

Réduction dimensionnelle pour des milieux hétérogènes, troués ou fissurés

Jean-François Babadjian

Université Paris Nord (Villetaneuse)

1 Modélisation de membranes hétérogènes

1.1 La configuration physique

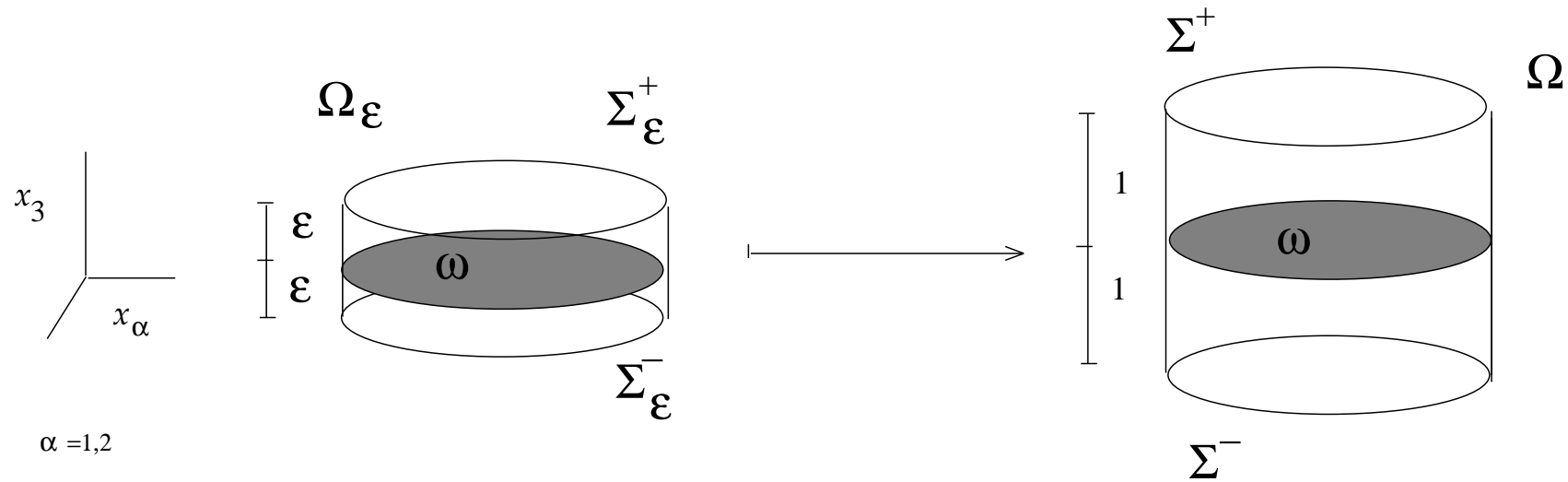
$\Omega_\varepsilon := \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné.

$W(\varepsilon) : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow [0, +\infty)$: densité d'énergie élastique à croissance $1 < p < \infty$.

Pour une déformation admissible $u : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$, on définit l'énergie élastique par

$$E(\varepsilon)(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} W(\varepsilon)(x; \nabla u) dx, \quad u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3).$$

1.2 La configuration “rescalée”



CHANGEMENT D'ÉCHELLE: on pose $\Omega := \omega \times \overbrace{(-1, 1)}^I$ et $\forall \overbrace{(x_1, x_2)}^{x_\alpha}, x_3 \in \Omega$,

$$v(x_\alpha, x_3) = u(x_\alpha, \varepsilon x_3).$$

L'énergie devient:

$$E_\varepsilon(v) = E(\varepsilon)(u) = \int_{\Omega} W_\varepsilon \left(x; \nabla_\alpha v \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 v \right. \right) dx, \quad v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Théorème 1 (*Braides-Fonseca-Francfort*) $\exists \widehat{W} : \omega \times \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow [0, +\infty)$ t.q.

$$E_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma(L^p)} E(v) = \begin{cases} 2 \int_{\omega} \widehat{W}(x_\alpha; \nabla_\alpha v) dx_\alpha & \text{si } v \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLES:

- *Le Dret-Raoult* : $W_\varepsilon(x; F) = W(F) \Rightarrow \widehat{W}(x_\alpha; \overline{F}) = \mathcal{Q}W_0(\overline{F})$

$$W_0(\overline{F}) := \inf \{ W(\overline{F}|z) : z \in \mathbb{R}^3 \}.$$

- *Braides-Fonseca-Francfort*: $W_\varepsilon(x; F) = W(x_3; F) \Rightarrow \widehat{W}(x_\alpha; \overline{F}) = \underline{W}(\overline{F})$

$$\underline{W}(\overline{F}) = \inf_{L, \phi} \left\{ \frac{1}{2} \int_{Q' \times I} W(x_3; \overline{F} + \nabla_\alpha \phi | L \nabla_3 \phi) dx_\alpha dx_3 : L > 0, \right. \\ \left. \phi \in W^{1,p}(Q' \times I; \mathbb{R}^3), \phi = 0 \text{ sur } \partial Q' \times I \right\}.$$

