



HAL
open science

Formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri

François Girault

► **To cite this version:**

François Girault. Formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1997. Français. NNT: . tel-00010245

HAL Id: tel-00010245

<https://theses.hal.science/tel-00010245>

Submitted on 22 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

préparée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

spécialité : **Informatique Industrielle**

par

François GIRAULT

Formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri

soutenue le lundi 15 décembre 1997 devant le jury :

| | | |
|---------------------|------------------------------|--------------------------------------|
| Président | Guy | JUANOLE |
| Rapporteurs | Jean-Claude Serge | GENTINA HADDAD |
| Examineurs | Jean-Pierre Yves | ELLOY LAFONT |
| Directeurs de thèse | Brigitte Robert | PRADIN-CHÉZALVIEL VALETTE |

Le chercheur moderne, bien qu'encore auréolé du prestige de ses illustres prédécesseurs, est avant tout le tâcheron définitivement prolétarisé d'une activité intégrée à l'industrie planétaire. Dans la plupart des cas, il est voué au labeur sans gloire du laboratoire. Travaillant beaucoup, chichement rétribué, devant gravir péniblement l'échelle hiérarchique à force de soumission et d'arrivisme, son seul espoir de quitter sa médiocre condition d'éternel étudiant — et néanmoins souvent professeur — réside dans la découverte suffisamment importante qui lui permettra de sortir des coulisses pour paraître un seul soir sous les feux de la reconnaissance médiatique. Car l'accession à la renommée scientifique emprunte de plus en plus le raccourci de son autoproclamation publicitaire, même si celle-ci doit s'effondrer dans les heures, les semaines ou les mois qui suivent. Ce phénomène encore marginal est plein d'avenir dans la mesure où, si pour la grande majorité des chercheurs la preuve irréfutable de la réalité et de la valeur scientifique de leur travail réside dans la publication d'articles dans les revues internationales qui font autorité, ces revues ne peuvent plus du tout garantir pour autant les quelques qualités de sérieux qui ont fait leur réputation.

Jacques PHILIPPONNEAU

*Relation de l'empoisonnement perpétré en Espagne
et camouflé sous le nom de syndrome de l'huile toxique*
Éditions de l'Encyclopédie des Nuisances, Paris, 1994

J'exprime bien sûr ma gratitude envers les personnes qui m'ont fait l'honneur de juger cette thèse et qui, par leurs critiques, m'ont permis d'en améliorer l'écriture :

- M. Jean-Claude GENTINA, professeur des universités à l'*École Centrale de Lille*,
- M. Serge HADDAD, professeur des universités à l'*Université Paris-Dauphine*,
- M. Jean-Pierre ELLOY, professeur des universités à l'*École Centrale de Nantes*,
- M. Guy JUANOLE, professeur des universités à l'*Université Paul Sabatier*,
- M. Yves LAFONT, chargé de recherche à l'*Institut de Mathématiques de Luminy*³.

Je dois une reconnaissance particulière à Yves LAFONT qui a consacré bien du temps à répondre à mes nombreuses questions sur la logique linéaire.

Enfin, je me réserve le plaisir de témoigner par dédicaces manuscrites mon affection envers mes proches, sans qui je ne serais pas moi-même.

3. UPR 9016 du CNRS, anciennement *Laboratoire de Mathématiques Discrètes*; son nouveau nom est officiel depuis le 1^{er} janvier 1996.

Avant-propos

Cette thèse a été préparée du 1^{er} octobre 1993 au 31 janvier 1998¹ dans l'Unité Propre de Recherche 8001 du Centre National de la Recherche Scientifique. Cette unité est aussi désignée par le sigle LAAS qui, après deux changements de signification², correspond depuis le 1^{er} janvier 1997 à *Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes*.

Je remercie la direction, l'administration et les services techniques de ce laboratoire (réseau informatique, documentation, édition, magasin, entretien) qui m'ont permis d'accomplir mon travail dans un environnement exceptionnel. Je remercie également les personnes qui s'occupent quotidiennement des repas du midi à la cafétéria. En dépit des impératifs de plus en plus contraignants de la restauration collective, je les ai toujours vues travailler dans la bonne humeur. Et je salue bien « le Capitaine » pour les idées échangées autour du café qu'il sait si bien préparer.

À mon entrée au LAAS, j'ai intégré un groupe de recherche appelé *Systèmes de Production* qui, lui aussi, a changé plusieurs fois de nom. Depuis le 9 janvier 1998, il s'intitule *Organisation et Conduite de Systèmes Discrets*. Je remercie Jean-Claude HENNET, responsable du groupe, et Éliane DUFOUR, secrétaire, pour leur accueil cordial.

Dans ce groupe, c'est Robert VALETTE, directeur de recherche au CNRS, qui s'est chargé de mon encadrement, avec le concours de Brigitte PRADIN-CHÉZALVIEL, maître de conférences à l'*Institut Universitaire de Technologie Paul Sabatier* et membre d'un autre groupe de recherche du LAAS intitulé *Outils Logiciels pour la Communication* (qui n'a pas changé de nom). Je les remercie chaleureusement pour leur soutien, leur confiance et leur patience à mon égard. Je salue aussi notre collègue Luis Allan KÜNZLE qui a beaucoup contribué, en préparant sa thèse, à la synergie nos recherches — il est maintenant retourné au Brésil et sa compagnie me manque.

Je remercie également toutes les personnes du laboratoire qui m'ont éclairé de leurs connaissances lors de discussions techniques. Je pense notamment à François VERNADAT.

1. Période interrompue du 15 octobre 1995 au 16 octobre 1996 pour contingences militaires.

2. À sa création en 1967, *Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spaciales*, puis dès 1972, *Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes*.

| | | |
|--|---|-----------|
| II.3.6 | La relation de conflit entre actions | 32 |
| II.3.7 | La notion d'observateur d'une action | 34 |
| II.4 | La notion de disponibilité des ressources | 35 |
| II.4.1 | Rappels sur la notion de vérité | 35 |
| II.4.2 | De la notion de disponibilité à celle de consommabilité | 36 |
| II.4.3 | Le cumul d'exemplaires de ressources | 38 |
| II.4.4 | La dimension temporelle des actions | 39 |
| II.4.5 | La notion de consommabilité indéfinie | 41 |
| II.4.6 | La notion de productibilité | 42 |
| II.5 | Raisonnement logique sur des ressources | 44 |
| II.5.1 | Tentative de raisonnement en logique classique | 44 |
| II.5.2 | Critique du raisonnement classique appliqué aux ressources | 45 |
| II.5.3 | Vers un raisonnement formulé en logique linéaire | 46 |
| Chapitre III Interprétation des connecteurs linéaires | | 47 |
| III.1 | Panorama des connecteurs linéaires | 48 |
| III.1.1 | Introduction au calcul des séquents | 48 |
| III.1.2 | Passage de la logique classique à la logique linéaire | 50 |
| III.1.3 | Interprétation d'un séquent linéaire au sens des ressources | 52 |
| III.1.4 | Interprétation fondamentale de la négation linéaire | 53 |
| III.2 | Les connecteurs multiplicatifs | 54 |
| III.2.1 | L'implication linéaire | 54 |
| III.2.2 | La conjonction multiplicative | 55 |
| III.2.3 | La disjonction multiplicative | 56 |
| III.2.4 | Quelques expressions multiplicatives | 59 |
| III.3 | Les connecteurs additifs | 61 |
| III.3.1 | La conjonction additive | 61 |
| III.3.2 | La disjonction additive | 63 |
| III.3.3 | L'implication additive | 65 |
| III.3.4 | Distributivité des multiplicatifs sur les additifs | 65 |
| III.4 | Les connecteurs exponentiels | 68 |
| III.4.1 | La conjonction exponentielle | 69 |
| III.4.2 | La disjonction exponentielle | 71 |
| III.4.3 | Distributivité des exponentiels | 73 |
| III.5 | Les grands principes de la négation | 74 |
| III.5.1 | Le principe de dualité | 74 |
| III.5.2 | Le principe du tiers exclu | 79 |

Table des matières

| | | |
|--------------------|--|-----------|
| Chapitre I | Introduction : logique et réseaux de Petri | 1 |
| I.1 | Fondements de notre problématique | 2 |
| I.2 | Tentatives de formalisation logique des réseaux de Petri | 4 |
| I.3 | Avènement de la logique linéaire | 5 |
| I.4 | Logique linéaire et théorie des réseaux de Petri | 8 |
| I.5 | Méthode et plan de cette thèse | 11 |
| Chapitre II | Notions primitives pour la logique linéaire | 15 |
| II.1 | Généralités | 16 |
| II.1.1 | Questions d'interprétation | 16 |
| II.1.2 | Remaniement des bases de l'interprétation | 18 |
| II.1.3 | Méthode de travail | 19 |
| II.2 | La notion de ressource | 20 |
| II.2.1 | Rappels sur la notion de proposition | 20 |
| II.2.2 | Le sens commun du mot <i>ressource</i> | 21 |
| II.2.3 | Définition initiale de la notion de ressource | 22 |
| II.2.4 | La notion de chose | 22 |
| II.2.5 | La notion d'exemplaires de ressources | 23 |
| II.2.6 | La consommation et la production d'exemplaires | 25 |
| II.2.7 | La composition de ressources | 26 |
| II.2.8 | Définition finale de la notion de ressource | 27 |
| II.3 | La notion d'action sur des ressources | 28 |
| II.3.1 | Rappels sur la notion de déduction | 28 |
| II.3.2 | La conception générale du mot <i>action</i> | 29 |
| II.3.3 | Définition de la notion d'action sur des ressources | 30 |
| II.3.4 | La notion de ressource d'action | 30 |
| II.3.5 | Le rapport entre les notions d'action et de ressource d'action | 31 |

| | |
|--|------------|
| V.3.4 Traduction de l'accessibilité générale | 152 |
| Chapitre VI Conclusions et perspectives | 155 |
| VI.1 Récapitulatif de nos contributions | 155 |
| VI.2 Portée et limite de nos résultats | 158 |
| VI.3 Perspectives de recherches | 160 |
| | |
| Annexe A Calcul des séquents classiques | 165 |
| A.1 Calcul des séquents classiques standards LK | 165 |
| A.2 Calcul des séquents classiques réversible LK ^r | 166 |
| A.3 Calcul des séquents classiques unilatéraux LK ^u | 167 |
| A.4 Variante réversible LK ^{ur} | 168 |
| | |
| Annexe B Autres calculs des séquents linéaires | 169 |
| B.1 Calcul des séquents linéaires intuitionnistes ILL | 169 |
| B.2 Calcul des séquents linéaires unilatéraux LL ^u | 170 |

| | | |
|--------------------|--|------------|
| Chapitre IV | Syntaxe et sémantique de la logique linéaire | 81 |
| IV.1 | Définition du calcul des séquents linéaires | 82 |
| IV.1.1 | Les formules de logique linéaire | 82 |
| IV.1.2 | La notion de séquent | 83 |
| IV.1.3 | La notion de règle | 84 |
| IV.1.4 | Le groupe identité | 85 |
| IV.1.5 | Le groupe structurel | 85 |
| IV.1.6 | Le groupe logique | 86 |
| IV.1.7 | Les preuves | 89 |
| IV.1.8 | Quelques conventions pour abréger les preuves | 90 |
| IV.2 | Propriétés du calcul des séquents linéaires | 91 |
| IV.2.1 | Élimination des coupures | 91 |
| IV.2.2 | Réversibilité de règles | 94 |
| IV.2.3 | Résultats de complexité | 96 |
| IV.2.4 | Deux critères de prouvabilité dans le fragment multiplicatif | 97 |
| IV.2.5 | Un théorème de finitude important | 99 |
| IV.3 | Sémantique des phases | 103 |
| IV.3.1 | Rappels sur la sémantique des propositions classiques | 103 |
| IV.3.2 | Les modèles de phases | 106 |
| IV.3.3 | Interprétations géométriques pour l'orthogonalité | 110 |
| IV.3.4 | Cohérence et complétude avec le calcul des séquents | 113 |
| Chapitre V | Traduction logique des réseaux de Petri | 115 |
| V.1 | Rappels sur la théorie des réseaux de Petri | 117 |
| V.1.1 | Définitions algébriques fondamentales | 117 |
| V.1.2 | Représentation graphique et interprétation | 118 |
| V.1.3 | Conception comme un système de réécriture | 120 |
| V.1.4 | Accessibilité entre marquages dans un réseau | 121 |
| V.1.5 | Caractérisation d'une séquence de transitions | 122 |
| V.2 | Étude technique et critique des traductions proposées | 124 |
| V.2.1 | Traduction en une théorie linéaire tensorielle | 125 |
| V.2.2 | Traduction en une formule multiplicative-exponentielle | 131 |
| V.2.3 | Traduction comme un modèle pour la logique linéaire | 138 |
| V.3 | Une traduction modulaire | 142 |
| V.3.1 | Principes de traduction | 142 |
| V.3.2 | Traduction des éléments fondamentaux | 144 |
| V.3.3 | Traduction de l'accessibilité par séquence | 147 |

Dans cette thèse, nous étudions d’abord les aspects concrets de la logique linéaire. Nous montrons qu’en dégageant pour la première fois les notions primitives de cette logique, nous pouvons proposer une interprétation simple aux connecteurs réputés difficiles. Dès lors, nous développons également de manière systématique l’interprétation des principales propriétés entre connecteurs linéaires. À la lumière de cette compréhension originale, nous établissons les bases d’une nouvelle méthode de traduction des réseaux de Petri en logique linéaire, et nous aboutissons à une description logique beaucoup plus fine des relations d’accessibilité entre marquages.

Préalablement, nous détaillons dans ce chapitre la problématique de la formalisation logique du fonctionnement des réseaux de Petri. Nous introduisons aussi les grands principes de la logique linéaire.

1.1 Fondements de notre problématique

L’analyse du fonctionnement des réseaux de Petri peut poser des questions qui paraissent simples dans leurs formulations. Pour un réseau et son marquage initial donnés, on demande par exemple :

- est-il possible d’atteindre tel marquage?
- est-t-il nécessaire de passer par tel marquage pour atteindre tel autre?
- quelles sont les causes de non accessibilité de tel marquage?

Ces questions trouvent leurs réponses principalement par des calculs d’arithmétique souvent difficiles. Mais elles sont aussi, dans une part importante, du ressort de la logique ; renvoient à cette discipline les termes *possible*, *nécessaire*, *causes*. Là se dessine notre problématique : comment formuler des raisonnements sur le fonctionnement des réseaux de Petri, afin d’apporter des réponses logiques à ces questions ?

Raisonnement sur le fonctionnement d’un réseau de Petri passe par une étape primordiale de *formalisation* : avant tout, nous devons décrire les marquages du réseau — ils sont au premier plan des questions ci-dessus — par des éléments de logique formelle. Or la panoplie de la logique est très limitée : on a des connecteurs et des propositions, ces dernières pouvant éventuellement se décomposer en prédicats et quantificateurs. A priori, la solution la plus naturelle consisterait à décrire les marquages par des propositions, afin d’obtenir des relations purement logiques entre les marquages, en particulier que l’un est une *conséquence* d’un autre si et seulement si, dans le même sens, ces deux marquages sont en relation d’accessibilité. Bref, une formalisation logique des réseaux de Petri viserait à exprimer la relation d’accessibilité entre des marquages comme une *implication* entre des propositions décrivant ces marquages.

Toutefois, cette vue se heurte à un obstacle. Considérons le cas de fonctionnement le plus élémentaire : celui de l’accessibilité par franchissement d’une seule transition, que définit directement la règle de fonctionnement des réseaux de Petri. En cherchant l’aspect logique de cette dernière, nous pouvons dire que :

- une transition est franchissable *si* le marquage courant est supérieur au marquage d’entrée de la transition ;

Chapitre I

Introduction : logique et réseaux de Petri

Les réseaux de Petri sont de plus en plus utilisés pour spécifier et modéliser des systèmes industriels comme les ateliers de production, les protocoles de communication, et plus largement les systèmes à événements discrets. Les raisons de ce succès sont multiples : outre leur pouvoir d'expression du parallélisme et de la synchronisation entre processus, les réseaux de Petri allient une représentation graphique simple à une théorie mathématique riche. Cependant, la règle qui définit le fonctionnement des réseaux impose des restrictions importantes de modélisation — par exemple, l'impossibilité du test à zéro d'une variable — et révèle dans la pratique des problèmes complexes d'interprétation, notamment en présence de boucles élémentaires. Les extensions temporelles et stochastiques de cette règle sont également la source de difficultés théoriques.

Face à ces difficultés, il nous semble important d'approfondir l'étude des aspects fondamentaux du fonctionnement des réseaux de Petri. Justement, sous l'angle de la logique, des perspectives s'ouvrent depuis une dizaine d'années, avec l'avènement de la logique linéaire. Comme la théorie des réseaux de Petri, cette logique met en avant la notion de ressource et permet de représenter naturellement les changements d'état par des implications. Néanmoins, les approches proposées jusqu'à présent pour formaliser le fonctionnement des réseaux de Petri en logique linéaire se heurtent à des difficultés d'expressivité. À notre connaissance, seule la relation générale d'accessibilité entre deux marquages d'un réseau a été traduite par une expression logique simple.

Par ailleurs, raisonner en logique linéaire n'est pas une chose aisée. En particulier, le sens des connecteurs *nil* et *par* reste obscur : peu d'exemples, sinon aucun, sont proposées pour les illustrer. Le même constat vaut pour plusieurs propriétés remarquables des connecteurs linéaires. Plus généralement, l'interprétation concrète homogène et systématique de ces connecteurs semble actuellement faire défaut.

bourg en 1979 et intitulé *Elements of general net theory* [36], consacrait une section de vingt pages à ce sujet, faisant référence à un rapport technique de C. A. PETRI, *Interpretation of net theory*, publié en 1975. Nous estimons cependant que l'approche développée dans cette section ne répond pas à notre problématique. Expliquons. Les auteurs proposent d'abord d'analyser par la logique propositionnelle les systèmes conditions/événements, lesquels constituent une classe très particulière de réseaux de Petri dont les marquages peuvent être interprétés par des variables booléennes. Dans le but d'identifier des *assertions valides* relatives au système analysé, ils introduisent la notion de « *valeurs de vérités changeantes* », mettant en garde le lecteur sur les doutes (à notre avis, fondés) que ce dernier pourrait éprouver :

The reader might get the impression that net theory is just the result of adding to logic an appropriate notion of change. This, however, would not reflect the historical truth; rather, the basic notions of net theory are chosen in such way that logic finds its place in it in a natural way.

Ensuite, les auteurs s'attachent à étendre cette approche aux systèmes places/transitions (qui diffèrent des systèmes conditions/événements par leurs marquages numériques), puis à reprendre leur formalisation d'une part en logique classique du premier ordre, d'autre part en logique modale. En définitive, cette méthode s'apparente à du « *model checking* », et comme nous l'avons dit, elle nécessite avant toute analyse logique l'énumération exhaustive des marquages accessibles du réseau — opération lourde que l'on cherche autant que possible à éviter.

Dans un autre registre, évoquons les travaux de T. MURATA, D. ZANG et G. PETERKA, publiés en 1988 et 1989, sur l'interprétation des programmes logiques par réseaux de Petri prédicats/transitions [60, 62]. Leur problématique est en quelque sorte réciproque à la nôtre, puisqu'ils cherchent à modéliser par des réseaux de Petri des clauses de Horn, qui sont une forme particulière de propositions logiques adoptée dans des langages comme *Prolog*. En fait, les résultats de ces travaux montrent indirectement les limitations de la logique classique pour décrire le fonctionnement des réseaux. En effet, les réseaux obtenus contiennent systématiquement des transitions sources, qui rendent les marquages non bornés. Du coup, le problème de la suppression des jetons consommés par franchissement disparaît derrière l'infinité potentielle de ces derniers. Réciproquement, nous observons ceci : la logique classique ne peut représenter que le fonctionnement transitoire de réseaux à places toutes non bornées, par la propagation de jetons dans les places encore vides.

La consommation des jetons étant un aspect primordial du fonctionnement des réseaux de Petri, s'en affranchir par hypothèse serait évidemment incompatible avec notre problématique. De plus, le champ d'application auquel nous destinons nos travaux (systèmes de production, etc.) sort des limites des réseaux non bornés. Le plus souvent, les modèles de ces systèmes sont finis (du moins, certaines parties critiques) et ont un fonctionnement cyclique, ce qui suppose une non-accumulation de jetons à chaque cycle.

1.3 Avènement de la logique linéaire

Nous l'avons vu, l'obstacle à la représentation du changement en logique classique, c'est le principe de pérennité de la vérité. De nombreux chercheurs, notamment en intelligence

- *si* une transition est franchissable, *alors* son franchissement produit un nouveau marquage qui est égal au marquage courant moins le marquage d'entrée plus le marquage de sortie de la transition.

Ici, l'emploi du connecteur *si... alors...* suscite bel et bien l'idée que l'accessibilité par franchissement d'une transition sous-tend une implication entre deux propositions qui décriraient respectivement les marquages de départ et d'arrivée. Mais en aucune façon une proposition conditionnelle classique ne peut exprimer une révision sur d'autres propositions. Si le marquage courant est posé en prémisse pour déduire un nouveau marquage, il est absolument *illogique* de nier ensuite cette prémisse tout en affirmant sa conclusion. On touche ici l'un des principes primitifs de la logique classique : *la vérité est pérenne*. L'obstacle est de taille. Même une représentation en logique modale — et donc a fortiori en logique temporelle — ne peut que contourner la difficulté, sans véritablement la dépasser. En effet, si l'existence posée de différents « mondes » autorise la révision de propositions d'un monde à l'autre, l'approche reste incompatible avec une représentation *propositionnelle* de cette révision. Le passage entre mondes n'est pas exprimé par une implication, c'est une donnée extra-logique, à savoir un arc dans un graphe dont les sommets sont les différents mondes. Une telle représentation ne peut prétendre capturer l'aspect logique du changement de marquages dans un réseau de Petri.

Cherchons alors recours dans les bases de la *théorie des automates*, puisqu'un réseau de Petri n'est jamais qu'un automate d'un type particulier. Par réduction, nous en venons à examiner la définition d'une *machine de Turing* [74, 31, 75]. Or, parmi les éléments indispensables à cette définition figure une table qui explicite les possibilités de changements de configuration de la machine, sans référer à une quelconque notion de logique. Une telle donnée est analogue à celle des transitions d'un réseau de Petri. En fait, selon cette réduction, notre problématique rejoint celle de la représentation logique du *changement* en général, qui concerne les fondements de bien d'autres disciplines scientifiques. Par exemple, en algorithmique, on se pose des questions similaires vis-à-vis du fonctionnement des programmes ; idem en intelligence artificielle, avec la mise à jour dans une base de connaissances ; etc. Cependant, notre problématique a la particularité d'être relative à des questions décidables comme l'accessibilité entre marquages ou la vivacité des transitions [9, 65]. A contrario, le fonctionnement d'un programme relève de problèmes souvent indécidables, comme par exemple celui de savoir si une variable peut ou non atteindre une valeur donnée (qui revient à celui de la terminaison d'une machine de Turing).

En résumé, notre problématique concerne la recherche d'une formalisation purement logique de changements d'états d'un système, changements caractérisés par des questions décidables. Cependant, elle n'est ni du ressort de la logique classique, à cause du principe de pérennité de la vérité, ni de celui de la logique modale qui requiert préalablement une représentation structurée (au moins partiellement ordonnée) des états du système.

I.2 Tentatives de formalisation logique des réseaux de Petri

En dépit de l'obstacle que nous avons évoqué, la volonté d'établir des liens entre la logique et les réseaux de Petri persiste depuis longtemps. Ainsi, le cours présenté à Ham-

d'une autre déduction. Exprimant ce principe de consommation/production, l'*implication linéaire*, que l'on représente par le symbole \multimap , permet de formaliser d'une façon très simple un raisonnement tel que :

pour cinq francs j'ai un paquet de Gauloises $[A \multimap B]$
 (or) j'ai cinq francs $[A]$
 (done) j'ai un paquet de Gauloises $[B]$

Formulé en logique classique, ce raisonnement ne serait pas réaliste car les valeurs de vérité des propositions classiques ne sont pas révocables. Si nous considérons la première prémisse comme une implication classique $A \Rightarrow B$, la déduction de la conclusion A ne changerait rien à la vérité de la prémisse B . Autrement dit, obtenir des cigarettes ne coûterait rien !

La mise en œuvre syntaxique du principe de consommation/production des propositions dans les déductions ne repose pas simplement sur une redéfinition ad hoc de l'implication : elle nécessite une refonte intégrale du système des connecteurs classiques. Une des principales raisons de cette nécessité est que l'idée intuitive de conjonction de ressources (par exemple, avoir cinq francs *et* un paquet de cigarettes) ne vérifie pas une propriété fondamentale de la conjonction classique : l'*idempotence*. Cette propriété est le fait que toute proposition A est équivalente à sa conjonction avec elle-même A *et* A . Reprenons l'exemple des cigarettes et supposons que l'acheteur ait deux pièces de cinq francs. Pour exprimer ce fait d'une façon purement propositionnelle, c'est-à-dire sans introduire une variable numérique, il faudrait que la conjonction :

j'ai cinq francs et j'ai cinq francs

ne se réduise pas à *j'ai cinq francs*, mais à *j'ai dix francs*. C'est pourquoi le connecteur classique *et* est remplacé en logique linéaire par le connecteur *fois*, appelé également *conjonction multiplicative*. Cette conjonction possède toutes les propriétés syntaxiques de son analogue classique (associativité, commutativité, élément neutre) sauf l'idempotence. Ainsi, la proposition :

j'ai cinq francs fois j'ai cinq francs

exprime le fait qu'une pièce de cinq francs est deux fois disponible. De la même façon, le connecteur classique *ou* est remplacé en logique linéaire par un autre connecteur non idempotent appelé *par*, ou encore *disjonction multiplicative*.

En fait, le seul rejet de l'idempotence de la conjonction suffit à instaurer le principe de consommation/production des propositions comme des ressources. Sachant que les connecteurs classiques entretiennent des relations mutuelles, toute modification des propriétés de l'un affecte celles des autres. Par exemple, la conjonction et la disjonction classique sont en rapport de dualité par négation : la forme *non* (A *ou* B) est équivalente à (*non* A) *et* (*non* B). En remplaçant la conjonction classique *et* par la conjonction multiplicative *fois*, on remplace implicitement la disjonction classique *ou* par la disjonction multiplicative *par*. Ensuite, la proposition conditionnelle classique *si* A *alors* B , qui est équivalente à la forme (*non* A) *ou* B , change à son tour. Avec de plus le remplacement de la négation classique *non* par la négation linéaire nommée *nil*, on aboutit à l'implication

artificielle, ont tenté de s'en affranchir, pour mettre au point des logiques « non monotones ». Mais il nous semble que leurs travaux n'ont pas mesuré pas toutes les conséquences de la révolution d'un tel principe, sur lequel repose non seulement la notion d'inférence par transmission de la vérité sans contradiction, mais également la définition axiomatique des connecteurs. Reconnaissons que proposer des concepts alternatifs cohérents relevait d'une avancée considérable. Elle revient au logicien et mathématicien Jean-Yves GIRARD¹, qui a fondé il y a dix ans la *logique linéaire*. Signalons d'ailleurs, comme l'explique GIRARD lui-même, que son objectif n'était pas la définition d'une logique non monotone. En fait, le cheminement a été complexe, et il faut une bonne connaissance des développements récents en logique pour le comprendre. Proposons un résumé simpliste (cf. [33] pour les détails) en fixant comme point de départ les travaux sur les domaines de Scott, une sémantique algébrique des preuves en logique *intuitionniste* — logique fondée au début du siècle, qui se démarque de la logique classique notamment par le rejet du principe du tiers exclu [52]. En cherchant à simplifier les domaines de Scott, GIRARD a d'abord réussi à décomposer la définition sémantique des connecteurs intuitionnistes en opérations plus élémentaires : les connecteurs *linéaires*. C'est seulement après avoir établi leur syntaxe dans le *calcul des séquents*, un formalisme proposé dans les années trente, qu'il a perçu le sens dynamique de ces nouveaux connecteurs, à savoir qu'ils permettent de formuler des raisonnements en utilisant les propositions comme des ressources. L'article fondateur, intitulé *Linear Logic*, a été publié dans la revue *Theoretical Computer Science* en 1987². Conférences et séminaires aidant, c'est plus dans le domaine de l'informatique théorique que dans celui de la logique pure que l'effervescence a gagné. La recherche sur la logique linéaire s'est beaucoup développée grâce à la perspective d'applications, parmi lesquelles citons la programmation fonctionnelle et le lambda-calcul typé, la programmation logique, les modèles du parallélisme, etc. Avec déjà plusieurs centaines de publications (cf. le fichier [12]), la logique linéaire constitue aujourd'hui un thème en plein essor.

Introduisons maintenant les principes de la logique linéaire, en nous appuyant sur les explications de GIRARD publiées en 1990 dans un article de la revue *Pour la science* [26]. Au départ, il y a une idée nouvelle :

[...] focaliser l'attention sur les propositions qui « s'usent quand on s'en sert », par opposition aux vérités universelles et gratuites des logiques classique et intuitionniste.

Plus précisément, les règles de syntaxe de la logique linéaire diffèrent de celles de la logique classique, de telle sorte que les propositions sont gérées comme des *choses périssables*, des *ressources* : une déduction linéaire *consomme* les propositions qu'elle prend pour prémisses, et *produit* les propositions qui forment sa conclusion. Cela signifie que pour réutiliser une prémisses qui vient d'être consommée, soit il aurait fallu initialement poser deux fois cette prémisses, soit il faut préalablement la produire à nouveau, par le biais

1. Directeur de recherche au CNRS, il dirige actuellement l'équipe *Logique de la programmation* à l'*Institut de Mathématiques de Luminy*.

2. L'éditeur, Maurice NIVAT, précisait en bas de la page de titre : « *Because of its length and novelty this paper has not been subjected to the normal process of refereeing. The editor is prepared to share with the author any criticism that eventually will be expressed concerning this work.* » Autrement dit, il avait jugé ce travail révolutionnaire, mais particulièrement difficile à comprendre, même pour le comité de lecture de la prestigieuse revue.

En définitive, la logique linéaire est bien *non monotone*, dans la mesure où une déduction provoque un changement : *avant*, nous avons les prémisses mais pas les conclusions, et *après*, les conclusions mais pas les prémisses (sauf dans le cas de propositions exponentielles). Et surtout, à la différence des tentatives précédentes, il s'agit bien d'une *logique*, qui s'inscrit dans la plus pure tradition de cette discipline, en distinguant au moins une syntaxe et une sémantique en relation par des théorèmes de cohérence et de complétude interposés [25, 30, 33].

1.4 Logique linéaire et théorie des réseaux de Petri

Parmi les modèles du parallélisme pouvant bénéficier des avancées de la logique linéaire figure en bonne place les réseaux de Petri. Les liens entre les deux formalismes ont été ébauchés dès 1987 — l'année même de parution de l'article fondateur [23] — dans un rapport technique d'Andrea ASPERTI [4], alors doctorant à l'université de Pise. Ses travaux ont été repris et approfondis par Carl GUNTER et son étudiant Vijay GEHLOT, de l'université de Pennsylvanie, qui ont présenté une synthèse de leurs recherches en 1989 lors de la conférence internationale sur la théorie et les applications des réseaux de Petri [21]. Autre pionnière, Carolyn BROWN, de l'université d'Edimbourg, a achevé en 1990 sa thèse de doctorat sur les relations entre la logique linéaire et les réseaux de Petri, par l'intermédiaire de la théorie des catégories. Ses travaux ont été poursuivis par José MEGUER et son étudiant Narciso MARTÍ-OLIET, du *Stanford Research Institute*, qui en ont publié une synthèse en 1991 [58]. Les danois Glynn WINSKEL et Uffe ENGBERG, de l'université de Aarhus, ont également suivi cette approche faisant référence à la théorie des catégories, mais avec une autre interprétation [15, 16, 17]. Dans la même veine, citons Joan LILIUS, de l'université de technologie d'Helsinki, qui a publié en 1992 un article sur les relations entre les réseaux de Petri de haut-niveau et la logique linéaire, lors de la conférence internationale sur la théorie et les applications des réseaux de Petri [53]. Citons également l'article de Makoto TANABE, de l'université de Kyoto, sur les liens entre les réseaux temporisés et la logique linéaire temporelle, présenté à l'édition toute récente de cette conférence [71]. À cette liste, ajoutons enfin les travaux de Iliano CERVESATO, de l'université de Turin, sur les liens entre la logique linéaire et les réseaux de Petri par l'intermédiaire des systèmes de réécriture [13, 14], et ceux de Max KANOVICH, de l'université de Moscou, qui traite des liens entre la logique linéaire, les réseaux de Petri, les programmes de Horn, et les jeux de vecteurs [43].

L'idée essentielle qui se dégage de toutes ces publications est la suivante : on peut traduire l'accessibilité dans un réseau de Petri d'un marquage m' à partir d'un marquage m par la *prouvabilité d'un séquent* qui exprime en logique linéaire ces deux marquages et la structure du réseau. Décrivons brièvement les principes de cette traduction.

- À chaque place a du réseau, on associe un atome propositionnel A , qui signifie intuitivement : *il y a un jeton dans cette place*.
- On exprime un marquage, autrement dit un cumul de jetons, par une conjonction multiplicative sur les atomes associés aux places : si a et b sont deux places distinctes, alors la formule $M = A \text{ fois } A \text{ fois } B$ exprime le marquage de deux jetons

linéaire A entraîne B , dont une forme équivalente est $(nil A) par B$. Tous ces nouveaux connecteurs vérifient certaines propriétés, telles que la dualité entre la conjonction *fois* et la disjonction *par*, dont l'analogie avec des propriétés classiques est manifeste. Mais au delà des analogies, le rejet de l'idempotence a considérablement réduit les possibilités de déduction. Par exemple, le schéma :

$$(A \text{ implique } B) \text{ or } A \text{ donc } (A \text{ et } B)$$

est correct en logique classique, puisque la conjonction *et* est idempotente. A contrario, comme la conjonction *fois* ne l'est pas, le schéma :

$$(A \text{ entraîne } B) \text{ or } A \text{ donc } (A \text{ fois } B)$$

n'est pas correct en logique linéaire, ce qui traduit implicitement la consommation de la prémisse A dans la déduction $(A \text{ entraîne } B) \text{ or } A \text{ donc } B$ qui, elle, est correcte. De plus, pour produire correctement la conclusion $A \text{ fois } B$ dans le schéma de déduction ci-dessus, il suffit de poser la prémisse $A \text{ fois } A$ au lieu de A , ce qui se conçoit bien en termes concrets : pour avoir un paquet de cigarettes et cinq francs après son achat, il suffit d'avoir deux fois cinq francs avant.

Approfondissons encore. Le connecteur *fois* exprime une conjonction *bilinéaire* : de $A \text{ entraîne } B$ et de $C \text{ entraîne } D$, on déduit $(A \text{ fois } C) \text{ entraîne } (B \text{ fois } D)$. On peut également concevoir une forme *linéaire* de conjonction. C'est le connecteur *avec*, aussi appelé *conjonction additive*, tel que de $A \text{ entraîne } B$ et $A \text{ entraîne } C$, on déduit :

$$A \text{ entraîne } (B \text{ avec } C)$$

Pour comprendre le sens de cette conjonction, substituons par exemple à A , B , C , respectivement les propositions *j'ai cinq francs*, *j'ai un paquet de Gauloises*, *j'ai un paquet de Gitanes*. Alors le raisonnement formel précédent exprime qu'avec cinq francs, on peut acheter l'un ou l'autre des deux paquets, au choix, mais pas les deux. Autrement dit, le connecteur *avec* est idempotent, mais dans un contexte de linéarité, car on ne peut pas déduire $(A \text{ fois } A) \text{ entraîne } (B \text{ avec } C)$. Il sous-tend la notion d'alternative maîtrisée entre des ressources. Par dualité, on peut aussi concevoir une *disjonction additive* : le connecteur nommé *plus*, qui sous-tend la notion d'alternative non maîtrisée (c'est-à-dire sans avoir le choix) entre des ressources.

C'est n'est pas tout : GIRARD a aussi introduit deux autres connecteurs unaires, dits *exponentiels* et appelés *bien sûr* et *pourquoi pas*, qui octroient l'idempotence à la formule à laquelle ils sont appliqués, respectivement par rapport à la conjonction *fois* et la disjonction *par*. Ainsi, la formule *bien sûr* A est équivalente à $(\text{bien sûr } A) \text{ fois } (\text{bien sûr } A)$ et signifie : « A autant de fois que l'on veut ». Naturellement, il y a un lien tangible entre une formule exponentielle en logique linéaire et une proposition au sens classique. Dans le schéma de déduction :

$$\text{bien sûr } (A \text{ entraîne } B) \text{ or } (\text{bien sûr } A) \text{ donc } (\text{bien sûr } B)$$

on peut considérer que la proposition *bien sûr* A n'est pas consommée, au sens où l'on aurait autant pu conclure $(\text{bien sûr } A) \text{ fois } (\text{bien sûr } B)$. La logique classique apparaît donc comme le cas limite en logique linéaire où toutes les formules sont exponentielles.³

3. Toutefois, l'expression des connecteurs classiques avec les connecteurs linéaires est techniquement difficile. En revanche, la traduction est plus facile à partir des connecteurs intuitionnistes.

seules trois [21, 53, 71] ont été explicitement destinées à la communauté « réseaux de Petri ». De plus, ces trois publications ont toutes supposé comme prérequis le vocabulaire et les connaissances techniques indispensables pour comprendre la logique linéaire, notamment le calcul des séquents, dont GIRARD reconnaît qu'il est généralement inconnu des informaticiens [24]. Pour donner la mesure de la difficulté de compréhension résultante, prenons l'article [21], où les auteurs expliquent la correspondance entre la parallélisation d'une séquence de franchissement d'un réseau et la *réduction des coupures* d'une preuve en calcul des séquents linéaire. Malheureusement, ils n'indiquent ni en quoi consiste une preuve, ni ce qu'ils appellent la réduction des coupures — il s'agit en fait d'une variante ad hoc au procédé d'*élimination des coupures généralisée*, lequel est un aspect vraiment technique du calcul des séquents, dont le prérequis nous semble démesuré. Quant aux articles [53, 71], ils abordent des aspects très avancés des relations entre la logique linéaire et les réseaux de Petri ; nous les jugeons encore plus inaccessibles.

Enfin, nous estimons que toutes les publications sur les liens entre les réseaux de Petri et la logique linéaire n'ont pas présenté la manière la plus simple d'aborder le sujet. Primo, les auteurs ont souvent voulu aller au résultat le plus général sur l'accessibilité entre de deux marquages, sans en développer progressivement les étapes : cas à une seule transition, cas où la séquence est donnée, etc. Secundo, l'introduction d'un troisième formalisme (théorie des catégories, systèmes de réécriture, ou encore programmes de Horn) a considérablement alourdi le jeu de notations que le lecteur devait assimiler, sans que l'intérêt en soit vraiment expliqué. Tertio, certaines questions fondamentales n'ont, à notre connaissance, jamais été posées. Considérons les deux réseaux de Petri de la figure I.1 et associons à leur unique place a l'atome propositionnel de logique linéaire A , avec l'interprétation : *il y a un jeton dans a* . Intuitivement, des marquages accessibles du réseau

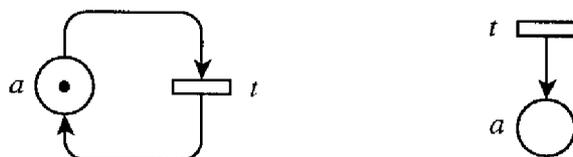


Figure I.1

de gauche, nous pouvons dire qu'il y a toujours un jeton dans la place a . Cet énoncé est incontestablement une proposition de logique classique, puisque vraie « éternellement ». Pourtant, en suivant les principes de traductions évoqués précédemment, donc en posant les prémisses A et *bien sûr* (A entraîne A), nous ne pouvons pas déduire linéairement *bien sûr* A , alors que le connecteur exponentiel *bien sûr* est censé rendre à la proposition de logique linéaire A l'idempotence qui lui manque pour être classique. Regardons maintenant le réseau de droite. De ses marquages accessibles, nous ne pouvons pas dire qu'il y a toujours un jeton dans la place a : il peut y en avoir zéro, un, deux, etc. Pourtant son unique transition s'écrit *bien sûr* A . Cet exemple montre la complexité des liens entre les propositions classiques et linéaires. Manifestement, la formulation en langage naturel de la proposition A comme un énoncé de vérité induit en erreur, d'où finalement la question : comment interpréter concrètement un atome associé à une place d'un réseau ?

dans la place a et un dans b .

- Une transition t étant une relation de consommation/production entre deux marquages, on l'exprime par une implication M_e entraîne M_s où les formules M_e et M_s correspondent respectivement aux marquages d'entrée et de sortie de t .
- Comme de plus une transition constitue un élément structurel du réseau (contrairement à un marquage qui est contingent), on applique le connecteur *bien sûr* pour exprimer que la transition t n'est pas susceptible d'être consommée : on écrit donc *bien sûr* (M_e entraîne M_s).

En suivant cette approche à quelques détails formels près, ASPERTI a établi la correspondance suivante : un marquage m' est accessible depuis un marquage de formule m si et seulement en posant comme prémisses M et toutes les formules des transitions du réseau, on peut déduire la conclusion M' .

Bien que ce résultat paraisse tisser un lien fondamental entre la logique linéaire et les réseaux de Petri, GIRARD se montre déçu sur ce thème d'application. Ainsi écrit-il : « [...] après un départ tapageur, le sujet n'a jamais décollé » [33]. Effectivement, une fois établie la correspondance entre l'accessibilité des marquages et la prouvabilité des séquents via la traduction décrite ci-dessus, la recherche sur les liens entre la logique linéaire et les réseaux de Petri semble avoir peu progressé. La plupart des logiciens justifient leur faible intérêt pour la théorie des réseaux de Petri par son étroitesse en comparaison avec la logique linéaire : selon leurs dires, tout au plus pourrait-on en tirer quelques idées de démonstrations de théorèmes de décidabilité pour certains fragments de la logique linéaire... Quant aux théoriciens des réseaux de Petri, ils jugent peu utile la logique linéaire, tant qu'elle ne leur fournit pas des algorithmes plus efficaces pour analyser les grandes propriétés des réseaux. Mais n'est-t-il pas encore tôt pour abandonner un thème de recherche qui, ne serait-ce qu'en France, ne s'est pas encore développé du tout ? Et faut-il réduire l'enrichissement mutuel de deux formalismes à des théorèmes de décidabilité et des algorithmes efficaces ? Qu'en est-il de l'*expressivité* que peuvent s'apporter l'un et l'autre ? Objectons d'une part aux logiciens que le fonctionnement des réseaux de Petri apporte une interprétation formelle très intuitive à certaines déductions en logique linéaire. De plus, si l'on conçoit aisément la notion d'état d'un réseau (un ensemble de variables entières), il est naturel de s'interroger sur son extension en logique linéaire. Pourtant, à notre connaissance, cet aspect n'a fait l'objet d'aucune publication jusqu'à présent, ne serait-ce que pour évaluer la difficulté du problème. Objectons d'autre part aux théoriciens des réseaux de Petri que la logique linéaire apparaît comme *le* formalisme qui manquait pour exprimer différents aspects fondamentaux du fonctionnement. De toute évidence, il y a des applications sérieuses à la clef ; pensons par exemple aux questions de diagnostic de dysfonctionnement des systèmes. En engageant des recherches dans cette direction [63], nous avons montré que la logique linéaire se révèle adéquate pour formuler des raisonnements formels sur le bon ou mauvais fonctionnement de leurs modèles réseaux de Petri, raisonnements qui sont indispensables à tout diagnostic prédictif ou explicatif.

Remarquons aussi, sous un angle didactique, que s'il y a eu abondance de publications sur les liens entre la logique linéaire et les réseaux de Petri (surtout de 1989 à 1991),

Le chapitre III s'appuie sur ces nouvelles notions pour développer une interprétation concrète des connecteurs linéaires, vus comme des opérateurs sur des ressources. Nous partirons de leurs propriétés syntaxiques, que nous exprimerons dans le calcul des séquents, après avoir introduit les notions élémentaires de ce formalisme, et expliqué comment s'y effectue le passage de la logique classique à la logique linéaire. Chaque connecteur fera individuellement l'objet d'un long développement, montrant comment ses propriétés s'accordent avec une interprétation simple et illustrée par des exemples concrets. De plus, nous renforcerons notre approche en examinant les grandes propriétés qui lient formellement les connecteurs : *distributivité* des multiplicatifs sur les additifs, relations de *dualité* conjonction/disjonction, etc.

Le chapitre IV présente mathématiquement la logique linéaire, le but étant de poser les définitions et les résultats techniques qui seront employés au chapitre suivant. S'ajoute également un objectif didactique : expliquer formellement la logique linéaire aux non spécialistes de la logique et de l'informatique théorique. Nous exposerons d'abord la *syntaxe* dans le calcul des séquents, son système de règles et la méthode de construction de preuves, puis ses grands théorèmes, notamment la redondance de la règle dite de coupure, la complexité des principaux fragments du calcul, deux critères de prouvabilité des séquents du fragment multiplicatif, et un théorème de finitude permettant de réduire dans les cas simples un séquent prouvable exponentiel-multiplicatif à un séquent prouvable multiplicatif paramétré par des entiers naturels. Ensuite, nous exposerons une sémantique de logique linéaire, dite *sémantique des phases*. Nous ferons un détour par la sémantique de la logique classique pour rappeler les notions fondamentales qu'on retrouve en sémantique des phases, en particulier celles de modèle, de satisfaction et de validité. Nous verrons alors que contrairement aux valeurs de vérité classiques qui sont réduites à deux, les valeurs que peuvent prendre les formules de logique linéaire ne sont même pas dénombrables : ce sont des parties d'un monoïde commutatif qui n'est pas nécessairement fini. Bien que les équations algébriques de la sémantique de phases fassent appel à beaucoup d'abstractions, nous montrerons de façon inédite que ses concepts clés ont une interprétation géométrique simple. Pour finir nous évoquerons les théorèmes qui établissent que la sémantique des phases est cohérente et complète par rapport au calcul des séquents, autrement dit que tout séquent est syntaxiquement prouvable s'il est sémantiquement valide, et réciproquement.

Le chapitre V peut alors aborder la traduction des réseaux de Petri en logique linéaire, avec le bagage mathématique adéquat. Pour commencer, nous rappellerons les définitions de base de la théorie des réseaux de Petri, ne serait-ce que pour fixer sans ambiguïté la classe des réseaux concernés, et pour poser les notations que nous utiliserons. Nous nous efforcerons de dégager la définition strictement mathématique du fonctionnement, via des relations binaires, de celle habituellement formulée comme changement d'état d'un automate, qui contient déjà une part d'interprétation. Ensuite, nous procéderons à une étude technique et critique exhaustive des travaux déjà publiés sur les liens entre les réseaux de Petri et la logique linéaire. Nous distinguerons trois grandes approches, dont nous exposerons les principes, les résultats et les limites en les mettant en œuvre sur des exemples simples. Alors nous proposerons une approche plus modulaire, en reprenant les principes de traduction des marquages par des conjonctions multiplicatives et des transitions par

I.5 Méthode et plan de cette thèse

Pour aborder notre problématique, nous fixons un objectif précis, qui diffère de celui des approches précédentes. Nous voulons utiliser la logique linéaire comme un langage de description du fonctionnement des réseaux de Petri, en vue de développer des analyses de ce fonctionnement. Nous considérerons donc la logique linéaire comme un *outil*, et non comme un objet de recherche. Cela dit, la connaissance d'un outil est indispensable lorsque l'on souhaite en faire un usage efficace. C'est pourquoi une importante partie de notre travail sera consacrée à l'étude de cet outil, mais seulement pour son utilisation : notre exposé limitera au minimum les éléments théoriques nécessaires à la compréhension de la logique linéaire, et mettra au premier plan son interprétation concrète, aspect qui a été très peu développé jusqu'à présent. Ce faisant, nous espérons aussi contribuer à une plus large divulgation de cette nouvelle théorie.

Outre un objectif précis, notre approche réclame des engagements méthodologiques. En premier lieu, nous tâcherons de nous conformer strictement à la logique linéaire telle que l'a définie GIRARD. Proposer des modifications ou des extensions à la fois pertinentes et cohérentes serait assurément présumer de nos compétences en mathématiques. D'ailleurs, depuis l'article fondateur, de la logique linéaire, fort peu de ses notions ont nécessité des retouches, et nombres de ceux qui s'y sont essayés, en particulier sur le choix des notations [73, 6], n'ont pas été suivis. En second lieu, nous reprendrons progressivement des bases du fonctionnement des réseaux de Petri, non seulement afin de comprendre la progression des difficultés de notre approche, mais aussi parce que certains résultats intermédiaires ont parfois une utilité pratique qui échappe aux énoncés généraux. Nous considérerons la classe des réseaux places/transitions à marquages entiers finis sans capacités, qui constitue la base de la théorie ; nous laisserons de côté les systèmes conditions/événements dont les hypothèses restrictives ne présentent a priori aucun intérêt pour notre problématique. Enfin, pour exprimer la formalisation logique du fonctionnement des réseaux de Petri, nous utiliserons les concepts mathématiques aussi élémentaires possibles, car avant d'intercaler un troisième formalisme (en particulier la théorie des catégories), il nous semble d'abord nécessaire de comprendre les liens *directs* entre la logique linéaire et les réseaux de Petri.

Après ce premier chapitre d'introduction, la thèse est organisée en cinq autres chapitres, dont les trois premiers sont consacrés à l'étude de la logique linéaire, le suivant à la traduction logique des réseaux, et le dernier aux conclusions et perspectives. Chacun des chapitres II à V commence par un plan plus détaillé de son contenu.

Le chapitre II décortique l'idée de considérer des vérités « *qui s'usent quand on s'en sert* », sur laquelle GIRARD fonde l'interprétation concrète des connecteurs linéaires. Après avoir montré les difficultés que nous pose cette interprétation, nous chercherons, pour y pallier, à cerner pour la première fois les notions primitives de la logique linéaires. Nous procéderons par analogies avec les notions classiques de proposition, de déduction et de vérité, auxquelles nous ferons correspondre respectivement celles de *ressource*, d'*action* et de *disponibilité*, en soulignant leurs spécificités. Nous montrerons, par exemple, que contrairement à une proposition, une ressource peut se concevoir en plusieurs *exemplaires*, ce qui revient précisément au rejet de l'idempotence de la conjonction. Nous illustrerons notre approche par de nombreux exemples issus d'observations de la vie courante.



des implications, mais en considérant ces dernières comme des ressources, c'est-à-dire sans préfixer nécessairement leurs formules par le connecteur *bien sûr*. C'est là l'idée essentielle qui confère à notre traduction toute son originalité. Nous la justifierons en interprétant la consommation des exemplaires des formules des transitions comme des occurrences de franchissement de ces dernières dans une suite de marquages accessibles. Nous serons alors en mesure de traduire la règle de fonctionnement des réseaux de Petri par un premier théorème établissant l'équivalence entre l'accessibilité directe d'un marquage m' depuis un marquage m par franchissement d'une transition t et la prouvabilité d'un séquent multiplicatif dont les deux prémisses sont les formules M et T traduisant respectivement m et t , et dont la conclusion est la formule M' traduisant m' . Ensuite, nous généraliserons ce résultat par un deuxième théorème dans le cas d'une accessibilité par franchissement d'une séquence de transitions. Nous montrerons que l'existence d'une séquence de franchissements de m à m' d'image commutative σ donnée est équivalente à la prouvabilité d'un séquent multiplicatif dont les prémisses sont, en sus de M , le multi-ensemble indexé par σ des formules des transitions du réseau. Nous terminerons par un troisième théorème d'équivalence entre accessibilité et prouvabilité, concernant le cas général où on ne connaît aucune information sur la séquence de franchissement réalisant cette accessibilité : cette fois, le séquent sera multiplicatif-exponentiel, chaque formule de transition du réseau étant chacune préfixée par le connecteur *bien sûr* qui autorise à la consommer autant de fois que nécessaire. Sans aller au delà de ce résultat (analogue à certains démontrés dans la littérature), notre approche présentera donc la formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri d'une manière nettement plus fine. En progressant par difficultés croissantes des cas d'accessibilité, les démonstrations des théorèmes exhiberont les liens étroits, tant syntaxiques que sémantiques, entre les deux formalismes. En particulier, l'équation fondamentale des réseaux de Petri se révélera être l'expression algébrique d'un corollaire des critères de prouvabilité des séquents multiplicatifs. Notre approche apparaîtra également beaucoup plus naturelle pour la démonstration du troisième théorème, pour deux raisons. D'abord ce théorème sera formulé non pas dans un système syntaxique spécifique comme dans toutes les approches précédentes, mais dans le pur calcul des séquents linéaires. Ensuite, nous montrerons simplement qu'il est une conséquence du théorème de finitude démontré au chapitre précédent, quand ce dernier est directement appliqué au deuxième théorème d'équivalence. Encore une fois, nous récolterons les fruits d'avoir approfondi l'étude de la logique linéaire et d'avoir mené notre traduction en suivant pas à pas la théorie des réseaux de Petri.

Le dernier chapitre dresse les conclusions de ce travail. Nous montrerons en particulier que la traduction en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri en apporte une compréhension plus fondamentale, en reformulant dans un cadre plus large et mieux fondé la traduction en système de réécriture. À partir du théorème traduisant l'accessibilité par une séquence de transitions dont l'image commutative est connue, nous dégagerons les perspectives d'exploitation de l'expressivité des autres connecteurs, qui permettront de formaliser des mécanismes complexes de fonctionnement.

explícite le principe de consommation/production. En dépit de la force de cette analogie, nous constaterons que ces deux notions diffèrent fondamentalement l'une de l'autre, car en consommant des exemplaires de ressources, les actions sont susceptibles d'être mutuellement en relation de *conflit* ; nous montrerons qu'une telle notion n'a pas d'analogie pour les déductions classiques. Puis nous développerons la notion primitive de *disponibilité* des ressources, analogue à celle de vérité des propositions. En fait, plutôt que l'idée intuitive de disponibilité, nous introduirons deux notions duales, celles de *consommabilité* et de *productibilité*, qui correspondent respectivement aux notions duales de vérité et de fausseté. Mais là encore, nous verrons que le principe de consommation/production sous-tend des aspects nouveaux et complexes. D'une part, la notion de *cumul d'exemplaires* de ressources, directement liée aux valeurs de consommabilité et productibilité, peut se concevoir de deux manières : en *série* ou en *parallèle*. D'autre part, les valeurs de consommabilité et de productibilité d'une ressource sont *variables* : elles ne se conçoivent pas sans poser l'existence d'une *dimension temporelle* implicite aux actions. Nous montrerons que tous ces aspects sont absolument étrangers aux valeurs de vérité (binaires et constantes) d'une proposition classique. Pour terminer ce chapitre, nous nous proposerons d'écrire formellement des raisonnements logiques faisant intervenir des ressources, en reprenant l'exemple des cigarettes de GIRARD (cf. section I.3). Nous montrerons, à la lumière des développements précédents, pourquoi toutes nos tentatives de raisonnement dans le cadre de la logique propositionnelle classique sont vouées à l'échec. En nous interdisant systématiquement d'écrire les propositions comme des énoncés de vérité ou de fausseté, nous éviterons l'écueil de raisonner sur des notions qui n'ont pas trait aux ressources. Nous entrerons alors résolument dans le cadre de logique linéaire, que nous concevons comme étant *la logique des ressources*, c'est-à-dire l'ensemble des règles auxquelles obéissent les actions de consommation/production d'exemplaires de ressources, telles que nous les observons.

II.1 Généralités

II.1.1 Questions d'interprétation

Comme nous l'avons souligné au chapitre I, GIRARD a proposé dans un article didactique destiné à un large public [26] une interprétation concrète de la logique linéaire, l'idée maîtresse étant de s'intéresser aux « *vérités qui s'usent quand on s'en sert* », et de « *mettre en avant la notion de ressource* ». Certains auteurs ont ensuite écrit : la logique linéaire est la « *logique des ressources* » [76] ou encore qu'en logique linéaire, « *les propositions sont traitées comme des ressources* » [3]. Si telle est également notre conviction, remarquons qu'elle ressemble sans coïncider tout à fait avec celle de GIRARD — du moins est-ce notre sentiment après une lecture attentive de ses autres publications didactiques.

En effet, dans un article publié en 1995 où il prend position sur l'intelligence artificielle [30], GIRARD expose la logique comme « *science de l'implicite* ». Il précise qu'en logique classique ce sont les valeurs de vérités qui sont implicites, puisque tout raisonnement déductif transmet implicitement la vérité des prémisses à la conclusion. Par analogie, en logique linéaire, « *l'idée centrale est de gérer des ressources limitées, implicites comme il se doit* » [30]. Ainsi, une proposition A apparaît comme un énoncé qui a un *coût*, lequel correspond à ce que dénote l'expression « *les ressources pour A* » employée dans [33]. De

Chapitre II

Notions primitives pour la logique linéaire

Dans ce chapitre, nous définissons les notions primitives pour interpréter concrètement les raisonnements en logique linéaire. Après avoir montré les difficultés que pose l'approche généralement admise, nous distinguons pour leur caractère essentiel les notions de *ressource*, d'*action* et de *disponibilité*, analogues à celles de *proposition*, *déduction* et de *vérité* qui valent pour la logique classique. Nous travaillons au premier plan sur des considérations philosophiques générales et sur des exemples concrets de consommation/production, mais aussi, en arrière plan, sur les grands principes de la logique linéaire, que nous expliciterons au chapitre suivant, quand il s'agira d'en interpréter les connecteurs.

Plan du chapitre

Pour définir la notion de ressource, nous commencerons par rappeler la définition de la notion de proposition classique, dont nous soulignerons le caractère primitif. Puis, n'ayant trouvé dans la littérature aucune définition philosophique au mot *ressource*, nous rappellerons son sens commun dans le langage naturel, sens dont nous dégagerons les aspects conceptuels les plus fondamentaux. Nous poserons alors une définition de la notion de ressource pour la logique, présentant une analogie avec la définition de la notion de proposition mais qui, en s'appuyant explicitement sur les notions de consommation et de production, sous-tend d'importantes différences sémantiques. En particulier, nous remarquerons que la conception d'*exemplaires identiques et multiples* est fondamentale pour les ressources, alors qu'elle n'a aucun sens pour les propositions de la logique classique. Nous prolongerons ensuite cette analogie en développant la notion primitive d'*action* sur des ressources, qui est analogue à celle de déduction sur des propositions, et dont la définition

par ce slogan : « la logique s'occupe d'actions et non pas de situations ». En ce sens, les propositions s'écrivent comme « faire quelque chose » et l'exemple des cigarettes devient :

changer cinq francs en un paquet de Marlboro $[A \multimap B]$
 (or) *dépenser cinq francs* $[A]$
 (donc) *obtenir un paquet de Marlboro* $[B]$.

La négation linéaire est alors présentée selon le principe général qu'une action de type A est une réaction de type $\text{nil } A$. Nous interprétons donc la négation linéaire de la proposition *dépenser cinq francs* par l'action *obtenir cinq francs*.

Malheureusement, l'interprétation des propositions de logique linéaire comme des actions nous pose des problèmes, notamment pour exprimer l'enchaînement de plusieurs actions. Par exemple, imaginons que, après avoir acheté un paquet de Marlboro, le client veuille l'échanger contre un paquet de Camel au même prix. En gardant les notations précédentes, et en notant C la proposition *obtenir un paquet de Camel*, la façon la plus intuitive d'exprimer l'échange serait de poser en prémisse l'action $B \multimap C$, afin de prolonger la première déduction selon le schéma $A, A \multimap B, B \multimap C, \text{ donc } C$. Mais en substituant aux variables A, B, C leurs interprétations respectives comme des actions, nous sommes troublés par une différence entre les deux prémisses $A \multimap B$ et $B \multimap C$. Dans la première, l'antécédent A est une action de modalité *dépenser*, et le succédent B une action de modalité *obtenir*, ce qui respecte la compréhension intuitive d'un échange marchand : on dépense pour obtenir. Dans la seconde au contraire, l'antécédent B n'est pas une action de modalité *dépenser*, comme nous l'attendrions, mais *obtenir*.

Plus généralement, si nous voulons employer la logique linéaire pour raisonner sur des phénomènes concrets de consommation/production, il nous faut une interprétation à la fois homogène et systématique. Or pour le moment, avant de comprendre le sens des connecteurs, des questions d'ordre général nous bloquent :

- entre l'interprétation des propositions comme des vérités qui s'usent quand on s'en sert ou comme des actions, que devons-nous retenir ?
- quelle que soit l'interprétation proposée, comment sont définies mathématiquement ou philosophiquement des notions comme celles de ressource, de coût, d'action ?

Nous allons tenter d'y répondre, en partant de l'idée suivante : la nécessité de révolution des fondements de la logique classique qui a présidé l'invention de la logique linéaire vaut aussi pour son interprétation concrète. Autrement dit, nous devons reprendre les notions primitives qui fondent la logique, notamment celles de proposition, de déduction et de vérité, et leur proposer des alternatives clairement définies.

II.1.2 Remaniement des bases de l'interprétation

Reprenons l'idée de GIRARD d'interpréter les propositions de logique linéaire comme des actions. Nous avons montré qu'explicitier des modalités telles que *dépenser* et *obtenir* ne s'accordait pas avec la formulation d'enchaînements d'actions. Une solution consisterait à ne pas expliciter ces modalités, ce qui reviendrait à ne considérer que les *choses matérielles* (par exemple, pièces de cinq francs, paquets de cigarettes, etc.) auxquels ces

plus, dans un article didactique antérieur [27], à propos de l'exemple des cigarettes, un passage nous semble révélateur :

on peut considérer $A : 5F$ [...] On n'est évidemment pas habitué à considérer les objets comme des propositions logiques, mais ça peut s'arranger en lisant A comme « j'ai 5F », etc.

Faute de précisions, nous croyons donc comprendre que GIRARD, plutôt que d'identifier explicitement à des ressources les propositions de logique linéaire, conçoit ces dernières comme des énoncés de vérité, à chacun desquels est implicitement associé un coût qui s'exprime par des ressources.

À partir de cette conception, l'interprétation concrète des connecteurs linéaires semble très convaincante, en particulier pour les connecteurs multiplicatifs *fois* et *entraîne*, les additifs *avec* et *plus*, et l'exponentiel *bien sûr* ; elle se décline remarquablement selon de nombreux exemples (menu d'un restaurant, distributeur automatique, etc.) que nous aurons l'occasion de reprendre. Toutefois, GIRARD admet lui-même que certains connecteurs, introduits par dualité, sont « assez éloignés de l'intuition ». Effectivement, l'explication dans [26] du sens de la disjonction multiplicative *par*, duale de la conjonction multiplicative *fois*, nous perturbe :

La proposition $A \text{ par } B$ a une action de vase communicant entre A et B : en détruisant A , au moyen de $\text{nil } A$, j'ai B ; en détruisant B , j'ai A , et c'est ainsi que se justifie la forme du tiers exclu $A \text{ par nil } A$, en logique linéaire.

Rappelons qu'on parle du *principe des vases communicants* (au pluriel) en mécanique des fluides pour évoquer l'équilibre des niveaux d'un liquide, sous l'action uniforme de la pression atmosphérique, dans deux vases dont les fonds communiquent par un conduit. Or dans l'analogie proposée ci-dessus, rien ne précise à quoi identifier les propositions A et B (aux vases ou à leurs contenus?), ni ce que signifie mécaniquement parlant « détruire A au moyen de $\text{nil } A$ ». De plus, cette analogie ne permet pas de saisir concrètement ce qu'exprime, par exemple, la proposition *j'ai cinq francs par j'ai cinq francs*, sachant qu'elle ne se réduit pas à *j'ai cinq francs*.

L'interprétation de la négation linéaire *nil* nous pose également des difficultés. Rappelons sa description donnée dans [26] :

[...] elle consiste en un échange action/réaction ; pensons à payer par rapport à acheter, donner par rapport à recevoir, lire par rapport à écrire (en informatique).

Cherchons un exemple d'application de cette idée. La proposition *j'ai cinq francs* n'utilisant aucun terme des oppositions citées (*payer/acheter*, etc.), nous restons indécis sur la signification de la proposition *nil (j'ai cinq francs)*.

En fait, la question du sens de la négation en logique linéaire renvoie à celle des propositions en général, sur laquelle GIRARD ne semble pas adopter une position unique. En effet, dans un article assez philosophique publié en 1989 [25], dont l'essentiel est repris dans les articles de synthèse [28, 29], les propositions de logique linéaire sont interprétées comme des *actions*, par opposition aux propositions de logique classique, qui font référence à des *situations*. Cette idée prévaut également dans l'article [27], lequel débute

II.2 La notion de ressource

II.2.1 Rappels sur la notion de proposition

Dans leur livre intitulé *Logique* [37], Paul GOCHET et Pascal GRIBOMONT expliquent que la notion de proposition est *primitive*. Ne pouvant se construire formellement sur d'autres notions de logique déjà définies, elle est fondée sur des *acceptions* qui se sont forgées à travers les courants de la pensée philosophique occidentale, relativement à d'autres notions considérées également comme primitives. Au sens de la logique classique, le *Lalande* définit une proposition par :

Proprement, énoncé verbal susceptible d'être dit vrai ou faux ; et par extension, énoncé algorithmique équivalent à un énoncé verbal de ce genre, par exemple $a = b$. [...] Par suite, la proposition peut aussi être définie comme l'énoncé d'un *jugement*, au moins virtuel.

Les termes *proposition* et *jugement* sont synonymes à un niveau de langage près puisque le deuxième admet, toujours selon le *Lalande*, la définition : « acte de pensée qui peut être dit vrai ou faux ». Soulignons que la définition ci-dessus non seulement réfère à d'autres notions primitives de logique (le *vrai* et le *faux*), mais repose de plus sur une notion extra-logique : celle d'*énoncé verbal*, qui est du domaine de la linguistique. Un énoncé verbal correspond à une *phrase* syntaxiquement formée à partir d'un verbe et ayant une signification *déclarative*. Pour garantir un sens aux raisonnements, qui sont des enchaînements de propositions, il importe de savoir faire la distinction entre les phrases qui sont des propositions et celles qui n'en sont pas. Par exemple, la phrase impérative *Éteignez vos cigarettes!* ne satisfait pas la définition précédente : n'étant pas déclarative, elle ne peut être jugée vraie ou fausse. Par conséquent, elle ne doit en aucun cas figurer en tant que proposition dans un raisonnement de logique classique.

La notion de proposition fait l'objet de recherches non seulement en logique, mais aussi en philosophie et en linguistique, conduisant à élaborer de nombreuses variantes par rapport à son acception communément admise. À chaque variante correspond une logique spécifique : par exemple, en logique dite *du premier ordre*, les propositions sont formées selon des règles qui excluent la quantification de formules. En fait, la notion de proposition est tellement cruciale qu'elle a souvent divisé les logiciens en écoles rivales, depuis la Grèce Antique — les stoïciens s'opposaient alors aux aristotelliens sur l'antériorité de la proposition par rapport à ses termes — jusqu'à fort récemment quand l'école intuitionniste, en rejetant le principe du tiers exclu, ne partageait ni la vision du courant logistique de RUSSELL, ni celle des adeptes du programme de HILBERT [7].

