{2}} e^{\delta r} dr)$ into $L^2(\mathbb{R}^+, r^{-1/2} e^{\delta r} dr)$ and S_l is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta r^2} dr)$ if and only if T_l is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{\frac{d-2}{2}} e^{\delta r} dr)$.

T. Quinto [Qui83] proved the injectivity of R_φ on the class of square integrable functions with compact support under the assumption that the window φ does not vanish. A careful reading of his proof leads to the following result.

Theorem 1. *Let $\delta \in \mathbb{R}$. Let $\varphi \in \mathcal{W}_\delta$ be a window that does not vanish at 0. Let $F \in L^2_\delta(\mathbb{R}^d)$ such that $R_\varphi F = 0$. If F has compact support, then $F \equiv 0$.*

Proof. Let $F \in L^2_\delta(\mathbb{R}^d)$ be compactly supported in the ball $B(0, M^{1/2}) = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| < M^{1/2}\}$. For $l \in \mathbb{N}$, we choose $(Y_{lm})_{1 \leq N(l)}$ an orthonormal basis of $\mathcal{H}_l(S)$. Then, the orthogonal projection of F onto $\mathcal{H}_{l,\delta}$ is given by

$$\mathcal{P}_l F = \sum_1^{N(l)} f_{lm} Y_{lm} \text{ with } f_{lm}(r) = \int_{S^{d-1}} F(r\theta) Y_{lm}(\theta) d\theta.$$

So each coordinate f_{lm} has also its support in $[0, M^{1/2})$. We are reduced to prove the injectivity of T_l on functions $f \in L^2(\mathbb{R}^+, r^{\frac{d-2}{2}} e^{\delta r} dr)$ compactly supported in $[0, M)$. Let $\epsilon \in (0, M)$. By a change of variables, we write, for $t \in (\epsilon, M)$,

$$T_l f(t^{-1}) = \int_{1/M}^t W_l(s, t) s^{-\frac{d+2}{4}} f(s^{-1}) (t-s)^{\frac{d-3}{2}} ds,$$

where

$$W_l(s, t) = s^{-d/4} t^{-\frac{d-3}{2}} \varphi \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\sqrt{\frac{s}{t}} \right).$$

Then, we are lead to study the following integral equation

$$g(t) = \int_{1/M}^t f(s) W_l(s, t) (t-s)^{\frac{d-3}{2}} ds, \quad (4.2)$$

where $g, f \in L^2((1/M, 1/\epsilon))$ and W_l is a \mathcal{C}^∞ function on $(1/M, \infty)^2$, which does not vanish on the diagonal. Existence and uniqueness results in L^2 are known for Volterra integral equations of the second kind [Tri57, p.10]. However, the kernel of the integral transform $W_l(s, t) (t-s)^{\frac{d-3}{2}}$ can vanish along the diagonal according to d . Thus, T. Quinto got rid off this difficulty by taking derivatives of (4.2). Let us recall that if $I = (1/M, 1/\epsilon)$, the Sobolev space $H^1(I)$ is defined by

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I); \exists v \in L^2(I) \text{ such that } \int_I u \psi' = - \int_I v \psi, \forall \psi \in \mathcal{C}_c^1(I) \right\},$$

while, for $m \geq 2$, $H^m(I)$ is defined by induction as $H^m(I) = \{u \in H^{m-1}(I); u' \in H^{m-1}(I)\}$. Let us write $n = \frac{d-3}{2}$ for d odd, $n = \frac{d}{2} - 1$ for d even. We are interested in the case when $g = 0$, so we assume that $g \in H^{n+1}((1/M, 1/\epsilon))$. We take n derivatives of (4.2)

$$g^{(n)}(t) = \int_{1/M}^t f(s) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(W_l(s, t) (t-s)^{\frac{d-3}{2}} \right) ds. \quad (4.3)$$

If d is odd, taking one more derivative we get

$$g^{(n+1)}(t) = \left(n! t^{-\frac{3d-6}{4}} C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) \varphi(0) \right) f(t) + \int_{1/M}^t f(s) \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} (W_l(s, t)(t-s)^n) ds,$$

which is a Volterra integral equation of the second kind, for which we have a unique solution since φ does not vanish at 0.

In the even case, we write $\frac{\partial^n}{\partial t^n} (W_l(s, t)(t-s)^{\frac{d-3}{2}}) = K_l(s, t)(s-t)^{-1/2}$ such that

$$K_l(t, t) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} t^{-\frac{3d-6}{4}} C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) \varphi(0) \neq 0.$$

Similar arguments as in the previous case allow us to show existence and uniqueness of the solution of the generalized Abel integral equation (4.3) under the additional assumption that $g^{(n)}(1/M) = 0$ [Qui83, Theorem B]. Hence, in all case, if $T_l f \equiv 0$, we get that $f \equiv 0$ on (ϵ, M) by uniqueness, for all $\epsilon \in (0, M)$. This concludes for the proof. \square

We generalize this result to functions that do not have compact support, but decrease rapidly at infinity. Again, we give injectivity result for the collection of operators $(T_l)_{l \in \mathbb{N}}$. We will prove the following theorems.

Theorem 2. *Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0^+ = \max(\delta_0, 0)$ and $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ with $\varphi(0) \neq 0$. We assume that φ and all its derivatives have at most an exponential growth,*

$$|\varphi^{(k)}(r)| \leq C_k e^{\delta_0^+ r}, \quad (4.4)$$

for $r \geq 0$, where k is an integer and C_k a positive constant. Then, for l an integer, there exists $\delta > \delta_0^+$ (which depends on l) such that T_l is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$.

Thus, the windowed Radon transform is injective considered on the intersection.

Theorem 3. *Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$. Let $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ be a window with $\varphi(0) \neq 0$. We assume that φ satisfies (4.4). Let $F \in L^2_{\delta}(\mathbb{R}^d)$ for all $\delta \geq \delta_0$. If $R_{\varphi} F = 0$, then $F \equiv 0$.*

The first operator T_0 is related to the action of the windowed Radon transform on radial functions. Before a careful study of this operator in Section 4, we consider the special case of Gaussian functions in the next part. The last part deals with the injectivity of T_l in the general case.

4.3 Gaussian functions

A natural generalization of the Radon transform is given by Gaussian windows. We consider windows of the form

$$\varphi_{\delta_0}(r) = e^{\frac{\delta_0}{2} r}, \text{ with } \delta_0 \in \mathbb{R},$$

so that $\varphi_{\delta_0}(r^2)$ is a Gaussian function when $\delta_0 < 0$. Obviously $\varphi_{\delta_0} \in \mathcal{W}_{\delta}$, when $\delta > \delta_0$. Let $\delta > \delta_0$. Then, we can define the windowed Radon transform with the window φ_{δ_0} for functions in $L^2_{\delta}(\mathbb{R}^d)$. Moreover, when $F \in L^2_{\delta}(\mathbb{R}^d)$,

$$R_{\varphi_{\delta_0}}(F)(\theta, p) = e^{-\frac{\delta_0}{2} p^2} R\left(F e^{\frac{\delta_0}{2} |x|^2}\right)(\theta, p),$$

where R is the classical Radon Transform. Then, using injectivity of the Radon Transform on $L^1(\mathbb{R}^d)$ we can state the following theorem.

Theorem 4. *Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$. Then the windowed Radon transform $R_{\varphi_{\delta_0}}$ is injective on $L^2_\delta(\mathbb{R}^d)$, when $\delta > \delta_0$.*

Let us remark that, with further smoothness assumptions, we can also extend to $R_{\varphi_{\delta_0}}$ the classical inversion formulas of the Radon transform.

On the other hand, Gaussian functions give counter-examples for injectivity as test functions. Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$. From above, the windowed Radon transform is injective on $\mathcal{H}_{\delta_0,0}$ if and only if S_0 is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta_0 r^2} dr)$. Since the Gegenbauer polynomial $C_0^{\frac{d-2}{2}}$ is a constant c , we have a simpler expression of S_0 . Let $z \in \mathbb{C}$, after a change of variables, we obtain the image of the function e^{-zr^2} . For $\Re(z) > \delta_0$,

$$S_0 \left(e^{-zr^2} \right) (p) = \frac{c}{2} e^{-zp^2} \Phi(z), \text{ where } \Phi(z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-zr^2} \varphi(r^2) r^{d-2} dr$$

is the Laplace transform of $\varphi(r) r^{\frac{d-3}{2}}$. Since $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$, the abscissa of convergence of Φ is lower than δ_0 . It is obvious that if Φ has a zero z_0 on the half plane Π_{δ_0} , S_0 is not injective on $L^2(\mathbb{R}^+, r^{d-1} e^{\delta_0 r^2} dr)$ for $\delta \in (\delta_0, \Re(z_0))$.

Let us remark that the Laplace transform of $\varphi_{\delta_0}(r) r^{\frac{d-3}{2}}$ is, for $\Re(z) > \delta_0/2$, $\Phi_{\delta_0}(z) = \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) (z - \delta_0/2)^{-\frac{d-1}{2}}$. Thus Φ_{δ_0} does not vanish on $\overline{\Pi_\delta}$, where Π_δ denotes the half plane $\{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > \delta\}$. The next section gives a kind of converse.

4.4 Injectivity for radial functions

Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ with $\varphi(0) \neq 0$. We will prove Theorem 2 for $l = 0$. Under the growth conditions (4.4) on φ , we will find $\delta \geq \delta_0^+$ such that, when $F \in L^2_\delta(\mathbb{R}^d)$ is radial and $R_\varphi F \equiv 0$, then $F \equiv 0$. Let us remark that the assumption $\varphi(0) \neq 0$ is a natural one when compared with Theorem 1. From above, we need a control on the zeros of the holomorphic function Φ . This is given in the next proposition.

Proposition 3. *Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ with $\varphi(0) \neq 0$. Under the assumption (4.4), there exists $\delta_1 > \delta_0^+$ such that Φ does not vanish in Π_{δ_1} .*

Actually, the assumptions on the growth of φ and its derivatives allow us to give growth results on Φ and its derivatives. We give here a stronger result that we will need later.

Lemma 1. *Let $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ that satisfies (4.4). Then Φ may be written as*

$$\Phi(z) = \varphi(0) \Gamma\left(\frac{d-3}{2} + 1\right) z^{-\frac{d-3}{2}-1} + \Psi(z),$$

where Ψ is a holomorphic function on $\Pi_{\delta_0^+}$ such that, when $\delta > \delta_0^+$,

$$|\Psi^{(k)}(z)| \leq C_k |1 + z|^{-\frac{d+1}{2}-k}, \quad (4.5)$$

for $z \in \Pi_\delta$. Here k is an integer and C_k is a positive constant (depending on δ).

Proof. We write $\psi = \varphi - \varphi(0)$ and Ψ for the Laplace transform of the function $\psi(t) t^{\frac{d-3}{2}} \mathbf{1}_{t>0}$. Therefore, the abscissa of convergence of Ψ is lower than δ_0^+ . Then, when $z \in \mathbb{C}$ is such that $\Re(z) > \delta_0^+$,

$$\Phi(z) = \varphi(0) \Gamma\left(\frac{d-3}{2} + 1\right) z^{-\frac{d-3}{2}-1} + \Psi(z),$$

since $\Gamma(\frac{d-3}{2} + 1)z^{-\frac{d-3}{2}-1}$ is the Laplace transform of $t^{\frac{d-3}{2}}\mathbf{1}_{t>0}$.

For $\delta > \delta_0^+$, we will prove that Ψ satisfies (4.5) for all $z \in \overline{\Pi_\delta}$. In fact, if $\mathcal{R}e(z) > \delta_0^+$, the function $\psi(t)t^{\frac{d-3}{2}}e^{-zt}$ is integrable over \mathbb{R}^+ . Thus, Ψ is holomorphic on $\Pi_{\delta_0^+}$. Moreover, for all $k \in \mathbb{N}$, the function $(1+z)^{\frac{d+1}{2}+k}\Psi^{(k)}(z)$ has a polynomial growth, and we apply the Phragmen Lindelöf method (see for instance [Rud98]). To obtain a uniform upper bound over the domain Π_δ , it is sufficient to obtain a uniform upper bound over the line $\{\delta + is; s \in \mathbb{R}\}$, which follows from the next lemma.

Lemma 2. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in (k-1; k]$. Let ψ be a function in $\mathcal{C}^{k+2}((0, +\infty))$. We assume there exists $\delta_0^+ \geq 0$ and $C > 0$ such that, for all $j = 0, \dots, k+2$, for all $t > 0$,*

$$|\psi^{(j)}(t)| \leq Ct^{\lambda-j}e^{\delta_0^+t}.$$

Then, for all $\delta > \delta_0^+$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\delta+is)t}\psi(t)dt = \mathcal{O}_{|s| \rightarrow +\infty}(|s|^{-\lambda-1}).$$

Proof. The scheme for proving such estimates is well known. We sketch the proof for completeness. We may assume that $s > 1$ and prove this lemma by induction on $k \in \mathbb{N}$. We write $\int_0^{+\infty} e^{-(\delta+is)t}\psi(t)dt = \int_0^{1/s} + \int_{1/s}^{+\infty}$. By assumptions on ψ , we obtain the upper bound for the first term. For the second one, we use an integration by parts. Assumptions on ψ are sufficient to conclude for one of the two terms. When $k = 0$, another integration by part and the assumptions on ψ' and ψ'' give right upper bound for the integral one. Afterwards, we use the induction on ψ' , which satisfies the growth conditions for $k-1$, to conclude. \square

The assumptions on φ show that $t^{k+\frac{d-3}{2}}\psi(t)$ satisfies the conditions of Lemma 2, with $\lambda = k + \frac{d-1}{2}$. Thus we can find a positive constant C_k such that, for all $s \in \mathbb{R}$,

$$\left| (1 + (\delta + is))^{\frac{d+1}{2}+k} \int_0^{+\infty} e^{-(\delta+is)t} t^{k+\frac{d-3}{2}} \psi(t) dt \right| \leq C_k.$$

Finally, by the Phragmen Lindelöf method, we obtain the required upper bounds for Ψ and its derivatives. \square

The proof of Proposition 3 follows. Since $\varphi(0) \neq 0$, one can find constants $C > 0$ and $\delta_1 > \delta_0^+$ such that Φ does not vanish in $\overline{\Pi_{\delta_1}}$ since, for $z \in \overline{\Pi_{\delta_1}}$,

$$|\Phi(z)| \geq C|z|^{-\frac{d-3}{2}-1}. \quad (4.6)$$

Now we prove the injectivity of T_0 . From Proposition 3, there exists $\delta_1 > \delta_0^+$ such that Φ does not vanish in the half plane Π_{δ_1} . We will find $\delta > \delta_1$ such that T_0 is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$, or equivalently, such that its adjoint T_0^* has a dense range in $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$. For $a > 0$, we write $L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$ (resp. $L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr)$) for the space of functions in $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr)$) with support in $(a, +\infty)$. Since T_0 is injective on compactly supported functions by Theorem 1, we only have to prove the following proposition.

Proposition 4. *Under the assumptions of Theorem 2, there exists $\delta > \delta_0^+$ such that, when $a > 0$, $T_0^*(L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr))$ is dense in $L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$.*

Let us denote by $\mathcal{C}_c^\infty((a, +\infty))$ the space of smooth functions with compact support in $(a, +\infty)$. Since $\mathcal{C}_c^\infty((a, +\infty))$ is dense in $L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$, it is enough to prove that, when $h \in \mathcal{C}_c^\infty((a, +\infty))$, there exists $g \in L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr)$ such that

$$h(u) = T_0^*(g)(u) = cu^{-\frac{d-2}{2}} e^{-\delta u} \int_0^u g(p) p^{-1/2} e^{\delta p} \varphi(u-p)(u-p)^{\frac{d-3}{2}} dp. \quad (4.7)$$

Then, (4.7) is equivalent to the next convolution integral equation.

Proposition 5. *Let $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ be a window which satisfies (4.4), with $\varphi(0) \neq 0$. Then, there exists $\delta > \delta_0^+$ such that, when $a > 0$ and $h \in \mathcal{C}_c^\infty((a, +\infty))$, the equation*

$$h(u) = \int_0^u g(p) \varphi(u-p)(u-p)^{\frac{d-3}{2}} dp \quad (4.8)$$

has a unique solution $g \in L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} r^{1/2} dr)$.

Proof. We assume that $g \in L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} r^{1/2} dr)$ satisfies (4.8). Taking the Laplace transform of (4.8) we have, for $z \in \mathbb{C}$ such that $\Re(z) > \delta$, $H(z) = G(z)\Phi(z)$, where H and G are the Laplace transforms of h and g . Since the Laplace transform is injective, Equation (4.8) has at most one solution, which has support in $(a, +\infty)$. Since φ satisfies the assumption (4.4), there exists $\delta_1 > \delta_0^+$ such that Φ does not vanish in Π_{δ_1} . Thus, if $\delta > \delta_1$, for all $z \in \Pi_\delta$,

$$G(z) = H(z)\Phi(z)^{-1}.$$

We will take the inverse Laplace transform of the above equation. From [Dem02, p.36], it is sufficient to have holomorphic functions that decay faster than $|z|^{-\lambda}$, with λ strictly greater than 1. Since h is smooth, with compact support in \mathbb{R}^+ , for all $n \in \mathbb{N}$, $H(z) = \mathcal{L}(h)(z) = z^{-n} \mathcal{L}(h^{(n)})(z)$, with $\mathcal{L}(h^{(n)})$ holomorphic and bounded in Π_{δ_1} . Thus, from (4.6), one can find a positive constant C such that, for all $z \in \Pi_{\delta_1}$,

$$|H(z)\Phi(z)^{-1}| \leq C \|\mathcal{L}(h^{(d)})\|_\infty |z|^{-\frac{d+1}{2}}.$$

Therefore, we can define, for $b > \delta_1$, the function

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{H(b+iu)}{\Phi(b+iu)} e^{(b+iu)t} du.$$

Finally, when $\delta > \delta_1$, then $g \in L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} r^{1/2} dr)$ and has $H\Phi^{-1}$ for Laplace transform in Π_δ . The Laplace Transform injectivity allows to conclude for the proof. \square

Therefore, when $\delta > \delta_1$, Equation (4.7) has a unique solution and T_0^* has a dense range in $L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$. Since T_0 is injective on compactly supported functions, Theorem 2 is proved for $l = 0$.

4.5 General case

We give here similar injectivity results for the operators $(T_l)_{l \in \mathbb{N}}$ and prove Theorem 2. Let $\delta_0 \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ with $\varphi(0) \neq 0$. We assume that φ satisfies (4.4). For $l \in \mathbb{N}$ we will find $\delta > \delta_0^+$ (which depends on l) such that T_l is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$.

We follow the scheme of the proof for the radial case. By Theorem 1, it is still sufficient to find $\delta > \delta_0^+$ such that, if $f \in L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$ satisfies $T_l f \equiv 0$, then f has compact support. Let $a > 0$. As previously, we will find $\delta > \delta_0^+$ such that, T_l^* ($L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr)$) is dense in $L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$. Here, T_l^* , the dual operator of T_l , is given by

$$T_l^* g(u) = u^{-\frac{d-2}{2}} e^{-\delta u} \int_0^u g(p) p^{-1/2} e^{\delta p} \varphi(u-p) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\sqrt{\frac{p}{u}} \right) (u-p)^{\frac{d-3}{2}} dp.$$

Thus, for $h \in C_c^\infty((a, +\infty))$, it is sufficient to find $\delta > \delta_0^+$ such that $h(u) = T_l^* g(u)$, with $g \in L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr)$. For $l \geq 2$ this is no more a convolution equation. Nevertheless we use the particular structure of the Gegenbauer polynomial. If l is odd (resp. even), $C_l^{\frac{d-2}{2}}$ is odd (resp. even). We sketch the proof in the even case (the odd case is similar). Let us assume that $l = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, and write $C_l^{\frac{d-2}{2}}(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^{2k}$. When $h \in C_c^\infty((a, +\infty))$, the function $u^{n+\frac{d-2}{2}} e^{\delta u} h$ belongs also to $C_c^\infty((a, +\infty))$. As in the radial case, we are reduced to prove the following result.

Proposition 6. *Let $h \in C_c^\infty((a, +\infty))$. Let $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$ be a window that satisfies (4.4) with $\varphi(0) \neq 0$. Then, for $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ with $\sum_{k=0}^n \alpha_k \neq 0$, there exists $\delta > \delta_0^+$ such that the equation*

$$h(u) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^{n-k} \int_0^u p^k g(p) \varphi(u-p) (u-p)^{\frac{d-3}{2}} dp \quad (4.9)$$

has a unique solution $g \in L_a^2(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} r^{1/2} dr)$.

Proof. Let us take the Laplace transform of both members of Equation (4.9). With the former notations, since $\mathcal{L}(p^k g) = (-1)^k G^{(k)}$, we obtain, for all $\Re(z) > \delta$,

$$H(z) = \sum_{j=0}^n A_j G^{(j)}(z) \Phi^{(n-j)}(z),$$

with $A_j = (-1)^n \sum_{k=0}^j \alpha_k C_{n-k}^{j-k}$. From Proposition 3 we can choose $\delta > \delta_0^+$ such that, for $\Re(z) > \delta$, $\Phi(z) \neq 0$. Since $A_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \neq 0$,

$$G^{(n)}(z) = \frac{H(z)}{A_n \Phi(z)} - \sum_{j=0}^{n-1} A_j G^{(j)}(z) \frac{\Phi^{(n-j)}(z)}{A_n \Phi(z)}. \quad (4.10)$$

Thus, we are lead to solve a differential equation of order n whose coefficients are holomorphic functions. To come back to the initial problem we need a growth control of the solution. Such equations can be solved by taking the inverse Laplace transform (see for instance [CT01]). Let us prove that the coefficients satisfy growth conditions that allow to take inverse Laplace transforms. We choose $\delta_1 > \delta_0^+$ sufficiently large. Then, from Lemma 1, for $k \in \{1, \dots, n\}$, one can find $c_k \neq 0$ and Ψ_k a holomorphic function on Π_{δ_1} such that

$$\frac{\Phi^{(k)}(z)}{\Phi(z)} = c_k z^{-k} + \Psi_k(z), \text{ with } |\Psi_k(z)| \leq C_k |z|^{-k-1}.$$

Since $z^{-k} = \mathcal{L}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)(z)$, we can define, for any $b > \delta_1$, the function

$$\varphi_k(t) = -\frac{A_{n-k}}{A_n} \left(\frac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Psi_k(b+iu) e^{(b+iu)t} du \right).$$

Then, when $\delta > \delta_1$, $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} dr)$, and φ_k admits $-\frac{A_{n-k}\Phi^{(k)}}{A_n\Phi}$ for Laplace Transform in Π_δ . Similarly, with the same arguments as in the radial case, there exists $g_0 \in L^2_a(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} dr)$ with Laplace Transform $H(z)/A_n\Phi(z)$ in Π_δ . We take the inverse Laplace transform of Equation (4.10) to obtain

$$(-1)^n t^n g(t) = g_0(t) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_0^t s^j g(s) \varphi_{n-j}(t-s) ds, \quad (4.11)$$

where g_0 and g have support in $(a, +\infty)$. For $\delta > 0$ and $n \in \mathbb{N}^*$, we write $L^2_{n,\delta}((a, +\infty))$ for functions in $L^2(\mathbb{R}^+, (1+t)^{2n-2} e^{-\delta t})$ with support in $(a, +\infty)$. For $g \in L^2_{n,\delta}((a, +\infty))$, let us define on \mathbb{R}^+ ,

$$\mathcal{N}(g)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+n} t^{-n} \int_0^t s^j g(s) \varphi_{n-j}(t-s) ds \text{ if } t \geq a, \mathcal{N}(g)(t) = 0 \text{ else.}$$

Lemma 3. *There exists $\delta_2 > \delta_1$ such that, for all $\delta \geq \delta_2$, the operator $\mathcal{N} : L^2_{n,\delta}((a, +\infty)) \rightarrow L^2_{n,\delta}((a, +\infty))$ has norm strictly smaller than 1.*

Proof. Let $\delta > \delta_1$ and $\delta' \in (\delta_1, \delta)$. By the Cauchy-Schwarz Inequality,

$$\int_a^{+\infty} t^{-2n} \left(\int_0^t s^j g(s) \varphi_{n-j}(t-s) ds \right)^2 (1+t)^{2n-2} e^{-\delta t} dt \leq a^{-2n} C(\varphi_{n-j}, \delta) \int_a^{+\infty} g(s)^2 (1+s)^{2n-2} e^{-\delta s} ds,$$

where

$$C(\varphi_{n-j}, \delta) = \left(\int_0^{+\infty} |\varphi_{n-j}(u)| e^{-(\delta/2)u} du \right)^2 \leq \frac{1}{\delta - \delta'} \int_0^{+\infty} \varphi_{n-j}(u)^2 e^{-\delta' u} du.$$

Thus, since $\varphi_{n-j} \in L^2(\mathbb{R}^+, e^{-\delta' r} dr)$, $\mathcal{N}(L^2_{n,\delta}((a, +\infty))) \subset L^2_{n,\delta}((a, +\infty))$ and one can find $C_{n,a} > 0$ such that

$$\|\mathcal{N}\| \leq \frac{C_{n,a}}{\delta - \delta'}.$$

Then it is sufficient to choose $\delta_2 > \delta' + C_{n,a}$ such that \mathcal{N} has norm strictly smaller than 1. \square

Therefore, when $\delta > \delta_2$, Equation (4.11) has a unique solution g in $L^2_{n,\delta_2}((a, +\infty)) \subset L^2_a(\mathbb{R}^+, e^{-\delta r} r^{1/2} dr)$. Moreover, by taking Laplace Transform of (4.11), the Laplace transform of g satisfies Equation (4.10) and g is the unique solution of Equation (4.9). \square

Finally, $T_l^*(L^2_a(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{-1/2} dr))$ is dense in $L^2_a(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$ and Theorem 2 is proved.

Final Remark. Let us mention that this study leads to a natural problem of complex analysis. We have given sufficient conditions on the window φ such that R_φ is injective on $\cap_{\delta > \delta_0} L^2_\delta(\mathbb{R}^d)$. More precisely, under these assumptions, we have found, for each l , an abscissa $\delta(l) > \delta_0$ such that T_l is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta(l)r} r^{\frac{d-2}{2}} dr)$. We would like to find necessary and sufficient conditions on the window φ for injectivity of R_φ on $L^2_\delta(\mathbb{R}^d)$ for a fixed $\delta > \delta_0$. The radial case emphasizes the necessary condition that Φ , the Laplace

transform of φ , must have no zero on Π_δ (a condition which cannot be written easily on φ itself). Thus, one may consider this problem on the Laplace Transform domain, using complex analysis methods. When considering the Laplace Transform, it is natural to work first with Hardy spaces H^2 and H^∞ of the half-plane $\{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > 0\}$. We can state the following characterization which relies on the theory of outer functions and invariant subspaces (see for instance [Hof62]).

Proposition 7. *Let $d = 2$ and $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$. Then, for $\delta > \delta_0$, T_0 is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} dr)$ if and only if $\Phi(z) \neq 0$ for all $z \in \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \geq \delta/2\}$, where*

$$\Phi(z) = \mathcal{L} \left(\varphi t^{-1/2} \right) (z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \varphi(t) t^{-1/2} dt.$$

Proof. We have already seen that T_0 is injective on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} dr)$ if and only if T_0^* has a dense range in $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} dr)$. Since $L^2(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+, r^{1/2} dr)$ is dense in $L^2(\mathbb{R}^+, r^{1/2} dr)$ and $L^2(\mathbb{R}^+, dr)$, T_0^* has a dense range in $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} dr)$ if and only if

$$\left\{ \int_0^u g(p) \varphi(u-p) (u-p)^{\frac{d-3}{2}} e^{-\frac{\delta}{2}(u-p)} dp; g \in L^2(\mathbb{R}^+) \right\} \text{ is dense in } L^2(\mathbb{R}^+). \quad (4.12)$$

By Laplace transform we have a correspondance between $L^2(\mathbb{R}^+)$ and H^2 , the Hardy space of the half-plane $\{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > 0\}$. Actually, the Paley-Wiener Theorem ([Hof62] p.131) states that $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ if and only if its Laplace Transform belongs to H^2 . Since $\varphi \in \mathcal{W}_{\delta_0}$, with $\delta_0 < \delta$, $\tau_{\delta/2} \Phi(z) := \Phi(z + \delta/2) \in H^\infty$. Then (4.12) holds if and only if

$$\{\tau_{\delta/2} \Phi G; G \in H^2\} \text{ is dense in } H^2.$$

By the Lax Theorem [Hof62, p.107] this holds if and only if $\tau_{\delta/2} \Phi$ is an outer function of H^∞ . But, since $\tau_{\delta/2} \Phi$ is continuous on the imaginary axis, it is an outer function of H^∞ if and only if $\tau_{\delta/2} \Phi(z) \neq 0$ for all $z \in \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \geq 0\}$. \square

We do not know wether the injectivity holds for R_φ under the assumptions of Proposition 7. An easy modification of the proof above has allowed us to prove the injectivity of T_1 , T_2 and T_3 on $L^2(\mathbb{R}^+, e^{\delta r} dr)$.

Chapitre 5

Au delà du gaussien

Nous présentons dans ce chapitre un article en collaboration avec A. Estrade, soumis. Nous définissons un modèle poissonnien de microboules. Nous regardons les propriétés d'autosimilarité de ce modèle et de ses transformées X-ray à fenêtre.

Résumé

Nous considérons un modèle d'agrégation de petites boules, jetées aléatoirement selon une mesure aléatoire de Poisson. Nous définissons un champ aléatoire obtenu en comptant, pour chaque point, le nombre de boules qui le contiennent. Nous nous intéressons particulièrement aux propriétés d'autosimilarité asymptotique locale (lass) ainsi qu'à l'action des transformées X-ray à fenêtre sur ce modèle. Nous montrons que ce modèle possède deux paramètres d'autosimilarité distincts selon que la propriété lass est étudiée en loi ou au second ordre. Nous montrons une relation entre le comportement lass du champ et celui de ses transformées X-ray à fenêtre. Ces résultats peuvent être utilisés pour la modélisation et l'analyse de milieux granulaires, des images ou des connections internet.

Poisson microballs : self-similarity and directional analysis

Hermine BIERMÉ & Anne ESTRADE

abstract

We study a random field obtained by counting the number of balls containing each point, when overlapping balls are thrown at random according to a Poisson random measure. We are particularly interested in the local asymptotical self-similarity (lass) properties of the field, as well as the action of X-ray transforms. We exhibit two different lass properties when considering the asymptotic either *in law* or *on the second order moment* and prove a relationship between the lass behavior of the field and the lass behavior of its X-ray transform. These results can be exploited to modelize and analyze granular media, images or connections network.

5.1 Introduction

The purpose of this paper is the study of a random field obtained by throwing overlapping balls. Such a field is particularly well-adapted for modelling situations resulting from the addition or superposition of many small events. One can think for instance to 3D granular or more generally porous media, to heterogeneous or perturbed images, or even to communication network. Actually we consider a collection of balls in \mathbb{R}^d ($d \geq 1$), with different radii, which may overlap. Centers and radii are chosen at random according to a Poisson random measure on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. The field under study is built up on \mathbb{R}^d as the number of balls containing each point. For $d = 3$ it can be interpreted as a mass density : the more one point is covered by balls, the highest is the mass density at this point. For $d = 2$, the field can be interpreted as the discretized-gray level of each pixel in a black and white picture. For $d = 1$ one can imagine through the obtained process a counter, which delivers at each time the number of active connections in the network. In that case, the individual connections or calls are modelized by 'half-ball-', instead of ball-, intervals given by their starting time and duration.

