



HAL
open science

Etude d'automates et de grammaires de ramifications

Pierre Berlioux

► **To cite this version:**

Pierre Berlioux. Etude d'automates et de grammaires de ramifications. Génie logiciel [cs.SE]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1972. Français. NNT: . tel-00010368

HAL Id: tel-00010368

<https://theses.hal.science/tel-00010368>

Submitted on 3 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

TU 689

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
Spécialité "Informatique"

par

Pierre BERLIOUX



*Etude d'automates et
de grammaires de ramifications*

Thèse soutenue le 1^{er} Juillet 1972, devant la Commission d'Examen :

Monsieur	J. KUNTZMANN	Président
Messieurs	C. PAIR	
	J. ROUAULT	Examineurs
	G. VEILLON	

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
ARNAUD Paul	Chimie
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BEZES Henri	Chirurgie générale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BRAVARD Yves	Géographie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
CALAS François	Anatomie
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
CHATEAU Robert	Thérapeutique
CHENE Marcel	Chimie papetière
COEUR André	Pharmacie chimique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
CRAYA Antoine	Mécanique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
FELICI Noël	Electrostatique
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM. GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAÏN Alice	Pharmacie galénique
M. VERAÏN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. BULLEMER Bernhard	Physique
RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. AUBERT Guy	Physique
BEAUDOING André	Pédiatrie
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
BIARES Jean-Pierre	Mécanique
BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme BONNIER Jane	Chimie générale
MM. CARLIER Georges	Biologie végétale
COHEN Joseph	Electrotechnique
COUMES André	Radioélectricité
DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENAT René	Chimie organique
HACQUES Gérard	Calcul numérique
JANIN Bernard	Géographie
Mme KAHANE Josette	Physique
MM. MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
REVOL Michel	Urologie
REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
ROBERT André	Chimie papetière
SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SIBILLE Robert	Construction Mécanique
SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme SOUTIF Jeanne	Physique générale
M. VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. AMBLARD Pierre	Dermatologie
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
ARMAND Yves	Chimie
BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM. BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRIERE Georges	Physique expérimentale
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM. CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline.	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie Organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

Je tiens à remercier

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury

Monsieur C. PAIR, Professeur à l'Institut Universitaire de Technologie de Nancy, qui s'est intéressé à mon travail et dont les critiques m'ont été utiles

Monsieur J. ROUAULT, Maître de Conférences à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, qui a accepté de faire partie du jury

Monsieur G. VEILLON, Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, avec qui j'ai travaillé

Je voudrais aussi remercier les personnes du Secrétariat et du service de Tirage, qui ont assuré la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 0 - RAPPELS SUR LA THEORIE DES LANGAGES	3
1. Monoïde	3
2. Monoïde libre engendré par un ensemble fini	3
3. Grammaire	3
4. Langages d'états finis	4
5. Langages hors contexte	5
6. Langages sous-contexte	6
CHAPITRE 1 - DEFINITIONS ET PROPRIETES DES RAMIFICATIONS	7
1. Définition par la théorie des graphes	7
2. Définition algébrique	13
3. Opérations sur les ramifications	20
CHAPITRE 2 - RECONNAISSANCE DE BILANGAGES	25
1. Définition des automates de ramifications réguliers	25
2. Automates de ramifications réguliers non déterministes	37
3. Automates de ramifications conservant un renseignement supplémentaire	41
4. Automates de ramifications réguliers inversés	51
5. Automates de ramifications réguliers préfixés et préfixés inversés	60
CHAPITRE 3 - GENERATION DE BILANGAGES	62
1. Définition et propriétés des grammaires de rami- fications régulières	62
2. Equivalence des grammaires de ramifications régulières et des automates de ramifications réguliers	76
3. Application aux systèmes combinatoires	84

CHAPITRE 4 - PROBLEMES DE DECISION POUR LES BILANGAGES REGULIERS	88
1. Effectivité des définitions des bilangages réguliers .	88
2. Théorème	89
3. Problèmes de décisions pour les bilangages réguliers .	95
CHAPITRE 5 - TRANSDUCTION DE RAMIFICATIONS	101
1. Introduction	101
2. Transducteurs de ramifications postfixés	102
3. Transducteurs de ramifications postfixés inversés	106
4. Transducteurs simples	107
5. Transducteurs à greffe	110
CONCLUSION	112
BIBLIOGRAPHIE	113

INTRODUCTION

On est conduit dans certains domaines de traitement de l'information comme la compilation des langages de programmation et la traduction automatique des langues naturelles, à manipuler des structures arborescentes.

Cette notion de structure arborescente a été formalisée par PAIR et QUERE [Pa,Qu] sous le nom de ramification. Cette formalisation permet de traiter algébriquement les structures arborescentes.

Il est intéressant alors de reprendre pour le **traitement** des ramifications ce qui a été fait en théorie des langages pour le traitement des chaînes de caractères, c'est-à-dire de définir des systèmes de reconnaissance, de génération et de transduction d'ensembles de ramifications, appelés bilangages par PAIR et QUERE.

Des études ont été consacrées à la reconnaissance des bilangages par THATCHER [Th1, TW], DONER [Do], ARBIB [Ar], à la génération des bilangages par BRAINERD [Br], à la transduction par ROUNDS [Ro], THATCHER [Th2]. Toutes ces études considèrent des ramifications sur un vocabulaire stratifié ⁽¹⁾. Or on ne peut pas toujours plaquer de façon naturelle une stratification sur le vocabulaire des ramifications traitées.

Les systèmes étudiés ici sont différents et s'appuient sur la définition des ramifications de PAIR et QUERE.

(1) Un vocabulaire stratifié est un couple $\langle A, \sigma \rangle$, où A est un ensemble fini, et $\sigma : A \rightarrow N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Soit $A_n = \sigma^{-1}(n)$. t est un arbre sur $\langle A, \sigma \rangle$ si et seulement si $t = a \in A_0$ ou $t = a t_1 t_2 \dots t_n$, avec $a \in A_n$ et t_1, \dots, t_n sont des arbres sur $\langle A, \sigma \rangle$. Les arbres ainsi définis sont des ramifications particulières. Pour pouvoir traiter les ramifications en général, il faut définir σ comme une relation, éventuellement infinie, sur $A \times N$. C'est ce qui a été fait par THATCHER et ARBIB [Th1, Ar].

Les chapitres 0 et 1 sont des rappels sur la théorie des langages et sur les définitions des ramifications.

Au chapitre 2 sont étudiés des automates reconnaissant les bilangages réguliers définis algèbriquement par PAIR et QUERE, ainsi que des automates plus généraux.

Le chapitre 3 est une généralisation aux ramifications de l'étude de BRAINERD sur la génération d'arbres sur un vocabulaire stratifié.

Les résultats des chapitres 2 et 3 sont appliqués au chapitre 4 pour résoudre des problèmes de décisions concernant les bilangages réguliers.

Au chapitre 5 sont données des définitions de transducteurs de ramification.

CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LA THEORIE DES LANGAGES

1. MONOIDE

On appelle monoïde tout ensemble muni d'une loi de composition interne associative et admettant un élément neutre.

2. MONOIDE LIBRE ENGENDRE PAR UN ENSEMBLE FINI

Si V est un ensemble fini, le monoïde libre engendré par V , noté V^* , est l'ensemble des suites finies (appelées mots ou chaînes) d'éléments de V . L'opération sur ce monoïde, appelée concaténation, sera notée par un point, qui sera généralement omis; l'élément neutre de la concaténation, le mot vide, sera noté ϵ . On appelle langage sur V tout sous-ensemble de V^* , V étant le vocabulaire du langage.

3. GRAMMAIRE

3.1. Une grammaire est un quadruplet $\langle V, V_N, S, P \rangle$ où V et V_N sont des ensembles finis tels que $V \cap V_N = \emptyset$, $S \in V_N$ et P est un ensemble de couples, les règles de production, notées $\phi \rightarrow \psi$, avec $\phi, \psi \in (V \cup V_N)^*$

3.2. Dérivation dans une grammaire

Etant donné une grammaire $G = \langle V, V_N, S, P \rangle$, on définit une relation \xrightarrow{G} entre mots de $(V \cup V_N)^*$, en posant $\phi \xrightarrow{G} \psi$ si et seulement si $\phi = \psi$ ou il existe $m_1, m_2 \in (V \cup V_N)^*$ tels que $\phi = m_1 \phi' m_2$, $\psi = m_1 \psi' m_2$ et $\phi' \rightarrow \psi' \in P$. Soit \vdash la fermeture transitive de la relation \xrightarrow{G} , le langage généré par G est l'ensemble des mots W de V^* tels que $S \vdash W$.

3.3. Les grammaires ainsi définies peuvent générer n'importe quel ensemble récursivement énumérable. En apportant diverses restrictions à cette définition, on définit différentes classes de langages. Ces classes peuvent aussi être définies à partir de procédés de reconnaissance (automates). Enfin, dans certains cas, on peut donner une définition algébrique.

4. LANGAGES D'ETATS FINIS

4.1. Définition algébrique

Un langage L sur V est un langage d'états finis s'il existe un monoïde fini M , une partie M' de M et un homomorphisme de monoïdes μ de V^* dans M tel que $L = \mu^{-1}(M')$.

4.2. Automates d'états finis

4.2.1. Un automate d'états finis est un quintuplet $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ où Q est un ensemble fini d'états, V un vocabulaire fini, q_0 un élément de Q , l'état initial, F un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux et f une application de $Q \times V$ dans Q , la fonction de transition de l'automate.

On définit une fonction f^* extension de f à $Q \times V^*$ en posant :

$$f^*(q, \varepsilon) = q \quad \forall q \in Q$$

$$f^*(q, xa) = f(f^*(q, x), a) \quad \forall q \in Q, x \in V^*, a \in V$$

Le langage reconnu par l'automate est alors l'ensemble des mots x de V^* tels que $f^*(q, x) \in F$.

4.2.2. Un langage est d'états finis si et seulement si il est reconnu par un automate d'états finis.

4.3. Grammaires d'états finis

4.3.1. Une grammaire d'états finis est une grammaire dont toutes les règles de production sont soit du type $X \rightarrow a$ ou $X \rightarrow aY$, soit du type $X \rightarrow a$ ou $X \rightarrow Ya$, avec $a \in V, X, Y \in V_N$. Elle peut également avoir la règle $S \rightarrow \epsilon$.

4.3.2. Un langage est d'états finis si et seulement si il est généré par une grammaire d'états finis.

5. LANGAGES HORS CONTEXTE

5.1. Automates à pile

5.1.1. Un automate à pile est un 7-uplet $\langle Q, V, \Sigma, q_0, F, Z_0, f \rangle$ où Q est un ensemble fini d'états, V un vocabulaire fini, Σ un vocabulaire fini, q_0 un élément de Q , l'état initial, F un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux, Z_0 un élément de Σ et f une application de $Q \times V \times \Sigma$ dans l'ensemble des parties finies de $Q \times \Sigma^*$ telle que, pour tout $q \in Q$, $a \in V$, $A \in \Sigma - \{Z_0\}$, $f(q, a, A) \subseteq K \times (\Sigma - \{Z_0\})^*$, et $f(q, a, Z_0) \subseteq Q \times Z_0 (\Sigma - \{Z_0\})^*$ si $\langle q', y \rangle \in f(q, a, A)$, pour tout $W \in V^*$, $z \in \Sigma^*$, on écrit :

$$\langle q, aW, zA \rangle \vdash \langle q', W, zy \rangle$$

\vdash^* étant la fermeture transitive de \vdash , le langage reconnu par l'automate est l'ensemble des mots W de V tels que il existe $q \in F$ avec $\langle q_0, W, Z_0 \rangle \vdash^* \langle q, \epsilon, Z_0 \rangle$

5.1.2. Un langage est hors contexte si et seulement si il est reconnu par un automate à pile.

5.2. Grammaire hors contexte

5.2.1. Une grammaire hors contexte est une grammaire dont toutes les règles de production sont de type $X \rightarrow \phi$, avec $X \in V_N$ et $\phi \in (V \cup V_N)^*$

5.2.2. Un langage est hors contexte si et seulement si il est généré par une grammaire hors contexte.

6. LANGAGES SOUS-CONTEXTE

6.1. Grammaire sous-contexte

Une grammaire sous-contexte est une grammaire dont toutes les règles sont du type $\phi A \psi \rightarrow \phi W \psi$, avec $\phi, \psi \in (V \cup V_N)^*$, $A \in V_N$, $W \in (V \cup V_N)^* - \{\epsilon\}$.

6.2. Un langage est sous-contexte si et seulement si il est généré par une grammaire sous-contexte.

6.3. Il existe des automates, les automates linéaires bornés qui reconnaissent la classe des langages sous-contexte. (voir [Ku]).

CHAPITRE 1

DEFINITION ET PROPRIETES DES RAMIFICATIONS

1. DEFINITION PAR LA THEORIE DES GRAPHS [Be]

1.1. Graphe

Un graphe est un doublet $\langle X, U \rangle$, où X est un ensemble (ensemble des sommets) et U une relation binaire sur X , c'est-à-dire un sous-ensemble de $X \times X$.

Pour tout $x, y \in X$, on écrira xUy si le couple (x, y) satisfait la relation U .

On notera $U(x)$ l'ensemble des $y \in X$ tels que xUy , \hat{U} la fermeture transitive de U et U^* la fermeture transitive forte (c'est-à-dire réflexive) de U .

1.2. Itinéraire

C'est un ensemble ordonné de sommets x_1, \dots, x_n tel que, pour tout i compris entre 1 et $n-1$, on ait :

$$x_i U x_{i+1} \quad \text{ou/et} \quad x_{i+1} U x_i$$

1.3. Cycle

C'est un itinéraire x_1, \dots, x_n tel que $x_1 = x_n$

1.4. Chemin

C'est un ensemble ordonné de sommets x_1, \dots, x_n tel que, pour tout i compris entre 1 et $n-1$, on ait $x_i U x_{i+1}$

1.5. Circuit

C'est un chemin x_1, \dots, x_n tel que $x_1 = x_n$

1.6. Graphe connexe

C'est un graphe tel que, pour tout couple de sommets x, y , il existe au moins un itinéraire joignant x à y .

1.7. Arborescence

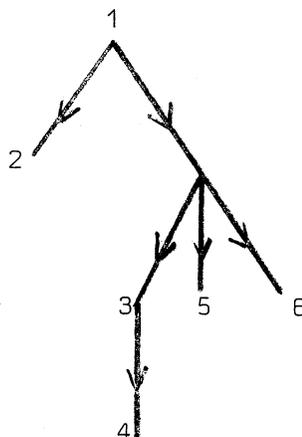
C'est un graphe satisfaisant aux conditions suivantes :

- il est connexe
- pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in X$ tel que $y U x$
- il existe un sommet et un seul x_0 pour lequel il n'existe aucun $y \in X$ tel que $y U x_0$

On appelle racine de l'arborescence le sommet x_0 .

On appelle feuille tout élément $x \in X$ pour lequel il n'existe aucun $y \in X$ tel que $x U y$.

Exemple



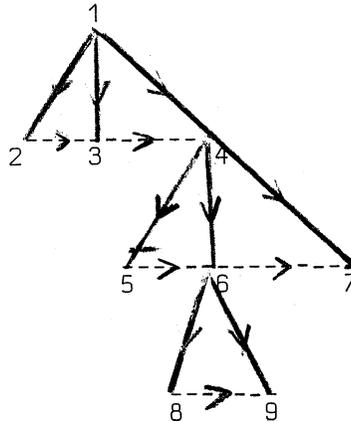
Le graphe ci-dessus est une arborescence. 1 est sa racine, 2, 4, 5, 6 sont ses feuilles.

1.8. Arborescence orientée

C'est un triplet $\langle X, U, O \rangle$ tel que :

- $\langle X, U \rangle$ est une arborescence
- O est une relation d'ordre partielle sur X telle que :
 - . Les restrictions de O à chacun des sous-ensembles $U(x)$, $x \in X$, sont des ordres totaux.
 - . Si xUy est vrai, et xUz ne l'est pas, y et z ne sont pas comparables par la relation O .

Exemple



La relation U est représentée par des traits pleins, O par des pointillés. Il est souvent commode d'interpréter une arborescence orientée comme un arbre généalogique, $U(x)$ étant les enfants du sommet x , le premier élément de $U(x)$ suivant O étant le fils aîné, etc...

1.9. Arborescence étiquetée

C'est un triplet $\langle X, U, \Delta \rangle$ où $\langle X, U \rangle$ est une arborescence et Δ une application de X dans un ensemble fini V .

V est le vocabulaire de l'arborescence étiquetée, les éléments de V sont ses étiquettes.

1.10. Arborescence orientée étiquetée

C'est un quadruplet $\langle X, U, O, \Delta \rangle$ où $\langle X, U, O \rangle$ est une arborescence orientée, et Δ a la même signification qu'en 1.8.

1.11. Pseudo-arborescence sur un vocabulaire V [Pa]

1.11.1. Isomorphisme d'arborescences orientées

Deux arborescences orientées $\langle X, U, O \rangle$ et $\langle X', U', O' \rangle$ sont dites isomorphes s'il existe une application f de X dans X' satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est une bijection
- $\forall x, y \in X$ tels que xUy , on a $f(x)U'f(y)$
- $\forall x, y \in X$ tels que xOy , on a $f(x)O'f(y)$

1.11.2. Equivalence d'arborescences orientées étiquetées

Notons \sim la relation sur l'ensemble des arborescences étiquetées par des éléments d'un vocabulaire V ainsi définie :

$\langle X, U, O, \Delta \rangle \sim \langle X', U', O', \Delta' \rangle$ si et seulement si :

- il existe un isomorphisme f entre $\langle X, U, O \rangle$ et $\langle X', U', O' \rangle$
- pour tout $x \in X$, $\Delta(x) = \Delta'(f(x))$, soit encore $\Delta = \Delta' \circ f$ (o notant la composition des applications).

Il est clair que la relation \sim est une relation d'équivalence.

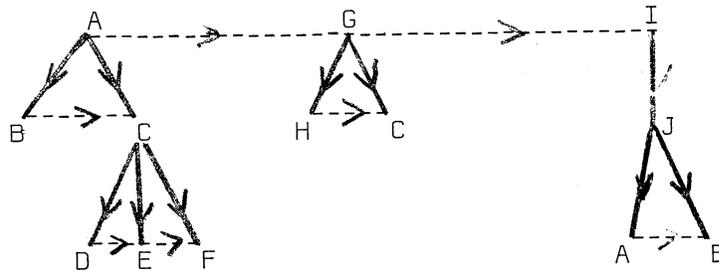
1.11.3. Définition

On appellera pseudo-arborescence sur V toute classe de la relation \sim précédemment définie.

1.12. Ramification sur un vocabulaire V

On appelle ainsi toute suite finie ordonnée de pseudo-arborescences sur V .

Exemple :



On appellera \hat{V} l'ensemble des ramifications sur V .

1.13. Sous-ramifications

1.13.1. Définition

Soit $r = \langle X, U, O, \Delta \rangle$ une ramification sur un vocabulaire V .

Notons O_s la relation successeur immédiat dans O :
 $x O_s y$ si et seulement si $x O y$ et il n'existe pas de $z \in X$ tel que $x O z$ et $z O y$.

Une sous-ramification de r est une ramification $\langle X', U', O', \Delta' \rangle$ où

- $X' \subseteq X$ et pour tout $x', y' \in X'$
- $x' U' y'$ si et seulement si $x' U y'$
- $x' O'_s y'$ si et seulement si $x' O_s y'$
- Δ' est la restriction de Δ à X' .

1.13.2. Sous-ramification complète

C'est une sous-ramification de r , $\langle X', U', O', \Delta' \rangle$ telle que $x \in X'$, $x \hat{U} y$ impliquent $y \in X'$.

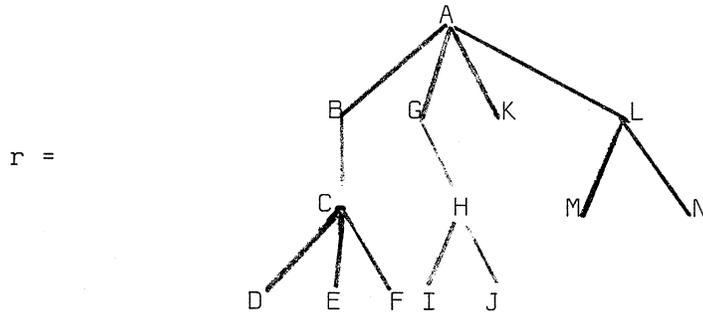
1.13.3. Sous-ramification complète à gauche

C'est une sous-ramification complète de r telle que $x \in X'$, $y O x$ impliquent $y \in X'$.

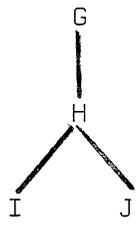
1.13.4. Sous-ramification complète à droite

C'est une sous-ramification complète de r telle que $x \in X'$, xOy impliquent $y \in X'$.

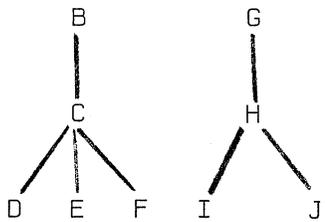
1.13.5. Exemples



est une sous-ramification de r



est une sous-ramification complète de r



est une sous-ramification complète à gauche de r



est une sous-ramification complète à droite de r

2. DEFINITION ALGEBRIQUE

2.1. Binoïde [Pa]

On appelle binoïde sur un ensemble V un ensemble muni :

- d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre, notée ici $+$
- d'une loi de composition externe à opérateurs dans V , notée \times .

Homomorphisme de binoïdes

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux binoïdes sur le même vocabulaire V . Un homomorphisme f de \mathcal{B} dans \mathcal{B}' est une application f de \mathcal{B} dans \mathcal{B}' telle que :

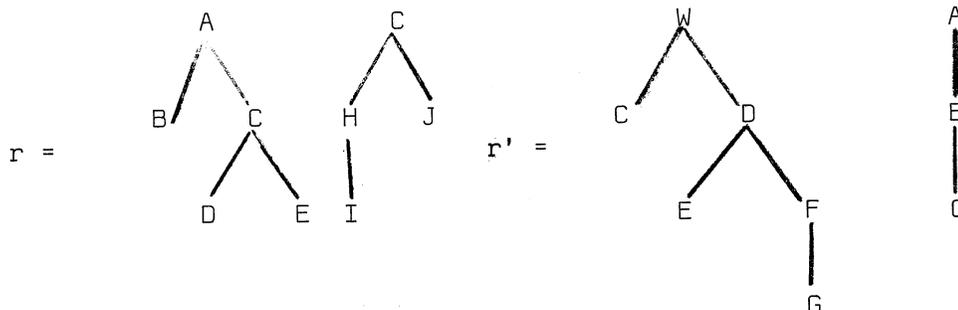
$$\begin{aligned}
 f(e) &= e && \text{(e notant les éléments neutres de } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{)} \\
 f(r+s) &= f(r) + f(s) && \text{pour tout } r, s \in \mathcal{B} \\
 f(r \times a) &= f(r) \times a && \text{pour tout } r \in \mathcal{B}, a \in V
 \end{aligned}$$

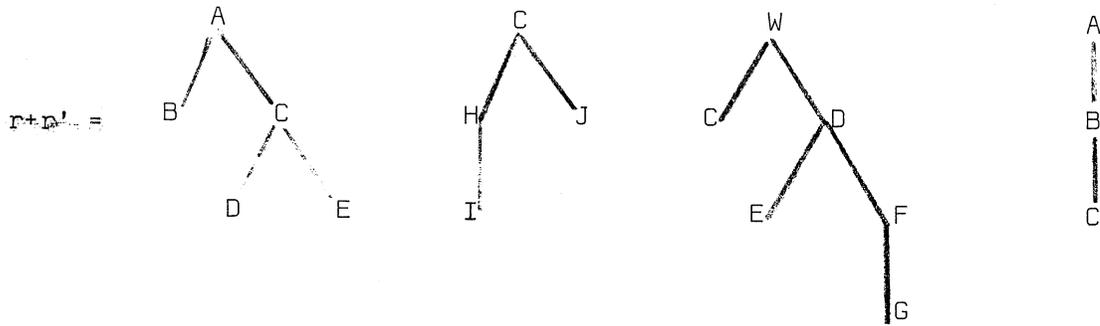
2.2. Définition d'une structure de binoïde sur \hat{V}

2.2.1. Concaténation de deux ramifications

\hat{V} est le monoïde libre engendré par l'ensemble des pseudo-arborescences sur V . La concaténation sur ce monoïde sera notée $+$, son élément neutre, la ramification vide, Λ .

Exemple :





2.2.2. Enracinement d'un élément de V sur une ramification

Soit r une ramification sur V , a un élément de V .
 Si r est la ramification vide alors $r \times a = a$ sinon r est une suite de pseudo-arborescences $\langle X_i, U_i, O_i, \Delta_i \rangle$ $i = 1, \dots, n$. On suppose les X_i deux à deux disjoints.

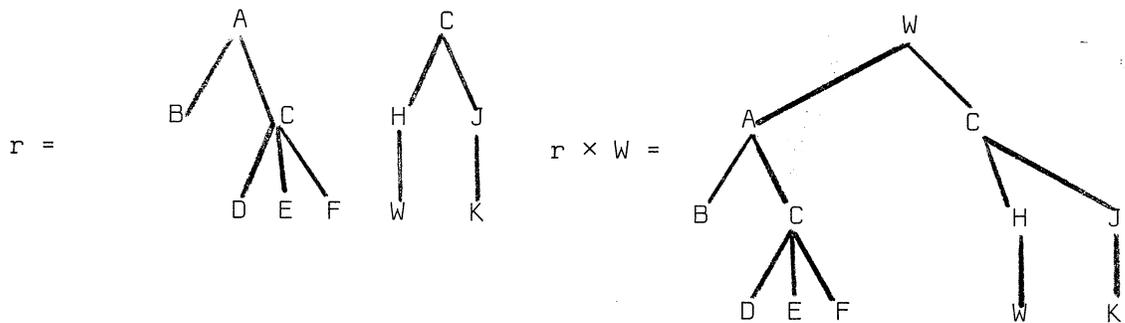
Soit v_i la racine de $\langle X_i, U_i \rangle$.