Considérer les propositions, non plus comme des phrases vraies ou fausses, mais comme des *ressources périssables* est une remise en question fondamentale de la logique classique. Changer aussi radicalement la définition de cette notion primitive bouleverse fatalement les autres notions primitives. Pour mesurer les conséquences de ce changement, nous devons d'abord chercher à quoi fait référence la notion de ressource. Malheureusement, il semble que les dictionnaires de philosophie en langue française ne donnent aucune définition à ce mot. C'est du moins le cas du *Lalande* [50], ainsi que du *Foulquié* [18]. Pour pallier cette absence, nous n'avons d'autre choix que de partir du sens commun du mot dans le langage naturel, afin d'en dégager les aspects les plus fondamentaux.

modalités s'appliquent. Nous faisons aussi le constat suivant : si les déductions utilisent les propositions qu'elles prennent pour prémisses, alors ces dernières *sont des ressources* pour les premières, qui elles-mêmes jouent le rôle d'*actions de consommation/production*. Nous suggérons donc de considérer les propositions comme des objets et réciproquement, et de ne pas chercher à les envelopper dans une forme prédicative en écrivant *j'ai cinq francs* au lieu de *cinq francs* tout court, contrairement à ce que préconise GIRARD. À première vue, l'identification d'une proposition à un objet est inhabituelle, parce qu'elle rejette toute référence à la notion de vérité : il n'y a en effet pas de sens à dire que *cinq francs* est vraie ou fausse. Mais nous ne voyons là que le reflet concret des différences profondes qui séparent les logiques linéaire et classique. Quant à la part d'implicite, il existe bel et bien un aspect des ressources qui conditionne *implicitement* les actions de consommation/production : c'est leur *disponibilité*, notion que nous concevons comme analogue à celle de vérité.

Dans le fil de ces idées, nous allons donc interpréter concrètement les connecteurs linéaires comme des *opérations sur des ressources*. Mais pour pouvoir aborder ce travail, nous devons préalablement définir les notions de ressource, d'action et de disponibilité, que nous tenons pour primitives de notre interprétation.

II.1.3 Méthode de travail

La quête de sens que nous voulons mener, pour définir aussi précisément que possible les notions de primitives de notre interprétation nécessite un travail non pas non mathématique mais *philosophique*. Nous pouvons donc nous appuyer sur des références de cette discipline – notamment le *Lalande*¹ [50], en suivant la méthode décrite dans la préface de ce dictionnaire, quoique pour une portée plus modeste :

Nous n'avons pas visé [...] à donner des *définitions constructives*, comme celles d'un système hypothético-déductif, mais des *définitions sémantiques*, propres à éclairer le sens ou les différents sens d'un terme, et à écarter autant que possible les erreurs, confusions ou sophismes. Pas plus en cela qu'ailleurs on ne peut partir de rien ; quand on y prétend, on n'aboutit qu'à n'avoir pas conscience de ce dont on part. [...] À plus forte raison le but d'un travail de ce genre n'est-il pas de créer *ex nihilo* le sens des mots, ni même de constituer décisoirement un jeu de termes dont un certain nombre seraient adoptés comme indéfinissables, et les autres construits à partir de ceux-là.

Cependant, les définitions que nous voulons élaborer ne reposent pas seulement sur des considérations philosophiques. À terme, nous cherchons les bases d'une interprétation concrète des raisonnements en logique linéaire. Aussi nous allons implicitement nous guider sur les déductions linéaires remarquables, dont les interprétations développées au chapitre suivant justifieront rétrospectivement nos définitions.

1. Dictionnaire de philosophie dirigé par André LALANDE, dont les définitions sont périodiquement revues par les membres correspondants de la Société Française de Philosophie.

Nous retrouvons ici l'idée de moyen, avec implicitement une finalité de production, mais les ressources sont maintenant identifiées à des choses abstraites : des *possibilités d'action*. De plus, dans l'expression « *ressources inépuisables* », il y a une quantification, comme dans « *ressources bornées* ». Enfin, si l'idée de disponibilité n'est pas évoquée explicitement, elle reste sous-tendue par les formes possessives telles que « *ses moyens, ses possibilités* ».

II.2.3 Définition initiale de la notion de ressource

Résumons finalement les aspects conceptuels du mot *ressource* dans la langue française, qu'il soit employé dans un sens concret, figuré, ou dans un domaine spécifique, par cette ébauche de définition : les ressources sont des choses concrètes ou abstraites, dont on dispose, et qu'on utilise pour produire d'autres choses. Tâchons maintenant de la rendre aussi simple et concise que celle donnée à la notion de proposition (rappelons : une phrase qui peut être jugée vraie ou fausse).

Que devons-nous retenir de la base conceptuelle sous-tendue par le mot *ressource*? Essentially le mot *chose*, pour son caractère extrêmement général, qui englobe aussi bien le concret que l'abstrait. Quant au verbe *disposer*, il est redondant avec *utiliser*, dans la mesure où l'on ne peut utiliser que ce dont on dispose. De surcroît, en remarquant qu'une chose utilisée n'est plus disponible, nous préférons employer le verbe *consommer*, qui a l'avantage de renvoyer par dualité au verbe *produire*. Enfin, pour évacuer le sujet indéfini *on*, il suffit d'employer ces verbes à la voix passive, et de supprimer la deuxième référence au mot *chose*. Nous obtenons ainsi :

Une *ressource* est une *chose* qui peut être *consommée* et *produite*.

Si la forme de cette définition laisse deviner une analogie étroite avec la notion de proposition classique, nous allons montrer, dictionnaire à l'appui, que les mots employés ici sous-tendent des différences sémantiques fondamentales.

II.2.4 La notion de chose

La notion de phrase, qui sert à définir celle de proposition, est une notion linguistique : une proposition est fondamentalement un objet du langage. A contrario, la notion de chose est avant tout du ressort de la physique ; elle nous amène donc à concevoir une ressource comme un *objet du monde physique*, par exemple une pièce de cinq francs, un paquet de cigarettes, etc. Mais en fait, le sens courant de la notion de chose est beaucoup plus général. Comme l'explique le *Lalande* :

Le langage courant désigne par ce mot tout ce qui peut être pensé, supposé, affirmé ou nié. C'est le terme le plus général pouvant tenir lieu de tout ce dont on pose l'existence, fixe ou passagère, réelle ou apparente, connue ou inconnue.

Cependant, en référence à la théorie de la connaissance, la notion de chose est ensuite présentée dans un sens empirique, telle une « *réalité à l'état statique* », ce qui limite la portée du sens courant :

La chose s'oppose alors au fait ou au phénomène. « La lune est une chose, l'éclipse est un fait ». En ce sens, *chose* et *objet* sont souvent employés comme synonymes. Mais, rigoureusement, ce dernier terme est plus étendu puisqu'il s'applique à tout ce qui peut être perçu, aussi bien aux phénomènes et aux rapports qu'aux choses.

II.2.2 Le sens commun du mot *ressource*

La définition du mot *ressource* que donne le *Nouveau Petit Robert* [66] distingue six sens différents, dont la racine étymologique est le mot latin *resurgere*, qui signifie, au sens propre « *se relever* », et au sens figuré « *se rétablir* », d'où l'idée de « *se ressourcer* ». Ainsi, le sens le plus ancien du mot *ressource* dans la langue française fut : « *ce qui peut améliorer une situation fâcheuse* ». L'argent répondant très souvent à cette définition, on comprend que le mot *ressource* ait rapidement acquis une connotation pécuniaire. C'est en ce sens qu'on parlait (et qu'on parle encore) des « *ressources de l'État, du Trésor* », et que BALZAC faisait dire à l'héroïne de *Cousine Bette* : « [...] *malheureusement, nos ressources pécuniaires sont bornées* ».

Aujourd'hui, le mot *ressource* a un sens concret plus général, dans lequel s'inscrit toujours l'idée de ressources financières :

◆ 3° (XIX^e) *Plur.* Moyens matériels (hommes, réserves d'énergie) dont dispose ou peut disposer une collectivité. *Ressources en hommes et en matériel d'une entreprise. Ressources naturelles d'un pays. Ressources pétrolières d'une région* ◊ *Ressources humaines* (d'une entreprise) : l'ensemble du personnel. **V. potentiel.** *Gestion des ressources humaines.*

Par ailleurs, le *Nouveau Petit Robert* précise un autre sens concret, spécifique au domaine de l'informatique :

◆ 6° *Inform.* Élément d'un système informatique (fichier, mémoire, périphérique) susceptible d'être alloué à plusieurs processus.

Entre ces deux définitions, l'une générale, l'autre spécifique, il existe une base conceptuelle commune. Dans l'expression « *moyens matériels* », le terme « *moyen* » signifie : *ce qui sert pour arriver à une fin*, et l'adjectif « *matériel* » cerne les ressources comme des *choses physiques*. Ensuite apparaissent deux idées fondamentales. D'une part, la notion de ressource se conçoit au pluriel, donc comme des éléments multiples. D'autre part, les ressources sont des choses dont « *dispose* », c'est-à-dire que *possède*, une certaine « *collectivité* ». Observons que la possession de ressources peut se concevoir aussi pour une simple personne, qui constitue un cas dégénéré de collectivité. Et puis le terme « *moyen* » sous-tend une *fin* qu'il nous faut découvrir. Proposons une issue : on dispose de ressources pour produire d'autres ressources. *Produire*, c'est en effet le but commun à toutes les collectivités : produire des biens, des services, etc. , autant de choses qui sont des ressources pour d'autres collectivités. Reprenons alors le sens donné en informatique : à l'instar des ressources d'une collectivité, les fichiers, la mémoire, les périphériques sont des moyens matériels dont disposent des utilisateurs (au sens large, des applications) pour *produire* des traitements qui tiennent lieu de ressources pour d'autres utilisateurs. Clairement, ce sens particulier se fonde donc sur les mêmes éléments conceptuels que le sens général.

Pour prolonger notre analyse conceptuelle de la définition du mot *ressource*, décortiquons également le sens figuré qu'en donne le *Nouveau Petit Robert* :

◆ 4° (XVII^e) *Plur.* Les forces de l'esprit, du caractère, les possibilités d'action qui peuvent être mises en œuvre le cas échéant. « *des trésors de dévouement, d'abnégation, des ressources de prévoyance* » (FROMENTIN). « *Il y a des ressources inépuisables dans le courage et dans la vertu* » (MARMONTEL). [...] ◊ Moyens, possibilités.

ressource elle-même, qui sont susceptibles d'être produits et consommés. On pourrait penser que la notion d'exemplaire se distingue de celle de ressource de la même façon qu'en programmation, une *variable* se distingue de son *type* ; cependant nous voyons une nuance significative. En programmation, les variables d'un même type se distinguent les unes des autres par un *identificateur* qui est propre à chacune car elles sont susceptibles de prendre des valeurs différentes. Dans le cas des exemplaires de ressources, nous n'avons aucune raison de distinguer les exemplaires les uns des autres tant que nous considérons équivalentes leurs potentialités de consommation/production.

Soulignons bien que la notion d'exemplaires multiples et équivalents n'a pas de sens vis-à-vis des propositions classiques. En effet, une proposition logique est ou n'est pas vraie, un point c'est tout, et la répétition en plusieurs exemplaires identiques de son énoncé n'apporte aucun sens supplémentaire. Cette constatation, autant que l'idée de « *réalité à l'état statique* » écarte la notion de ressource de celle de *fait* — notion qui, selon le *Lalande*, « *se ramène à un jugement d'affirmation sur la réalité extérieure* » et se conçoit comme proposition en logique modale. Si l'on peut admettre la répétition d'un fait dans le temps, cette répétition n'a aucun rapport avec l'idée de multitude d'exemplaires d'une même ressource. Ainsi, un fait tel que *il fait beau*, même en donnant l'impression d'être produit et consommé par la dissipation ou l'arrivée du mauvais temps, ne satisfait que dans un sens dégénéré notre définition de la notion de ressource, puisqu'il ne se conçoit pas simultanément en plusieurs exemplaires. La notion d'exemplaires multiples et équivalents permet également de comprendre la différence entre une ressource et un *terme général* — notion qui sert à former les propositions dans la tradition aristotélicienne, et qui renvoie à des *concepts*. Par exemple, un terme général tel que *couleur blanche* n'est pas concevable en plusieurs exemplaires, donc nous ne le considérons pas comme une ressource, contrairement à *pot de peinture blanche*.

Par ailleurs, la notion d'exemplaires multiples et équivalents permet de renforcer l'opposition *chose/Personne* dans la mesure où une Personne, au sens noble du terme, est unique et par conséquent ne devrait pas être considérée comme un exemplaire équivalent parmi d'autres d'une même ressource. En fait, concevoir les personnes comme des (exemplaires de) « *ressources humaines* » revient à considérer équivalentes leur potentialités en termes de consommation/production dans le contexte d'une collectivité.

Enfin, la notion d'exemplaires multiples et équivalents permet de concevoir comme des ressources les *possibilités d'action* mentionnées dans le sens figuré de la définition du *Nouveau Petit Robert*. Par exemple, pour un boulanger, la possibilité d'action *faire un pain* est une ressource qui « se consomme quand on s'en sert » : plus le boulanger fait des pains, plus il se fatigue, et donc plus il consomme ses possibilités de travail. Inversement, quand il se repose, le boulanger produit à nouveau cette possibilité d'action. Cette dernière est donc une chose, certes non matérielle, mais que l'on peut par abstraction considérer en plusieurs exemplaires équivalents, et dont il faut prendre en compte la disponibilité, comme pour toutes les autres ressources nécessaires à l'action de fabrication de pains.

En définitive, notre vue de la notion de ressource ne se réduit pas à un sous-ensemble des objets du monde physique ; nous n'excluons pas qu'elle puisse également référer à des objets abstraits. Notre critère fondamental de distinction est la possibilité de conception d'exemplaires multiples et identiques, susceptibles d'être produits et consommés.

II.2.6 La consommation et la production d'exemplaires

Aux termes *produire* et *consommer*, le *Lalande* nous apporte peu d'éléments conceptuels. La définition de *produire* renvoie à celle de *déterminer* au sens de *provoquer*, *déclencher*, par exemple : « *déterminer une avalanche* ». Le terme *consommer* est illustré dans l'expression « *consommation des richesses* », avec l'idée de destruction, que le *Lalande* précise en notant : « *pas seulement l'utilisation, mais aussi la perte* ». En revanche, le *Nouveau Petit Robert* propose au mot *consommer*, une définition dont le sens suivant correspond bien à la notion que nous développons :

II. (xvi^e; « détruire, consumer », xv^e) ♦ 1^o Amener (une chose) à destruction en utilisant sa substance, en faire un usage qui la rend inutilisable. V. *user (de), utiliser*.

Au mot *produire*, le *Nouveau Petit Robert* distingue deux grandes significations, la première se résumant à « *Faire connaître (ce qui existe déjà)* », comme par exemple « *produire une pièce d'identité* ». Nous orientons notre conception nettement plus vers la deuxième signification, qui connote plusieurs nuances, toutes intéressantes :

II. (1361) *cour.* Faire exister (ce qui n'existe pas encore). V. *créer*. ♦ 1^o Causer, provoquer (un phénomène, un événement). [...] ♦ 2^o Composer (une œuvre). [...] V. *écrire*. [...] ♦ 3^o Former naturellement. [...] *Cet arbre produit de beaux fruits*. V. *donner*. [...] *Cette réaction chimique produit beaucoup de fumée*. [...] ♦ 4^o Faire exister, par une activité économique. [...] *Produire des richesses, des marchandises, des services*. [...] V. *faire*. [...] V. *fabriquer*. [...] ♦ 5^o *absolt.* Procurer (un profit). V. *rapporter*.

En appliquant les termes *produire* et *consommer* aux exemplaires de ressources, nous les concevons dans un sens plus général, plus abstrait, vérifiant une relation de dualité analogue à celle qui lie les notions d'*affirmation* et de *négation* en logique classique :

- **consommer** un exemplaire de ressource peut signifier aussi bien le prendre, l'utiliser, l'absorber, le détruire, le supprimer, etc. ;
- **produire** un exemplaire de ressource peut signifier aussi bien le rendre, le libérer, le rejeter, le fabriquer, le créer, etc.

Ainsi, l'idée intuitive d'utilisation momentanée d'une ressource (pensons à une machine, pour exécuter une certaine tâche) correspond en fait à la consommation puis à la production d'un exemplaire de cette ressource — même si cet exemplaire (la machine utilisée) n'a pas été concrètement détruit au moment de sa réquisition, ni ensuite recréé une fois la tâche accomplie. Le sens concret des termes *produire* et *consommer* est également réducteur, par rapport à celui nous leur donnons, parce que dans la réalité, on observe que les phénomènes de production et de consommation se réalisent de façon mêlée, simultanément et symétriquement, par des échanges, des transformations, des combinaisons, selon le fameux principe de Lavoisier : « *Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme* ». ²

2. À l'origine, ce principe énonce la loi générale d'équilibrage des réactions chimiques ; GIRARD y fait référence dans [30] en remarquant que dans toute réaction, comme par exemple celle représentée par l'équation $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, l'opérateur « + » et la flèche « \rightarrow » ne peuvent être lues respectivement comme la conjonction \wedge et l'implication \Rightarrow classiques. En revanche, on peut les identifier aux connecteurs *fois* et *entraîne* de la logique linéaire [26, 27].

Pensons par exemple à un client qui dépense une somme d'argent pour acheter un objet. À son point de vue, nous interprétons cet échange en considérant qu'il consomme l'argent qu'il possède pour produire l'objet en question. Au point de vue du marchand, nous interprétons le même échange en considérant qu'il consomme l'objet pour produire l'argent. Pensons également à la transformation d'un cube d'eau en glaçon comme un phénomène de consommation/production réversible : une fois dans un verre, le glaçon restitue, c'est-à-dire produit, l'eau et le froid qui le constituaient en fondant, c'est à dire en étant consommé. Ces exemples pourraient conduire à une intuition de symétrie systématique des phénomènes de consommation/production. Néanmoins, pour comprendre en toute généralité les notions que sous-tendent ces phénomènes, nous admettons aussi la consommation et la production d'exemplaires de ressources sous des formes éventuellement dégénérées (pure consommation, pure production).

II.2.7 La composition de ressources

Les notions de consommation et de production d'exemplaires de ressource permettent d'introduire celle de *composition d'exemplaires de ressource*, et par induction, de *composition de ressources* elles-mêmes. L'idée intuitive est celle d'*assemblage* de certaines choses que l'on considère comme un tout, une nouvelle chose. Réciproquement, la notion de *décomposition* de ressources correspond à l'opération inverse de l'assemblage : le démontage. Par exemple, la consommation d'un exemplaire de la ressource *manche en bois* et d'un exemplaire de la ressource *lame en métal* permet de produire par assemblage un exemplaire d'une nouvelle ressource *couteau*, qui est la *composée* des deux premières. Inversement, la consommation de cet exemplaire composé, permet de produire par démontage les deux exemplaires d'origine.

Nous englobons également dans la composition (d'exemplaires) de ressources des associations ; ce sont des formes plus abstraites d'assemblages. Par exemple l'association d'un verre, un couteau et une fourchette forme un couvert. Cet exemple illustre également que la composition de ressources peut s'appliquer à des ressources déjà composées, autrement dit, que la composition se conçoit de manière récursive. Pour en concevoir l'initiation, nous introduisons la notion de ressource *atomique*, c'est-à-dire dont les exemplaires ne sont pas composés. Le fait de considérer composée ou atomique une ressource est une question de contexte, au même titre que de considérer qu'une chose donnée est un exemplaire d'une certaine ressource. Par exemple, si l'on imagine que les artisans couteillers perçoivent composée la ressource *couteau*, il n'en va pas de même pour la plupart des utilisateurs des exemplaires de cette ressource.

Plus généralement, la notion de composition ne se réduit pas aux assemblages tels que nous les avons illustrés. Considérons maintenant un canif avec une lame et un tire-bouchon. Un exemplaire d'une telle ressource peut tour à tour remplir les deux fonctions, mais pas en même temps. La nature de l'assemblage n'est pas la même que celle qui constitue un couvert, pour lesquels le couteau, la fourchette et le verre sont utilisables simultanément. D'où la définition générale :

Une ressource est *composée* si elle se conçoit comme le résultat d'une opération dont les opérandes sont d'autres ressources, éventuellement elles-mêmes

composées. Toute ressource qui n'est pas composée est *atomique*.

Sans présager de la diversité concrètement observable des opérations de composition de ressources, nous tenons les connecteurs de la logique linéaire comme expressions formelles de nombres d'entre elles. Par exemple, un couvert peut se concevoir comme la conjonction multiplicative *fois* de ses composantes. Anticipant les nombreux exemples proposés au chapitre III, nous aboutissons à une analogie directe avec la formation des propositions en logique classique, par connecteurs interposés : à la forme des propositions correspond la composition des ressources.

II.2.8 Définition finale de la notion de ressource

S'il existe des phrases qui ne sont pas des propositions, existe-t-il des choses que nous ne pouvons pas considérer comme des ressources « discrétisables », c'est-à-dire non concevables en exemplaires multiples et équivalents, susceptibles d'être produits et consommés ? Pensons par exemple à la Lune, qui est une chose selon le *Lalande*, mais qui intuitivement ne se conçoit pas en plusieurs exemplaires. Évidemment, c'est une question de contexte et d'abstraction. Par le mot *lune*, les planétologues entendent le concept de *satellite naturel*, et en ce sens, une planète comme Mars possède deux lunes, Phobos et Déimos. La lune de la Terre, en tant que satellite naturel (d'où le « l » minuscule), est donc tout à fait concevable en plusieurs exemplaires, même s'il n'en existe en l'occurrence qu'un seul. Autre exemple, la Terre elle-même : en tant qu'*écosystème propice à la vie*, elle représente une ressource qui n'existe, à notre connaissance, qu'en un seul exemplaire, mais sa multiplicité est depuis longtemps concevable, ne serait-ce que dans la littérature de science-fiction. Donc, plus généralement, pour décréter qu'une chose est ou n'est pas une ressource, ce n'est pas sa multiplicité avérée qui compte, mais le fait que cette multiplicité soit concevable. C'est par des abstractions similaires que l'on peut raisonner en physique sur des concepts tel que *point matériel sur lequel ne s'exerce aucune force*, dont l'extension est pourtant vide [37].

Considérons maintenant la question de la potentialité de consommation et de production d'exemplaires d'une chose. Dans le cas des satellites naturels d'une planète, on peut imaginer des phénomènes astronomiques de capture, de collision, etc. A priori, il n'y a aucune difficulté conceptuelle à interpréter ces phénomènes en termes de consommation et de production. Quant à l'écosystème propice à la vie, peut-on le consommer et le produire ? Certes, pour ce qui est de la production, l'humanité est jusqu'à preuve du contraire incapable d'une telle prouesse, n'en déplaise à ceux qui fantasment sur la colonisation de Mars. Mais il faut reconnaître que notre écosystème a bel et bien été *produit* une fois, que ce soit par un vieux Monsieur à barbe blanche, par Dame Nature, ou encore — pour les plus matérialistes — par la physique des particules. Et pour la consommation de l'écosystème, il y a fort à craindre que l'humanité y parvienne très prochainement, tant l'étendue de ses nuisances s'accélère [8]. Enfin, nul doute que cette capacité de consommation serait encore plus affirmée s'il existait d'autres exemplaires de cette précieuse ressource.

Toutes ces considérations nous amènent finalement au constat suivant : il serait vain de vouloir décrire *en extension* l'ensemble de toutes les ressources concevables. Par analogie, ce constat correspond à celui des logiciens vis-à-vis de l'ensemble des propositions de la

logique classique. Nous devons nous contenter de sa description *en intention*, établie par la définition de la notion de ressource. En intégrant les nombreux éléments conceptuels que nous avons dégagés à partir de la formulation première de cette définition, nous posons :

Une **ressource** est une classe d'équivalence de choses dont les éléments, appelés *exemplaires* de la ressource, sont identiquement susceptibles d'être produits, consommés, et mutuellement composés.

Maintenant, ayant constaté des différences sémantiques fondamentales entre la notion de ressource et celle de proposition, pouvons-nous appliquer à des ressources des notions primitives de la logique classique comme celle de *déduction*, ou encore celle de *vérité*? Est-t-il sensé d'exprimer que la ressource *paquet de cigarette* se déduit de la ressource *cinq francs*, ou encore que la ressource *cinq francs* est vraie? Nous ne le pensons pas. Néanmoins, nous pouvons pallier ces incompatibilités en développant deux autres notions primitives liées à celle de ressource. Nous les introduisons en prolongeant l'analogie proposition/ressource, de telle sorte qu'elles jouent pour les ressources respectivement le rôle de déduction et de vérité. Rappelons que les propositions interviennent dans les déductions, qui partent d'hypothèses supposées vraies pour établir définitivement la vérité de conclusions. Par analogie, disons que les ressources interviennent dans des *actions*, qui consomment des exemplaires de ressources *disponibles*, pour produire des exemplaires d'autres ressources.

II.3 La notion d'action sur des ressources

Pour définir la notion d'action par rapport à celle de déduction, commençons par rappeler le sens de cette dernière en logique classique. En examinant par ailleurs la conception générale du mot *action*, nous verrons qu'il existe une remarquable analogie entre ces deux notions. Bien entendu, nous insisterons beaucoup sur les différences sémantiques qui marquent les limites de cette analogie.

II.3.1 Rappels sur la notion de déduction

La notion de déduction est une notion *syntactique* de la logique, c'est-à-dire qu'elle est relative à la construction formelle des raisonnements. Le *Lalande* la définit comme :

Opération par laquelle on conclut rigoureusement, d'une ou plusieurs propositions prises pour prémisses, à une proposition qui en est la conséquence nécessaire, en vertu des règles logiques.

Cette définition repose avant tout sur les notions corrélatives d'*opération* et de *règle*, qui sont considérées comme primitives dans de nombreux domaines, notamment en mathématiques. Une *opération* renvoie à l'idée de génération d'un objet à partir d'autres objets. Dans le cas de la logique, les objets sont des propositions. Quant à la notion de *règle*, elle correspond à l'expression générale de contraintes de forme que doivent respecter chacun des objets en jeu pour que l'opération soit *correcte*, c'est-à-dire conforme aux règles. Dans la définition du *Lalande*, le mot règle est employé au pluriel pour désigner un ensemble primitif de règles qui régissent la logique, aussi bien celles de formation des propositions

que celles de déduction proprement dites, comme par exemple le modus ponens. On dit d'une déduction correcte qu'elle est l'*instance* de la règle de déduction qu'elle respecte.

Observons que la définition ci-dessus est dissymétrique : de plusieurs prémisses, on déduit une seule conclusion. Nous verrons toutefois que sa généralisation symétrique où les conclusions sont multiples est concevable, et même primordiale pour mettre en lumière les rapports de dualité entre les règles logiques. Tel est précisément le cas dans le formalisme des *séquents*, lesquels sont des déductions généralisées dont les prémisses sont implicitement en conjonction et les conclusions en disjonction (cf. les chapitre III et IV).

À la notion syntaxique de correction d'une déduction correspond la notion sémantique de *validité*. En logique classique, où les propositions sont interprétées par les valeurs *vrai* et *faux*, une déduction est valide si de la vérité de la conjonction de ses prémisses découle la vérité de la disjonction de ses conclusions. La correspondance entre la correction et la validité des déductions est un aspect crucial de la logique. On dit qu'une théorie axiomatique est *cohérente* si toute déduction correcte est valide ; on dit qu'elle est *complète* si toute déduction valide est correcte. En particulier, ces notions s'appliquent à la définition axiomatique des connecteurs de la logique classique propositionnelle, qui est une théorie cohérente et complète [37].

Rappelons enfin que toute déduction peut s'écrire sous la forme d'une proposition conditionnelle, la conjonction des prémisses et la disjonction des conclusions de la déduction formant respectivement l'antécédent et le succédent de sa forme propositionnelle. En rapport avec la notion de vérité, une déduction est valide si et seulement si sa forme propositionnelle est une *tautologie*, c'est-à-dire qu'elle est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la forment.

II.3.2 La conception générale du mot *action*

La notion d'*action* sous-tend des idées fort complexes en philosophie. Elle fait l'objet d'une longue définition dans le *Lalande*, dont nous ne reproduisons que les éléments qui nous intéressent directement, à commencer par le sens général :

Opération d'un être considérée comme produite par cet être lui-même, et non par une cause extérieure.

Ce sens apparaît cependant difficile à exploiter dans le cadre de la logique, car il s'appuie sur le concept d'*être*, l'un des plus ardues qui soient, relevant essentiellement de questions métaphysiques. En s'appuyant également sur la notion de *causalité*, le sens général de la notion d'action aboutit à des aspects moraux, en particulier l'idée de *responsabilité* vis-à-vis d'une action, et l'opposition à l'idée d'*intention*, aspects que nous considérerons ultérieurement (cf. section II.3.7). Pour le moment, nous préférons partir de la définition synthétique que donne le *Lalande* en observation³ :

Le mot *action*, plus concret qu'*acte*, exprime ce qui est à la fois principe, moyen et terme d'une opération qui peut rester immanente à elle-même.

3. C'est-à-dire dans le recueil des observations de MM. les Membres et Correspondants de la Société Française de Philosophie.

Sans entrer dans le débat de l'immanence des actions (c'est-à-dire savoir si elles sont ou non le fait d'un être, l'*acteur*), retenons d'abord de cette définition le triptyque *principe-moyen-terme*, qui nous paraît essentiel pour dégager l'analogie entre la notion d'action et celle de déduction classique.

II.3.3 Définition de la notion d'action sur des ressources

De même que les déductions sont des opérations sur des propositions, nous concevons les actions comme des opérations sur des ressources. Mais contrairement aux opérations de composition que nous avons mentionnées précédemment (cf. section II.2.7), les actions sont exclusivement des opérations de consommation/production. De plus, nous avons vu (cf. section II.2.6) que la consommation et la production s'appliquaient non pas aux ressources, mais aux *exemplaires* de ressources. Par conséquent, nous concevons les actions comme des opérations de consommation/production d'exemplaires de ressources, opérations dont nous avons déjà cités quelques exemples. Explicitons cette définition :

Une **action** est une opération sur des ressources définie par les exemplaires de ressources qu'elle consomme, que nous appelons **consommés**, et par les exemplaires des ressources qu'elle produit, que nous appelons **produits**.

En reliant les consommés aux hypothèses et les produits aux conclusions, cette définition présente une analogie directe avec celle de la notion de déduction. De plus, elle est en étroite correspondance avec la définition synthétique du *Lalande* au mot *action* : les consommés renvoyant au « *moyen* » et les produits au « *terme* ». Quant au « *principe* », nous lui faisons correspondre la notion de *règle d'action* que nous allons définir.

Nous avons rappelé qu'en vertu de règles, notamment les règles de déductions proprement dites, seules certaines déductions étaient correctes. Nous affirmons qu'il en est de même pour les actions et nous parlerons de *règles d'action* pour désigner les règles qui régissent proprement les actions. Cette affirmation fait référence à la réalité matérielle des choses : en consommant certains exemplaires de ressources, on ne peut pas produire n'importe quels exemplaires d'autres ressources. Sans imaginer des exemples extravagants, pensons simplement au fait que si un client a juste deux pièces de un franc, et qu'un distributeur n'accepte que les pièces de deux francs pour fournir un gobelet de café, alors ce client ne pourra pas actionner ce distributeur. L'impossibilité de l'action se traduit ici par une incompatibilité de composition entre les ressources disponibles et requises. D'une manière générale, nous posons la définition :

Une **règle d'action** est l'expression des contraintes de composition que doivent respecter les exemplaires des ressources intervenant dans des actions pour que ces dernières soient **correctes** — elles en sont alors les **instances**.

Cette définition prolonge remarquablement l'analogie que nous avons exhibée entre la forme des propositions et la composition des ressources.

II.3.4 La notion de ressource d'action

En logique classique, les propositions conditionnelles jouent un rôle clef dans les déductions. Ainsi, dans le schéma du *modus ponens*, la proposition conditionnelle posée

comme prémisses *si A alors B* exprime le rapport d'implication entre l'autre prémisses posée *A*, et la conclusion *B*. En fait, toute déduction de la forme du modus ponens est *essentiellement* construite sur une certaine proposition conditionnelle. Par analogie, nous affirmons que certaines ressources jouent un rôle clef dans les actions.

À quoi correspondent ces ressources? Imaginons par exemple un client qui achète chez un crémier des œufs qui coûtent un franc la pièce. Même si ce client est millionnaire, il ne peut pas acheter d'un coup un million d'œufs, car les stocks de la crèmerie sont limités bien en deçà de cette quantité. La possibilité d'achat ne persiste que tant que des exemplaires de la ressource en question sont en vente dans la crèmerie, et elle s'épuise à mesure que le client s'en sert. Elle n'est donc pas une règle d'action de la logique des ressources. Pour le client, la possibilité d'achat apparaît exactement comme une ressource, au même titre que la ressource financière ici impliquée, la disponibilité des exemplaires de l'une comme de l'autre limitant l'itération de l'achat. En fait, ce sont les œufs eux-mêmes que le client ne possède pas encore — tant qu'il ne les a pas achetés — mais perçoit comme des exemplaires d'une ressource dont il dispose: leur possibilité d'achat, qui s'exprime approximativement *pour un franc, j'ai un œuf*.

En considérant comme une ressource une relation de consommation/production potentielle entre d'autres ressources, nous conceptualisons de façon plus générale l'idée de *possibilité d'action* évoquée dans le *Nouveau Petit Robert* au sens figuré du mot *ressource*. En effet, le dictionnaire désigne par cette expression des ressources dans un sens abstrait, par exemple un savoir-faire que possède une personne, ce que nous avons illustré en prenant l'exemple d'un boulanger (cf. section II.2.5). Maintenant, l'exemple du client chez le crémier suggère qu'une possibilité d'action peut aussi correspondre à une chose concrète comme un objet en vente. Toutefois, l'expression *possibilité d'action* nous semble pouvoir susciter une confusion avec l'idée d'*action possible*, au sens d'une action correcte. De plus, étant donné que nous allons considérer toute action comme une simple éventualité (cf. section II.3.6), l'expression *possibilité d'action* risquerait de surcharger abusivement la notion même d'action. C'est pourquoi, nous préférons parler de *ressource d'action*, que nous définissons ainsi :

Une **ressource d'action** est une ressource qui exprime une relation de consommation/production potentielle entre d'autres ressources.

À cette définition vont naturellement correspondre les formules implicatives en logique linéaire, renforçant l'analogie dont nous étions partis avec les propositions conditionnelles de la logique classique. Il nous reste à voir dans quelle mesure les notions d'*action* et de *ressource d'action* sont liées.

II.3.5 Le rapport entre les notions d'action et de ressource d'action

Nous avons rappelé qu'en logique classique, toute déduction peut s'écrire sous la forme d'une proposition conditionnelle. Par analogie, posons que toute action peut s'écrire comme une ressource d'action. Un exemple simple est celui d'une action dont les consommés et les produits se réduisent respectivement à un exemplaire d'une même ressource *A*, approximativement : *j'ai A donc j'ai A* (autrement dit, une telle action consiste à ne

rien faire). Nous pouvons parfaitement la transcrire comme une ressource d'action de la forme *pour A, j'ai A*, d'où la définition :

La **ressource d'action correspondante** à une action est la ressource d'action exprimant la relation de consommation/production potentielle entre les consommés et les produits de l'action considérée.

La ressource d'action qui correspond à une action peut alors intervenir comme consommé d'une autre action, par exemple : *pour A, j'ai A*, or *j'ai A*, donc *j'ai A*. Notons que l'expression de cette action suggère une redondance, dont nous allons montrer qu'elle n'est pas fortuite. Nous avons vu que la disponibilité d'une ressource d'action telle que celle qui représente un objet en vente (pensons à *pour un franc, j'ai un œuf*), est liée à la présence de cet objet. A contrario, la ressource d'action correspondante à une action comme *pour A, j'ai A* est disponible indépendamment des ressources qui la composent, à savoir ici *A*. Elle est donc implicitement disponible en autant d'exemplaires que l'on veut, autrement dit elle est *inépuisable*, ce qui renvoie à une idée évoquée dans le *Nouveau Petit Robert* au sens figuré du mot *ressource*, mais dans un sens différent. Ici, il ne s'agit pas de ressources disponibles en quantités telles que toute consommation unitaire apparaisse négligeable, mais de ressources absolument inépuisables. Abstraites, elles constituent un cas limite pour notre définition de la notion de ressource. Par ailleurs, nous concevons que de telles ressources ne servent explicitement à rien, et c'est pourquoi elles sont forcément redondantes en tant que consommés d'une action.

Cette remarque renforce l'analogie action/déduction : il y a un rapport direct entre le caractère *futile* d'une ressource d'action correspondante à une action et le caractère *tautologique* de la forme propositionnelle d'une déduction. Pour prolonger cette analogie, nous posons la définition :

Une action est **valide** si la disponibilité de sa ressource correspondante est indépendante de celle des ressources qui la composent.

Cette définition utilise l'idée d'*indépendance* de disponibilité qui n'est pas encore explicitée. Nous avons juste précisé qu'elle se ramène à celle de ressource inépuisable. Nous y reviendrons quand nous développerons la notion de disponibilité (cf. section II.4.5).

II.3.6 La relation de conflit entre actions

La force de l'analogie qui relie la notion d'action à celle de déduction concerne surtout les aspects syntaxiques de cette dernière. En examinant ses aspects sémantiques, nous allons déceler les limites de l'analogie. Nous avons rappelé qu'une déduction transmet la vérité de ses prémisses à ses conclusions. A contrario, nous ne pouvons concevoir qu'une action transmette, au même titre, la disponibilité de ses consommés à ses produits, parce que la consommation des consommés d'une action remet en cause leur disponibilité — GIRARD parle de la *réaction* liée à une action.

Cet aspect qui distingue la notion d'action de celle de déduction est, nous allons le voir, primordial. En effet, de même que toute proposition peut tenir lieu de prémisses à plusieurs déductions, toute ressource peut intervenir comme consommé dans plusieurs actions. Par

exemple, un certain volume d'eau, considéré comme un exemplaire de ressource, peut servir à faire de la glace, mais aussi à arroser des fleurs. Mais comme les actions remettent en cause la disponibilité de leurs consommés, il peut exister des *conflits* entre les actions ayant des consommés communs. Par exemple, en cas de rationnement de l'eau, l'utilisation de cette dernière sera l'objet d'un *choix critique* au sens où il s'agit d'opter pour l'une au détriment l'autre des deux possibilités d'utilisation.

À la notion de *conflit*, le *Lalande* donne une définition très générale, qui sous-tend des aspects politiques et psychiques a priori éloignés de notre étude :

Rapport de deux pouvoirs ou de deux principes dont les applications exigent dans un même objet des déterminations contradictoires.

Néanmoins, sa formulation rejoint des idées que nous venons d'évoquer : « *déterminations contradictoires* » est synonyme de *choix critique*. Pour transposer cette définition, il nous faut la préciser, car il n'est pas question de concevoir les actions comme des *pouvoirs* ou des *principes*. Nous allons donc développer un sens spécifique à la notion de conflit qui repose sur des concepts que nous avons déjà définis. En fait, cette notion a été formellement définie dans le cadre de la théorie des réseaux de Petri — on parle de *transitions en conflit* — et nous en transcrivons les concepts par rapport aux actions actions. Nous posons que l'existence d'un conflit entre deux actions est une relation *structurelle* entre leurs consommés : l'existence pour chacune d'un exemplaire commun d'une ressource dite *critique*. Certes, tant que la quantité disponible d'exemplaires de la ressource critique (dans notre exemple, c'est l'eau) est suffisante pour les deux actions, le conflit n'est pas *effectif*, mais il existe quand même ; il est *latent*. En ce sens, nous posons la définition :

Deux actions sont *en relation de conflit* s'il y a dans leurs consommés respectifs un exemplaire commun d'une ressource, que nous appelons *ressource critique* pour la relation de conflit.

Concrètement, la compréhension de la notion de conflit nécessite de distinguer le fait qu'une action est *exécutable*, et le fait qu'elle soit *exécutée*. Le premier fait dépend *structurellement* du respect des règles d'action, et *effectivement* de la disponibilité des ressources. Le deuxième fait dépend exclusivement d'un choix. Si nous considérons disponibles les exemplaires des ressources que deux actions en conflit prennent pour consommés, alors en consommant ceux qu'elles ont en commun, l'exécution de l'une remet en cause le fait que l'autre soit encore effectivement exécutable. La notion de *choix*, ici au premier plan, renvoie à certains éléments du sens général du mot *action* que propose le *Lalande* — les idées de volonté, de responsabilité, etc.

Maintenant, remarquons que la relation de conflit, qui est fondamentale pour les actions, n'a aucun sens pour les déductions au sens classique, car il n'y a pas lieu de distinguer le fait qu'une déduction soit *effectuable* et le fait qu'elle soit *effectuée*. En effet, en logique classique, une déduction ne remet absolument pas en question la vérité des propositions qu'elle prend pour prémisses. Une fois ces dernières posées, toutes les conclusions déductibles selon les règles de la logique sont nécessairement établies, de façon implicite. C'est en ce sens qu'est employée l'expression « *conséquence nécessaire* » dans la définition de la notion de déduction donnée par le *Lalande* : si on pose A et (A implique B),

alors *nécessairement*, on déduit B . Au contraire, selon le schéma de déduction analogue exprimé en logique linéaire, on sous-tend que si on pose A *fois* (A entraîne B), alors *éventuellement* on peut produire B .

En fait, la logique linéaire permet d'expliciter les relations de conflit non pas sur des déductions mais sur des propositions. À cette notion correspond le sens du connecteur *avec*, qui est une conjonction d'un autre type que la conjonction *fois*, et dont l'application exprime une proposition comme un *choix libre* entre deux propositions. En interprétant les propositions comme des ressources, on peut alors exprimer un conflit entre deux actions par une seule action dont les produits sont en choix libre. Cette notion signifie que l'on a effectivement le choix entre les deux exemplaires de ressources connectés. Elle s'oppose à celle d'*incertitude* qu'exprime le connecteur additif dual de *avec*, appelé *plus*, et qui exprime une alternative, dont on ne connaît pas la teneur, entre deux propositions.

II.3.7 La notion d'observateur d'une action

Suites aux développements précédents, prenons du recul, afin de ne pas dévier de notre problématique. Une question essentielle est la suivante: peut-on attendre de la logique des ressources de décider quelle action exécuter en cas de conflit? À notre avis, non. Tout au plus, nous pouvons espérer déterminer les conséquences, au sens des ressources, des différents choix possibles. Aussi, nous devons considérer les actions hors de toute idée de volonté, c'est-à-dire purement comme des *éventualités* dont nous cherchons seulement à mesurer la disponibilité des consommés et des produits. Cette conception ne consiste pas à nier l'existence d'acteurs — les êtres qui sont intrinsèquement à l'origine des actions — mais à les réduire à de simples *observateurs*. Nous retrouvons ici la notion de *point de vue* à propos de laquelle GIRARD explique dans [27]:

Il y a en logique un point de référence implicite, non spécifié, disons « je »; les possibilités dynamiques sont jaugées par rapport à ce « je ».

Rappelons que selon l'auteur, le « je » est un élément explicite de l'écriture des propositions, comme dans l'exemple des cigarettes (cf. chapitre I):

pour cinq francs j'ai un paquet de Gauloises $[A \multimap B]$
 (or) j'ai cinq francs $[A]$
 (donc) j'ai un paquet de Gauloises $[B]$

Mais selon notre philosophie, le « je » est implicite et les « possibilités dynamiques » sont exprimées par la disponibilité des ressources considérées dans une action, sans aucun préjugé de volonté. C'est pourquoi nous traduisons le point de vue respectif du client et du marchand par deux actions distinctes, de formes réciproques. Ainsi, dans le cas du marchand, en reprenant la formulation de GIRARD pour la comparaison, nous proposons:

pour un paquet de Gauloises j'ai cinq francs $[B \multimap A]$
 (or) j'ai un paquet de Gauloises $[B]$
 (donc) j'ai cinq francs $[A]$

Remarquons que cette représentation ne prend pas en compte la nuance que l'on perçoit intuitivement entre le cas du client qui décide l'achat et celui du marchand qui accepte

la vente. Cependant, une telle nuance ne nous semble pas systématique dans la réalité. Il existe des cas concrets de transaction où c'est au marchand que revient l'initiative : pensons aux vendeurs de journaux de rue, par exemple.

Par ailleurs la notion d'observateur ne se réduit pas forcément à une personne physique : elle englobe également l'idée d'un point de vue commun à plusieurs personnes, par exemple celui de deux clients amis qui unissent leurs ressources pour effectuer un achat commun. Nous retrouvons alors la notion de « *collectivité* » évoquée dans notre analyse du sens commun du mot *ressource* (cf. section II.2.2), en tant que *possesseur* d'exemplaires de ressources. Tâchons alors de définir en toute généralité notre notion d'observateur ou de point de vue d'une action. Dans le paradigme du client et du marchand, leurs représentations respectives de la même action se distinguent par les consommés et les produits. Par ailleurs, il y a implicitement dans les deux cas des hypothèses simplificatrices de représentation. Nous avons négligé d'autres clients potentiels, nous n'avons pas détaillé la composition des ressources financières du client, le fait qu'il y ait éventuellement un échange de monnaie, etc. Toutes ces questions ne sont pas du ressort de la logique des ressources, mais au dessus. La notion d'observateur est donc une notion méta-logique :

L'*observateur* ou *point de vue* d'une action est le *référentiel méta-logique* qui justifie la représentation de l'action.

Cette définition sous-tend qu'une action, et toutes les notions qui s'y rapportent (les consommés, les produits, le fait qu'elle soit ou non exécutable, les conflits avec d'autres actions, etc.) n'ont de sens que vis-à-vis d'un observateur, que nous devons impérativement préciser. Concrètement, il s'agit le plus souvent d'un acteur du phénomène de consommation/production représenté, et bien entendu dans la réalité, les acteurs prennent des décisions — bref, ils résolvent des conflits. En les ramenant à des observateurs, nous considérons donc que l'expression des mobiles qui justifient leurs choix n'est pas du ressort de la logique des ressources, que nous concevons donc *indéterministe*.

II.4 La notion de disponibilité des ressources

Rappelons que selon notre analogie, la disponibilité est aux ressources ce que la vérité est aux propositions en logique classique. Or au delà de sa compréhension intuitive, la notion de vérité est particulièrement difficile à définir [37]. Après avoir rappelé les fondements de cette notion, nous montrerons que l'idée intuitive de disponibilité s'en démarque de façon essentielle. L'analogie qui les relie nous paraît beaucoup plus faible que celle que nous avons constatée entre les notions de déduction et d'action.

II.4.1 Rappels sur la notion de vérité

Au terme *vérité*, le *Lalande* propose une définition générale qui donne l'impression de repousser la question du sens : elle se limite à « *caractère de ce qui est vrai.* » Renvoyés à l'adjectif *vrai*, nous trouvons une définition « *en parlant des jugements ou des propositions qui les expriment* » :

Opposé à *Faux* [...]. Caractère de l'assertion à laquelle il est légitime de donner un plein et

entier assentiment. « ... Ne recevoir aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle » DESCARTES, *Méthode*, II, 7.

Avant tout, il ressort de cette définition que la notion de *vrai* n'a de sens que par opposition à celle de *faux*, terme auquel le *Lalande* renvoie, sans autre explication, à son opposition à *vrai*. Ensuite, la définition de l'adjectif *vrai* repose d'une part sur l'idée de « légitimité » — autrement dit, la référence à des lois — et d'autre part celle d'« assentiment », qui employée comme ici au sens fort, sous-tend l'idée de certitude. De plus, la critique donnée par le *Lalande*⁴ à la définition du terme *assentiment* précise que pour pouvoir donner ou refuser notre assentiment à une proposition, celle-ci doit être présentée de manière *objective*. Implicitement, cette exigence traduit l'existence potentielle d'une part plus ou moins grande de *subjectivité* inhérente à la vérité — subjectivité d'où vient sans doute la difficulté de définir la vérité dans sa conception la plus générale. Or les logiciens s'accoutument mal de toute subjectivité ; ils cherchent donc autant que possible à en réduire et cerner la part. Illustrant cette volonté, le *Lalande* donne au terme *vérité* une définition particulière concernant les propositions :

Proposition vraie. « Quand une vérité est nécessaire, on peut en trouver la raison par l'analyse, la résolvant en idées et en vérités plus simples, jusqu'à ce qu'on en vienne aux primitives. » LEIBNIZ, *Monadologie*, 33.

Récursivement, cette définition emploie la notion de « *vérités primitives* », qu'il faut comprendre soit par les axiomes d'une théorie, soit par les hypothèses d'un raisonnement, dont la vérité est posée sans autre justification que des considérations intuitives, donc subjectives. Les règles de déduction sont également des primitives : exprimées comme des propositions logiques, elles correspondent soit à des schémas d'axiomes, soit à des méta-théorèmes de logique. La part de subjectivité est ainsi cernée, car de la vérité des axiomes d'une théorie ou des hypothèses d'un raisonnement découle celle des théorèmes de cette théorie ou des conclusions de ce raisonnement, par stricte application des règles de déduction, donc de façon parfaitement objective. En dehors de toute interprétation physique, la cohérence d'une théorie ou la validité d'un raisonnement ne tient que par le respect du principe de *non-contradiction*, à savoir que l'on ne puisse déduire à la fois la vérité et la fausseté d'une proposition.

II.4.2 De la notion de disponibilité à celle de consommabilité

Comme la notion de vérité, celle de disponibilité des ressources est difficile à définir. Pour commencer, le *Lalande* nous apporte fort peu d'éléments conceptuels : au mot *disponible*, il ne fait référence qu'à l'idée de *disponibilité d'esprit*, qui correspond au fait que « *les sentiments, l'action ou le jugement ne sont restreints par aucun engagement antérieur* ». Nous trouvons ici la notion de *non réservation*, mais elle ne suffit pas à caractériser fondamentalement celle de disponibilité. De son côté, le *Nouveau Petit Robert* apporte des énoncés satisfaisants pour l'intuition. Le terme *disponibilité* y est défini comme « *état de ce qui est disponible* », et renvoyés à cet adjectif, nous trouvons des exemples concrets :

♦ 1° (choses) Dont on peut disposer. V. **libre**. *Nous avons deux places disponibles. Appartenance disponible. Ce livre n'est pas disponible, il est épuisé.*

4. Dans ce dictionnaire, la définition des termes est parfois suivie d'une *critique* qui en étaye ou relativise les différents sens développés.

De plus, la définition du verbe *disposer* donne quelques éléments conceptuels : à *disposer de* est associée l'idée d'« avoir la possession, l'usage de ». Nous retrouvons la notion de *possession* que nous avons déjà identifiée comme relative aux ressources (cf. section II.2.4). L'idée de disponibilité d'une ressource suppose donc celle de *possession* de cette ressource, au sens où dire qu'une ressource est disponible, c'est d'abord affirmer qu'*on en a* un ou plusieurs exemplaires. Ensuite intervient effectivement l'idée de non-réservation : pour qu'une ressource soit vraiment disponible, il faut que l'on puisse *faire ce qu'on veut* des exemplaires qu'on a, donc qu'ils ne soient pas déjà réservés pour une action particulière. Nous retrouvons ici l'idée de *volonté d'action*, que nous avons réduite par indéterminisme à celle de *possibilité d'action* sur des exemplaires de ressources (cf. section II.3.6).

Finalement, nous considérons qu'une ressource est disponible quand des exemplaires de celle-ci sont *possédés* et *prêts à être consommés*, indépendamment des actions qui consommeront ces exemplaires, et hors de toute idée de volonté. Le mot *consommable*, qui selon le *Nouveau Petit Robert* signifie « qui peut être consommé » (au sens de « mangeable ») nous paraît plus à même d'exprimer notre emploi particulier du mot *disponible*. Par généralisation, nous l'emploierons dorénavant à la place de ce dernier, en posant la définition :

Un exemplaire de ressource est **consommable** quand il est considéré comme étant *possédé* et *prêt à être consommé*, indépendamment de l'action envisagée pour cette consommation.

Étudions maintenant l'analogie entre la notion de *consommabilité des ressources* et celle de *vérité des propositions*. Un premier point concerne la subjectivité. A priori, il y en a autant dans le fait de poser qu'un exemplaire de ressource est consommable ou qu'une proposition est vraie. De plus, il est également possible de rejeter cette subjectivité dans des *primitives*. Cependant, alors que toutes les primitives de la logique classique peuvent s'exprimer comme des formes propositionnelles tautologiques, nous percevons deux sortes de primitives en logique des ressources : les exemplaires de ressources posés *consommables* (les consommés d'une action) et les ressources qui sont *indéfiniment consommables*. Nous approfondirons ultérieurement cette notion (cf. section II.4.5). Un deuxième point concerne la transmission de la consommabilité des consommés aux produits d'une action valide, par rapport à la transmission de la vérité des prémisses aux conclusions d'une déduction valide. À la place d'une *transmission*, le principe de consommation/production instaure des *variations* de consommabilité des ressources, plus précisément une *diminution* ou une *augmentation* de la consommabilité des ressources, selon qu'elles apparaissent respectivement dans les consommés ou les produits de l'action. Se pose alors le problème de la cohérence des actions : par respect de quel principe général cette cohérence est-elle garantie ? La réponse nous paraît tenir, au moins en partie, dans le principe de Lavoisier déjà évoqué (cf. section II.2.6).

Maintenant, soulignons une différence fondamentale qui sépare la logique classique de celle des ressources. Au delà de l'analogie qui s'exprime par l'existence de chaque côté d'un principe de cohérence, ceux-ci semblent dénués de tout rapport. À l'origine de cette différence, nous relevons principalement deux aspects :

1. Peut-on exprimer la consommabilité d'une ressource par une grandeur binaire, analogue à la dualité *vrai/faux* ? Cela nous paraît difficilement concevable, dans la

mesure où plusieurs exemplaires de la même ressource peuvent être simultanément consommables. En étudiant la notion de *cumul d'exemplaires de ressources* (cf. section II.4.3), nous allons montrer que même une grandeur entière positive ne suffit pas à caractériser dans toute sa complexité la consommabilité d'une ressource .

2. Étant donné le principe de consommation/production, la consommabilité d'une ressource varie, au gré des actions réalisées, contrairement à la valeur de vérité d'une proposition classique, qui ne saurait changer au gré des déductions. Raisonner sur des ressources suppose donc implicitement l'introduction d'une *dimension temporelle* indexant les valeurs de consommabilité des ressources au fil du raisonnement, aspect que nous approfondirons également (cf. section II.4.4).

Par ailleurs, nous verrons que tout en rejetant la bivalence, nous pouvons quand même concevoir une notion duale de celle de consommabilité d'une ressource : en restant fidèles à notre vocabulaire, nous l'appelons sa *productibilité*.

II.4.3 Le cumul d'exemplaires de ressources

Nous avons observé que la notion de consommabilité ne pouvait se représenter par une grandeur binaire. Nous pouvons d'emblée écarter l'approximation qui consisterait à associer à une ressource une seule valeur (par exemple : *consommable*) quand au moins un exemplaire de cette ressource serait consommable, et une seule valeur (par exemple : *non-consommable*) dans le cas contraire. Avec une telle approximation, il serait impossible d'exprimer qu'une action soit exécutable, dans la mesure où plusieurs exemplaires d'une même ressource peuvent figurer — disons, *être cumulés* — dans ses consommés.

De plus, en développant la notion d'exemplaire de ressource, nous avons remarqué qu'il n'y avait aucune raison de distinguer les uns des autres les exemplaires d'une même ressource. Ce constat disqualifie toute tentative d'associer individuellement à chaque exemplaire une grandeur binaire de consommabilité. Une telle conception aboutit à une explosion combinatoire de l'expression des consommés et des produits des actions. En effet, considérons par exemple un ascenseur, et décomposons sa charge admissible, disons 300 kg en trente fractions K_1, \dots, K_{30} de 10 kg, qui représentent autant d'exemplaires d'une ressource *fraction de 10 kg*, notée K . Si l'ascenseur est vide, les trente exemplaires de la ressource K sont consommables. Comment s'expriment alors les consommés de l'action qui consiste, pour une personne de 60 kg, à monter dans l'ascenseur? N'importe quelle conjonction de six exemplaires de K pris parmi trente est acceptable. La condition d'exécution de cette action s'exprime donc comme la disjonction de toutes ces conjonctions de K_i (le nombre C_{30}^6 au total), ce qui donne une expression très lourde par rapport à la simplicité de la réalité qu'elle est sensée représenter.

Nous pourrions alors concevoir la consommabilité d'une ressource comme une *valeur entière positive*. Mais en prolongeant l'exemple de l'ascenseur, nous allons montrer que cette vision naïve est encore insuffisante. Imaginons qu'il y ait plusieurs cages d'ascenseurs en parallèle et considérons toutes les possibilités de cumul des fractions de charge consommables pour un usager. Nous observons alors une différence, selon que le cumul s'effectue dans un même ascenseurs ou plusieurs ascenseurs. En effet, supposons que l'usager désire monter à l'étage. Si suffisamment d'exemplaires de la ressource K sont consommables

et cumulés dans le même ascenseur, l'utilisateur peut monter. Dans ce cas, nous parlerons de cumul *en série* des exemplaires de ressources. En revanche, si ces exemplaires sont cumulés dans plusieurs ascenseurs, l'utilisateur ne peut pas monter, car son corps ne peut pas se fractionner pour s'adapter à la répartition des fractions de charges consommables. Dans ce cas, nous parlerons de cumul *en parallèle* des exemplaires de ressources. Pour bien comprendre la différence, examinons maintenant le *degré zéro* de consommabilité d'une ressource, c'est-à-dire quand aucun exemplaire n'est consommable. Lorsqu'un seul ascenseur est présent, mais plein, il s'agit du degré zéro en série de consommabilité de la ressource K . Lorsqu'aucun ascenseur n'est présent, il s'agit du degré zéro en parallèle. Par composition, nous pouvons également concevoir des cas plus complexes de non-consommabilité de K qui mêlent les degrés zéro de cumul en série et en parallèle.

En fait la notion de *cumul*, que le *Nouveau Petit Robert* définit au sens des choses comme une « *réunion* », nous renvoie à celle de *composition non idempotente* d'exemplaires de ressources. Par exemple, dans l'exemple d'un distributeur automatique, pour exprimer que la production d'un gobelet de café consomme deux pièces de un franc, nous pouvons dire que les consommés de l'action se réduisent à un cumul (ici en série) de deux exemplaires de la ressource *pièce de un franc*. Mais le cumul peut également se concevoir entre des exemplaires de ressources différentes. Nous en avons déjà évoqués quelques exemples (cf. section II.2.7). Nous proposons donc la définition suivante :

Le *cumul en série* et le *cumul en parallèle* d'exemplaires de ressources sont deux opérations de composition de ressources ; elles sont commutatives, associatives, et admettant chacune un élément neutre qui correspond à un degré zéro de cumul.

En fait, ces deux opérations correspondent respectivement aux connecteurs multiplicatifs *fois* et *par* de la logique linéaires, que nous comparerons formellement au chapitre III.

Revenons maintenant à la notion de consommabilité des ressources. Supposons que soit consommable un exemplaire d'une ressource composée d'un cumul de deux exemplaires d'une ressource A . Quelle est alors la valeur de consommabilité de la ressource A ? Si nous voulons distinguer la nature de ce cumul, nous ne pouvons pas réduire la consommabilité de A à la valeur entière 2. Sinon, nous pourrions par exemple conclure qu'une personne peut monter à l'étage en répartissant son corps dans deux ascenseurs ! Par ailleurs, nous devons également tenir compte d'autres opérations de composition comme celles que formalisent les connecteurs additifs *avec* et *plus*. Nous laissons la question en suspens car sa réponse est complexe. En effet, la sémantique des phases que GIRARD a développée dans [23] montre que pour associer des valeurs aux propositions dans la tradition de la théorie des modèles, il faut travailler un ensemble de valeurs, a priori non fini : les parties d'un monoïde commutatif.

II.4.4 La dimension temporelle des actions

Comme l'explique GIRARD dans [27], les propositions de la logique classique obéissent au « *principe de pérennité de la vérité* » : au cours d'un raisonnement ou dans une théorie, leur valeur de vérité n'est pas susceptible de changer. La logique classique n'a donc de

sens que dans un univers statique, autrement dit *atemporel*. Certes, l'on peut concevoir une manière d'ordonner partiellement les conclusions dans un raisonnement, mais cet ordre reste relatif au raisonnement en question, et n'a aucune incidence sur les valeurs de vérité des autres propositions. En ce sens, il est inutile d'établir un ordre même partiel sur les thèses d'une théorie. A contrario, la quantité d'exemplaires consommables d'une ressource est variable, et peut très bien évoluer de façon cyclique d'actions en actions. Par exemple, le cumul des fractions de charges consommables dans un ascenseur varie au gré des entrées et sorties des usagers. De plus, l'ordre des choix des actions influe sur les possibilités d'actions ultérieures. Dans le cas où plusieurs ascenseurs ont même destination, la manière dont les gens s'y répartissent peut être plus ou moins efficace. Il se peut qu'une personne qui pourrait théoriquement monter soit contrainte de rester, en raison d'une mauvaise répartition de la charge.

La logique des ressources n'a donc de sens que dans un univers dynamique, ce qui suppose l'existence d'une *dimension temporelle* relative aux actions. Cette dimension n'est pas nécessairement une échelle continue de valeurs. Comme dans la théorie des réseaux de Petri, nous la concevons telle que *fondamentalement discrète*, sachant bien entendu qu'il s'agit encore une fois d'une notion méta-logique :

La *dimension temporelle* d'une action ou d'une suite d'action est une indexation des consommés et des produits de ces actions.

Naturellement, les *instants* sont la suite des indices de la dimension temporelle. Entre deux instants, nous avons une relation d'ordre qui relie les consommés aux produits d'une action, par écoulement d'une unité de temps.

Pour concevoir une succession d'actions dans laquelle les mêmes exemplaires de ressources sont tour à tour considérés comme consommés ou produits des actions, nous introduisons la notion d'*état des ressources*, dont aucun analogue n'existe en logique classique. À ce sujet, citons GIRARD, qui explique dans [28] que « *la notion d'état n'a pas été suffisamment abordée en logique* ». Au lieu de l'interprétation courante des théories, à savoir le schéma « *logique classique + axiomes* », il propose de considérer une approche nouvelle : « *logique linéaire + axiomes + état courant* ». Mais il n'en dit pas plus sur la notion d'état. Dans le cas des ressources, nous pensons que elle n'a de sens que relativement à une action ou une suite d'actions, qui toutes expriment le point de vue d'un même observateur. Outre une conception atomique de la durée des actions, nous posons aussi comme hypothèse leur *asynchronisme* : nous supposons que les actions ne peuvent alors ni s'exécuter en même temps, ni se chevaucher. Moyennant quoi, nous définissons la notion d'état des ressources de la façon suivante :

L'*état des ressources* est l'ensemble des valeurs de consommabilité à un instant donné des ressources intervenant dans une suite d'actions données. À toute action correspond un *changement d'état*, c'est-à-dire une variation des valeurs de consommabilité des ressources, conformément aux consommés et produits de cette action.

En fonction de l'état des ressources, nous pouvons alors exprimer les conditions d'exécution des actions, qui permettent de dire si une action est exécutable, ou encore s'il est

possible qu'une action vienne juste d'être exécutée. Plus précisément, nous posons que :

Les **pré-conditions** et les **post-conditions** d'une action sont les conditions nécessaires et suffisantes sur l'état des ressources respectivement juste avant et juste après exécution d'une action.

Ces termes sont aussi inspirés du vocabulaire de la théorie des réseaux de Petri.

II.4.5 La notion de consommabilité indéfinie

Nous avons introduit la notion de *ressource inépuisable* avec les ressources d'action correspondantes aux actions valides (cf. section II.3.5). Ces ressources ont la particularité que leurs exemplaires sont consommables en quantité illimitée, indépendamment du point de vue adopté. Inversement, elles sont *futile*, au sens où toute action correcte qui prend explicitement des exemplaires de ces ressources comme consommé reste correcte si on supprime ces consommés. D'une manière réciproque, nous pouvons généraliser la notion de ressource inépuisable, c'est-à-dire concevoir la possibilité de considérer inépuisable n'importe quelle ressource. Une telle conception permet de faire abstraction du principe de Lavoisier pour certaines ressources dans une action donnée, autrement dit, de ne pas s'attacher à savoir dans quelle mesure sont nécessaires des exemplaires de ces ressources pour que l'action soit correcte, pas plus que savoir combien doivent en figurer dans les produits de l'action. L'exemple typique que donne GIRARD est celui du millionnaire qui ne se soucie guère de savoir combien d'exemplaires de la ressource *un franc* il dépense quand il va à la boulangerie, et encore moins combien il lui en reste après. À son point de vue, cette ressource peut approximativement être considérée comme inépuisable, au sens où sa consommation en quelques exemplaires est négligeable au regard du cumul des exemplaires consommables. Nous retrouvons là le sens concret de l'expression « *ressources inépuisables* » employée dans la définition du *Nouveau Petit Robert*.

Maintenant, la question clef est : quelle est la consommabilité d'une telle ressource ? On pourrait penser à un infini relatif au domaine des valeurs de consommabilité, restreint au cas du cumul en série. En effet, poser dans les consommés d'une action qu'une ressource est inépuisable suppose que les exemplaires de cette ressource soient consommables en quantité illimitée, et conjointement. Remarquons cependant que quand notre millionnaire va à la boulangerie, il ne paye pas ses achats en posant tout son argent sur le comptoir — argent qu'il ne porte pas sur lui, sauf par le biais d'une carte de crédit. Bref, tout se passe comme si le cumul infini d'exemplaires de la ressource était simplement potentiel, l'action ne consommant que la juste quantité nécessaire, sans que l'on se soucie de savoir combien. C'est pourquoi nous employons le terme de consommabilité *indéfinie* (et non *infinie*) que nous définissons de la façon suivante :

Une ressource est **indéfiniment consommable** si potentiellement n'importe quel cumul en série d'exemplaires de cette ressource est consommable.

Le terme *indéfini* sous-tend un degré de liberté quant à la quantité d'exemplaires effectivement consommés d'une ressource indéfiniment consommable. En logique linéaire, cette notion correspond à l'application du connecteur unaire *bien sûr* à une proposition. Quant

à son dual, le connecteur unaire nommé *pourquoi pas*, nous lui faisons correspondre l'idée d'un cumul *en parallèle* d'une quantité *inconnue* d'exemplaires d'une ressource.

La notion de ressource indéfiniment consommable nous permet, en particulier, de considérer au même titre des ressources correspondantes à des actions valides, et des ressources d'action quelconques. En posant dans les consommés d'une action une ressource d'action indéfiniment consommable, nous pouvons exprimer une loi qui régit des phénomènes de consommation/production d'un domaine particulier. Rappelons-nous l'exemple de la transformation de l'eau en glace. Avec de l'eau et du froid, on peut *toujours* faire de la glace, ce qui ôte l'intérêt à considérer que la ressource d'action qui exprime la transformation se consomme : nous la considérons donc comme étant indéfiniment consommable. Une telle ressource correspond implicitement à une règle d'action particulière, c'est-à-dire uniquement applicable à certaines ressources, de la même façon qu'un axiome ajoute un principe à une théorie au sens de la logique classique.

La notion de ressource indéfiniment consommable paraît très proche de celle de *fait éternel*, c'est-à-dire de vérité au sens de la logique classique. Cependant, il nous semble que poser qu'une ressource A est indéfiniment consommable dans un état initial ne signifie pas pour autant qu'un exemplaire de cette ressource sera directement consommable dans n'importe quel état atteint par une action correcte. En revanche, de cet état quel qu'il soit, il sera toujours possible de produire un exemplaire de A . C'est précisément la raison pour laquelle nous percevons que le cumul des exemplaires de A n'est que *potentiellement* infini. Reprenons l'exemple du millionnaire : bien que celui-ci soit a priori toujours en mesure de fournir cinq francs, il peut très bien avoir les poches vides. Nous concevons donc différemment l'affirmation *j'ai toujours un franc* et le fait de poser comme étant indéfiniment consommable la ressource *un franc* dans les consommés d'une action.

II.4.6 La notion de productibilité

Si la consommabilité est aux ressources ce que la vérité est aux propositions, à quoi correspond la fausseté pour une ressource ? Nous n'y voyons pas du tout l'idée de non-consommabilité, c'est-à-dire l'absence d'exemplaires de cette ressource dans un état donné. En effet, il ne s'agit là que d'une valeur particulière de consommabilité, que nous avons évoquée par la notion de degré zéro de cumul d'exemplaires de ressources. Introduisons alors la notion duale à celle de consommabilité d'une ressource : sa *productibilité*. Rappelons que nous avons défini un exemplaire de ressource comme étant *consommable* quand nous le considérons possédé et prêt à être consommé, indépendamment de l'action envisagée. Par dualité, nous posons la définition suivante :

Un exemplaire de ressource est **productible** quand il est considéré *en vue d'être produit*, indépendamment de l'action envisagée pour cette production.