To perform the analysis of the field, we follow two ways. On one way (case $d \geq 2$), the action of an X-ray transform on the field is exploited -this transform is the mathematical interpretation for a radiographic process-. On the other way (valid for any $d \geq 1$), self-similarity properties are explored. More precisely we focus on a parameter, which is

supposed to contain tangible information on the structure of the media, called *local asymptotical self-similar index*, *lass index* in short, and roughly defined at each point x_0 as the critical exponent $H > 0$ such that

$$\text{“the field } \frac{X(x_0 + \lambda) - X(x_0)}{\lambda^H} \text{ converges to something } \neq 0 \text{ as } \lambda \searrow 0 \text{”}$$

where X is the field describing the media.

Our main results can be summarized in the following points :

- 1- the lass index takes two different values when considering the above asymptotic either ‘in law’ or ‘on the second order moment’ ;
- 2- there are explicit formulae that link the lass indices of a field and the lass indices of the X-ray transform of it ;
- 3- when anisotropy is introduced in the model, it can be recovered through the lass indices following specific devices.

The origin of this paper has to be found in two inspiration sources. One for the model, the other one for the analysis method.

Concerning the model, the ‘micropulses’ introduced by R. Ciosek-Georges and B. Mandelbrot [CGM95] are actually responsible for the name ‘microballs’. The micropulses, as well as our microballs -at least when they are isotropic-, are determined by their center ξ and their radius r where the pair (ξ, r) is obtained via a Poisson random measure on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ with intensity

$$d\nu(\xi, r) = Cr^{-\theta+d} dr d\xi$$

for some positive θ . In [CGM95], a random field is associated with the sum of heights of infinitesimal pulses and homogenization type results are obtained.

The idea appeared eighty years ago, in 1925, when S.D. Wicksell [Wic25] introduced a first model, the famous corpuscles, made of random 3D spheres defined as above. The aim of his study was a stereological question : how to get information about the numbers of spheres starting from the observation of a section of the media ? Since then, this kind of model has been extensively deepened and extended. We address to [SKM89] or [Ser82] for many examples of random models based on Poisson point process. They all belong to ‘germ-grain’ model : the centers are the germs, usually uniformly distributed in \mathbb{R}^d , and the grains have a specific shape depending on the media under study. Here we choose spheres with varying radii given by a power law. As far as we know, if considering the balls associated to a Poisson random measure on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ through the pair (center, radius) is not a new idea, the field obtained by counting the numbers of balls covering each point has never been studied for himself. Moreover, in the case $d \geq 2$, we allow anisotropy in our model by choosing an anisotropic intensity measure. The centers of the balls are still uniformly distributed in \mathbb{R}^d but the distribution of the radius of the balls whose center is situated along a line depends on the direction of the line.

A one dimensional ($d = 1$) germ-grain model can also be relevant for modeling communication networks : the germs stand for the starting time of the individual OFF periods (calls) and the grains stand for the duration. The inter arrival times are uniformly distributed on the time axis and the call durations are still given by a power law. Although these elements are very close to those considered by S. Cohen and M. Taqqu in [CT03], the counting process that we build up differs from their Poissonized Telecom process. The former provides the number of calls at each time meanwhile the later is a mixed moving average that sums the height of connections.

Concerning the method of analysis, it is inspired from the methods created for Gaussian fields. More specifically we turn to [BE03], where anisotropic Gaussian fields are analyzed by performing X-ray transforms and evaluating lass indices. The main tool is the notion of local asymptotic self-similarity. Introduced in [BJR97] in a Gaussian context, this notion has been extended to non Gaussian context (see [CI03], [Lac04] for instance). The lass parameter can also be related to other parameters of interest as roughness index [BCI04] or Hausdorff dimension [BCI03]. In the area of networking as well the notion of self-similarity, at small or large scales, is a fundamental one and it is highly connected to long-range dependence. All these notions are well adapted to isotropic fields. But since the fields we are working with are eventually anisotropic, we need one more tool: the X-ray transform will bring directional information on the media. The associated techniques developed in [BE03] in a Gaussian context are still valuable in the Poisson context.

The paper is organized as follows. The microball model, ie the field that counts the number of balls covering each point, is introduced in Section 2 after some recalls on Poisson point processes. Section 3 is devoted to the self-similarity properties: the different notions of local asymptotic self-similarity are made precise and a first main theorem concerning the microball model, Theorem 1, is proved. An homogenization result is also established. In Section 4, we introduce the X-ray transform of the microball model and state the second main theorem, namely Theorem 2.

5.2 The microball model

5.2.1 Poisson point process

We recall here some well-known facts about Poisson point process and introduce some usual notations. For more details on the subject, we refer to [Rei93] or [SKM89].

Let (E, ν) be a Polish space with ν a σ -finite measure and let N be a Poisson measure on E with intensity measure ν .

Campbell's Theorem (see for instance [SKM89] Lemma 5.3.1) claims that, for any function φ in $L^1(E, d\nu)$, the integral

$$\left(\int \varphi dN \right) (\omega) = \int_E \varphi(\xi) N(\omega, d\xi)$$

is pathwise well defined for almost all ω , the random variable $\int \varphi dN$ is integrable and

$$\mathbf{E} \left(\int \varphi dN \right) = \int \varphi(\xi) \nu(d\xi) .$$

Moreover, if φ belongs to $L^2(E, d\nu)$ then the random variable $\int \varphi dN$ is square integrable and

$$\text{Var} \left(\int \varphi dN \right) = \int \varphi^2(\xi) \nu(d\xi) .$$

Denoting by $\tilde{N} = N - \nu$ the compensated Poisson measure, the map

$$\varphi \in L^1 \cap L^2(E, d\nu) \mapsto L^2(\Omega) \ni \int \varphi d\tilde{N} = \int \varphi dN - \int \varphi d\nu$$

appears as an isometric map for the L^2 -norms. By density, the integral

$$\int \varphi d\tilde{N} := \int_E \varphi(\xi) \tilde{N}(d\xi)$$

is then defined as a limit in $L^2(\Omega)$, for any function φ in $L^2(E, \nu)$. The random variable $\int \varphi d\tilde{N}$ is square integrable, $\mathbf{E} \left(\int \varphi d\tilde{N} \right) = 0$ and

$$\mathbf{E} \left| \int \varphi d\tilde{N} \right|^2 = \int \varphi^2(\xi) \nu(d\xi).$$

Finally, the characteristic function of $\int \varphi d\tilde{N}$ is given by

$$\mathbf{E} \exp \left(it \int \varphi d\tilde{N} \right) = \exp \left(\int (e^{it\varphi} - 1 - it\varphi) d\nu \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5.2.2 The microball model

We now work with $E = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ as a state space for the Poisson point process. Each pair (ξ, r) in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ is associated with $B(\xi, r)$, the open ball in \mathbb{R}^d with center ξ and radius r . The ‘points’ (ξ, r) are chosen at random according to the following prescription: centers ξ are distributed uniformly (Lebesgue measure) in \mathbb{R}^d and radii r are given by a power law in $(0, 1)$. The exponent of the power law can either be constant (isotropic case) or depending on the direction of ξ (anisotropic case). Precisely we consider intensity measures on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ with special shapes ν_m and ν_h prescribed below.

Let us define for $m > 0$, the isotropic intensity measure ν_m on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ as

$$\nu_m(d\xi, dr) = r^{-d-1+2m} \mathbf{1}_{(0,1)}(r) d\xi dr. \quad (5.1)$$

For h a continuous function on the sphere $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| = 1\}$ such that $\min h > 0$, we define the anisotropic intensity measure ν_h on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ as

$$\nu_h(d\xi, dr) = r^{-d-1+2h(\xi)} \mathbf{1}_{(0,1)}(r) d\xi dr, \quad (5.2)$$

where we extend h to $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ to an homogeneous function of degree 0.

Intuitively, we look at the randomly chosen $B(\xi, r)$ as small aggregated grains constituting an heterogeneous media (case $d = 3$) or a noisy image (case $d = 2$). The allowed overlappings have to be interpreted as regions of the media where the mass intensity is higher or as areas of the picture where elementary grains overlapp. So, for each x in \mathbb{R}^d ($d = 3$ or 2) we are naturally interested in the number of balls $B(\xi, r)$ that contain the point x . When the centers and radii of balls are given by a Poisson random measure N_h with intensity ν_h , this random variable is described by the integral -if exists- $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(x) N_h(d\xi, dr)$.

Let us also specify the intuitive scenario we have in mind for the one dimensional case ($d = 1$). We look at the ‘half-ball’-intervals $[\xi, \xi + r)$ as the duration of a single LAN connection. The pairs (ξ, r) are randomly chosen by a Poisson random measure N_m with intensity ν_m defined by (5.1) (note that in dimension one, the word ‘isotropic’ makes no sense). The periods where two or more users are connected are described by the interval overlappings. Then the number of connected users at time x is equal to the one dimensional integral -if exists- $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{[\xi, \xi+r)}(x) N_m(d\xi, dr)$.

We will not distinguish anymore the special case $d = 1$, since the integrand $\mathbf{1}_{[\xi, \xi+r]}$ behaves like $\mathbf{1}_{B(\xi, r)}$ and the homogeneous function h of degree 0 is necessarily constant in this case. So from now on, let us denote for x, ξ in \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) and r in \mathbb{R}^+ ,

$$\varphi(x, \xi, r) = \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(x) .$$

Denoting by m the minimum of h , the following inequalities are clear :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |\varphi(x, \xi, r)| \nu_h(d\xi, dr) &\leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |\varphi(x, \xi, r)| \nu_m(d\xi, dr) \\ &\leq C_d \int_0^1 r^{-1+2m} dr , \end{aligned}$$

where C_d stands for the unit ball volume in \mathbb{R}^d . This proves that $\varphi(x, \cdot)$ belongs to $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu_h)$ and allows to state the following definition.

Definition 1. Let h be a continuous function on the sphere $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| = 1\}$ such that $\min h > 0$, and let N_h be a Poisson random measure with intensity ν_h . We call microball model with directional index h the field defined on \mathbb{R}^d as

$$\begin{aligned} X(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(x) \tilde{N}_h(d\xi, dr) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(x) N_h(d\xi, dr) - \mathbf{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(x) N_h(d\xi, dr) \right) . \end{aligned}$$

Let us remark that the continuity assumption on h can be weakened. It is used for sake of simplicity.

Proposition 1. If the directional index h is constant, then

- the microball model is isotropic, ie for every rotation R centered at 0 in \mathbb{R}^d , $X \circ R \stackrel{fdd}{=} X$,
- the microball model is stationary, ie for all x_0 in \mathbb{R}^d , $X(x_0 + \cdot) \stackrel{fdd}{=} X$.

Proof. Let us suppose that $h(\xi) = m$ a.e. with $m > 0$ and choose (x_1, \dots, x_n) in $(\mathbb{R}^d)^n$. The characteristic function of $(X \circ R(x_1), \dots, X \circ R(x_n))$ is given by

$$\mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^n t_j X \circ R(x_j) \right) = \mathbf{E} \exp \left(i \int \sum_{j=1}^n t_j \varphi(R(x_j), \cdot) d\tilde{N}_m \right)$$

for (t_1, \dots, t_n) in \mathbb{R}^n , and thus

$$\mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^n t_j X \circ R(x_j) \right) = \exp \int \left[e^{i \sum_{j=1}^n t_j \varphi(R(x_j), \cdot)} - 1 - i \sum_{j=1}^n t_j \varphi(R(x_j), \cdot) \right] d\nu_m .$$

Since $\varphi(Rx, \xi, r)$ equals $\varphi(x, R^{-1}\xi, r)$ and ν_m is rotation invariant with respect to ξ ,

$$\mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^n t_j X \circ R(x_j) \right) = \mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^n t_j X(x_j) \right) .$$

This proves that X is isotropic. Stationarity follows from similar computations starting from $\mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^n t_j X(x_0 + x_j) \right)$ and using the fact that $\varphi(x + x_0, \xi, r) = \varphi(x, \xi - x_0, r)$. \square

Let us remark that it is sufficient to consider the case $n = 1$ in the above computations. We will do it hereafter.

Most of the properties of the microball model X that we will study in the sequel deal with the local behavior of X . So let us compute the increments of X and state a useful lemma about it. In what follows we write for x and x' in \mathbb{R}^d ,

$$X(x) - X(x') = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \psi(x - x', \xi - x', r) \tilde{N}_h(d\xi, dr)$$

where

$$\psi(x, \xi, r) = \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(x) - \mathbf{1}_{B(\xi, r)}(0) (= \mathbf{1}_{|x-\xi| < r \leq |\xi|} - \mathbf{1}_{|\xi| < r \leq |x-\xi|}).$$

Lemma 1. *Let m belong to $(0, \frac{1}{2})$.*

For all x in \mathbb{R}^d and p in $(0, \infty)$, $\psi(x, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, r^{-d-1+2m} d\xi dr)$. Moreover, for all Borelian set E in \mathbb{R}^d with positive measure, if

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_E(\xi) \psi(\cdot, \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr = 0$$

in \mathbb{R}^d , then the set E^c does not contain any open ball.

Proof. First statement: let $x \in \mathbb{R}^d$. For $x = 0$, $\psi(0, \cdot)$ vanishes, so we can assume that $x \neq 0$. Note that

$$|\psi(x, \xi, r)|^p = |\psi(x, \xi, r)| = \mathbf{1}_{|x-\xi| < r \leq |\xi|} + \mathbf{1}_{|\xi| < r \leq |x-\xi|}.$$

Hence,

$$\int_{\mathbb{R}^+} |\psi(x, \xi, r)|^p r^{-d-1+2m} dr = \frac{2}{d-2m} \mathbf{1}_{|\xi| < |x-\xi|} \left(|\xi|^{-d+2m} - |x-\xi|^{-d+2m} \right).$$

On one hand, since $m > 0$, the function $|\xi|^{-d+2m}$ is locally integrable. On the other hand, for $|\xi| \geq 4|x|$, one can find $C > 0$ such that

$$\left| |\xi|^{-d+2m} - |x-\xi|^{-d+2m} \right| \leq C|x||\xi|^{-d-1+2m}.$$

Then, for $m < \frac{1}{2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |\psi(x, \xi, r)|^p r^{-d-1+2m} dr d\xi < +\infty.$$

Moreover, in this case, by rotation invariance and homogeneity, there exists a constant $C(m) > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |\psi(x, \xi, r)|^p r^{-d-1+2m} dr d\xi = C(m)|x|^{2m}. \quad (5.3)$$

Second statement: note that for all x in \mathbb{R}^d ,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr = (2m-d)^{-1} \left(|x-\xi|^{-d+2m} - |\xi|^{-d+2m} \right)$$

and hence, for all Borelian set E in \mathbb{R}^d ,

$$\begin{aligned} I_E^m(x) &: = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_E(\xi) \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(\xi) (2m-d)^{-1} \left(|x-\xi|^{-d+2m} - |\xi|^{-d+2m} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Let us suppose that we can find an open nonempty ball $B \subset E^c$. Then I_E^m is smooth on B . The Laplacian of I_E^m can easily be computed

$$\Delta I_E^m(x) = -2(1-m) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(\xi) |x-\xi|^{-d+2m-2} d\xi,$$

and proved to be negative on B . Thus, I_E^m does not vanish on B . \square

Let us remark that, by (5.3), the microball model X satisfies, for x, x' in \mathbb{R}^d ,

$$\mathbf{E} (X(x) - X(x'))^2 \leq C(m) |x - x'|^{2m},$$

where $m = \min h$. Then, the field X is mean square continuous.

In the isotropic case, by the correlation theory of stationary random fields (see [Yag97] for example), there exists a finite positive Radon measure σ such that

$$\text{Cov} (X(x), X(0)) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} d\sigma(\xi).$$

Computing the inverse Fourier transform we obtain that σ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. The spectral density of the isotropic model is given by

$$(2\pi)^{d/2} |\xi|^{-2m-d} \int_0^{|\xi|} J_{d/2}^2(s) s^{-d-1+2m} ds,$$

where $J_{d/2}$ is the Bessel function (see [RK96] p. 406 for example). Let us recall that

$$J_{d/2}(s) = \frac{s^{d/2}}{2^{d/2} \Gamma(1 + d/2)} (1 + \mathcal{O}(|s|^2)), \quad s \rightarrow 0,$$

and

$$J_{d/2}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \left(\cos \left(s - \frac{(d+1)\pi}{4} \right) + \mathcal{O}(s^{-1}) \right), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Hence, the previous spectral density has a power law behavior.

5.3 Self-similarity

5.3.1 Local asymptotic self-similarities

In this section, we will focus on self-similarity properties. Usually self-similarity requires a scale invariance property valid for all scales. This is quite restrictive, and we will deal with self-similarity properties that are fulfilled ‘at small scales’ only. One of them is the local asymptotic self-similarity property, introduced in [BJR97]. Although it is denoted there as the *lass* property, we will call it *fdd-lass* for reasons that become clear afterwards. We recall it now.

Let $H > 0$. A field $X = \{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ is *fdd-locally asymptotically self-similar of index H at point $x_0 \in \mathbb{R}^d$* if

$$\text{the finite dimensional distributions of } \left\{ \frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^H}; x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

converge to the finite dimensional distributions of a non vanishing field as $\lambda \rightarrow 0^+$. The limit field is called *tangent field at point x_0* (see [Fal03]).

When one deals with real data, it is almost impossible to see whether such a limit is satisfied for the finite dimensional distributions. Therefore, we introduce another asymptotic self-similarity property, only concerned with the second order moments. We call it *cov-lass* and define it by the following.

Let $H > 0$. A field $X = \{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ is *cov-locally asymptotically self-similar of index H at point $x_0 \in \mathbb{R}^d$* if

$$\text{the covariance function of } \left\{ \frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^H}; x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

converges to a non vanishing covariance function as $\lambda \rightarrow 0^+$. By analogy with the fdd situation, the limit covariance will be called *tangent covariance at point x_0* .

Note that the above self-similarity properties are equivalent (with the same value for the H parameter) when tested on centered Gaussian processes. But note also that none of them implies the other one in a general setting. We will test both properties on the microball model.

We introduce a weaker notion of self-similarity at small scales. It will be used when the above limits do not exit but a critical index (see [BE03]) is still observed. More precisely we say that X admits H as *critical fdd-lass index at point x_0* if

$$H = \sup \left\{ \alpha ; \frac{X(x_0 + \lambda \cdot) - X(x_0)}{\lambda^\alpha} \xrightarrow{fdd} 0 \text{ as } \lambda \rightarrow 0^+ \right\},$$

where \xrightarrow{fdd} means the convergence of finite dimensional distribution. By analogy, a definition for the *critical cov-lass index at point x_0* can be written out.

Note that if H_{cov} is the critical cov-lass index for X at point x_0 , then for all $\alpha < H_{cov}$ the covariance function of $\left\{ \frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^\alpha}; x \in \mathbb{R}^d \right\}$ converges to 0 as $\lambda \rightarrow 0^+$ and then, its finite dimensional distributions also. Thus, the critical fdd-lass index for X at point x_0 satisfies $H_{fdd} \geq H_{cov}$.

Clearly, when X is fdd- (or cov-) locally asymptotically self-similar of index H at point x_0 , then X admits H as critical fdd- (or cov-) lass index at point x_0 . In what follows, we will omit the word ‘critical’ when referring to those indices.

5.3.2 The lass Theorem

We now state a theorem including all those notions of local asymptotical self-similarity. In order to make it clear, the several situations are presented in an array.

Theorem 1. • *Let $m \in (0, \frac{1}{2})$ and let X_m be the isotropic microball model with index m . The following local asymptotical self-similarity properties for X_m at any point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ are valid.*

x_0	<i>cov-lass at x_0</i>	<i>fdd-lass at x_0</i>
any x_0	<i>lass-index = m</i> <i>tangent cov = cov of fBm</i>	<i>lass-index = $+\infty$</i>

• Let h be a continuous function on S^{d-1} such that $0 < m := \min h < \frac{1}{2}$, and let X be a microball model with directional index h . The following local asymptotical self-similarity properties for X at point x_0 are valid.

x_0	<i>assumption on h</i>	<i>cov-lass at x_0</i>	<i>fdd-lass at x_0</i>
$x_0 = 0$	$\text{meas}(\{h = m\}) > 0$	<i>lass-index=m</i> <i>tangent cov = γ_m</i>	<i>lass-index=$2m$</i> <i>tangent field = Z_m</i>
$x_0 = 0$	$\text{meas}(\{h = m\}) = 0$	<i>lass-index=m</i> <i>not cov-lass</i>	<i>lass-index=$2m$</i> <i>not fdd-lass</i>
$x_0 \neq 0$	$h(x_0) < \frac{1}{2}$ <i>h is β-Lipschitz</i>	<i>lass-index=$h(x_0)$</i> <i>tangent cov = cov of fBm</i>	<i>lass-index \geq</i> <i>$\min(1, \beta + 2h(x_0))$</i>

where

$$\gamma_m(x, x') = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(\xi)=m} \psi(x, \xi, r) \psi(x', \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr ,$$

and

$$Z_m(x) = -|x|^{2m} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(\xi)=m} \psi\left(\frac{x}{|x|}, \xi, r\right) r^{-d-1+2m} d\xi dr , \quad x \in \mathbb{R}^d .$$

How to read the arrays? The first (resp. first two) column(s) is (resp. are) devoted to the assumptions, whereas the two next ones are devoted to the conclusions.

Precisely, the first column deals with the point x_0 where the increments are evaluated. In the isotropic case, X_m is stationary and therefore the behavior of X_m around x_0 does not depend on x_0 . In the anisotropic case, two values of x_0 are distinguished with two different behaviors: $x_0 = 0$ and $x_0 \neq 0$.

The second column (anisotropic case) contains the required assumptions on h . In the case $x_0 = 0$, we distinguish two situations: either the Lebesgue measure of the set where the minimum of h is reached is zero, or not. In the case $x_0 \neq 0$, h is assumed to be β -Lipschitz on the sphere, with β in $(0, 1]$.

The third (respectively, fourth) column states the result concerning the covariance (respectively, the finite-dimensional distributions) local asymptotic self-similarity. When the field X is cov-lass (respectively, fdd-lass), the value of the lass index is given as well as the tangent covariance (respectively, tangent field). When the field is not cov-lass (respectively, not fdd-lass) but admits a critical cov-lass index (respectively, fdd-lass index), the value of the lass index is given.

Before proceeding to the proof, let us comment this statement.

First note that the lass-indices are not the same when considering either the covariance or the finite dimensional distributions. This situation totally differs from the Gaussian case.

In the one dimension, only the first array makes sense. It describes the small scale behavior of the number of active connections in a communication network: the covariance is locally asymptotically self similar and behaves like a fractional Brownian motion covariance, meanwhile no local asymptotical self similarity in law has to be expected. More generally, the same is observed in the multi-dimensional isotropic case. Actually the cov-lass behavior is a consequence of the power law behavior of the spectral density.

In the anisotropic case, the role played by x_0 has to be pointed out. The lass indices describing the behavior around a point $x_0 \neq 0$ depend only on $h(x_0)$. On the opposite, when one looks at the behavior around $x_0 = 0$, then all the directions are concerned and the lass indices depend on the minimum m of the directional index h .

Nevertheless note that for $x_0 = 0$ there always exists a cov-lass index and a fdd-lass index and that the later always equals the double of the former. This multiplicative factor is characteristic of the Poisson structure as proved by the following exercise.

Remark 1. *Let (X_n) be a sequence of Poisson random variables. Suppose there exists some $H > 0$ and $v > 0$ such that $\text{Var}(n^H(X_n - E(X_n)))$ tends to v when n tends to $+\infty$. Then $n^{2H}(X_n - E(X_n))$ tends in distribution to $-v$.*

Moreover when h is not constant and $\{h = m\}$ has positive measure, the tangent field at 0 is deterministic and not zero, hence does not have stationary increments. This is worth to be noticed and linked to a result by Falconer [Fal03], which states that at almost all points the tangent field -if it exists- must have stationary increments. Hence the point $x_0 = 0$ appears as an ‘exceptional point’ (see [Lac05] for other examples of exceptional points).

Proof. Anisotropic case. Let us suppose first that h is not constant. As it is more simple to deal with, the isotropic case will be examined later on.

1. Let us first be concerned with the covariance self-similarity property, as described in the third column of the array. We compute the covariance of the increments at point x_0 . For H in $(0, 1)$ and x, x' in \mathbb{R}^d , we write

$$\Gamma_\lambda^H(x_0, x, x') = \text{Cov} \left(\frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^H}, \frac{X(x_0 + \lambda x') - X(x_0)}{\lambda^H} \right).$$

By the isometry property

$$\Gamma_\lambda^H(x_0, x, x') = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \lambda^{-2H} \psi(\lambda x, \xi - x_0, r) \psi(\lambda x', \xi - x_0, r) \nu_h(d\xi, dr),$$

and by a change of variable, it is also equal to

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \lambda^{-2(H-h(x_0+\lambda\xi))} \psi(x, \xi, r) \psi(x', \xi, r) r^{-d-1+2h(x_0+\lambda\xi)} d\xi dr. \quad (5.4)$$

1-a. We look at the case $x_0 = 0$ and assume that $\{\xi \in \mathbb{R}^d; h(\xi) = m\}$ has positive measure. Thus, using Lemma 1, Lebesgue’s Theorem gives that $\Gamma_\lambda^m(0, x, x')$ tends to

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(\xi)=m} \psi(x, \xi, r) \psi(x', \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr := \gamma^m(x, x'),$$

which does not vanish by assumption.

1-b. We are still concerned with the case $x_0 = 0$ but assume now that $\{\xi \in \mathbb{R}^d; h(\xi) = m\}$ has measure 0. According to (5.4) the covariance $\Gamma_\lambda^H(0, x, x')$ tends to 0 for $H \leq m$. On the other hand, for $H = m + 2\epsilon$ with $\epsilon > 0$ and for λ in $(0, 1)$,

$$\Gamma_\lambda^H(x, x) \geq \lambda^{-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^d \times (0, 1)} \mathbf{1}_{h(\xi) < m + \epsilon} \psi(x, \xi, r)^2 r^{-d-1+2h(\xi)} d\xi dr,$$

where $\{\xi \in \mathbb{R}^d; h(\xi) < m + \epsilon\}$ has positive measure. So the above quantity tends to infinity when λ tends to 0^+ . Hence the exponent m is proved to be the critical cov-lass index for X at $x_0 = 0$, although X is not cov-lass at $x_0 = 0$.

1-c. Let us consider now the local behavior around $x_0 \neq 0$. We assume that $h(x_0) < \frac{1}{2}$ and that h is β -Lipschitz on the sphere with $0 < \beta \leq 1$. We will first establish that

$$\Gamma_\lambda^{h(x_0)}(x_0, x, x') \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \Gamma^{h(x_0)}(x, x'), \quad (5.5)$$

where

$$\Gamma^{h(x_0)}(x, x') = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \psi(x, \xi, r) \psi(x', \xi, r) r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr,$$

and then prove that $\Gamma^{h(x_0)}$ is the covariance of a fractional Brownian motion with Hurst index $h(x_0)$.

Since $h(x_0) < \frac{1}{2}$, Lemma 1 indicates that the function $\psi(x, \cdot)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr)$. By Cauchy-Schwarz Inequality, in order to prove (5.5), it is enough to prove that the difference $I(\lambda)$, given by

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \psi(x, \xi, r)^2 \left| (\lambda r)^{-2(h(x_0) - h(x_0 + \lambda \xi))} - 1 \right| r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr, \quad (5.6)$$

tends to 0 as λ goes to 0^+ . Let us remark that, with the β -Lipschitz assumption on h , for $x_0 \neq 0$, one can find $C(x_0) > 0$ such that

$$|h(x_0) - h(x_0 + \lambda \xi)| \leq C(x_0) (\lambda |\xi|)^\beta.$$

Then, for some positive p and $q \in (0, 1)$ to be fixed hereafter, when $\lambda^{p+1} < \lambda r < 1$ and $\lambda |\xi| < \lambda^{1-q}$, one can find $C > 0$ such that

$$\left| (\lambda r)^{-2(h(x_0) - h(x_0 + \lambda \xi))} - 1 \right| \leq C (\lambda |\xi|)^\beta |\ln \lambda|, \quad (5.7)$$

for λ small enough. Without loss of generality, we can assume $\beta < 1 - 2h(x_0)$. In this case, we will prove that, for λ small enough compared to x ,

$$I(\lambda) \leq C(x) \lambda^\beta |\ln \lambda|, \quad (5.8)$$

with $C(x) > 0$. We split the integral into

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} = \int_{B(0, \lambda^{-q}) \times (\lambda^p, \lambda^{-1})} + \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^p)} + \int_{B(0, \lambda^{-q})^c \times (0, \lambda^{-1})}.$$

By (5.7), the same kind of arguments as in Lemma 1 yields to

$$\left| \int_{B(0, \lambda^{-q}) \times (\lambda^p, \lambda^{-1})} \right| \leq C \lambda^\beta |x|^{\beta+2h(x_0)} |\ln \lambda|.$$

Else, for $\xi \in B(0, \lambda^{-q})^c$ or $r \in (0, \lambda^p)$, we use the following inequality

$$\left| (\lambda r)^{-2(h(x_0) - h(x_0 + \lambda \xi))} - 1 \right| \leq 2(\lambda r)^{2(m - h(x_0))},$$

which holds since $h(x_0 + \lambda\xi) \geq m$ and $\lambda r \leq 1$. Then, on one hand,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^p)} \right| &\leq 2\lambda^{2(m-h(x_0))} \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^p)} \mathbf{1}_{|\xi| < r} r^{-d-1+2m} dr \\ &\leq C\lambda^{2(m-h(x_0))+2mp}. \end{aligned}$$

On the other hand, for $\lambda \leq (4(1 + |x|))^{-1/q}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0, \lambda^{-q})^c \times (0, \lambda^{-1})} \right| &\leq C|x|\lambda^{2(m-h(x_0))} \int_{|\xi| > \lambda^{-q}} |\xi|^{-d-1+2m} d\xi \\ &\leq C|x|\lambda^{2(m-h(x_0))+q(1-2m)}. \end{aligned}$$

Finally, it is sufficient to choose p and q such that

$$p > \frac{\beta + 2(h(x_0) - m)}{2m} \quad \text{and} \quad \frac{\beta + 2(h(x_0) - m)}{1 - 2m} < q < 1.$$

This concludes for the proof of the convergence of $\Gamma_\lambda^{h(x_0)}(x_0, \cdot)$ towards $\Gamma^{h(x_0)}$. It remains to show that $\Gamma^{h(x_0)}$ is the covariance of a -up to a constant- fractional Brownian motion with Hurst index $h(x_0)$.

A straightforward computation gives

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} (\psi(x, \xi, r) - \psi(x', \xi, r))^2 r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \psi(x - x', \xi, r)^2 r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr. \end{aligned}$$

This allows to write $\Gamma^{h(x_0)}$ as

$$\Gamma^{h(x_0)}(x, x') = \frac{1}{2}(v(x) + v(x') - v(x - x'))$$

where, by Lemma 1,

$$v(x) = \Gamma^{h(x_0)}(x, x) = c|x|^{2h(x_0)}.$$

2. We prove now the finite dimensional distributions property, as described in the fourth column of the array. For sake of simplicity, we will only consider the limit in distribution of $\frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^H}$ for a fixed x in \mathbb{R}^d . One moment thinking can convince the reader that the next computation can be performed with a random vector $(\frac{X(x_0 + \lambda x_j) - X(x_0)}{\lambda^H})_{1 \leq j \leq n}$ instead of the single random variable $\frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^H}$.