Alors $r \times a$ est la pseudo-arborescence $\langle X, U, O, \Delta \rangle$

ainsi définie :

- X est la réunion des X_i et d'un élément v n'appartenant à aucun X_i
- $xUy \iff (\exists i \ xU_i y) \text{ ou } (x = v \text{ et } \exists i \ y = v_i)$
- $xOy \iff (\exists i \ xO_i y) \text{ ou } (\exists i, j \ i < j \text{ et } x = v_i \text{ et } y = v_j)$
- $\Delta(x) = \Delta_i(x)$ pour tout $x \in X_i$, $\Delta(v) = a$

Exemple :



\hat{V} , muni des opérations $+$ et \times , est un binoïde sur V .

On trouvera dans [Pa, Qu] les démonstrations des propriétés suivantes :

2.3. Pour tout $r \in \hat{V}$ non vide, il existe $A \in V$, $r' \in \hat{V}$, $r'' \in \hat{V}$ tels que :

$$r = r' + r'' \times A$$

2.4. Principe de récurrence

2.4.1. Soit \mathcal{P} un prédicat tel que :

- $\mathcal{P}(\Lambda)$ est vrai
- $\forall r, s \in \hat{V}$, $\mathcal{P}(r)$ et $\mathcal{P}(s)$ impliquent $\forall A \in V$ $\mathcal{P}(r+s \times A)$

Alors $\mathcal{P}(r)$ est vrai pour tout $r \in \hat{V}$.

2.4.2. Définition par récurrence des applications de \hat{V} dans un ensemble E.

Soient un ensemble E, e un élément de E, et $g_A :$
 $\hat{V}^2 \times E^2 \rightarrow E$ pour tout $A \in V$.

Il existe alors une application f de \hat{V} dans E et une seule telle que :

$$f(\Lambda) = e$$

$$f(r+s \times A) = g_A(r, s, f(r), f(s)) \text{ pour tout } A \in V, r, s \in \hat{V}.$$

2.5. Toute ramification non vide sur V est une combinaison finie d'éléments de V par + et \times .

Exemple :

La ramification $r \times W$ ci-dessus s'écrit, en supposant \times plus prioritaire que + :

$$((B+(D+E+F) \times C) \times A + (W \times H + K \times J) \times C) \times W$$

2.6. Pour tout binoïde \mathcal{B} sur V, il existe un homomorphisme et un seul de \hat{V} dans \mathcal{B} .

\mathcal{B} est donc le binoïde libre engendré par V.

2.7. Définitions

2.7.1. Ordre postfixé des sommets d'une ramification

D'après 2.5., toute ramification sur V peut être représentée par une chaîne de $(V \cup \{+, \times, (,)\})^*$.

Si on fait la convention d'écrire l'opérateur externe à droite du signe \times et l'opérande à gauche, l'ordre des sommets dans la chaîne représentant la ramification sera appelé ordre postfixé des sommets de la ramification.

2.7.2. Ordre préfixé des sommets d'une ramification

Si on fait la convention inverse (l'opérateur externe à gauche du signe \times , l'opérande à droite), l'ordre des sommets dans la chaîne représentant la ramification sera alors appelé ordre préfixé des sommets de la ramification.

2.8. Définitions par récurrences sur \hat{V}

2.8.1. Expressions parenthésées postfixées représentant une ramification

2.8.1.1. Expression parenthésée postfixée complète

C'est une application P de \hat{V} dans $(V \cup \{(,)\})^*$ telle que :

$P(\Lambda) = \varepsilon$, ε représentant la chaîne vide

$P(r+s \times A) = P(r) \cdot (.P(s).) \cdot A$, \cdot étant l'opérateur de concaténation sur $(V \cup \{(,)\})^*$, pour tout $r, s \in \hat{V}$, $A \in V$.

On écrira aussi \hat{s} , $s \in \hat{V}$.

2.8.1.2. Expression totalement parenthésée postfixée

Soit $r \in \hat{V}$, \hat{r} son expression parenthésée postfixée complète. Son expression totalement parenthésée postfixée s'écrit alors (\hat{r}) .

2.8.1.3. Expression parenthésée postfixée simple

C'est une application P' de \hat{V} dans $(VU\{(\,,)\})^*$ telle que :

$$P(\Lambda) = \epsilon$$

$$P(r+sxA) = \text{si } s = \Lambda \text{ alors } P(r)A \text{ sinon } P(r) \cdot (.P(s).)A$$

Par la suite, on emploiera "expression parenthésée postfixée" pour désigner une quelconque des 3 expressions définies ci-dessus.

Exemple :

Les expressions parenthésées postfixées respectivement complète, totalement parenthésées, simple représentant la ramification $r \times W$ définie en 2.6 sont :

$$\begin{aligned} & (((B((D(E(F)C)A(((W)H((K)J)C)W \\ & (((((B((D(E(F)C)A(((W)H((K)J)C)W) \\ & ((B(DEF)C)A((W)H(K)J)C)W \end{aligned}$$

2.8.2. Expressions parenthésées préfixées représentant une ramification

On peut définir des expressions parenthésées préfixées complètes, totalement parenthésées, simples de façon analogue.

Par exemple, une expression parenthésée préfixée complète sera une application P de \hat{V} dans $(VU\{(\,,)\})^*$ telle que :

$$P(\Lambda) = \epsilon$$

$$P(r+sxA) = P(r)A.(.P(s).), \quad \forall r,s \in \hat{V}, A \in V$$

2.8.3. Nombre de sommets d'une ramification

C'est une application $\#$ de \hat{V} dans l'ensemble des entrées non négatifs N telle que :

$$\#(\Lambda) = 0$$

$$\#(r+sxA) = \#(r) + \#(s) + 1 \quad \text{pour tout } r,s \in \hat{V}, A \in V$$

2.8.4. Hauteur d'une ramification

C'est une application h de \hat{V} dans N telle que :

$$h(\Lambda) = 0$$

$$h(r+sxA) = \text{si } h(r) > h(s) \text{ alors } h(r) \text{ sinon } h(s) + 1$$

Intuitivement, c'est la longueur du plus long chemin d'une racine à une feuille.

2.8.5. Mot des racines

C'est une application $\rho : \hat{V} \rightarrow V^*$ telle que :

$$\rho(\Lambda) = \epsilon$$

$$\rho(r+s \times A) = \rho(r)A$$

C'est le mot obtenu en concaténant les racines de la ramification de gauche à droite.

2.8.6. Mot des feuilles

C'est une application $\phi : \hat{V} \rightarrow V^*$ telle que :

$$\phi(\Lambda) = \epsilon$$

$$\phi(r+s \times A) = \text{si } s = \Lambda \text{ alors } \phi(r)A \text{ sinon } \phi(r) \phi(s)$$

C'est le mot obtenu en concaténant les feuilles de la ramification de gauche à droite.

2.8.7. Largeur d'une ramification

C'est une application $la : \hat{V} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$la(\Lambda) = 0$$

$$la(r+s \times A) = \text{Max} (\mathcal{L}(\rho(r+s \times A)), la(r), la(s))$$

$\mathcal{L}(\rho(r+s \times A))$ étant la longueur du mot des racines de $r+s \times A$; la largeur d'une ramification est le nombre maximum de racines et de fils d'un même sommet.

2.9. Dioïde [Qu]

On appelle dioïde un ensemble D muni de deux lois de composition interne, notées par exemple $+$ et \times , associatives, admettant le même élément neutre, et satisfaisant la relation :

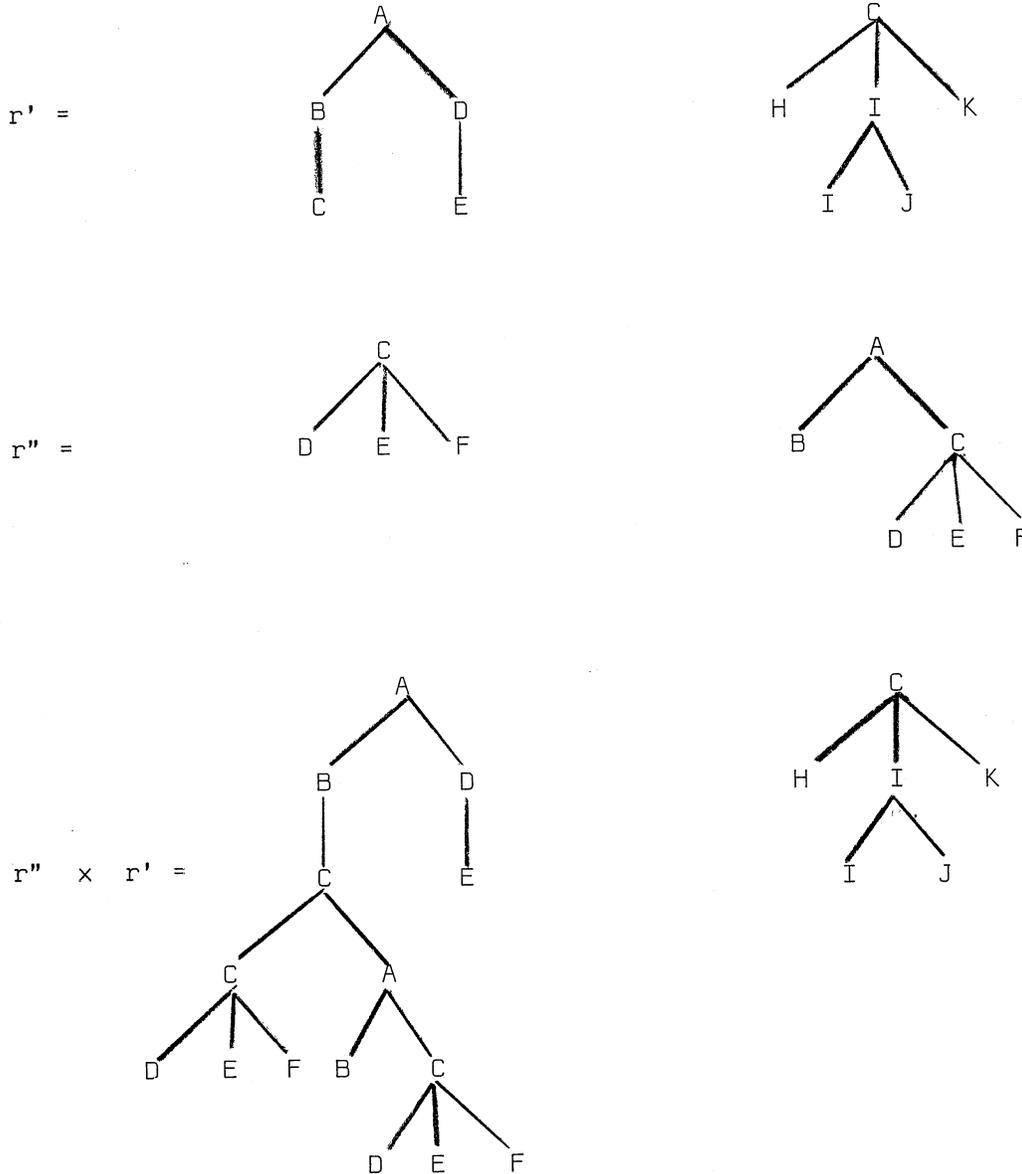
$$\text{pour tout } x, y, z \in D \quad (x+y) \times z = x \times z + y$$

Remarque : On supposera sauf spécification contraire que \times est plus prioritaire que $+$.

2.10. Définition d'une structure de dioïde sur \hat{V}

On peut prolonger l'enracinement défini en 2.2 en une loi interne en accrochant la ramification à enraciner à la première feuille suivant l'ordre postfixé de la ramification à laquelle on l'enracine.

Exemple :



Soit formellement, par récurrence, \otimes notant l'enracinement sur des éléments de V du binoïde :

$$\forall s \in \hat{V} \quad \Lambda \times s = s$$

$$\forall r, s, t \in \hat{V}, a \in V \quad (t \otimes a + r) \times s = (t \times s) \otimes a + r$$

Homomorphisme de dioïdes

Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux dioïdes, e et e' leurs éléments neutres. Une application h de \mathcal{D} dans \mathcal{D}' est un homomorphisme si elle satisfait :

$$h(e) = e'$$

$$\forall d, d' \in \mathcal{D}$$

$$h(d+d') = h(d)+h(d')$$

$$h(d \times d') = h(d) \times h(d')$$

On peut montrer le théorème suivant :

Pour tout dioïde \mathcal{D} et pour toute application f de V dans \mathcal{D} , telle que $f^{-1}(A) = \emptyset$, il existe un homomorphisme et un seul de \hat{V} dans \mathcal{D} qui prolonge f .

\hat{V} est donc le dioïde libre généré par V .

3. OPERATIONS SUR LES RAMIFICATIONS

3.1. Ramification réfléchie d'une ramification

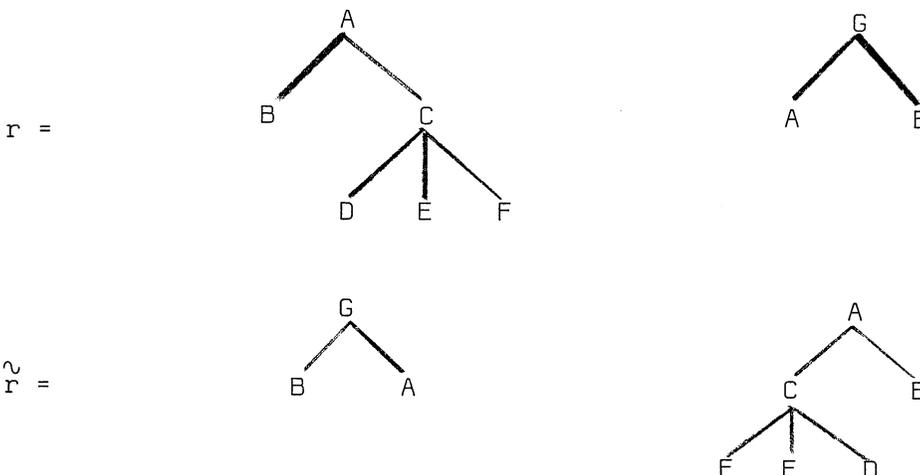
La ramification \tilde{r} réfléchie d'une ramification r est définie par :

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda$$

$$\tilde{r+s} A = \tilde{s} \times A + \tilde{r}$$

Intuitivement, c'est la ramification obtenue en inversant l'ordre des fils de chaque sommet, et l'ordre des pseudo-arborescences.

Exemple :



$$\widetilde{s} \times A = \widetilde{s^2} \times A$$

$$\widetilde{r + s} = \widetilde{s^2} + \widetilde{r^2}$$

$$\widetilde{r} = r$$

D'autre part, si on se place sur un dioïde, en posant :

$$r \otimes s = \widetilde{s^2} \times \widetilde{r^2}$$

On définit une nouvelle loi de composition interne, qu'on peut appeler l'enracinement à droite, $r \otimes s$ étant obtenue en accrochant la ramification s à la dernière feuille suivant l'ordre postfixé de r .

On peut montrer facilement que :

$$\widetilde{r \times s} = \widetilde{r} \otimes \widetilde{s}$$

Enfin, si r est une sous-ramification complète à gauche (resp. à droite) de s , alors \widetilde{r} est une sous-ramification complète à droite (resp. à gauche) de \widetilde{s} .

3.2. Ramification duale d'une ramification

3.2.1. Expression duale d'une expression sur un dioïde

Soit E une expression sur un dioïde \mathcal{D} . Soit $+$ les opérations de \mathcal{D} , D l'ensemble sous-jacent de \mathcal{D} . Supposons que $+, x, (,)$ ne soient pas des éléments de D , et qu'il n'y ait pas de priorité sur les opérateurs de \mathcal{D} . E peut-être représentée par une chaîne infixée sur $(D \cup \{ \}, (, +, x))^*$

Soit alors \bar{E} l'expression obtenue en remplaçant dans la chaîne infixée représentant E chaque occurrence de $+$ par x , et chaque occurrence de x par $+$. \bar{E} est l'expression duale de E .

3.2.2. Proposition

Si deux expressions sur un dioïde sont égales, leurs expressions duales sont égales.

Démonstration

Soit E et E' deux expressions sur un dioïde \mathcal{D}
 $E = E'$ si et seulement si il existe une séquence d'expressions sur \mathcal{D}
 $E_1 \dots E_n$, avec $E_1 = E$, $E_n = E'$ et pour tout i compris entre 1 et n-1.
 E_i s'écrit $\phi_i((x_i + y_i) \times z_i) \psi_i$ ou $\phi_i((x_i y_i) + z_i) \psi_i$

et E_{i+1} s'écrit respectivement :

$$\phi_i((x_i \times z_i) + y_i) \psi_i \quad \text{ou} \quad \phi_i((x_i + z_i) \times y_i) \psi_i$$

ϕ_i et ψ_i étant des chaînes sur $(DU\{(\cdot), +, \times\})^*$, x_i, y_i, z_i des chaînes sur $(DU\{(\cdot), +, \times\})^*$ représentant des expressions.

Notons $\bar{\phi}_i, \bar{\psi}_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ les chaînes obtenues à partir des précédentes "par dualité".

Considérons la séquence d'expressions sur \mathcal{D}
 $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_n$. Elle est telle que, pour tout i compris entre 1 et n-1,

$$\bar{E}_i \text{ s'écrit } \bar{\phi}_i((\bar{x}_i \times \bar{y}_i) + \bar{z}_i) \bar{\psi}_i \quad \text{ou} \quad \bar{\phi}_i((\bar{x}_i + \bar{y}_i) \times \bar{z}_i) \bar{\psi}_i$$

et \bar{E}_{i+1} s'écrit respectivement :

$$\bar{\phi}_i((\bar{x}_i + \bar{z}_i) \times \bar{y}_i) \bar{\psi}_i \quad \text{ou} \quad \bar{\phi}_i((\bar{x}_i \times \bar{z}_i) + \bar{y}_i) \bar{\psi}_i.$$

On a donc $\bar{E}_i = \bar{E}_{i+1}$, et donc $\bar{E} = \bar{E}'$.

3.2.3. Ramification duale d'une ramification

On a vu en 2.8 que l'on pouvait définir une structure de dioïde sur \hat{V} . Deux expressions E, E' sur ce dioïde représentent la même ramification si et seulement si $E = E'$.

La proposition 3.2.2 autorise alors la définition suivante :

Définition :

On appelle ramification duale d'une ramification r la ramification représentée par l'expression duale d'une expression sur le dioïde \hat{V} représentant r. On notera \bar{r} la ramification duale de r.

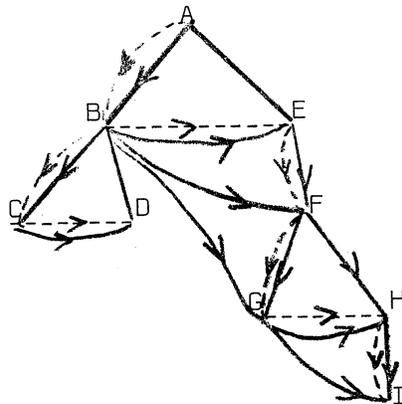
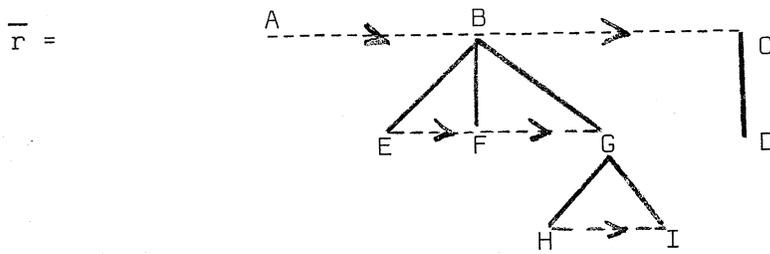
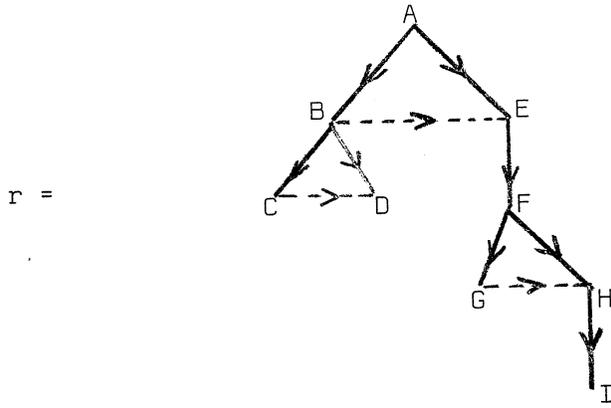
3.2.4. Proposition

Si \mathcal{D} est un dioïde, ψ un homomorphisme de \hat{V} dans \mathcal{D}
 alors $\psi(r) = \psi(r')$ si et seulement si $\psi(\bar{r}) = \psi(\bar{r}')$ pour tout $r, r' \in \hat{V}$

L'implication \Rightarrow résulte immédiatement de la propriété :

$\psi(\bar{r}) = \overline{\psi(r)}$ pour tout $r \in \hat{V}$, et de la proposition 2.2.2. La réciproque résulte de l'idempotence de la dualité.

Exemple :



Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition de la ramification duale d'une ramification.

$$\overline{r + s} = \overline{r} \times \overline{s}$$

$$r \times s = \overline{\overline{r} + \overline{s}}$$

$$\overline{\overline{r}} = r$$

$$r + s = \overline{\overline{r} \times \overline{s}}$$

$$r \times s = \overline{\overline{r} + \overline{s}}$$

l'ordre postfixé des sommets de \overline{r} est l'inverse de l'ordre postfixé des sommets de r .

3.3. Composition des opérations de réflexion et de dualité

Les opérations $\overline{\sim}$, $\underline{\sim}$, $\overline{\sim}$, $\underline{\sim}$ ont été étudiées par HOLT [Ho] qui a montré les propositions suivantes :

Proposition

Pour toute ramification r , l'ordre préfixé des sommets de r est identique à l'ordre postfixé des sommets de \overline{r} .

Proposition

Pour toute ramification r , l'ordre postfixé des sommets de r est identique à l'ordre préfixé des sommets de $\underline{\sim}r$.

Proposition

Pour toute ramification r , il existe deux entiers m , n tel que :

$$\overline{\overline{\sim}}^n r = r \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sim}}^m r = r$$

CHAPITRE 2

RECONNAISSANCE DE BILANGAGES

On appelle bilangage tout sous-ensemble de \hat{V} .
Nous allons définir et étudier dans ce chapitre des systèmes de reconnaissance des bilangages. Les premiers, que nous appellerons automates de ramifications réguliers (ARR), reconnaissent les bilangages réguliers définis par PAIR [Pa]. Nous nous efforcerons ensuite de définir des automates plus généraux (ARR non déterministes, automates de ramifications conservant une information prise dans un ensemble fini, automates de ramifications à pile). Nous verrons que seuls ces derniers, qui peuvent être considérés comme une généralisation des automates à pile, reconnaissent une classe de bilangages plus vaste que celle des bilangages réguliers.

Tous ces automates balaient la ramification qu'ils examinent suivant l'ordre postfixé des sommets. Nous définirons aussi des automates dont le sens de balayage est différent (Automates de ramifications réguliers inversés, préfixés, préfixés inversés), et nous montrerons que les automates qui balaient les ramifications de haut en bas (Automates de ramifications réguliers inversés, automates préfixés) ont des propriétés différentes de celles des ARR.

1. DEFINITION DES AUTOMATES DE RAMIFICATIONS REGULIERS

1.1. Un ARR est un quintuplet

$$\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$$

où Q est un ensemble fini d'états

V est un vocabulaire fini

q_0 est un élément de Q , l'état initial

F est un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux

f est une application de $Q^2 \times V$ dans Q , la fonction de transition de l'automate

1.2. Fonction de transition généralisée d'un ARR

C'est une application \hat{f} de \hat{V} dans Q telle que :

$$\hat{f}(\Lambda) = q_0$$

$$\hat{f}(r+sxA) = f(\hat{f}(r), \hat{f}(s), A), \text{ pour tout } r, s \in \hat{V}, A \in V$$

On voit que \hat{f} est telle que, pour tout $A \in V$, $\hat{f}(A) = f(q_0, q_0, A)$.

Un ARR parcourt la ramification d'entrée suivant l'ordre postfixé des sommets. Si q est le résultat de l'examen de la ramification jusqu'au frère aîné d'un sommet étiqueté A , q' le résultat de l'examen jusqu'au fils benjamin de A , l'automate passe à l'état $f(q, q', A)$. Si A n'a pas de frère aîné et/ou s'il n'a pas de fils, on a respectivement $q = q_0$ et/ou $q' = q_0$.

1.3. Bilangage reconnu par un ARR

Une ramification r de \hat{V} est reconnue par un ARR

$A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ si et seulement si $\hat{f}(r) \in F$.

Le bilangage reconnu par A est l'ensemble des ramifications reconnues par A

$$L(A) = \{r \in \hat{V} \mid \hat{f}(r) \in F\}.$$

1.4.

Un ARR peut encore être représenté comme une machine munie de 2 mémoires susceptibles de contenir chacune un état qu'on appellera respectivement "état horizontal" et "état vertical" de l'automate. L'automate dispose aussi d'une tête de lecture qui opère de gauche à droite sur un "ruban d'entrée", et d'une tête de lecture-écriture pouvant se déplacer dans les deux sens, opérant sur un autre ruban, la "pile d'états". Le ruban d'entrée contient une chaîne parenthésée postfixée représentant une ramification. La tête de lecture parcourt cette chaîne de gauche à droite, caractère par caractère.

Quand l'automate lit une parenthèse ouvrante, il stocke son état horizontal sur la pile d'état et met q_0 dans sa mémoire horizontale et dans sa mémoire verticale.

Quand l'automate lit une parenthèse fermante, il met son état horizontal dans sa mémoire verticale, désempile l'état qui est au sommet de la pile d'états et le place dans la mémoire horizontale.

Quand il lit un caractère de V , soit A , si q est son état horizontal, et q' son état vertical, il place l'état $f(q, q', A)$ dans sa mémoire horizontale, et q_0 dans sa mémoire verticale.