- *Braides-Fonseca-Francfort/Shu* : $W_\varepsilon(x; F) = W(x_\alpha/\varepsilon, x_3; F)$.
- *Shu*: $W_\varepsilon(x; F) = W(x_\alpha/\varepsilon^2; F)$.

1.3 Description des résultats

HÉTÉROGÉNÉITÉS MACROSCOPIQUES ET MICROSCOPIQUES:

- *B.-Francfort* : $W_\varepsilon(x; F) = W(x; F)$. ✓
- *B.-Baía* : $W_\varepsilon(x; F) = W(x, x_\alpha/\varepsilon; F)$.
- *B.-Baía* : $W_\varepsilon(x; F) = W(x, x/\varepsilon, x_\alpha/\varepsilon^2; F)$.

Théorème 2 (*B.-Francfort*) Si $W_\varepsilon(x; F) = W(x; F)$ est une fonction de Carathéodory, alors $\widehat{W} = \underline{W}$ où

$$\underline{W}(y_\alpha; \bar{F}) = \inf_{L, \phi} \left\{ \frac{1}{2} \int_{Q' \times I} W(y_\alpha, x_3; \bar{F} + \nabla_\alpha \phi | L \nabla_3 \phi) dx_\alpha dx_3 : L > 0, \right. \\ \left. \phi \in W^{1,p}(Q' \times I; \mathbb{R}^3), \phi = 0 \text{ sur } \partial Q' \times I \right\}.$$

Méthode de **dédoublément de variable** (\neq *Acerbi-Fusco*).

Γ -LIMITE PLUS RICHE:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \xrightarrow{W^{1,p}} u \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \xrightarrow{L^p} b \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \Rightarrow \int_I \frac{1}{2\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon dx_3 \xrightarrow{L^p} \bar{b} \in L^p(\omega; \mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Bouchitté-Fonseca-Mascarenhas : cas homogène $W_\varepsilon(x; F) = W(F)$.

Théorème 3 (*B.-Francfort*) Si $W_\varepsilon(x; F) = W(x; F)$ est une fonction de Carathéodory, alors

$$E_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma(L^p)} E(v, \bar{b}) = \begin{cases} 2 \int_\omega Q^* W(x_\alpha; \nabla_\alpha v | \bar{b}) dx_\alpha & \text{si } v \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\underline{W}(x_\alpha; \bar{F}) = \inf_{z \in \mathbb{R}^3} Q^* W(x_\alpha; \bar{F} | z)$.

OBJECTIF: remplacer $W(x_\alpha, x_3; F)$ par $W(y_\alpha, x_3; F)$ où y_α est “proche” de x_α .

OUTILS:

- Théorème d'équi-intégrabilité de *Bocea-Fonseca*:

$$\{u_\varepsilon\} \text{ suite min.} \Rightarrow \left\{ \left| \left(\nabla_\alpha u_\varepsilon \mid \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right) \right|^p \right\} \text{ équi-intégrable.}$$

- Théorème de *Scorza-Dragoni*:

$$\forall \eta > 0, \exists K_\eta \subset \Omega \text{ t.q. } \mathcal{L}^3(\Omega \setminus K_\eta) < \eta \text{ et } W|_{K_\eta \times \mathbb{R}^{3 \times 3}} \text{ est continue.}$$

- Théorème d'*Extension de Tietze*:

$$\exists W^\eta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow [0, +\infty) \text{ continue t.q. } W = W^\eta \text{ sur } K_\eta \times \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

DÉMONSTRATION DE LA Γ -lim inf: $\widehat{W}(x_0; \overline{F}) \geq \underline{W}(x_0; \overline{F})$?

Soit $u(x_\alpha) = \overline{F} \cdot x_\alpha$ sur $Q'_r(x_0) \times I$.