For $H > 0$, x in \mathbb{R}^d and t in \mathbb{R} ,

$$\mathbf{E} \exp \left(it \frac{X(x_0 + \lambda x) - X(x_0)}{\lambda^H} \right) = \exp \Phi(H, \lambda, x_0, x, t)$$

where $\Phi(H, \lambda, x_0, x, t)$ is given by

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(e^{it\lambda^{-H}\psi(\lambda x, \xi - x_0, r)} - 1 - it\lambda^{-H}\psi(\lambda x, \xi - x_0, r) \right) d\nu_h(\xi, r).$$

A change of variable yields

$$\begin{aligned} \Phi(H, \lambda, x_0, x, t) &= \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \left(e^{it\lambda^{-H}\psi(x, \xi, r)} - 1 - it\lambda^{-H}\psi(x, \xi, r) \right) \\ &\times \lambda^{2h(x_0 + \lambda\xi)} r^{-d-1+2h(x_0 + \lambda\xi)} d\xi dr. \end{aligned}$$

Lemma 1 allows us to split the integral into $\Phi = \Phi_1 + (\Phi - \Phi_1)$, where $\Phi_1(H, \lambda, x_0, x, t)$ is equal to

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \left(e^{it\lambda^{-H}\psi(x, \xi, r)} - 1 \right) \lambda^{2h(x_0 + \lambda\xi)} r^{-d-1+2h(x_0 + \lambda\xi)} d\xi dr.$$

Then,

$$|\Phi_1(H, \lambda, x_0, x, t)| \leq \lambda^{2m} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left| e^{it\lambda^{-H}\psi(x, \xi, r)} - 1 \right| r^{-d-1+2m} d\xi dr.$$

We notice that

$$\left| e^{it\lambda^{-H}\psi(x, \cdot)} - 1 \right| \leq 2 \mathbf{1}_{t\psi(x, \cdot) \neq 0} \leq 2 |\psi(x, \cdot)|$$

and recall that $\psi(x, \cdot)$ belongs to $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, r^{-d-1+2m} dr d\xi)$ by Lemma 1 so that

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \Phi_1(H, \lambda, x_0, x, t) = 0.$$

The second term $\Phi_2 := \Phi - \Phi_1$ is given by

$$-it \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \lambda^{-H+2h(x_0 + \lambda\xi)} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2h(x_0 + \lambda\xi)} d\xi dr. \quad (5.9)$$

We will now concentrate on this term.

2-a. Let us consider the case $x_0 = 0$ and assume that $\{\xi; h(\xi) = m\}$ has a positive measure. For $H = 2m$, Lemma 1 again gives

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \Phi_2(2m, \lambda, 0, x, t) = -it \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(\xi)=m} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr.$$

Hence the finite dimensional distributions of $\lambda^{-2m}(X(\lambda) - X(0))$ converge to the finite dimensional distributions of the almost deterministic field Z^m given by

$$Z^m(x) = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(\xi)=m} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

By Lemma 1, Z^m does not vanish since $\{\xi; h(\xi) \neq m\}$ contains a ball by continuity and anisotropy of h .

2-b. In the case $x_0 = 0$ and $\{\xi; h(\xi) = m\}$ is of measure 0, for $H \leq 2m$, from below, $\Phi_2(H, \lambda, 0, x, t)$ tends to 0. On the other hand, for $H \in (2m, 1)$ and $H < 2 \max h$, we have to prove that there exists at least one x in \mathbb{R}^d such that $\Phi_2(H, \lambda, 0, x, t)$ does not tend to 0. First, let us remark that, for all $x \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_2(H, \lambda, 0, x, t)$ may be written as

$$-it \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \lambda^{-H+2h(\xi)} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2h(\xi)} d\xi dr + \mathcal{O}(\lambda^{1-H}) \right).$$

Thus it is sufficient to consider

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_2(H, \lambda, x) &:= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \lambda^{-H+2h(\xi)} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2h(\xi)} d\xi dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (2h(\xi) - d)^{-1} \lambda^{-H+2h(\xi)} f(x, \xi) d\xi ,\end{aligned}$$

with

$$f(x, \xi) = |x - \xi|^{-d+2h(\xi)} - |\xi|^{-d+2h(\xi)}.$$

The function $f(\cdot, \xi)$ is smooth on $\mathbb{R}^d \setminus \{\xi\}$ and its Laplacian, given by

$$\Delta f(x, \xi) = (2h(\xi) - d)(h(\xi) - 1)|x - \xi|^{-d+2h(\xi)-2},$$

is negative. Then, approximating the Laplacian by the second order increments, one can find $C \in (0, \frac{1}{2})$ such that, whenever $|x - \xi| \neq 0$ and $\delta \leq C|x - \xi|$,

$$\sum_{1 \leq j \leq d} f(x + \delta e_j, \xi) + f(x - \delta e_j, \xi) - 2f(x, \xi) \leq \frac{\delta^2}{2} \Delta f(x, \xi). \quad (5.10)$$

Let us take H such that $2m < H < 2 \max h$ and $H < 1$ and note that the sets $\{\xi; H \leq 2h(\xi)\}$ and $\{\xi; H > 2h(\xi)\}$ have positive measure. Then, by continuity of h , there exists a nonempty open ball $B \subset \{\xi; H > 2h(\xi)\}$. For every $x \in \mathbb{R}^d$ we introduce

$$\tilde{\Phi}_\lambda(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{2h(\xi) \leq H} (2h(\xi) - d)^{-1} \lambda^{-H+2h(\xi)} f(x, \xi) d\xi,$$

such that

$$\tilde{\Phi}_2(H, \lambda, x) = \tilde{\Phi}_\lambda(x) + \left(\tilde{\Phi}_2(H, \lambda, x) - \tilde{\Phi}_\lambda(x) \right).$$

By Lebesgue's Theorem, the second term tends to 0 with λ . *Ab absurdo*, let us suppose that $\tilde{\Phi}_\lambda(x)$ tends to 0 with λ for every x in \mathbb{R}^d . Then for all $x \in \mathbb{R}^d$ and all $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_\delta^{(2)} \tilde{\Phi}_\lambda(x) := \sum_{1 \leq j \leq d} \left(\tilde{\Phi}_\lambda(x + \delta e_j) + \tilde{\Phi}_\lambda(x - \delta e_j) - 2\tilde{\Phi}_\lambda(x) \right) \longrightarrow 0. \quad (5.11)$$

For x in B , and δ such that $B(x, \frac{\delta}{C}) \subset B$, according to (5.10),

$$\Delta_\delta^{(2)} \tilde{\Phi}_\lambda(x) \leq \frac{\delta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (h(\xi) - 1) \mathbf{1}_{2h(\xi) \leq H} |x - \xi|^{-d+2h(\xi)-2} d\xi \leq 0.$$

Then (5.11) implies that $\{\xi; 2h(\xi) \leq H\}$ has measure zero, which is in contradiction with the assumption $H > 2m$.

The case $x_0 = 0$ is complete.

2-c. Let $x_0 \neq 0$. We then prove that the critical fdd-lass index of X_h at x_0 is $\geq \min(1, \beta + 2h(x_0))$. Without loss of generality, we can assume that $\beta + 2h(x_0) \leq 1$. For $H < \beta + 2h(x_0)$, we will establish that $\Phi_2(H, \lambda, x_0, x, t)$ tends to 0 when $\lambda \rightarrow 0^+$. Recall that, by definition (5.9), $\Phi_2(H, \lambda, x_0, x, t)$ is equal to

$$-it \lambda^{-H+2h(x_0)} \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} (\lambda r)^{2(h(x_0 + \lambda \xi) - h(x_0))} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr .$$

Since $\int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr$ vanishes, we get

$$\begin{aligned} \Phi_2(H, \lambda, x_0, x, t) &= -it \lambda^{-H+2h(x_0)} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \left((\lambda r)^{2(h(x_0+\lambda\xi)-h(x_0))} - 1 \right) \psi(x, \xi, r) r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr. \end{aligned}$$

According to the β -Lipschitz assumption on h , for λ small enough compared to x , by (5.8), since $|\psi| = \psi^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, \lambda^{-1})} \left| (\lambda r)^{2h(x_0+\lambda\xi)-2h(x_0)} - 1 \right| |\psi(x, \xi, r)| r^{-d-1+2h(x_0)} d\xi dr \leq C(x) \lambda^\beta.$$

The proof is complete.

Isotropic case. By stationarity, the cov-lass part is nothing but the general case where $x_0 \neq 0$ and h is constant equal to m . For the fdd-lass part, it is sufficient to remark that Φ_2 is zero. \square

5.3.3 Homogenization

There are different ways to consider self-similarity at small scales, depending on which part of the signal the scaling acts. Instead of performing a scaling on the increments lag, as it is performed in Section 5.3.1, we act on the radii of the balls as follows. Suppose we zoom and consider the balls $B(\xi, r/\varepsilon)$ instead of the balls $B(\xi, r)$, where the (ξ, r) are randomly chosen by the Poisson random measure N_h , and we let ε go to 0. Denoting by X_ε the associated field

$$X_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{B(\xi, r/\varepsilon)}(x) \tilde{N}_h(d\xi, dr), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (5.12)$$

we look for a normalization term $n(\varepsilon)$ such that $n(\varepsilon)X_\varepsilon$ converge in distribution to a non degenerate field. Note that the field X_ε can also be considered as a microball model (see Definition 1) associated with a Poisson measure with intensity

$$\nu_h^\varepsilon(d\xi, dr) = \varepsilon^{-d+2h(\xi)} r^{-d-1+2h(\xi)} \mathbf{1}_{(0, \varepsilon^{-1})}(r) d\xi dr.$$

Actually this procedure is nothing but homogenization. The value of the normalization term and the limit field are specified in the following proposition. Note that our homogenization result, in the isotropic case, is close to the thermodynamical limit investigated in [CGM95]. The same antipersistent fractional Brownian motion, ie with Hurst index less than $\frac{1}{2}$, is observed as a limit field.

Proposition 2. *Let h be a continuous function S^{d-1} such that $0 < m := \min h < \frac{1}{2}$ and the set $\{\xi; h(\xi) = m\}$ has positive measure. Let us define for all $\varepsilon > 0$ the field X_ε by (5.12). Then for any x_0 in \mathbb{R}^d , as ε goes to 0, the finite dimensional distributions of*

$$\varepsilon^{\frac{d}{2}-m} (X_\varepsilon(x_0 + \cdot) - X_\varepsilon(x_0))$$

converge to the finite dimensional distributions of a centered Gaussian field G_{m, x_0} with covariance function γ_{m, x_0} where

$$\gamma_{m, x_0}(x, x') = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(x_0+\xi)=m} \psi(x, \xi, r) \psi(x', \xi, r) r^{-d-1+2m} d\xi dr.$$

If $x_0 = 0$ then $G_{m,0}$ is self-similar of order m .

If h is constant equal to m , then γ_{m,x_0} is equal to the covariance function γ_m given in Theorem 1 and G_{m,x_0} is, up to a constant, a fractional Brownian motion with index m .

Remarque 1. The same asymptotic is also valid for the covariance function.

Démonstration. We proceed as for the proof of Theorem 1. For $H > 0$, we write

$$\mathbf{E} \exp(it\varepsilon^H(X_\varepsilon(x_0 + \lambda x) - X_\varepsilon(x_0))) = \exp \Phi(H, \varepsilon, x_0, x, t)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(H, \varepsilon, x_0, x, t) &= \int_{\mathbb{R}^d \times (0, \varepsilon^{-1})} \left(e^{it\varepsilon^H \psi(x, \xi, r)} - 1 - it\varepsilon^H \psi(x, \xi, r) \right) \\ &\times \varepsilon^{-d+2h(x_0+\xi)} r^{-d-1+2h(x_0+\xi)} d\xi dr . \end{aligned}$$

The term inside the brace behaves like $-\frac{t^2}{2}\varepsilon^{2H}\psi(x, \xi, r)^2$ and then, for $H = \frac{d}{2} - m$, we get

$$\Phi(H, \varepsilon, x_0, x, t) \longrightarrow -\frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{h(x_0+\xi)=m} \psi(x, \xi, r)^2 r^{-d-1+2m} d\xi dr .$$

□

5.4 X-Ray Transform

A motivation for the previous sections was to model and describe heterogeneous media. In this section we are interested in analysing this media through X-ray images.

Following the usual denomination (see [RK96] for instance), for a direction α in S^{d-1} , the X-ray transform in the direction α of any function f in $L^1(\mathbb{R}^d)$ is given by

$$y \in \langle \alpha \rangle^\perp \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y + p\alpha) dp .$$

Our purpose is to define in the same way the X-ray transform of a microball model X . Unfortunately, the realizations $x \in \mathbb{R}^d \mapsto X(x, \omega)$ do not belong to $L^1(\mathbb{R}^d)$. We will then work with the *windowed* X-ray transform associated with a fixed window ρ . We assume that ρ is continuous on \mathbb{R} and rapidly decreasing, ie such that,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{R}, |\rho(p)| \leq C_N (1 + |p|)^{-N} . \quad (5.13)$$

For any function f in $L^2(\mathbb{R}^d)$, we call *windowed X-ray transform of f in the direction α* the map

$$y \in \langle \alpha \rangle^\perp \mapsto \mathcal{P}_\alpha f(y) := \int_{\mathbb{R}} f(y + p\alpha) \rho(p) dp .$$

Let us denote by π_{α^\perp} the orthogonal projection on $\langle \alpha \rangle^\perp$ and write $\xi = \pi_{\alpha^\perp}(\xi) + t\alpha$. For (ξ, r) in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_\alpha(\varphi(\cdot, \xi, r))(y)|^2 &\leq 2(r^2 - |y - \pi_{\alpha^\perp}(\xi)|^2)_+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(y + p\alpha, \xi, r) \rho^2(p) dp \\ &\leq 2r^2 \mathbf{1}_{|y - \pi_{\alpha^\perp}(\xi)| < r} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|p-t| < r} \rho^2(p) dp . \end{aligned}$$

Then, for any y in $\langle \alpha \rangle^\perp$, the map $(\xi, r) \mapsto \mathcal{P}_\alpha(\varphi(\cdot, \xi, r))(y)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, d\nu_h)$ and we can define in $L^2(\Omega)$

$$\mathcal{P}_\alpha X(y) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathcal{P}_\alpha(\varphi(\cdot, \xi, r))(y) \tilde{N}_h(d\xi, dr), \quad y \in \langle \alpha \rangle^\perp. \quad (5.14)$$

The following proposition allows us to call $\mathcal{P}_\alpha X$ the windowed X -ray transform of X in the direction α , since it is proved to be equal in $L^2(\Omega)$ to the windowed integral of X along the direction α .

Proposition 3. *Let ρ be a continuous window that satisfies (5.13). Let X be a microball model on \mathbb{R}^d and let α be a fixed direction in S^{d-1} . For n and K in \mathbb{N} and y in $\langle \alpha \rangle^\perp$, we denote*

$$Y_n^K(y) = 2^{-n} \sum_{k=-K}^K X(y + 2^{-n}k\alpha) \rho(2^{-n}k).$$

Then, for all y_1, y_2, \dots, y_l in $\langle \alpha \rangle^\perp$, the sequence $(Y_n(y_1), Y_n(y_2), \dots, Y_n(y_l))_n$ tends to $(\mathcal{P}_\alpha X(y_1), \mathcal{P}_\alpha X(y_2), \dots, \mathcal{P}_\alpha X(y_l))$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$ when n and K tend to infinity.

Démonstration. For y in $\langle \alpha \rangle^\perp$, n in \mathbb{N} and $K \in \mathbb{N}$, by linearity

$$Y_n^K(y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(2^{-n} \sum_{k=-K}^K \varphi(y + 2^{-n}k\alpha, \xi, r) \rho(2^{-n}k) \right) \tilde{N}_h(d\xi, dr).$$

By the isometry property, it is sufficient to remark that, when n and K tend to infinity, the function

$$\left(2^{-n} \sum_{k=-K}^K \varphi(y + 2^{-n}k\alpha, \xi, r) \rho(2^{-n}k) \right)$$

converges to $\mathcal{P}_\alpha(\varphi(\cdot, \xi, r))(y)$ in $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, d\nu_h)$. \square

We will again focus on self-similarity properties. A crucial point is the computation and the estimation of the increments of $\mathcal{P}_\alpha X$. We deal with it now.

For any y and y' in $\langle \alpha \rangle^\perp$,

$$\mathcal{P}_\alpha X(y) - \mathcal{P}_\alpha X(y') = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} G_\rho(y - y', \xi - y', r) \tilde{N}_h(d\xi, dr)$$

where

$$G_\rho(y, \xi, r) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y, \xi - p\alpha, r) \rho(p) dp.$$

Note that the above integral is well defined for any bounded map ρ . In the special case where $\rho \equiv 1$, we denote G instead of G_1 and for y, γ in $\langle \alpha \rangle^\perp$ and r in \mathbb{R}^+ , one line computation gives

$$G(y, \gamma, r) = G_1(y, \gamma, r) = (r^2 - |y - \gamma|_+^2)^{1/2} - (r^2 - |\gamma|_+^2)^{1/2}.$$

The next lemma provides upper-bounds for the integral of $G(y, \cdot)$.

Lemma 2. For m in $(0, \frac{1}{2})$ and y in $\langle \alpha \rangle^\perp$,

$$G(y, \cdot) \in L^2(\langle \alpha \rangle^\perp \times \mathbb{R}^+, r^{-d-1+2m} d\gamma dr).$$

Furthermore there exists a positive constant C such that for all $r > 0$,

$$\int_{\langle \alpha \rangle^\perp} G(y, \gamma, r)^2 d\gamma \leq C r^{d+1}, \quad (5.15)$$

and

$$\int_{\langle \alpha \rangle^\perp} G(y, \gamma, r)^2 d\gamma \leq C |y|^2 r^{d-1} \ln(2 + \frac{2r}{|y|}). \quad (5.16)$$

Proof. For m in $(0, \frac{1}{2})$, y in $\langle \alpha \rangle^\perp$ and $\lambda > 0$, on one hand

$$\begin{aligned} \int_{\langle \alpha \rangle^\perp} G(y, \gamma, r)^2 d\gamma &\leq r^2 \int_{\langle \alpha \rangle^\perp} (\mathbf{1}_{|y-\gamma|<r} + \mathbf{1}_{|\gamma|<r}) d\gamma \\ &\leq C r^{d+1}. \end{aligned}$$

Hence (5.15) holds. On the other hand, a change of variable gives, for $y \neq 0$ and $r > 0$,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{|y|}{2}\right)^{-(d+1)} \int_{\langle \alpha \rangle^\perp} G(y, \gamma, r)^2 d\gamma \\ &= \int_{\langle \alpha \rangle^\perp} \left| \left(\left(\frac{2r}{|y|} \right)^2 - \left| \gamma - \frac{y}{|y|} \right|^2 \right)_+^{1/2} - \left(\left(\frac{2r}{|y|} \right)^2 - \left| \gamma + \frac{y}{|y|} \right|^2 \right)_+^{1/2} \right|^2 d\gamma. \end{aligned}$$

The next lemma provides an upper bound for the last quantity, which leads to (5.16).

Lemma 3. Let $n \in \mathbb{N}^*$. There exists $C > 0$ such that for all e in S^{n-1} and all $r > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| (r^2 - |x - e|^2)_+^{1/2} - (r^2 - |x + e|^2)_+^{1/2} \right|^2 dx \leq C r^n \ln(2 + r).$$

Démonstration. For $n = 1$, we have to prove that there exists a constant C such that, for $r > 0$,

$$\int_0^{r+1} \left| (r^2 - (x-1)^2)_+^{1/2} - (r^2 - (x+1)^2)_+^{1/2} \right|^2 dx \leq C r \ln(r+2).$$

This is an easy consequence of the fact that the function that we integrate is bounded by $4r$ for $x \in [r-1, r+1]$, by $16r^2/(r-1)(r-x+1)$ for $x \in [0, r-1]$ when $r > 1$.

In the general case ($n > 1$) we write $x = x' + x''e$ with $x' = \pi_{\langle e \rangle^\perp}(x)$ and x'' in \mathbb{R} . From below,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left| (r^2 - |x'|^2 - |x'' - 1|^2)_+^{1/2} - (r^2 - |x'|^2 - |x'' + 1|^2)_+^{1/2} \right|^2 dx' \\ &\leq C (r^2 - |x'|^2)_+^{1/2} \ln(r+2). \end{aligned}$$

But

$$\int_{\langle e \rangle^\perp} (r^2 - |x'|^2)_+^{1/2} dx' = r^n |S^{n-2}| \int_0^1 (1-t^2)^{1/2} t^{n-2} dt.$$

Finally, we can change the constant C such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| (r^2 - |x - e|^2)_+^{1/2} - (r^2 - |x + e|^2)_+^{1/2} \right|^2 dx \leq C r^n \ln(2 + r).$$

□

Since $m \in (0, 1/2)$, inequalities (5.15) and (5.16) conclude the proof. \square

We now state the main result of this section. The following theorem describes the small scale self-similarity of $\mathcal{P}_\alpha X$, through the ‘cov-lass’ and ‘fdd-lass’ properties as introduced in Section 5.3.1.

Theorem 2. *Let h be a Lipschitz function on S^{d-1} for some $\beta \in (0, 1]$, taking its values in $(0, \frac{1}{2})$. Let X be the microball model with directional index h .*

For α in S^{d-1} and y_0 orthogonal to α , we note $m(\alpha, y_0)$ the minimum of h on the linear subspace generated by α and y_0 .

The following local asymptotical self-similarity properties for $\mathcal{P}_\alpha X$ at point y_0 are valid.

<i>assumption on h</i>	<i>cov-lass and fdd-lass at point y_0</i>
$meas(\{t \in \mathbb{R}^*; h(y_0 + t\alpha) = m(\alpha, y_0)\}) > 0$	$lass-index = m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}$ tangent cov = cov of fBm tangent field = fBm
$meas(\{t \in \mathbb{R}^*; h(y_0 + t\alpha) = m(\alpha, y_0)\}) = 0$	$lass-index = m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}$ not cov-lass not fdd-lass

Note that $m(\alpha, 0) = h(\alpha)$ and we are in the first case.

A comparison between the asymptotic self-similarity behavior of the microball model X , given by Theorem 1, and of its X-ray transform $\mathcal{P}_\alpha X$, given by the Theorem 2, may be done.

At the opposite of Theorem 1, the same index appears here for the covariance self-similarity or for the fdd self-similarity. Note that it depends both on the direction α and the point y_0 where the increments are evaluated.

The two theorems differ on another point. The anisotropy of the model, which is given by the directional index h , is explicitly involved in the local behavior of $\mathcal{P}_\alpha X$ around 0, whereas only the infimum of h was considered in the local behavior of X around 0. As a consequence, the directional index h of a microball model can be identified through an X-ray analysis of the model.

Finally, let us point out that the tangent field of the X-ray transform, when it exists, is Gaussian, even is a fractional Brownian motion, whereas the tangent field of the microball model was deterministic. This justifies modeling radiographic images by fBm [HJJ⁺94], even when the media under study is far from being of this type.

Proof. 1- We begin with the proof of the covariance result. Let us denote by $\Gamma_\lambda^H(y_0, \cdot)$ the covariance function of the field $\lambda^{-H}(\mathcal{P}_\alpha X(y_0 + \lambda \cdot) - \mathcal{P}_\alpha X(y_0))$.

Then for y and y' in $\langle \alpha \rangle^\perp$,

$$\Gamma_\lambda^H(y_0, y, y') = \lambda^{-2H} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} G_\rho(\lambda y, \xi - y_0, r) G_\rho(\lambda y', \xi - y_0, r) \nu_h(d\xi, dr),$$

which is equal to

$$\lambda^{-2H} \int_{\mathbb{R}^d \times (0, 1)} G_\rho(\lambda y, \xi, r) G_\rho(\lambda y', \xi, r) r^{-d-1+2h(\xi+y_0)} d\xi dr .$$

Writing any $\xi \in \mathbb{R}^d$ as $\xi = \gamma + t\alpha$ with $\gamma \in \langle \alpha \rangle^\perp$ and $t \in \mathbb{R}$ and performing a change of variable (translation-dilation) in the integral that defines G_ρ , we obtain

$$\Gamma_\lambda^H(y_0, y, y') = \lambda^{-2H+1} \int_{\langle \alpha \rangle^\perp \times \mathbb{R} \times (0, \lambda^{-1})} G_{\rho(t+\lambda)}(y, \gamma, r) G_{\rho(t+\lambda)}(y', \gamma, r) \times (\lambda r)^{2h(\lambda\gamma+t\alpha+y_0)} r^{-d-1} d\gamma dt dr$$

with $\rho(t + \lambda \cdot)$ denoting the window $p \mapsto \rho(t + \lambda p)$. Note that for any $r \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$ and $y, \gamma \in \langle \alpha \rangle^\perp$,

$$G_{\rho(t+\lambda)}(y, \gamma, r) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} G(y, \gamma, r) \rho(t),$$

and, by assumption (5.13), for any $N \in \mathbb{N}$, one can find $C_N > 0$ such that

$$\begin{aligned} |G_{\rho(t+\lambda)}(y, \gamma, r)| &\leq C_N (1 + |t|)^{-N} \int_{\mathbb{R}} |\psi(y, \xi - p\alpha, r)| dp \\ &\leq C_N (1 + |t|)^{-N} |G(y, \gamma, r)|. \end{aligned}$$

We write $(\lambda r)^{2h(\lambda\gamma+t\alpha+y_0)}$ as

$$(\lambda r)^{2h(\lambda\gamma+t\alpha+y_0)-2h(t\alpha+y_0)} \times (\lambda r)^{2h(t\alpha+y_0)-2m(\alpha, y_0)} \times (\lambda r)^{2m(\alpha, y_0)}.$$

The first factor tends to 1 by continuity of h and the second one tends to $\mathbf{1}_{h(y_0+t\alpha)=m(\alpha, y_0)}$. We use similar arguments as those used for the part 1-c of the proof of Theorem 1, to obtain the following asymptotics:

$\Gamma_\lambda^{m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}}(y_0, y, y')$ tends to

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{h(y_0+t\alpha)=m(\alpha, y_0)} \rho^2(t) dt \right) \times \Gamma^{m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}}(y, y'),$$

where

$$\Gamma^H(y, y') := \int_{\langle \alpha \rangle^\perp \times \mathbb{R}^+} G(y, \gamma, r) G(y', \gamma, r) r^{-d-2+H} d\gamma dr. \quad (5.17)$$

We recall that $G(y, \cdot)$ belong to $L^2(\langle \alpha \rangle^\perp \times \mathbb{R}^+, r^{-d-1+2m(\alpha, y_0)} d\gamma dr)$ by Lemma 2. The identification of Γ^H as the covariance of a fractional Brownian motion defined on $\langle \alpha \rangle^\perp$ with Hurst index $H = m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}$ is straightforward following the same arguments as in the proof of part 1-c of Theorem 1.

If $\{t \in \mathbb{R}; h(y_0 + t\alpha) = m(\alpha, y_0)\}$ has positive measure, then we have finished with the proof. Otherwise, we conclude in the same way as in part 1-b of Theorem 1.

2- Let us turn now to the fdd-lass property at point y_0 . We restrict the computation to the one-dimensional distribution. For any y in $\langle \alpha \rangle^\perp$, t in \mathbb{R} and H in $(0, 1)$, we write

$$\mathbf{E} \exp(it\lambda^{-H}(\mathcal{P}_\alpha X(y_0 + \lambda y) - \mathcal{P}_\alpha X(y_0))) = \exp \Phi(H, \lambda, y_0, y, t)$$

where $\Phi(H, \lambda, y_0, y, t)$ is given by

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(e^{it\lambda^{-H} G_\rho(\lambda y, \xi - y_0, r)} - 1 - it\lambda^{-H} G_\rho(\lambda y, \xi - y_0, r) \right) d\nu_h(\xi, r).$$

By the same change of variable as in the covariance part of the proof, $\Phi(H, \lambda, y_0, y, t)$ is equal to

$$\int_{\langle \alpha \rangle^\perp \times \mathbb{R} \times (0, \lambda^{-1})} \lambda^{-1} \left(e^{it\lambda^{1-H} G_{\rho(p+\lambda)}(y, \gamma, r)} - 1 - it\lambda^{1-H} G_{\rho(p+\lambda)}(y, \gamma, r) \right) \\ \times (\lambda r)^{2h(\lambda\gamma+p\alpha+y_0)} r^{-d-1} d\gamma dp dr .$$

Let us remark that

$$\lambda^{1-H} G_{\rho(p+\lambda)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} 0$$

and so

$$\lambda^{-1} \left(e^{it\lambda^{1-H} G_{\rho(p+\lambda)} - 1 - it\lambda^{1-H} G_{\rho(p+\lambda)}} \right) \asymp -\frac{1}{2} t^2 \lambda^{-2H+1} G^2 \rho^2 .$$

Consequently we can argue in the same way as in the covariance part of the proof to get, for $H = m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}$,

$$\Phi(H, \lambda, y_0, y, t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} t^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{h(y_0+p\alpha)=m(\alpha, y_0)} \rho(p)^2 dp \right) \Gamma^{m(\alpha, y_0) + \frac{1}{2}}(y, y),$$

which concludes the proof. □

5.5 Conclusion

We propose a non Gaussian field, which can be used to modelize connections networks or porous media with self-similarity at small scales. The rich structure of Poisson point process allowed us to reach this goal and also to perform explicit computations as in the Gaussian case. In order to keep the model as intuitive as possible, we did not try to produce more general fields. The Poisson structure can obviously be exploited further on by considering more general integrators with respect to the Poisson measure. Replacing the indicator function $\mathbf{1}_{B(\xi, r)}$ in Definition 1 by a more general one will, for instance, give the possibility to modelize granular media with non spherical grains. Another model for porous media can also be built up from a collection of random spheres which correspond no more as grains, but as pores or bubbles. By this way, one will get a $\{0, 1\}$ -valued field and leave linear context.

Annexe A

Illustrations numériques

Cette annexe est en partie le fruit d'un travail en collaboration avec l'équipe du traitement du signal du LESI (Université d'Orléans), Aurélia Fraysse (Département de Mathématiques, Université Paris XII) et Céline Lacaux (LSP, Université Paul Sabatier Toulouse III). Les résultats de [BE03] développés dans la partie 3 montrent que, sous certaines hypothèses, les transformées X-ray à fenêtre de modèles d -dimensionnels autosimilaires d'ordre H_d présentent une autosimilarité asymptotique dont l'ordre H_{d-1} vérifie

$$H_{d-1} = H_d + \frac{1}{2}.$$

Dans sa thèse [Lem03], Gérald Lemineur (LESI) a testé numériquement cette relation sur des modèles fractals synthétiques 3D. Il s'est heurté à deux difficultés majeures. La première vient de la synthèse de modèles autosimilaires 3D et la seconde réside dans la précision de l'estimation des paramètres d'autosimilarité en 3D et en 2D. En revanche, G. Lemineur a bien vérifié cette relation, testée sur des données réelles (21 échantillons d'os fémoral). Nous avons cherché à améliorer les conditions des tests numériques faits par G. Lemineur, dans le cas de synthèses de mouvements browniens fractionnaires (MBF) 2D. De nombreuses méthodes de simulations théoriques existent en dimension 1 (cf. [Coe00] pour une comparaison). Parmi elles nous distinguons les méthodes approchées. La méthode du point milieu est l'une des plus courantes (cf. [NM99], par exemple). Il existe aussi une décomposition en ondelettes du MBF [MST99], reprise par [AS96] et [Pip04]. Enfin, plus récemment, N. Enriquez [Enr04] donne une construction qui utilise des marches aléatoires corrélées. Certaines de ces méthodes admettent des généralisations en dimension 2 (cf. [Pen00], [ABE04] par exemple). Afin de ne pas biaiser les estimations par des approximations, notre choix s'est porté sur des méthodes exactes. La méthode de Choleski étant très coûteuse, la méthode de la matrice circulante [DN97] est plus adaptée. Cependant la non stationnarité du MBF ne permet pas son application directe en dimension 2. Nous avons finalement retenu une méthode de synthèse exacte introduite par M. Stein [Ste02], qui nous a permis d'élaborer un code matlab en collaboration avec A. Fraysse et C. Lacaux.

J'ai ensuite estimé l'ordre d'autosimilarité des MBF simulés ainsi que celui de leurs transformées X-ray à fenêtre (qui correspondent aux transformées de Radon à fenêtre en dimension 2) par la méthode des variations quadratiques généralisées rappelée dans la partie 2.3.

