



HAL
open science

APPROCHES POUR L'ANALYSE DES SIGNAUX A PHASE POLYNOMIALE DANS UN ENVIRONNEMENT NON GAUSSIEN

Mounir Djeddi

► **To cite this version:**

Mounir Djeddi. APPROCHES POUR L'ANALYSE DES SIGNAUX A PHASE POLYNOMIALE DANS UN ENVIRONNEMENT NON GAUSSIEN. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 2005. Français. NNT: . tel-00010277

HAL Id: tel-00010277

<https://theses.hal.science/tel-00010277>

Submitted on 26 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

n° d'ordre : 7875

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

Spécialité : Automatique et Traitement du Signal

par

Mounir DJEDDI

TITRE : APPROCHES POUR L'ANALYSE DES SIGNAUX A PHASE
POLYNOMIALE DANS UN ENVIRONNEMENT NON GAUSSIEN

Soutenue le **24 Mai 2005** devant la commission d'examen :

M.	Messaoud BENIDIR	<i>Directeur de thèse</i>
M.	Thierry CHONAVEL	<i>Rapporteur</i>
M.	André FERRARI	
Mme	Nadine MARTIN	<i>Président du Jury</i>
M.	Abdeldjalil OUAHABI	<i>Rapporteur</i>

À mes parents,

À mes frères et soeurs,

À tous mes amis

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse le Professeur Messaoud Benidir qui a su m'encourager et me conseiller durant ces années de thèse. Sa confiance en moi et son soutien humain et scientifique m'ont beaucoup aidé à accomplir ce travail.

Je tiens à adresser ma profonde gratitude et sincère reconnaissance aux professeurs Thierry Chonavel et Abdeldjalil Ouahabi pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Mes remerciements à Mme. Nadine Martin pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse, ainsi qu'à M. André Ferrari pour avoir participé au jury.

Je remercie le Professeur Guy Demoment de m'avoir accueilli au sein du LSS ainsi qu'à notre directeur actuel Professeur Eric Walter.

J'aimerais également remercier Mme. Sylvie Marcos, M. Michel Kieffer et M. Thomas Rodet pour leurs aides et conseils dans mon expérience comme enseignant à l'université Paris Sud.

Merci aux personnels, enseignant-chercheurs du LSS, et à tous les thésards en particulier à Mourad, Hocine, Jean-Marcel, Chang-minh, Rachel, Olivier, Ilhem et tout les thésards en automatique qui se reconnaîtront et qui ont su apporter un peu de convivialité au laboratoire.

Je tiens à remercier notre secrétaire Mme Leroux pour sa gentillesse et son aide et ce depuis mon arrivée au LSS. Merci aussi à Mme Belghiti et Mme Baverel pour leurs disponibilité et leurs aide.

Je remercie Monsieur Moh-Amokrane Aitouche de l'université de Boumerdes, et Monsieur Daoud Boutana de l'université de Jijel pour leur précieuse aide qui m'a permis d'améliorer de façon significative mon manuscrit et ma présentation.

Merci à tous mes amis et en particuliers Samir et Adel pour les soirées qu'on a passé ensemble durant la rédaction de ma thèse.

Evidemment, je remercie chaleureusement toute ma famille : ma mère, mon père, mes soeurs Amel et Saoud et mes frères Nabil et Amine. Ils savent bien combien ils comptent pour moi.

Résumé

Approches pour analyse des signaux à phase polynomiale dans un environnement non gaussien

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude des approches d'estimation des Signaux à Phase Polynomiale (SPP) affectés par un bruit impulsif non gaussien. Nous considérons deux modélisations pour ce type de bruit : le premier modèle est défini par une Somme Pondérée de Gaussiennes (SPG) et le second par des distributions α -stables. L'inconvénient majeur d'un bruit impulsif est la dégradation des performances des algorithmes classiques qui sont souvent développés dans un contexte de bruit gaussien.

Dans la première partie de la thèse, nous abordons les méthodes classiques d'analyse temps-fréquence des SPP. L'utilisation des statistiques d'ordre fractionnaire permet d'obtenir des algorithmes robustes en présence de bruit impulsif; nous exploitons cette propriété pour proposer une Distribution de Wigner-Ville Polynomiale adaptée à l'analyse des SPP dans ce contexte. Cette nouvelle distribution, comparée aux distributions classiques, permet de mieux représenter la fréquence instantanée du SPP bruité dans le plan temps-fréquence.

La deuxième partie est consacrée aux méthodes récentes d'analyse spectrale adaptées aux SPP. En premier lieu, nous présentons une version de la méthode de Capon pour l'estimation des paramètres de la phase, à partir de laquelle nous proposons un estimateur MUSIC robuste obtenu par une décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariation. L'estimateur obtenu, nous permet de suivre l'évolution temporelle des coefficients de la phase dans le plan temps-coefficient.

Dans la troisième partie, nous présentons une approche de l'estimation des SPP fondée sur le filtrage de Kalman. Cette approche repose sur une représentation d'état non linéaire du signal avec un bruit d'observation défini par la somme pondérée de deux gaussiennes. Nous présentons trois types de filtres de Kalman robustes au bruit impulsif pour la poursuite des coefficients de la phase du SPP. Le premier filtre, appelé filtre de Kalman étendu robuste est basé sur une version modifiée du gain de Kalman dépendant de la fonction de Huber modifiée. L'inconvénient majeur de ce filtre est que son fonctionnement dépend du seuil de la fonction de Huber. Pour cela,

nous proposons d'utiliser deux filtres de Kalman étendus (EKF) opérant en parallèle et dont le résultat de l'estimation est pondéré par la probabilité d'apparition du bruit impulsif. Enfin, il est possible d'améliorer les performances du filtre de Kalman étendu parallèle en remplaçant le filtre de Kalman étendu par un filtre UKF "unscented Kalman filter" qui contrairement au filtre EKF ne nécessite pas une linéarisation des équations d'états et permet d'obtenir une meilleure estimation des paramètres du signal.

Mots clés : Signaux à phase polynomiale, distribution temps-fréquence, fréquence instantanée, statistiques d'ordre fractionnaire, algorithme MUSIC robuste, représentation d'état, filtrage de Kalman.

Abstract

Polynomial phase signal analysis in non Gaussian environment

Polynomial phase signals (PPS) belong to the family of non stationary signals and have found use in many area of engineering such as in Radar and communication. The main problem is to estimate the parameters of such signals. Many research works have been extensively conducted in the last decade and led to the development of various algorithms based on different mathematical tools such as time-frequency, subspace methods, High order statistics and Kalman filtering, etc. Though, these techniques have proven to perform well in estimating the signal parameters, Most of them rely on second order statistics, and assume that the noise affecting the PPS is white Gaussian noise.

The research work presented in this thesis deals with the analysis of PPS in non Gaussian environment as an extension to the Gaussian case. In this context, the impulsive noise is considered to have either an α -stable distribution, or ϵ -contaminated model.

Three approaches of estimation are explored. The first method concerns robust time-frequency analysis of PPS, we propose to integrate the fractional lower statistics (FLOS) in the kernel of the polynomial phase Wigner-Ville distribution (PWVD) in order to obtain a robust time-frequency distribution able to reveal the instantaneous frequency of the PPS of order $M > 2$ affected by impulsive α -stable noise. The FLOS based PWVD is compared with other recently proposed robust algorithm using information theory based measures.

The second approach deals with robust subspace method based on the MUSIC estimator. Using covariation matrix decomposition, we propose a modified robust MUSIC algorithm which is able to track the value of the coefficients of the phase of the PPS in a time-coefficient plane.

Finally, using the nonlinear state space representation of PPS, we explore the use of Kalman filtering technique for robust estimation of PPS in ϵ -contaminated noise. In this context, three types of Kalman filters are proposed and compared : The robust extended Kalman filter, the parallel extended Kalman filter (EKF) and because the EKF require linearization an alternative method is proposed based on parallel unscented Kalman filters UKF.

Keywords : Polynomial phase signal, polynomial phase Wigner-Ville distribution, Instantaneous frequency, fractional lower order statistics, robust MUSIC estimator, state space representation, Kalman filtering.

Abréviations

AR	Processus Autorégressif
d.d.p.	densité de probabilité
EKF	Extended Kalman filter - <i>filtre de Kalman étendu</i>
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale
FI	Fréquence Instantanée
FIM	Fisher Information Matrix - <i>Matrice d'Information de Fisher</i>
FLOM	Fractional Lower-Order Moment - <i>Moment d'ordre fractionnaire</i>
FLOPWVD	Fractional Lower-Order Polynomial Wigner-Ville Distribution
FLOS	Fractional Lower-Order Statistics - <i>Statistique d'ordre fractionnaire</i>
FM	Frequency Modulation - <i>Modulation de Fréquence</i>
GAF	Generalized Ambiguity Function- <i>Fonction ambiguïté généralisée</i>
GSNR	Generalized Signal to noise ratio - <i>Rapport signal à bruit généralisé</i>
i.i.d.	indépendant et identiquement distribué
MUSIC	MUltiple SIGnal Classification
MV	Maximum de vraisemblance
MSE	Mean Square Error - <i>erreur quadratique moyenne</i>
PEKF	Parallel EKF - <i>Filtres EKF parallèles</i>
PWVD	Polynomial Wigner-Ville Distribution - <i>Distribution de Wigner-Ville Polynomiale</i>
PUKF	Parallel UKF - <i>Filtres UKF parallèles</i>
REKF	Robust Extended Kalman filter - <i>Filtre de Kalman étendu robuste</i>
S α S	Symétrique alpha Stable
SNR	Signal to noise ratio - <i>Rapport signal à bruit</i>
SPG	Somme Pondérée de Gaussiennes
SPP	Signal/signaux à Phase Polynomiale
TF	Transformée de Fourier

TPP	Transformée de Phase Polynomiale
UKF	Unscented Kalman filter
v.a.	variable aléatoire
WVD	Wigner-Ville Distribution - <i>Distribution de Wigner-Ville</i>

Notations

$\Re \{ \cdot \}$	Partie réelle de l'argument
$\Im \{ \cdot \}$	Partie imaginaire de l'argument
$\langle a \rangle$	Opérateur : moment d'ordre fractionnaire
$\phi(t)$	Phase polynomiale
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Loi normale de moyenne μ et de variance σ^2
$E \{ \cdot \}$	Moyenne de l'argument
$\varphi(t)$	Fonction caractéristique
b	Amplitude d'un SPP
α	Characteristic exponent - <i>exposant caractéristique</i>
β	Asymmetry parameter - <i>paramètre d'asymétrie</i>
γ	Scale/ dispersion parameter - <i>paramètre d'échelle</i>
μ	Location parameter - <i>moyenne</i>
σ_w^2	Variance de $w(t)$
$W_x(t, f)$	La distribution de Wigner-Ville de x
$W_x^q(t, f)$	La distribution de Wigner-Ville polynomiale de x
$S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$	Loi α stable
$\delta \{ \cdot \}$	Distribution de Dirac
M	Degré de la phase
$w(t)$	Bruit additif
\mathbf{x}	Vecteur d'état
t	Temps continu
k	Temps discret
a_i	Coefficient du terme de degré i
ϵ	Probabilité d'apparition du bruit impulsif
$\hat{\mathbf{x}}$	Vecteur d'état estimé
$\hat{\mathbf{P}}$	$E \{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \}$

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Signaux à phase polynomiale (SPP)	1
1.2	Contributions et organisation du document	4
2	Rappels sur les outils d'analyse des SPP et modèles de signaux non gaussiens	9
2.1	Introduction	9
2.2	Outils pour l'analyse des signaux à phase polynomiale	10
2.2.1	Distribution de Wigner-Ville	10
2.2.2	Distribution de Wigner-Ville polynomiale	12
2.2.3	Transformée de phase polynomiale	13
2.2.4	Distribution de Wigner-Ville généralisée	14
2.2.5	Fonction d'ambiguïté généralisée	15
2.2.6	SPP noyés dans un bruit gaussien additif et multiplicatif	16
2.3	Signaux non gaussiens	17
2.3.1	Introduction	17
2.3.2	Somme pondérée de gaussiennes	17
2.3.3	Signaux α -stables	18
2.3.3.1	Distribution symétrique α -stable SaS	20
2.3.3.2	Les moments de lois α -stables	21
2.3.3.3	Approximation par un mélange de gaussiennes	21
2.3.3.4	Propriétés des variables aléatoires α -stables	25
2.3.3.5	Covariation	26
2.3.3.6	Variable complexe α -stable	27
2.3.3.7	Génération de processus α -stables	27
2.4	Conclusion	28
3	Méthodes d'analyse temps-fréquence robustes	29
3.1	Introduction	29

3.2	L'effet du bruit impulsif	30
3.3	Distributions temps-fréquence robustes	32
3.3.1	PWVD robuste pour les SPP noyés dans un bruit non gaussien	32
3.3.2	WVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire	34
3.3.3	PWVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire	39
3.3.4	Comparaison des distributions temps-fréquence robustes	42
3.3.5	Signaux à phase polynomiale multicomposantes	45
3.4	Conclusion	47
4	Méthodes d'analyse spectrale adaptées à l'estimation des SPP	49
4.1	Introduction	49
4.2	Méthode de Capon pour l'estimation des SPP	50
4.3	Algorithme MUSIC pour les SPP affectés par un bruit gaussien	53
4.4	Algorithme MUSIC Robuste pour les SPP affectés par un bruit impulsif	54
4.5	Conclusion	59
5	Approches basées sur la représentation d'état	61
5.1	Introduction	61
5.2	Modélisation	62
5.3	Estimation par un filtrage de Kalman étendu robuste	64
5.4	Estimation par deux filtres de Kalman étendus parallèles	69
5.5	Estimation par deux filtres UKF parallèles	76
5.6	Conclusion	80
6	Conclusion et perspectives	81
6.1	Conclusion générale	81
6.2	Perspectives	82
A	Détails de calculs des équations du PEKF	85
B	Détails de calcul de la borne de Cramer-Rao	93
C	Principales publications de l'auteur	97
	Références bibliographiques	114

Liste des tableaux

3.1	Algorithme RPWVD	33
3.2	Liste de noyaux classiques	46
5.1	Algorithme PEKF	71
5.2	Algorithme PUKF	78

Table des figures

2.1	Évolution temporelle du signal chirp	11
2.2	La WVD du signal chirp	11
2.3	Exemple de SPP et leurs WVD, (a) : évolution temporelle de la somme de deux signaux chirps, (b) : évolution temporelle d'un SPP d'ordre 5, (c) : la WVD du signal en (a), (d) : la WVD du signal en (b)	12
2.4	La PWVD d'un SPP d'ordre 5	13
2.5	La densité de probabilité du modèle de bruit de Middleton	18
2.6	Les moments de lois α -stables pour différentes valeurs de α	21
2.7	La d.d.p. d'un signal α -stable pour différents exposants caractéristiques	23
2.8	Queue d'une loi α -stable en fonction de α	23
2.9	Effet du paramètre d'échelle sur une d.d.p. α -stable	24
2.10	Effet du paramètre d'asymétrie sur une d.d.p. α -stable	24
2.11	Différents signaux obtenus pour différentes valeurs de α ; (a) : $\alpha = 2$, (b) : $\alpha = 1.5$, (c) : $\alpha = 1$, (d) : $\alpha = 0.5$	25
3.1	Effet du bruit additif α -stable pour différentes valeurs de α , (a) (b) (c) : spectrogramme ; (d) (e) (f) : WVD	31
3.2	L'effet du bruit impulsif α -stable sur la RPWVD, (a) : FI théorique, (b) : $\alpha = 1.6$, (c) : $\alpha = 1$, (d) : $\alpha = 0.5$	34
3.3	La fonction de $x^{(a)}$ pour différentes valeurs de l'exposant a	35
3.4	Signal avant application de l'opérateur $\langle a \rangle$	36
3.5	Signal après application de l'opérateur $\langle a \rangle$	36
3.6	Exemple de comparaison entre la WVD et la FLOWVD, (a) : WVD du signal sans bruit, (b) : signal chirp plus bruit $\alpha = 1$ avec un GSNR=10 dB, (c) : La FLOWVD du signal chirp	37

3.7	La FLOWVD d'un signal à phase polynomiale d'ordre 5 avec un GSNR=10 dB, (a) : $\alpha = 1.6$, (b) : $\alpha = 1$, (c) : signal après filtrage médian d'ordre 4 ($\alpha = 1.6$), (d) : signal après filtrage médian d'ordre 4 ($\alpha = 1$).	38
3.8	Schéma d'implantation de la FLOWVD	39
3.9	Évolution du SPP noyé dans un bruit impulsif	40
3.10	PWVD du signal noyé dans un bruit impulsif	40
3.11	La FLOWVD du signal en présence d'un bruit impulsif avec ($\alpha = 1.6$)	41
3.12	La FLOWVD du signal en présence d'un bruit impulsif ($\alpha = 1$)	41
3.13	La FLOWVD du signal avec un bruit impulsif ($\alpha = 0.5$)	42
3.14	La divergence de Jensen-Rényi pour différentes distributions ($\alpha = 1$)	44
3.15	Exemple de différentes distributions robustes d'un signal multicomposantes en présence d'un bruit α -stable ($\alpha = 0.5$), (a) : FLOWVD, (b) : FLOCWD, (c) : FLOBD, (d) : FLOZAMD	47
4.1	Estimateur M-Capon du coefficient de la phase d'un SPP d'ordre 4	52
4.2	Estimateur de M-Capon du coefficient de la phase de deux SPP d'ordre 4	53
4.3	Estimateur M-MUSIC du coefficient de la phase d'un SPP d'ordre 4 dans un bruit impulsif $\alpha = 1.2$, $\gamma = 1$	55
4.4	Estimateur MFLOM-MUSIC pour le SPP noyé dans un bruit impulsif $\alpha = 1.2$, $\gamma = 1$	56
4.5	MFLOM-MUSIC Estimateur pour deux SPP noyés dans un bruit impulsif $\alpha =$ 1.2 , $\gamma = 1$	56
4.6	Influence de la taille du filtre, (a) : $p=10$, (b) : $p=30$	57
4.7	Performances des estimateurs M-MUSIC et MFLOM-MUSIC en fonction de la dispersion	58
4.8	MSE de l'estimateur MFLOM-MUSIC pour différentes valeurs de r	58
5.1	Fonction M-estimateur de Huber modifiée	65
5.2	Signal chirp noyé dans un bruit non gaussien	67
5.3	Estimation par REKF d'un signal chirp	68
5.4	MSE des paramètres du signal chirp obtenus par REKF	69
5.5	Structure du filtre de Kalman parallèle	72
5.6	Estimation des paramètres d'un signal chirp par deux EKF parallèles	73
5.7	MSE des estimations d'un signal chirp : EKF comparé au PEKF	74
5.8	Signal chirp à amplitude variable noyé dans un bruit non gaussien	75
5.9	Estimation par deux filtres EKF parallèles d'un signal chirp à amplitude variable	76

5.10 MSE des paramètres d'un signal chirp : PEKF comparé au PUKF	79
--	----

Chapitre 1

Introduction

1.1 Signaux à phase polynomiale (SPP)

1.2 Contributions et organisation du document

1.1 Signaux à phase polynomiale (SPP)

Dans certaines applications technologiques telles que les télécommunications, le radar et le sonar, les signaux utilisés appartiennent à la catégorie des signaux non stationnaires qui peuvent être aléatoires ou déterministes, et dont la caractéristique principale est la variation de la fréquence en fonction du temps. Les analyses temporelle et fréquentielle ne permettent pas de fournir une analyse complète des signaux non stationnaires. L'analyse conjointe en temps et en fréquence a été introduite pour palier aux insuffisances des méthodes classiques d'analyse des signaux. Un des outils de base de l'analyse conjointe temps-fréquence est le spectrogramme [50] défini comme le carré du module de la Transformée de Fourier (TF) du noyau obtenu à partir du produit du signal et d'une fenêtre glissante. L'application du spectrogramme a montré ses limites en terme de résolution, ce qui a conduit à la recherche et au développement de nouvelles transformées plus performantes. A titre d'exemple, nous pouvons citer la distribution de Wigner-Ville introduite à l'origine par Wigner en mécanique quantique [133] et ensuite par Ville [130] pour l'analyse temps-fréquence. Dans [53], Gabor a proposé une transformée qui porte aujourd'hui son nom et qui consiste à décomposer le signal sur une famille de gaussiennes. La nécessité d'obtenir des Représentations Temps-fréquence (RTF) de meilleure résolution et robustes au bruit gaussien a amené à la mise en place de nouvelles distributions qui permettent de représenter la fréquence instantanée (FI) de façon à éliminer les termes d'interférence. Nous citons, par exemple, les distributions introduites par Choi-Williams [34], Barkat et Boashash [15], [17], Qian et Morris [102], Guo et *al.*[58], Cohen et *al.*[35], Narasimhan [90].

Depuis les années 80 et jusqu'à ce jour la communauté scientifique du traitement du signal porte une attention particulière à l'étude des SPP. Comme leur nom l'indique ces signaux ont une phase modélisée par un polynôme que l'on notera $\phi(t)$. Dans le cas où le degré de ϕ est supérieur ou égal à 2 les SPP sont non stationnaires. On retrouve la modélisation de signaux non stationnaires par des SPP dans diverses situations et nous citons quelques exemples ci-dessous. Dans la nature, on peut modéliser les ondes émises par les chauves souris et par certains mammifères marins par des impulsions dont la modulation en fréquence est quadratique.

Dans les applications biomédicales, les signaux cardio-vasculaires peuvent être modélisés par une somme de signaux chirps pour étudier les phénomènes d'hypertension [134].

Dans les applications radar à compression d'impulsions qui utilisent des signaux FM quadratiques, l'écho radar d'une cible en mouvement possède une phase non-linéaire dont les paramètres dépendent de la cinématique de la cible. L'onde réfléchiée s'écrit alors sous la forme d'un SPP $x(t) = \rho(t)e^{j\phi(t)}$, où $\rho(t)$ est l'amplitude et $\phi(t)$ la phase du signal :

$$\phi(t) = \Phi_0 + v_y t + \frac{1}{2}(a_y + \frac{v_x^2}{\Phi_0})t^2 + \frac{1}{2\Phi_0}a_x v_x t^3 + \dots \quad (1.1)$$

où Φ_0 est la phase initiale, v_y et a_y désignent respectivement la vitesse et l'accélération radiale, v_x et a_x sont la vitesse et l'accélération orthogonale de la cible [132].

Dans le domaine des transmissions satellitaires, le modèle de signaux basé sur les SPP a été utilisé dans [49] pour caractériser les variations importantes de la fréquence porteuse dans les liaisons entre la terre et le satellite.

En communications numériques, dans une série de publications, El-Khamy et *al.* [47], [48] et plus récemment dans [72] et [64], les signaux chirps ont été utilisés comme séquences d'étalement dans les systèmes de communications à accès multiples.

La littérature scientifique sur la modélisation, l'estimation et la représentation temps-fréquence des SPP est très abondante. Nous citons, à titre d'exemple, les travaux de Boashash [26, 24], Friedlander [56], Peleg et *al.* [98], et Benidir-Ouldali [94], [1], [20].

La plupart des applications traitent du problème de l'estimation des paramètres du SPP à partir d'un signal bruité $y(t)$ donné par

$$\begin{aligned} y(t) &= be^{j\phi(t)} + w(t) \\ &= be^{j\{\sum_{k=0}^M a_k t^k\}} + w(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

On suppose que l'amplitude b du signal est constante et que la phase polynomiale $\phi(t)$ est de degré M . Le signal $w(t)$ est un bruit additif indépendant du SPP. On note que pour $M = 2$ on obtient un SPP appelé chirp.

Fréquence instantanée

La fréquence instantanée (FI) d'un signal est définie par

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1.3)$$

et dans le cas d'un SPP elle a pour expression :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M i a_i t^{i-1}. \quad (1.4)$$

Le problème de l'estimation des SPP affectés par un bruit gaussien additif a été largement étudié par les spécialistes de ce domaine. Nous citons quelques travaux récents publiés par Djurovic et Stankovic [46] qui ont étudié l'influence du bruit gaussien avec une large variance dans l'estimation de FI, Barkat et Boashash [16] qui traitent l'estimation de la FI par l'analyse temps-fréquence, Angeby [8] qui propose une estimation par une approche de moindres carrés non linéaire, alors que d'autres méthodes reposent sur l'analyse temps-échelle [110], [9]. D'autre part, l'estimation des SPP affectés par un bruit multiplicatif ou modulés par une amplitude aléatoire ou déterministe à temps variable est motivée par certaines applications notamment en radar et en sonar [21], [112] [93], [22].

Dans certains cas, le signal utile peut être altéré par un bruit de grande amplitude par rapport à l'amplitude du SPP. Ce type de bruit a des caractéristiques impulsives et admet souvent une distribution non gaussienne. En effet, les perturbations atmosphériques en radar [127] et le bruit acoustique sous-marin en sonar ont des distributions non gaussiennes [91]. Ces caractéristiques impulsives se manifestent par des valeurs élevées et des durées brèves de certains échantillons du signal.

Les études menées dans le contexte de bruit dit impulsif sont très limitées et la littérature peu abondante. Nous citons entre autres les travaux de Shamsunder et *al.* [111] et de Gini et *al.* [55] qui traitent le problème de l'estimation des SPP à amplitude aléatoire noyés dans un bruit non gaussien par une approche cyclostationnaire. Par ailleurs, Stankovic et *al.* [77], [18] et Griffith et *al.* [63] proposent des distributions temps-fréquence robustes.

Sur la base de ces travaux reposent les principales motivations qui nous ont amené à l'étude du problème de l'estimation des SPP noyés dans un bruit non gaussien. On spécifiera dans la suite du manuscrit les différents modèles de distributions qui caractérisent le bruit impulsif.

1.2 Contributions et organisation du document

Contexte de la thèse

Ce travail de thèse entamée en décembre 2001, a été effectué au sein du Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS) à l'École Supérieure d'Électricité (Supélec), sous la direction du Professeur Messaoud Benidir.

Objectifs de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est de rechercher des techniques qui permettent de représenter et d'estimer les SPP affectés par un bruit impulsif. Dans un premier temps, nous avons étudié les méthodes d'analyse temps-fréquence robuste pour la représentation d'un SPP. Notre idée est d'intégrer dans les distributions temps-fréquence un opérateur qui permet de débruiter le signal utile sans nécessairement passer par un traitement tel que le seuillage. Le second objectif est l'estimation des paramètres d'un SPP noyé dans un bruit impulsif α -stable en nous basant sur les méthodes d'analyse spectrale développées essentiellement dans [95].

Le dernier objectif de ce travail est l'étude des approches par filtrage de Kalman pour l'estimation des paramètres du SPP dans un environnement impulsif, en considérant plusieurs approches adoptées dans la littérature [138], [109].

Contributions

Les résultats obtenus au cours de cette thèse ouvrent de nouvelles perspectives dans la recherche et le développement de nouveaux algorithmes pour l'analyse des SPP affectés par du bruit impulsif.

Nous avons étudié différentes distributions temps-fréquence robustes au bruit impulsif. En particulier, nous avons privilégié l'utilisation des statistiques d'ordre fractionnaire adaptées à l'analyse du bruit impulsif α -stable. Nous avons proposé une distribution de Wigner-Ville polynomiale robuste basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire [41]. Cette distribution donne de meilleurs résultats par rapport aux distributions classiques et par rapport à la distribution de Wigner-Ville polynomiale utilisant le M-estimateur proposée dans [18]. Une approche par calcul de la mesure de distance entre les distributions temps-fréquence a été utilisée pour comparer les performances des différentes distributions par rapport à celle que nous proposons.

Par ailleurs, l'approche par analyse spectrale robuste basée sur l'estimation de la matrice de covariation, nous a permis d'étendre les résultats obtenus dans [95]. Nous avons proposé un estimateur MUSIC robuste basé sur les statistiques d'ordre fractionnaire pour estimer les coefficients des SPP dont on peut visualiser l'évolution temporelle dans un plan temps-coefficient

par analogie avec le plan temps-fréquence [40].

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'estimation des SPP par filtrage de Kalman. A cet effet, nous avons proposé un filtre de Kalman robuste utilisant un gain basé sur une fonction de Huber modifiée. Les performances du filtre de Kalman robuste sont nettement supérieures au filtre de Kalman classique [42]. En nous inspirant du travail [109], nous avons abordé une seconde approche qui consiste à adapter le concept de réseau de filtres de Kalman au contexte de l'estimation des SPP, nous avons alors proposé l'utilisation de deux filtres de Kalman étendus opérant en parallèle [43]. Enfin, nous avons proposé d'utiliser deux filtres de Kalman UKF opérant en parallèle. Le filtre UKF donne de meilleurs résultats d'estimation que l'EKF vu qu'aucune linéarisation n'est nécessaire [131].

Organisation du document

Le travail présenté dans cette thèse a pour objectif l'analyse des SPP affectés par un bruit non gaussien, en utilisant différentes méthodes robustes. Afin de permettre une meilleure lecture de ce document, nous présentons les détails de calcul en annexe. Ce mémoire s'organise de la manière suivante.

Le **deuxième chapitre** comprend deux parties. Dans la première, nous présentons les différentes distributions temps-fréquence adaptées à l'analyse des SPP généralement affectés par un bruit gaussien. Dans la seconde partie nous présentons les signaux impulsifs et les outils statistiques pour l'analyse de cette classe de signaux. Nous rappelons les modèles ε -contaminé et α -stable qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

Dans le **troisième chapitre** nous présentons les nouvelles distributions temps-fréquence robustes adaptées aux SPP et nous introduisons une nouvelle transformée : la distribution de Wigner-Ville polynomiale basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire (FLOPWVD), pour le cas des SPP noyés dans un bruit impulsif α -stable. Nous comparons cette nouvelle représentation temps-fréquence avec une autre distribution de Wigner-Ville polynomiale robuste proposée dans la littérature à l'aide de mesures fondées sur la théorie de l'information. Nous prolongeons, naturellement cette distribution temps-fréquence utilisant les statistiques d'ordre fractionnaire pour définir une classe de distributions temps-fréquence robustes adaptées aux signaux multicomposantes.

Le **quatrième chapitre** porte sur l'analyse spectrale robuste des SPP affectés par un bruit additif non gaussien. Dans un premier temps, on présente la méthode Capon pour l'estimation et l'observation de l'évolution temporelle du coefficient de la phase polynomiale par une représentation bidimensionnelle temps-coefficient. On propose une extension de cette méthode par l'utilisation de l'algorithme MUSIC. En se basant sur les méthodes des sous-espaces or-

thogonaux appropriées aux signaux α -stable, nous introduisons un nouvel estimateur MUSIC basé sur la décomposition de la matrice de covariation qui permet d'obtenir une représentation temps-coefficient robuste.

Dans le **cinquième chapitre**, nous adoptons l'approche par représentation d'état utilisée pour l'estimation des paramètres d'un SPP. Un modèle d'état non linéaire est présenté pour ces signaux. On considèrera encore le cas où le signal utile est noyé dans un bruit impulsif modélisé par une somme de gaussiennes. Pour ce problème nous proposons trois approches originales qui sont le filtre de Kalman étendu robuste, le réseau de filtres de Kalman étendu, et enfin le réseau de Kalman UKF. Les performances de ces méthodes sont étudiées et comparées en terme d'erreur quadratique moyenne pour un signal à modulation quadratique de fréquence.

Enfin, dans le **sixième chapitre**, nous présentons les conclusions générales et les perspectives pour des travaux futurs.

Principales publications de l'auteur

- 1- M. Djeddi, M. Benidir, " Time-frequency analysis of polynomial phase signals in impulsive noise", en cours de soumission à IEEE signal processing.
- 2- M. Djeddi, M. Benidir, "A two parallel Extended Kalman Filtering algorithm for the estimation of chirp signals in non-Gaussian noise", EUSIPCO 2005.
- 4- M. Djeddi, H. Belkacemi, M. Benidir, S. Marcos, "A robust MUSIC estimator for polynomial phase signals in α -stable Noise", ICASSP'05, Philadelphia, Mars 2005.
- 3- M. Djeddi, M. Benidir, "Estimation of the parameters of chirp signal in non-Gaussian noise using robust extended Kalman filter", Fourth International Conference on Physics in Signal and Image Processing, pp. 61-64, Toulouse, Février 2005.
- 5- M. Djeddi, M. Benidir, "Robust polynomial Wigner-Ville distribution for the analysis of polynomial phase signals in α -stable noise", ICASSP'04, Vol. 2, pp. ii-613-16, Canada, 17-21 Mai 2004.
- 6- M. Djeddi, M. Benidir, "Separation of AR signals disturbed by impulsive noise using the EM algorithm and Kalman filtering", ECCTD03, Krakow, Poland, Septembre 2003.

Ce tableau permet de reprendre les différentes notations en faisant apparaître clairement nos contributions

Signal à phase polynomiale (SPP)	Bruit gaussien			Chapitre 3	Chapitre 4	Chapitre 5
				Bruit non gaussien		
				Bruit α -stable	Bruit ε -contaminé	
SPP avec une phase de degré ≤ 2	WVD Distribution de Wigner-Ville	Estimateur de Capon adapté aux SPP	EKF Filtre de Kalman étendu	FLOWVD Distribution de Wigner-Ville robuste basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire, RWVD (Distribution de Wigner-Ville robuste)	MFLOM-MUSIC Estimateur MUSIC robuste adapté au SPP	REKF Filtre de Kalman étendu robuste, PEKF Filtre de Kalman étendu parallèles,
SPP avec une phase de degré >2	PWVD Distribution de Wigner-Ville Polynomiale			FLOPWVD Distribution de Wigner-Ville Polynomiale basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire, RPWVD Distribution de Wigner-Ville polynomiale robuste.		PUKF Filtre UKF parallèles

Chapitre 2

Rappels sur les outils d'analyse des SPP et modèles de signaux non gaussiens

-
- 2.1 Introduction
 - 2.2 Outils pour l'analyse des signaux à phase polynomiale
 - 2.3 Signaux non gaussiens
 - 2.4 Conclusion
-

2.1 Introduction

Les techniques non-paramétriques utilisant l'analyse temps-fréquence font partie des méthodes les plus populaires pour le traitement des signaux non stationnaires. Une classe de signaux de ce type qui nous intéresse dans cette thèse est formée par des signaux dits à phase polynomiale. L'analyse de tels signaux a nécessité l'introduction d'un ensemble de transformées et nous allons rappeler dans la suite celles qui sont nécessaires à la concrétisation des objectifs de cette thèse. Il est unanimement acquis que les signaux non stationnaires peuvent porter une part importante d'information. La transformée de Fourier a montré ses limites et insuffisances dans l'analyse de ce type de signaux et on comprend aisément l'intérêt et les enjeux pour développer des outils adaptés à ce contexte. Vues sous cet angle, les représentations temps-fréquence sont d'une

importance majeure puisqu'elles permettent de suivre l'évolution d'un signal conjointement en temps et en fréquence et ainsi en identifier les caractéristiques. Actuellement, nous disposons d'une panoplie d'outils d'analyse temps-fréquence orientés vers certains types de signaux non stationnaires. Dans les années 40, D. Gabor a introduit la notion de l'analyse temps-fréquence par la transformée de Fourier à court terme et son module au carré appelé spectrogramme. Cette transformée ne permet pas d'avoir une localisation parfaite à la fois en temps et en fréquence. La recherche de nouvelles distributions plus performantes a permis d'obtenir des classes de distributions dont la classe de Cohen [36] est un exemple. La Distribution de Wigner-Ville (WVD) [130], [133] est certainement l'élément de cette classe le plus connu. L'application de la WVD et de ses versions lissées à l'analyse des SPP a montré son inadéquation lorsque la phase du signal est de degré $M > 2$. Des extensions ont été développées pour obtenir des distributions d'ordre élevé afin de mieux concentrer l'énergie du signal autour de la fréquence instantanée. Dans [26], les auteurs généralisent la WVD en proposant une nouvelle distribution appelée distribution de Wigner-Ville polynomiale (PWVD), cette dernière permet d'estimer de façon efficace la FI d'un SPP d'ordre supérieur à 2.

Dans la famille des méthodes paramétriques, la solution du maximum de vraisemblance a été proposée dans [25] pour l'estimation des SPP. Toutefois, elle nécessite la maximisation d'une fonction multidimensionnelle qui est coûteuse en terme de complexité calculatoire. Une alternative à l'estimateur de MV, plus simple du point de vue calcul est la transformée de phase polynomiale (TPP) [99]. Le principe de cette méthode consiste à transformer le signal à phase polynomiale en un simple harmonique pour obtenir une estimation des coefficients de la phase. La TPP est utilisée pour l'initialisation de la méthode du MV [51], ainsi que pour l'estimation par la méthode MUSIC des coefficients de la phase [137]. Une autre possibilité consiste à utiliser la méthode de déroulement de phase [44], [103] où encore la modélisation et l'estimation de la phase en utilisant une base définie par des polynômes de Legendre [129, 78, 79]. Enfin, les techniques par filtrage de Kalman ont été proposées pour la poursuite des paramètres de la phase d'un SPP [66], [3]. Dans la suite de l'exposé, on considère que le SPP n'est pas bruité, et on discutera ces différentes méthodes en présentant leurs caractéristiques essentielles.

2.2 Outils pour l'analyse des signaux à phase polynomiale

2.2.1 Distribution de Wigner-Ville

La *Distribution de Wigner-Ville* d'un signal complexe $x(t)$ est définie par [133], [130]

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.1)$$

A titre d'exemple, pour un signal chirp (SPP d'ordre 2) défini par

$$x(t) = be^{j(a_0+a_1t+a_2t^2)}. \quad (2.2)$$

la WVD de $x(t)$ se calcule facilement et on obtient

$$W_x(t, f) = b^2 \delta(2\pi f - (a_1 + 2a_2t)). \quad (2.3)$$

où $\delta(\cdot)$ est la distribution de Dirac.

L'équation (2.3) montre que le résultat du calcul de la WVD du signal donne une série de pics représentés par la distribution de Dirac le long de la fréquence instantanée du signal définie par

$$f_i(t) = a_1 + 2a_2t. \quad (2.4)$$

Ainsi, en calculant la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite représentée par l'équation (2.4), on obtient les valeurs des paramètres a_1 et a_2 du signal chirp .

Les figures 2.1 et 2.2 représentent respectivement l'évolution temporelle de la partie réelle du signal chirp et sa WVD.

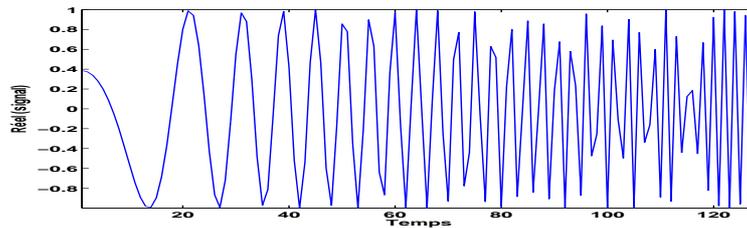


FIG. 2.1: Évolution temporelle du signal chirp

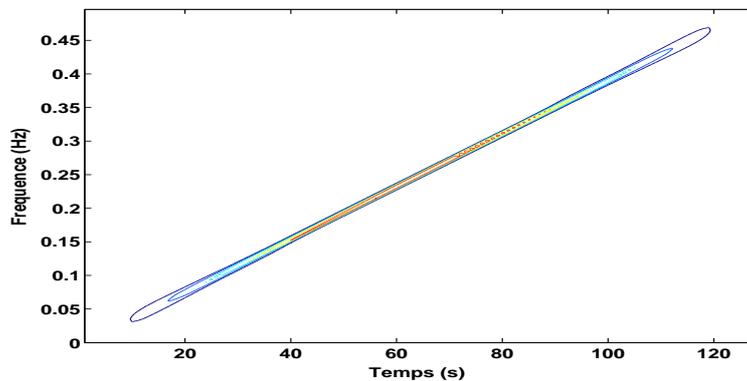


FIG. 2.2: La WVD du signal chirp

La WVD possède des propriétés importantes, telles que la conservation d'énergie, la vérification des lois marginales en temps et en fréquence, la conservation des supports temporel et fréquentiel.

Cependant, la WVD peut prendre des valeurs négatives, ce qui pose problème quant à son interprétation comme une grandeur désignant une densité d'énergie. La forme quadratique de la WVD entraîne généralement l'apparition de termes croisés d'interférence dans le cas de signaux multicomposantes et perd son pouvoir de résolution quand la phase du signal SPP est de degré supérieur à 2 comme on peut le remarquer sur la figure 2.3. En effet, considérons un signal obtenu par la somme de deux signaux chirp dont l'évolution temporelle est donnée par la figure 2.3(a), et un SPP d'ordre $M > 2$ représenté par la figure 2.3(b). Les fréquences instantanées associées à ces deux signaux sont représentées sur les figures 2.3(c) et 2.3(d) respectivement. Nous remarquons que RTF des deux signaux présentent des ondulations et des termes croisés qui rendent l'interprétation de la FI difficile.

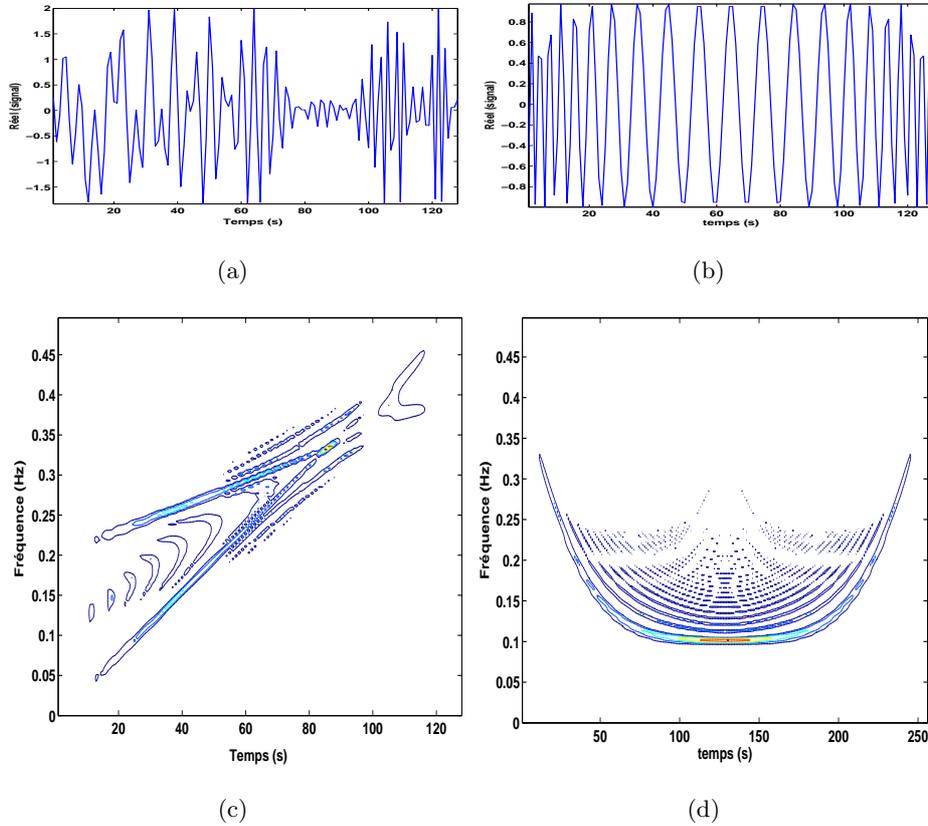


FIG. 2.3: Exemple de SPP et leurs WVD, (a) : évolution temporelle de la somme de deux signaux chirps, (b) : évolution temporelle d'un SPP d'ordre 5, (c) : la WVD du signal en (a), (d) : la WVD du signal en (b)

2.2.2 Distribution de Wigner-Ville polynomiale

Lorsque la phase du SPP est de degré $M \geq 3$, la distribution de Wigner-Ville polynomiale (PWVD) d'ordre q est plus adéquate pour la représentation de la fréquence instantanée (FI)

dans le plan temps-fréquence, elle est définie par [26] :

$$W_x^q(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^q(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.5)$$

où le noyau $K_x^q(t, \tau)$ est défini par

$$K_x^q(t, \tau) = \prod_{k=0}^{q/2} [x(t + t_k\tau)]^{\gamma_k} [x(t + t_{-k}\tau)]^{-\gamma_{-k}} \quad (2.6)$$

Les paramètres γ_k , t_k , et q sont calculés de sorte que la PWVD d'un SPP donné se réduise à

$$W_x^q(t, f) = b^r \delta(2\pi f - \phi'(t)) \quad (2.7)$$

avec

$$r \triangleq \sum_{k=0}^{q/2} \gamma_k. \quad (2.8)$$

La figure 2.4, illustre la PWVD d'un signal à phase polynomiale de degré 5 représenté sur la figure 2.3(b). La FI de ce signal est représentée dans le plan temps-fréquence. On observe bien la suppression des ondulations secondaires présentes dans la figure 2.3 de la WVD du signal.