De plus, comme la consommabilité, nous concevons que la productibilité d'une ressource se représente par une valeur variable dans le temps, qui ne se réduit pas à un entier positif, et qui peut être également *indéfinie*.

Si la notion de consommabilité renvoie à l'idée intuitive de disponibilité, à quoi correspond celle de productibilité ? À l'adjectif *productible*, le *Nouveau Petit Robert* associe le

sens de « *qui peut être produit, obtenu* » et donne l'exemple dans l'expression *marchandise productible à peu de frais*. Cependant, notre définition se démarque de cette signification. En aucun cas elle ne sous-tend qu'il existe un moyen connu de produire des exemplaires d'une ressource quand ceux-ci sont considérés productibles. Par ailleurs, la notion de productibilité d'une ressource diffère de celle de consommabilité parce qu'elle ne sous-tend aucune idée de *possession*, contrairement à celle de ressource consommable. Il y a une certaine analogie avec la conception d'un entier négatif, par rapport à celle d'un entier positif. En tant que cardinal, ce dernier peut facilement se représenter avec une collection d'objets de même type, par exemple des pommes. En revanche, une certaine abstraction est nécessaire pour concevoir l'idée d'avoir « moins trois pommes ». Pour y arriver, il est souvent fait référence à la notion de *dette*. Ce mot ne doit cependant pas nous induire en erreur. Dans le cas d'un exemplaire de ressource productible, disons qu'il y a aussi une idée de dette, mais en excluant toute référence au droit. En effet, de même qu'il n'y a aucune obligation à consommer une ressource consommable, nous considérons qu'il n'y a aucune obligation à produire un exemplaire de ressource productible. Cette nuance nous conduit à l'idée de *besoin* d'une ressource, dans la mesure où nous envisageons ses possibilités de production. Néanmoins, ce rapprochement n'est pas satisfaisant car la notion de besoin s'applique à un être et non à une ressource : on ne dit pas qu'une ressource « est besoin », mais que *quelqu'un* a besoin de cette ressource. En revanche, on pourrait éventuellement dire qu'elle est *exigible*, mais encore une fois sans obligation sous-tendue. Bref, la notion de productibilité correspondrait à une idée de *quête*.

Mais plus encore que l'absence d'obligation, nous n'associons même pas d'idée de volonté à la productibilité d'une ressource. Comme pour la consommabilité, il s'agit simplement d'éventualité. En somme, les notions de consommabilité et de productibilité d'une ressource ne s'opposent que par une *orientation* des exemplaires de la ressource en question. Cette idée prend tout son sens si l'on admet qu'un raisonnement sur des ressources nécessite une dimension temporelle. Alors nous pouvons dire que :

- poser qu'un exemplaire de ressource est consommable revient à s'intéresser aux possibilités de le consommer, à son *futur* ;
- poser qu'un exemplaire de ressource est productible revient à s'intéresser aux possibilités de le produire, à son *passé*.

De plus, nous ne concevons pas ces deux orientations comme *incompatibles*. En effet, rien n'interdit fondamentalement de chercher à la fois à produire et à consommer des exemplaires d'une ressource. Pensons par exemple à de l'argent : on peut très bien en consommer d'un côté, c'est-à-dire s'en servir pour des achats quotidiens et chercher à en produire d'un autre côté, c'est-à-dire essayer d'en gagner.

Cet exemple illustre que le principe de non-contradiction de la logique classique n'a pas de forme analogue vis-à-vis de la dualité consommer/produire de la logique des ressources. Signalons qu'en logique linéaire, une proposition de forme « contradictoire » (par exemple la conjonction multiplicative d'une proposition et de sa négation) n'est pas fatale comme en logique classique, au sens où elle ne permet pas de déduire n'importe quelle autre proposition. L'interprétation de la négation linéaire comme un opérateur d'inversion de l'orientation temporelle d'une ressource permet de comprendre que la notion de

contradiction au sens classique est caduque en logique linéaire.

II.5 Raisonnement logique sur des ressources

Entre les notions que nous avons introduites — dont les plus fondamentales sont celles de ressource, d'exemplaire de ressource, d'action, de consommabilité/productibilité — et les notions primitives de la logique classique, nous avons constaté d'importantes différences sémantiques. Par conséquent, nous n'accordons aucune garantie quant à la pertinence des raisonnements de logique classique dans lesquels les propositions sont considérées comme des ressources — ou du moins, si les propositions mettent en jeu des ressources, et que les raisonnements prétendent tirer des conclusions relatives à la disponibilité des ressources en question. Nous ferons cependant la tentative d'écrire de tels raisonnements dans un esprit didactique, en reprenant l'exemple des cigarettes de GIRARD. À la lumière des développements précédents, nous détecterons précisément les défaillances de la logique classique quand elle s'applique aux ressources; nous justifierons ainsi les changements d'esprit qui nous conduisent à aborder la logique linéaire.

II.5.1 Tentative de raisonnement en logique classique

Pour déceler l'inadéquation de l'approche classique, il importe avant tout de respecter scrupuleusement la forme d'emploi des connecteurs logiques. En particulier, nous devons bannir les facilités d'écriture comme celles qu'adopte GIRARD dans ses exemples. Ainsi, la préposition *pour* employée dans la proposition :

pour cinq francs j'ai un paquet de Gauloises

tient lieu du connecteur conditionnel *si... alors...* Mais contrairement à une conditionnelle classique, cette préposition n'exprime pas que l'achat est inéluctable dès lors que la condition est satisfaite; dans le langage courant, elle sous-tend une modalité de possibilité. Pour exprimer cette modalité tout en respectant la forme d'écriture du conditionnel, nous devons plutôt écrire :

si j'ai cinq francs alors je peux avoir un paquet de Gauloises

qui est de la forme *si A alors B*, et dans laquelle l'énoncé de la proposition *B* explicite, par l'emploi du verbe *pouvoir*, la modalité de possibilité. Cette modalité est très importante. Dès que nous l'omettons, une déduction aussi simple que l'application suivante du modus ponens devient irréaliste :

si j'ai cinq francs alors j'ai un paquet de Gauloises
 (or) *j'ai cinq francs*
 (donc) *j'ai un paquet de Gauloises.*

En effet, au sens des ressources, la vérité de la conclusion n'est pas compatible avec le maintien de la vérité de la deuxième prémisse. En revanche, expliciter la modalité de possibilité évite la contradiction. Dans notre exemple, la conjonction de la seconde prémisse et de la conclusion donne :

j'ai cinq francs et je peux avoir un paquet de Gauloises

proposition qui n'est pas irréaliste au sens des ressources puisque l'action d'achat, exprimée seulement comme une possibilité, ne remet pas en cause la disponibilité des ressources qu'elle requiert. Cependant, au fil des déductions vont apparaître des risques de confusion. Reprenons l'exemple avec une autre possibilité d'achat :

si *j'ai cinq francs* alors *je peux avoir un paquet de Gitanes*
 (or) *j'ai cinq francs*
 (donc) *je peux avoir un paquet de Gitanes.*

En combinant cette déduction avec la précédente, nous déduisons la conclusion :

je peux avoir un paquet de Gauloises et je peux avoir un paquet de Gitanes

qui reste réaliste mais qui, au sens des ressources, est à la limite de la confusion. Dans le langage courant, on serait facilement tenté de factoriser la modalité de possibilité pour obtenir finalement la proposition :

je peux avoir un paquet de Gauloises et un paquet de Gitanes

laquelle nécessite en réalité *deux fois* la pré-condition *j'ai cinq francs*. En fait, compte tenu de la limitation des ressources du client (par hypothèse, il n'a *que* cinq francs), on attendrait que la seule proposition déductible soit :

je peux avoir soit un paquet de Gauloises soit un paquet de Gitanes

dans laquelle la disjonction exclusive *soit... soit...* remplace la conjonction *et* employée précédemment, et exprime — cela reste néanmoins approximatif — l'impossibilité d'exécuter à la fois les deux actions.

II.5.2 Critique du raisonnement classique appliqué aux ressources

Les définitions que nous avons développées révèlent clairement les griefs imputables aux déductions classiques quand elles s'appliquent aux ressources. Dans les exemples précédents, les déductions donnent une certaine apparence de pertinence par des subterfuges de formulation qui explicitent les notions primitives corrélatives à celle de ressource à l'intérieur des propositions :

- l'emploi des pronoms personnels comme dans « *j'ai...*, *je peux...* » explicite à l'intérieur des propositions le *point de vue* adopté, alors que ce dernier est intrinsèque à tout le raisonnement ;
- l'emploi du verbe *pouvoir* comme dans « *je peux...* » explicite à l'intérieur des propositions la modalité de *possibilité*, alors que celle-ci est inhérente à toute action sur les ressources ;
- l'emploi du verbe *avoir* comme dans « *j'ai...*, *je peux avoir...* » sous-tend de l'intérieur des propositions l'idée de consommabilité d'une ressource au sens de sa possession, alors que cette idée devrait revenir à considérer un exemplaire de cette ressource comme une prémisses.

Du coup, aucune comparaison de différents points de vue, aucune détection de conflits entre des actions, ni évaluation de valeur de consommabilité des ressources n'est à espérer au fil des déductions. Dès que ces aspects sont internes aux propositions, il n'est plus du ressort de la logique propositionnelle de les manipuler.

II.5.3 Vers un raisonnement formulé en logique linéaire

Pour pallier ces inconvénients, nous allons donc proscrire toute formulation des propositions qui explicite les concepts relatifs à la notion de ressource. Par un changement d'esprit radical, nous allons considérer que toute proposition représente un *exemplaire* d'une ressource, éventuellement composé d'exemplaires d'autres ressources plus élémentaires. De plus, nous admettrons que poser plusieurs fois l'hypothèse d'une même proposition signifie que la ressource qu'elle représente est consommable en autant d'exemplaires *cumulés en série*. Enfin, nous concevrons toute déduction non pas comme une nécessité, mais comme une *action éventuelle*.

Selon cette conception, les propositions de l'exemple des cigarettes s'écrivent simplement *cinq francs*, *paquet de gauloises*, etc. Il n'est alors plus question de vérité et de fausseté; en effet, énoncer qu'une proposition telle que *paquet de Gauloises est vraie* n'évoque rien de sensé. Certes, la formulation des raisonnements apparaît étrange :

si *cinq francs* alors soit *paquet de Gauloises* soit *paquet de Gitanes*
 (or) *cinq francs*
 (done) soit *paquet de Gauloises* soit *paquet de Gitanes*.

mais à cela, rien d'étonnant : l'emploi des connecteurs classiques est inadapté aux ressources. Leurs noms sont donc ici usurpés pour désigner d'autres relations, les connecteurs linéaires, à savoir ici l'implication *entraîne* à la place du conditionnel *si... alors...*, et la conjonction additive *avec* à la place de la disjonction exclusive *soit... soit...*

Chapitre III

Interprétation des connecteurs linéaires

Dans ce chapitre, nous proposons pour chaque connecteur de la logique linéaire une interprétation concrète, reposant sur les notions primitives de ressource, d'action et de consommabilité/productibilité définies au chapitre II. Nous nous guidons sur les propriétés syntaxiques des connecteurs, que nous exprimons dans leur formalisme d'origine : le calcul des séquents linéaires. Nous transcrivons formellement de nombreux exemples réels de consommation/production pour illustrer notre approche.

Plan du chapitre

Pour dresser un premier panorama des connecteurs linéaires, nous commencerons par exposer les notions élémentaires du calcul des séquents. Nous expliquerons comment s'effectue le passage des connecteurs classiques aux connecteurs linéaires et comment ces derniers se regroupent en trois familles : les *multiplicatifs*, les *additifs* et les *exponentiels*. Nous insisterons sur la place particulière de la *négation linéaire*, nommée *nil*, qui constitue la « clef de voûte » du système. Nous poserons les principes généraux de notre interprétation d'un séquent linéaire et de ses éléments, et nous aborderons de suite le cas de la négation *nil*. Nous la concevrons comme un inverseur de l'orientation *passé/futur* des exemplaires de ressources par rapport à la dimension temporelle d'une action. Toutefois, pour examiner les rapports de dualité qu'elle sous-tend entre les autres connecteurs, nous devons d'abord interpréter ces derniers. Nous traiterons en premier des multiplicatifs qui sont les plus fondamentaux car ils précisent le sens des méta-connecteurs du calcul des séquents. À la conjonction *fois*, nous associerons l'idée de cumul en série d'exemplaires de ressources — interprétation similaire à celle communément admise. Quant à la disjonction *par*, réputée difficile, nous montrerons qu'elle correspond à l'idée de cumul en

parallèle d'exemplaires de ressources. En combinant les connecteurs multiplicatifs, nous exhiberons des séquents remarquables confirmant notre distinction de sens entre *fois* et *par*. Nous verrons ensuite les additifs. Aux connecteurs *avec* et *plus*, nous associerons respectivement les interprétations communes de *choix externe* et *interne*. Nous analyserons des exemples sur le thème du distributeur automatique et nous approfondirons le sens des propriétés de (semi-) distributivité des multiplicatifs sur les additifs. Nous achèverons notre revue par les exponentiels *bien sûr* et *pourquoi pas*, en analysant d'abord leurs propriétés, qui sont complexes. Notre interprétation découlera naturellement de celles des autres connecteurs, et sera confirmée par les propriétés de distributivité des premiers sur ces derniers. Enfin, nous reprendrons l'interprétation de la négation linéaire (laissée en suspens). Nous examinerons le *principe de dualité*, qui concerne tous les connecteurs sauf les implications. Nous illustrerons notre approche en reprenant un exemple sur le thème d'un menu de restaurant proposé dans les articles [26, 27] de GIRARD. Puis nous aborderons le *principe du tiers exclu*. Nous montrerons qu'en logique linéaire, il ne correspond pas à l'exclusion d'une tierce valeur de vérité des propositions, et que la conjonction multiplicative d'une formule et de sa négation n'est pas contradictoire.

III.1 Panorama des connecteurs linéaires

III.1.1 Introduction au calcul des séquents

Le formalisme syntaxique le plus connu de la logique est la *méthode axiomatique*, inaugurée par FREGE en 1879 et systématiquement utilisée depuis en mathématiques [37]. Ce formalisme exprime la syntaxe de la logique par :

- un ensemble de propositions posées sans conditions, les *axiomes*,
- éventuellement des *définitions explicites*, comme $A \Leftrightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$,
- des *règles de déduction* comme le modus ponens et la substitution qui, à partir des axiomes, permettent de démontrer d'autres propositions, les *théorèmes*.

C'est le fait d'admettre corrects sans conditions les axiomes qui définit *implicitement* les propriétés des connecteurs. De plus, ces définitions sont *mutuelles* car aucun système d'axiomes ne peut définir individuellement chaque connecteur — en général, on se passe difficilement de l'implication pour poser un axiome. Par exemple, dans le système d'axiomes proposé par HILBERT et AKERMANN en 1934, la conjonction classique \wedge est définie mutuellement avec l'implication \Rightarrow par les trois axiomes :

$$(A \wedge B) \Rightarrow A \quad (A \wedge B) \Rightarrow B \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$$

Si la méthode axiomatique laisse une grande liberté quant au choix du nombre et de la forme des axiomes pour définir les mêmes connecteurs, elle présente l'inconvénient sérieux de requérir de l'intuition pour prouver les théorèmes, aussi simple soient les axiomes. Le plus souvent, la difficulté tient dans le fait de trouver en cours de preuve la bonne substitution permettant d'aboutir à l'instance d'un axiome.

Un autre formalisme syntaxique de la logique est la *déduction naturelle*, fondée par le logicien allemand Gerhard GENTZEN en 1934 dans le but de calquer le mode de raisonnement du mathématicien pour mener une démonstration [37, 24, 49]. Dans ce formalisme, il n'y a pas d'axiomes, mais uniquement des règles de déduction. En fait, chaque connecteur est défini par des règles dites d'*introduction* et d'*élimination* (sous entendu, dans une preuve). Par exemple, celles de la conjonction classique sont :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_1 \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge_{E1} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge_{E2}$$

La règle d'introduction \wedge_1 signifie que des deux prémisses A et B , on peut déduire la conclusion $A \wedge B$. Les deux règles d'élimination \wedge_{E1} et \wedge_{E2} signifient que de la prémisse $A \wedge B$, on peut déduire la conclusion A aussi bien que la conclusion B . Outre qu'elle est d'un maniement beaucoup plus aisé et intuitif que la méthode axiomatique, la déduction naturelle présente l'avantage de définir les connecteurs — donc d'en expliquer le sens — *individuellement*. De plus, la déduction naturelle fait apparaître toute preuve comme une arborescence de formules dont la racine est la conclusion prouvée et les feuilles les prémisses. Cependant cette vision est plus une illusion graphique qu'une réalité mathématique, à cause de ce que l'on appelle la *décharge des prémisses*. Par exemple, la règle d'introduction de l'implication n'est applicable que si son antécédent apparaît au moins une fois comme formule de la preuve, ce qui s'écrit :

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow_1$$

Dans la preuve de la formule B dont l'une des formules intermédiaires est la formule A , les crochets entourant cette dernière signifient qu'en tant que prémisse, elle n'est plus nécessaire. On dit qu'on peut la *décharger*, puisqu'elle a été injectée dans l'implication $A \Rightarrow B$ comme antécédent. La décharge des prémisses n'est cependant ni obligatoire, ni systématique : on peut décharger seulement certaines des occurrences d'une même prémisse, éventuellement aucune. Autrement dit, l'application d'une règle comme l'introduction de l'implication est une opération *globale* sur une preuve. Elle en complique la structure car elle induit un pointeur sur chaque occurrence de prémisse déchargée.

Le *calcul des séquents*, également fondé par GENTZEN en 1934, remédie aux défauts de la déduction naturelle, en exprimant les preuves au niveau du méta-langage : les *séquents* — éléments de construction des preuves — ne sont pas des formules propositionnelles mais des *déductions* qui explicitent toutes leurs prémisses et conclusions [37, 24, 49]. Comme en déduction naturelle, les lois de la logique sont définies exclusivement par des règles mais, parce qu'elles s'appliquent à des déductions et non à des formules, ce sont des règles de *méta-déductions*. Certes, l'écriture des preuves est beaucoup plus lourde, mais ces dernières y gagnent une véritable structure arborescente, toutes les règles étant applicables *localement*. Autre avantage, le calcul des séquents éclaire les aspects *structurels* de la logique : certaines règles s'écrivent indépendamment de toute définition explicite des connecteurs. Épistémologiquement, c'est un point primordial : si à l'origine, GENTZEN a

introduit le calcul des séquents pour les logiques classique et intuitionniste, GIRARD a montré qu'il était aussi parfaitement adapté pour définir la logique linéaire [23], conférant à la méthode un statut de formalisme général de la logique.

Formellement, un *séquent* (classique ou linéaire) est une expression logique constituée de deux membres, chacun étant une suite de *méta-variables*, c'est-à-dire de variables de formules propositionnelles, acceptant implicitement toute substitution. En tant que suites, les membres d'un séquent peuvent contenir plusieurs occurrences de la même formule, et l'ordre de ces formules n'est pas indifférent. La forme générale d'un séquent s'écrit :

$$A, B, \dots \vdash E, F, \dots$$

où le symbole \vdash , dit le *tourniquet* (en anglais, le *turnstile*), est un méta-connecteur primitif qui sépare le membre *gauche*, ici la suite A, B , etc. du membre *droit*, ici E, F , etc. La *virgule* qui sépare les méta-variables est également un méta-connecteur primitif. Pour la logique classique, les règles, dites *logiques*, du calcul des séquents qui définissent explicitement les connecteurs sont telles que le tourniquet signifie le connecteur *implique*. Quant à la virgule, sa signification n'est pas la même suivant qu'elle se situe de part et d'autre du tourniquet : à gauche, elle sous-tend la conjonction *et*, à droite la disjonction *ou*. L'interprétation classique d'un séquent est donc que de la conjonction des prémisses qui forment son membre gauche, on peut déduire la disjonction des conclusions qui forment son membre droit. Si la conjonction de prémisses est une idée familière (car il en faut fréquemment plusieurs pour faire une déduction), la disjonction de conclusions l'est moins : le plus souvent, un raisonnement cherche à déduire une seule conclusion et non une alternative entre plusieurs. En fait, un séquent dont la suite des conclusions n'est pas réduit à une seule formule exprime une forme généralisée de raisonnement.

La *correction* de la déduction qu'exprime un séquent ne dépend que de la forme de ses prémisses et conclusions ; le *calcul* des séquents permet d'en obtenir la preuve syntaxique. Les règles du calcul spécifient les formes de méta-déductions qui permettent, à partir d'un ou deux séquents prouvables, de déduire un nouveau séquent prouvable. Les points de départ de toute preuve sont des *séquents axiomes*, comme $A \vdash A$, qui expriment *évidemment* une déduction correcte.

Les notions élémentaires sur le calcul des séquents que nous venons de présenter sont suffisantes pour exprimer sous la forme de séquents prouvables les propriétés des connecteurs linéaires, sans en écrire les preuves — afin d'alléger la rédaction de ce chapitre, elles seront admises. Pour signifier qu'un séquent n'est pas prouvable, c'est-à-dire qu'il exprime une déduction non correcte, nous utilisons le symbole \nvdash à la place du tourniquet. Pour exprimer l'équivalence entre deux formules A et B , nous écrivons $A \dashv\vdash B$ au sens où les séquents $A \vdash B$ et $B \vdash A$ sont l'un et l'autre prouvables. Pour insister sur la non réciprocity d'une déduction, par exemple si $A \vdash B$ et $B \nvdash A$, nous écrivons $A \not\vdash B$. Enfin, pour exprimer l'absence totale de rapports d'implication entre deux formules, nous écrivons $A \not\vdash B$, au sens où $A \nvdash B$ et $B \nvdash A$.

III.1.2 Passage de la logique classique à la logique linéaire

Comme nous l'avons expliqué au chapitre I, le passage des connecteurs classiques aux connecteurs linéaires s'effectue par le rejet des propriétés d'*idempotence* de la conjonction

et la disjonction classique. Tous les connecteurs classiques étant en relation, ce rejet n'a de sens qu'au prix d'une refonte intégrale du système. Le formalisme du calcul des séquents apparaît alors d'un intérêt décisif, car il exprime les propriétés d'idempotence de la conjonction et la disjonction par des règles *structurelles*, antérieures à toute définition explicite de connecteurs. En fait, ces règles structurelles, dites *de contraction* et *d'affaiblissement*, établissent l'idempotence de la virgule : elles stipulent qu'aussi bien dans le membre gauche que droit d'un séquent, deux occurrences successives de la même formule peuvent se réduire à une, et que l'on y peut ajouter n'importe quelle formule. En précisant le sens de la virgule, suivant sa position par rapport au tourniquet, la conjonction *et* et la disjonction *ou* héritent de la propriété d'idempotence. La justification sémantique de l'idempotence est simple : étant donné une déduction valide en logique classique, cette validité n'est remise en cause ni par la répétition d'une prémisses ou d'une conclusion, ni par l'ajout d'une prémisses ou d'une conclusion supplémentaire — en se souvenant que pour les conclusions, la virgule correspond à une disjonction. Signalons également l'existence des règles structurelles *d'échange*, qui autorisent n'importe quelle permutation d'ordre des formules dans chacun des deux membres d'un séquent. Ces règles établissent la *commutativité* de la virgule, dont héritent implicitement la conjonction et la disjonction classiques. La commutativité de la virgule se justifie sémantiquement, par le fait que l'ordre d'énumération des prémisses et des conclusions n'a aucune incidence sur la validité d'une déduction classique.

Pour comprendre le passage des connecteurs classiques aux connecteurs linéaires, observons encore que les règles logiques des connecteurs binaires classiques *et*, *ou*, *implique*, peuvent s'écrire chacune selon deux formulations différentes, l'une dite *multiplicative*, l'autre *additive*. En vertu des règles de contraction, et d'affaiblissement, les deux formulations sont toujours équivalentes. Mais dès que l'on supprime ces règles structurelles pour ne garder que celles d'échange, alors on remplace chacun des connecteurs binaires classiques par deux nouveaux connecteurs distincts, qui se répartissent dans deux familles, celle des *multiplicatifs* et celles des *additifs*. De surcroît, on peut maintenant concevoir deux nouveaux connecteurs unaires, qui permettent de rétablir (respectivement à gauche et à droite du tourniquet) les règles de contraction et d'affaiblissement, mais uniquement pour la proposition qu'ils affectent. Ces deux connecteurs constituent la famille des *exponentiels*. Quant à la négation, son cas est particulier : de par son unarité, elle n'accepte qu'une seule formulation de règles, contrairement aux connecteurs binaires. Par conséquent, la suppression des règles de contraction et d'affaiblissement n'engendre aucune nouveauté syntaxique pour la négation. Néanmoins, cette dernière est forcément en rapport avec les autres connecteurs du système, donc sémantiquement, elle diffère de la négation classique, et c'est pourquoi on la nomme *négation linéaire*.

En résumé, les connecteurs linéaires sont donc plus nombreux que leur analogues classiques. Ils forment un système comprenant :

- la négation linéaire, connecteur unaire, nommée *nil*;
- les connecteurs binaires multiplicatifs, à savoir l'implication linéaire *entraîne*, la conjonction *fois* et la disjonction *par* ;

- les connecteurs binaires additifs, à savoir la conjonction *avec*, la disjonction *plus* et l'implication additive ;

les connecteurs unaires exponentiels, à savoir la conjonction *bien sûr* et la disjonction *pourquoi pas*.

Dans le calcul des séquents linéaires qui définit leur syntaxe, seuls les méta-connecteurs (le tourniquet et la virgule) gardent leur notation originale du calcul des séquents classiques. Mais implicitement, les règles logiques des connecteurs linéaires y associent des significations toutes multiplicatives : le tourniquet correspond à l'implication *entraîne*, et la virgule respectivement la conjonction *fois* ou la disjonction *par*, suivant qu'elle est placée à gauche ou à droite du tourniquet.

III.1.3 Interprétation d'un séquent linéaire au sens des ressources

En logique linéaire, les séquents expriment des déductions sur des propositions, qui ne répondent pas au principe de transmission de la vérité, car les prémisses sont *consommées* pour *produire* les conclusions. En référence aux définitions du chapitre II, les principes généraux de notre interprétation sont les suivants :

- un séquent représente une *action* sur des ressources, laquelle est intrinsèquement liée à un *observateur* et sous-tend une *dimension temporelle* ;
- ses membres gauche et droit représentent respectivement les *consommés*, cumulés en série, et les *produits*, cumulés en parallèle, de l'action ;
- dans chaque membre, toute formule représente un *exemplaire* d'une ressource, laquelle est *composée* si la formule est formée par des connecteurs, *atomique* sinon.

Les connecteurs apparaissent donc comme des opérations de composition d'exemplaires de ressources et par extension, de composition de ressources elles-mêmes, puisque les exemplaires sont supposés équivalents. Dans chacun des deux membres d'un séquent peuvent figurer de multiples occurrences d'une même formule, lesquelles ne se réduisent pas à une seule. Cette multiplicité exprime un cumul d'exemplaires d'une même ressource — cumul en série dans les consommés, en parallèle dans les produits de l'action représentée. Par exemple, un séquent tel que $A, A, B \vdash A, C$ représente une action qui consomme un cumul en série de deux exemplaires de la ressource A et d'un exemplaire de la ressource B , pour produire un cumul en parallèle d'un exemplaire des ressources A et C .

Nous pouvons également considérer que le membre gauche et le membre droit d'un séquent représentent l'*état des ressources* juste avant et après l'exécution de l'action, selon sa dimension temporelle. Le fait que les consommés soient effectivement consommables avant cette exécution sont autant de *pré-conditions* imposées par l'action sur l'état des ressources. De même, le fait que les produits soient effectivement consommables après cette exécution constituent les *post-conditions* imposées par l'action sur l'état des ressources. Insistons bien sur le fait que lorsque les produits d'une première action sont considérés comme consommés d'une deuxième action, les produits indépendants de la première doivent être considérés comme étant cumulés en parallèle par la seconde.

Le fait que le séquent soit prouvable par le calcul des séquents ne dépend que du contenu de ses prémisses et conclusions, contenu dont la forme doit avant tout respecter les règles de formation par connecteurs linéaires. La prouvabilité d'un séquent linéaire signifie que l'action représentée est réaliste au sens des ressources, c'est-à-dire qu'elle respecte entre autres, le principe de Lavoisier (cf. les sections II.2.6 et IV.2.4).

III.1.4 Interprétation fondamentale de la négation linéaire

La négation linéaire, nommée *nil* et notée $(-)^{\perp}$, tient une place à part dans le système des connecteurs. Elle est unique, contrairement aux conjonctions, disjonctions et implications qui existent sous plusieurs formes. Comme son analogue classique (notée \neg), elle vérifie la propriété d'involution :

$$(A^{\perp})^{\perp} \dashv\vdash A$$

De plus, le rapport de dualité qui existe entre la conjonction et la disjonction classiques se décline entre les multiplicatifs *fois* et *par*, entre les additifs *avec* et *plus*, et entre les exponentiels *bien sûr* et *pourquoi pas*. Ces rapports de dualité sont autant de symétries dont le centre unique est la négation linéaire, qui constitue en ce sens la « clef de voûte » du système. Rappelons que la sémantique de la négation classique est celle d'un opérateur qui permute involutivement la valeur de vérité de la proposition à laquelle elle s'applique : si la proposition A est vraie, alors $\neg A$ est fausse et réciproquement. Par analogie, nous concevons la négation linéaire comme un opérateur qui transforme un exemplaire de ressource *consommable* en un exemplaire *productible* de cette ressource, et réciproquement. Aussi bien dans les consommés que les produits d'une action,

- la formule A signifie qu'un exemplaire de cette ressource est *consommable*,
- la formule A^{\perp} signifie qu'un exemplaire de la ressource A est *productible*.

Autrement dit, nous interprétons la négation *nil* comme un inverseur involutif de l'orientation *consommable/productible* des exemplaires de ressources, vis-à-vis de la dimension temporelle implicite à une action. En posant qu'un exemplaire d'une ressource est consommable, nous le considérons selon ses possibilités d'être consommé, donc nous nous intéressons à son « futur ». Duale, en posant que cet exemplaire est productible, nous envisageons ses possibilités d'être produit, donc son « passé ». Bien entendu, l'orientation passé/futur d'un exemplaire n'a de sens que relativement aux autres exemplaires des ressources mises en jeu ; elle n'exprime que le point de vue de l'observateur de l'action.

Notre interprétation de la négation linéaire s'applique de façon récursive en décomposant la formule A , quelle que soit sa forme, par distribution sur ses composés en appliquant les propriétés de dualité. Bien que ces dernières soient essentielles pour approfondir la question du sens de *nil*, nous ne pouvons les examiner sans avoir préalablement interprété tous les autres connecteurs. En revanche, nous pouvons déjà répondre à la question : si une ressource *atomique* A renvoie à l'idée d'une chose du monde physique, à quoi renvoie la formule A^{\perp} ? Nous l'associons à une ressource *abstraite*, disons « psychique », conception acceptée par notre définition générale de la notion de ressource. Pour comprendre la nécessité d'abstraction, faisons une analogie avec l'arithmétique : s'il est possible de matérialiser un nombre cardinal par un ensemble fini d'objets physiques, par exemple des

cailloux, il n'en est pas de même pour un nombre négatif, dont la conception nécessite une abstraction de l'esprit, par exemple l'idée d'une dette.

À titre d'illustration, imaginons une boulangerie. Quand un client fortuné entre dans la boutique, il voit les choses (il raisonne) de manière « positive » : il a de l'argent qu'il peut dépenser à sa guise, ce que nous traduisons en posant, en consommé de son action d'achat, un exemplaire consommable de la ressource *argent*. De plus, le pain lui apparaît comme un exemplaire de la ressource d'action $\text{argent} \multimap \text{pain}$, dont nous posons également un exemplaire consommable. L'action d'achat se traduit alors par une application du schéma du modus ponens, exactement comme dans l'exemple des cigarettes (cf. chapitre I) :

$$\text{argent}, \text{argent} \multimap \text{pain} \vdash \text{pain}$$

Au contraire, le pauvre qui passe devant la vitrine voit les choses de manière « négative ». Certes, nous pouvons toujours considérer qu'un exemplaire de la ressource d'action $\text{argent} \multimap \text{pain}$ est consommable. Mais au lieu d'avoir de l'argent, le pauvre veut du pain, ce que nous traduisons en posant la pré-condition qu'un exemplaire de la ressource *pain* est productible, c'est-à-dire qu'un exemplaire de la ressource pain^\perp est consommable. Partant de ces consommés, le pauvre effectue alors l'action suivante, conforme au schéma du modus tollens :

$$\text{pain}^\perp, \text{argent} \multimap \text{pain} \vdash \text{argent}^\perp$$

Même si elle paraît virtuelle, ou disons psychologique, cette action est cohérente au sens des ressources : en consommant un exemplaire productible de la ressource *pain*, le pauvre produit un exemplaire productible de la ressource *argent*. Autrement dit, par cette action, le pauvre transforme sa quête de nourriture en une quête d'argent. En réitérant cette action, nous constaterions la « proportionnalité » (autrement dit la linéarité) entre le cumul en série de pain^\perp consommé, et le cumul en série de argent^\perp produit.

III.2 Les connecteurs multiplicatifs

La famille multiplicative comprend trois connecteurs : la conjonction *fois*, la disjonction *par* et l'implication *entraîne*. Dans le calcul des séquents, leurs règles d'introduction sont les formulations multiplicatives des connecteurs classiques *et*, *ou*, *implique*, formulations qui excluent toute forme d'idempotence. Ils conservent néanmoins d'autres propriétés : en particulier, la forme $\text{nil}(A \text{ fois } B)$ est équivalente à $(\text{nil } A) \text{ par } (\text{nil } B)$, ce qui correspond à une propriété de dualité par négation linéaire. De plus, la forme $A \text{ entraîne } B$ est équivalente à $(\text{nil } A) \text{ par } B$.

III.2.1 L'implication linéaire

Nommée *entraîne* et notée \multimap , l'implication linéaire exprime la possibilité de *déduction* en logique linéaire. Dans le calcul des séquents, ses règles d'introduction précisent le sens du tourniquet. Nous interprétons donc la formule $A \multimap B$ comme une *ressource d'action*, qui exprime la possibilité, de produire un exemplaire de la ressource de type *B* en consommant un exemplaire de la ressource de type *A*. Insistons sur notre conception

d'une formule implicative $A \multimap B$ comme une ressource. En effet, notre interprétation du schéma du ponens, exprimé par le séquent :

$$A, A \multimap B \vdash B$$

est telle que l'action consomme non seulement l'exemplaire de ressource A mais aussi celui de la ressource $A \multimap B$. La possibilité de cette action dépend autant de la consommabilité de la ressource A que de celle de la ressource d'action $A \multimap B$. Illustrons concrètement ce que représente une ressource d'action, en reprenant l'exemple de la boulangerie. Pour qu'un client puisse acheter du pain, il ne suffit pas qu'il ait de l'argent ; il faut aussi qu'il reste du pain. Du point de vue du client, les pains en vente — disons à cinq francs la pièce — ne doivent pas être représentés par des exemplaires consommables d'une ressource *pain*, car ils appartiennent encore au boulanger. En revanche, ils constituent autant d'exemplaires consommables d'une ressource d'action $\text{cinq frs} \multimap \text{pain}$, où *cinq frs* représente la ressource pécuniaire nécessaire pour acheter un pain. Lorsqu'il n'y a plus de pain en vente, la ressource d'action n'est plus consommable ; l'action d'achat n'est alors plus possible, l'une des pré-conditions qu'elle impose n'étant pas satisfaite par l'état des ressources, quelle que soit par ailleurs la consommabilité de la ressource *cinq frs*, c'est-à-dire même si le client est infiniment riche.

Comme son analogue classique, l'implication linéaire vérifie, par négation de l'antécédent et du succédent, la propriété de *contraposition*, c'est-à-dire l'équivalence :

$$A \multimap B \dashv\vdash B^\perp \multimap A^\perp$$

Selon notre interprétation, une ressource d'action $A \multimap B$ peut donc servir à produire soit son succédent consommable B , soit son antécédent productible A^\perp . Dans l'exemple de la boulangerie, souvenons-nous des actions du client riche et du client pauvre. En fait, l'action du pauvre aurait aussi bien pu s'écrire sous la forme du modus ponens, en posant comme consommé la ressource d'action $\text{pain}^\perp \multimap \text{argent}^\perp$ plutôt que sa forme converse. Par ailleurs, l'implication linéaire vérifie également la propriété de transitivité :

$$A \multimap B, B \multimap C \vdash A \multimap C$$

Ce séquent représente une action de *fusion* entre deux ressources d'action, par abstraction de la ressource intermédiaire B . Reprenons l'exemple du client pauvre qui, pour seul repas, rumine la ressource d'action $\text{pain}^\perp \multimap \text{argent}^\perp$. Considérons maintenant la ressource d'action $\text{argent}^\perp \multimap \text{travail}^\perp$ dans laquelle la ressource *travail* représente le « petit boulot » qui permettrait d'obtenir un exemplaire de la ressource *argent*. En supposant consommable un exemplaire de chacune de ces deux ressources d'action, l'action psychologique du pauvre produira un exemplaire de $\text{pain}^\perp \multimap \text{travail}^\perp$, par transitivité.

III.2.2 La conjonction multiplicative

Ce connecteur se nomme *fois* et se note \otimes . Ses règles d'introduction précisent le sens de la virgule à gauche du tourniquet, exactement comme celles du connecteur *et* en logique classique. Formellement, nous avons $A, B \vdash A \otimes B$. Nous interprétons le connecteur *fois*

comme l'opérateur qui lie implicitement les consommés d'une action, par analogie avec la conjonction de prémisses dans une déduction classique. Dans l'exemple de la boulangerie, si un client décide d'acheter deux pains, il aura besoin de deux exemplaires de *argent* et de deux exemplaires de *argent* \multimap *pain*, autrement dit d'un exemplaire de *argent* \otimes *argent* et d'un exemplaire de $(\textit{argent} \multimap \textit{pain}) \otimes (\textit{argent} \multimap \textit{pain})$. Plus généralement, nous interprétons la conjonction multiplicative par la notion de cumul « en série » d'exemplaires de ressources, mais sans aucune idée de séquentialité.

En fait, la conjonction \otimes sur les propositions linéaires s'apparente à l'addition arithmétique $+$ sur les entiers naturels, car ces deux opérateurs vérifient les mêmes grandes propriétés : l'associativité, la commutativité, et l'existence d'un élément neutre. En ce sens, nous pouvons noter $A^{\otimes m}$ la formule $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$ où un nombre naturel m d'occurrences de A sont connectées par *fois*. Le cas limite $m = 0$ correspond à l'élément neutre du connecteur *fois*, nommé *un* et noté $\mathbf{1}$. Avec notre notation, nous pouvons écrire, quels que soient les naturels m et p , l'équivalence :

$$A^{\otimes m} \otimes A^{\otimes p} \dashv\vdash A^{\otimes(m+p)}$$

De plus, à partir d'un alphabet de formules de cardinal n , le connecteur *fois* engendre un monoïde commutatif libre isomorphe à $(\mathbb{N}^n, +)$. L'élément neutre *un* exprime le degré zéro de cumul en série ; nous le concevons comme ce qui reste quand ont été consommés tous les exemplaires cumulés en série d'un ensemble de ressources. Par exemple, *un* correspond aux ressources pécuniaires contenues dans un porte-monnaie vide.

La linéarité de la conjonction multiplicative *fois*, par opposition à l'idempotence de son analogue classique *et*, est l'une des propriétés sur laquelle repose l'expression d'action vérifiant le principe de Lavoisier. Parce qu'elles violent ce principe, les actions suivantes :

$$\begin{array}{ll} A \otimes A \otimes (A \multimap B) \not\vdash B & \text{« rien ne se perd »} \\ A \otimes (A \multimap B) \not\vdash B \otimes A & \text{« rien ne se crée »} \end{array}$$

ne sont pas correctes. A contrario, en substituant par \wedge les occurrences de \otimes et par \Rightarrow celles de \multimap , nous obtiendrions deux séquents prouvables en logique classique.

III.2.3 La disjonction multiplicative

Ce connecteur se nomme *par* et se note \wp . Ses règles d'introduction précisent le sens de la virgule à droite du tourniquet, comme la disjonction classique dans le calcul des séquents classiques. Formellement, on a $A \wp B \vdash A, B$. Nous interprétons le connecteur *par* comme l'opérateur implicite qui lie les produits d'une action. Cependant, l'analogie avec la disjonction des conclusions dans une déduction classique n'est pas une idée familière. C'est peut-être la raison pour laquelle il est plus difficile de concevoir la nature du cumul « en parallèle » que nous associons au connecteur *par*. Remarquons d'abord que ce dernier jouit des mêmes propriétés que celles à travers lesquelles nous avons constaté une analogie entre le connecteur *fois* et l'addition arithmétique : l'associativité, la commutativité, et l'existence d'un élément neutre. Le connecteur *par* exprime donc bien une notion de cumul, et nous pouvons introduire, comme pour *fois*, une abréviation de la forme $A^{\wp m}$ pour représenter $A \wp A \wp \dots \wp A$, connectant m occurrences de A . Le cas

limite $m = 0$ correspond à l'élément neutre du connecteur *par*, nommé *faux* noté \perp . Finalement, pour tout $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, nous avons :

$$A^{\wp m} \wp A^{\wp p} \dashv\vdash A^{\wp(m+p)}$$

De plus, à partir d'un alphabet de formules de cardinal n , le connecteur *par* engendre un monoïde commutatif libre isomorphe à $(\mathbb{N}^n, +)$. Nous concevons donc l'élément neutre *faux* aussi comme un degré zéro de cumul qui n'a, semble-t-il, pas de point commun avec la notion classique de fausseté. Pour anticiper sur l'exemple qui va suivre, nous interprétons ce degré zéro comme l'état des ressources financières de plusieurs clients dans une boutique quand il n'y a aucun client. C'est pourquoi, même si la notation \perp — souvent employée en logique classique pour désigner l'absurdité — peut se justifier par rapport à celle de la négation linéaire, en vertu de l'équivalence $A \multimap \perp \dashv\vdash A^\perp$, le nom et le symbole de l'élément neutre du connecteur *par* nous perturbent.

Venons en maintenant à la question essentielle : quelles sont les propriétés syntaxiques qui sous-tendent la différence entre les deux formes de cumul d'exemplaires de ressources, en série et en parallèle? Aucun rapport de supériorité directe n'existe entre *fois* et *par*, car $A \otimes B \not\vdash A \wp B$. Néanmoins, il y a une différence car le séquent non prouvable :

$$A \wp (A \multimap B) \not\vdash B$$

devient prouvable si on remplace l'occurrence de \wp par \otimes . Selon notre interprétation, cette non-prouvabilité signifie que le cumul en parallèle d'un exemplaire de A et d'un exemplaire de $A \multimap B$ ne permet pas de produire un exemplaire de B . En revanche, avec un cumul en série, l'action serait correcte, elle correspondrait tout simplement au schéma du modus ponens. Bref, avec le cumul en parallèle, tout ce passe comme si les exemplaires cumulés étaient séparés par une « barrière » empêchant de les utiliser *conjointement* dans une action. Or c'est exactement ce qu'exprime l'idée de *disjonction*, au sens de *séparation*. C'est pourquoi nous considérons synonymes les expressions « cumul *conjoint/disjoint* » et « cumul *en série/en parallèle* ». Constatons de plus que rien n'oppose l'utilisation de deux exemplaires de cumulés disjointement dans deux actions « indépendantes ». C'est en ce sens que nous interprétons le séquent suivant :

$$A \wp B, A \multimap C, B \multimap D \vdash C \wp D$$

Les deux actions indépendantes correspondent toutes deux au schéma du modus ponens, d'une part entre A et $A \multimap C$, d'autre part entre B et $B \multimap D$. Si la prémisse $A \wp B$ et la conclusion $C \wp D$ étaient remplacées respectivement par $A \otimes B$ et $C \otimes D$, on obtiendrait encore un séquent prouvable. Donc finalement, en posant un consommé de la forme $A \wp B$, c'est comme si on imposait aux deux exemplaires A et B d'évoluer forcément de façon indépendante (« en parallèle », donc) — l'obligation pouvant être levée en posant de plus un exemplaire d'une ressource d'action ad hoc telle que $A \wp B \multimap A \otimes B$. À cet égard, le connecteur *par* porte bien son nom. D'ailleurs, il semble avoir été choisi pour sa connotation multiplicative, certes, mais aussi, dans le cadre de la sémantique des phases, en tant qu'opérateur de « *parallélisation de faits* » (cf. section IV.3.2).

L'idée d'évolution « forcément indépendante » de A et B peut sembler paradoxale dans la mesure où du côté des prémisses, la formule $A \wp B$ ne peut pas se décomposer en deux prémisses distinctes A et B . C'est sans doute la raison pour laquelle GIRARD a décrit¹ ainsi la disjonction multiplicative : « *les deux [propositions] mais pas indépendamment* ». Certes, mais du côté des conclusions, la formule $A \wp B$ peut parfaitement se scinder en deux conclusions distinctes, contrairement à $A \otimes B$. En fait, nous pensons que c'est le caractère forcé de l'indépendance d'évolution qui suggère l'idée paradoxale de non indépendance.

Donnons quelques illustrations concrètes d'actions mettant en jeu des exemplaires de ressources cumulés disjointement. Imaginons que deux amis, Pierre et Paul se retrouvent dans une boulangerie. Supposons que Pierre ait huit francs, Paul sept francs, et que les pains coûtent toujours cinq francs. Avec le point de vue d'un observateur commun des actions de Pierre et Paul, nous représentons leurs ressources par un cumul disjoint de deux cumuls conjoints d'exemplaires, l'un de huit termes, l'autre de sept, d'une ressource F correspondant à la valeur 1 franc. Nous posons donc en consommé un exemplaire de la ressource $F^{\otimes 8} \wp F^{\otimes 7}$. En posant également deux exemplaires de la ressource d'action $F^{\otimes 5} \multimap \text{pain}$, l'action d'achat par Pierre et Paul d'un pain chacun s'écrit :

$$F^{\otimes 8} \wp F^{\otimes 7}, F^{\otimes 5} \multimap \text{pain}, F^{\otimes 5} \multimap \text{pain} \vdash (F^{\otimes 3} \otimes \text{pain}) \wp (F^{\otimes 2} \otimes \text{pain})$$

Dans cette action, les ressources de Pierre et Paul ne sont pas repérées vis-à-vis de leurs appartenances. Elles sont considérées comme des exemplaires identiques d'une même ressource, ce qui traduit ainsi le point de vue d'un observateur extérieur : ce dernier ne distingue les deux acteurs que par les ressources qu'ils possèdent.

Pour cet observateur, les ressources de Pierre et Paul sont disjointes avant comme après l'action. L'argent restant des deux amis ne peut pas être consommé conjointement pour acheter un troisième pain qu'ils partageraient. Cependant, nous pouvons exprimer entre eux un accord de partage, en posant dans les consommés d'une nouvelle action non seulement les produits de l'action précédente, mais aussi un exemplaire d'une ressource d'action qui réunit conjointement les reliquats disjointes de leurs ressources pécuniaires, exprimée par l'implication : $(F^{\otimes 3} \wp F^{\otimes 2}) \multimap (F^{\otimes 3} \otimes F^{\otimes 2})$. En faisant abstraction des deux pains que les deux amis viennent chacun d'acheter, l'action d'achat commun d'un troisième pain est alors possible, et s'écrit :

$$F^{\otimes 3} \wp F^{\otimes 2}, (F^{\otimes 3} \wp F^{\otimes 2}) \multimap (F^{\otimes 3} \otimes F^{\otimes 2}), F^{\otimes 5} \multimap \text{pain} \vdash \text{pain}$$

Bien entendu, cette action consomme l'exemplaire de la ressource d'action exprimant l'accord de partage, qui constitue juste un concours de circonstances. Objectons cependant que si nous ne faisons pas abstraction, dans les consommés de la deuxième action, de l'exemplaire de *pain* que chacun a acheté lors de la première action, alors la ressource d'action de partage n'est pas aussi simple. Elle s'écrit :

$$(F^{\otimes 3} \otimes \text{pain}) \wp (F^{\otimes 2} \otimes \text{pain}) \multimap ((\text{pain} \wp \text{pain}) \otimes F^{\otimes 5})$$

Autrement dit, cette ressource d'action doit spécifier le contexte du partage et en préciser les limites, c'est-à-dire les exemplaires qui sont ou ne sont pas partagés.

1. Lors d'un exposé sans actes à la quinzième conférence allemande sur l'intelligence artificielle. Les transparents manuscrits, écrits en anglais, sont datés du 18 septembre 1991.

III.2.4 Quelques expressions multiplicatives

En combinant les connecteurs multiplicatifs, nous pouvons exprimer des aspects subtils de la gestion de ressources. Nous venons de voir le partage d'exemplaires ; une autre notion est celle de *concurrence*, c'est-à-dire l'existence de *conflits* entre actions indépendantes pour la consommation d'exemplaires communs à ces actions. Nous allons décrypter cette notion à travers des exemples.

Retrouvons Pierre et Paul au rayon fruits et légumes d'un supermarché. Supposons qu'ils aient chacun cinq francs et qu'il reste une seule barquette de fraises en vente à ce prix. Les ressources de Pierre et Paul, que nous représentons par la disjonction $F^{\otimes 5} \wp F^{\otimes 5}$, sont alors en concurrence pour l'action d'achat de la barquette, c'est-à-dire un exemplaire de la ressource d'action $F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}$. Tant que la barquette est sur l'étagère, elle reste *partagée* par les deux amis (en faisant abstraction des autres clients). Nous exprimons ce partage en connectant cette ressource d'action *conjointement* aux ressources disjointes de Pierre et Paul — autrement dit, en posant le consommé $(F^{\otimes 5} \wp F^{\otimes 5}) \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises})$. La concurrence se traduit par un conflit entre deux actions d'achat, conflit vis-à-vis duquel la barquette est la ressource critique. Selon le point de vue d'un observateur des deux amis, ces deux actions ont une forme identique, à savoir :

$$(F^{\otimes 5} \wp F^{\otimes 5}) \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}) \vdash F^{\otimes 5} \wp \text{fraises}$$

De plus, nous pouvons décomposer leurs actions en deux étapes, dont la première constitue l'*appropriation* de la ressource critique, (en gestion des ressources, on parle d'affectation), et la deuxième l'*achat proprement dit*. L'action d'appropriation s'exprime par une propriété de semi-associativité entre \otimes et \wp qui s'écrit :

$$\begin{aligned} (A \wp B) \otimes C &\not\vdash (A \otimes C) \wp B \\ (A \wp B) \otimes C &\not\vdash A \wp (B \otimes C) \end{aligned}$$

où les exemplaires de A et B , en concurrence pour la ressource critique C , peuvent l'un comme l'autre se l'approprier. Par exemple, dans le premier séquent, quand C devient directement conjointe à A , elle se disjoint du même coup de B . Transposons alors cette action dans notre exemple. Le séquent :

$$(F^{\otimes 5} \wp F^{\otimes 5}) \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}) \vdash F^{\otimes 5} \wp (F^{\otimes 5} \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}))$$

représente l'action de l'un des deux amis qui met la barquette dans son panier. Ensuite, nous exprimons l'action d'achat proprement dit, ici la transaction effectuée à une caisse du supermarché, par le séquent :

$$F^{\otimes 5} \wp (F^{\otimes 5} \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises})) \vdash F^{\otimes 5} \wp \text{fraises}$$

Notons au passage que la concurrence pour un exemplaire de ressource admet un cas limite intéressant. Sachant qu'une formule A est équivalente à $A \wp \perp$, toute action de la forme $A, A \multimap B \vdash B$ est en conflit avec la suivante :

$$A, A \multimap B \vdash \perp \otimes (A \multimap B), A$$

Dans cette dernière, l'exemplaire de $A \multimap B$ est approprié par \perp , qui est un degré zéro de cumul disjoint d'exemplaires de A . En la transposant dans un exemple d'achat, nous l'interprétons comme la réservation d'un exemplaire de la ressource B vendu au prix de A , pour un client qui n'est pas là. Une telle action s'observe fréquemment chez un commerçant de quartier.

Insistons sur le caractère univoque des séquents qui expriment ci-dessus la forme générale d'une action d'appropriation. Cela signifie qu'une telle action est a priori *irréversible*. En fait, nous pouvons lever cette irréversibilité en posant en consommé un exemplaire d'une ressource d'action ad hoc, de la même manière que nous pouvons réunir conjointement des exemplaires de ressources disjoints (cf. section III.2.3). Cependant, il en coûte une certaine lourdeur d'écriture car il faut spécifier précisément le contexte vis-à-vis duquel l'exemplaire est restitué. En effet, dans le cas de notre exemple, pour revenir à la situation initiale où la barquette de fraises est sur l'étalage, poser la pré-condition qu'est consommable un exemplaire d'une ressource d'action telle que :

$$(F^{\otimes 5} \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises})) \multimap (F^{\otimes 5} \wp (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}))$$

ne suffit pas. Son utilisation ne conduirait qu'à disjoindre complètement toutes les exemplaires des ressources en jeu. La ressource d'action requise doit expliciter *intégralement* l'état initial et l'état final par rapport à l'action de restitution, comme ceci :

$$(F^{\otimes 5} \wp (F^{\otimes 5} \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}))) \multimap ((F^{\otimes 5} \wp F^{\otimes 5}) \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}))$$

— ce qui nous semble une écriture lourde. Nous pensons que cette lourdeur est due la complexité insoupçonnée d'une action de restitution. Dans la pratique, cette complexité est sans doute masquée : le plus souvent, un client prend ou remet un produit sur un étalage en faisant abstraction des autres clients.

Une autre notion propre à la gestion des ressources, que les connecteurs multiplicatifs permettent d'exprimer avec finesse, est l'idée de *consommation anticipée*. Faisons abstraction de Paul, et supposons que Pierre, qui s'est approprié la barquette de fraises, décide de flâner dans les rayonnages tout en mangeant les fraises, donc avant de les avoir payées. Pour satisfaire la possibilité de cette consommation anticipée, il faudrait poser la pré-condition qu'un exemplaire de la ressource *fraises* est consommable, or nous avons jusqu'à présent représenté la barquette, au point de vue des clients, par la ressource d'action $F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}$. Signalons alors l'une des grandes propriétés de l'implication linéaire, à savoir l'équivalence $A \multimap B \dashv\vdash A^\perp \wp B$. Nous pouvons donc transformer de manière réversible un exemplaire d'un ressource d'action $A \multimap B$ en un cumul disjoint d'un exemplaire consommable de B et d'un exemplaire productible de A . Cet exemplaire productible représente la dette potentielle engendrée par la consommabilité anticipée de B . Dans le cas de Pierre, nous avons donc :

$$F^{\otimes 5} \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}) \vdash F^{\otimes 5} \otimes ((F^{\otimes 5})^\perp \wp \text{fraises})$$

Maintenant, l'exemplaire de la ressource *fraises* est consommable et nous pouvons exprimer sa consommation proprement dite (le fait que Pierre mange les fraises) en posant

la pré-condition que la ressource $fraises \multimap \mathbf{1}$ est consommable en un exemplaire. Cette pré-condition suppose de façon approximative que la consommation des fraises ne produit rien. Nous aurions également pu remplacer l'élément neutre $\mathbf{1}$ par un exemplaire d'une ressource *miam* exprimant la satisfaction que ressent Pierre en mangeant les fraises. En gardant notre première option, l'action de consommation anticipée s'exprime par :

$$F^{\otimes 5} \otimes ((F^{\otimes 5})^\perp \wp fraises), \text{ fraises } \multimap \mathbf{1} \vdash F^{\otimes 5} \otimes ((F^{\otimes 5})^\perp \wp \mathbf{1})$$

Ensuite, quand Pierre passe à la caisse, il peut s'acquitter de sa dette avec ses ressources pécuniaires $F^{\otimes 5}$ explicitées depuis le début dans les consommés et produits des actions :

$$F^{\otimes 5} \otimes ((F^{\otimes 5})^\perp \wp \mathbf{1}) \vdash \mathbf{1}$$

Revenons un moment sur l'équivalence $A \multimap B \dashv\vdash A^\perp \wp B$. Le cumul disjoint de A^\perp et de B exprime que tout ce l'on produira avec B sera disjoint de A^\perp . Autrement dit, selon la logique linéaire, pour rembourser une dette avec ce qu'elle a permis de produire, il est nécessaire de poser un exemplaire d'une ressource d'action ad hoc.

III.3 Les connecteurs additifs

La famille additive comprend trois connecteurs; la conjonction *avec*, la disjonction *plus*, et l'implication additive. Dans le calcul des séquents, leurs règles d'introduction sont les formulations additives des connecteurs classiques *et*, *ou*, *implique*, formulations qui sous-tendent la propriété d'idempotence. Les règles structurelles de contraction et d'affaiblissement ayant été supprimées, ces trois connecteurs sont donc les versions idempotentes respectives de leurs analogues classiques dans un contexte général de linéarité. Dans la familles additive, nous retrouvons également d'autres propriétés classiques, comme la dualité par négation linéaire entre *avec* et *plus* : la forme $nil(A \text{ avec } B)$ et la forme $(nil A) \text{ plus } (nil B)$ sont équivalentes. De même qu'entre la conjonction et la disjonction classique, les connecteurs *avec* et *plus* vérifient le rapport de force direct suivant : de $A \text{ avec } B$, nous pouvons déduire $A \text{ plus } B$, mais pas l'inverse. Rappelons qu'un tel rapport n'existe pas entre *fois* et *par*. Quant à l'implication additive, contrairement à l'implication linéaire, elle ne sous-tend aucune idée de déduction, ce qui limite son intérêt. Plus généralement, la famille additive ne constitue pas à elle seule un système déductif, contrairement à la famille multiplicative qui précise le sens des méta-connecteurs. Par conséquent, les propriétés des additifs invoquent nécessairement les multiplicatifs. Nous examinerons notamment celles de distributivité et semi-distributivité.

III.3.1 La conjonction additive

Ce connecteur se nomme *avec* et se note $\&$. Il est idempotent, ce que traduit syntaxiquement l'équivalence $A \dashv\vdash A \& A$, et ce qui le distingue du connecteur multiplicatif *fois*. Entre ces deux conjonctions, il n'existe pas de rapport de force direct, puisque $A \& B \not\vdash A \otimes B$. Il n'y a pas non plus de rapport de force direct entre les connecteurs *avec*

et *par*. Outre l'idempotence, le connecteur *avec* vérifie d'autres propriétés conjonctives dont est privé *fois*, qui sont exprimées par les deux séquents :

$$A \& B \not\vdash A \qquad A \& B \not\vdash B$$

De telles propriétés sont typiques de la conjonction classique *et*, puisque de $A \wedge B$, on déduit aussi bien A que B . En supprimant de façon non réversible l'un des deux facteurs de leurs prémisses, ces déductions peuvent a priori paraître violer le principe de Lavoisier. En réalité, tout dépend de la signification de $A \& B$.

Au sens des ressources, consommer un exemplaire de $A \& B$ permet de produire soit un exemplaire de A , soit un exemplaire de B , mais pas les deux à la fois, ni conjointement, ni disjointement. Le connecteur *avec* exprime donc un *conflit maîtrisé* entre deux ressources, au sens où l'observateur pour qui un exemplaire de $A \& B$ est consommable *peut choisir* de produire A ou B — GIRARD parle de *choix externe* [26]. À première vue, le connecteur *avec* pourrait faire penser à la disjonction exclusive classique *soit... soit...*, mais ne nous y trompons pas : syntaxiquement, il s'agit d'une *conjonction*. Néanmoins, retenons l'idée que la formule $A \& B$ correspond à un seul exemplaire de ressource dont la nature n'est pas encore choisie ; elle n'a aucun rapport avec $A \otimes B$ qui sous-tend un cumul conjoint de deux exemplaires consommables, l'un de A , l'autre de B . L'action $A \& B \vdash B$ n'exprime pas la destruction d'un exemplaire de B , mais un choix. En ce sens, elle respecte le principe de Lavoisier : entre son consommé et son produit, rien ne se perd, sauf une forme d'indéterminisme de l'état des ressources.

Pour illustrer cette interprétation, prenons l'exemple d'un distributeur automatique de boissons chaudes. Supposons que la machine serve pour la somme de deux francs un gobelet de thé ou de café. Nous représentons l'action d'un client qui introduit l'appoint dans le distributeur par le séquent :

$$F^{\otimes 2}, F^{\otimes 2} \multimap (\text{thé} \& \text{café}) \vdash \text{thé} \& \text{café}$$

Le produit de l'action est un exemplaire de la ressource *thé & café*, lequel ne correspond pas encore à une chose matérielle. Cet exemplaire se matérialise quand le client appuie sur la touche qui correspond à son choix de boisson. Successivement à l'action ci-dessus, nous concevons les deux alternatives possibles par deux actions en conflit, qui s'écrivent :

$$\text{thé} \& \text{café} \vdash \text{thé} \qquad \text{thé} \& \text{café} \vdash \text{café}$$

Selon le point de vue du client, la ressource *thé & café* correspond bien à une chose virtuelle, vis-à-vis de laquelle il possède un degré de liberté quant à sa matérialisation. Il peut choisir parmi deux possibilités de production, et même exécuter d'autres actions auparavant, par exemple appuyer sur la touche d'annulation — pour prendre en compte cette troisième possibilité, il nous suffirait de remplacer ci-dessus chaque occurrence de *thé & café* par *thé & café & F^{⊗2}*. Il existe également des situations concrètes par rapport auxquelles nous pouvons associer une chose matérielle à une ressource de la forme $A \& B$. Pensons par exemple à une cafétéria, où le service de boissons chaudes fonctionne avec des tickets achetés à l'avance. Nous interprétons alors les tickets comme autant d'exemplaires

d'une ressource de la forme $A \text{ avec } B \text{ avec } C \dots$, où A, B, C représentent les différents types de boissons proposées.

Comme son analogue classique *et*, la conjonction additive *avec* est associative, commutative et idempotente. Elle admet aussi un élément neutre, dont le nom *vrai* et le symbole \top , sont exactement ceux du neutre de *et*. De surcroît, l'élément neutre de *avec* est absorbant pour le connecteur *par*, de même que le neutre de *et* est absorbant pour le *ou* classique: quelle que soit la formule A , nous avons $A \wp \top \dashv\vdash \top$. Cependant, le choix de représentation du neutre de *avec* nous pose des difficultés, un peu comme celui du neutre de *par* (cf. section III.2.3), car au sens des ressources, \top n'exprime aucune notion analogue à celle de vérité. À première vue, les propriétés syntaxiques de \top peuvent paraître déroutantes. Quelles que soient les formules A et B , le séquent $A \vdash B \wp \top$ est prouvable, ce qui nous donne par exemple:

$$\text{lingot de plomb} \vdash \text{lingot d'or} \wp \top$$

Comme cette propriété viole radicalement le principe de Lavoisier, nous pouvons concevoir qu'elle exprime des phénomènes surnaturels. En ce sens, une interprétation possible de l'élément \top est l'idée d'un *pacte avec le Diable!* En effet, si nous voulons traduire par un séquent prouvable une action surnaturelle, de l'acabit de la transmutation du plomb en or, nous constatons que ses produits contiennent fatalement un cumul en parallèle d'un exemplaire de la ressource \top . De plus, cette ressource est « maléfique », dans la mesure où une fois qu'un exemplaire de \top a été produit, il est impossible de le consommer, autrement dit de s'en « débarrasser ». En effet, tout séquent dont une prémisse est de la forme $B \wp \top$ n'est prouvable qu'à condition que sa conclusion soit de la forme $C \wp \top$. Plus précisément, quelles que soient les formules A_1, A_2, \dots, B et D , pour que le séquent suivant soit prouvable:

$$A_1, A_2, \dots, B \wp \top \vdash D$$

il faut que la formule D soit de la forme $C \wp \top$, ou encore (mais cela revient au même) que l'une des autres prémisses A_i soit une ressource d'action ad hoc pour consommer \top , par exemple $\top \multimap \perp$. Cette dernière formule est syntaxiquement équivalente à $\mathbf{0}$, l'élément neutre de la disjonction additive *plus* duale de *avec*, et nous interprétons $\mathbf{0}$ comme une ressource autant « surnaturelle » que \top .

III.3.2 La disjonction additive

Ce connecteur se nomme *plus* et se note \oplus . Il est idempotent, ce que traduit syntaxiquement l'équivalence $A \dashv\vdash A \oplus A$, et ce qui le distingue du connecteur *par*. Entre ces deux disjonctions, il n'existe pas de rapport de force direct: $A \oplus B \not\vdash A \wp B$. Par ailleurs, il n'y a pas non plus de rapport de force direct entre *plus* et *fois*. En revanche, il existe un tel rapport entre *avec* et *plus*, que nous avons déjà cité: $A \& B \dashv\vdash A \oplus B$. Il en découle les propriétés disjonctives de *plus*, exprimées par:

$$A \dashv\vdash A \oplus B \qquad B \dashv\vdash A \oplus B$$

qui sont les séquents duaux de ceux exprimant le caractère conjonctif de *avec*. De telles propriétés sont typiques de la disjonction classique *ou*, puisque aussi bien de la prémisse A que de la prémisse B , on déduit $A \vee B$.

Au sens des ressources, consommer un exemplaire de $A \oplus B$ ne permet de produire ni un exemplaire de A , ni un exemplaire de B , alors que réciproquement, $A \oplus B$ peut justement être produit aussi bien par A que par B . Les actions $A \vdash A \oplus B$ et $B \vdash A \oplus B$ reviennent à enfermer virtuellement leur consommé dans une « boîte noire », en ne gardant qu'une information incertaine sur sa nature originale, comme s'il était écrit sur la boîte : « un exemplaire, soit de A , soit de B ». En fait, le connecteur *plus* exprime un *conflit non maîtrisé* entre deux ressources, au sens où l'observateur pour qui un exemplaire de $A \oplus B$ est consommable *ne peut pas choisir* de produire A ou B . — par dualité au sens qu'il donne au connecteur *avec*, GIRARD parle de *choix interne*. Comme la conjonction *avec*, la disjonction *plus* ressemble fortement à la disjonction *ou exclusive* classique (nommée également *soit... soit...*), mais cette fois sans réserve, puisque le connecteur *plus* est bien une *disjonction*. Selon cette interprétation, la formule $A \oplus B$ correspond à un seul exemplaire consommable de ressource dont la nature est définitivement indéterminée ; elle n'a aucun rapport avec $A \wp B$ qui sous-tend un cumul disjoint de deux exemplaires consommables, l'un de A , l'autre de B . Une action telle que $A \vdash A \oplus B$ respecte bien le principe de Lavoisier : elle n'exprime pas la création d'un exemplaire de B , mais l'introduction d'une forme d'indéterminisme dans l'état des ressources.

Pour illustrer cette interprétation, nous pouvons imaginer un distributeur de surprises, comme le suggère GIRARD [26]. Nous pouvons également prolonger l'exemple du distributeur automatique : même si la surprise peut paraître dérisoire, pensons à la façon dont notre distributeur de boissons chaudes rend la monnaie. Quand un client introduit une pièce de cinq francs pour acheter une boisson à deux francs, il ne sait sous quelle forme la monnaie lui sera retournée. Suivant l'état des ressources de la machine et ses automatismes (autant de données internes que le client ignore), ce dernier recevra soit une pièce de deux francs et une pièce de un franc, soit trois pièces de un franc. Pour représenter ces deux possibilités, nous considérons les ressources pécuniaires non plus par rapport à leur valeur (c'est-à-dire comme un cumul d'une ressource atomique F) mais comme des choses matérielles de différents types, notées *deux-frs* et *un-fr*. Nous traduisons le retour de monnaie par la ressource d'action $F^{\otimes 3} \multimap ((\text{deux-frs} \otimes \text{un-fr}) \oplus \text{un-fr}^{\otimes 3})$. L'action d'un consommateur qui choisirait du thé s'écrit alors :

$$F^{\otimes 5}, F^{\otimes 2} \multimap (\text{thé} \& \text{café}), F^{\otimes 3} \multimap ((\text{deux-frs} \otimes \text{un-fr}) \oplus \text{un-fr}^{\otimes 3})$$

$$\vdash \text{thé} \otimes ((\text{deux-frs} \otimes \text{un-fr}) \oplus \text{un-fr}^{\otimes 3})$$

Dans la réalité, un exemplaire de la forme $A \oplus B$ ne reste indéterminé que jusqu'à « ouverture de la boîte noire », par exemple ici quand le client prend la monnaie retournée dans le réceptacle. Mais une telle action n'est pas possible selon la logique linéaire. En effet, rien ne permet de décider logiquement quelle alternative résulte d'un indéterminisme posé comme hypothèse. En revanche, il est toujours possible de lever l'indéterminisme sur un exemplaire de la forme $A \oplus B$ en consommant un exemplaire d'une ressource d'action ad hoc, par exemple $A \oplus B \multimap A$. Un exemple typique est celui du prestidigitateur. Après avoir mis un lapin dans son haut-de-forme et persuadé l'assemblée qu'il ne se souvient plus s'il s'agissait d'un lapin ou d'une tourterelle, il nous fait croire que sa baguette magique est capable de produire un exemplaire de la ressource $\text{lapin} \oplus \text{tourterelle} \vdash \text{tourterelle}$.