Dans une première partie nous considérons des mouvements browniens fractionnaires en dimension 1. Nous rappelons quelques méthodes de simulations de processus gaussiens stationnaires et en particulier la méthode de la matrice circulante qui permet un gain de

coût. Ensuite, nous estimons le paramètre de Hurst et donnons les résultats sous forme de graphiques (tableau et diagramme à moustache).

Nous traitons le cas de la dimension 2 dans la seconde partie et terminons cette annexe par l'estimation des paramètres d'autosimilarité des transformées X-ray à fenêtre des simulations 2D. Plusieurs problèmes se posent. Tout d'abord, les données simulées ne permettent pas d'avoir des points à pas constant dans chaque direction. Afin d'éviter cet écueil, nous avons, dans un premier temps, considéré les directions verticales et horizontales. De plus, l'approximation des intégrales données par les transformées X-ray à fenêtre rend l'estimation plus délicate et les résultats bien moins bons que dans le cas d'un MBF en dimension 1.

A.1 Processus gaussiens en dimension 1

A.1.1 Méthodes de simulation

On considère $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ un processus gaussien stationnaire et centré. Il existe alors une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}(Y(t)Y(s)) = r(|t - s|).$$

On cherche à simuler le vecteur gaussien centré

$$y = {}^t (Y(x_0), Y(x_1), \dots, Y(x_N)),$$

où $\mathcal{G} = \{x_0, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ est un espace de points ordonnés dont le pas $x_{i+1} - x_i$ est constant. On suppose connaître la matrice de covariance de Y sur \mathcal{G} , donnée par $R := (r(|x_j - x_i|))_{0 \leq i, j \leq N}$. La matrice R est une matrice symétrique et positive en tant que matrice de covariance. Elle admet donc une décomposition de Choleski, $R = A^t A$, avec A matrice triangulaire inférieure. Alors, si ϵ est un vecteur gaussien centré de loi $\mathcal{N}(0, I_{N+1})$, le vecteur $A\epsilon$ a même loi que y puisque

$$\mathbf{E}(y^t y) = A^t A = R.$$

Le problème de simulation consiste donc à décomposer la matrice de covariance par la méthode de Choleski. Mais cette méthode est coûteuse numériquement puisqu'elle est de l'ordre de $\mathcal{O}(N^3)$. Cependant, la stationnarité de Y implique que sa matrice de covariance est une matrice Toeplitz c'est à dire telle que les coefficients $R_{i,j}$ ne dépendent que de $i - j$. Dans ce cas, l'algorithme de la méthode de Choleski peut être réduit à un ordre $\mathcal{O}(N^2)$ qui reste encore assez élevé. Une méthode plus astucieuse, et surtout moins coûteuse, consiste à plonger la matrice R dans une matrice circulante dont les vecteurs propres sont donnés par la matrice de transformation de Fourier discrète. Nous rappelons ici son principe.

a) Principe de la méthode de la matrice circulante

Si $x = {}^t (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur, sa transformée de Fourier discrète est donnée par le vecteur z dont les coordonnées sont

$$z_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-\frac{2i\pi k l}{n}} \text{ pour } l = 0 \dots n - 1.$$

On pose $\omega_n = e^{-\frac{2i\pi}{n}}$ et on définit la matrice de transformation de Fourier discrète par

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Alors, $z = F_n x$. De plus, pour $k = 0 \dots n-1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} z_l \omega_n^{-kl} = x_k$ ce qui signifie que ${}^t \overline{F_n} z = x$ et donc F_n est une matrice unitaire ${}^t \overline{F_n} F_n = I_n$.

Théorème A.1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice circulante alors elle est diagonalisée par la matrice de transformation de Fourier. Plus précisément,*

$$C = {}^t \overline{F_n} \Delta_n F_n,$$

où la matrice diagonale Δ_n égale $\text{diag}(F_n c)$, avec c la première colonne de C , est une .

Pour démontrer ce résultat nous utilisons le fait que l'ensemble des matrices circulantes est engendré par la matrice

$$T_n = (e_2 \ e_3 \ \dots \ e_n \ e_1),$$

avec e_k la k -ième colonne de la matrice identité I_n .

Lemme A.1.1. *Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante dont la première colonne est notée $c = {}^t (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1})$. Alors,*

$$C = c_0 I + c_1 T_n + \dots + c_{n-1} T_n^{n-1}.$$

Démonstration. Puisque la matrice C est circulante, elle est entièrement déterminée par sa première colonne,

$$C = (c \ T_n c \ T_n^2 c \ \dots \ T_n^{n-1} c).$$

Si $j \in \mathbb{N}$ on note \bar{j} son représentant modulo n dans $\{1, \dots, n\}$. Alors, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $T_n^k e_j = e_{\bar{j+k}}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} (c_0 I + c_1 T_n + \dots + c_{n-1} T_n^{n-1}) e_j &= c_0 e_j + c_1 e_{j+1} + \dots + c_{n-j} e_n + c_{n-j+1} e_1 + \dots + c_{n-1} e_{j-1} \\ &= T_n^{j-1} c = C e_j. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le théorème A.1.1. La matrice T_n est aussi une matrice circulante et le lemme précédent montre qu'elle engendre l'ensemble des matrices circulantes. Voyons si T_n est bien diagonalisée par F_n .

Lemme A.1.2. $F_n T_n = D_n F_n$, avec $D_n = \text{diag}(F_n e_2) = \text{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$.

Démonstration. Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$. D'un côté

$$(F_n T_n)_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \omega_n^{(i-1)(k-1)} \delta_{k,\bar{j+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n^{(i-1)j}$$

et de l'autre côté,

$$(D_n F_n)_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \omega_n^{(i-1)k} \delta_{i,k} \omega_n^{(k-1)(j-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n^{(i-1)j}.$$

□

Ainsi $F_n T_n = D_n F_n$ et le théorème est vérifié pour T_n .

Alors, en décomposant C par le lemme A.1.1,

$$\begin{aligned} F_n C &= c_0 F_n + c_1 F_n T_n + \dots + c_{n-1} F_n T_n^{n-1} \\ &= (c_0 I + c_1 D + \dots + c_{n-1} D^{n-1}) F_n \\ &= \text{diag}(F_n c) F_n. \end{aligned}$$

La méthode de la matrice circulante consiste à plonger la matrice de covariance initiale dans une matrice circulante $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n > N + 1$. On souhaite alors simuler un vecteur admettant cette matrice circulante pour matrice de covariance. Il faut donc la choisir symétrique et positive. Puisque C est diagonalisée par F_n , elle est positive si et seulement si $F_n c$ est un vecteur positif, où c désigne encore le vecteur de la première colonne de C . Dans ce cas

$$C = {}^t \left((\text{diag}(F_n c))^{1/2} F_n \right) (\text{diag}(F_n c))^{1/2} F_n,$$

et la simulation s'en déduit.

Rappelons que, par stationnarité, le vecteur y admet pour matrice de covariance R qui est Toeplitz et symétrique. Cette matrice est donc entièrement caractérisée par sa première colonne :

$$r = {}^t (r_0, r_1, \dots, r_N), \text{ avec } r_k = r(|x_k - x_0|) \text{ pour } k = 0 \dots N,$$

$$\text{et } R = \begin{pmatrix} r_0 & & & & \\ r_1 & r_0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ r_N & & r_1 & r_0 & \end{pmatrix}.$$

Soit $M \geq N$. On construit une matrice $S \in \mathcal{M}_{2M}(\mathbb{C})$ circulante et symétrique en définissant la première colonne s par

$$\begin{aligned} s_k &= r_k \text{ pour } 0 \leq k \leq N \\ s_{2M-k} &= r_k \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1, \end{aligned}$$

et si $M > N$, $s_N + 1, \dots, s_{2M-N}$ sont arbitrairement (ou judicieusement) choisis de telle sorte que pour $j = 1 \dots 2M - 1$,

$$s_j = s_{2M-j}.$$

Alors,

$$S = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_N & s_{N+1} & \cdots & s_{2M-N} & r_{N-1} & \cdots & r_1 \\ r_1 & r_0 & & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ r_m & \cdots & r_1 & r_0 & & & & & & \\ s_{N+1} & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & & \\ s_{2M-N} & & & & & \ddots & \ddots & & & \\ r_{N-1} & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \\ r_1 & & & & & & & & r_1 & r_0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que S est bien symétrique. En effet, d'après le lemme A.1.1, en notant $T = T_{2M}$,

$$S = r_0 I + r_1 T + \cdots + r_N T^N + s_{N+1} T^{N+1} + \cdots + s_{2M-N} T^{2M-N} + r_{N-1} T^{2M-N+1} + \cdots + r_1 T^{2M-1}.$$

Alors, puisque ${}^t T = T^{2M-1}$ et $T^{2M} = I$,

$${}^t S = r_0 I + r_1 T^{2M-1} + \cdots + r_N T^{2M-N} + s_{N+1} T^{2M-N-1} + \cdots + s_{2M-N} T^N + r_{N-1} T^{N-1} + \cdots + r_1 T.$$

Or, pour $j \in \{1, \dots, 2M-1\}$, on a choisi $s_j = s_{2M-j}$ donc

$${}^t S = r_0 I + r_1 T^{2M-1} + \cdots + s_{2M-N} T^{2M-N} + s_{2M-N-1} T^{2M-N-1} + \cdots + r_N T^N + r_{N-1} T^{N-1} + \cdots + r_1 T = S.$$

La matrice S est bien symétrique. De plus la matrice R est obtenue en ne considérant que les $N+1$ coordonnées de S ,

$$(S_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N} = R.$$

Supposons que S soit aussi positive, on pose $\tilde{s} = F_{2M} s$ et $A = {}^t \overline{(\text{diag}(\tilde{s}))^{1/2} F_{2M}} = {}^t \overline{F_{2M} (\text{diag}(\tilde{s}))^{1/2}}$.

On simule $E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien de dimension $4M$ et de loi $\mathcal{N}(0, I_{4M})$ avec $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, I_{2M})$ pour $i \in \{1, 2\}$. On pose $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ et $e = A\epsilon = e_1 + ie_2$. Alors e_1 et e_2 sont 2 vecteurs gaussiens indépendants de même loi $\mathcal{N}(0, S)$. En effet, en écrivant $A = A_1 + iA_2$, on a clairement $e_1 = A_1\epsilon_1 - A_2\epsilon_2$ et $e_2 = A_1\epsilon_2 + A_2\epsilon_1$. le vecteur $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur gaussien. De plus sa matrice de covariance est donnée par

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(e_1^t e_1) & \mathbf{E}(e_1^t e_2) \\ {}^t \mathbf{E}(e_2^t e_1) & \mathbf{E}(e_2^t e_2) \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{E}(e_1^t e_2) = A_1^t A_2 - A_2^t A_1 = \frac{1}{2}(\overline{A}^t A - A^t \overline{A}) = \frac{1}{2}({}^t S - S) = 0,$$

et

$$\mathbf{E}(e_1^t e_1) = A_1^t A_2 + A_2^t A_1 = A^t \overline{A} = S = \mathbf{E}(e_2^t e_2).$$

Alors, les vecteurs $y_1 = (e_1^i)_{0 \leq i \leq N}$ et $y_2 = (e_2^i)_{0 \leq i \leq N}$ sont deux vecteurs indépendants de même loi que y .

Cette méthode est très rapide et simple à implémenter lorsque l'on connaît la matrice de

covariance du vecteur que l'on cherche à simuler puisque elle consiste en fait à effectuer deux transformations de Fourier discrètes. En choisissant pour M une puissance de 2, l'algorithme de transformation de Fourier rapide permet de réduire le coût à $\mathcal{O}(M \log(M))$. Le point délicat de cette méthode est la positivité de la matrice circulante. D'une façon générale, on cherche une matrice circulante minimale. Elle est donc de taille $2N$ et donnée par le vecteur colonne

$$s = {}^t (r_0, r_1, \dots, r_N, r_{N-1}, \dots, r_1).$$

Pour $l \in \{1, \dots, 2N\}$,

$$\tilde{s}_l = \frac{1}{\sqrt{2N}} \left(r_0 + (-1)^l r_N + 2 \sum_{k=1}^{N-1} r_k \cos \left(2\pi \frac{kl}{2N} \right) \right).$$

Du point de vue théorique on ne dispose que du résultat suivant qui utilise la positivité de la transformée de Fourier de r donnée par le théorème de Bochner.

Théorème A.1.2. *Soit r une fonction définie positive et paire, intégrable sur \mathbb{R} et dont la transformée de Fourier \hat{r} est aussi intégrable sur \mathbb{R} . Alors, pour tout pas $m \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} r(k/m) \cos(2\pi k\xi)$ est uniformément convergente sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$r(0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} r(k/m) \cos(2\pi k\xi) \geq 0.$$

On renvoie à [DN97] pour la démonstration de ce théorème. Il y est alors discuté des conditions supplémentaires à imposer à r pour s'assurer d'un rang à partir duquel la matrice circulante est positive. On peut aussi faire le choix d'un test de positivité dans l'algorithme proposé.

b) Méthode de la densité spectrale

La méthode de la matrice circulante est utilisée dans le cas où la matrice de covariance est connue. Dans cette partie on suppose que le processus stationnaire admet $f \in L^1(\mathbb{R})$, positive et paire pour densité spectrale et que cette densité est connue. Nous décrivons brièvement une méthode de simulation approchée.

Nous utilisons la représentation spectrale du processus stationnaire Y . D'après le corollaire 1.4.1,

$$Y(t) \stackrel{L^2(\Omega)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f^{1/2}(\xi) dW(\xi),$$

où W est une mesure brownienne complexe. En particulier, si $\mathcal{G}_N = \{\frac{k}{N}; 0 \leq k \leq N\}$, alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$r_k := \mathbf{E} \left(Y \left(\frac{k}{N} \right) Y \left(\frac{0}{N} \right) \right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{k\xi}{N}} f(\xi) d\xi,$$

ce qui peut aussi s'écrire en terme des coefficients de Fourier d'une fonction 1 périodique. En effet, posons

$$F_N(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2\pi N(\xi + k)),$$

alors $F_N \in L^1([0, 1])$ et

$$r_k = (2\pi N) \widehat{F_N}(k) = (2\pi N) \int_0^1 e^{-2i\pi k\xi} F_N(\xi) d\xi.$$

Posons $G_N = \sqrt{F_N}$ on peut approcher Y de la façon suivante.

Proposition A.1.1. *Soit $(\xi_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ une suite de variable indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit pour tout $L \in \mathbb{N}$ la suite Z_L par*

$$Z_L(n) = \sqrt{2\pi N} \sum_{|l| \leq L} \widehat{G_N}(l) \xi_{n-l}, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Alors la suite $(Z_L = \{Z_L(n); n \in \mathbb{Z}\})_{L \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $Z \stackrel{L}{=} \{Y(\frac{n}{N}); n \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La suite $(\widehat{G_N}(l) \xi_{n-l})_{l \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes donc il suffit que leur somme converge en probabilité pour qu'elle converge presque sûrement (cf. [LT80] p.151).

Puisque $G_N \in L^2([0, 1])$, la suite $(\widehat{G_N}(l))_{l \in \mathbb{Z}}$ est dans $l^2(\mathbb{Z})$ et la série $\sum_l \widehat{G_N}(l) \xi_{n-l}$ converge en fait dans $L^2(\Omega)$. On en conclut que la suite $(Z_L)_{L \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement et on note Z sa limite. La suite $(Z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est gaussienne comme limite de suites gaussiennes. De plus pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z(n)Z(m)) &= (2\pi N) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{G_N}(l) \widehat{G_N}(l - (n - m)) \\ &= (2\pi N) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{G_N}(l) \check{G_N}((n - m) - l) \\ &= (2\pi N) \widehat{G_N \check{G_N}}(n - m). \end{aligned}$$

Puisque F_N est réelle et paire, G_N est réelle et paire et $G_N \check{G_N} = F_N$ ce qui conclut la preuve. \square

Une méthode similaire est décrite dans [BLO⁺03b] pour la simulation de MBF 1D et comparée avec d'autres méthodes.

A.1.2 Application au mouvement brownien fractionnaire

On cherche à simuler les trajectoires d'un mouvement brownien fractionnaire (MBF) sur $[0, 1]$, de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$, noté B_H . On fixe alors un pas $N \in \mathbb{N}^*$ et on considère le vecteur $(B_H(0) = 0, B_H(1/N), \dots, B_H(k/N), \dots, B_H(1))$. Ce processus est gaussien centré, à accroissements stationnaires, de matrice de covariance donnée par

$$\mathbf{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

et de densité spectrale $c_H |\xi|^{-2H-1}$. Il suffit alors de considérer ses accroissements de pas $1/N$,

$$\Delta_N^1 B_H(t) := \Delta^1 B_H(t, 1/N) = B_H(t + 1/N) - B_H(t).$$

Le processus $\Delta_N^1 B_H$ est alors stationnaire et on cherche à simuler le vecteur

$$y = (\Delta_N^1 B_H(0), \Delta_N^1 B_H(1/N), \dots, \Delta_N^1 B_H(k/N), \dots, \Delta_N^1 B_H(1)),$$

de matrice de covariance $R = (r(|i - j|))_{1 \leq i, j \leq N+1}$ avec

$$r(k) = \frac{1}{2N^{2H}} (|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}) = 4c_H \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{k\xi}{N}} \sin^2\left(\frac{\xi}{2N}\right) |\xi|^{-2H-1} d\xi.$$

a) Méthode de la matrice circulante

En utilisant d'une part, pour $H \in [1/2, 1)$ le fait que r est convexe, décroissante et positive, et d'autre part des sommes télescopiques, on démontre (cf. [PHJI02]) que la matrice circulante minimale qui borde R est bien positive. On récupère les points du MBF en utilisant que $B_H(k/N) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_N^1 B_H(j/N)$ puisque $B_H(0) = 0$. Le programme matlab correspondant est donné ci-dessous.

```
n=input('pas=2^');
N=2^n;
s=zeros(1,2*N);
B=zeros(N+1,1);

% paramètre De Hurst %
H=input('H=');

% Matrice circulante %
%% Calcul de la fonction de covariance %%
for k=1:N+1
    s(1,k)=N^(-2*H)*(k^(2*H)-2*(k-1)^(2*H)+(abs(k-2))^(2*H));
end;

%% Périodisation %%
s(1,N+2:2*N)=s(1,N:-1:2);

%%Racine carré de la matrice de covariance%%
V=fft(s);
vmin=min(real(V)');
st=(V)^(1/2);

% Vecteur gaussien admettant s comme matrice de covariance %
%% vecteur normal %%
x1=randn(1,2*N);
x2=randn(1,2*N);
x=x1+i*x2;

%% vecteur gaussien obtenu %%
y=(2*N)^(1/2)*ifft(x.*st);
z1=real(y);
z2=imag(y);

% MBF %
%% Bruit gaussien fractionnaire%%
g1=z1(1,1:N+1);
g2=z2(1,1:N+1);

%% MBF %%
B1=cumsum(g1,2)-g1(1,1);
B2=cumsum(g2,2)-g2(1,1);
```

% B1 et B2 sont deux réalisations indépendantes de MBF issues de 0 %

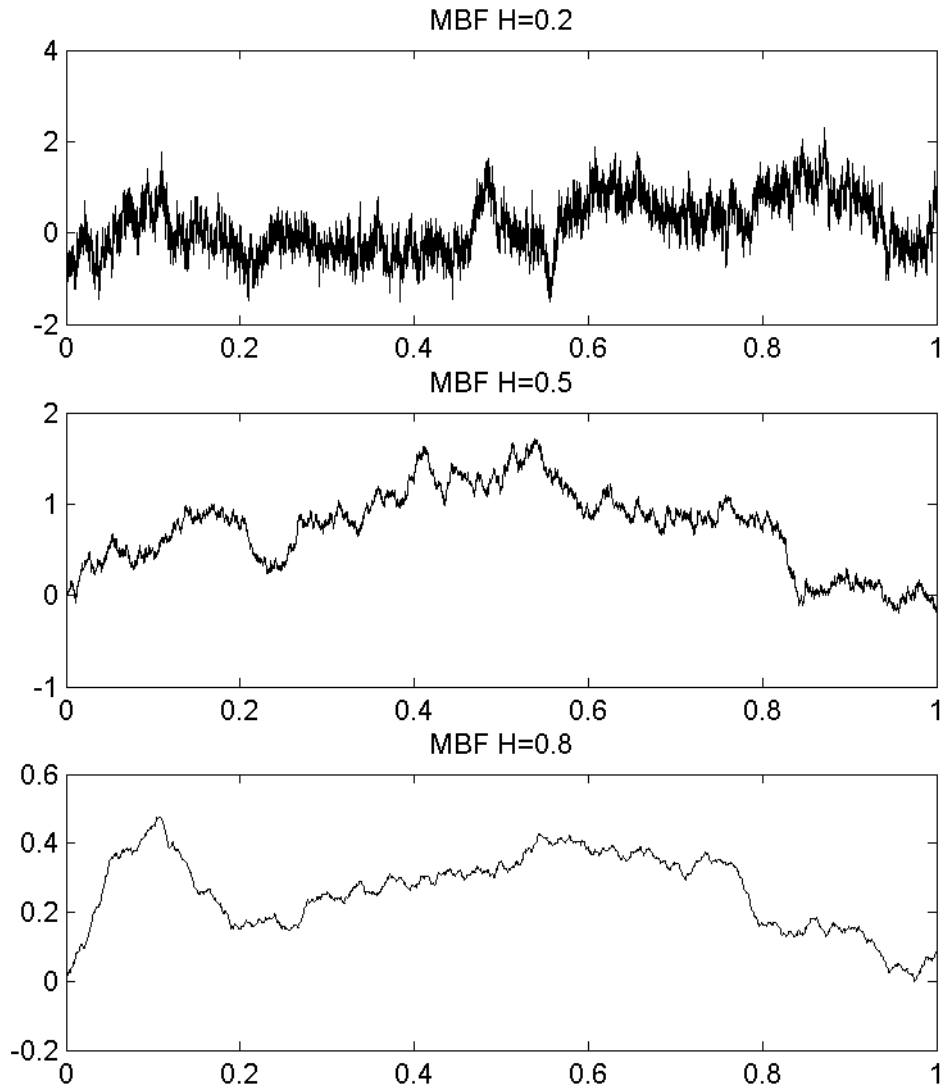


FIG. A.1 – MBF obtenu par la méthode de la matrice circulante

La figure A.1 donne un exemple des trajectoires obtenues pour différentes valeurs de H et un pas $N = 2^{13}$. L'algorithme permet en fait d'obtenir très rapidement des trajectoires avec un pas $N = 2^{19}$.

Le tableau suivant donne v_{\min} , la valeur minimale des parties réelles des valeurs propres de la matrice périodisée, v_{\max} , la valeur maximale des parties réelles et v_{abs} , la valeur maximale des valeurs absolues des parties imaginaires, liée aux arrondis de calcul, pour $N = 2^{19}$.

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
vmin. 10^{-11}	76294	152590	228880	305180	381470	21576	1136	53	2
vmax. 10^6	260600	16700	01000	64	4	5	5	6	7
vabs. 10^{-23}	7309900	408930	28281	1106	0	22	8	8	2

Les valeurs de vmin sont bien toutes positives et l'ordre de grandeur de vabs montre que ces valeurs sont liées aux arrondis de calcul. Ceci montre numériquement la positivité de la matrice circulante minimale.

b) Méthode de la densité spectrale

Voici le programme matlab correspondant à la simulation utilisant la représentation spectrale du MBF. La figure A.2 donne un exemple des trajectoires obtenues pour différentes valeurs de H et un pas $N = 2^{13}$. On a choisi $M = 2^{13}$ et $J = 4$.

```

N=input('N=');
M=input('M=');
J=input('J=');
H=input('H=');
G=zeros(1,4*M);
Gchap=zeros(1,2*M+1);
DS=zeros(1,4*M-1);
for k=1:2*J+1
    X=[1:4*M-1]/(4*M)+k-J-1;
    DS=DS+(2*pi*N)^(-2*H-1)*(sin(pi*X)).^2.*abs(X).^(-2*H-1);
end;
DS=[DS(1,1) DS];
G=DS.^(1/2);
TF=sqrt(2*pi*N)*real(fft(G))/(4*M);
Gchap(1,1:M)=TF(1,3*M+1:4*M);
Gchap(1,M+1:2*M+1)=TF(1,1:M+1);
eps=randn(1,N+2*M+1);
g=zeros(1,N+1);
for k=1:N+1
    g(1,k)=sum(Gchap(1,1:2*M+1).*eps(1,k+2*M:-1:k));
end;
X=cumsum(g,2)-g(1,1);

```

Cette méthode est beaucoup plus lente que la méthode de la matrice circulante mais peut être une alternative lorsque seule la densité spectrale est connue.

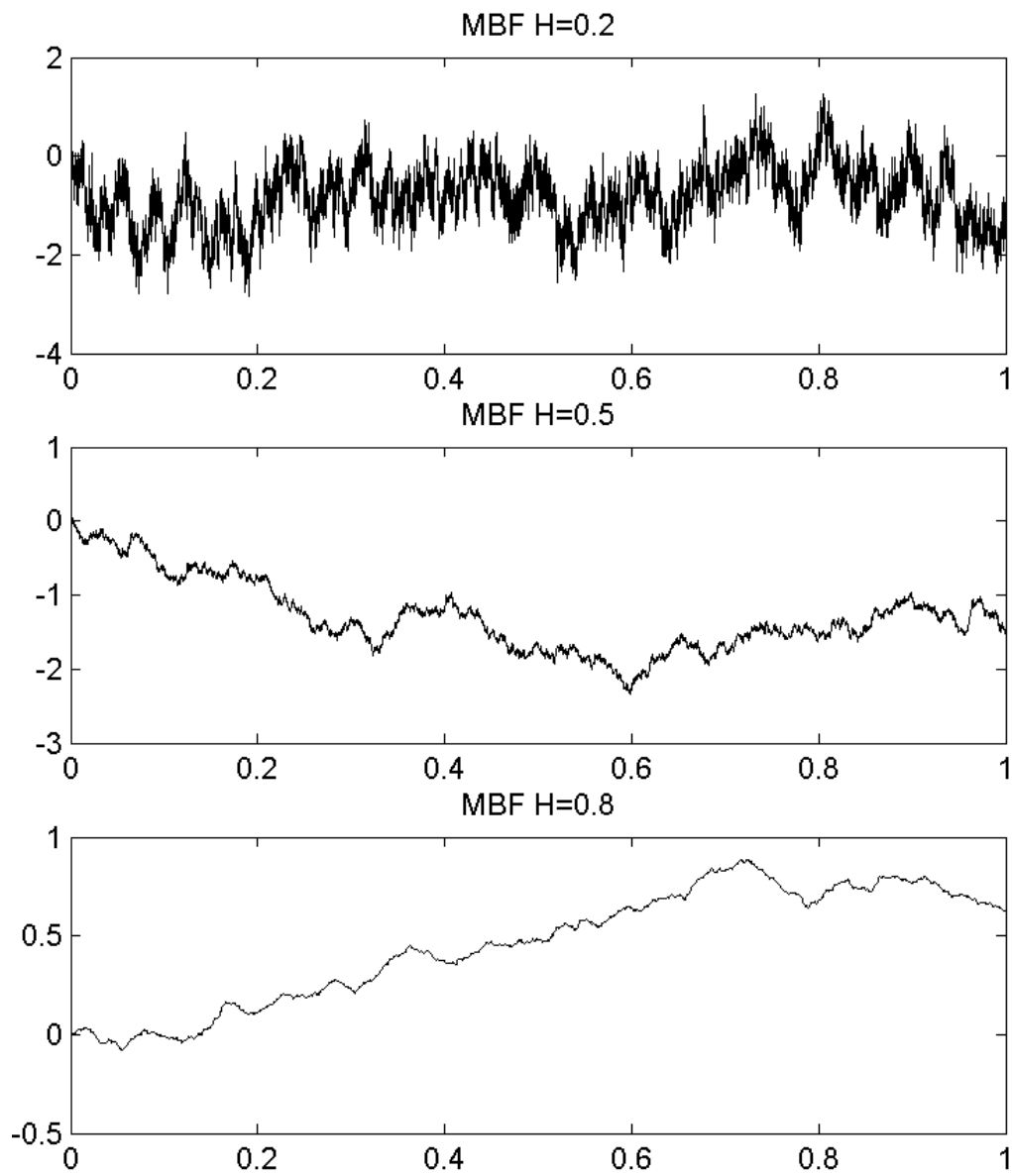


FIG. A.2 – MBF obtenu par la méthode densité spectrale

c) Estimation du paramètre de Hurst

Nous estimons sur les données simulées par la méthode de la matrice circulante avec un pas $N = 2^{19}$, le paramètre de Hurst au moyen des variations quadratiques définies dans la partie 2.3. Rappelons que, si $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ est un processus ponctuel gaussien centré à accroissements stationnaires, ses variations quadratiques généralisées sont définies par

$$V_{N,K}(X) = \sum_{p=0}^{N-K} \left(\Delta^K X \left(\frac{p}{N}, \frac{1}{N} \right) \right)^2.$$

Si X est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre H , d'après la proposition 2.3.3, presque sûrement,

$$\widehat{H}_{N,K} = \frac{1}{2} \left(\log_2 \left(\frac{V_{N,K}}{V_{2N,K}} \right) + 1 \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} H.$$

Les simulations par la méthode de la matrice circulante nous donnent des réalisations de $(B_H(0) = 0, B_H(1/N), \dots, B_H(k/N), \dots, B_H(1))$ pour $N = 2^n$ ce qui nous permet de calculer $\widehat{H}_{2^m, K}$, pour $m < n$. Nous avons choisi ici $n = 19$.

```
n=log(N)/log(2);
B=B1;
% Variations quadratiques généralisées pour K=1 %
V1=zeros(n-2,1);
% Variations quadratiques généralisées pour K=2 %
V2=zeros(n-2,1);
% Variations quadratiques généralisées pour K=3 %
V3=zeros(n-2,1);

for m=1:n-2

    M=floor(N/(2^(m-1)));

    Delta1=B(1,2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*M+1)-B(1,1:2^(m-1):2^(m-1)*M-2^(m-1)+1);
    V1(m,1)=sum(((Delta1).^2)');

    Delta2=B(1,2*2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*M+1)
    -2*B(1,2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*(M-1)+1)+B(1,1:2^(m-1):2^(m-1)*(M-2)+1);
    V2(m,1)=sum(((Delta2).^2)');

    Delta3=B(1,3*2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*M+1)
    -3*B(1,2*2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*(M-1)+1)+3*B(1,2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*(M-2)+1)
    -B(1,1:2^(m-1):2^(m-1)*(M-3)+1);
    V3(m,1)=sum(((Delta3).^2)');

end;

H1=log(V1(2:n-2,1)./V1(1:n-3,1))/(2*log(2))+0.5
H2=log(V2(2:n-2,1)./V2(1:n-3,1))/(2*log(2))+0.5
H3=log(V3(2:n-2,1)./V3(1:n-3,1))/(2*log(2))+0.5
```

Le tableau suivant donne les valeurs moyennes estimées ainsi que leurs écarts types pour différentes valeurs de H , N et K obtenus sur 55 réalisations. La lettre M désigne la moyenne et Σ l'écart type.

N	K	H	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
2^{19}	1	M	0.099	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.897	
		Σ	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.008
	2	M	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.599	0.700	0.800	0.900	0.900
		Σ	0.002	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
	3	M	0.100	0.199	0.300	0.399	0.500	0.599	0.700	0.799	0.900	0.900
		Σ	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.003	0.003
2^{10}	1	M	0.094	0.195	0.292	0.405	0.506	0.592	0.696	0.797	0.886	
		Σ	0.048	0.039	0.037	0.037	0.030	0.029	0.026	0.026	0.025	0.026
	2	M	0.092	0.196	0.287	0.400	0.504	0.583	0.698	0.800	0.909	0.909
		Σ	0.065	0.054	0.052	0.060	0.054	0.056	0.046	0.042	0.045	0.045
	3	M	0.091	0.195	0.286	0.397	0.505	0.579	0.696	0.802	0.914	0.914
		Σ	0.076	0.064	0.061	0.075	0.067	0.070	0.061	0.056	0.064	0.064

Ces résultats sont très précis et l'écart type est faible. Remarquons que les variations quadratiques d'ordre 2 ou 3 donnent de meilleurs résultats que celles d'ordre 1 pour des valeurs de H supérieures à 0.7. A titre indicatif nous avons donné les résultats des estimations lorsque $N = 2^{10}$. En effet, nous serons limités par la taille du pas en dimension 2 et donc pour les transformées de Radon à fenêtre correspondantes. Les résultats dans ce cas sont, comme on l'attendait, moins bons.