On peut formaliser tout ceci de la façon suivante :

1.5. Configuration d'un ARR

C'est un quadruplet $\langle q, q', \pi, a \rangle$ où :

q et q' sont des éléments de Q , respectivement l'état horizontal et l'état vertical de l'automate

π est un élément de $Z_0 Q^*$, Z_0 étant un symbole non élément de Q marquant le fond de la pile. π est le contenu de la pile d'états.

a est une chaîne de $(VU\{(,)\})^*$ pour laquelle il existe une chaîne p de $(VU\{(,)\})^*$ telle que pa est une expression parenthésée postfixée représentant une ramification sur V . a est l'ensemble des caractères de la chaîne d'entrée qui restent à analyser. On appellera $Pr(a)$ le premier caractère de a , c'est-à-dire celui qui est sous la tête de lecture de l'automate, et a' la sous-chaîne de a telle que $a = Pr(a).a'$. On notera ϵ la chaîne vide.

Configuration successeur d'une configuration $\langle q, q', \pi, a \rangle$

C'est la configuration $\langle q_s, q'_s, \pi_s, a_s \rangle$ définie si et seulement si $a \neq \epsilon$ de la façon suivante :

si $Pr(a) = ($ alors $q_s = q_0, q'_s = q_0, \pi_s = \pi q, a_s = a'$

si $Pr(a) =)$ alors on a toujours $\pi = \pi "q"$, avec $q" \in Q$

$q_s = q", q'_s = q, \pi_s = \pi", a_s = a'$

si $\Pr(a)=v \in V$ alors $q_s = f(q, q', v)$, $q'_s = q_0$, $\pi_s = \pi$, $a_s = a'$

si C et C' sont deux configurations, on écrira :

$C \xrightarrow{\quad} C'$ si et seulement si C' est le successeur de C .

$C \xrightarrow{0} C$

$C \xrightarrow{n} C'$, $n \geq 1$ si $\exists C''$ tel que $C \xrightarrow{n-1} C''$ et $C'' \xrightarrow{\quad} C'$

$C \xrightarrow{*} C'$ si et seulement si $\exists i \geq 0$ tel que $C \xrightarrow{i} C'$.

$\xrightarrow{*}$ est donc la fermeture transitive forte de la relation $\xrightarrow{\quad}$.

Configuration initiale

C est une configuration $\langle q_0, q_0, Z_0, a \rangle$, où a est une expression parenthésée postfixée représentant une ramification.

Configuration finale

C est une configuration $\langle q, q_0, Z_0, \epsilon \rangle$ où q est un état final.

1.6. Proposition

Soit A un ARR, $L(A)$ le langage qu'il reconnaît. Alors :

$$L(A) = \{ r \in \hat{V} \mid \exists q \in F, \langle q_0, q_0, Z_0, \hat{r} \rangle \xrightarrow{*} \langle q, q_0, Z_0, \epsilon \rangle \}$$

\hat{r} étant l'expression parenthésée postfixée représentant r .

Démonstration

On va montrer par récurrence sur r que :

$$\langle q_0, q_0, Z_0, \hat{r} \rangle \xrightarrow{*} \langle f(r), q_0, Z_0, \pi, \epsilon \rangle$$

pour tout $\pi \in Q^*$

Cette proposition implique évidemment la proposition 1.7.

1.6.1. La proposition est vraie pour $r=\Lambda$ car $\hat{f}(\Lambda)=q_0$, $\hat{\Lambda}=\epsilon$ et $C \xrightarrow{*} C$.

1.6.2. Si la proposition est vraie pour $r=t$ et $r=u$, elle est vraie pour tout $r=t+uxA$, $A \in V$.

On a : $\widehat{t+uxA} = \widehat{t}(\widehat{u})A$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe $n \in \mathbb{N}^+$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle q_0, q_0, Z_0 \pi, \widehat{t}(\widehat{u})A \rangle &\xrightarrow{n} \langle \widehat{f}(t), q_0, Z_0 \pi, (\widehat{u})A \rangle \\ \langle \widehat{f}(t), q_0, Z_0 \pi, (\widehat{u})A \rangle &\xrightarrow{} \langle q_0, q_0, Z_0 \pi \widehat{f}(t), \widehat{u}A \rangle \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $m \in \mathbb{N}^+$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle q_0, q_0, Z_0 \pi \widehat{f}(t), \widehat{u}A \rangle &\xrightarrow{m} \langle \widehat{f}(u), q_0, Z_0 \pi \widehat{f}(t),)A \rangle \\ \langle \widehat{f}(u), q_0, Z_0 \pi \widehat{f}(t),)A \rangle &\xrightarrow{} \langle \widehat{f}(t), \widehat{f}(u), Z_0 \pi, A \rangle \\ \langle \widehat{f}(t), \widehat{f}(u), Z_0 \pi, A \rangle &\xrightarrow{} \langle f(\widehat{f}(t), \widehat{f}(u), A), q_0, Z_0 \pi, \epsilon \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$\langle q_0, q_0, Z_0 \pi, \widehat{t+uxA} \rangle \xrightarrow{*} \langle \widehat{f}(t+uxA), Z_0 \pi, \epsilon \rangle$$

1.7. Exemple d'ARR

Soit l'ARR $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$

avec $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$V = \{S, A\}$

$F = \{q_4\}$

$f(q_0, q_0, A) = q_1$

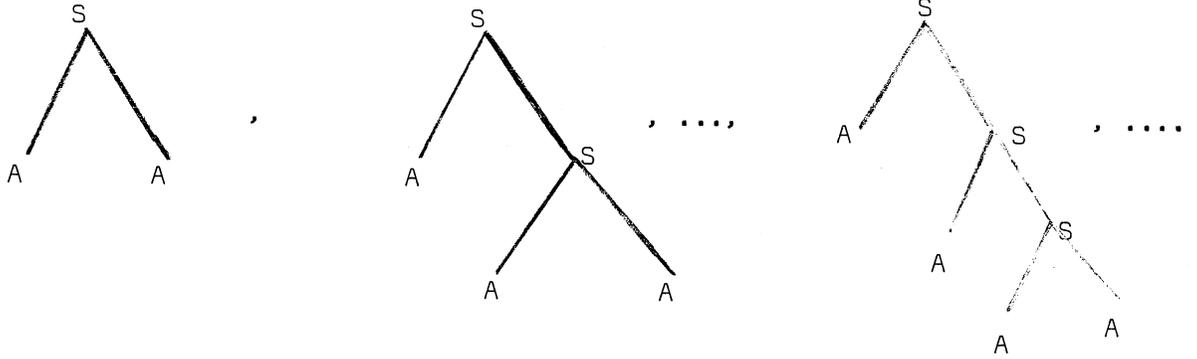
$f(q_1, q_0, A) = q_3$

$f(q_1, q_3, S) = q_3$

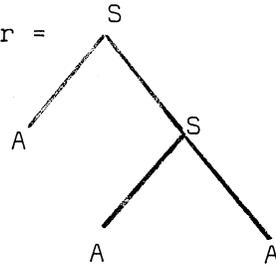
$f(q_0, q_3, S) = q_4$

f prend la valeur q_2 partout ailleurs.

L'automate reconnaît le langage



reconnaissance de $r =$



, soit $(A(AA)S)S$

$\langle q_0, q_0, Z_0, (A(AA)S)S \rangle$

$\langle q_0, q_0, Z_0 q_0, A(AA)S)S \rangle$

$\langle q_1, q_0, Z_0 q_0, (AA)S)S \rangle$

$\langle q_0, q_0, Z_0 q_0 q_1, AA)S)S \rangle$

$\langle q_1, q_0, Z_0 q_0 q_1, A)S)S \rangle$

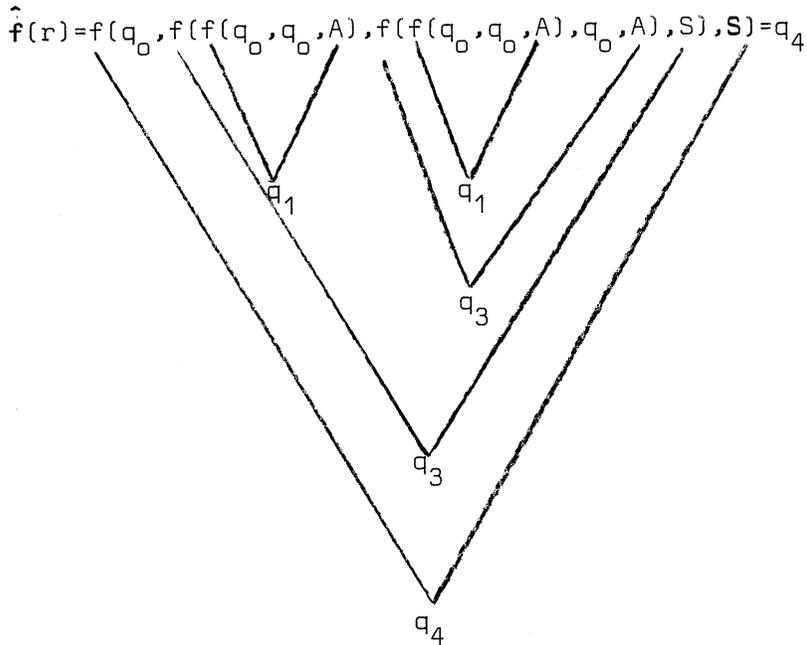
$\langle q_3, q_0, Z_0 q_0 q_1,)S)S \rangle$

$\langle q_1, q_3, Z_0 q_0, S)S \rangle$

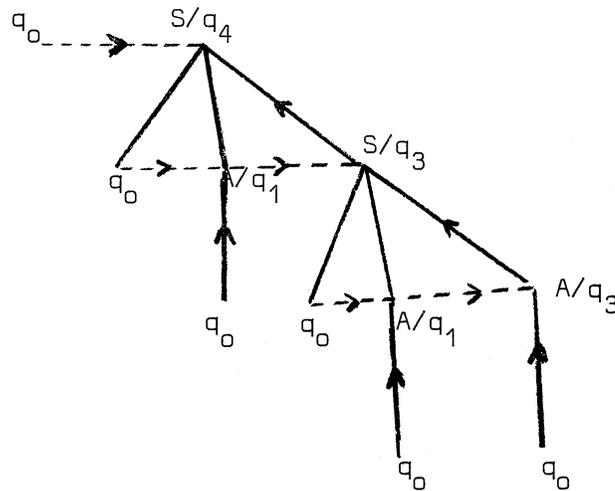
$\langle q_3, q_0, Z_0 q_0,)S \rangle$

$\langle q_0, q_3, Z_0, S \rangle$

$\langle q_4, q_0, Z_0, \epsilon \rangle$



Ce calcul peut encore être représenté par la ramification suivante :



D'une façon générale, le calcul d'un ARR sur une ramification r peut être représenté par une ramification r' obtenue en complétant r "à gauche et en dessous" par des sommets étiquetés par l'état initial, et portant sur les autres sommets, l'étiquette v de r et l'état $f(q, q', v)$, q et q' étant les états portés respectivement par le frère aîné et le fils benjamin de v .

1.8. Représentation d'un ARR comme algèbre

1.8.1. Définitions [Ra]

Soit A un ensemble non vide. On appellera opération n-aire sur A toute application $O : A^n \rightarrow A$ et algèbre tout système $\langle A, O_1, \dots, O_s \rangle$, où A est un ensemble non vide, et O_1, \dots, O_s des opérations sur A .

Il est bien connu ([Br]) qu'un automate d'états finis peut être considéré comme une algèbre où l'ensemble A est fini, contient des éléments distingués (états initial et finaux), et où toutes les opérations sont unaires.

1.8.2. Définition d'un ARR comme algèbre

Soit $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ un ARR avec $V = \{V_1, \dots, V_m\}$
 Soit, pour tout $i=1, \dots, m$, $f_{V_i} : Q^2 \rightarrow Q$ telle que $f_{V_i}(q, q') = f(q, q', v_i)$

Q est alors une V -pépinière finie, selon la terminologie de LESCANNE [Le]. L'ARR peut alors être représenté par le système :

$$\langle Q, q_0, F, f_{V_1}, \dots, f_{V_m} \rangle$$

Autrement dit, un ARR est un algèbre dont l'ensemble sous-jacent est fini, contient des éléments distingués (états initial et finaux) et dont toutes les opérations sont binaires.

La fonction de réponse de l'automate se définit comme précédemment : c'est une application \hat{f} de \hat{V} dans Q telle que

$$\hat{f}(\Lambda) = q_0$$

$$\hat{f}(r + s v_i) = f_{V_i}(\hat{f}(r), \hat{f}(s)) \text{ pour tout } r, s \in \hat{V}, v_i \in V.$$

1.9. Bilangages reconnus par les ARR

Les notions de pépinière et d'homomorphisme de pépinière introduites par LESCANNE permettent de montrer très simplement que les bilangages reconnus par les ARR sont les bilangages réguliers définis par PAIR [Pa].

1.9.1. V-Pépinère

On appelle V-pépinère un ensemble muni de $\# V$ lois de composition internes ($\# V$ notant cardinal V).

On munit \hat{V} d'une structure de V-pépinère en posant pour tout $A \in V, r, s \in \hat{V}$

$$f_A(r,s) = r+sxA$$

1.9.2. Bilangages réguliers

1.9.2.1. Première définition

Un bilangage est régulier s'il existe un binoïde \mathcal{B} fini, une partie \mathcal{B}' de \mathcal{B} tels que, si ψ est l'homomorphisme de \hat{V} dans \mathcal{B} , $L = \psi^{-1}(\mathcal{B}')$. On dit alors que L est associé au triplet $\langle \mathcal{B}, \mathcal{B}', \psi \rangle$.

1.9.2.2. Deuxième définition

Un bilangage L sur V est régulier s'il existe un dioïde fini \mathcal{D} , une partie \mathcal{D}' de \mathcal{D} tels que, si ψ est un homomorphisme de \hat{V} dans \mathcal{D} , $L = \psi^{-1}(\mathcal{D}')$.

1.9.2.3. Troisième définition

Un bilangage L sur V est régulier s'il existe une V-pépinère finie P , une partie P' de P tels que, si ψ est un homomorphisme de \hat{V} dans P , $L = \psi^{-1}(P')$.

On trouvera dans [Qu] et [Le] la démonstration de l'équivalence de ces trois définitions, ainsi que les démonstrations des théorèmes suivants.

1.9.2.4. Propriétés des bilangages réguliers

1.9.2.4.1. Théorème

Les langages hors contexte sont les ensembles des mots des feuilles des bilangages réguliers, et eux seuls.

1.9.2.4.2. Théorème

Les langages d'états finis sont les ensembles des mots des racines des bilangages réguliers et eux seuls.

1.9.2.4.3. Théorème

La classe des bilangages réguliers est fermée pour la réunion, l'intersection, le passage au complémentaire, la réflexion, la concaténation, l'enracinement sur le dioïde \hat{V} , la concaténation itérée et l'enracinement itéré.

1.9.2.4.4. Proposition

Le bilangage dual d'un bilangage régulier est régulier. Cette proposition résulte immédiatement de la proposition 4.2.4. du chapitre I et de la définition 3.1.2. des bilangages réguliers. Les bilangages réguliers étant fermés pour la réflexion, il suit immédiatement qu'ils sont fermés pour les opérations $\bar{\sim}$, $\underline{\sim}$, $\bar{\sim}$, $\underline{\sim}$.

1.9.2.4.5. Théorème

Les langages d'états finis sont les bilangages réguliers de hauteur 1 et eux seuls.

1.9.2.4.6. Théorème

Les langages d'états finis sont les bilangages réguliers de largeur 1 et eux seuls.

1.9.2.4.7. Théorème

La classe des bilangages réguliers est la plus petite classe contenant les bilangages finis et stables pour la réunion, la concaténation, la concaténation itérée, la greffe, la greffe itérée et la transcription.

1.9.2.4.8. Bilangages grammaticaux

1.9.2.4.8.1. Grammaire

Une grammaire est un triplet $G = \langle V, \rightarrow, S \rangle$ où

- V est un ensemble fini
- \rightarrow une relation binaire sur $V \times V^*$ telle que, pour tout $v \in V$, l'ensemble des $\alpha \in V^*$ tels que $v \rightarrow \alpha$ est un langage d'états finis. α est une production de v
- S est un langage d'états finis sur V , l'ensemble des axiomes de G .

Les grammaires hors-contexte définies au chapitre 0, § 5.2. sont un cas particulier des grammaires définies ci-dessus : l'ensemble des productions de chaque élément de V est un langage fini, et il y a un seul axiome de longueur 1. En fait, ces deux types de grammaires sont équivalents. On trouvera la démonstration de cette équivalence dans [Pa 1].

1.9.2.4.8.2. Bilangages grammaticaux

Une ramification est engendrée par une grammaire G si :

- son mot des racines est un axiome de G
- pour tout sommet v , si α est le mot obtenu en concaténant de gauche à droite les fils de v , alors $v \rightarrow \alpha$

Le bilangage engendré par G est l'ensemble des ramifications engendrées par G .

Un bilangage est grammatical s'il est engendré par une grammaire.

1.9.2.4.8.3. Théorème

Tout bilangage grammatical est régulier.

Réciproquement, il existe des bilangages réguliers qui ne sont pas grammaticaux.

1.9.3. Théorème

Les bilangages reconnus par les ARR sont les bilangages réguliers et eux seuls.

Démonstration

Soit $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ un ARR.

f munit Q d'une structure de V -pépinière, et \hat{f} est un homomorphisme de V -pépinières de \hat{V} dans Q . $L(A)$ est alors associé au triplet $\langle Q, F, \hat{f} \rangle$.

Réciproquement, soit L associé au triplet $\langle P, P', \psi \rangle$. Alors, L est reconnu par l'ARR $\langle P, V, \psi(\lambda), P', f \rangle$, f étant telle que pour tout

$p_1, p_2 \in P, v \in V,$

$f(p_1, p_2, v) = O_v(p_1, p_2)$ où O_v est l'opération de P correspondant à l'élément v de V .

Nous allons maintenant étudier des automates plus généraux que les ARR. Les premiers seront les ARR non déterministes. Nous montrerons qu'ils sont en fait équivalents aux ARR déterministes.

2. AUTOMATES DE RAMIFICATIONS REGULIERS NON DETERMINISTES

2.1. Un ARR non déterministe est un quintuplet

$$\langle Q, V, Q_0, F, f \rangle$$

où Q est un ensemble fini d'états

V un vocabulaire fini

Q_0 un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états initiaux

F un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux

f une application de $Q^2 \times V$ dans l'ensemble des parties de Q ,

c'est la fonction de transition de l'automate.

On définit le langage reconnu par un ARR non déterministe de la même façon que pour un ARR déterministe.

2.2. Fonction de transition généralisée d'un ARR non déterministe

\hat{f} est une application de $Q^2 \times \hat{V}$ dans l'ensemble des parties de Q définie par récurrence sur \hat{V} comme suit :

$$\hat{f}(A) = Q_0 \text{ pour tout } q, q' \in Q$$

$$\hat{f}(r+sxA) = \bigcup_{\substack{i \in \hat{f}(r) \\ j \in \hat{f}(s)}} f(i, j, A), \quad \text{pour tout } r, s \in \hat{V} \\ A \in V$$

2.3. Bilangage reconnu par un ARR non déterministe

Soit $M = \langle Q, V, Q_0, F, f \rangle$ un ARR non déterministe.

Le langage reconnu par M , $L(M)$ est défini comme suit :

$$L(M) = \{r \in \hat{V} \mid \exists q_0 \in Q_0, F \cap \hat{f}(r) \neq \emptyset\}$$

2.4. Configuration d'un ARR non déterministe

C'est un quadruplet $\langle q, q', \pi, a \rangle$ identique à une configuration d'un ARR déterministe.

Configuration successeur d'une configuration

$\langle q, q', \pi, \text{Pr}(a) a' \rangle \xrightarrow{*} \langle q_s, q'_s, \pi_s, a' \rangle$ avec

si $\text{Pr}(a) = ($ alors $q_s \in Q_0, q'_s \in Q_0, \pi_s = \pi q$

si $\text{Pr}(a) =)$ alors $\pi = \pi'' q''$, avec $q'' \in Q$ et $q_s = q''$, $q'_s = q$, $\pi_s = \pi''$

si $\text{Pr}(a) = v \in V$ alors $q'_s \in Q_0, q_s \in f(q, q', v), \pi_s = \pi$.

Configuration initiale

C'est une configuration $\langle q_0, q'_0, Z_0, a \rangle$, où a est une chaîne parenthésée postfixée représentant une ramification sur V , et $q_0, q'_0 \in Q_0$.

Configuration terminale

C'est une configuration $\langle q, q_0, Z_0, \varepsilon \rangle$, avec $q \in F, q_0 \in Q_0$.

On montre de la même façon que pour les ARR déterministes, que le langage reconnu par un ARR non déterministe M peut être défini comme suit :

$$L(M) = \{ r \in \hat{V} \mid \exists q \in F, \langle q_0, q'_0, Z_0, \hat{r} \rangle \xrightarrow{*} \langle q, q_0, Z_0, \varepsilon \rangle \text{ avec } q_0, q'_0, q_0'' \in Q_0 \}$$

2.5. Séquence d'états d'un ARR pour une ramification

Soit M un ARR, a une ramification.

Soit un calcul de M pour a , c'est-à-dire une séquence de configurations telle que :

$$\langle q_0, q'_0, Z_0, \hat{a} \rangle \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \langle q, q_0, Z_0, \varepsilon \rangle$$

On appellera séquence d'états de l'ARR M pour la ramification a , la suite des états horizontaux (c'est-à-dire des premières composantes) de configurations de M formant un calcul pour a .

On a alors la propriété suivante :

Une suite d'états s_1, \dots, s_{n+1} est une séquence d'états pour la ramification $r + sxA$ si et seulement si $s_1 \in Q_0$ et il existe s_k compris entre 1 et n tel que s_1, \dots, s_k est une séquence pour r , s_{k+1}, \dots, s_n est une séquence pour s et $s_{n+1} \in f(s_k, s_n, A)$.

2.6. Théorème

Un langage est reconnu par un ARR non déterministe si et seulement si il est reconnu par un ARR déterministe.

Démonstration

La démonstration est calquée sur la démonstration du théorème analogue concernant les automates d'états finis [Va].

Un ARR déterministe est un cas particulier d'ARR non déterministe. D'où la première partie du théorème.

Réciproquement, soit $M = \langle Q, V, Q_0, F, f \rangle$ un ARR non déterministe. On construit un automate $D(M) = \langle T, V, t_0, G, g \rangle$ tel que

$$T = \mathcal{P}(Q)$$

$$t_0 = Q_0$$

$$G = \{t \in \mathcal{P}(Q) \mid \exists q \in F \cap t\}$$

g est une application de $T^2 \times V$ dans T définie comme suit :

$$g(t_1, t_2, v) = \bigcup_{\substack{q_1 \in t_1 \\ q_2 \in t_2}} \{f(q_1, q_2, v)\} \quad \text{pour tout } \begin{matrix} t_1, t_2 \in \mathcal{P}(Q) \\ v \in V \end{matrix}$$

L'ARR $D(M)$ est déterministe.

On va maintenant montrer qu'il reconnaît le même langage que M .

2.6.1. $L(M)$ est inclus dans $L(D(M))$

Lemme

Pour tout $a \in \hat{V}$, pour toute séquence d'états q_0, \dots, q_{n+1} de M pour a , $q_{n+1} \in \hat{g}(a)$

Démonstration

On procède par récurrence sur a .

- La proposition est vraie pour $a = \Lambda$, car $\hat{g}(\Lambda) = t_0$ et tout $q_0 \in Q_0 = t_0$ est une séquence d'états de M pour Λ

- Si la proposition est vraie pour les ramifications r, s , elle est vraie pour toute ramification $r+sxA, A \in V$.

On a vu en 2.5. que toute séquence q_0, \dots, q_k pour r , q_{k+1}, \dots, q_n pour s , et q_{n+1} est un élément de $f(q_k, q_n, A)$.

Or, par définition de \hat{g} et de g :

$$\hat{g}(r+sxA) = g(\hat{g}(r), \hat{g}(s), A)$$

$$= \bigcup_{\substack{q_1 \in \hat{g}(r) \\ q_2 \in \hat{g}(s)}} f(q_1, q_2, A)$$

Or, par hypothèse de récurrence, $q_k \in \hat{g}(r)$ et $q_n \in \hat{g}(s)$. Donc, $f(q_k, q_n, A) \subset \hat{g}(r+sxA)$ et $q_{n+1} \in \hat{g}(r+sxA)$

C.Q.F.D.

$a \in L(M)$ si et seulement si il existe une séquence d'états de M pour a q_0, \dots, q_{n+1} telle que $q_{n+1} \in F$

D'après le lemme, $q_{n+1} \in \hat{g}(a)$. Donc $\hat{g}(a) \in G$ et $a \in L(D(M))$.

2.6.2. $L(D(F))$ est inclus dans $L(M)$

Lemme

$\forall a \in \hat{V}$ pour tout $q \in \hat{g}(a)$, il existe une séquence d'états de M pour a q_0, \dots, q

Démonstration

Par récurrence sur a

- La proposition est vraie pour $a=\Lambda$ car $\hat{g}(\Lambda) = Q_0$
- Si la proposition est vraie pour les ramifications r, s , elle est vraie pour toute ramification $r+sxA, A \in V$.

En effet, $\hat{g}(r+sxA) = \bigcup_{\substack{q \in \hat{g}(r) \\ q' \in \hat{g}(s)}} f(q, q', A)$

Donc, pour tout q_{n+1} élément de $\hat{g}(r+sxA)$, il existe un q_n élément de $\hat{g}(s)$, un q_k élément de $\hat{g}(r)$ tels que $q_{n+1} \in f(q_k, q_n, A)$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, pour tout $q_n \in \hat{g}(s)$ il existe une séquence d'états q_0, \dots, q_n pour r , et pour tout $q_k \in \hat{g}(r)$ il existe une séquence d'états q_0, \dots, q_k pour r . Alors $q_0, \dots, q_k, q_0, \dots, q_n, q_{n+1}$ est une séquence d'états pour $r+sxA$.

C.Q.F.D.

$a \in L(D(M))$ si et seulement si $\hat{g}(a) \in G$, c'est-à-dire s'il existe $q \in \hat{g}(a) \cap F$.

D'après le lemme précédent, il existe une séquence d'états de M pour

a, q_0, \dots, q . Comme $q \in F, a \in L(M)$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.6.