Comme son analogue classique, la disjonction additive est associative, commutative et idempotente. Elle admet aussi un élément neutre appelé *zéro* et noté $\mathbf{0}$, qui est le dual de \top par négation linéaire, et l'élément absorbant du connecteur *fois* : quelle que soit la formule A , nous avons $A \otimes \mathbf{0} \dashv\vdash \mathbf{0}$. De même que le neutre de *avec*, celui de *plus* jouit de propriétés surnaturelles au sens des ressources. En effet, quelles que soient les formules A et B , le séquent $A, \mathbf{0} \vdash B$ est prouvable, ce qui nous donne par exemple :

$$\text{citrouille}, \mathbf{0} \vdash \text{carrosse}$$

Nous interprétons donc *zéro* comme une « baguette magique », qui permet de créer, transformer, désintégrer n'importe cumulé d'exemplaires de n'importe quelle ressource. Bref, étant donné ses pouvoirs, il s'agit d'une ressource « divine », du moins tant qu'elle reste hors de portée de mains malveillantes ! Fort heureusement, il est strictement impossible de produire $\mathbf{0}$ sans en poser un exemplaire comme consommé. En effet, quelles que soient les formules A_1, A_2, \dots, B , pour que le séquent suivant soit prouvable :

$$A_1, A_2, \dots, B \vdash \mathbf{0}$$

il faudrait par exemple que l'une des prémisses A_i soit de la forme $A' \otimes \mathbf{0}$. Quant à « pactiser avec le Diable » (cf. section III.3.1) pour produire une baguette magique, n'y pensons pas car cette baguette ne pourrait jamais détruire le pacte, qui serait disjoint !

III.3.3 L'implication additive

Bien que ce connecteur soit formellement concevable comme la forme additive de l'implication classique, GIRARD ne l'a jamais mentionné (du moins, à notre connaissance); par conséquent, il ne lui a donné ni nom, ni symbole. Pour notre analyse, notons-le par exemple \rightsquigarrow . La formule $A \rightsquigarrow B$ est syntaxiquement équivalente à $A^\perp \oplus B$. Elle exprime donc un conflit non maîtrisée entre un exemplaire productible d'une ressource A et un exemplaire consommable d'une ressource B .

Pour illustrer un tel type de ressource, un exemple concret consiste en la notion ludique de *mise*. Imaginons une partie de poker à quatre joueurs. En représentant la valeur d'une mise par une ressource M , l'action de chaque joueur revient à consommer un exemplaire de la ressource $M \rightsquigarrow M^{\otimes 3}$. Pour le gagnant, le produit de son action sera $M^{\otimes 3}$ et pour les perdants l'alternative M^\perp , mais bien entendu, la logique linéaire ne permet pas de savoir qui va gagner. Pour cette raison, le raisonnement tourne court, et l'intérêt de l'implication additive nous semble fort limité, en termes de consommation/production.

III.3.4 Distributivité des multiplicatifs sur les additifs

En logique classique, la conjonction *et* et la disjonction *ou* sont mutuellement distributives l'une sur l'autre :

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge C &\dashv\vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\ (A \wedge B) \vee C &\dashv\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \end{aligned}$$

En logique linéaire, ces propriétés existent entre certains multiplicatifs et certains additifs. D'une part la conjonction *fois* se distribue sur la disjonction *plus*, d'autre part la

disjonction *par* se distribue sur la conjonction *avec* :

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \otimes C &\dashv\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \\ (A \& B) \wp C &\dashv\vdash (A \wp C) \& (B \wp C) \end{aligned}$$

Remarquons qu'il y a là une analogie avec la propriété arithmétique de distributivité de la multiplication sur l'addition, ce qui justifie les choix de notation et de terminologie, notamment pour les connecteurs *fois* et *plus*. Cependant, cette analogie a une limite: alors que la disjonction additive est idempotente, l'addition arithmétique est linéaire.

En terme de ressource, nous pouvons donner à ces deux propriétés un sens conforme avec l'interprétation des connecteurs linéaires que nous avons développée. Pour la première par exemple, repensons à la monnaie rendue par le distributeur automatique (cf. section III.3.2), que nous avons exprimée par la formule :

$$(deux-frs \otimes un-fr) \oplus (un-fr^{\otimes 2} \otimes un-fr)$$

c'est-à-dire, soit une pièce de deux francs et une pièce de un franc, soit trois pièces de un franc. Les produits de l'action se résument à une pièce de un franc dans les deux cas, et puis soit une pièce de deux francs, soit encore deux pièces de un franc. Cette factorisation donne la formule suivante :

$$(deux-frs \oplus un-fr^{\otimes 2}) \otimes un-fr$$

Mais en fait, les distributivités sont plus subtiles qu'il n'y paraît. À première vue, les opérateurs de cumuls (connecteurs multiplicatifs) semblent se distribuer sur les opérateurs de choix (connecteurs additifs). Pourtant, entre le multiplicatif *fois* et l'additif *avec* d'une part, et entre le multiplicatif *par* et l'additif *plus* d'autre part, il n'existe qu'une relation de *semi-distributivité* :

$$\begin{aligned} (A \& B) \otimes C &\dashv\vdash (A \otimes C) \& (B \otimes C) \\ (A \wp C) \oplus (B \wp C) &\dashv\vdash (A \oplus B) \wp C \end{aligned}$$

En termes de choix et de cumul de ressources, il nous importe de comprendre pourquoi ces deux propriétés ne sont pas réciproques l'une autant que l'autre, alors qu'il suffirait, pour qu'elles le deviennent, de remplacer dans la première les occurrences de $\&$ par des \oplus , et inversement dans la deuxième. Analysons la première de ces deux relations de non-distributivité. En procédant par substitution, montrons pourquoi le séquent suivant n'est pas prouvable :

$$(A \otimes C) \& (B \otimes C) \not\vdash (A \& B) \otimes C \quad (\text{III.1})$$

Remplaçons toutes les occurrences de la formule C par la formule implicative $(A \& B) \multimap D$. À partir du membre gauche du séquent (III.1), nous ne pouvons pas déduire D :

$$(A \otimes \underbrace{(A \& B) \multimap D}_C) \& (B \otimes \underbrace{(A \& B) \multimap D}_C) \not\vdash D$$

car ni la formule A , ni la formule B ne satisfont l'antécédent requis $A \& B$ — rappelons que $A \not\vdash A \& B$ et $B \not\vdash A \& B$. En revanche, en effectuant la même substitution dans le membre droit du séquent (III.1), nous obtenons :

$$(A \& B) \otimes \underbrace{(A \& B \multimap D)}_C \vdash D$$

Par conséquent, le séquent (III.1) n'est pas prouvable car dans le cas contraire, de son membre gauche, nous pourrions déduire son membre droit puis, par enchaînement, la formule D — alors que nous en avons montré l'impossibilité. Maintenant, remplaçons dans le séquent (III.1) chaque occurrence du symbole $\&$ par le symbole \oplus , et procédons à la même substitution sur la formule C :

$$\underbrace{(A \otimes ((A \oplus B) \multimap D))}_{\vdash D} \oplus \underbrace{(B \otimes ((A \oplus B) \multimap D))}_{\vdash D} \vdash \underbrace{(A \oplus B) \otimes ((A \oplus B) \multimap D)}_{\vdash D}$$

Alors le membre gauche permet, comme le membre droit de déduire D . En effet, sachant que $A \vdash A \oplus B$ et $B \vdash A \oplus B$, nous pouvons déduire D à partir de l'un aussi bien que l'autre des deux termes de la disjonction \oplus du membre gauche. Quant au membre droit, il constitue toujours les prémisses d'un modus ponens dont la conclusion serait D . Par ailleurs, si nous changeons les occurrences de \otimes en \wp dans le séquent (III.1), et si nous gardons toujours la même substitution sur C , nous obtenons :

$$\underbrace{(A \wp ((A \& B) \multimap D))}_{\vdash D} \& \underbrace{(B \wp ((A \& B) \multimap D))}_{\vdash D} \vdash \underbrace{(A \& B) \wp ((A \& B) \multimap D)}_{\vdash D}$$

Alors le membre droit ne permet plus de déduire D , et il en reste de même pour le membre gauche. La disjonction *par* sépare les deux prémisses $A \& B$ et $(A \oplus B) \multimap D$ et ainsi interdit le modus ponens. Donc, après substitution des \otimes en \wp , notre argument de non prouvabilité du séquent (III.1) n'est plus valable.

Au sens des ressources, la formule $(A \otimes C) \& (B \otimes C)$ exprime qu'un exemplaire de la ressource C est « prisonnier » du conflit entre A et B . Pour que cet exemplaire devienne consommable indépendamment de ce conflit, il faut d'abord faire le choix entre $A \otimes C$ et $B \otimes C$. Une fois la décision prise, l'exemplaire de C devient consommable, mais il n'est pas question qu'alors un exemplaire de $A \& B$ soit conjointement consommable, car le degré de liberté qu'il représente vient justement d'être employé. De plus, l'exemplaire de C n'est vraiment « prisonnier » de l'alternative que parce qu'il est cumulé conjointement à ses deux termes. Si le cumul était disjoint, l'exemplaire de C serait indépendant de l'alternative, conformément à la distributivité du connecteur *par* sur le connecteur *avec*. Pour illustrer concrètement la semi-distributivité de *fois* sur *plus*, imaginons que notre distributeur automatique ne retourne la monnaie que lorsque le client appuie sur un bouton pour choisir une boisson — c'est souvent le cas d'un distributeur qui propose des consommations à prix variables : la monnaie ne peut être retournée avant que le prix de la consommation soit connu par la machine. La ressource d'action du consommateur n'est alors pas la formule $F^{\otimes 2} \multimap (\text{thé} \& \text{café})$ mais :

$$F^{\otimes m} \multimap ((\text{thé} \otimes F^{\otimes(m-2)}) \& (\text{café} \otimes F^{\otimes(m-2)}))$$

dans laquelle l'entier naturel m représente le nombre de francs introduits par le client dans la machine. À partir du produit de l'action du client, la logique linéaire interdit la production de $(\text{thé} \& \text{café}) \otimes F^{\otimes(m-2)}$, car tant que le client n'a pas fait son choix de boisson, la monnaie à rendre $F^{\otimes(m-2)}$ reste dans la machine ; le client ne peut en disposer pour une autre action.

Examinons à présent le cas de la deuxième non distributivité, toujours procédant par substitution. Le séquent non-prouvable en question est :

$$(A \oplus B) \wp C \not\vdash (A \wp C) \oplus (B \wp C) \quad (\text{III.2})$$

Remplaçons toutes les occurrences de la formule C par la formule $A \& B$. Alors que le membre droit du séquent (III.2) permet de déduire la formule $A \wp B$, il n'en est rien pour le membre gauche. En effet, dans chacun des deux termes de la disjonction *plus* du membre droit, nous disposons d'un degré de liberté introduit par $A \& B$. Il suffit donc de choisir dans chacun des deux termes l'exemplaire complémentaire à celui qui est disjointement consommable, pour obtenir à chaque fois la même formule $A \wp B$, ce qui correspond au séquent :

$$(A \wp \underbrace{(A \& B)}_C) \oplus (B \wp \underbrace{(A \& B)}_C) \vdash (A \wp B) \oplus (B \wp A)$$

dont le membre droit est équivalent à $A \wp B$ en vertu de la commutativité du connecteur *par* et de l'idempotence du connecteur *plus*. A contrario, avec la même substitution sur C , la déduction de $A \wp B$ est impossible à partir du membre gauche du séquent (III.2) car, compte tenu de la distributivité de *par* sur *avec*, nous avons l'équivalence :

$$(A \oplus B) \wp \underbrace{(A \& B)}_C \dashv\vdash ((A \oplus B) \wp A) \& ((A \oplus B) \wp B)$$

Dans les deux termes de la conjonction *avec* du membre droit de ce dernier séquent, l'incertitude portée dans $A \oplus B$ demeure, donc nous pouvons très bien avoir dans le premier terme $A \wp A$, et dans le deuxième $B \wp B$, et non pas à coup sûr $A \wp B$ dans les deux. Bref, notre substitution sur C démontre la non-prouvabilité du séquent (III.2) : si ce dernier était prouvable, alors nous pourrions déduire $A \wp B$ à partir du membre gauche, en déduisant d'abord son membre droit, qui lui même permet de déduire D . Or nous avons montré que c'était impossible. Pour finir, remarquons que notre argument de non-prouvabilité tombe si nous remplaçons chaque occurrence du symbole \oplus par un symbole $\&$, ou encore chaque occurrence du symbole \wp par un symbole \otimes . Pour s'en convaincre, il suffit d'effectuer ces substitutions dans tout le raisonnement précédent.

Au sens des ressources, la formule $(A \wp C) \oplus (B \wp C)$ exprime que l'exemplaire de la ressource C est « inclus » dans le conflit non maîtrisé. Pour éliminer l'incertitude, il suffit d'introduire à l'intérieur, (grâce à la ressource C) un degré de liberté complémentaire dans C . En revanche, c'est impossible dans $(A \oplus B) \wp C$, à cause de *par* qui *disjoint* l'exemplaire de C de celui de $A \oplus B$.

III.4 Les connecteurs exponentiels

Dans le calcul des séquents, le passage des connecteurs classiques aux connecteurs linéaires résulte de la suppression des règles structurelles de contraction et d'affaiblissement, c'est-à-dire du rejet de l'idempotence de la virgule. Il est néanmoins possible de rétablir cette propriété d'une façon « contrôlée » : c'est le rôle de deux connecteurs unaires,

appelés *bien sûr* et *pourquoi pas*, qui forment la famille des *exponentiels*. Vis-à-vis des formules connectées par *bien sûr*, la virgule est idempotente si cette dernière est à gauche du tourniquet; le connecteur *pourquoi pas* opère de même à droite du tourniquet. Les deux exponentiels sont duaux par négation linéaire: la forme *bien sûr* ($\text{nil } A$) est équivalente à $\text{nil}(\text{pourquoi pas } A)$. De plus, ils se distribuent d'une façon particulière: *bien sûr* en transformant une conjonction additive en une conjonction multiplicative; *pourquoi pas* en transformant une disjonction multiplicative en une disjonction additive.

III.4.1 La conjonction exponentielle

Ce connecteur se nomme *bien sûr* et se note $!(-)$. Il est conçu pour rétablir les règles de contraction et d'affaiblissement dans le membre gauche d'un séquent par rapport aux formules auxquelles ce connecteur est appliqué — formules de la forme $!A$, dites *exponentielles conjonctives*. Rappelons qu'à gauche du tourniquet, toute virgule est implicitement une conjonction *fois*. Cette dernière est donc idempotente par rapport aux formules exponentielles conjonctives. Quelle que soit la formule A , nous avons :

$$!A \vdash !A \otimes !A$$

Mais ce n'est pas tout. Une formule telle que $!A$ jouit de deux autres propriétés primordiales, exprimées respectivement par les séquents :

$$!A \vdash A \qquad !A \vdash 1$$

En définitive, ces propriétés se résument par $!A \dashv\vdash 1 \& A \& (!A \otimes !A)$. De plus, le connecteur *bien sûr* est lui-même idempotent: nous avons $!(!A) \dashv\vdash !A$.

En appliquant récursivement les propriétés de *bien sûr*, nous constatons qu'en tant que prémisses, la formule $!A$ est très « forte », puisqu'elle permet de déduire n'importe quelle conjonction multiplicative de la formule A : quel que soit l'entier naturel m , nous avons $A \vdash A^{\otimes m}$. Donc, nous pouvons écrire :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left(!A \vdash \bigotimes_{k=0}^m A^{\otimes k} \right)$$

Mais la réciproque est fautive. De surcroît, contrairement à ce que sous-tendrait une analogie avec les développements en séries entières, la formule $!A$ n'est pas équivalente à :

$$\bigotimes_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k} \quad \text{i. e.} \quad 1 \& A \& (A \otimes A) \& (A \otimes A \otimes A) \& \dots$$

En effet, notons C cette formule; quelle que soit la méthode choisie, il n'existe aucune preuve *finie* du séquent $C \vdash C \otimes C$. C'est la raison pour laquelle certaines formules, qui permettent de déduire $A^{\otimes m}$ quel que soit $m \in \mathbb{N}$, ne sont pas pour autant équivalentes à $!A$. Par exemple, notons K la formule $(1 \& A) \otimes !(A \multimap (A \otimes A))$. Alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad (K \vdash A^{\otimes m}) \quad \text{mais} \quad K \not\vdash !A$$

En effet, d'abord $1 \& A$ permet de déduire ou bien $A^{\otimes 0}$ ou bien $A^{\otimes 1}$, le deuxième terme de K pouvant se réduire à 1. Ensuite, en partant de A et en utilisant une occurrence de

$A \multimap (A \otimes A)$, nous déduisons $A^{\otimes 2}$; si nous utilisons deux occurrences de $A \multimap (A \otimes A)$, nous déduisons $A^{\otimes 3}$; etc. Cependant, nous constatons que $K \nVdash (\mathbf{1} \& A)^{\otimes 2}$, donc nous avons $K \nVdash K \otimes K$, et donc finalement, K n'est pas équivalente à $!A$.

Insistons également sur le fait que l'idempotence de la conjonction *fois* par rapport aux formules exponentielles conjonctives ne sous-tend aucune propriété d'absorption. La non-prouvabilité du séquent suivant en est le paradigme :

$$(!A) \otimes A \nVdash !A$$

Par conséquent, toute déduction de A à partir de $!A$ est irréversible. Enfin, la disjonction multiplicative *par* n'est pas idempotente par rapport aux exponentielles conjonctives, plus précisément $!A \nVdash !A \wp !A$.

Une ressource de la forme $!A$ permet donc de produire n'importe quel cumul conjoint d'exemplaires de A . C'est seulement une fois qu'ils sont produits que ces exemplaires sont consommables, donc $!A$ exprime un cumul conjoint, non pas *infini*, mais *indéfini*, d'exemplaires de la ressource A . Poser $!A$ dans les consommés d'une action revient à considérer que la ressource A est *indéfiniment consommable*, ou encore *inépuisable*. Un exemple typique est celui du millionnaire : à son point de vue, pour toutes les actions de petits achats, nous posons $!F$, où F symbolise la ressource de valeur un franc.

Un autre exemple d'application est l'expression d'une loi de transformation dans un contexte particulier, si cette loi peut s'écrire comme une ressource d'action. Supposons qu'un client achète sept timbres à 2 francs 80 chez un buraliste, en payant avec un billet de 20 francs. Le coût des timbres s'élevant à 19 francs 60, le buraliste lui rend 40 centimes. Dans les produits de cette action d'achat, nous écrivons $\text{timbre}^{\otimes 7} \otimes C^{\otimes 40}$, ce qui représente le cumul série des sept timbres et de la monnaie rendue — C symbolisant la ressource monétaire de valeur égale à un centime. Dans les consommés de l'action, nous posons un exemplaire de $F^{\otimes 20}$, qui représente l'argent du client, et un exemplaire de $((F^{\otimes 2} \otimes C^{\otimes 80}) \multimap \text{timbre})^{\otimes 7}$, qui représente les timbres en vente. Cependant, ces consommés sont insuffisants pour que l'action soit correcte : il manque des exemplaires de la ressource d'action $F \multimap C^{\otimes 100}$ qui permet de convertir les francs en centimes. Reste alors à savoir quel cumul d'exemplaires de cette ressource est nécessaire dans les consommés de l'action. Sachant que $(C^{\otimes 80})^{\otimes 7} \dashVdash C^{\otimes 560}$, il en faut six exemplaires cumulés conjointement. Toutefois, dans la pratique, l'action de conversion reste virtuelle et non pas matérielle, tant au point de vue du client qu'à celui du buraliste. En ce sens, la ressource d'action de conversion ne correspond pas à une ressource : sa consommation n'est par rien limitée. Par conséquent, sauf à vouloir exprimer le calcul purement logique que nous venons de faire, il n'est pas pertinent de préciser le cumul d'exemplaires qu'en consomme l'action d'achat. D'où l'application du connecteur *bien sûr* :

$$F^{\otimes 20}, !(F \multimap C^{\otimes 100}), ((F^{\otimes 2} \otimes C^{\otimes 80}) \multimap \text{timbre})^{\otimes 7} \vdash \text{timbre}^{\otimes 7} \otimes C^{\otimes 40}$$

La ressource $F \multimap C^{\otimes 100}$, posée indéfiniment consommable, apparaît comme une loi de transformation du domaine de l'action considérée — loi qui s'ajoute aux règles générales de la logique linéaire. Plus généralement, au sens des ressources, une formule telle que $!A$ diffère radicalement des formules ordinaires. Étant auto-suffisante pour se dupliquer

conjointement, elle déroge au principe de Lavoisier. Sachant que $!A \dashv\vdash !A \otimes !A$, la notion de cumul conjoint d'exemplaires de $!A$ est dégénérée.

Nous allons aussi montrer que si nous faisons abstraction de tout cumul disjoint, alors la consommation « conjointe » d'une ressource telle que $!A$ n'a pas de sens. Considérons une action pour laquelle un exemplaire de $!A$ figure dans les consommés, mais manque dans les produits, comme celle représentée par $!A \vdash C$. Nous n'interprétons pas ce manque comme la consommation de l'exemplaire en question. En effet, si l'action précédente est correcte, alors avec les mêmes consommés, l'action qui produit exactement les mêmes produits et en plus $!A$, c'est-à-dire $!A \vdash !A \otimes C$, est également correcte. Il y a là une analogie avec les déductions classiques. Dans le schéma du modus ponens $A \wedge (A \Rightarrow B) \vdash B$, il n'y a pas lieu d'interpréter l'absence de A dans la conclusion comme une consommation, parce que le séquent $A \wedge (A \Rightarrow B) \vdash A \wedge B$ est également prouvable. A contrario, la production d'une ressource inépuisable comme $!A$ n'est pas une notion dégénérée. Un exemple simple est donné par l'action $B, B \multimap !A \vdash !A$. Interprétons B par le numéro gagnant au Loto et A par une ressource monétaire : nous obtenons un exemple réaliste de l'action ci-dessus. Par rapport à cette dernière, il y un sens à dire qu'avant son exécution, $!A$ n'est pas consommable, mais qu'après, oui. Les rares personnes de fortune modeste qui ont gagné le gros lot en savent quelque chose. Ici, la possibilité de production de $!A$ n'est pas une conséquence *nécessaire* de $B \otimes (B \multimap !A)$ car nous pouvons imaginer un conflit sur l'exemplaire de B ; pensons par exemple à la possibilité de revente du ticket de Loto à quelqu'un d'autre.

Concernant la production de ressources inépuisables, citons également la propriété de transitivité relative à la conjonction exponentielle, exprimée par :

$$!A, !(A \multimap B) \vdash !B$$

Nous interprétons une telle propriété en prenant l'exemple d'un millionnaire dans une boulangerie. Pour que ce dernier puisse acheter autant qu'il veut de pains (ici représentés par la ressource B), nous devons non seulement supposer qu'il est très riche (prémisse $!A$), mais également que la ressource d'action d'achat des pains ($A \multimap B$) est, elle aussi, indéfiniment consommable. Remarquons au passage le rapport de force entre l'exponentielle conjonctive $!(A \multimap B)$ et l'implicative $!A \multimap !B$. Nous avons $!(A \multimap B) \dashv\vdash !A \multimap !B$, ce que nous constatons en particulier de la façon suivante :

$$A, !(A \multimap B) \vdash B \quad \text{mais} \quad A, !A \multimap !B \not\vdash B$$

Au sens des ressources, la formule $!(A \multimap B)$ est plus puissante car elle est inépuisable, alors que $!A \multimap !B$ consiste simplement en un exemplaire.

III.4.2 La disjonction exponentielle

Ce connecteur se nomme *pourquoi pas* et se note $?(-)$. Toutes ses propriétés étant duales de celles du connecteur *bien sûr*, nous les introduisons de la même manière. Il est conçu pour rétablir les règles de contraction et d'affaiblissement dans le membre droit d'un séquent, uniquement par rapport aux formules auxquelles nous appliquons ce connecteur, qui sont de la forme $?A$, dites *exponentielles disjonctives*. Rappelons qu'à droite du

tourniquet, toute virgule est implicitement une disjonction *par*. Cette dernière est donc idempotente par rapport aux exponentielles disjonctives. Quelle que soit la formule A , nous avons :

$$?A \wp ?A \vdash ?A$$

Une formule telle que $?A$ jouit également de deux autres propriétés primordiales, exprimées respectivement par les deux séquents suivants :

$$A \vdash ?A \qquad \perp \vdash ?A$$

En définitive, ces propriétés se résument par $?A \dashv\vdash \perp \oplus A \oplus (?A \wp ?A)$. De plus, le connecteur *pourquoi pas* est lui-même idempotent : nous avons $?(?A) \dashv\vdash ?A$.

En appliquant récursivement les propriétés de *pourquoi pas*, nous constatons que n'importe quelle disjonction multiplicative de la formule A permet de déduire $?A$. Quel que soit m dans \mathbb{N} , nous avons $A^{\wp m} \vdash ?A$, ou encore :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left(\bigoplus_{k=0}^m A^{\wp k} \vdash ?A \right)$$

La réciproque étant fautive, il apparaît clairement qu'il n'y a pas équivalence entre la formule $?A$ et une écriture telle que :

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\wp k} \quad \text{i. e.} \quad \perp \oplus A \oplus (A \wp A) \oplus (A \wp A \wp A) \oplus \dots$$

même si cette dernière donne une certaine idée de ce que représente la formule $?A$. Comme prémisse, $?A$ est « faible », autant que $!A$ est « forte ».

Nous interprétons la formule $?A$ comme un cumul disjoint d'une quantité *inconnue* d'exemplaires la ressource A . Une application concrète réside dans la prise en compte, au point de vue d'un consommateur particulier, de l'existence potentielle d'autres consommateurs. Reprenons l'exemple de la barquette de fraises au supermarché (cf. section III.2.4) et considérons le point de vue de Pierre. Pour représenter un certain nombre d'autres acheteurs potentiels de fraises nous posons, disjointement des ressources de Pierre, un cumul disjoint indéterminé de la ressource requise pour acheter les fraises, c'est-à-dire $?(F^{\otimes 5})$. Si Pierre prend la barquette, l'action se traduit par le séquent :

$$F^{\otimes 5} \wp ?(F^{\otimes 5}), F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises} \vdash (F^{\otimes 5} \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises})) \wp ?(F^{\otimes 5})$$

La prise en compte des autres clients adventices n'est pas insignifiante. Elle sous-tend un conflit avec une autre action :

$$F^{\otimes 5} \wp ?(F^{\otimes 5}), F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises} \vdash F^{\otimes 5} \wp (?(F^{\otimes 5}) \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}))$$

qui exprime l'appropriation de la barquette par un client autre que Pierre. Cependant, le séquent qui correspondrait à l'achat par un client adventice n'est pas prouvable :

$$?(F^{\otimes 5}) \otimes (F^{\otimes 5} \multimap \text{fraises}) \not\vdash \text{fraises}$$

La forme générale de cette non-prouvabilité s'écrit $?A, A \multimap B \not\vdash B$. Dans l'exemple du supermarché, elle correspond au fait que Pierre ne peut pas déduire qu'un client adventice qui aurait pris la barquette l'aurait effectivement achetée, simplement parce que ce client, identifié par les exemplaires de ressources qu'il possède, est indéterminé. En fait, nous ne savons même pas s'il existe vraiment, puisque $?A$ sous-tend éventuellement \perp . L'examen de cette non-prouvabilité nous amène à évoquer la transitivité de la disjonction exponentielle, qui s'exprime par le séquent :

$$?A, !(A \multimap B) \vdash ?B$$

Au sens des ressources, sachant que $?A$ correspond à un cumul disjoint d'un nombre indéterminé d'exemplaires de A , alors un cumul conjoint indéfini de la ressource d'action $A \multimap B$ permet de pallier l'indéterminisme de A , pour pouvoir produire conjointement un exemplaire de la ressource $?B$. Pour le comprendre, il suffit d'examiner le cas borné, exprimé ci-dessous :

$$\bigoplus_{k=0}^m A^{\otimes k}, \&_{k=0}^m (A \multimap B)^{\otimes k} \vdash \bigoplus_{k=0}^m B^{\otimes k}$$

Ces remarques confirment qu'une ressource telle que $?A$ offre très peu de possibilités de production, contrairement à une ressource $!A$, qui très puissante.

Les formules exponentielles disjonctives dérogent au principe de Lavoisier. Nous pouvons produire une ressource de la forme $?A$ disjointement de n'importe quel exemplaire B , puisque ce dernier revient à $B \wp \perp$ et que $\perp \vdash ?A$. Nous n'attribuons donc aucun sens à la production disjointe d'exemplaires de $?A$. Plus exactement, la notion de cumul disjoint d'exemplaires de cette ressource, à savoir $?A \wp ?A \wp \dots$, est dégénérée, à cause de l'idempotence de *par vis-à-vis de pourquoi pas*. En revanche, la production conjointe d'exemplaires de $?A$ (par exemple $A \vdash ?A$) n'est pas insignifiante. Une fois un exemplaire produit, il n'est pas possible de s'en débarrasser autrement que par une action de consommation, comme celle de transitivité.

III.4.3 Distributivité des exponentiels

Les deux connecteurs exponentiels vérifient chacun certaines propriétés de distributivité sur les connecteurs binaires, propriétés qui confirment notre interprétation de ces derniers, au sens des ressources. Pour la conjonction exponentielle, nous avons d'abord la relation de semi-distributivité par rapport à la conjonction multiplicative *fois* :

$$!A \otimes !B \not\vdash !(A \otimes B)$$

Elle signifie qu'un cumul conjoint indéfini de $A \otimes B$ ne permet pas de produire un nombre différent d'exemplaires de A et d'exemplaires de B , mais toujours autant ; par exemple, $!(A \otimes B) \not\vdash A$. En revanche, $!A \otimes !B$ permet de produire un cumul de n'importe quel cumul conjoint d'exemplaires de A et de n'importe quel cumul conjoint d'exemplaires de B ; donc, nous avons $!A \otimes !B \vdash A$.

L'équivalence syntaxique la plus remarquable relative à la distributivité de *bien sûr* s'établit entre les deux conjonctions binaires *fois* et *avec* :

$$!A \otimes !B \dashv\vdash !(A \& B)$$

Le passage à l'infini qu'opère implicitement la conjonction exponentielle rend la formule $!(A \& B)$ plus puissante que $!(A \otimes B)$, alors qu'il n'y a aucun rapport de force direct entre $A \otimes B$ et $A \& B$. Au sens des ressources, $!(A \& B)$ permet de produire n'importe quel cumul conjoint d'exemplaires de $A \& B$, chacun pouvant donner soit A , soit B . Donc, en termes de consommation/production, $!(A \& B)$ est bien équivalente à $!A \otimes !B$.

Les propriétés de distributivité du connecteur *pourquoi pas* sont les formes duales de celles de *bien sûr*. Nous avons d'abord la semi-distributivité sur la disjonction *par* :

$$?(A \wp B) \dashv\vdash ?A \wp ?B$$

Au sens des ressources, le membre gauche de ce séquent correspond à un cumul disjoint d'une quantité inconnue, mais égale, d'exemplaires de A et de B . Le membre droit est « encore plus indéterminé », puisque la quantité d'exemplaires de A est indépendante de celle d'exemplaires de B . Il est donc logique que nous puissions produire le membre droit en consommant le membre gauche, par introduction d'une forme d'indéterminisme, et que cette action soit irréversible, exactement comme celle de la « boîte noire » $A \vdash A \oplus B$ (cf. section III.3.2). Comme pour *bien sûr*, nous avons aussi une équivalence remarquable, qui distribue le connecteur *pourquoi pas* en transformant la disjonction additive en une disjonction multiplicative :

$$?(A \oplus B) \dashv\vdash ?A \wp ?B$$

Ici, le membre gauche est aussi indéterminé que le membre droit, puisque chaque exemplaire du cumul est lui-même indéterminé, entre un exemplaire de A et un exemplaire de B , d'où l'équivalence au sens des ressources.

III.5 Les grands principes de la négation

Rappelons que nous concevons la négation linéaire comme un opérateur involutif d'inversion de l'orientation *passé/futur* des exemplaires de ressources, par rapport à la dimension temporelle d'une action donnée (cf. section III.1.4). Maintenant que nous avons interprété tous les autres connecteurs linéaires au sens des ressources, nous allons développer à quoi correspondent deux grands principes liés à la négation classique — le *principe de dualité* et le *principe du tiers exclu* — que l'on retrouve par analogie en logique linéaire.

III.5.1 Le principe de dualité

En logique classique, on appelle *principe de dualité* le méta-théorème suivant : étant donnée une formule A — formée uniquement par des opérations de négation, de conjonction, et de disjonction —, la négation de A s'obtient en remplaçant les atomes propositionnels de A par leurs négations et vice-versa, et en changeant les occurrences des conjonctions *et* en disjonctions *ou*, et vice-versa. Ce principe repose sur les propriétés de dualité de ces deux connecteurs classiques :

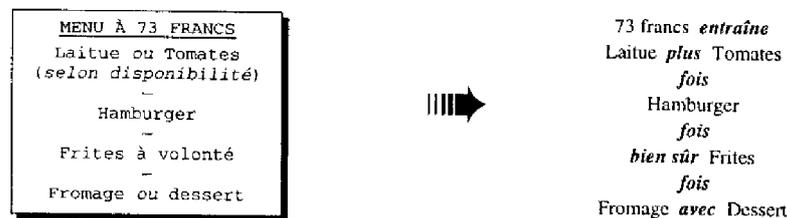
$$\neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B$$

et sur la propriété d'involution de la négation, à savoir $\neg(\neg A) \dashv\vdash A$. En logique linéaire, les rapports de dualité par négation linéaire existent dans les trois familles, respectivement

entre les conjonctions et les disjonctions *fois* et *par*, *avec* et *plus*, *bien sûr* et *pourquoi pas*. De plus, la négation linéaire est involutive. Nous pouvons donc y définir le principe de dualité en généralisant le changement des connecteurs selon les couples duaux.

Dans l'article [26], GIRARD présente un exemple didactique de formalisation d'un menu de restaurant, d'après une idée d'Yves LAFONT qui a également été reprise sous une forme similaire par P. LINCOLN dans [55] ainsi que par MARTÍ-OLIET et MESEGUER dans [58]. Tout en illustrant l'interprétation concrète des connecteurs, la formalisation du menu suivant les points de vue duaux du client et du restaurateur cherche à traduire le changement de point de vue par la négation linéaire² :

Un restaurant propose un menu à 73 francs, où figurent une entrée, un plat principal, des frites et une sortie au choix. Le connecteur linéaire *plus* sert à décrire la situation que l'on



rencontre avec l'entrée : on reçoit une entrée, mais on ne peut choisir laquelle. Le connecteur *avec* indique que l'on a un fromage ou un dessert au choix. Le connecteur *bien sûr* indique que l'on a autant de frites que l'on désire, sans limitation. Le connecteur *entraîne* indique que l'on dépense ce qui figure au membre de gauche pour obtenir ce qui figure au membre de droite. Enfin le connecteur *fois* indique que l'on a simultanément les objets qui figurent à sa droite et à sa gauche. Le menu représenté peut ainsi se décrire, en logique linéaire, par la formule qui apparaît dans la partie [droite] de la figure. La négation linéaire correspond au changement de point de vue; ici à voir celui du restaurateur, qui a le choix entre laitue et tomates, mais pas entre fromage et dessert. C'est pourquoi *plus* et *avec* sont échangés par la négation linéaire *nil*.

Observons d'abord que le texte ne précise pas comment s'applique la négation linéaire à la formule donnée au départ, laquelle est de la forme $argent \multimap menu$. Nous envisageons les deux possibilités suivantes : soit l'application à toute la formule de départ, ce qui donne $argent \otimes menu^\perp$, soit l'application membre à membre par contraposition, ce qui donne $menu^\perp \multimap argent^\perp$. Dans les deux cas, il faut appliquer la négation linéaire à la ressource *menu*, donc appliquer le principe de dualité à ses trois sous-formules principales. Or le texte n'évoque que l'interprétation de la dualité entre *avec* et *plus*. Mais si nous prolongeons l'idée du changement de point de vue, nous devons également échanger *fois* et *par*, notamment entre les composantes du menu. Comment expliquer cette permutation ?

Pour tenter de répondre à cette question, retenons l'idée de l'application de la négation linéaire par contraposition, qui semble la plus naturelle : la formule obtenue est équivalente à la formule de départ et sa forme respecte une certaine symétrie entre les deux points de vue. Selon notre approche, l'argent que le client consomme pour obtenir un menu apparaît comme un cumul conjoint de la forme $F^{\otimes 73}$. En associant le principe de dualité au changement de point de vue, l'argent que produit le restaurateur, en fournissant un menu au client, est donc un cumul disjoint de la forme $(F^\perp)^{\wp 73}$. Toutefois, ce résultat

2. Nous avons reproduit approximativement la figure originale de l'article [26].

nous pose une difficulté. A priori, nous n'avons aucune raison de considérer les ressources pécuniaires du restaurateur comme un cumul d'exemplaires productibles. En effet, après avoir travaillé, ce dernier peut devenir à son tour client et effectuer des actions d'achat vis-à-vis desquelles nous représenterions par $F^{\otimes 73}$ l'argent qu'il vient de toucher, afin que cet argent soit consommable conjointement. Certes, le restaurateur joue alors le rôle d'un consommateur (et non plus d'un producteur), mais il correspond au même observateur vis-à-vis de deux actions successives.

Par ailleurs, l'interprétation du principe de dualité comme un changement de point de vue nous gêne par rapport à des aspects fondamentaux. Il nous semble que les observateurs d'une action ne se réduisent pas systématiquement à une dualité. Reprenons les explications données dans l'article [27], toujours pour le même exemple :

Au sujet de la différence entre « \oplus » et « $\&$ », on peut noter le rôle essentiel du « je », c'est-à-dire du point de référence: je peux choisir entre fromage et dessert, mais pas entre tomates et laitue; par contre, si le premier choix était tout bonnement du ressort du chef cuisinier (et non pas de la saison), il pourrait choisir entre tomates et laitue, mais pas entre fromage et dessert: du point de vue du chef, le premier choix est un « $\&$ », et le second un « \oplus ». Comment expliquer ceci sans pirouette? Il y a en logique un point de référence implicite, non spécifié, disons « je »; les possibilités dynamiques sont jaugées par rapport à ce « je ». Maintenant, nous pouvons décider un changement de point de vue, c'est-à-dire intervenir le point de référence et le reste du monde: ce que nous voyons de l'intérieur sera vu de l'extérieur, et réciproquement. Des verbes comme *donner*, *lire* deviendront *recevoir*, *écrire*; ce changement de point de vue est exprimé par la *négation linéaire*, notée $(-)^{\perp}$.

Certes, l'opposition du point de vue intérieur, dénoté par « je », au « *reste du monde* », constitue une dualité. Mais dans l'exemple du restaurant, le changement de point de vue est appliqué entre le client et le chef cuisinier; or si nous nous plaçons dans la position du client, il ne nous paraît pas réaliste d'identifier le chef cuisinier au « *reste du monde* », et vice-versa. De plus, nous avons déjà conçu des actions pour lesquelles nous considérons plus de deux points de vue. Pensons, par exemple, à l'achat de pains par Pierre et Paul à la boulangerie (cf. section III.2.3): nous pouvons distinguer les points de vue de Pierre, de Paul, celui commun à Pierre et Paul, celui du boulanger, sans compter les clients adventices (cf. section III.4.2). En définitive, si les points de vue ne sont pas toujours en dualité, nous ne pouvons associer leur permutation à la négation linéaire.

C'est pourquoi nous proposons une autre interprétation du principe de dualité, basée sur la permutation de l'orientation *passé/futur* des actions. Pour l'illustrer, reprenons l'exemple du restaurant. Nous n'identifions ici que deux observateurs, le client et le restaurateur, mais c'est un cas particulier. Commençons par le point de vue du premier. Afin de rester homogène avec les citations, nous exprimons les actions au niveau propositionnel, comme des ressources d'action. Nous décomposons la transaction ainsi :

1. Le client achète pour 73 francs trois tickets, lui donnant droit respectivement à une entrée, un plat principal (dans lequel nous incluons les frites) et une sortie, ce que représente la ressource d'action primaire :

$$F^{\otimes 73} \multimap (\text{entrée} \otimes \text{plat} \otimes \text{sortie})$$

2. Avec ces trois tickets, le client peut obtenir les différents mets du menu, ce qui nous

exprimons respectivement par les trois ressources d'action suivantes :

$$\begin{aligned} \text{entrée} &\multimap (\text{laitue} \oplus \text{tomates}) \\ \text{plat} &\multimap (\text{hamburger} \otimes !\text{frites}) \\ \text{sortie} &\multimap (\text{fromage} \& \text{dessert}) \end{aligned}$$

Par transitivité avec la ressource d'action primaire, nous pouvons alors produire la ressource d'action détaillée :

$$F^{\otimes 73} \multimap (\text{laitue} \oplus \text{tomates}) \otimes \text{hamburger} \otimes (!\text{frite}) \otimes (\text{fromage} \& \text{dessert})$$

Jusque là, notre interprétation reste similaire à celle de GIRARD. Exprimons maintenant le point de vue du restaurateur, vis-à-vis de la même transaction et selon la même décomposition. À l'accueil, pour obtenir 73 francs, le restaurateur fournit les trois tickets donnant droit aux composantes du menu, ce que nous exprimons par la ressource d'action :

$$(\text{entrée} \otimes \text{plat} \otimes \text{sortie}) \multimap F^{\otimes 73}$$

Comme pour le point de vue du client, le cumul des exemplaires ressources est également conjoint. Considérer l'argent que touche le restaurateur comme le cumul disjoint $F^{\otimes 73}$ serait incohérent, selon notre approche, dans la mesure où celui-ci peut à son tour devenir client. Il en est de même pour les trois tickets. Ensuite, examinons séparément les trois ressources d'action, qui expriment ce que fournit le restaurateur en échange des trois tickets. Pour l'entrée, il lui suffit qu'un exemplaire de la ressource *tomates* ou qu'un exemplaire de la ressource *laitue* soient consommables dans ses réserves, peu importe l'un ou l'autre, donc une ressource incertaine entre ces deux possibilités suffit :

$$(\text{laitue} \oplus \text{tomates}) \multimap \text{entrée}$$

Si nous exprimions cet antécédent par le connecteur *avec*, nous signifierions que le restaurateur doit avoir du choix dans ses réserves, entre tomates et laitue, pour composer l'entrée — or cette nécessité n'est pas réelle, puisque dans ce cas précis, le restaurateur a libre choix de la composition. En revanche, cette nécessité lui incombe bel et bien pour la sortie, puisque le restaurateur s'est engagé à satisfaire le choix du client, entre fromage et dessert. Par conséquent, nous y associons la ressource d'action suivante :

$$(\text{fromage} \& \text{dessert}) \multimap \text{sortie}$$

Enfin, en ce qui concerne le plat principal, il est clair qu'en consommant un hamburger, et autant de rations de frites que nécessaires, le restaurateur peut satisfaire son client, ce que nous décrivons par :

$$(\text{hamburger} \otimes !\text{frite}) \multimap \text{plat}$$

Comparons maintenant les deux points de vue : dans tous les cas de figure, si la ressource d'action du client est de la forme $A \multimap B$, celle du restaurateur est l'implication linéaire *réciproque* $B \multimap A$, et non pas la *contraposée* $B^\perp \multimap A^\perp$ qui, elle, est syntaxiquement équivalente à la première forme, et qui sous-tend le principe de dualité.

Mais rappelons justement que nous avons déjà interprété la forme contraposée d'une implication linéaire (cf. section III.1.4). En permutant les exemplaires de ressources suivant qu'ils sont consommés ou produits et en inversant leur orientation *passé/futur*, la contraposée d'une ressource d'action exprime une formulation *rétrospective* du rapport de consommation/production que sous-tend la forme directe. Reprenons le point de vue du restaurateur et examinons le cas de l'entrée. La contraposée est :

$$\text{entrée}^\perp \multimap (\text{laitue}^\perp \& \text{tomates}^\perp)$$

Cela signifie que pour produire une entrée, le restaurateur peut produire ou bien des tomates, ou bien de la laitue, *au choix*. En ce sens, nous constatons que la liberté de choix dont dispose ce dernier existe vis-à-vis de la *production* de l'entrée. De même, pour la sortie, la contraposée s'écrit :

$$\text{sortie}^\perp \multimap (\text{fromage}^\perp \oplus \text{dessert}^\perp)$$

Nous signifions alors que pour produire une sortie, le restaurateur peut produire ou bien du fromage, ou bien un dessert, mais *sans avoir le choix*. Enfin, pour le plat principal, en contraposant la ressource d'action, nous obtenons :

$$\text{plat}^\perp \multimap (\text{hamburger}^\perp \wp ?(\text{frites}^\perp))$$

L'interprétation en est que pour produire un plat principal, le restaurateur peut produire un hamburger et disjointement un certain nombre de fois (mais sans savoir *a priori* combien) une ration de frites. En définitive, l'interprétation de la dualité entre *avec* et *plus* selon une inversion temporelle semble bien s'accorder avec la notion de maîtrise du choix. Il en est de même pour la dualité entre *bien sûr* et *pourquoi pas* : si en consommant une quantité illimitée de frites, le restaurateur peut satisfaire son client, alors dualement, il est capable d'en produire une *quantité indéterminée* d'exemplaires.

Reste alors la question de la dualité entre *fois* et *par* qui nous paraît plus subtile. Reprenons l'expression de la ressource d'action primaire du point de vue du restaurateur, et exprimons sa contraposée. Nous obtenons :

$$(F^{\otimes 73})^\perp \multimap (\text{entrée}^\perp \wp \text{plat}^\perp \wp \text{sortie}^\perp)$$

Notre interprétation revient à dire que pour produire la somme d'argent qui correspond au prix du menu, le restaurateur peut produire *disjointement* une entrée, un plat et une sortie. En effet, rien ne nécessite que cette production soit réalisée *conjointement*, c'est-à-dire par la même personne : le restaurateur peut très bien avoir à sa solde trois marmitons qui s'en chargeront disjointement.

Pour examiner le rapport de dualité inverse, il n'y a pas de ressource d'action de la forme $(A \wp B) \multimap C$ dans l'exemple du restaurant. Reprenons alors l'exemple du partage de ressources dans le cas de l'achat commun d'un pain par Pierre et Paul (cf. section III.2.3). En contraposant la ressource d'action ad hoc, nous obtenons :

$$(F^{\otimes 5})^\perp \multimap (F^{\otimes 3})^\perp \otimes (F^{\otimes 2})^\perp$$

Pour pouvoir produire un cumul conjoint de cinq exemplaires de la ressource monétaire F , l'observateur commun de Pierre et Paul (dont les ressources respectives sont cumulées disjointement) peut produire conjointement ces ressources. En effet, en posant une ressource d'action telle que $A \wp B \multimap C$, nous exprimons que la production de C s'effectue implicitement par une conjonction, un « point de rencontre » entre A et B . Cette nécessité de conjonction devient explicite dans la contraposée $C^\perp \multimap (A^\perp \otimes B^\perp)$.

III.5.2 Le principe du tiers exclu

En logique classique, on appelle *principe du tiers exclu* le fait qu'une proposition logique est soit vraie, soit fausse ; il n'existe donc aucune tierce valeur de vérité autre que ces deux dernières. Formellement, ce principe induit en particulier que la forme A ou $(\text{non } A)$ est une tautologie, c'est-à-dire qu'elle est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de A . Plus généralement, le principe du tiers exclu engendre une extrême simplicité du sens des connecteurs classiques, notamment celui de l'implication. Par exemple, la forme *si* A *alors* B , qui est syntaxiquement équivalente à $(\text{non } A)$ ou B , est vraie si A est fausse. Ainsi, une proposition telle que :

si *Paris est en Angleterre* alors $1 + 1 = 2$

est vraie, alors qu'il n'existe aucun rapport direct de *causalité* entre la localisation géographique de Paris et cette simple équation de l'arithmétique. Il apparaît donc que l'implication n'est, au sens que lui donne la sémantique classique, qu'une approximation de l'idée intuitive de *conséquence logique*. De ce constat est issu l'opposition entre l'*implication matérielle*, dont le sens est celui décrit ci-dessus, et l'*implication stricte*, définie en logique modale. En fait, le débat remonte aux origines de la logique, dans l'école stoïcienne de la Grèce Antique : sur le sens du conditionnel *si... alors...*, PHILON DE MÉGARE et DIODORE s'opposaient entre une conception matérielle pour le premier, stricte pour le second [37]. Néanmoins, la simplicité sémantique de l'implication classique conduit directement à la notion fondamentale de *théorie contradictoire*. Supposons que les axiomes d'une théorie T permettent de déduire, en vertu des règles de la logique classique, à la fois une proposition A et son contraire $\text{non } A$. Il en résulte que A et $(\text{non } A)$ est un théorème de T , or à partir d'un tel théorème, nous pouvons déduire *n'importe quelle proposition*, ainsi que son contraire. Ainsi, dans le formalisme du calcul des séquents, $A \wedge \neg A \vdash B$ est prouvable, quelle que soit la conclusion B . La théorie T est donc contradictoire au sens où elle ne contient que des contradictions — ce qui lui ôte toute pertinence.

Comme l'explique GIRARD [26], en renonçant à certains principes fondamentaux dont celui du tiers exclu, la logique intuitionniste fondée par le mathématicien Hollandais Luitzen BROUWER est la première tentative visant à pallier les inconvénients de la logique classique. Cependant, le rejet du tiers exclu est insatisfaisant, car il « *complique le traitement des relations logiques* » : les connecteurs intuitionnistes étant indépendants les uns des autres, les substitutions de formes équivalentes en logique classique sont interdites, par exemple la simplification de $(\text{non } A)$ ou $(\text{non } B)$ par $\text{non}(A \text{ et } B)$. Dans cet esprit, la logique linéaire remédie aux problèmes de la logique intuitionniste en réintroduisant le principe du tiers exclu : ce dernier se traduit par le fait que A par $(\text{nil } A)$ est une tautologie linéaire. Cependant, que devons-nous comprendre par la notion de « tiers exclu »

en logique linéaire? Sachant que cette dernière n'admet aucune sémantique binaire, ce principe ne peut pas correspondre, par analogie, à l'exclusion d'une tierce valeur de vérité des propositions, comme en logique classique.

Remarquons par ailleurs qu'en logique linéaire, il nous paraît impossible de concevoir une notion analogue à celle de proposition *contradictoire* au sens classique. La syntaxe est telle que la négation d'une tautologie linéaire ne permet pas de déduire n'importe quelle proposition. Par exemple, posons comme prémisse la négation linéaire de A par ($nil A$), c'est-à-dire la formule ($nil A$) fois A . Dans le cas général, indépendamment du contenu de A et de B , nous avons $A^\perp \otimes A \not\vdash B$. En revanche, il existe un séquent remarquable dont le membre gauche est $(A \wp A^\perp)^\perp$, et qui est prouvable: $(A \wp A^\perp)^\perp \vdash \perp$. Plus généralement, quelle que soit la tautologie linéaire G , nous avons :

$$G^\perp \vdash \perp$$

Notre interprétation de la négation linéaire et de \perp (le neutre de *par*) nous permet de comprendre la signification, en terme de ressource, de la propriété ci-dessus. Si G est une tautologie linéaire, alors elle correspond à une ressource inépuisable, dont les exemplaires sont consommables indépendamment de la consommabilité des atomes propositionnels qui la composent. Autrement dit, chercher à produire un exemplaire de cette ressource (ce qui est notre interprétation du consommé G^\perp) ne nécessite aucun autre exemplaire de quoi que ce soit. C'est exactement ce que signifie pour nous \perp , qui est équivalent à $\mathbf{1}^\perp$. Nous interprétons donc le séquent $G^\perp \vdash \perp$ de la manière suivante : pour produire G , nous pouvons produire $\mathbf{1}$ — le degré zéro de cumul conjoint d'exemplaires de ressources —, c'est-à-dire *rien du tout*.

Reste enfin la question du sens du *tiers exclu* proprement dit. Nous concevons que des exemplaires d'une ressource puissent être conjointement ou disjointement consommables et productibles : dans les consommés d'une action, nous pouvons par exemple poser cinq exemplaires consommables et trois exemplaires productibles d'une même ressource A . Si nous associons à cette dernière la signification d'une unité de salaire égale à mille francs, l'action que nous venons de décrire correspond au cas d'une personne qui gagne (donc dispose de) cinq mille francs par mois, et qui cherche trois petits boulots qui rapporteraient mille francs chacun. De plus, il n'est pas inconcevable que la recherche de travail consomme une partie du salaire. Cela s'appelle « arrondir ses fins de mois par tous les moyens », et cela n'a rien de contradictoire ! Nous n'associons donc pas le tiers exclu aux valeurs de consommabilité et de productibilité d'une ressource. En revanche, nous supposons que *le même exemplaire d'une ressource* ne peut pas être à la fois consommable et productible. L'exclusion d'un tiers concerne donc l'*orientation* d'un exemplaire de ressource : soit vers le passé, soit vers le futur, mais ni les deux à la fois, ni une troisième possibilité.

Chapitre IV

Syntaxe et sémantique de la logique linéaire

Dans ce chapitre, nous proposons un exposé mathématique des éléments formels de la logique linéaire. Ces éléments seront nécessaires au chapitre suivant pour jeter les bases de la formalisation logique du fonctionnement des réseaux de Petri. En accord avec un tel objectif, nous limitons notre exposé au cadre de la logique linéaire *propositionnelle* : nous laissons de côté l'étude des quantificateurs. Comme il se doit pour toute logique, nous exposons distinctement sa *syntaxe* et sa *sémantique*, puis nous montrons les rapports entre ces deux aspects par les théorèmes de cohérence et de complétude, qui établissent l'équivalence entre la notion syntaxique de prouvabilité et la notion sémantique de validité.

Plan du chapitre

Par souci de simplicité, nous présenterons la syntaxe de la logique linéaire dans le *calcul des séquents*, son formalisme d'origine, noté LL. Il existe un autre formalisme syntaxique, les *réseaux de preuve* (en anglais, *proof nets*) introduits par GIRARD [23, 32], qui sont à la logique linéaire ce que la déduction naturelle est à la logique classique. Mais si écrire une preuve apparaît syntaxiquement plus rapide en réseau de formules qu'en arborescence de séquents, vérifier sa correction est en revanche plus complexe. En outre, la méthode des réseaux de preuve étant encore peu développée pour la logique classique, il serait difficile d'expliquer ainsi le passage à la logique linéaire. Bref, en dépit de sa lourdeur d'écriture, le calcul des séquents est le formalisme privilégié pour introduire la syntaxe de la logique linéaire. Dans une première section, nous exposerons les définitions fondamentales, à savoir les règles de formation des séquents, les règles du calcul proprement dit, et la construction de preuves. Dans une deuxième section, nous traiterons des principales propriétés du calcul des séquents linéaires : la redondance de la règle de coupure, la réver-

sibilité (ou non) des règles, la décidabilité et la complexité des principaux fragments du calcul, des conditions nécessaires de prouvabilité des séquents, ainsi qu'un théorème de finitude permettant de réduire dans certains cas une formule exponentielle-multiplicative à une formule multiplicative paramétrée. Systématiquement, nous établirons la comparaison avec le calcul des séquents classiques, noté LK, dont les définitions de bases sont rappelées en annexe A.

Nous exposerons ensuite la *sémantique des phases*. C'est la sémantique la plus simple de la logique linéaire car elle opère en associant des valeurs aux propositions — comme *vrai/faux* en logique classique. On parle de sémantique *tarskienne*, en référence au logicien Alfred TARSKI, dont les travaux ont fondé la théorie des modèles. A contrario, la sémantique originale de la logique linéaire, celle des *espaces cohérents* opère dans un esprit très différent : elle fait correspondre aux preuves des fonctions. On dit qu'elle est *heytingnienne*, en référence au logicien de l'école intuitionniste Arend HEYTING. Cependant, ladite simplicité de la sémantique des phases ne nous semble que relative ; en fait, elle requiert beaucoup d'abstraction. C'est pourquoi nous commencerons par rappeler les bases de la sémantique de la logique classique, en particulier l'interprétation des connecteurs comme des fonctions, les notions fondamentales de modèle, de satisfaction d'une formule dans un modèle et de validité, ainsi que les démonstrations de cohérence et de complétude par rapport au calcul des séquents classiques. Il sera alors plus facile d'expliquer en quoi consiste un modèle de phases — en ne présentant d'ailleurs que ceux du fragment multiplicatif-additif, étant donné l'usage limité que nous ferons de la sémantique des phases au chapitre V. À noter que nous proposerons des interprétations géométriques inédites pour mieux comprendre la notion d'orthogonalité, qui est primordiale puisqu'elle sous-tend la définition sémantique de la négation linéaire.

Pour conclure ce préambule, précisons que ce chapitre ne propose qu'une vue partielle de la logique linéaire, orientée pour son application pratique au raisonnement sur des ressources. Nous laissons de côté plusieurs aspects qui sont matière à d'autres applications, telle que la programmation fonctionnelle typée [47, 1, 3, 69]. Les éléments théoriques présentés sont principalement issus des publications de GIRARD et LAFONT sur la logique linéaire, notamment [23, 29, 28, 48]. Sur la logique en général, nos références sont puisées dans [37, 24, 49]. Par la synthèse didactique que se veut ce chapitre, nous espérons aussi contribuer à rendre plus accessible la logique linéaire.

IV.1 Définition du calcul des séquents linéaires

Cette section fait suite à l'introduction de la notion de séquent et à l'interprétation concrète des séquents linéaires remarquables, proposées au chapitre III.

IV.1.1 Les formules de logique linéaire

Au calcul des séquents ou tout autre formalisme syntaxique, des règles de formation des formules préexistent. Soit \mathcal{A} un ensemble fini de lettres $\{A_1, \dots, A_n\}$ appelées *atomes propositionnels*. On appelle *formule de logique linéaire* sur \mathcal{A} toute expression de

la forme $\langle F \rangle$ telle que¹ :

$$\begin{aligned} \langle F \rangle ::= & A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid \perp \mid \top \mid \langle F \rangle^\perp \\ & \mid \langle F \rangle \otimes \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \wp \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \multimap \langle F \rangle \\ & \mid \langle F \rangle \& \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \oplus \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \rightsquigarrow \langle F \rangle \mid !\langle F \rangle \mid ?\langle F \rangle \end{aligned}$$

Les symboles $(-)^{\perp}$, \otimes , \wp , \multimap , $\&$, \oplus , \rightsquigarrow , $!$, $?$ sont les **connecteurs** de la logique linéaire et $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, \perp , \top ses **constantes propositionnelles**. Par ces règles de formation, une formule F apparaît comme une méta-variable propositionnelle. On peut lui appliquer n'importe quelle *substitution uniforme*, c'est-à-dire remplacer toutes ses occurrences dans un séquent par une autre formule, sans affecter la prouvabilité ou non prouvabilité de ce séquent. Pour vérifier si une formule respecte les règles ci-dessus, on construit, comme en logique classique, son *arbre syntaxique*, faisant apparaître sa composition hiérarchique que l'on peut quantifier en définissant un *degré* de composition. Fréquemment, nous ne ferons pas de distinction entre une formule composée et une formule atomique, qui correspond au « degré zéro » de composition.

IV.1.2 La notion de séquent

Les séquents font également l'objet de règles de formation, en continuation de celles des formules. On appelle **séquent linéaire** toute expression de la forme $\langle S \rangle$ telle que :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma \rangle ::= & \cdot \mid \langle \Gamma \rangle, \langle F \rangle \\ \langle S \rangle ::= & \langle \Gamma \rangle \vdash \langle \Gamma \rangle \end{aligned}$$

L'écriture générale d'un séquent S est donc $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont deux *suites finies* de formules, ces suites étant éventuellement vides, ce que symbolise la notation « \cdot », qui autrement est omise. On appelle respectivement **membre gauche** et **membre droit** ces deux suites, et respectivement **prémisses** et **conclusions** les formules de ces deux suites. La définition des séquents classiques est exactement la même, modulo celle de $\langle F \rangle$. Dans tous les séquents que nous écrivons, les majuscules latines A , B , etc. sont par convention des formules, et les majuscules grecques Γ , Δ , etc. des suites de formules.

Le *tourniquet* et la *virgule* sont des éléments primitifs. Nous pouvons dire qu'il s'agit de *méta-connecteurs*, car les règles logiques du calcul des séquents vont en préciser le sens par des connecteurs. Signalons que le choix du symbole \vdash ne fait pas l'unanimité². Traditionnellement, en logique classique, l'écriture $\vdash F$ signifie que la formule F est une *thèse*, autrement dit qu'elle est dérivable à partir d'un système d'axiomes [37]. Pour éviter toute confusion, certains auteurs prennent un nouveau symbole pour le calcul des séquents LK, par exemple \Longrightarrow (ils notent le connecteur *implique* par le symbole \supset). On peut alors sans ambiguïté établir la correction de LK par rapport à la méthode axiomatique en démontrant, quelle que soit la formule F , que le séquent classique $\Longrightarrow F$ est prouvable si et seulement si on a $\vdash F$ au sens traditionnel. Une fois ce constat admis, il n'y a plus d'inconvénients à utiliser le symbole $\vdash F$ à la place de $\Longrightarrow F$. Pour le calcul des séquents LL, le problème du symbole \vdash ne se pose pas puisqu'il n'y a aucun formalisme

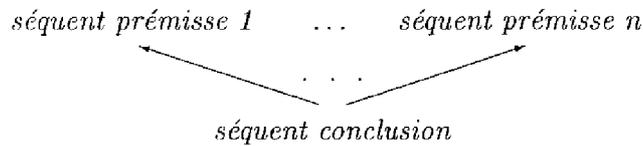
1. Les trois notations $\langle - \rangle ::= \mid$ appartiennent à la BNF (Backus Naur Form).

2. Dans ses récentes publications, GIRARD emploie plutôt le symbole \vdash .

syntactique antérieur. On peut objecter que de toute façon, il faut employer dans LL un symbole distinct de \vdash faute de quoi on surcharge la signification classique de ce dernier. Toutefois, cette surcharge a une motivation philosophique : elle suggère l'idée qu'il existe en logique linéaire une notion analogue à celle de dérivation classique de formules.

IV.1.3 La notion de règle

Comme la notion de séquent, celle de règle est la même dans les calculs LK et LL. Avant d'en donner la liste exhaustive et d'en montrer l'usage pour la construction de preuves, décrivons leur forme générale. Une **règle** est une arborescence de séquents de profondeur un ou deux. La racine s'appelle le **séquent conclusion** et les feuilles (si elles existent) les **séquents prémisses** de la règle, ce que montre le schéma ci-dessous.



En construisant une preuve, une règle se lit de bas en haut selon l'interprétation suivante : *pour prouver le séquent conclusion, il suffit de prouver chacun des séquents prémisses*. En pratique, aussi bien dans LK que dans LL, le nombre de prémisses d'une règle est deux, un ou zéro. On parle respectivement de règle **binnaire**, **unaire** et **axiome**. Dans ce dernier cas le séquent conclusion est directement prouvable : on parle alors de **séquent axiome**. Tel est le cas de $F \vdash F$ qui est le séquent conclusion de la règle d'identité. Une règle peut également se lire de haut en bas, avec l'interprétation converse équivalente à la précédente, que *si les séquents prémisses sont prouvables, alors le séquent conclusion l'est nécessairement*. Une règle du calcul des séquents exprime donc un schéma d'inférence sur des séquents. Selon cette dernière interprétation, on écrit les règles non pas comme le montre la figure ci-dessus mais à la manière de la déduction naturelle, en séparant les prémisses des conclusions par un trait horizontal suivi du nom de la règle :

$$\frac{\text{séquent prémisses } 1 \quad \text{séquent prémisses } 2}{\text{séquent conclusion}} \text{ nom de la règle}$$

C'est aussi dans ce sens de lecture que le nom des règles (*introduction*, *coupe*, etc.) trouve sa signification. Cependant, pour comprendre le fonctionnement des règles, il est préférable de commencer par les lire de bas en haut. On constate alors que toutes (sauf des exceptions comme la règle de coupe ou les règles axiomes) opèrent sur une formule particulière du séquent conclusion, que l'on appelle **formule principale**. Suivant la règle, cette formule est décomposée, dupliquée ou supprimée. Toutes les autres formules du séquent conclusion restent intactes : elles forment ce que l'on appelle le **contexte**. Suivant la règle, elles sont soit *distribuées* dans les deux séquents prémisses, soit *recochées* identiquement dans chacun d'entre eux. Enfin, le nom des règles fait explicitement référence, par un « L » pour *left* ou un « R » pour *right*, à la position de la formule principale par rapport au tourniquet. Illustrons ce vocabulaire avec deux exemples, les règles

d'introduction à droite des connecteurs \otimes et $\&$:

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma' \vdash G, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash F \otimes G, \Delta, \Delta'} \otimes_R \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \& G, \Delta} \&_R$$

Dans le cas de la règle \otimes_R , la formule principale $F \otimes G$ est décomposée. Les suites Γ , Γ' , Δ , Δ' constituent le contexte ; elles sont distribuées dans les séquents prémisses sans autre indication que de conserver leurs positions respectives par rapport au tourniquet. Dans le cas de la règle $\&_R$, la formule principale $F \& G$ est décomposée, mais cette fois le contexte Γ , Δ est recopié identiquement dans les deux séquents prémisses. En lisant maintenant ces règles de haut en bas, on voit que dans les deux cas un connecteur est *introduit* pour former la formule principale à droite du tourniquet. Mais dans le premier cas, les suites du contexte sont issues des séquents prémisses par *juxtaposition* dans le séquent conclusion, alors que dans le deuxième cas, elles doivent se *superposer*.

Comme le calcul des séquents classiques, celui des séquents linéaires est entièrement défini par un ensemble de règles, où l'on distingue trois groupes : les règles d'*identité*, les règles *structurelles* et les règles *logiques*.

IV.1.4 Le groupe identité

Ce groupe comprend deux règles : celle d'*identité*, notée *id*, et celle de *coupure*, notée *cut*. La première est une règle axiome qui stipule que le séquent $F \vdash F$ est prouvable. La deuxième est binaire, elle indique qu'on a le droit de prouver un séquent en le décomposant en deux séquents reliés par l'intermédiaire d'un lemme, ici la formule F .

$$\frac{}{F \vdash F} \text{ id} \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma', F \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{ cut}$$

La lecture de haut en bas révèle leur dualité : la première « crée » dans le séquent dégénéré $\cdot \vdash \cdot$ une formule F de part et d'autre du tourniquet, tandis que la deuxième « coupe » la formule F de part et d'autre du tourniquet, par transitivité. Ces deux règles expriment des principes logiques très généraux, ne faisant intervenir explicitement aucun connecteur. Elles sont exactement les mêmes dans LK.