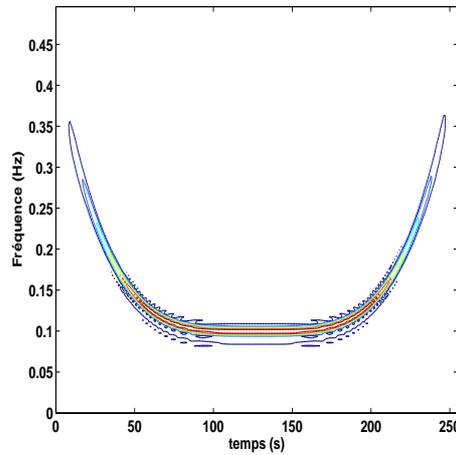


FIG. 2.4: La PWVD d'un SPP d'ordre 5

2.2.3 Transformée de phase polynomiale

La transformée de phase polynomiale (TPP) proposée dans [99] permet d'estimer les paramètres de la phase de manière séquentielle. L'idée principale sur laquelle repose la TPP est la transformation du signal à phase polynomiale en une raie spectrale dont la fréquence ne dépend que du coefficient du terme de plus haut degré de la phase polynomiale. La TPP d'ordre M est définie par [99] :

$$\mathcal{P}_M(x, \theta, \tau) \triangleq \int_0^{T_{M-1}} \prod_{k=0}^{M-1} \{x^{\$k}(t - k\tau)\}^{\binom{M-1}{k}} e^{-j\theta t} dt \quad (2.9)$$

où

$$x^{\$k} \triangleq \begin{cases} x & \text{pour } k \text{ pair} \\ x^* & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \binom{M-1}{k} = \frac{(M-1)!}{k!(M-1-k)!} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{P}_M(x, \theta, \tau) = b^{2^{M-1}} T e^{j[(M-1)a_{M-1}\tau^{M-1} - \tilde{\psi} + \frac{\tilde{\phi}}{2}T]} \text{sinc}\left(\frac{\tilde{\phi}}{2}T\right) \quad (2.11)$$

$$\tilde{\phi} = M!a_M \tau^{M-1} - \theta \quad (2.12)$$

$$\tilde{\psi} = 0.5M!(M-1)a_M \tau^M. \quad (2.13)$$

D'après (2.11), il est possible de déterminer le coefficient a_M à partir de l'opérateur \mathcal{P}_M qui est fonction d'un sinus cardinal centré en $\theta = M!a_M \tau^{M-1}$. L'estimation du coefficient a_{M-1} est ensuite obtenue par la TPP du signal modulé $x(t)e^{ja_M t^M}$.

Lorsqu'on applique la TPP à un signal à phase polynomiale d'ordre strictement inférieur à l'ordre de la TPP, on observe une raie spectrale à la fréquence nulle.

Quand le degré de la phase du SPP est inconnue, on calcule la TPP à un ordre supérieur au degré de la phase. Ainsi tant qu'une raie à la fréquence nulle subsiste, on décroît graduellement l'ordre de la TPP jusqu'à ce qu'une raie apparaisse à une fréquence non nulle. L'ordre de la TPP est alors égal au degré de la phase polynomiale $\phi(t)$ du SPP.

2.2.4 Distribution de Wigner-Ville généralisée

Soient $t_0 \dots t_Q$ des réels distincts vérifiant l'équation suivante [19]

$$\phi^{(l)}(t) = \sum_{k=0}^Q \gamma_k^l \phi(t - t_k) \quad \forall t \quad (2.14)$$

où $\phi^{(l)}$ désigne la dérivée d'ordre l de la phase et les paramètres $\gamma_0^l \dots \gamma_Q^l$ sont obtenus à partir du système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_Q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^l & t_1^l & \dots & t_Q^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^M & t_1^M & \dots & t_Q^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_Q^l \\ \gamma_Q^l \\ \vdots \\ \gamma_Q^l \\ \vdots \\ \gamma_Q^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^l l! \\ \vdots \\ \gamma_Q^l \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

La distribution de Wigner-Ville généralisée (GWVD) d'un signal complexe $x(t)$ est définie par [20]

$$W_{Q+1}^l(t, \theta) = \int_0^T K_x^Q(t, \tau) l \tau^{l-1} e^{-j\theta\tau} d\tau \quad l \neq 0 \quad (2.16)$$

où

$$K_x^Q(t, \tau) = \prod_{k=0}^Q [x(t - t_k\tau)]^{\gamma_k^l}. \quad (2.17)$$

On peut remarquer que pour $l = 1$, la GWVD se réduit à la PWVD évaluée sur l'intervalle $[0, T]$.

Si on considère un SPP d'amplitude $b = 1$, alors pour des paramètres arbitraires t_k et pour $Q \geq M$, on a

$$W_{Q+1}^l(t, \theta) = T^l \exp\left(j \frac{\phi^{(l)} - \theta}{2} T^l\right) \text{sinc}\left(j \frac{\phi^{(l)} - \theta}{2} T^l\right). \quad (2.18)$$

L'équation 2.18 montre que le module de $W_{Q+1}^l(t, f)$ est directement relié au module d'un sinus cardinal centré en $\phi^{(l)}(t)$. Cette propriété nous permet de déterminer le coefficient a_M de la phase en utilisant l'expression suivante

$$\arg\max_{\theta} |W_{M+1}^N(t, \theta)| = M! a_M. \quad (2.19)$$

En multipliant le signal $x(t)$ par $\exp\{-ja_M t^M\}$ et en appliquant la GWVD au nouveau signal, nous obtenons l'estimée du coefficient a_{M-1} . Cette procédure est répétée jusqu'à l'obtention du coefficient a_1 . Enfin, pour déterminer le coefficient a_0 , il suffit de calculer la phase de $x(t) \exp\{-j \sum_{i=1}^M a_i t^i\} = \exp\{ja_0\}$.

2.2.5 Fonction d'ambiguïté généralisée

La fonction d'ambiguïté généralisée (GAF) est définie par [93]

$$\mathcal{A}_{Q+1}^\ell(x, \theta, \tau) \triangleq \int_0^T \mathcal{K}_{Q+1}^\ell(x, t, \tau) e^{-j\theta t} dt \quad (2.20)$$

avec

$$\mathcal{K}_{Q+1}^\ell(x, t, \tau) = \prod_{k=0}^Q [x(t - t_k\tau)]^{\alpha_k^\ell} \quad (2.21)$$

et

$$\alpha_k^\ell = \ell! \frac{\sigma_Q^{Q-\ell}(t_{l \neq k})}{\prod_{i \neq k} (t_i - t_k)}, \quad k = 0, \dots, Q. \quad (2.22)$$

où $\sigma_Q^{Q-\ell}$ représente l'ensemble des polynômes symétriques des paramètres t_0, \dots, t_Q .

Pour $\ell = M - 1$, nous avons

$$\mathcal{A}_{Q+1}^{M-1}(x, \theta, \tau) = b^{\delta(M-1)} T \exp \left(j \left[(M-1)! a_{M-1} \tau^{M-1} + \frac{\tilde{\phi}}{2} T \right] \right) \sin \left(\frac{\tilde{\phi}}{2} T \right). \quad (2.23)$$

Ainsi, le coefficient du terme de plus haut degré de la phase est donné par l'équation suivante

$$\operatorname{argmax}_{\theta} \left| \mathcal{A}_{Q+1}^{M-1}(x, \theta, \tau) \right| = M! a_M \tau^{M-1} \quad (2.24)$$

où

$$\tilde{\phi} = M! a_M \tau^{M-1} - \theta \quad (2.25)$$

$$\delta(M-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } M = 1 \\ 0 & \text{si } M \neq 1. \end{cases} \quad (2.26)$$

Les équations (2.23) et (2.24) sont valides si et seulement si les paramètres t_0, \dots, t_{M-1} satisfont la condition suivante

$$\sum_{i=0}^{M-1} t_i = 0. \quad (2.27)$$

Le résultat obtenu dans l'équation (2.23) montre que \mathcal{A}_{Q+1}^{M-1} est indépendante des paramètres t_k et que $\left| \mathcal{A}_{Q+1}^{M-1}(x, \theta, \tau) \right|$ est une fonction du module d'un sinus cardinal centré en $\theta = M! a_M \tau^{M-1}$. Ainsi, si l'argument du maximum de $\left| \mathcal{A}_{Q+1}^{M-1}(x, \theta, \tau) \right|$ est nul pour tout τ , alors on a $a_M = 0$. En revanche, nous pouvons déterminer la valeur du coefficient a_M si l'argument est non nul pour $\tau \neq 0$. Les autres coefficients de la phase sont calculés en utilisant la même procédure décrite pour l'estimation des coefficients par la GWVD.

2.2.6 SPP noyés dans un bruit gaussien additif et multiplicatif

Dans les applications pratiques, telles que le traitement des signaux radar, le signal reçu peut subir une modulation d'amplitude principalement due au mouvement de la cible par rapport à l'observateur et peut être approximé par un SPP. De même qu'en sonar, le signal acoustique est souvent sujet à un bruit multiplicatif dû au phénomène de propagation du signal en milieu sous marin.

L'analyse des signaux harmoniques noyés dans un bruit multiplicatif a été largement étudiée dans la littérature. Nous citons, à titre d'exemple, les références [21], [54], [37]. Dans [21], les auteurs considèrent le problème de l'estimation d'une sinusoïde affectée par un bruit multiplicatif généré à partir d'un modèle AR. Dans [22], les auteurs proposent une approche basée sur l'estimateur des moindres carrés non linéaires pour l'identification des paramètres des signaux chirps avec une amplitude aléatoire.

Une autre approche proposée dans [112] et qui repose sur la cyclostationnarité a été appliquée dans le cas plus général des SPP. Dans [27] et [28], les auteurs proposent un estimateur de la FI de signaux FM affectés par un bruit multiplicatif, à l'aide des méthodes temps-fréquence en utilisant une distribution appelée le trispectre de Wigner-Ville.

L'analyse statistique et l'étude des performances des estimateurs dans le cas des SPP noyés dans un bruit gaussien multiplicatif sont présentées dans les travaux [1] et [93] pour la TPP, en distinguant le cas d'un bruit multiplicatif de moments non nuls et le cas d'un bruit multiplicatif blanc centré. Dans [89] une étude comparative entre la WVD et l'estimateur basé sur les moments cycliques est proposée et ce dernier donne de meilleures performances.

Dans le cas de signaux multicomposantes, il est utile de distinguer entre les signaux à amplitude variable et ceux à amplitude constante, pour cela une version modifiée de la transformée à phase polynomiale a été proposée dans [94].

2.3 Signaux non gaussiens

2.3.1 Introduction

La majeure partie des algorithmes développés en théorie du signal supposent que les signaux étudiés obéissent à une loi gaussienne. A titre d'exemples, le signal du fouillis radar, le bruit thermique dans les circuits électroniques et le bruit dans les canaux de télécommunications sont de nature gaussienne. Cette hypothèse permet généralement d'obtenir des solutions analytiques compactes.

Cependant, on est de plus en plus conduit à traiter des signaux d'origine naturelle et des signaux de synthèse qui ne sont pas de type gaussien. Les signaux dus aux perturbations atmosphériques ont des distributions de probabilités qui peuvent être modélisées par des lois non gaussiennes. Nous citons, à titre d'exemple, les t-distributions, et les K-distributions. Dans cette thèse nous étudierons les lois α -stables dont les statistiques du second d'ordre sont infinies [115]. Les interférences électromagnétiques en communication HF sont de nature impulsive avec une densité de probabilité égale à une somme pondérée de gaussiennes.

Dans ce qui suit, Nous nous intéresserons aux signaux impulsifs générés à partir des lois α -stables [108] et du modèle ϵ -contaminé [87].

2.3.2 Somme pondérée de gaussiennes

Dans les années 50, Middleton a été le premier à démontrer l'existence des bruit non gaussiens dans les canaux acoustiques sous marins [88] ainsi que dans les canaux de transmissions urbains. Dans une série de publications [87], [117], [118], Middleton a proposé un modèle adapté aux

interférences électromagnétiques (EMI) appelé modèle ϵ -contaminé ou modèle de Middleton.

Le modèle proposé est défini comme la somme d'une composante impulsive et d'une composante gaussienne. Middleton subdivise ce modèle en trois classes :

Classe A : somme de lois normales pondérées

Classe B : somme de lois hypergéométriques confluentes

Classe C : combinaison des deux premières classes (A,B).

Un cas particulier de la classe A est le modèle ϵ -contaminé défini par [135]

$$f(x) = (1 - \epsilon)\mathcal{N}(m, \sigma_1^2) + \epsilon\mathcal{N}(m, \sigma_2^2). \quad (2.28)$$

La valeur de la variance σ_1^2 correspondant à la composante gaussienne est plus faible que celle de la composante impulsive σ_2^2 . On note le rapport des variances $r = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ qui est généralement de l'ordre de 100. Le paramètre ϵ est appelé facteur de contamination.

La figure 2.5 représente la densité de probabilité du bruit impulsif pour différentes valeurs de ϵ , avec $\sigma_1^2 = 0.05$ et $\sigma_2^2 = 50$.

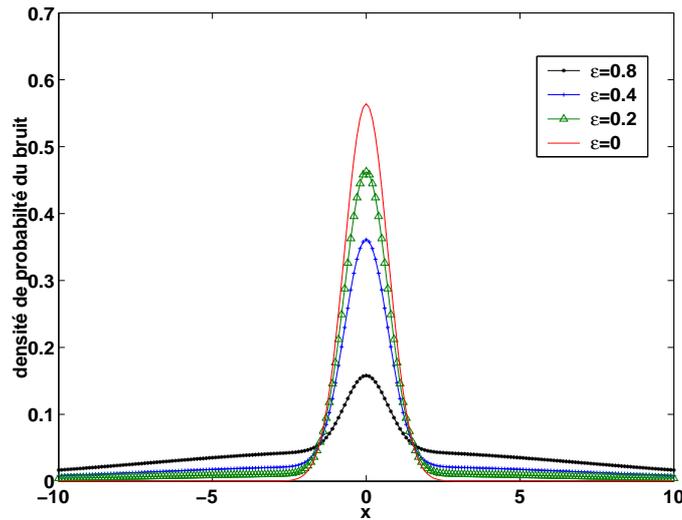


FIG. 2.5: La densité de probabilité du modèle de bruit de Middleton

2.3.3 Signaux α -stables

Les lois α -stables sont utilisées dans de nombreux domaines pour modéliser des signaux en télécommunication, Struck et Kleiner [120] ont démontré d'une façon empirique que le bruit dans les lignes téléphoniques est bien décrit par une loi α -stable. Dans le domaine des finances, les travaux de Mandelbrot [82], en informatique [23], [68], et dans les applications biomédicales [59] [13] [107], les lois α -stables se sont révélés adéquates pour modéliser les phénomènes impulsifs. Nikias et *al.* ont contribué au développement de différents algorithmes en traitement du signal [115] qui tiennent compte du bruit impulsif α -stable. Parmi les algorithmes proposés par Nikias

et al, on peut citer la détection et la classification de signaux [114], l'estimation autodidacte de canal [80], le traitement d'antennes et le radar [121], [124], [122], la mise au point de récepteurs optimaux et sous-optimaux en présence de signaux impulsifs [125], l'estimation des paramètres d'une distribution α -stable [30], [126], [80]. Plusieurs ouvrages ont été consacrés à ces lois et nous citons le livre de Taquq [108] qui a étudié les lois α -stables d'une manière approfondie dans le cas univarié et multivarié.

Définition 1 Une variable aléatoire (v.a.) X est dite α -stable s'il existe des paramètres $0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1, \gamma \geq 0$, et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que sa fonction caractéristique ait la forme suivante :

$$\Phi(\omega) = \exp\{j\mu\omega - \gamma|\omega|^\alpha [1 + j\beta\text{signe}(\omega)\kappa(\omega, \alpha)]\} \quad (2.29)$$

où

$$\kappa(t, \alpha) = \begin{cases} \text{tg}\frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi\ln(t)}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{signe}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Les quatre paramètres caractérisant une loi α -stable sont les suivants.

α : appelé exposant caractéristique, $0 < \alpha \leq 2$. Il détermine la forme de la distribution. Plus la valeur de α est petite, plus la queue de la distribution est lourde.

μ : appelé paramètre de position ou de centrage, $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha > 1$, μ est égal à la moyenne de la distribution.

γ : appelé le paramètre de dispersion (ou échelle), ce paramètre correspond à la moitié de la variance dans le cas où $\alpha = 2$.

β : appelé paramètre d'asymétrie, $\beta \in [-1, 1]$. Si $\beta = -1$, la distribution est totalement asymétrique à gauche. Si $\beta = 1$, la distribution est totalement asymétrique à droite. Pour $\beta = 0$, la distribution est symétrique par rapport au paramètre μ .

Définition 2 Une v.a. X a une distribution stable si et seulement si pour tout k et toute suite de variables aléatoires i.i.d. $\{X_1 \dots X_k\}$ de même loi que X , il existe $a_k > 0$ et b_k deux réels, tels que

$$X_1 + \dots + X_k \triangleq a_k X + b_k. \quad (2.30)$$

Pour $b_k = 0$, la distribution est dite strictement stable.

On notera la distribution α -stable de paramètres α, β, γ et μ par $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$.

Quelques cas particuliers

- La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ correspond à une loi α -stable définie par $S_2(0, \sigma^2/2, m)$ et on a :

$$\mathcal{N}(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- La loi de Cauchy correspond à une loi $S_1(0, \sigma, m)$

$$S_1(x; 0, \sigma, m) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-m)^2}$$

- La distribution de Lévy correspond à la loi α -stable avec les paramètres $\alpha = 1/2$ et $\beta = -1$

$$S_{1/2}(x; -1, \sigma, m) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-m)}\right), \quad x > \mu$$

Dans le cas général, pour α quelconque, nous n'avons pas de forme explicite pour la distribution α -stable. Dans [123] les auteurs proposent une méthode d'approximation basée sur une forme polynomiale :

$$S_\alpha(\beta, 1, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) \left(\frac{x}{c}\right)^{-\alpha k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}(\alpha + \vartheta)\right) & \text{pour } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma\left(\frac{k}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{x}{c}\right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(\alpha + \vartheta)\right) & \text{pour } 1 < \alpha \leq 2 \end{cases} \quad (2.31)$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction Gamma définie par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$

et

$$\begin{aligned} c &= (1 + \eta^2)^{-1/2\alpha}, \quad \vartheta = -\frac{2}{\pi} \arctg \eta \\ \eta &= \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

L'équation (2.31) n'est pas exploitable car elle implique une somme infinie de termes et cela pose un problème pour le choix du degré du polynôme qui donne la meilleure approximation de la distribution. Dans [75], l'auteur montre que l'utilisation de cette approximation conduit à une instabilité numérique ce qui la rend d'une manière générale inexploitable pour obtenir la d.d.p. de lois α -stables.

2.3.3.1 Distribution symétrique α -stable $S_\alpha S$

Une distribution α -stable est dite symétrique α -stable ($S_\alpha S$) lorsque $\beta = 0$. Dans ce cas, la fonction caractéristique définie par l'équation (2.29) devient plus simple, et elle a pour expression

$$\Phi(\omega) = \exp\{j\mu\omega - \gamma|\omega|^\alpha\}. \quad (2.33)$$

2.3.3.2 Les moments de lois α -stables

Si X est une v.a. qui suit une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, alors on a les propriétés suivantes :

Pour $\alpha = 2$, $\mathbf{E}|X|^p < +\infty$ et pour $0 < \alpha < 2$, on a deux cas :

$\mathbf{E}|X|^p = +\infty$ pour $p \geq \alpha$ et

$\mathbf{E}|X|^p < +\infty$ pour $0 \leq p < \alpha$, dans ce dernier cas on a l'expression suivante :

$$\mathbf{E}|X|^p = C(p, \alpha)\gamma^{p/\alpha} \quad (2.34)$$

où

$$C(p, \alpha) = \frac{2^{p+1}\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(-p/\alpha)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma(-p/2)}. \quad (2.35)$$

Lorsque α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie. De plus, si α est strictement inférieur à 1, c'est la moyenne qui devient infinie.

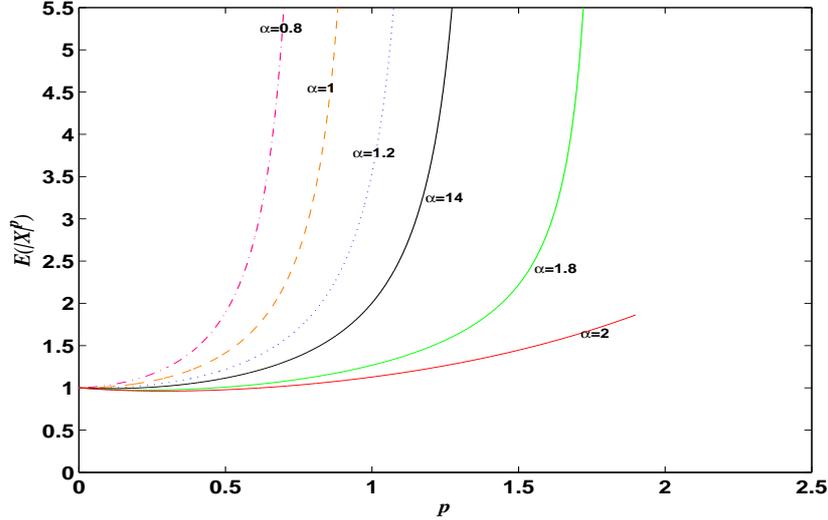


FIG. 2.6: Les moments de lois α -stables pour différentes valeurs de α

Dans la figure 2.6, on représente les moments d'ordre p pour différentes valeurs de α correspondant aux propriétés définies dans (2.34) et (2.35).

2.3.3.3 Approximation par un mélange de gaussiennes

Il est possible de représenter une v.a. α -stable en fonction d'une v.a. gaussienne et d'une autre v.a. α -stable [75]

Théorème 1 Soit $X \sim S_{\alpha_x}(0, \gamma_x, 0)$ avec $0 < \alpha_x \leq 2$ et soit α_z vérifiant $0 < \alpha_z < \alpha_x$. Alors, il existe une v.a. Y positive α -stable indépendante de X avec

$$Y \sim S_{\alpha_z/\alpha_x}(-1, (\cos(\frac{\pi\alpha_z}{2\alpha_x}))^{\alpha_x/\alpha_z}, 0) \quad (2.36)$$

telle que la nouvelle v.a. $Z = Y^{1/\alpha_x} X$ soit aussi α -stable et on a :

$$Z \sim S_{\alpha_z}(0, \gamma_x, 0) \quad (2.37)$$

Théorème 2 Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 2\gamma_x)$ et soit α_z vérifiant $0 < \alpha_z < 2$. Alors, il existe une v.a. Y positive α -stable indépendante de X avec

$$Y \sim S_{\alpha_z/2}(-1, [\cos(\frac{\pi\alpha_z}{4})]^{2/\alpha_z}, 0) \quad (2.38)$$

telle que la nouvelle v.a. $Z = Y^{1/2} X$ soit aussi α -stable et on a :

$$Z \sim S_{\alpha_z}(0, \gamma_x, 0). \quad (2.39)$$

La d.d.p. de Z est déduite à partir de la propriété des lois marginales par :

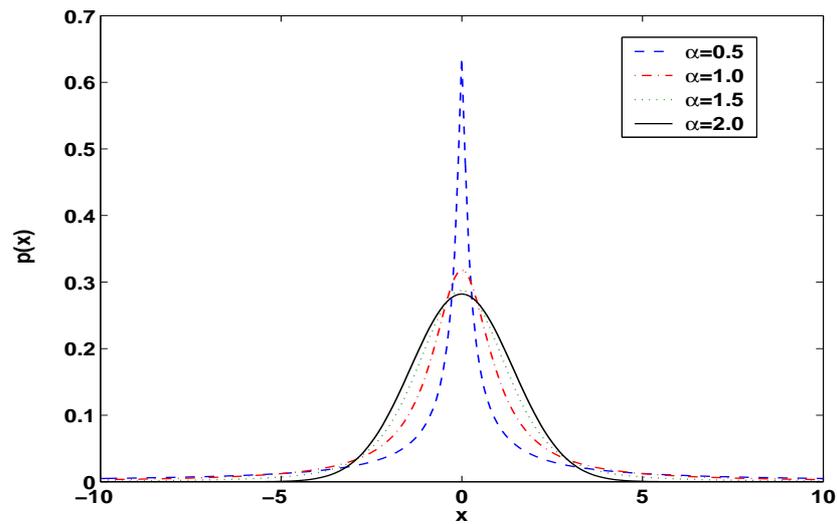
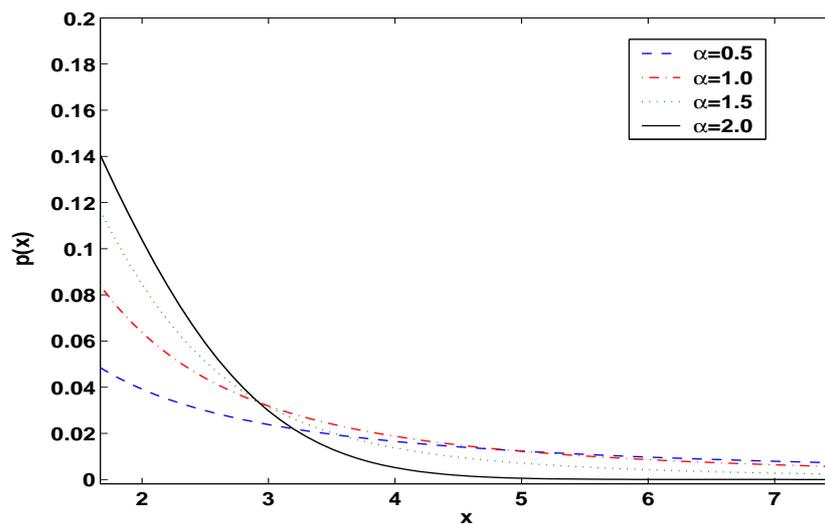
$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z|V}(z|v) f_V(v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2\gamma v^2}\right) f_V(v) v^{-1} dv \end{aligned} \quad (2.40)$$

où $Y = V^2$ et $f_V(v)$ est une densité appelée densité de mélange. L'intégrale (2.40) est approchée par une somme finie sur un ensemble de N points qui permet d'obtenir une approximation de la loi α -stable par un modèle de mélange de gaussiennes [75] :

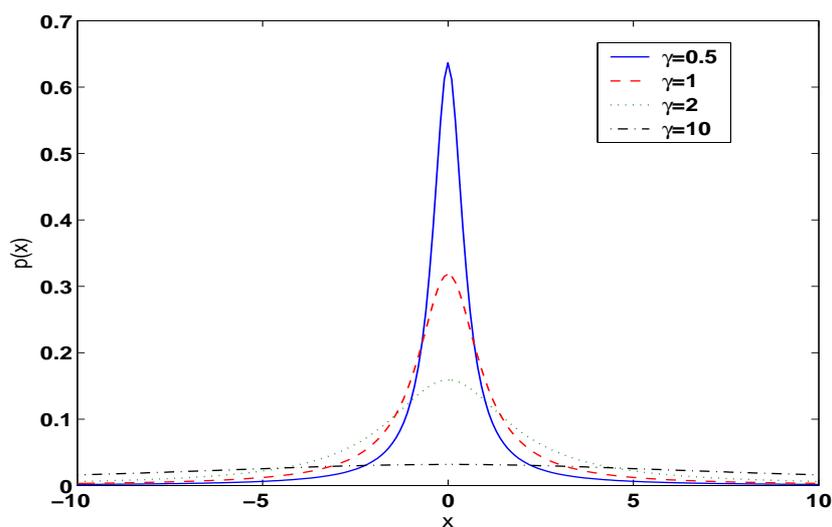
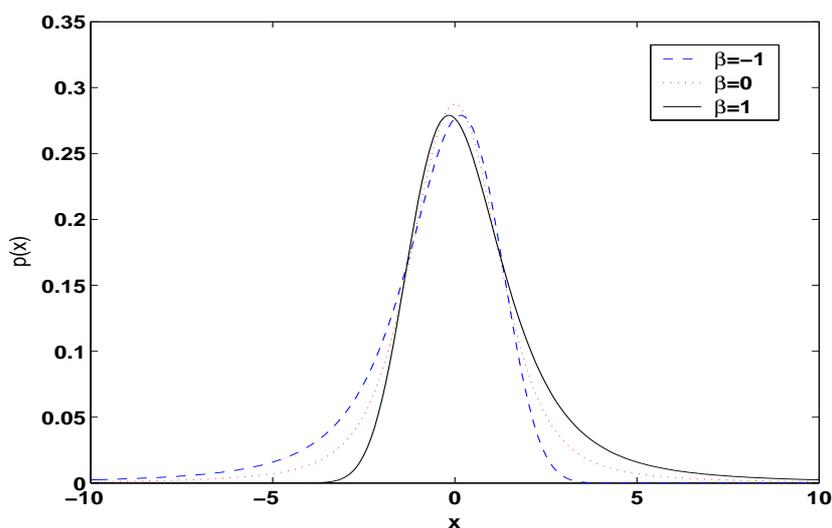
$$f_{\alpha,0,\gamma,\mu}(z) \approx \frac{\sum_{j=1}^N \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\gamma v_j^2}\right) f_V(v_j) v_j^{-1}}{\sum_{j=1}^N f_V(v_j)} \quad (2.41)$$

avec

$$f_V(v) = 2v f_Y(y). \quad (2.42)$$

FIG. 2.7: La d.d.p. d'un signal α -stable pour différents exposants caractéristiquesFIG. 2.8: Queue d'une loi α -stable en fonction de α

La figure 2.7 représente les densités de probabilités du bruit α -stable pour différentes valeurs de α . On remarque que la valeur α détermine la forme de la distribution. Plus la valeur de α est petite, plus la distribution a une forme pointue et sa queue décroît plus lentement que celle de la distribution gaussienne comme on peut le vérifier sur la figure 2.8.

FIG. 2.9: Effet du paramètre d'échelle sur une d.d.p. α -stableFIG. 2.10: Effet du paramètre d'asymétrie sur une d.d.p. α -stable

Les effets du paramètre de dispersion γ et le paramètre d'asymétrie β sur la forme de la distribution α -stable sont illustrés par les figures 2.9 et 2.10 respectivement. On observe sur la figure 2.9 que l'augmentation de la valeur de γ rend la distribution plus aplatie tandis que la diminution de sa valeur la rend piquée. Sur la figure 2.10 nous remarquons qu'une valeur négative de β correspond à la présence d'une queue de distribution vers la gauche tandis qu'une valeur positive correspond à une queue de distribution vers la droite.

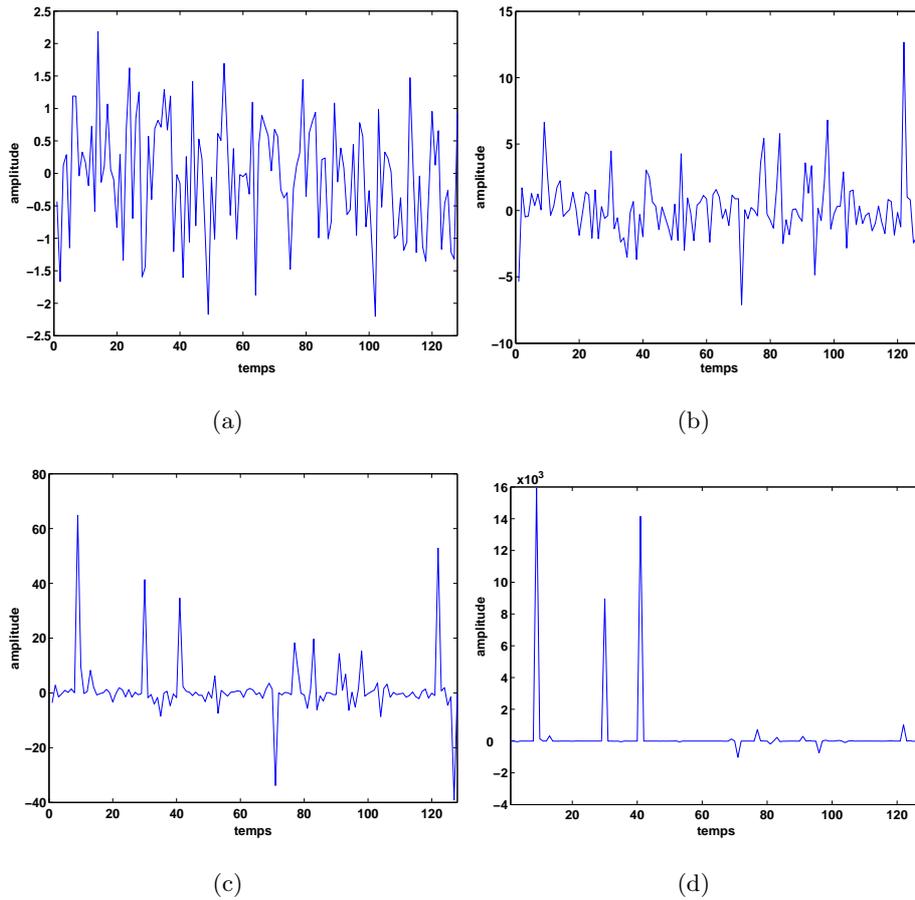


FIG. 2.11: Différents signaux obtenus pour différentes valeurs de α ; (a) : $\alpha = 2$, (b) : $\alpha = 1.5$, (c) : $\alpha = 1$, (d) : $\alpha = 0.5$

Pour illustrer l'influence du paramètre α , on génère différents signaux correspondant à différentes valeurs de l'exposant caractéristique. La figure 2.11 montre que plus la valeur de α est petite plus le signal présente des impulsions avec des amplitudes très grandes.

2.3.3.4 Propriétés des variables aléatoires α -stables

Propriété 1 Si deux v.a. α -stables $X_1 \sim S_\alpha(\beta_1, \gamma_1, \mu_1)$ et $X_2 \sim S_\alpha(\beta_2, \gamma_2, \mu_2)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ avec

$$\beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \quad \gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Propriété 2 Si $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ alors pour tout réel $c \neq 0$ et $d \in \mathbb{R}$, on a

$$cX + d \sim \begin{cases} S_\alpha(\text{signe}(c)\beta, |c|\gamma, c\mu + d) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ S_1(\text{signe}(c)\beta, |c|\gamma, c\mu + d - \frac{2}{\pi}c\beta\gamma \ln |c|) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

2.3.3.5 Covariation

La covariance joue un rôle très important dans le cas gaussien, malheureusement cette quantité n'est pas définie dans le cas α -stable car les moments d'ordre 2 sont infinis. La covariation, définie ci-dessous, joue un rôle analogue à la covariance dans le domaine des signaux α -stables. Soient deux v.a. X et Y $S\alpha S$ avec un exposant caractéristique $1 < \alpha \leq 2$, la covariation de X et Y est définie par :

$$[X, Y]_\alpha = \int_C xy^{\langle \alpha-1 \rangle} d\Gamma(S) \quad (2.43)$$

où C est le cercle unité, $\Gamma(S)$ est une mesure spectrale [39], [81] et l'opérateur $\langle \alpha - 1 \rangle$ est défini par

$$y^{\langle \alpha-1 \rangle} = \begin{cases} |y|^\alpha \text{ signe}(y) & \text{pour } y \in \mathbb{R} \\ |y|^{\alpha-1} y^* & \text{pour } y \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Lorsque $1 < \alpha \leq 2$, l'équation (2.44) a pour expression [115]

$$[X, Y]_\alpha = \frac{E(XY^{\langle p-1 \rangle})}{E(|Y|^p)} \gamma_y, \quad 1 \leq p < \alpha. \quad (2.45)$$

La covariation n'est pas symétrique

$$[X, Y]_\alpha \neq [Y, X]_\alpha. \quad (2.46)$$

Pour $\alpha = 2$, la covariation est reliée à la covariance des variables X et Y par :

$$[X, Y]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X, Y). \quad (2.47)$$

Enfin, nous avons l'égalité suivante :

$$[Y, Y]_\alpha = \gamma_y. \quad (2.48)$$

Le coefficient de covariation

Par analogie avec les lois pour lesquelles le coefficient de covariance existe, on introduit dans le cas des signaux α -stables le coefficient de covariation comme suit.

Définition 3 *Le coefficient de covariation de X et Y est donné par*

$$\lambda_{XY} = \frac{[X, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha}. \quad (2.49)$$

La covariation et le coefficient de covariation sont liés au moment d'ordre fractionnaire inférieur à α de la manière suivante :

$$\lambda_{XY} = \frac{E(XY^{(p-1)})}{E(|Y|^p)}, \quad 1 \leq p < \alpha \quad (2.50)$$

et

$$[X, Y]_\alpha = \lambda_{XY} \gamma_y, \quad 1 \leq p < \alpha. \quad (2.51)$$

Propriété 3 Pour les lois SaS la covariation est linéaire à gauche, c'est à dire :

$$[aX_1 + bX_2, Y]_\alpha = a[X_1, Y]_\alpha + b[X_2, Y]_\alpha \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall X_1, X_2, Y$$

La covariation n'est pas linéaire à droite dans le cas général. Mais, si Y_1 et Y_2 sont indépendantes, alors on a :

$$[X, cY_1 + dY_2]_\alpha = c^{(\alpha-1)}[X, Y_1] + d^{(\alpha-1)}[X, Y_2] \quad \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall X, Y_1, Y_2.$$

2.3.3.6 Variable complexe α -stable

Une v.a. complexe $X = X_1 + jX_2$ α -stable est définie par sa fonction caractéristique [121] :

$$\Phi(\omega) = E\{\exp[j\Re(\omega X^*)]\} = E\{\exp[j(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)]\} \quad \text{avec } \omega = \omega_1 + j\omega_2. \quad (2.52)$$

La v.a. X est dite isotropique SaS si le couple (X_1, X_2) a une mesure spectrale uniforme [121]. Dans ce cas, la fonction caractéristique est réduite à l'expression suivante :

$$\Phi(\omega) = E\{\exp[j\Re(\omega X^*)]\} = \exp(-\gamma |\omega|^\alpha). \quad (2.53)$$

2.3.3.7 Génération de processus α -stables

Dans cette partie, nous présentons la technique utilisée pour générer des échantillons à partir d'une distribution α -stable. Cet algorithme développé par Chambers et *al.* [32] permet de simuler les lois stables $S_\alpha(\beta, 1, 0)$ comme suit :

$$S_\alpha(\beta, 1, 0) = \begin{cases} G \frac{\sin[\alpha(U-U_0)]}{(\cos U)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(U-(U-U_0))}{V} \right)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}, & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta U \right) \text{tg} U - \beta \ln \left(\frac{\frac{\pi}{2} V \cos U}{\frac{\pi}{2} + \beta U} \right) \right], & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

où

V est une v.a. de loi exponentielle standard

U est une v.a. uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$G = [\cos(\arctg(\beta \{ \text{tg}(\pi\alpha/2) \}))]^{-1/\alpha}$

$U_0 = -\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1-|1-\alpha|}{\alpha} \right)$

Pour obtenir une loi avec une valeur de dispersion quelconque, on effectue le changement de variable défini par la propriété suivante.

Propriété 4 Une distribution α -stable est appelée distribution standard, lorsque $\mu = 0$ et $\gamma = 1$. Toute distribution α -stable peut être réécrite dans une forme standard en appliquant le changement de variable suivant :

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, \gamma, \mu) \iff Y = \frac{X - \mu}{\gamma^{1/\alpha}} \text{ suit une loi standard } S_\alpha(\beta, 1, 0).$$

Dans le cas gaussien ($\alpha = 2$, $\beta = 0$), on obtient $X = 2\sqrt{V} \sin U$ qui correspond à la méthode de Box-Müller [31] pour la génération de variables aléatoires avec une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 2)$.

Pour simuler une loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$), on a $X = \text{tg}(U)$

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie les principales transformées et distributions temps-fréquence adaptées pour la représentation et l'estimation des SPP. En particulier, nous avons passé en revue d'une manière un peu plus approfondie la transformée de phase polynomiale, la distribution de Wigner-Ville polynomiale et la fonction d'ambiguïté généralisée qui ont fait l'objet de plusieurs publications citées précédemment et démontrant ainsi que l'utilisation de ces outils pour l'analyse des SPP noyés dans un bruit gaussien additif ou multiplicatif reste valide.

Nous avons aussi rappelé deux modèles de distributions non gaussiennes souvent utilisés pour définir le bruit impulsif. Nous avons vu que le modèle du bruit ϵ -contaminé défini par la somme pondérée de deux gaussiennes est un modèle simple et que le modèle α -stable qui est plus flexible et permet d'obtenir une large gamme de distributions. Ces deux modèles sont liés comme le prouve les résultats présentés dans [7], [75] qui montrent qu'il est possible d'approximer les lois α -stables par une somme de gaussiennes.

Vu la nature des signaux non gaussiens dont les statistiques du second d'ordre sont infinies, la représentation est l'estimation des SPP noyés dans ce type de bruit pose problème. Ce dernier sera étudié dans les prochains chapitres et dans lesquels nous proposons des solutions robustes.

Chapitre 3

Méthodes d'analyse temps-fréquence robustes

-
- 3.1 Introduction**
 - 3.2 L'effet du bruit impulsif**
 - 3.3 Distributions temps-fréquence robustes**
 - 3.4 Conclusion**
-

3.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté les outils temps-fréquence pour l'analyse des SPP à amplitude constante noyés dans un bruit additif et multiplicatif gaussien. Cependant dans certain cas le bruit peut être de nature impulsive.

Dans [69], les auteurs ont proposé un algorithme appelé M-periodogramme qui permet d'analyser les signaux harmoniques affectés par un bruit impulsif avec une distribution à queue lourde. Le M-periodogramme utilise la fonction Minimax de Huber [60]. Dans le même contexte, un spectrogramme et une distribution de Wigner-Ville robustes (RWVD) ont été proposés respectivement dans [45] et [71].

La RWVD a été ensuite étendue dans [18] au cas des SPP de degré supérieur à 2. La nouvelle distribution dénommée distribution de Wigner-Ville polynomiale robuste (RPWVD) a été étudié pour des SPP noyés dans un bruit non gaussien obtenu en faisant passer un bruit gaussien dans un filtre non linéaire.