1 – $\exists \{u_\varepsilon\} \subset W^{1,p}(Q'_r(x_0) \times I; \mathbb{R}^3) \xrightarrow{L^p} u$ t.q.

$$\begin{aligned} E(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q'_r(x_0) \times I} W \left(x; \nabla_\alpha u_\varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right. \right) dx \\ &\sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q'_r(x_0) \times I} W^\eta \left(x; \nabla_\alpha u_\varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right. \right) dx. \end{aligned}$$

2 – On écrit $Q'_r(x_0) = \bigcup_{i=1}^{h^2} Q'_{i,h}$ où $\mathcal{L}^2(Q'_{i,h}) = r^2/h^2$.

$$E(u) \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{h^2} \int_{Q'_{i,h} \times I} W^\eta \left(x_\alpha, x_3; \nabla_\alpha u_\varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right. \right) dx.$$

3 – Propriété de **continuité (uniforme sur les compacts)** de $W^\eta \Rightarrow$

$$E(u) \gtrsim \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h^2}{r^2} \sum_{i=1}^{h^2} \int_{Q'_{i,h}} \int_{Q'_{i,h} \times I} W^\eta \left(y_\alpha, x_3; \nabla_\alpha u_\varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right. \right) dx dy_\alpha.$$

4 – On revient à W grâce à **équi-intégrabilité**:

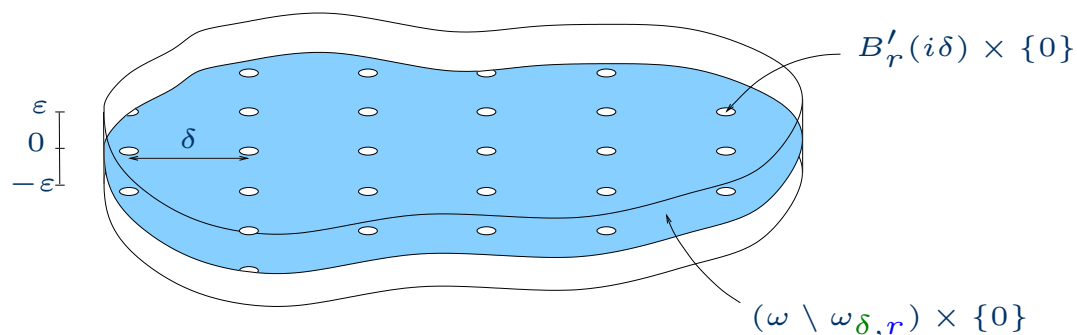
$$\begin{aligned} E(u) &\gtrsim \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h^2}{r^2} \sum_{i=1}^{h^2} \int_{Q'_{i,h}} \int_{Q'_{i,h} \times I} W \left(y_\alpha, x_3; \nabla_\alpha u_\varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right. \right) dx dy_\alpha \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\gtrsim} \frac{h^2}{r^2} \sum_{i=1}^{h^2} \int_{Q'_{i,h}} \underbrace{\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q'_{i,h} \times I} W \left(y_\alpha, x_3; \nabla_\alpha u_\varepsilon \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right. \right) dx dy_\alpha}_{\geq 2r^2/h^2 \underline{W}(y_\alpha; \bar{F}) \text{ (Braidès-Fonseca-Francfort)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int_{Q'_r(x_0)} \widehat{W}(y_\alpha; \bar{F}) dy_\alpha = E(u) \geq 2 \int_{Q'_r(x_0)} \underline{W}(y_\alpha; \bar{F}) dy_\alpha.$$

2 Le problème de la passoire de Neumann

Description de films minces possédant une **microstructure dégénérée** due à la présence de trous sur la surface moyenne.

$$\omega_{\delta,r} = \omega \cap \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^{n-1}} B'_r(i\delta), \quad \Omega^{\varepsilon}_{\delta,r} = [\omega \times (0, \varepsilon)] \cup [\omega \times (-\varepsilon, 0)] \times [\omega_{\delta,r} \times \{0\}] :$$



TROIS PARAMÈTRES:

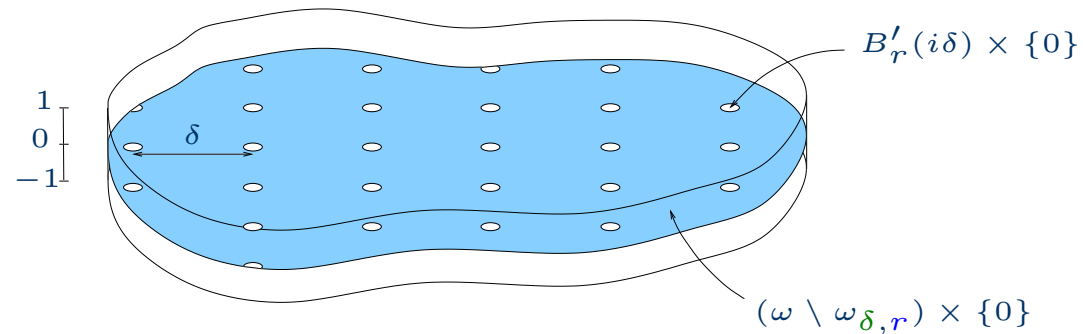
- ε : épaisseur du cylindre.
- δ : période de distribution des connections.
- r : rayon des connections (inconnu).