3. AUTOMATES DE RAMIFICATIONS CONSERVANT UN RENSEIGNEMENT SUPPLEMENTAIRE

On peut essayer de généraliser les ARR en définissant des automates qui conservent une information supplémentaire pendant le parcours de la ramification d'entrée. On peut d'abord définir des automates de ramifications où cette information est prise dans un ensemble fini ; c'est le cas des automates définis en 3.1., où l'information supplémentaire est un état. Nous montrerons que ces automates ne sont en fait pas plus puissants que les ARR. On peut également définir des automates de ramifications où l'information supplémentaire est prise dans un ensemble infini. C'est le cas des automates de ramifications à pile (ARP) étudiés en 3.2. Ceux-ci seuls constituent une généralisation des ARR, car ils reconnaissent une classe de bilangages plus vaste que la classe des bilangages réguliers.

3.1. Automates de ramifications conservant un état supplémentaire

3.1.1. C'est un quintuplet

$$\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$$

où Q est un ensemble fini, l'ensemble des états

V est un vocabulaire fini

q_0 est un élément de Q , l'état initial

F est un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux

f est une application de $Q^2 \times V$ dans Q , la fonction de transition de l'automate.

3.1.2. Fonction de transition généralisée

C'est une application \hat{f} de $Q \times \hat{V}$ dans Q telle que

$$\begin{aligned} \hat{f}(q, \Lambda) &= q \text{ pour tout } q \in Q \\ \hat{f}(q, r+sxA) &= \hat{f}(\hat{f}(q, r), \hat{f}(\hat{f}(q, r), s), A), \text{ pour tout } q \in Q, r, s \in \hat{V}, A \in V \end{aligned}$$

Un AR de type 3.1. balaie la ramification d'entrée suivant l'ordre postfixé des sommets, comme un ARR. Mais, pour une ramification $r+sxA$, le calcul sur s dépend du résultat du calcul sur r , alors que pour les ARR, les deux calculs sont indépendants.

3.1.3. Bilangage reconnu par un ARR de type 3.1.

Soit $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ un AR de type 3.1. Le bilangage reconnu par A , $L(A)$, est :

$$L(A) = \{r \in \hat{V} \mid \hat{f}(q_0, r) \in F\}$$

Le théorème suivant montre que les AR de type 3.1. ne sont pas plus généraux que les ARR.

Théorème

Tout bilangage reconnu par un AR de type 3.1. est régulier.

Démonstration

Soit $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ un AR de type 3.1. et soit $A' = \langle Q^Q, V, q'_0, F', f' \rangle$ l'ARR tel que

- Q^Q est l'ensemble des applications de Q dans Q
- q'_0 est l'application identique de Q^Q
- F' est l'ensemble des applications qui envoient q_0 sur un état final et
- f' l'application de $Q^Q \times Q^Q \times V$ dans Q^Q telle que, pour tout $\psi, \varphi \in Q^Q, A \in V,$
 $f'(\varphi, \psi, A) = \theta$, où θ est l'application de Q^Q telle que,
pour tout $q \in Q, \theta(q) = f(\varphi(q), (\psi \circ \varphi)(q), A)$

(Le signe \circ note la composition des applications).

La fonction de transition généralisée \hat{f}' de A' est alors telle que

$$\hat{f}'(\Lambda) = q'_0$$

$\hat{f}'(r+sxA) = \lambda$, où λ est l'application de Q^Q telle que, pour tout $q \in Q$

$$\lambda(q) = f(\hat{f}'(r)(q), [\hat{f}'(s) \circ \hat{f}'(r)](q), A)$$

Pour prouver que A et A' sont équivalents, montrons par récurrence sur r que $\hat{f}'(r)(q) = \hat{f}(q, r)$ pour tout $q \in Q$

La proposition est vraie pour $r = \Lambda$ car $\hat{f}'(\Lambda)(q) = q'_0(q) = q = \hat{f}(q, r)$ pour tout $q \in Q$

Si la proposition est vraie pour $r, s \in V$, alors pour tout $A \in V$, $q \in Q$

$$\begin{aligned} \hat{f}'(r+sxA)(q) &= f(\hat{f}'(r)(q), [\hat{f}'(s) \circ \hat{f}'(r)](q), A) \\ &= f(\hat{f}(q, r), \hat{f}'(s)(\hat{f}(q, r)), A) \\ &= f(\hat{f}(q, r), \hat{f}(\hat{f}(q, r), s), A) \\ &= \hat{f}(q, r+sxA) \end{aligned}$$

Alors

$$r \in L(A) \Leftrightarrow \hat{f}(q_0, r) \in F \Leftrightarrow \hat{f}'(r)(q_0) \in F \Leftrightarrow \hat{f}'(r) \in F' \Leftrightarrow r \in L(A')$$

3.2. Automates de ramifications à pile (ARP)

En dotant un automate d'états finis d'une pile, on obtient une machine reconnaissant les langages hors-contexte. Nous nous proposons de faire la même chose avec les ARR.

On peut aussi définir des ARP inversés, préfixés et préfixés inversés. (cf. 4)

3.2.1. Définition

Un automate de ramifications à pile est un 7-uplet

$$\langle Q, V, \Sigma, q_0, F, Z_0, f \rangle \text{ où}$$

Q est un ensemble fini d'états

V un vocabulaire fini

Σ un alphabet fini, l'alphabet de la pile

q_0 l'état initial, F l'ensemble des états finaux

Z_0 est un symbole particulier, marquant le fond de la pile

f est une application de $Q^2 \times V \times \Sigma \cup \{Z_0\}$ dans l'ensemble des parties finies de $Q \times \Sigma^*$ telle que, pour tout $q, q' \in Q, A \in V, a \in \Sigma,$
 $f(q, q', A, a) \subset Q \times \Sigma^*,$ et $f(q, q', A, Z_0) \subset Q \times Z_0 \cdot \Sigma^*$

3.2.2. Bilangage reconnu par un ARP

3.2.2.1. Fonction de transition généralisée d'un ARP

3.2.2.1.1. On commence par généraliser f à $Q^2 \times V \times Z_0 \cdot \Sigma^*$ en posant :
 $\forall q, q' \in Q, A \in V, a \in \Sigma \cup \{Z_0\}, \sigma a \in Z_0 \cdot \Sigma^*,$

$$f(q, q', A, \sigma a) = \{ \langle q, \sigma b \rangle \mid \langle q, b \rangle \in f(q, q', A, a) \}$$

3.2.2.1.2. La fonction de transition généralisée est alors une application de $\hat{V} \times Z_0 \cdot \Sigma^*$ dans l'ensemble des parties finies de $Q \times \Sigma^*$ définie par récurrence sur \hat{V} comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\Lambda, \sigma) &= \langle q_0, \sigma \rangle \text{ pour tout } \sigma \in Z_0 \cdot \Sigma^* \\ \hat{f}(r+sxA, \sigma) &= \bigcup_{\langle q_1, \sigma_1 \rangle \in \hat{f}(r, \sigma)} \bigcup_{\langle q_2, \sigma_2 \rangle \in \hat{f}(s, \sigma_1)} f(q_1, q_2, A, \sigma_2). \end{aligned}$$

Le bilangage reconnu par un ARP M peut alors être défini :
 $L(M) = \{ r \in \hat{V} \mid \exists q \in F, \langle q, Z_0 \rangle \in \hat{f}(r, Z_0) \}$

3.2.2.2. Un ARP peut être représenté comme travaillant sur une chaîne parenthésée postfixée de la même manière qu'un ARR, avec en plus évidemment sa pile.

Configuration d'un ARP

C'est un quintuplet $\langle q, q', \pi, P, a \rangle$ où q et q' sont des éléments de $Q,$
 π est un élément de $Z_0 \cdot Q^*$, P est un élément de $Z_0 \cdot \Sigma^*,$ a une sous-chaîne "à droite"
d'une expression parenthésée postfixée représentant une ramification.

Configuration successeur d'une configuration $\langle q, q', \pi, P, \text{Pr}(a).a' \rangle$,

$\text{Pr}(a) \in V$

C'est une configuration $\langle q_s, q'_s, \pi_s, P_s, a' \rangle$ telle que :

si $\text{Pr}(a) = ($ alors $q_s = q_0, q'_s = q_0, \pi_s = \pi q', P_s = P$

si $\text{Pr}(a) =)$ alors $\pi = \pi'' q''$, avec $q'' \in Q$, et

$$q_s = q'', q'_s = q, \pi_s = \pi'', P_s = P$$

si $\text{Pr}(a) = v \in V$ alors $q'_s = q_0, \pi_s = \pi, \langle q_s, P_s \rangle \in f(q, q', v, P)$

On définit alors $\xrightarrow{0}$, \xrightarrow{n} , $\xrightarrow{*}$ comme d'habitude.

Configuration initiale

C'est une configuration $\langle q_0, q_0, Z_0, Z_0, a \rangle$, où a est une chaîne parenthésée postfixée représentant une ramification.

Configuration finale

C'est une configuration $\langle q, q_0, Z_0, Z_0, \epsilon \rangle$, avec $q \in F$, ϵ chaîne vide.

3.2.2.3. Proposition

Soit A un ARP, $L(A)$ le langage qu'il reconnaît. Alors

$$L(A) = \{ r \in \hat{V} \mid \exists q \in F, \langle q_0, q_0, Z_0, Z_0, \hat{r} \rangle \xrightarrow{*} \langle q, q_0, Z_0, Z_0, \epsilon \rangle$$

\hat{r} étant l'expression parenthésée postfixée représentant r .

Démonstration

On va montrer que pour tout $(q, \sigma) \in \hat{f}(r, P)$,

$$\langle q_0, q_0, Z_0, \pi, P, \hat{r} \rangle \xrightarrow{*} \langle q, q_0, Z_0, \pi, \sigma, \epsilon \rangle$$

On procède par récurrence sur r

La proposition pour $r = \Lambda$ car $\hat{f}(\Lambda, P) = (q_0, P)$

Si elle est vraie pour $r = t$ et $r = u$, elle est vraie pour tout $r = t + axA$, $A \in V$:

Pour tout $(q, \sigma) \in \hat{f}(r, P) \exists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\langle q_0, q_0, Z_0, \pi, P, \hat{t}(\hat{u})A \rangle \xrightarrow{n} \langle q, q_0, Z_0, \pi, \sigma, (\hat{u})A \rangle$$

$$\langle q, q_0, Z_0, \pi, \sigma, (\hat{u})A \rangle \xrightarrow{} \langle q_0, q_0, Z_0, \pi q, \sigma, \hat{u} \rangle A$$

Pour tout $(q', \sigma') \in \hat{f}(u, \sigma), \exists m \in \mathbb{N}^+$ tel que
 $\langle q_0, q_0, Z_0 \pi q, \sigma, \hat{u} \rangle A \xrightarrow{m} \langle q', q_0, Z_0 \pi q, \sigma', \rangle A \rangle$
 $\langle q', q_0, Z_0 \pi q, \sigma', \rangle A \rangle \xrightarrow{} \langle q, q', Z_0 \pi, \sigma', A \rangle$
 $\langle q, q', Z_0 \pi, \sigma', A \rangle \xrightarrow{} \langle q'_s, q_0, Z_0 \pi, \sigma_s, \varepsilon \rangle$
 pour tout $(q'_s, \sigma_s) \in f(q, q', A, \sigma') \in \hat{f}(t+uxA, P)$

3.2.3. Exemple

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$$

$$V = \{S, A, B, C\} \quad \Sigma = \{I\}$$

$$Q_0 = \{q_0\}$$

$$F = \{q_6\}$$

$$f(q_0, q_0, A, \sigma) = (q_1, \sigma I) \quad \forall \sigma \in \Sigma^*$$

$$f(q_0, q_0, C, \sigma I) = (q_5, \sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma^*$$

$$f(q_4, q_0, B, \sigma) = (q_3, \sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma^*$$

$$f(q_0, q_3, S, Z_0) = (q_6, Z_0)$$

$$f(q_1, q_3, S, Z_0) = (q_4, Z_0)$$

$$f(q_5, q_5, S, Z_0) = (q_7, Z_0)$$

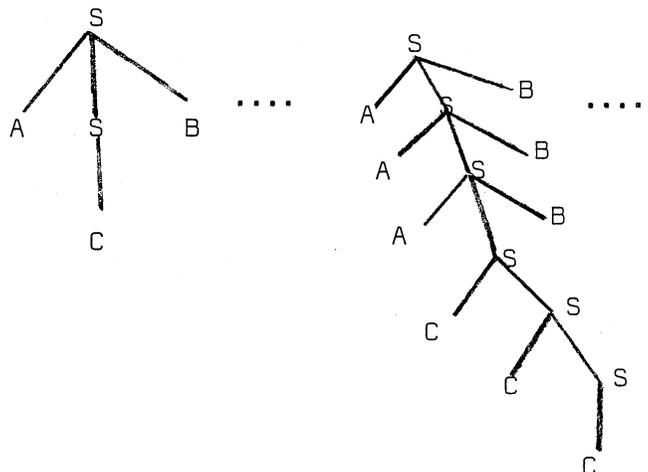
$$f(q_1, q_5, S, Z_0) = (q_4, Z_0)$$

$$f(q_5, q_7, S, Z_0) = (q_7, Z_0)$$

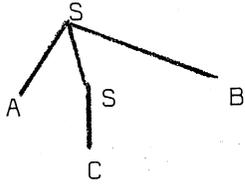
$$f(q_1, q_7, S, Z_0) = (q_4, Z_0)$$

$$f(q, q', v, \sigma) = (q_2, \sigma) \text{ partout ailleurs.}$$

L'ARP reconnaît le langage



Exemples de calculs de l'automate



soit (A(C)SB)S

$\langle q_0, q_0, Z_0, Z_0, (A(C)SB)S \rangle$

$\langle q_0, q_0, Z_0 q_0, Z_0, A(C)SB)S \rangle$

$\langle q_1, q_0, Z_0 q_0, Z_0 I, (C)SB)S \rangle$

$\langle q_0, q_0, Z_0 q_0 q_1, Z_0 I, C)SB)S \rangle$

$\langle q_5, q_0, Z_0 q_0 q_1, Z_0,)SB)S \rangle$

$\langle q_1, q_5, Z_0 q_0, Z_0, SB)S \rangle$

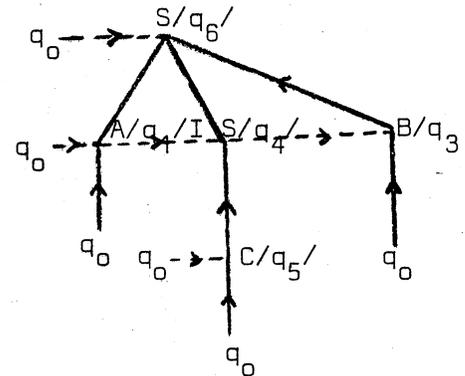
$\langle q_4, q_0, Z_0 q_0, Z_0, B)S \rangle$

$\langle q_3, q_0, Z_0 q_0, Z_0,)S \rangle$

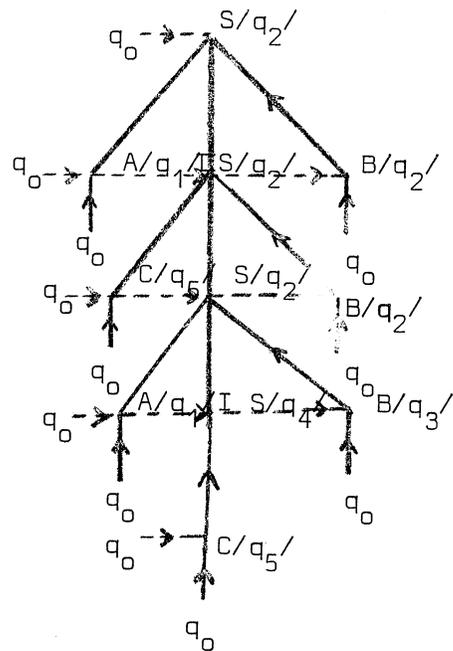
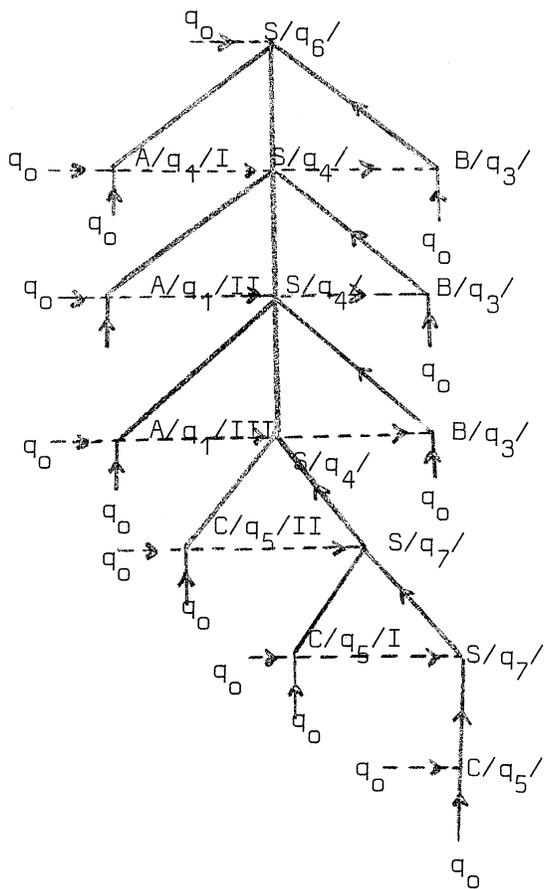
$\langle q_0, q_3, Z_0, Z_0, S \rangle$

$\langle q_6, q_0, Z_0, Z_0, \epsilon \rangle$

Ce calcul peut encore être représenté par



Autres exemples



3.2.4. Calcul d'un ARP sur une ramification de hauteur 1

Soit $M = \langle Q, V, \Sigma, Q_0, F, Z_0, f \rangle$ un ARP. Tout calcul de M sur une ramification de hauteur 1 est identique au calcul de l'automate à pile $M' = \langle Q, V, \Sigma, Q, F, Z_0, f' \rangle$, avec $f'(q, v, \sigma) = f(q, q_0, v, \sigma)$ pour tout $q \in Q$, $v \in V$, $\sigma \in \Sigma \cup \{Z_0\}$, sur la chaîne obtenue en prenant le mot de racine (ou de feuille !) de la ramification examinée par M .

On a, avec les ramifications de largeur 1, le même résultat.

3.2.5. ARP déterministe

Un ARP $\langle Q, V, \Sigma, \{q_0\}, F, Z_0, f \rangle$ si et seulement si f est une application de $Q^2 \times V \times \Sigma \cup \{Z_0\}$ dans $Q \times \Sigma^*$.

La proposition suivante découle immédiatement de 4.4.

3.2.5.1. Proposition

Il existe des ARP pour lesquels il n'existe pas d'ARP déterministe équivalent.

3.2.6. Bilangages reconnus par les ARP

3.2.6.1. Théorème

Les bilangages réguliers forment une sous-classe stricte des bilangages reconnus par les ARP.

Démonstration

L'inclusion au sens large est immédiate, car les ARR peuvent être considérés comme des cas particuliers des ARP.

L'inclusion stricte résulte de la propriété 4.4. et du théorème 3.1.3.2. De 4.4., on tire aussi la proposition suivante, en considérant de façon évidente les bilangages de hauteur 1 ou de largeur 1 comme des langages :

3.2.6.2. Proposition

Les bilangages de hauteur 1 (respectivement de largeur 1) reconnus par les ARP sont les langages hors-contexte et eux seuls.

3.2.6.3. Ensemble des mots des feuilles et des mots des racines des bilangages reconnus par les ARP

De 3.2.6.2., il résulte que tout langage hors-contexte est ensemble des mots des racines d'un bilangage reconnu par un ARP.

La réciproque me semble vraie, mais je n'ai pas pu la démontrer rigoureusement.

L'exemple 4.3. prouve que des langages sous-contexte, qui ne sont pas hors-contexte (en l'occurrence $\{A^n C^n B^n \mid n \geq 1\}$) peuvent être ensemble des mots des feuilles de bilangages reconnus par un ARP.

Il serait intéressant de comparer les ensembles des mots des feuilles des bilangages reconnus par les ARP avec les langages indéxés définis par AHO [Ah].

3.2.7. Théorème

Les bilangages reconnus par les ARP sont fermés pour la réunion, la concaténation, l'*. Ils ne sont pas fermés pour l'intersection, ni pour le passage au complémentaire.

Démonstration

3.2.7.1. Réunion

Soient L_1 reconnu par $\langle Q_1, V_1, \Sigma_1, Q_{o_1}, F_1, Z_o, f_1 \rangle$

L_2 reconnu par $\langle Q_2, V_2, \Sigma_2, Q_{o_2}, F_2, Z_o, f_2 \rangle$

On peut toujours supposer que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Alors $L_1 \cup L_2$ est reconnu par l'ARP

$\langle Q_1 \cup Q_2 \cup \{k\}, V_1 \cup V_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_{o_1} \cup Q_{o_2}, F_1 \cup F_2, f \rangle,$

avec $k \notin Q_1 \cup Q_2$ et

$f(q, q', v, \sigma) = f_1(q, q', v, \sigma)$ pour tout $q, q' \in Q_1, v \in V_1, \sigma \in \Sigma_1$

$f(q, q', v, \sigma) = f_2(q, q', v, \sigma)$ pour tout $q, q' \in Q_2, v \in V_2, \sigma \in \Sigma_2$

$f(q, q', v, \sigma) = k$ partout ailleurs.

3.2.7.2. Concaténation

Soient L_1 reconnu par $\langle Q_1, V_1, \Sigma_1, Q_{o_1}, F_1, Z_o, f_1 \rangle$

L_2 reconnu par $\langle Q_2, V_2, \Sigma_2, Q_{o_2}, F_2, Z_o, f_2 \rangle$

avec $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Alors $L_1 + L_2$ est reconnu par l'ARP $\langle Q, V, \Sigma, Q_o, F, Z_o, f \rangle$

avec $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{k\}, V = V_1 \cup V_2, \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_o = Q_{o_1},$

$F = F_2$ et f tel que :

$f(q, q', v, \sigma) = f_1(q, q', v, \sigma)$ pour tout $q, q' \in Q_1, v \in V_1, \sigma \in \Sigma_1$

$f(q, q', v, \sigma) = f_2(q, q', v, \sigma)$ pour tout $q, q' \in Q_2, v \in V_2, \sigma \in \Sigma_2$

$f(q, q', v, Z_o) = \{f_2(q_o, q', v, Z_o) \mid q_o \in Q_{o_2}\}$ pour tout $q \in F_1, q' \in Q_2, v \in V_2$

$f(q, q', v, \sigma) = k$ partout ailleurs.

3.2.7.3. Concaténation itérée

Si L est un langage, $L^2 = L+L$, $L^3 = L+L+L$, $L^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

Si L est reconnu par l'ARP $\langle Q, V, \Sigma, Q_0, F, Z_0, f \rangle$, L^* est reconnu par l'ARP $\langle Q, V, \Sigma, Q_0, F, Z_0, f^* \rangle$ avec

$f^*(q, q', v, \sigma) = f(q, q', v, \sigma)$ pour tout $q, q' \in Q$, $v \in V$, $\sigma \neq Z_0$

$f^*(q, q', v, Z_0) = \{f(q, q', v, Z_0)\}$ pour tout $q \in F$, $q' \in Q$, $v \in V$

$f^*(q, q', v, Z_0) = \{f(q, q', v, Z_0)\} \cup \{f(q_0, q', v, Z_0)\}$

pour tout $q \in F$, $q' \in Q$, $v \in V$.

3.2.7.4. Intersection et passage au complémentaire

La non fermeture pour l'intersection résulte immédiatement de la proposition 4.6.4., du fait que l'intersection de deux langages de hauteur 1 est un langage de hauteur 1, et que les langages hors-contexte ne sont pas fermés pour l'intersection.

La non fermeture pour le passage au complémentaire résulte de la formule de De Morgan : $\overline{L_1 \cup L_2} = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$.

3.2.8. Problèmes de décision

De la proposition 4.6.4., il résulte que tous les problèmes de décision récursivement indécidables pour les langages hors-contexte sont à fortiori récursivement indécidables pour les langages reconnus par les ARP.

4. AUTOMATES DE RAMIFICATIONS REGULIERS INVERSES (ARRI)

Tous les automates étudiés jusqu'à présent parcourent la ramification qu'ils examinent suivant l'ordre postfixé des sommets, c'est-à-dire de bas en haut et de gauche à droite. Les automates que nous allons définir dans ce paragraphe balayent la ramification d'entrée à l'envers, c'est-à-dire de haut en bas et de droite à gauche. L'ordre de parcours des sommets est alors l'ordre postfixé des sommets de la ramification duale de la ramification d'entrée.

4.1. ARRI déterministe

4.1.1. Un ARRI déterministe est un quintuplet

$$\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$$

où Q est un ensemble fini d'états

V un vocabulaire fini

q_0 un élément de Q , l'état initial

F un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux

f une application de $Q \times V$ dans Q^2 , la fonction de transition de l'automate.

4.1.2. Fonction de transition généralisée

$$\text{Posons } Q^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q^i \text{ et } \forall q \in Q, A \in V, f(q, A) = \langle f_1(q, A), f_2(q, A) \rangle$$

La fonction de transition généralisée \hat{f} d'un ARRI est une application de $Q \times \hat{V}$ dans Q^∞ définie comme suit :

$$\hat{f}(q, \Lambda) = \langle q \rangle, \text{ pour tout } q \in Q$$

$$\hat{f}(q, r + sxA) = \langle \hat{f}(f_1(q, A), r), \hat{f}(f_2(q, A), s) \rangle, \text{ pour tout } r, s \in \hat{V}, A \in V, q \in Q$$

\hat{f} est une extension de f à \hat{V} car pour tout $A \in V$,

$$\hat{f}(q, \Lambda + \Lambda x A) = \langle \hat{f}(f_1(q, A), \Lambda), \hat{f}(f_2(q, A), \Lambda) \rangle$$

$$= \langle f_1(q, A), f_2(q, A) \rangle$$

$$= f(q, A)$$

4.1.3. Bilangage reconnu par un ARRI

Une ramification r de \hat{V} est reconnue par un ARRI $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ si et seulement si, pour tout $q \in \hat{f}(q_0, r)$, $q \in F$.