Dans [81], les auteurs ont introduit une nouvelle classe d'algorithmes robustes au bruit impulsif α -stable exploitant les statistiques d'ordre fractionnaire. Ils proposent une fonction d'ambiguïté robuste appelée FLOAF (*Fractional Lower-Order Ambiguity Function*) pour estimer le temps de retard et la fréquence de retard [128]. Dans [63], les auteurs proposent une distribution de Wigner-Ville robuste basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire. Cette nouvelle distribution appelée FLOWVD (*Fractional Lower-Order Wigner-Ville Distribution*) est obtenue en exploitant la définition de la covariance d'ordre fractionnaire définie dans [81].

Dans ce chapitre nous présentons une nouvelle distribution pour les SPP à amplitude constante affectés par un bruit impulsif α -stable. Cette distribution appelée FLOPWVD (*Fractional Lower-Order Polynomial Wigner-Ville Distribution*) se base sur les statistiques d'ordre fractionnaire [41]. On comparera cette distribution à la PWVD classique ainsi qu'à la RPWVD.

3.2 L'effet du bruit impulsif

Dans cette partie, nous étudions l'effet du bruit impulsif sur les différentes distributions temps-fréquence classiques. A titre d'exemple, nous considérons l'effet du bruit α -stable pour différentes valeurs du paramètre caractéristique α à la fois sur le spectrogramme et sur la distribution de Wigner-Ville. Avant de procéder à une étude plus approfondie, nous considérons tout d'abord l'exemple simple suivant.

Soit un signal $y(t)$ obtenu à partir de la somme d'un signal $x(t)$ et d'une impulsion de Dirac à un instant t_i avec une amplitude $A \gg E_x$, où E_x est l'énergie du signal, $y(t)$ s'écrit comme :

$$y(t) = x(t) + A\delta(t - t_i). \quad (3.1)$$

La WVD du signal $y(t)$ a pour expression :

$$W_y(t, f) = W_x(t, f) + 4\Re \left\{ Ax(2t - t_i)e^{-j2(t-t_i)f} \right\} + 2|A|^2 \delta(t - t_i). \quad (3.2)$$

On remarque que la WVD du signal $y(t)$ comporte une composante ayant une valeur égale à $2|A|^2$ qui contamine le plan temps-fréquence sur tout l'axe des fréquences à l'instant t_i de l'apparition de l'impulsion. S'ajoutent à cela les termes croisés entre le signal utile $x(t)$ et l'impulsion, dus à la forme quadratique du noyau $K_y(t, \tau) = y(t + \tau/2)y^*(t - \tau/2)$.

De manière générale, soit un signal affecté par un bruit additif $w(t)$ comme défini dans l'équation (1.2) et calculons sa fonction d'autocorrélation :

$$R_y(t, \tau) = E \left\{ y\left(t + \frac{\tau}{2}\right)y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right\}. \quad (3.3)$$

En développant l'expression ci-dessus, on obtient

$$R_y(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2})x(t - \frac{\tau}{2}) + x(t + \frac{\tau}{2})E \left\{ w^*(t - \frac{\tau}{2}) \right\} + x^*(t + \frac{\tau}{2})E \left\{ w(t + \frac{\tau}{2}) \right\} + E \left\{ w(t + \frac{\tau}{2})w^*(t - \frac{\tau}{2}) \right\}. \quad (3.4)$$

A titre d'exemple, pour $\tau = 0$, l'équation (3.4) se réduit à

$$R_y(t, 0) = |x(t)|^2 + x(t)E \{ w^*(t) \} + x^*(t)E \{ w(t) \} + E \{ |w(t)|^2 \}. \quad (3.5)$$

Supposons que le bruit $w(t)$ est de nature α -stable. Nous avons vu dans le chapitre 2 que $E \{ w(t) \}$ est infinie pour $\alpha \leq 1$ et que $E \{ |w(t)|^2 \}$ devient infinie pour $\alpha < 2$. Cette propriété rend la WVD totalement inefficace pour estimer la FI du signal.

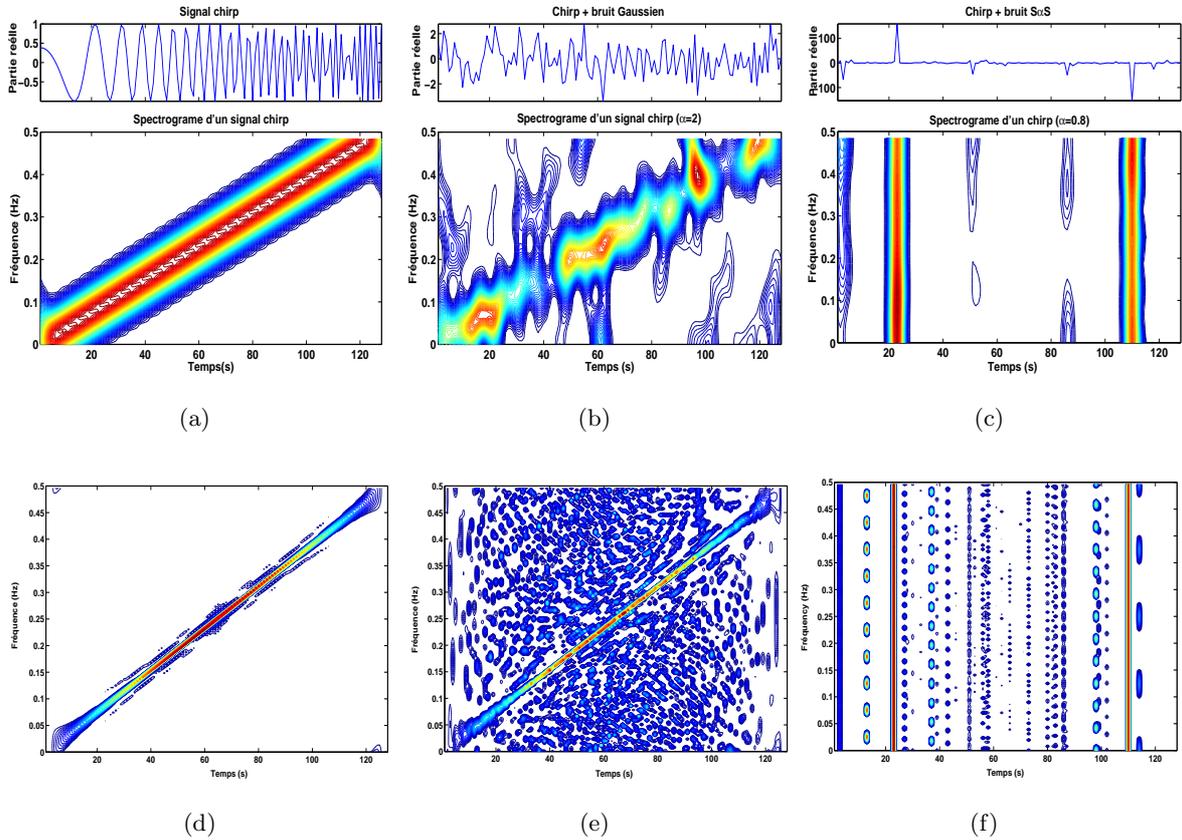


FIG. 3.1: Effet du bruit additif α -stable pour différentes valeurs de α , (a) (b) (c) : spectrogramme; (d) (e) (f) : WVD

Dans la figure 3.1, nous avons représenté le spectrogramme et la WVD d'un signal chirp affecté par un bruit blanc additif de distribution gaussienne et un bruit α -stable, de paramètre $\alpha = 0.8$. Dans les figures 3.1(b) et 3.1(e) on remarque qu'il est toujours possible de distinguer la fréquence instantanée dans le cas du bruit gaussien. On observe dans les figures 3.1(c) et 3.1(f) que les

différentes représentations temps-fréquence sont fortement dégradées par le bruit α -stable qui présente des raies verticales, le long de l'axe des fréquences. On n'observe plus la fréquence instantanée du signal représentée dans les figures 3.1(a) et 3.1(d).

Dans le cas où le bruit est α -stable, les auteurs dans [123] proposent une mesure équivalente au rapport signal sur bruit (SNR) pour le bruit gaussien. Cette mesure appelée rapport signal à bruit généralisé (GSRN) est définie par

$$\text{GSRN} = 10 \log \left(\frac{1}{\gamma_w N} \sum_{t=0}^N |x(t)|^2 \right). \quad (3.6)$$

3.3 Distributions temps-fréquence robustes

3.3.1 PWVD robuste pour les SPP noyés dans un bruit non gaussien

Dans [18], les auteurs proposent une distribution de Wigner-Ville polynomiale robuste définie à partir d'un problème d'optimisation qui est le suivant :

$$\hat{m} = \arg \min_m J(t, f, m) \quad (3.7)$$

avec

$$J(t, f, m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} g(nT) F[e(t, f, n)] \quad (3.8)$$

et

$$e(t, f, n) = K_x^{(q)}(t, n) e^{-j4\pi f n T} - m \quad (3.9)$$

où $K_x^{(q)}(t, n)$ est le noyau défini en (2.6), $F[e(t, f, n)]$ une fonction appelée fonction perte et $g(nT)$ une fenêtre quelconque.

Si $F[e(t, f, n)] = |e(t, f, n)|^2$, on obtient la PWVD standard définie en (2.5) dans sa forme discrète.

Afin de diminuer l'effet du bruit non gaussien, on utilise un critère en valeur absolue défini par l'estimateur des moindres modules $F[e(t, f, n)] = |e(t, f, n)|$ et on obtient une PWVD robuste $W_x^r(t, f)$ vérifiant :

$$W_x^r(t, f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{d(t, f, n)}{D_0(t, f)} K_x^{(q)}(t, n) e^{-j4\pi f n T} \quad (3.10)$$

où

$$d(t, f, n) = \frac{g(nT)}{\left| K_x^{(q)}(t, n) e^{-j4\pi f n T} - W_x^r(t, f) \right|} \quad (3.11)$$

et

$$D_0(t, f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} d(t, f, n). \quad (3.12)$$

Vu que W_x^r apparaît à gauche et à droite de l'égalité en (3.10), on obtient alors l'algorithme itératif suivant qui permet de calculer la RPWVD à partir de la PWVD standard définie par (2.5) et qu'on notera $W_x^s(t, f)$. Les étapes de l'algorithme sont données ci-dessous :

- 1) Initialisation : $W_x^0(t, f) = W_x^s(t, f)$
- 2) Pour $i = i + 1$,
- 3) Calculer $d(t, f, n)$ et $D_0(t, f)$ à partir de (3.11) et (3.12)
- 4) Calculer $W_x^i(t, f)$ qui correspond à la RPWVD à l'itération i en utilisant l'équation (3.10)
- 5) Arrêt de l'algorithme si pour un seuil fixé η on a

$$|W_x^i(t, f) - W_x^{i-1}(t, f)| / |W_x^i(t, f)| \leq \eta$$
- 6) Sinon retour à l'étape 2,

TAB. 3.1 – Algorithme RPWVD

Exemple 1 On considère le SPP d'ordre 4 suivant

$$x(t) = \exp \{j(-14.8606 t + 0.26474 t^2 - 1.73032 \cdot 10^{-3} t^3 + 4.24097 \cdot 10^{-6} t^4)\} + w(t). \quad (3.13)$$

On propose de représenter la RPWVD du SPP noyé dans un bruit α -stable pour différentes valeurs de α . Le calcul de la RPWVD est effectué avec une fenêtre de Hanning de longueur $L = 16$ échantillons. Le bruit $w(t)$ est un bruit complexe $S\alpha S$ où le paramètre α est varié pour différentes valeurs.

L'algorithme RPWVD a été validé dans le cas où le signal est affecté par un bruit non gaussien obtenu par une fonction non linéaire d'un signal gaussien. Dans ce qui suit nous proposons de tester les performances de la RPWVD dans le cas d'un bruit impulsif α -stable. Les simulations données par la figure ci-dessous montrent que la RPWVD résiste bien au bruit α -stable pour $\alpha \geq 1$.

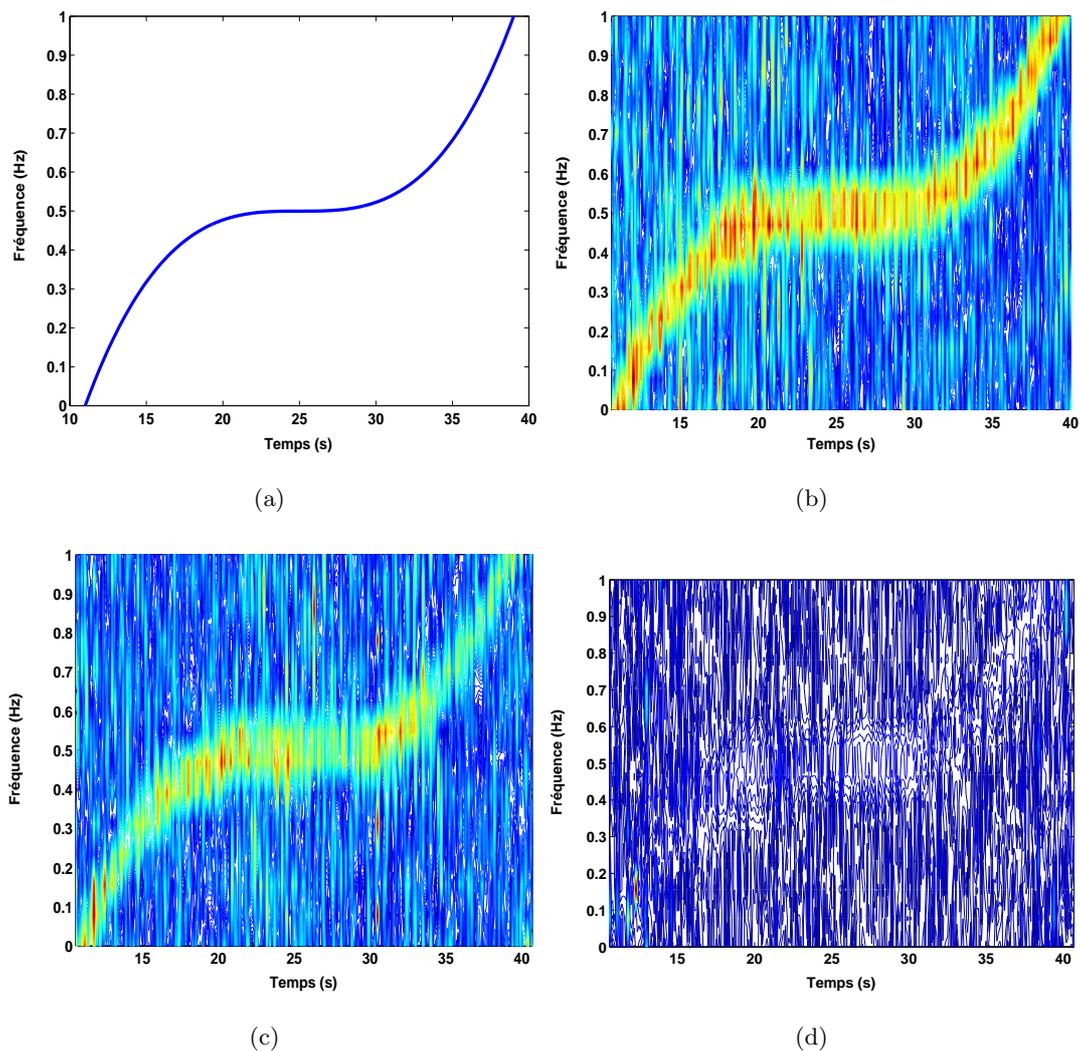


FIG. 3.2: L'effet du bruit impulsif α -stable sur la RPWVD, (a) : FI théorique, (b) : $\alpha = 1.6$, (c) : $\alpha = 1$, (d) : $\alpha = 0.5$

La figure 3.2 illustre l'effet du bruit α -stable pour différentes valeurs de α . On remarque que pour des valeurs de $1 \leq \alpha < 2$, la RPWVD permet de révéler la fréquence instantanée du signal à phase polynomiale. Cependant, elle échoue pour les valeurs $\alpha < 1$.

3.3.2 WVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire

Dans [63] Griffith et *al.* ont étudié l'effet du bruit impulsif α -stable et ont proposé une WVD robuste en utilisant les moments statistiques d'ordre fractionnaire qu'on présentera en cours de ce paragraphe.

En se basant sur le spectre évolutif défini dans [29] :

$$S_x(t, f) = E \{W_x(t, f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ x \left(t + \frac{\tau}{2} \right) x^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j2\pi f\tau} \right\} d\tau \quad (3.14)$$

et afin d'éviter l'effet dégradant du bruit α -stable, dans [81], les auteurs ont introduit la covariance d'ordre fractionnaire (FLOC) définie par :

$$R_x^a(t, \tau) = E \left\{ x^{(a)} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) x^{(a)} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \quad (3.15)$$

où $(\cdot)^{(a)}$ est l'opérateur appelé le a^{ime} moment d'ordre inférieur fractionnaire ¹ défini par :

$$x^{(a)} \triangleq \begin{cases} |x|^{a+1} / x^* & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$x^{-\langle a \rangle} \triangleq (x^*)^{(a)} = (x^{(a)})^*. \quad (3.17)$$

La figure 3.3 représente les différentes fonctions non linéaires définies par l'équation (3.16) en fonction du paramètre a .

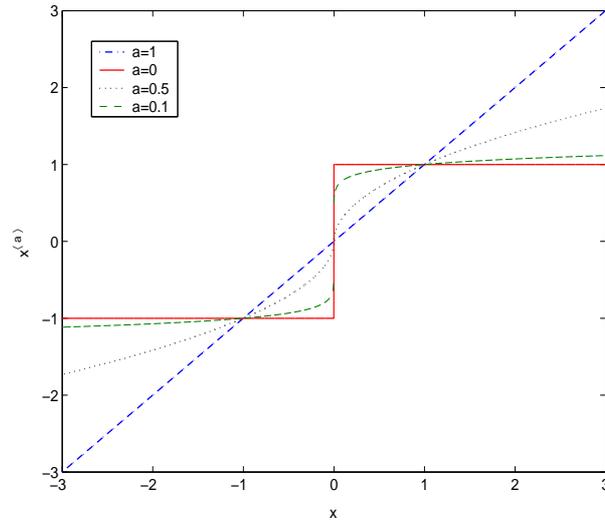


FIG. 3.3: La fonction de $x^{(a)}$ pour différentes valeurs de l'exposant a

On remarque que pour $a = 0$, on obtient la fonction signe tandis que pour $a = 1$ aucune transformation n'est appliquée au signal. Pour $0 < a < 1$, on obtient une fonction qui atténue la valeur de l'échantillon avec une grande amplitude. Pour un signal $z(t) = r e^{j\theta}$, on remarque que l'opérateur défini par (3.16) n'agit que sur l'amplitude du signal $z(t)$ et préserve sa phase, puisque :

$$z^{-\langle a \rangle} = r^a e^{j\theta}. \quad (3.18)$$

¹Phased fractional lower-order moment

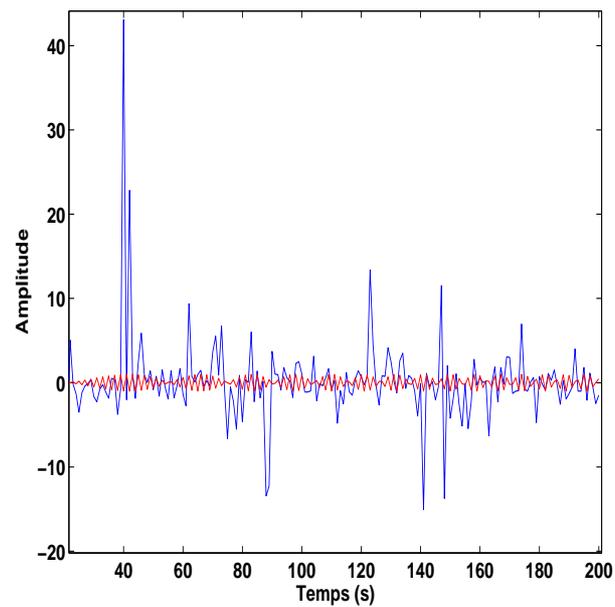


FIG. 3.4: Signal avant application de l'opérateur $\langle a \rangle$

La figure 3.4 représente un SPP avec une amplitude $b = 1$, noyé dans un bruit impulsif α -stable avec $\alpha = 1$. On note bien l'écart entre le signal d'origine et le signal bruité.

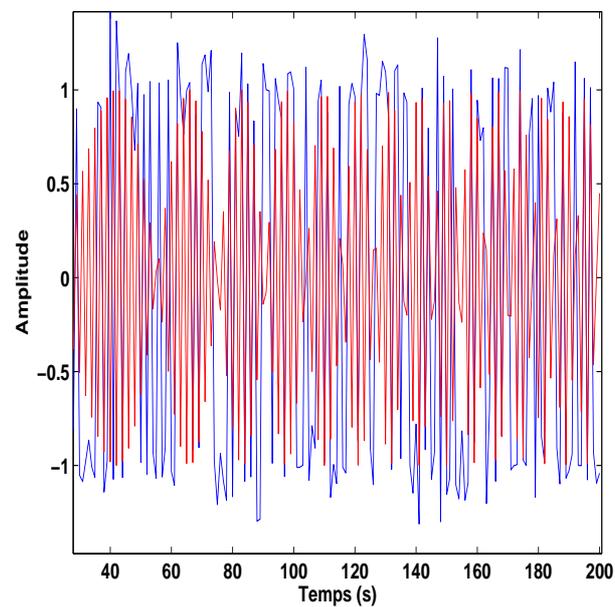


FIG. 3.5: Signal après application de l'opérateur $\langle a \rangle$

Après application de l'opérateur donnée par l'équation (3.17) avec le paramètre $a = 0.1$, on remarque que l'amplitude du signal bruité diminue considérablement.

Tenant compte de l'équation (3.15), dans [63], les auteurs ont introduit une distribution appelée spectre de Wigner-Ville robuste défini par :

$$S_x^{(a)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ x^{(a)} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) x^{(a)} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (3.19)$$

A partir de (3.19) on définit la WVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire (FLOWVD) [63] par :

$$W_x^{(a)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{(a)} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) x^{(a)} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (3.20)$$

Afin, d'illustrer l'efficacité de la FLOWVD, on considère un signal chirp affecté par un bruit impulsif α -stable avec $\alpha = 1$. La figure 3.6(a) montre la FI du signal sans bruit. Sur la figure 3.6(b) on remarque que le bruit impulsif dégrade considérablement l'interprétation de la représentation temps-fréquence. Enfin, sur la figure 3.6(c), on représente la FLOWVD du signal bruité et on remarque que la FI apparaît clairement.

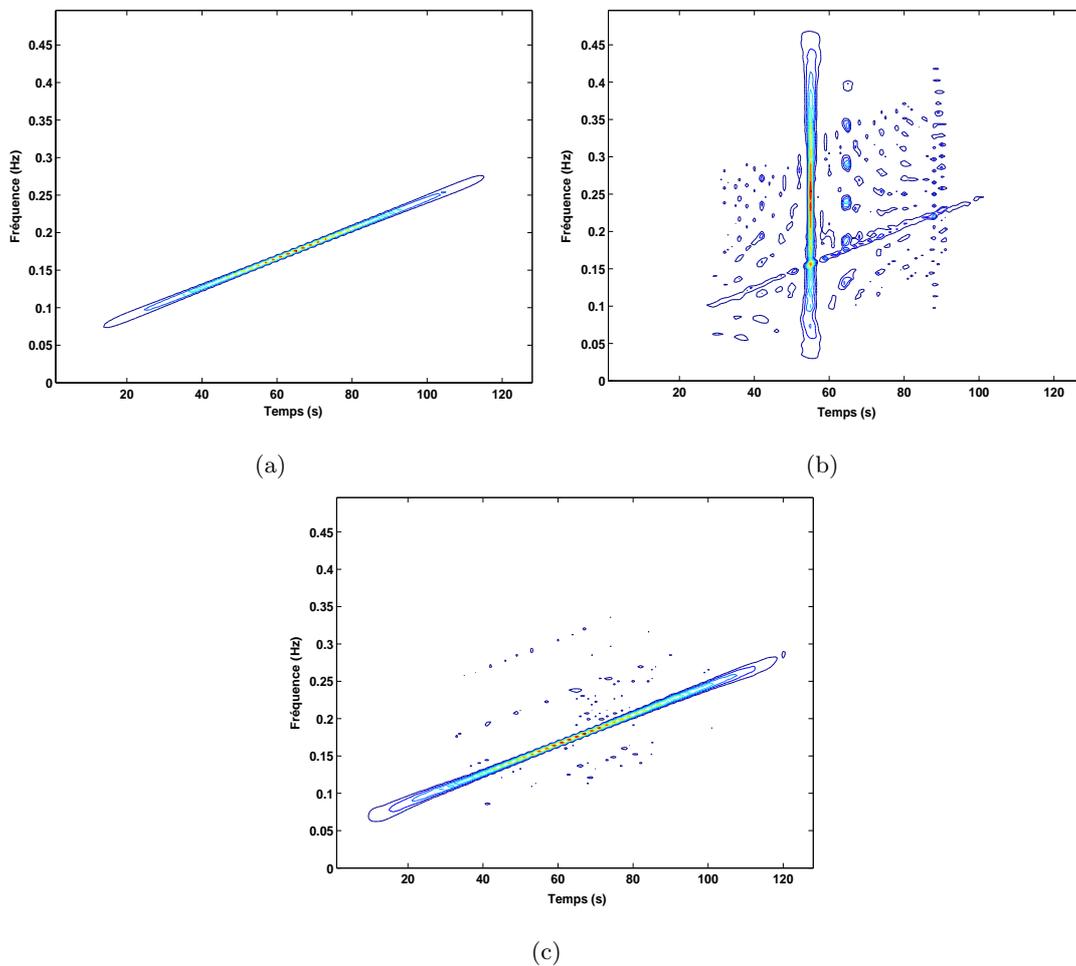


FIG. 3.6: Exemple de comparaison entre la WVD et la FLOWVD, (a) : WVD du signal sans bruit, (b) : signal chirp plus bruit $\alpha = 1$ avec un GSNR=10 dB, (c) : La FLOWVD du signal chirp

On a vu que la WVD ne nous permet pas d'obtenir la FI de façon efficace pour les SPP de degré $M \geq 3$. Étant donné que la FLOWVD a la même forme quadratique que la WVD, on s'attend à ce que ces deux distributions aient les mêmes caractéristiques. En effet, la figure 3.7 représente la FI du signal SSP de degré 5 obtenue par la FLOWVD et la WVD du signal filtré par un filtre médian. Ce dernier est généralement utilisé dans le traitement d'image pour supprimer le bruit impulsif [2] et son application en analyse temps-fréquence a été proposé dans [70]. Nous remarquons que le filtre médian associé à la WVD est moins performant comparé à la FLOWVD qui comme la WVD présente aussi des ondulations secondaires. Nous proposons donc d'utiliser les propriétés de la FLOC associée à la PWVD classique pour généraliser le concept de la FLOWVD aux signaux à phase polynomiale d'ordre supérieur à 2.

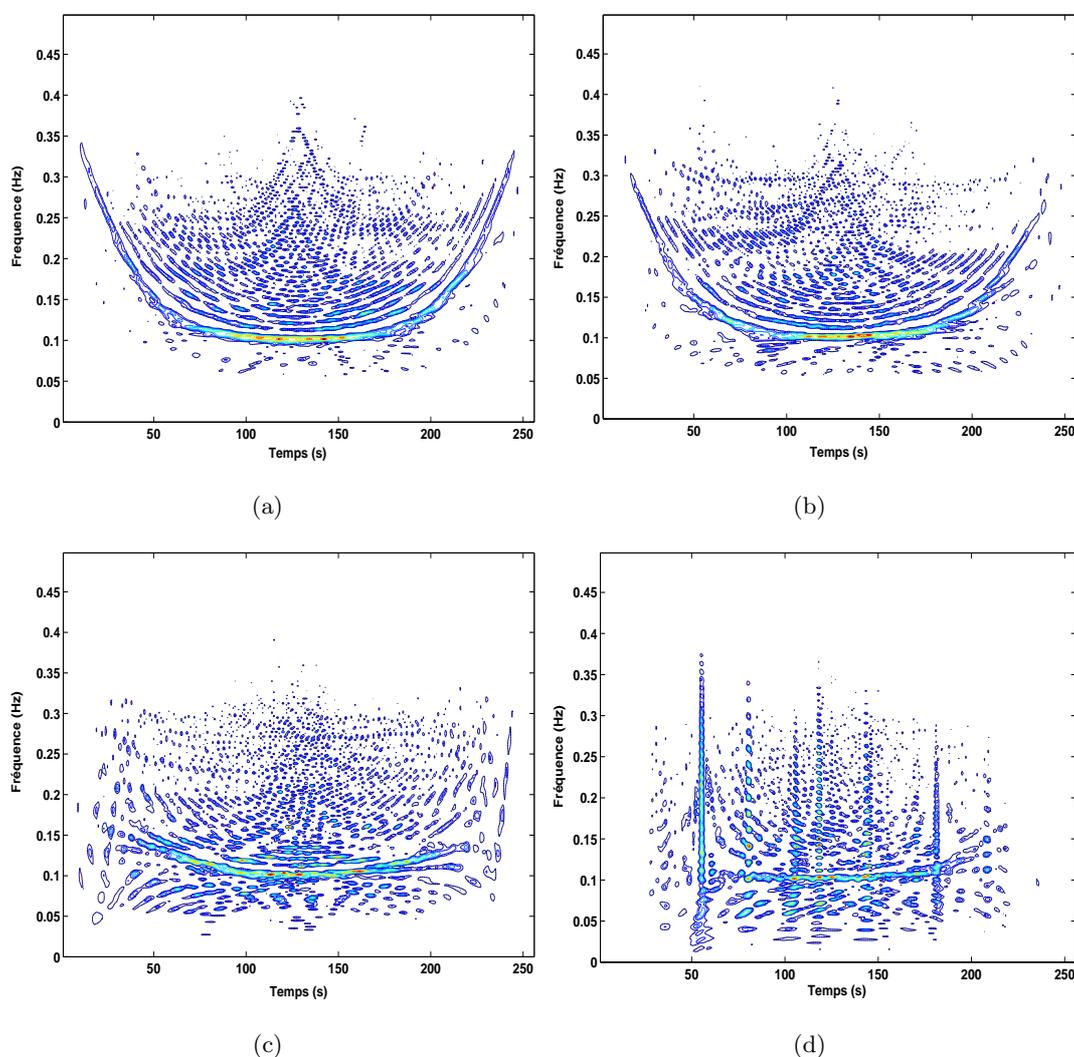


FIG. 3.7: La FLOWVD d'un signal à phase polynomiale d'ordre 5 avec un GSNR=10 dB, (a) : $\alpha = 1.6$, (b) : $\alpha = 1$, (c) : signal après filtrage médian d'ordre 4 ($\alpha = 1.6$), (d) : signal après filtrage médian d'ordre 4 ($\alpha = 1$).

3.3.3 PWVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire

Nous avons montré que l'utilisation de la FLOWVD ne permet pas d'obtenir une représentation temps-fréquence pour les SPP d'ordre supérieur à 2. Pour palier à cette difficulté, on va utiliser les statistiques d'ordre fractionnaire pour définir une nouvelle distribution capable de révéler la fréquence instantanée du signal dans un bruit impulsif. Cette distribution appelée FLOPWVD est définie par [41] :

$$W_x^{\langle a \rangle, q}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x^{\langle a \rangle, q}(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.21)$$

avec

$$K_x^{\langle a \rangle, q}(t, \tau) = \prod_{k=0}^{q/2} [x^{\langle a \rangle}(t + t_k\tau)]^{\gamma_k} [x^{-\langle a \rangle}(t + t_{-k}\tau)]^{-\gamma_{-k}} \quad (3.22)$$

où l'opérateur $(\cdot)^{\langle a \rangle}$ a été introduit par l'équation (3.16). Il est à noter aussi que le calcul des paramètres t_k et γ_k de la FLOPWVD se fait de la même manière que dans le cas de la PWVD classique.

Exemple 2 L'exemple suivant montre la forme du noyau calculé dans [15].

$$\begin{aligned} K_x^6(t, f) &= [x(t + 0.62\tau)x^*(t - 0.62\tau)] \\ &\quad \times [x(t + 0.75\tau)x^*(t - 0.75\tau)] \\ &\quad \times [x(t + 0.87\tau)x^*(t - 0.87\tau)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En utilisant la définition du noyau donné par (3.22), on obtient le noyau suivant :

$$\begin{aligned} K_x^{\langle a \rangle, 6}(t, f) &= [x^{\langle a \rangle}(t + 0.62\tau)x^{-\langle a \rangle}(t - 0.62\tau)] \\ &\quad \times [x^{\langle a \rangle}(t + 0.75\tau)x^{-\langle a \rangle}(t - 0.75\tau)] \\ &\quad \times [x^{\langle a \rangle}(t + 0.87\tau)x^{-\langle a \rangle}(t - 0.87\tau)]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

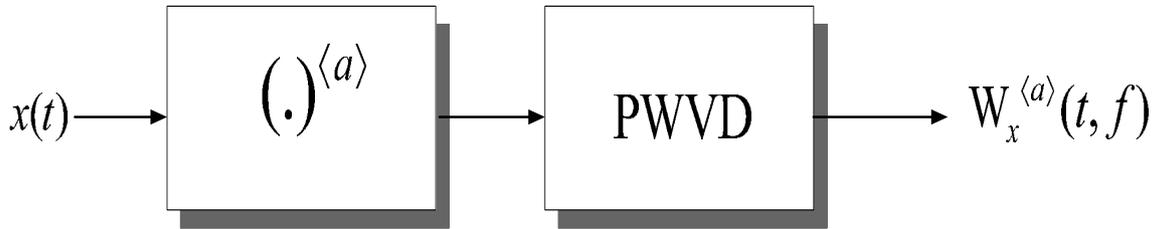


FIG. 3.8: Schéma d'implantation de la FLOPWVD

On considère un SPP $x(t)$ d'ordre 5 avec une amplitude constante $b = 2$ et une phase $\phi(t) = 2.55 \cdot 10^{-5} t^5 + 0.1t$. On calcule la FLOPWVD de ce signal en utilisant le noyau donné par (3.24).

Les figures 3.11, 3.12, 3.13, illustrent la FLOPWVD du signal $x(t)$ noyé dans un bruit α -stable avec différentes valeurs de α . La FLOPWVD est obtenue en utilisant la valeur $a = 0.1$.

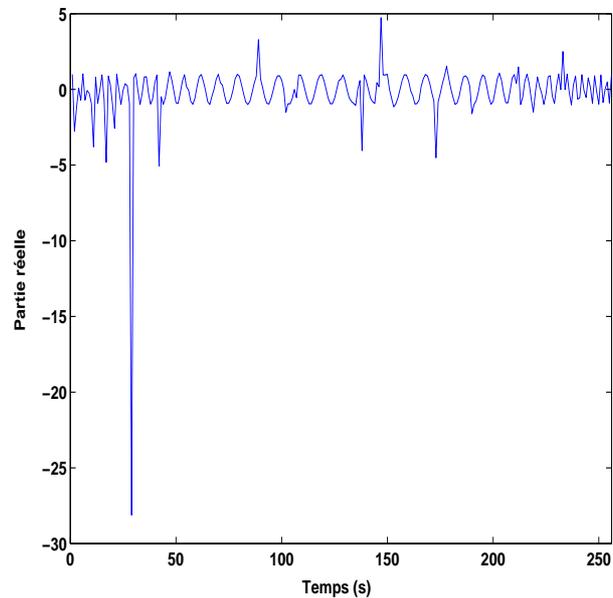


FIG. 3.9: Évolution du SPP noyé dans un bruit impulsif

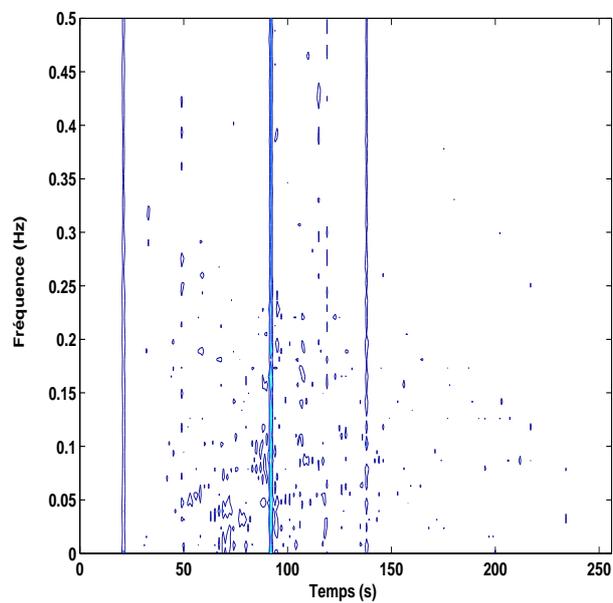


FIG. 3.10: PWVD du signal noyé dans un bruit impulsif

La PWVD classique ne permet pas d'obtenir la FI du signal considéré. La simulation de la figure 3.10 est obtenue avec un bruit impulsif SaS avec $\alpha = 0.5$.

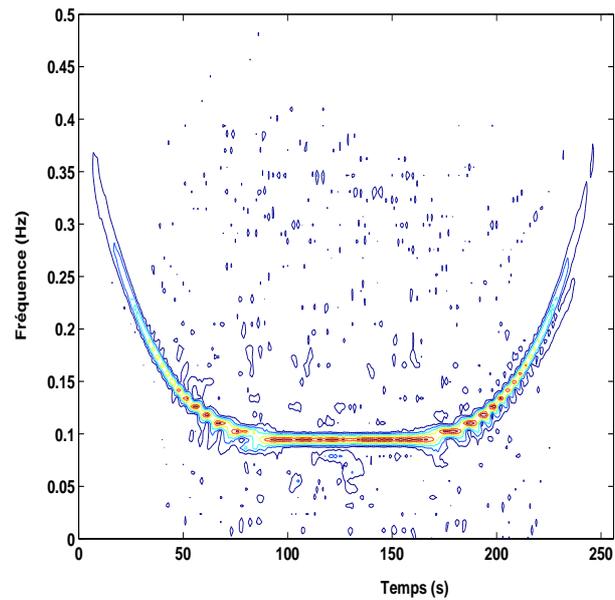


FIG. 3.11: La FLOPWVD du signal en présence d'un bruit impulsif avec ($\alpha = 1.6$)

Nous représentons dans la figure 3.11 une simulation de la FLOPWVD du même signal avec un bruit impulsif SaS avec $\alpha = 1.6$. La FLOPWVD permet d'obtenir la FI du signal utile.

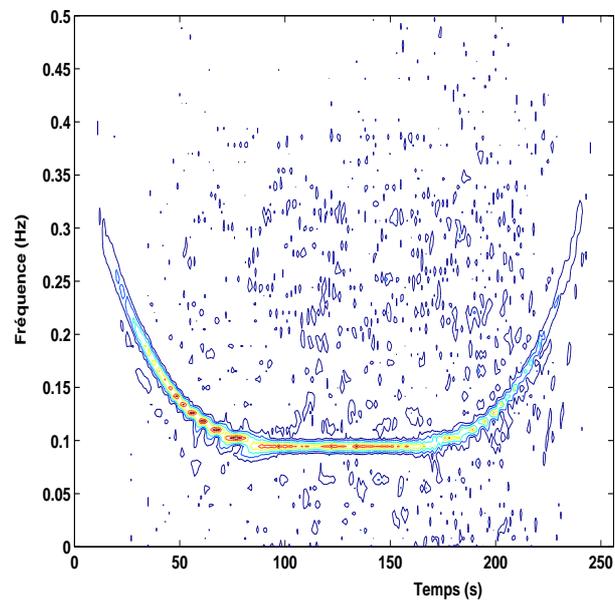


FIG. 3.12: La FLOPWVD du signal en présence d'un bruit impulsif ($\alpha = 1$)

La figure 3.12 représente la FI pour un bruit SaS avec $\alpha = 1$. On remarque que l'influence du bruit est plus importante que dans la figure précédente qui correspond à $\alpha = 1.6$.

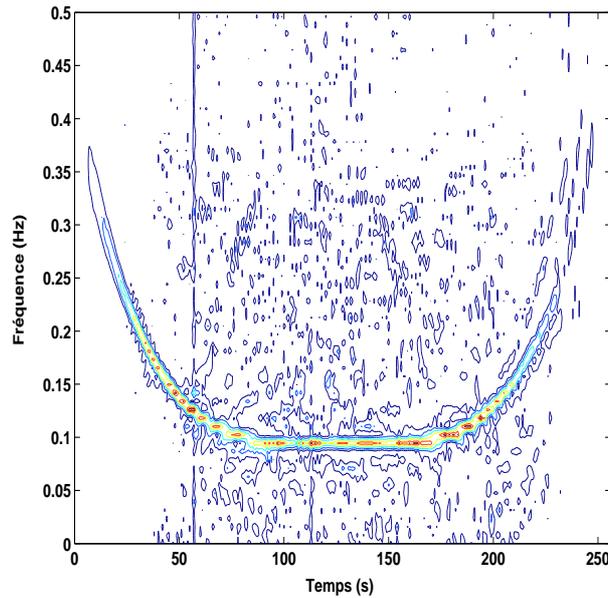


FIG. 3.13: La FLOPWVD du signal avec un bruit impulsif ($\alpha = 0.5$)

Pour un bruit SaS avec $\alpha = 0.5$ donc fortement impulsif, on remarque l'apparition de raies dues au bruit. Ceci est nettement meilleur que pour la simulation obtenue pour la RPWVD dans la figure 3.2(d).

Remarque 1 *Le choix de l'exposant α est très important pour l'obtention d'une représentation temps-fréquence sans artefacts dû au bruit impulsif. Pour cela la valeur de l'exposant α doit être strictement inférieure à $\frac{\alpha}{2}$.*

3.3.4 Comparaison des distributions temps-fréquence robustes

Nous avons présenté dans les sections précédentes deux distributions robustes adaptées aux SPP d'ordre $M > 2$: la RPWVD basée sur le critère en valeur absolue et la FLOPWVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire. Dans cette partie, nous proposons de comparer ces deux distributions temps-fréquence robustes. Pour ce faire, nous introduisons les méthodes fondées sur la mesure de distance et de divergence définies pour les densités de probabilité en statistique. L'utilisation de mesures d'information en traitement du signal et images est très courante, que ce soit en communication, en codage, en détection ou en estimation. L'utilisation de ces mesures est aussi extensible à l'analyse temps-fréquence pour comparer les signaux à partir de leurs distributions. Plusieurs travaux dans ce sens ont été présentés, nous citons par exemple [14] [11] et [12].

Plusieurs mesures de divergence pour les densités de probabilité existent dans la littérature [113] [104]. Parmi les mesures connues, nous citons la divergence de Kullback-Leibler et la divergence

de Renyi qui appartiennent à une classe plus large appelée f-divergence de Csiszar [38].

La divergence Kullback-Leibler est définie par

$$KL(C_1, C_2) = \int \int C_1(t, f) \log \frac{C_1(t, f)}{C_2(t, f)} dt df. \quad (3.25)$$

où $C_1(t, f)$ et $C_2(t, f)$ sont deux distributions temps-fréquence.

Cette mesure est positive et son application est restreinte seulement aux distributions positives tel que le spectrogramme. Sachant que la distribution de Wigner-Ville peut prendre des valeurs négatives, l'application de la mesure de Kullback-Leibler pose un problème [14].