On s'inspire de [BLO⁺03a] pour la représentation graphique des résultats. Le diagramme à moustache A.3 représente les biais des estimateurs sur l'échantillon de 55 simulations. Les figures sont obtenues par la fonction *boxplot* de la *statistical toolbox* de Matlab. Chaque boîte a une ligne correspondant au premier quartile $Q1$, à la médiane et au troisième quartile $Q3$. Les moustaches correspondent aux lignes qui sortent des boîtes et représentent l'étendu des autres valeurs. Les données supérieures à $Q3 + 1,5 \times (Q3 - Q1)$ ou inférieures à $Q1 - 1,5 \times (Q3 - Q1)$ sont marqués par des plus comme points exceptionnels.

Une comparaison avec d'autres estimateurs est effectuée dans [BLO⁺03a] et [Coe00].

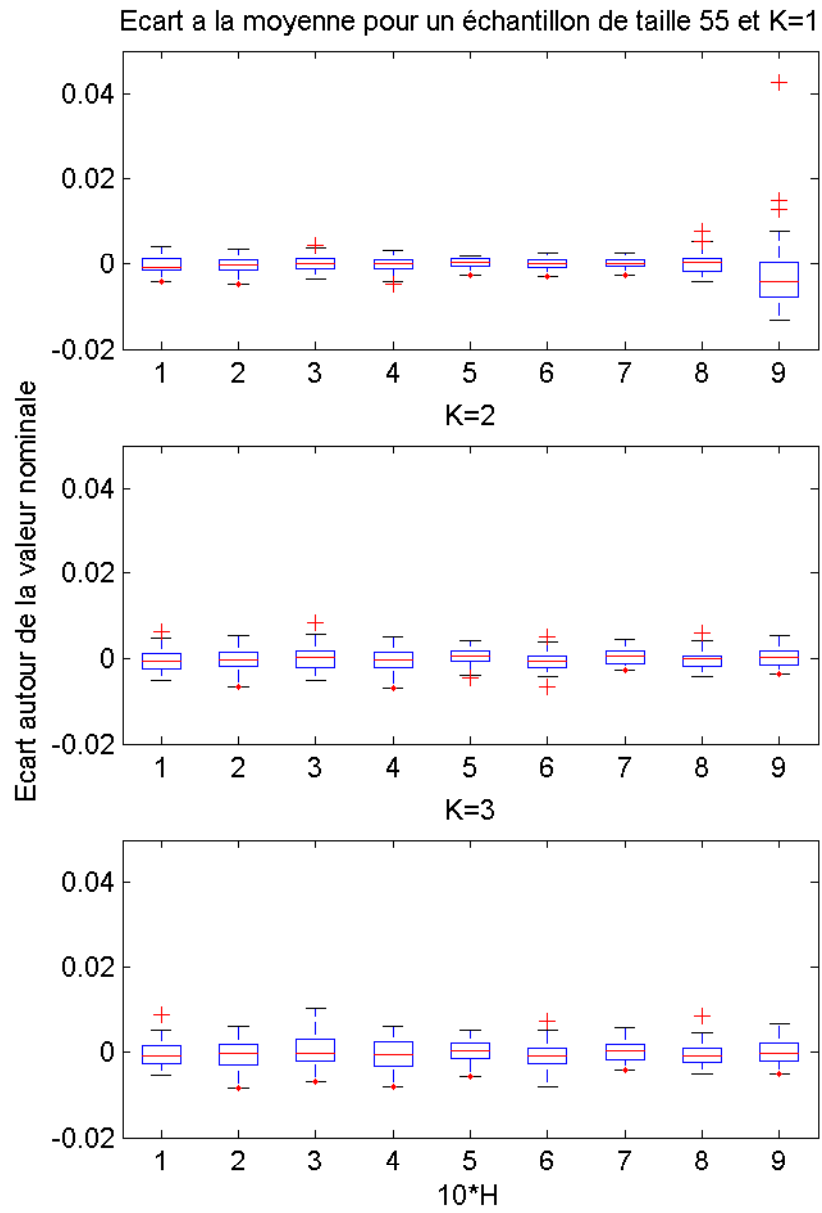


FIG. A.3 – Diagramme à moustache $N = 2^{19}$

A.2 Champs gaussiens en dimension 2

A.2.1 Méthodes de simulation

Dans cette partie on ne cherche plus à simuler un processus mais un champ $Y = \{Y(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ gaussien centré. On veut simuler Y sur une grille rectangulaire $\mathcal{G} = \{(x_p, y_q); 0 \leq p, q \leq N\}$ de pas constant. On peut ordonner cette grille de gauche à droite et de bas en haut par exemple. On fait encore une hypothèse de stationnarité sur le vecteur Y et on note $r(x, y) = \mathbf{E}(Y(x, y)Y(0, 0))$ sa fonction de covariance. En conservant l'ordre initial, la matrice de covariance de $\{Y((x_p, y_q); 0 \leq p, q \leq N)\}$, notée R , est Toeplitz par bloc avec chacun des blocs eux-même Toeplitz. La matrice R est caractérisée par sa première colonne constituée des blocs

$$(R_0, R_1, \dots, R_N),$$

où $R_k = (E(Y(x_i, y_k)Y(x_j, y_0)))_{0 \leq i, j \leq N} = (r(x_i - x_j, y_k - y_0))_{0 \leq i, j \leq N}$. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $r(x, y) = r(|x|, |y|)$, on peut plonger chaque matrice R_k dans une matrice circulante symétrique S_k et définir la matrice circulante par blocs S par sa première colonne donnée par

$$(S_0, S_1, \dots, S_N, S_{N-1}, \dots, S_1).$$

Les valeurs propres de cette matrice sont obtenues en faisant la transformation de Fourier discrète bidimensionnelle de la matrice périodisée

$$\begin{pmatrix} K & K1 \\ K2 & K3 \end{pmatrix},$$

où $K = (r(x_i - x_0, y_j - y_0))_{0 \leq i, j \leq N}$, $K_1 = (r(x_i - x_0, y_{N-j} - y_0))_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N-1}$, $K_2 = (r(x_{N-i} - x_0, y_j - y_0))_{0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N}$ et $K_3 = (r(x_{N-i} - x_0, y_{N-j} - y_0))_{0 \leq i, j \leq N-1}$. Le cas général est traité dans [DN97]. Le problème de la positivité des valeurs propres persiste dans cette méthode.

Rappelons que, en dimension 1, pour simuler un processus à accroissements stationnaires il suffit de simuler ses accroissements. On retrouve le champ initial en imposant à une valeur d'être nulle, $B_H(0) = 0$ par exemple. En dimension 2 on considère un champ $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^2\}$ gaussien centré et à accroissements stationnaires que l'on cherche à simuler sur la grille $\mathcal{G}_N = \{(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}); 0 \leq p, q \leq N\}$. Si $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ les accroissements dans la direction verticale $\Delta_{N,2}^1 X(t) := \Delta^1 X(t, \frac{\mathbf{e}_2}{N})$ ou horizontale $\Delta_{N,1}^1 X(t) := \Delta^1 X(t, \frac{\mathbf{e}_1}{N})$ vont encore être des champs stationnaires mais la simulation des accroissements dans une seule direction ne permet pas de retrouver le champ puisque les valeurs initiales le long de la direction orthogonale ne sont plus données et sont, en général, corrélées avec les valeurs des accroissements simulés. La méthode proposée par [KK96] pour simuler un MBF en dimension 2 n'est pas satisfaisante en ce sens. Les auteurs proposent de simuler les accroissements horizontaux $\Delta_{N,1}^1 X(t)$ et verticaux $\Delta_{N,2}^1 X(t)$ indépendamment, par la méthode de la matrice circulante, pour obtenir les valeurs du champs sur les axes. Ils génèrent ensuite de façon indépendante, toujours par la méthode de la matrice circulante, les accroissements correspondant à un accroissement horizontal suivi d'un accroissement vertical $\Delta_{N,2}^1 \circ \Delta_{N,1}^1 X(t)$. Outre le problème d'indépendance se rajoute celui de la positivité des trois matrices que les auteurs proposent de résoudre en fixant arbitrairement à 0 chaque valeur propre qui serait négative.

Une façon de résoudre ce problème de conditions initiales consiste à simuler le vecteur des accroissements $(\Delta_{N,1}^1 X(t), \Delta_{N,2}^1 X(t))$ sur la grille \mathcal{G}_N [Cha99]. La fonction de covariance r est remplacé la matrice de covariance

$$\Gamma(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \left(\Delta_{N,1}^1 X(x, y) \Delta_{N,1}^1 X(0, 0) \right) & \mathbf{E} \left(\Delta_{N,1}^1 X(x, y) \Delta_{N,2}^1 X(0, 0) \right) \\ \mathbf{E} \left(\Delta_{N,2}^1 X(x, y) \Delta_{N,1}^1 X(0, 0) \right) & \mathbf{E} \left(\Delta_{N,2}^1 X(x, y) \Delta_{N,2}^1 X(0, 0) \right) \end{pmatrix},$$

dont il faut connaître une décomposition hermitienne.

A.2.2 Application au mouvement brownien fractionnaire

a) Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire 2D

Pour simuler un MBF en dimension 2 nous utiliserons la méthode de M. Stein [Ste02]. Rappelons la brièvement. L'idée consiste à simuler d'abord un champ stationnaire isotrope dont la variance des accroissements est proche de celle d'un MBF. Pour cela M. Stein définit des fonctions radiales K de la forme

$$K(r) = \begin{cases} c_0 - r^{2H} + c_2 r^2 & \text{si } 0 \leq r \leq 1; \\ K_1(r) & \text{si } 1 < r \leq R; \\ 0 & \text{si } r > R. \end{cases}$$

Il cherche les coefficients c_0 , c_2 et la fonction K_1 de telle sorte que K soit continue et puisse être la fonction de covariance d'un champ isotrope. Remarquons que, par le théorème de Bochner cette dernière condition est alors équivalente à ce que la transformée de Fourier (en dimension 2) de K soit une fonction positive. Si K définit bien une fonction de covariance, on peut générer un champ gaussien centré stationnaire admettant K pour fonction de covariance par la méthode de la matrice circulante. On le note Z . Alors, pour tout $t, t' \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{2} \text{Var} (Z(t) - Z(t')) = K(0) - K(|t - t'|).$$

En particulier, si $|t - t'| \leq 1$, par choix de K ,

$$\frac{1}{2} \text{Var} (Z(t) - Z(t')) = |t - t'|^{2H} - c_2 |t - t'|^2 = \frac{1}{2} \text{Var} (B_H(t) - B_H(t')) - c_2 |t - t'|^2.$$

Il suffit alors de générer X_1 et X_2 deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 2c_2)$, et indépendantes de Z . On considère le champ gaussien centré Z^* défini par

$$Z^*(t) = Z(t) + t_1 X_1 + t_2 X_2 - Z(0),$$

où $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Choisissons $t, t' \in [0, 1/\sqrt{2}] \times [0, 1/\sqrt{2}]$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (Z^*(t) Z^*(t')) &= K(|t - t'|) - K(|t|) + 2c_2 (t_1 t'_1 + t_2 t'_2) - K(|t'|) + K(0) \\ &= |t|^{2H} + |t'|^{2H} - |t - t'|^{2H} \\ &= \mathbf{E} (B_H(t) B_H(t')). \end{aligned}$$

Ainsi, le champ $Z^* = \{Z^*(t); t \in [0, 1/\sqrt{2}]\}$ est une surface brownienne fractionnaire de paramètre de Hurst H . Il suffit donc de trouver une fonction K qui convienne. M. Stein donne diverses expressions selon les valeurs de H et la dimension de l'espace (2 ou 3).

En dimension 2 et pour $H \in (0, 0.75)$, M. Stein considère la fonction K définie avec $c_0 = 1 - H$, $c_2 = H$ et $R = 1$ (donc $K_1 \equiv 0$). Sa démonstration concernant la positivité de la transformée de Fourier de K est fautive suite à une erreur de calcul. Cependant, numériquement, les valeurs propres de la matrice périodisée sont bien positives pour $H \in (0, 0.75)$ comme l'indique le tableau situé à la suite du programme.

```

% paramètre De Hurst %
H=input('prendre 0<H<0.75 H=')
a=2*H;
N=input('pas de discrétisation N=')

% Calcul de la fonction de covariance %
K=zeros(N+1,N+1);

%% valeurs sur le carré unité %%
for k=1:N+1
    for l=1:N+1
        r=[(k-1)/N (l-1)/N]*[(k-1)/N (l-1)/N]';
        if r<=1
            K(k,l)=1-1/2*a-r^H+1/2*a*r;
        else K(k,l)=0;
        end
    end
end

% Périodisation de K %
P=zeros(2*N,2*N);
P(1:N+1,1:N+1)=K(1:N+1,1:N+1);
P(N+2:2*N,1:N+1)=K(N:-1:2,1:N+1);
P(1:N+1,N+2:2*N)=K(1:N+1,N:-1:2);
P(N+2:2*N,N+2:2*N)=K(N:-1:2,N:-1:2);

%% Valeurs propres de P %%
V=fft2(P);

%% On s'assure que les valeurs propres sont positives: vmin doit être positif %%
vmin=min(min(real(V)))

% Vecteur gaussien admettant P comme matrice de covariance %
%% vecteur normal %%
randn('state',sum(100*clock));
x1=randn(2*N,2*N);
x2=randn(2*N,2*N);
x=x1+i*x2;

%% vecteur gaussien obtenu %%
D=x.*sqrt(V);
y=(2*N)*ifft2(D);
z1=real(y);

% On obtient un vecteur gaussien de matrice de covariance K %
%% Il faut rester dans le disque unité %%
M=floor(N/sqrt(2));

```



```

%% On restreint z1 au carré contenu dans le disque unité %%
g=z1(1:M+1,1:M+1);

% Il faut ajuster pour obtenir une surface brownienne fractionnaire %
%% On génère 2 va indépendantes gaussiennes centrées de variance a %%
X=sqrt(a)*randn(2,1);

%% surface BF %%
for k=1:M+1
    for j=1:M+1
        Z(k,j)=g(k,j)+(k-1)*X(1,1)/N+(j-1)*X(2,1)/N;
    end;
end;

%% On obtient le MBF en lui imposant d'être nul en 0 %%
B=Z-Z(1,1);

```

Les figures A.4, A.5 et A.6 représentent les surfaces browniennes fractionnaires obtenues pour $N = 2^{10}$ et $H = 0.2, 0.5$ et 0.7 . Le tableau suivant donne v_{\min} , la valeur minimale des parties réelles des valeurs propres de la matrice périodisée, v_{\max} , la valeur maximale des parties réelles et v_{abs} , la valeur maximale des valeurs absolues des parties imaginaires, pour $N = 2^{10}$.

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$v_{\min}.10^{-4}$	2193	473	100	21	4.063	0.746	0.110	-0.033	-5.390
$v_{\max}.10^5$	1.348	2.196	2.661	2.824	2.745	2.471	2.035	1.464	0.780
$v_{\text{abs}}.10^{-11}$	2.720	4.101	5.300	5.477	5.808	4.254	3.672	2.718	1.316

L'ordre de grandeur de v_{abs} permet de penser que cette valeur est liée aux arrondis de calcul et que v_{\min} traduit bien le signe des valeurs propres. Remarquons que v_{\min} est bien positif pour $H \leq 0.7$ mais négatif pour $H = 0.8$ et 0.9 comme indiqué par M. Stein.

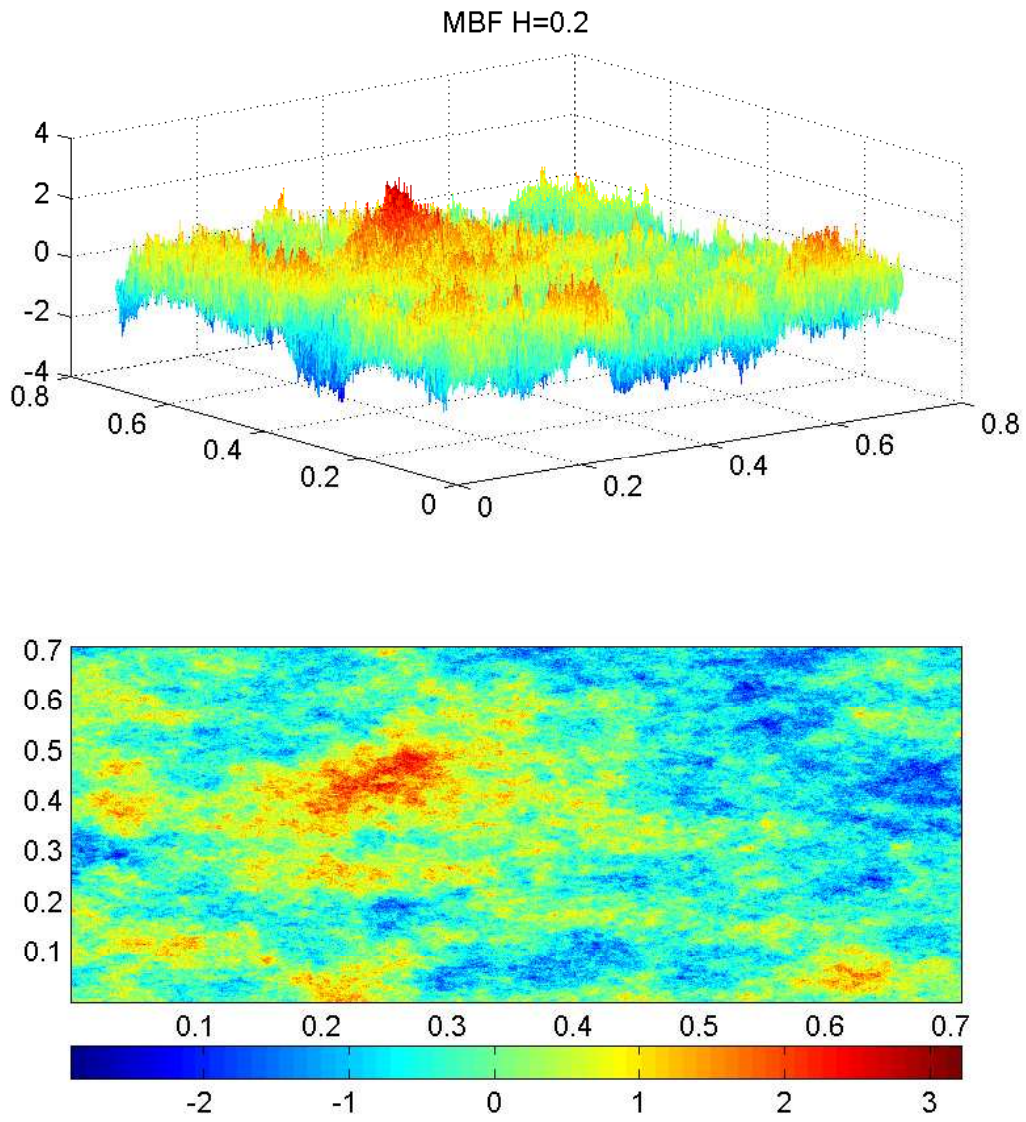


FIG. A.4 – MBF obtenu par la méthode de la matrice circulante $N = 2^{10}$

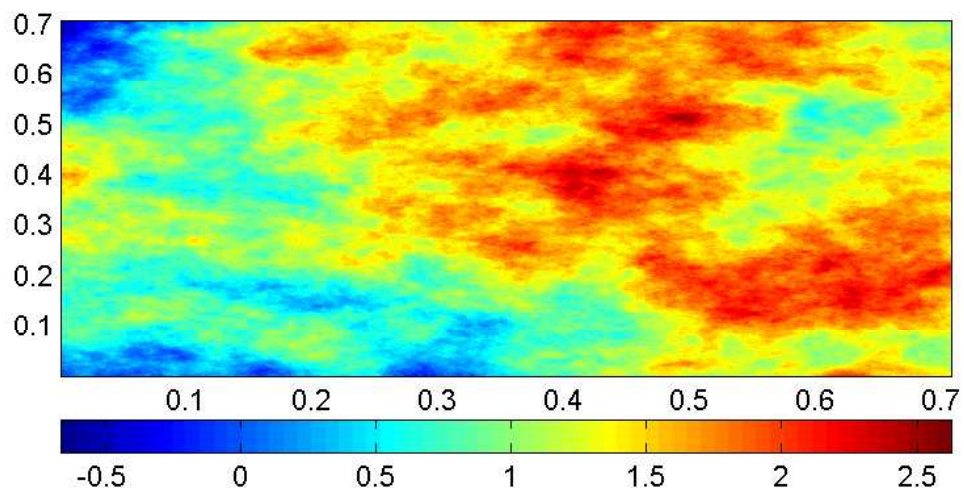
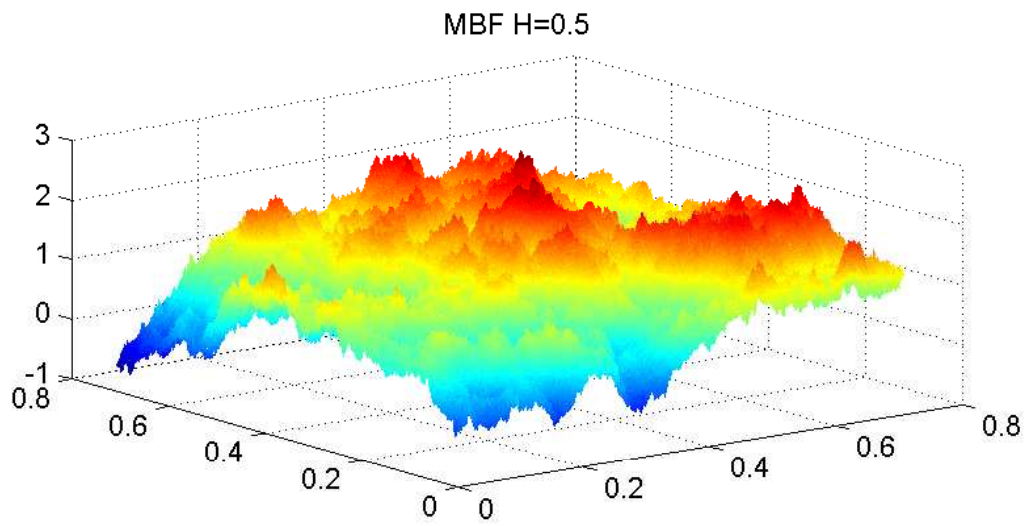


FIG. A.5 – MBF obtenu par la méthode de la matrice circulante $N = 2^{10}$

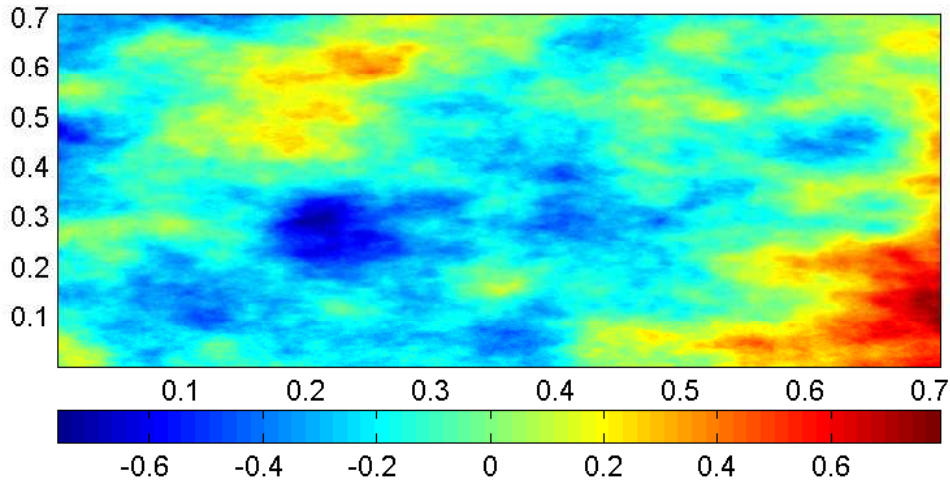
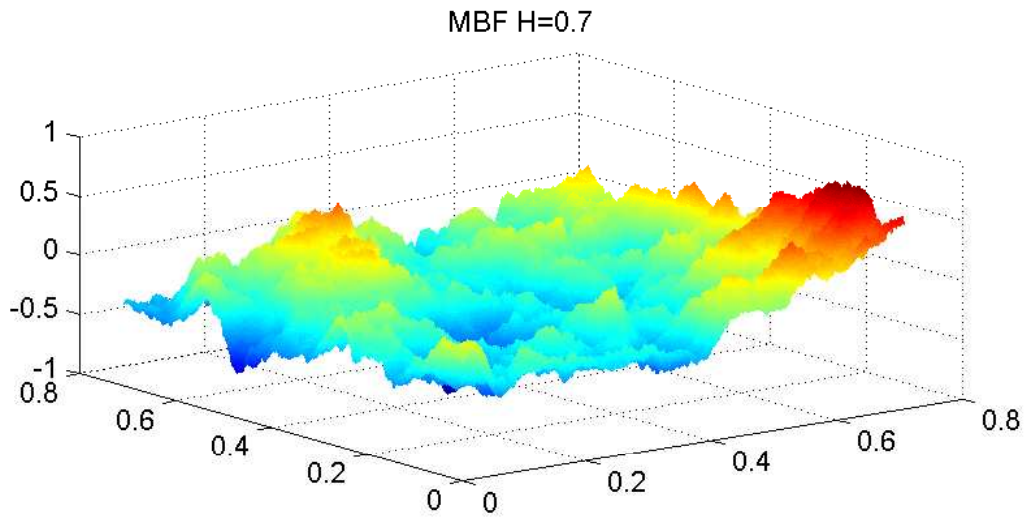


FIG. A.6 – MBF obtenu par la méthode de la matrice circulante $N = 2^{10}$

b) Estimation du paramètre de Hurst

Nous estimons sur les données simulées avec un pas $1/N = 2^{-10}$ le paramètre de Hurst au moyen des variations quadratiques définies dans la partie 2.3. On rappelle que, si $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^2\}$ est un champ ponctuel gaussien centré à accroissements stationnaires, ses variations quadratiques généralisées sont définies par

$$V_{N,K}(X) = \sum_{\mathbf{p}=0}^{N-K} \left(\Delta_{N,2}^K \circ \Delta_{N,1}^K X \left(\frac{\mathbf{p}}{N} \right) \right)^2 .$$

Si X est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre H , d'après la proposition 2.3.3, presque sûrement,

$$\widehat{H}_{N,K} = \frac{1}{2} \left(\log_2 \left(\frac{V_{N,K}}{V_{2N,K}} \right) + 2 \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} H.$$

Les simulations par la méthode de la matrice circulante nous donnent des réalisations de $\left\{ B_H \left(\left(\frac{k}{N}, \frac{j}{N} \right) \right); 0 \leq k, j \leq \frac{N}{\sqrt{2}} \right\}$ ce qui nous permet de calculer $\widehat{H}_{2^m, K}$, pour $m < 10$.

```

B=input('B=');
M=floor(N/sqrt(2));
n=7;

%Variations quadratiques généralisées pour K=1%
V1=zeros(n,1);
%Variations quadratiques généralisées pour K=2%
V2=zeros(n,1);

for m=1:n-1

    K=floor(M/(2^(m-1)));

    Delta11=B(2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*K+1,1:M+1)-B(1:2^(m-1):2^(m-1)*K-2^(m-1)+1,1:M+1);
    Delta1=Delta11(1:K,2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*K+1)-Delta11(1:K,1:2^(m-1):2^(m-1)*K-2^(m-1)+1);
    V1(m,1)=sum(sum((Delta1).^2)');

    Delta21=B(2*2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*K+1,1:M+1)-2*B(2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*(K-1)+1,1:M+1)
    +B(1:2^(m-1):2^(m-1)*(K-2)+1,1:M+1);
    Delta2=Delta21(1:K-1,2*2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*K+1)
    -2*Delta21(1:K-1,2^(m-1)+1:2^(m-1):2^(m-1)*(K-1)+1)+Delta21(1:K-1,1:2^(m-1):2^(m-1)*(K-2)+1);
    V2(m,1)=sum(sum((Delta2).^2)');

end;

H1=log(V1(2:n-1,1)./V1(1:n-2,1))/(2*log(2))+1;
H2=log(V2(2:n-1,1)./V2(1:n-2,1))/(2*log(2))+1;

```

Le tableau suivant donne les valeurs moyennes estimées ainsi que leurs écarts types pour différentes valeurs de H et K , obtenus sur 32 réalisations. La lettre M désigne la moyenne et Σ l'écart type.

K	H	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1	M	0.100	0.200	0.301	0.400	0.499	0.601	0.700
	Σ	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.0036	0.004
2	M	0.098	0.198	0.300	0.399	0.497	0.598	0.698
	Σ	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.006

Ces résultats sont très bons et d'écarts types faibles. Remarquons une légère sous estimation de H pour les variations quadratiques d'ordre 2 en comparaison avec celles d'ordre 1. Le diagramme à moustache A.7 représente les biais des estimateurs sur l'échantillon de 32 simulations et illustre à nouveau la remarque précédente.

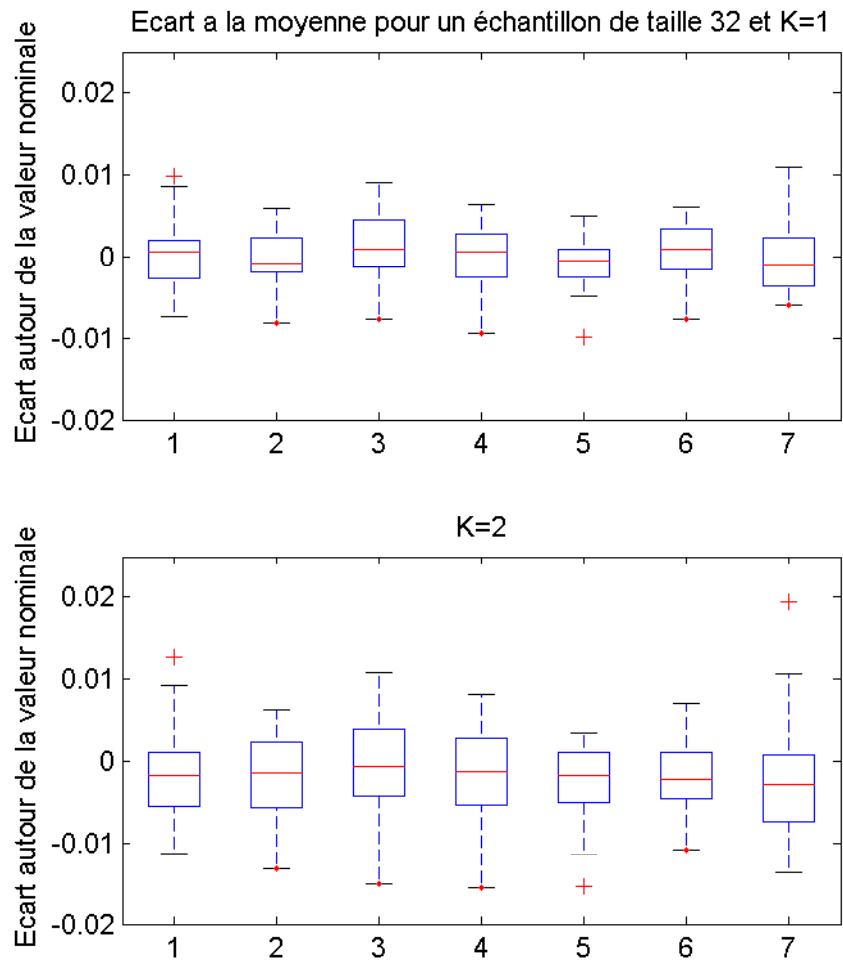


FIG. A.7 – Diagramme à moustache $N = 2^{10}$

A.3 Simulation des transformées de Radon à fenêtre de MBF

A.3.1 Simulation

A partir des simulations de MBF en dimension 2 on obtient les transformées de Radon à fenêtre dans les directions verticale et horizontale pour la fenêtre $\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]}$. On note B la matrice correspondant à la trajectoire du MBF avec un pas $1/N$.

```
P1=N^(-1)*sum(B);  
P2=N^(-1)*sum(B');
```

La matrice P1 (resp. P2) représente les valeurs de la transformée de Radon à fenêtre verticale (resp. horizontale) obtenue en sommant les valeurs dans la direction verticale (resp. horizontale). Les figures A.8, A.9, A.9 correspondent aux transformées de Radon à fenêtre obtenues pour les simulations de MBF de paramètre de Hurst 0.2 (figure A.4), 0.5 (figure A.5) et 0.7 (figure A.6).