On notera $L(A)$ le bilangage reconnu par l'ARRI A

$$L(A) = \{r \in \hat{V} \mid \forall q \in \hat{f}(q_0, r), q \in F\}$$

4.2. ARRI non déterministe

4.2.1. Un ARRI non déterministe est un quintuplet

$$\langle Q, V, Q_0, F, f \rangle$$

où Q est un ensemble fini d'états

V un vocabulaire fini

Q_0 un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états initiaux

F un sous-ensemble de Q , l'ensemble des états finaux

f une application de $Q \times V$ dans l'ensemble des parties de Q^2 , la fonction de transition de l'automate.

4.2.2. Fonction de transition généralisée

C'est une application de $Q \times \hat{V}$ dans l'ensemble des parties de Q^∞ telle que :

$$\begin{aligned} \hat{f}(q, A) &= \langle q \rangle, \text{ pour tout } q \in Q \\ \hat{f}(q, r+sxA) &= \bigcup_{\langle i, j \rangle \in f(q, A)} \bigcup_{\substack{k \in f(i, r) \\ l \in \hat{f}(j, s)}} \langle k, l \rangle \end{aligned}$$

4.2.3. Bilangage reconnu par un ARRI non déterministe

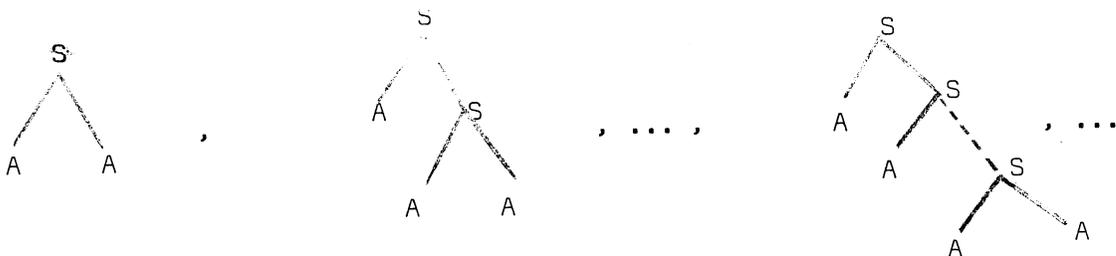
Soit $M = \langle Q, V, Q_0, F, f \rangle$ un ARRI non déterministe

Le bilangage reconnu par M , $L(M)$ est :

$$L(M) = \{ r \in \hat{V} \mid \exists q_0 \in Q_0, \exists \langle q_1, \dots, q_k \rangle \in \hat{f}(q_0, r), q_1 \in F, \dots, q_k \in F \}$$

4.3. Exemple d'ARRI déterministe

Nous donnons un ARRI déterministe qui reconnaît le bilangage de l'exemple 1.8., c'est-à-dire le bilangage



$A = \langle Q, V, q_4, F, f \rangle$ avec

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$V = \{S, A\}$

$F = \{q_0\}$

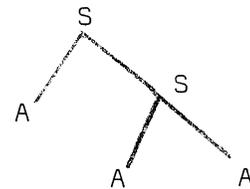
$f(q_4, S) = \langle q_0, q_3 \rangle$

$f(q_3, S) = \langle q_1, q_3 \rangle$

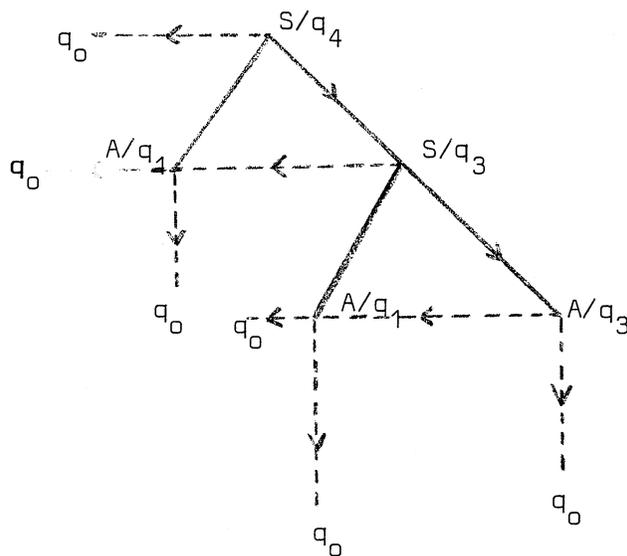
$f(q_3, A) = \langle q_1, q_0 \rangle$

$f(q_1, A) = \langle q_0, q_0 \rangle$ f prend la valeur $\langle q_2, q_2 \rangle$ partout ailleurs.

Le calcul de A sur la ramification $r =$



peut être représenté par la ramification suivante :



La ramification est reconnue car $\hat{f}(q_4, r) = \langle q_0, q_0, q_0, q_0, q_0, q_0 \rangle$

4.4. Théorème

Les bilangages reconnus par les ARRI non déterministes sont les bilangages réguliers et eux seuls.

Démonstration

4.4.1. Soit un ARRI non déterministe $\mathcal{J} = \langle Q, V, Q_0, F, f \rangle$

Soit l'ARR $\mathcal{A} = \langle Q \cup \{z\}, V, Q'_0, G, g \rangle$, avec

$z \notin Q, Q'_0 = F, G = Q_0$ et $g : (Q \cup \{z\})^2 \times V \rightarrow \mathcal{P}(Q \cup \{z\})$ telle que pour tout $q, q' \in Q, v \in V$, si $h = \{q'' \in Q \mid f(q'', v) = \langle q, q' \rangle\} \neq \emptyset$ alors $g(q, q', v) = h$ sinon $g(q, q', v) = \{z\}$

et pour tout $q \in Q, v \in V, g(q, z, v) = g(z, q, v) = g(z, z, v) = \{z\}$

reconnait le même bilangage que \mathcal{J} .

4.4.2. Réciproquement, étant donné un ARR déterministe $\mathcal{A} = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$, on obtient un ARRI non déterministe équivalent $\mathcal{J} = \langle Q', V, Q'_0, G, g \rangle$

avec $Q' = Q \cup \{z\}, z \notin Q$

$$Q'_0 = F$$

$$F = \{q_0\}$$

$g : Q' \times V \rightarrow \mathcal{P}(Q'^2)$ telle que :

pour tout $q \in Q, v \in V$, si $h = \{\langle q', q'' \rangle \in Q'^2 \mid f(q', q'', v) = q\} \neq \emptyset$

alors $g(q, v) = h$ sinon $g(q, v) = \{\langle z, z \rangle\}$

et pour tout $v \in V, g(z, v) = \{\langle z, z \rangle\}$.

Un ARRI déterministe étant un cas particulier d'ARRI non déterministe, le théorème 4.4. implique que tout bilangage reconnu par un ARRI déterministe est régulier. Le problème se pose alors de savoir s'il y a équivalence entre ARRI déterministes et non déterministes, comme c'est le cas pour les ARR. La réponse est non, et ceci fait l'objet du théorème suivant.

4.5. Proposition

Les bilangages reconnus par les ARRI déterministes sont une sous-classe stricte des bilangages réguliers.

Démonstration

Il suffit de donner un exemple de bilangage régulier qui n'est pas reconnu par un ARRI déterministe.

Soit un vocabulaire $V = \{A, B\}$ et L le bilangage sur V ainsi défini : $r \in L$ si et seulement si, pour tout sommet v de r , si $t+uxv$ est la sous-ramification de r complète à gauche de v , alors $t = t'+u'xv'$ et $u = t''+u''xv''$, avec $v, v' \in V$, impliquent $v'=v''$.

Donc une ramification de \hat{V} fait partie de L si et seulement si tous ses sommets satisfont la condition suivante : s'ils ont à la fois un frère aîné et des fils, alors le frère aîné et le fils benjamin ont la même étiquette.

4.5.1. L est un bilangage régulier

En effet, L est reconnu par l'ARR $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ avec

$$Q = \{q_0, q_1, q_A, q_B\}$$

$$V = \{A, B\}$$

$$F = \{q_A, q_B\}$$

$$f(q_0, q_0, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

$$f(q_A, q_0, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

$$f(q_B, q_0, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

$$f(q_0, q_A, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

$$f(q_0, q_B, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

$$f(q_A, q_A, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

$$f(q_B, q_B, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}) = \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix}$$

f est égale à q_1 partout ailleurs.

4.5.2. Il n'existe pas d'ARRI déterministe qui reconnaît L. En effet, soit un ARRI déterministe qui reconnaisse L, g sa fonction de transition, q_0 son état initial. Posons $g(q_0, A) = \langle q', q'' \rangle$. Soit $(r_1 + s_1 \times A) + (t_1 + u_1 \times A) \times A$ et $(r_2 + s_2 \times B) + (t_2 + u_2 \times B) \times A$ deux ramifications de L. Alors $\hat{g}(q', r_1 + s_1 \times A)$ et $\hat{g}(q'', t_2 + u_2 \times B)$ ne contiennent que des états finaux. Par suite, \mathcal{J} reconnaît la ramification $(r_1 + s_1 \times A) + (t_2 + u_2 \times B) \times A$, qui ne fait pas partie de L. On aboutit donc à une contradiction.

4.6. Proposition

Les bilangages reconnus par les ARRI déterministes forment une sous-algèbre de Boole de l'algèbre de Boole des bilangages réguliers.

Démonstration

Nous allons montrer que la classe des bilangages reconnus par les ARRI déterministes est fermée pour le passage au complémentaire et l'intersection.

4.6.1. Fermeture pour le passage au complémentaire

Si L est reconnu par un ARRI déterministe $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$, \bar{L} est reconnu par l'ARRI déterministe $\langle Q, V, q_0, \bar{F}, f \rangle$.

4.6.2. Fermeture pour l'intersection

Soient L_1 et L_2 deux bilangages définis sur un vocabulaire L reconnus par deux ARRI déterministes $\mathcal{J} = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ et $\mathcal{J}' = \langle T, V, t_0, G, g \rangle$.

Soit alors l'ARRI $\langle Q \times T, V, \langle q_0, t_0 \rangle, F \times G, f \times g \rangle$, $f \times g$ étant l'application de $Q \times T \times V$ dans $(Q \times T)^2$ telle que pour tout $q \in Q, t \in T, v \in V$, $(f \times g)(\langle q, t \rangle, v) = \langle \langle f_1(q, v), g_1(q, v) \rangle, \langle f_2(q, v), g_2(q, v) \rangle \rangle$.

Cet automate est un ARRI déterministe. Il est obtenu à partir de \mathcal{J} et \mathcal{J}' de façon analogue au produit de deux automates d'états finis. Pour montrer qu'il reconnaît $L_1 \cap L_2$, prouvons que

Lemme

Pour tout $q \in Q$, $t \in T$, $r \in \hat{V}$, $(\widehat{fxg})(\langle q, t \rangle, r) = \langle \langle q_{i_1}, t_{i_1} \rangle, \dots, \langle q_{i_r}, t_{i_r} \rangle \rangle$ avec

$$\langle q_{i_1}, \dots, q_{i_r} \rangle = \hat{f}(q, r) \text{ et } \langle t_{i_1}, \dots, t_{i_r} \rangle = \hat{g}(t, r)$$

On procède par récurrence sur r .

La proposition est vraie pour $r=\Lambda$ car pour tout $q \in Q$, $t \in T$

$$(\widehat{fxg})(\langle q, t \rangle, \Lambda) = \langle q, t \rangle = \langle \hat{f}(q, \Lambda), \hat{g}(t, \Lambda) \rangle$$

Si la proposition est vraie pour $r=x$ et $r=y$, elle est vraie pour tout

$r = x+yxv$, $v \in V$. En effet, pour tout $q \in Q$, $t \in T$, $(\widehat{fxg})(\langle q, t \rangle, x+yxv)$

$$= \langle (\widehat{fxg})_1((\widehat{fxg})_1(\langle q, t \rangle, v), x), (\widehat{fxg})_2((\widehat{fxg})_2(\langle q, t \rangle, v), y) \rangle$$

$$= \langle (\widehat{fxg})(\langle f_1(q, v), g_1(t, v) \rangle, x), (\widehat{fxg})(\langle f_2(q, v), g_2(t, v) \rangle, y) \rangle$$

$$= \langle \langle q_{i_1}, t_{i_1} \rangle, \dots, \langle q_{i_x}, t_{i_x} \rangle, \langle q_{j_1}, t_{j_1} \rangle, \dots, \langle q_{j_y}, t_{j_y} \rangle \rangle$$

avec

$$\langle q_{i_1}, \dots, q_{i_x} \rangle = \hat{f}(f_1(q, v), x), \langle q_{j_1}, \dots, q_{j_y} \rangle = \hat{f}(f_2(q, v), y)$$

$$\langle t_{i_1}, \dots, t_{i_x} \rangle = \hat{g}(g_1(t, v), x), \langle t_{j_1}, \dots, t_{j_y} \rangle = \hat{g}(g_2(t, v), y)$$

Mais alors

$$\langle q_{i_1}, \dots, q_{i_x}, q_{j_1}, \dots, q_{j_y} \rangle = \hat{f}(q, x+yxv) \text{ et}$$

$$\langle t_{i_1}, \dots, t_{i_x}, t_{j_1}, \dots, t_{j_y} \rangle = \hat{g}(q, x+yxv)$$

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant montrer que l'automate reconnaît $L_1 \cap L_2$.

Une ramification r est reconnue si et seulement si,

si $(\widehat{fxg})(q_0, r) = \langle \langle q_{i_1}, t_{i_1} \rangle, \dots, \langle q_{i_r}, t_{i_r} \rangle \rangle$, alors

$$\langle q_{i_1}, t_{i_1} \rangle \in FxG, \dots, \langle q_{i_r}, t_{i_r} \rangle \in FxG$$

c'est-à-dire si et seulement si $q_{i_1}, \dots, q_{i_r} \in F$ et $t_{i_1}, \dots, t_{i_r} \in G$, ce qui est

vrai si et seulement si $r \in L_1$ et $r \in L_2$, d'après le lemme

4.7. Proposition

Tout bilangage grammatical est reconnu par un ARRI déterministe.

Démonstration

Soit $G = \langle V, \rightarrow, S \rangle$ une grammaire, avec $V = \{v_i \mid i=1, \dots, n\}$

Appelons $L_i, i=1, \dots, n$, l'ensemble des productions de $v_i, i=1, \dots, n$.

Les L_i étant des langages d'états finis, il existe des automates d'états finis

déterministes $\langle Q_i, V, q_{0_i}, F_i, f_i \rangle, i=1, \dots, n$ qui les reconnaissent de droite à

gauche ; il existe aussi un automate d'états finis déterministe $\langle Q_0, V, q_{0_0}, F_0, f_0 \rangle$

qui reconnaît S de droite à gauche ; enfin, on peut toujours supposer que les

$Q_i, i=0, \dots, n$ sont tous disjoints.

Alors le bilangage engendré par G est reconnu par l'ARRI déterministe

$\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ avec :

$$Q = \bigcup_{i=0}^n Q_i$$

$$q_0 = q_{0_0}$$

$$F = \bigcup_{i=0}^n F_i$$

$$f(q, v_j) = \langle f_i(q, v), q_{0_j} \rangle \quad \text{pour tout } q \in Q_i, i=0, \dots, n,$$

$$\text{pour tout } v_j \in V$$

Réciproquement, les bilangages grammaticaux ne forment pas une algèbre de Boole, contrairement aux bilangages reconnus par les ARRI déterministes, il existe des bilangages non grammaticaux reconnus par un ARRI déterministe. Comme exemple de tels bilangages, on peut citer le bilangage $L+L'$, où L est généré par la grammaire dont l'axiome est $\{a\}$, et les productions de a sont $\{a, \varepsilon\}$, et L' est généré par la grammaire dont l'axiome est $\{b\}$, les productions de b sont $\{b, a\}$ et les productions de a $\{\varepsilon\}$. On construit facilement un ARRI déterministe qui reconnaît $L+L'$; on trouvera dans [Qu] une démonstration de la non-grammaticalité de $L+L'$.

Nous résumons les propositions 4.5., 4.6. et 4.7. dans le théorème suivant :

4.8. Théorème

Les bilangages reconnus par les ARRI déterministes forment une sous-algèbre de Boole contenant les bilangages grammaticaux de l'algèbre de Boole des bilangages réguliers.

5. AUTOMATES DE RAMIFICATIONS REGULIERS PREFIXES ET PREFIXES INVERSES

En modifiant le principe de récurrence défini au chapitre 1 § 3.4., on peut définir des automates de ramifications préfixés et préfixés inversés, dont les propriétés sont identiques à celles des ARRI et des ARR.

5.1. Nouveau schéma de récurrence

5.1.1. Si \mathcal{P} est un prédicat tel que

- $\mathcal{P}(\Lambda)$ est vrai

- pour tout $r, s \in \hat{V}$, $\mathcal{P}(r)$ et $\mathcal{P}(s)$ impliquent $\forall A \in V \mathcal{P}(sxA+r)$

alors \mathcal{P} est vrai pour tout $r \in \hat{V}$

Ceci résulte immédiatement de ce que, pour tout $r \in \hat{V}$ non vide, il existe $A \in V$, $r, s \in \hat{V}$ uniques tels que $r = sxA+r$.

5.1.2. Définition par récurrence des applications de \hat{V} dans un ensemble E

Soient E un ensemble, e un élément de E, et $g_A: \hat{V}^2 \times E^2 \rightarrow E$ pour tout $A \in V$

Il existe alors une application f de \hat{V} dans E et une seule telle que $f(\Lambda) = e$

$$f(sxA+r) = g_A(r, s, f(r), f(s)) \text{ pour tout } A \in V, r, s \in \hat{V}$$

5.2. Automates de ramifications réguliers préfixés

Un automate de ramification régulier préfixé déterministe est un quintuplet $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ identique à un ARRI (4.1.), mais la fonction de transition généralisée $\hat{f}: Q \times \hat{V} \rightarrow Q^\infty$ est définie à l'aide du nouveau schéma de récurrence :

$$\hat{f}(q, \Lambda) = \langle q \rangle \text{ pour tout } q \in Q$$

$$\hat{f}(q, sxA+r) = \langle \hat{f}(f_1(q, A), s), \hat{f}(f_2(q, A), r) \rangle$$

pour tout $q \in Q, A \in V, r, s \in \hat{V}$.

Le langage reconnu par l'automate est l'ensemble des $r \in \hat{V}$ tels que pour tout $q \in \hat{f}(q_0, r), q \in F$.

La définition des ARR préfixés non déterministes se fait de la même façon à partir de la définition des ARRI non déterministes (4.2.).

5.3. Automates de ramifications réguliers préfixés inversés

Un automate de ramifications régulier préfixé inversé est un quintuplet $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ identique à un ARR postfixé, mais dont la fonction de transition généralisée $\hat{f} : \hat{V} \rightarrow Q$ est définie comme suit :

$$\hat{f}(\Lambda) = q \text{ pour tout } q, q' \in Q$$

$$\hat{f}(sxA+r) = f(\hat{f}(r), \hat{f}(s), A).$$

$$\text{pour tout } r, s \in \hat{V}, A \in V$$

Le langage reconnu par l'automate est l'ensemble des $r \in \hat{V}$ tels que $\hat{f}(r) \in F$.

La définition des ARR préfixés inversés non déterministes se fait de la même façon à partir de la définition des ARR postfixés non déterministes donnée au § 2.

5.4. Bilangages reconnus par les ARR préfixés et préfixés inversés

De la définition des ARR, il résulte immédiatement qu'un langage L est reconnu par un ARR préfixé déterministe (resp. préfixé non déterministe, préfixé inversé déterministe, préfixé inversé non déterministe) si et seulement si le langage réfléchi \tilde{L} est reconnu par un ARRI déterministe (resp. non déterministe, postfixé déterministe, postfixé non déterministe).

Il en résulte que les langages reconnus par les ARR préfixés non déterministes, préfixés inversés déterministes et préfixés inversés non déterministes sont les langages réguliers et eux seuls.

Les langages reconnus par les ARR préfixés déterministes forment une sous-classe des langages réguliers. L'identité de cette sous-classe et de celles des langages reconnus par les ARRI déterministes résulterait d'une éventuelle fermeture de ces classes pour la réflexion.

CHAPITRE 3

GENERATION DE BILANGAGES

Nous allons étudier dans ce chapitre des grammaires génératives de ramifications qui génèrent les bilangages réguliers et eux seuls. Pour cette raison, nous les appellerons grammaires de ramifications régulières (GRR). Cette étude est à rapprocher de celle de Brainerd [Br] sur des pseudo-arborescences sur un vocabulaire stratifié. Elle est une généralisation (comme celle de Brainerd) de l'étude de BUCHI sur les systèmes réguliers canoniques [Bu]

1. DEFINITION ET PROPRIETES DES GRR

1.1. Une GRR est un triplet $\langle V, P, \Gamma \rangle$ où

V est un vocabulaire fini

P un ensemble fini de règles de production du type $\varphi \rightarrow \psi$, avec $\varphi, \psi \in \hat{V}$

Γ est un ensemble fini de ramifications sur V , l'ensemble des axiomes.

1.2. Dérivation dans une GRR

1.2.1. Soit $G = \langle V, P, \Gamma \rangle$ une GRR, r, s des ramifications sur V , L (resp. R) l'ensemble des parties gauches (resp. droites) des règles de G .

Alors $r \xrightarrow{G} s$ (s est une conséquence immédiate de r dans G)

si et seulement si il existe $\varphi \rightarrow \psi \in P$ telle que $s \in S(\varphi, \psi, r)$, S étant l'application de $L \times R \times \hat{V}$ dans l'ensemble des parties finies de \hat{V} telle que, pour tout φ, ψ tels que $\varphi \rightarrow \psi \in P$,

$$S(\varphi, \psi, \Lambda) = \{\Lambda\}$$

et pour tout $t, u \in \hat{V}, A \in V$,

$$S(\varphi, \psi, t+uxA) = \begin{array}{ll} \text{si } \varphi \neq t+uxA & \text{alors} \\ \{S(\varphi, \psi, r)+sxA\} \cup \{r+S(\varphi, \psi, s)xA\} & \text{sinon } \{\psi\} \end{array}$$

Intuitivement $r \xrightarrow{G} s$ si et seulement si il existe $\varphi \rightarrow \psi \in P$ telle que φ est une sous-ramification complète à gauche de r , et s est obtenu en remplaçant dans r une occurrence complète à gauche de φ par une occurrence de ψ .

La relation de dérivation est obtenue à partir de \xrightarrow{G} de la façon suivante :

- (1) $r \xrightarrow{0} r$ pour tout $r \in \hat{V}$
- (2) $r \xrightarrow{k-1} s$ et $s \xrightarrow{G} t$ implique $r \xrightarrow{k} t$, $k \geq 1$
- (3) $r \xrightarrow{i} s$ si et seulement si il existe $i \geq 0$ tel que $r \xrightarrow{i} s$
 i est la longueur de la dérivation $r \xrightarrow{i} s$
 $r \xrightarrow{G} s$ (il existe une dérivation dans G de r à s) est la fermeture transitive de la relation \rightarrow

1.2.2. Bilangage généré par une GRR

On peut maintenant définir le bilangage L généré par

$$G = \langle V, P, \Gamma \rangle$$

$$L = \{r \in \hat{V} \mid \gamma \in \Gamma : \gamma \vdash r\}$$

1.3. Exemples de GRR

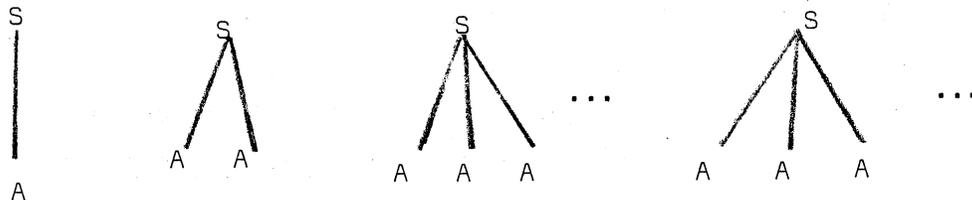
1.3.1.

$$V = \{S, A\}$$

$$P = \{A \rightarrow A \ A\}$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} S \\ | \\ A \end{array} \right\}$$

Le bilangage généré est

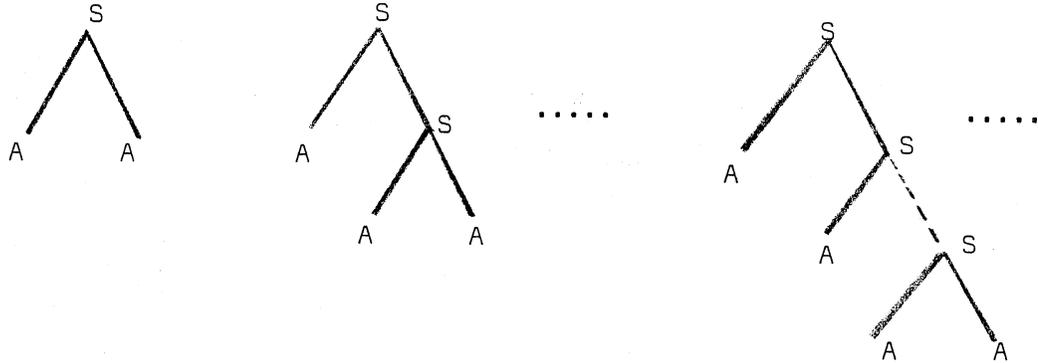


1.3.2. $V = \{S, A\}$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} A & A \\ \times & \times \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} A & S \\ \times & \end{array} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} S \\ / \quad \backslash \\ A \quad A \end{array} \right\}$$

Bilangage généré



1.4. Propriétés des sous-ramifications complètes à gauche

1.4.1. La notion de "sous-ramification complète à gauche" est identique à la notion de "sous-ramification" définie par QUERE [Qu] de la façon suivante : L'ensemble des sous-ramifications complètes à gauche de $r \in \hat{V}$ est la partie de \hat{V} SR(r) telle que :

$$SR(\Lambda) = \{\Lambda\}$$

$$SR(t+uxA) = SR(r) \cup SR(u) \cup \{t+uxA\}$$

QUERE a démontré que la relation "sous-ramification complète à gauche" est une relation d'ordre partielle sur \hat{V} .

1.4.2. La notion d'occurrence d'une sous-ramification complète à gauche d'une ramification peut être définie à partir de la notion d'occurrence d'une sous-chaîne d'une chaîne de la façon suivante :

Soit r une sous-ramification complète à gauche de s , \hat{r} l'expression parenthésée postfixée complète représentant r , \hat{s} l'expression totalement parenthésée postfixée de s .