Une façon de contourner ce problème de la validité des mesures de divergence consiste à comparer ces distributions en utilisant des signaux pour lesquels la distribution est toujours positive. Ceci peut se faire en utilisant le théorème de Hudson [61], [36] qui montre que la WVD est positive pour les signaux de la forme

$$x(t) = \left(\frac{a_2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-a_2 t^2 / 2 + j a_1 t^2 / 2 + j a_0 t). \quad (3.26)$$

Pour palier à ce problème, une autre mesure appelée l'entropie de Rényi d'ordre ℓ a été introduite et elle est définie par [104] :

$$H_\ell(C_1) = \frac{1}{\ell - 1} \log \int \int C_1^\ell(t, f) dt df \quad \ell > 0, \ell \neq 1. \quad (3.27)$$

On définit alors la divergence de Rényi pour deux distributions temps-fréquence $C_1(t, f)$, $C_2(t, f)$ par :

$$D_\ell(C_1, C_2) = \frac{1}{\ell - 1} \log \int \int C_1^\ell(t, f) C_2^{1-\ell}(t, f) dt df. \quad (3.28)$$

A la différence de la mesure de Kullback-Leibler, la divergence de Rényi est généralement définie pour toutes les distributions de la classe de Cohen non positives pour $\ell \geq 2$ (voir exceptions dans [14]). Il a été démontré dans [86] que la divergence de Renyi est sensible aux différences entre les phases et entre les amplitudes des composantes du signal.

Une approche générale pour construire des mesures de divergence est l'utilisation de la différence de Jensen en fonction de l'entropie H de deux densités de probabilité p_1 et p_2 qui est définie par :

$$J(p_1, p_2) = H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) - \frac{H(p_1) + H(p_2)}{2}. \quad (3.29)$$

Cette différence est utilisée pour introduire une nouvelle mesure de divergence, appelée la divergence de Jensen-Shannon définie par :

$$J(C_1, C_2) = H_\ell\left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right) - \frac{H_\ell(C_1) + H_\ell(C_2)}{2}. \quad (3.30)$$

Dans [86], les auteurs proposent une modification de la mesure de Jensen-Shannon en introduisant une nouvelle mesure de divergence, appelée la divergence de Jensen-Rényi, définie par :

$$J_1(C_1, C_2) = H_\ell(\sqrt{C_1 C_2}) - \frac{H_\ell(C_1) + H_\ell(C_2)}{2}. \quad (3.31)$$

L'équation (3.31) est nulle lorsque $C_1 = C_2$ et on peut montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que [14] :

$$H_\ell(\sqrt{C_1 C_2}) \geq \frac{H_\ell(C_1) + H_\ell(C_2)}{2}. \quad (3.32)$$

L'équation (3.32) prouve que la divergence de Jensen-Rényi est positive.

On considère un SPP à amplitude constante $b = 1$ et ayant une phase $\phi(t) = 0.1 t + 2.55 \cdot 10^{-5} t^5$. Le signal est affecté par un bruit α -stable avec le paramètre $\alpha = 1$. A titre d'exemple, on obtient la figure 3.14 ci-dessous, où la mesure de Jensen-Rényi à été calculée pour $\ell = 3$.

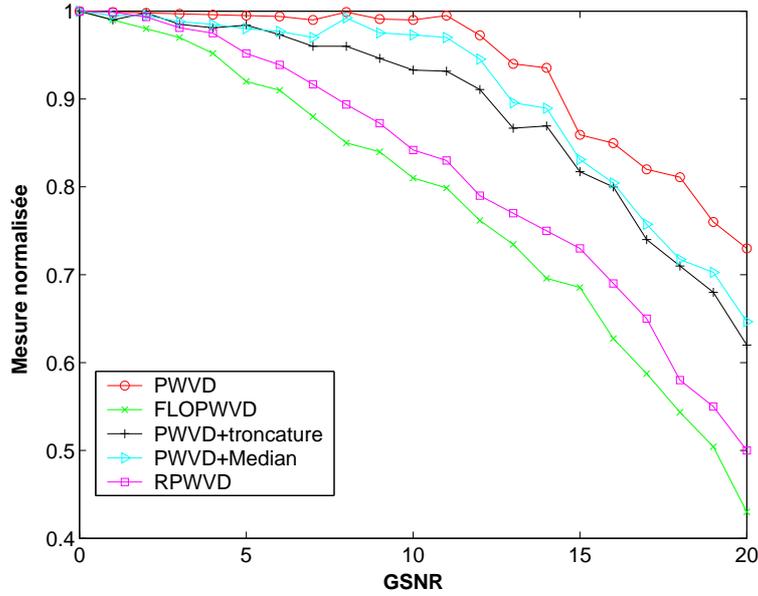


FIG. 3.14: La divergence de Jensen-Rényi pour différentes distributions ($\alpha = 1$)

Cette figure donne la mesure de Jensen-renyi de différentes distributions comparées à la PWVD du signal original. Les distributions sont la PWVD du signal bruité par un bruit impulsif avec $\alpha = 1$ (courbe en rouge). La FLOPWVD est représentée par une courbe en vert. La RPWVD est donnée par la courbe en magenta, et la courbe en noir représente le PWVD du signal tronqué en utilisant la technique de seuillage par histogramme [106]. Enfin, la courbe bleu clair représente la PWVD du signal filtré par un filtre médian d'ordre 4.

On observe que la FLOPWVD donne la meilleure performance en terme de divergence minimale par rapport à toutes les autres distributions.

3.3.5 Signaux à phase polynomiale multicomposantes

Soit un signal composé de plusieurs signaux à phase polynomiale selon le modèle suivant :

$$y(t) = \sum_{i=1}^K x_i(t) + w(t). \quad (3.33)$$

Si les $x_i(t)$ sont des signaux chirp, on peut étendre le concept de la FLOWVD pour définir des distributions FLOWVD lissées et ainsi limiter les effets des termes croisés qui apparaissent dans la FLOWVD. On obtient :

$$C_y^{(a)}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \nu, \tau) y^{(a)}(t + \tau/2) y^{-(a)}(t - \tau/2) e^{-j2\pi(t\nu + f\tau)} d\nu d\tau. \quad (3.34)$$

De même, nous pouvons définir une classe de FLOWVD lissées pour les SPP d'ordre $M > 2$ et on obtient :

$$C_y^{(a),q}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \nu, \tau) [y^{(a)}(t + t_k\tau)]^{\gamma_k} [y^{-(a)}(t + t_{-k}\tau)]^{-\gamma_{-k}} e^{-j2\pi(t\nu + f\tau)} d\nu d\tau. \quad (3.35)$$

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons quelques fenêtres de pondération notées $h(t, \nu, \tau)$ qu'on rencontre dans la littérature.

fenêtre	expression
gaussienne à variables séparables	$\exp\left(-\frac{\pi^2\nu^2}{2\sigma_\nu^2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right)$
Choi-Williams [34]	$\exp\left(-2\pi^2\nu^2\tau^2/\sigma^2\right)$
Zhao-Atlas-Marks (ZAM) [136]	$ \tau \exp\left(-u\tau^2\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\nu\tau}{v}\right)$
Margenau-Hill [85]	$\cos\left(\pi\nu\tau\right)$
Page [96]	$\exp\left(-\nu \tau /2\right)$
Rihaczek [105]	$\exp\left(-\nu\tau/2\right)$
Bessel [57]	$\frac{2}{\pi \tau }\sqrt{1-\left(\frac{v-t}{u\tau}\right)^2}\Pi\left(\frac{v-t}{2u\tau}\right)$
B-distribution [17]	$\left[\frac{ \tau }{\cosh^2(t)}\right]$

TAB. 3.2 – Liste de noyaux classiques

A titre d'exemple, nous représentons la FI d'un signal obtenu à partir de la somme de deux signaux chirp, ce signal est noyé dans un bruit α -stable de paramètre $\alpha = 0.5$. Nous considérons les versions robustes de la WVD, la distribution de Choi-Williams, la distribution de Bessel et la distribution de ZAM présentées respectivement sur les figures 3.15(a), 3.15(b), 3.15(c), 3.15(d). Dans cette exemple, nous remarquons que la distribution de ZAM basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire donne une meilleure représentation temps-fréquence par rapport aux autres distributions.

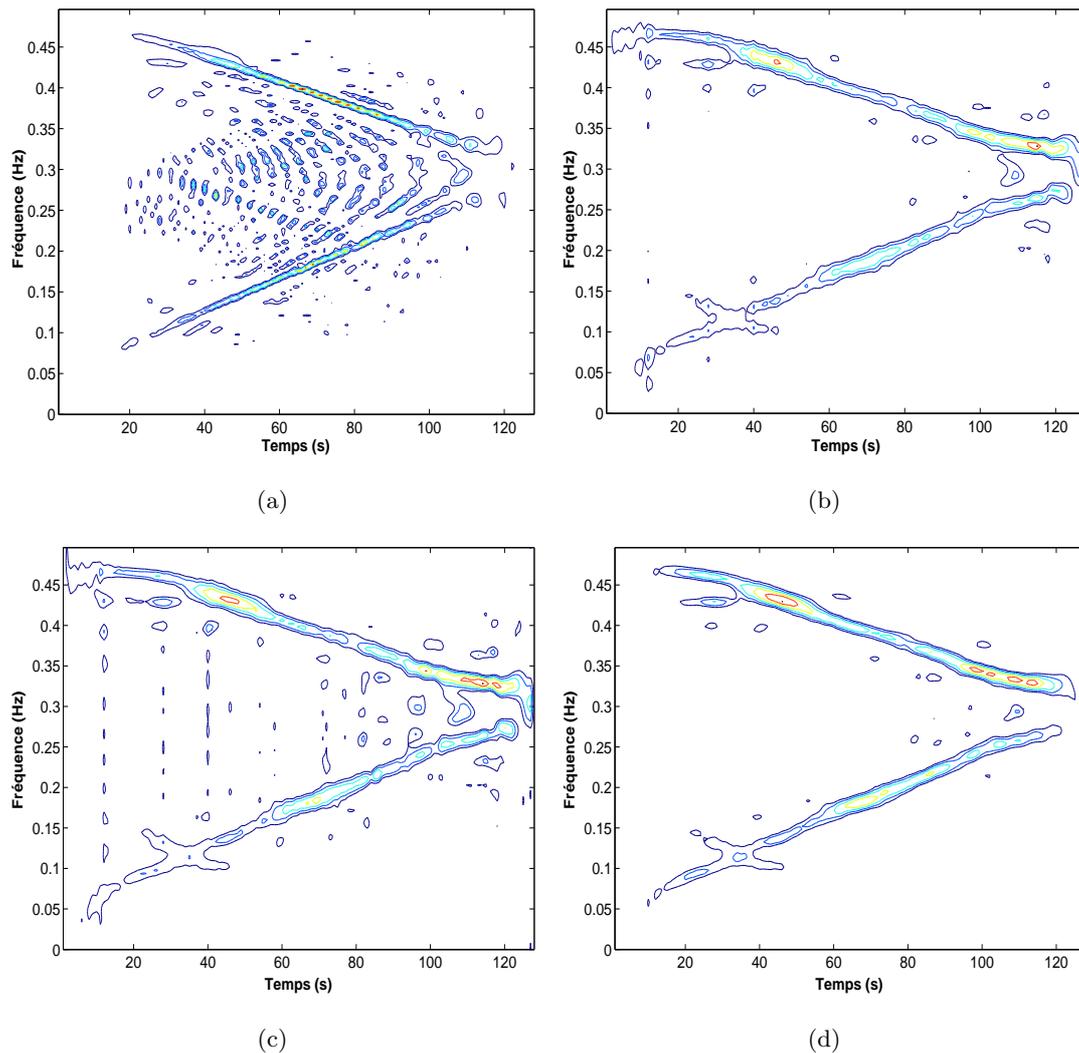


FIG. 3.15: Exemple de différentes distributions robustes d'un signal multicomposantes en présence d'un bruit α -stable ($\alpha = 0.5$), (a) : FLOWVD, (b) : FLOCWD, (c) : FLOBD, (d) : FLOZAMD

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'effet dégradant du bruit impulsif obtenu à partir d'une loi α -stable sur les représentations temps-fréquence classiques d'un signal à phase polynomiale. Nous avons proposé la FLOPWVD basée sur les statistiques d'ordre fractionnaire qui est une distribution temps-fréquence robuste et qui permet de révéler la fréquence instantanée de SPP d'ordre $M \geq 3$. De même, nous avons montré que les performances de cette nouvelle distribution sont meilleures comparées à celles de la PWVD robuste proposée dans [18]. Il est à remarquer que l'implantation de la FLOPWVD est plus simple à implanter que la RPWVD puisque celle-ci est obtenue par la PWVD classique du signal observé à la sortie un filtre non linéaire du SPP

corrompu par le bruit impulsif. Le choix des paramètres de la FLOPWVD est très important pour l'obtention de performances satisfaisantes. Une direction intéressante à explorer serait le choix optimal du paramètre du moment fractionnaire $\langle a \rangle$ qui permettra d'obtenir la meilleure représentation temps-fréquence du signal.

Chapitre 4

Méthodes d'analyse spectrale adaptées à l'estimation des SPP

-
- 4.1 Introduction
 - 4.2 Méthode de Capon pour l'estimation des SPP
 - 4.3 Algorithme MUSIC pour les SPP affectés par un bruit gaussien
 - 4.4 Algorithme MUSIC Robuste pour les SPP affectés par un bruit impulsif
 - 4.5 Conclusion
-

4.1 Introduction

Dans [137], l'algorithme MUSIC (Multiple Signal Classification) a été proposé pour l'estimation des paramètres d'un signal à phase polynomiale. La méthode est basée sur la transformation du signal par le noyau défini pour la TPP (2.9)-(2.13), qui permet de ramener le problème d'estimation des paramètres du SPP à celui de l'estimation de signaux harmoniques. L'algorithme MUSIC est ensuite appliqué pour l'estimation du coefficient du plus haut degré de la phase, les autres coefficients sont également obtenus par le même algorithme après démodulation du signal. Les auteurs montrent que la TPP transforme le bruit gaussien additif qui reste blanc pour un SPP de degré 2 et peut même être considéré comme blanc dans le cas d'un SPP de degré supérieur à 2 lorsque la TPP est évaluée pour $\tau = 1$.

Cette idée a été récemment reprise dans [106] en considérant un bruit impulsif α -stable. L'estimateur MUSIC a été appliqué en utilisant la matrice de covariance du signal harmonique

tronqué, puis en utilisant la matrice de covariation généralisée du signal bruité. Néanmoins, la transformation du bruit impulsif α -stable par la TPP génère un bruit impulsif qui n'est pas nécessairement α -stable. L'application des statistiques d'ordre fractionnaire pose problème. Une alternative proposée par [106] a été d'utiliser l'algorithme M-estimateur de la covariance introduit dans [60].

D'autres travaux [95], [119] se sont basés sur l'estimateur de Capon en proposant une version modifiée pour l'estimation des paramètres des SPP sans passer par l'étape de la TPP qui engendre des erreurs dans l'estimation au fur et à mesure que le signal est démodulé. En nous basant sur cette idée, nous présentons dans ce chapitre, une nouvelle variante de l'estimateur MUSIC adaptée aux SPP et qui sera appliquée dans le cas d'un bruit gaussien puis ensuite dans le cas où le signal utile est contaminé par un bruit impulsif α -stable. Cet estimateur sera dénommé MFLM-MUSIC (*Modified Fractional Lower-Order Moment based MUSIC*) dans la suite de l'exposé.

4.2 Méthode de Capon pour l'estimation des SPP

Dans [95], l'auteur propose une version modifiée de l'estimateur Capon pour l'analyse des SPP. En considérant un signal SPP multicomposantes

$$x(n) = \sum_{k=1}^K x_k(n) \quad (4.1)$$

$$= \sum_{k=1}^K b_k e^{j\phi_k(n)}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.2)$$

où les amplitudes b_k sont constantes et chaque phase ϕ_k est un polynôme de degré M_k . On fait passer le signal $x(n)$ dans un filtre variable d'ordre p de telle façon qu'une seule composante à phase polynomiale soit sélectionnée à la fois. La sortie du filtre pour une phase $\exp[j\phi(n)]$ est donnée par :

$$H(n, \beta) = \sum_{m=n-p}^n h(n, m) e^{-j[\phi(n) - \phi(m)]} = \mathbf{h}^T(n) \mathbf{b}_p(n, \beta). \quad (4.3)$$

où $\mathbf{h}(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre

$$\mathbf{h}(n) = [h(n, n), h(n, n-1), \dots, h(n, n-p)]^T \quad (4.4)$$

et le vecteur $\mathbf{b}_p(n, \beta)$ est donné par :

$$\mathbf{b}_p(n, \beta) = [1, e^{-j[\phi(n) - \phi(n-1)]}, \dots, e^{-j[\phi(n) - \phi(n-p)]}]^T. \quad (4.5)$$

Le vecteur $\beta = (\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_R)$ contient les coefficients des fonctions noyau de phase

$$\phi(n) = \sum_{i=0}^R \beta_i n^i. \quad (4.6)$$

Afin de sélectionner une composante à phase polynomiale du signal dans (4.1), nous devons résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{h}(n)} \quad & \mathbf{h}^T(n) \mathbf{R}_{x,p}(n) \mathbf{h}^*(n) \\ \text{sous la contrainte} \quad & \mathbf{h}^T(n) \mathbf{b}(n, \beta) = 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La solution à l'équation (4.7) est obtenue par minimisation quadratique et elle est donnée par :

$$\mathbf{h}_{opt}^*(n) = \frac{\mathbf{R}_{x,p}^{-1}(n) \mathbf{b}(n, \beta)}{\mathbf{b}^H(n, \beta) \mathbf{R}_{x,p}^{-1}(n) \mathbf{b}(n, \beta)}. \quad (4.8)$$

On obtient une Représentation Temps-Coefficient (TCR) [95]

$$P_{M-Capon}(n, \beta) = \frac{1}{\mathbf{b}_p^H(n, \beta) \mathbf{R}_{x,p}^{-1}(n) \mathbf{b}_p(n, \beta)} \quad (4.9)$$

où $\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}(n) = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}$ est la matrice d'autocorrélation du vecteur $\mathbf{x}(n)$ défini par

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-p)]^T. \quad (4.10)$$

L'idée de l'estimateur de Capon modifié (M-Capon) pour l'estimation des coefficients de la phase polynomiale consiste à effectuer un balayage en utilisant une famille de phases polynomiales au lieu d'un balayage sur l'axe des fréquences comme dans le cas de l'estimateur de Capon classique pour les fréquences pures.

Nous remarquons que l'estimée de la matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}(n)$ est une matrice singulière puisqu'elle est estimée à partir d'un seul vecteur de réalisation. Afin de calculer l'inverse de $\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}(n)$ dans l'équation (4.9) nous devons ajouter une charge diagonale :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}(n) = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} + \rho \mathbf{I}, \quad \rho > 0 \quad (4.11)$$

En utilisant le lemme d'inversion matriciel, on obtient

$$\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}^{-1}(n) = \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\rho + \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)} \right). \quad (4.12)$$

L'estimateur de Capon modifié peut être réécrit sous la forme suivante paramétrée par ρ :

$$P_{M-Capon}(n, \beta, \rho) = \frac{\rho}{(p+1) - [|\mathbf{b}(n, \beta)\mathbf{x}(n)|^2 / (\rho + \|\mathbf{x}(n)\|^2)]}. \quad (4.13)$$

Exemple 3 On considère le SPP d'ordre 4 sur une durée $0 \leq n \leq N-1$

$$x(n) = \begin{cases} e^{j(10\pi/256)n^4} & \text{pour } 0 \leq n \leq 63 \\ e^{j(50\pi/256)n^4} & \text{pour } 64 \leq n \leq 255. \end{cases} \quad (4.14)$$

La figure 4.1 montre l'évolution de la valeur du coefficient de la phase du signal ci-dessus en fonction du temps. On utilise pour la simulation la famille de fonctions de phase ayant la forme $\phi(n) = (\pi/N)kn^4$, $-N \leq k \leq N-1$ et $0 \leq n \leq N-1$. La taille de la fenêtre est $p = 30$.

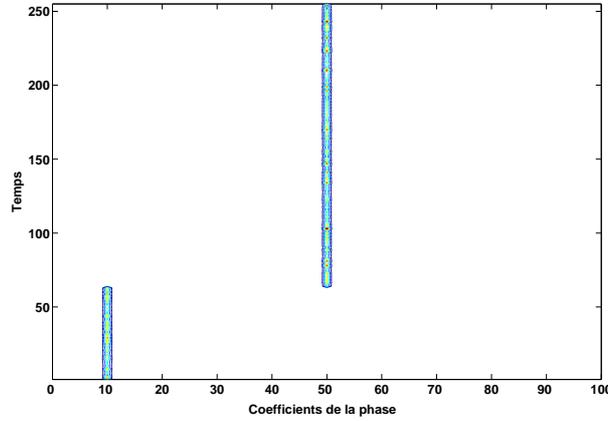


FIG. 4.1: Estimateur M-Capon du coefficient de la phase d'un SPP d'ordre 4

La méthode Capon modifié permet d'estimer le coefficient de la phase et d'observer l'évolution de ce coefficient en fonction du temps.

Exemple 4 Dans cet exemple, le signal $x(n)$ est la somme de deux SPP de même ordre mais avec des coefficients différents

$$x(n) = e^{j(10\pi/256)n^4} + e^{j(50\pi/256)n^4}, \quad 0 \leq n \leq 255. \quad (4.15)$$

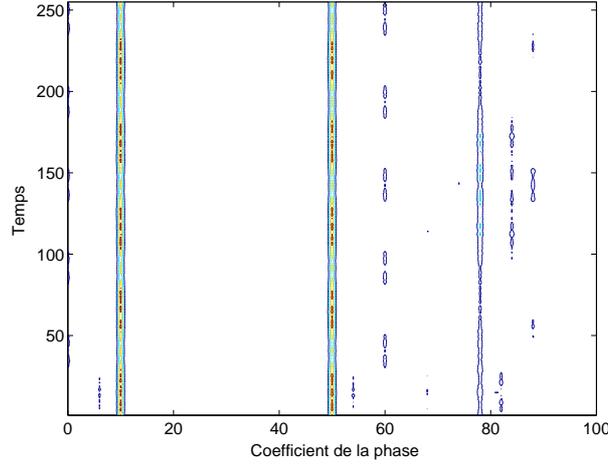


FIG. 4.2: Estimateur de M-Capon du coefficient de la phase de deux SPP d'ordre 4

La figure 4.2 montre l'évolution des paramètres des deux composantes à phase polynomiale. On constate que leur représentation temps-coefficient présente des interférences entre les différentes composantes des deux signaux.

4.3 Algorithme MUSIC pour les SPP affectés par un bruit gaussien

Nous avons montré dans la section précédente que la méthode de Capon modifiée repose sur l'addition d'une matrice diagonale $\rho\mathbf{I}$ (charge diagonale) qui rend possible l'inversion de la matrice d'autocorrélation du signal. Le choix du paramètre ρ dans l'équation (4.13) influe sur les performances de l'estimateur. On suppose que les SPP sont affectés par un bruit gaussien et nous définissons la représentation temps-coefficient basée sur une méthode haute résolution qui est l'algorithme MUSIC. La décomposition de l'espace des observations en deux sous-espaces : un sous-espace signal et un sous-espace bruit [40] conduit à la décomposition suivante :

$$\mathbf{R}_{x,p} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^H + \sigma_w^2\mathbf{I}. \quad (4.16)$$

L'estimateur MUSIC modifié est défini par

$$P_{M-MUSIC}(n, \beta) = \frac{1}{\mathbf{b}_p^H(n, \beta)E_{x,p}E_{x,p}^H\mathbf{b}_p(n, \beta)} \quad (4.17)$$

où la matrice $E_{x,p} = [e_{K+1}, e_{K+2}, \dots, e_p]$ est obtenue par décomposition en valeurs propres (EVD) de la matrice d'autocorrélation $\hat{\mathbf{R}}_{x,p}$ et en retenant les vecteurs propres associés aux $p - K$ plus petites valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_{x,p}$.

Pouvoir de résolution des estimateurs

L'inverse de la matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}$ peut être écrite sous la forme [119]

$$\widehat{\mathbf{R}}_{x,p}^{-1}(n) = \frac{1}{\sigma_w^2} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \left(1 + \frac{\sigma_w^2}{\lambda_i}\right)^{-1} \mathbf{v}_i^H \right] \quad (4.18)$$

où \mathbf{v}_i et λ_i sont respectivement les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\mathbf{R}_{x,p}$.

Pour le signal multicomposantes donné dans l'équation (4.1), les vecteurs propres sont proportionnels aux composantes du signal. Ceci résulte en une combinaison linéaire des spectrogrammes de chaque composante normalisée par son amplitude [119]

$$P_{M-MUSIC}(n, \beta) = \frac{1}{(p+1) - \sum_{k=1}^K SPEC_{x_k}(n, \beta)/b_k^2}. \quad (4.19)$$

L'étude théorique montre que les estimateurs de Capon et MUSIC adaptés aux SPP s'écrivent en fonction du spectrogramme et possèdent le même pouvoir de résolution pour deux coefficients appartenant à deux composantes différentes. Cependant, l'utilisation de l'estimateur de MUSIC présente deux avantages majeurs par rapport à l'estimateur de Capon. Le premier avantage permet d'éviter le chargement diagonal de la matrice d'autocorrélation et donc le choix du paramètre ρ . Le second avantage est que les sous-espaces signal et bruit peuvent être obtenus sans passer par la décomposition de la matrice d'autocorrélation en utilisant des techniques comme le propagateur [84] qui permettent de réduire la complexité calculatoire.

4.4 Algorithme MUSIC Robuste pour les SPP affectés par un bruit impulsif

Représentation temps-coefficient robuste

Dans [76], les auteurs proposent un estimateur MUSIC robuste au bruit impulsif α -stable dans le cadre de l'estimation des directions d'arrivées en traitement d'antenne. Cet estimateur est basé sur les statistiques d'ordres fractionnaire. Dans ce qui suit, nous proposons d'étendre le concept défini dans 4.2 pour l'estimation des SPP noyés dans un bruit impulsif α -stable [40].

On définit la matrice de covariation $\widehat{\mathbf{C}}_{x,p}$ dont les éléments (i, j) sont obtenus en utilisant le vecteur (4.10) [76], soit :

$$\widehat{\mathbf{C}}_{x,p}(i, j) = E\{x(i)|x(j)|^{r-2}x^*(j)\} \quad (4.20)$$

où le nombre r , appelé ordre du moment fractionnaire, doit vérifier $1 < r < \alpha \leq 2$.

On démontre dans [76] que la matrice $\widehat{\mathbf{C}}_{x,p}$ est bornée et elle peut être exprimée sous la forme analogue à (4.16) :

$$\widehat{\mathbf{C}}_{x,p} = \overline{\mathbf{B}} \overline{\boldsymbol{\Lambda}} \overline{\mathbf{B}}^H + \delta \mathbf{I} \quad (4.21)$$

où $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ et δ sont définis dans [76]. La représentation temps-coefficient robuste est obtenue par

$$P_{MFLOM-MUSIC}(n, \beta) = \frac{1}{\mathbf{b}_p^H(n, \beta) \overline{\mathbf{E}}_{x,p} \overline{\mathbf{E}}_{x,p}^H \mathbf{b}_p(n, \beta)} \quad (4.22)$$

où $\overline{\mathbf{E}}_{x,p} = [\overline{e}_{K+1}, \overline{e}_{K+2}, \dots, \overline{e}_p]$ est obtenu par décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice $\widehat{\mathbf{C}}_{x,p}$ et en retenant les vecteurs singuliers gauches associés aux $p - K$ plus petites valeurs singulières de $\widehat{\mathbf{C}}_{x,p}$.

La figure 4.3 montre l'effet du bruit impulsif sur l'estimation du coefficient de la phase du SPP par la méthode Capon. On constate comme pour l'analyse temps-fréquence, une nette dégradation de la représentation temps-coefficient. Cette dégradation à l'inverse de celle observée dans le plan temps-fréquence, ne présente pas de raies mais plutôt des artefacts sur tout le plan temps-coefficient.

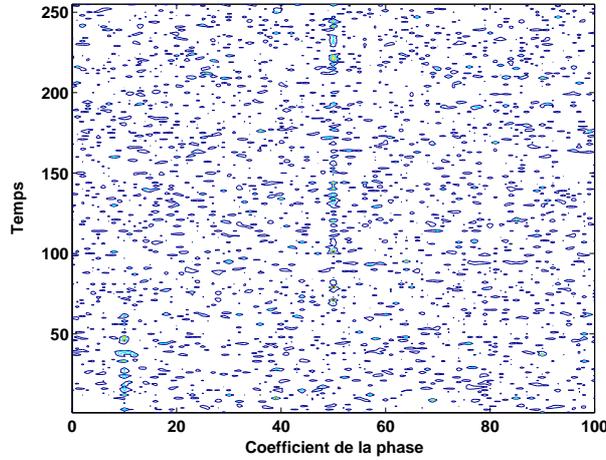


FIG. 4.3: Estimateur M-MUSIC du coefficient de la phase d'un SPP d'ordre 4 dans un bruit impulsif $\alpha = 1.2$, $\gamma = 1$

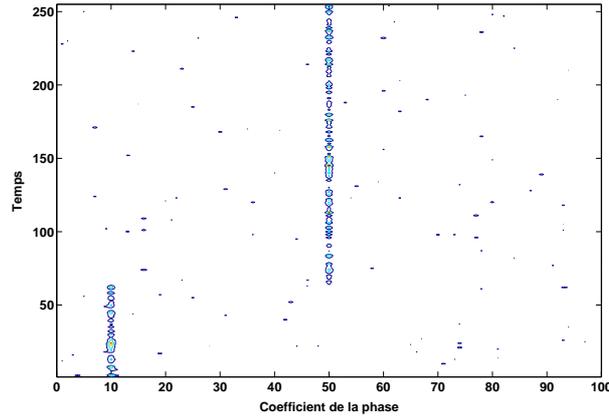


FIG. 4.4: Estimateur MFLOM-MUSIC pour le SPP noyé dans un bruit impulsif $\alpha = 1.2$, $\gamma = 1$

L'application de l'algorithme MFLOM-MUSIC permet une estimation robuste des paramètres du signal à phase polynomiale. La figure 4.4 comparée à la figure 4.3 montre une amélioration dans l'observation de l'évolution du coefficient de la phase.

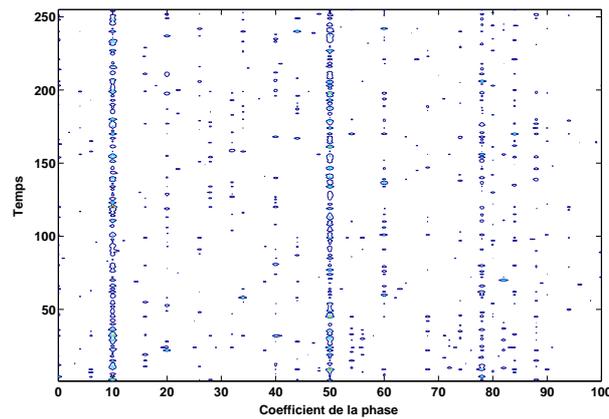


FIG. 4.5: MFLOM-MUSIC Estimateur pour deux SPP noyés dans un bruit impulsif $\alpha = 1.2$, $\gamma = 1$

Le même résultat est obtenu pour le signal multicomposantes affecté par un bruit α -stable. On distingue plus clairement dans la figure 4.5 les deux coefficients associés à chaque phase.

Dans le paragraphe suivant, on étudie l'influence des paramètres qui rentrent dans le calcul de l'estimateur FLOM-MUSIC. Cette étude permettra le bon choix de ces derniers pour obtenir une représentation temps-coefficient robuste en fonction des paramètres du bruit impulsif.

Influence des paramètres sur la représentation Temps-coefficient robuste

Dans cette partie, nous étudions l'influence des paramètres sur la performance de l'estimateur de MUSIC robuste. Les trois paramètres sont la taille du filtre p , la dispersion du bruit impulsif

γ et enfin l'exposant r qui rentre dans l'estimation de la matrice de covariation.

- **Influence du paramètre p : taille du filtre**

Nous considérons le signal donné dans l'exemple 3 et nous faisons varier la taille du filtre p . Nous observons que la taille du filtre joue un rôle important et plus cette taille est grande plus la représentation est meilleure. Mais l'augmentation de la valeur de p est très coûteuse en termes de calcul et de place mémoire spécialement pour l'estimateur de Capon qui implique l'inversion de la matrice $\mathbf{R}(n)$ de taille $(p+1) \times (p+1)$. La complexité de calcul est de $\mathcal{O}((p+1)^3)$ pour chaque itération n , $0 \leq n \leq N-1$.

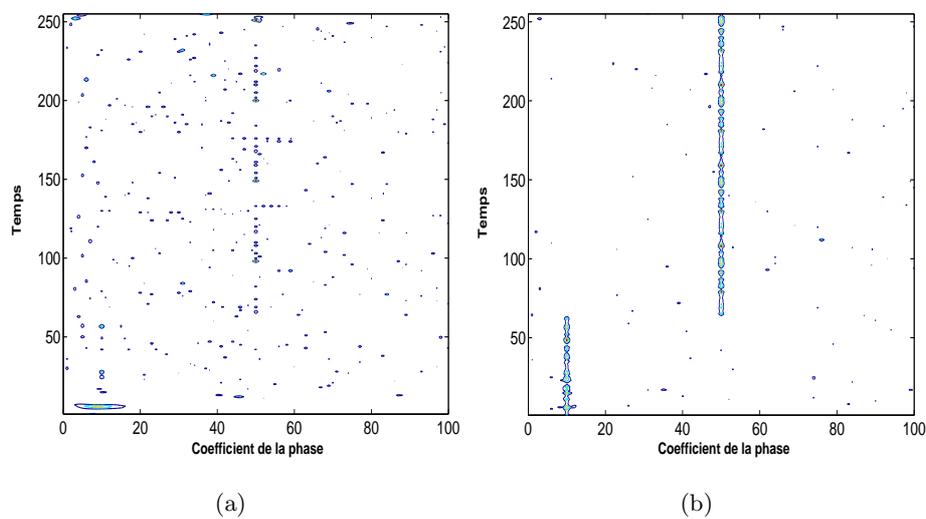


FIG. 4.6: Influence de la taille du filtre, (a) : $p=10$, (b) : $p=30$

- **Influence du paramètre γ : dispersion du bruit α -stable**

Nous faisons varier la valeur de la dispersion du bruit α -stable pour vérifier la robustesse de la méthode. Nous choisissons $\alpha = 1.2$ et nous faisons varier la valeur de γ .

La figure 4.7 représente le MSE de l'estimation du terme de plus haut degré de la phase du signal donné dans l'exemple 3 en fonction du GSNR.

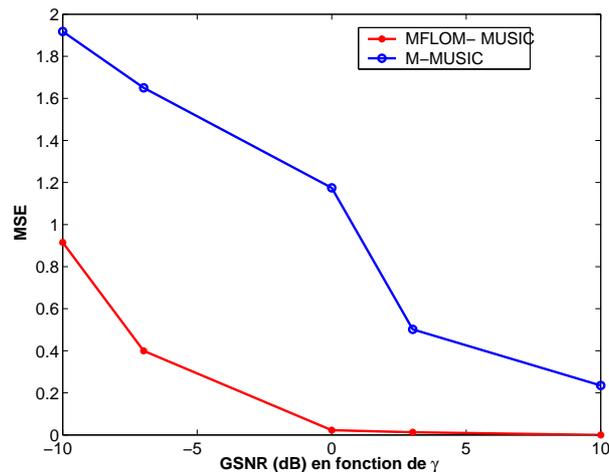


FIG. 4.7: Performances des estimateurs M-MUSIC et MFLOM-MUSIC en fonction de la dispersion

Puisque l'estimateur MFLOM-MUSIC est un estimateur robuste, il donne naturellement une meilleure estimation du coefficient de la phase que celle donnée par M-MUSIC à très faible GSNR. Nous remarquons aussi que le MSE dans le cas du MFLOM-MUSIC est pratiquement nul pour des valeurs de γ petites ($5 < \text{GSNR} < 10$).

• Influence du paramètre r : exposant de la matrice de covariation

Nous considérons un bruit SaS avec $\alpha = 1.6$, $\gamma = 5$ et nous faisons varier le paramètre r avec $1 < r < \alpha = 1.6$. Le résultat de simulation obtenu dans la figure 4.8 montre la valeur du MSE (dB) de l'estimation du paramètre de la phase en fonction du paramètre r entrant dans la définition de la matrice de covariation donnée par l'équation (4.20).

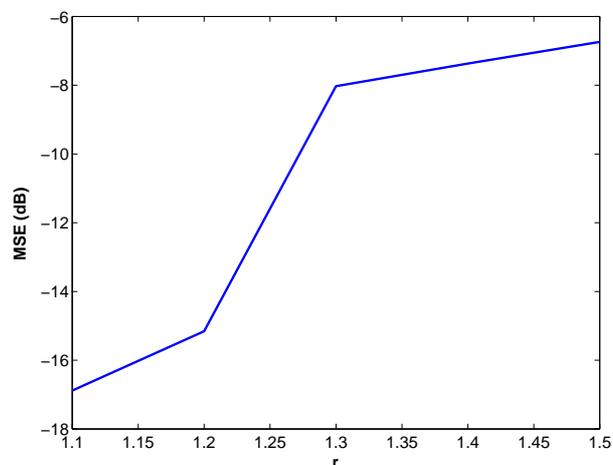


FIG. 4.8: MSE de l'estimateur MFLOM-MUSIC pour différentes valeurs de r

La courbe montre que pour une valeur de $r = 1.1$ le MSE est à -18 db, les performances de l'estimateur se détériore au fur et à mesure que r devient grand, pour $r = 1.5$ on a MSE=-7 db. On constate donc que plus la valeur de r est choisi proche de 1, plus l'estimation du coefficient est meilleure.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux méthodes de décomposition en sous-espace bruit et signal (Capon et MUSIC) pour l'estimation des SPP. Dans un premier temps, nous avons présenté une méthode de Capon adaptée à l'estimation du coefficient de la phase. Cette méthode nous a permis de représenter l'évolution temporelle des coefficients sur un plan temps-coefficient par analogie avec les représentations dans le plan temps-fréquence. De même, nous avons présenté un estimateur MUSIC en considérant le sous espace bruit supposé gaussien. L'estimateur MUSIC permet d'estimer les coefficients de la phase sans ajouter de charge diagonale à la matrice d'autocorrélation comme dans le cas de l'estimateur de Capon. Il est aussi possible de réduire la complexité calculatoire de cette méthode en utilisant à titre d'exemple la méthode du propagateur. Comme il a été déjà mentionné, ces méthodes ne sont pas robustes en présence d'un bruit impulsif α -stable. Nous avons utilisé la matrice de covariation pour obtenir un estimateur MUSIC robuste. Cet estimateur est valide pour des bruits impulsifs α -stables avec $\alpha > 1$. Dans le cas contraire ($\alpha \leq 1$), on peut utiliser l'algorithme fondé sur la non linéarité à mémoire nulle (ZMNL) [74]¹.

¹Zero-memory nonlinearity

Chapitre 5

Approches basées sur la représentation d'état

-
- 5.1 Introduction
 - 5.2 Modélisation
 - 5.3 Estimation par un filtrage de Kalman étendu robuste
 - 5.4 Estimation par deux filtres de Kalman étendus parallèles
 - 5.5 Estimation par deux filtres UKF parallèles
 - 5.6 Conclusion
-

5.1 Introduction

L'estimation paramétrique par filtrage de Kalman a été largement étudiée dans le cas des SPP affectés par un bruit gaussien. L'utilisation du filtre de Kalman est motivée par les avantages qu'il présente sur le plan pratique pour la poursuite de la fréquence du signal dans plusieurs applications [116], [97]. Les premiers travaux dans ce domaine ont été consacrés à l'identification des signaux chirp. Un modèle d'état linéaire peut être alors obtenu en se basant sur l'approximation de Tretter [67] qui transforme le bruit additif en un bruit sur la phase. Ce modèle est linéaire et gaussien, il permet l'application du filtre de Kalman qui est optimal au sens du minimum de variance mais reste approximatif d'autant plus qu'il n'est applicable que dans le cas d'un signal mono-composante. Dans [100],[101] les auteurs ont étudié le problème d'identification des signaux chirp par filtrage de Kalman étendu en proposant et en comparant

deux modèles exacts non linéaires du signal : le premier modèle est non linéaire par rapport à l'état et le second par rapport à la mesure. Plus récemment, dans [4] les auteurs ont proposé une méthode pour estimer les signaux chirps en utilisant deux filtres de Kalman en cascade. Kootsookos et *al.* [73] ont proposé un filtre de Kalman étendu pour la démodulation des SPP en utilisant une représentation d'état d'un SPP dont la phase est exprimée en fonction des polynômes de Legendre.

Ainsi le problème d'estimation par la technique de filtrage de Kalman des SPP dans le cas non gaussien reste ouvert. Dans cette partie, nous présentons le problème d'estimation utilisant le filtre de Kalman des SPP noyés dans un bruit impulsif de type Middleton classe A. Nous proposons trois solutions qui rendent le filtre robuste et nous comparons leurs performances.

5.2 Modélisation

Dans cette partie, nous supposons que le signal étudié s'écrit comme suit :

$$y(k) = s(k) + w(k) \quad (5.1)$$

où $s(k)$ est un SPP donné par :

$$s(k) = b(k) \cos(\phi(k)) \quad (5.2)$$

et $w(k)$ est un bruit impulsif qui suit le modèle ϵ -contaminé.

Modélisation d'un SPP monocomposante

Commençons par un signal chirp (SPP d'ordre 2) que l'on représente par le modèle d'état suivant

$$\mathbf{x}(k) = \left[b \quad \phi(k) \quad \Delta\phi(k) \quad \Delta^2\phi(k) \right]^T \quad (5.3)$$

avec

$$\Delta\phi(k) = \frac{1}{2}(\phi(k+1) - \phi(k-1)) \quad (5.4)$$

$$\Delta^2\phi(k) = \frac{1}{2}(\Delta\phi(k+1) - \Delta\phi(k-1)) \quad (5.5)$$

La représentation d'état du signal est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) \\ y(k) &= H(\mathbf{x}(k)) + w(k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si on suppose un bruit d'état, alors cette représentation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \\ y(k) &= H(\mathbf{x}(k)) + w(k) \end{aligned} \quad (5.7)$$

où

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H(\mathbf{x}(k)) = x_1(k) \cos x_2(k) \quad (5.8)$$

$\mathbf{v}(k)$ est un bruit blanc gaussien avec une matrice de covariance \mathbf{Q}_v et $w(k)$ est un bruit ϵ -contaminé avec une d.d.p. donnée par :

$$p(w(k)) = (1 - \epsilon)\mathcal{N}(0, \sigma_1^2) + \epsilon\mathcal{N}(0, \sigma_2^2). \quad (5.9)$$

Pour un SPP d'ordre M , le vecteur d'état est de la forme

$$\mathbf{x}(k) = \left[b \quad \phi(k) \quad \Delta\phi(k) \quad \Delta^2\phi(k) \quad \dots \quad \Delta^M\phi(k) \right]^T. \quad (5.10)$$

On peut montrer que la matrice de transition \mathbf{F} a la forme suivante

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1/1! & \dots & 1/M! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1/1! \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ex. : pour } M = 3, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Le filtrage de Kalman classique ne permet pas l'estimation des états du système donné par l'équation (5.6) car les équations d'état et d'observation ne sont pas linéaires. Le filtre de Kalman étendu repose sur la linéarisation des équations du système à l'aide d'un développement de Taylor limité au premier ordre, autour de l'estimation courante $\hat{\mathbf{x}}(k)$. Remarquons que pour le système donné par (5.6), seule l'équation d'observation est à linéariser. Des développements de Taylor d'ordres supérieurs à 1 sont envisageables mais au prix d'une complexité plus importante. On peut donc linéariser l'équation d'observation autour de l'état courant $\hat{\mathbf{x}}(k)$ et on a :

$$y(k) = H(\hat{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{H}(k) [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (5.12)$$

où

$$\mathbf{H}(k) = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\mathbf{x}(k)=\hat{\mathbf{x}}(k)}. \quad (5.13)$$

La matrice $H(k)$ définie par (5.13) sera donc utilisée pour définir une version robuste du filtre de Kalman étendu (EKF).