Cas $\delta \sim \varepsilon$ (*Ansini*) et aussi de façon similaire $\varepsilon \gg \delta$.

TAUX DE CONVERGENCE:

- $\varepsilon \ll \delta$ par hypothèse (*Ansini-B.-Zeppieri*).
- $r \ll \delta \Leftarrow (\omega \setminus \omega_{\delta,r}) \times \{0\}$ est une partie du bord.
- $r/\varepsilon \rightarrow \ell$?

Soient $\{\varepsilon_j\}$, $\{\delta_j\}$ et $\{r_j\} \searrow 0$, $\Omega_j := [\omega \times (0, 1)] \cup [\omega \times (-1, 0)] \times [\omega_{\delta_j, r_j} \times \{0\}]$:



Déf.: $\{u_j\} \subset W^{1,p}(\Omega_j; \mathbb{R}^m) \rightarrow (u^+, u^-) \iff \begin{cases} u_j|_{\omega \times (0,1)} \xrightarrow{L^p(\omega \times (0,1); \mathbb{R}^m)} u^+ \\ u_j|_{\omega \times (-1,0)} \xrightarrow{L^p(\omega \times (-1,0); \mathbb{R}^m)} u^- . \end{cases}$

$$\varepsilon, r \ll \delta$$

$$r/\varepsilon \rightarrow \ell$$

Théorème 4 (*Ansini-B.-Zeppieri*)

$$\int_{\Omega_j} W \left(\nabla_\alpha u \middle| \frac{1}{\varepsilon_j} \nabla_n u \right) dx \xrightarrow{\Gamma(L^p)} \int_\omega \mathcal{Q}W_0(\nabla_\alpha u^+) dx_\alpha + \int_\omega \mathcal{Q}W_0(\nabla_\alpha u^-) dx_\alpha$$

$$+ R^{(\ell)} \int_\omega \varphi^{(\ell)}(u^+ - u^-) dx_\alpha.$$

Coefficients $R^{(\ell)}$:

	$\ell = 0$	$\ell = +\infty$	$\ell \in (0, +\infty)$
$R^{(\ell)} =$	$\lim_j \frac{r_j^{n-p}}{\varepsilon_j \delta_j^{n-1}}$	$\lim_j \frac{r_j^{n-p-1}}{\delta_j^{n-1}}$	$R^{(\infty)} = \ell^{-1} R^{(0)}$

$(p < n - 1)$

Energie interfaciale $\varphi^{(\ell)}$: formules de type **capacités non linéaires**.

$$\begin{array}{l} \varepsilon, r \ll \delta \\ r/\varepsilon \rightarrow \ell \end{array}$$

MÉTHODE: (*Ansini-Braides*) Séparer les contributions proches et lointaines des zones de connexion.

$\{u_j\} \subset W^{1,p}(\Omega_j; \mathbb{R}^m) \rightarrow u^\pm$ suite min. $\rightsquigarrow \{w_j\} \subset W^{1,p}(\Omega_j; \mathbb{R}^m) \rightarrow u^\pm$ t.q.

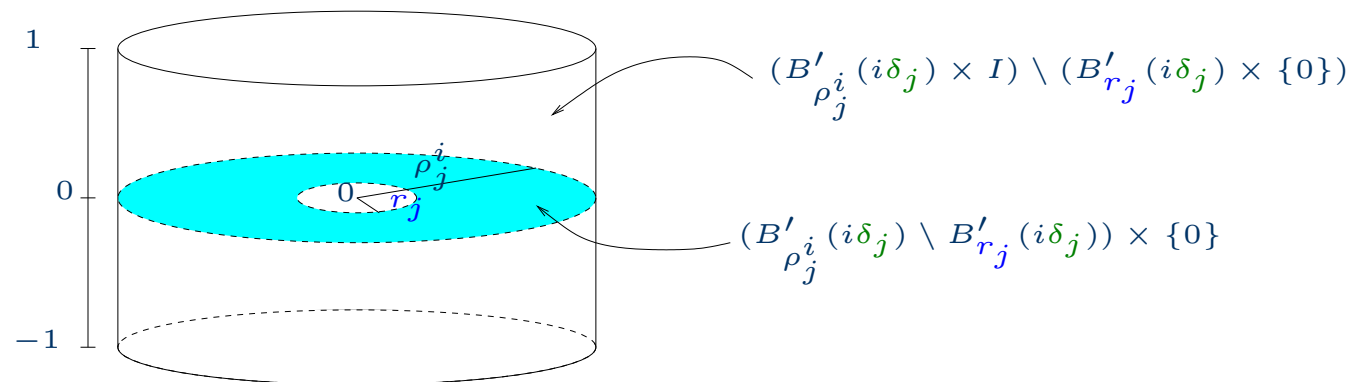
$$w_j = \begin{cases} u_j^{i+} & \text{sur } \partial B'_{\rho_j^i}(i\delta_j) \times (0, 1), \\ u_j^{i-} & \text{sur } \partial B'_{\rho_j^i}(i\delta_j) \times (-1, 0) \end{cases} \quad \text{avec } \delta_j > \rho_j^i > r_j \text{ convenablement choisi.}$$