Les occurrences de \hat{r} (c'est-à-dire de \hat{r} immédiatement à droite d'une parenthèse ouvrante) dans \hat{s} , et elles seules, définissent les occurrences complètes à gauche de r dans s .

1.4.3. Soient r et s deux occurrences complètes à gauche de deux sous-ramifications pas nécessairement distinctes d'une ramification x . On n'a alors que trois possibilités :

- r et s sont disjointes
- r est une occurrence complète à gauche de s
- s est une occurrence complète à gauche de r

1.5. Propriété des GRR

Soient (1) $\varphi_1 \rightarrow \psi_1$ et (2) $\varphi_2 \rightarrow \psi_2$ deux règles d'une GRR G et soit r une ramification possédant une occurrence de φ_1 et une de φ_2 complètes à gauche disjointes. Alors les règles (1) et (2) peuvent être appliquées dans n'importe quel ordre avec le même résultat.

1.6. Grammaires de ramifications avec vocabulaire non terminal

C'est un quadruplet $\langle V_T, V_N, P, \Gamma \rangle$ où

V_T et V_N sont des vocabulaires finis, comprenant respectivement les éléments terminaux et non terminaux. $V_T \cap V_N = \emptyset$

P est un ensemble de règle $\varphi \rightarrow \psi$, avec $\varphi, \psi \in \widehat{V_T \cup V_N}$

Γ est un ensemble fini d'éléments de $\widehat{V_T \cup V_N}$

Une dérivation est définie de la même façon qu'en 1.2., mais le langage généré L ne contient que les ramifications ne comportant pas d'éléments non terminaux :

$$L = \{r \in \widehat{V_T} \mid \exists \gamma \in \Gamma : \gamma \vdash r\}$$

Les GRR définies en 1.1. sont un cas particulier des grammaires avec vocabulaire terminal.

Nous verrons par la suite que l'introduction d'éléments non terminaux n'argumente pas la capacité générative des GRR. Il s'agit simplement d'un outil commode dans beaucoup de démonstrations. D'autre part, l'analogie avec les grammaires de chaînes donne certains résultats.

Les grammaires que nous considérerons dans ce paragraphe pourront être tels que $V_N \neq \emptyset$. On pose $V = V_T \cup V_N$.

1.7. Proposition

Soit $x = r+sxA$, $x' = r'+s'xA$ des ramifications sur \hat{V} , $A \in V$.
 Supposons qu'il existe une dérivation $D = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$, avec $x_0 = x$,
 $x_n = x'$, telle que pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$, la partie gauche de la règle
 appliquée à x_i est une sous-ramification stricte complète à gauche de x_i .

Alors $r \vdash r'$ et $s \vdash s'$

Réciproquement $r \vdash r'$ et $s \vdash s'$ impliquent $x \vdash x'$.

Démonstration

1. Par récurrence sur la longueur de la dérivation n

i) $n = 0 \Rightarrow x = x' \Rightarrow r = r'$ et $s = s' \Rightarrow r \vdash r'$ et $s \vdash s'$

ii) vrai pour toute dérivation de longueur $n-1 \Rightarrow$ vrai pour toute dérivation
 de longueur n

$$x_0 = x = r+sxA$$

$$x_1 = r_1+sxA \text{ ou } r+s_1xA \Rightarrow r_1 \vdash r \text{ ou } s \vdash s_1$$

$x_1 \vdash x'$ et la longueur de la dérivation est $n-1$. Donc, par hypothèse
 de récurrence, $(r_1 \vdash r' \text{ et } s \vdash s')$ ou $(r \vdash r' \text{ et } s_1 \vdash s')$ et, \vdash étant
 transitive, $(r \vdash r' \text{ et } s \vdash s')$ dans les deux cas.

2. $r \vdash r' \Rightarrow r+sxA \vdash r'+sxA$

$s \vdash s' \Rightarrow r'+sxA \vdash r'+s'xA$

et par transitivité $r+sxA \vdash r'+s'xA$

1.8. Définitions

1.8.1. Deux GRR sont dites équivalentes si elles génèrent le même langage.

1.8.2. Une GRR est dite simple si

- elle possède un seul axiome, consistant en une ramification réduite à
 un seul symbole non terminal, soit S
- toutes ses règles de production sont de l'une des formes suivantes :

$$X \rightarrow \Lambda$$

$$X \rightarrow A$$

$$X \rightarrow Y+A$$

$$X \rightarrow TXA$$

$$X \rightarrow Y+TXA$$

$$X \rightarrow X'$$

$$\begin{aligned}\Lambda &\rightarrow X \\ A &\rightarrow X \\ Y+A &\rightarrow X \\ TxA &\rightarrow X \\ Y+TxA &\rightarrow X\end{aligned}$$

où X, Y, T, X' sont des symboles non terminaux,
 A est un symbole terminal, Λ est la ramification vide, $+$ et \times les opérations de concaténation et d'enracinement sur \hat{V} .

1.8.3. Une GRR est dite expansive si

- elle possède un seul axiome, consistant en une ramification réduite à un seul élément non terminal, soit S

- toutes ses règles de production sont de l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned}X &\rightarrow \Lambda \\ X &\rightarrow A \\ X &\rightarrow Y+A \\ X &\rightarrow TxA \\ X &\rightarrow Y+TxA\end{aligned}$$

avec les mêmes notations que précédemment.

Nous allons maintenant montrer que pour toute GRR, on peut trouver une GRR simple et une GRR expansive équivalentes.

1.9. Lemme

Pour toute GRR $G = \langle V, P, \Gamma \rangle$, on peut trouver une GRR G' équivalente $\langle V', P', \{S\} \rangle$, qui a un seul axiome S réduit à un seul symbole non terminal.

Démonstration

$$\text{Soit } S \notin V \quad V' = V \cup \{S\} \quad P' = P \cup \{S \rightarrow \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

On a bien évidemment $L(G') = L(G)$.

1.10. Théorème

Pour toute GRR $G = \langle V, P, \Gamma \rangle$, on peut trouver une GRR simple $G' = \langle V', P', \{S\} \rangle$ équivalent à G .

Démonstration

Le lemme 1.9. permet de supposer que $\Gamma = \{S\}$, $S \in V_N$
P' va être construite de la façon suivante :

Pour toute règle $\varphi_i \rightarrow \psi_i \in P$, on introduit de nouveaux symboles non terminaux U_k^i et $V_{k'}^i$, $0 \leq k < n$, $0 \leq k' < m$, n et m étant le nombre de sommets de φ_i et ψ_i respectivement.

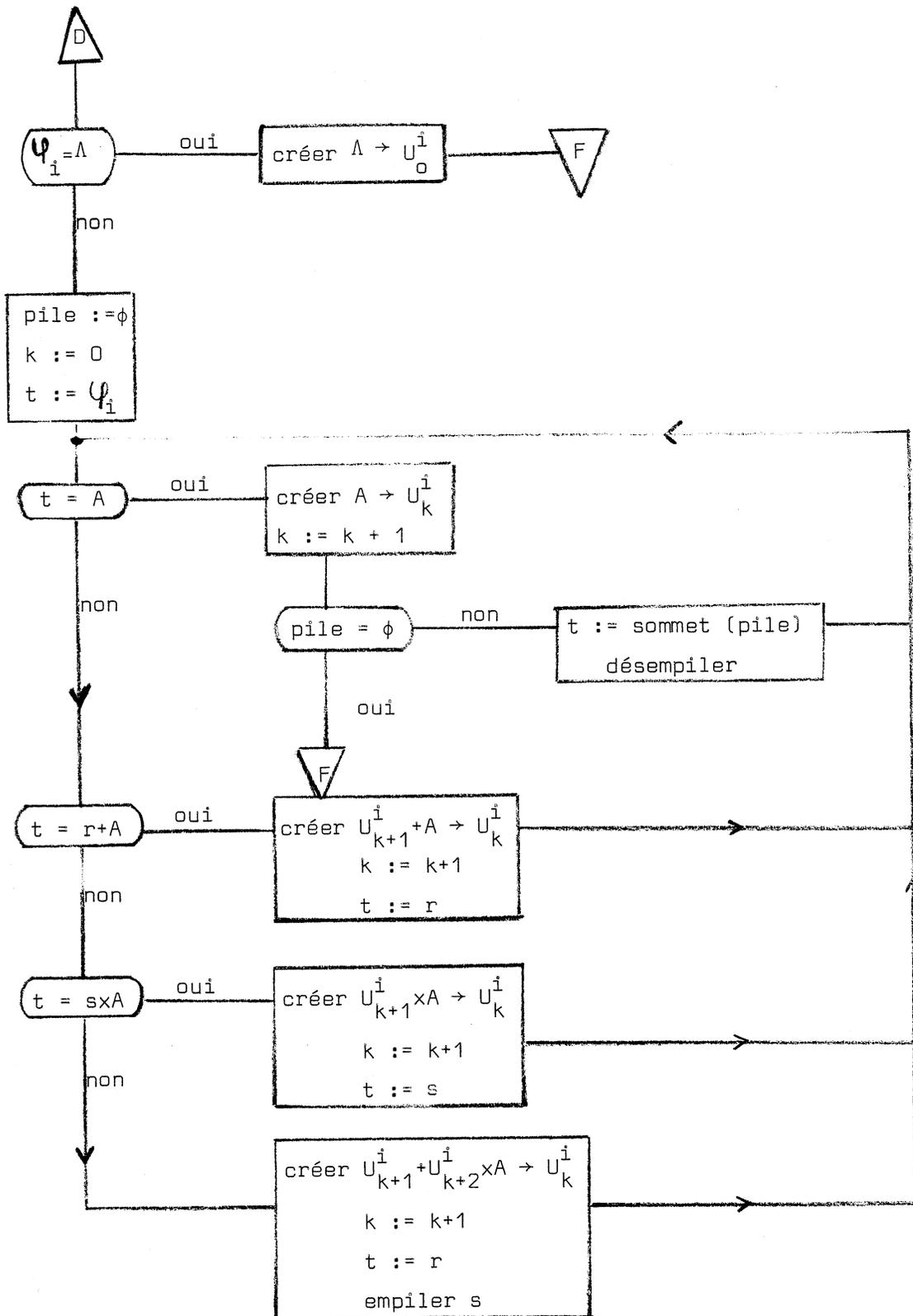
On crée ensuite

- i) des règles qui vont réduire la ramification φ_i sommet par sommet au seul U_0^i
- ii) la règle $U_0^i \rightarrow V_0^i$
- iii) des règles qui vont générer ψ_i sommet par sommet à partir de V_0^i

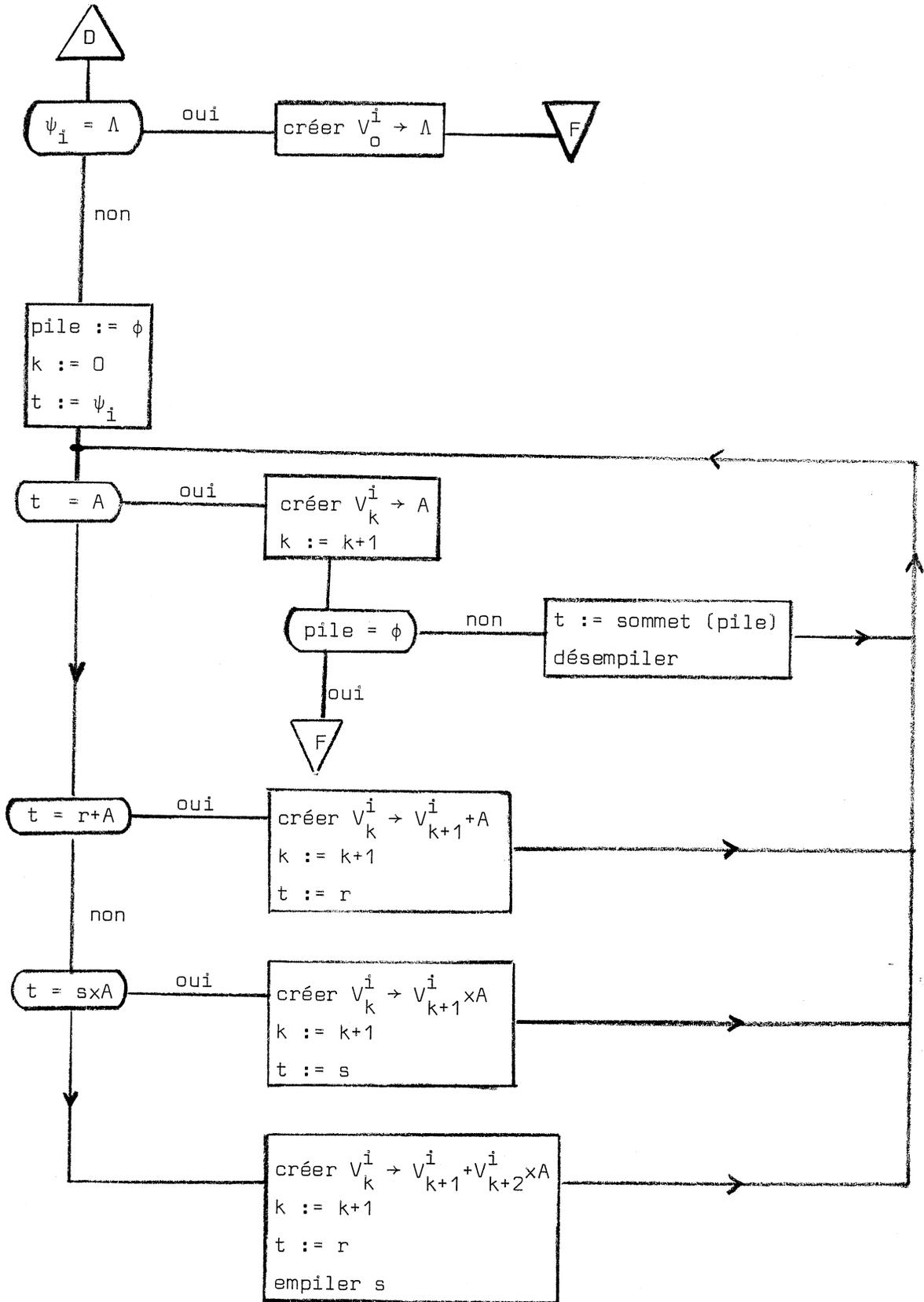
Les phases i) et iii) sont définies précisément par les algorithmes suivants.

Notations : Λ est la ramification vide, r et s des ramifications non vides sur \hat{V} , A un élément quelconque de V .

Phase i) réduction de ψ_i à U_0^i



Phase iii) génération de ψ_i à partir de V_o^i



Soit $G' = \langle V', P', Z \rangle$ avec $V' = \bigcup \{U_K^i\} \cup \{V_K^i\}$ et P' égal à l'ensemble des règles créées au cours des phases i) ii) iii)
 G' est une GRR simple.

$L(G) \subset L(G')$

En effet, par construction de G' , $\varphi_i \xrightarrow{G} \psi_i$ implique $\varphi_i \xrightarrow{G'} \psi_i$.

D'autre part, la propriété suivante :

"Soit r une ramification, x une sous-ramification complète à gauche de r , r' la ramification obtenue à partir de r en changeant x en x' .

Alors $x \xrightarrow{G} x'$ implique $r \xrightarrow{G} r'$ "

résulte immédiatement de la transitivité de la relation "sous ramification complète à gauche".

Il s'en suit que $r \in L(G)$ implique $r \in L(G')$.

$L(G') \subset L(G)$

$r \in L(G') \Leftrightarrow S \xrightarrow{G'} r$

On simule la déduction de S vers r dans G' par une déduction dans G obtenue de la façon suivante : chaque fois que l'on applique dans G' une règle $U_0^i \rightarrow V_0^i$, on applique dans G la règle $\varphi_i \rightarrow \psi_i$. On obtient ainsi une déduction de S vers r dans G . En effet, pour pouvoir appliquer la règle $U_0^i \rightarrow V_0^i$, il faut avoir au préalable appliqué toutes les règles contractantes de G' qui permettent de construire U_0^i . Ceci implique qu'auparavant, φ_i soit une sous-ramification complète à gauche. Donc $\varphi_i \rightarrow \psi_i$ peut s'appliquer. D'autre part, une fois V_0^i obtenu, on peut appliquer, dans cette partie de la ramification, que les règles expansives de G' , et on est obligé de les appliquer toutes pour éliminer les non-terminaux. On se retrouve alors avec la ramification ψ_i .

Remarques

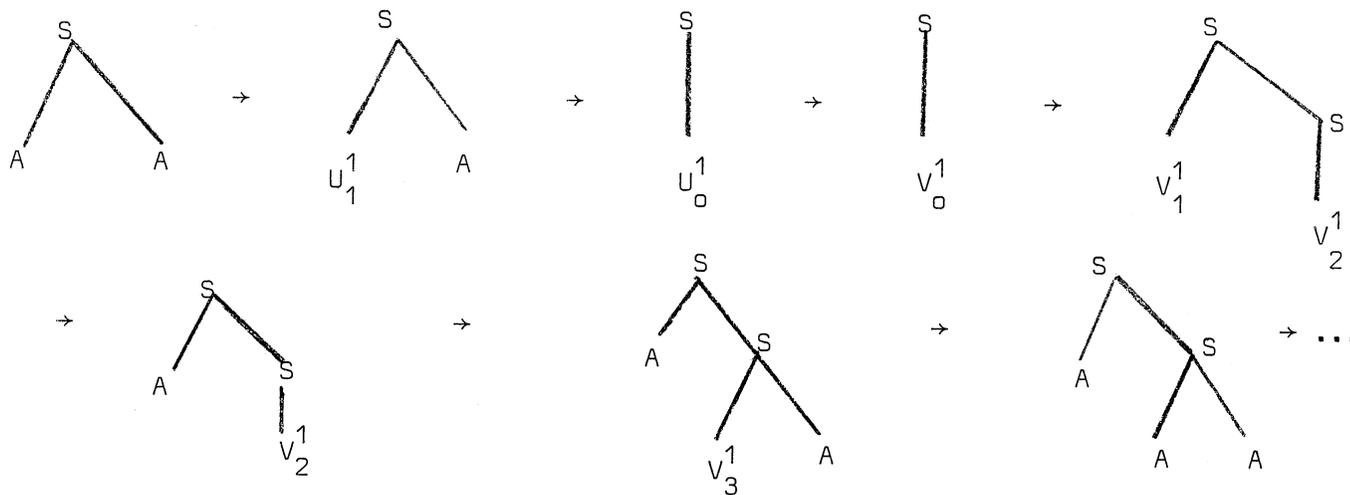
1) Dès qu'on a appliqué à φ_i , dans G' , la première règle contractante, on ne peut plus appliquer, pour obtenir une ramification terminale, que les règles conduisant à ψ_i dans cette partie de la ramification (on peut aussi appliquer des règles du type $\Lambda \rightarrow X$. Mais alors, soit $\Lambda \xrightarrow{G'} \Lambda$, auquel cas on peut trouver une dérivation équivalente sans ces règles, soit $\Lambda \xrightarrow{G'} \psi \neq \Lambda \in \hat{V}_T$, mais alors, on ne peut plus dériver de ramification terminale). Par contre, on peut appliquer d'autres règles sur des sous-ramifications complètes à gauche disjointes de φ_i . La propriété 1.5. permet toutefois de construire une dérivation dans G' où toutes les règles concernant le passage de φ_i à ψ_i s'appliquent les unes à la suite des autres.

Exemple

Construisons G' simple équivalente à la grammaire 1.4.2. (sans tenir compte de l'axiome). Ces règles sont :

$$\begin{array}{l}
 U_{x1}^1 \quad A \rightarrow U_0^1 \\
 A \rightarrow U_1^1 \\
 U_0^1 \rightarrow V_0^1 \\
 V_0^1 \rightarrow V_{1x}^1 \\
 \\
 V_1^1 \rightarrow A \\
 V_2^1 \rightarrow V_{3x}^1 \quad A \\
 V_3^1 \rightarrow A
 \end{array}$$

et les dérivations



1.11. Lemme

Pour toute GRR simple $G = \langle V, P, \{S\} \rangle$, on peut trouver une GRR expansive $G' = \langle V, P', \{S\} \rangle$ équivalente à G .

Démonstration

$$P' = \{X \rightarrow \Lambda \mid X \stackrel{G}{\vdash} \Lambda\} \cup \{X \rightarrow A \mid X \stackrel{G}{\vdash} A\} \cup \{X \rightarrow Y+A \mid X \stackrel{G}{\vdash} Y+A\} \\ \cup \{X \rightarrow TxA \mid X \stackrel{G}{\vdash} TxA\} \cup \{X \rightarrow Y+TxA \mid X \stackrel{G}{\vdash} Y+TxA\}$$

avec $X, T, Y \in V_N, A \in V_T$

On a évidemment $L(G') \subset L(G)$

Pour montrer que $L(G) \subset L(G')$, montrons la proposition plus forte

$X \stackrel{G}{\vdash} x \in \hat{V}_T$ implique $X \stackrel{G'}{\vdash} x$, pour tout $X \in V_N$.

On procède par récurrence sur x .

i) La proposition est vraie pour $x = \Lambda$

En effet $X \stackrel{G}{\vdash} \Lambda \Leftrightarrow X \rightarrow \Lambda \in P' \Rightarrow X \stackrel{G}{\vdash} \Lambda \Rightarrow X \stackrel{G'}{\vdash} \Lambda$

ii) Si la proposition est vraie pour r, s , elle est vraie pour tout $r+sxA, A \in V_N$

$X \stackrel{G}{\vdash} r+sxA \Leftrightarrow \exists x_0, \dots, x_m$, tels que $x_i \stackrel{G}{\vdash} x_{i+1} \quad 0 \leq i < m$

et $x_0 = X, x_m = r+sxA$

Désignons par $D(x)$ le dernier sommet suivant l'ordre postfixé de la ramification x .

Soit $x_k, 0 \leq k < m$ la ramification telle que $D(x_k) \neq A$ et que, $D(x_{k+1}) = \dots = D(x_m) = A$.

G étant simple, on doit avoir $x_k = X' \in V_N$ et $x_{k+1} = A$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA, Y, T \in V_N$.

Mais alors $X \stackrel{G}{\vdash} A$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA$, et alors $X \rightarrow A$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA \in P'$.

Mais, d'après la proposition 1.7., $Y \stackrel{G}{\vdash} r$ et/ou $T \stackrel{G}{\vdash} s$.
Donc, par hypothèse de récurrence, $Y \stackrel{G'}{\vdash} r$ et/ou $T \stackrel{G'}{\vdash} s$ et finalement, dans tous les cas, $X \stackrel{G'}{\vdash} r+sxA$.

Remarque : La démonstration du lemme 1.11 est effective (c'est-à-dire la grammaire expansive G' peut être construite par un programme) si et seulement si les prédicats $X \vdash \Lambda, X \vdash Y+A, X \vdash TxA$ et $X \vdash Y+TxA$ sont décidables pour les GRR simples. Ceci est vrai et sera démontré dans un chapitre ultérieur. (Chapitre 4, Th. 2).

1.12. Théorème

Pour toute GRR, on peut trouver une GRR expansive qui lui est équivalente.

La démonstration résulte immédiatement du théorème 1.10. et de la proposition 1.11.

1.13. Grammaire expansive réduite

C'est une grammaire expansive $\langle V, P, \{S\} \rangle$ telle que $X \rightarrow \Lambda \in P$ seulement si $X = S$.

Seul l'axiome peut apparaître en partie gauche d'une règle dont la partie droite est la ramification vide.

1.14. Proposition

Pour toute GRR expansive $\langle V, P, \{S\} \rangle$, on peut trouver une GRR expansive réduite $\langle V, P', \{S\} \rangle$ équivalente.

Démonstration

P' contient toutes les règles de P $\varphi \rightarrow \psi$ avec $\psi \neq \Lambda$ ou $\varphi = S$.
 Pour chaque règle $X \rightarrow \Lambda \in P$ avec $X \neq S$, on applique l'algorithme suivant :
 si X n'apparaît en partie droite d'aucune règle de P , il est parasite dans G .
 On ne crée alors aucune règle correspondante dans P' .
 Sinon pour tout $T \rightarrow X+A \in P$, on crée dans P' $T \rightarrow X+A$ et $T \rightarrow A$
 pour tout $T \rightarrow XxA \in P$, on crée dans P' $T \rightarrow XxA$ et $T \rightarrow A$
 pour tout $T \rightarrow X+XxA \in P$, on crée dans P' $T \rightarrow X+XxA$, $T \rightarrow X+A$, $T \rightarrow XxA$, $T \rightarrow A$
 pour tout $T \rightarrow Y+XxA \in P$, on crée $T \rightarrow Y+XxA$ et $T \rightarrow Y+A$
 pour tout $T \rightarrow X+YxA \in P$, on crée $T \rightarrow X+YxA$ et $T \rightarrow YxA$
 $\langle V, P', \{S\} \rangle$ est expansive réduite et génère le même langage que $\langle V, P, \{S\} \rangle$

1.15. Théorème

Pour toute GRR, on peut trouver une GRR expansive réduite équivalente
 La démonstration résulte immédiatement du théorème 1.12. et de la proposition 1.14.

La ramification vide est générée par une grammaire expansive réduite $\langle V, P, \{S\} \rangle$ si et seulement si $S \rightarrow \Lambda \in P$.

Les GRR expansives réduites sont l'équivalent pour les ramifications des grammaires d'états finis dont les règles autre que $S \rightarrow \epsilon$ sont du type $X \rightarrow Ya$ ou $X \rightarrow a$, X et Y étant des symboles non terminaux et a un symbole terminal.

2. EQUIVALENCE DES GRAMMAIRES DE RAMIFICATIONS REGULIERES ET DES AUTOMATES DE RAMIFICATIONS REGULIERS

Cette équivalence est exprimée par le théorème suivant :

Théorème

Les bilangages générés par les grammaires de ramifications régulières (avec ou sans non terminaux) sont les bilangages réguliers et eux seuls.

Démonstration

2.1. Proposition

Tout bilangage généré par un GRR (avec ou sans non terminaux) est régulier.

Démonstration

D'après le théorème 1.14., à toute GRR, on peut associer une GRR G expansive réduite équivalente.