Modélisation d'un SPP multicomposantes

L'extension de l'estimation par filtre de Kalman aux SPP multicomposantes peut être facilement obtenue en définissant le vecteur d'état suivant

$$\mathbf{x}(k) = \left[b_1 \quad \phi_1(k) \quad \Delta\phi_1(k) \quad \cdots \quad \Delta^{M_1}\phi_1(k) \quad \cdots \quad b_K \quad \phi_K(k) \quad \Delta\phi_K(k) \quad \cdots \quad \Delta^{M_K}\phi_K(k) \right]^T \quad (5.14)$$

où l'opérateur Δ est défini dans (5.4). Comme dans le cas d'un SPP d'ordre 2, l'équation d'état est donnée par :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) \quad (5.15)$$

où la matrice \mathbf{D} est définie par :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_K \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Les matrices \mathbf{F}_j pour $j = 1 \dots K$ sont définies comme la matrice \mathbf{F} introduite dans (5.11).

D'autre part, l'équation d'observation s'écrit :

$$y(k) = x_{11}(k)\cos(x_{21}(k)) + x_{12}(k)\cos(x_{22}(k)) + \cdots + x_{1K}(k)\cos(x_{2K}(k)) + w(k). \quad (5.17)$$

Ainsi, les algorithmes qui seront considérés dans la suite peuvent être appliqués de manière identique pour le signal monocomposante en utilisant (5.6) et pour le signal multicomposantes en utilisant (5.15)-(5.17).

Dans la suite, nous considérons, sans perte de généralité, l'exemple de l'estimation d'un signal chirp pour la comparaison entre les algorithmes proposés. Ces derniers peuvent être aisément appliqués aux SPP d'ordre $M > 2$ en utilisant le modèle plus général déduit à partir de (5.10).

5.3 Estimation par un filtrage de Kalman étendu robuste

Dans cette partie, nous présentons un algorithme basé sur le filtre de Kalman robuste étendu (REKF) [42]. La différence principale entre le REKF et le filtre de Kalman classique réside dans le calcul du gain du filtre. L'idée sur laquelle repose l'algorithme est la fonction modifiée M-estimateur de Huber définie dans [52]. Cette fonction est donnée par :

$$\rho(e(k)) = \begin{cases} e^2(k)/2 & \text{si } |e(k)| < \Delta \\ \Delta^2/2 & \text{si } |e(k)| \geq \Delta. \end{cases} \quad (5.18)$$

On associe à la fonction $\rho(e(k))$ la fonction poids $q(e(k))$ définie par :

$$q(e(k)) \triangleq \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial \rho(e)}{\partial e}. \quad (5.19)$$

On obtient alors

$$q(e(k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } |e(k)| < \Delta \\ 0 & \text{si } |e(k)| \geq \Delta \end{cases} \quad (5.20)$$

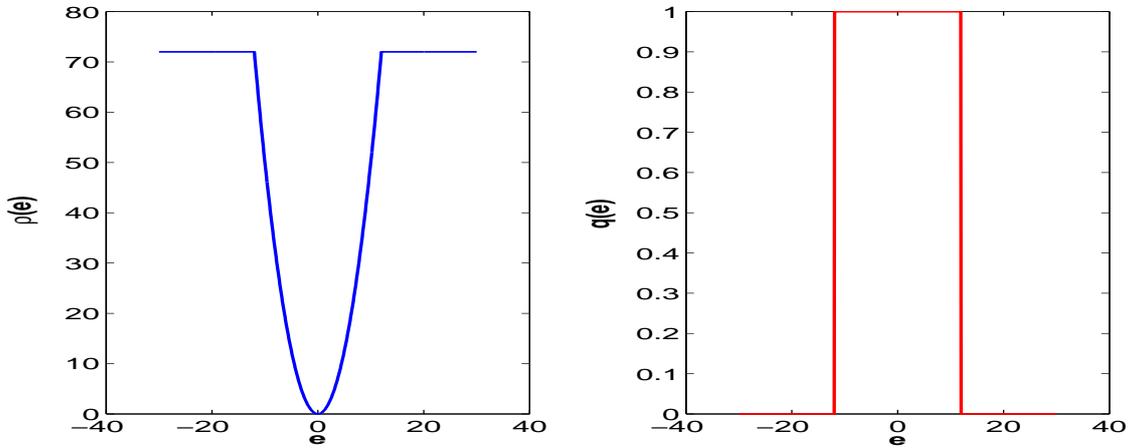


FIG. 5.1: Fonction M-estimateur de Huber modifiée

La figure 5.1 représente les fonctions $\rho(e)$ et $q(e)$ simulées pour $\Delta = 12$. La fonction $\rho(e)$ est quadratique pour les valeurs inférieures à un seuil Δ .

En présence d'un bruit ϵ -contaminé, le seuil Δ est obtenu à partir de la probabilité d'apparition des impulsions et de la l'écart type du signal d'erreur $e(t)$. Cette relation est donnée par [33] :

$$\epsilon = \Pr \{|e(k)| > \Delta\} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}\hat{\sigma}_e} \right) \quad (5.21)$$

où $\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt$ est la fonction erreur et $\hat{\sigma}_e$ l'estimée de l'écart type de $e(k)$. Cette variance s'obtient de façon récursive par [52] :

$$\hat{\sigma}_e^2(k) = \lambda_e \hat{\sigma}_e^2(k-1) + (1 - \lambda_e) c_1 \operatorname{median}(\Psi(k)) \quad (5.22)$$

$$c_1 = 1.483 \left(1 + \frac{5}{N_g - 1} \right) \quad (5.23)$$

$$\Psi(k) = |e^2(k), \dots, e^2(k - N_g + 1)| \quad (5.24)$$

où N_g définit la longueur de la fenêtre du filtre médian. Ce dernier procède tout d'abord par un tri dans un ordre croissant des échantillons voisins au point que l'on considère. Ensuite, on

sélectionne l'élément milieu du tri. Le filtrage consiste à remplacer l'échantillon en considération par la valeur médiane du voisinage de l'élément milieu du tri. Pour une longueur N_g , le filtre est robuste pour $N_g/2$ impulsions consécutives. En pratique, la valeur de N_g est choisie entre 5 et 11. Le filtre de Kalman robuste peut être résumé comme suit.

Différentes étapes du REKF

Initialisation

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 = \Pi_0$$

Effectuer les étapes suivantes pour $k = 1, 2, \dots$:

1. Calculer l'erreur :

$$e(k) = y(k) - H(\mathbf{x}(k)) \quad (5.25)$$

2. Calculer la matrice de gain de Kalman :

$$\mathbf{K}(k) = q(e(k))\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k) [\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k) + \sigma_w^2\mathbf{I}]^{-1} \quad (5.26)$$

3. Estimer l'état courant :

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)e(k) \quad (5.27)$$

4. Estimer l'état à un pas :

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k|k) \quad (5.28)$$

5. Calculer la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$\mathbf{P}(k|k) = \lambda^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k|k-1) \quad (5.29)$$

6. Détermination de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}^H + \mathbf{Q}_v. \quad (5.30)$$

Le vecteur des paramètres $\theta = \begin{bmatrix} b & a_0 & a_1 & \dots & a_M \end{bmatrix}^T$ est obtenu par [4]

$$\hat{\theta}(k) = \mathbf{A}\mathbf{F}^{-k}\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (5.31)$$

où la matrice \mathbf{A} est diagonale et est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1/1! & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1/M! \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

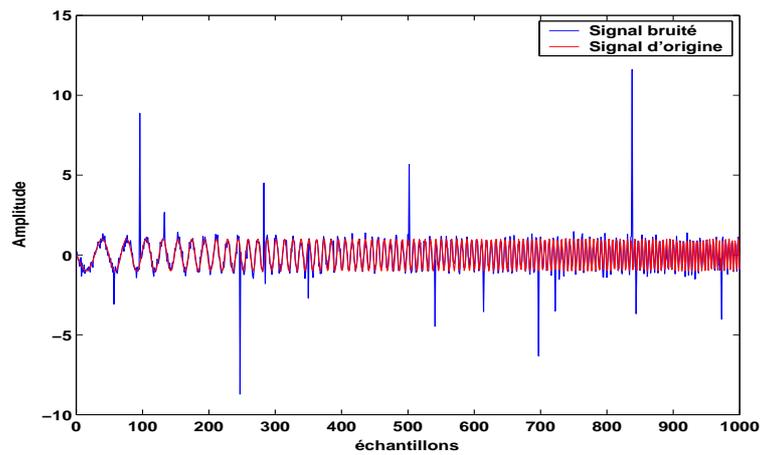


FIG. 5.2: Signal chirp noyé dans un bruit non gaussien

Exemple 5 On considère un signal chirp à amplitude constante $b = 1$. Les paramètres de la phase ont les valeurs suivantes : $a_0 = \pi/2$, $a_1 = 0.1$ et $a_2 = 1.25 \times 10^{-3}$. La probabilité d'apparition du bruit impulsif est $\epsilon = 0.01$. On prend $\sigma_1^2 = 0.05$ et $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 500$. Le filtre REKF a pour paramètres : $\lambda = 0.99$, $\lambda_e = 0.9$ et la longueur de la fenêtre du filtre médian est $N_g = 8$. Les conditions initiales sont données par :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & \pi/3 & 0 & 3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}^T$$

et

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag} \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & \pi^2/9 & \pi^2/9 & 4.3865 \cdot 10^{-6} \end{array} \right].$$

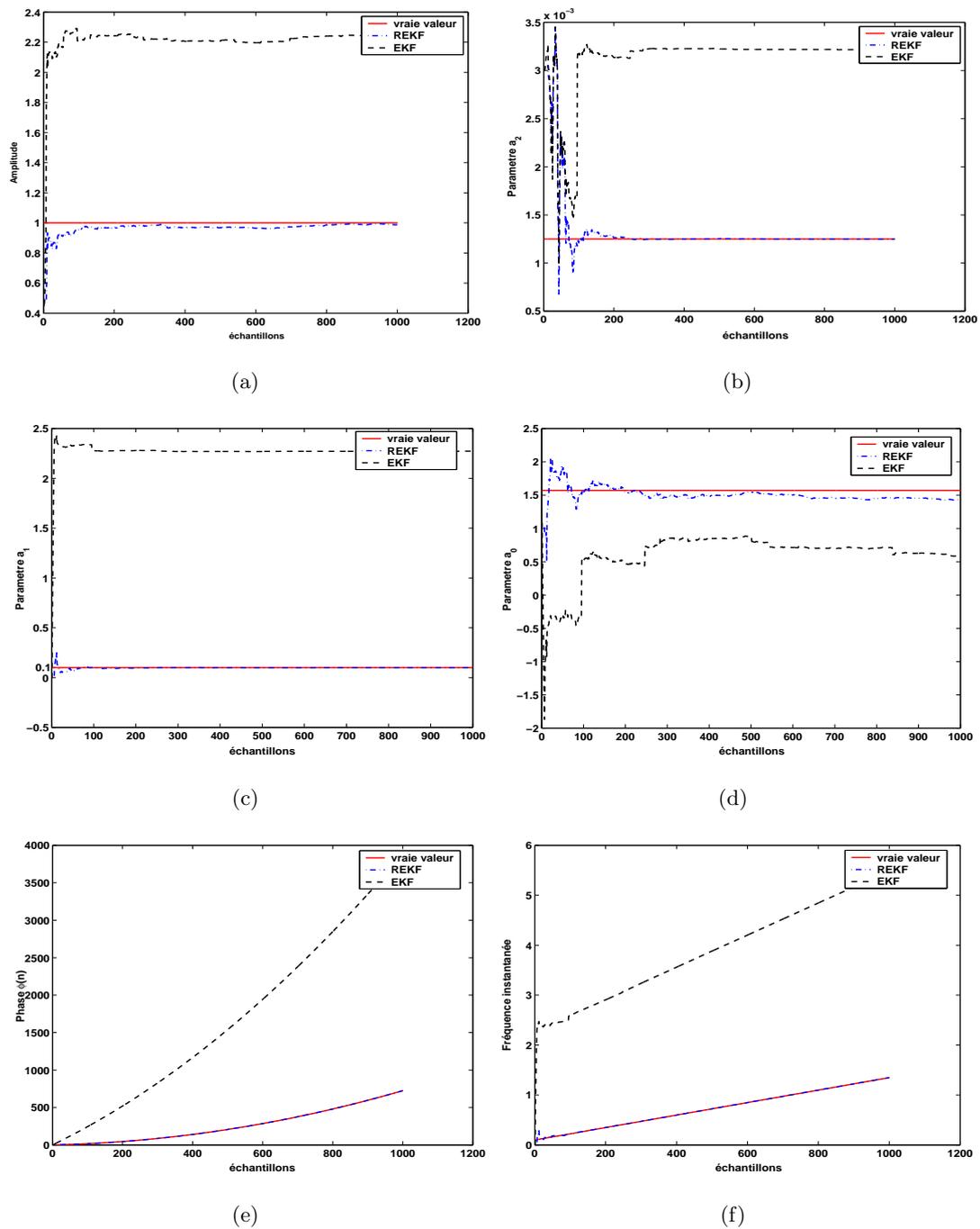


FIG. 5.3: Estimation par REKF d'un signal chirp

La figure 5.3 est un exemple de simulation dans les conditions présentées ci-dessus, la valeur du SNR est -13 dB. La figure 5.3(a) représente l'estimation de l'amplitude du signal chirp par l'EKF et le REKF. Les figures 5.3(b), 5.3(c) et 5.3(d) illustrent l'estimation des coefficients de la phase : a_2 , a_1 et a_0 respectivement. Les figures 5.3(e) et 5.3(f) donnent l'estimation de la phase et de la fréquence instantanée du signal. On observe sur les figures que, le REKF arrive

à poursuivre les paramètres du signal, tandis que le filtre EKF classique diverge complètement. Dans la figure suivante, nous traçons le MSE des paramètres pour un SNR allant de -5 dB à 10 dB.

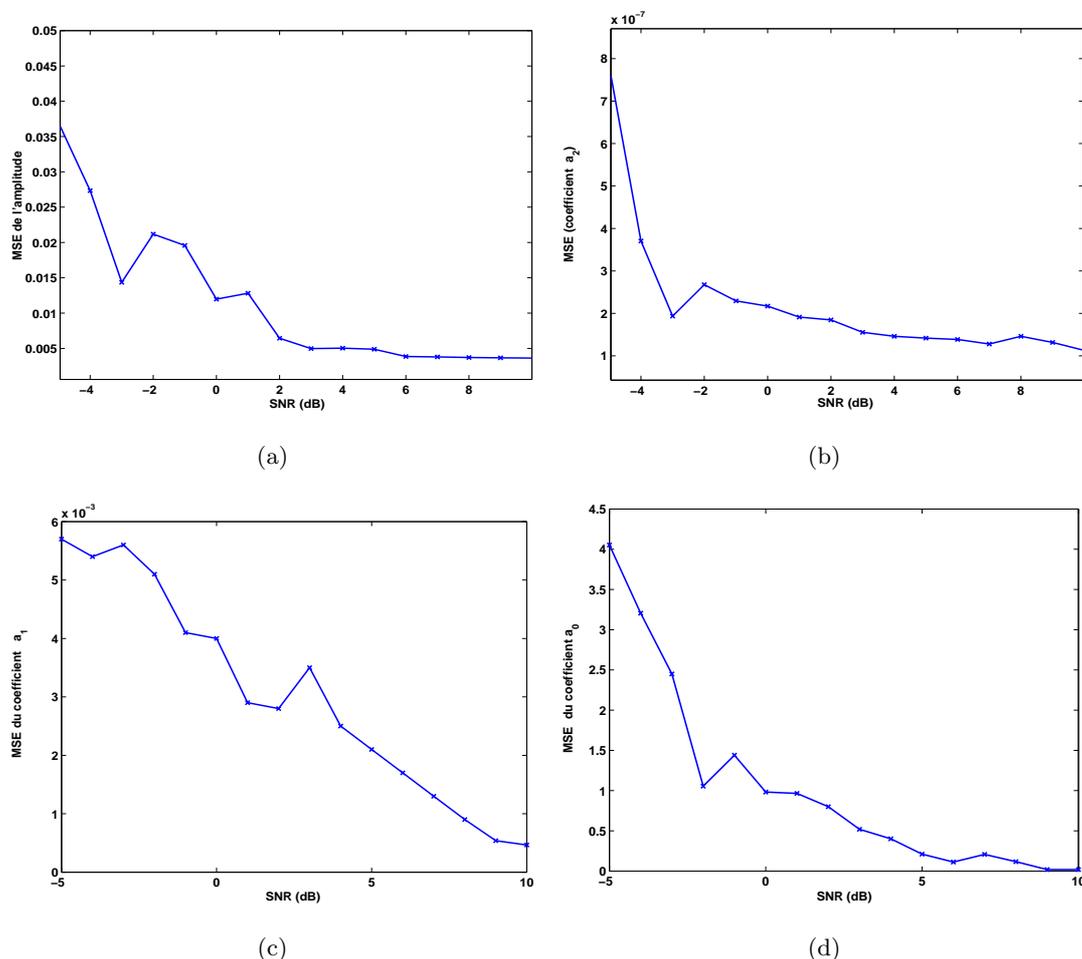


FIG. 5.4: MSE des paramètres du signal chirp obtenus par REKF

Enfin, les MSE des paramètres estimés par le filtre REKF sont donnés dans la figure 5.4. Nous remarquons sur la figure 5.4(a) que le MSE de l'amplitude du signal décroît en augmentant le SNR et se stabilise à 0.004 entre 6 dB et 10 dB. Le MSE du coefficient du plus haut degré a_2 est représenté sur la figure 5.4(b), le MSE diminue progressivement et se stabilise à 10^{-7} à partir de 7 dB. La figure 5.4(c) donne le MSE du paramètre a_1 qui se stabilise à $0.5 \cdot 10^{-3}$ pour SNR=10 dB. Enfin, la figure 5.4(d) représente le MSE du coefficient a_0 qui atteint la valeur zéro à 10 dB.

5.4 Estimation par deux filtres de Kalman étendus parallèles

Récemment un algorithme basé sur l'estimation par un réseau de filtres de Kalman parallèles dans le cas d'un modèle linéaire avec bruit d'état non gaussien a été proposé dans [83] pour

l'égalisation de canal en communication numérique. Ce problème a été étendu pour la détection multi-utilisateurs en considérant un bruit d'observation impulsif [109].

Etant donné que le modèle d'état dans (5.6) est non linéaire et non gaussien (bruit d'observation impulsif) nous proposons un ensemble de deux filtres EKF fonctionnant en parallèle pour l'estimation des paramètres du SPP noyé dans un bruit impulsif.

Le théorème de Bayes permet d'écrire la distribution de probabilité a posteriori comme suit :

$$p(\mathbf{x}(k)|Y^k) = \frac{p(\mathbf{x}(k)|Y^{k-1})p(y(k)|\mathbf{x}(k))}{p(y(k)|Y^{k-1})} \quad (5.33)$$

avec

$$Y^{k-1} = [y(k-1), y(k-2), \dots, y(0)]. \quad (5.34)$$

Connaissant la d.d.p. du bruit d'observation, on a

$$p(y(k)|\mathbf{x}(k)) = (1 - \epsilon)\mathcal{N}(y(k) - H(\mathbf{x}(k)), \sigma_1^2) + \epsilon\mathcal{N}(y(k) - H(\mathbf{x}(k)), \sigma_2^2). \quad (5.35)$$

La densité prédite de l'état, sachant les observations passées $p(\mathbf{x}(k)|Y^{k-1})$, est approximée par une Somme Pondérée de Gaussiennes (SPG) comme suit [5] :

$$p(\mathbf{x}(k)|Y^{k-1}) = \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \alpha'_i(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1), \mathbf{P}_i(k|k-1)). \quad (5.36)$$

où $\{\mathbf{x}_i(k|k-1)\}_{i=1 \dots \xi'(k)}$ sont les moyennes des gaussiennes de la SPG, $\{\mathbf{P}_i(k|k-1)\}_{i=1 \dots \xi'(k)}$ sont les matrices de covariances et $\{\alpha'_i(k|k-1)\}_{i=1 \dots \xi'(k)}$ sont des pondérations qui quantifient la contribution de chaque gaussienne dans la SPG. On obtient alors [43] :

$$p(\mathbf{x}(k)|Y^k) = \gamma_k \left[\sum_{i=1}^{\xi'(k)} \alpha'_i(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1), \mathbf{P}_i(k|k-1)) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_j \mathcal{N}(y(k) - H(\mathbf{x}(k)), \sigma_j^2) \right] \quad (5.37)$$

où $\lambda_1 = 1 - \epsilon$ et $\lambda_2 = \epsilon$. La d.d.p. pour l'itération suivante est obtenue par :

$$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k) = \int p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k))p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k)d\mathbf{x}(k) \quad (5.38)$$

et à partir de la d.d.p. du bruit d'état, on a :

$$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{F}\mathbf{x}(k), \mathbf{Q}_v) \quad (5.39)$$

Le développement des calculs présenté dans l'annexe A, nous permet d'aboutir à une version du réseau de filtres de Kalman étendus constitué de deux filtres EKF en parallèle. L'algorithme est résumé dans les équations suivantes.

Etape de prédiction

1. Etat prédit

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k-1|k-1)$$

2. Calcul de l'erreur

$$e(k|k-1) = y(k) - H(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))$$

3. Calcul de la covariance de l'erreur de prédiction

$$\hat{\mathbf{P}}(k|k-1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}_{Eqmm}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_v$$

4. Variance d'erreur de sortie prédite

$$\zeta_j^2(k|k-1) = \sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{P}}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k) \quad j = 1, 2$$

Etape de filtrage

5. Calcul du gain de Kalman

$$\mathbf{K}_j(k) = \hat{\mathbf{P}}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k)/\zeta_j^2(k|k-1)$$

6. Covariance d'erreur d'estimation

$$\hat{\mathbf{P}}_j(k|k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_j(k)\mathbf{H}(k))\hat{\mathbf{P}}(k|k-1)$$

7. Calcul de l'état estimé

$$\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_j(k)e(k|k-1)$$

Estimation EQMM

8. Calcul des pondérations

$$\beta_j(k) = \mathcal{N}(e(k|k-1), \zeta_j^2(k|k-1))$$

$$\alpha_j(k) = \frac{\lambda_j \beta_j(k)}{\sum_{j=1}^2 \lambda_j \beta_j(k)}$$

9. Etat estimé selon EQMM

$$\hat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k|k) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j(k) \hat{\mathbf{x}}_j(k|k)$$

10. Calcul de la matrice de covariance de l'état estimé EQMM

$$\hat{\mathbf{P}}_{Eqmm}(k|k) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j(k) \hat{\mathbf{P}}_j(k|k) + (\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k|k))(\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k|k))^T$$

TAB. 5.1 – Algorithme PEKF

La structure du PEKF est représentée sur la figure 5.5 où la sortie de chaque filtre est pondérée par la probabilité d'apparition du bruit impulsif ϵ -contaminé.

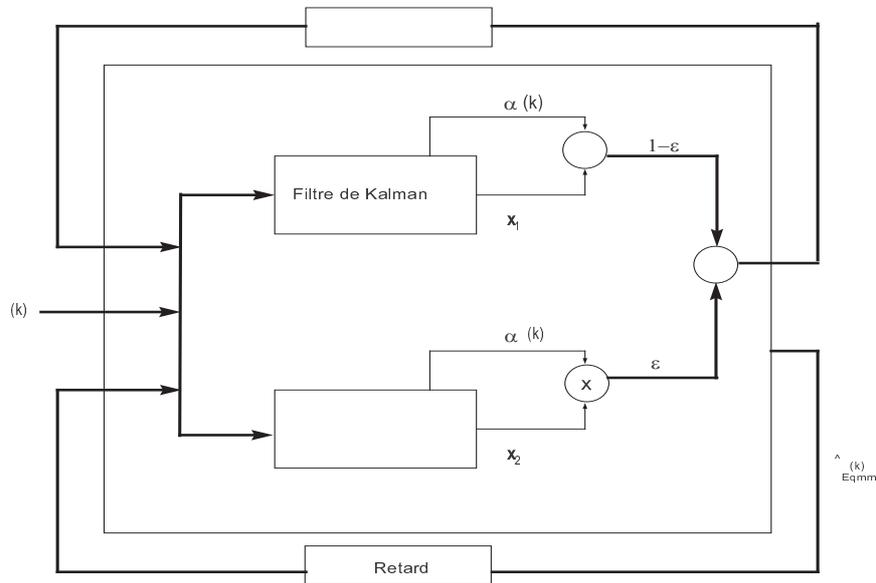


FIG. 5.5: Structure du filtre de Kalman parallèle

Estimation des SPP à amplitude constante

En utilisant le signal chirp donné par l'exemple 5, nous traçons sur la figure 5.6, les estimées des paramètres du signal chirp. Cette étude est complétée par une comparaison en terme de MSE entre le REKF et le PEKF représentée dans la figure 5.7. Nous observons que le PEKF est plus robuste et donne une meilleure estimation des paramètres du signal chirp. En effet, pour un $\text{SNR} = -5$ dB, le MSE de l'amplitude estimée par le PEKF est égal à 0.01 alors que le MSE obtenu par le REKF est à 0.037. De même pour le coefficient a_2 , le MSE de l'estimation par PEKF est égal à $2.50 \cdot 10^{-7}$ cette valeur est inférieure à la valeur du MSE obtenue par REKF. La valeur du MSE de l'estimation par PEKF du coefficient a_1 est $1.9 \cdot 10^{-3}$, alors qu'elle est égal à $5.70 \cdot 10^{-3}$ pour le meme $\text{SNR} = -5$ dB. Enfin, nous remarquons que le MSE de l'estimation par PEKF de a_0 est inférieur à celui obtenu par REKF et on voit que le $\text{MSE} = 0$ pour un $\text{SNR} = 4$ dB en utilisant le PEKF tandis qu'il s'annule pour un $\text{SNR} = 10$ dB en utilisant le REKF.

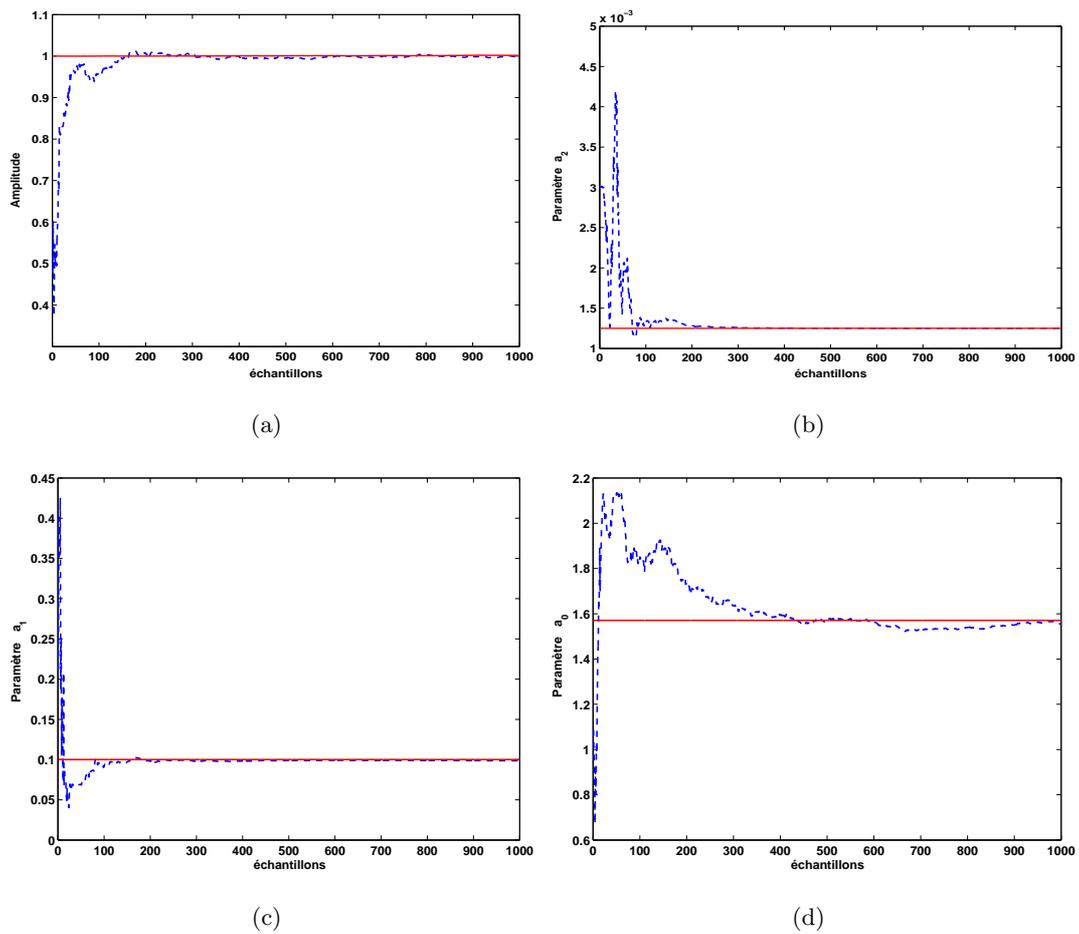


FIG. 5.6: Estimation des paramètres d'un signal chirp par deux EKF parallèles

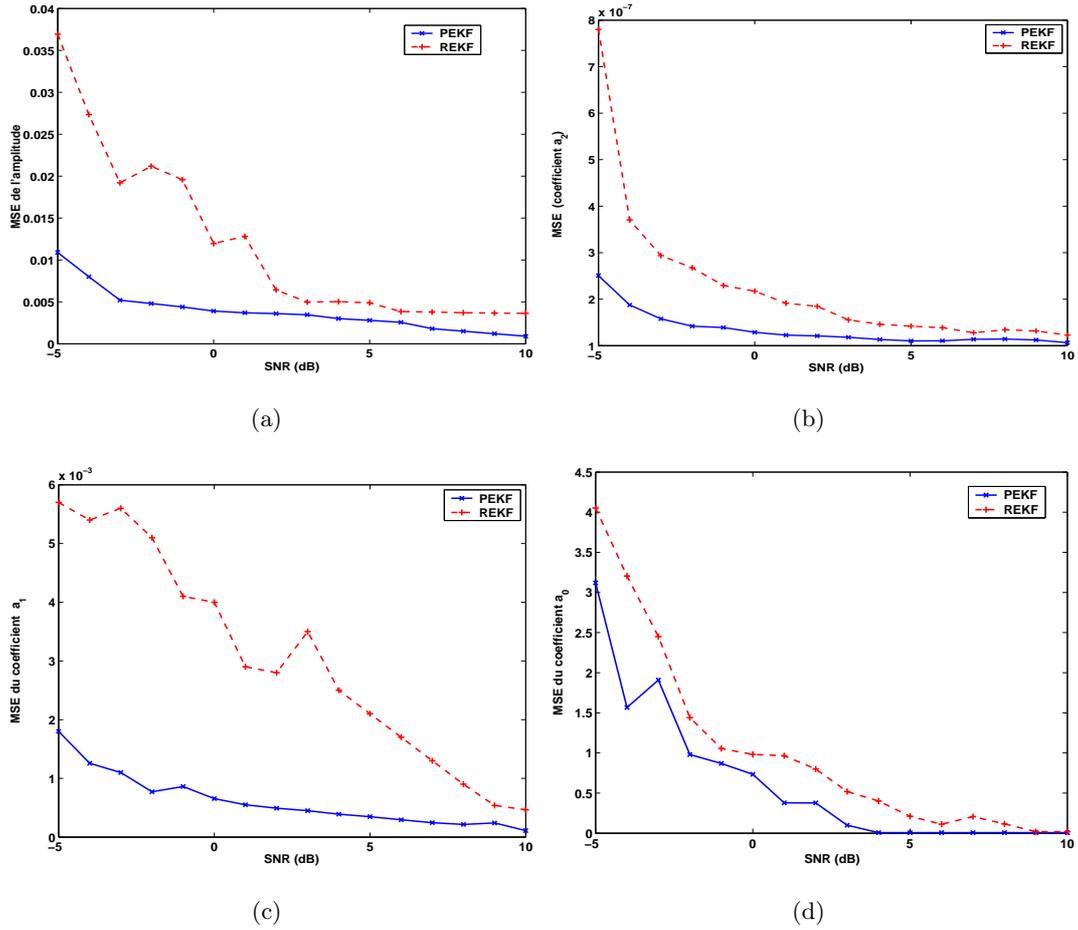


FIG. 5.7: MSE des estimations d'un signal chirp : EKF comparé au PEKF

Estimation des SPP à amplitude variable

Dans ce qui suit, nous supposons que l'amplitude du SPP est variable suivant une balade aléatoire,

$$b(k) = b(k-1) + v(k). \quad (5.40)$$

où $v(k)$ est un bruit blanc gaussien de variance σ_v^2 .

Le modèle d'état est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}v(k) \\ y(k) &= H(\mathbf{x}(k)) + w(k) \end{aligned} \quad (5.41)$$

où \mathbf{F}, H sont définis par (5.8) et $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Dans ce cas, l'étape (3) de dans le PEKF correspond au calcul de la covariance de l'erreur de prédiction est donnée par :

$$\hat{\mathbf{P}}(k|k-1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}_{Eqmm}(k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2 \quad (5.42)$$

Exemple 6 On considère le signal chirp dont les paramètres de la phase ont pour valeurs $a_0 = \pi/2$, $a_1 = 0.1$ et $a_2 = 1.25 \times 10^{-3}$. Le bruit $v(n)$ est un bruit gaussien centré avec une variance $\sigma_v^2 = 0.01$.

La figure 5.8 représente un signal chirp avec une amplitude variable. Dans les figures 5.9(a), 5.9(b), 5.9(c) et 5.9(d) nous traçons les valeurs estimées des paramètres du signal (courbes en bleu) et sur le chaque graphe nous portons la vrai valeur de chaque paramètre (courbes en rouge).

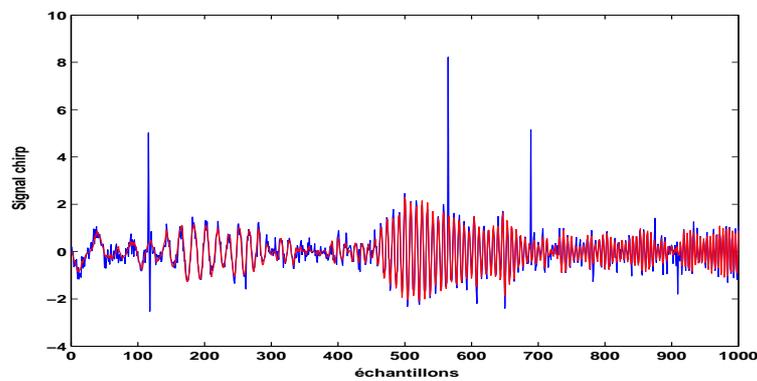


FIG. 5.8: Signal chirp à amplitude variable noyé dans un bruit non gaussien

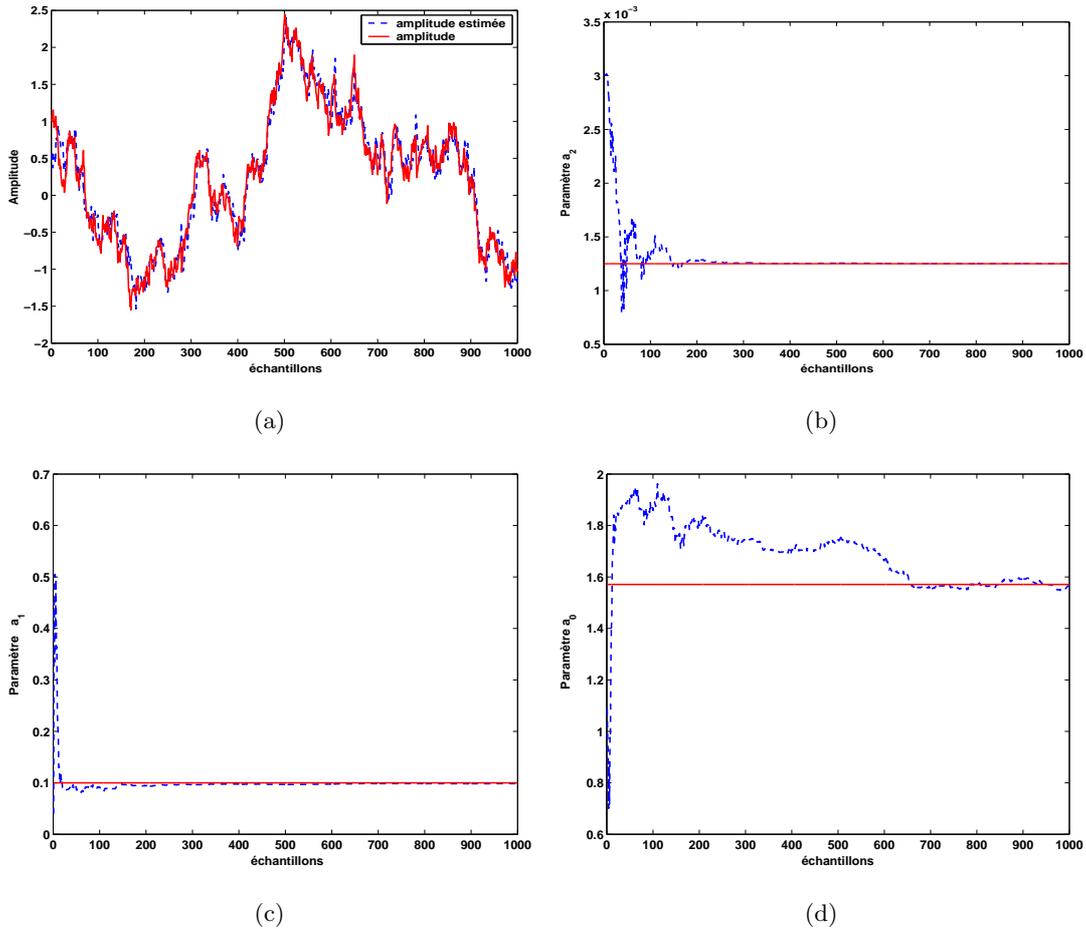


FIG. 5.9: Estimation par deux filtres EKF parallèles d'un signal chirp à amplitude variable

La figure 5.9(a) représente la poursuite (courbe en bleu) en utilisant le PEKF de l'amplitude variable du signal chirp (courbe en rouge).

5.5 Estimation par deux filtres UKF parallèles

Le filtre de Kalman étendu (EKF) suppose que les fonctions sont linéarisées. Le filtre UKF "unscented Kalman filter" développé par Julier et Uhlmann [65] permet d'éviter cette linéarisation.

On peut utiliser le filtre UKF au lieu de EKF pour estimer les états du modèle, en utilisant le même concept de réseau de filtres de Kalman UKF développé dans [6]. Ainsi, de façon similaire, nous proposons d'utiliser deux filtres UKF en parallèle pour l'estimation du signal noyé dans un bruit impulsif ϵ -contaminé. Chacun des deux filtres UKF opère sur la variance de chaque composante du bruit (composante gaussienne et impulsive).

Pour appliquer le filtre UKF, le modèle d'état doit être réécrit en utilisant le nouveau vecteur d'état (vecteur augmenté) défini par :

$$\mathbf{x}^a(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & v^T(k) & w^T(k) \end{bmatrix}^T. \quad (5.43)$$

La matrice de covariance correspondant à $\mathbf{x}^a(k)$ est donnée par :

$$\mathbf{P}^a(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(k) & 0 & 0 \\ 0 & Q_v & 0 \\ 0 & 0 & R_w \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

où $\mathbf{P}(k)$, Q_v et R_w sont les matrices de covariance des vecteurs $\mathbf{x}(k)$, $v(k)$ et $w(k)$ respectivement. L'idée de Julier et *al.* [65] est de représenter la distribution du vecteur \mathbf{x} par une distribution discrète où chaque point de l'approximation discrète est obtenu par transformation directe à travers les équations du modèle. La distribution de \mathbf{x} est représentée par des points appelés points sigma qu'on calcule en utilisant la transformation appelée par Julier et Uhlmann *unscented transformation* donnée par :

$$\mathcal{X}_0 = \mathbf{x}^a(0) \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^a(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \quad (5.45)$$

$$\mathcal{X}_i(k-1) = \mathbf{x}^a(k-1) + \left(\sqrt{(L+\kappa)\mathbf{P}^a(k-1)} \right)_i, \quad i = 1 \dots L \quad (5.46)$$

$$\mathcal{X}_i(k-1) = \mathbf{x}^a(k-1) - \left(\sqrt{(L+\kappa)\mathbf{P}^a(k-1)} \right)_{i-L}, \quad i = L+1 \dots 2L \quad (5.47)$$

$$W_0 = \frac{\kappa}{(L+\kappa)} \quad (5.48)$$

$$W_i = \frac{1}{2(L+\kappa)}, \quad i = 1 \dots 2L \quad (5.49)$$

où L est la taille du vecteur \mathbf{x}^a et le terme $(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}^a(k-1)})_i$ est la i_{me} colonne de la matrice racine carrée de $(L+\lambda)\mathbf{P}^a(k-1)$ qui peut être facilement obtenue par factorisation de Cholesky, les W_i sont les poids associés aux points sigma \mathcal{X}_i et κ est un paramètre de réglage de la dispersion des points sigma autour de \mathbf{x} .

L'utilisation de l'UKF pour éviter l'étape de linéarisation au niveau du filtre PEKF nécessite son adaptation au cas d'un modèle non linéaire avec un bruit d'observation non gaussien. Nous avons vu que les équations de l'algorithme du PEKF sont la combinaison de deux filtre EKF où chaque filtre opère sur chacune des deux variances des composantes du bruit (composante gaussienne et impulsive). Il est alors logique de suggérer l'utilisation du filtre UKF à la place du EKF pour définir de façon similaire au PEKF, un dispositif formé de deux filtres UKF parallèles (PUKF). On obtient alors l'algorithme suivant :

Etape de prédiction

$$\mathcal{X}_{i,j}(k|k-1) = \mathbf{F}\mathcal{X}_{i,j}(k-1|k-1) \quad i = 0, \dots, 2L \text{ et } j = 1, 2$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2L} W_i \mathcal{X}_{i,j}(k|k-1)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_j(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2L} W_i (\mathcal{X}_{i,j}(k|k-1) - \widehat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)) (\mathcal{X}_{i,j}(k|k-1) - \widehat{\mathbf{x}}_j(k|k-1))^T$$

$$\mathcal{Y}_{i,j}(k|k-1) = H(\mathcal{X}_{i,j}(k|k-1))$$

$$\widehat{y}_j(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2L} W_i \mathcal{Y}_{i,j}(k|k-1)$$

Etape de filtrage de Kalman

$$\zeta_j^2(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2L} W_i (\mathcal{Y}_{i,j}(k|k-1) - \widehat{y}_j(k|k-1))^2 + \sigma_j^2$$

$$\mathbf{P}_{xy}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2L} W_i (\mathcal{X}_{i,j}(k|k-1) - \widehat{\mathbf{x}}_j(k|k-1)) (\mathcal{Y}_{i,j}(k|k-1) - \widehat{y}_j(k|k-1))$$

$$e_j(k|k-1) = y(k) - \widehat{y}_j(k|k-1)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_j(k|k) = \widehat{\mathbf{x}}_j(k|k-1) + \mathbf{K}_j(k)e_j(k|k-1)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_j(k|k) = \widehat{\mathbf{P}}_j(k|k-1) - \mathbf{K}_j(k)\zeta_j^2(k|k-1)\mathbf{K}_j^T(k)$$

$$\mathbf{K}_j(k) = \mathbf{P}_{xy}(k)/\zeta_j^2(k|k-1)$$

Etape d'estimation

$$\beta_j(k) = \mathcal{N}(e_j(k|k-1), \zeta_j^2(k|k-1))$$

$$\alpha_j(k) = \frac{\lambda_j \beta_j(k)}{\sum_{j=1}^2 \lambda_j \beta_j(k)}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j(k) \widehat{\mathbf{x}}_j(k|k)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_{Eqmm}(k) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j(k) \widehat{\mathbf{P}}_j(k|k) + (\widehat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \widehat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k)) (\widehat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \widehat{\mathbf{x}}_{Eqmm}(k))^T$$

TAB. 5.2 – Algorithme PUKF

En utilisant les mêmes paramètres du signal chirp défini dans l'exemple 5, nous présentons dans la figure 5.10 le résultat de simulation de l'erreur quadratique moyenne du PUKF comparée à celle du PEKF. Nous remarquons que le PUKF présente une meilleure estimation que le PEKF.