DÉMONSTRATION DE LA Γ -lim inf ($\ell \in (0, +\infty)$):

$$\int_{\Omega_j} W \left(\nabla_{\alpha} w_j \middle| \frac{1}{\varepsilon_j} \nabla_n w_j \right) dx$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega_j \setminus (\cup_i B'_{\rho_j^i}(i\delta_j) \times I)} W(\cdot) dx}_{\rightarrow \cdot \geq \int_{\omega} \mathcal{Q}W_0(\nabla_{\alpha} u^{\pm}) dx_{\alpha}} + \sum_i \int_{(B'_{\rho_j^i}(i\delta_j) \times I) \setminus (B'_{r_j}(i\delta_j) \times \{0\})} W(\cdot) dx.$$

(Le Dret-Raoult)



Naissance du terme d'énergie interfaciale:

$$\varepsilon, r \ll \delta$$

$$r/\varepsilon \rightarrow \ell$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \int_{(B'_{\rho_j^i}(i\delta_j) \times I) \setminus (B'_{r_j}(i\delta_j) \times \{0\})} W \left(\nabla_\alpha w_j \middle| \frac{1}{\varepsilon_j} \nabla_n w_j \right) dx \\ &= \sum_i r_j^{n-1} r_j^{-p} \underbrace{\int_{(B'_{\delta_j/r_j} \times I) \setminus (B'_1 \times \{0\})} r_j^p W (r_j^{-1} \nabla_\alpha z_j \middle| \varepsilon_j^{-1} \nabla_n z_j) dx}_{\geq \inf\{\cdot\} \equiv \varphi_j^{(\ell)}(u_j^{i+} - u_j^{i-})} \\ &\geq \underbrace{\frac{r_j^{n-1-p}}{\delta_j^{n-1}}}_{\rightarrow R^{(\ell)}} \underbrace{\sum_i \delta_j^{n-1} \varphi_j^{(\ell)}(u_j^{i+} - u_j^{i-})}_{\rightarrow \int_\omega \varphi^{(\ell)}(u^+ - u^-) dx_\alpha}, \end{aligned}$$

où $\varphi_j^{(\ell)} \rightarrow \varphi^{(\ell)}$.

EXEMPLE: $W(F) = |F|^p \Rightarrow \varphi^{(\ell)}(z) = c^{(\ell)}|z|^p.$

$$\begin{array}{l} \varepsilon, r \ll \delta \\ r/\varepsilon \rightarrow \ell \end{array}$$

$$\begin{aligned} c^{(\ell)} &\sim \lim_{j \rightarrow +\infty} \inf_{\zeta \in W^{1,p}} \left\{ \int_{\underbrace{(B'_{\delta_j/r_j} \times I) \setminus (B'_1 \times \{0\})}_{\rightarrow +\infty}} \left| \left(\nabla_\alpha \zeta \left| \underbrace{\frac{r_j}{\varepsilon_j}}_{\rightarrow \ell} \nabla_n \zeta \right. \right) \right|^p dx : \right. \\ &\quad \left. \zeta = 1 \text{ sur } \partial B'_{\delta_j/r_j} \times (0, 1), \zeta = 0 \text{ sur } \partial B'_{\delta_j/r_j} \times (-1, 0) \right\} \\ &= \inf_{\zeta \in X} \int_{(\mathbb{R}^{n-1} \times I) \setminus (B'_1 \times \{0\})} |(\nabla_\alpha \zeta | \ell \nabla_n \zeta)|^p dx. \end{aligned}$$

Espace fonctionnel limite X : soit ζ_j une fonction test, on veut obtenir de la compacité en ayant uniquement une borne sur $\nabla \zeta_j$ dans L^p .

Idée: on étend ζ_j dans la direction x_α par la valeur sur le bord latéral.