Soit $G = \langle V_T, V_N, P, \{S\} \rangle$ une GRR expansive réduite

Soit $A(G) = \langle Q, V_T, Q_0, \{S\}, f \rangle$ l'ARR (éventuellement non déterministe) ainsi construit

$Q = \underline{\text{si}} \Lambda \in L(G) \underline{\text{alors}} V_N \underline{\text{sinon}} V_N \cup \{q_0\}, q_0 \notin V_N$

$Q_0 = \underline{\text{si}} \Lambda \in L(G) \underline{\text{alors}} \{S\} \underline{\text{sinon}} \{q_0\}$

$f(q_0, q_0, A) \ni X \iff X \rightarrow A \in P$

$f(Y, q_0, A) \ni X \iff X \rightarrow Y+A \in P$

$f(q_0, Z, A) \ni X \iff X \rightarrow ZxA \in P$

$f(Y, Z, A) \ni X \iff X \rightarrow Y+ZxA \in P$

pour tout $X, Y, Z \in V_N, A \in V_T$

Pour montrer que $r \in L(G) \iff r \in L(A(G))$, c'est-à-dire que $S \xrightarrow{G} r \iff \hat{f}(r) \ni S$, prouvons la proposition plus forte suivante :

pour tout $X \in V_N, X \xrightarrow{G} r \iff \hat{f}(r) \ni X$

On procède par récurrence sur r .

i) La proposition est vraie pour $r = \Lambda$, car

$$X \xrightarrow{G} \Lambda \Leftrightarrow X \rightarrow \Lambda \quad P \Leftrightarrow X = S \Leftrightarrow q_0 = S$$

ii) Si la proposition est vraie pour $r, s \in \hat{V}_T$, elle est vraie pour tout $r+sxA, A \in V_T$

a) $r = s = \Lambda$

$$X \xrightarrow{G} \Lambda \Leftrightarrow X \rightarrow \Lambda \in P \Leftrightarrow f(q_0, q_0, A) \ni X \Leftrightarrow \hat{f}(\Lambda) \ni X$$

b) $r = \Lambda, s \neq \Lambda$

$$X \xrightarrow{G} sxA \Leftrightarrow X \rightarrow YxA \in P \text{ et } Y \xrightarrow{G} s \Leftrightarrow f(q_0, Y, A) \ni X \text{ et } \hat{f}(s) \ni Y \Leftrightarrow \hat{f}(sxA) = f(q_0, \hat{f}(s), A) \ni X$$

c) $r \neq \Lambda, s = \Lambda$

$$X \xrightarrow{G} r+A \Leftrightarrow X \rightarrow Y+A \in P \text{ et } Y \xrightarrow{G} r \Leftrightarrow f(Y, q_0, A) \ni X \text{ et } \hat{f}(r) \ni Y \Leftrightarrow \hat{f}(r+A) = f(\hat{f}(r), q_0, A) \ni X$$

d) $r \neq \Lambda, s \neq \Lambda$

$$X \xrightarrow{G} r+sxA \Leftrightarrow X \rightarrow Y+ZxA \in P \text{ et } Y \xrightarrow{G} r \text{ et } Z \xrightarrow{G} s \Leftrightarrow f(Y, Z, A) \ni X \text{ et } \hat{f}(r) \ni Y \text{ et } \hat{f}(s) \ni Z \Leftrightarrow \hat{f}(r+sxA) = f(\hat{f}(r), \hat{f}(s), A) \ni X$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.

2.2. Proposition

Tout bilangage régulier est généré par une GRR sans non terminaux.

Démonstration

L régulier \Leftrightarrow il existe un ARR déterministe $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ qui le reconnaît.

Notons $\#Q$ le nombre d'éléments de Q , et pour toute ramification r , $h(r)$ sa hauteur, $l(r)$ sa largeur (cf. chapitre 1), $\#r$ le nombre de ses sommets.

Considérons la GRR $G = \langle V, P, \Gamma \rangle$ avec

$$P = \{ \varphi \rightarrow \psi \mid ((h(\varphi) < h(\psi) = \#Q \text{ et } l(\varphi) < \#Q \text{ et } l(\psi) < \#Q) \text{ ou } (h(\varphi) < \#Q \text{ et } h(\psi) < \#Q \text{ et } l(\varphi) < l(\psi) = \#Q)) \text{ et } (f(\varphi) = f(\psi)) \}$$

$$\Gamma = \{r \in L \mid h(r) < \#Q \text{ et } la(r) < \#Q\}$$

G est une GRR car P et Γ sont finis.

2.2.1. $L(G) \subseteq L$

$r \in L(G) \Rightarrow \exists s \in \Gamma$ tel que $s \xrightarrow{G} r$
 $\hat{f}(r) = \hat{f}(s)$ par définition de P
 Or $\hat{f}(s) \in F$ par définition de Γ
 Donc, $\hat{f}(r) \in F \Leftrightarrow r \in L$

2.2.2. $L \subseteq L(G)$

2.2.2.1. Lemme

Soit A un ARR déterministe, $\#Q$ le nombre de ses états. Pour tout $q \in Q$, s'il existe une ramification r telle que $\hat{f}(r) = q$, alors il existe une ramification s telle que $h(s) < \#Q$, $la(s) < \#Q$ et $\hat{f}(s) = q$.

La démonstration de ce lemme sera faite dans le chapitre consacré aux problèmes de décision pour les bilangages (chapitre 3, 3.1.1.).

2.2.2.2. Lemme

Pour tout $r \in \hat{V}$, il existe $s \in \hat{V}$ tel que $h(s) < \#Q$ et $la(s) < \#Q$,
 $s \xrightarrow{G} r$ et $\hat{f}(s) = \hat{f}(r)$

Démonstration

a) si $h(r) < \#Q$ et $la(r) < \#Q$, alors $s = r$

b) si $h(r) \geq \#Q$ et $la(r) < \#Q$, soit r' une sous-ramification complète à gauche de r telle que $h(r') = \#Q$ (on a toujours $la(r') \leq la(r) < \#Q$).

Le lemme 2.2.2.1. implique : $\exists s'$ tel que $h(s') < h(r') = \#Q$,
 $la(s') < \#Q$, $\#s' < \#r'$ et $\hat{f}(s') = \hat{f}(r')$.

Alors $s' \rightarrow r' \in P$.

Soit s_1 une ramification obtenue à partir de r en remplaçant une occurrence complète à gauche de r' par s' . $\# s_1 < \# r$. Alors $s_1 \xrightarrow{G} r$ car $s' \rightarrow r' \in P$. D'autre part, $\hat{f}(s_1) = \hat{f}(r)$ car $\hat{f}(s') = \hat{f}(r')$.

Si $h(s_1) \geq \# Q$ et $la(s_1) < \# Q$, on applique l'algorithme b) à s_1 pour obtenir s_2 .

Si $h(s_1) < \# Q$ et $la(s_1) \geq \# Q$, on applique l'algorithme c) (voir plus bas)

Si $h(s_1) \geq \# Q$ et $la(s_1) \geq \# Q$, on applique l'algorithme d) (voir plus bas)

Si $h(s_1) < \# Q$ et $la(s_1) < \# Q$, on s'arrête.

Donc, on sort de b) avec une ramification s telle que $\# s < \# r$, telle que $s = s_j \rightarrow s_{j-1} \rightarrow \dots \rightarrow s_1 \rightarrow r$ dans G et $\hat{f}(s) = \hat{f}(s_j) = \dots = \hat{f}(r)$.

c) si $h(r) < \# Q$ et $la(r) \geq \# Q$, soit r' une sous-ramification complète à gauche de r telle que $la(r') = \# Q$

D'après le lemme 2.2.2.1., il existe s' telle que $h(s') \leq h(r') < \# Q$ et $la(s') < la(r') = \# Q$ et $\hat{f}(s') = \hat{f}(r')$, et $\# s' < \# r'$

Alors $s' \rightarrow r' \in P$

Soit s_1 une ramification obtenue à partir de r en remplaçant une occurrence complète à gauche de r' par s' . On a :

$h(s_1) \leq h(r') < \# Q$ et $\# s_1 < \# r$

$s_1 \xrightarrow{G} r$ car $s' \rightarrow r' \in P$. D'autre part, $\hat{f}(s_1) = \hat{f}(r)$ car $\hat{f}(s') = \hat{f}(r')$

Comme $h(s_1) < \# Q$, deux cas sont possibles :

1) $la(s_1) < \# Q$. Alors, on s'arrête

2) $la(s_1) \geq \# Q$. On répète l'algorithme c) pour obtenir s_2, s_3, \dots

($h(s_2), h(s_3), \dots < \# Q$), mais puisque à chaque pas $la(s') < la(r')$, l'algorithme se termine après un nombre fini de pas avec $h(s_i) < \# Q$ et $la(s_i) < \# Q$ et

$s = s_i \rightarrow s_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow s_1 \rightarrow r$ dans G et
 $\hat{f}(s) = \hat{f}(s_i) = \dots = \hat{f}(r)$

d) si $h(r) \geq \# Q$ et $la(r) \geq \# Q$

Soit r_1 une sous-ramification complète à gauche de r telle que

ou bien $h(r_1) < \# Q$ et $la(r_1) \geq \# Q$

ou bien $h(r_1) \geq \# Q$ et $la(r_1) < \# Q$

On applique alors à r_1 l'algorithme de c) (respectivement b)).

Soit s_1 la ramification obtenue. Elle est dans tous les cas telle que

$$s_1 \xrightarrow{G} r_1, \# s_1 < \# r_1, \hat{f}(s_1) = \hat{f}(r_1)$$

Soit s une ramification obtenue en remplaçant dans r une occurrence complète à gauche de r_1 par s_1

$$s \xrightarrow{G} r, \# s < \# r, \hat{f}(s) = \hat{f}(r)$$

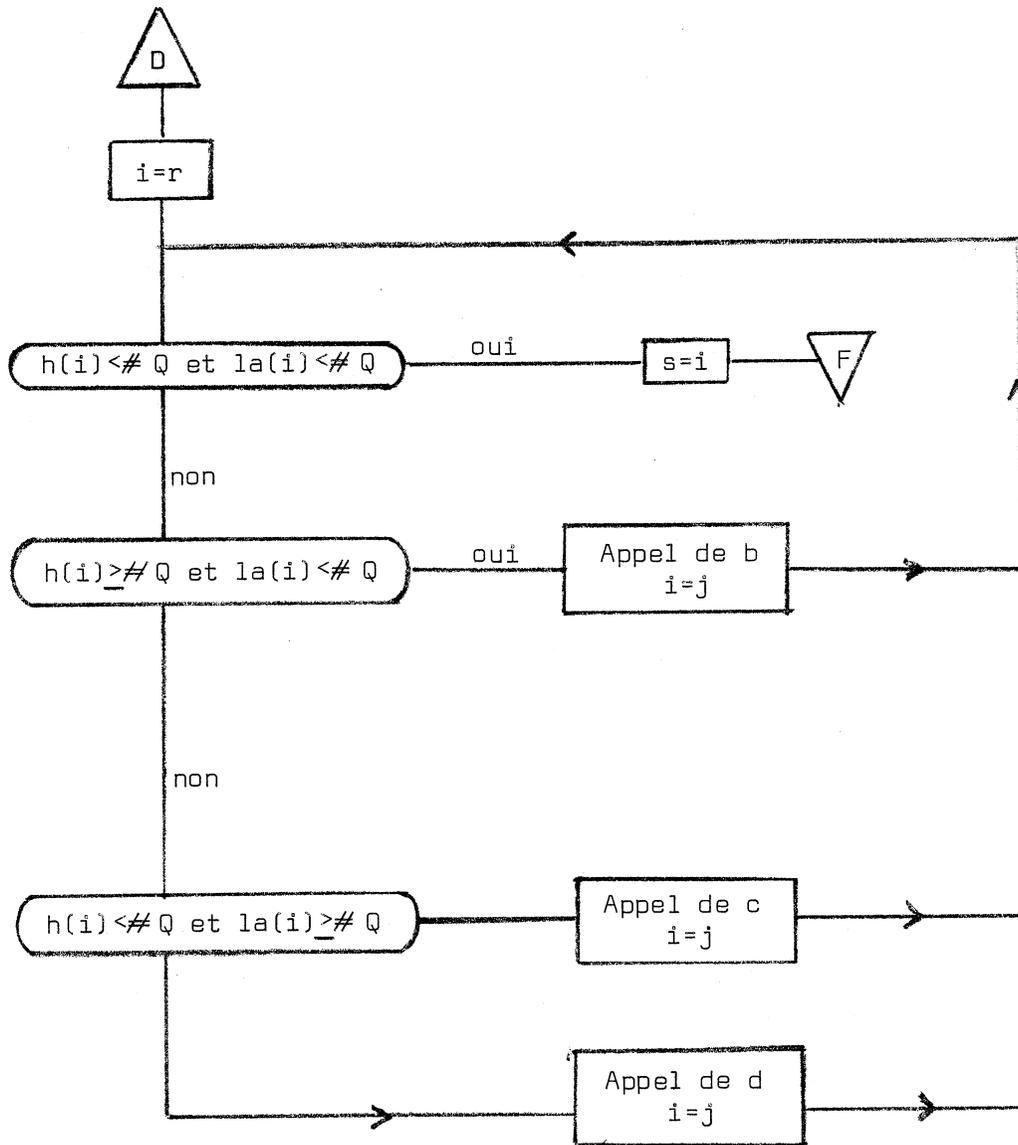
si $h(s) < \# Q$ et $la(s) < \# Q$ on s'arrête

si $h(s) \geq \# Q$ et $la(s) < \# Q$ on applique b)

si $h(s) < \# Q$ et $la(s) \geq \# Q$ on applique c)

si $h(s) \geq \# Q$ et $la(s) \geq \# Q$ on applique d)

Comme dans tous les cas, le nombre d'éléments de la ramification diminue strictement à chaque pas, on s'arrête au bout d'un nombre fini de pas avec une ramification satisfaisant les conditions du lemme 2.2.2.2. La démonstration du lemme 2.2.2.2. peut être schématisée par l'organigramme suivant. b, c, et d sont les algorithmes précédents. Pour chaque ramification d'entrée i , ils fournissent comme résultat la ramification j .



Prouvons maintenant que $r \in L$ implique $r \in L(G)$

$r \in L \Leftrightarrow \hat{f}(r) = q \in F$.

D'après le lemme 2.2.2.2., il existe $s \in \hat{V}$ tel que $h(s) < \# Q$, $la(s) < \# Q$,

$s \xrightarrow{G} r$ et $\hat{f}(s) = \hat{f}(r) = q \in F$.

Mais alors $s \in \Gamma$ et $s \xrightarrow{G} r$ implique $r \in L(G)$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Corollaire

Pour toute GRR, on peut trouver un GRR $\langle V, P, \Gamma \rangle$ sans non terminaux et telle que pour tout $\varphi \rightarrow \psi \in P$, $\psi \neq \Lambda$.

2.3. Théorème

Soit $G = \langle V, P, \Gamma \rangle$ une GRR telle que $\varphi \rightarrow \psi \in P \Rightarrow \psi \neq \Lambda$ et avec un ensemble d'axiomes infini régulier. Alors $L(G)$ est un langage régulier.

Démonstration

Γ régulier \Rightarrow il existe une grammaire expansive $G' = \langle V', P', \{S\} \rangle$ qui génère Γ . On peut toujours supposer que $V_N \cap V'_N = \emptyset$. Soit $G'' = \langle V'', P'', \{S\} \rangle$ avec $V'' = V \cup V'$, $P'' = P \cup P'$. Nous allons montrer que $L(G'') = L(G)$.

2.3.1. $L(G) \subseteq L(G'')$

$$\begin{aligned} r \in L(G) &\Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma \xrightarrow{G} r \Rightarrow \gamma \xrightarrow{G''} r \text{ car } P \subseteq P'' \\ \gamma \in \Gamma &\Rightarrow S \xrightarrow{G'} \gamma \Rightarrow S \xrightarrow{G''} \gamma \text{ car } P' \subseteq P'' \\ S \xrightarrow{G''} \gamma, \gamma \xrightarrow{G''} r &\Rightarrow S \xrightarrow{G''} r \Leftrightarrow r \in L(G'') \end{aligned}$$

2.3.2. $L(G'') \subseteq L(G)$

Soit $r \in L(G'')$. Alors il existe une dérivation de S vers r dans G'' . Si cette dérivation est de longueur < 2 , elle est de longueur 1, car $S \notin V$, donc $S \xrightarrow{G'} r$, car $S \notin V_N$, alors $r \in \Gamma$ et $r \in L(G)$.

Si la dérivation est de longueur ≥ 2 , alors il existe r_{i-1}, r_i, r_{i+1} tels que :

$$S \xrightarrow{*} r_{i-1} \rightarrow r_i \rightarrow r_{i+1} \xrightarrow{*} r$$

Supposons que l'on passe de r_{i-1} à r_i par application d'une règle de P et de r_i à r_{i+1} par application d'une règle de P' . G' étant expansive, il existe une occurrence complète à gauche d'une ramification X , $X \in V'_N$, dans r_i .

D'autre part, r_i étant obtenue à partir de r_{i-1} par application d'une règle $\varphi \rightarrow \psi \in P$, il existe une occurrence complète à gauche de ψ dans r_i .

ψ étant une ramification non vide de \hat{V} , les occurrences de ψ et X dans r_i sont disjointes.

Alors r_{i-1} contient des occurrences disjointes de φ et X . D'après la proposition 1.5., on peut intervertir l'ordre d'application des deux règles sans changer le résultat.

En procédant ainsi de proche en proche, on obtient une dérivation de S vers r telle que toutes les règles de P' sont utilisées avant les règles de P . On obtient ainsi à partir de S un axiome de G , dont on déduit r . Par suite $r \in L(G)$.

2.4. Théorème

Considérons des GRR dont la dérivation est définie de façon habituelle, mais se fait à partir de sous-ramifications complètes à droite et non plus à gauche. Les bilangages générés par de telles GRR sont les bilangages réguliers et eux seuls.

Démonstration

Posons $G = \langle V, P, \Gamma \rangle$, avec $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $P = \{\psi_1 \rightarrow \psi_1, \dots, \psi_n \rightarrow \psi_n\}$
 Soit \tilde{G} une GRR $\langle V, \tilde{P}, \tilde{\Gamma} \rangle$ avec $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m\}$, $\tilde{\gamma}_i$ étant la ramification réfléchie de γ_i (cf. chap. 1).
 $\tilde{P} = \{\tilde{\psi}_1 \rightarrow \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_n \rightarrow \tilde{\psi}_n\}$

Soit $L(\tilde{G})$ le bilangage généré par \tilde{G} à partir de sous-ramifications complètes à gauche. $L(\tilde{G})$ est régulier.

D'autre part, si $L(G)$ est le bilangage généré par G à partir de sous-ramifications complètes à droite,

$L(G) = L(\tilde{G})$, car si ψ est une sous-ramification complète à gauche de r , $\tilde{\psi}$ est une sous-ramification complète à droite de \tilde{r} .

Donc $L(G)$ est régulier. La réciproque est immédiate.

Remarque

On peut démontrer l'équivalence des GRR utilisant des sous-ramifications complètes à droite et des ARR préfixés inversés définis au chapitre 2 § 5.3., de la même façon que l'on a démontré le théorème 2 ; en particulier, on démontrera l'équivalence des GRR et des grammaires "simples" dont les règles sont des types

- $X \rightarrow \Lambda$
- $X \rightarrow A$
- $X \rightarrow A+Y$
- $X \rightarrow TxA$
- $X \rightarrow TxA+Y$
- $X \rightarrow X'$
- $\Lambda \rightarrow X$
- $A \rightarrow X$
- $A+Y \rightarrow X$
- $TxA \rightarrow X$
- $TxA+Y \rightarrow X$

où A est un symbole terminal et X,Y,T,X' des symboles non terminaux et des grammaires "expansives" dont des règles sont du type :

$$X \rightarrow \Lambda$$

$$X \rightarrow A$$

$$X \rightarrow A+Y$$

$$X \rightarrow TxA$$

$$X \rightarrow TxA+Y$$

avec les mêmes notations.

Les grammaires expansives réduites de ce type sont l'équivalent pour les ramifications des grammaires d'états finis dont les règles autre que $S \rightarrow \epsilon$ sont du type $X \rightarrow aY$ ou $X \rightarrow a$, où X,Y sont des symboles non terminaux, et a est un symbole terminal.

3. APPLICATION AUX SYSTEMES COMBINATOIRES [Da]

En appliquant les résultats démontrés en 2 aux ramifications de hauteur 1, considérées comme des chaînes de caractères, on retrouve deux résultats démontrés par BUCHI.

3.1. Théorème

Les langages générés par des systèmes combinatoires dont toutes les règles sont du type

$$gP \rightarrow \bar{g}P$$

sont les langages d'états finis et eux seuls.

3.2. Théorème

Les langages générés par des systèmes combinatoires, dont toutes les règles sont du type

$$Pg \rightarrow P\bar{g}$$

sont les langages d'états finis et eux seuls.

3.3. Théorème

Soit G une GRR dont la dérivation est définie en utilisant des sous-ramifications complètes (et non plus complète à gauche ou à droite).

Alors, tout ensemble récursivement énumérable est ensemble des mots des racines d'un langage généré par une telle grammaire.

Démonstration

En effet, des grammaires de ce type ne manipulant que des ramifications de hauteur 1, que l'on peut considérer comme des chaînes de caractères, sont alors des systèmes semi-thuiens, et il est bien connu que les systèmes semi-thuiens peuvent générer n'importe quel ensemble récursivement énumérable.

Remarque

On a le même résultat avec des grammaires de ramifications dont la dérivation est "normale", c'est-à-dire que l'occurrence complète à gauche de la partie gauche d'une règle est remplacée par une occurrence complète à droite au même niveau de la partie droite de la règle ; avec des grammaires de ramifications "antinormale", "de Post".

Toutes ces grammaires génèrent des langages qui ne sont pas reconnaissables. Mais il existe des langages reconnaissables qui ne sont pas générés par de telles grammaires ; en effet, toutes ces grammaires transforment des sous-ramifications complètes ; tout langage de largeur 1 qu'elles génèrent est régulier.

3.5. Application aux expressions parenthésées

Toute ramification sur V peut être représentée par une expression parenthésée postfixée (ou préfixée) sur V .

3.5.1. Théorème

Soit L un langage régulier sur V et \hat{L} l'ensemble des expressions parenthésées postfixées complètes représentant les ramifications de L . Alors \hat{L} est un langage hors-contexte sur $(V \cup \{(\,,)\})^*$.

On a le même résultat avec l'ensemble des expressions parenthésées préfixées complètes représentant les ramifications d'un langage régulier.

Démonstration

L régulier $\Leftrightarrow L$ est généré par une GRR expansive $\langle V, P, \{S\} \rangle$.
Soit $\langle V, \hat{P}, \{S\} \rangle$ le système obtenu en écrivant les parties gauches et droites de P sous forme d'expressions parenthésées postfixées. Les règles de \hat{P} sont alors de l'un des cinq types suivants :

- $X \rightarrow \epsilon$
- $X \rightarrow a$
- $X \rightarrow Ya$
- $X \rightarrow (T)a$
- $X \rightarrow Y(T)a$

ϵ étant la chaîne vide, a un élément du vocabulaire terminal, X, Y, T des éléments du vocabulaire non terminal.

$\langle V, \hat{P}, \{S\} \rangle$ est donc une grammaire hors-contexte qui génère \hat{L} .

La démonstration est analogue pour les expressions parenthésées préfixées complètes.

3.5.2. Corollaire

L'ensemble des expressions parenthésées postfixées simples et l'ensemble des expressions totalement parenthésées postfixées des ramifications d'un langage régulier sur V forment des langages hors-contexte sur $V \cup \{ (,) \}$.

Le corollaire reste vrai si on remplace "postfixées" par "préfixées".

Remarque : La réciproque du théorème 3.5.1. est fausse. IL existe des langages non réguliers tels que l'ensemble des expressions parenthésées postfixées (resp. préfixées) représentant leurs ramifications forme un langage hors-contexte.

Exemple

Le langage $A+B, A+A+B+B, A+A+A+B+B+B, \dots$, n'est pas régulier. L'ensemble des expressions parenthésées postfixées et préfixées forme le langage $\{A^n B^n \mid n \geq 1\}$ qui est hors-contexte.

3.5.3. Théorème

Soit S un système semi-thuien dont le vocabulaire est $V \cup \{(\,)\}$, dont les axiomes sont des expressions totalement parenthésées postfixées sur V, et dont toutes les règles s'écrivent :

$(\xi \rightarrow (\xi'), \xi \text{ et } \xi' \text{ étant des expressions parenthésées postfixées complètes sur V.}$

Alors l'ensemble des théorèmes de S est un langage hors-contexte sur $V \cup \{(\,)\}$.

En effet, un tel système combinatoire est une écriture parenthésée postfixée d'une GRR. Le théorème 3.5.3. est alors une conséquence immédiate du corollaire 3.5.2.

3.5.4. Théorème

Soit S' un système semi-thuien défini comme en 3.5.3., mais dont toutes les règles s'écrivent :

$\xi) \rightarrow \xi')$, avec les mêmes notations qu'en 3.5.3.

L'ensemble des théorèmes de S' est un langage hors-contexte sur $V \cup \{(\,)\}$. En effet, un tel système est une écriture parenthésée postfixée du type de GRR défini en 2.4. Le théorème 3.5.4. est alors une conséquence immédiate du théorème 2.4. et du corollaire 3.5.2.

3.5.5. Le théorème analogue concernant des systèmes semi-thuiens dont les règles s'écrivent $(\xi \rightarrow \xi')$ ou $\xi) \rightarrow (\xi'$ est faux (cf. la remarque en 3.3.).

3.5.6. On a des résultats analogues à 3.5.3., 3.5.4. et 3.5.5. en remplaçant "postfixées" par "préfixées".

C H A P I T R E 4

PROBLEMES DE DECISION POUR LES BILANGAGES REGULIERS

1. DEFINITIONS DES BILANGAGES REGULIERS

Nous avons donné, au chapitre 2 et 3, les définitions suivantes entre autres des bilangages réguliers :

- (a) Un bilangage est régulier si et seulement si il est reconnu par un automate de ramifications régulier déterministe.
- (b) Un bilangage est régulier si et seulement si il est reconnu par un automate de ramifications régulier non déterministe.
- (c) Un bilangage est régulier si et seulement si il est généré par une grammaire de ramifications régulière.
- (d) Un bilangage est régulier si et seulement si il est généré par une grammaire de ramifications régulière simple.
- (e) Un bilangage est régulier si et seulement si il est généré par une grammaire de ramifications régulière expansive.