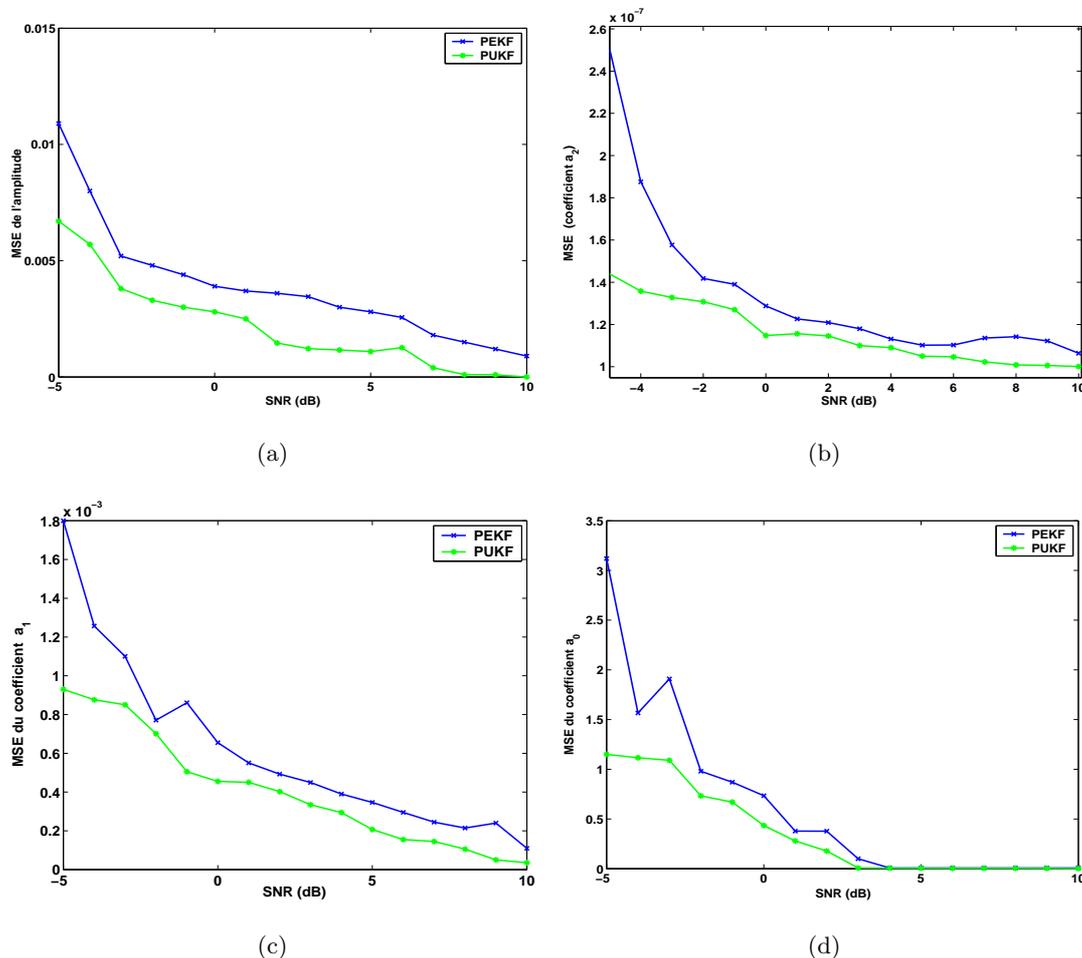


FIG. 5.10: MSE des paramètres d'un signal chirp : PEKF comparé au PUKF

En effet, dans la figure 5.10(a) nous comparons le MSE de l'amplitude estimée par le PUKF par rapport au MSE de l'amplitude obtenu par PEKF. Nous remarquons que pour un SNR=-5 dB, le PUKF donne un meilleur résultat d'estimation que le PEKF et pour un SNR=10 dB, le MSE du PUKF est nul alors que celui du PEKF ne l'est pas.

La figure 5.10(b) représente le MSE de l'estimation du terme de plus degré de la phase a_2 . Pour la valeur du SNR=-5 dB, le MSE obtenu par le PUKF est égal à $1.42 \cdot 10^{-3}$ cette valeur est inférieure à celle obtenue par le PEKF qui est à $2.5 \cdot 10^{-3}$. Le MSE calculé à 10 dB pour le PUKF reste toujours inférieur par rapport à la valeur obtenue par le PEKF. La supériorité du PUKF reste valide aussi pour les coefficients a_1 et a_0 donnés respectivement par les figures 5.10(c) et 5.10(d).

5.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'estimation des SPP par des algorithmes basés sur le filtrage de Kalman.

La représentation d'état des SPP noyés dans un bruit impulsif implique une modélisation non linéaire avec l'hypothèse que le bruit d'observation est de nature non gaussienne. Le modèle d'état ainsi obtenu est non linéaire et non gaussien. Nous avons constaté que le filtre de Kalman classique diverge lorsque le signal utile est affecté par un bruit impulsif. Nous avons proposé dans une première partie un filtre de Kalman étendu robuste obtenu par une modification du gain du filtre de Kalman. Ce dernier est pondéré par une fonction poids calculée à partir de la fonction M-estimateur de Huber.

Dans une seconde partie, nous avons présenté une version modifiée de la méthode utilisant un réseau de filtres de Kalman [109]. Cette version, adaptée aux SPP utilise deux filtres de Kalman étendus fonctionnant en parallèle pour l'estimation des paramètres du signal.

Afin d'améliorer encore cette estimation, nous avons proposé, dans une troisième partie, l'utilisation de deux filtres UKF en parallèle au lieu d'un filtre EKF pour éviter les problèmes de linéarisation coûteux en précision de calcul ainsi qu'en terme de stabilité du filtre.

Comme perspective, il serait intéressant d'étudier l'application des filtres gaussiens proposés dans [62] qui donnent de meilleurs résultats d'estimation que le filtre UKF.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Conclusion générale

6.2 Perspectives

6.1 Conclusion générale

Les travaux présentés dans le cadre de cette thèse reposent sur l'analyse des signaux à phase polynomiale (SPP) affectés par un bruit impulsif dont la loi est donnée par l'un des deux modèles suivants : le modèle de Middleton défini par une somme pondérée de gaussiennes (SPG) et le modèle utilisant les lois α -stables. Notre principale contribution réside dans la proposition de plusieurs méthodes pour estimer les paramètres des SPP aussi bien la fréquence instantanée que les coefficients de la phase.

Notre première contribution a été l'utilisation des statistiques d'ordre fractionnaire pour obtenir une version robuste de la distribution de Wigner-Ville polynomiale (FLOPWVD) adaptée à l'analyse des signaux à phase polynomiale affectés par un bruit impulsif α -stable. Cette distribution peut être facilement étendue au cas des signaux multicomposantes en incluant des fenêtres de lissage comme celles utilisées pour les distributions de Choi-Williams, Zhao-Atlas-Marks, etc. La deuxième contribution a consisté en la proposition d'une version modifiée de l'estimateur MUSIC pour l'estimation des coefficients de la phase d'un SPP. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de visualiser l'évolution temporelle du coefficient de la phase dans un plan temps-coefficient.

Dans une troisième contribution, nous avons privilégié l'estimation des paramètres du SPP par filtrage de Kalman. Le filtre de Kalman étendu robuste (REKF) a été proposé en incorporant la fonction de Huber dans l'équation du filtre. Ce dernier dépend d'un seuil qui permet de geler l'estimation du gain lorsque une impulsion est présente dans le signal. Afin d'éviter le problème de seuil, nous avons proposé d'utiliser un dispositif de deux filtres de Kalman étendus opérant en parallèle. Enfin, pour le problème de linéarisation effectué dans EKF, nous avons proposé un autre ensemble de deux filtres de Kalman UKF (Unscented Kalman Filter). La méthode de filtrage de Kalman s'étend de façon très simple aux SPP quel que soit le degré M de la phase, ainsi qu'aux SPP multicomposantes en augmentant la taille du vecteur d'état.

6.2 Perspectives

Les travaux que nous serons amenés à effectuer dans le cadre de l'approfondissement de ce sujet seraient d'étudier, de manière théorique, les performances des distributions temps-fréquence proposées dans le premier chapitre de ce manuscrit.

On peut aussi envisager l'étude de ces distributions dans le cas de bruit impulsif α -stable corrélé. D'après les propriétés du bruit α -stable avec un paramètre α donné, le paramètre réducteur de bruit $\langle a \rangle$ dans les distributions temps-fréquence basées sur les moments d'ordre fractionnaire doit être choisi en considérant la condition $a < \alpha/2$. Il serait intéressant de chercher une procédure qui permettra d'obtenir la valeur optimale de a selon un critère telle que la divergence de Rényi. Dans le cadre de l'estimation par représentation d'état défini comme un problème non linéaire et non gaussien. Nous avons vu que le bruit affectant les SPP peut être modélisé par le modèle de Middleton défini par la somme pondérée de deux gaussiennes (SPG).

Un problème intéressant à explorer dans le futur serait de proposer un algorithme adapté au cas où le bruit d'observation dans le système d'état est α -stable. L'approche de Monte Carlo Séquentielle (SMC) connue sous les noms d'algorithme de filtrage particulaire [10], [92] permet de considérer ce type de modèle. Le but consiste à étudier le principe du Filtrage Particulaire (FP) et ses différentes variantes adaptées pour le système d'équations écrites en (A.1), afin d'appliquer ce dernier à l'estimation des paramètres du SPP dans les deux cas de modèle de bruit (SPG, α -stable).

On s'intéressera également à comparer les performances du FP avec le réseau de filtres de Kalman que nous avons testé précédemment pour estimer le vecteur d'état dans le cas d'un bruit SPG.

Une autre perspective serait d'effectuer un travail de validation en appliquant les différentes méthodes sur des signaux réels de type radar, sonar ou télécommunications, et effectuer une étude plus approfondie des signaux à phase polynomiale à amplitude variable.

Dans le cas général, on peut considérer que les paramètres du bruit non gaussien sont inconnus et il serait intéressant de développer des algorithmes qui permettent de déterminer aussi pour ces paramètres. A titre d'exemple, on pourra utiliser l'algorithme de Gibbs.

Annexe A

Détails de calculs des équations du PEKF

En utilisant la même procédure de calcul donnée dans [83], et le modèle défini par le système d'équations considérant un signal avec amplitude variable, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}v(k) \\ y(k) &= H(\mathbf{x}(k)) + w(k).\end{aligned}\tag{A.1}$$

où les matrices \mathbf{F} , \mathbf{G} et la fonction H et sont définies dans (5.8). Le bruit d'état $v(k)$ est gaussien de variance σ_v^2 et $w(k)$ est supposé un bruit non gaussien ϵ -contaminé.

En utilisant le théorème de Bayes, on a

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) = c_k p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1})p(y(k)|\mathbf{x}(k))\tag{A.2}$$

où $\frac{1}{c_k} = p(y(k)|\mathbf{Y}^{k-1})$ avec $\mathbf{Y}^{k-1} = [y(k-1), y(k-2), \dots, y(0)]$.

La détermination de la d.d.p. *a posteriori* fait appel visiblement à la vraisemblance de l'observation $p(y(k)|\mathbf{x}(k))$, qui est facilement calculée si la densité de $w(k)$ est connue, et à la densité prédite de l'état étant donné les observations passées, soit $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1})$.

Approximons par une somme pondérée de gaussiennes la d.d.p. $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1})$,

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1}) = \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \alpha'_i(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1), \mathbf{P}_i(k|k-1))\tag{A.3}$$

avec $\{\mathbf{x}_i(k|k-1)\}_{i=1, \dots, \xi'(k)}$ et $\{\mathbf{P}_i(k|k-1)\}_{i=1, \dots, \xi'(k)}$ sont des vecteurs et des matrices de dimension $(K) \times 1$ et $(K) \times (K)$, respectivement, et où les matrices $\mathbf{P}_i(k|k-1)$ approchent du zéro.

(i) La détermination de $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k)$ à partir de la connaissance de $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1})$

D'après les équations (A.2) et (A.3), on peut écrire,

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) = c_k p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1}) p(y(k)|\mathbf{x}(k)) \quad (\text{A.4})$$

$$= c_k \left[\sum_{i=1}^{\xi'(k)} \alpha'_i(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1), \mathbf{P}_i(k|k-1)) \right] \times p(y(k)|\mathbf{x}(k)) \quad (\text{A.5})$$

En approximant, donc, la d.d.p. de bruit comme la somme de deux gaussiennes on peut écrire :

$$p(y(k)|\mathbf{x}(k)) = (1 - \epsilon) \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k), \sigma_1^2) + \epsilon \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k), \sigma_2^2) \quad (\text{A.6})$$

En remplaçant l'équation (A.6) dans l'équation (A.5), et en notant $\lambda_1 = 1 - \epsilon$ et $\lambda_2 = \epsilon$, on aura,

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) = c_k \left[\sum_{i=1}^{\xi'(k)} \alpha'_i(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1), \mathbf{P}_i(k|k-1)) \right] \times \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_j \times \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k), \sigma_j^2) \right] \quad (\text{A.7})$$

D'une façon plus compacte, en notant $A_i^j = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1), \mathbf{P}_i(k|k-1)) \cdot \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k), \sigma_j^2)$, pour $i = 1, \dots, \xi'(k)$ et $j = 1, 2$, nous avons,

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) = c_k \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \sum_{j=1}^2 \lambda_j \alpha'_i(k) A_i^j \quad (\text{A.8})$$

Calcul du terme A_i^j :

On fixe i , $i = 1, \dots, \xi'(k)$ et $j = 1, 2$

$$A_i^j = \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)]^T \mathbf{P}_i(k|k-1)^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k)]^T [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k)] \right\}$$

avec $a_{i,j} = (2\pi)^{\frac{(K+1)}{2}} \sigma_j |\mathbf{P}_i(k|k-1)|^{1/2}$.

En réécrivant le terme $\mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k)$ comme suit,

$$\mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{H}(k) (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)) + \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)$$

et en le réinjectant dans l'expression du terme A_i^j , nous obtenons,

$$A_i^j = \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)]^T \mathbf{P}_i(k|k-1)^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} [(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) - \mathbf{H}(k) (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))]^2 \right\}$$

En développant les termes de la deuxième exponentielle, nous aboutissons à l'expression suivante,

$$\begin{aligned} & [(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) - \mathbf{H}(k)(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))]^2 = \\ & (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1))^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) + (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))^T \mathbf{H}(k)^T \mathbf{H}(k) (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)) \\ & - 2(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))^T \mathbf{H}(k)^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} A_i^j &= \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)]^T \left[\mathbf{P}_i(k|k-1)^{-1} + \frac{\mathbf{H}(k)^T \mathbf{H}(k)}{\sigma_j^2} \right] [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1))^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma_j^2} 2(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))^T \mathbf{H}(k)^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \end{aligned}$$

Définissons $\mathbf{P}_{i,j}(k|k)$ comme suit,

$$\mathbf{P}_{i,j}(k|k) = \left[\mathbf{P}_i(k|k-1)^{-1} + \frac{\mathbf{H}(k)^T \mathbf{H}(k)}{\sigma_j^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.9})$$

En appliquant le lemme d'inversion matricielle, on obtient,

$$\mathbf{K}_{i,j}(k) = \mathbf{P}_i(k|k-1) \mathbf{H}(k)^T [\sigma_j^2 + \mathbf{H}(k) \mathbf{P}_i(k|k-1) \mathbf{H}(k)^T]^{-1} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{P}_{i,j}(k|k) = \mathbf{P}_i(k|k-1) - \mathbf{K}_{i,j}(k) \mathbf{H}(k) \mathbf{P}_i(k|k-1) \quad (\text{A.11})$$

D'après les équations (A.9), (A.10), on obtient après quelques calculs, le résultat suivant :

$$\mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} \mathbf{K}_{i,j}(k) = \frac{\mathbf{H}(k)^T}{\sigma_j^2} \quad (\text{A.12})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A_i^j &= \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)]^T [\mathbf{P}_i(k|k)]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1))^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \times \\ & \exp \left\{ (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))^T \mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} \mathbf{K}_{i,j}(k) (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \\ &= \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)]^T [\mathbf{P}_i(k|k)]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1))^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \times \\ & \exp \left\{ (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))^T \mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} \mathbf{K}_{i,j}(k) (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1) - \mathbf{K}_{i,j}(k) (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1))]^T \right. \\
&\quad \left. [\mathbf{P}_i(k|k)]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\} \times \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1))^T (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\} \times \\
&\exp \left\{ +\frac{1}{2} (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_i(k|k-1))^T \mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{K}_{i,j}(k) (y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)) \right\}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Introduisons,

$$\mathbf{x}_{i,j}(k|k) = \mathbf{x}_i(k|k-1) + \mathbf{K}_{i,j}(k) [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)] \tag{A.14}$$

Après quelques réarrangements dans l'équation (A.13), on obtient,

$$\begin{aligned}
A_i^j &= \frac{1}{a_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)]^T [\mathbf{P}_{i,j}(k|k)]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)] \right\} \times \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)]^T \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{1}{\sigma_j^2} - \mathbf{K}_{i,j}(k)^T \mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} \mathbf{K}_{i,j}(k) \right] [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)] \right\}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle et les équations (A.9), on aura,

$$\left[\frac{1}{\sigma_j^2} - \mathbf{K}_{i,j}(k)^T \mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} \mathbf{K}_{i,j}(k) \right]^{-1} = \sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_i(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T \tag{A.16}$$

D'où,

$$A_i^j \simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k), \mathbf{P}_{i,j}(k|k)) \times \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1), \sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_i(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T) \tag{A.17}$$

En posant

$$\beta_{i,j}(k) = \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1), \sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_i(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T) \tag{A.18}$$

L'équation (A.8) s'écrit,

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) = c_k \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \sum_{j=1}^2 \lambda_j \alpha'_i(k) A_i^j \tag{A.19}$$

$$p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) = \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \sum_{j=1}^2 \underbrace{c_k \lambda_j \alpha'_i(k) \beta_{i,j}(k)}_{\alpha_{i,j}(k)} \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k), \mathbf{P}_{i,j}(k|k)) \tag{A.20}$$

$$= \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_{i,j}(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k), \mathbf{P}_{i,j}(k|k)) \right] \tag{A.21}$$

$$= \sum_{l=1}^{2\xi'(k)} \alpha_l(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_l(k|k), \mathbf{P}_l(k|k)) \text{ avec } l = (i, j) \tag{A.22}$$

avec

$$\alpha_{l=(i,j)}(k) = c_k \lambda_j \alpha'_i(k) \beta_{i,j}(k) \quad (\text{A.23})$$

c_k est déterminé de la façon suivante,

$$\sum_{l=1}^{2\xi'(k)} c_k \lambda_j \alpha'_i(k) \beta_{i,j}(k) = 1 \quad (\text{A.24})$$

On aura, donc,

$$c_k = \frac{1}{\sum_{l=1}^{2\xi'(k)} \lambda_j \alpha'_i(k) \beta_{i,j}(k)} \quad (\text{A.25})$$

Finalement, on obtient,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k) &= \sum_{l=1}^{2\xi'(k)} \alpha_l(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_l(k|k), \mathbf{P}_l(k|k)) \text{ avec } l = (i, j) & (\text{A.26}) \\ \mathbf{x}_{i,j}(k|k) &= \mathbf{x}_i(k|k-1) + \mathbf{K}_{i,j}(k) [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1)] \\ \mathbf{P}_{i,j}(k|k) &= \mathbf{P}_i(k|k-1) - \mathbf{K}_{i,j}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_i(k|k-1) \\ \mathbf{K}_{i,j}(k) &= \mathbf{P}_i(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T [\sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_i(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T]^{-1} \\ \xi(k) &= 2\xi'(k) \\ \beta_{i,j}(k) &= \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_i(k|k-1), \sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_i(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T) \\ \alpha_{l=(i,j)}(k) &= \frac{\lambda_j \alpha'_i(k) \beta_{i,j}(k)}{\sum_{l=(i,j)}^{2\xi(k)} \lambda_j \alpha'_i(k) \beta_{i,j}(k)} \end{aligned}$$

Nous venons de décrire une méthode qui à partir d'une représentation par une SPG de $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^{k-1})$ permettrait de représenter la distribution $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k)$ par une autre SPG. Il nous faut donc maintenant décrire la méthode qui permette de représenter $p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k)$ par une SPG lorsque $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k)$ est donné par l'équation (A.2).

(ii) Calcul de $p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k)$

En appliquant l'approximation par une SPG, la densité de probabilité du bruit d'état peut s'écrire comme suit,

$$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{F}\mathbf{x}(k), \mathbf{G}\mathbf{G}^T \sigma_v^2) \quad (\text{A.27})$$

En réécrivant

$$\mathbf{F}\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}_{i,j}(k|k) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)) \quad (\text{A.28})$$

$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k)$ aura l'expression suivante en utilisant les équations (A.20) et (A.28) :

$$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k) = \int p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k))p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{Y}^k)d\mathbf{x}(k) \quad (\text{A.29})$$

$$= \sum_{\substack{\xi(k) \\ l=1 \\ l=(i,j)}} \alpha_l(k) \int \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_l(k|k), \mathbf{P}_l(k|k)) \times \\ \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{F}\mathbf{x}_{i,j}(k|k) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)), \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2) \quad (\text{A.30})$$

Notons par

$$B_i^j = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_l(k|k), \mathbf{P}_l(k|k)) \times \\ \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{F}\mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)), \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2) \quad (\text{A.31})$$

Posons,

$$\mathbf{x}_{i,j}(k+1|k) = \mathbf{F}\mathbf{x}_{i,j}(k|k)$$

Ainsi, on peut écrire,

$$B_i^j = \frac{1}{a'_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)]^T \mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)] \right\} \times \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)))^T \times \right. \\ \left. (\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1} \times (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k))) \right\} \quad (\text{A.32})$$

avec $a'_{i,j} = (2\pi)^K |\mathbf{P}_{i,j}(k|k)|^{1/2} |\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2|^{1/2}$.

Après quelques réarrangements dans l'équation (A.32), on obtient,

$$B_i^j = \frac{1}{a'_{i,j}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)]^T [\mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} + \mathbf{F}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}\mathbf{F}] [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)] \right\} \times \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k))^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1} (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)) \right\} \times \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k))^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1} \mathbf{F} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)] \right\} \times \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k)]^T \mathbf{F}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1} (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)) \right\} \quad (\text{A.33})$$

L'utilisation du lemme d'inversion matricielle, nous permet d'écrire,

$$\bar{\mathbf{P}}^{-1} = [\mathbf{P}_{i,j}(k|k)^{-1} + \mathbf{F}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}\mathbf{F}]^{-1} \quad (\text{A.34})$$

$$= \mathbf{P}_{i,j}(k|k) - \mathbf{P}_{i,j}(k|k)\mathbf{F}^T [\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2 + \mathbf{F}\mathbf{P}_{i,j}(k|k)\mathbf{F}^T]^{-1} \mathbf{F}\mathbf{P}_{i,j}(k|k) \quad (\text{A.35})$$

En introduisant,

$$\mathbf{P}_{i,j}(k+1|k) = \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2 + \mathbf{F}\mathbf{P}_{i,j}(k|k)\mathbf{F}^T$$

on aura,

$$(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1} = \mathbf{P}_{i,j}(k+1|k)^{-1} + (\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}\mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1} \quad (\text{A.36})$$

En remplaçant l'équation (A.36) dans (A.33), on aura,

$$\begin{aligned} B_i^j &= \frac{1}{a_{i,j}^T} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)]^T \mathbf{P}_{i,j}(k+1|k)^{-1} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)] \right\} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \bar{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)) \right]^T \bar{\mathbf{P}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \bar{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{F}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B_i^j &\simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k), \mathbf{P}_{i,j}(k+1|k)) \times \\ &\mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \bar{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{F}_q^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)), \bar{\mathbf{P}}^{-1}) \end{aligned}$$

Finalement, $p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k) &= \sum_{\substack{l=1 \\ l=(i,j)}}^{\xi(k)} \alpha_l(k) \int \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k), \mathbf{P}_{i,j}(k+1|k)) \times \\ &\mathcal{N}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \bar{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{F}_q^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2)^{-1}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k)), \bar{\mathbf{P}}^{-1}) d\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

D'où

$$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{Y}^k) = \sum_{\substack{l=1 \\ l=(i,j)}}^{\xi(k)} \alpha_l(k) \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{i,j}(k+1|k), \mathbf{P}_{i,j}(k+1|k))$$

Ainsi on peut résumer les équations comme suit,

Prédiction :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,j}(k|k-1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{i,j}(k-1|k-1) \\ \mathbf{P}_{i,j}(k|k-1) &= \mathbf{F}\mathbf{P}_{i,j}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T\sigma_v^2 \end{aligned}$$

Estimation :

$$\begin{aligned}
\xi(k) &= 2\xi'(k) \\
\mathbf{x}_{i,j}(k|k) &= \mathbf{x}_{i,j}(k|k-1) + \mathbf{K}_{i,j}(k) [y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_{i,j}(k|k-1)] \\
\mathbf{P}_{i,j}(k|k) &= \mathbf{P}_{i,j}(k|k-1) - \mathbf{K}_{i,j}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{i,j}(k|k-1) \\
\mathbf{K}_{i,j}(k) &= \mathbf{P}_{i,j}(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T [\sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{i,j}(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T]^{-1} \\
\alpha_{i,j}(k) &= \frac{\lambda_j \alpha'_{i,j}(k) \beta_{i,j}(k)}{2\xi(k-1) \sum_{i,j} \lambda_j \alpha'_{i,j}(k) \beta_{i,j}(k)} \\
\beta_{i,j}(k) &= \mathcal{N}(y(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{x}_{i,j}(k|k-1), \sigma_j^2 + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{i,j}(k|k-1)\mathbf{H}(k)^T)
\end{aligned}$$

L'estimation du vecteur d'état $\mathbf{x}(k)$ est donnée par,

$$\mathbf{x}(k|k) = \sum_{i,j}^{2\xi(k-1)} \alpha_{i,j}(k) \mathbf{x}_{i,j}(k|k) \tag{A.38}$$

et la matrice de covariance de l'erreur est donnée par,

$$\bar{\mathbf{P}}(k) = \sum_{i,j}^{2\xi(k-1)} \alpha_{i,j} \left(\mathbf{P}_{i,j}(k|k) + (\mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \mathbf{x}(k|k)) (\mathbf{x}_{i,j}(k|k) - \mathbf{x}(k|k))^T \right) \tag{A.39}$$

Enfin, en prenant $i = 1$ et $\xi(k) = 1$, nous obtenons l'algorithme du PEKF adapté à l'estimation des SPP noyés dans un bruit ϵ -contaminé.

Annexe B

Détails de calcul de la borne de Cramer-Rao

Dans cette annexe, nous calculons les expressions générales des bornes de Cramer-Rao (CRB) pour les estimées des paramètres. La CRB donne la limite inférieure de la variance des paramètres estimés.

La matrice permettant d'obtenir les CRB s'obtient en inversant la matrice d'information de Fisher (FIM), soit :

$$CRB(\theta) = J(\theta)^{-1} \quad (\text{B.1})$$

où chaque élément de la matrice de Fisher est obtenu par

$$J_{ij}(\theta) = I(\lambda) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s(n, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (\text{B.2})$$

où la fonction $I(\lambda)$ est défini par :

$$I(\lambda) = \pi \int_0^\infty \frac{[\dot{p}(x)]^2}{p(x)} x dx \quad (\text{B.3})$$

En supposant que le bruit d'observation $n(t)$ est non gaussien avec une d.d.p.

$$p(x) = \frac{(1-\epsilon)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (\text{B.4})$$

La dérivée première de $p(x)$ s'obtient comme suit

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = -\frac{x(1-\epsilon)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) - \frac{x\epsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_2^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (\text{B.5})$$

L'équation (B.5) élevée au carré, nous donne

$$\left(\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2(1-\epsilon)^2}{2\pi\sigma_1^6} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_1^2}\right) + \frac{x^2\epsilon^2}{2\pi\sigma_2^6} + \frac{x^2(1-\epsilon)\epsilon}{\pi\sigma_1^3\sigma_2^3} \exp\left(-\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}\right)x^2\right) \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant (B.4) et (B.6) l'intégrale dans (B.3) devient

Posons $\lambda_1 = 1 - \epsilon$ et $\lambda_2 = \epsilon$

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \frac{\lambda_l \lambda_q}{\sigma_l^3 \sigma_q^3} \exp \left[- \left(\frac{1}{2\sigma_l^2} + \frac{1}{2\sigma_q^2} \right) x^2 \right]}{\sum_{r=1}^2 \frac{\lambda_r}{\sigma_r} \exp(-x^2/2\sigma_r^2)} x^3 dx \quad (\text{B.7})$$

Pour calculer l'intégrale en (B.7), il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques.

Dans le cas gaussien ($\epsilon = 0$), on peut vérifier que $I(\lambda) = \frac{1}{\sigma^2}$

On prendra pour exemple un signal chirp de la forme

$$s(k) = A(k) \cos(\phi(k)) = A(k) \cos(a_0 + a_1 k + \frac{a_2}{2} k^2) \quad (\text{B.8})$$

Le vecteur de paramètres $\theta = [A, a_0, a_1, a_2]$

$$\begin{aligned} [J(\theta)]_{11} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s(n, \theta)}{\partial \theta_1^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \\ [J(\theta)]_{12} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_2} = - \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \\ [J(\theta)]_{13} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_3} = - \sum_{n=0}^{N-1} n \cos \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \\ [J(\theta)]_{14} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_4} = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n^2}{2} \cos \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} [J(\theta)]_{21} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_2} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_1} = - \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \\ [J(\theta)]_{22} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s(n, \theta)}{\partial \theta_2^2} = \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \left[\sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \\ [J(\theta)]_{23} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_2} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_3} = - \sum_{n=0}^{N-1} A^2 n \left[\sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \\ [J(\theta)]_{24} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_2} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_4} = - \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \frac{n^2}{2} \left[\sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} [J(\theta)]_{31} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_3} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_1} = - \sum_{n=0}^{N-1} n \cos \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \\ [J(\theta)]_{32} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_3} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_2} = \sum_{n=0}^{N-1} A^2 n \left[\sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \\ [J(\theta)]_{33} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s(n, \theta)}{\partial \theta_3^2} = - \sum_{n=0}^{N-1} A^2 n^2 \left[\sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \\ [J(\theta)]_{34} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_3} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_4} = - \sum_{n=0}^{N-1} A^3 \frac{n^3}{2} \left[\sin \left(\frac{a_2}{2} n + a_1 n + a_0 \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned}
[J(\theta)]_{41} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n,\theta)}{\partial \theta_4} \frac{\partial s(n,\theta)}{\partial \theta_1} = - \sum_{n=0}^{N-1} n \cos \left(\frac{a_2}{2}n + a_1n + a_0 \right) \sin \left(\frac{a_2}{2}n + a_1n + a_0 \right) \\
[J(\theta)]_{42} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n,\theta)}{\partial \theta_4} \frac{\partial s(n,\theta)}{\partial \theta_2} = \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \frac{n^2}{2} \left[\sin \left(\frac{a_2}{2}n + a_1n + a_0 \right) \right]^2 \\
[J(\theta)]_{43} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n,\theta)}{\partial \theta_4} \frac{\partial s(n,\theta)}{\partial \theta_3} = - \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \frac{n^3}{2} \left[\sin \left(\frac{a_2}{2}n + a_1n + a_0 \right) \right]^2 \\
[J(\theta)]_{44} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s(n,\theta)}{\partial \theta_4^2} = - \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \frac{n^4}{4} \left[\sin \left(\frac{a_2}{2}n + a_1n + a_0 \right) \right]^2
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Annexe C

Principales publications de l'auteur

- 1- M. Djeddi, M. Benidir, "A two parallel Extended Kalman Filtering algorithm for the estimation of chirp signals in non-Gaussian noise", EUSIPCO 2005.
- 2- M. Djeddi, H. Belkacemi, M. Benidir, S. Marcos, "A robust MUSIC estimator for polynomial phase signals in α -stable Noise", ICASSP'05, Philadelphia, Mars 2005.
- 3- M. Djeddi, M. Benidir, "Estimation of the parameters of chirp signal in non-Gaussian noise using robust extended Kalman filter", Fourth International Conference on Physics in Signal and Image Processing, pp. 61-64, Toulouse, Février 2005.
- 4- M. Djeddi, M. Benidir, "Robust polynomial Wigner-Ville distribution for the analysis of polynomial phase signals in α -stable noise", ICASSP'04, Vol. 2, pp. ii-613-16, Canada, 17-21 Mai 2004.
- 5- M. Djeddi, M. Benidir, "Separation of AR signals disturbed by impulsive noise using the EM algorithm and Kalman filtering", ECCTD03, Krakow, Poland, Septembre 2003.

A TWO PARALLEL EXTENDED KALMAN FILTERING ALGORITHM FOR THE ESTIMATION OF CHIRP SIGNALS IN NON-GAUSSIAN NOISE

Mounir DJEDDI, Messaoud BENIDIR

Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S)
Supélec, 3 rue Joliot-Curie, Plateau de Moulon,
91190 Gif-sur-Yvette (France)
Phone: +33 1 6985 1763, fax: +33 1 6985 1765,
Email: djeddi@lss.supelec.fr

ABSTRACT

In this paper, we address the problem of the estimation of chirp signals in " ϵ -contaminated" impulsive noise using Kalman filtering technique. We consider an estimation method based on the exact non linear state space representation of the chirp signal. The observation noise's probability density function is assumed to be a sum of two-component Gaussians weighted by the probability of appearance of the impulsive and gaussian noises in the observations. We propose to use two extended Kalman filters (PEKF) operating in parallel as an alternative to the usual methods which generally use either clipping or freezing based algorithms. Simulation results show that the PEKF compared to the robust extended Kalman filter (REKF) based on Huber's function is less sensitive to impulsive noise and gives better estimates of the chirp parameters.

1. INTRODUCTION

Chirp signals (also called polynomial phase signals of order 2) arise in many natural phenomena like seismic and bat echolocation signals, but are mainly known in engineering applications such as in radar, sonar and telecommunication. The estimation of chirp signals is a well known problem in signal processing community and has received considerable interest in literature. Several methods have been proposed for the estimation of the parameters of chirp signals affected by additive Gaussian noise. Most of these methods rely on maximum likelihood principle (ML), LMS/RLS estimators, and time-frequency representations [9].

In signal processing, a widely used approach to estimate the signal parameters is the Kalman filter [1] which is the optimal tracking algorithm when the signal models are assumed linear and both state and observation noises are additive Gaussian [7]. When these assumptions do not hold, that is when one have to tackle non linear models, then the Extended Kalman Filter (EKF) [2] is used by considering a local linearization using first order Taylor expansion of the non-linear equations. Many algorithms based on the EKF with various configurations have been proposed. For instance, the authors in [6] proposed a state space model obtained by incorporating spatial information consisting of the corrupted signal and its delayed version using two sensors, then the chirp signal parameters were estimated using two EKFs in cascade. Still, in many situation the observation noise is non Gaussian. In [5], the authors considered the estimation of chirp signals in additive/multiplicative non-Gaussian noise using ML and LSE estimators.

In this paper, we consider the estimation of the parameters of a chirp signal corrupted by additive noise based on a state-space representation using two Kalman filters operating in parallel. In our approach, we consider the exact non linear state-space model for mono-component chirp signal derived in [7], but we assume the additive noise is impulsive with a non Gaussian distribution to obtain a non linear/ non Gaussian state space model. It is well known that impulsive noise due to natural phenomena or man-made applications such as atmospheric disturbances affecting HF commu-

nication significantly degrades the performance of most frequency tracking EKF based algorithms in which noise is assumed Gaussian [8]. Many models for the impulsive noise can be considered such as α -stable distributions which do not have a general closed form distribution. A more practical model for the pdf of the impulsive noise is the sum of two weighted Gaussian density function. One way to use Kalman filtering in impulsive environment is by either clipping the observation signal or by changing the Kalman gain with respect to a defined threshold. In order to overcome the limitation, we propose to use parallel Kalman filtering whose principle is that each extended Kalman filter is tuned on one Gaussian component and their estimates are weighted to produce the final state estimate. This paper is organized as follows. In section 2, we will present the exact non linear state space modelisation of mono-component chirp signal where the additive noise has a non Gaussian distribution. In section 3, we describe the PEKF algorithm for the estimation of the non linear/ non Gaussian SS model. Section 4 provides simulation results and comparison with respect to the robust extended Kalman (REKF). Finally, we give some concluding remarks and perspective work in section 5.

2. NON LINEAR/NON GAUSSIAN STATE-SPACE REPRESENTATION OF CHIRP SIGNAL

We consider the discrete signal $y(k)$ modeled by a polynomial phase signal of order 2 : $y(k)$ embedded in additive noise $v(k)$ as given below

$$y(k) = A(k)e^{j\phi(k)} + v(k) \quad k = 0, \dots, N \quad (1)$$

where $A(k)$ is the amplitude of the signal which can be constant or time varying, and ϕ is a deterministic polynomial phase given by

$$\phi(k) = \frac{\alpha}{2}k^2 + \beta k + \gamma \quad (2)$$

The parameters α , β and γ are real coefficients. In this paper we will consider the real part of $y(k)$

$$z(k) = \Re\{y(k)\} = A(k)\cos(\phi(k)) + n(k) \quad (3)$$

and

$$n(k) = \Re\{v(k)\} \quad (4)$$

The noise $n(k)$ is modeled by

$$n(k) = r(k) + i(k) \quad (5)$$

where $r(k)$ is an additive Gaussian noise with zero mean and variance σ_1^2 , and $i(k)$ is the impulsive noise with a probability of appearance equal to ϵ and it is assumed to be a zero mean Gaussian noise with variance σ_2^2 where ($\sigma_2^2 \gg \sigma_1^2$). Typically the ratio (σ_2^2/σ_1^2) is between 100 to 500 [4].

The probability density function of the noise $n(k)$ is given by

$$p(n(k)) = (1 - \epsilon)\mathcal{N}(0, \sigma_1^2) + \epsilon\mathcal{N}(0, \sigma_2^2) \quad (6)$$

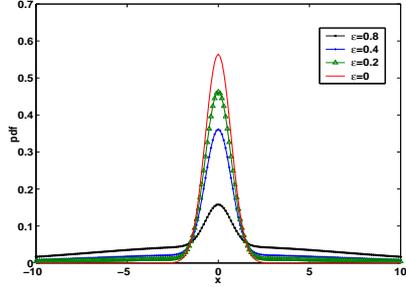


Figure 1: The pdf of the noise for different values of ε

2.1 The exact Model

Defining the state vector of dimension 4

$$\mathbf{x}(k) = [A(k) \quad \phi(k) \quad \Delta\phi(k) \quad \Delta^2\phi(k)]^T \quad (7)$$

where

$$\Delta\phi(k) = \frac{1}{2}(\phi(k+1) - \phi(k-1)) \quad (8)$$

and

$$\Delta^2\phi(k) = \frac{1}{2}(\Delta\phi(k+1) - \Delta\phi(k-1)) \quad (9)$$

And the observation equation is given by

$$z(k) = A(k)\cos(\phi(k)) + n(k) \quad (10)$$

which can be rewritten as

$$z(k) = x_1(k) \cos(x_2(k)) + n(k) \quad (11)$$

Now assuming that the amplitude of the signal follows an autoregressive model

$$A(k) = A(k-1) + w(k) \quad (12)$$

Hence, the state space model associated with the chirp signal $z(k)$ can be written as a linear state equation and a non-linear observation equation

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= F\mathbf{x}(k) + Gw(k) \\ z(k) &= h(\mathbf{x}(k)) + n(k) \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ and } G = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (14)$$

The nonlinear function $H(\mathbf{x}(k))$ is

$$h(\mathbf{x}(k)) = x_1(k) \cos(x_2(k)) \quad (15)$$

In order to use the EKF, we linearize the observation function around the current vector estimate

$$H(k) = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = [\cos(\hat{x}_2(k)) \quad -\hat{x}_1(k)\sin(\hat{x}_2(k)) \quad 0 \quad 0] \quad (16)$$

3. ROBUST ESTIMATION BASED ON THE PARALLEL EKF ALGORITHM

Based on [3], the author in [10] proposed a network of Kalman filters (NKF) in the case where the the observation noise is Gaussian while the state noise is non Gaussian. In [13] the authors proposed a NKF to estimate a linear/non Gaussian state space model for channel equalization problem. A modified version of this algorithm is proposed here, it is based on the computation of the a posteriori pdf of the state

$$p(\mathbf{x}(k)|Z^k) = \frac{p(\mathbf{x}(k)|Z^{k-1})p(z(k)|\mathbf{x}(k))}{p(z(k)|Z^{k-1})} \quad (17)$$

where $Z^{k-1} = [z(k-1), z(k-2), \dots, z(0)]$

The likelihood of the observation $p(z(k)|\mathbf{x}(k))$ is given by

$$p(z(k)|\mathbf{x}(k)) = (1-\varepsilon)\mathcal{N}(z(k) - H(k)\mathbf{x}(k), \sigma_1^2) + \varepsilon\mathcal{N}(z(k) - H(k)\mathbf{x}(k), \sigma_2^2) \quad (18)$$

The main idea is to approximate the densities $p(\mathbf{x}(k)|Z^k)$ and $p(\mathbf{x}(k)|Z^{k-1})$ by a weighted sums of Gaussian density functions

$$p(\mathbf{x}(k)|Z^k) = \sum_{i=1}^{\zeta_k} \alpha_{i,k} \mathcal{N}(x(k) - \hat{x}_i(k), P_i(k)) \quad (19)$$

and

$$p(\mathbf{x}(k)|Z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{\zeta'_{k-1}} \alpha'_{i,k} \mathcal{N}(x(k) - \hat{x}'_i(k), P'_i(k)) \quad (20)$$

The predicted pdf $p(\mathbf{x}(k+1)|Z^k)$ for the next iteration is obtained using

$$p(\mathbf{x}(k+1)|Z^k) = \int p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k))p(\mathbf{x}(k)|Z^k)d\mathbf{x}(k) \quad (21)$$

Since the noise $w(k)$ is assumed Gaussian, we have

$$p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(k+1) - F\mathbf{x}(k), GG^T\sigma_w^2) \quad (22)$$

Following the mathematical development in [10] (see Appendix) and [13], we propose the two parallel EKF algorithm for chirp signal estimation.