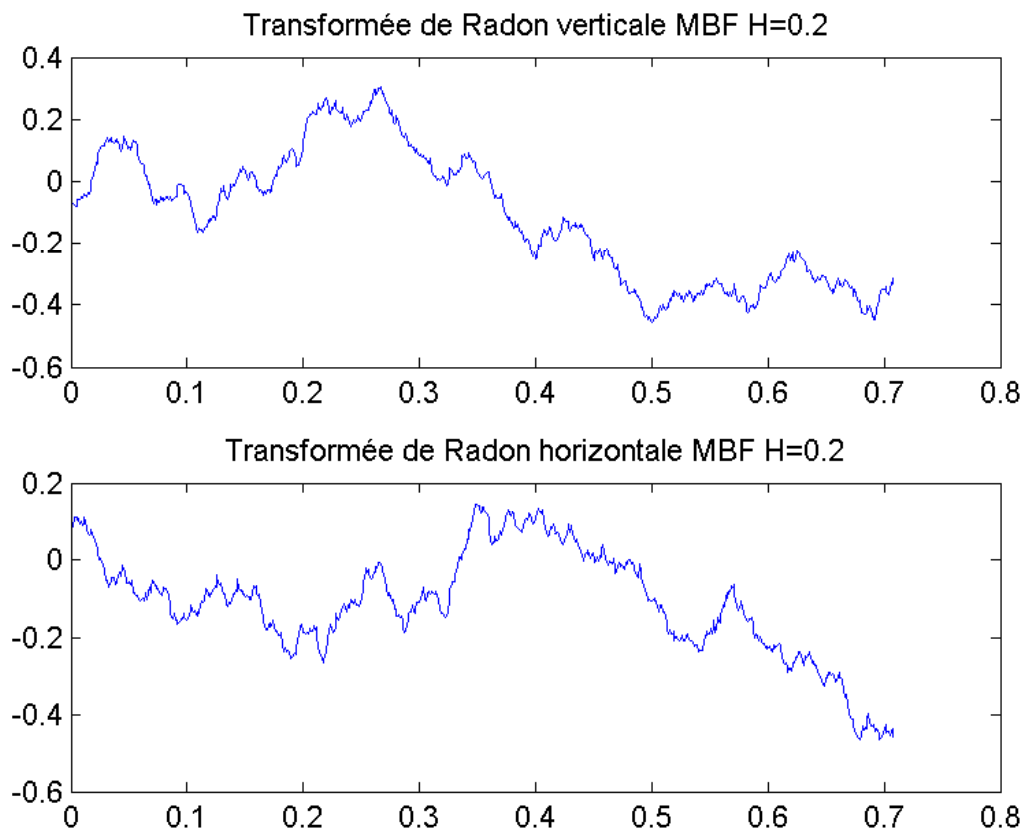


FIG. A.8 – Transformées de Radon de MBF

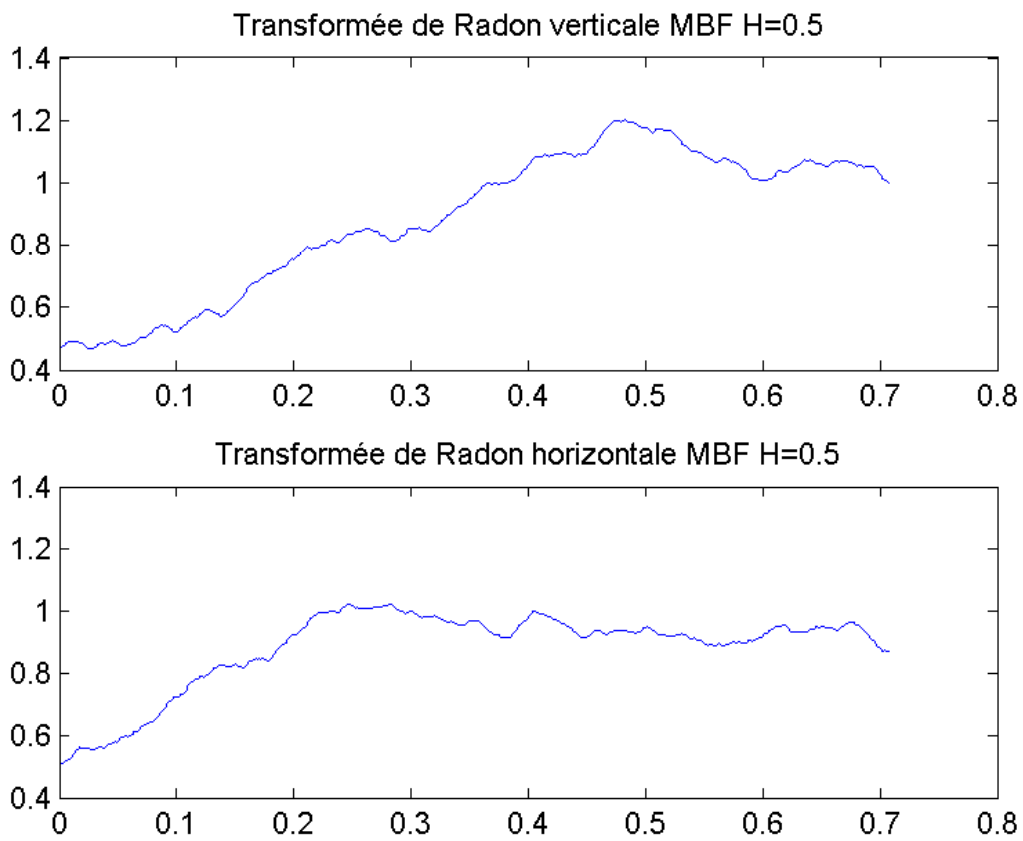


FIG. A.9 – Transformées de Radon de MBF

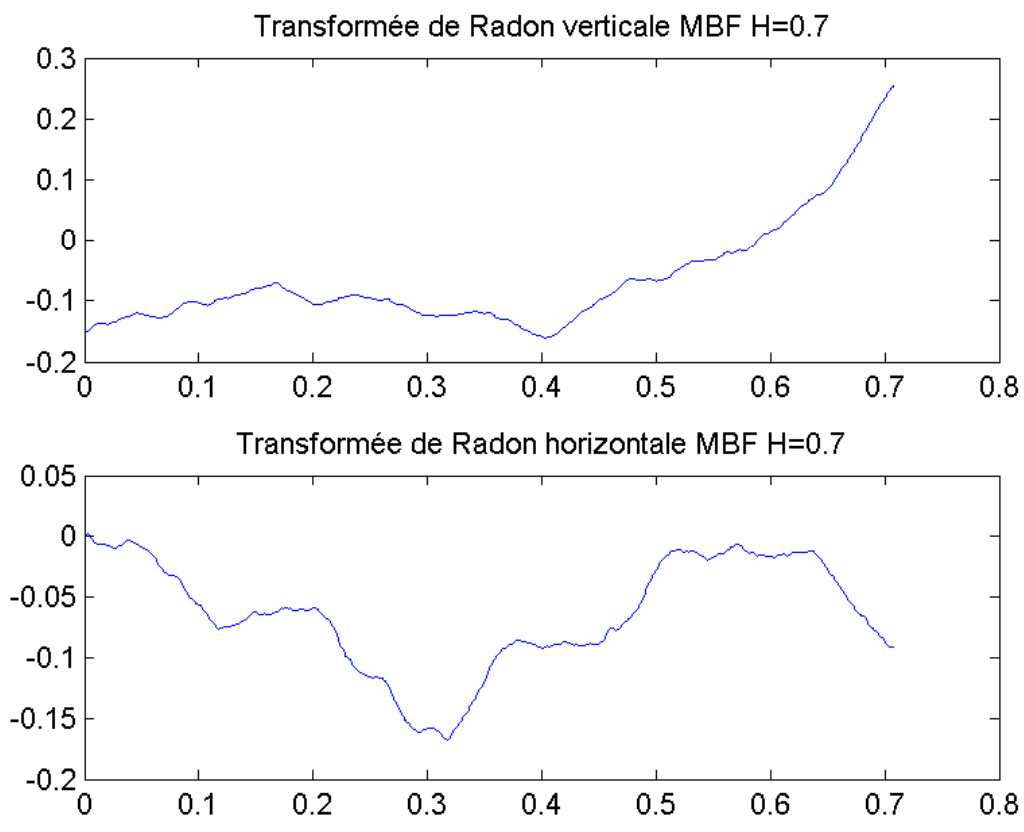


FIG. A.10 – Transformées de Radon de MBF

A.3.2 Estimation

Dans [ABE04], il y est discuté du choix du pas de la discrétisation de l'intégrale et de celui des variations quadratiques. Ici, le pas de la discrétisation de l'intégrale est $1/N$. Celui des variations quadratiques doit être en $1/N^{1/\nu_H}$ où $\nu_H > 1 + \frac{1}{2H}$. Le problème de l'estimation est lié au fait que $N = 2^{10}$ est petit. Pour $H = 0.1$ cela correspond à $N^{1/\nu_H} < 3$ ce qui n'a pas de sens pour les variations quadratiques correspondantes. Au mieux, pour $H = 0.7$, on devrait prendre $N^{1/\nu_H} < 57$ ce qui est certes un peu meilleur mais pas encore satisfaisant. Les tableaux suivants donnent les valeurs moyennes et écarts types de l'estimation de la régularité des transformées de Radon à fenêtre de MBF. On s'attend à obtenir $H + \frac{1}{2}$ si on considère un MBF de paramètre H comme champ initial simulé. Le premier tableau correspond à des valeurs de H inférieures à 0.5. Nous avons utilisé les variations quadratiques généralisées du premier ordre et du second ordre.

H	$H + \frac{1}{2}$	K	N	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6
0.1	0.6	1	Moyenne verticale	0.348	0.437	0.517	0.549	0.555
			Σ	0.058	0.047	0.074	0.097	0.120
			Moyenne horizontale	0.339	0.441	0.487	0.526	0.510
			Σ	0.033	0.038	0.077	0.102	0.166
		2	Moyenne verticale	0.268	0.374	0.480	0.528	0.555
			Σ	0.081	0.077	0.130	0.157	0.220
			Moyenne horizontale	0.262	0.376	0.449	0.498	0.511
			Σ	0.044	0.075	0.1162	0.220	0.262
0.2	0.7	1	Moyenne verticale	0.560	0.621	0.641	0.654	0.565
			Σ	0.036	0.049	0.061	0.089	0.150
			Moyenne horizontale	0.558	0.622	0.641	0.668	0.642
			Σ	0.041	0.058	0.057	0.064	0.100
		2	Moyenne verticale	0.469	0.583	0.624	0.703	0.532
			Σ	0.075	0.087	0.124	0.153	0.272
			Moyenne horizontale	0.466	0.576	0.602	0.701	0.641
			Σ	0.064	0.109	0.130	0.141	0.236
0.3	0.8	1	Moyenne verticale	0.708	0.750	0.760	0.750	0.702
			Σ	0.036	0.042	0.053	0.067	0.096
			Moyenne horizontale	0.697	0.739	0.740	0.730	0.681
			Σ	0.029	0.033	0.043	0.062	0.131
		2	Moyenne verticale	0.614	0.732	0.781	0.763	0.696
			Σ	0.058	0.072	0.120	0.195	0.263
			Moyenne horizontale	0.612	0.730	0.747	0.758	0.674
			Σ	0.041	0.080	0.097	0.142	0.262
0.4	0.9	1	Moyenne verticale	0.827	0.848	0.833	0.830	0.799
			Σ	0.026	0.022	0.036	0.045	0.070
			Moyenne horizontale	0.826	0.833	0.827	0.810	0.791
			Σ	0.026	0.029	0.043	0.059	0.067
		2	Moyenne verticale	0.757	0.867	0.853	0.882	0.822
			Σ	0.054	0.083	0.120	0.167	0.222
			Moyenne horizontale	0.780	0.847	0.890	0.839	0.828
			Σ	0.052	0.068	0.103	0.155	0.196

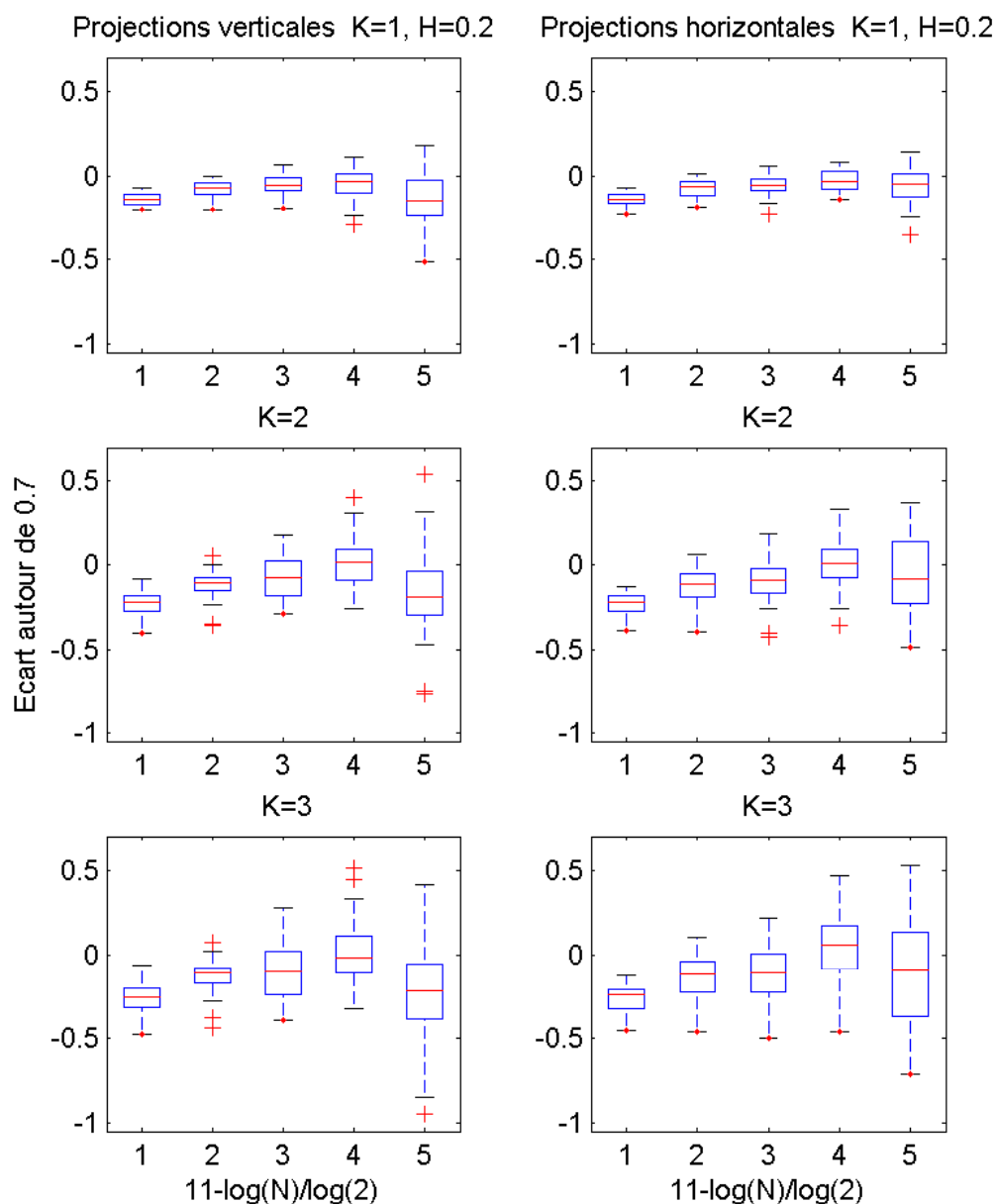


FIG. A.11 – Diagramme à moustache $N = 2^{10}$ et $H = 0.2$

Dans le tableau précédent, nous avons mis en gras les valeurs moyennes qui se rapprochent le plus des valeurs théoriques espérées. Les valeurs obtenues sous estiment les valeurs théoriques et les écarts types sont élevés. Les variations quadratiques d'ordre 2 ont des écarts types plus grands que celles d'ordre 1 pour les pas 2^{-8} , 2^{-7} et 2^{-6} . Sous l'hypothèse $H < 0.5$ il vaut donc mieux considérer les variations quadratiques d'ordre 1. Le choix du pas semble aléatoire mais la comparaison valeur moyenne/ écart type nous incite à préférer un pas en 2^{-9} ou 2^{-8} . Dans ce cas, la valeur de la plus mauvaise erreur commise diminue lorsque H croît. Elle est aux alentours de 0.2 pour $H = 0.1$ et de 0.1 pour $H = 0.4$.

Pour des valeurs du paramètre de Hurst H supérieures à 0.5, la régularité des transformées de Radon à fenêtre, $H + \frac{1}{2}$, dépasse 1. Il faut considérer les variations quadratiques généralisés d'ordre supérieur à 1. Le tableau suivant donne les valeurs moyennes et les écarts types pour les variations quadratiques généralisés d'ordre 1, 2 et 3

H	$H + \frac{1}{2}$	K	N	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6			
0.5	1	1	Moyenne verticale	0.908	0.903	0.893	0.876	0.866			
			Σ	0.019	0.028	0.028	0.046	0.044			
			Moyenne horizontale	0.907	0.902	0.884	0.887	0.845			
			Σ	0.019	0.024	0.036	0.044	0.066			
				2	Moyenne verticale	0.912	0.961	0.986	0.924	1.025	
					Σ	0.048	0.076	0.084	0.132	0.173	
Moyenne horizontale	0.923	0.961			0.909	0.966	0.981				
			Σ	0.051	0.067	0.100	0.146	0.202			
		3	Moyenne verticale	0.884	0.949	1.001	0.890	1.001			
			Σ	0.071	0.106	0.127	0.191	0.268			
			Moyenne horizontale	0.897	0.968	0.892	0.912	0.978			
			Σ	0.067	0.091	0.146	0.236	0.286			
			0.6	1.1	1	Moyenne verticale	0.948	0.942	0.925	0.906	0.855
						Σ	0.020	0.022	0.036	0.046	0.091
Moyenne horizontale	0.957	0.951				0.941	0.924	0.881			
			Σ	0.012	0.018	0.019	0.033	0.067			
		2	Moyenne verticale	1.028	1.086	1.077	1.030	0.961			
			Σ	0.045	0.077	0.120	0.147	0.208			
			Moyenne horizontale	1.035	1.073	1.098	1.093	1.006			
			Σ	0.037	0.076	0.079	0.097	0.195			
				3	Moyenne verticale	0.996	1.078	1.087	1.036	0.933	
					Σ	0.071	0.121	0.159	0.189	0.292	
Moyenne horizontale	1.014	1.061			1.088	1.090	0.992				
			Σ	0.062	0.106	0.121	0.154	0.257			
0.7	1.2	1	Moyenne verticale	0.982	0.976	0.963	0.956	0.919			
			Σ	0.010	0.013	0.026	0.027	0.050			
			Moyenne horizontale	0.978	0.974	0.960	0.951	0.912			
			Σ	0.010	0.012	0.020	0.024	0.046			
				2	Moyenne verticale	1.153	1.163	1.180	1.174	1.162	
					Σ	0.042	0.066	0.086	0.120	0.150	
Moyenne horizontale	1.131	1.176			1.165	1.189	1.177				
			Σ	0.038	0.064	0.090	0.094	0.162			
		3	Moyenne verticale	1.135	1.149	1.175	1.145	1.1556			
			Σ	0.051	0.100	0.140	0.179	0.237			
			Moyenne horizontale	1.106	1.178	1.142	1.168	1.168			
			Σ	0.065	0.090	0.116	0.159	0.247			

Les valeurs obtenues sous estiment encore les valeurs théoriques. Les variations quadratiques d'ordre 1 donnent des résultats qui varient peu. Leurs écarts types sont d'ailleurs plus faibles. Ceci est en accord avec le fait que l'on dépasse 1 pour la régularité théorique. Les variations quadratiques d'ordre 2 et 3 donnent des valeurs moyennes plus proches des valeurs souhaitées mais celles d'ordre 3 ont des écarts types plus élevés. Il vaut donc mieux

considérer les variations quadratiques d'ordre 2. Comme dans le cas $H < 0.5$, la comparaison valeur moyenne/ écart type nous incite à préférer un pas en 2^{-9} ou 2^{-8} pour lesquels la valeur de la plus mauvaise erreur commise reste de l'ordre de 0.1.

Les diagrammes à moustaches A.11, A.12 et A.13, sur 32 réalisations, pour $N = 2^{10}$, permettent de visualiser un peu mieux ces résultats.

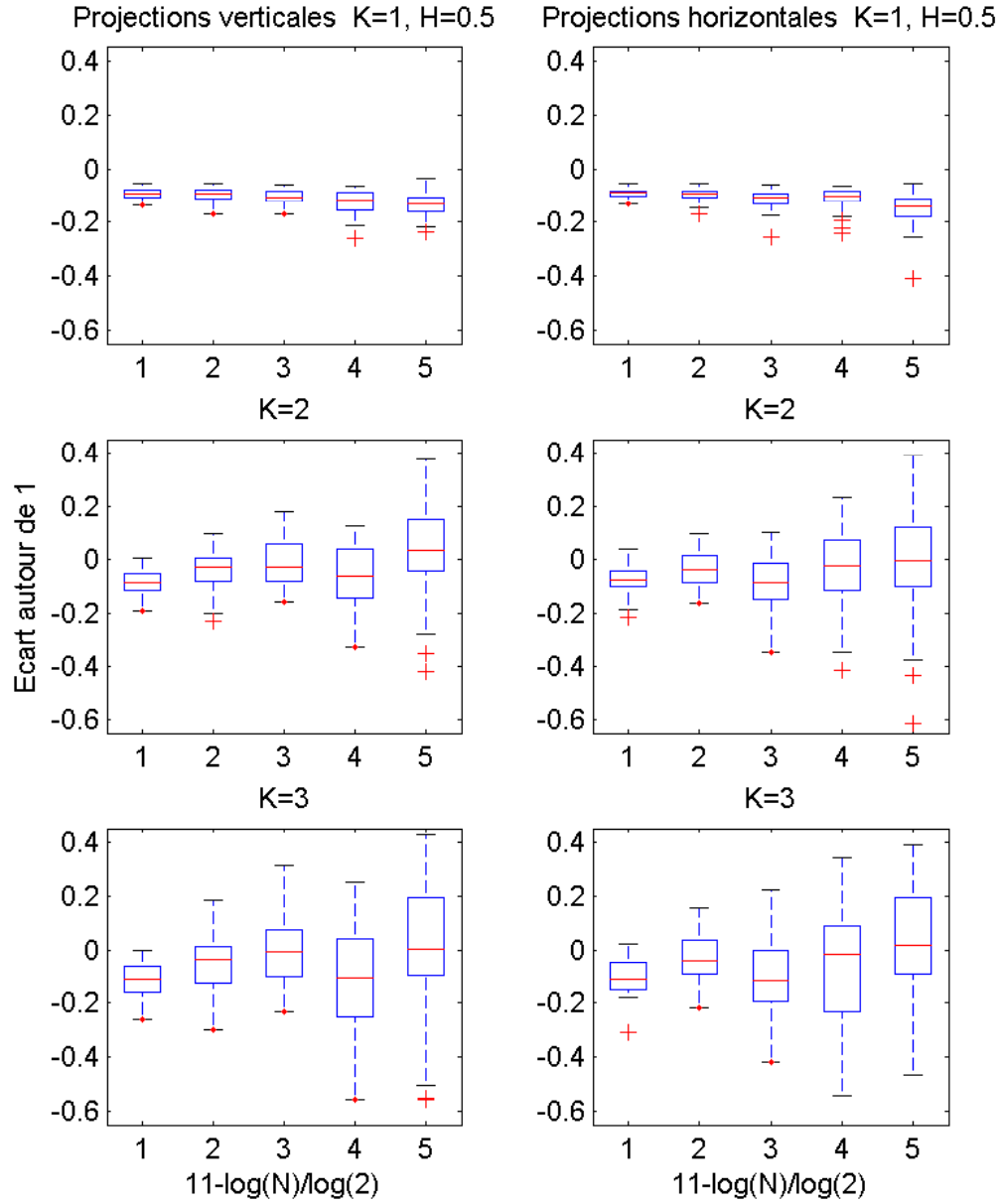


FIG. A.12 – Diagramme à moustache $N = 2^{10}$ et $H = 0.5$

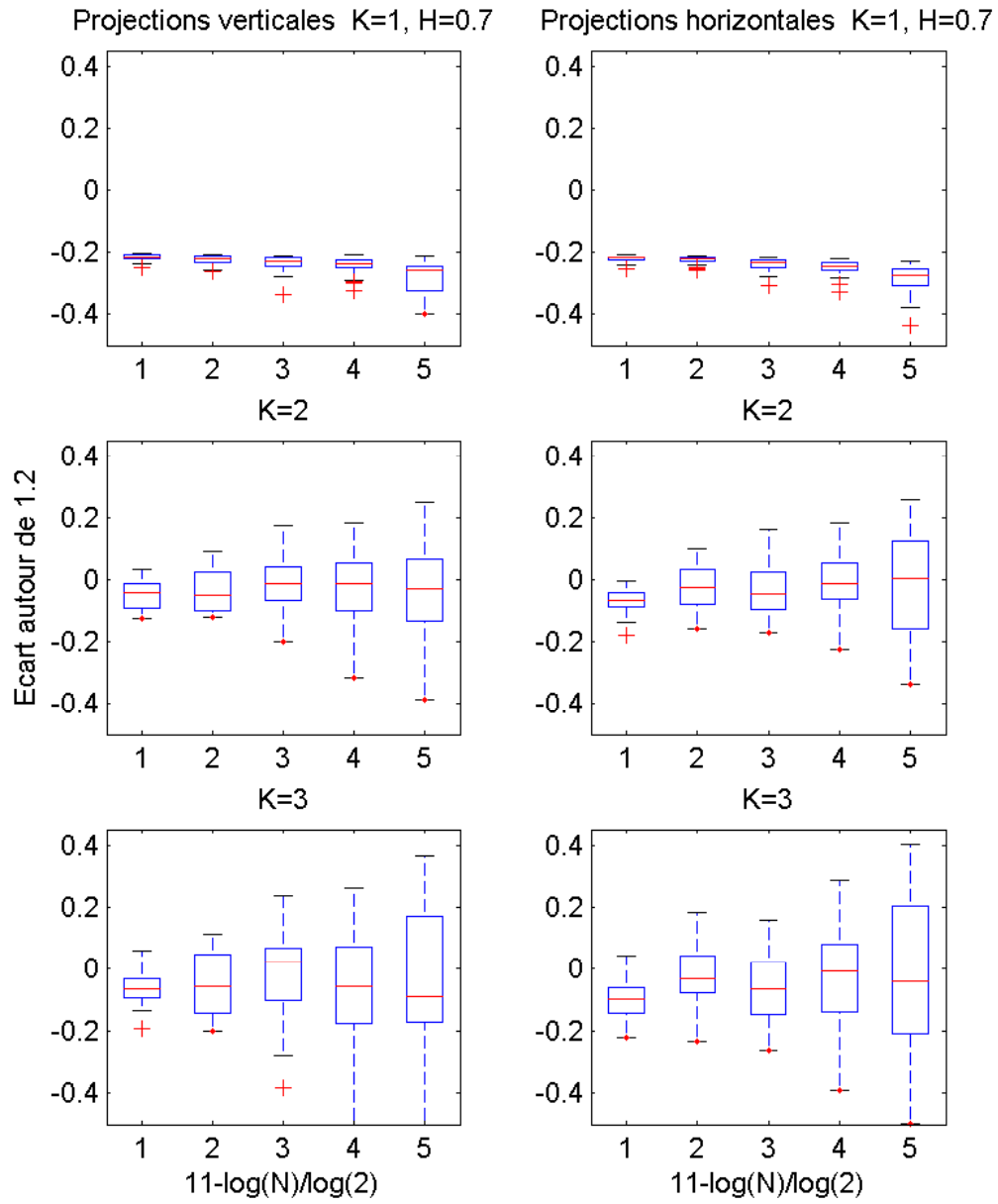


FIG. A.13 – Diagramme à moustache $N = 2^{10}$ et $H = 0.7$

Ces résultats ne sont donc pas très bons si on souhaite estimer la valeur initiale de H . En revanche, l'isotropie du MBF est vérifiée puisque les valeurs obtenues pour les transformées de Radon à fenêtre verticales et horizontales sont proches. De plus ces résultats valident [ABE04] puisque ils montrent qu'il ne faut pas choisir le pas $1/N = 2^{-10}$ qui est égal au pas de la discrétisation de l'intégrale. Le problème du choix de l'ordre des variations quadratiques et du pas est délicat sans hypothèse, à priori, sur H . Un bon compromis consiste à prendre $N = 2^{-9}$ et à comparer les valeurs pour $K = 1$ et $K = 2$. Ceci doit permettre déjà de dire si H est supérieur ou inférieur à 0.5. On peut espérer améliorer ces résultats en prenant N plus grand au départ. Rappelons que la limitation provient de l'algorithme de simulation du MBF. Pour gagner en rapidité, le LESI a programmé cet algorithme en C mais on reste limité par la taille de la mémoire puisque les matrices à générer sont de taille $2N \times 2N$.

A.3.3 Comparaison aux radiographies d'os

Nous présentons ici un travail en collaboration avec G. Lemineur, A. Estrade et R. Harba, qui a fait l'objet d'un poster [BL04]. On cherche un paramètre qui caractérise l'irrégularité ou le désordre de la micro-architecture osseuse et qui peut être estimé à partir des radiographies. Le volume occupé par l'os est modélisé par un champ aléatoire binaire X défini sur $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. On peut lui associer l'ensemble aléatoire

$$K = \{t \in [0, 1]^3; X(t) = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

qui représente l'os lui-même. Faisons l'hypothèse que K est un ensemble autosimilaire. Il existe alors un entier $m \geq 2$, un réel c dans $(0, 1)$ et S_1, \dots, S_m , des similarités sur $[0, 1]^3$ de coefficient c ($|S_i(x) - S_i(y)| = c|x - y|$) tels que, presque sûrement,

$$K = \cup_{i=1}^m S_i(K).$$

Si les $S_i(K)$ ne se chevauchent pas "trop" ([Fal90] p.118), alors, presque sûrement,

$$\dim_{\mathcal{H}} K = \dim_{\mathcal{B}} K = \frac{\log m}{\log 1/c} \leq 3.$$

Afin d'obtenir un paramètre d'autosimilarité lié à la dimension fractale comme dans le cas du MBF, on pose $H = 3 + \frac{\log m}{\log c}$. Alors

$$\dim_{\mathcal{H}} K = \dim_{\mathcal{B}} K = 3 - H.$$

On modélise une radiographie de l'os en considérant une transformée X-ray à fenêtre de X dans une direction $\mathbf{u} \in S^2$ fixée. On la note $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}X = \{\mathcal{P}_{\mathbf{u}}X(s); s \in \langle \mathbf{u} \rangle^{\perp}\}$. Sous l'hypothèse où $H \in (0, 1/2)$, on conjecture que les dimensions de Hausdorff et de boîtes du graphe de $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}X$ sont presque sûrement égales à

$$\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{P}_{\mathbf{u}}X = \dim_{\mathcal{B}} \mathcal{P}_{\mathbf{u}}X = 2 + 1 - (H + 1/2).$$

Afin d'avoir le même estimateur pour les os et leurs radiographies nous avons estimé le paramètre d'autosimilarité par l'intermédiaire de la dimension de boîtes.