IV.1.5 Le groupe structurel

Le qualificatif *structurel* indique que les règles de ce groupe opèrent sur la structure des séquents, sans faire intervenir explicitement des connecteurs. Dans LL, les règles structurelles se limitent à la paire des règles unaires d'*échange*, notées X_L et X_R , qui autorisent dans une preuve toute permutation de deux formules successives F et G à l'intérieur d'un même membre d'un séquent, gauche ou droit.

$$\frac{\Gamma, F, G, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, G, F, \Gamma' \vdash \Delta} X_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F, G, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, G, F, \Delta'} X_R$$

En appliquant successivement ces règles, on peut donc effectuer de chaque côté du tourniquet n'importe quelle permutation de formules — bref, la virgule est commutative dans

LL (comme dans LK). En revanche, la virgule n'est pas idempotente dans LL, car deux paires de règles structurelles de LK ont été supprimées : celles de *contraction*, notées C_L et C_R , ainsi que celles d'*affaiblissement* (en anglais *weakening*), notées W_L et W_R . Les premières autorisent à dupliquer n'importe quelle prémisse ou conclusion pour prouver un séquent. Les deuxièmes autorisent à supprimer (autrement dit ne pas tenir compte de) n'importe quelle prémisse ou conclusion F pour prouver un séquent.

$$\frac{\Gamma, F, \cancel{F} \vdash \Delta}{\Gamma, \cancel{F} \vdash \Delta} C_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \cancel{F}, \Delta}{\Gamma \vdash \cancel{F}, \Delta} C_R$$

$$\frac{\Gamma \cancel{\vdash} \Delta}{\Gamma, \cancel{F} \vdash \Delta} W_L \qquad \frac{\Gamma \cancel{\vdash} \Delta}{\Gamma \vdash \cancel{F}, \Delta} W_R$$

De haut en bas, les règles de contraction « contractent » deux occurrences de la formule F en une seule, et les règles d'affaiblissement « affaiblissent » le séquent prémisse en lui ajoutant une prémisse ou une conclusion exogène F . De la suppression de ces règles, il résulte que la logique linéaire est un *raffinement* de la logique classique : tout séquent linéaire prouvable dans LL l'est aussi dans LK, en substituant aux connecteurs linéaires leurs analogues classiques (\otimes et $\&$ en \wedge , \wp et \oplus en \vee , etc.) et en supprimant toute occurrence des exponentiels.

Quant à la suppression des règles d'échange, c'est un thème de recherche pointue, dont l'objectif est la fondation de la logique linéaire *non commutative*. Mais la définition tant syntaxique que sémantique de ses connecteurs s'avère particulièrement complexe. Comme l'écrit GIRARD, c'est encore le « *far west* » [28].

IV.1.6 Le groupe logique

Le qualificatif *logique* s'applique aux règles du calcul qui définissent les connecteurs et les constantes propositionnelles de la logique linéaire (ou classique). Lues de haut en bas, ces règles consistent en l'*introduction* d'un connecteur dans la formule principale, d'un côté ou de l'autre du tourniquet. De bas en haut, on lit la décomposition de la formule principale par *élimination* de son connecteur de plus haut degré.

Présentons d'abord les règles de la négation linéaire, qui sont exactement les mêmes que celles de la négation classique :

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma, F^\perp \vdash \Delta} (-)^\perp_L \qquad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash F^\perp, \Delta} (-)^\perp_R$$

La négation apparaît comme l'opérateur qui permet dans un séquent de faire passer une formule d'un membre à l'autre du tourniquet. Rappelons que la négation linéaire est la clef de voûte de tous les rapports de dualité entre connecteurs. Implicitement, cela signifie que deux connecteurs duaux sont forcément définis par des règles symétriques (droite/gauche) par rapport au tourniquet.

Passons aux règles des trois connecteurs multiplicatifs \otimes , \wp , $-o$, ainsi que celle des

deux constantes propositionnelles $\mathbf{1}$ et \perp :

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \otimes G \vdash \Delta} \otimes_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma' \vdash G, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash F \otimes G, \Delta, \Delta'} \otimes_R \\
\\
\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma', G \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', F \wp G \vdash \Delta, \Delta'} \wp_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F, G, \Delta}{\Gamma \vdash F \wp G, \Delta} \wp_R \\
\\
\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma', G \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', F \multimap G \vdash \Delta, \Delta'} \multimap_L \qquad \frac{\Gamma, F \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \multimap G, \Delta} \multimap_R \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash \Delta} \mathbf{1}_L \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1}_R \\
\\
\frac{}{\perp \vdash} \perp_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} \perp_R
\end{array}$$

On constate bien la symétrie entre les règles de \otimes et \wp , et celles de $\mathbf{1}$ et \perp , qui sont respectivement duaux. Remarquons également ce qu'expliquait informellement le chapitre III: d'après la règle \otimes_L , la virgule prend le sens du connecteur \otimes à gauche du tourniquet, et d'après la règle \wp_R , le sens du connecteur \wp à droite. De concert, les règles $\mathbf{1}_L$ et \perp_R définissent respectivement $\mathbf{1}$ et \perp comme éléments neutres de la virgule suivant sa position par rapport au tourniquet. Quant à ce dernier, il prend le sens du connecteur \multimap par la règle \multimap_R . Remarquons de plus que les règles de l'implication linéaire reviennent aux applications successives de celles de \wp et de $(-)^{\perp}$: on retrouve là l'équivalence entre $F \multimap G$ et $F^{\perp} \wp G$. Observons enfin une caractéristique commune à toutes ces règles (y compris celles de la négation): aucune n'introduit de formule exogène aux séquents prémisses et toutes celles qui sont binaires procèdent par juxtaposition des formules du contexte dans le séquent conclusion.

Passons maintenant aux règles des trois connecteurs additifs $\&$, \oplus \rightsquigarrow , et celles des deux constantes propositionnelles \top et $\mathbf{0}$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma, F \& G \vdash \Delta} \&_{L1} \quad \frac{\Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \& G \vdash \Delta} \&_{L2} \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \& G, \Delta} \&_R \\
\\
\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \oplus G \vdash \Delta} \oplus_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma \vdash F \oplus G, \Delta} \oplus_{R1} \quad \frac{\Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \oplus G, \Delta} \oplus_{R2} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \rightsquigarrow G \vdash \Delta} \rightsquigarrow_L \qquad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash F \rightsquigarrow G, \Delta} \rightsquigarrow_R \quad \frac{\Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \rightsquigarrow G, \Delta} \rightsquigarrow_R \\
\\
\text{pas de règle } \top_L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top_R \\
\\
\frac{}{\Gamma, \mathbf{0} \vdash \Delta} \mathbf{0}_L \qquad \text{pas de règle } \mathbf{0}_R
\end{array}$$

Première remarque, analogue aux précédentes, il y a une symétrie entre les règles de $\&$ et \oplus , et de \top et $\mathbf{0}$ qui sont respectivement duaux; quant aux règles de \rightsquigarrow , elles reviennent aux applications successives de celles de \oplus et de $(-)^{\perp}$, conformément à l'équivalence entre $A \rightsquigarrow B$ et $A^{\perp} \oplus B$. Mais par rapport aux règles des connecteurs multiplicatives, il y a d'abord la différence que celles des additifs ne vont pas par paires gauche/droite, mais par triplets composés de deux règles unaires et d'une règle binaire. Dans le cas de $\&$ et \oplus , la raison est que, contrairement à \otimes et \wp , ils ne se substituent pas à la virgule, et donc ne bénéficient pas implicitement des règles d'échange. Les deux règles unaires sont nécessaires pour garantir leurs définitions complètes et commutatives. Remarquons aussi que ces règles unaires introduisent une formule exogène au séquent prémisses dans le séquent conclusion, ce qui correspond à une forme d'affaiblissement. Enfin, pour chaque connecteur additif, la règle binaire ne procède pas par juxtaposition des contextes, mais impose leur superposition dans le séquent conclusion. Derrière cette superposition se cache en fait la contraction. Prenons par exemple la règle $\&_R$ et posons $F = G$. La règle stipule alors que pour prouver $\Gamma \vdash F \& F, \Delta$, il suffit de prouver $\Gamma \vdash F, \Delta$, ce qui revient bien à une contraction de $F \& F$ en F . Les connecteurs additifs intègrent donc les principes des règles de contraction et d'affaiblissement: il n'est donc pas surprenant qu'ils soient idempotents, contrairement aux multiplicatifs, qui sont privés de ces principes. Il n'est pas plus étonnant que si l'on introduit dans LL les règles de contraction et d'affaiblissement de LK, alors les additifs deviennent équivalents aux multiplicatifs: les conjonctions $\&$ et \otimes , les disjonctions \oplus et \wp , les implications \rightsquigarrow et \multimap coïncident respectivement en les connecteurs classiques $\wedge, \vee, \Rightarrow$ (cf. annexe A).

Terminons la présentation des règles de LL par celles des connecteurs exponentiels $!$ et $?$, qui n'existent pas dans LK, et pour cause: ils permettent de rétablir dans LL les règles de contraction et d'affaiblissement de LK, mais d'une manière restreinte.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma, !F \vdash \Delta} !_L \qquad \frac{! \Gamma \vdash F, ? \Delta}{! \Gamma \vdash !F, ? \Delta} !_R \\
\frac{! \Gamma, F \vdash ? \Delta}{! \Gamma, ?F \vdash ? \Delta} ?_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma \vdash ?F, \Delta} ?_R \\
\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !F \vdash \Delta} W!_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash ?F, \Delta} W?_R \\
\frac{\Gamma, !F, !F \vdash \Delta}{\Gamma, !F \vdash \Delta} C!_L \qquad \frac{\Gamma \vdash ?F, ?F, \Delta}{\Gamma \vdash ?F, \Delta} C?_R
\end{array}$$

Les connecteurs exponentiels étant unaires, leurs règles le sont aussi. Les règles de $?$ sont les symétriques de celles de $!$, conformément à leur dualité. Les deux premières paires sont des règles d'introduction. Notons que si l'introduction à gauche de $!$ est très facile, elle est beaucoup plus contraignante à droite: toutes les prémisses doivent être exponentielles conjonctives (la notation $! \Gamma$ désigne une suite de formules de la forme $!G_1, !G_2, \dots$) et toutes les conclusions exponentielles disjonctives (la convention d'écriture est analogue pour $? \Delta$). Autrement dit, un séquent dont une conclusion est de la forme $!F$ est diffi-

lement prouvable. La remarque vaut pour ? par symétrie. Les deux dernières paires de règles sont les règles de contraction et d'affaiblissement *logiques* (et non pas *structurelles*) car elles ne s'appliquent qu'aux formules exponentielles, spécifiquement : de bas en haut, une prémisse de la forme $!F$ comme une conclusion de la forme $?F$ sont duplicables ou supprimables à volonté, respectivement à gauche et à droite du tourniquet.

IV.1.7 Les preuves

La notion de *preuve* est identique dans LK et LL. Nous allons en définir la forme générale et la procédure de construction, avant de montrer dans quelle mesure, par leurs règles respectives, LL et LK diffèrent. On appelle *inférence* toute application particulière d'une règle du calcul des séquents. Une *preuve* est une arborescence de séquents obtenue par inférences successives *commençant uniquement par des règles axiomes*. Un séquent est *prouvable* si et seulement s'il existe une preuve dans LL dont il est la racine. Pour prouver un séquent, il suffit de construire sa preuve en procédant de bas en haut : on applique les règles logiques pour éliminer successivement les connecteurs du séquent. Chaque nœud de l'arborescence est alors un séquent prémisse plus simple que celui dont il est la conclusion (sauf lorsque l'on utilise les règles de contraction ou celle de coupure). L'objectif est de pouvoir appliquer une règle axiome à chaque feuille de l'arborescence. À titre d'exemple, prouvons l'un des séquents exprimant la distributivité de \oplus sur \otimes :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{id}}{A, C \vdash A \otimes C} \otimes_R}{C, A \vdash A \otimes C} X_L}{C, A \vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \oplus_{R1} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{}{C \vdash C} \text{id}}{B, C \vdash B \otimes C} \otimes_R}{C, B \vdash B \otimes C} X_L}{C, B \vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \oplus_{R2}}{C, A \oplus B \vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \oplus_L \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{}{A \oplus B, C \vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} X_L}{(A \oplus B) \otimes C \vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \otimes_L}{(A \oplus B) \otimes C \vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \otimes_L
 \end{array}$$

D'une manière générale, l'ordre des inférences n'est pas arbitraire. Dans la preuve ci-dessus, il est indispensable d'éliminer d'abord le \oplus à gauche (dans $A \oplus B$) avant d'éliminer le \oplus à droite, sinon l'arborescence ne se terminerait pas en preuve. Pour éliminer ce \oplus à gauche, il faut d'abord éliminer le \otimes à gauche qui l'englobe. La construction de preuve dans LL n'est pas donc purement mécanique, elle nécessite des intuitions sur les règles à appliquer : on parle de *stratégies de preuves*. En revanche, il est fréquent que des inférences soient *permutables* dans une preuve, sans remettre en cause la correction de cette dernière ; seule peut être affectée sa taille, c'est-à-dire son total d'inférences. Ici par exemple, dans les deux branches au dessus l'inférence \oplus_L , les inférences \oplus_{R1} (respectivement \oplus_{R2}) et X_L sont permutables.

Au chapitre III, nous avons expliqué que la logique linéaire sous-tend le principe de consommation/production selon le paradigme suivant : alors que le séquent $A, A \multimap B \vdash B$ est prouvable dans LL, le séquent $A, A \multimap B \vdash B \otimes A$ ne l'est pas, contraste qui n'a pas d'analogue en logique classique, puisque $A, A \Rightarrow B \vdash B$ comme $A, A \Rightarrow B \vdash B \wedge A$ sont

nous garderons les majuscules grecques pour désigner un multi-ensemble quelconque de formules dont il n'est pas nécessaire de préciser la fonction caractéristique.

Pour alléger la rédaction des preuves, nous pouvons définir dans LL autant de règles de calcul par applications successives de plusieurs règles déjà définies. De plus, lorsqu'une même règle est appliquée plusieurs fois successivement dans une preuve, il est commode de l'abréger en une seule. Nous le signalerons en doublant le trait de la barre de règle. Par exemple, nous écrivons :

$$\frac{\Gamma, (A_i)_{i \in \alpha} \vdash \Delta}{\Gamma, \bigotimes_{i \in \alpha} A_i \vdash \Delta} \otimes_L$$

pour exprimer en fait $(\text{card}(\alpha) - 1)$ applications successives de la règle \otimes_L .

IV.2 Propriétés du calcul des séquents linéaires

IV.2.1 Élimination des coupures

Tel que l'a défini GIRARD, le calcul des séquents linéaires vérifie un théorème très important, qui s'énonce ainsi :

La règle de coupure est redondante.

Autrement dit, si un séquent est prouvable dans LL, il l'est sans utilisation de la règle de coupure. La réciproque est trivialement vraie (qui peut le plus peut le moins). En fait, ce théorème n'est pas spécifique au calcul des séquents linéaires, il n'est que la transposition du même énoncé pour le calcul des séquents classiques, que GENTZEN a démontré en 1934 et appelé *Hauptsatz*³. Pour en mesurer l'importance, rappelons que lue de bas en haut, la règle de coupure est la seule qui introduise dans les séquents prémisses une formule exogène au séquent conclusion. Une coupure correspond en fait à l'utilisation d'un lemme intermédiaire dans une preuve, opération fréquente en mathématiques. La redondance de la règle de coupure signifie que tout séquent prouvable admet une preuve qui n'utilise aucune formule ne figurant pas dans ce séquent. En corollaire, une telle preuve vérifie ce que l'on appelle la *propriété de la sous-formule* : toute formule de tout séquent de la preuve est nécessairement une sous-formule d'une formule du séquent conclusion, conformément à la construction syntaxique de cette dernière. Selon GIRARD, le *Hauptsatz* de GENTZEN est l'illustration du principe de « *pureté des méthodes* » : par exemple, pour démontrer une propriété de type combinatoire, il est possible d'utiliser une méthode purement combinatoire [22].

D'une certaine manière, la redondance de la règle de coupure reflète la symétrie de cette dernière avec la règle d'identité, qui est la seule qui soit absolument indispensable au calcul des séquents. Toutes les autres, y compris les règles structurelles, peuvent être supprimées sans affecter les principes primitifs du calcul des séquents : leurs absences ou présences changent seulement les propriétés de la logique engendrée. Par opposition, la règle de coupure est la seule qui soit absolument facultative, quel que soit le *fragment* (cf. section IV.2.3) de la logique considéré. Plus généralement, la redondance de la règle de coupure est directement liée à la complémentarité (ou « symétrie »⁴) gauche/droite

3. Ce terme philosophique allemand signifie *proposition principale*.

4. Mais il ne s'agit pas ici de la symétrie de formulation des règles des connecteurs duaux.

des règles définissant chaque connecteur : si elle n'est pas respectée, la règle de coupure n'est pas redondante. Cette remarque vaut en particulier pour les règles logiques, dont le choix ne doit rien au hasard. Comme l'écrit GIRARD dans *Proofs and Types* [24] :

There is tradition which would have it that Logic is a formal game, a succession of more or less arbitrary axioms and rules. Sequent calculus (and natural deduction as well) shows this is not at all so: one can amuse oneself by inventing one's own logical operations, but they have to respect the left/right symmetry, otherwise one creates a logical atrocity without interest. Concretely, the symmetry is the fact that we can *eliminate* the cut rule.

Par exemple, une « *atrocité logique* » consisterait, en logique linéaire, à définir un connecteur par la règle multiplicative \otimes_L et la règle additive $\&_R$, qui ne sont pas symétriques. Précisons aussi que la redondance de la règle de coupure ne persiste pas si l'on ajoute des axiomes supplémentaires au calcul, c'est-à-dire de nouvelles règles sans prémisses dont le séquent conclusion est propriété spécifique que l'on veut poser pour décrire une théorie ; on parle alors d'*axiomes propres* de la théorie (cf. plus loin). Pour pallier cette limitation, il faut revenir au pur calcul des séquents en exprimant ces axiomes propres dans les prémisses des séquents. Par exemple, poser un axiome propre de la forme $A \vdash B$ revient, en restant purement dans LL, à ajouter dans chaque séquent la prémisses $!(A \multimap B)$.

La démonstration du Hauptsatz est, comme son énoncé, similaire pour LK et LL : elle repose en fait sur des principes généraux du calcul des séquents, en particulier le respect des symétries gauche/droite des règles et les possibilités de permutations d'inférences dans les preuves. Pour les deux calculs, la démonstration est longue et délicate, mais elle révèle un algorithme effectif d'*élimination des coupures* dans une preuve, c'est-à-dire les transformations à effectuer à partir d'une preuve quelconque d'un séquent prouvable donné pour obtenir une preuve de ce séquent sans coupures. Entre la démonstration pour LK et celle pour LL, seuls changent le nombre et la syntaxe des transformations, mais les idées restent les mêmes. Pour LK, la démonstration du Hauptsatz est expliquée dans plusieurs ouvrages, notamment dans [24] où un chapitre y est exclusivement consacré. Plutôt que de procéder par similarité pour LL, GIRARD a effectué la démonstration dans le cadre des réseaux de preuves, où elle s'écrit plus rapidement [23], car les réseaux de preuves sont conçus pour s'affranchir au maximum des ordres factices des inférences en calcul des séquents. Néanmoins, d'autres auteurs ont écrit la démonstration dans LL [61, 19, 54]. Nous allons en exposer les grandes lignes. Le processus d'élimination des coupures consiste à *les faire monter* dans la preuve, jusqu'à atteindre les axiomes. Lorsque l'un des séquents prémisses d'une coupure est axiome, cette dernière apparaît comme une inférence inutile, donc éliminable. Voyons l'exemple ci-dessous :

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{id} \quad \vdots}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{cut}}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \boxed{\text{élimination}} \rightarrow \quad \frac{\vdots}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \vdots$$

Au passage, notons que si l'axiome est un axiome propre d'une théorie, par exemple de la forme $B \vdash A$ (introduit par une règle notée **AP**), alors une coupure telle que :

$$\frac{\frac{\text{---}}{B \vdash A} \text{ AP} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, A \vdash \Delta \end{array}}{\Gamma, B \vdash \Delta} \text{ cut}$$

n'est absolument pas inutile, et donc ne peut être éliminée comme dans l'exemple précédent. C'est pourquoi le Hauptsatz n'a plus cours lorsque l'on ajoute des axiomes au calcul des séquents. Le processus d'élimination des coupures ne peut s'appliquer qu'en partie, pour faire monter les coupures au maximum vers les axiomes propres, sans pouvoir les éliminer toutes. On parle de processus d'*élimination des coupures généralisée*.

Monter une coupure dans une preuve est une transformation dont la complexité dépend des séquents prémisses de la coupure et de la formule qui est *coupée*. Dans la plupart des cas, une coupure peut être permutée avec une des deux inférences juste au dessus. Par exemple, si son premier séquent prémisses est le séquent conclusion d'une inférence \otimes_L et que la formule coupée n'est pas la formule principale de cette inférence, alors on peut permuter la coupure avec cette inférence, selon le schéma ci-dessous :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\Gamma_1, A, B \vdash \Delta_1, C}{\Gamma_1, A \otimes B \vdash \Delta_1, C} \otimes_L \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_2, C \vdash \Delta_2 \end{array} \\ \hline \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B \vdash \Delta_1, \Delta_2 \end{array} \text{ cut}}{\vdots} \xrightarrow{\text{permutation}} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_1, A, B \vdash \Delta_1, C \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_2, C \vdash \Delta_2 \end{array} \\ \hline \Gamma_1, \Gamma_2, A, B \vdash \Delta_1, \Delta_2 \end{array} \text{ cut}}{\frac{\Gamma_1, \Gamma_2, A, B \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \otimes_L} \text{ cut}$$

Cependant, si les deux inférences juste au dessus d'une coupure sont des instances de règles d'introduction respectivement à gauche et à droite du *même connecteur*, et que la formule principale de ces deux inférences est précisément la formule coupée, alors la coupure ne peut être permutée avec aucune de ces deux inférences. Sa montée est *bloquée*. C'est par exemple le cas avec le connecteur \otimes dans le morceau de preuve ci-dessous :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2 \end{array} \\ \hline \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2 \end{array} \otimes_R \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_3, A, B \vdash \Delta_3 \end{array}}{\Gamma_3, A \otimes B \vdash \Delta_3} \otimes_L}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \text{ cut}$$

Néanmoins, pour chaque connecteur de LL, grâce à la symétrie gauche/droite des règles logiques, il existe une transformation qui permet de lever le blocage d'une coupure. C'est ce que GIRARD appelle les « *cas clés* ». Par exemple, on peut transformer le morceau de preuve ci-dessus en celui ci-dessous :

$$\boxed{\text{transformation}} \rightarrow \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_2 \vdash B, \Delta_2} \quad \frac{\vdots}{\Gamma_3, A, B \vdash \Delta_3}}{\Gamma_2, \Gamma_3, A \vdash \Delta_2, \Delta_3} \text{ cut}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \text{ cut}}{\vdots}}$$

Certes, d'une seule coupure on passe à deux, mais ces dernières sont *plus simples* que la première, car leur formule principale est de complexité syntaxique moindre. Sauf cas pathologique où il faut encore appliquer une transformation spécifique, la coupure du haut peut maintenant monter par permutation, et ensuite idem pour la coupure du bas.

La démonstration du Hauptsatz consiste à montrer, par induction structurelle sur les preuves, que l'algorithme d'élimination des coupures termine dans tout les cas. Néanmoins, sa complexité est exponentielle. Autrement dit, même si la règle de coupure est théoriquement inutile, elle est bien commode dans la pratique.

IV.2.2 Réversibilité de règles

La réversibilité des règles est également une notion générale au calcul des séquents, autrement dit pertinente aussi bien pour LK que pour LL. On dit qu'une règle est *réversible* si et seulement s'il existe une preuve de ses séquents prémisses construite à partir de son séquent conclusion. Dans le cas des règles axiomes, cette propriété est toujours vérifiée : en l'absence de séquent prémisses, il n'y a rien à prouver. La réversibilité des règles est particulièrement intéressante pour la recherche de preuve, quel que soit le sens de construction opéré. En effet, à partir du moment où une règle est réversible, on peut l'appliquer sans risque de faire un choix préjudiciable quant à la prouvabilité que l'on cherche à établir, car son séquent conclusion est prouvable *si et seulement si* ses séquents prémisses le sont. Rappelons que dans le cas général, la prouvabilité du séquent conclusion d'une règle est une condition nécessaire mais non suffisante à la prouvabilité de ses séquents prémisses.

Pour toute règle logique, si elle est réversible, la preuve syntaxique de sa réversibilité utilise la règle de coupure, la règle d'identité (sauf pour les éléments neutres) et surtout la règle logique complémentaire de la paire gauche/droite (ou l'une des deux dans le cas d'un triplet), ce qui illustre une fois de plus l'importance des « symétries ». Comme exemple de règle unaire réversible, considérons \otimes_L :

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \otimes G \vdash \Delta} \otimes_L \quad \left| \quad \frac{\frac{\frac{}{F \vdash F} \text{id} \quad \frac{}{G \vdash G} \text{id}}{F, G \vdash F \otimes G} \otimes_R \quad \Gamma, F \otimes G \vdash \Delta}{\Gamma, F, G \vdash \Delta} \text{ cut}}{\Gamma, F, G \vdash \Delta}$$

Le morceau de preuve à côté montre que l'on peut prouver son séquent prémisses à partir de son séquent conclusion. Comme exemple de règle binaire réversible, examinons $\&_R$:

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \& G, \Delta} \&_R$$

Du fait qu'elle admet deux séquents prémisses, et que par définition une arborescence ne peut avoir qu'une seule racine, la preuve de réversibilité de cette règle est une *forêt* de deux arborescences, qui chacune prouve l'un des deux séquents prémisses de $\&_R$ à partir de son séquent conclusion :

$$\frac{\frac{\frac{}{F \vdash F} \text{id}}{\Gamma \vdash F \& G, \Delta} \&_{L1} \quad \frac{}{F \& G \vdash F} \text{id}}{\Gamma \vdash F, \Delta} \text{cut} \quad \frac{\frac{}{G \vdash G} \text{id}}{\Gamma \vdash F \& G, \Delta} \&_{L2} \quad \frac{}{F \& G \vdash G} \text{id}}{\Gamma \vdash G, \Delta} \text{cut}}$$

Hélas, les règles de LL ne sont pas toutes réversibles, comme par exemple la paire de règles unaires $\&_{L1}$ et $\&_{L2}$, en raison de l'affaiblissement qu'elles effectuent :

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma, F \& G \vdash \Delta} \&_{L1} \quad \frac{\Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \& G \vdash \Delta} \&_{L2}$$

Pour l'une comme l'autre, étant donné leurs séquents conclusions, il est impossible de prouver leurs séquents prémisses parce que ces derniers sont plus forts. En comparaison, ce problème ne se pose pas pour la règle réversible \otimes_L , qui n'opère aucun affaiblissement. Autre exemple de non réversibilité, avec la règle binaire \otimes_R , à cause de la juxtaposition de formules du contexte à laquelle elle procède :

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma' \vdash G, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash F \otimes G, \Delta, \Delta'} \otimes_R$$

Étant donné son séquent conclusion, il n'est pas possible de prouver ses séquents prémisses car il y a plusieurs possibilités de distribution des formules du contexte, et rien n'indique laquelle choisir. En comparaison, ce problème ne se pose pas pour la règle réversible $\&_R$ puisqu'elle procède par superposition des contextes de chaque prémisses ; l'opération inverse est une simple recopie.

En définitive, ces considérations valent par analogie pour les autres règles unaires ou binaires de LL, qui se classent en nombres presque égaux suivant leur réversibilité ou non.

- Sont réversibles : $\chi_L \chi_R (-)_L^\perp (-)_R^\perp \otimes_L \wp_R \multimap_R \mathbf{1}_L \perp_R \&_R \oplus_L \rightsquigarrow_L !_R ?_L C!_L C?_R$.
- Ne sont pas réversibles : $\text{cut} \otimes_R \wp_L \multimap_L \&_{L1} \&_{L2} \oplus_{R1} \oplus_{R2} \rightsquigarrow_{R1} \rightsquigarrow_{R2} !_L ?_R W!_L W?_R$.

La négation linéaire apparaît comme le seul connecteur de LL dont les règles d'introduction soient toutes réversibles. Il y a donc une grande différence avec le calcul des séquents

classiques LK, où tous les connecteurs peuvent être définis par une paire de règles réversibles. Par exemple, pour la conjonction classique, on prend pour règle à gauche la formulation de \otimes_L et pour règle à droite la formulation de $\&_R$, en remplaçant les symboles de ces deux conjonctions linéaires par \wedge . La recherche de preuve dans LK^r (nous notons ainsi cette variante de LK — cf. annexe A) peut alors s'effectuer « mécaniquement » de bas en haut, c'est-à-dire sans qu'aucun recours à l'intuition soit nécessaire. La réversibilité des règles garantit l'impossibilité de faire un mauvais choix quant à l'ordre des inférences. À partir d'un séquent classique donné, il suffit d'appliquer les règles logiques dans l'ordre de construction syntaxique des formules, jusqu'à leurs décompositions en atomes. On obtient une arborescence dont l'examen des feuilles indique s'il s'agit d'une preuve : il faut et il suffit qu'elles soient toutes des axiomes de LK^r . Le calcul des séquents a été le premier formalisme syntaxique permettant la preuve automatique de formules de logique classique propositionnelle. A contrario, ni le calcul des séquents linéaires, ni même ses fragments ne peuvent être aussi facilement automatisés.

IV.2.3 Résultats de complexité

La plupart des aspects de la complexité de la logique linéaire propositionnelle ont été étudiés en 1990 dans les articles [54, 56, 42]. Le premier constat est *l'indécidabilité de la logique linéaire propositionnelle* : il n'existe pas d'algorithme effectif permettant de déterminer si une formule sans quantificateur est prouvable ou non. La complexité de la question de la prouvabilité en logique linéaire résulte en grande partie de l'expressivité des connecteurs exponentiels. En effet, à cause des règles de contraction logique de *bien sûr* et *pourquoi pas* de LL, qui ajoutent des occurrences de formules dans la construction de preuve de bas en haut, il n'est pas possible de définir un algorithme énumérant toutes les stratégies : elles sont en nombre infini. A contrario dans LK, on peut se passer des règles de contraction et d'affaiblissement en les intégrant dans l'axiome identité, qui devient $\Gamma, F \vdash F, \Delta$ au lieu de $F \vdash F$. Il en résulte que la prouvabilité d'un séquent classique est un problème décidable ; on montre qu'il est *co-NP-complet*, autrement dit que la non prouvabilité d'un séquent est un problème *NP-complet* [2, 51]. Dans le système le calcul des séquents réversible LK^r , un séquent apparaît non prouvable dès qu'une feuille est atteinte et qu'elle n'est pas une instance de l'axiome identité.

La prouvabilité étant trop complexe dans la logique linéaire toute entière, on l'étudie donc dans ses différents fragments. Pour définir un fragment de LL, on exclut les règles logiques de certains connecteurs, et on restreint de concert les règles de formation des propositions, de telle sorte que tout séquent de ce fragment prouvable dans LL soit aussi prouvable dans ce fragment. On dit alors que LL est une *extension conservatrice* du fragment considéré. Les fragments les plus usités sont ceux qui procèdent par exclusion de familles de connecteurs, avec leurs éléments neutres. L'étude de leur complexité repose implicitement sur le théorème de redondance de la règle de coupure, faute de quoi on perd toute maîtrise de la complexité des preuves.

Dans le fragment *multiplicatif* (en abrégé MLL), qui exclut les additifs et les exponentiels, la prouvabilité est un problème *NP-complet* (donc a fortiori décidable). L'appartenance à la classe NP tient au caractère multiplicatif des règles logiques des connecteurs. Si

le séquent conclusion contient k formules atomiques, alors dans le cas d'une règle unaire, le séquent prémisses en contient encore k ; dans le cas d'une règle binaire, la somme $k_1 + k_2$ des formules atomiques contenues par les deux séquents prémisses vaut k . Lue de bas en haut, toute règle binaire multiplicative transforme la recherche de preuve du séquent conclusion en celle des deux séquents prémisses, mais qui sont globalement deux fois plus petits. La taille d'une preuve d'un séquent multiplicatif est donc une fonction linéaire de la taille du séquent. Elle peut être devinée par une machine de Turing non déterministe en une durée bornée par une fonction polynômiale de la taille du séquent.

Dans le fragment *multiplicatif-additif* (en abrégé MALL), qui exclut les connecteurs exponentiels, le problème de la prouvabilité est également décidable, mais cette fois P-Espace-complet. L'ajout des connecteurs additifs au fragment MLL complique la recherche de preuve, à cause de leurs règles logiques binaires, qui recopient intégralement le contexte du séquent conclusion dans chacun des deux séquents prémisses. La taille d'une preuve dans MALL n'est donc pas une fonction linéaire de la taille du séquent : elle peut croître de façon exponentielle et ne peut être devinée en temps polynômial par une machine de Turing non déterministe. Toutefois, chaque séquent prémisses est forcément plus petit que le séquent conclusion, puisqu'un connecteur est éliminé. De plus, comme il y a au plus deux séquents prémisses pour chaque connecteur éliminé, la profondeur d'une preuve de MALL — autrement dit, le nombre de séquents à mémoriser pour la construire — est une fonction linéaire de la taille du séquent. L'espace mémoire nécessaire pour prouver un séquent est donc borné par un facteur quadratique de la taille du séquent à prouver (le produit des deux fonctions linéaires, qui donnent respectivement le nombre de séquents dans la preuve et la taille maximale de chacun) d'où l'appartenance à la classe P-Espace qui, rappelons-le, englobe les classes P, NP, et co-NP.

Enfin, dans le fragment *multiplicatif-exponentiel* (en abrégé MELL), qui exclut les additifs, la question de la prouvabilité des séquents est supposée décidable, mais ce résultat n'est pas encore établi. La traduction de la prouvabilité d'une partie des séquents de ce fragment par l'accessibilité dans les réseaux de Petri donne, pour la prouvabilité dans MELL, à la fois une piste vers la décidabilité, et une borne minimale de complexité : celle-ci est au moins EXP-difficile.

Par ailleurs, on définit la version intuitionniste de la logique linéaire, notée ILL, dont les séquents sont de forme asymétrique : le membre droit se réduit à une seule formule (et non plus une suite), par analogie aux séquents intuitionnistes classiques. En cohérence avec cette asymétrie, ILL exclue la négation $(-)^{\perp}$, la disjonction multiplicative \wp , et la disjonction exponentielle $?$ (cf. annexe B). On peut définir des fragments d'ILL, en excluant les connecteurs par familles : fragment multiplicatif intuitionniste, etc. Cependant, la restriction intuitionniste des fragments de la logique linéaire ne change rien à la complexité de la prouvabilité des séquents. Pour finir, mentionnons l'existence du fragment de ILL, dit fragment *tensoriel*, limité au seul connecteur \otimes et son élément neutre $\mathbf{1}$.

IV.2.4 Deux critères de prouvabilité dans le fragment multiplicatif

Dans la pratique, établir syntaxiquement la non prouvabilité d'un séquent est assez laborieux : il faut examiner toutes les stratégies de construction de preuve possibles et

montrer qu'elles échouent systématiquement. Or pour n'importe quelle règle multiplicative binaire, par exemple, il faut tenir compte de toutes les répartitions possibles des formules du contexte dans les deux séquents prémisses. L'explosion exponentielle du nombre de stratégies à examiner est le plus souvent inévitable sauf (lorsque cela est possible) en raisonnant par induction structurelle pour écarter des ensembles de stratégies.

Dans le fragment multiplicatif, on connaît néanmoins deux *conditions nécessaires de prouvabilité*, faciles à vérifier avant toute recherche de preuve — autrement dit, un séquent de MLL ne peut être prouvable s'il ne vérifie pas ces deux conditions. Pour les définir, on commence par écrire tout séquent sous forme *unilatérale*, selon le procédé suivant :

1. on bascule par négation linéaire toutes ses prémisses du côté droit du tourniquet, avec les conclusions ; les règles de la négation étant réversibles, la prouvabilité du séquent n'est pas affectée.
2. on remplace les implications $F \multimap G$ par leurs formes équivalentes $F^\perp \wp G$.
3. on développe les formules négatives en utilisant les propriétés de la négation : dualité, involutivité, etc.

Par exemple, la forme unilatérale du schéma du modus ponens $A, A \multimap B \vdash B$ s'écrit :

$$\vdash A^\perp, A \otimes B^\perp, B$$

Si de plus, on substitue à chaque virgule une occurrence du connecteur \wp , on obtient une formule de logique linéaire équivalente au séquent initial, car la règle logique du connecteur \wp à droite est réversible. En fait, on peut redéfinir le calcul des séquents linéaires pour leur forme unilatérale. Ce système, que nous notons LL^u , est d'ailleurs le plus usité dans le domaine de la théorie de la preuve, car le nombre de règles structurelles et logiques est divisé par deux par rapport à celui de LL. Quant à la négation, elle n'est plus introduite par une règle logique, mais *définie* de manière primitive pour les atomes, et par des lois de De Morgan pour les formules. Plus précisément, d'une part, on complète par réunion l'alphabet des atomes, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$, dits *positifs* avec l'alphabet $\underline{\mathcal{A}} = \{\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots\}$, son dual *néгатif* de même cardinal, et on pose⁵ $A_i^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \underline{A}_i$; d'autre part, quelles que soient les formules F et G formées à partir de $\mathcal{A} \cup \underline{\mathcal{A}}$ et les connecteurs linéaires, on pose les équations de substitution :

$$(F \otimes G)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \wp G^\perp, \quad (F \wp G)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \otimes G^\perp, \quad \text{etc.}$$

De même, l'implication linéaire est un connecteur défini par $F \multimap G \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \wp G$. Avec ce calcul, les démonstrations par induction structurelle — notamment celles de cohérence et de complétude — sont plus rapides, puisqu'il y a moins de règles à examiner. Nous en ferons usage pour exposer ces aspects.⁶

5. En fait, on se passe de la notation \underline{A} en considérant que A^\perp est une formule atomique dans LL^u .

6. Dans la pratique, nous préférons employer des séquents bilatéraux, car leur expressivité est supérieure. En écrivant les formules d'un seul côté du tourniquet, il n'est pas possible de distinguer des prémisses et des conclusions à la déduction, puisque les unes comme les autres peuvent être négatives.

La première condition nécessaire de prouvabilité, appelée *critère d'équilibrage*, peut se comprendre comme la formalisation du principe de Lavoisier (cf. section II.2.6). Elle s'énonce de la manière suivante :

Dans tout séquent multiplicatif unilatéral prouvable, pour chaque *type* d'atome propositionnel de l'alphabet $\mathcal{A} \cup \underline{\mathcal{A}}$, le nombre d'occurrences positives égale le nombre d'occurrences négatives.

On démontre facilement la correction de ce critère par induction structurelle en vérifiant, pour chaque règle du calcul unilatéral sans coupure, que si ses séquents prémisses sont équilibrées, alors son séquent conclusion l'est nécessairement. Le critère d'équilibrage permet donc de montrer très rapidement la non prouvabilité des séquents multiplicatifs qui le violent. Tel est le cas, par exemple, du séquent $A, A \multimap B \vdash A \otimes B$, puisque sa forme unilatérale $A^\perp, A \otimes B^\perp, A \otimes B$ n'est pas équilibrée en A : il y a deux occurrences de A pour une seule de A^\perp . Cependant, ce critère n'est pas une condition suffisante de prouvabilité. Par exemple, le séquent multiplicatif $A, B \vdash A, B$ est équilibré, mais non prouvable. La deuxième condition nécessaire de prouvabilité, appelée *critère d'Euler*, permet justement de déceler la non prouvabilité du séquent de l'exemple précédent :

Dans tout séquent multiplicatif unilatéral prouvable, la somme des nombres d'occurrences du connecteur *par* et de la virgule égale le nombre d'occurrences du connecteur *fois* plus un.

Comme pour le critère d'équilibrage, la correction du critère d'Euler se démontre facilement par induction structurelle, en examinant chaque règle du calcul unilatéral. En fait, il s'agit ni plus ni moins que de l'équation d'Euler bien connue en théorie des graphes : *dans tout arbre, le nombre de sommets égale le nombre d'arrêtes plus un*. La correspondance entre les séquents multiplicatifs unilatéraux prouvables et les arbres s'explique par le formalisme des réseaux de preuves.

Le critère d'Euler permet donc de montrer la non prouvabilité d'un séquent ne respectant pas la distinction des connecteurs *fois* et *par*, comme par exemple $A, B \vdash A, B$ qui est équivalent à $A \otimes B \vdash A \wp B$: sa forme unilatérale $\vdash A^\perp, B^\perp, A, B$ compte trois virgules contre zéro *fois*, et on a $3 \neq 1$. Néanmoins, comme le critère d'équilibrage, il ne s'agit pas d'une condition suffisante de prouvabilité. De plus, le respect de l'un et l'autre ne suffit pas non plus : par exemple, pour le séquent $A, (A \otimes B) \multimap (C \otimes B) \vdash C$ équivalent à $\vdash A^\perp, (A \otimes B) \otimes (C^\perp \wp B^\perp), C$ chacun peut vérifier l'équilibrage des atomes et le respect du critère d'Euler (deux virgules et un *par*, contre deux *fois* plus un). Pourtant, ce séquent n'est manifestement pas prouvable : la ressource B n'est pas consommable alors qu'elle est requise par la ressource d'action $(A \otimes B) \multimap (C \otimes B)$, même si dans l'action, la production de B compense sa consommation (c'est l'équilibrage). Pour montrer cette non prouvabilité, il reste soit la possibilité d'une démonstration syntaxique sur les preuves du calcul des séquents, soit l'emploi d'une méthode sémantique (cf. section IV.3.2).

IV.2.5 Un théorème de finitude important

Parmi les grandes propriétés liant les trois familles de connecteurs linéaires, un théorème de finitude permet d'illustrer certains aspects de complexité : un séquent unilatéral

prouvable multiplicatif-exponentiel peut, dans les cas simples (si ses connecteurs exponentiels sont disjonctifs et ne sont appliqués qu'à des formules multiplicatives), se réduire à un séquent prouvable purement multiplicatif paramétré par des entiers naturels. Ce théorème est faux si l'on ne se restreint pas aux connecteurs multiplicatifs.

Considérons Γ et Δ deux multi-ensembles finis de formules de LL^u . Notons $(G_i)_{i \in E}$ l'ensemble des formules *éléments* de Γ , c'est-à-dire ses constituants distincts, dont E est un ensemble indexateur de cardinal $n \in \mathbb{N}$ — donc Γ s'écrit $(G_i)_{i \in \varepsilon}$ avec $\varepsilon : E \rightarrow \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in E$, $\varepsilon(i) \geq 1$. Le théorème de finitude énonce l'équivalence :

$$\underbrace{\vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon}, \Delta}_{(P1)} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\exists \gamma : E \rightarrow \mathbb{N}, \vdash (G_i)_{i \in \gamma}, \Delta}_{(P2)}$$

Rappelons que dans le calcul unilatéral, lorsqu'un séquent prouvable contient une formule exponentielle disjonctive $?F$, cela signifie que sa preuve nécessite un nombre inconnu mais fini d'applications des règles $C?$, $W?$ et $?$. Le théorème de finitude exprime notamment le fait que si F et le contexte sont des formules purement multiplicatives, alors toutes les inférences $C?$, $W?$ et $?$ peuvent être effectuées en fin de preuve, juste avant la racine.

Pour démontrer l'implication (i) : $(P1) \Rightarrow (P2)$, on procède par induction structurelle sur la preuve sans coupure du séquent (P1). Pour chaque inférence respectant les règles de formation données en hypothèses du théorème, on vérifie la transmission de l'implication (i) des prémisses aux conclusions. Pour simplifier les écritures, on note respectivement $?F$ et $(\Gamma)_\gamma$ les multi-ensembles de formules $(?G_i)_{i \in \varepsilon}$ et $(G_i)_{i \in \gamma}$.

1. Pour la règle d'identité comme pour la règle axiome **1**, le séquent conclusion est un cas dégénéré puisque $\Gamma = \cdot$. Il n'y a rien à vérifier.
2. Pour la règle \wp , le cas général d'application est :

$$\frac{\vdash ?\Gamma, F, G, \Delta'}{\vdash ?\Gamma, \underbrace{F \wp G, \Delta'}_{\Delta}} \wp$$

Si le séquent prémisses est prouvable et vérifie l'implication (i), alors il existe un multi-ensemble d'indices $\gamma : E \rightarrow \mathbb{N}$ tel que le séquent $\vdash (\Gamma)_\gamma, F, G, \Delta'$ soit prouvable. En lui appliquant la règle \wp , on prouve :

$$\frac{\vdash (\Gamma)_\gamma, F, G, \Delta'}{\vdash (\Gamma)_\gamma, F \wp G, \Delta'} \wp$$

Donc le séquent conclusion $\vdash ?\Gamma, \Delta$ vérifie aussi l'implication (i).

3. Pour la règle \perp , l'examen est similaire.
4. Pour la règle \otimes , le cas général d'application est :

$$\frac{\vdash ?\Gamma_1, F_1, \Delta_1 \quad \vdash ?\Gamma_2, F_2, \Delta_2}{\vdash \underbrace{?\Gamma_1, ?\Gamma_2}_{? \Gamma}, \underbrace{F_1 \otimes F_2, \Delta_1, \Delta_2}_{\Delta}} \otimes$$

Si les deux séquents prémisses sont prouvables et vérifient l'implication (I), alors il existe $\gamma_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{N}$ et $\gamma_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{N}$ deux multi-ensembles où E_1 et E_2 sont respectivement les ensembles indexateurs des formules éléments de Γ_1 et Γ_2 , tels que les séquents $\vdash (\Gamma_1)_{\gamma_1}, F_1, \Delta_1$ et $\vdash (\Gamma_2)_{\gamma_2}, F_2, \Delta_2$ soient prouvables. En leur appliquant la règle \otimes , on prouve :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash (\Gamma_1)_{\gamma_1}, F_1, \Delta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash (\Gamma_2)_{\gamma_2}, F_2, \Delta_2 \end{array}}{\vdash \underbrace{(\Gamma_1)_{\gamma_1}, (\Gamma_2)_{\gamma_2}}_{(\Gamma)_\gamma}, \underbrace{F_1 \otimes F_2, \Delta_1, \Delta_2}_\Delta} \otimes$$

En posant $\gamma : E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\gamma = \gamma'_1 + \gamma'_2$, la somme des prolongements de γ_1 et γ_2 à $E_1 \cup E_2$, on en déduit que le séquent conclusion $\vdash ?\Gamma, \Delta$ vérifie aussi l'implication (I).

5. Pour la règle $?$, le cas général d'application est :

$$\frac{\vdash ?\Gamma', F, \Delta}{\vdash \underbrace{?\Gamma', ?F, \Delta}_{?\Gamma}} ?$$

Si le séquent prémisses est prouvable et vérifie l'implication (I), il existe $\gamma' : E' \rightarrow \mathbb{N}$ tel que le séquent $\vdash (\Gamma')_{\gamma'}, F, \Delta$ soit prouvable. Deux cas se présentent : si n'existe pas $j \in E'$ tel que $G_j = F$, alors on construit $E = E' \cup \{j\}$, sinon on pose $E = E'$. Puis on définit $\gamma : E \rightarrow \mathbb{N}$ avec pour tout $i \neq j$, $\gamma(i) = \gamma'(i)$ et $\gamma(j) = \gamma'(j) + 1$. Alors, le séquent conclusion $\vdash ?\Gamma, \Delta$ vérifie l'implication (I).

6. Pour la règle $W?$, le cas général d'application est :

$$\frac{\vdash ?\Gamma', \Delta}{\vdash \underbrace{?\Gamma', ?F, \Delta}_{?\Gamma}} W?$$

Le raisonnement est similaire : si F , indexée par j , n'est pas une formule de Γ , alors $\gamma(j) = 0$, sinon $\gamma(j) = \gamma'(j)$.

7. Pour la règle $C?$, le cas général d'application est :

$$\frac{\vdash ?\Gamma', ?F, ?F, \Delta}{\vdash \underbrace{?\Gamma', ?F, \Delta}_{?\Gamma}} W?$$

Si le séquent prémisses est prouvable et vérifie l'implication (I), il existe $\gamma : E \rightarrow \mathbb{N}$ tel que le séquent $\vdash (\Gamma', F, F)_\gamma, \Delta$ soit prouvable, donc le séquent conclusion $\vdash ?\Gamma, \Delta$ vérifie évidemment l'implication (I).

Par le principe de la sous-formule, il n'y a pas d'autre règle à examiner. Donc tout séquent prouvable respectant les hypothèses de formation du théorème vérifient l'implication (I).

ii. Pour démontrer la réciproque (II) : (P2) \Rightarrow (P1), il suffit juste de procéder dans LK^u. En premier lieu, on montre que quels que soient les multi-ensembles γ et ε sur E , si ε n'a pas de composante nulle, alors le séquent :

$$\vdash \left(\wp_{i \in \gamma} G_i \right)^\perp, (?G_i)_{i \in \varepsilon} \quad \text{i.e.} \quad \vdash \bigotimes_{i \in E} (G_i^\perp)^{\otimes \gamma(i)}, (?G_i)_{i \in \varepsilon}$$

est prouvable. On construit sa preuve de bas en haut. Pour tout $i \in E$, si $\varepsilon(i) > \gamma(i)$, alors on effectue $\varepsilon(i) - \gamma(i)$ affaiblissements logiques de $?G_i$; si $\varepsilon(i) < \gamma(i)$, alors on effectue $\gamma(i) - \varepsilon(i)$ contractions logiques de $?G_i$. Ceci ramène le multi-ensemble $(?G_i)_{i \in \varepsilon}$ à autant d'occurrences de $?G_i$ qu'il y a d'occurrences de G_i^\perp dans $\bigotimes_{i \in E} (G_i^\perp)^{\otimes \gamma(i)}$. Ensuite, toujours pour chaque $i \in E$, on effectue une déréluction pour réduire la formule $?G_i$ (si elle apparaît) à G_i . Enfin, on applique $\sum_{i \in E} \gamma(i) - 1$ fois la règle \otimes pour n'obtenir que des séquents axiomes de la forme $\vdash G_i^\perp, G_i$ (autant que $\gamma(i)$). Résumons :

$$\frac{\frac{\frac{\vdash G_1^\perp, G_1 \text{ id} \quad \dots \quad \vdash G_1^\perp, G_1 \text{ id} \quad \dots \quad \vdash G_n^\perp, G_n \text{ id} \quad \dots \quad \vdash G_n^\perp, G_n \text{ id}}{\vdash \bigotimes_{i \in E} (G_i^\perp)^{\otimes \gamma(i)}, (G_i)_{i \in \gamma} ?} \otimes}{\vdash \bigotimes_{i \in E} (G_i^\perp)^{\otimes \gamma(i)}, (?G_i)_{i \in \gamma} ?} \text{ W? C?}}{\vdash \bigotimes_{i \in E} (G_i^\perp)^{\otimes \gamma(i)}, (?G_i)_{i \in \varepsilon} ?} \otimes$$

En second lieu, la preuve de l'implication (II) s'écrit simplement :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash (G_i)_{i \in \gamma}, \Delta}{\vdash \wp_{i \in \gamma} G_i, \Delta} \wp}{\vdash \wp_{i \in \gamma} G_i, \Delta} \wp}{\vdash \wp_{i \in \gamma} G_i, \Delta} \wp \quad \vdash (\wp_{i \in \gamma} G_i)^\perp, (?G_i)_{i \in \varepsilon}}{\vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon}, \Delta} \text{ cut}}{\vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon}, \Delta} \text{ (P1)}$$

□

Observons que l'implication (I) : (P1) \Rightarrow (P2) de ce théorème n'est pas valable si les formules G_i de Γ et celles de Δ ne sont plus dans le fragment MLL. Il suffit par exemple de transposer, dans le raisonnement par récurrence, le cas général de l'application de la règle \otimes sur une formule de Δ par celui de la règle $\&$:

$$\frac{\frac{\vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon_1}, F, \Delta' \quad \vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon_2}, G, \Delta'}{\vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon_2}, \underbrace{F \& G, \Delta'}_{\Delta}} \&}{\vdash (?G_i)_{i \in \varepsilon_2}, \underbrace{F \& G, \Delta'}_{\Delta}} \&$$

Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe γ_1 et $\gamma_2 : E \rightarrow \mathbb{N}$ tels que :

$$\vdash (G_i)_{i \in \gamma_1}, F, \Delta' \quad \text{et} \quad \vdash (G_i)_{i \in \gamma_2}, G, \Delta'$$

Mais alors on ne peut pas appliquer la règle $\&$ aux formules F et G de ces deux séquents, car ils n'ont a priori pas le même contexte. C'est la gestion par superposition des contextes, propres aux connecteurs additifs, qui bloque le raisonnement. Donnons un exemple typique dans MALL. Le séquent $A, !(A \multimap B) \vdash B \& A$ est prouvable :

$$\frac{\frac{\frac{\text{id}}{A \vdash A} \quad \frac{\text{id}}{B \vdash B}}{A, A \multimap B \vdash B} \multimap_L \quad \frac{\text{id}}{A \vdash A}}{A, !(A \multimap B) \vdash B} !_L \quad \frac{\text{id}}{A \vdash A}}{A, !(A \multimap B) \vdash A} W!_L}{A, !(A \multimap B) \vdash B \& A} \&_R$$

En revanche, il est clair qu'il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ tel que soit prouvable le séquent $A, (A \multimap B)_{1 \leq i \leq k} \vdash B \& A$.

IV.3 Sémantique des phases

La sémantique des phases est une sémantique tarskienne, en ce qu'elle associe des valeurs aux propositions, dans le même esprit que la sémantique usuelle de la logique classique. Mais là l'ensemble des valeurs n'est pas réduit à un couple $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$, c'est l'ensemble des parties d'un monoïde, ce dernier étant a priori infini (sinon la sémantique n'est pas complète). De plus, les définitions de la sémantique des phases font appel à beaucoup d'abstractions. C'est pourquoi nous jugeons utile, pour bien la comprendre, de rappeler les bases de la sémantique classique, en particulier l'interprétation des connecteurs comme des fonctions et les notions fondamentales de *modèle*, de *satisfaction* d'une formule dans un modèle et de *validité* d'une formule. C'est également dans un but d'analogie didactique que nous montrons la cohérence et la complétude de cette sémantique pour le calcul des séquents unilatéraux classiques. Par souci de clarté, nous avons employé des notations distinctes pour la syntaxe et la sémantique.

IV.3.1 Rappels sur la sémantique des propositions classiques

La sémantique tarskienne de la logique classique propositionnelle est simple. On se donne un ensemble \mathbb{B} de cardinal deux, dit ensemble des *valeurs de vérité*, noté en extension $\{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$. À chaque connecteur d'arité m ou constante logique ($m = 0$), on associe une fonction $\mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}$; idem pour le méta-connecteur *virgule* qui représente implicitement le *ou* dans les séquents unilatéraux classiques. Comme \mathbb{B} est fini et de cardinal petit, ces fonctions peuvent être définies par des tables de valeurs, dites *tables de vérité*. Pour

$(X, Y) \in \mathbb{B}^2$, on donne :

| X | Y | \top | \perp | $\neg Y$ | $X \wedge Y$ | $X \vee Y$ | $X \Rightarrow Y$ | X, Y |
|-----|-----|--------|---------|----------|--------------|------------|-------------------|--------|
| v | v | v | f | f | v | v | v | v |
| f | v | v | f | f | f | v | v | v |
| v | f | v | f | v | f | v | f | v |
| f | f | v | f | v | f | f | v | f |

En toute rigueur, les notations des fonctions de vérité associées aux connecteurs et constantes devraient différer de ces derniers. Néanmoins, si nous distinguons les formules de leurs interprétations, alors cette surcharge n'engendre pas de confusion.

On appelle **modèle**, noté \mathcal{M} , la donnée d'une valeur de vérité $X \in \mathbb{B}$ à chaque atome positif $A \in \mathcal{A}$. On appelle **interprétation** de A dans le modèle \mathcal{M} cette valeur, que nous notons $\|A\|_{\mathcal{M}}$. Par les tables de vérité ci-dessus, tout multi-ensemble Γ de formules admet une interprétation dans \mathcal{M} , valeur de vérité que nous notons $\|\Gamma\|_{\mathcal{M}}$. Cela revient à poser, quels que soient les formules F, G , et le multi-ensemble Γ :⁷

$$\begin{aligned} \neg\|F\|_{\mathcal{M}} &\stackrel{\text{def}}{=} \|\neg F\|_{\mathcal{M}} \\ \|F\|_{\mathcal{M}} \wedge \|G\|_{\mathcal{M}} &\stackrel{\text{def}}{=} \|F \wedge G\|_{\mathcal{M}} & \|F\|_{\mathcal{M}} \vee \|G\|_{\mathcal{M}} &\stackrel{\text{def}}{=} \|F \vee G\|_{\mathcal{M}} \\ \|F\|_{\mathcal{M}} \Rightarrow \|G\|_{\mathcal{M}} &\stackrel{\text{def}}{=} \|F \Rightarrow G\|_{\mathcal{M}} & \|\Gamma\|_{\mathcal{M}}, \|F\|_{\mathcal{M}} &\stackrel{\text{def}}{=} \|\Gamma, F\|_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Par rapport à un modèle \mathcal{M} , on définit la relation de **satisfaction** d'un multi-ensemble de formule Γ , notée $\models_{\mathcal{M}} \Gamma$ par la condition $\|\Gamma\|_{\mathcal{M}} = v$. Dans le cas contraire, on note $\not\models_{\mathcal{M}} \Gamma$. On définit alors la notion de **validité** d'un multi-ensemble de formules Γ , notée $\models \Gamma$, par le fait qu'il est satisfait dans tout modèle \mathcal{M} — dans le cas d'une simple formule, on dit également qu'elle est une **tautologie**. Quand Γ n'est satisfait que pour certains modèles, on dit qu'il est **satisfaisable**, et pour aucun, on dit qu'il est **inconsistant**. On note $\not\models \Gamma$ cette dernière propriété. Pour une formule F , on a l'équivalence entre $\not\models F$ et $\models \neg F$. Si n est le cardinal de l'alphabet des atomes \mathcal{A} , comme \mathbb{B} est de cardinal 2, il y a exactement 2^n modèles. Par un examen exhaustif, il est donc possible d'évaluer la validité d'un multi-ensemble Γ de formules, mais cette méthode est évidemment de complexité exponentielle. Certes, des améliorations sont possibles (cf. par exemple l'algorithme de Quine [37]) mais le problème de la validité d'une forme est de toute façon NP-complet.

Par égalité des fonctions de vérité, on retrouve toutes les équivalences classiques, par exemple entre $X \Rightarrow Y$ et $\neg Y \Rightarrow \neg X$. Systématiquement, la validité d'une suite de formules Γ suit sa prouvabilité, et réciproquement ; c'est ce qu'énoncent les théorèmes de **cohérence** et de **complétude**. Pour les démontrer, utilisons le calcul réversible des séquents unilatéraux LK^{ur} (cf. annexe A), dont le petit nombre de règles minimise les cas à examiner. Toutes les expressions définies ($F \Rightarrow G \stackrel{\text{def}}{=} \neg F \vee G$ par exemple) n'étant que des conjonctions ou des disjonctions, il suffit de vérifier une fois pour toute que leurs fonctions de vérité sont identiques à celles de leurs définitions respectives.

i. Commençons par la cohérence : montrons, quel que soit le multi-ensemble Γ , que si

7. Ces définitions paraissent « tautologiques » en ce que l'on a surchargé les symboles syntaxiques des connecteurs par leurs définitions sémantiques.

$\vdash \Gamma$ alors $\models \Gamma$. On procède par induction structurelle sur les règles de LK^{ur} .

1. Pour la règle d'identité, il suffit de montrer $\models_{\mathcal{M}} F, \neg F, \Delta$ pour tout modèle \mathcal{M} , ce qui est direct par construction de la table de vérité suivante, dont la dernière colonne où apparaît toujours la valeur **v** donne bien $\models F, \neg F, \Delta$:

| | $\ F\ _{\mathcal{M}_i}$ | $\ \Delta\ _{\mathcal{M}_i}$ | $\ F, \neg F, \Delta\ _{\mathcal{M}_i}$ |
|-----------------|-------------------------|------------------------------|---|
| \mathcal{M}_1 | v | v | v |
| \mathcal{M}_2 | v | f | v |
| \mathcal{M}_3 | f | v | v |
| \mathcal{M}_4 | f | f | v |

2. Pour la règle d'introduction de \top , on montre de la même manière $\models \top, \Delta$ (il n'y a que deux modèles possibles).
3. Pour la règle d'introduction de \vee , on suppose $\models F, G, \Delta$ et on montre immédiatement $\models F \vee G, \Delta$ en rappelant que la virgule et le connecteur \vee ont la même fonction de vérité.
4. Pour la règle d'introduction de \wedge , on suppose à la fois $\models F, \Delta$ et $\models G, \Delta$; on doit montrer $\models F \wedge G, \Delta$. Or pour tout modèle \mathcal{M} , la première hypothèse donne $\|F\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$ ou $\|\Delta\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$, et la deuxième hypothèse $\|G\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$ ou $\|\Delta\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$. Donc, si $\|\Delta\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{f}$, alors $\|F\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$ et $\|G\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$ donc $\|F \wedge G\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$. Quel que soit le modèle \mathcal{M} , on a bien $\|F \wedge G, \Delta\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$.

De cette analyse sémantique des règles de LK^{ur} , il apparaît que toutes propagent la validité des séquents prémisses au séquent conclusion; donc finalement tout séquent unilatéral prouvable est nécessairement valide.

ii. Attaquons maintenant la complétude: montrons, quel que soit le multi-ensemble Γ de formules, que si $\models \Gamma$ alors $\vdash \Gamma$, propriété notée (P). On procède par récurrence sur la forme de Γ selon son *degré*, noté $\partial(\Gamma) \in \mathbb{N}$, défini récursivement par :

$$\begin{aligned} &\text{pour tout atome positif } A, \quad \partial(A) = \partial(\neg A) = \partial(\top) = 0; \\ &\text{pour toutes formules } F \text{ et } G, \quad \partial(F \wedge G) = \partial(F \vee G) = \partial(F) + \partial(G) + 1; \\ &\text{pour toute formule } F \text{ et tout } \Delta, \quad \partial(F, \Delta) = \partial(F) + \partial(\Delta). \end{aligned}$$

Autrement dit, le degré d'un multi-ensemble de formules comptabilise juste les occurrences des connecteurs \wedge et \vee .

a) Tout d'abord, montrons la propriété (P) pour tous les Γ valides de degré zéro :

- premier cas, Γ est de la forme \top, Δ avec $\partial(\Delta) = 0$ (on a bien $\partial(\top, \Delta) = 0$ et $\models \top, \Delta$); évidemment, on a $\vdash \top, \Delta$ par la règle axiome \top ;
- deuxième cas, Γ est de la forme $A, \neg A, \Delta$ avec $\partial(\Delta) = 0$ (vérification similaire des hypothèses); la preuve de $\vdash \Gamma$ est directe par la règle d'identité.

Hors des deux cas précédents, tout Γ de degré zéro n'est pas valide. En effet, supposons que Γ soit un multi-ensemble d'atomes H_i positifs ou négatifs tels que pour tout i et tout j , $H_i \neq \neg H_j$. Considérons le modèle \mathcal{M} tel que pour tout i , si H_i est un atome positif $A \in \mathcal{A}$, alors on pose $\|A\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{f}$ et si H_i est un atome négatif $\neg A \in \mathcal{A}$, alors on pose $\|A\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{v}$. Alors il est clair que $\|\Gamma\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{f}$, donc Γ n'est pas valide. Bref, le cas initial de la récurrence est complètement traité.

b) Supposons la propriété (P) vérifiée pour tout multi-ensemble Γ de degré inférieur ou égal à d . Soit Γ valide et de degré $d + 1$. Montrons qu'il est prouvable :

- premier cas, Γ est de la forme $F \vee G, \Delta$ avec donc $\partial(F \vee G, \Delta) = d + 1$; alors F, G, Δ est de degré d et valide, puisque la virgule et le connecteur \vee ont même fonction de vérité ; ce multi-ensemble est donc prouvable par hypothèse de récurrence, ce qui permet de prouver Γ par introduction de \vee :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash F, G, \Delta \end{array}}{\vdash F \vee G, \Delta} \vee$$

- deuxième cas, Γ est de la forme $F \wedge G, \Delta$ avec donc $\partial(F \wedge G, \Delta) = d + 1$; alors F, Δ et G, Δ sont nécessairement valides et respectivement de degré $d - \partial(G)$ et $d - \partial(F)$, donc au plus d ; par hypothèse de récurrence, ces multi-ensembles sont prouvables, ce qui permet de prouver Γ par introduction de \wedge :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash F, \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash G, \Delta \end{array}}{\vdash F \wedge G, \Delta} \wedge b$$

Sachant les clauses récursives de définition du degré d'un multi-ensemble de formules, il n'y a aucun autre cas que les deux précédents de Γ de degré $d + 1$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée à ce rang, ce qui achève la démonstration de complétude. \square

IV.3.2 Les modèles de phases

Étant donné l'usage limité que nous en ferons au chapitre suivant de la sémantique des phases, nous n'en présentons ici que le volet pour le fragment MALL.

On se donne un monoïde commutatif \mathbb{P} dont on note $*$ la loi interne et $1_{\mathbb{P}}$ l'élément neutre. Autrement dit, quel que soit le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{P}^3$, on a les propriétés :

$$\underbrace{(x * y) * z = x * (y * z)}_{\text{associativité}} \quad \underbrace{x * y = y * x}_{\text{commutativité}} \quad \underbrace{x * 1_{\mathbb{P}} = x}_{\text{neutralité}}$$

On appelle **phases** les éléments du monoïde \mathbb{P} . On se donne également un sous-ensemble $\perp_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$, appelé **ensemble des antiphases**, qui a priori n'est pas un sous-monoïde (c'est-à-dire contenant $1_{\mathbb{P}}$ et stable pour $*$). On appelle **espace de phases** tout couple $(\mathbb{P}, \perp_{\mathbb{P}})$.

Les formules de logique linéaire sont interprétées par des éléments de $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$, l'ensemble des parties de \mathbb{P} . Sachant que \mathbb{P} peut être un ensemble équipotent à \mathbb{N} , alors $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$ peut avoir la puissance du continu, autrement dit, les valeurs d'interprétation des formules de logique linéaire ne sont pas même pas dénombrables. Les connecteurs d'arité m sont donc définis par des fonctions $\mathfrak{P}(\mathbb{P})^m \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$ qu'il n'est évidemment pas possible de décrire en extension par des tables de valeurs; on les définit donc en intention de la manière qui suit. Préalablement, on introduit les deux fonctions $\mathfrak{P}(\mathbb{P}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{P}) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$, notées respectivement $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$ et $(X, Y) \mapsto X \multimap Y$, telles que :

$$X \otimes Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x * y \mid x \in X \text{ et } y \in Y\} \quad X \multimap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{P} \mid \forall x \in X, (x * z) \in Y\}$$

Maintenant, on appelle **orthogonal** d'un ensemble de phases $X \subseteq \mathbb{P}$ l'ensemble noté X^\perp autrement dit, on définit la fonction $\mathfrak{P}(\mathbb{P}) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{P})$ notée $X \mapsto X^\perp$ — tel que :

$$X^\perp \stackrel{\text{def}}{=} X \multimap \perp_{\mathbb{P}} = \{z \in \mathbb{P} \mid \forall x \in X, (x * z) \in \perp_{\mathbb{P}}\}$$

Remarquons déjà que cette notion vérifie les deux propriétés fondamentales d'une *orthogonalité* : quel que soit $X \subseteq \mathbb{P}$, on n'a pas nécessairement l'égalité entre X et $X^{\perp\perp}$ mais en revanche $X \subseteq X^{\perp\perp}$ et $X^\perp = X^{\perp\perp\perp}$.

Pour montrer la première propriété, posons $x_0 \in X$ et montrons que $x_0 \in X^{\perp\perp}$. Par définition, il faut donc montrer que pour tout $x' \in X^\perp$, on a $(x_0 * x') \in \perp_{\mathbb{P}}$. Soit $x' \in X^\perp$. Alors par définition, pour tout $x \in X$, on a $(x * x') \in \perp_{\mathbb{P}}$, or $x_0 \in X$ donc $(x_0 * x') \in \perp_{\mathbb{P}}$.