Table 1: summary of the PEKF algorithm

Given the initial conditions, compute for $k: 1, 2, 3 \dots$

Prediction step

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) &= F\hat{\mathbf{x}}_{MMSE}(k-1) \\ e(k|k-1) &= z(k) - h(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)) \\ \hat{P}(k|k-1) &= F\hat{P}_{MMSE}(k-1)F^T + G\sigma_w^2G^T \\ \xi_j^2(k|k-1) &= \sigma_j^2 + H(k)\hat{P}(k|k-1)H^T(k) \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

Filtering step

$$\begin{aligned} G_j(k) &= \hat{P}(k|k-1)H^T(k)/\xi_j^2(k|k-1) \\ \hat{P}_j(k|k) &= (I - G(k)H(k))\hat{P}(k|k-1) \\ \hat{\mathbf{x}}_j(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + G_j(k)e(k|k-1) \end{aligned}$$

MMSE state estimation

$$\begin{aligned} \beta_j(k) &= \mathcal{N}(e(k|k-1), \xi_j^2(k|k-1)) \\ \alpha_j(k) &= \frac{\lambda_j \beta_j(k)}{\sum_{j=1}^2 \lambda_j \beta_j(k)} \quad \text{where } \lambda_1 = 1 - \varepsilon, \text{ and } \lambda_2 = \varepsilon \\ \hat{\mathbf{x}}_{MMSE}(k) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_j(k) \hat{\mathbf{x}}_j(k|k) \\ \hat{P}_{MMSE}(k) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_j(k) [\hat{P}_j(k|k) + (\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE}(k))(\hat{\mathbf{x}}_j(k|k) - \hat{\mathbf{x}}_{MMSE}(k))^T] \end{aligned}$$

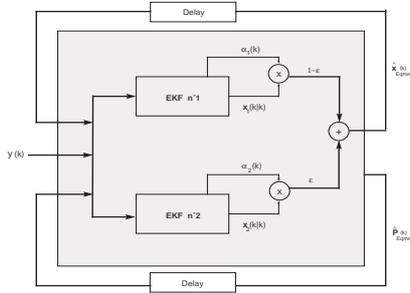


Figure 2: PEKF scheme

In order to estimate the parameters $\theta = [A(k) \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ are obtained using the following relation [6]

$$\hat{\theta}(k) = AF^{-k}\hat{x}(k) \tag{23}$$

where the matrix A is a diagonal with elements 1, 1, 1, 0.5.

4. SIMULATION RESULTS

In this section, we give some simulation results for the estimation of the chirp signal in non Gaussian noise based on the dual EKF. We consider a signal which is 1000 samples long and the sampling period equals 1. The true values of the chirp parameters are as follows : $\alpha = 1.25 \times 10^{-3}$, $\beta = 0.1$, and $\gamma = \frac{\pi}{2}$. The state noise $w(k)$ is zero mean Gaussian white noise with $\sigma_w^2 = 10^{-2}$. The non Gaussian noise $n(k)$ is distributed as in (6), with variance $\sigma_1^2 = 0.25$, and the ratio $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 500$. The chirp parameters convergence plots are given in simulation figures 3 to 7 which are obtained for $\epsilon = 0.01$ with the following initial conditions $x_0 = [0.5 \ \pi/3 \ 0 \ 3.10^{-3}]$, and $P(0) = \text{diag} [1/2 \ \pi^2/9 \ \pi^2/9 \ 4.3865.10^{-6}]$

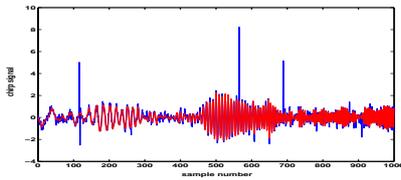


Figure 3: Chirp signal

In order to assess the gain in performance, we compare the MSE of the PEKF with the robust extended Kalman filter in [8] which is based on a modified Kalman gain expression that in terms of the modified Huber's function. We observe in figures 8 to 11 that the PEKF is more robust and gives better estimates of the chirp parameters for low SNR.

5. CONCLUSION

We have presented a method for estimating the parameters of a chirp signal described by non linear state space model where the observation noise in non Gaussian modelled by weighted-sum of two Gaussians densities having different variances. The estimation is carried out by using a parallel extended Kalman filtering algorithm without resorting to threshold computation as compared to the robust

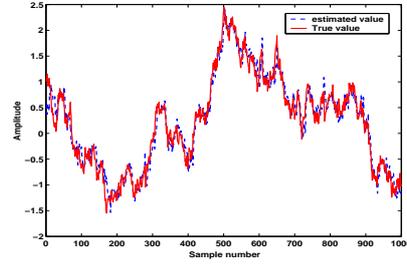


Figure 4: Amplitude estimation

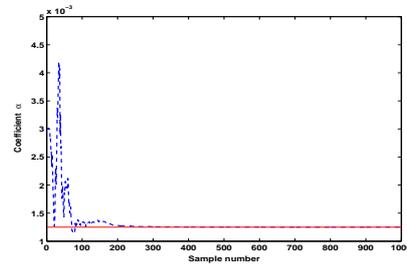


Figure 5: Estimation of the α parameter

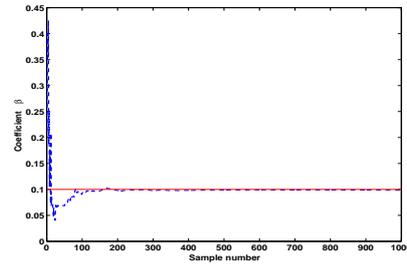


Figure 6: Estimation of the β parameter

extended Kalman filter REKF. Simulation results showed that the performance of the PEKF is better in terms of robustness and estimation accuracy compared to the REKF. On the other hand, this algorithm allows the extension to multicomponent chirp signals and higher order polynomial phase signal with constant as well as variable amplitude signal which will be presented in future work.

REFERENCES

[1] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering*, pp. 35–46, 1960.
 [2] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, New Jersey, 1979.
 [3] D. Aispach and H. Sorenson, "Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations," in , 1972, pp. 439–448.

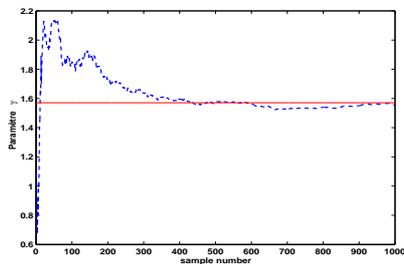
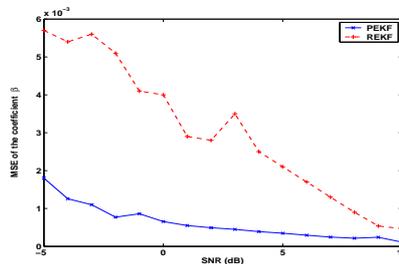
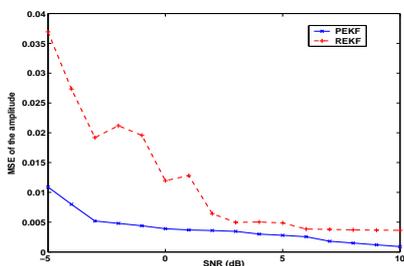
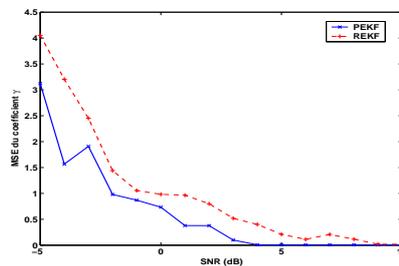
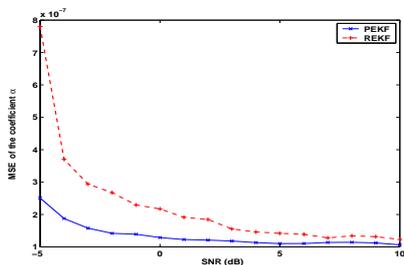
Figure 7: Estimation of the γ parameterFigure 10: MSE of β versus the SNR

Figure 8: MSE of the amplitude versus the SNR

Figure 11: MSE of γ versus the SNRFigure 9: MSE of α versus the SNR

- [4] D. Zeglache and S.S. Soliman, "Use of the EM algorithm in impulsive noise channels," in *Vehicular Technology Conference*, Feb. 1988, pp. 610–615.
- [5] S. Shamsunder and B. Giannakis, "Detection and estimation of chirp signals in non-Gaussian noise," in *27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Nov. 1993, pp. 1191–1195.
- [6] M. Adjrad and A. Belouchrani and A. Ouldali, "Estimation of chirp signal parameters using state space modelization by incorporating spatial information," in *7th International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, July 1-4 2003, pp. 531–534.
- [7] W.E. Kaakour and M. Guglielmi and J.M. Piasco and E. Le Carpentier, "Two identification methods of chirp parameters using state space model," in *13th International Conference on Digital Signal Processing Proceedings*, July 1997, pp. 903–906.
- [8] M. Djeddi and M. Benidir, "Estimation of the parameters of chirp signal in non-gaussian noise using robust extended kalman filter," in *Physics in signal and image processing PSIP*, 2005, pp. 151–167.
- [9] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. II. Algorithms and applications," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, Issue: 4, 1992, pp. 540–568.
- [10] S. Marcos, "A network of adaptive Kalman filters for data channel equalization," in *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 48, No. 9, Sept. 2000, pp. 2620–2627.
- [11] R. Amara and S. Marcos, "A blind network of extended Kalman filters for nonstationary channel equalization," in *ICASSP*, vol. 4, May 2001, pp. 2117–2120.
- [12] X. Wang, H. V. Poor, "Robust multiuser detection in non-Gaussian channels," in *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 47, No. 2, Feb. 1999, pp. 289–305.
- [13] B. Sayadi and S. Marcos, "A Robust equalization based on a network of Kalman filters in impulsive noise environments," in *Proceedings of ICASSP*, April 2003.

A ROBUST MUSIC ESTIMATOR FOR POLYNOMIAL PHASE SIGNALS IN α -STABLE NOISE

Mounir DJEDDI, Hocine BELKACEMI, Messaoud BENIDIR, Sylvie MARCOS

Laboratoire des signaux et systèmes (L2S)
Supélec, 3 rue Joliot-Curie 91190 Gif-sur-Yvette (France)

ABSTRACT

In this paper, we address the problem of estimation of the parameters of mono and multicomponent Polynomial Phase Signals (PPS) affected by alpha-stable noise using subspace methods. We propose two new estimators: a modified multiple signal classification MUSIC for PPS affected by Gaussian noise, and a modified robust MUSIC algorithm for PPS based on fractional lower-order statistics (FLOS). Simulation results show that the robust MUSIC estimator is able to estimate the values of the phase parameters in impulsive environment hence outperforming the standard estimators.

1. INTRODUCTION

Constant amplitude polynomial phase signals (PPS) are commonly used in many fields of engineering such as radar, sonar and telecommunications [1]. Many algorithms have been proposed in literature for the analysis of PPS. Non-parametric methods relying on time-frequency analysis tools such Polynomial Phase Wigner-Ville Distribution (PWVD) has been extensively used for the instantaneous-frequency (IF) estimation, as well as parametric methods such as the polynomial phase transform for the estimation of the parameters of the phase. In many practical situations, the signal under consideration may be subjected to additive noise which is assumed to be Gaussian. Several papers have considered this case as in [2]. However, the assumption of Gaussianity is not valid in some cases when noise is generated from atmospheric or underwater acoustic phenomena which displays impulsive characteristics with heavy-tailed distributions that degrade significantly the signal. Impulsive noise can be modeled by α -stable random process. The fact that α -stable random variables with $\alpha < 2$ have infinite second moment means that many techniques based on second order statistics (SOS) do not apply, and therefore, we must consider other alternatives to mitigate the effect of the non-Gaussian impulsive noise. In [3] we proposed a robust FLOS based PWVD for IF representation of PPS in α -stable noise. Recently some subspace methods have been proposed to analyse PPS. In [4], the authors derived a Capon form of the wigner distribution and polynomial periodogram. In [5], the author extended the Capon estimator to the analysis of PPS by considering a time-dependent autocorrelation sample estimates of the nonstationary signal. In [6] the MUSIC algorithm has been applied for parameter estimation of PPS in Gaussian noise by transforming the phase to a linear phase using the polynomial phase transform.

In this paper, we propose a robust MUSIC estimator for PPS of order higher than 2 corrupted by additive α -stable impulsive noise using Fractional Lower-Order Statistics (FLOS) introduced in [7]

which handle robustly the presence of heavy-tailed noise in the data.

This paper is organized as follows. In section 2, we briefly review the model of PPS. Then in sections 3, we present the model of complex α -stable noise. In section 4, we introduce our FLOS based subspace method for the estimation of PPS in impulsive noise. Some simulation examples are presented in section 5. Concluding remarks are given in Section 6.

2. THE POLYNOMIAL PHASE SIGNAL MODEL

The constant amplitude polynomial phase signal of order M is given by

$$s(n) = A \exp \{j\phi(n)\} = A \exp \left\{ j \sum_{i=0}^M a_i n^i \right\} \quad (1)$$

where A is the amplitude of the signal, the a_i 's ($i = 0, \dots, M$) are the phase coefficients; assumed real and unknown.

The instantaneous frequency (IF) is defined as

$$f_i(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(n)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M i a_i n^{i-1}. \quad (2)$$

3. COMPLEX α STABLE NOISE

There exists many physical processes generating interference containing noise components that are impulsive in nature (e.g., atmospheric noise in radio links; and radar reflections from ocean waves, and reflections from large, flat surfaces including buildings and vehicles). The amplitude distributions of such returns are not Gaussian, and tend to produce large-amplitude excursions and occasional bursts of outlying observations. Impulsive noise profoundly degrades the performance of standard algorithms and produce poor results.

In our case, the impulsive noise is modeled by complex α stable signal $X = X_1 + jX_2$ which is better defined by its characteristic function [8]

$$\varphi(t) = E\{\exp[j\Re(tX^*)]\} = E\{\exp[j(t_1X_1 + t_2X_2)]\} \quad (3)$$

where $t = t_1 + jt_2$. X is called isotropic SaS if (X_1, X_2) has a uniform spectral measure [8]. In this case, the characteristic function reduces to

$$\varphi(t) = E\{\exp[j\Re(tX^*)]\} = \exp(-\gamma |t|^\alpha) \quad (4)$$

The stable distribution is completely characterized by the parameters α ($0 < \alpha \leq 2$) named the characteristic exponent, γ is the

dispersion ($\gamma > 0$). The characteristic exponent determines the shape of the distribution. The smaller α is, the heavier the tails of the alpha stable density. We should also note that for $\alpha = 2$ the distribution coincides with the Gaussian density. The dispersion γ determines the spread of the distribution in the same way that the variance of a Gaussian distribution determines the spread around the mean [7]. For α -stable processes only the moments of order $r < \alpha$ exist. So estimation methods based on second order statistics of the data cannot be applied. Through out this paper the value of α is assumed known.

4. TIME-COEFFICIENT REPRESENTATIONS FOR THE ANALYSIS OF PPS

The multicomponent signal is modeled by the sum of K PPS

$$x(n) = y(n) + w(n) \quad (5)$$

$$= \sum_{k=1}^K s_k(n) + w(n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

with

$$s_k(n) = A_k e^{j\phi_k(n)} \quad (7)$$

where the A_k are constant amplitudes, ϕ_k are modeled as in (1) and the $w(n)$ is the additive noise.

4.1. Capon's estimator for PPS analysis

In [5], a modified Capon method is proposed for noiseless multicomponent PPS analysis, where the signal is passed through a time-varying filter of order p , so that only one particular PPS is selected and the others are suppressed. The output signal is given by

$$z(n) = \sum_{m=n-p}^n h(n, m)x(m) = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (8)$$

where $\mathbf{h}(n)$ is the impulse response of the filter

$$\mathbf{h}(n) = [h(n, n), h(n, n-1), \dots, h(n, n-p)]^T \quad (9)$$

and $\mathbf{x}(n)$ is the short-time signal vector

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-p)] \quad (10)$$

Then for an input signal with phase term $e^{j\phi(n)}$, the transfer function of the filter which can be viewed as the extension of the Zadeh's generalized transfer function to PPS is given by

$$H(n, \beta) = \sum_{m=n-p}^n h(n, m)e^{-j[\phi(n)-\phi(m)]} = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{b}_p(n, \beta) \quad (11)$$

The vector $\mathbf{b}_p(n, \beta)$ is given by

$$\mathbf{b}_p(n, \beta) = [1, e^{-j[\phi(n)-\phi(n-1)]}, \dots, e^{-j[\phi(n)-\phi(n-p)]}]^T \quad (12)$$

where $\phi(n) = \sum_{r=0}^R \beta_r n^r$ is polynomial phase kernel functions and β is the coefficient vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_R)$. Minimizing the power at the filter output subject to the constraint that the signal of interest is passed undistorted, i.e. $H(n, \beta) = 1$, one obtains the time-coefficient representation (TCR) [5]

$$P_{Capon}(n, \beta) = \frac{1}{\mathbf{b}_p^H(n, \beta)R_{x,p}^{-1}(n)\mathbf{b}_p(n, \beta)} \quad (13)$$

where $R_{x,p}(n) = E\{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)\}$ is the time-dependent autocorrelation of $\mathbf{x}(n)$.

In [9], the authors showed that the spectrogram and the Capon estimator have the same performance in terms of resolution and estimation of the instantaneous frequency of mono and multicomponent signals. However, the Capon estimator can have a better concentration in time-frequency plane.

4.2. MUSIC estimator for PPS in Gaussian noise

If we consider that $w(n)$ is Gaussian noise, and by following the same procedure as in [5] with kernel function vector given in (12) we propose the MUSIC estimator. Using the vector $\mathbf{x}(n)$, we can write

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{B}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (14)$$

where

$$\mathbf{s}(n) = [s_1(n), \dots, s_K(n)]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_p(n, \beta_1), \dots, \mathbf{b}_p(n, \beta_K)] \quad (16)$$

and the noise vector

$$\mathbf{w}(n) = [w(n), \dots, w(n-p)] \quad (17)$$

It can be shown that the covariance matrix can be decomposed into two subspaces : signal and noise subspaces [10]. The MUSIC estimator can be written as

$$P_{MUSIC}(n, \beta) = \frac{1}{\mathbf{b}_p^H(n, \beta)E_{x,p}E_{x,p}^H\mathbf{b}_p(n, \beta)} \quad (18)$$

where $E_{x,p} = [e_{K+1}e_{K+2} \dots e_p]$ is obtained by performing the eigendecomposition on the covariance matrix $R_{x,p}(n)$ and retaining eigenvectors associated to the smallest $p - K$ eigenvalues of the covariance matrix.

The matrix in equation (13) is singular, the problem of inversion can be solved by using diagonal loading ([5], eq. 12) which leads to an additional parameter to be determined. The use of matrix decomposition allows to solve this problem. On the other hand, it is possible to reduce the computational complexity of the MUSIC estimator by using algorithms to estimate the noise subspace without eigendecomposition such as the propagator method.

4.3. Proposed FLOM-MUSIC as an estimator of PPS in impulsive noise

Many papers have treated the problem of direction of arrival estimation (DOA) in the presence of impulsive noise. algorithms like ROC-MUSIC and FLOM-MUSIC have been introduced in [8, 11]. We propose to modify the above MUSIC estimator in (18) to estimate the parameter of PPS in impulsive α -stable. In following we consider only FLOM-MUSIC [11]. Assuming that the noise $w(n)$ in (6) is impulsive with α stable distribution, the second order statistics (SOS) can not be applied. In this case the covariation matrix for α -stable processes is equivalent to the covariance matrix in the case of gaussian noise. In this paper we consider $1 < \alpha \leq 2$. For $\alpha < 1$, one can use the zero-memory nonlinearity to clip the impulsive noise [12].

The (i, j) th element of the covariation matrix \hat{C} are obtained using the vector in (10) as defined in [11]

$$\hat{C}_{x,p}(i, j) = E\{x(i)|x(j)|^{r-2}x^*(j)\} \quad (19)$$

where the value of the fractional moment r must satisfy the following inequality $1 < r < \alpha \leq 2$, so the matrix \hat{C} is bounded and can be written using (14) in the form [11]

$$\hat{C} = B\Lambda B^H + \delta I \quad (20)$$

where B is defined in (16). Λ , and δ can be derived from ([11], theorem 2). The robust time-coefficient representation is given as follows

$$P_{FLOM-MUSIC}(n, \beta) = \frac{1}{\mathbf{b}_p^H(n, \beta) \overline{E}_{x,p} \overline{E}_{x,p}^H \mathbf{b}_p(n, \beta)} \quad (21)$$

where $\overline{E}_{x,p} = [\overline{e}_{K+1} \overline{e}_{K+2} \dots \overline{e}_p]$ is obtained by performing the SVD on the matrix \hat{C} and retaining the left singular vectors associated to the smallest $p - K$ singular values of \hat{C} .

5. SIMULATION RESULTS

In this section, we will demonstrate the performance gains when using fractional lower order statistics. In our simulation we used signals of order $M = 4$ and kernel function phases $\phi(n) = (\pi/255)kn^4$, with $0 \leq k \leq 100$. The filter order $p = 50$. First, we consider a monocomponent PPS as given below

$$x(n) = \begin{cases} e^{j(10\pi/255)n^4}, & 0 \leq n \leq 63 \\ e^{j(50\pi/255)n^4}, & 64 \leq n \leq 254 \end{cases} \quad (22)$$

Figure 1 shows the Capon estimator for the fourth order noiseless PPS. Now, we consider a complex SaS noise with the following

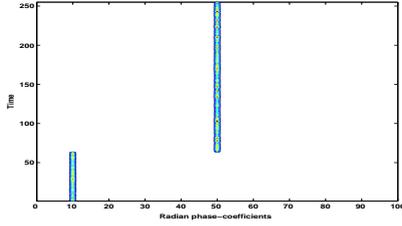


Fig. 1. Capon estimator for the fourth order PPS

parameters $\alpha = 1.2$, $\gamma = 1$. Figure 2(a) shows the effect of the impulsive noise on the MUSIC estimator. Using the proposed FLOM-MUSIC with fractional moment $r = 1.1$, we can distinguish the two rays corresponding to the value of the phase parameters as shown in figure 2(b).

Now, we consider a two-component fourth order polynomial phase signal whose Capon time-coefficient representation is shown in figure 3.

$$x(n) = e^{j(10\pi/255)n^4} + e^{j(50\pi/255)n^4}, 0 \leq n \leq 254$$

Fig. 2(b) shows again the outperforming results of FLOM-MUSIC w.r.t. standard algorithms illustrated in figures 4(a) and 4(b). From simulation, the choice of the order of the filter p is important, an example in figure (6) shows the TCR for $p = 10$ and $p = 30$.

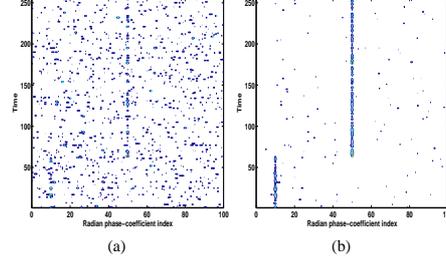


Fig. 2. (a): MUSIC and (b): FLOM-MUSIC estimators of fourth order PPS in α -stable noise with $\alpha = 1.2$ and $\gamma = 1$

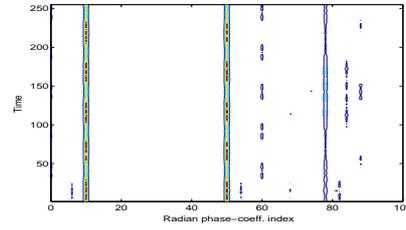


Fig. 3. Capon estimator for two fourth order PPS

We observe that increasing the value of p gives better representation. On the other hand, increasing the value of the dispersion γ beyond value 3 (GSNR=-5dB) with worst case $\alpha = 1.01$ leads to a degraded TCR. The GSNR is defined according to [8]

$$GSNR = 10 \log \left(\frac{1}{\gamma N} \sum_{n=0}^{N-1} |s(n)|^2 \right) \quad (23)$$

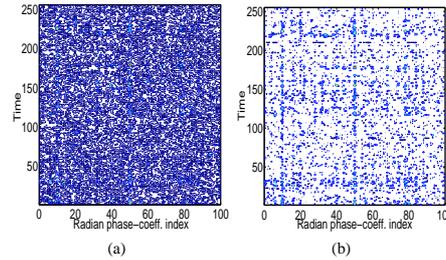


Fig. 4. (a): Capon and (b): MUSIC estimator of two fourth order PPS in α -stable noise with $\alpha = 1.2$ and $\gamma = 1$

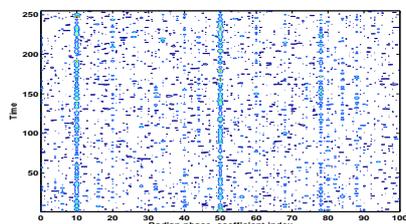


Fig. 5. FLOM-MUSIC estimator for two fourth order PPS in α -stable noise with $\alpha = 1.2$ and $\gamma = 1$

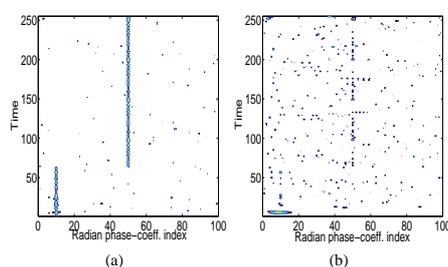


Fig. 6. FLOM-MUSIC for two different values of the filter order (a): $p = 10$, (b): $p = 30$

6. CONCLUSION

In this paper, we reviewed a new time-coefficient representation (TCR) for polynomial phase signals. We proposed to use the MUSIC algorithm to estimate the values of the parameters of the phase of PPS affected by Gaussian noise. From simulation we showed that impulsive noise degrades considerably the TCR as it is the case for time-frequency representation (TFR). In order to attenuate the effect of impulsive noise, we proposed a Fractional Lower Order Moment based MUSIC to estimate these parameters for PPS affected by impulsive α -stable noise. From simulations, we observed that the approaches considered in this paper performed significantly better than the standard algorithms. As perspective, we investigate the choice of the "r" of the covariation matrix when α is unknown.

7. REFERENCES

- [1] S. Barbarossa, A. Scaglione, and G. B. Giannakis, "Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, pp. 691–708, March 1998.
- [2] M. Benidir and A. Ouldali, "Statistical analysis of polynomial phase signals affected by multiplicative and additive noise," *Signal processing*, vol. 78, N1, pp. 19–42, 1999.
- [3] M. Djeddi and M. Benidir, "Robust polynomial wigner-ville distribution for the analysis of polynomial phase signals in alpha-stable noise," *Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP '04*, May 2004.
- [4] V. Katkovnik and L. Stankovic, "High-resolution data-adaptive time-frequency analysis," *9th International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, vol. 3, pp. 1023–1026, Sept. 2002.
- [5] M.T. Özgen, "Extension of the capon's spectral estimator to time-frequency analysis and to the analysis of polynomial-phase signals," *Signal processing*, vol. 83, no. 3, pp. 575–592, March 2003.
- [6] G. Zhou, G. B. Giannakis, and A. Swami, "On polynomial phase signals with time-varying amplitude," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 4, pp. 848–861, Apr. 1996.
- [7] M. Shao and C. L. Nikias, "Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, Issue: 7, pp. 986–1010, July 1993.
- [8] P. Tsakalides and C. L. Nikias, "The robust covariation-based music (roc-music) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 7, pp. 1623–1633, July 1996.
- [9] L. Stanković, V. Popović, and M. Daković, "On the capon's method application in time-frequency analysis," *Proc. of the 3rd IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*, pp. 721–724, Dec. 2003.
- [10] S. M. Kay, "Modern spectral estimation, theory and application," *Prentice-Hall Signal Proc. Series*, 1987.
- [11] Tsung-Hsien Liu and J. M. Mendel, "A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 8, pp. 1605–1633, August 2001.
- [12] A. Swami and B. Sadler, "Tde, doa, and related parameter estimation problems in impulsive noise," *In Proc. IEEE Signal Processing Workshops Higher order Stat.*, no. 4, pp. 848–861, July 1997.

ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF CHIRP SIGNAL IN NON-GAUSSIAN NOISE USING ROBUST EXTENDED KALMAN FILTER

Mounir DJEDDI, Messaoud BENIDIR

Laboratoire des Signaux et Systèmes LSS,
SUPELEC, Université Paris Sud
{djeddi, benidir}@lss.supelec.fr

ABSTRACT

In many fields of engineering such as radar, sonar and telecommunications, the signals processed at the transmitter/receiver are non stationary and can be modelled by constant amplitude polynomial phase signal (PPS) of order 2 or also called chirp signal. Several methods have been proposed for the estimation of the parameters of chirp signals. Most of these methods rely on Maximum likelihood principle (ML), least square estimator (LSE), and time-frequency representations. Most of these methods consider that the additive noise is Gaussian. However, the assumption of Gaussianity is not valid in some other situations such as those involving atmospheric or underwater acoustic noise which displays impulsive characteristics with heavy-tailed distributions which can degrade the signal. In this paper we propose to use a state space representation of chirp signal along with robust extended Kalman filtering algorithm to estimate the parameters of a chirp corrupted by impulsive noise modelled by "ε-contaminated" random process. Through analysis we demonstrate that our algorithm can successfully track the chirp parameters: amplitude, phase as well as the instantaneous frequency. In addition to the fact that the algorithm has a simple implementation.

1. INTRODUCTION

It is well known that the dynamics of the signals or system under consideration can be modelled by state-space (SS) representation, the general problem is then to estimate the unknown state and/or the parameter of the system by using its noisy output measurement observations. In signal processing, a widely used approach to estimate these unknowns is the Kalman filter [1] which is optimal tracking algorithm when the signal models are assumed linear and both state and observation noises are additive Gaussian. When these assumptions do not hold, that is when one has to tackle non linear models, then the Extended Kalman Filter (EKF) [2] is used by considering a local linearization using first order Taylor expansion of the non-linear equations.

Chirp signals (also called polynomial phase signals of order 2) arise in many natural phenomena like seismic and bat echolocation signals, but are mainly known in engineering applications such as in radar, sonar and telecommunication [3]. The estimation of chirp signals is a well known problem in

signal processing community and has received considerable interest in literature. Several methods have been proposed for the estimation of the parameters of chirp signals buried in additive Gaussian noise. Most of these methods rely on Maximum likelihood principle (ML), Least square Estimator (LSE), and time-frequency representation [4]. In [5], the authors considered the estimation of chirp signals in additive/multiplicative non-Gaussian noise using ML and LSE estimators. Many state space representations for modeling chirp signals have been proposed in literature. In [6], the SS model was obtained by incorporating spatial information consisting of the original signal corrupted by Gaussian noise and its delayed version obtained using two sensors, and then the chirp signal parameters were estimated using two EKFs.

In our approach, we consider the exact non linear state-space model for mono-component chirp signal derived in [7], but we consider a non Gaussian noise to obtain a non linear/ non Gaussian SS model. Then, using an EKF with a modified gain we obtain a robust EKF (REKF) for estimating chirp parameters in impulsive environment.

This paper is organized as follows. In section 2, we review the impulsive noise model and state space representation of the constant amplitude chirp signal. Section 3 presents the method for robustifying the EKF to work in impulsive environment. We give some simulation results in section 4. Finally, some conclusions are drawn in section 5.

2. NONLINEAR/NON GAUSSIAN STATE SPACE REPRESENTATION

In this section, we give the SS model of the chirp signal, and review Middleton "ε-contaminated" noise.

We consider a sampled signal $y(n)$ modeled by a constant amplitude chirp signal $z(n)$ embedded in additive noise $v(n)$ as given below

$$y(n) = z(n) + v(n) \quad n = 0, \dots, N \quad (1)$$

where $z(n)$ the constant amplitude chirp signal of the form

$$z(t) = A \cos\{j\phi(n)\} \quad (2)$$

where A is the amplitude of the signal, and ϕ is a deterministic polynomial phase given by

$$\phi(n) = \frac{\alpha}{2}n^2 + \beta n + \gamma \quad (3)$$

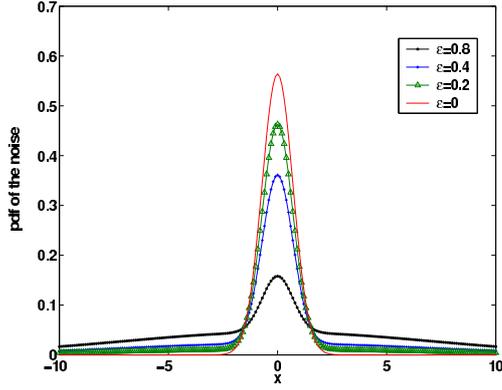


Fig. 1. PDF of Middleton noise for different values of ϵ

The parameters α , β and γ are real coefficients. The noise $v(n)$ is normally assumed Gaussian distributed with variance σ_v^2 . In practice, $v(n)$ might include impulse noise and is given by

$$v(n) = r(n) + i(n) \quad (4)$$

$r(n)$ is an additive Gaussian noise with zero mean and variance σ_r^2 , and $i(n)$ is the impulsive noise which we consider to be a Bernoulli-Gaussian process, i.e. the product of two independent sequences : a Bernoulli process and a Gaussian process

$$i(n) = b(n)g(n) \quad (5)$$

$b(n)$ is the Bernoulli process : an i.i.d. sequence of zeros and ones with $Pr(b(n)) = \epsilon$, and the process $g(n)$ is white Gaussian with zero mean and variance σ_g^2 ($\sigma_g^2 \gg \sigma_r^2$). Typically, the variance ratio (σ_g^2/σ_r^2) is between 100 and 500 [8].

The noise $v(n)$ is rewritten as

$$v(n) = r(n) + b(n)g(n) \quad (6)$$

The probability density function of the noise $v(n)$ is given by

$$P_{v(n)} = (1 - \epsilon)\mathcal{N}(0, \sigma_r^2) + \epsilon\mathcal{N}(0, \sigma_i^2) \quad (7)$$

where $\mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2) \triangleq \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ is the Gaussian density with mean m_x and variance σ_x^2 .

Now, by defining the state vector of dimension 4

$$\mathbf{x}(n) = [A \quad \phi(n) \quad \Delta\phi(n) \quad \Delta^2\phi(n)]^T \quad (8)$$

Here Δ is the finite difference operator defined as follows

$$\Delta\phi(n) = \frac{1}{2}(\phi(n+1) - \phi(n-1)) \quad (9)$$

and

$$\Delta^2\phi(n) = \Delta(\Delta\phi(n)) \quad (10)$$

Then, state equations (1,2) can be written in state-space form

$$\mathbf{x}(n+1) = F\mathbf{x}(n) \quad (11)$$

where

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

From equations (1,2), we can write

$$y(n) = x_1(n) \cos(x_2(n)) + v(n) \quad (13)$$

Hence, the SS model associated with the chirp signal $y(n)$ can be written as a linear state equation and a non-linear observation equation

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= F\mathbf{x}(n) \\ y(n) &= H(\mathbf{x}(n)) + v(n) \end{aligned} \quad (14)$$

where

$$H(\mathbf{x}(n)) = [x_1(n) \cos(x_2(n))] \quad (15)$$

with $x_1(n) = A$ and $x_2(n) = \phi(n)$.

3. ROBUST CHIRP ESTIMATION

Having obtained the non linear state space equation in (14), we can linearize the model around the current estimate of the state using the partial derivatives of the measurement function

$$H(n) = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}(n))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad (16)$$

The new linearized model

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= F\mathbf{x}(n) \\ y(n) &= H(n) \mathbf{x}(n) + v(n) \end{aligned} \quad (17)$$

where

$$H(n) = [\cos(\hat{x}_2) \quad -\hat{x}_1 \sin(\hat{x}_2) \quad 0 \quad 0] \quad (18)$$

The Robust Extended Kalman filter differs from the standard EKF in updating the Kalman gain using a weight function defined by [9]

$$q(\epsilon(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\epsilon(t)| < \tau \\ 0 & \text{if } |\epsilon(t)| \geq \tau \end{cases} \quad (19)$$

The value of the threshold τ is obtained from [10]

$$\epsilon = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}\sigma_e} \right) \quad (20)$$

where σ_e is the standard deviation of the impulsive-free error signal in the Kalman filter and is computed by

$$\hat{\sigma}_e(n+1) = \lambda_e \hat{\sigma}_e(n) + c_1 (1 - \lambda_e) \operatorname{Median}(\Psi(n)) \quad (21)$$

and

$$\Psi(n) = |e^2(n), \dots, e^2(n - N_m + 1)| \quad (22)$$

The constant c_1 is called the finite sample correction factor and is given by [11]

$$c_1 = 1.483 \left(1 + \frac{5}{(N_m - 1)} \right) \quad (23)$$

N_m is the median filter window length which is generally chosen between 5 to 11. For a given value of N_m , the median filter is robust to $N_m/2$ consecutive impulses. The Robust Extended Kalman filter for chirp estimation can be summarized as follows

Initial conditions : $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0, P(0) = \Pi_0$

Computation for $n = 1, 2, 3 \dots$

$$e(n) = y(n) - H(\hat{\mathbf{x}})$$

$$G(n) = q(e(n)) \cdot P(n|n-1) H^T(n) \cdot [H(n)P(n|n-1)H^T(n) + \sigma_v^2 I]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n) = \hat{\mathbf{x}}(n|n-1) + Ge(n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = F\hat{\mathbf{x}}(n|n)$$

$$P(n|n) = \lambda^{-1} [I - G(n)H(n)] P(n|n-1)$$

$$P(n+1|n) = FP(n|n)F^T$$

with $H(n)$ is the linearized version of $H(\mathbf{x}(n))$

4. SIMULATION RESULTS

We consider a chirp signal with parameters $\alpha = 1.25 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.1$, and $\gamma = \frac{\pi}{2}$. The values of ϵ , λ_e , and λ are 0.05, 0.9 and 0.999 respectively. The variances ratio $\sigma_i^2/\sigma_r^2 = 500$, where $\sigma_r^2 = 0.05$. The median filter window $N_m = 8$. Both the EKF and REKF have been initialized by using

$$\mathbf{x}_0 = [0.5 \quad \pi/3 \quad 0 \quad 3.10^{-3}]^T,$$

$$\text{and } \mathbf{P}(0) = \text{diag} [1/2 \quad \pi^2/9 \quad \pi^2/9 \quad 4.3865 \cdot 10^{-6}]$$

The signal amplitude and phase parameters $\theta = [A \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$ are obtained using the following relation [6]

$$\hat{\theta}(n) = AF^{-n}\hat{\mathbf{x}}(n) \quad (24)$$

where the matrix A is a diagonal with elements 1, 1, 1, 0.5. The conventional and robust EKF are compared for the estimation of chirp parameters. The estimates of the amplitude and the chirp coefficients are shown. From figures 3 to 8, we observe that Robust EKF is not affected by the impulses in the chirp signal while the EKF is more sensitive to impulses and yields bad estimates.

The figure 9 shows the mean square error (MSE) for the coefficient α . Here, the SNR is varied with respect to ϵ and is obtained using the total noise variance $(1 - \epsilon)\sigma_r^2 + \epsilon\sigma_i^2$.

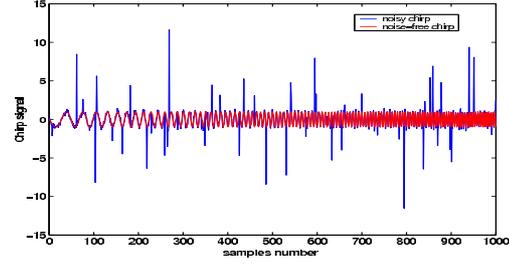


Fig. 2. signal chirp

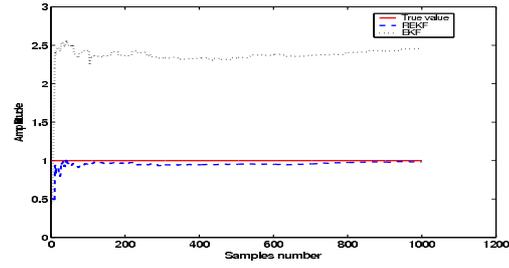


Fig. 3. Chirp signal amplitude estimation

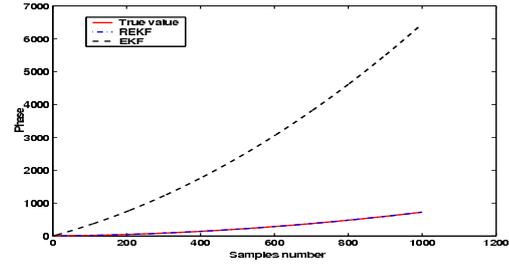


Fig. 4. Chirp signal phase estimation

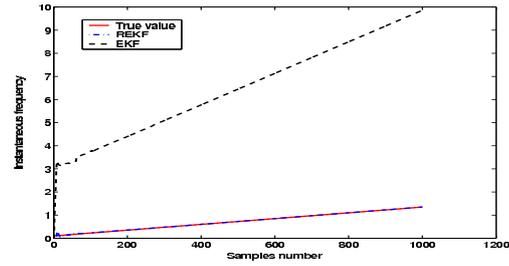


Fig. 5. Chirp signal instantaneous frequency estimation

5. CONCLUSION

In this paper, we addressed the problem of chirp signal parameter estimation in impulsive environment. The signal is given

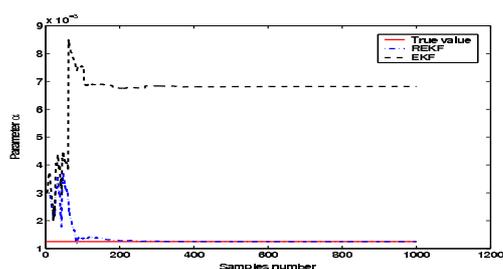


Fig. 6. α parameter estimation

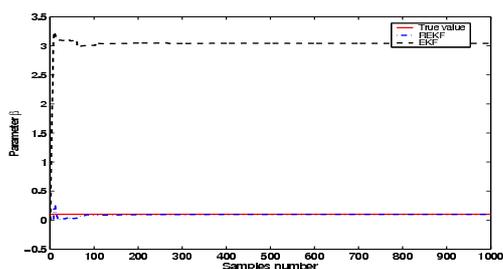


Fig. 7. β parameter estimation

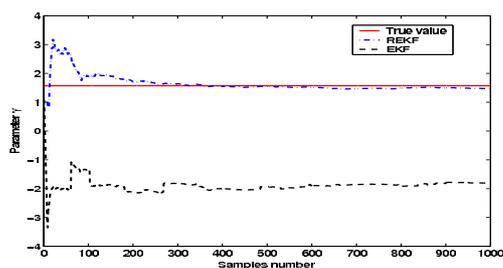


Fig. 8. γ parameter estimation

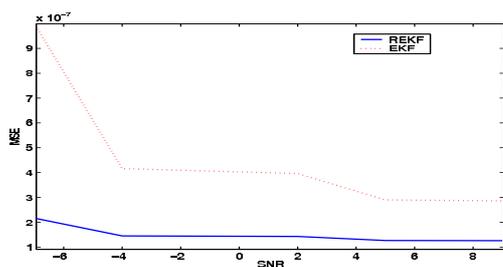


Fig. 9. MSE for α parameter estimation

in a nonlinear state space representation with non Gaussian observation noise generated from the Middleton class A model (ϵ -contaminated noise). We proposed to use the robust Ex-

tended Kalman filter (REKF) for the estimation of the parameters. From simulation results we observed that the REKF is less affected by the impulses and its performance is clearly better than the one of the EKF.