On a dans un premier temps validé la méthode sur des MBF en dimension 2, synthétisés par la méthode de M. Stein. Pour cela nous avons appliqué la méthode des boîtes ([HW93]) qui consiste à déterminer le nombre N_{δ} de boîtes de taille δ dont on a besoin pour recouvrir

le graphe du MBF. On a ensuite appliqué la même méthode aux transformées de Radon à fenêtre dans la direction verticale. On estime les dimensions de boîtes des graphes au moyen d'une régression de $\log N_\delta$ pour $\delta = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$. Le tableau suivant donne les résultats obtenus pour 2 simulations de MBF de paramètre 0.2, 0.3 et 0.4.

	H=0,2	H=0,2	H=0,3	H=0,3	H=0,4	H=0,4
$\text{Dim}_{\mathcal{B}}B_H = 2 + 1 - H$	2,7605	2,7680	2,6967	2,6964	2,6220	2,6030
$\text{Dim}_{\mathcal{B}}PB_H = 1 + 1 - (H + 1/2)$	1,3556	1,2728	1,3427	1,2906	1,1736	1,2155
$\text{Ecart} = 3/2 - \text{Dim}_{\mathcal{B}}B_H + \text{Dim}_{\mathcal{B}}PB_H$	0,0951	0,0048	0,1460	0,0942	0,0516	0,1125

TAB. A.1 – Dimensions de boîtes de MBF / Transformées X-ray de MBF

L'estimation de H des MBF en dimension 2 par la dimension de boîtes est un peu moins bonne que dans le cas des variations quadratiques. C'est probablement dû au fait que N_δ est de l'ordre de $C\delta^{-D}$ pour une constante C , et non de l'ordre de δ^{-D} , aux petites échelles. En revanche, l'estimation des transformées X-ray verticales par la dimension de boîtes et les variations quadratiques sont comparables. Les valeurs obtenues sur les deux réalisations sont assez éloignées. Nous avons déjà constaté un écart type type élevé par la méthode des variations quadratiques. En revanche l'erreur commise est comparable puisque située aux alentours de 0.1.

On a ensuite estimé les dimensions de boîtes sur un échantillon de 7 os fourni par l'IPROS. Ce faible nombre est dû à la difficulté de parvenir à avoir de tels échantillons. Les images ont été obtenues par le LESI à l'aide d'une microtomographie X de haute résolution et sont de tailles 256 pixels³ avec une taille de pixel égale à 12 μm . Les transformées X-ray sont obtenues en additionnant l'image suivant la hauteur.

Echantillon	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7
$\text{Dim}_{\mathcal{B}}B = 3 - H$	2,6538	2,6281	2,8047	2,7057	2,6961	2,5694	2,8398
$\text{Dim}_{\mathcal{B}}PB = 2 + 1 - (H + 1/2)$	2,2994	2,2792	2,2988	2,2676	2,2884	2,2999	2,3410
$\text{Ecart}=1/2 - \text{Dim}_{\mathcal{B}}B + \text{Dim}_{\mathcal{B}}PB$	0,1456	0,1511	-0,0059	0,0619	0,0923	0,2305	0,0012

TAB. A.2 – Dimensions de boîtes des os / Transformées X-ray des os

Remarquons que les erreurs commises sont à peu près du même ordre que dans le cas du MBF. Ces résultats ne sont pas très concluants mais ne démentissent pas la conjecture portant sur la relation entre la dimension de boîtes de l'os et celle du graphe de sa transformées X-ray. La mauvaise qualité de l'estimation de la régularité des transformées X-ray est principalement responsable de la faiblesse de ces résultats. Nous pouvons espérer les améliorer en trouvant de meilleurs estimateurs.

Annexe B

Distributions et harmoniques sphériques

B.1 Rappels et notations concernant les distributions tempérées

B.1.1 Notations concernant les multi-indices

On adopte dans cette thèse les notations suivantes concernant les multi-indices. Les vecteurs de \mathbb{N}^d sont notés en gras. Ainsi, on note \mathbf{j} le d-uplet d'entiers $(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d$.

- $|\mathbf{j}| := j_1 + \dots + j_d$.
- $\mathbf{j}! := j_1! \dots j_d!$.
- Si $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ on note $\mathbf{j} \leq \mathbf{k}$ si, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $j_i \leq k_i$.
- Si $\mathbf{j} \leq \mathbf{k}$, $C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} := C_{k_1}^{j_1} \dots C_{k_d}^{j_d} = \frac{k_1!}{(k_1 - j_1)! j_1!} \dots \frac{k_d!}{(k_d - j_d)! j_d!}$.
- Si $x \in \mathbb{R}^d$, $x^{\mathbf{j}} := x_1^{j_1} \dots x_d^{j_d}$.
- Si φ est une fonction définie sur \mathbb{R}^d , $D^{\mathbf{j}}\varphi(x) := \frac{\partial^{|\mathbf{j}|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}} \varphi(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^d$.

B.1.2 L'espace de Schwartz

Définitions et notations

Définition B.1.1. L'espace de Schwartz sur \mathbb{R}^d , noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est formé des fonctions à décroissance rapide $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |D^{\mathbf{j}}\varphi(x)| < +\infty.$$

On note $\pi_{N,\mathbf{j}}(\varphi) = \sup_{0 \leq |\mathbf{l}| \leq \mathbf{j}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |D^{\mathbf{l}}\varphi(x)|$ et $\pi_N(\varphi) = \pi_{N,0}(\varphi)$.

On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la topologie induite par cette famille de semi-normes.

Remarque 2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mathbb{R}^d)$.

Définition B.1.2. L'espace des fonctions tempérées est formé des fonctions à croissance lente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ il existe $c \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$|D^{\mathbf{j}}f(x)| \leq c(1 + |x|)^N.$$

Définition B.1.3. Voici une liste d'applications linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même :

- a) les translations : $\tau_t \varphi(x) := \varphi(x - t)$, où $t \in \mathbb{R}^d$;
- b) les dilatations : $\delta_\lambda \varphi(x) := \varphi(\lambda x)$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- c) les dérivations : $D^{\mathbf{j}} \varphi(x)$, où $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$;
- d) les multiplications : $f \varphi(x)$, où f est une fonction tempérée ;
- e) la transformation de Fourier : $\widehat{\varphi}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) e^{-ixt} dt$;
- f) les convolutions : $\varphi * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - t) \psi(t) dt$, où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Propriétés

Théorème B.1.1. La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même.

Proposition B.1.1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,

- a) $\widehat{\tau_t \varphi}(\xi) = e^{-it\xi} \widehat{\varphi}(\xi)$;
- b) $\widehat{\delta_\lambda \varphi}(\xi) = |\lambda|^{-d} \delta_{1/\lambda} \widehat{\varphi}(\xi)$;
- c) $\widehat{D^{\mathbf{j}} \varphi}(\xi) = (i\xi)^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(\xi)$;
- d) $\widehat{(-ix)^{\mathbf{j}} \varphi}(\xi) = D^{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(\xi)$;
- e) $\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = (2\pi)^d \varphi(\xi) = (2\pi)^d \partial_{-1} \varphi(\xi)$;
- f) $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$;
- g) $\widehat{\psi \varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(\xi)$;
- h) $D^{\mathbf{j}}(\varphi * \psi)(\xi) = D^{\mathbf{j}} \varphi * \psi(\xi) = \varphi * D^{\mathbf{j}} \psi(\xi)$.

B.1.3 L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$

Définition B.1.4. L'espace des distributions tempérées est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' := \left\{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}; T \text{ est linéaire et continue} \right\}.$$

L'espace des distributions tempérées est donc le dual de l'espace de Schwartz.

Remarque 3. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)'$.

Définition B.1.5. On définit les applications linéaires continues suivantes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ par transposition d'applications linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

- a) les translations : $\langle \tau_t T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-t} \varphi \rangle$, où $t \in \mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- b) les dilatations : $\langle \delta_\lambda T, \varphi \rangle := |\lambda|^{-d} \langle T, \delta_{1/\lambda} \varphi \rangle$, où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- c) les dérivations : $\langle D^{\mathbf{j}} T, \varphi \rangle := (-1)^{|\mathbf{j}|} \langle T, D^{\mathbf{j}} \varphi \rangle$, où $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$;
- d) les multiplications : $\langle f T, \varphi \rangle := \langle T, f \varphi \rangle$, où f est une fonction tempérée ;
- e) la transformation de Fourier : $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$;
- f) les convolutions : $\langle T * \psi, \varphi \rangle := \langle T, \check{\psi} * \varphi \rangle$, où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition B.1.2. Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$,

- a) $\widehat{\tau_t T}(\xi) = e^{-it\xi} \widehat{T}(\xi)$;
- b) $\widehat{\delta_\lambda T} = |\lambda|^{-d} \delta_{1/\lambda} \widehat{T}$;
- c) $\widehat{D^{\mathbf{j}} T} = (i\xi)^{\mathbf{j}} \widehat{T}$;
- d) $\widehat{(-ix)^{\mathbf{j}} T} = D^{\mathbf{j}} \widehat{T}$;

- e) $\widehat{\widehat{T}} = (2\pi)^d \check{T}$;
f) $\widehat{T * \psi}(\xi) = \widehat{T}(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$;
g) $\widehat{\psi T} = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{T} * \widehat{\psi}$;
h) $D^j(T * \psi) = D^j T * \psi = T * D^j \psi$.

B.2 Harmoniques sphériques et décomposition de la transformée de Radon invariante par rotation

B.2.1 Harmoniques sphériques

La décomposition d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en harmoniques sphériques est une généralisation en dimension supérieure à 2 de la décomposition en série de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$ qui est particulièrement adaptée lorsque on considère des opérateurs admettant une certaine invariance par rotation. En effet, rappelons que si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, en identifiant un point de \mathbb{R}^2 avec le point $z = re^{i\theta} \simeq (r \cos \theta, r \sin \theta)$ du plan complexe, après changement de variables en coordonnées polaires, $(\theta, r) \mapsto f(re^{i\theta}) \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, d\theta \times r dr)$. En particulier, pour presque tout $r \geq 0$, $\theta \mapsto f(re^{i\theta}) \in L^2(\mathbb{T})$, et

$$f(re^{i\theta}) \stackrel{L^2(\mathbb{T})}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(r) e^{in\theta} \text{ avec } f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

De plus, par l'identité de Parseval,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n(r)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n(r)|^2 r dr = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx.$$

On en déduit que la série $\sum f_n(r) e^{in\theta}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}^2); g(z) = f(r) e^{in\theta}, f \in L^2(\mathbb{R}^+, r dr) \right\}.$$

On obtient, d'après ce qui précède, la décomposition de $L^2(\mathbb{R}^2)$ en somme hilbertienne

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^2).$$

De plus, si $n \geq 0$, en notant $P_n(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2)^n$, P_n et $\overline{P_n}$ sont deux polynômes harmoniques homogènes de degré n sur \mathbb{C}^2 qui vérifient $P_n(\cos \theta, \sin \theta) = e^{in\theta}$ et $\overline{P_n}(\cos \theta, \sin \theta) = e^{-in\theta}$.

On généralise cette propriété à la dimension supérieure de la façon suivante (cf. [SW71]). Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on appelle harmonique sphérique de degré k la restriction à la sphère unité S^{d-1} d'un polynôme harmonique homogène de degré k sur \mathbb{C}^d . On note \mathcal{H}_k le \mathbb{C} -espace vectoriel formé des harmoniques sphériques de degré k . ($\dim \mathcal{H}_k = C_{d+k-1}^k - C_{d+k-3}^{k-2}$, pour $k \geq 2$). L'analogie de la densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues sur le tore munit de la norme uniforme et dans $L^2(\mathbb{T})$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème B.2.1. *L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de $\cup_0^\infty \mathcal{H}_k$ est dense dans $(\mathcal{C}(S^{d-1}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ et $(L^2(S^{d-1}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$.*

Munit du produit scalaire de $L^2(S^{d-1})$, nous allons montrer que les harmoniques sphériques de degrés distincts sont orthogonales. Si $Y^{(k)}$ et $Y^{(l)}$ sont deux harmoniques sphériques de degré k et l avec $k \neq l$,

$$\int_{S^{d-1}} Y^{(k)} Y^{(l)} = 0.$$

En effet, si $k \neq 0$ (resp. $l \neq 0$), on prolonge $Y^{(k)}$ (resp. $Y^{(l)}$) en un polynôme harmonique homogène de degré k (resp. l) en posant $u_k(x) = |x|^k Y^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$ si $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $u_k(0) = 0$ (resp. u_l).

Si $k = 0$ (resp. $l = 0$), $Y^{(k)}$ (resp. $Y^{(l)}$) est une constante et $u_k = Y^{(k)}$ (resp. $u_l = Y^{(l)}$) est un polynôme harmonique homogène de degré 0.

Alors, d'après la formule de Green,

$$\int_{B(0,1)} u_k \Delta u_l - u_l \Delta u_k = \int_{S^{d-1}} u_k \frac{\partial u_l}{\partial r} - u_l \frac{\partial u_k}{\partial r}.$$

Le premier membre de cette égalité est nul puisque u_k et u_l sont harmoniques. De plus, si $\theta \in S^{d-1}$ et $r > 0$, $u_k(r\theta) = r^k Y^{(k)}(\theta)$ donc $\frac{\partial u_k}{\partial r}(\theta) = k Y^{(k)}(\theta)$. De même, $\frac{\partial u_l}{\partial r}(\theta) = l Y^{(l)}(\theta)$ et ainsi,

$$\int_{S^{d-1}} (k - l) Y^{(k)}(\theta) Y^{(l)}(\theta) d\theta = 0.$$

Les propriétés d'invariance par rotation font intervenir certaines harmoniques sphériques appelées harmoniques zonales. Si $k \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{H}_k, (\cdot, \cdot)_{L^2(S^{d-1})})$ est un espace hermitien. Pour $\theta \in S^{d-1}$, la fonction $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k \mapsto Y^{(k)}(\theta)$ est une forme linéaire sur \mathcal{H}_k et d'après le théorème de Riesz, il existe un unique $Z_\theta^k \in \mathcal{H}_k$ tel que pour tout $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$,

$$Y^{(k)}(\theta) = \int_{S^{d-1}} Y^{(k)}(x) Z_\theta^k(x) dx.$$

L'harmonique sphérique Z_θ^k est appelé **harmonique zonale de degré k et de pôle θ** . Il est facile de voir que, en dimension 2, si $k \neq 0$,

$$Z_\theta^k(x) = \frac{1}{\pi} \cos(k \arccos(\theta \cdot x)) = \frac{1}{\pi} T_k(\theta \cdot x),$$

où T_k désigne le polynôme de Chebyshev de première espèce. La proposition suivante donne les principales propriétés des harmoniques zonales.

Proposition B.2.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et $N(k)$ la dimension de \mathcal{H}_k .*

1. Si $\{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{N(k)}^{(k)}\}$ est une base orthonormée de \mathcal{H}_k , pour tout $\theta, \omega \in S^{d-1}$,

$$Z_\theta^k(\omega) = \sum_{j=0}^{N(k)} \overline{Y_j^{(k)}(\theta)} Y_j^{(k)}(\omega).$$

2. Si $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\theta, \omega \in S^{d-1}$, $Z_{\kappa\omega}^k(\kappa\theta) = Z_\omega^k(\theta)$.

3. Pour tout $\theta \in S^{d-1}$, $Z_\theta^k(\theta) = \frac{N(k)}{m(S^{d-1})}$.

Démonstration. 1) Puisque $\{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{N(k)}^{(k)}\}$ est une base orthonormée de \mathcal{H}_k ,

$$Z_\theta^k = \sum_{j=0}^{N(k)} (Z_\theta^k, Y_j^{(k)}) Y_j^{(k)}.$$

Or, par définition des harmoniques zonales, $(Z_\theta^k, Y_j^{(k)}) = \int_{S^{d-1}} Z_\theta^k(\omega) Y_j^{(k)}(\omega) d\omega = \overline{Y_j^{(k)}(\theta)}$.

2) Si κ est une rotation de \mathbb{R}^d , pour tout $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$,

$$\int_{S^{d-1}} Y^{(k)}(\theta) Z_{\kappa\omega}^k(\kappa\theta) d\theta = \int_{S^{d-1}} Y^{(k)}(\kappa^{-1}\theta) Z_{\kappa\omega}^k(\theta) d\theta = Y^{(k)}(\omega).$$

Par unicité, $Z_{\kappa\omega}^k(\kappa\theta) = Z_\omega^k(\theta)$.

3) Soit $\theta, \omega \in S^{d-1}$, il existe $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\kappa\theta = \omega$ et d'après 2) $Z_\theta^k(\theta) = Z_{\kappa\theta}^k(\kappa\theta) = Z_\omega^k(\omega)$. De plus $Z_\theta^k(\theta) = \sum_{j=0}^{N(k)} |Y_j^{(k)}(\theta)|^2$ donc $m(S^{d-1}) Z_\theta^k(\theta) = \int_{S^{d-1}} \sum_{j=0}^{N(k)} |Y_j^{(k)}(\theta)|^2 = N(k)$. \square

Les harmoniques zonales sont les seules harmoniques sphériques possédant l'invariance par rotation donnée par le 2) de la proposition précédente.

Théorème B.2.2. Soit $\omega \in S^{d-1}$ et $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Pour toute isométrie de \mathbb{R}^d , $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, laissant invariant ω , $Y^{(k)}(\kappa\theta) = Y^{(k)}(\theta)$, si et seulement si il existe une constante c telle que $Y^{(k)} = cZ_\omega^k$.

Démonstration. Le second sens de cette assertion est immédiat. En effet, si $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\kappa\omega = \omega$, pour tout $\theta \in S^{d-1}$, $Z_\omega^k(\kappa\theta) = Z_{\kappa\omega}^k(\kappa\theta) = Z_\omega^k(\theta)$ d'après la deuxième propriété de la proposition B.2.1.

Réciproquement, soit $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ telle que pour tout $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, $\kappa\omega = \omega$, $Y^{(k)}(\kappa\theta) = Y^{(k)}(\theta)$. On note $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S^{d-1}$, alors il existe $\tau \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, telle que $\omega = \tau\mathbf{e}_1$ et on pose $W^{(k)}(\theta) = Y^{(k)}(\tau\theta)$. Si $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\kappa\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\tau\kappa\tau^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ et laisse invariant ω . Alors,

$$W^{(k)}(\kappa\theta) = Y^{(k)}(\tau\kappa\theta) = Y^{(k)}(\tau\kappa\tau^{-1}\tau\theta) = Y^{(k)}(\tau\theta) = W^{(k)}(\theta).$$

Il suffit donc de montrer que $W^{(k)} = cZ_{\mathbf{e}_1}^k$ car alors,

$$Y^{(k)}(\theta) = cZ_{\mathbf{e}_1}^k(\tau^{-1}\theta) = cZ_{\tau\mathbf{e}_1}^k(\theta) = cZ_\omega^k(\theta).$$

On prolonge $W^{(k)}$ en un polynôme harmonique homogène de degré k noté P_k . Alors, pour tout $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, dès que $\kappa\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $P_k(\kappa x) = P_k(x)$. Nous allons décomposer P_k par rapport à sa première variable. Puisque P_k est un polynôme homogène de degré k , il existe $(P_k^j)_{0 \leq j \leq k}$ des polynômes homogènes sur \mathbb{R}^{d-1} de degré j tels que

$$P_k(x) = P_k(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=0}^k x_1^{k-j} P_k^j(x_2, \dots, x_d).$$

Alors, comme P_k est invariant pour toute isométrie laissant invariant \mathbf{e}_1 , P_k^j est invariant pour toute isométrie de \mathbb{R}^{d-1} .

Lemme B.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si P est un polynôme sur \mathbb{R}^n invariant par isométrie il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(c_0, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ tels que $P(x) = \sum_{k=0}^m c_k |x|^{2k}$.

Démonstration. Supposons que P soit de degré $l \in \mathbb{N}$ alors P s'écrit $P = \sum_{j=0}^l P_j$, avec P_j homogène de degré j . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{j=0}^l \lambda^j P_j(\kappa x) = P(\kappa \lambda x) = P(\lambda x) = \sum_{j=0}^l \lambda^j P_j(x).$$

Ainsi, pour tout $j = 0 \dots l$, $P_j(\kappa x) = P_j(x)$. On pose alors $F_j(x) = |x|^{-j} P_j(x)$, $x \neq 0$. La fonction F_j est homogène de degré 0 et invariante par isométrie donc il existe une constante c_j telle que $F_j = c_j$ et alors $P_j(x) = c_j |x|^j$. Puisque P_j est un polynôme, j est pair et le lemme est démontré. \square

On peut donc appliquer le lemme pour les polynômes P_k^j ,

$$P_k^j = 0 \text{ si } j \text{ impair} \quad \text{et} \quad P_k^j = c_j (x_2^2 + \dots + x_d^2)^{j/2} \text{ sinon.}$$

De même, il existe une suite de coefficients $(d_j)_{j=0 \dots k}$ avec $d_j = 0$ si j impair tels que

$$Q_{\mathbf{e}_1}^k(x) = \sum_{j=0^k} d_j x_1^{k-j} (x_2^2 + \dots + x_d^2)^{j/2},$$

où $Q_{\mathbf{e}_1}^k$ désigne le prolongement en polynôme harmonique de $Z_{\mathbf{e}_1}^k$.

Enfin, P_k et $Q_{\mathbf{e}_1}^k$ sont harmoniques donc les suites des coefficients de P_k et de $Q_{\mathbf{e}_1}^k$ vérifie la même relation de récurrence

$$c_{2j}(k-2j)(k-2j-1) + c_{2(j+1)}2(j+1)(d+2j-1) = 0.$$

On en conclut que $P_k(x) = \frac{d_0}{c_0} Q_{\mathbf{e}_1}^k(x)$, puis $Y^{(k)} = Z_{\mathbf{e}_1}^k$. \square

Avant de conclure cette partie nous avons besoin dans la suite d'exprimer les harmoniques zonales en fonction des polynômes orthogonaux de Gegenbauer ([RK96] p.408).

Théorème B.2.3. Si $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\omega, \theta \in S^{d-1}$,

$$Z_{\omega}^k(\theta) = \frac{N(k)}{m(S^{d-1}) C_k^{\frac{d-2}{2}}(1)} C_k^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta).$$

Démonstration. Dans le cas $d = 2$, il suffit de remarquer que, si $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{C_k^0(t)}{C_k^0(1)} = T_k(t).$$

Sinon, on cherche à utiliser l'unicité donnée par le théorème B.2.2. Soit $\omega \in S^{d-1}$, on pose $F_{\omega}^k(x) = |x|^k C_k^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{x}{|x|} \cdot \omega\right)$, pour $x \in \mathbb{R}^d$.

Si k est pair, avec $k = 2m$, $C_k^{\frac{d-2}{2}}$ est un polynôme pair de degré k donc on peut écrire $F_{\omega}^k(x) = \sum_{j=0}^m d_j |x|^{2(m-j)} (x \cdot \omega)^{2j}$ et F_{ω}^k est un polynôme homogène de degré k .

Sinon, pour $k = 2m + 1$, $C_k^{\frac{d-2}{2}}$ est un polynôme impair de degré k donc $F_{\omega}^k(x) = \sum_{j=0}^m d_j |x|^{2(m-j)} (x \cdot \omega)^{2j+1}$ et F_{ω}^k est encore un polynôme homogène de degré k .

Nous voulons montrer que F_ω^k est harmonique. Nous allons relier les polynômes de Gegenbauer aux coefficients en série entière d'une fonction harmonique. Pour cela on utilise leur fonction génératrice, si $|t| < 1$, d'après [RK96] p.408,

$$(1 - 2tw + t^2)^{-\frac{d-2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{d-2}{2}}(w)t^k.$$

En particulier, si $-1 < s|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} C_k^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{x}{|x|} \cdot \omega\right)(s|x|)^k &= \left((s|x|)^2 - 2s|x|\frac{x}{|x|} \cdot \omega + 1 \right)^{\frac{d-2}{2}} \\ &= s^{2-d} \left| x - \frac{\omega}{s} \right|^{2-d}. \end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto s^{2-d} \left| x - \frac{\omega}{s} \right|^{2-d}$ est harmonique dans $\mathcal{R}_s = \{x \in \mathbb{R}^d; 0 < |x| < \frac{1}{s}\}$ et y vérifie la propriété de la moyenne. Fixons s et choisissons une boule fermée $\overline{B(a, r)}$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{m(B(a, r))} \left(\int_{B(a, r)} C_k^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{x}{|x|} \cdot \omega\right) |x|^k dx \right) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{a}{|a|} \cdot \omega\right) |a|^k s^k.$$

Par le principe des zéros isolés,

$$\frac{1}{m(B(a, r))} \int_{B(a, r)} C_k^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{x}{|x|} \cdot \omega\right) |x|^k dx = C_k^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{a}{|a|} \cdot \omega\right) |a|^k$$

et F_ω^k est harmonique dans \mathcal{R}_s . Puisque F_ω^k est polynomiale, cela suffit pour conclure à son harmonicité sur tout \mathbb{R}^d . Ainsi $\theta \mapsto F_\omega^k(\theta) = C_k^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta)$ est une harmonique sphérique de degré k . De plus, si $\kappa \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\kappa\omega = \omega$, $F_\omega^k(\kappa\theta) = F_{\kappa\omega}^k(\kappa\theta) = C_k^{\frac{d-2}{2}}(\kappa\omega \cdot \kappa\theta) = F_\omega^k(\theta)$. D'après le Théorème B.2.2, pour tout $\theta \in S^{d-1}$,

$$F_\omega^k(\theta) = C_k^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta) = c_k Z_\omega^k(\theta).$$

Enfin, $C_k^{\frac{d-2}{2}}(1) = c_k Z_\omega^k(\omega) = \frac{N(k)}{m(S^{d-1})}$ d'après la Proposition B.2.1, donc $c_k = \frac{C_k^{\frac{d-2}{2}}(1)m(S^{d-1})}{N(k)}$. \square

L'analogie dimensionnelle du changement de variable en coordonnées polaires est donné par le théorème suivant connu comme théorème de Funk-Hecke ([RK96] p.19).

Théorème B.2.4 (Funk-Hecke). Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\omega \in S^{d-1}$ et $h \in L^2([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$ alors pour $Y_l \in \mathcal{H}_l$,

$$\int_{S^{d-1}} h(\omega \cdot \theta) Y_l(\theta) d\theta = \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 h(t) C_l^{\frac{d-2}{2}}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \right) Y_l(\omega).$$

On vérifie, dans un premier temps, le théorème de Funk-Hecke pour les polynômes de Gegenbauer qui engendrent $L^2([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$.

Lemme B.2.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} C_k^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta) Y_l(\theta) d\theta &= \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 C_k^{\frac{d-2}{2}}(t) C_l^{\frac{d-2}{2}}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \right) Y_l(\omega) \\ &= \delta_{kl} \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 C_l^{\frac{d-2}{2}}(t)^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \right) Y_l(\omega). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, on utilise d'un côté l'expression des polynômes de Gegenbauer en fonctions des harmoniques zonales. D'après le théorème B.2.3,

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} C_k^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta) Y_l(\theta) d\theta &= \int_{S^{d-1}} \frac{m(S^{d-1}) C_k^{\frac{d-2}{2}}(1)}{N(k)} Z_\omega^k(\theta) Y_l(\theta) d\theta \\ &= \delta_{kl} \frac{m(S^{d-1}) C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)}{N(l)} Y_l(\omega), \end{aligned}$$

par définition des harmoniques zonales. De plus, de l'autre côté on reconnaît le changement de variables en coordonnées polaires.

$$\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 C_k^{\frac{d-2}{2}}(t) C_l^{\frac{d-2}{2}}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = \frac{1}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{S^{d-1}} C_k^{\frac{d-2}{2}}(\theta \cdot \omega) C_l^{\frac{d-2}{2}}(\theta \cdot \omega) d\theta.$$

En utilisant à nouveau le théorème B.2.3, on obtient

$$\frac{c_k c_l}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{S^{d-1}} Z_\omega^k(\theta) Z_\omega^l(\theta) d\theta = \delta_{kl} \frac{c_l^2}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} Z_\omega^l(\omega) = \delta_{kl} \frac{m(S^{d-1}) C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)}{N(l)}.$$

□

Rappelons que $(\gamma_l C_l^{\frac{d-2}{2}})_{l \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$, avec

$$\gamma_l = \left(\int_{-1}^1 C_l^{\frac{d-2}{2}}(t)^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \right)^{-1/2} = \left(\frac{m(S^{d-1}) C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)^2}{m(S^{d-2}) N(l)} \right)^{-1/2}.$$

Alors, si $h \in L^2([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$, la fonction s'écrit

$$h \stackrel{L^2([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})}{=} \sum_{l \in \mathbb{N}} h_l C_l^{\frac{d-2}{2}},$$

avec

$$h_l = \gamma_l^2 \int_{-1}^1 h(t) C_l^{\frac{d-2}{2}}(t)^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt.$$

Ainsi, pour presque tout $\omega \in S^{d-1}$, par un simple changement de variables,

$$h(\omega \cdot \theta) \stackrel{L^2(S^{d-1})}{=} \sum_{l \in \mathbb{N}} h_l C_l^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta),$$

et

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} h(\omega \cdot \theta) Y_l(\theta) d\theta &= \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \int_{S^{d-1}} C_k^{\frac{d-2}{2}}(\omega \cdot \theta) Y_l(\theta) d\theta \\ &= \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 h(t) C_l^{\frac{d-2}{2}}(t)^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \right) Y_l(\omega). \end{aligned}$$

B.2.2 Décomposition de la transformée de Radon

Nous reprenons les notations de la partie 4. On s'intéresse ici à une fenêtre φ vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \varphi(r)^2 r^{\frac{d-3}{2}} dr < \infty. \quad (\text{B.1})$$

On rappelle que R_φ est alors définie par la transformée de Radon à fenêtre (avec la fenêtre φ), pour $\theta \in S^{d-1}$ et $p \in \mathbb{R}$, par

$$R_\varphi F(\theta, p) = \int_{x \in H(\theta, p)} F(x) \varphi(|x - p\theta|^2) dx_H,$$

pour $\theta \in S^{d-1}$ et $p \in \mathbb{R}$ et que R_φ est continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R})$.

Soit $Y_{lm}(\alpha)$, $l \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \dots, N(l)$ une base orthonormée de $L^2(S^{d-1})$ telle que Y_{lm} est une harmonique sphérique de degré l et $N(l)$ leur nombre dans la base. Soit $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors,

$$F = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{N(l)} f_{lm} Y_{lm}, \text{ avec } f_{lm}(r) = \int_{S^{d-1}} f(r\alpha) Y_{lm}(\alpha) d\alpha, \text{ pour } r \in \mathbb{R}^+.$$

Par continuité de R_φ ,

$$R_\varphi F = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{N(l)} R_\varphi(f_{lm} Y_{lm}).$$

Fixons $l \in \mathbb{N}$ et $m = 1 \dots N(l)$, $(\alpha, p) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}$,

$$R_\varphi(f_{lm} Y_{lm})(\alpha, p) = \int_{x \in H(\alpha, p)} f_{lm}(|x|) Y_{lm}\left(\frac{x}{|x|}\right) \varphi(|x - p\alpha|^2) dx_H.$$

Soit $p > 0$, $\alpha \in S^{d-1}$, on cherche à se ramener à une intégrale sur la sphère pour appliquer le théorème de Funk-Hecke. Voici comment on effectue ce changement de variables.