Pour montrer la deuxième propriété, il suffit (compte tenu de la première qui se décline $X^\perp \subseteq X^{\perp\perp\perp}$) de montrer $X^{\perp\perp\perp} \subseteq X^\perp$. Posons $x_3 \in X^{\perp\perp\perp}$ et montrons que $x_3 \in X^\perp$, donc que pour tout $x \in X$, on a $(x * x_3) \in \perp_{\mathbb{P}}$. Soit $x \in X$. D'après la propriété précédente, on a aussi $x \in X^{\perp\perp}$. Comme par ailleurs $x_3 \in X^{\perp\perp\perp}$, alors par définition, pour tout $x'' \in X^{\perp\perp}$, on a $(x'' * x_3) \in \perp_{\mathbb{P}}$. Donc $(x * x_3) \in \perp_{\mathbb{P}}$. \square

Bref, si la fonction $X \mapsto X^\perp$ n'est pas involutive pour tous les ensembles de phases, elles l'est pour ceux qui sont déjà l'orthogonal d'un ensemble de phases. Ces ensembles stables par bi-orthogonalité sont privilégiés : on les appelle les **faits**. Tous les connecteurs du fragment MALL sont interprétés comme des opérations sur les faits. Soient $X \subseteq \mathbb{P}$ et $Y \subseteq \mathbb{P}$ deux ensembles de phases tels que $X = X^{\perp\perp}$ et $Y = Y^{\perp\perp}$. En plus de leur *implication linéaire* $X \multimap Y$, et de la *négation linéaire* X^\perp de X , on définit :

leur **produit tensoriel** $X \otimes Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \otimes Y)^{\perp\perp}$,

leur **somme tensorielle**⁸ $X \wp Y \stackrel{\text{def}}{=} (X^\perp \otimes Y^\perp)^\perp$,

leur **produit direct** $X \& Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cap Y$,

— leur **somme directe** $X \oplus Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y)^{\perp\perp}$.

8. Dans l'article fondateur [23], GIRARD emploie aussi le terme de « *parallélisation* » de faits.

De plus, on pose les interprétations suivantes :

$$\mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \{1_{\mathbb{P}}\}^{\perp\perp} \quad \perp \stackrel{\text{def}}{=} \perp_{\mathbb{P}} \quad \top \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P} \quad \mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset^{\perp\perp}$$

en vérifiant facilement que $\perp_{\mathbb{P}}$ et \mathbb{P} sont bien des faits puisque, par définition, d'une part $\{1_{\mathbb{P}}\}^{\perp} = \{z \in \mathbb{P} \mid 1_{\mathbb{P}} * z \in \perp_{\mathbb{P}}\} = \perp_{\mathbb{P}}$, et d'autre part $\emptyset^{\perp} = \{z \in \mathbb{P}\} = \mathbb{P}$. Plus généralement, les définitions ci-dessus sont conçues pour retrouver exactement toutes les propriétés syntaxiques du fragment MALL. Certaines, comme les propriétés de dualité par négation linéaires, sont de démonstration évidente; d'autres le sont moins comme l'associativité du produit tensoriel ou les (semi-) distributivités.

Les notions sémantiques de modèle, d'interprétation, de satisfaction et de validité sont analogues à celles de la logique classique. On appelle *modèle de phase*, noté \mathcal{M} , la donnée d'un espace de phase $(\mathbb{P}, \perp_{\mathbb{P}})$ et pour chaque atome positif $A \in \mathcal{A}$ d'un fait de $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$, noté $\|A\|_{\mathcal{M}}$. Tout multi-ensemble Γ de formules admet alors une *interprétation* dans \mathcal{M} , c'est-à-dire un fait calculable à partir des faits associés aux atomes et des définitions sémantiques des connecteurs données ci-dessus, en posant⁹ :

$$\|\Gamma, F\|_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \|\Gamma\|_{\mathcal{M}} \wp \|F\|_{\mathcal{M}} \quad \|F \otimes G\|_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \|F\|_{\mathcal{M}} \otimes \|G\|_{\mathcal{M}} \quad \text{etc.}$$

Notons toujours $\vDash_{\mathcal{M}} \Gamma$ la relation de *satisfaction* par un modèle \mathcal{M} d'un multi-ensemble Γ de formules. Elle est définie par :

$$\vDash_{\mathcal{M}} \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 1_{\mathbb{P}} \in \|\Gamma\|_{\mathcal{M}}$$

On a aussi la formulation suivante : quelles que soient les formules F et G , la formule $F \multimap G$ est satisfaite dans \mathcal{M} si et seulement si $\|F\|_{\mathcal{M}} \subseteq \|G\|_{\mathcal{M}}$. En effet, dire que $F \multimap G$ est satisfaite signifie, par définition, que $1_{\mathbb{P}} \in \|F \multimap G\|_{\mathcal{M}}$; autrement dit, pour tout $f \in \|F\|_{\mathcal{M}}$, on a $(f * 1_{\mathbb{P}}) \in \|G\|_{\mathcal{M}}$, donc $f \in \|G\|_{\mathcal{M}}$ par neutralité. On peut ainsi noter $F \vDash_{\mathcal{M}} G$ cette relation. Ensuite, comme en logique classique, on dit que Γ est *valide* (ou encore, s'il s'agit d'une simple formule, une *tautologie linéaire*) ce que nous notons $\vDash \Gamma$, si et seulement si Γ est satisfait dans tout modèle de phase¹⁰. Naturellement, on a un théorème de *cohérence* et de *complétude* qui prouve l'équivalence dans MALL entre la prouvabilité d'un multi-ensemble de formules et sa validité (cf. section IV.3.4).

Bien qu'elle opère dans le même esprit que la sémantique tarskienne de la logique classique, en associant des valeurs aux formules, ses applications semblent moindres, parce qu'il est impossible d'énumérer tous les modèles de phases imaginables, donc de vérifier sémantiquement la validité d'une formule. Ainsi, GIRARD écrit dans [29] :

As far as I know there is no applications for completeness, due to the fact that there is no known concrete phase spaces to which one could restrict and still have completeness.

En revanche, la sémantique des phases apporte un formalisme intéressant pour démontrer la non prouvabilité d'un séquent. Il suffit de construire un contre-modèle de phases \mathcal{M}

9. Encore une fois, ces définitions paraissent ne rien dire à cause de la surcharge sémantique des symboles syntaxiques des connecteurs.

10. Dans l'article fondateur [23], GIRARD emploie l'expression « *formule valide* » au sens de *satisfaite dans un certain modèle*.

pour lequel la forme unilatérale de ce séquent n'est pas satisfaite. Proposons un exemple pour un séquent multiplicatif équilibré et eulérien mais non prouvable :

$$A \otimes B, (A \otimes B^{\otimes 2}) \multimap (C \otimes B^{\otimes 3}) \vdash C \otimes B^{\otimes 2}$$

Concrètement, sa non prouvabilité s'explique par le fait que dans le cumul conjoint de la première prémisse, il n'y a qu'un seul exemplaire consommable de B , alors que la ressource d'action constituée par la seconde prémisse en requiert deux. Le contre-modèle \mathcal{M} de phase que l'on construit met en relief cette disparité en « comptant » les exemplaires de B , en faisant abstraction des autres ressources, de telle sorte que :

$$\|(A \otimes B) \otimes ((A \otimes B^{\otimes 2}) \multimap (C \otimes B^{\otimes 3}))\|_{\mathcal{M}} \not\subseteq \|C \otimes B^{\otimes 2}\|_{\mathcal{M}}$$

Prenons comme monoïde des phases $\mathbb{P} = \mathbb{N}$, muni de l'addition usuelle $+$, l'élément neutre $1_{\mathbb{P}}$ étant alors 0.¹¹ On prend $\perp_{\mathbb{P}} = \{2\}$ et on construit \mathcal{M} en posant :

$$\|A\|_{\mathcal{M}} = \|C\|_{\mathcal{M}} = \{0\}^{\perp\perp} = 1_{\mathbb{P}} \quad \|B\|_{\mathcal{M}} = \{1\}^{\perp\perp}$$

Ces choix sont éclairés par les propriétés suivantes. Soit $\{x\}$ un singleton de \mathbb{N} , qui est donc un ensemble de phases $X \subseteq \mathbb{P}$. Calculons son orthogonal et son bi-orthogonal :

$$X^{\perp} = \{z \in \mathbb{N} \mid x + z \in \perp_{\mathbb{P}}\} = \{z \in \mathbb{N} \mid x + z = 2\}$$

donc, si $x \leq 2$, alors $X^{\perp} = \{2 - x\}$ et $X^{\perp\perp} = \{x\} = X$, sinon $x > 2$ et alors $X^{\perp} = \emptyset$ et $X^{\perp\perp} = \mathbb{N}$. La valeur 2 du singleton $\perp_{\mathbb{P}}$ représente donc un seuil en dessous duquel tous les singletons sont des faits distincts ; au dessus de ce seuil, tous les singletons engendrent dégénérativement le même fait \mathbb{N} . De plus, si le singleton X est un fait, on a :

$$X \otimes \{1\} = \{x + 1\}^{\perp\perp} \quad \text{et} \quad X \otimes \mathbb{N} = \{x + z \mid z \in \mathbb{N}\}^{\perp\perp} = \mathbb{N}$$

Maintenant, calculons les interprétations dans \mathcal{M} des formules du séquent en question, en rappelant de plus que pour tout fait X , on a $X \otimes 1_{\mathbb{P}} = X$. Sachant justement que $\|A\|_{\mathcal{M}} = \|C\|_{\mathcal{M}} = 1_{\mathbb{P}}$ et que $\|B\|_{\mathcal{M}} = \{1\}$, on obtient :

$$\|A \otimes B\|_{\mathcal{M}} = \{1\} \quad \|A \otimes B^{\otimes 2}\|_{\mathcal{M}} = \{2\} \quad \|A \otimes B^{\otimes 3}\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N} \quad \|C \otimes B^{\otimes 2}\|_{\mathcal{M}} = \{2\}$$

On s'aperçoit donc que le modèle \mathcal{M} agit comme une projection (ou encore un filtre) pour les conjonctions multiplicatives, en « comptant » jusqu'à 2 les occurrences de B et aucune de celles des autres variables. Maintenant, on calcule :

$$\|(A \otimes B^{\otimes 2}) \multimap (A \otimes B^{\otimes 3})\|_{\mathcal{M}} = \{z \in \mathbb{N} \mid z + 2 \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

donc,

$$\|(A \otimes B) \otimes ((A \otimes B^{\otimes 2}) \multimap (A \otimes B^{\otimes 3}))\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$$

donc,

$$\|(A \otimes B) \otimes ((A \otimes B^{\otimes 2}) \multimap (C \otimes B^{\otimes 3}))\|_{\mathcal{M}} \not\subseteq \|C \otimes B^{\otimes 2}\|_{\mathcal{M}}$$

Signalons enfin que si l'on avait pris $\perp_{\mathbb{P}} = \{3\}$, on n'aurait pas obtenu ce résultat, car l'interprétation de la formule implicative aurait valu $\{1\}$. Le choix de l'ensemble des antiphases est donc primordial pour construire un contre-modèle. Au chapitre V, nous aurons l'occasion d'utiliser cette méthode pour établir la non prouvabilité d'un séquent.

11. Attention, il ne faut confondre ces deux notations respectivement ni avec 1 élément de \mathbb{N} ni avec la constante logique 0.

IV.3.3 Interprétations géométriques pour l'orthogonalité

Présentée par des équations algébriques comme celles qui définissent les faits et les connecteurs, la sémantique des phases peut sembler totalement abstraite. Cependant, le terme d'*orthogonalité* n'est pas employé gratuitement, il renvoie à des notions géométriques que nous allons nous efforcer de présenter. En fait, la notion clef de la sémantique des phases est celle de *fait engendré par bi-orthogonalité*. La manière la plus simple d'illustrer géométriquement cette notion consiste à se placer dans l'espace euclidien $\mathfrak{E} = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} des vecteurs du plan, muni du produit scalaire euclidien défini par :

$$\text{quels que soient } \vec{x} = (x_1, x_2) \text{ et } \vec{y} = (y_1, y_2) \text{ dans } \mathfrak{E}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2$$

La relation d'orthogonalité $\vec{x} \perp \vec{y}$ entre deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} est définie par $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{0}$. Donc pour un ensemble $X \subseteq \mathfrak{E}$ de vecteurs, son orthogonal X^\perp est défini par :

$$\vec{X}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{z} \in \mathfrak{E} \mid \forall \vec{x} \in \vec{X}, \vec{x} \cdot \vec{z} = \vec{0} \}$$

Considérons maintenant le singleton constitué d'un vecteur quelconque $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathfrak{E}$. Son orthogonal est l'ensemble $\{\vec{a}\}^\perp = \{z \in \mathfrak{E} \mid \vec{a} \cdot z = \vec{0}\}$. Étant donnée la définition du produit scalaire, $\{\vec{a}\}^\perp$ est la droite vectorielle $\vec{D}_b = \{k\vec{b} \mid k \in \mathbb{R}\}$ engendrée par le vecteur $\vec{b} = (a_2, -a_1)$ normal à \vec{a} . Calculons maintenant le bi-orthogonal de $\{\vec{a}\}$:

$$\{\vec{a}\}^{\perp\perp} = \{ \vec{z} \in \mathfrak{E} \mid \forall k \in \mathbb{R}, k\vec{b} \cdot \vec{z} = \vec{0} \} = \{ \vec{z} \in \mathfrak{E} \mid \vec{b} \cdot \vec{z} = \vec{0} \}$$

Il s'agit donc de la droite vectorielle \vec{D}_a engendrée par \vec{a} qui est normal à \vec{b} . Le bi-orthogonal de $\{\vec{a}\}$ est donc un ensemble dans lequel $\{\vec{a}\}$ est inclus (cf. figure IV.1). Ensuite, l'orthogonalité est involutive: $\vec{D}_a^\perp = \vec{D}_b$ et $\vec{D}_a^{\perp\perp} = \vec{D}_a$, donc $\vec{D}_a^{\perp\perp\perp} = \vec{D}_a^\perp$, etc.

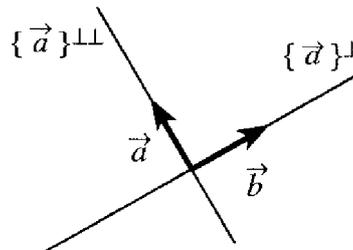


Figure IV.1

Par ailleurs, remarquons que l'orthogonal de tout ensemble $\vec{Y} = \{\vec{c}, \vec{d}\}$ de deux vecteurs non co-linéaires est l'ensemble vide (aucun vecteur ne peut être à la fois orthogonal à \vec{c} et \vec{d}) et son bi-orthogonal $\vec{Y}^{\perp\perp}$ est \mathfrak{E} tout entier. On tombe dans un cas dégénéré.

Intéressante pour comprendre intuitivement la notion d'orthogonalité en sémantique des phases, cette interprétation géométrique a cependant le défaut d'être difficilement formalisable en un espace de phases. Pour cela, il faudrait considérer \mathfrak{E} comme un monoïde commutatif \mathbb{P} tel que sa loi $*$ permettrait de définir l'orthogonalité euclidienne par translation sur un sous-ensemble $\perp_{\mathbb{P}} \subset \mathfrak{E}$: on voudrait avoir $\vec{x} \perp \vec{y}$ si et seulement

si $(\vec{x} * \vec{y}) \in \perp_{\mathcal{P}}$. Malheureusement, l'orthogonalité euclidienne est définie par une forme bilinéaire (le produit scalaire) faisant intervenir deux opérations dans \mathbb{R} , le produit et la somme. Il ne semble donc pas possible de la simuler par une seule loi $*$ sur \mathcal{E} associative, commutative et admettant un élément neutre.

En revanche, nous proposons une autre interprétation géométrique permettant d'illustrer formellement les notions fondamentales de la sémantique des phases. Il suffit de considérer \mathbb{R}^2 aussi comme un espace affine euclidien \mathcal{E} , muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , dont \mathcal{E} est l'espace vectoriel directeur. On peut représenter de manière bi-univoque tout sous-ensemble de point $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ par l'ensemble $\vec{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{E}$ tel que :

$$\vec{\mathcal{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overrightarrow{OM} \mid M \in \mathcal{X}\}$$

En particulier, une droite affine \mathcal{D} définie traditionnellement comme un ensemble de points M selon une équation vérifiée par leurs composantes apparaît dans \mathcal{E} comme un demi faisceau de vecteurs ayant même projeté selon \mathcal{D} sur n'importe quelle droite, en particulier celle orthogonale à \mathcal{D} (cf. figure IV.2). Disons qu'ils sont *équiprojetés*.

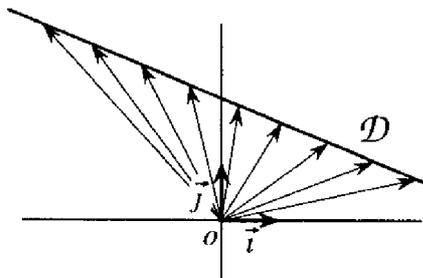


Figure IV.2

Maintenant, nous construisons l'espace de phases suivant :

- le monoïde des phases \mathbb{P} est \mathcal{E} — donc aussi implicitement \mathcal{E} ;
- la loi $*$ est l'addition, notée $+$, composante par composante — donc implicitement l'addition de vecteurs dans \mathcal{E} ;
- l'élément neutre $1_{\mathcal{P}}$ est le centre O du repère — donc implicitement le vecteur nul $\vec{0}$ de \mathcal{E} ;

l'ensemble des antiphases $\perp_{\mathcal{P}}$ est une droite quelconque de \mathcal{E} , notée \mathcal{D}_{\perp} — donc implicitement un demi faisceau de vecteurs équiprojetés de \mathcal{E} , noté $\vec{\mathcal{D}}_{\perp}$.¹²

Exprimons alors l'orthogonal \mathcal{X}^{\perp} d'un ensemble de points $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$:

$$\mathcal{X}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in \mathcal{E} \mid \forall N \in \mathcal{X}, (M + N) \in \perp_{\mathcal{P}}\}$$

Implicitement, on définit :

$$\vec{\mathcal{X}}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{z} \in \mathcal{E} \mid \forall \vec{x} \in \mathcal{X}, \vec{z} + \vec{x} \in \perp_{\mathcal{P}}\}$$

12. Attention, ici $\vec{\mathcal{D}}_{\perp}$ n'est absolument pas une droite vectorielle.

Considérons un singleton constitué d'un point M quelconque de \mathcal{E} . Quel est son orthogonal $\{M\}^\perp$? Sans faire les calculs, mais en s'appuyant sur les deux représentations (affine et vectorielle), il s'agit de l'ensemble des vecteurs translatant M sur la droite des anti-phases \mathcal{D}_\perp , donc c'est un demi faisceau de vecteurs équiprojetés, ou encore une droite parallèle à \mathcal{D}_\perp . Cette droite $\{M\}^\perp$ est la translatée par \vec{h} — vecteur de direction orthogonale à \mathcal{D}_\perp et de norme euclidienne la distance de O à \mathcal{D}_\perp — d'une droite \mathcal{D}' qui est la symétrique par rapport à \mathcal{D}_\perp de la droite passant par M et parallèle à \mathcal{D}_\perp (cf. la figure IV.3). Cherchons alors le bi-orthogonal $\{M\}^{\perp\perp}$, autrement dit l'orthogonal de la droite

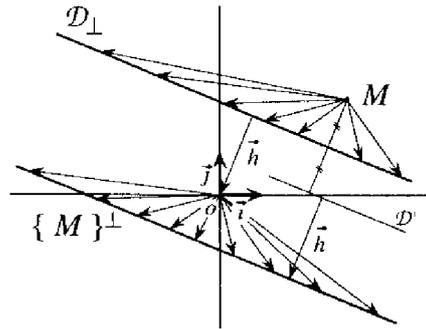


Figure IV.3

que nous venons de construire. Il s'agit de l'ensemble des vecteurs, chacun translatant tous les points de $\{M\}^\perp$ sur \mathcal{D}_\perp . Encore une fois, c'est un demi faisceau de vecteurs équiprojetés, qui correspond exactement à la droite passant par M et parallèle à \mathcal{D}_\perp (cf. la figure IV.4). Ensuite, on voit que l'orthogonalité est involutive : $\{M\}^{\perp\perp\perp} = \{M\}^\perp$, etc.

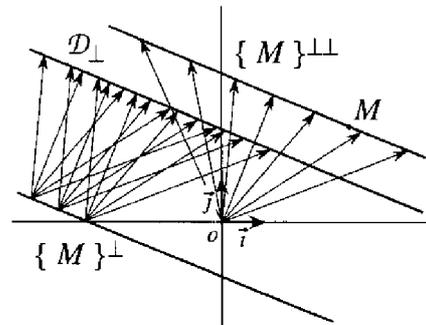


Figure IV.4

À présent, considérons un couple de points $\{M, N\} \subseteq \mathcal{E}$. Deux cas se présentent : ou bien M et N sont alignés sur une droite parallèle à \mathcal{D}_\perp , et alors l'orthogonal du couple est l'orthogonal de chacun pris individuellement, et le bi-orthogonal est la droite (M, N) ; ou bien dans le cas contraire, il n'existe aucun vecteur translatant à la fois M et N sur \mathcal{D}_\perp , donc $\{M, N\}^\perp = \emptyset$ et $\{M, N\}^{\perp\perp} = \mathcal{E}$. Cette observation se généralise pour n'importe quel sous-ensemble \mathcal{X} de points.

Dans notre espace de phases géométrique, les faits sont donc toutes les droites affines parallèles à \mathcal{D}_\perp , ainsi que l'ensemble vide et l'ensemble \mathcal{E} tout entier. Tout ensemble de

points alignés sur une droite parallèle à \mathcal{D}_\perp engendre par double orthogonalité un fait non dégénéré. Remarquons d'ailleurs que le fait engendré par $1_{\mathbb{P}}$ (le centre O) n'est pas réduit à lui-même, c'est un ensemble infini de phases : la droite parallèle à \mathcal{D}_\perp passant par O . En privilégiant une direction particulière, l'ensemble des antiphases apparaît comme jouant le rôle d'un *filtre*, ce que ne montrait pas l'interprétation précédente dans l'espace vectoriel euclidien. Notons cependant que le monoïde des phases est ici un groupe commutatif, puisque tout point $M \in \mathcal{E}$ admet un inverse pour la loi $+$ (son symétrique par rapport au centre O). Nous nous trouvons donc dans un cas particulier qui est loin de décrire toutes les finesses de la sémantique des phases. En particulier, l'interprétation des connecteurs $\&$ et \oplus est ici dégénérée, puisque tous les faits non dégénérés sont disjoints.

IV.3.4 Cohérence et complétude avec le calcul des séquents

La démonstration de la cohérence de la sémantique des phases vis-à-vis du calcul des séquents — à savoir que tout séquent unilatéral prouvable est valide — est donnée dans l'article fondateur de la logique linéaire [23]. Naturellement, GIRARD procède par induction structurelle sur les preuves de LL^u , en examinant chaque règle du fragment pour vérifier qu'elle transmet bien la validité des séquents prémisses au séquent conclusion.

En ce qui concerne la complétude réciproque, en nous limitant au fragment MALL, nous nous référons à une publication de LAFONT [48]. Pour montrer que toute formule valide est prouvable, la démonstration consiste à construire un modèle qui paraphrase sémantiquement la notion syntaxique de prouvabilité; on le nomme le *modèle syntaxique*, et on le note \mathcal{MALL} . Il est construit de la manière suivante :

- le monoïde des phases \mathbb{P} est le monoïde libre engendré par toutes les formules de MALL, autrement dit l'ensemble des séquents unilatéraux de ce fragment ;
- la loi interne $*$ est le méta-connecteur virgule des séquents, supposée commutative, et son élément neutre $1_{\mathbb{P}}$ est le séquent vide « \cdot » ;
- l'ensemble des antiphases $\perp_{\mathbb{P}}$ est l'ensemble des séquents prouvables dans MALL ;
- l'interprétation $\|A\|_{\mathcal{MALL}}$ de chaque atome $A \in \mathcal{A}$ est $\{A\}^\perp$, c'est-à-dire l'orthogonal du singleton réduit à l'atome A .

Par définition de l'orthogonalité, on en déduit que l'interprétation d'un atome A est :

$$\|A\|_{\mathcal{MALL}} = \{\Gamma \in \text{MALL} \mid \vdash \Gamma, A\}$$

donc, en particulier, on a $\vDash_{\mathcal{MALL}} A$ si et seulement si $\cdot \in \|A\|_{\mathcal{MALL}}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vdash A$. Par récurrence sur la composition des séquents unilatéraux, on montre que cette propriété est vraie pour tout séquent Δ . Autrement dit, tout séquent valide dans le modèle syntaxique est prouvable.

Chapitre V

Traduction logique des réseaux de Petri

Dans ce chapitre figurent les développements qui justifient le titre de la thèse : nous montrons comment formaliser le fonctionnement des réseaux de Petri en traduisant leurs structures et leurs marquages par des formules de logique linéaire. Pour mener ce travail mathématique, nous nous appuyons sur les éléments syntaxiques et sémantiques du chapitre IV. Nos analyses des approches déjà proposées dans la littérature et nos contributions pour les améliorer reposent aussi sur notre conception des notions primitives et sur notre interprétation concrète des connecteurs, exposées aux chapitres II et III.

Plan du chapitre

En première section, nous rappellerons les notions fondamentales de la théorie des réseaux de Petri, dans l'objectif de préciser la classe des réseaux étudiés et de poser sans ambiguïté les notations mathématiques que nous utiliserons par la suite. Ces rappels n'iront pas sans quelques remaniements dans la formulation de la règle de fonctionnement des réseaux. Sans en changer les principes, nous dégagerons clairement sa *définition algébrique* (par le biais de la relation binaire d'accessibilité) de son *interprétation intuitive* comme changement d'état d'automate. Cet éclaircissement se révélera essentiel pour comprendre le problème de la formalisation : il apparaîtra par exemple que la notion de *grammaire* associée à un réseau aboutit en fait à paraphraser la relation d'accessibilité par une autre relation binaire strictement analogue. Nous verrons cependant que comparée à la représentation algébrique habituelle, la notion de grammaire apporte une syntaxe plus efficace, dont les principes préfigurent ceux que nous suivrons pour traduire les réseaux

par des formules de logique. Par ailleurs, nous développerons la notion de *marquage de sortie* d'une séquence de transitions, duale de celle de *marquage d'entrée* développée par HACK pour exprimer le seuil qu'un marquage doit atteindre pour qu'une séquence soit franchissable. Ultérieurement, nous serons alors en mesure de considérer les transitions et les séquences selon la même abstraction : une implication linéaire.

Dans la deuxième section, nous établirons un état de l'art technique et critique de tous les travaux publiés (à notre connaissance) sur les liens entre les réseaux de Petri et la logique linéaire. Nous dégagerons trois grandes approches de traduction logique d'un réseau — comme un *théorie tensorielle*, comme une *formule multiplicative-exponentielle*, et comme un *modèle sémantique* — bien que chacune emprunte de nombreuses idées communes, qui sont propres à l'expressivité des connecteurs. Invariablement, un marquage sera traduit par une *conjonction multiplicative* d'atomes, chacun correspondant à une place, et une transition par une *implication linéaire* entre marquages préfixée par le connecteur exponentiel *bien sûr*. En faisant abstraction des formalismes tiers souvent employés par les auteurs (théorie des catégories, systèmes de réécriture, etc.), nous tâcherons d'exposer les principes, les résultats, et les limites de ces trois grandes approches, en les mettant en œuvre sur des exemples simples.

Dans la dernière section de ce chapitre, nous proposerons notre traduction, dont l'originalité consiste à considérer les transitions comme des ressources d'action ordinaires, c'est-à-dire en ôtant à leur formule le connecteur *bien sûr*. La consommation de leurs exemplaires traduit alors l'occurrence d'autant de ces transitions dans une séquence de franchissement. Cette idée nous permettra d'exprimer d'une manière plus fine les différentes relations d'accessibilité, en abordant leurs complexités d'une manière progressive, tout en restant dans le pur calcul des séquents linéaires. Via un premier théorème d'équivalence, nous traduirons la relation d'*accessibilité directe* (c'est-à-dire par franchissement d'une seule transition) par la prouvabilité d'un séquent multiplicatif dont l'une des prémisses est l'implication linéaire traduisant cette transition. Ensuite, nous traiterons le cas de l'accessibilité par franchissement d'une séquence de transitions de la manière suivante : nous démontrerons un deuxième théorème d'équivalence entre l'existence d'une séquence de transitions réalisant l'accessibilité entre deux marquages et dont l'image commutative est connue avec la prouvabilité d'un séquent multiplicatif dont les prémisses contiennent autant d'occurrences des implications traduisant les transitions que les composantes de cette image commutative. Pour établir ces deux résultats, nous utiliserons à la fois des méthodes syntaxiques et sémantiques, éclairant plusieurs facettes qui semblent n'avoir pas encore été étudiées des liens entre les réseaux de Petri et la logique linéaire. En particulier, nous montrerons que l'équation algébrique fondamentale de la théorie des réseaux de Petri peut être vue comme un corollaire du critère d'équilibrage des séquents multiplicatifs. Pour terminer, nous aboutirons au résultat le plus connu traduisant la relation d'accessibilité générale (c'est-à-dire lorsque la séquence de transitions n'est pas précisée) entre deux marquages par un séquent multiplicatif-exponentiel. La clarté de notre approche apparaîtra dans la simplicité de la démonstration de ce théorème, cette dernière s'appuyant sur le théorème de finitude démontré au chapitre précédent et sur le théorème de traduction de l'accessibilité par séquence.

V.1 Rappels sur la théorie des réseaux de Petri

Nous reprenons en détail les définitions de base de la théorie des réseaux de Petri, c'est-à-dire les notions de *structure*, de *marquage* et de *fonctionnement*. Ce travail nous a semblé nécessaire car il existe de nombreuses variantes dans la définition des réseaux de Petri — variantes qui touchent non seulement aux notations employées, mais aussi aux notions de bases. Ainsi, dans la tradition des cours de Hambourg (1979) et de Bad Honnef (1986), issue des premiers travaux de PETRI, le fonctionnement des réseaux, qu'ils soient élémentaires (*elementary net systems*) ou non (*place/transition systems*), est conditionné par des capacités limitées associées aux places [36, 41, 72, 67, 64]. Définie comme primitive, cette notion de capacité s'avère parfois utile dans la pratique, certes, mais pas systématiquement, tout du moins en ce qui concerne la modélisation des systèmes à événements discrets. Sachant qu'une limite de capacité peut être explicitée localement par l'ajout d'une structure très simple (une place complémentaire marquée par la capacité maximale souhaitée), son caractère primitif ne nous semble pas pertinent. En cela, nous suivons la ligne des recherches menées au *Massachusetts Institute of Technology* au cours des années soixante-dix sous l'impulsion d'Anatol HOLT, reposant notamment sur les travaux de Michel HACK et Frederic COMMONER [40, 38, 39]. Plus précisément, nous exposons la classe des *réseaux de Petri généralisés*, dont les définitions sont proposées dans l'ouvrage collectif [9], en apportant au passage quelques contributions pour en mieux comprendre les liens avec la logique linéaire.

V.1.1 Définitions algébriques fondamentales

La première notion fondamentale de la théorie des réseaux de Petri est celle de *structure*. Elle est définie par la donnée d'ensembles finis et d'applications sur ces ensembles.

Définition 1. Une *structure de réseau de Petri* \mathfrak{R} , ou plus simplement un *réseau de Petri*, est un quadruplet $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ tel que :

- \mathcal{P} et \mathcal{T} sont deux ensembles finis disjoints (éventuellement vides), dont les éléments sont appelés respectivement les *places* et les *transitions* du réseau ;
- Pre et $Post$ sont deux applications $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$, dites *d'incidence* respectivement *arrière* et *avant* du réseau.

À cette définition de base, on ajoute les éléments suivants dont l'usage est commode.

Définition 2. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri.

- on pose $C \stackrel{\text{def}}{=} Post - Pre$, l'application dite *d'incidence* du réseau ;
- pour toute transition $t \in \mathcal{T}$, on note $\bullet t$ et t^\bullet les deux applications $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $\bullet t \stackrel{\text{def}}{=} Pre(\cdot, t)$ et $t^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} Post(\cdot, t)$; on les appelle respectivement *entrée* et *sortie* de la transition ;
- pour toute transition $t \in \mathcal{T}$, on note \bar{t} la fonction caractéristique sur \mathcal{T} de l'ensemble singleton $\{t\}$, c'est-à-dire l'application $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour toute transition $t' \in \mathcal{T}$, si $t' = t$ alors $\bar{t}(t') \stackrel{\text{def}}{=} 1$ et sinon $\bar{t}(t') \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

La deuxième notion fondamentale relative aux réseaux de Petri est celle de *marquage*, définie algébriquement comme une application.

Définition 3. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau. Notons \mathfrak{M} l'ensemble des applications $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$. Un **marquage** de \mathfrak{R} est un élément $m \in \mathfrak{M}$; pour toute place $p \in \mathcal{P}$, l'entier $m(p)$ est appelé le nombre de **marques** dans \mathcal{P} , ou plus simplement son **marquage**. Tout couple $\mathfrak{N} = (\mathfrak{R}, m)$ est appelé **réseau marqué**.

En fait, une application marquage définit un multi-ensemble sur \mathcal{P} dont elle est la fonction caractéristique. On note \geq la relation d'*ordre produit* sur \mathfrak{M} , c'est-à-dire l'ordre partiel tel que : pour tout couple de marquages $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$, on a $m \geq m'$ si et seulement si pour toute place $p \in \mathcal{P}$, on a $m(p) \geq m'(p)$. Par ailleurs, remarquons que pour toute transition t , les applications $\bullet t$ et $t \bullet$ sont des marquages du réseau. Précisons bien que \mathfrak{M} n'est pas l'ensemble des marquages accessibles d'un réseau pour un marquage initial donné m_0 — ensemble qu'on note $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}, m_0)$. \mathfrak{M} est l'ensemble de *tous* les marquages possibles pour une structure de réseau \mathfrak{R} donnée.

La troisième notion fondamentale de la théorie des réseaux de Petri est celle de *fonctionnement*. Elle est définie algébriquement par des relations binaires entre marquages.

Définition 4. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri, et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. Pour toute transition $t \in \mathcal{T}$, on définit sur \mathfrak{M} la relation binaire \xrightarrow{t} telle que pour tout $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$, on ait à la fois $m \geq \bullet t$ et $m' = m - \bullet t + t \bullet$, c'est-à-dire :

$$m \xrightarrow{t} m' \quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad \begin{cases} m(p) \geq Pre(p, t) \\ m'(p) = m(p) - Pre(p, t) + Post(p, t) \end{cases}$$

Lorsque $m \geq \bullet t$, on dit que t est **franchissable** depuis m ; on dit aussi qu'elle est **sensibilisée** par m . Si de plus $m' = m - \bullet t + t \bullet$, on dit que m' est **directement accessible** depuis m par **franchissement** de t .

Appelons *critère d'accessibilité directe* cette dernière équation, puisque sa vérification est une condition nécessaire mais non suffisante à l'accessibilité entre deux marquages.

Les ensembles \mathcal{P} et \mathcal{T} étant finis, les applications Pre , $Post$ et C admettent des notations matricielles. Par convention, on indexe les lignes par les places de \mathcal{P} et les colonnes par les transitions de \mathcal{T} . Quant aux marquages, ils correspondent à des vecteurs indexés par \mathcal{P} , et les applications \bar{t} à des vecteurs indexés par \mathcal{T} . On a les égalités $\bullet t = Pre \cdot \bar{t}$ et $t \bullet = Post \cdot \bar{t}$. Le critère d'accessibilité directe s'écrit $m = m' + C \cdot \bar{t}$, le facteur $C \cdot \bar{t}$ représentant la *variation de marquage* de m à m' .

V.1.2 Représentation graphique et interprétation

Un réseau de Petri définit implicitement un *graphe biparti valué* dont les *nœuds* sont les places et les transitions, respectivement représentées par des cercles et des rectangles, et dont les *arcs valués* sont données par les applications Pre et $Post$, la valuation zéro exprimant l'absence d'arc. On représente tout marquage par une distribution de petits disques noirs (les marques) dans les places du réseau.

L'interprétation usuelle d'un réseau de Petri marqué est celle d'un *automate*. Chaque place $p \in \mathcal{P}$ est vue comme une variable entière positive dont la valeur est $m(p)$. Tout marquage d'un réseau représente un *état* de l'automate, et donc l'ensemble \mathfrak{M} est son *espace d'états*. Les transitions $t \in T$ et les applications Pre et $Post$ expriment les possibilités de *changement d'état* de l'automate. C'est pourquoi la définition 4 est appelée *règle de fonctionnement* des réseaux de Petri, ou encore *règle de franchissement* des transitions : depuis un marquage m donné, si une transition t est franchissable, alors le franchissement de t permet d'engendrer un *nouveau* marquage m' tel que $m \xrightarrow{t} m'$. Graphiquement, le *franchissement de t* consiste, dans chaque place $p \in P$, à supprimer $Pre(p, t)$ marques et à en créer $Post(p, t)$. Considérons maintenant pour $I \subseteq \mathbb{N}$ une suite $(m_i)_{i \in I}$ de \mathfrak{M} telle que tout marquage m_i est directement accessible depuis son prédécesseur m_{i-1} . Une telle suite apparaît comme une succession d'états de l'automate, autrement dit un *scénario* de fonctionnement à partir de l'*état initial*, le premier élément de la suite.

Le franchissement d'une transition se conçoit donc comme une *opération dynamique* sur les marquages d'un réseau de Petri. Remarquons cependant que la notion de *temps*, qui préexiste à toute idée de dynamique, n'est pas explicitée. Aucune *mesure* temporelle n'est introduite dans la définition 4, si bien que rien ne précise *quand* aura lieu le franchissement d'une transition franchissable. En revanche, on considère que le franchissement d'une transition est une opération *atomique*, c'est-à-dire indivisible en étapes. De plus, on admet que la règle de fonctionnement des réseaux de Petri a les deux propriétés suivantes : primo, elle est *asynchrone* (autrement dit, plusieurs transitions franchissables ne peuvent être franchies simultanément, mais seulement une à la fois) ; secundo, elle est *indéterministe* (autrement dit, si plusieurs transitions sont franchissables, rien ne précise laquelle sera franchie). Néanmoins, tous ces aspects restent implicites. Ils ont trait à l'interprétation des réseaux de Petri comme des automates et non à leur définition mathématique.

Exemple. Soit le réseau de Petri marqué défini par les ensembles $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ et les applications :

$$Pre = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad Post = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad m_0 = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sa représentation graphique est donnée par la figure V.1.

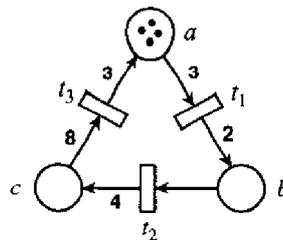


Figure V.1

En voici un scénario de fonctionnement, c'est-à-dire une suite de marquages successivement accessibles par franchissements de transitions :

$$\begin{array}{ccccccc} m_0 & & m_1 & & m_2 & & m_3 & & m_4 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{t_1} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{t_2} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \xrightarrow{t_2} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} & \xrightarrow{t_3} & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

V.1.3 Conception comme un système de réécriture

Dans la pratique, on constate que plus les réseaux étudiés sont grands (c'est-à-dire, plus les ensembles \mathcal{P} et \mathcal{T} sont de cardinaux élevés), plus les matrices des applications *Pre* et *Post* sont creuses (c'est-à-dire, plus leurs coefficients nuls sont nombreux). Les notations matricielles y perdent en efficacité, et l'on préfère alors concevoir les réseaux comme des *systèmes semi-thueiens de réécriture de mots commutatifs*, dont le formalisme issu de la théorie des langages.

Pour traduire un réseau de Petri en un système de réécriture, on regarde \mathcal{P} , l'ensemble des places du réseau, comme l'alphabet générateur d'un monoïde libre commutatif. Un marquage apparaît alors comme un *mot* de ce monoïde. On le représente canoniquement en concaténant ses lettres par ordre lexical et en factorisant les occurrences multiples de chaque lettre en une seule, en indiquant en exposant le nombre d'occurrences factorisées. Les lettres d'exposant nul se réduisent à l'élément neutre du monoïde, par convention non représenté. Par exemple, la forme canonique de *baba* est a^2b^2 . L'exposant d'une lettre exprime donc le nombre de marques dans la place associée à cette lettre. Pour décrire la structure du réseau, on associe à chaque transition $t \in T$ une règle de réécriture du mot $\bullet t$ (le marquage entrée de t) en le mot $t \bullet$ (le marquage sortie de t), ce que nous notons $\bullet t \leftrightarrow t \bullet$. Le fonctionnement s'exprime alors de la manière suivante : une transition t est franchissable pour un marquage m si $\bullet t$ est un *sous-mot* de m ; son franchissement consiste à remplacer dans le mot m le sous-mot $\bullet t$ par le sous-mot $t \bullet$, pour obtenir un nouveau mot m' . En fait, la définition d'une transition t comme une règle de réécriture reformule exactement la relation binaire \xrightarrow{t} . On peut donc noter cette dernière aussi \xleftrightarrow{t} .

Dans ce formalisme des systèmes de réécriture, le problème des matrices creuses ne se pose pas puisque les places vides ne sont pas représentées dans les marquages. Cependant, nous n'y trouvons pas une définition mathématique originale de la règle de fonctionnement. L'opération dynamique de réécriture n'est qu'une interprétation d'une relation binaire entre mots, strictement analogue à celle d'accessibilité sur les marquages.

Exemple. Reprenons le réseau représenté figure V.1. Sa formalisation en système de réécriture est définie par :

$$t_1 : a^3 \leftrightarrow b^2 \quad t_2 : b \leftrightarrow c^4 \quad t_3 : c^8 \leftrightarrow a^3 \quad m_0 = a^4$$

Le même scénario de fonctionnement que précédemment s'écrit :

$$a^4 \xleftrightarrow{t_1} ab^2 \xleftrightarrow{t_2} abc^4 \xleftrightarrow{t_2} ac^8 \xleftrightarrow{t_3} a^4$$

En comparaison, la notation matricielle apparaît déjà moins efficace, pour un petit réseau comme celui-ci. De plus, elle ne montre pas la similitude de forme entre un scénario de fonctionnement et une simple transition — par exemple ici $t_1 t_2 t_2 t_3 : a^4 \mapsto a^4$. En revanche, la notation matricielle a l'avantage de s'appuyer sur les méthodes de calcul de l'algèbre linéaire, avec toutes les opérations de matrices (inversion, triangulation, etc.) qui sont utiles pour résoudre de nombreux problèmes d'analyse.

V.1.4 Accessibilité entre marquages dans un réseau

La notion intuitive de scénario de fonctionnement est évidemment très importante. Formellement, il s'agit d'une suite de marquages, mais un tel objet étant gros, on ne retient le plus souvent que les deux marquages extrêmes et la suite des noms des transitions qui permettent d'atteindre le dernier depuis le premier. On introduit donc la notion de *séquence de transitions* (construite par concaténation) et on définit la relation d'*accessibilité par franchissement d'une séquence de transitions* basée sur la composition de relations d'accessibilité directe. De plus, on définit la relation d'*accessibilité générale*, c'est-à-dire par une séquence de transitions non spécifiée, comme la fermeture réflexive et transitive de celle d'accessibilité directe par franchissement d'une transition quelconque.

Définition 5. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri. On note \mathcal{T}^* le monoïde libre engendré par \mathcal{T} , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de \mathcal{T} , muni de la loi de concaténation (notée par juxtaposition), dont l'élément neutre est la suite vide λ . On appelle *séquence de transitions* de \mathfrak{R} toute suite $(s_i)_{1 \leq i \leq l}$ élément de \mathcal{T}^* , le nombre $l \in \mathbb{N}$ étant sa *longueur*.

Lorsque sa longueur n'importe pas, on note simplement s une séquence de transition. On écrit ss' pour exprimer la concaténation de deux séquences. L'une des caractéristiques les plus importantes d'une séquence est le nombre d'occurrences de chaque transition qui la composent, d'où la définition qui suit.

Définition 6. Soit $(s_i)_{1 \leq i \leq l}$ une séquence de transitions d'un réseau de Petri \mathfrak{R} . On appelle *image commutative* de s l'application $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ notée \bar{s} telle que :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad \bar{s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^l \bar{t}(s_i)$$

On a la propriété que pour toutes séquences s_1 et s_2 de \mathcal{T}^* , l'image commutative de $s_1 s_2$ est la somme de celles de s_1 et s_2 , c'est-à-dire $\overline{s_1 s_2} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$. La représentation matricielle de \bar{s} est un vecteur indexé par \mathcal{T} , qu'on appelle *vecteur caractéristique* de s .

On définit maintenant la notion d'accessibilité par franchissement d'une séquence de transitions, comme une chaîne de relations d'accessibilité directe.

Définition 7. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. Pour toute séquence de transitions $(s_i)_{1 \leq i \leq l}$ de \mathcal{T}^* , la relation binaire sur \mathfrak{M} d'*accessibilité par franchissement* de s , notée $m \xrightarrow{s} m'$, est vérifiée si et seulement s'il existe une suite de marquages $(m_i)_{1 \leq i \leq l+1}$ de \mathfrak{M} telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad m_i \xrightarrow{s_i} m_{i+1} \quad \text{et} \quad m = m_1, \quad m' = m_{l+1}$$

Cette relation généralise par composition celle d'accessibilité directe par franchissement d'une transition — une transition n'étant jamais qu'une séquence de longueur 1. On a les propriétés suivantes.

Propriétés 1. Soit m_1, \dots, m_4 quatre marquages d'un réseau \mathfrak{R} et s, s' deux séquences.

1. Si $m_1 \xrightarrow{s} m_2$, alors $(m_1 + m_3) \xrightarrow{s} (m_2 + m_3)$.
2. Si $m_1 \xrightarrow{s} m_2$ et $m_3 \xrightarrow{s'} m_4$, alors $(m_1 + m_3) \xrightarrow{s''} (m_2 + m_4)$ avec $s'' = s s'$ ou $s' s$.

Les propriétés réciproques sont fausses.

Enfin, on définit sur \mathfrak{M} la relation binaire d'accessibilité au sens général, c'est-à-dire sans la donnée explicite d'une séquence de transition.

Définition 8. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. Soit $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$. On dit que m' est **accessible** depuis m , ce que l'on note $m \rightarrow m'$, si et seulement s'il existe une séquence $s \in T^*$ telle que $m \xrightarrow{s} m'$.

Cette relation binaire est la fermeture réflexive et transitive des relations d'accessibilité directe du réseau : quels que soient les marquages m, m' et m'' , on a d'une part $m \rightarrow m$, et d'autre part si $m \rightarrow m'$ et $m' \rightarrow m''$, alors $m \rightarrow m''$.

V.1.5 Caractérisation d'une séquence de transitions

En appliquant le critère d'accessibilité directe à chaque transition de la séquence dans la définition 7, on obtient l équations $m_i = m_{i+1} + C.\bar{s}_i$ dont la somme donne, après simplification télescopique des $l - 1$ marquages intermédiaires m_2, \dots, m_l :

$$m_{l+1} = m_1 + \sum_{i=1}^l C.\bar{s}_i \quad \text{c'est-à-dire,} \quad m' = m + C.\bar{s}$$

puisque $\sum C.\bar{s}_i = C.\sum \bar{s}_i = C.\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_l$. Ce résultat s'appelle l'équation fondamentale des réseaux de Petri, où le facteur $C.\bar{s}$ représente la variation de marquage de m à m' . En notant $\delta m_{\bar{s}}$ ce facteur (c'est une fonction $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$), nous avons :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad m'(p) = m(p) + \delta m_{\bar{s}}(p) \quad \text{avec} \quad \delta m_{\bar{s}}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^l (-Pre(p, s_i) + Post(p, s_i))$$

Nous appelons également cette équation le *critère d'accessibilité par franchissement d'une séquence*, qui généralise celui d'accessibilité directe par franchissement d'une transition. Il s'agit bien entendu d'une condition nécessaire, mais non suffisante, car il faut aussi prendre en compte les l conditions de sensibilisation des transitions de s , à voir que pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, on ait $m_i \geq \bullet s_i$. Or pour $i \geq 2$, on a $m_i = m_1 + C.\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_{i-1}$, et on peut aussi écrire $m_1 = m_l + C.\bar{\lambda}$, donc on en déduit les inégalités sous la forme générale :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad m \geq \bullet s_i - C.\overline{(s_j)_{0 \leq j \leq i-1}} \quad \text{en posant } s_0 = \lambda$$

Par extension de la définition 4, la séquence s est *franchissable* depuis m si et seulement si m vérifie toutes ces inégalités. On parle également de *pré-condition* de franchissement. De même, on peut définir sa *post-condition* de franchissement par les inégalités :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad m' \geq s_{l+1-i}^{\bullet} + C.\overline{(s_j)_{l+2-i \leq j \leq l+1}} \quad \text{en posant } s_{l+1} = \lambda$$

d'où la définition suivante.

Définition 9. Soit $(s_i)_{1 \leq i \leq l} \in \mathcal{T}^*$ un séquence de transitions de longueur l d'un réseau. On pose $s_0 = s_{l+1} = \lambda$. On appelle **marquages d'entrée et de sortie** de s les deux fonctions $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ notées $\bullet s$ et s^{\bullet} — ou encore $Pre(\cdot, s)$ et $Post(\cdot, s)$ — telles que :

$$\begin{aligned} \bullet s &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\bullet s_i - C.\overline{(s_j)_{0 \leq j \leq i-1}}, 1 \leq i \leq l\} \\ s^{\bullet} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{s_{l+1-i}^{\bullet} + C.\overline{(s_j)_{l+2-i \leq j \leq l+1}}, 1 \leq i \leq l\} \end{aligned}$$

Le calcul de ces deux expressions est beaucoup plus complexe que celui de la variation de marquage $\delta m_{\bar{s}}$, lequel est indépendant de l'ordre des transitions dans s . Là, il faut procéder transition par transition successivement dans s , en calculant des maxima pour chaque composante $p \in \mathcal{P}$ individuellement. En décomposant une séquence s en ut où t est la dernière transition de s , on a les équations récursives :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \begin{cases} \bullet(ut)(p) = Pre(p, ut) = Pre(p, u) + \max\{0, Pre(p, t) - Post(p, u)\} \\ (ut)^{\bullet}(p) = Post(p, ut) = Post(p, t) + \max\{0, Post(p, u) - Pre(p, t)\} \end{cases}$$

En simplifiant ces équations, et en explicitant le cas initial $s = \lambda$, on obtient la définition récursive de $\bullet s$ et s^{\bullet} — équivalente à la définition 9 — telle que, pour toute place $p \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \text{si } s = \lambda \quad \text{alors } \bullet s(p) = 0 \quad \text{et } s^{\bullet}(p) = 0 \\ \text{et si } s = ut \quad \text{alors } \begin{cases} \bullet s(p) = \max\{Pre(p, u), Pre(p, t) - \delta m_{\bar{u}}(p)\} \\ s^{\bullet}(p) = \max\{Post(p, t), Post(p, u) + \delta m_{\bar{t}}(p)\} \end{cases} \end{aligned}$$

L'expression de $\bullet s$ est la plus usitée : on la trouve notamment dans [39] et [9], contrairement à celle de s^{\bullet} que nous venons juste d'introduire. Une explication de cette lacune tient dans la formulation du théorème suivant, qui généralise à des séquences la règle de franchissement des transitions d'un réseau. Seule la fonction $\bullet s$ y intervient.

Théorème 1. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. Quels que soient $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$ et $s \in \mathcal{T}^*$, on a :

$$m \xrightarrow{s} m' \quad \Leftrightarrow \quad m \geq \bullet s \quad \text{et} \quad m' = m + C.\bar{s}$$

Les développements qui précèdent ce théorème tiennent lieu de démonstration. \square

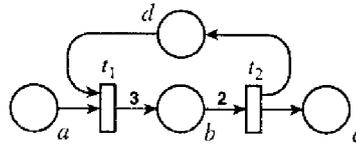


Figure V.2

Exemple. Soit le réseau \mathfrak{R} représenté figure V.2. On considère la séquence $s = t_1 t_2$. Calculons les fonctions $\bullet s$ et s^\bullet . Quelle que soit la place p dans $\{a, b, c, d\}$, on a :

$$\begin{aligned}\bullet s(p) &= \max\{Pre(p, t_1), Pre(p, t_2) - (Post(p, t_1) - Pre(p, t_1))\} \\ s^\bullet(p) &= \max\{Post(p, t_2), Post(p, t_1) + (Post(p, t_2) - Pre(p, t_2))\}\end{aligned}$$

d'où les calculs :

$$\begin{aligned}\bullet s(a) &= \max\{1, 0 - (0 - 1)\} = 1 & s^\bullet(a) &= \max\{0, 0 + (0 - 0)\} = 0 \\ \bullet s(b) &= \max\{0, 2 - (3 - 0)\} = 0 & s^\bullet(b) &= \max\{0, 3 + (0 - 2)\} = 1 \\ \bullet s(c) &= \max\{0, 0 - (0 - 0)\} = 0 & s^\bullet(c) &= \max\{1, 0 + (1 - 0)\} = 1 \\ \bullet s(d) &= \max\{1, 0 - (0 - 0)\} = 1 & s^\bullet(d) &= \max\{1, 0 - (0 - 0)\} = 1\end{aligned}$$

Autrement dit, en système de réécriture, la séquence s s'écrit : $ad \xrightarrow{s} bcd$

Le théorème 1 est le point de départ de l'étude du problème général de l'accessibilité entre marquages. Étant donné un réseau \mathfrak{R} et deux de ses marquages m et m' , pour déterminer si $m \rightarrow m'$, il faut traiter les deux problèmes suivants.

1. Résoudre l'équation $C.\sigma = m' - m$ pour trouver un vecteur caractéristique σ .
2. Chercher un séquence s de vecteur caractéristique égal à σ et telle que $m \geq \bullet s$.

Le premier problème relève de questions relativement simples de programmation mathématique ; la seule difficulté tient au caractère entier et positif des composantes de σ , ce qui rend quand même l'algorithme NP-complet. En regard, le deuxième problème est beaucoup plus complexe et nous n'en détaillerons pas plus les aspects qui sortent du cadre de notre travail. Tous les rappels précédents sont largement suffisants pour aborder l'examen des différentes traductions des réseaux de Petri en logique linéaire.

V.2 Étude technique et critique des traductions proposées

En introduction de la thèse, nous avons présenté une chronologie des publications sur les relations entre la logique linéaire et les réseaux de Petri (cf. section I.4). Pourtant, à plusieurs titres, nous ne pouvons en garantir absolument l'authenticité. Premièrement, en dépit de demandes aux auteurs, nous n'avons pas eu accès à certaines sources, par exemple la thèse de BROWN [11] et le premier rapport technique d'ASPERTI [4]. Deuxièmement, plusieurs publications sont datées de la même année, et s'autoréfèrent via des communications « privées ». Troisièmement, trop rares sont les auteurs qui se consacrent à une étude bibliographique approfondie de « l'état de l'art », avant de présenter leurs

travaux. Par conséquent, plutôt que suivre la chronologie des publications en se souciant de l'exacte paternité des idées, nous préférons exposer les trois principales approches que nous distinguons de traduction d'un réseau de Petri en logique linéaire, à savoir comme :

- une théorie linéaire tensorielle,
- une formule multiplicative-exponentielle,
- un modèle pour la logique linéaire.

Dans cette distinction, nous faisons abstraction des éventuels formalismes tiers utilisés par les auteurs (théorie des catégories, systèmes de réécriture, etc.), qui nous éloignent de notre problématique. En présentant ces trois approches, nous nous autorisons à changer certaines notations originales des auteurs, non seulement afin de les rendre homogènes avec les nôtres, mais aussi pour dissiper certaines ambiguïtés liées aux surcharges entre les notations propres aux réseaux de Petri et celles propres à la logique linéaire.

V.2.1 Traduction en une théorie linéaire tensorielle

Cette approche est la plus suivie. Elle a été initiée dès 1987 par ASPERTI [4] et reprise par GEHLOT et GUNTER [21, 20], ainsi que MARTÍ-OLIET et MESEGUER [57, 58]. En toute généralité, elle identifie, pour un réseau donné :

- un jeton dans une place a à un atome propositionnel A ,
- un marquage m à une conjonction multiplicative M d'atomes, modulo ses variantes associatives et commutatives,
- une transition à un séquent axiome propre de la forme $M_1 \vdash M_2$ où M_1 et M_2 sont respectivement les formules des marquages d'entrée et de sortie de la transition.

Ainsi, une structure de réseau de Petri correspond à une théorie linéaire tensorielle, c'est-à-dire un ensemble de séquents prouvables du fragment tensoriel, ensemble qui est entièrement déterminé par les axiomes propres correspondant aux transitions. Prenons par exemple le réseau représenté la figure V.3.

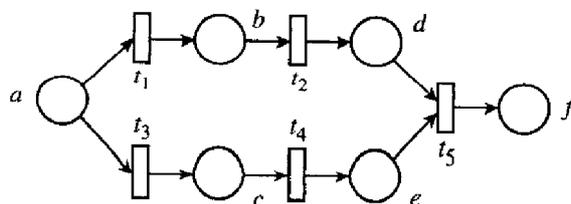


Figure V.3

Il est traduit par les axiomes propres suivants :

$$A \vdash B \quad A \vdash C \quad B \vdash D \quad C \vdash E \quad D \otimes E \vdash F$$

$$\frac{
\begin{array}{c}
\frac{D \vdash D \quad \text{id} \quad \overbrace{C \vdash E}^{t_1}}{D, C \vdash D \otimes E} \otimes_R \\
\vdots \\
\frac{A, A \vdash D \otimes C \quad \frac{D \otimes C \vdash D \otimes E}{D \otimes C \vdash D \otimes E} \otimes_L}{A, A \vdash D \otimes E} \text{cut} \\
\overbrace{D \otimes E \vdash F}^{t_5} \\
\hline
A, A \vdash F \quad \text{cut}
\end{array}
}{A, A \vdash F} \text{cut}$$

Mais étant donné le parallélisme du réseau de la figure V.3, d'autres séquences de franchissement réalisent la même accessibilité. En concordance, le séquent $A, A \vdash F$ admet aussi plusieurs preuves, par exemple la suivante, beaucoup plus simple que la précédente :

$$\frac{
\begin{array}{c}
\overbrace{A \vdash B}^{t_1} \quad \overbrace{B \vdash D}^{t_2} \\
\hline
A \vdash D \quad \text{cut} \\
\overbrace{A \vdash C}^{t_3} \quad \overbrace{C \vdash E}^{t_4} \\
\hline
A \vdash E \quad \text{cut} \\
\hline
A, A \vdash D \otimes E \quad \otimes_R \\
\overbrace{D \otimes E \vdash F}^{t_5} \\
\hline
A, A \vdash F \quad \text{cut}
\end{array}
}{A, A \vdash F} \text{cut}$$

Cette preuve correspond en fait à un scénario de fonctionnement du réseau où certaines transitions peuvent être franchies *en parallèle*, c'est-à-dire dans un ordre indifférent. En traduisant les applications de la règle \otimes_R — dont aucun séquent prémisses n'est un axiome identité ou encore de la forme $G, H \vdash G \otimes H$ — par l'opérateur de composition parallèle des transitions \parallel (dit *shuffle* en anglais), on obtient l'expression $((t_1 t_2) \parallel (t_3 t_4)) t_5$.

À partir de ces idées, la thèse de GEHLOT [20] développe un algorithme de « réduction des coupures », défini comme une variante du processus d'élimination des coupures généralisée dans le calcul des séquents avec des axiomes propres. L'objectif consiste à démontrer l'assertion suivante : la réduction des coupures d'une preuve traduit la *parallélisation* « maximale » de la séquence de franchissements correspondant à cette preuve. Par exemple, la réduction des coupures appliquée à la première preuve ci-dessus donne la seconde preuve, beaucoup plus simple, où la seule coupure restante est non éliminable. Sa séquence correspondante $((t_1 t_2) \parallel (t_3 t_4)) t_5$ apparaît comme la parallélisation « maximale » de $t_1 t_3 t_2 t_4 t_5$, compte tenu de la structure du réseau. Pour atteindre cet objectif, l'auteur définit une sémantique à la réduction des coupures en termes de séquences de franchissements, en tâchant notamment de se dégager des équivalences entre les preuves qui correspondent à une même séquence. Toutefois, notre collègue L. A. KÜNZLE a montré dans sa thèse de doctorat [44] des limites au travail de GEHLOT. Il a notamment exhibé un contre-exemple fondamental à l'assertion que l'algorithme de réduction des coupures correspond à la parallélisation « maximale » d'une séquence de franchissement. Considérons le réseau de la figure V.4. Sa structure purement séquentielle pourrait laisser penser que le franchissement de la séquence $t_1 t_2$ ne peut être parallélisée. En fait, il n'en est rien, car tout dépend du marquage initial. Si ce dernier se résume à la formule A , il est clair que les deux transitions doivent être franchies dans cet ordre, et effectivement, la coupure dans la preuve :

$$\frac{
\overbrace{A \vdash B}^{t_1} \quad \overbrace{B \vdash C}^{t_2}
}{A \vdash C} \text{cut}$$

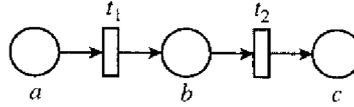


Figure V.4

ne peut être réduite en aucune façon. En revanche, si le marquage initial est donné par $A \otimes B$, alors la séquence $t_1 t_2$ est parallélisable en $t_1 \parallel t_2$, alors que dans la preuve suivante du séquent $A \otimes B \vdash C \otimes B$, qui correspond aux franchissements successifs de t_1 et t_2 dans le contexte du marquage b , la coupure est montée au maximum et ses deux séquents prémisses sont des axiomes propres.

$$\frac{\frac{\overbrace{A \vdash B}^{t_1} \quad \overbrace{B \vdash C}^{t_2}}{A \vdash C} \text{ cut} \quad \frac{}{B \vdash B} \text{ id}}{A, B \vdash C \otimes B} \otimes_R}{A \otimes B \vdash C \otimes B} \otimes_L$$

Cette coupure est donc irréductible par l'algorithme de GEHLOT. Pourtant, il existe bel et bien une preuve plus simple et sans coupure du séquent $A \otimes B \vdash C \otimes B$, qui correspond aux franchissements de t_1 et t_2 dans un ordre indifférent :

$$\frac{\overbrace{A \vdash B}^{t_1} \quad \overbrace{B \vdash C}^{t_2}}{A, B \vdash B \otimes C} \otimes_R}{A \otimes B \vdash B \otimes C} \otimes_L$$

Plus généralement, nous restons réservés quant à l'approche de GEHLOT, pour au moins deux raisons. La première concerne le choix de travailler avec des *théories linéaires*, sur lesquelles fort peu de recherches ont été menées. Le contre-exemple de KÜNZLE montre que transposer des résultats comme l'élimination des coupures du calcul des séquents linéaires sans axiomes à celui avec axiomes est une tâche plus délicate qu'il n'y paraît. De plus, l'introduction d'axiomes propres prive le calcul des séquents de certaines propriétés d'une grande utilité pratique, par exemple les critères de prouvabilité du fragment multiplicatif. La deuxième raison de notre réserve tient au fait que GEHLOT semblent sous-estimer la complexité de la notion de parallélisme dans les réseaux de Petri, qui est *dynamique* comme beaucoup d'autres notions relatives au fonctionnement (par exemple aussi, celle de conflit). Or les calculs de l'auteur n'opèrent que par compositions *structurelles* de transitions ; ils ne permettent aucune distinction, dans un séquent tensoriel, entre le marquage d'entrée d'une séquence et le marquage contextuel du réseau.

Une fois jetées les bases de la correspondance entre un réseau de Petri et une théorie linéaire tensorielle, la recherche s'est orientée sur l'exploitation de l'expressivité des autres connecteurs linéaires, dans le but de décortiquer d'autres aspects du fonctionnement des réseaux. Déjà dans sa dernière section, l'article [21] de GUNTER et GEHLOT suggère comment utiliser les connecteurs additifs $\&$ et \oplus , pour décrire les *conflits*. Soit par exemple

les axiomes propres définis par le réseau figure V.5.

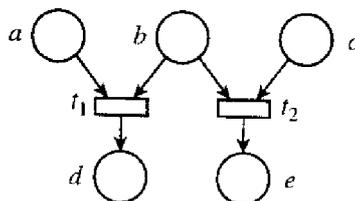


Figure V.5

Dans le fragment multiplicatif-additif augmenté de ces axiomes propres, on prouve le séquent $A \otimes B \otimes C \vdash (D \otimes C) \& (A \otimes E)$. Dans sa conclusion, la conjonction additive $\&$ connecte les deux alternatives du conflit engendré par le marquage $A \otimes B \otimes C$.

De leur côté, ASPERTI, FERRARI et GORRIERI ont proposé une interprétation des formules implicatives comme l'expression *décomposée* de la consommation des jetons par un franchissement [5]. Prenons l'exemple d'une transition t représentée par l'axiome propre $A \otimes B \vdash C$. Après substitution d'une virgule au connecteur \otimes (par le schéma d'inférences inversant la règle \otimes_L), la règle logique à droite de l'implication linéaire permet la dérivation du séquent $A \vdash B \multimap C$. Ce dernier correspond à une consommation d'un jeton dans la place a indépendamment du marquage de la place b pour le franchissement de t , et la production d'une ressource intermédiaire $B \multimap C$ précédant la production du jeton c ; le jeton a est donc *réservé* pour le franchissement de t . Rappelons qu'une telle opération sort du cadre de la règle de fonctionnement des réseaux de Petri (tout franchissement est atomique), elle apparaît comme l'expression logique d'une décomposition séquentielle d'un franchissement en opérations plus élémentaires de consommation.

Les auteurs montrent que l'introduction des règles de l'implication linéaire dans le fragment tensoriel est conservative: si un séquent tensoriel est prouvable en utilisant ces deux règles, il l'est aussi sans elles, et globalement selon la même sémantique. Autrement dit, toute accessibilité démontrable par décomposition de franchissements d'une séquence peut être démontrée sans décomposition, par la même séquence. Les auteurs exposent également les possibilités de blocages qu'engendre la décomposition des franchissements. Pour le réseau de la figure V.5 ci-dessus, le séquent $B \otimes C \vdash (A \multimap D) \otimes C$ est prouvable. En se réservant le jeton dans la place b , la transition t_1 empêche le franchissement de t_2 qui était validée par le marquage bc . Plus généralement, cette approche montre que toute transition peut se trouver bloquée par elle-même. En effet, toujours dans cet exemple, le séquent $B \otimes C \vdash (B \multimap E) \otimes (C \multimap E)$ est prouvable. Il correspond à la réservation de chacun des deux jetons b et c par deux occurrences distinctes de la transitions t_2 :

$$\frac{\frac{\overbrace{B, C \vdash E}^{t_2}}{B \vdash C \multimap E} \multimap_R \quad \frac{\overbrace{C, B \vdash E}^{t_2}}{C \vdash B \multimap E} \multimap_R}{B, C \vdash (C \multimap E) \otimes (B \multimap E)} \otimes_R}{B \otimes C \vdash (C \multimap E) \otimes (B \multimap E)} \otimes_L$$

Pour intéressante qu'elle soit, la décomposition d'un franchissement par la règle \multimap_R est cependant limitée de manière asymétrique: elle ne concerne que la *consommation* des

jetons dans les places d'entrée de la transition. Quant à la *production* des jetons dans les places de sortie, elle n'est pas décomposable en formules implicatives sans changer les principes de bases de la traduction. Pour y parvenir, il faudrait employer le connecteur \wp pour représenter l'opération de cumul des jetons. Posons par exemple l'axiome $A \vdash B \wp C$ pour traduire une transition u correspondant habituellement à $A \vdash B \otimes C$. Nous pouvons alors prouver le séquent $\vdash A \multimap B, C$ qui traduit la production anticipée du jeton dans la place c avant toute validation de u , et la production de la ressource intermédiaire $A \multimap B$ qui permettra de produire le jeton dans la place b une fois que sera consommable le jeton dans la place a , nécessaire pour franchir u .