6. REFERENCES

- [1] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering*, pp. 35–46, 1960.
- [2] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, New Jersey, 1979.
- [3] A. Scaglione S. Barbarossa and G. B. Giannakis, "Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, pp. 691–708, March 1998.
- [4] H.-I. Choi and W.J. Williams, "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels," *IEEE Trans. on Acoustics, speech and signal processing*, vol. 37, no. 6, pp. 862–871, June 1989.
- [5] S. Shamsunder and B. Giannakis, "Detection and estimation of chirp signals in non-gaussian noise," *27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 2, pp. 1191–1195, Nov. 1993.
- [6] M. Adjrard, A. Belouchrani, and A. Ouldali, "Estimation of chirp signal parameters using state space modelization by incorporating spatial information," *7th International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, vol. 2, pp. 531–534, July 1-4 2003.
- [7] W.E. Kaakour, M. Guglielmi, J.M. Piasco, and E. Le Carpentier, "Two identification methods of chirp parameters using state space model," *13th International Conference on Digital Signal Processing Proceedings*, vol. 2, pp. 903–906, July 1997.
- [8] D. Zeglache and S.S. Soliman, "Use of the em algorithm in impulsive noise channels," *Vehicular Technology Conference*, pp. 610–615, June 1988.
- [9] C. Y. Fung and S.C. Chan, "Estimation of fast fading channel in impulse noise environment," *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2002.*, vol. 4, pp. IV-497 – IV-500, May 2002.
- [10] Y. Zou, S.C. Chan, and T.S. Ng, "Robust m-estimate adaptive filtering," *IEE Proc. Vision, image and Signal processing*, vol. 7, pp. 289–294, Aug. 2001.
- [11] Y. Zou, S.C. Chan, and T.S. Ng, "A recursive least m-estimate (rlm) adaptive filter for robust filtering in impulsive noise," *IEEE Signal processing letters*, vol. 7, no. 11, pp. 324–326, Nov. 2000.

ROBUST POLYNOMIAL WIGNER-VILLE DISTRIBUTION FOR THE ANALYSIS OF POLYNOMIAL PHASE SIGNALS IN α -STABLE NOISE

Mounir DJEDDI, Messaoud BENIDIR

Laboratoire des signaux et systèmes (L2S)
Supélec, 3 rue Joliot-Curie 91190 Gif-sur-Yvette (France)
Email: {djeddi, benidir} @lss.supelec.fr

ABSTRACT

The polynomial Wigner-Ville Distribution (PWVD) is the most suitable Time-Frequency Representation (TFR) of non-stationary signals which can be modelled by polynomial phase signals. It is a very efficient signal analysis tool both in the case of additive and multiplicative Gaussian noise. However in many real life applications, noise can be non Gaussian. Hence the PWVD fails to produce satisfactory results. On the other hand, it is well known that Fractional Lower-Order Statistics (FLOS) are signal processing tools that tend to resist outliers observed in signals. In this paper, we propose a new robust FLOS-based Polynomial Wigner-Ville Distribution which we call the Fractional Lower-Order Polynomial Wigner-Ville Distribution (FLOPWVD). The latter is able to reveal the instantaneous frequency of the high order polynomial phase signal (PPS) in the presence of impulsive noise modelled by α -stable distribution. This new Time-Frequency Distribution outperforms the standard PWVD as will be shown in simulation results.

1. INTRODUCTION

In many fields of engineering such as radar, sonar and telecommunications, the signals processed at the transmitter/receiver are non stationary and can be modelled by constant amplitude polynomial phase signal (PPS) with constant or slowly time-varying amplitude [1]. In the case of PPS having polynomials of degree less or equal to 2, the Wigner-Ville Distribution (WVD) and its smoothed variants provide the optimal energy concentration about the instantaneous frequency (IF) in the time-frequency plane. However, when the polynomial phase signals have a degree higher than 2, the WVD does not give optimal energy concentration resulting in a smeared spectral representation [2]. Hence, in order to deal with this limitation, The Polynomial Wigner-Ville Distribution (PWVD) has been proposed as an adequate Time-frequency distribution for PPS with degree higher than 2 yielding an optimal energy concentration around the IF [2].

In practice, the signal under consideration may be subjected to additive noise which is generally assumed to be Gaussian. Several papers have considered this case as in [3, 4, 5]. However, the assumption of Gaussianity is not valid in some other situations such as those involving atmospheric or underwater acoustic noise which displays impulsive characteristics [6] with heavy-tailed distributions that degrade significantly the signal representation in the time-frequency plane. Impulsive noise can be modelled by α -stable random process. The fact that α -stable random variables with $\alpha < 2$ have infinite second moment means that many tech-

niques based on the Gaussian case will not apply, and therefore, we must consider other alternatives to mitigate the consequence of the non-Gaussian noise on the time-frequency distribution.

In this paper, we extend the work proposed in [7] to address the problem of the time-frequency representation of polynomial phase signals corrupted by additive impulsive noise using Fractional Lower-Order Statistics (FLOS) introduced in [8] which handle robustly the presence of heavy-tailed noise in the data.

This paper is organized as follows. In section 2, we briefly review the different Time-Frequency Distributions (TFD's) related to analysis of polynomial phase signals. Then in sections 3 and 4, we examine the impulsive noise, its characteristics and effect on TFD's respectively. In section 5, we discuss the different TFD's proposed for non-stationary signals corrupted by additive impulsive noise. And we propose a new Fractional Lower Order based Polynomial Wigner-Ville Distribution (FLOPWVD) for PPS signals of order greater or equal to 2. Some simulation examples are presented in section 6. And concluding remarks are given in Section 7.

2. THE POLYNOMIAL PHASE WIGNER-VILLE DISTRIBUTION

The constant amplitude polynomial phase signal of order p is given by

$$z(t) = A \exp \{j\phi(t)\} = \exp \left\{ j \sum_{i=0}^p a_i t^i \right\} \quad (1)$$

where A is the amplitude of the signal, the a_i 's ($i = 0, \dots, p$) are real coefficients, and $t \in [0, T]$.

The instantaneous frequency (IF) of the signal given in (1) is defined as

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^p i a_i t^{i-1}. \quad (2)$$

It has been shown that for polynomial phase signals of order $p \leq 2$ the WVD has the optimal energy concentration on the time-frequency plane [9]. However when the order p is greater than 2 the WVD exhibits artifacts that alter the IF estimation. In order to effectively overcome this limitation, the polynomial Wigner-Ville distribution for a signal $x(t)$ has been defined by [2]

$$W_x^q(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^q(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3)$$

where the kernel $K_{q,x}(t, \tau)$ is defined as

$$K_x^q(t, \tau) = \prod_{k=0}^{q/2} [x(t + t_k \tau)]^{\gamma_k} [x^*(t + t_{-k} \tau)]^{-\gamma_{-k}} \quad (4)$$

where q is an even integer which corresponds to the order the PWVD with ($q \geq p$). The procedure to compute the coefficients t_k and γ_k for a fixed value of p and q is outlined in [10], [2], and [11]. The PWVD transforms the polynomial phase signal into sinusoids which exhibit delta functions around the signal IF when Fourier transformed. The WVD is a special case of the PWVD which can be obtained when the parameter $q = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = -t_{-1} = 1/2$, $\gamma_0 = 0$, and $\gamma_1 = -\gamma_{-1} = 1$. Note that the realness of the PWVD implies that $t_k = -t_{-k}$. A numerical example given in [11], proposes a sixth-order PWVD kernel yielding artifact-free representation with a small order of interpolation.

3. α STABLE NOISE DISTRIBUTIONS

There exists many physical processes generating interference containing noise components that are impulsive in nature (e.g., atmospheric noise in radio links; and radar reflections from ocean waves [6], and reflections from large, flat surfaces including buildings and vehicles). The amplitude distributions of such returns are not Gaussian, and tend to produce large-amplitude excursions and occasional bursts of outlying observations. A variety of impulsive noise models can be found in literature. The most commonly used so far is the Middleton's model [12]. Recently, a more flexible model has been suggested for impulsive noise known as the α -stable modelling whose distribution is defined by its characteristic function [8]

$$\Psi(t) = \exp\{j\mu t - \gamma |t|^\alpha [1 + j\beta \text{sign}(t)\kappa(t, \alpha)]\} \quad (5)$$

where

$$\kappa(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |t|, & \alpha = 1 \end{cases}$$

The stable distribution is completely characterized by the parameters α ($0 < \alpha \leq 2$) named the characteristic exponent, β : the symmetry parameter (the distribution is symmetric α -stable S α S when $\beta = 0$ as shown in figure 1), γ is the dispersion ($\gamma > 0$), and μ is the location parameter ($-\infty < \mu < \infty$). The characteristic exponent determines the shape of the distribution. The smaller α is, the heavier the tails of the alpha stable density. We should also note that for $\alpha = 2$ the distribution coincides with the Gaussian density. The dispersion parameter γ determines the spread of the distribution around its location parameter μ in the same way that the variance of a Gaussian distribution determines the spread around the mean [8]. For α -stable processes only the moments of order $m < \alpha$ exist. The variance of α -stable random variables is infinite for $\alpha < 2$, and the mean becomes infinite when $\alpha < 1$. Hence, estimation methods based on second order statistics of the data cannot be applied.

4. EFFECT OF IMPULSIVE NOISE ON TIME-FREQUENCY REPRESENTATIONS

Let us consider the noisy signal $x(t)$ given by

$$x(t) = z(t) + \nu(t) \quad (6)$$

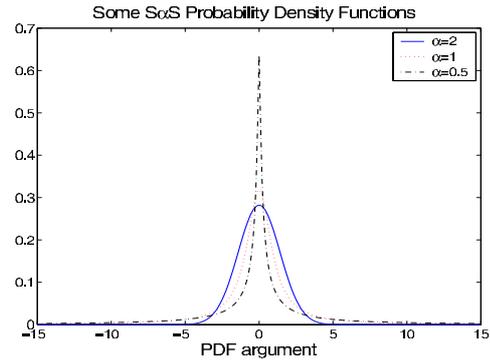


Fig. 1. Symmetric α -stable PDFs with $\mu = 0$, $\gamma = 1$, $\beta = 0$ and different characteristic exponents

where $z(t)$ is a polynomial phase signal defined in (1) and $\nu(t)$ is an S α S noise. The impulsive noise profoundly degrades TFRs, although the type of degradation is dependent on the type of TFRs being used. Additive as well as multiplicative Gaussian noise influence on the Time-frequency distributions has been considered in literature by many authors such as in [3],[4], [5]. However, it is common for these standard distributions (WVD, PWVD,...) to produce poor results in an impulsive noise environment as shown in figure 2.

5. THE FRACTIONAL LOWER-ORDER POLYNOMIAL WIGNER-VILLE DISTRIBUTION

In order to overcome the problem of unbounded moments of signals in the presence of α -stable noise, the authors in [13] introduced the Fractional Lower Order Covariance (FLOC) as a new measure of similarity (or difference) of two α -stable processes. The FLOC is defined by

$$FLOC_x^a(t, \tau) = E\{x^{(a)}(t + \tau/2) x^{-(a)}(t - \tau/2)\} \quad (7)$$

The FLOC has finite mean and variance when $0 < a < \alpha/2$, and $(\cdot)^{(a)}$ is called the a^{th} -order phased fractional lower-order moment (PFLOM) operator defined as [14]

$$x^{(a)} = |x|^{\alpha+1}/x^* \quad \text{with } 0 \leq a \leq 1 \quad (8)$$

$$x^{-(a)} \triangleq (x^*)^{(a)} = (x^{(a)})^* \quad (9)$$

By using equation (7), the authors in [7] defined the Fractional Lower-order Wigner-Ville Distribution (FLOWVD) given by

$$W_x^{(a)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{(a)}(t + \tau/2) x^{-(a)}(t - \tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (10)$$

The fact that FLOWVD is a quadratic TFD, it inherits the same limitations of the WVD in the case of polynomial phase signals of order $p > 2$ as discussed in section 2. Figure 5 shows the FLOWVD for PPS of degree $p = 3$ in α -stable noise with $\alpha = 1$. We propose the Fractional Lower-Order Polynomial WVD (FLOP-WVD) to process polynomial phase signals of order $p > 2$ which

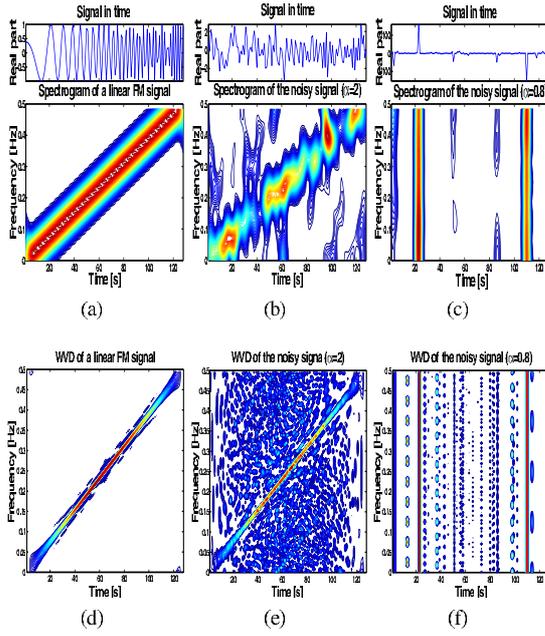


Fig. 2. The effect of α -stable additive noise with different distributions on the spectrogram and Wigner-Ville Distribution

is the generalization of the FLOWVD for non-stationary signals corrupted by alpha stable noise.

Let us, consider the noisy signal $x(t)$ defined in (6). We define the FLOPWVD as

$$W_x^{q,(a)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^{q,(a)}(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (11)$$

where the kernel $K_x^{q,(a)}(t, \tau)$ is given by

$$K_x^{q,(a)}(t, \tau) = \prod_{k=0}^{q/2} [x^{(a)}(t + t_k\tau)]^{\gamma_k} [x^{(a)}(t - t_{-k}\tau)]^{-\gamma_k} \quad (12)$$

where $x^{(a)}$ is defined in (8)-(9), and both parameters t_k, γ_k are obtained in the same way as for the standard PWVD.

The value of the parameter a has to taken such that $0 < a < \alpha/2$, the optimal value is an open field for research. In the following section, we will assess the performance of the FLOPWVD with respect to the standard PWVD and the FLOWVD for the case of a polynomial phase signal of order $p = 3$.

6. SIMULATION RESULTS

In this section, the performance gain when using fractional lower order statistics based PWVD is shown. In our simulation as mentioned in section 2, we used the sixth order PWVD kernel given in [11]

$$K_x^6(t, f) = [x(t + 0.62\tau)x^*(t - 0.62\tau)] \times [x(t + 0.75\tau)x^*(t - 0.75\tau)] \times [x(t - 0.87\tau)x^*(t + 0.87\tau)]. \quad (13)$$

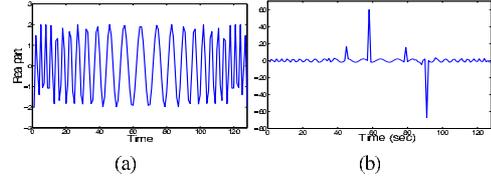


Fig. 3. Time history of (a): a PPS of order $p = 3$, (b): the same signal corrupted by impulsive noise

The used noiseless signal is a PPS of order $p = 3$ given by $z(t) = 2e^{j2\pi(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)}$, where the signal's phase coefficients are given by $a_0 = 0, a_1 = 0.1, a_2 = 0$, and $a_3 = 2.44 \cdot 10^{-5}$.

We consider a symmetric alpha stable noise S α S ($\beta = 0$) with different values of the α parameter. The noisy signal is sampled at $T = 1$ and the number of observations N is chosen equal to 128. The time history of the noiseless and noisy signal respectively are shown in Figure 3.

The first step is to present the PWVD applied to an impulsive noise corrupted signal as shown in Figure 4 where one observes its limitation. Now, by using the Fractional Lower-Order Kernel as given below

$$K_x^{6,(a)}(t, f) = [x^{(a)}(t + 0.62\tau)x^{-(a)}(t - 0.62\tau)] \times [x^{(a)}(t + 0.75\tau)x^{-(a)}(t - 0.75\tau)] \times [x^{(a)}(t - 0.87\tau)x^{-(a)}(t + 0.87\tau)]. \quad (14)$$

We display in figure 6 the result when the new robust polynomial Wigner-Ville distribution is applied to the signal corrupted by Cauchy noise ($\alpha = 1$). Figure 7 shows the FLOPWVD in the case of a signal corrupted by symmetric α -stable noise ($\beta = 0$) with $\alpha = 0.5$. In both cases we took $a = 0.1$ and $\gamma = 0.2$. From figures 6 and 7, one can observe clearly that FLOPWVD performs better than the standard PWVD as well as the FLOWVD.

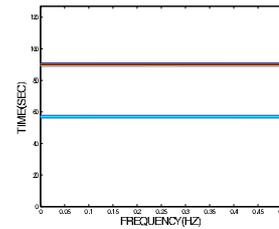


Fig. 4. PWVD of the noisy signal with $\alpha = 0.5$

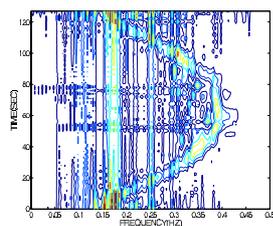


Fig. 5. The FLOWVD of the noisy signal with $\alpha = 1$

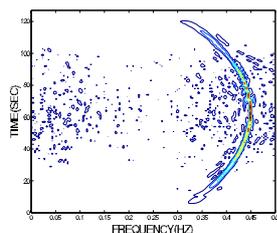


Fig. 6. FLOWVD with $\alpha = 1$

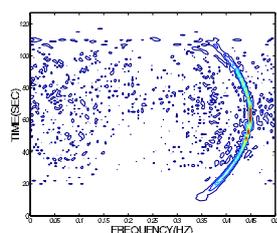


Fig. 7. FLOWVD with $\alpha = 0.5$

7. CONCLUSION

In this paper, we have discussed the effect of additive heavy-tailed noise on the performance of different time-frequency distributions. In particular, we investigated the influence of impulsive noise modelled by α -stable distributions on the WVD and PWVD in the case of polynomial phase signals. The α -stable noise degrades badly the TFDs as shown in simulations. By taking advantage of Fractional Lower-Order Statistics that are known to be robust to impulsive noise robustness, we proposed as an extension to previous works a new Polynomial Wigner-Ville Distribution based on fractional lower order statistics (FLOWVD) for the representation of the IF of a polynomial FM signal of order > 2 embedded in α -stable noise. From simulations, we observed that the approaches considered in this paper performed significantly better than the standard PWVD.

8. REFERENCES

[1] S. Barbarossa, A. Scaglione, and G. B. Giannakis, "Product high-order ambiguity function for multicomponent

polynomial-phase signal modeling," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, pp. 691–708, March 1998.

- [2] B. Boashash and P. O'Shea, "Polynomial wigner-ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, Issue: 1, pp. 216–220, January 1994.
- [3] B. Barkat, "If estimation of higher-order polynomial fm signals corrupted by multiplicative and additive noise," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '01)*, vol. 6, pp. 3561–3564, 2001.
- [4] A. Ould-Ali and M. Benidir, "Statistical analysis of polynomial phase signals affected by multiplicative and additive noise," *Signal processing*, vol. 78, N1, pp. 19–42, 1999.
- [5] I. Djurovic and L. Stankovic, "Influence of high noise on the instantaneous frequency estimation using quadratic time-frequency distributions," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, Issue: 11, pp. 317–319, Nov 2000.
- [6] D. Middleton, "Channel modelling and threshold signal processing in under-water acoustics: An analytical overview," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. OE-12, pp. 4–28, 1987.
- [7] D. W. Griffith Jr, J. G. Gonzalez, and G. R. Arce, "Robust time-frequency representations for signals in stable noise using fractional lower-order statistics," *Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, pp. 415–419, July 1997.
- [8] M. Shao and C.L. Nikias, "Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, Issue: 7, pp. 986–1010, July 1993.
- [9] B. Boashash, "Time-frequency signal analysis," in *Advances in Spectral Estimation and Array Processing (S. Haykin, Ed.)*, vol. 1, pp. 418–517, 1991.
- [10] M. Benidir and A. Ouldali, "Polynomial phase signal analysis based on the polynomial derivatives decompositions," *Signal processing*, vol. 47, N7, pp. 1954–1956, 1999.
- [11] B. Barkat and B. Boashash, "Design of higher order polynomial wigner-ville distributions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, NO. 9, pp. 2608–2611, September 1999.
- [12] D. Middleton, "Statistical physical models of electromagnetic interference," *IEEE Transactions on Electromagn. Compat.*, vol. EMC-19, pp. 106–127, August 1977.
- [13] X. Ma and C.L. Nikias, "Joint estimation of time delay and frequency delay in impulsive noise using fractional lower order statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44 Issue: 11, pp. 2669–2687, November 1996.
- [14] G.A. Tsihrintzis, U. Tureli, and C.L. Nikias, "Fractional lower-order statistics-based ambiguity functions for differential delay doppler estimation," *IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation*, vol. 143 Issue: 6, pp. 358–365, December 1996.

Références bibliographiques

- [1] M. Benidir A. Ouldali. Statistical analysis of polynomial phase signals affected by multiplicative and additive noise. *Signal Processing*, 78(1) :19–42, 1999.
- [2] E. Abreu, M. Lightstone, S. K. Mitra, and K. Arakawa. A new efficient approach for the removal of impulse noise from highly corrupted images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(6) :1012–1025, June 1996.
- [3] M. Adjrad, A. Belouchrani, and K. Abed-Meraim. Parameter estimation of multicomponent polynomial-phase signals impinging on a multi-sensor array using extended Kalman filter. *ISSPIT 2003*, pages 471–474, 2003.
- [4] M. Adjrad, A. Belouchrani, and A. Ouldali. Estimation of chirp signal parameters using state space modelization by incorporating spatial information. *7th International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, 2 :531 –534, July 2003.
- [5] D. Alspach and H. Sorenson. Nonlinear bayesian estimation using Gaussian sum approximations. 17 :439 –448, Aug. 1972.
- [6] R. Amara. *Egalisation de canaux linéaires et non linéaire : approche bayésienne*. PhD thesis, Université de Paris Sud, Orsay, 2001.
- [7] D. F. Andrews and C. L. Mallows. Scale mixtures of normals distributions. *Journal of the royal statistical society*, 36 :99–102, 1974.
- [8] J. Angeby. Estimating signal parameters using the nonlinear instantaneous least squares approach. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(10) :2721–2732, 2000.
- [9] L. Angrisani and M. D’Arco. A measurement method based on a modified version of the chirplet transform for instantaneous frequency estimation. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 51(4) :704–711, Aug. 2002.
- [10] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian bayesian tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(2) :174–188, Feb. 2002.

- [11] S. Aviyente. Divergence measures for time-frequency distributions. *Proc. Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, 1 :121–124, 2003.
- [12] S. Aviyente, L.A.W. Brakel, R. K. Kushwaha, M. Snodgrass, H. Shevrin, W. J., and Williams. Characterization of event related potentials using information theoretic distance measures. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 51(5) :737–743, 2004.
- [13] A. Banerjee and R. Chellappa. Tumor detection in digital mammograms. *International Conference on Image Processing*, 3 :432–435, Sept. 2000.
- [14] R. G. Baraniuk, P. Flandrin, A.J.E.M. Janssen, and O.J.J. Michel. Measuring time-frequency information content using the renyi entropies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(4) :1391–1409, 2001.
- [15] B. Barkat and B. Boashash. Design of higher order polynomial Wigner-Ville distributions. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47, NO. 9 :2608–2611, Sept. 1999.
- [16] B. Barkat and B. Boashash. Instantaneous frequency estimation of polynomial fm signals using the peak of the pwvd : statistical performance in the presence of additive gaussian noise. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(9) :2480–2490, Sept. 1999.
- [17] B. Barkat and B. Boashash. A high-resolution quadratic time-frequency distribution for multicomponent signals analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(10) :2232–2239, Oct. 2001.
- [18] B. Barkat and L.J. Stankovic. Robust pwvd for the analysis of polynomial fm signals in non-Gaussian noise. *9th International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, 3 :1007–1010, Sept. 2002.
- [19] M. Benidir. *Théorie et traitement du signal, 2. Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal*. Dunod, 2004.
- [20] M. Benidir and A. Ouldali. Polynomial phase signal analysis based on the polynomial derivatives decompositions. *Signal Processing*, 47(7) :1954–1956, 1999.
- [21] O. Besson and F. Castanié. On estimating the frequency of a sinusoid in autoregressive multiplicative noise. *Signal Processing*, 30 :65–83, 1993.
- [22] O. Besson, M. Ghogho, and A. Swami. Parameter estimation for random amplitude chirp signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(12) :3208–3219, 1999.
- [23] A. Bestavros, M. Crovella, and M. Taqqu. Heavy tailed probability distributions in the world wide web. In *Adler, Feldman and Taqqu (Eds.), A practical guide to heavy tails*, pages 3–25, 1998.
- [24] B. Boashash. *Time-frequency signal analysis*, volume 1. Prentice Hall, S. Haykin edition, 1991.

- [25] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. II. Algorithms and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80(4) :540–568, 1992.
- [26] B. Boashash and P. O’Shea. Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(1) :216–220, Jan. 1994.
- [27] B. Boashash and B. Ristich. Time-varying higher order spectra and the reduced Wigner trispectrum. *Processings of SPIE*, 1770 :268–280, 1992.
- [28] B. Boashash and B. Ristich. The Wigner-Ville trispectrum : definition and application. *IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, pages 260–264, 1993.
- [29] B. Boashash, L. White, and J. Imberger. Wigner-Ville analysis of non-stationary random signals. *Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP ’86*, 11 :2323–2326, 1986.
- [30] J. S. Bodenschatz and C. L. Nikias. Maximum-likelihood symmetric alpha-stable parameter estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(5) :1382–1384, May 1999.
- [31] G.E.P. Box and M. E. Muller. A note on the generation of random normal deviates. *Ann. Math. Stat.*, 29 :610–611, 1958.
- [32] J. M. Chambers, C. L. Mallows, and B. W. Stuck. A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354) :340–344, 1976.
- [33] S. C. Chan and Y. Zou. A recursive least M-estimate algorithm for robust adaptive filtering in impulsive noise : fast algorithm and convergence performance analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 52(4) :975–991, April 2004.
- [34] Choi and Williams. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(6) :862–871, 1989.
- [35] I. Cohen, S. Raz, and D. Malah. Adaptive suppression of Wigner interference-terms using shift-invariant wavelet packet decompositions. *Signal Processing*, 73(3) :203–223, 1999.
- [36] L. Cohen. Time-frequency distribution- a review. *Proceedings of the IEEE*, 77 :941–967, 1989.
- [37] M. Coulon and J-Y. Tournet. Multiple frequency estimation in additive and multiplicative colored noises. *ICASSP ’99*, 3 :1573–1576, 1999.
- [38] I. Csizar. Information-type distance measures and indirect observations. *Stu. Sci. Math. Hungar.*, 2 :299–318, 1967.
- [39] L. d’Estampes. *Traitement statistiques des processus alpha-stables, mesures de dependence et identification des AR stables, tests sequentiels tronqués*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Octobre 2003.

- [40] M. Djeddi, H. Belkacemi, M. Benidir, and S. Marcos. A robust MUSIC estimator for polynomial phase signals in alpha-stable noise. *Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP '05*, March 2005.
- [41] M. Djeddi and M. Benidir. Robust polynomial wigner-ville distribution for the analysis of polynomial phase signals in alpha-stable noise. *Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP '04*, 2 :613–3616, May 2004.
- [42] M. Djeddi and M. Benidir. Estimation of the parameters of chirp signal in non-gaussian noise using robust extended kalman filter. *Physics in Signal and Image Processing Conference PSIP*, pages 61–64, Jan. 2005.
- [43] M. Djeddi and M. Benidir. A two parallel extended Kalman filtering algorithm for the estimation of chirp signals in non-Gaussian noise. *European Signal Processing Conference - EUSIPCO '05*, Sept. 2005.
- [44] P. M. Djuric and E. M. Kay. Parameter estimation of chirp signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 38(12) :2118 – 2126, 1990.
- [45] I. Djurovic, V. Katkovnik, and L. Stankovic. Instantaneous frequency estimation based on the robust spectrogram. *Proceedings of ICASSP*, 6 :3517–3520, May 2001.
- [46] I. Djurovic and L. Stankoic. Influence of high noise on the instantaneous frequency estimation using quadratic time-frequency distributions. *IEEE Signal Processing Letters*, 7(11) :317–319, Nov. 2000.
- [47] S. E. El-Khamy, S. E. Shaaban, and E. A. Tabet. new efficient chirp modulation technique for multi-user access communications systems. *IEEE 4th International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications Proceedings*, 3 :1209–1213, Sept. 1996.
- [48] S. E. El-Khamy, S. E. Shaaban, and E. A. Tabet. Frequency-hopped multi-user chirp modulation (fh/m-cm) for multipath fading channels. *Proceedings of the Sixteenth National Radio Science Conference, NRSC*, 3 :C6/1 – C6/8, Feb. 1999.
- [49] Z. Faraj. *Etude et analyse des signaux a phase polynomiale. Application au traitement des telemesures spatiales*. PhD thesis, INP, Toulouse, 1992.
- [50] P. Flandrin. *Temps-fréquence*. Collection Traitement du Signal. Hermes, 1998.
- [51] B. Friedlander and J. Francos. Estimation of amplitude and phase parameters of multi-component signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(4) :917–926, 1995.
- [52] C. Y. Fung and S. C. Chan. Estimation of fast fading channel in impulse noise environment. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS*, 4 :IV–497 – IV–500, May 2002.

- [53] D. Gabor. Theory of communication. *Proc. IEE*, 93 :429–457, 1946.
- [54] M. Ghogho. Second-order statistics versus hos for the estimation of harmonics in additive and multiplicative noise. *Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, 3 :122–126, 1997.
- [55] F. Gini, M. Montanari, and L. Verrazzani. Estimation of chirp radar signals in compound-Gaussian clutter : a cyclostationary approach. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(4) :1029–1039, 2000.
- [56] S. Golde and B. Friedlander. A modification of the discrete polynomial transform. *Trans. on Signal Processing*, 46(5) :1452–1955, May 1998.
- [57] Z. Guo, L-G. Durand, and H. C. Lee. The time-frequency distributions of nonstationary signals based on Bessel kernel. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(7) :1700–1707, 1990.
- [58] Z. Guo, L-G. Durand, and H. C. Lee. The time-frequency distributions of nonstationary signals based on a bessel kernel. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(7) :1700 – 1707, 1994.
- [59] L. J. Hadjileontiadis and S. M. Panas. On modeling impulsive bioacoustic signals with symmetric a-stable distributions : application in discontinuous adventitious lung sounds and explosive bowel sounds. *Proceedings of the 20th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 1 :13–16, Nov. 1998.
- [60] P. J. Huber. *Robust statistics*. Wiley, 1981.
- [61] R. L. Hudson. When is Wigner quasi-probability density is non-negative? *Rep. Math. Phys.*, 6 :249–252, 1974.
- [62] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(5) :910–927, 2000.
- [63] D. W. Griffith Jr, J. G. Gonzalez, and G. R. Arce. Robust time-frequency representations for signals in stable noise using fractional lower-order statistics. *Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, pages 415–419, Jul. 1997.
- [64] Y. Ju and B. Barkat. New efficient chirp modulation technique for multi-user access communications systems. *Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP '04*, 4 :937–940, May 2004.
- [65] Julier and J.K. Uhlmann. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *In Proc. of AeroSene : 11th Int. Symp. on Aerospace defence sensing, simulation and controls*, 1997.

- [66] W. E. Kaakour, M. Guglielmi, J. M. Piasco, and E. Le Carpentier. Two identification methods of chirp parameters using state space model. *13th International Conference on Digital Signal Processing Proceedings*, 2 :903–906, July 1997.
- [67] W. El Kaakour. *Modélisation et identification des signaux à phase polynomiale*. PhD thesis, Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes, Juin 1998.
- [68] A. Karasaridis and D. Hatzinakos. Network heavy traffic modeling using alpha-stable self-similar processes. *IEEE Trans. on Communications*, 49(7) :1203–1214, 2001.
- [69] V. Katkovnik. Robust M-periodogram. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 46(11) :3104–3109, Nov. 1998.
- [70] V. Katkovnik, I. Djurovic, and L. Stankovic. Robust time-frequency distributions. *Sixth International Symposium on Signal Processing and its Applications*, 1 :156–157, Aug. 2001.
- [71] V. Katkovnik, I. Djurovic, and L. Stankovic. Time-frequency analysis : robust time-frequency representations. *Prentice Hall*, May 2002.
- [72] A. Kocian and D. Dahlhaus. Downlink performance analysis of a cdma mobile radio system with chirp modulation. *Vehicular Technology Conference*, 1 :238–242, May 1999.
- [73] P. J. Kootsookos and J. M. Spanjaard. An extended Kalman filter for demodulation of polynomial phase signals. *IEEE Signal Processing Letters*, 5(3) :69–70, March 1998.
- [74] R. J. Koziak and B. M. Sadler. Robust subspace estimation in non-Gaussian noise. *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, 6(12) :3818–3821, June 2000.
- [75] E. Engin Kuruoglu. *Signal Processing in Alpha-stable Noise Environments : A Least Lp-Norm Approach*. PhD thesis, Signal Processing and Communications Laboratory, Department of engineering, University of Cambridge, Nov. 1998.
- [76] T-H. Liu and J. M. Mendel. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(8) :1605–1633, August 2001.
- [77] I. Djurovic LJ. Stankovic and S. Stankovic. The robust Wigner distribution. *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, 1 :77–80, June 2000.
- [78] N. MARTIN F.LEONARD M. JABLOUN, M. VIEIRA. Local orthonormal decomposition for both instantaneous amplitude and frequency of highly non-stationary discrete signals. *IMA 2004, Mathematics in Signal Processing VI*, pages 107–110, December 2004.
- [79] N. MARTIN F.LEONARD M. JABLOUN, M. VIEIRA. A am/fm single component signal reconstruction using a nonsequential time segmentation and polynomial modeling.

- International Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP2005)*, pages 1012–1025, May 2005.
- [80] X. Ma and C. L. Nikias. Parameter estimation and blind channel identification in impulsive signal environments. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(12) :2884–2897, Dec. 1995.
- [81] X. Ma and C. L. Nikias. Joint estimation of time delay and frequency delay in impulsive noise using fractional lower order statistics. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(11) :2669–2687, Nov. 1996.
- [82] B. Mandelbrot. Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de paul lévy. *Comptes-rendus à l'Académie des sciences*, 254 :3968–3970, 1962.
- [83] S. Marcos. A network of adaptive Kalman filters for data channel equalization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(9) :2620–2627, Sept. 2000.
- [84] S. Marcos, A. Marsal, and M. Benidir. The propagator method for source bearing estimation. *Signal Processing*, 42 :121–138, 1994.
- [85] H. Margenau and R. N. Hill. Correlation between measurements in quantum theory. *Prog. Theo. Phys.*, 26 :722–738, 1961.
- [86] O. Michel, R. G. Baraniuk, and P. Flandrin. Time-frequency based distance and divergence measures. *Proc. of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, 3 :64–67, 1994.
- [87] D. Middleton. Statistical-physical models of electromagnetic interference. *IEEE Trans. Electromagnetic compatibility*, 19 :106–127, 1977.
- [88] D. Middleton. Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications : New methods and results for class a and b noise models. *IEEE Trans. on Information Theory*, 45(4) :1129–1149, May 1999.
- [89] M. R. Morelande, B. Barkat, and A. M. Zoubir. Statistical performance comparison of a parametric and a non-parametric method for if estimation of random amplitude linear fm signals in additive noise. *Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pages 262–266, Aug. 2000.
- [90] S. V. Narasimhan and M. B. Nayak. Improved Wigner Ville distribution performance by signal decomposition and modified group delay. *Signal Processing*, 83(12) :2523–2538, 2003.
- [91] C. L. Nikias and M. Shao. *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. John Wiley and Sons, 1995.

- [92] N. Oudjane. *Stabilité et approximations particulières en filtrage Non Linéaire, Application au pistage*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Dec. 2000.
- [93] A. Ouldali. *Approches pour l'analyse des signaux à phase polynomiale, effets d'un bruit multiplicatif et d'une amplitude variable*. PhD thesis, Université Paris Sud, Orsay, 1999.
- [94] A. Ouldali and M. Benidir. Distinction between polynomial phase signals with constant amplitude and random amplitude. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 5 :3653–3656, April 1997.
- [95] M. T. Özgen. Extension of the Capon's spectral estimator to time-frequency analysis and to the analysis of polynomial-phase signals. *Signal Processing*, 83(3) :575–592, March 2003.
- [96] C. H. Page. Instantaneous power spectra. *J. appl. Phys.*, 23 :103–106, 1952.
- [97] P. J. Parker and B.D.O. Anderson. Frequency tracking of nonsinusoidal periodic signals in noise. *Signal Processing*, 20 :127–152, 1990.
- [98] S. Peleg and B. Friedlander. The discrete polynomial-phase transform. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43 :1901–1914, Aug. 1995.
- [99] S. Peleg and B. Porat. Estimation and classification of polynomial phase signals. *IEEE Trans. on Information Theory*, 37 :422–430, March 1991.
- [100] J. M Piasco, M. Guglielmi, and L. Durou. Identification de chirps par filtrage de Kalman étendu. *GRETSI*, pages 29–32, 13-16 September 1993.
- [101] J. M. Piasco, W. El Kaakour, and M. Guglielmi. Identification paramétrique de différents modèles d'un signal m.f.l. multicomposantes. *GRETSI*, pages 193–196, 18-21 September 1995.
- [102] S. Qian and J. M. Morris. Wigner distribution decomposition and cross-terms deleted representation. *Signal Processing*, 27(2) :125–144, 1992.
- [103] A. Quinquis, C. Ioana, and E. Radoi. Polynomial phase signal modeling using warping-based order reduction. *ICASSP '04*, 2 :ii-741–4, 2004.
- [104] A. Rényi. On measures of entropy and information. *in Proc. 4th Berkeley Symp. Mathematics of Statistics and Probability*, 1 :547–561, 1961.
- [105] W. Rihaczek. Signal energy distribution in time and frequency. *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-14(4) :369–374, 1968.
- [106] M. Sahamoudi. *Processus alpha-stables pour la séparation et l'estimation robustes des signaux non-gaussien et/ou non-stationnaires*. PhD thesis, Université Paris Sud, Décembre 2004.

- [107] S. Saliu, D. Poci, and N. Edvardsson. Parametric time-domain measures of long-term heart rate variability signal. *Proceedings of the 23rd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2 :1929–1932, Oct. 2001.
- [108] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable non Gaussian random processes, stochastic models with infinite variance*. Stochastic modeling. Chapman and Hall, 2000.
- [109] B. Sayadi. *Detection multi-utilisateurs par réseau de filtre de Kalman parallèles pour les systèmes AMRC*. PhD thesis, Université Paris Sud, Orsay, Décembre 2003.
- [110] R. A. Scheper and A. Teolis. Cramer-rao bounds for wavelet transform-based instantaneous frequency estimates. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(6) :1593–1603, June 2003.
- [111] S. Shamsunder, G. B. Giannakis, and B. Friedlander. Detection and estimation of chirp signals in non-Gaussian noise. *The Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2 :1191–1195, 1993.
- [112] S. Shamsunder, G. B. Giannakis, and B. Friedlander. Estimating random amplitude polynomial phase signals : a cyclostationary approach. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(2) :492–505, 1995.
- [113] C. E. Shannon. On measures of entropy and information. *Bell Syst. Tech. J.*, 27 :379–423, 1948.
- [114] M. Shao and C. L. Nikias. Detection and adaptive estimation of stable processes with fractional lower-order moments. *Conference on Statistical Signal and Array Processing*, pages 94–97, Oct. 1992.
- [115] M. Shao and C. L. Nikias. Signal processing with fractional lower order moments : stable processes and their applications. *Proceedings of the IEEE*, 81(7) :986–1010, July 1993.
- [116] D. L. Snyder. The state-variable approach to continuous estimation with applications to analog communications theory. *M.I.T. Press. Boston, Massachusetts*, 1969.
- [117] A. D. Spaulding and D. Middleton. Optimum reception in an impulsive interference environment - part I : Coherent detection. *IEEE Trans. on Communications*, 25(9) :910–923, Sept. 1977.
- [118] A. D. Spaulding and D. Middleton. Optimum reception in an impulsive interference environment - part II : Coherent detection. *IEEE Trans. on Communications*, 25(9) :910–923, Sept. 1977.
- [119] L. Stankovic, V. Popovic, and M. Dakovic. On the Capons method application in time-frequency analysis. *Proceedings of the 3rd IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*, pages 721–724, Dec. 2003.

- [120] B. W. Stuck and B. Kleiner. A statistical analysis of telephone noise. *Bell Systems Technical Journal*, 53(7) :1263–1320, Aug. 1974.
- [121] P. Tsakalides and C. L. Nikias. The robust covariation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(7) :1623–1633, July 1996.
- [122] P. Tsakalides and C. L. Nikias. Robust space-time adaptive processing (STAP) in non-Gaussian clutter environments. *IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation*, 146(2) :84–93, April 1999.
- [123] P. Tsakalides and C.L. Nikias. Maximum likelihood localization of sources in noise modeled as a stable process. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(11) :2700–2713, Nov. 1995.
- [124] P. Tsakalides, R. Raspanti, and C. L. Nikias. Angle/doppler estimation in heavy-tailed clutter backgrounds. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 35(2) :419–436, April 1999.
- [125] G. A. Tsihrintzis and C. L. Nikias. Performance of optimum and suboptimum receivers in the presence of impulsive noise modeled as an alpha-stable process. *IEEE Trans. on Communications*, 43(2-4 Pt2) :904–914, April 1995.
- [126] G. A. Tsihrintzis and C. L. Nikias. Fast estimation of the parameters of alpha-stable impulsive interference. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(6) :1492–1503, June 1996.
- [127] G. A. Tsihrintzis, P. Tsakalides, and C. L. Nikias. Signal detection in severely heavy-tailed radar clutter. *The Twenty-Ninth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2 :865–869, 1995.
- [128] G. A. Tsihrintzis, U. Tureli, and C. L. Nikias. Fractional lower-order statistics-based ambiguity functions for differential delay doppler estimation. *IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation*, 143(6) :358–365, Dec. 1996.
- [129] M. VIEIRA, F. LEONARD, M. JABLOUN, and N. MARTIN. short time single polynomial phase signal using legendre function. *European Signal Processing Conference, EUSIPCO*, pages 793–796, September 2004.
- [130] J. Ville. Théorie et application de la notion de signal analytique. *Cables et Transmissions*, 1 :61–74, 1948.
- [131] E. A. Wan and R. Van Der Merwe. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pages 153–158, Oct. 2000.
- [132] Y. Wang and G. Zhou. On the use of high order ambiguity function for multicomponent polynomial phase signal. *Proc. ICASSP*, 5 :3629–3632, April 1997.

-
- [133] E. Wigner. On the quantum correction for the thermodynamics equilibrium. *Physics review*, 40 :749–759, 1932.
- [134] J. Xu, L. G. Durand, and P. Pibarot. Nonlinear transient chirp signal modeling of the aortic and pulmonary components of the second heart sound. *Signal Processing*, 47(10) :1328–1335, 2000.
- [135] D. Zeglache and S. S. Soliman. Use of the EM algorithm in impulsive noise channels. *Vehicular Technology Conference*, pages 610–615, 1988.
- [136] Y. Zhao, L. E. Atlas, and R. J. Marks. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38 :1084–1901, 1990.
- [137] G. Zhou, G. B. Giannakis, and A. Swami. On polynomial phase signals with time-varying amplitudes. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(4) :848–861, April 1996.
- [138] Y. Zou, S. C. Chan, and T. S. Ng. A recursive least M-estimate (RLM) adaptive filter for robust filtering in impulsive noise. *IEEE Signal Processing Letters*, 7(11) :324 – 326, Nov. 2000.