On pose $S^0 = \{\tau \in S^{d-1}; \tau \cdot \alpha = 0\}$, $S^+ = \{\xi \in S^{d-1}; \xi \cdot \alpha > 0\}$ et on note $d\tau$ la forme volume sur $S^0 \simeq S^{d-2}$ et $d\xi$ celle sur S^{d-1} .

L'application $h_1 : (\tau, t) \mapsto (\cos t)\alpha + (\sin t)\tau$ est un difféomorphisme de $S^0 \times [0, \frac{\pi}{2}[$ sur S^+ et l'image réciproque de $d\xi$ par h_1 peut s'écrire $h_1^* d\xi = (\sin t)^{d-2} dt d\tau$.

De même, l'application $h_2 : (\tau, t) \mapsto \frac{p}{\cos t}((\cos t)\alpha + (\sin t)\tau)$ est un difféomorphisme de $S^0 \times [0, \frac{\pi}{2}[$ sur $H(\alpha, p)$ et l'image réciproque de dx_H par h_2 peut s'écrire $h_2^* dx_H = \left(\frac{p^{d-1}}{(\cos t)^d}\right) (\sin t)^{d-2} dt d\tau$.

Ainsi l'application $\chi = h_2 \circ h_1^{-1} : \xi \mapsto \left(\frac{p}{\xi \cdot \alpha}\right) \xi$ réalise un difféomorphisme de S^+ sur

$H(\alpha, p)$ et l'image réciproque de dx_H par χ est donnée par $\chi^*dx_H = (h_1^{-1})^*(h_2^*dx_H) = (h_1^{-1})^*\left(\left(\frac{p^{d-1}}{(\cos t)^d}\right)(\sin t)^{d-2}dt d\tau\right) = \frac{p^{d-1}}{(\cos(\cos^{-1}\xi.\alpha))^d}d\xi = \frac{p^{d-1}}{(\xi.\alpha)^d}d\xi$.

Comme $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et φ vérifie (B.1), $x \mapsto f_{lm}(|x|)Y_{lm}\left(\frac{x}{|x|}\right)\varphi(|x-p\alpha|^2) \in L^1(H(\alpha, p), dx_H)$ pour presque tout $p \in \mathbb{R}$, et ainsi, $\xi \mapsto f_{lm}(|\chi(\xi)|)Y_{lm}\left(\frac{\chi(\xi)}{|\chi(\xi)|}\right)\varphi(|\chi(\xi)-p\alpha|^2) \in L^1(S^+, \chi^*dx_H)$ pour presque tout $p > 0$. On obtient alors

$$R_\varphi(f_{lm}Y_{lm})(\alpha, p) = \int_{S^+} f_{lm}\left(\frac{p}{\xi.\alpha}\right)Y_{lm}(\xi)\varphi\left(\left(\frac{p}{\xi.\alpha}\right)^2(1-(\xi.\alpha)^2)\right)\frac{p^{d-1}}{(\xi.\alpha)^d}d\xi.$$

Nous pouvons à présent utiliser le théorème de Funk-Hecke: on pose, pour $p > 0$ et $t \in [-1, 1]$, $h(p, t) = f_{lm}\left(\frac{p}{t}\right)\varphi\left(\left(\frac{p}{t}\right)^2(1-t^2)\right)\frac{p^{d-1}}{t^d}\mathbf{1}_{0 < t \leq 1}$.

Après changement de variables,

$$\int_{-1}^1 |h(p, t)|(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = \int_p^{+\infty} |f_{lm}(u)\varphi(u^2-p^2)|u(u^2-p^2)^{\frac{d-3}{2}}du.$$

Ainsi

$$\left(\int_{-1}^1 |h(p, t)|(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt\right)^2 \leq C_\varphi \int_p^{+\infty} f_{lm}(u)^2 u(u^2-p^2)^{\frac{d-3}{2}}du,$$

avec $C_\varphi = \int_0^{+\infty} \varphi(r)^2 r^{\frac{d-3}{2}}dr$. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{-1}^1 |h(p, t)|(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt\right)^2 dp \leq C_\varphi C_d \int_0^{+\infty} f_{lm}(u)^2 u^{d-1}du,$$

avec $C_d = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt$. Alors, pour presque tout $p > 0$, $h(p, t) \in L^1([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$ et, par densité de $L^1([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}) \cap L^2([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$ dans $L^1([-1, 1], (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}})$, on a encore la formule de changement de variables donnée par le théorème de Funk-Hecke. Ainsi, pour presque tout $p > 0$,

$$\begin{aligned} R_\varphi(f_{lm}Y_{lm})(\alpha, p) &\stackrel{L^2(S^{d-1})}{=} \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 h(p, t) C_l^{\frac{d-2}{2}}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt \right) Y_{lm}(\alpha) \\ &= \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_p^{+\infty} f_{lm}(u)\varphi(u^2-p^2) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right) u(u^2-p^2)^{\frac{d-3}{2}} du \right) Y_{lm}(\alpha). \end{aligned}$$

On pose

$$(R_\varphi f)_{lm}(p) \stackrel{L^2(\mathbb{R}^+)}{=} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_p^{+\infty} f_{lm}(u)\varphi(u^2-p^2) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right) u(u^2-p^2)^{\frac{d-3}{2}} du, \quad (\text{B.2})$$

de sorte que

$$R_\varphi(f_{lm}Y_{lm})(\alpha, p) \stackrel{L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)}{=} (R_\varphi f)_{lm}(p) Y_{lm}(\alpha).$$

Finalement,

$$R_\varphi f(\alpha, p) \stackrel{L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)}{=} \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{N(l)} (R_\varphi f)_{lm}(p) Y_{lm}(\alpha).$$

Remarquons de plus que, comme $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, pour presque tout $p > 0$, $R_\varphi f(\cdot, p) \in L^2(S^{d-1})$ et,

$$R_\varphi f(\alpha, p) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{N(l)} \left(\int_{S^{d-1}} R_\varphi f(\xi, p) Y_{lm}(\xi) d\xi \right) Y_{lm}(\alpha),$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} R_\varphi f(\xi, p) Y_{lm}(\xi) d\xi &= \sum_{l' \in \mathbb{N}} \sum_{m'=1}^{N(l')} \int_{S^{d-1}} R_\varphi (f_{l'm'} Y_{l'm'}) (\xi, p) Y_{lm}(\xi) d\xi \\ &= (R_\varphi f)_{lm}(p). \end{aligned}$$

Les fonctions $(R_\varphi f)_{lm}$ correspondent donc bien aux coordonnées de R_φ en harmoniques sphériques.

Corollaire B.2.1. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction radiale, il existe $f_0 \in L^2([0, +\infty), r^{d-1} dr)$ telle que $f(\xi) = f_0(|\xi|)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et,*

$$R_\varphi f(\alpha, p) \stackrel{L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)}{=} (R_\varphi f)_0 Y_0(\alpha) = \frac{m(S^{d-2})}{m(S^{d-1})^{1/2}} \int_p^{+\infty} f_0(u) \varphi(u^2 - p^2) u (u^2 - p^2)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

Corollaire B.2.2. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ s'écrit sous la forme $f(\xi) = f_l(|\xi|) Y_l(\frac{\xi}{|\xi|})$, avec $f_l \in L^2([0, +\infty), r^{d-1} dr)$ et Y_l une harmonique sphérique solide de degré l ,*

$$R_\varphi f(\alpha, p) \stackrel{L^2(S^{d-1} \times \mathbb{R}^+)}{=} g_l(p) Y_l(\alpha),$$

avec,

$$g_l(p) \stackrel{L^2(\mathbb{R}^+)}{=} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_p^{+\infty} f_l(u) \varphi(u^2 - p^2) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right) u (u^2 - p^2)^{\frac{d-3}{2}} du.$$

Lorsque $\varphi \equiv 1$, la transformée de Radon classique R est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(S^{d-1} \times \mathbb{R})$ (cf. [RK96]). On obtient alors le corollaire B.2.2 pour une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui permet de relier ses coordonnées sphériques à celles de sa transformée de Radon par une équation intégrale. Dans ce cas précis, c'est par une transformée de Gegenbauer que l'on sait inverser.

B.2.3 Inversion des coordonnées sphériques de la transformée de Radon

Nous finissons cette annexe par la démonstration des formules d'inversion donnée dans la proposition 3.2.4 que nous rappelons.

Proposition B.2.2. [RK96] *Soit f_l une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Si*

$$g_l(p) = \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_p^{+\infty} f_l(u) u^{d-1} C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{p}{u}\right) \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} \frac{du}{u},$$

alors

$$f_l(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p} \int_p^{+\infty} g_l^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^{\frac{d-3}{2}} du. \quad (\text{B.3})$$

Démonstration. Cette équation se résout par l'application de la transformée de Mellin, définie par

$$Mh(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} h(t) dt \text{ pour } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \int_0^{+\infty} t^{\operatorname{Re}(z)-1} |h(t)| dt < +\infty.$$

On pose $b_{ld}(t) = C_l^{\frac{d-2}{2}}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} \mathbf{1}_{0 < t < 1}$. Les transformées de Mellin de b_{ld} et f_l sont définies pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$ puisque $f_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.

Ainsi, la transformée de Mellin de g_l est définie pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, et

$$\begin{aligned} M g_l(z) &= \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} M(t^{d-1} f_l)(z) M b_{ld}(z) \\ &= \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} M f_l(z+d-1) M b_{ld}(z). \end{aligned}$$

Or, d'après les tables de transformées de Mellin de [Sne21], en notant $\lambda = \frac{d-3}{2}$,

$$\begin{aligned} M b_{ld}(z) &= \frac{2^{-z} \Gamma(1/2) \Gamma(\lambda+1) \Gamma(2\lambda+1+l) \Gamma(z)}{l! \Gamma(2\lambda+1) \Gamma(l/2 + \lambda + 1 + z/2) \Gamma(1/2 + z/2 - l/2)} \\ &= c_1(\lambda, l) \frac{2^{-z} \Gamma(z)}{\Gamma(l/2 + \lambda + 1 + z/2) \Gamma(1/2 + z/2 - l/2)}, \end{aligned}$$

avec

$$c_1(\lambda, l) = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\lambda+1) \Gamma(2\lambda+1+l)}{l! \Gamma(2\lambda+1)}.$$

Vérifions que le second terme de l'équation (B.3) est bien défini. Après changement de variables,

$$g_l(p) = \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_0^1 f_l\left(\frac{p}{r}\right) \frac{p^{d-1}}{r^d} C_l^{\frac{d-2}{2}}(r) (1-r^2)^\lambda dr.$$

On désigne par C une constante qui peut varier d'une ligne à l'autre. Puisque $f_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, $g_l \in \mathcal{C}^{d-1}(\mathbb{R}^+)$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$|g_l^{(d-1)}(p)| \leq C \int_0^1 \left(1 + \frac{p}{r}\right)^{-N} r^{-d} (1-r^2)^\lambda dr.$$

Un nouveau changement de variables permet d'écrire

$$|g_l^{(d-1)}(p)| \leq C p^{1-d} \int_p^{+\infty} (1+s)^{-N} s^{d-2\lambda-2} (s^2-p^2)^\lambda ds.$$

Puis,

$$|g_l^{(d-1)}(p)| \leq C p^{1-d} \int_0^{+\infty} (1+s+p)^{-N} (s+p)(s+2p)^\lambda s^\lambda ds \leq C p^{1-d} \int_0^{+\infty} (1+s+p)^{-N+\lambda+1} s^\lambda ds.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir N suffisamment grand pour que

$$|g_l^{(d-1)}(p)| \leq C p^{1-d} (1+p)^{-n}.$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle que

$$\left| \int_p^{+\infty} g_l^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^\lambda du \right| \leq C p^{-2d+4-l} (1+p)^{-N}.$$

On note

$$\tilde{f}_l(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p} \int_p^{+\infty} g_l^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^\lambda du.$$

D'après ce qui précède la transformée de Mellin de \tilde{f}_l est définie pour $\mathcal{R}_e(z) > 2d + l - 4$. Celle de $\tilde{b}_{ld}(t) := C_l^{\frac{d-2}{2}}(t^{-1})(1-t^2)^\lambda \mathbf{1}_{0 < t < 1}$ est définie pour $\mathcal{R}_e(z) > l$. Alors, pour tout z tel que $\mathcal{R}_e(z) > 2d + l - 4$

$$M\tilde{f}_l(z) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} M(tg_l^{(d-1)})(z-1) M(t^{-2\lambda}\tilde{b}_{ld})(z-1).$$

Or,

$$M(tg_l^{(d-1)})(z-1) = M(g_l^{(d-1)})(z) = (-1)^{d-1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-d+1)} M g_l(z-d+1).$$

De plus, toujours d'après les tables de transformées de Mellin, si $\mathcal{R}_e(z) > l$,

$$M\tilde{b}_{ld}(z) = \frac{2^{z-1} \Gamma(2\lambda+1+l) \Gamma(z/2-l/2) \Gamma(z/2+\lambda+1/2+l/2)}{l! \Gamma(\lambda+1/2) \Gamma(z+2\lambda+1)}.$$

On a donc,

$$\begin{aligned} M(t^{-2\lambda}\tilde{b}_{ld})(z-1) &= M(\tilde{b}_{ld})(z-1-2\lambda) = \frac{2^{z-2-2\lambda} \Gamma(2\lambda+1+l) \Gamma(z/2-1/2-\lambda-l/2) \Gamma(z/2+l/2)}{l! \Gamma(\lambda+1/2) \Gamma(z)} \\ &= c_2(\lambda, l) \frac{2^{z-2-2\lambda} \Gamma(z/2-1/2-\lambda-l/2) \Gamma(z/2+l/2)}{\Gamma(z)}, \end{aligned}$$

avec

$$c_2(\lambda, l) = \frac{\Gamma(2\lambda+1+l)}{l! \Gamma(\lambda+1/2)}.$$

Finalement, on exprime $M\tilde{f}_l$ en fonction de Mf_l ,

$$\begin{aligned} M\tilde{f}_l(z) &= \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} (-1)^{d-1} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-d+1)} M g_l(z-d+1) M(\tilde{b}_{ld})(z-1-2\lambda) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d-1} \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)}\right)^2 \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-d+1)} M f_l(z) M b_{ld}(z-d+1) M(\tilde{b}_{ld})(z-1-2\lambda) \\ &= c_3(\lambda, l) F_{\lambda l}(z). \end{aligned}$$

On calcule $c_3(\lambda, l)$,

$$\begin{aligned} c_3(\lambda, l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d-1} \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)}\right)^2 c_1(\lambda, l) c_2(\lambda, l) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d-1} \left(\frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)}\right)^2 \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\lambda+1) \Gamma(2\lambda+1+l)}{l! \Gamma(2\lambda+1)} \frac{\Gamma(2\lambda+1+l)}{l! \Gamma(\lambda+1/2)}, \end{aligned}$$

avec

$$m(S^{d-2}) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\lambda+1)} \quad \text{et} \quad C_l^{\frac{d-2}{2}}(1) = C_l^{\lambda+1/2}(1) = \frac{\Gamma(2\lambda+l+1)}{l\Gamma(2\lambda+1)}.$$

Il vient

$$c_3(\lambda, l) = 2^{-(d-3)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1/2)} = 1,$$

d'après les propriétés de la fonction Γ et puisque $d-3 = 2\lambda$. Enfin,

$$\begin{aligned} F_{\lambda l}(z) &= \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-d+1)} \frac{2^{-z+d-1}\Gamma(z-d+1)2^{z-2-2\lambda}\Gamma(z/2-1/2-\lambda-l/2)\Gamma(z/2+l/2)}{\Gamma(l/2+z/2)\Gamma(z/2-\lambda-1/2-l/2)\Gamma(z)} Mf_l(z) \\ &= Mf_l(z). \end{aligned}$$

Alors, pour tout z tel que $\mathcal{R}_e(z) > 2d+l-4$, $M\tilde{f}_l(z) = Mf_l(z)$ et par injectivité de la transformée de Mellin, pour presque tout $p \geq 0$,

$$f_l(p) = \tilde{f}_l(p) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{d-1} \frac{m(S^{d-2})}{C_l^{\frac{d-2}{2}}(1)} \frac{1}{p} \int_p^{+\infty} g_l^{(d-1)}(u) C_l^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{u}{p}\right) \left(\frac{u^2}{p^2} - 1\right)^\lambda du.$$

□

Bibliographie

- [ABE04] A. AYACHE, A. BONAMI & A. ESTRADE – *Identification and wavelet decomposition of anisotropic Gaussian fields*, 2004, Preprint.
- [ABR01] S. AXLER, P. BOURDON & W. RAMEY – *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, 2001.
- [Adl81] R. J. ADLER – *The Geometry of Random Field*, John Wiley & Sons, 1981.
- [AGS95] P. ABRY, P. GONÇALVÈS & F. SELLAN – « Wavelet spectrum analysis and 1/f processes », in *Lecture Notes in Statistics*, vol. 103, Springer-Verlag, 1995, p. 15–30.
- [AJT04] A. AYACHE, S. JAFFARD & M. S. TAQQU – *Multifractal processes with a most general multifractal spectrum*, 2004, Preprint.
- [AMSW83] R. J. ADLER, D. MONRAD, R. H. SCISSORS & R. WILSON – « Representations, decompositions and sample function continuity of random field with independent increments », *Stochastic Process. Appl.* **15** (1983), p. 3–30.
- [AR03] A. AYACHE & F. ROUEFF – « A Fourier formulation of the Frostman criterion for random graphs and its applications to wavelet series », *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **14** (2003), p. 75–82.
- [AS96] P. ABRY & F. SELLAN – « The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer : remarks and fast implementation », *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **3** (1996), p. 377–383.
- [AT05] R. J. ADLER & J. E. TAYLOR – *Random Fields and Geometry*, <http://iew3.technion.ac.il/~radler/grf.pdf>, 2005.
- [BCI02] A. BENASSI, S. COHEN & J. ISTAS – « Identification and properties of real harmonizable fractional Lévy motions », *Bernoulli* **8** (2002), no. 1, p. 97–115.
- [BCI03] —, « Local self-similarity and the Hausdorff dimension », *C.R. Acad Sci. Paris Ser.I* **336** (2003), no. 3, p. 267–272.
- [BCI04] —, « On roughness indices for fractional fields », *Bernoulli* **10** (2004), no. 2, p. 357–376.
- [BCIJ98] A. BENASSI, S. COHEN, J. ISTAS & S. JAFFARD – « Identification of filtered white noises », *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 1, p. 31–49.
- [BE03] A. BONAMI & A. ESTRADE – « Anisotropic analysis of some Gaussian models », *J. Fourier Anal. Appl.* **9** (2003), p. 215–236.
- [BJR97] A. BENASSI, S. JAFFARD & D. ROUX – « Elliptic Gaussian random processes », *Rev. Mathem. Iberoamericana* **13** (1997), no. 1, p. 19–89.

- [BL04] H. BIERMÉ & G. LEMINEUR – *Relationship between the fractal dimension of a fractional Brownian motion and its projection*, <http://www.univ-orleans.fr/SCIENCES/MAPMO/membres/bierme/index.html>, 2004.
- [BLO⁺03a] J. M. BARDET, G. LANG, G. OPPENHEIM, A. PHILIPPE, S. STOEV & M. S. TAQQU – « Semi-parametric estimation of the long-range dependence parameter : a survey », in *Theory and applications of long-range dependence*, Birkhäuser Boston, 2003, p. 557–577.
- [BLO⁺03b] J. M. BARDET, G. LANG, G. OPPENHEIM, A. PHILIPPE & M. S. TAQQU – « Generators of long-range dependence processes : a survey », in *Theory and applications of long-range dependence*, Birkhäuser Boston, 2003, p. 579–623.
- [BPL⁺01] C. L. BENHAMOU, S. POUPON, E. LESPESSAILLES, S. LOISEAU, R. JENNANE, V. SIROUX, W. OHLEY & L. POTHUAUD – « Fractal Analysis of radiographic Trabecular Bone Texture and Bone Mineral Density : Two Complementary Parameters Related to Osteoporotic Fractures », *Journal of bone and mineral research* **16** (2001), no. 4, p. 697–704.
- [BS04] J. BOMAN & J. O. STRÖMBERG – « Novikov’s inversion formula for the attenuated Radon Transform : a new approach », *J. Geom. Anal.* **14** (2004), no. 2, p. 185–198.
- [CGM95] R. CIOSEK-GEORGES & B. B. MANDELBROT – « A class of micropulses and antipersistent fractional Brownian motion », *Stochastic Process. Appl.* **60** (1995), p. 1–186.
- [Cha99] G. CHAN – « An effective method for simulating Gaussian random fields », in *Proceedings of the statistical Computing section* (www.stat.uiowa.edu/~grchan/), Amer. Statist., 1999, p. 133–138.
- [CI03] S. COHEN & J. ISTAS – *An universal estimator of local self-similarity*, Preprint, http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Cohen/log_variations9.ps, 2003.
- [Coe00] J. F. COEURJOLLY – « Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires », Thèse, Université Joseph Fourier, 2000.
- [Coe01] —, « Estimating the parameters of fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths », *Stat. Inference Stoch. Process.* **4** (2001), p. 199–227.
- [CR81] M. CZÖRGO & P. RÉVÉSZ – *Strong approximation in probability and statistics*, Academic Press, 1981.
- [CT01] O. COSTIN & S. TANVEER – *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear evolution systems of n-th order partial differential equations in the complex plane*, <http://www.math.rutgers.edu/~costin>, 2001, Preprint.
- [CT03] S. COHEN & M. TAQQU – *Small and large scale behavior of the Poissonized Telecom Process*, <http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Cohen/sm15.ps>, 2003, Preprint.
- [DCD83] D. DACUNHA-CASTELLE & M. DUFLO – *Probabilités et statistiques*, vol. 2, Masson, 1983.
- [Dem02] G. DEMENGEL – *Transformation de Laplace*, Ellipse, 2002.
- [DH99] S. DAVIES & P. HALL – « Fractal analysis of surface roughness by using spatial data », *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **61** (1999), p. 3–37.

- [DN97] C. R. DIETRICH & G. N. NEWSAM – « Fast and exact simulation of stationary gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix », *SIAM J. Sci. Comput.* **18** (1997), no. 4, p. 1088–1107.
- [Dob79] R. L. DOBRUSHIN – « Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields », *Ann. Probab.* **7** (1979), no. 1, p. 1–28.
- [Enr04] N. ENRIQUEZ – « A simple construction of the fractional brownian motion », *Stochastic Process. Appl.* **109** (2004), no. 2, p. 203–223.
- [Est02] A. ESTRADE – *Liens entre densité spectrale et autosimilarité asymptotique*, Colloque Autosimilarité et Applications, Clermont-Ferrand, 2002.
- [Fal90] K. J. FALCONER – *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1990.
- [Fal03] — , « The local structure of random processes », *J. London Math. Soc.* **67** (2003), p. 657–672.
- [GS71] I. I. GIHMAN & A. V. SKOROHOD – *The theory of stochastic processes*, no. 1, Springer-Verlag, 1971.
- [Gué00] C. A. GUÉRIN – « Wavelet analysis and covariance structure of non-stationary processes », *J. Fourier Anal. Appl.* **6** (2000), p. 403–425.
- [GV67] I. M. GUELFAND & N. Y. VILENKIN – *Les Distributions: Applications de l'Analyse Harmonique*, no. 4, Dunod, 1967.
- [Hel99] S. HELGASON – *The Radon Transform*, Birkhäuser, 1999.
- [HJJ⁺94] R. HARBA, G. JACQUET, R. JENNANE, T. LOUSSOT, C. L. BENHAMOU, E. LESPESSAILLES & D. TOURLIÈRE – « Determination of fractal scales on trabecular bone X-ray images », *Fractals* **2** (1994), no. 3, p. 451–456.
- [Hof62] K. HOFFMAN – *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, 1962.
- [HW93] P. HALL & A. WOOD – « On the performance of box-counting estimators of fractal dimension », *Biometrika* **80** (1993), no. 1, p. 246–252.
- [IL97] J. ISTAS & G. LANG – « Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process », *Ann. Inst. Henri Poincaré, Prob. Stat.* **33** (1997), no. 4, p. 407–436.
- [Jen95] R. JENNANE – « Modélisation fractale de textures. application à l'analyse de l'architecture osseuse », Thèse, Université d'Orléans, 1995.
- [JHP⁺01] R. JENNANE, R. HARBA, E. PERRIN, A. BONAMI & A. ESTRADE – « Analyse de champs browniens fractionnaires anisotropes », *18eme colloque du GRETSI* (2001), p. 99–102.
- [KK96] L. M. KAPLAN & C. C. J. KUO – « An Improved Method for 2-d Self-Similar Image Synthesis », *IEEE Trans. Image Process.* **5** (1996), no. 5, p. 754–761.
- [KS98] I. KARATZAS & E. SHREVE – *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1998.
- [Lac04] C. LACAUX – « Real harmonizable multifractional Lévy motions », *Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Stat.* **40** (2004), p. 259–277.
- [Lac05] — , *Fields with exceptional tangent fields*, <http://www.lsp.ups-tlse/Fp/Lacaux/maths.html>, 2005.
- [Leg00] S. LEGER – « Analyse stochastique de signaux multi-fractaux et estimations de paramètres », Thèse, Université d'Orléans, <http://www.univ-orleans.fr/SCIENCES/MAPMO/publications/leger/these.php>, 2000.

- [Lem03] G. LEMINEUR – « Contributions à l’analyse fractale de radiographies osseuses pour le diagnostic de l’ostéoporose », Thèse, Université d’Orléans, 2003.
- [Lif95] M. A. LIFSHITS – *Gaussian Random Functions*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [LT80] M. LEDOUX & M. TALAGRAND – *Probability in Banach Spaces*, Springer-Verlag, 1980.
- [MST99] Y. MEYER, F. SELLAN & M. TAQQU – « Wavelets, Generalised White Noise and Fractional Integration: The Synthesis of Fractional Brownian Motion », *J. Fourier Anal. Appl.* **5** (1999), no. 5, p. 465–494.
- [MVN68] B. B. MANDELBROT & J. VAN NESS – « Fractional Brownian motion, fractional noises and applications », *Siam Review* **10** (1968), p. 422–437.
- [NM99] I. NORROS & P. MANNERSALO – « Simulation of Fractional Brownian Motion with Conditionalized Random Midpoint Displacement », Tech. report, Advances in Performance analysis, <http://vtt.fi/tte/tte21:traffic/rmdmn.ps>, 1999.
- [Pen00] A. PENTTINEN – *Simulation of Two-dimensional Fractional Brownian Motion*, <http://www.sal.tkk.fi/Opinnot/Mat-2.108/pdf-files/epen00.pdf>, 2000.
- [PHBJ⁺01] E. PERRIN, R. HARBA, C. BERZIN-JOSEPH, I. IRIBARREN & A. BONAMI – « nth-order fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises », *IEEE Trans. Sign. Proc.* **45** (2001), p. 1049–1059.
- [PHJI02] E. PERRIN, R. HARBA, R. JENNANE & I. IRIBARREN – « Fast and Exact Synthesis for 1-D Fractional Brownian Motion and Fractional Gaussian Noises », *IEEE Signal Processing Letters* **9** (2002), no. 11, p. 382–384.
- [Pip04] V. PIPIRAS – *Wavelet-based simulation of fractional Brownian motion revisited*, Preprint, <http://www.stat.unc.edu/faculty/pipiras>, 2004.
- [PV96] R. F. PELTIER & J. L. VÉHEL – « Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results », Tech. report, INRIA, <http://www-syntim.inria.fr/fractales/>, 1996.
- [Qui83] E. T. QUINTO – « The Invertibility of Rotation Invariant Radon Transform », *J. Math. Anal. Appl.* **91** (1983), p. 510–522.
- [Rei93] R. D. REISS – *A course on point processes*, Springer-Verlag, 1993.
- [RK96] A. G. RAMM & A. I. KATSEVICH – *The Radon Transform and Local Tomography*, CRC Press, 1996.
- [Rou00] F. ROUEFF – « Dimension de Hausdorff du graphe d’une fonction continue: une étude analytique et statistique », Thèse, École Nationale Supérieure des Télécommunications, <http://www.tsi.enst.fr/~roueff>, 2000.
- [Rud98] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.
- [Rul04] H. RULLGARD – « Stability of the inverse problem for the attenuated radon transform with 180° data », *Inverse Problems* **20** (2004), no. 3, p. 781–797.
- [Ser82] J. SERRA – *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.
- [SKM89] D. STOYAN, W. KENDALL & J. MECKE – *Stochastic Geometry and its Applications*, John Wiley & Sons Inc., 1989.

- [Sne21] I. H. SNEDDON – *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, 19721.
- [Sol92] V. SOLO – « Intrinsic random functions and the paradox of $1/f$ noise », *SIAM J. Appl. Math.* **52** (1992), no. 1, p. 270–291.
- [Ste02] M. L. STEIN – « Fast and exact simulation of fractional Brownian surfaces », *J. Comput. Graph. Statist.* **11** (2002), no. 3, p. 587–599.
- [SW71] E. M. STEIN & G. WEISS – *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [Tri57] F. G. TRICOMI – *Integral equations*, Interscience, 1957.
- [Wic25] S. D. WICKSELL – « The corpuscle problem: a mathematical study for a biometrical problem », *Biometrika* **17** (1925), p. 84–99.
- [Xia98] Y. XIAO – « Hausdorff-type measures of the sample paths of fractional Brownian motion », *Stochastic Process. Appl.* **74** (1998), no. 2, p. 251–272.
- [Yag97] A. M. YAGLOM – *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions (I)*, Springer-Verlag., 1997.

TITRE :**Champs aléatoires : autosimilarité, anisotropie et analyse directionnelle**

RÉSUMÉ :

Nous étudions des champs aléatoires pouvant modéliser certains milieux poreux. Nous nous intéressons à leurs statistiques au second ordre et en particulier à leur autosimilarité.

Sous des hypothèses de stationnarité, une mesure spectrale caractérise le champ. L'homogénéité asymptotique directionnelle de la mesure détermine l'autosimilarité asymptotique du champ ; le plus petit coefficient d'homogénéité dans une échelle logarithmique en donne l'ordre. Pour déterminer l'anisotropie on peut considérer une transformée de Radon du champ dont l'ordre d'autosimilarité dépend de la direction.

Ces résultats au second ordre sont adaptés à des modèles gaussiens, l'ordre d'autosimilarité s'estimant par les variations quadratiques. Nous considérons le problème de l'injectivité des transformées de Radon.

Enfin, nous étudions un modèle poissonien obtenu par agrégation de petites boules. Les propriétés d'autosimilarité sont analogues au second ordre mais atypiques pour la convergence en loi.

TITLE :**Random fields : self-similarity, anisotropy and directional analysis**

ABSTRACT :

We study random fields that can modelize some porous media. We are mainly interested in second order statistics and focus on self-similarity properties.

Under stationary assumptions, the field is characterized by a spectral measure. Asymptotic self-similarity properties are then given by the directional asymptotic homogeneity of the measure. Its parameter is given by the smallest coefficient of homogeneity in a logarithmic scale. To recover anisotropy one can perform a Radon transform of the field for which the self-similarity parameter depends on the direction.

These second order results are well adapted to Gaussian models. In this case, the self-similarity parameter can be estimated with the quadratic variations. We consider injectivity problems for the Radon transform.

In the last part, we study a Poissonian model obtained by small aggregated balls. Self-similarity properties are similar for second order statistics but unusual for convergence in law.

DISCIPLINE : Mathématiques

MOTS CLÉS : Champs gaussiens, mesure aléatoire de Poisson, chevauchement de boules, autosimilarité, anisotropie, fractal, fractionnaire, stationnarité, mesure spectrale, transformée de Radon

MAPMO, Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans cedex 2, France