Toujours dans la perspective d'exploiter l'expressivité des autres connecteurs linéaires, MARTÍ-OLIET et MESEGUER ont suggéré dans leur synthèse [58] d'interpréter la négation linéaire d'une formule comme un *dette*, par opposition à sa forme positive, considérée comme une ressource. À leur point de vue, la disjonction *par* apparaît alors comme un opérateur de cumul des dettes, dual du cumul des ressources qu'opère la conjonction *fois*. Mais les auteurs se heurtent au constat suivant :

However, the interaction between resources and debts becomes complicated, as well as this intuitive meaning of \otimes or \wp when both are mixed. [...] The problem is that in standard linear logic, since \otimes and \wp are different connectives, the idea of *cancelling a debt* in general cannot be realized.

En effet, si le séquent prouvable $\mathbf{1} \vdash A \wp A^\perp$ exprime la possibilité générale de « faire un emprunt », il n'est pas toujours possible d'« annuler une dette avec une ressource » duale, car $A \wp A^\perp \not\vdash \mathbf{1}$ et $A \wp A^\perp \not\vdash \perp$. Comment cette difficulté est-elle surmontée?¹

Our solution to this problem is very simple. It is enough to identify the connectives \otimes and \wp and their respective neutral elements $\mathbf{1}$ and \perp . Then, the asymmetry noted above disappears, and the reorganization of resources is just associativity of \otimes . [...] We shall call *cancellative linear logic* to linear logic plus the identifications $\mathbf{1} = \perp$, $\otimes = \wp$.

Pour appliquer cette nouvelle logique aux réseaux de Petri, les auteurs généralisent la règle de fonctionnement en introduisant là un deuxième type de jetons correspondant aux dettes; autrement dit, les marquages peuvent être négatifs. Cette approche ne nous paraît pas satisfaisante. D'un point de vue méthodologique, si l'objectif est d'exploiter l'expressivité de la négation linéaire pour raisonner sur le fonctionnement des réseaux de Petri, n'y-a-t-il d'autre issue que de modifier les deux formalismes? Au moins faudrait-il des avancées théoriques pour justifier une telle démarche. Malheureusement, à ce point de vue, l'identification des connecteurs *fois* et *par* rend le fragment MLL équivalent à l'arithmétique dans $(\mathbb{Z}^n, +)$, où n est le cardinal de l'alphabet \mathcal{A} des atomes. Appliquée aux réseaux de Petri à marquages dans \mathbb{Z} , la logique linéaire « *annulatrice* » se révèle d'une expressivité décevante. Considérons l'exemple de la figure V.6. En notant \otimes le connecteur défini par les règles de \otimes et \wp , on prouve le séquent $A \vdash C$:

$$\frac{\frac{\overbrace{A, D \vdash B}^{t_1}}{A \vdash B, D^\perp} (-)^\perp_R \quad \frac{\overbrace{B \vdash C, D}^{t_2}}{B, R^\perp \vdash C} (-)^\perp_R}{A \vdash B \otimes D^\perp} \otimes_R \quad \frac{\overbrace{B \vdash C, D}^{t_2}}{B, R^\perp \vdash C} (-)^\perp_R \quad \frac{B \otimes D^\perp \vdash C}{B \otimes D^\perp \vdash C} \otimes_L}{A \vdash C} \text{cut}$$

1. Dans l'article original, $\mathbf{1}$ est noté I .

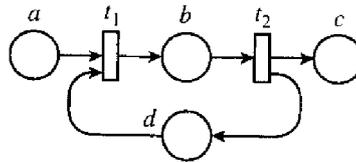


Figure V.6

Puisque un jeton dans la place d peut être consommé avant d'avoir été produit, la séquence de franchissement $t_1 t_2$ est franchissable à partir du marquage réduit à un jeton dans la place a . La boucle sur la place d étant strictement inexpressive, autant la supprimer. Plus généralement, la perte d'expressivité par rapport aux réseaux de Petri classiques est telle que le problème de l'accessibilité entre deux marquages m et m' devient trivial : il se résume à résoudre l'équation fondamentale $C.\sigma = m' - m$ parce que toute séquence de transitions de vecteur caractéristique solution σ réalise l'accessibilité de m à m' .

V.2.2 Traduction en une formule multiplicative-exponentielle

L'alternative à la représentation des transitions par des axiomes propres consiste à introduire dans les séquents des formules implicatives exponentielles. Initiée par BROWN en même temps que les travaux de GUNTER et GEHLOT, cette approche a été poursuivie par CERVESATO et KANOVICH.

Dans l'article [10], BROWN propose de traduire un réseau par une formule. Elle motive son approche, en comparaison à celle d'ASPERTI, dans l'objectif de mieux comprendre les problèmes de « *composition de réseaux* », en appliquant à leurs formules les connecteurs linéaires. Cependant, la méthode de BROWN nous semble fort complexe, et l'article ne nous fournit pas les arguments pour comprendre cette complexité. Pour commencer, l'auteur introduit un fragment spécifique de la logique linéaire intuitionniste, noté \mathcal{L}_1 , qui contient les règles logiques suivantes² (pour leur énoncé, cf. annexe B) :

$$\otimes_L \quad \otimes_R \quad \mathbf{1}_R \quad \multimap_L \quad \&_{L1} \quad \&_{L2} \quad \&_R \quad C!_L \quad W!_L \quad !_L$$

En excluant dissymétriquement les règles $\mathbf{1}_L$, \multimap_R et $!_R$, d'une part les coupures ne sont pas éliminables dans les preuves de ce fragment ; d'autre part LL n'en est pas une extension conservatrice — autrement dit, certains séquents de \mathcal{L}_1 prouvables dans LL ne le sont pas dans \mathcal{L}_1 . Mais l'auteur n'évoque pas ces aspects et n'explique pas ses motivations pour travailler dans ce fragment. Parallèlement, elle développe plusieurs nouveaux concepts à la théorie des réseaux de Petri, chacun n'ayant apparemment d'autre intérêt que d'interpréter la prouvabilité des séquents de \mathcal{L}_1 par des relations entre réseaux. Quant à savoir les définitions des réseaux sur lesquelles ces développements reposent, le lecteur est renvoyé à un seul article publié par WINSKEL en 1987 [77] — article qui n'est pas une référence de base du domaine. Dans ces conditions, il nous est difficile d'expliquer avec certitude les tenants et les aboutissants de ces travaux. Essayons néanmoins.

2. Dans le texte original, $\&$ est noté \wedge et $\mathbf{1}$ est noté I .

Le point de départ de l'approche de BROWN consiste à traduire un réseau de Petri marqué \mathfrak{N} par une formule canonique $F_{\mathfrak{N}}$ de la forme $M \otimes \Theta$ telle que :

- M est une conjonction multiplicative d'atomes propositionnels, correspondant au marquage m du réseau, chaque atome A représentant une place a du réseau ;
- Θ une conjonction multiplicative de formules de la forme $!(M_1 \multimap M_2)$, chacune correspondant à une transition du réseau.

Considérons par exemple le réseau marqué de la figure V.7.

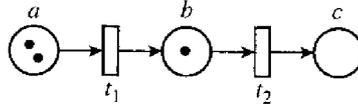


Figure V.7

Il est représenté par la formule :

$$\underbrace{A \otimes A \otimes B}_M \otimes \underbrace{!(A \multimap B) \otimes !(B \multimap C)}_{\Theta}$$

La correspondance réciproque s'écrit \mathfrak{N}_F . Par exemple, si A est une formule atomique, le réseau \mathfrak{N}_A est réduit à une seule place a marquée d'un jeton. La traduction proposée vise à interpréter la prouvabilité des séquents de la forme $F_{\mathfrak{N}} \vdash F_{\mathfrak{N}'}$ en fonction des réseaux \mathfrak{N} et \mathfrak{N}' . Pour exprimer formellement cette interprétation, BROWN introduit d'un côté une relation d'équivalence sur les formules de \mathcal{L}_1 , qu'elle note \cong , et d'un autre côté une relation de pré-ordre sur les réseaux, qu'elle note \sqsubseteq . L'auteur se propose alors de démontrer le théorème suivant :

1. Si \mathfrak{N} et \mathfrak{N}' sont deux réseaux marqués tels que $\mathfrak{N} \sqsubseteq \mathfrak{N}'$, alors le séquent $F_{\mathfrak{N}} \vdash F_{\mathfrak{N}'}$ est prouvable dans \mathcal{L}_1 .
2. Si \mathfrak{N} est un réseau marqué et G une formule de \mathcal{L}_1 telle que $F_{\mathfrak{N}} \vdash G$ soit prouvable dans \mathcal{L}_1 , alors il existe un réseau marqué \mathfrak{N}' tel que $G \cong F_{\mathfrak{N}'}$ et $\mathfrak{N} \sqsubseteq \mathfrak{N}'$.

Précisons d'emblée que le pré-ordre \sqsubseteq inclut la relation d'accessibilité des marquages des réseaux : si \mathfrak{N} et \mathfrak{N}' sont deux réseaux ne différant que par leurs marquages respectifs m et m' , et que m' est accessible depuis m , alors $\mathfrak{N} \sqsubseteq \mathfrak{N}'$. Par conséquent, le premier volet du théorème ci-dessus ne pose pas problèmes particuliers de démonstration. En revanche, le second volet est nettement plus technique, parce qu'aucune autre hypothèse que la prouvabilité du séquent $F_{\mathfrak{N}} \vdash G$ ne renseigne sur la forme de G , qui est une formule de \mathcal{L}_1 a priori quelconque. Examinons plus en détail cet aspect, en analysant différents cas de séquents de la forme $F_{\mathfrak{N}} \vdash G$ prouvables dans \mathcal{L}_1 .

Premier cas, considérons le séquent $F_{\mathfrak{N}} \vdash F_{\mathfrak{N}} \otimes \Theta$, qui est prouvable quel que soit le réseau marqué \mathfrak{N} dont les transitions sont traduites par Θ . On pourrait interpréter la conclusion de ce séquent comme le réseau marqué construit en « doublant » les transitions de N . Plus généralement, on pourrait ainsi multiplier individuellement n'importe

quelle transition. Mais un réseau est défini par un ensemble (et non un multi-ensemble) de transitions. D'après le principe dit *d'extensionnalité*, à savoir que toute transition est entièrement définie par ses entrées/sorties, il ne peut y avoir deux transitions identiques. Par ailleurs, même en admettant cette possibilité, on peut s'interroger sur son intérêt puisqu'elle n'affecte en rien les propriétés du réseau. La relation \cong d'équivalence entre formules semble être introduite par BROWN en premier lieu pour se dégager de l'interprétation ci-dessus. Elle stipule l'équivalence entre la formule canonique d'un réseau marqué et ses variantes modulo la duplication de transitions (première clause), ainsi que pour toute permutation dans l'ordre lexicographique de l'ensemble des transitions (deuxième clause). En fait, pour le moment, la relation \cong ne fait que surcharger la commutativité du connecteur \otimes et son idempotence vis-à-vis des formules exponentielles. La définition de \cong comprend aussi une troisième clause dont nous débattons plus loin.

Deuxième cas de séquent prouvable de la forme $F_{\mathfrak{N}} \vdash G$, considérons celui où G se réduit à M , la formule traduisant le marquage de \mathfrak{N} . Il s'agit d'un cas particulier où aucune formule de transition du réseau n'apparaît dans la conclusion. L'auteur interprète ces séquents via la relation de pré-ordre \sqsubseteq entre réseaux comme la possibilité de *supprimer n'importe quelle transition* de \mathfrak{N} , ainsi que ses places d'entrée et de sortie si elles ne sont ni marquées, ni l'entrée et la sortie d'autres transitions. Par exemple, le réseau $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_M$ représenté figure V.8 est obtenu depuis celui figure V.7 par suppression de t_1 et t_2 ainsi que de la place vide c en sortie de t_2 .



Figure V.8

Par définition de \sqsubseteq , on a $\mathfrak{N} \sqsubseteq \mathfrak{N}'$. Ceci nous déconcerte, car telle que l'a définie l'auteur, la relation \sqsubseteq exprime déjà l'accessibilité entre marquages. Or une opération structurelle comme la suppression d'une transition n'a rien à voir avec le fonctionnement usuel d'un réseau. De surcroît, non seulement cette opération ne correspond à aucune *réduction* pertinente pour les propriétés d'un réseau marqué (vivacité, etc.), mais a contrario l'opération structurelle de réduction la plus élémentaire, la *substitution de places* [9], ne semble pas formalisable dans le fragment \mathcal{L}_1 . En effet, le séquent prouvable dans LL :

$$!(A \multimap B) \otimes !(B \multimap C) \vdash !(A \multimap C)$$

— que nous pourrions éventuellement interpréter comme la substitution de la place intermédiaire b , par fusion des transitions t_1 et t_2 — n'est pas prouvable dans \mathcal{L}_1 , car en sont exclues les règles \multimap_R et $!_R$.

Troisième cas de séquent prouvable de la forme $F_{\mathfrak{N}} \vdash G$, considérons ceux où l'on trouve une déduction de la forme $!T \vdash T$, où $!T$ est une formule traduisant une transition du réseau \mathfrak{N} . Étant donnés les principes de traduction de BROWN, une formule implicative mais non exponentielle telle que T ne représente ni un marquage, ni une transition. Alors, sachant l'objectif de l'auteur, au sens de quelle opération entre réseaux interpréter une telle dérivation? Observons d'abord qu'il n'est pas possible de contourner le problème

par des restrictions sur les règles logiques du calcul des séquents. En effet, la preuve de $!T \vdash T$ résulte de l'application de la règle $!_L$, laquelle est indispensable pour prouver tout séquent traduisant le franchissement d'une transition. Par exemple la preuve de $A \otimes !(A \multimap B) \vdash B \otimes !(A \multimap B)$ qui exprime le franchissement d'une transition entre deux places a et b s'écrit, dans le fragment \mathcal{L}_1 :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{id}}{A, A \multimap B \vdash B} \multimap_L \quad \frac{\frac{\frac{}{B \vdash B} \text{id}}{!(A \multimap B) \vdash !(A \multimap B)} \text{id}}{A, !(A \multimap B), A \multimap B \vdash B \otimes !(A \multimap B)} \otimes_R}{A, !(A \multimap B), !(A \multimap B) \vdash B \otimes !(A \multimap B)} !_L}{A, !(A \multimap B) \vdash B \otimes !(A \multimap B)} C!_L}{A \otimes !(A \multimap B) \vdash B \otimes !(A \multimap B)} \otimes_L$$

Sans la règle $!_L$, le séquent conclusion n'est pas prouvable. Encore une fois, la solution que propose BROWN nous paraît déconcertante. Pour commencer, elle décide sans explication de remplacer la règle $!_L$ par la suivante, notée **Der** :

$$\frac{\Gamma, A \& \mathbf{1}, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B} \text{Der}$$

en signalant simplement qu'elles sont équivalentes, moyennant l'usage de $C!_L$, $W!_L$, $\&_{L2}$, $\&_R$, et cut qui figurent toutes dans \mathcal{L}_1 . Dès lors, nous pouvons penser qu'il ne s'agit que d'une abréviation, dont l'intérêt semblerait à première vue tenir au caractère réversible de **Der**, le séquent $!T \otimes (T \& \mathbf{1}) \vdash !T$ étant prouvable. En sus, cette explication paraît renforcée par la troisième clause définissant la relation \cong entre formules, qui stipule justement l'équivalence entre $!F$ et $!F \otimes (F \& \mathbf{1})$. Mais cette explication ne résiste pas au fait suivant : la preuve de la réversibilité de **Der** nécessite la règle $\mathbf{1}_L$, qui est exclue de \mathcal{L}_1 . Ensuite, l'auteur justifie la troisième clause de l'équivalence \cong entre formules en introduisant une nouvelle opération sur les réseaux : l'ajout d'une structure exprimant le franchissement d'une transition. Par exemple, un réseau \mathfrak{N}_1 constitué d'une simple transition d'entrée a et de sortie b avec trois jetons dans la place a , peut évoluer en un réseau \mathfrak{N}_2 qui est représenté figure V.9.

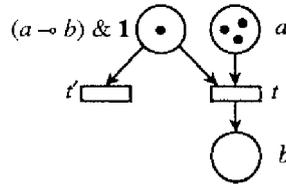


Figure V.9

La place nommée « $(a \multimap b) \& \mathbf{1}$ », que l'auteur qualifie d'« *éliminable* », semble jouer un rôle de contrôle sur le franchissement de t . Pour formaliser ces notions qui n'existent pas dans la théorie des réseaux de Petri (rappelons encore une fois que tout franchissement est atomique), une relation d'équivalence ad hoc sur les réseaux (notée \equiv) est alors introduite.

Par rapport à ces multiples développements, tâchons maintenant de prendre un peu de recul. Rappelons avant tout que la structure et le marquage d'un réseau sont des notions vis-à-vis desquelles une distinction fondamentale s'impose : a priori, le marquage est contingent et la structure est stable. Certes, il existe aussi des opérations structurelles bien connues comme les réductions, mais elles ne sont pas arbitraires : elles servent essentiellement à démontrer des propriétés de fonctionnement vis-à-vis desquelles elles sont conservatives. A contrario, supprimer arbitrairement des transitions d'une structure de réseau ne conserve aucune propriété. En confondant des opérations structurelles à celles de changements de marquages via la relation \sqsubseteq (laquelle est primordiale dans le théorème de BROWN) l'intérêt de ce dernier nous échappe. Par ailleurs, nous ne voyons pas plus l'intérêt de contrôler le franchissement d'une transition par une autre transition ; à notre avis, cela revient encore à confondre les notions de structure et de fonctionnement.

En comparaison, nous jugeons nettement plus intéressante l'approche de CERVESATO, présentée dans un manuscrit inachevé daté de 1994, qui n'a, à notre connaissance, jamais été publié ultérieurement, sauf sous la forme d'une très courte synthèse [14]. La traduction des réseaux de Petri en logique linéaire que propose l'auteur repose sur les mêmes éléments primitifs que celle de BROWN : un marquage m correspond à une conjonction multiplicative M d'atomes propositionnels et une transition t à une formule exponentielle implicative $!(M \multimap M')$ entre deux formules de marquages. Mais l'objectif est beaucoup plus précis, il se focalise uniquement sur la traduction du fonctionnement des réseaux de Petri, et aboutit au résultat suivant, comparable au théorème de cohérence et de complétude de GUNTER et GEHLOT. Étant donné un réseau dont la structure est décrite par la conjonction notée $!\Theta$ des formules correspondant aux transitions du réseau, un marquage m' est accessible depuis un marquage m si et seulement si le séquent :

$$M, !\Theta \vdash M'$$

est prouvable — l'auteur se gardant bien d'interpréter par une suppression structurelle l'absence des formules des transitions dans le membre droit du séquent.

Pour obtenir une correspondance bi-univoque entre l'accessibilité des marquages et la prouvabilité des séquents de la forme ci-dessus, CERVESATO définit un système, qu'il note $\text{MILL}^{P/T}$, qui n'est pas un fragment mais une variante du calcul des séquents linéaires, car non seulement il en supprime certaines règles, mais il restreint les applications d'autres à des schémas précis. Le système dont il part est le fragment multiplicatif-exponentiel de logique linéaire intuitionniste (en abrégé, IMELL), qui contient juste les éléments nécessaires à la traduction ($!$, \otimes , \multimap , et $\mathbf{1}$). Les règles de formation des formules et des séquents étant modifiées, nous notons \Vdash le méta-symbole de déduction syntaxique dans $\text{MILL}^{P/T}$ pour éviter toute confusion avec les séquents usuels. Pour un alphabet donné $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ d'atomes propositionnels, on a :

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &::= A_1 \mid \dots \mid A_n \mid \mathbf{1} \mid \langle F \rangle \otimes \langle F \rangle \\ \langle \Gamma \rangle &::= \cdot \mid \langle \Gamma \rangle, \langle F \rangle \multimap \langle F \rangle \\ \langle \Delta \rangle &::= \cdot \mid \langle \Delta \rangle, \langle F \rangle \\ \langle \mathcal{S} \rangle &::= \langle \Gamma \rangle ; \langle \Delta \rangle \Vdash \langle F \rangle \end{aligned}$$

Les séquents de $\text{MILL}^{P/T}$ s'apparentent donc à une forme intuitionniste *unifiée* (cf. l'article [28]). Le membre droit est réduit à une seule formule, qui est forcément une conjonction multiplicative. Le membre gauche se compose de deux parties, séparées par un point-virgule (méta-connecteur) : la première, de forme $\langle \Gamma \rangle$ est un multi-ensemble de formules implicatives (implicitement, elles sont exponentielles) ; la seconde, de forme $\langle \Delta \rangle$, est un multi-ensemble de conjonctions multiplicatives.

Les règles du calcul $\text{MILL}^{P/T}$ sont données ci-dessous, en annotant chaque règle par l'indice \sharp par distinction de celles de IMELL (cf. annexe B), les règles d'échange étant implicites :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma ; F \Vdash F} \text{id}_{\sharp} \qquad \text{pas de règle de coupure} \\
\\
\frac{\Gamma ; \Delta, F, G \Vdash H}{\Gamma ; \Delta, F \otimes G \Vdash H} \otimes_{L\sharp} \qquad \frac{\Gamma ; \Delta \Vdash F \quad \Gamma ; \Delta' \Vdash G}{\Gamma ; \Delta, \Delta' \Vdash F \otimes G} \otimes_{R\sharp} \\
\\
\frac{\Gamma, F \multimap G ; \Delta \Vdash F \quad \Gamma, F \multimap G ; \Delta', G \Vdash H}{\Gamma, F \multimap G ; \Delta, \Delta' \Vdash H} \multimap_{L\sharp} \qquad \text{pas de règle } \multimap_{R\sharp} \\
\\
\frac{\Gamma ; \Delta \Vdash F}{\Gamma ; \Delta, \mathbf{1} \Vdash F} \mathbf{1}_{L\sharp} \qquad \frac{}{\Gamma ; \cdot \Vdash \mathbf{1}} \mathbf{1}_{R\sharp}
\end{array}$$

En fait, chacune de ces règles de $\text{MILL}^{P/T}$ n'est que l'abréviation d'un schéma d'inférences dans IMELL. Par exemple, la règle $\otimes_{R\sharp}$ est dérivable par une inférence \otimes_R suivie d'une suite de contraction des formules de $!$ Γ :

$$\frac{\frac{! \Gamma, \Delta \Vdash F \quad ! \Gamma, \Delta' \Vdash G}{! \Gamma, \Delta, \Delta' \Vdash F \otimes G} \otimes_R}{! \Gamma, \Delta, \Delta' \Vdash F \otimes G} C!_L$$

Formellement, CERVESATO énonce la correspondance entre les deux systèmes par le théorème que si Γ , Δ et F respectent les règles de formation de $\text{MILL}^{P/T}$, alors :

$$\Gamma ; \Delta \Vdash F \text{ dans } \text{MILL}^{P/T} \quad \Leftrightarrow \quad ! \Gamma, \Delta \Vdash F \text{ dans IMELL}$$

Bien entendu, la partie difficile dans la démonstration de ce résultat est la complétude. Partant de la preuve dans IMELL de $\Gamma, \Delta \Vdash F$, et compte tenu de la forme spécifique de Γ , Δ et F , il faut montrer que ses inférences peuvent se réarranger en schémas qui correspondent aux règles de $\text{MILL}^{P/T}$. En définitive, le système est construit sur mesure pour établir la correspondance bi-univoque générale entre l'accessibilité dans les réseaux de Petri et la notion de prouvabilité dans $\text{MILL}^{P/T}$. Non seulement toute relation d'accessibilité se traduit par un séquent de $\text{MILL}^{P/T}$, mais tout séquent de $\text{MILL}^{P/T}$ correspond à une relation d'accessibilité dans un réseau de Petri bien précis. Mais en ce qui concerne notre objectif, qui vise à appliquer la logique linéaire pour formaliser le fonctionnement des réseaux, cette réciprocity n'apparaît pas nécessaire. En fait, en gardant les éléments primitifs de la traduction, on peut parfaitement travailler avec LL.

Bien que nettement moins approfondie, l'approche de KANOVICH développée dans une courte section de l'article [43] va dans le sens évoqué à l'instant. Par des séquents de la forme $!\Gamma, F \vdash G$, où F et G sont des conjonctions multiplicatives, l'auteur propose de traduire l'accessibilité dans une classe « généralisée » de réseaux de Petri qu'il définit. Il introduit une notion de « transition indéterministe », dont les entrées sont définies comme une transition ordinaire, mais dont les sorties sont définies par une *alternative indéterminée* entre plusieurs sorties. Présentons un exemple en figure V.10 :

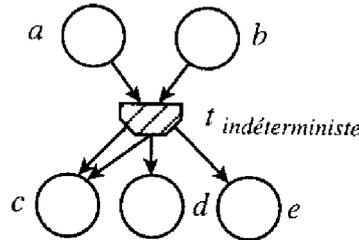


Figure V.10

Le franchissement de t produit soit le marquage c , soit le marquage cd , soit encore le marquage e . Pour justifier ce nouveau concept, KANOVICH remarque que lorsque l'on choisit de franchir une transition validée, le fonctionnement du réseau est déterministe ; il n'en est pas de même s'il l'on choisit de franchir une transition indéterministe validée. La relation d'accessibilité directe, c'est-à-dire par franchissement d'une seule transition, est généralisée à des « ensembles de marquages alternatifs » de la manière suivante. Un tel ensemble μ' est accessible depuis un autre μ si pour tout marquage m de μ :

- soit il existe une transition ordinaire t et un marquage m' de μ' tel que $m \xrightarrow{t} m'$ au sens usuel,
- soit il existe une transition indéterministe t' validée par m et telle que tout marquage produit par franchissement de t' depuis m soit dans μ' .

La relation d'accessibilité généralisée est alors la fermeture réflexive et transitive de cette nouvelle relation d'accessibilité directe.

Derrière cette idée se cache, nous semble-t-il, une volonté d'exploiter l'expressivité de la disjonction additive \oplus . Rien de plus simple, en effet, que de traduire une transition indéterministe ; ainsi, celle de l'exemple ci-dessus correspond à la formule :

$$![(A \otimes B) \multimap (C \oplus (C \otimes D) \oplus E)]$$

Avec cette représentation, une transition indéterministe de la forme $!(A \multimap (B \oplus C))$ diffère d'un conflit structurel simple entre deux transitions ordinaires de la forme $!(A \multimap B)$ et $!(A \multimap C)$, à partir desquelles on peut déduire la formule $!(A \multimap (B \& C))$. A priori, bien que l'auteur ne le propose pas, on pourrait même représenter tout ensemble alternatif de marquages par une disjonction additive de formules de marquages. Grâce à la distributivité de \otimes sur \oplus , l'accessibilité généralisée se traduirait par des séquents de la forme $!\Theta, F \vdash G$ avec F et G chacune de la forme $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$. Néanmoins, modérons l'intérêt

des transitions indéterministes, qui, contrairement à ce qu'écrit l'auteur, ne constituent pas un concept nouveau — cf. entre autres la thèse SIBERTIN-BLANC [70], soutenue en 1985. Rappelons surtout que la règle de fonctionnement des réseaux de Petri est déjà fondamentalement indéterministe : lorsque plusieurs transitions sont franchissables, rien ne précise laquelle sera franchie. Si la théorie des réseaux de Petri laisse intacte l'arbitrage des conflits, c'est parce que ce problème est difficile. Comme la notion de parallélisme, celle de conflit présente des aspects dynamiques, par exemple dans les cas dits *de confusion* comme celui de la figure V.5, page 129. Lorsque KANOVICH écrit « *if we choose an ordinary transition to be fired [...]* », il prend implicitement le rôle du *joueur* de réseau, qui arbitre les conflits, et son nouveau concept de transition ne réintroduit l'indéterminisme que de manière structurelle. On peut tout aussi bien adopter le rôle d'*observateur* du réseau (c'est le cas quand on cherche à modéliser un système dont on veut analyser le fonctionnement) et considérer que les conflits sont résolus par des choix internes, que l'on règle par des probabilités calculées dynamiquement en fonction du marquage. Observons enfin que, sans aucune extension, le fonctionnement des réseaux de Petri offre la possibilité d'exploiter l'expressivité du connecteur \oplus : par exemple à partir des formules de deux transitions $!(A \multimap C)$ et $!(B \multimap C)$, on peut déduire la formule $!(A \oplus B) \multimap C$ — cf. aussi nos conjectures au chapitre VI.

V.2.3 Traduction comme un modèle pour la logique linéaire

Cette troisième approche des liens entre la logique linéaire et les réseaux de Petri diffère radicalement des deux précédentes : elle repose sur des bases sémantiques (et non syntaxiques) de la logique linéaire. Initiée par ENGBERG et WINSKEL, elle a été suivie par LILIUS pour l'extension aux réseaux de Petri de haut niveau et TANABE pour l'extension aux réseaux de Petri temporels. Ces aspects sortant de notre problématique, nous n'examinerons pas en détail les travaux de ces deux derniers auteurs.

En introduction de leur synthèse [17] — article qui réunit le contenu de leurs publications précédentes [15, 16] — ENGBERG et WINSKEL perçoivent une sévère limite aux autres approches. En citant celle de MARTÍ-OLIET et MESEGUER, ils écrivent³ :

One problem with their approach is its consequence that if a net satisfies an proposition of linear logic then so does any augmentation of the net, obtained by adding transitions arbitrarily. This considerably weakens the case for regarding linear logic as a specification logic with respect to *their* notion of satisfaction.^a [...]

^aNo one would take seriously a program logic with the property that if a program satisfied an assertion then so did the program with GOTO statements inserted arbitrarily.

Disons-le d'abord, la comparaison notée en bas de page nous paraît déplacée. En programmation impérative, l'usage de l'instruction `goto` est évité autant que possible, parce que cette dernière complique considérablement la vérification des programmes, et notamment la question de la terminaison qui est déjà suffisamment complexe (rappelons qu'elle est indécidable), même lorsque l'on s'astreint à des méthodes structurées. A contrario, dans la construction d'un réseau de Petri, il n'y a aucune raison de limiter l'emploi des

3. La faute d'orthographe « *an proposition* » est dans le texte original.

transitions, sans lesquelles il n'y aurait tout simplement pas de réseau ! Quant à la question de l'accessibilité, elle est par essence robuste aux ajouts arbitraires de transitions, et si cet aspect rejaillit dans l'approche de MARTÍ-OLIET et MESEGUER, c'est parce que leur traduction se focalise précisément sur l'accessibilité. Néanmoins, la limite évoquée ci-dessus existe et, naturellement, une autre approche capable de la dépasser serait très intéressante. Or c'est précisément ce que proposent ENGBERG et WINSKEL, qui grâce à « la bonne » notion de satisfaction, affirment pouvoir exprimer des propriétés « négatives » des réseaux de Petri, c'est-à-dire des assertions sur la non-accessibilité entre marquages.

L'idée fondamentale de leur approche est la suivante : les réseaux de Petri constituent des *modèles* pour la logique linéaire intuitionniste. Plus exactement, la prouvabilité des séquents de ILL peut s'interpréter par une relation de satisfaction entre des ensembles de marquages de réseaux de Petri. Ces ensembles sont construits par *clôture arrière* : pour un marquage donné m , l'ensemble $\downarrow m$ réunit tous les marquages d'un réseau (sans référence à un marquage initial) permettant d'atteindre m — c'est-à-dire :

$$\downarrow m = \{m' \in \mathfrak{M} \mid m' \longrightarrow m\}$$

Les clôtures arrières des marquages unitaires a_1, a_2, \dots (un seul jeton dans une seule place) d'un réseau sont mis en *correspondance* (« *naming function* » dans le texte original) avec des atomes A_1, A_2, \dots de logique linéaire, de façon non nécessairement injective — autrement dit, $A_i = A_j$ n'implique pas que $a_i = a_j$. Les auteurs appellent « *valuation de réseau* » tout couple réseau-correspondance. Étant donné une valuation de réseau \mathfrak{V} , une formule de logique linéaire F est interprétée par un ensemble de marquages du réseau, noté $\llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}}$, selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \llbracket \top \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \mathfrak{M} \\ \llbracket \mathbf{0} \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \emptyset \\ \llbracket \mathbf{1} \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \{m \in \mathfrak{M} \mid m \longrightarrow 0\} \quad (0 \text{ est le marquage nul}) \\ \llbracket A_i \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \{m \in \mathfrak{M} \mid m \longrightarrow a_i\} \\ \llbracket F \otimes G \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \{m \in \mathfrak{M} \mid \exists m_F \in \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}}, \exists m_G \in \llbracket G \rrbracket_{\mathfrak{V}}, m \longrightarrow (m_F + m_G)\} \\ \llbracket F \multimap G \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \{m \in \mathfrak{M} \mid \forall m_F \in \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}}, (m + m_F) \in \llbracket G \rrbracket_{\mathfrak{V}}\} \\ \llbracket F \& G \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}} \cap \llbracket G \rrbracket_{\mathfrak{V}} \\ \llbracket F \oplus G \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}} \cup \llbracket G \rrbracket_{\mathfrak{V}} \end{aligned}$$

Pour éviter les confusions avec la sémantique de phase, nous notons \approx et non \models la relation de satisfaction qu'introduisent les auteurs. Par rapport à une valuation de réseau \mathfrak{V} , la *validité* d'une formule F et la relation de *conséquence sémantique* entre F et G sont respectivement définies par :

$$\approx_{\mathfrak{V}} F \Leftrightarrow 0 \in \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}} \quad F \approx_{\mathfrak{V}} G \Leftrightarrow \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}} \subseteq \llbracket G \rrbracket_{\mathfrak{V}}$$

ce qui est cohérent avec l'interprétation de l'implication linéaire puisque par définition, $\approx_{\mathfrak{V}} F \multimap G$ si et seulement si $\llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}} \subseteq \llbracket G \rrbracket_{\mathfrak{V}}$. Compte tenu de l'interprétation des formules comme des clôtures arrières de marquages, via la relation d'accessibilité, on aboutit au résultat suivant, pour une valuation de réseau \mathfrak{V} donnée :

$$m \longrightarrow m' \Leftrightarrow M \approx_{\mathfrak{V}} M'$$

Ensuite, la notion de validité et la relation de conséquence sémantique sont définies, en toute généralité, respectivement par :

$$\left. \begin{array}{l} \approx F \quad \Leftrightarrow \quad \approx_{\mathfrak{V}} F \\ F \approx G \quad \Leftrightarrow \quad F \approx_{\mathfrak{V}} G \end{array} \right\} \text{ pour toute valuation de réseau } \mathfrak{V}$$

Par rapport à la relation de prouvabilité de la logique linéaire intuitionniste, les auteurs énoncent d'abord le théorème de cohérence : si $F \vdash G$, alors $F \approx G$. Quant au théorème de complétude réciproque, il semble poser quelques difficultés, puisque les auteurs ne l'énoncent que dans le fragment de ILL sans exponentiels privé de la disjonction \oplus , et dans celui, également sans exponentiels, privé de l'implication \multimap et augmenté d'une propriété de semi-distributivité de $\&$ sur \oplus , laquelle n'est pas prouvable dans ILL.

À côté de ces aspects, les auteurs développent également une interprétation pour la négation linéaire, via la constante logique \perp :

$$\begin{aligned} \llbracket \perp \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \{m \in \mathfrak{M} \mid 0 \not\rightarrow m\} \\ \llbracket F^\perp \rrbracket_{\mathfrak{V}} &= \{m \in \mathfrak{M} \mid \forall m_F \in \llbracket F \rrbracket_{\mathfrak{V}}, 0 \not\rightarrow (m_F + m)\} \end{aligned}$$

l'interprétation de F^\perp étant exactement celle de $F \multimap \perp$. Cependant, ils ne précisent pas que cette interprétation ne satisfait pas la propriété d'involution de la négation linéaire. Prenons par exemple un réseau réduit à une seule place a , dont le marquage par un jeton (clos par fermeture arrière) est interprété par la formule atomique A . L'interprétation de A^\perp est l'ensemble $\llbracket A^\perp \rrbracket_{\mathfrak{V}} = \{m \in \mathfrak{M} \mid 0 \not\rightarrow (m + a)\} = \mathfrak{M}$ puisque la place a n'a aucune transition d'entrée. On montre alors que $\llbracket A^{\perp\perp} \rrbracket_{\mathfrak{V}}$ est l'ensemble \mathfrak{M} privé du marquage nul, qui diffère de $\llbracket A \rrbracket_{\mathfrak{V}}$. Mais le résultat clef de cette interprétation est : quelle que soit la formule F , on a $\approx_{\mathfrak{V}} F^\perp$ si et seulement si $\not\approx_{\mathfrak{V}} F$, ce qui permet de formuler des propriétés de non-accessibilité dans un réseau. Étant une valuation \mathfrak{V} , on a :

$$m \not\rightarrow m' \quad \Leftrightarrow \quad \approx_{\mathfrak{V}} (M \multimap M')^\perp$$

Enfin, l'article propose un théorème de complétude pour la logique intuitionniste toute entière, énoncé après interprétation des exponentiels. Toutefois, les auteurs avertissent dès l'introduction que ce résultat nécessite d'ajouter d'une part une quantification sur les marquages, et d'autre part des axiomes propres relatifs aux réseaux de Petri. Par ailleurs, il n'est valable qu'au prix d'une restriction sur la définition de ces réseaux, à savoir que tout marquage m tel que $m \rightarrow 0$ vérifie également $0 \rightarrow m$.

Sans procéder à un examen plus approfondi des résultats annoncés, ce tour d'horizon permet déjà de tracer les limites de l'approche de ENGBERG et WINSKELL, notamment au sujet des espérances suscitées par la position des auteurs vis-à-vis des autres approches. Avant tout, leur interprétation de la négation linéaire n'étant pas conforme à ses propriétés syntaxiques, aucun théorème de complétude ne peut la concerner. Les propriétés négatives sur l'accessibilité dans les réseaux que les auteurs expriment sémantiquement ne sont donc pas prouvables syntaxiquement. Nous allons montrer, sur un exemple extrait de leur article, qu'il en est de même pour d'autres propriétés. Ce faisant, nous illustrerons les calculs que sous-tendent la démonstration sémantique de ces propriétés. Considérons le réseau représenté figure V.11. En associant à chaque marquage unitaire une proposition

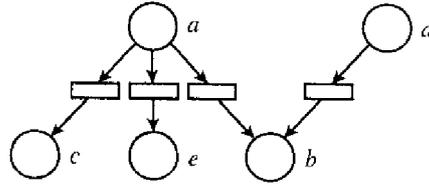


Figure V.11

atomique avec notre convention minuscule/majuscule (ce qui définit ainsi un valuation de réseau \mathfrak{V}) on a les interprétations suivantes, obtenues par énumération de marquages :

$$[A]_{\mathfrak{v}} = \{a\} \quad [B]_{\mathfrak{v}} = \{a, b, d\} \quad [C]_{\mathfrak{v}} = \{a, c\} \quad [D]_{\mathfrak{v}} = \{d\} \quad [E]_{\mathfrak{v}} = \{a, e\}$$

Des relations d'inclusion entre ces ensembles, on tire les expressions sémantiques des propriétés d'accessibilité telles que $A \approx_{\mathfrak{v}} B$, $A \approx_{\mathfrak{v}} C$, etc. Mais pour montrer, par exemple, que $A \otimes A \approx_{\mathfrak{v}} B \otimes C$, les calculs d'interprétation nécessitent encore des énumérations de marquages, liées à la définition de l'interprétation de \otimes :

$$\begin{aligned} [A \otimes A]_{\mathfrak{v}} &= \{M \in \mathfrak{M} \mid m \longrightarrow a + a\} = \{a + a\} \\ [B \otimes C]_{\mathfrak{v}} &= \{M \in \mathfrak{M} \mid m \longrightarrow b + c\} = \{a + a, a + b, a + c, a + d, b + c, c + d\} \end{aligned}$$

Achevons l'examen de cet exemple par une propriété sémantique du réseau qui retient particulièrement notre attention : $B \& C \approx_{\mathfrak{v}} E$. Nous la comprenons ainsi : si on a le choix entre les marquages unitaires b et c , alors on a en fait le marquage unitaire a , donc on peut atteindre e , ce que traduisent formellement les calculs d'interprétation :

$$[B \& C]_{\mathfrak{v}} = [B]_{\mathfrak{v}} \cap [C]_{\mathfrak{v}} = \{a\} \quad \text{donc} \quad [B \& C]_{\mathfrak{v}} \subseteq [E]_{\mathfrak{v}} \quad \text{donc} \quad B \& C \approx_{\mathfrak{v}} E$$

Sans être négative, une telle propriété n'est pas syntaxiquement prouvable dans la théorie linéaire qui serait définie par des axiomes propres traduisant des relations d'accessibilité entre marquages. En fait, l'interprétation des auteurs de l'implication linéaire, pas plus que celle de la négation, ne correspond vraiment à celle de la logique linéaire. A fortiori, remarquons l'absence d'une définition de relation de prouvabilité syntaxique $\vdash_{\mathfrak{v}}$ correspondant à $\approx_{\mathfrak{v}}$, relativement à une valuation de réseau \mathfrak{V} donnée. En supposant que pour ce faire, on adopterait l'approche d'ASPerti, on pourraient certainement démontrer un théorème de cohérence, mais vraisemblablement aucun théorème de complétude, relativement à \mathfrak{V} . En d'autres termes, l'approche de ENGBERG et WINSKEL s'apparente à de la vérification sémantique de modèles, son originalité étant d'utiliser la logique linéaire au lieu d'une logique modale. Si dans ce cadre elle mériterait une étude comparative, nous estimons qu'elle est inadéquate vis-à-vis de notre problématique, pour les mêmes raisons que celles que nous avons évoquées au chapitre I, à savoir que nous rejetons toute énumération de marquages. D'ailleurs, la conclusion finale des auteurs justifie notre réticence. À l'une des questions qu'ils se posent « *What can linear logic contribute to Petri nets?* », ils apportent la réponse suivante :

Answering [this question] is harder at this stage. [...] On the negative side, it's something very hard to see if and how a particular property can be expressed [...] A full answer [...] would rest on a more detailed investigation, including that of fragments and variants of linear logic and whether they are useful in the study of Petri nets.

Terminons notre analyse de cette approche sémantique en signalant qu'elle semble avoir été employée maladroitement dans l'article de TANABE, publié à la dernière conférence sur la théorie et les applications des réseaux de Petri [71]. Dans cet article, la deuxième section intitulée « *Prerequisite* » présente brièvement les liens entre la logique linéaire et les réseaux de Petri, manifestement selon l'approche de ENGBERG et WINSKEL — l'auteur ne le précise pas mais cite l'article [17] en référence. Cependant, il la présente d'une manière simplifiée, sans s'appuyer sur la notion de valuation de réseau. Ainsi, après avoir posé les équations d'interprétation comme : « [...] *for all marking* m , $m \in [p]$ *iff* m *is reachable to the marking with a single token at* p , [...] », TANABE écrit⁴ :

With respect to this interpretation, the following holds:

$$A \vdash A' \text{ iff } [A] \subseteq [A']$$

i.e., $A \vdash A'$ is deducible in linear logic, if and only if for any marking m in $[A]$, there exists $m' \in [A']$ such that m is reachable to m' .

Indépendamment de l'ambiguïté entre les notations respectivement relatives aux réseaux de Petri et à la logique linéaire — que dénote exactement p ? — et du fait que nous ne savons pas si l'interprétation fait référence à un réseau donné ou à tous les réseaux imaginables, la propriété énoncée est manifestement fautive. Dans le cas d'un réseau donné, il suffit de considérer, à titre de contre-exemple, le réseau à deux places a et b reliées par une simple transition t . L'ensemble $[a] = \{a\}$ est inclus dans l'ensemble $[b] = \{a, b\}$ alors que, bien entendu, $a \vdash b$ n'est pas prouvable en logique linéaire⁵. Dans le cas où l'on considère tous les réseaux imaginables, la notion d'accessibilité d'un marquage à un autre n'a strictement aucun sens. Comme tous les développements de l'article reposent sur ces « *pré-requis* », il ne nous paraît pas opportun d'en faire une analyse plus approfondie.

V.3 Une traduction modulaire

Pour traduire les réseaux de Petri en logique linéaire en accord avec notre problématique, nous allons bien entendu nous inspirer des traductions que nous venons d'analyser, mais en tâchant avant tout de nous conformer strictement aux définitions fondamentales des deux formalismes.

V.3.1 Principes de traduction

En nous appuyant sur notre travail d'interprétation concrète de la logique linéaire (cf. les chapitres II et III) observons d'abord que traduire les marques dans les places d'un réseau par des atomes propositionnels de types différents pour toutes les places revient exactement à les concevoir comme des ressources. Quant aux marquages, les traduire par des conjonctions multiplicatives de ces atomes coïncide avec leur conception comme des cumuls conjoints d'exemplaires de ressources. Ces idées qui ont jusqu'à présent fait l'unanimité (sauf dans l'approche des modèles) nous paraissent bien fondées. A contrario, pour traduire les transitions, nous nous démarquons des autres approches, à commencer de

4. L'expression « *reachable to* » est propre à l'auteur.

5. Ici, nous avons adopté volontairement les notations de l'auteur.

celle des axiomes tensoriels propres, pour deux raisons. Primo, sur le calcul des séquents avec axiomes on dispose de peu de propriétés de prouvabilité : les séquents tensoriels prouvables ne sont ni équilibrés, ni eulériens, et dans les preuves, les coupures ne sont pas redondantes. Ces inconvénients sont peut-être compensés par le petit nombre de règles du fragment tensoriel, mais ils deviennent gênants dès que l'on souhaite employer d'autres connecteurs. Secundo, les séquents tensoriels ne peuvent traduire pertinemment pour les réseaux de Petri que la relation d'accessibilité générale entre deux marquages, sans porter aucune information sur la ou les séquences de franchissements permettant l'accessibilité.

On peut formuler cette traduction dans le pur calcul des séquents, en traduisant les transitions dans les prémisses comme des implications linéaires préfixées par le connecteur *bien sûr*. La seule information que portent les séquents qui traduisent les relations d'accessibilité est alors le sous-ensemble des transitions utilisées. Pour augmenter l'expressivité de ces séquents, nous proposons de ne pas forcément utiliser le connecteur *bien sûr* pour traduire les transitions, mais de poser leurs formules éventuellement plusieurs fois en prémisses, autrement dit de considérer les transitions également comme des ressources. Nous ne perdons pas pour autant de vue que les transitions sont des éléments structurels des réseaux, contrairement aux marquages, car rien ne nous oblige à interpréter la consommation d'une transition dont la formule est posée en prémisses d'un séquent comme sa suppression du réseau. À la place, nous proposons d'y lire son *utilisation en un nombre donné d'exemplaires*, c'est-à-dire dit le nombre de ses franchissements, pour réaliser une accessibilité. Alors un séquent prouvable traduisant une relation d'accessibilité exprime en plus l'*image commutative* des séquences de transitions réalisant l'accessibilité.

Abordons maintenant la question de la complétude. Nous pensons que l'expressivité des séquents linéaires est bien supérieure à celle des réseaux de Petri. En conséquence, il ne nous paraît pas pertinent de chercher un résultat de complétude exprimant tout séquent linéaire en termes de la théorie des réseaux de Petri, même en se limitant à un fragment particulier. Nous avons vu comment un tel objectif pouvaient amener les recherches à s'écarter soit des définitions fondamentales des réseaux de Petri par des concepts ad hoc (suppressions de transitions, etc.), soit des connecteurs originaux de la logique linéaire. D'ailleurs, étant donnée notre problématique de formalisation du fonctionnement des réseaux de Petri, et notre volonté de n'utiliser la logique linéaire que comme un outil, la complétude « absolue » ne nous est pas primordiale. En revanche, nous visons une complétude exprimant seulement (avec la cohérence usuelle) les relations d'accessibilité par des conditions nécessaires et suffisantes de prouvabilité. Pour cela, il nous suffit d'adopter une traduction *canonique* de ces relations d'accessibilité en séquents de logique linéaire. Il nous semble donc inutile de définir un système de calcul élaboré sur mesure comme $MILL^{P/T}$ développé par CERVESATO. Même si nos séquents sont tous de forme intuitionniste et dans le fragment MELL, nous pouvons parfaitement travailler entièrement dans LL, ce qui autorise toutes les extensions ultérieures aux traductions de base pour exploiter l'expressivité d'autres connecteurs. Quant aux démonstrations inductives de complétude dont les hypothèses consistent, par exemple, en la prouvabilité d'un séquent simplement multiplicatif, la propriété de la sous-formule nous permet d'en surmonter la complexité en limitant au strict minimum le nombre de règles de LL à examiner.

V.3.2 Traduction des éléments fondamentaux

Nous traduisons canoniquement la structure et le marquage d'un réseau par des formules logiques en posant la définition suivante.

Définition 10. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri et \mathfrak{M} ses marquages. Aux éléments de \mathfrak{R} sont associées des **formules** de MLL telles que :

1. À chaque place $p \in \mathcal{P}$ correspond un atome propositionnel distinct, noté A_p . L'ensemble \mathcal{A} de ces atomes s'appelle l'**alphabet logique** de \mathfrak{R} .
2. À tout marquage $m \in \mathfrak{M}$ correspond la conjonction M_m définie par :

$$M_m \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{p \in m} A_p = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\otimes m(p)}$$

modulo la commutativité et associativité de \otimes ainsi que l'idempotence de 1.

3. À toute transition $t \in \mathcal{T}$ correspond une formule T_t telle que $T_t \stackrel{\text{def}}{=} M_{\bullet t} \multimap M_{t \bullet}$.

Précisons que les éléments de \mathcal{A} sont bien des atomes, et non pas des méta-variables ; ils ne peuvent donc faire l'objet d'aucune substitution. Par construction, la correspondance de \mathcal{P} dans \mathcal{A} telle que $p \mapsto A_p$ est une application bijective. Notons \mathcal{A}^{\otimes} le monoïde commutatif libre engendré sur \mathcal{A} par \otimes . Clairement, la correspondance $m \mapsto M_m$ est un isomorphisme de monoïdes entre $(\mathfrak{M}, +)$ et \mathcal{A}^{\otimes} , d'où les propriétés suivantes.

Propriétés 2. Si le symbole $=$ exprime la relation de congruence dans \mathcal{A}^{\otimes} , nous avons :

$$(1) \quad M_0 = \mathbf{1} \qquad (2) \quad \forall (m, m') \in \mathfrak{M}^2, \quad M_{m+m'} = M_m \otimes M_{m'}$$

Notations. Pour identifier des marquages dans les prémisses d'un séquent ou le connecteur \otimes est implicitement représenté par la virgule, nous adoptons la convention proposée dans la section IV.1.8. Considérant que \mathcal{P} est un ensemble indexateur de \mathcal{A} , et qu'un marquage m est un multi-ensemble sur \mathcal{P} , une traduction équivalente à M_m dans les prémisses d'un séquent est le multi-ensemble d'atomes noté $(A_p)_{p \in m}$, c'est-à-dire en extension, par exemple pour $\mathcal{P} = \{a, b, c, \dots\}$:

$$\underbrace{A_a, \dots, A_a}_{m(a) \text{ fois}}, \underbrace{A_b, \dots, A_b}_{m(b) \text{ fois}}, \dots$$

De plus, nous pouvons simplifier les notations lorsqu'aucune confusion n'est possible, en adoptant la convention « minuscules/majuscules » pour traduire les éléments de réseaux en formules logiques. Par exemple, si l'ensemble \mathcal{P} se réduit à quelques places $\{a, b, c\}$, leurs atomes seront notés A, B, C ; idem pour les formules des marquages m_i et des transitions t_j , que nous noterons respectivement M_i et T_j au lieu de M_{m_i} et T_{t_j} .

La règle de fonctionnement des réseaux n'est pas traduite par une définition, mais par le théorème de cohérence et de complétude suivant.

Théorème 2. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau de Petri. Quels que soient deux éléments m et m' de son ensemble des marquages \mathfrak{M} , et une transition $t \in \mathcal{T}$, leurs formules étant respectivement notées M , M' et T , nous avons l'équivalence :

$$m \xrightarrow{t} m' \quad \Leftrightarrow \quad M, T \vdash M'$$

Nous proposons une démonstration qui met en lumière des liens étroits entre les réseaux de Petri et la logique linéaire, tant ses aspects syntaxiques que sémantiques. En particulier, nous allons voir que le critère d'accessibilité directe apparaît comme un corollaire du critère d'équilibrage des séquents multiplicatifs.

Démonstration. Notons en abrégé (R) : $m \xrightarrow{t} m'$ et (S) : $M, T \vdash M'$.

i. Montrons d'abord la cohérence, à savoir que (R) implique (S). Par définition, (R) est équivalente aux deux hypothèses (F) et (E) ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{(F)} \quad m &\geq \bullet t && (t \text{ franchissable}) \\ \text{(E)} \quad m' &= m - \bullet t + t^\bullet && (\text{équation fondamentale}) \end{aligned}$$

De (F), nous tirons $\exists k \in \mathfrak{M}$, $m = \bullet t + k$, résultat que nous injectons dans (E) pour obtenir $m' = k + t^\bullet$. Notons K la formule du marquage k . Nous avons donc $M = M_{\bullet t} \otimes K$ et $M' = M_{t^\bullet} \otimes K$ d'après les propriétés 2. À partir de là, la preuve de (S) est directe :

$$\frac{\frac{\frac{K \vdash K \quad \text{id}}{K \vdash K} \quad \frac{\frac{M_{\bullet t} \vdash M_{\bullet t} \quad \text{id}}{M_{\bullet t} \vdash M_{\bullet t}} \quad \frac{M_{t^\bullet} \vdash M_{t^\bullet} \quad \text{id}}{M_{t^\bullet} \vdash M_{t^\bullet}}}{M_{\bullet t}, M_{\bullet t} \multimap M_{t^\bullet} \vdash M_{t^\bullet}} \multimap_L}{M_{\bullet t}, K, M_{\bullet t} \multimap M_{t^\bullet} \vdash M_{t^\bullet} \otimes K} \otimes_R}{\frac{M_{\bullet t} \otimes K, M_{\bullet t} \multimap M_{t^\bullet} \vdash M_{t^\bullet} \otimes K}{\underbrace{M_{\bullet t} \otimes K}_M, \underbrace{M_{\bullet t} \multimap M_{t^\bullet} \vdash M_{t^\bullet} \otimes K}_T, \underbrace{M_{t^\bullet} \otimes K}_{M'}}} \otimes_L$$

ii. Montrons maintenant la complétude, à savoir que (S) implique (R), sachant que (R) revient à la conjonction de (F) et (E). Pour commencer, si le séquent multiplicatif (S) est prouvable, alors il est équilibré : sa forme unilatérale $\vdash M^\perp, M_{\bullet t} \otimes M_{t^\bullet}^\perp, M'$, contient pour chaque occurrence d'un atome négatif A_p^\perp une occurrence d'un atome positif A_p . Pour le compte, développons les formules des marquages :

$$\vdash \prod_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\perp m(p)}, \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\otimes Pre(p,t)} \otimes \prod_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\perp Post(p,t)}, \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\otimes m'(p)}$$

Pour chaque atome A_p , nous avons en tout $m(p) + Post(p, t)$ occurrences négatives et $m'(p) + Pre(p, t)$ occurrences positives. Le critère d'équilibrage donne :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad m'(p) + Pre(p, t) = m(p) + Post(p, t)$$

c'est-à-dire exactement le critère d'accessibilité directe, qui est la condition (E) parmi les deux pour démontrer $m \xrightarrow{t} m'$. En revanche, le critère d'Euler ne nous donne aucune équation supplémentaire, mais juste la somme des équations ci-dessus.

Il nous reste à démontrer la condition (F) $\forall p \in \mathcal{P}, m(p) \geq \text{Pre}(p, t)$. Pour cela, nous pourrions procéder par induction sur la preuve de (s) dans MLL, en n'examinant que le cas des règles \otimes_L (réversible), \otimes_R et \multimap_L grâce à la propriété de la sous-formule. Toutefois, nous proposons une autre démonstration qui illustre l'usage de la sémantique des phases. Nous procédons par contraposition en supposant fausse la condition (F). Il suffit alors de montrer que (s) n'est pas prouvable, donc est non valide. Commençons. Par $\text{non}(F)$, nous savons qu'il existe une place $b \in \mathcal{P}$ telle que $m(b) \leq \text{Pre}(b, t)$ donc il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $m(b) + h = \text{Pre}(b, t)$. Cette égalité, injectée dans (E) — déjà démontrée — nous donne $m'(b) + h = \text{Post}(b, t)$. Posons alors $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \setminus \{b\}$ et détaillons les formules du séquent (s), en notant B l'atome associé à la place b :

$$\begin{aligned} M &= B^{\otimes m(b)} \otimes \left(\bigotimes_{p \in \mathcal{Q}} A_p^{\otimes m(p)} \right) & M' &= B^{\otimes m'(b)} \otimes \left(\bigotimes_{p \in \mathcal{Q}} A_p^{\otimes m'(p)} \right) \\ M_{\bullet t} &= B^{\otimes m(b)+h} \otimes \left(\bigotimes_{p \in \mathcal{Q}} A_p^{\otimes \text{Pre}(p,t)} \right) & M_{t\bullet} &= B^{\otimes m'(b)+h} \otimes \left(\bigotimes_{p \in \mathcal{Q}} A_p^{\otimes \text{Post}(p,t)} \right) \end{aligned}$$

Pour montrer que (s) n'est pas valide, construire un contre-modèle de phases \mathcal{M} suffit. Travaillons sur le monoïde $\mathbb{P} = (\mathbb{N}, +)$ en prenant $\perp_{\mathbb{P}} = \{m'(b)\}$ comme ensemble des anti-phases. Posons également les interprétations suivantes :

$$\|B\|_{\mathcal{M}} = \{1\}^{\perp\perp} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathcal{Q}, \|A_p\|_{\mathcal{M}} = \{0\}^{\perp\perp}$$

Étant donné l'interprétation comme singleton de $\perp_{\mathbb{P}}$, rappelons les résultats sur les autres singletons éléments de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de \mathbb{N} :

$$\forall z \in \mathbb{N}, \begin{cases} z \leq m'(b) \Rightarrow (\{z\}^{\perp} = \{m'(b) - z\} \text{ et } \{z\}^{\perp\perp} = \{z\}) \\ z > m'(b) \Rightarrow (\{z\}^{\perp} = \emptyset \text{ et } \{z\}^{\perp\perp} = \mathbb{N}) \end{cases}$$

De plus, sachant l'interprétation de B et des A_p , nous avons :

- quelle que soit la formule F , $\|F \otimes A_p\|_{\mathcal{M}} = \|F\|_{\mathcal{M}}$,
- pour tout $z \in \mathbb{N}$, $\|B^{\otimes z}\|_{\mathcal{M}} = \{z\}^{\perp\perp}$,
- quelles que soient les formules F et G , si $\|F\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$, alors $\|F \otimes G\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$.

Maintenant, pour interpréter les formules du séquent (s), nous avons deux cas :

1. Si $m'(b) \geq m(b)$, alors $\|M\|_{\mathcal{M}} = \{m(b)\}$ et $\|M'\|_{\mathcal{M}} = \{m'(b)\}$ et $\|M_{t\bullet}\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$, car $m'(b) + h \geq m'(b)$ donc indépendamment de $\|M_{\bullet t}\|_{\mathcal{M}}$, nous avons :

$$\|M_{\bullet t} \multimap M_{t\bullet}\|_{\mathcal{M}} = \{z \in \mathbb{N} \mid \forall q \in M_{\bullet t}, (z + q) \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

2. Si $m'(b) < m(b)$, alors $\|M\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$ et $\|M'\|_{\mathcal{M}} = \{m'(b)\}$ et $\|M_{\bullet t}\|_{\mathcal{M}} = \|M_{t\bullet}\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$, d'où :

$$\|M_{\bullet t} \multimap M_{t\bullet}\|_{\mathcal{M}} = \{z \in \mathbb{N} \mid \forall q \in \mathbb{N}, (z + q) \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

Finalement, dans les deux cas, nous avons $\|M \otimes (M_{\bullet t} \multimap M_{t \bullet})\|_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$, qui n'est pas inclus dans $\|M'\|_{\mathcal{M}} = \{m'(b)\}$ donc le séquent (S) n'est pas valide, donc il n'est prouvable. Par contraposition, nous en déduisons que si (S) est prouvable, alors la condition (F) est vraie. Sachant également (E), nous achevons la démonstration de (R) $m \xrightarrow{t} m'$. \square

V.3.3 Traduction de l'accessibilité par séquence

Sachant qu'une séquence de transitions s peut être vue comme une seule transition, via ses marquages d'entrée $\bullet s$ et $s \bullet$, nous posons la définition :

Définition 11. Soit $s \in \mathcal{T}^*$ une séquence de transitions d'un réseau de Petri \mathfrak{R} . On appelle l'*implication associée* à s la formule $M_{\bullet s} \multimap M_{s \bullet}$, notée T_s .

Nous avons alors le théorème suivant, qui généralise à une séquence celui d'accessibilité directe par franchissement d'une transition (2).

Théorème 3. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. Quels que soient m et m' deux marquages de formules respectives M et M' , et quelle que soit $s \in \mathcal{T}^*$ une séquence de transitions, nous avons :

$$m \xrightarrow{s} m' \quad \Leftrightarrow \quad M, T_s \vdash M'$$

Démonstration. Elle est en tout point similaire à celle du théorème 2 d'accessibilité directe. Simplement, au lieu de reposer sur la définition 4 de la règle de fonctionnement des réseaux, elle s'appuie sur le théorème 1 d'accessibilité par séquence. \square

Cherchons maintenant à traduire l'accessibilité entre deux marquages par une séquence de transitions donnée sans calculer préalablement les marquages d'entrée et de sortie de cette dernière. Étudions d'abord un exemple, sur le réseau \mathfrak{R} représenté figure V.12.

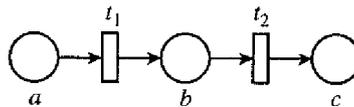


Figure V.12

Notons A , B et C les atomes des places a , b , c , et T_1 , T_2 les formules des transitions t_1 et t_2 . La traduction logique de \mathfrak{R} se résume à :

$$T_1 = A \multimap B \qquad T_2 = B \multimap C$$

En appliquant la règle de coupure aux deux séquents prouvables traduisant respectivement les franchissements de t_1 et t_2 , nous obtenons la preuve :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A, A \multimap B \vdash B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B, B \multimap C \vdash C \end{array}}{A, A \multimap B, B \multimap C \vdash C} \text{ cut}$$

dont le séquent conclusion traduit l'accessibilité du marquage c à partir du marquage a en utilisant une fois t_1 et une fois t_2 , mais n'indique pas l'ordre de franchissement des deux transitions. Rappelons en effet qu'en supposant implicites les règles structurelles d'échange, nous concevons les suites de formules de part et d'autre du tourniquet comme des multi-ensembles. Le séquent conclusion de la preuve ci-dessus s'écrit aussi :

$$A, B \multimap C, A \multimap B \vdash C$$

et n'en reste pas moins prouvable, en traduisant la même relation d'accessibilité. En revanche, le nombre d'exemplaires des formules des transitions figurant dans les prémisses du séquent conclusion n'est pas indifférent. Si par exemple nous ajoutons un exemplaire de T_1 aux prémisses du séquent ci-dessus, le séquent obtenu n'est pas équilibré. De plus, si nous appliquons la règle \otimes_L comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A, A \multimap B, A \multimap C \vdash C \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A, A \multimap B \vdash B \end{array}}{A, A, A \multimap B, A \multimap B, B \multimap C \vdash C \otimes B} \otimes_L$$

le séquent prouvé traduit cette fois l'accessibilité du marquage bc à partir du marquage aa en utilisant deux fois t_1 et une fois t_2 . Autrement dit, en plus de la relation d'accessibilité, le séquent porte dans ses prémisses un multi-ensemble de formules de transitions qui traduit le vecteur caractéristique que vérifie au moins une séquence s réalisant cette accessibilité. Nous notons $(T_t)_{t \in \bar{s}}$ ce multi-ensemble, c'est-à-dire en extension :

$$\underbrace{T_{t_1}, \dots, T_{t_1}}_{\bar{s}(t_1) \text{ fois}}, \underbrace{T_{t_2}, \dots, T_{t_2}}_{\bar{s}(t_2) \text{ fois}}, \dots$$

Comme pour les marquages, un tel multi-ensemble est implicitement une conjonction multiplicative, ce que nous explicitons via la définition ci-dessous.

Définition 12. Soit $s \in \mathcal{T}^*$ une séquence d'un réseau $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$. On appelle *conjonction associée à s* la formule :

$$S_{\bar{s}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{t \in \bar{s}} T_t = \bigotimes_{t \in \mathcal{T}} T_t^{\otimes \bar{s}(t)}$$

Comme le connecteur \otimes est commutatif, cette traduction canonique n'est pas injective : deux séquences ayant même conjonction associée ont même vecteur caractéristique, mais peuvent être distinctes, d'où finalement le résultat suivant.

Théorème 4. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. Quels que soient m et m' deux marquages de formules respectives M et M' , et quel que soit $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ un multi-ensemble de transitions, nous avons :

$$\exists s \in \mathcal{T}^*, \bar{s} = \sigma \text{ et } m \xrightarrow{s} m' \quad \Leftrightarrow \quad M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M'$$

Démonstration. Démontrons séparément les deux implications de cette équivalence. Les idées sont proches de celles de la démonstration du théorème de cohérence et de complétude dans la thèse de GEHLOT [20].

i. La première (sens \Rightarrow , cohérence) s'écrit plus simplement : si $m \xrightarrow{s} m'$, alors le séquent $M, \bar{S} \vdash M'$ est prouvable. Notons $l \in \mathbb{N}^*$ la longueur de la séquence s . D'après la définition 7, si $m \xrightarrow{s} m'$, alors il existe une suite de marquages $(m_i)_{1 \leq i \leq l+1}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad m_i \xrightarrow{s_i} m_{i+1}, \quad \text{et} \quad m = m_1, \quad m' = m_{l+1}$$

Pour tout marquage m_i et pour toute transition t_j , notons respectivement M_i et T_j leurs formules. Par le théorème 2 d'accessibilité directe, nous avons :

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad (m_i \xrightarrow{s_i} m_{i+1} \Rightarrow \underbrace{M_i, T_{s_i} \vdash M_{i+1}}_{\text{séquent } \mathcal{S}_i})$$

À partir des séquents prouvables \mathcal{S}_i , la preuve du séquent $M_1, (T_t)_{t \in \bar{s}} \vdash M_{l+1}$ s'obtient par l applications de la règle de coupure :

$$\frac{\frac{\frac{\overbrace{M_1, T_1 \vdash M_2}^{\mathcal{S}_1 \text{ prouvable}}}{M_1, T_1, T_2 \vdash M_3} \quad \frac{\overbrace{M_2, T_2 \vdash M_3}^{\mathcal{S}_2 \text{ prouvable}}}{M_3, T_3 \vdash M_4}}{\text{cut}} \quad \frac{\overbrace{M_3, T_3 \vdash M_4}^{\mathcal{S}_3 \text{ prouvable}}}{M_l, T_l \vdash M_{l+1}}}{\text{cut}} \quad \vdots \quad \frac{\overbrace{M_l, T_l \vdash M_{l+1}}^{\mathcal{S}_l \text{ prouvable}}}{M_1, T_1, T_2, \dots, T_l \vdash M_{l+1}}}{\text{cut}}$$

dont la construction par récurrence sur l s'écrit :

$$\frac{\frac{\overbrace{M_1, (T_t)_{t \in \bar{s}_1 \dots \bar{s}_{l-1}} \vdash M_l}^{\text{prouv. par hyp. de rec.}} \quad \overbrace{M_l, T_{s_l} \vdash M_{l+1}}^{\mathcal{S}_l}}{\text{cut}}}{M_1, (T_t)_{t \in \bar{s}_1 \dots \bar{s}_l} \vdash M_{l+1}}}{\text{cut}}$$

ii. Établir l'implication réciproque (sens \Leftarrow , complétude) consiste à montrer une existence de séquence s . Menons-la par récurrence sur l'entier positif λ égal à la taille du multi-ensemble σ , c'est-à-dire la somme $\sigma(t_1) + \sigma(t_2) + \dots$ de ses composantes sur \mathcal{T} . Pour $\lambda = 1$, le multi-ensemble de transitions σ est réduit à la seule transition t . C'est le cas du théorème d'accessibilité directe, donc il suffit de poser $s = t$. Soit maintenant un entier $k > 1$. Supposons que pour tout σ de taille $\lambda \leq k$ et pour tout $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$:

$$M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M' \quad \Rightarrow \quad \exists s \in \mathcal{T}^*, \quad \bar{s} = \sigma \quad \text{et} \quad m \xrightarrow{s} m'$$

Montrons que cette propriété est aussi vraie pour tout σ de taille $\lambda = k+1$. Soit un multi-ensemble σ de cette taille et soit $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$ tels que $M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M'$. Il en existe donc une preuve sans coupures et qui, étant donnée la composition des formules, n'utilise que les règles \otimes_L , \otimes_R et \multimap_L (propriété de la sous-formule). Commençons par appliquer de bas en haut autant de fois que possible la règle \otimes_L , dont la réversibilité nous garantit

que son séquent prémisses est nécessairement prouvable tant que son séquent conclusion l'est. Ainsi, nous décomposons jusqu'aux atomes la formule M :

$$\frac{\vdots \quad (A_p)_{p \in m}, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash \bigotimes_{p \in m'} A_p}{\underbrace{\bigotimes_{p \in m} A_p}_M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash \underbrace{\bigotimes_{p \in m'} A_p}_{M'}} \otimes_L$$

À partir de ce séquent prémisses, la dernière règle appliquée ne peut être que \otimes_R ou \multimap_L . S'il s'agit de \otimes_R , son application donne, en toute généralité :

$$\frac{\vdots \quad (A_p)_{p \in m_1}, (T_t)_{t \in \sigma_1} \vdash \bigotimes_{p \in m'_1} A_p \quad (A_p)_{p \in m_2}, (T_t)_{t \in \sigma_2} \vdash \bigotimes_{p \in m'_2} A_p}{(A_p)_{p \in m}, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash \bigotimes_{p \in m'} A_p} \otimes_R$$

avec $m = m_1 + m_2$, $m' = m'_1 + m'_2$ et σ_1, σ_2 de tailles respectives λ_1, λ_2 telles que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Examinons d'abord le cas où $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Alors σ_1 et σ_2 sont de tailles inférieures ou égales à k . Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\exists s_1 \in \mathcal{T}^*, \bar{s}_1 = \sigma_1 \text{ et } m_1 \xrightarrow{s_1} m'_1 \quad \text{et} \quad \exists s_2 \in \mathcal{T}^*, \bar{s}_2 = \sigma_2 \text{ et } m_2 \xrightarrow{s_2} m'_2$$

Sachant les propriétés de la relation l'accessibilité, nous en tirons les deux possibilités :

$$(m_1 + m_2) \xrightarrow{s_1 s_2} (m'_1 + m'_2) \quad \text{et} \quad (m_1 + m_2) \xrightarrow{s_2 s_1} (m'_1 + m'_2)$$

Il existe donc deux séquences de transitions dont le franchissement permet d'atteindre m' depuis m , ce qui démontre le théorème. Mais que se passe-t-il si, par exemple, $\lambda_1 = 0$? Alors le premier séquent prémisses est purement tensoriel, et comme par hypothèse il est prouvable, nous avons nécessairement $m_1 = m'_1 \neq 0$, marquage qui apparaît contextuel par rapport à l'accessibilité. Quant au deuxième séquent prémisses, il revient au cas du séquent conclusion puisque $\sigma_2 = \sigma$, mais avec $m_2 = m - m_1$. Ce cas d'application de la règle \otimes_R ne peut donc se produire qu'un nombre fini de fois, puisqu'il faut que $m_1 \neq 0$. Regardons maintenant l'application de la règle \multimap_L , dont la formule principale est l'une des implications de $(T_t)_{t \in \sigma}$. Notons u la transition dont elle est la formule associée ; cette dernière s'écrit donc $T_u \stackrel{\text{def}}{=} M_{\bullet u} \multimap M_{u \bullet}$. En toute généralité, nous avons :

$$\frac{\vdots \quad (A_p)_{p \in m_1}, (T_t)_{t \in \sigma_1} \vdash M_{\bullet u} \quad M_{u \bullet}, (A_p)_{p \in m_2}, (T_t)_{t \in \sigma_2} \vdash \bigotimes_{p \in m'} A_p}{(A_p)_{p \in m}, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash \bigotimes_{p \in m'} A_p} \multimap_L$$

avec $m = m_1 + m_2$ et σ_1, σ_2 de tailles respectives λ_1, λ_2 telles que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + 1$, puisque T_u a été décomposée. Dans tous les cas, σ_1 et σ_2 sont de tailles inférieures ou égales à k , donc par hypothèse de récurrence :

$$\exists s_1 \in \mathcal{T}^*, \bar{s}_1 = \sigma_1 \text{ et } m_1 \xrightarrow{s_1} \bullet u \quad \text{et} \quad \exists s_2 \in \mathcal{T}^*, \bar{s}_2 = \sigma_2 \text{ et } (u \bullet + m_2) \xrightarrow{s_2} m'$$

À la première relation d'accessibilité, nous pouvons additionner invariablement aux deux termes le marquage m_2 , ce qui donne la transitivité avec la deuxième relation :

$$(m_1 + m_2) \xrightarrow{s_1} (*u + m_2) \xrightarrow{s_2} m'$$

d'où l'existence d'une séquence rendant accessible m' depuis m . Tous les cas ayant été examinés, la propriété de récurrence est démontrée au rang $k + 1$. \square

Faisons quelques remarques sur cette démonstration. Primo, entre la cohérence et la complétude, la preuve proposée au séquent $M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M'$ (notons-le \mathcal{S}) est différente : dans premier cas, elle emploie essentiellement des coupures tandis que dans l'autre cas, elle en est exempte. Sachant que la structure de la preuve retrace une séquence de transitions s telle que $m \xrightarrow{s} m'$, au moins deux traductions dans le calcul des séquents de la loi de concaténation de \mathcal{T}^* sont possibles : soit comme coupure, soit comme une application de la règle \multimap_L . Secundo, la démonstration de complétude donne l'existence d'une séquence s à partir de l'existence d'une preuve du séquent \mathcal{S} mais ne fournit pas un algorithme effectif permettant de calculer l'expression de s . En effet, nous ne sommes capables de choisir ni quelle règle appliquer en premier (de bas en haut), ni comment l'appliquer exactement (choix de la formule principale, répartition du contexte, etc.).

Pour achever les bases de la traduction en logique linéaire de l'accessibilité par séquence dans les réseaux de Petri, nous avons le théorème suivant, qui montre que l'équation fondamentale des réseaux de Petri est l'expression algébrique d'un corollaire du critère d'équilibrage des séquents multiplicatifs.

Théorème 5. Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau et \mathfrak{M} ses marquages. Quels que soient m et m' deux marquages de formules associées respectives M et M' , et $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ un multi-ensemble sur \mathcal{T} , le séquent multiplicatif $M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M'$ est équilibré si et seulement si $m' = m + C.\sigma$.

Démonstration. Les calculs sont analogues à ceux de la démonstration de complétude du théorème d'accessibilité directe. La forme unilatérale du séquent \mathcal{S} de l'énoncé est :

$$\vdash \prod_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\perp \mathfrak{M}(p)}, \left(\bigotimes_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\otimes Pre(p,t)} \otimes \prod_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\perp \mathfrak{M} Post(p,t)} \right)_{t \in \sigma}, \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} A_p^{\otimes m'(p)}$$

Par définition, ce séquent est équilibré si et seulement si :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad -m(p) + \underbrace{\sum_{t \in \sigma} (Pre(p,t) - Post(p,t))}_{\Sigma(p)} + m'(p) = 0$$

La suite est un simple jeu d'écritures algébriques. D'une part, la somme discrète $\Sigma(p)$ dont t est une variable muette s'écrit aussi :

$$\Sigma(p) = \sum_{t \in \mathcal{T}} (Pre(p,t) - Post(p,t)) \sigma(t)$$

D'autre part, chaque composante $\delta m_\sigma(p)$ du produit matriciel $C.\sigma$ s'écrit :

$$\delta m_\sigma(p) = \sum_{t \in \mathcal{T}} C(p, t) \sigma(t) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \left(-Pre(p, t) + Post(p, t) \right) \sigma(t)$$

Les équations d'équilibrage et d'accessibilité sont donc équivalentes. \square

V.3.4 Traduction de l'accessibilité générale

Finalement, nous arrivons au théorème de cohérence et de complétude entre la relation d'accessibilité générale dans un réseau et la prouvabilité dans LL des séquents traduisant cette relation. Il s'agit d'un résultat analogue à celui démontré par GEHLOT dans le fragment tensoriel de LL augmenté d'axiomes propres, et à celui démontré par CERVESATO dans sa variante MILL^{P/T} du calcul des séquents linéaires intuitionnistes.

Théorème 6. *Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau et \mathfrak{M} ses marquages. Quels que soient m et m' deux marquages de formules respectivement notées M et M' , nous avons :*

$$m \longrightarrow m' \quad \Leftrightarrow \quad M, (!T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash M'$$

Notre approche se démarque des précédentes à la fois par la simplicité de la démonstration, et par le fait que nous la menons dans le pur calcul des séquents linéaires. Avant tout, ce résultat apparaît comme un corollaire du théorème de finitude que nous avons démontré au chapitre précédent (cf. section IV.2.5).

Démonstration. Les formules T_t associées aux transitions $t \in \mathcal{T}$ ainsi que M et M' étant toutes multiplicatives, le séquent $M, (!T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash M'$ est prouvable si et seulement s'il existe un multi-ensemble $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que le séquent $M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M'$ soit prouvable. Par le théorème 4 d'accessibilité par séquence, nous en déduisons la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une séquence de transitions $s \in \mathcal{T}^*$ telle que $\bar{s} = \sigma$ et $m \xrightarrow{s} m'$. Par la définition même de la relation d'accessibilité générale, nous avons bien $M, (!T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash M'$ si et seulement si $m \longrightarrow m'$. \square

Cette démonstration montre bien comment les propriétés du connecteur *bien sûr* — propriétés ici cernées par le théorème de finitude utilisé au début — s'ajoutent à celles des connecteurs *fois* et *entraîne* exprimées par les résultats précédents pour aboutir à ce résultat le plus général. Nous pouvons en augmenter légèrement la portée à l'accessibilité dans un sous-réseau, en considérant à la place de \mathcal{T} un sous-ensemble $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Plus généralement cela revient à combiner les théorèmes 4 et 6 dans le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ un réseau, \mathfrak{M} ses marquages et $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$ une partition de \mathcal{T} . Quels que soient m et m' deux marquages, de formules respectives notées M et M' , et $\sigma_1 : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathbb{N}$ un multi-ensemble de transitions, nous avons :*

$$(\exists s \in \mathcal{T}^*, (\forall t \in \mathcal{T}_1, \bar{s}(t) = \sigma_1(t)) \text{ et } m \xrightarrow{s} m') \quad \Leftrightarrow \quad M, (T_t)_{t \in \sigma_1}, (!T_t)_{t \in \mathcal{T}_2} \vdash M'$$

En d'autres termes, si nous fixons uniquement sur \mathcal{T}_1 les composantes d'un multi-ensemble σ de transitions, alors nous laissons libres celles sur \mathcal{T}_2 , donc seules les formules traduisant les transitions de \mathcal{T}_2 doivent être préfixées par le connecteur *bien sûr*.

Démonstration. La démonstration est encore une fois très rapide. Par le théorème de finitude, on se ramène au cas du théorème 4 par l'existence d'un multi-ensemble $\sigma_2 : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ tel que le séquent $M, (T_t)_{t \in \sigma_1}, (T_t)_{t \in \sigma_2} \vdash M'$ soit prouvable. On en déduit donc par équivalence qu'il existe une séquence $s \in \mathcal{T}^*$ telle que $\bar{s} = \sigma_1 + \sigma_2$ et $m \xrightarrow{s} m'$. Comme \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont par hypothèse disjoints, nous avons $\forall t \in \mathcal{T}_1, \bar{s}(t) = \sigma_1(t)$. \square

Chapitre VI

Conclusions et perspectives

VI.1 Récapitulatif de nos contributions

Avant tout, rappelons la problématique que nous avons cernée au chapitre I : formuler des raisonnements sur le fonctionnement des réseaux de Petri, afin de répondre par des arguments logiques à des questions relatives à ce fonctionnement (questions dont le caractère logique s'exprime en termes de possibilité, de nécessité, de causalité, etc.). Comme premier travail répondant à cette problématique, nous avons identifié la formalisation logique du fonctionnement des réseaux de Petri, sans laquelle aucun raisonnement n'est concevable. En requérant de cette formalisation qu'elle exprime tout changement de marquages sous une forme propositionnelle implicative, nous avons écarté en premier lieu la logique classique, qui ne traite que des vérités éternelles, et en second lieu la logique modale, dont les raisonnements supposent la donnée préalable du graphe des marquages accessibles. Bien entendu, notre exigence aurait abouti à un échec s'il n'avait existé la perspective d'une issue : la logique linéaire. Nous nous sommes donc fixés l'objectif de développer les bases de la *formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri* — c'est le titre de notre thèse. Rappelant que ce thème avait fait l'objet de recherches quelques années auparavant, nous nous sommes proposés d'en reprendre l'étude avec une méthode nouvelle et précise : d'une part aborder le fonctionnement des réseaux par difficultés progressives, et d'autre part n'employer que la logique linéaire définie par GIRARD, à l'exclusion de toute modification ou de tout autre formalisme.

Pour guider notre traduction formelle des réseaux de Petri en logique linéaire, nous avons d'abord cherché une signification intuitive aux raisonnements en logique linéaire. Sachant l'interprétation du fonctionnement des réseaux en termes de consommation et de

production de jetons, il était naturel de chercher une interprétation fondée sur les mêmes principes. Partant des éléments proposés par GIRARD dans ses articles didactiques, nous en avons relevé les limites et, pour y remédier, nous nous sommes engagés au chapitre II dans un travail de définition des notions primitives de la logique linéaire. Nous avons procédé par analogies/différences avec celles de la logique classique, en introduisant une nouvelle terminologie. À la notion de proposition classique, nous avons fait correspondre celle de ressource, qui se démarque de la première en ce qu'une même ressource peut se concevoir en plusieurs exemplaires. À la notion de déduction classique, nous avons fait correspondre celle d'action, qui s'en distingue parce que non seulement les actions, contrairement aux déductions classiques, peuvent être en conflit, mais aussi parce que les actions n'ont de sens qu'en terme de possibilité, et non pas de nécessité. Enfin, aux notions duales de vérité/fausseté classiques, nous avons fait correspondre celles de consommabilité/productibilité, différentes des deux premières à plusieurs égards : au lieu d'être un couple de valeurs fixes et universelles pour les propositions, la consommabilité et la productibilité sont a priori des grandeurs susceptibles de variations, d'où l'existence implicite d'une dimension temporelle. De plus, chacune traduit, au point de vue d'un observateur donné, au moins deux sortes de cumul d'exemplaires de ressources, en série et en parallèle.

Sur la base de ces nouvelles notions, nous avons développé au chapitre III une interprétation concrète pour tous les connecteurs linéaires, en nous appuyant sur leurs propriétés syntaxiques exprimées par des séquents, et en nous référant à des exemples familiers de consommation/production. Si nous avons repris en grande partie les explications de GIRARD quant au sens des connecteurs multiplicatifs *fois*, *entraîne*, des additifs *avec*, *plus*, et de la conjonction exponentielle *bien sûr*, nous avons en revanche proposé une interprétation originale pour la négation linéaire *nil*, la disjonction multiplicative *par*, et la disjonction exponentielle *pourquoi pas*. Plutôt que d'interpréter la négation d'une proposition comme un changement de point de vue selon une dualité consommateur/producteur, nous l'avons présentée comme l'inversion du sens du temps pour l'exemplaire de la ressource à laquelle correspond la proposition : considérer une formule positive (respectivement négative) signifie s'intéresser à son futur (respectivement son passé). Plutôt que d'interpréter la disjonction *par* de deux formules comme une « action de vase communicant » entre elles (notion imprécise qui ne nous permettait pas de comprendre le sens de $A \text{ par } A$), nous avons proposé l'idée de cumul disjoint, différente de celle de cumul conjoint exprimée par la conjonction *fois*. Quant à notre interprétation de la disjonction exponentielle *pourquoi pas*, elle résulte de l'interprétation des deux disjonctions *par* et *plus*. Parmi nos contributions figurent aussi les interprétations, à notre connaissance inédites, des propriétés remarquables des connecteurs linéaires. En particulier, nous avons interprété la semi-associativité entre *fois* et *par* en termes de partage et de concurrence, et les (semi-)distributivités entre connecteurs multiplicatifs et additifs en terme d'antériorité de choix. Enfin, nous avons approfondi notre interprétation de la négation linéaire en montrant sa cohérence avec tous les rapports de dualité entre connecteurs.

Puis nous avons présenté au chapitre IV un exposé mathématique des définitions et résultats de la logique linéaire que nous allons exploiter pour notre traduction formelle du fonctionnement des réseaux de Petri. Outre les bases du calcul des séquents pour la construction de preuves, nous avons énoncé les principales propriétés relatives à cette

syntaxe : la redondance de la règle de coupure, le principe de la sous-formule, la réversibilité de certaines règles, la complexité de la prouvabilité dans différents fragments, et le théorème de finitude permettant de réduire dans les cas simples un séquent prouvable exponentiel-multiplicatif à un séquent prouvable multiplicatif paramétré par des entiers naturels. Ensuite, nous avons présenté les bases de la sémantique des phases pour le fragment multiplicatif-additif, et développé des interprétations géométriques inédites à la notion de fait engendré par bi-orthogonalité. Ces développements nous semblent apporter une intuition appréciable des abstractions requises par la sémantique des phases.

Forts de ces études, nous nous sommes consacrés, au chapitre V, à la traduction formelle des réseaux de Petri en logique linéaire. Préalablement, nous avons rappelé les définitions fondamentales de la théorie des réseaux, en dégagant la définition mathématique du fonctionnement de son interprétation en terme de changement d'état d'automate. De plus, nous avons développé la notion de marquage de sortie d'une séquence de transition, symétrique de celle, déjà étudiée, de marquage d'entrée. Ensuite, nous avons procédé à une étude technique et critique des traductions déjà publiées, en illustrant leurs principes et leurs limites par des exemples simples. Des trois grandes approches distinguées, nous avons retenu les idées essentielles de traduire chaque place par un atome distinct (autrement dit, une ressource), tout marquage par une conjonction multiplicative d'atomes (donc, un cumul conjoint d'exemplaires de ressources) et toute transition par une implication linéaire (donc, une ressource d'action) entre deux conjonctions multiplicatives traduisant respectivement ses marquages d'entrée et de sortie. En revanche, nous avons rejeté l'idée de préfixer systématiquement par le connecteur *bien sûr* les implications traduisant les transitions. Autrement dit, nous avons choisi de les considérer a priori comme des ressources ordinaires. Cette idée nous a permis d'aboutir à une formalisation plus fine du fonctionnement des réseaux. Nous avons énoncé et démontré plusieurs théorèmes exprimant l'équivalence entre des relations d'accessibilité de plus en plus complexes entre marquages et la prouvabilité de séquents traduisant ces marquages. Le théorème 4 traduisant l'accessibilité par une séquence dont le vecteur caractéristique est connu nous semble le plus important. En comparaison, le théorème 2 d'accessibilité directe n'est qu'un cas particulier ; néanmoins, sa démonstration a permis d'illustrer un usage de la sémantique des phases qui peut s'appliquer à des exemples simples pour montrer une non-accessibilité, par projection sur la composante insuffisante du marquage de départ. Quant au théorème 6 relatif à l'accessibilité générale sur lequel se sont focalisés les travaux des autres auteurs — sans toutefois l'exprimer dans la logique linéaire pure —, nous avons montré qu'il était une conséquence directe du théorème 4 et du théorème de finitude démontré lors de notre étude du calcul des séquents. Enfin, n'oublions pas le résultat essentiel que nous avons exhibé par le théorème 5 : l'équation fondamentale des réseaux apparaît comme la simple expression algébrique d'un corollaire du critère d'équilibrage des séquents multiplicatifs prouvables, ce qui illustre encore les liens profonds existant entre les réseaux de Petri et la logique linéaire.

VI.2 Portée et limite de nos résultats

L'objectif de cette thèse était de formaliser logiquement le fonctionnement des réseaux de Petri. Avec nos théorèmes de traduction des relations d'accessibilité entre marquages par des séquents linéaires prouvables, nous proposons précisément une formalisation directe, et somme toute assez simple, du franchissement d'une séquence de transitions (c'est le fonctionnement fondamental des réseaux de Petri) dans la pure logique linéaire propositionnelle, laquelle n'a aucunement été définie à cet effet. A posteriori, les aspects logiques que l'intuition percevait dans la définition de la règle de fonctionnement des réseaux (*si... alors...*) apparaissent comme les éléments d'analogie de l'implication linéaire *entraîne* par rapport à l'implication classique, qui était au départ la seule référence cognitive. Mais il est clair qu'il ne suffisait pas de redéfinir l'implication classique de façon ad hoc ; l'expression logique du cumul d'exemplaires de jetons que permet le connecteur *fois* est incontestablement un autre élément indispensable de la traduction. En définissant ces deux connecteurs au sein d'un système aux symétries profondes, selon plusieurs syntaxes (calcul des séquents, réseaux de preuves) et plusieurs sémantiques (phases, espaces cohérents, jeux, etc.) adéquates et complètes par rapports aux syntaxes, nous concevons désormais la logique linéaire comme *la* logique du fonctionnement des réseaux. À notre opinion, elle reformule dans un cadre plus large et mieux fondé la traduction d'un réseau en un système de réécriture, formalisme dont l'intérêt s'était fait sentir auparavant, mais pourtant sans faire l'objet d'un usage fréquent.

Pour la théorie des réseaux de Petri, le caractère purement logique de la formalisation en logique linéaire se démarque radicalement des expressions algébriques du fonctionnement par les relations binaires d'accessibilité, et révèle de ce fonctionnement des aspects plus fondamentaux. Par exemple — nous le supposons déjà, mais cela nous paraît maintenant tout à fait clair — il est incongru de définir la notion de capacité de place de manière primitive, c'est-à-dire en dotant la définition d'un réseau par quadruplet $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ d'un cinquième élément $Cap : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ et en augmentant les deux conditions de la règle de franchissement d'une transition $m \geq \bullet t$ et $m' = m - \bullet t + t \bullet$ d'une troisième condition $m' \leq Cap$. En effet, en logique linéaire, aucune notion analogue à celle de capacité ne conditionne primitivement la prouvabilité d'un séquent : si $F \vdash G$ est prouvable, alors quelle que soit la formule H , le séquent $F \otimes H \vdash G \otimes H$ est aussi prouvable, par application des règles \otimes_L et \otimes_R . Exprimer logiquement une condition de capacité sur un atome A , en tant que conclusion d'une déduction linéaire, n'est possible que via un atome A' tel que toute production d'exemplaires de A coïncide avec une consommation d'autant d'exemplaires de A' et vice-versa, autrement dit selon une stricte analogie de la notion de place complémentaire dans un réseau de Petri.

Il reste alors à comprendre quelles facultés d'analyse de propriétés procure la formalisation logique du fonctionnement des réseaux de Petri. En particulier, il est légitime de s'interroger sur la possibilité de prouver logiquement des propriétés structurelles comme des invariants linéaires de places, en prenant comme prémisses les formules traduisant la structure du réseau, autrement dit les formules associées aux transitions et préfixées par le connecteur *bien sûr*. Naturellement, une propriété structurelle comme un invariant linéaire de places devrait aussi être caractérisée par une formule de la forme $!F$. Mal-

heureusement, cette vue simpliste se heurte au constat suivant. Supposons que le séquent $(!T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash !F$ soit prouvable; alors le séquent $!G, (!T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash !F$ est lui aussi prouvable quelle que soit la formule G , laquelle peut notamment traduire l'ajout d'une transition arbitraire au réseau. Or en aucun cas une telle transformation structurelle ne conserve dans le cas général les invariants linéaires de places; donc une formule telle que $!F$ ne peut en caractériser un. Une autre façon de percevoir cette limite consiste à rappeler notre interprétation concrète des propositions linéaires, et ce faisant de revenir à la question que nous avons posée en introduction, quand nous avons remarqué que la formulation « *il y a un jeton dans la place a* » menait à des vues paradoxales. Sur deux exemples simples de réseaux, nous avons illustré qu'une proposition $!A$ correspondait à une transition source en entrée de la place a , et non pas un réseau conservatif en boucle élémentaire sur la place a munie d'un jeton au marquage initial. En rejetant toute référence à la notion de vérité, nous avons montré que l'interprétation des propositions de logique linéaire comme des ressources permettait d'éviter l'écueil de concevoir $!A$ comme exprimant une vérité éternelle. Or c'est précisément ce que l'on souhaiterait pour traduire un invariant linéaire de places $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$, qui sous-tend une proposition de logique classique quantifiée: pour tout marquage accessible depuis un marquage initial m_0 , on a $\tau f.m = \tau f.m_0$. À notre avis, une telle proposition n'est fondamentalement pas exprimable en logique linéaire propositionnelle, parce qu'il s'agit d'une vérité éternelle universelle sur les marquages accessibles du réseau, et non d'une ressource.

En revanche, les invariants de transitions, c'est-à-dire les séquences de transitions dont le marquage d'entrée est égal au marquage de sortie, se traduisent naturellement en logique linéaire par une implication dont l'antécédent et le succédent sont la même conjonction multiplicative d'atomes. Plus précisément, de notre théorème 4, nous déduisons directement le corollaire suivant. Soit \mathfrak{R} un réseau de Petri, \mathcal{T} l'ensemble de ses transitions et \mathfrak{M} l'ensemble de ses marquages. La séquence $s \in \mathcal{T}^*$ est un invariant de transitions de \mathfrak{R} si et seulement s'il existe un marquage $m \in \mathfrak{M}$, de formule associée M , tel que le séquent $(T_t)_{t \in \bar{s}} \vdash M \multimap M$ soit prouvable. Toutefois, la logique linéaire n'apporte à notre connaissance pas de méthode pour déterminer les éventuels invariants de transitions d'un réseau, ni même ses composantes répétitives stationnaires, c'est-à-dire les solutions entières positives, si elles existent, de l'équation $C.\sigma = 0$.

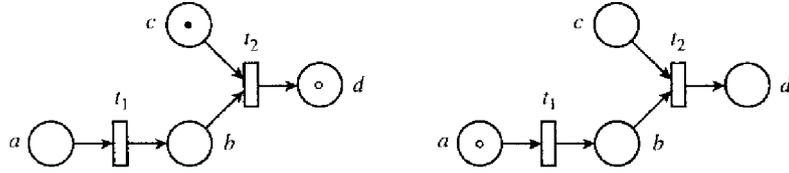
Ce constat ne nous conduit pourtant pas à abandonner la recherche sur les applications de la logique linéaire aux réseaux de Petri. En effet, observons qu'avec l'algèbre linéaire, on sait que le calcul des composantes conservatives comme celui des composantes répétitives stationnaires d'un réseau de Petri sont des problèmes de classe NP-*complet* et on connaît déjà des algorithmes les résolvant. Même si la logique linéaire permettait de trouver des algorithmes plus efficaces, l'avancée resterait modeste. Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'intérêt de la logique linéaire pour la théorie des réseaux de Petri est avant tout dans l'expressivité qu'apportent ses connecteurs pour décrire de manière simple les aspects fondamentaux du fonctionnement des réseaux de Petri, et leurs combinaisons en des mécanismes complexes. C'est donc en particulier dans cette voie que nous envisageons nos perspectives de recherches consécutives à ces travaux de thèse.

VI.3 Perspectives de recherches

À partir de notre traduction avec les connecteurs *fois* et *entraîne* du fonctionnement des réseaux de Petri, les autres connecteurs linéaires permettent d'exprimer des aspects plus complexes. Pour en montrer les premières possibilités, il nous suffit de transposer au fonctionnement des réseaux les paradigmes concrets d'interprétation proposés au chapitre III. Commençons par la négation linéaire. Si m est un marquage de formule associée M , nous interprétons M^\perp par un marquage qui obéit à une règle de fonctionnement inverse, comme si le sens des arcs du réseau étaient inversés. En fait, du théorème 4 et des règles de $(-)^{\perp}$ qui sont réversibles, nous tirons facilement le résultat suivant. Soient m, m' et m'' trois marquages d'un réseau de Petri \mathfrak{R} et σ un multi-ensemble des transitions de ce dernier. Avec nos notations usuelles, nous avons :

$$M^\perp, M', (T_i)_{i \in \sigma} \vdash M''^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathcal{T}^*, \bar{s} = \sigma \text{ et } (m' + m'') \xrightarrow{s} m$$

En d'autres termes, le séquent ci-dessus signifie : pour que m soit productible sachant que m' est consommable, il suffit de que m'' soit productible, ce qui correspond typiquement à un raisonnement de diagnostic de fonctionnement. Illustrons ceci sur un exemple, en représentant les jetons rétro-franchissants — disons les *rétro-jetons* — par des disques blancs. Ci-dessous, le réseaux de Petri de droite est obtenu à partir de celui de gauche par rétro-franchissement de la séquence $t_1 t_2$.



Décomposons cette opération. À partir du rétro-jeton dans la place d , nous en obtenons un dans la place b et un dans c , par rétro-franchissement de t_2 , ce qui se traduit par :

$$D^\perp, C, (B \otimes C) \multimap D \vdash (B^\perp \wp C^\perp) \otimes C$$

en rappelant que toute implication $(F \otimes G) \multimap (H \otimes K)$ est équivalente à sa forme contraposée $(H^\perp \wp K^\perp) \multimap (F^\perp \wp G^\perp)$. Ensuite, le jeton et le rétro-jeton dans la place c s'annulent car nous avons d'abord $(B^\perp \wp C^\perp) \otimes C \vdash B^\perp \wp (C^\perp \otimes C)$ — c'est la semi-associativité entre \otimes et \wp — et puis $C^\perp \otimes C \vdash \perp$ et $B^\perp \wp \perp \vdash B^\perp$. Finalement, après rétro-franchissement de t_1 , nous traduisons l'opération de la figure ci-dessus par :

$$D^\perp, C, A \multimap B, (B \otimes C) \multimap D \vdash A^\perp$$

Autrement dit, nous diagnostiquons le manque d'un jeton dans la place d par le manque d'un jeton dans la place a . Il reste à étudier dans quelle mesure interfèrent jetons et rétro-jetons, car les relations entre les connecteurs *fois* et *par* sont complexes. Une motivation pour cette perspective de recherche tient au fait que le sens de franchissement des transitions ne donnent pas globalement les mêmes résultats d'accessibilité : pour un réseau dont la structure est conservative (donc borné quel que soit son marquage initial),

l'ensemble des marquages accessibles n'est pas toujours équipotent à celui des marquages *rétro-accessibles*. La logique linéaire devrait permettre de mieux comprendre ces aspects.

Regardons maintenant l'expressivité du connecteur *par*, que nous interprétons comme un opérateur de cumul disjoint. Comme il possède les mêmes propriétés fondamentales que le connecteur *fois* (associativité, commutativité, non idempotence, élément neutre), il permet également de traduire tous les marquages d'un réseau. Donc, nos théorèmes de traduction restent valables en changeant systématiquement les occurrences de \otimes en \wp . D'ailleurs, c'est sous cette forme qu'apparaît la traduction du réseau quand nous cherchons à exprimer des rétro-franchissements : aussi bien le marquage courant que ceux d'entrée et de sortie des transitions se traduisent par des disjonctions multiplicatives d'atomes négatifs. Mais l'expressivité du connecteur *par* nous semble surtout intéressante quand elle interfère avec celle du connecteur *fois*. Soient m et m' deux marquages d'un réseau de Petri \mathfrak{R} , dont les conjonctions multiplicatives associées sont M et M' . La formule $M \wp M'$ traduit deux multi-ensembles *indépendants* de jetons, et non pas le marquage $m + m'$ que traduit $M \otimes M'$. Plus généralement, le connecteur *par* permet de considérer des multi-ensembles indépendants de marquages, disons des *multi-marquages*. Cette indépendance est relative aux franchissements des transitions dans une acception généralisée : une transition t de formule associée $M_1 \multimap M_2$ n'est franchissable depuis le multi-marquage correspondant à $M \wp M'$ que si elle est ordinairement franchissable depuis M ou depuis M' . Supposons par exemple que $M = M_1 \otimes K$. Alors le franchissement de t produit le nouveau multi-marquage correspondant à $(M_2 \otimes K) \wp M'$: les jetons produits sont toujours indépendants de ceux de m' . Notons que la distinction des différents marquages d'un multi-marquage ne correspond pas à la notion bien connue de coloration, car dans $M \wp M$, il n'est pas possible de distinguer les deux composantes — contrairement à des groupes de jetons de couleurs différentes —, de même que dans un marquage ordinaire on ne peut distinguer les jetons de même type. Dans $M \wp M$, les deux exemplaires du marquage m apparaissent disjoints, mais pas individualisés. En fait, tout se passe comme si les jetons d'un multi-marquage étaient « gérés » par *plusieurs joueurs indépendants*. Avec cette notion, nous pouvons exprimer des relations de concurrence ou de partage par rapport à des transitions, à commencer par la conjecture suivante, essentiellement issue de notre théorème 4. Soient m_1, m_2, m_3 et m_4 quatre marquages d'un réseau de Petri \mathfrak{R} — sans transitions sources — et σ un multi-ensemble de transitions de ce dernier. Avec nos notations usuelles, il est vraisemblable que :

$$M_1 \wp M_2, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash M_3 \wp M_4 \quad \Leftrightarrow \\ \exists (s_1, s_2) \in \mathcal{T}^{\star 2}, \bar{s}_1 + \bar{s}_2 = \sigma \text{ et } \left(\left\{ \begin{array}{l} m_1 \xrightarrow{s_1} m_3 \\ m_2 \xrightarrow{s_2} m_4 \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} m_1 \xrightarrow{s_1} m_4 \\ m_2 \xrightarrow{s_2} m_3 \end{array} \right\} \right)$$

Dans cette relation d'accessibilité, les transitions du multi-ensemble σ sont partagées dans les deux séquences s_1 et s_2 . Lorsque le réseau \mathfrak{R} possède des transitions sources (c'est-à-dire sans places d'entrée), la relation d'accessibilité se complique. On tombe dans le cas général où, étant donnés deux autres marquages $(m, m') \in \mathfrak{M}^2$ de \mathfrak{R} , le séquent :

$$(M_1 \wp M_2) \otimes M, (T_t)_{t \in \sigma} \vdash (M_3 \wp M_4) \otimes M'$$

exprime une relation d'accessibilité pour laquelle au départ, le marquage m est partagé entre m_1 et m_2 . D'un point de vue applicatif, il nous semble que l'expressivité du connecteur *par* permettrait de formaliser des notions comme par exemple l'*autonomie d'agents* manipulant des ressources.

Les connecteurs additifs *avec* et *plus* peuvent également s'incorporer aux séquents traduisant des relations d'accessibilité pour exprimer des mécanismes plus complexes. En les appliquant aux formules traduisant les marquages d'un réseau de Petri, nous pouvons d'abord exprimer des ensembles de marquages alternatifs vis-à-vis duquel le joueur dispose de certains degrés de liberté. Par exemple, soient m_1 , m_2 , m' trois marquages d'un réseau \mathfrak{R} , et un multi-ensemble de transitions de ce dernier. À partir du théorème 6, nous conjecturons les deux propositions suivantes :

$$M_1 \& M_2, !(T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash M' \quad \Leftrightarrow \quad (m_1 \longrightarrow m' \text{ ou } m_2 \longrightarrow m')$$

$$M_1 \oplus M_2, !(T_t)_{t \in \mathcal{T}} \vdash M' \quad \Leftrightarrow \quad (m_1 \longrightarrow m' \text{ et } m_2 \longrightarrow m')$$

Bien entendu, ces deux conjectures se déclinent par dualité en appliquant les connecteurs additifs aux formules de marquages d'arrivée dans les relations d'accessibilité. Plus généralement, nous pouvons distribuer des occurrences des connecteurs *avec* et *plus* au sein des conjonctions multiplicatives traduisant les marquages selon une combinatoire d'une complexité sans limite. De surcroît, d'autres aspects du fonctionnement d'un réseau peuvent s'exprimer en appliquant les connecteurs additifs aux formules des transitions. Par exemple, soient m et m' deux marquages et σ_1 , σ_2 deux multi-ensembles de transitions d'un réseau \mathfrak{R} . Nous conjecturons d'une part :

$$M, \left(\bigotimes_{t \in \sigma_1} T_t \right) \& \left(\bigotimes_{t \in \sigma_2} T_t \right) \vdash M' \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathcal{T}^*, (\bar{s} = \sigma_1 \text{ ou } \bar{s} = \sigma_2) \text{ et } m \xrightarrow{s} m'$$

et d'autre part :

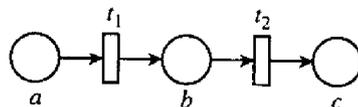
$$M, \left(\bigotimes_{t \in \sigma_1} T_t \right) \oplus \left(\bigotimes_{t \in \sigma_2} T_t \right) \vdash M' \quad \Leftrightarrow \quad \exists (s_1, s_2) \in \mathcal{T}^{*2}, \begin{cases} \bar{s}_1 = \sigma_1 \text{ et } m \xrightarrow{s_1} m' \\ \bar{s}_2 = \sigma_2 \text{ et } m \xrightarrow{s_2} m' \end{cases}$$

Là encore, toutes les combinaisons sont imaginables, ce qui donne matière à étude. De plus, nous augurons des applications de l'expressivité des connecteurs additifs à la représentation simple de fonctionnements dont l'expression par réseaux de Petri est lourde, tels les mécanismes d'*arrêts d'urgence* et de *reprise après défaillance* dans les systèmes de production.

L'expressivité des connecteurs linéaires n'est pas la seule perspective de recherche que nous envisageons. Parmi les raisons d'employer des séquents linéaires pour traduire des relations d'accessibilité, l'analyse des preuves que permet le calcul des séquents devrait contribuer à éclaircir la notion d'*entrelacement*. Rappelons que l'idée de GUNTER et GEHLOT de traduire la parallélisation maximale d'une séquence de franchissements par réduction des coupures se heurte à des contre-exemples rédhibitoires. De notre côté, nous avons publié dans les articles [34, 35] des règles de calcul de séquences entrelacées

par blocs, formulées dans le style de la déduction naturelle. Il nous semblerait intéressant de reprendre ce thème avec le calcul des séquents linéaires sans axiomes propres, en étudiant les résultats de l'algorithme d'élimination des coupures pour une preuve d'un séquent d'accessibilité construite en appliquant une coupure à chaque franchissement de transition. Cela dit, à première vue, la construction de preuves en calcul des séquents fait apparaître de nombreuses opérations liées à des détails taxinomiques qui ne sont pas pertinents au sens du fonctionnement d'un réseau. C'est pourquoi nous pensons aussi à développer cette étude avec la syntaxe des réseaux de preuves, qui s'affranchit autant que possible des détails de la taxinomie.

Enfin, nous réfléchissons à une autre application de la logique linéaire à la théorie des réseaux de Petri, qui cette fois ne concerne pas le fonctionnement : la *formalisation logique des règles de réduction*. Cette perspective découle naturellement de notre idée de considérer comme des ressources consommables et productibles les formules traduisant les transitions. Considérons par exemple une structure de réseau représentée ci-dessous :



Il semble que l'on puisse traduire la *substitution* de la place b par le séquent :

$$A \multimap B, B \multimap C \vdash A \multimap C$$

De plus, si la place b admet plusieurs transitions amonts et avalés, la traduction reste possible, avec plusieurs exemplaires des formules des transitions. Mais quant à la formalisation des autres règles de réduction, la difficulté paraît supérieure.

Annexe A

Calcul des séquents classiques

A.1 Calcul des séquents classiques standards LK

Règles de formation

$$\begin{aligned}\langle F \rangle &::= A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n \mid \top \mid \perp \\ &\quad \mid \neg \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \wedge \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \vee \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \Rightarrow \langle F \rangle \\ \langle \Gamma \rangle &::= \cdot \mid \langle \Gamma \rangle, \langle F \rangle \\ \langle \mathcal{S} \rangle &::= \langle \Gamma \rangle \vdash \langle \Gamma \rangle\end{aligned}$$

Groupe identité

$$\frac{}{F \vdash F} \text{id} \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma', F \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\begin{array}{ll}\frac{\Gamma, F, G, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, G, F, \Gamma' \vdash \Delta} X_L & \frac{\Gamma \vdash \Delta, F, G, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, G, F, \Delta'} X_R \\ \frac{\Gamma, F, F \vdash \Delta}{\Gamma, F \vdash \Delta} C_L & \frac{\Gamma \vdash F, F, \Delta}{\Gamma \vdash F, \Delta} C_R \\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, F \vdash \Delta} W_L & \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash F, \Delta} W_R\end{array}$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta} \neg_L$$

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta} \wedge_L$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma', G \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', F \vee G \vdash \Delta, \Delta'} \vee_L$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma', G \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', F \Rightarrow G \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow_L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta} \top_L$$

$$\frac{}{\perp \vdash} \perp_L$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg F, \Delta} \neg_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma' \vdash G, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash F \wedge G, \Delta, \Delta'} \wedge_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, G, \Delta}{\Gamma \vdash F \vee G, \Delta} \vee_R$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G, \Delta} \Rightarrow_R$$

$$\frac{}{\vdash \top} \top_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} \perp_R$$

Formulations équivalentes des règles logiques

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta} \wedge_{L1b} \quad \frac{\Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta} \wedge_{L2b}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \wedge G, \Delta} \wedge_{Rb}$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash \Delta} \vee_{Lb}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma \vdash F \vee G, \Delta} \vee_{R1b} \quad \frac{\Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \vee G, \Delta} \vee_{R2b}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \Rightarrow G \vdash \Delta} \Rightarrow_{Lb}$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G, \Delta} \Rightarrow_{Rb} \quad \frac{\Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G, \Delta} \Rightarrow_{Rb}$$

pas de règle \top_{Lb}

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top_{Rb}$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp_{Lb}$$

pas de règle \perp_{Rb} A.2 Calcul des séquents classiques réversible LK^r

Groupe identité

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F, \Delta} \text{id}_b$$

pas de règle de coupure

Groupe structurel

pas de règles de contraction et d'affaiblissement, règles d'échange implicites

Groupe logique

- pour le connecteur *et* : $\wedge_L \quad \wedge_{Rb}$,
- pour le connecteur *ou* : $\vee_{Rb} \quad \vee_R$,
- pour le connecteur *implique* : $\Rightarrow_{Lb} \quad \Rightarrow_R$,
- pour la constante *vrai* : \top_{Rb} ,
- pour la constante *faux* : \perp_{Lb} .

A.3 Calcul des séquents classiques unilatéraux LK^u **Règles de formation**

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &::= A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n \mid \neg A_1 \mid \neg A_2 \mid \cdots \mid \neg A_n \mid \top \mid \perp \\ &\quad \mid \langle F \rangle \wedge \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \vee \langle F \rangle \\ \langle \Gamma \rangle &::= \cdot \mid \langle \Gamma \rangle, \langle F \rangle \\ \langle \mathcal{S} \rangle &::= \vdash \langle \Gamma \rangle \end{aligned}$$

Règles de substitution

$$\begin{aligned} \neg \neg F &\stackrel{def}{=} F \\ \neg(F \wedge G) &\stackrel{def}{=} \neg F \vee \neg G & \neg(F \vee G) &\stackrel{def}{=} \neg F \wedge \neg G \\ \neg \top &\stackrel{def}{=} \perp & \neg \perp &\stackrel{def}{=} \top \\ F \Rightarrow G &\stackrel{def}{=} \neg F \vee G \end{aligned}$$

Groupe identité

$$\frac{}{\vdash F, \neg F} \text{id} \qquad \frac{\vdash F, \Delta \quad \vdash \neg F, \Delta'}{\vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\frac{\vdash \Delta, F, G, \Delta'}{\vdash \Delta, G, F, \Delta'} X \qquad \frac{\vdash F, F, \Delta}{\vdash F, \Delta} C \qquad \frac{\vdash \Delta}{\vdash F, \Delta} W$$

Groupe logique

$$\frac{\vdash F, \Delta \quad \vdash G, \Delta'}{\vdash F \wedge G, \Delta, \Delta'} \wedge \qquad \frac{\vdash F, G, \Delta}{\vdash F \vee G, \Delta} \vee \qquad \frac{}{\vdash \top} \top \qquad \frac{\vdash \Delta}{\vdash \perp, \Delta} \perp$$

A.4 Variante réversible LK^{ur}

mêmes règles de formation et de substitution que LK^u

Groupe identité

$$\frac{}{\vdash F, \neg F, \Delta} \text{id}_b \quad \text{pas de règle de coupure}$$

Groupe structurel

pas de règles de contraction et d'affaiblissement, règles d'échange implicites

Groupe logique

$$\frac{\vdash F, \Delta \quad \vdash G, \Delta}{\vdash F \wedge G, \Delta} \wedge_b \quad \frac{\vdash F, G, \Delta}{\vdash F \vee G, \Delta} \vee \quad \frac{}{\vdash \top, \Delta} \top_b \quad \text{pas de règle } \perp$$

Annexe B

Autres calculs des séquents linéaires

B.1 Calcul des séquents linéaires intuitionnistes ILL

Règles de formation

$$\begin{aligned}\langle F \rangle &::= A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid \top \\ &\quad \mid \langle F \rangle \otimes \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \multimap \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \& \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \oplus \langle F \rangle \mid !\langle F \rangle \\ \langle \Gamma \rangle &::= \cdot \mid \langle \Gamma \rangle, \langle F \rangle \\ \langle S \rangle &::= \langle \Gamma \rangle \vdash \langle F \rangle\end{aligned}$$

Groupe identité

$$\frac{}{F \vdash F} \text{id} \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta, F \vdash H}{\Gamma, \Delta \vdash H} \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma, F, G, \Delta \vdash H}{\Gamma, G, F, \Delta \vdash H} X_L \qquad \text{pas de règle } X_R$$

Groupe logique

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \otimes G \vdash H} \otimes_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta \vdash G}{\Gamma, \Delta \vdash F \otimes G} \otimes_R \\
\frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta, G \vdash H}{\Gamma, \Delta, F \multimap G \vdash H} \multimap_L \qquad \frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \multimap G} \multimap_R \\
\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash F} \mathbf{1}_L \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1}_R \\
\frac{\Gamma, F \vdash H}{\Gamma, F \& G \vdash H} \&_{L1} \quad \frac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma, F \& G \vdash H} \&_{L2} \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \& G} \&_R \\
\frac{\Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma, F \oplus G \vdash H} \oplus_L \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma \vdash F \oplus G, \Delta} \oplus_{R1} \quad \frac{\Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \oplus G, \Delta} \oplus_{R2} \\
\text{pas de règle } \top_L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_R \\
\frac{}{\Gamma, \mathbf{0} \vdash F} \mathbf{0}_L \qquad \text{pas de règle } \mathbf{0}_R \\
\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma, !F \vdash G} !_L \qquad \frac{! \Gamma \vdash F}{! \Gamma \vdash !F} !_R \\
\frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma, !F \vdash G} W!_L \quad \frac{\Gamma, !F, !F \vdash G}{\Gamma, !F \vdash G} C!_L
\end{array}$$

B.2 Calcul des séquents linéaires unilatéraux LL^u

Règles de formation

$$\begin{aligned}
\langle F \rangle &::= A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n \mid A_1^\perp \mid A_2^\perp \mid \cdots \mid A_n^\perp \mid \top \mid \perp \\
&\quad \mid \langle F \rangle \otimes \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \wp \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \& \langle F \rangle \mid \langle F \rangle \oplus \langle F \rangle \mid !\langle F \rangle \mid ?\langle F \rangle \\
\langle \Gamma \rangle &::= \cdot \mid \langle \Gamma \rangle, \langle F \rangle \\
\langle \mathcal{S} \rangle &::= \vdash \langle \Gamma \rangle
\end{aligned}$$

Règles de substitution

$$\begin{array}{lcl}
(F \otimes G)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \wp G^\perp & (F^\perp)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F & (F \wp G)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \otimes G^\perp \\
\mathbf{1}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \perp & & \perp^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1} \\
(F \& G)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \oplus G^\perp & F \multimap G \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \wp G & (F \oplus G)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \& G^\perp \\
\top^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0} & & \mathbf{0}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \top \\
(!F)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} ?(F^\perp) & F \rightsquigarrow G \stackrel{\text{def}}{=} F^\perp \oplus G & (?F)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} !(F^\perp)
\end{array}$$

Groupe identité

$$\frac{}{\vdash F, F^\perp} \text{id} \qquad \frac{\vdash F, \Delta \quad \vdash F^\perp, \Delta'}{\vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\frac{\vdash \Delta, F, G, \Delta'}{\vdash \Delta, G, F, \Delta'} \times$$

Groupe logique

$$\begin{array}{l}
\frac{\vdash F, \Delta \quad \vdash G, \Delta'}{\vdash F \otimes G, \Delta, \Delta'} \otimes \quad \frac{\vdash F, G, \Delta}{\vdash F \wp G, \Delta} \wp \quad \frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1} \quad \frac{\vdash \Delta}{\vdash \perp, \Delta} \perp \\
\frac{\vdash F, \Delta \quad \vdash G, \Delta}{\vdash F \& G, \Delta} \& \quad \frac{\vdash F, \Delta}{\vdash F \oplus G, \Delta} \oplus_1 \quad \frac{\vdash G, \Delta}{\vdash F \oplus G, \Delta} \oplus_2 \quad \frac{}{\vdash \top, \Delta} \top \\
\frac{\vdash F, \Delta}{\vdash ?F, \Delta} ? \quad \frac{\vdash F, ?\Delta}{\vdash !F, ?\Delta} ! \quad \frac{\vdash \Delta}{\vdash ?F, \Delta} W? \quad \frac{\vdash ?F, ?F, \Delta}{\vdash ?F, \Delta} C?
\end{array}$$

Bibliographie

- [1] Samson ABRAMSKI. *Computational Interpretations of Linear Logic*. In *Theoretical Computer Science*, vol. 111, North-Holland, 1993.
- [2] Alfred AHO, John HOPCROFT and Jeffrey ULLMAN. *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley, 1974.
- [3] Vladimir ALEXIEV. *Applications of linear logic to computation: An overview*. In *Bulletin of the Interest Group in Pure and Applied Logics*, vol. 2, nb. 1, March 1994.
- [4] Andrea ASPERTI. *A logic for concurrency*. Technical report, dipartimento di informatica, università di Pisa, Italy, 1987.
- [5] Andrea ASPERTI, Gian Luigi FERRARI and Roberto GORRIERI. *Implicative formulae in the “proof as computation” analogy*. In *Proceedings of the seventeenth Symposium on Principles of Programming Languages, San Francisco, USA*, ACM Press, 1990.
- [6] Arnon AVRON. *The semantics and proof theory of linear logic*. In *Theoretical Computer Science*, vol. 57, North-Holland, 1988.
- [7] Robert BLANCHÉ et Jacques DUBUCS. *La Logique et son histoire*. Collection « U », série Philosophie, Armand Collin/Masson, 2^e édition, 1995.
- [8] Baudoin de BODINAT. *La vie sur Terre — Réflexions sur le peu d’avenir que contient le temps où nous sommes. Tome premier*. Éditions de l’Encyclopédie des Nuisances, Paris, 1996.
- [9] G. W. BRAMS (nom collectif). *Réseaux de Petri: théorie et pratique — tome 1, théorie et analyse*. Masson, 1983.
- [10] Caroline BROWN. *Relating Petri nets to formulas of linear logic*. Technical report, University of Edinburgh, 1989.
- [11] Caroline BROWN. *Linear logic and Petri nets: categories, algebra and proof*. Ph. D. thesis, University of Edinburgh, 1990.

-
- [12] Iliano CERVESATO, C. SCHÜRMAN, and F. PFENNING. *Bibliography on linear logic, sept. 1996*. URL = <http://www.cs.cmu.edu/linearbib/linearbib.ps>
- [13] Iliano CERVESATO. *Petri nets as multiset rewriting systems in a linear framework*. Unpublished manuscript, Dec. 1994.
URL = http://www.cs.cmu.edu/iliano/ON-GOING/de_Mich.ps.gz
- [14] Iliano CERVESATO. *Petri nets and linear logic: a case study for logic programming*. In *Proceedings of the 1995 Joint Conference on Declarative Programming, Palladio Press, Marina di Vietri, Italy, Sept. 1995*.
- [15] Uffe ENGBERG and Glynn WINSKEL. *Petri nets as models of linear logic*. In *Proceedings of Colloquium on Trees in Algebra and Programming, Copenhagen, Denmark, Springer-Verlag (LNCS 389), 1990*.
- [16] Uffe ENGBERG and Glynn WINSKEL. *Completeness results for linear Logic on Petri nets*. In *Proceedings of the Conference on Mathematical Foundations of Computer Science, Gdańsk, Poland, Springer-Verlag (LNCS 711), 1993*.
- [17] Uffe ENGBERG and Glynn WINSKEL. *Linear logic on Petri nets*. In *A Decade of Concurrency, Reflexions and Perspectives, REX School/Symposium, Springer-Verlag (LNCS 803), 1994*.
- [18] Paul FOULQUIÉ. *Dictionnaire de la langue philosophique*. Presses Universitaires de France, 6^e édition, 1992.
- [19] Didier GALMICHE and Guy PERRIER. *On proof normalisation in linear logic*. In *Theoretical Computer Science, vol. 135, North-Holland 1994*.
- [20] Vijay GEHLOT. *A proof-theoretic approach to semantics of concurrency*. Ph. D. thesis, University of Pennsylvania, 1991.
- [21] Carl GUNTER and Vijay GEHLOT. *Nets as tensor theories*. In *Proceedings of the 10th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Bonn, Germany, 1989*.
- [22] Jean-Yves GIRARD. *Autour du programme de Hilbert*. Colloquium 1982 – 1983, École Polytechnique, 1983.
- [23] Jean-Yves GIRARD. *Linear logic*. In *Theoretical Computer Science, vol. 50, North-Holland, 1987*.
- [24] Jean-Yves GIRARD, Yves LAFONT and Paul TAYLOR. *Proofs and types*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, no. 7, Cambridge University Press, 1988.
- [25] Jean-Yves GIRARD. *Toward a geometry of Interaction*. In *Categories in Computer Science and Logic*, American Mathematical Society, 1989.
- [26] Jean-Yves GIRARD. *La logique linéaire*. In *Pour La Science, édition française de « Scientific American », n° 150, avril 1990*.

- [27] Jean-Yves GIRARD. *Introduction à la logique linéaire*. In *Logique et informatique: une introduction*, collection « Didactique », n° 8. INRIA, 1991.
- [28] Jean-Yves GIRARD. *Linear logic: a survey*. In *The Curry-Howard Isomorphism*, Cahiers du Centre de Logique, n° 8, Academia Press, 1995. First appeared in *Proceedings of the International Summer School of Marktoberdorf*, Springer-Verlag, 1993.
- [29] Jean-Yves GIRARD. *Linear logic: its syntax and semantics*. In *Advances in linear logic*, London Mathematical Society Lecture Note Series 222, Cambridge University Press, 1995.
- [30] Jean-Yves GIRARD. *Intelligence artificielle et logique naturelle*. In *La machine de Turing*, collection « sources du savoir », Éditions du Seuil, 1995.
- [31] Jean-Yves GIRARD. *La machine de Turing: de la calculabilité à la complexité*. In *La machine de Turing*, collection « sources du savoir », Éditions du Seuil, 1995.
- [32] Jean-Yves GIRARD. *Proof nets: the parallel syntax for proof-theory*. In *Logic and Algebra* (P. Agliano and A. Ursini editors), Marcel Dekker, New York, 1996.
- [33] Jean-Yves GIRARD. *Titres et travaux, janvier 1997*.
URL = <ftp://iml.univ-mrs.fr/pub/girard/titres.ps.Z>
- [34] François GIRAULT, Brigitte PRADIN-CHÉZALVIEL, et Robert VALETTE. *Une logique pour les réseaux de Petri*. In *Actes du Congrès AFCET de Modélisation des Systèmes Réactifs*, Brest, France, 1996.
- [35] François GIRAULT, Brigitte PRADIN-CHÉZALVIEL, et Robert VALETTE. *A logic for Petri nets*. In *RAIRO-API-JESA Journal*, vol. 31, Éditions Hermès, 1997.
- [36] H. J. GENDRICH, K. LAUTENBACH and P. S. THIAGARAJAN. *Elements of general net theory*. In *Net Theory and Applications. Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, Hamburg, 1979*. Springer-Verlag (LNCS 84), 1980.
- [37] Paul GOCHET et Pascal GRIBOMONT. *Logique, volume 1*. Collection « Langue, Raisonnement, Calcul », Éditions Hermès, 2^e édition, 1991.
- [38] Michel HACK. *Analysis of production schemata by Petri nets*. Master's thesis, Department of Electrical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1972.
- [39] Michel HACK. *Decidability questions for Petri nets*. Ph. D. thesis, Laboratoty for Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 161, 1976.
- [40] Anatol HOLT and Frederic COMMONER. *Events and conditions*. Applied Data Research, Inc., Princeton, USA, 1970.

- [41] M. JANTZEN and R. VALK. *Formal properties of place/transition nets*. In *Net Theory and Applications. Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, Hamburg, 1979*. Springer-Verlag (LNCS 84), 1980.
- [42] Max I. KANOVICH. *The multiplicative fragment of linear logic is NP-complete*. ITLI prepublication, Technical Report X-91-13, University of Amsterdam, The Netherlands, 1991.
- [43] Max I. KANOVICH. *Petri nets, Horn programs, linear logic, and vector games*. In *Proceedings of the International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Software, Sendai, Japan, 1994*.
- [44] Luis Allan KÜNZLE. *Raisonnement temporel basé sur les réseaux de Petri pour des systèmes manipulant des ressources*. Thèse de doctorat, Université Toulouse-III, 1997.
- [45] Yves LAFONT. *Logiques, Catégories et machines. Implantation de langages de programmation guidé par la logique catégorique*. Thèse de doctorat, Université Paris-VII, 1988.
- [46] Yves LAFONT. *The linear abstract machine*. In *Theoretical Computer Science*, vol. 59, (erratum in vol. 62), North-Holland, 1988.
- [47] Yves LAFONT. *Functional programming and linear logic*. In *Lecture notes for the Summer School on Functional Programming and Constructive Logic, Glasgow, United Kingdom, 1989*.
- [48] Yves LAFONT. *The finite model property for various fragments of linear logic*. Unpublished manuscript (1995), to appear in *Journal of Symbolic Logic*.
URL = <ftp://iml.univ-mrs.fr/pub/lafont/model.ps.Z>
- [49] Yves LAFONT. *Calcul des séquents et déduction naturelle*. In *Logique et informatique: une introduction*, Collection « Didactique », n° 8, INRIA, 1991.
- [50] André LALANDE. *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Collection « Quadrige », Presses Universitaires de France, 3^e édition, 1993.
- [51] René LALEMENT. *Logique réduction, résolution*. Collection « études et recherches en informatique », Masson, 1990.
- [52] Jean LARGEAUX. *L'intuitionisme*. Collection « Que sais-je? », Presses Universitaires de France, 1^{re} édition, 1992.
- [53] Joan LILIUS. *High-level nets and Linear logic*. In *Application and Theory of Petri Nets 1992, 13th International Conference, Sheffield*, Springer-Verlag (LNCS 616), 1992.
- [54] Patrick LINCOLN, John MITCHELL, Andre SCEDROV and Natarajan SHANKAR. *Decision problems for propositional linear logic*. In *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 56, Apr. 1992.

- [55] Patrick LINCOLN. *Linear logic*. In *ACM SIGACT notices*, no. 23, vol. 2, 1992.
- [56] Patrick LINCOLN. *Deciding provability of linear logic formulas*. In *Advances in linear logic*, London Mathematical Society Lecture Note Series 222, Cambridge University Press, 1995. First appeared in *Proceedings of the Workshop on Linear Logic*, Ithaca, New York, 1993.
- [57] Narciso MARTÍ-OLIET and José MESEGUER. *From Petri nets to linear logic*. In *Mathematical Structures in Computer Science*, vol. 1, 1991. First appeared in *Proceedings of the Conference on Category Theory and Computer Science*, Manchester, United Kingdom, Springer-Verlag (LNCS 389), 1989.
- [58] Narciso MARTÍ-OLIET and José MESEGUER. *From Petri nets to linear logic through categories: a survey*. In *Journal on Foundations of Computer Science*, vol. 2, dec. 1991.
- [59] Marcel MASSERON, Christophe TOLLU et Jacqueline VAUZEILLES. *Planification et logique linéaire*. In *Revue d'Intelligence Artificielle*, vol. 6, n° 3, 1992.
- [60] Tadao MURATA and Du ZHANG. *A predicate-transition net model for parallel interpretation of logic programs*. In *IEEE Transactions on Software Engineering*, vol. 14, no. 4, Apr. 1988.
- [61] Guy PERRIER. *De la construction de preuves à la programmation parallèle en logique linéaire*. Thèse de doctorat, Université Nancy-1, 1995.
- [62] George PETERKA and Tadao MURATA. In *Proof procedure and answer extraction in Petri net model of logic programs*. In *IEEE Transactions on Software Engineering*, vol. 15, no. 2, Febr. 1989.
- [63] Brigitte PRADIN-CHÉZALVIEL, François GIRAULT, Luis Allan KÜNZLE and Robert VALETTE. *Behavioral model based diagnosis in manufacturing*. In *proceedings of the 2nd International Conference on Industrial Automation*, Nancy, France, 1995.
- [64] W. REIZIG. *Place/transition systems*. In *Petri nets: Central Model and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I, Proceedings of an Advanced Course, Bad Honnef, September 1986*, Springer-Verlag (LNCS 254), 1986.
- [65] Christophe REUTENAUER. *Aspects mathématiques des réseaux de Petri*. Collection « études et recherches en informatique », Masson, 1989.
- [66] Paul ROBERT. *Le Nouveau Petit Robert, dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. Les dictionnaires Le Robert, 1993.
- [67] G. ROZENBERG. *Behaviour of Elementary Net Systems*. In *Petri nets: Central Model and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I, Proceedings of an Advanced Course, Bad Honnef, September 1986*. Springer-Verlag (LNCS 254), 1986.

-
- [68] Andre SCEDROV. *A brief guide to linear logic*. In *Current Trends in Theoretical Computer Science*, World Scientific Publishing Company, 1993.
- [69] Andre SCEDROV. *Linear logic and computation: a Survey*. In *Proceedings of the International Summer School of Marktoberdorf*, Springer-Verlag, 1994.
- [70] Christophe SIBERTIN-BLANC. *La modélisation des procédures administratives par des réseaux de Petri à structures de données*. Thèse de Docteur-Ingénieur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1985.
- [71] Makoto TANABE. *Timed Petri nets and temporal linear logic*. In *Application and Theory of Petri Nets 1997, 18th International Conference ICATPN'97, Toulouse, France*, Springer-Verlag (LNCS 1248), 1997.
- [72] P. S. THIAGARAJAN. *Elements net systems*. In *Petri nets: Central Model and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I, Proceedings of an Advanced Course, Bad Honnef, September 1986*. Springer-Verlag (LNCS 254), 1986.
- [73] Anne TROELSTRA. *Lectures on linear logic*. CSLI Lecture Notes no. 29, Center for the Study of Language and Information, 1992.
- [74] Alan TURING. *Théorie des nombres calculables suivie d'une application au problème de la décision*, traduction française de « *On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem* », *Proceedings of Mathematical Society, series 2*, vol. 42, 1936-1997. In *La machine de Turing*, collection « Sources du savoir », Éditions du Seuil, 1995.
- [75] John VON NEUMANN. *Théorie générale et logique des automates*, traduction française de « *The general and logical theory of automata* », in *Cerebral Mechanism in Behavior*, John Wiley and Sons, 1951. Collection « Milieux », Champ Vallon, 1996.
- [76] Philip WALDER. *A Taste of Linear Logic*. In *Proceedings of the Conference on Mathematical Foundations of Computer Science, Gdańsk, Poland*, Springer-Verlag (LNCS 711), 1993.
- [77] Glynn WINSKEL. *Petri nets, algebras, morphisms, and compositionality*. In *Information and Computation*, vol. 72, no. 3, 1987.

Thèse de Monsieur François GIRAULT

Titre : Formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri.

Résumé : En logique classique, la formalisation du fonctionnement des réseaux de Petri (RdP) se heurte à la pérennité de la vérité. En logique modale, elle impose la construction préalable du graphe des marquages accessibles. À contrario, la logique linéaire (LL) fondée par Girard permet de formaliser directement par des séquents prouvables purement propositionnels les relations d'accessibilité dans les RdP : toute transition apparaît comme une implication linéaire disponible ad libitum entre les propositions traduisant ses marquages d'entrée et de sortie. Pour approfondir cette formalisation, nous définissons comme primitives en LL les notions de ressource, d'action et de consommabilité/productibilité, analogues mais distinctes de celles de proposition, de déduction et de vérité/fausseté en logique classique. Nous développons une interprétation concrète pour tous les connecteurs linéaires en cohérence avec leurs propriétés syntaxiques. Nous présentons le connecteur « par » comme un opérateur de cumul disjoint d'exemplaires de ressources (dual du connecteur « fois » de cumul conjoint) et la négation linéaire « nil » comme un inverseur du sens du temps. Cette concrétisation montre les limites des formalisations existantes des RdP en LL ; nous les généralisons en traduisant chaque transition par une implication linéaire ordinaire, traitée comme une ressource périssable, dont tout exemplaire consomme correspond à une occurrence de franchissement. Ainsi, nous apportons une expression logique aux aspects primordiaux du fonctionnement des RdP : nous démontrons qu'une relation d'accessibilité par séquence de transitions équivaut à un séquent prouvable et que l'équation fondamentale est l'expression algébrique d'un corollaire du critère d'équilibrage en LL. Grâce à la combinatoire de tous les connecteurs linéaires, notre approche ouvre des perspectives d'analyse de relations complexes d'accessibilité comme celles de reprise après défaillance dans un système industriel.

Mots-clés : logique linéaire, calcul des séquents, sémantique des phases, ressource, réseaux de Petri, règle de fonctionnement, accessibilité, séquence de franchissements.

Title: Linear logic formalisation of Petri nets token game.

Abstract: In classical logic, the formalisation of the Petri net token game faces the invariance of truth. In modal logic, it requires first to construct the reachable marking graph. In contrast, Girard's linear logic allows us to use purely propositional provable sequents to directly formalise the reachability relations in a net: each transition appears as a linear implication available ad libitum between the propositions translating its input and output markings. To study thoroughly this formalisation, we define as primitives in linear logic the notions of resource, action and consummability/productibility, analogous but distinct from those of proposition, deduction and truth/falseness in classical logic. We establish a concrete interpretation of the linear connectives with respect to their syntactical properties. The connective "par" is presented as an operator of disjoint accumulation of resource items (dual of the connective "times" of joint accumulation) and the linear negation "nil" as a time inversion. This concrete view brings out the limits of the existing formalisation of the token game. We increase the expressive power of these formalisations by translating each transition as an ordinary linear implication, being itself a perishable resource, whose consuming represents a transition occurrence in firing sequence. We give a logical expression to the essential features of the Petri net token game : we demonstrate that a reachability relation by firing sequence is equivalent to a provable sequent and that the fundamental equation is an algebraic expression of the balancing criterion of linear logic. By means of the combinatory of all linear connectives, our approach opens perspectives for analysing complex reachability relations, e. g. for recovering after crash in an industrial system.

Keywords: linear logic, sequent calculus, phase semantics, resource, Petri nets, token game, reachability, firing sequence.