Nous avons démontré l'équivalence des définitions (a) et (b) au chapitre 2, et celle des définitions (b), (c), (d) et (e) au chapitre 3.

Nous nous posons ici le problème de l'effectivité de ces démonstrations, c'est-à-dire de savoir si elles fournissent des algorithmes permettant de construire les différents systèmes reconnaissant ou générant un langage régulier d'après les définitions (a), (b), (c), (d) ou (e) à partir d'un d'entre eux.

Si les démonstrations sont effectives, nous pourrions utiliser n'importe laquelle des définitions (a), (b), (c), (d) ou (e) pour résoudre des problèmes de décisions pour les langages réguliers.

Les démonstrations de (b) \rightarrow (a) (chapitre 2, 2.6.), (a) \rightarrow (c) (chapitre 3, 2.2.), (c) \rightarrow (d) (chapitre 3, 1.10.), (e) \rightarrow (b) (chapitre 3, 2.1.) sont clairement effectives. L'implication manquante (d) \rightarrow (e) (chapitre 3, 1.11.) est effective si et seulement si les prédicats $X \vdash \Lambda$, $X \vdash Y+A$, $X \vdash TxA$ et $X \vdash Y+TxA$ sont décidables pour une GRR simple. C'est ce que nous allons maintenant démontrer.

2. THEOREME

Soit G une GRR simple, V_T et V_N ses vocabulaires terminaux et non terminaux, X, Y, T des éléments pas nécessairement distincts de V_N , A un élément de V_T , Λ la ramification vide.

Alors les prédicats $X \vdash \Lambda$, $X \vdash Y+A$, $X \vdash TxA$, $X \vdash Y+TxA$ sont décidables.

Démonstration

2.1. Définitions

Soit $r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow \dots \rightarrow r_m$ une dérivation dans une GRR. On appelle hauteur de la dérivation l'entier $h = \max\{h(r_i) \mid 0 \leq i \leq m\}$, largeur de la dérivation l'entier $la = \max\{la(r_i) \mid 0 \leq i \leq m\}$, $h(r_i)$ et $la(r_i)$ notant respectivement la hauteur et la largeur de la ramification r_i .

La dérivation sera dite propre si elle satisfait la condition suivante : pour tout r_i , $0 \leq i \leq m$, tout sommet de r_i qui porte un symbole non terminal est tel que la sous-ramification de r_i réduite à ce seul sommet est une sous-ramification complète à gauche de r_i .

2.2. Lemme

Soit $d = r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow \dots \rightarrow r_m$ une dérivation dans une GRR simple avec $r_0 = X$ et $r_m = \Lambda$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA$ (avec les mêmes conventions que précédemment). Alors il existe une dérivation propre de r_0 vers r_m , de longueur inférieure ou égale à la longueur de d .

Démonstration

Supposons que r ne soit pas propre. Alors il existe r_i , $0 < i < m$ tel que la dérivation de r_0 à r_{i-1} soit propre, et r_i ne satisfasse pas à la condition ci-dessus. La dérivation se faisant dans une GRR simple, on a alors appliqué une règle $\Lambda \rightarrow U$ pour passer de r_{i-1} à r_i . La dérivation d aboutissant à $r_m = \Lambda$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA$, le sommet U ainsi créé conduit dans d à Λ . Alors on obtient une autre dérivation de r_0 vers r_m en éliminant r_i et toutes les ramifications obtenues à partir de r_i en appliquant une règle à la sous-ramification créée à partir du sommet U .

Si la dérivation obtenue n'est pas propre, il suffit de répéter le même processus. Au bout d'un nombre fini de pas, on obtiendra une dérivation de r_0 vers r_m propre.

2.3. Lemme

Pour toute dérivation $d = r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow \dots \rightarrow r_m$ dans une GRR simple, avec $r_0 = X$ et $r_m = \Lambda$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA$, de hauteur et/ou de largeur supérieures à $1 + \#V_T (\#V_N + 1)^3$, il existe une dérivation de r_0 vers r_m de hauteur et de largeur inférieures ou égales à $1 + \#V_T (\#V_N + 1)^3$ ($\#V_T$, $\#V_N$ = nombre de symboles terminaux et non terminaux de la grammaire).

Démonstration

Le lemme 2.2. nous permet de supposer que d est une dérivation propre. Pour tout $0 < i < m$, définissons une relation, notée K , entre les sommets de r_i et ceux de r_{i+1} de la façon suivante :

Soient $\varphi \rightarrow \psi$ la règle appliquée pour passer de r_i à r_{i+1} , $r_i - \varphi$ et $r_{i+1} - \psi$ les sous-ramifications de r_i et r_{i+1} non impliquées par l'application de la règle. On a évidemment $r_i - \varphi = r_{i+1} - \psi$. La relation K est établie entre tout sommet de $r_i - \varphi$ et son homologue de $r_{i+1} - \psi$. D'autre part, si $\varphi = X \in V_N$ et $\psi = Y+TxA$, $Y, T \in V_N \cup \{\Lambda\}$, $A \in V_T \cup V_N$, on a alors XKA et si $\varphi = Y+TxA$ et $\psi = X$, avec les mêmes conventions, on a AKX .

Enfin, la relation n'est pas définie pour φ ou ψ si $\psi = \Lambda$ ou $\varphi = \Lambda$ respectivement.

2.3.1. Si la hauteur h de d est supérieure à $1 + (\#V_T)(\#V_N + 1)^3$, soit r_i , $0 \leq i \leq m$, dont un chemin d'une racine à une feuille a une longueur égale à h . Soit v_1, v_2, \dots, v_h les sommets de ce chemin. La dérivation étant propre, $v_1, v_2, \dots, v_{h-1} \in V_T$. Pour tout $1 \leq j < h$, définissons deux entiers P_j et q_j tels que :

$$P_j = \min\{0 \leq l \leq i \mid l \leq k \leq i \text{ implique } (K^{-1})^k(v_j) = v_j\}$$

$$q_j = \max\{m \geq l \geq i \mid i \leq k \leq l \Rightarrow K^h(v_j) = v_j\}$$

P_j et q_j sont tels que, pour tout $P_j \leq k \leq q_j$, le sommet de r_k lié par la relation K au sommet de v_j de r_i porte l'étiquette v_j .

La grammaire étant simple, la dérivation $r_{P_j-1} \rightarrow r_{q_j}$, $1 \leq j < h$ ne peut être réalisée que par application d'une règle de la forme

$$X^j \rightarrow Y^j + T^j X A^j \text{ avec } X^j \in V_N, Y^j, T^j \in V_N \cup \{\Lambda\}, A^j \in V_T.$$

D'autre part, toute dérivation $r_{q_j-1} \rightarrow r_{P_j}$, $1 \leq j < h$, ne peut être réalisée que par application d'une règle du type :

$$Y^j + T^j X A^j \rightarrow X^j \text{ avec } Y^j, T^j \in V_N \cup \{\Lambda\}, A^j \in V_T, X^j \in V_N.$$

Considérons alors, pour tout j , $1 \leq j \leq h-1$ les séquences

$$S_j = \langle A^j, Y^j, T^j, X^j \rangle$$

Il y a au plus $\#V_T(\#V_N + 1)^3$ séquences différentes de ce type.

Comme $h-1 > \#V_T(\#V_N + 1)^3$, il existe deux entiers p, q , $1 \leq p < q \leq h-1$ tels que $S_p = S_q$.

On a alors deux dérivations "superposées" de X^j à partir de $Y^j + T^j X A^j$. On peut donc construire une dérivation équivalente à d en appliquant à l'occurrence la plus "haute" de $Y^j + T^j X A^j$ les règles appliquées à la plus "basse" dans d pour obtenir X^j . (cf. figure 1). Si la dérivation obtenue a encore une hauteur supérieure à $1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$, on réapplique l'algorithme 2.3.1. Comme la longueur des dérivations obtenues diminue strictement à chaque pas, on obtiendra au bout d'un nombre fini de pas une dérivation de hauteur inférieure ou égale à $1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$.

2.3.2. Si la largeur la de d est supérieure à $1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$, soit r_i , $0 \leq i \leq m$, dont un chemin d'un frère aîné à un frère benjamin a une longueur égale à la . On procède alors de façon analogue à 2.3.1. Soient v_1, v_2, \dots, v_{la} les sommets de ce chemin. La dérivation étant propre, $v_1, v_2, \dots, v_{la-1} \in V_T$

Pour tout j , $1 \leq j < la$, on définit deux entiers P_j et q_j tels que :

$$P_j = \min\{0 \leq l \leq i \mid 1 \leq k \leq i \Rightarrow (K^{-1})^k(v_j) = v_l\}$$

$$q_j = \max\{m \geq l \geq i \mid i \leq k \leq l \Rightarrow K^k(v_j) = v_l\}$$

Toute dérivation $r_{P_j-1} \rightarrow r_{P_j}$, $1 \leq j < la$ vient de l'application d'une règle $X^j \rightarrow Y^j + T^j X A^j$, avec $X^j \in V_N$, $Y^j, T^j \in V_N \cup \{\Lambda\}$, $A^j \in V_T$. Toute dérivation $r_{q_j-1} \rightarrow r_{q_j}$, $1 \leq j < la$, vient de l'application d'une règle $Y^j + T^j X A^j \rightarrow X^j$ avec $Y^j, T^j \in V_N \cup \{\Lambda\}$, $A^j \in V_T$, $X^j \in V_N$.

Soit $S_j = \langle A^j, Y^j, T^j, X^j \rangle$, $1 \leq j < la$

Comme $la > 1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$, il existe deux entiers p, q , $1 \leq p < q \leq la-1$ tels que

$$S_p = S_q$$

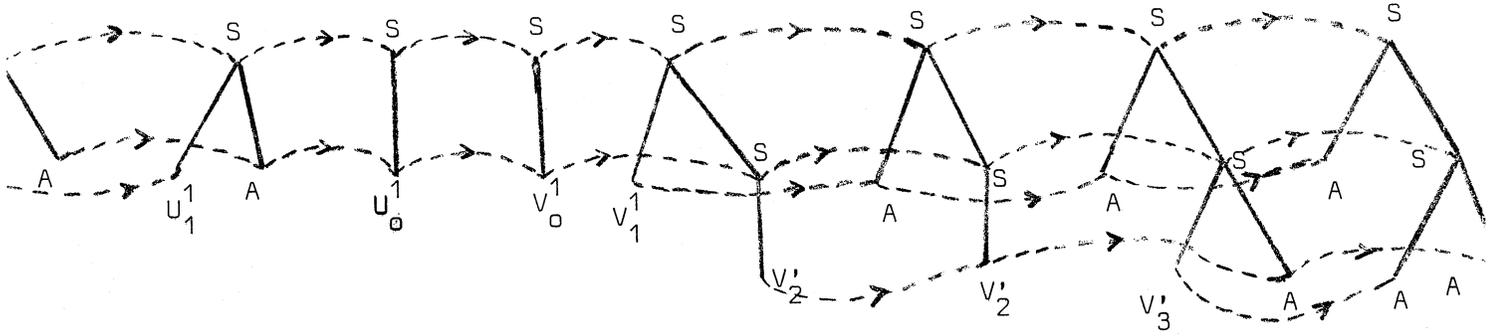
Il existe alors deux dérivations "parallèles" de X^j à partir de $Y^j + T^j X A^j$. On peut construire une dérivation équivalente à d en appliquant à l'occurrence la plus "à droite" de $Y^j + T^j X A^j$ les règles appliquées à la plus "à gauche" pour obtenir X^j . La dérivation obtenue a une longueur strictement inférieure à celle de d et une hauteur inférieure ou égale à celle de d . Si sa largeur est encore supérieure à $1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$, on réapplique l'algorithme 2.3.2. Au bout d'un nombre fini de pas, on obtiendra une dérivation de longueur inférieure ou égale à $1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$.

L'algorithme 2.3.2. n'augmentant pas la largeur de la dérivation, en appliquant 2.3.1. puis 2.3.2., on obtient une dérivation de r_0 vers r_m de hauteur et de largeur inférieures ou égales à $1 + \#V_T(\#V_N + 1)^3$.

2.3.3. Exemples

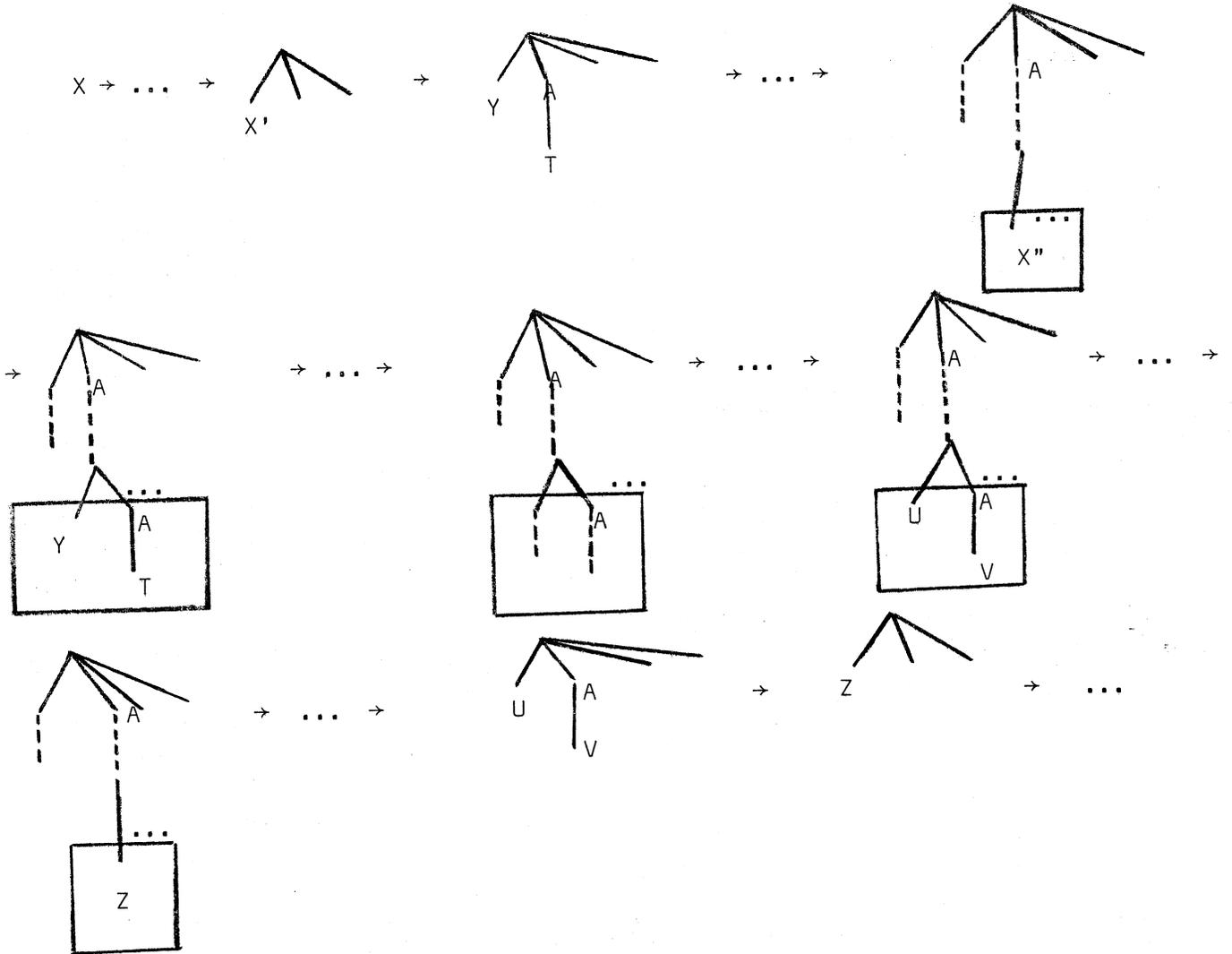
a) Relation K

On reprend l'exemple donné au chapitre 3, 1.10. La relation K est en pointillés.

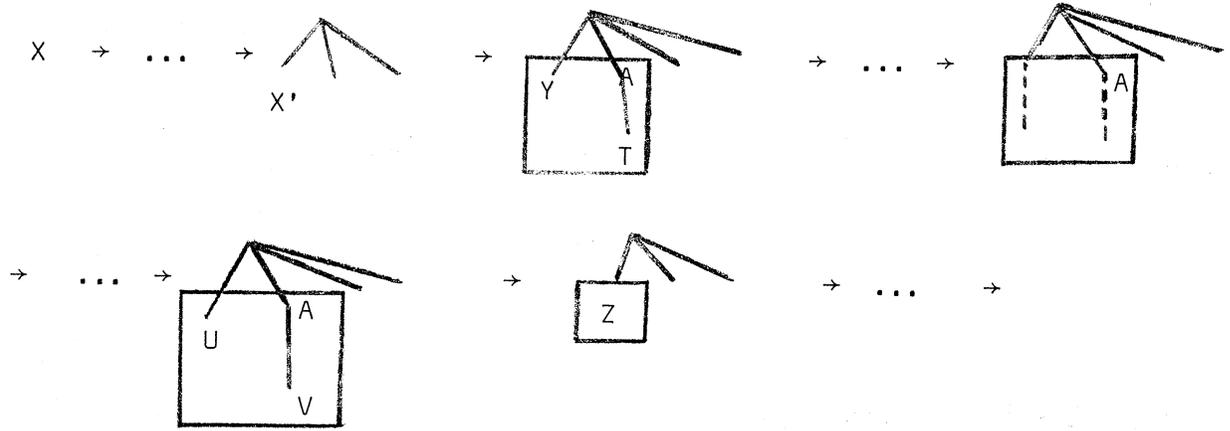


b) Application de l'algorithme 2.3.1.

La dérivation

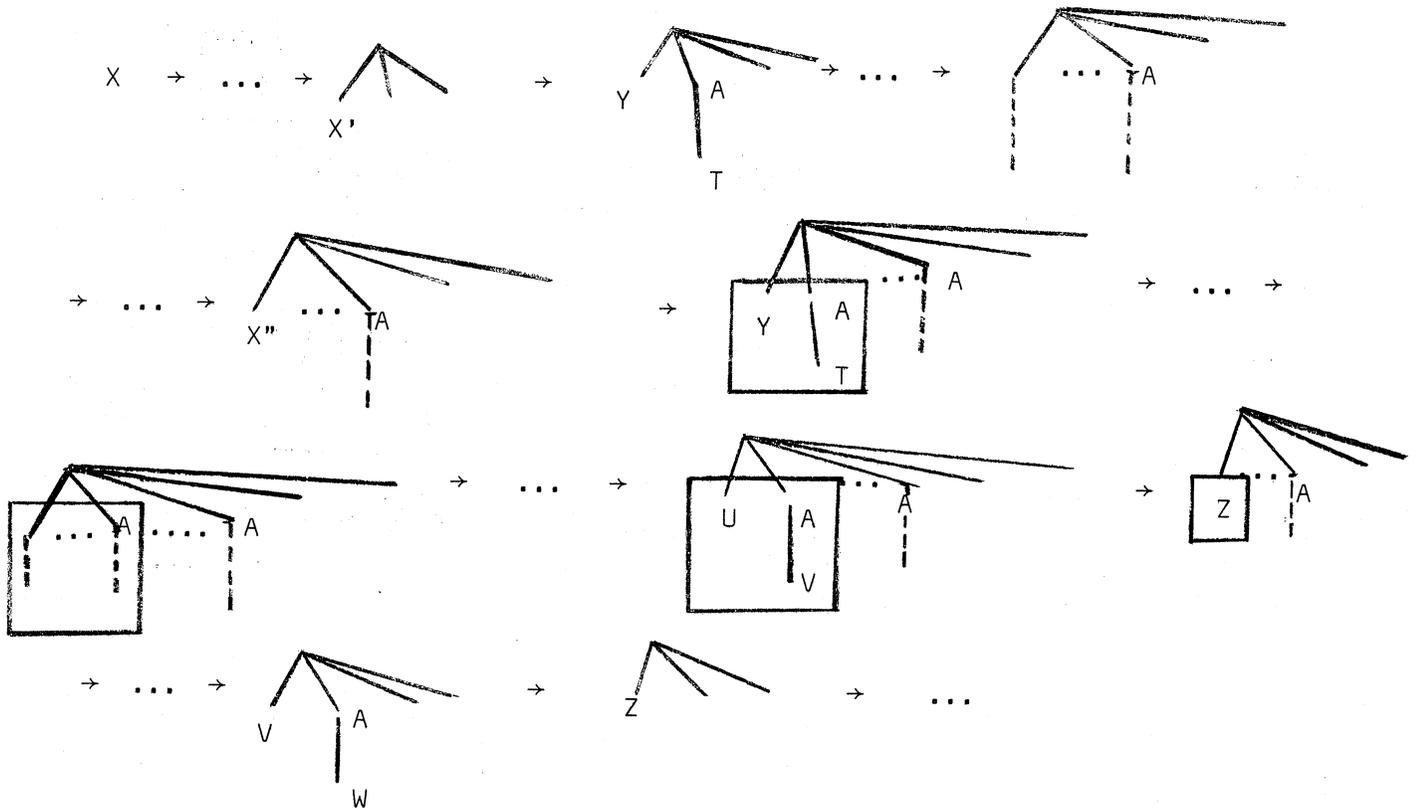


est remplacée par

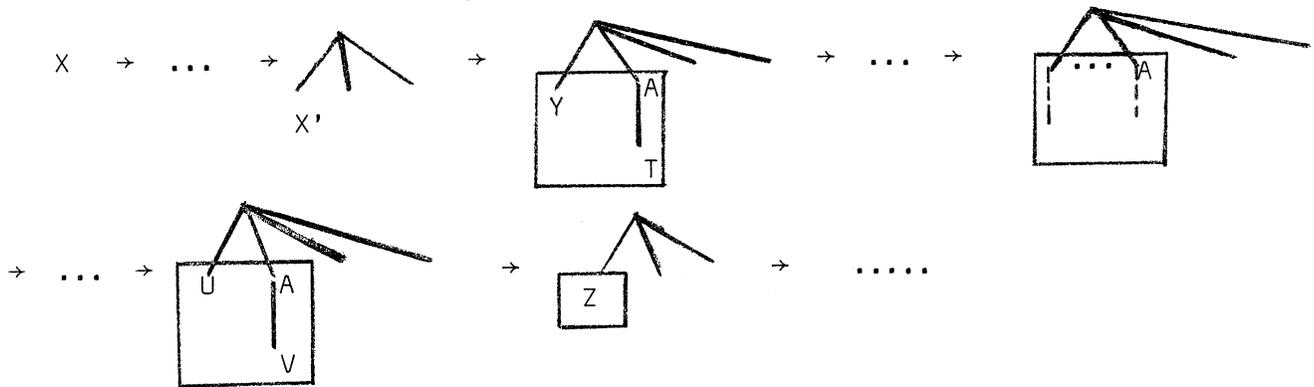


c) Application de l'algorithme 2.3.2.

La dérivation



est remplacée par :



2.4. Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème 2.

Soit $r_0 \rightarrow \dots \rightarrow r_m$ une dérivation (avec $r_0 = X$ et $r_m = \Lambda$ ou $Y+A$ ou TxA ou $Y+TxA$) de hauteur et de largeur inférieures ou égales à $1 + \#V_T (\#V_N + 1)^3$.

Soit M le nombre de ramifications sur $V = V_T \cup V_N$ de largeur et de hauteur inférieures à $1 + \#V_T (\#V_N + 1)^3$. M est évidemment fini. Si la longueur de la dérivation m est supérieure à M , alors il existe 2 entiers p, q tels que $0 \leq p < q \leq m$, $r_p = r_q$ et une dérivation plus courte, $r_0 \rightarrow \dots \rightarrow r_p \rightarrow r_{q+1} \rightarrow \dots \rightarrow r_m$.

Nous avons donc montré que si $r_0 \vdash r_m$, il existe une dérivation de hauteur et de largeur inférieures ou égales à $1 + \#V_T (\#V_N + 1)^3$ et de longueur inférieure à M . Il n'y a qu'un nombre fini de telles dérivations. On peut donc décider si $r_0 \vdash r_m$.

C.Q.F.D.

3. PROBLEMES DE DECISION POUR LES BILANGAGES REGULIERS

3.1. Théorème

Le problème du bilangage vide est décidable pour les bilangages réguliers.

Nous donnons deux démonstrations de ce théorème. La première est une simple application du théorème analogue concernant les langages hors-contexte. La deuxième est calquée sur la démonstration à partir des automates d'états finis du théorème analogue concernant les langages d'états finis.

3.1.1. Première démonstration

Un langage régulier est généré par une GRR expansive. Or, une GRR expansive est une grammaire hors-contexte particulière, et le problème du langage vide est décidable pour les langages hors-contexte.

3.1.2. Deuxième démonstration

Un langage régulier est reconnu par un ARR déterministe

3.1.2.1. Lemme

Soit A un ARR déterministe, $\#Q$ le nombre de ses états. Pour tout $q \in Q$, s'il existe une ramification r telle que $\hat{f}(r)=q$, alors il existe une ramification s de hauteur et de largeur inférieures à $\#Q$ telle que $\hat{f}(s)=q$.

Démonstration

Soit r telle que $\hat{f}(r)=q$. Supposons que $h(r)$ et/ou $la(r) \geq \#Q$

a) Si $h(r) > \#Q$

Considérons un chemin d'une racine à une feuille de r de longueur égale à $h(r)$. Quand il parcourt ce chemin, $h(r)$ étant supérieur ou égal à $\#Q$, l'automate doit nécessairement passer par le même état au moins à deux reprises. Autrement dit, il existe deux sommets v et v' de ce chemin tels que, si $r(v)$ et $r(v')$ sont les sous-ramifications de r complètes à gauche de v (resp. v'), $\hat{f}(r(v))=\hat{f}(r(v'))$.

Supposons que ce soit v' qui soit un descendant de v ; $r(v')$ est alors une sous-ramification stricte complète à gauche de $r(v)$.

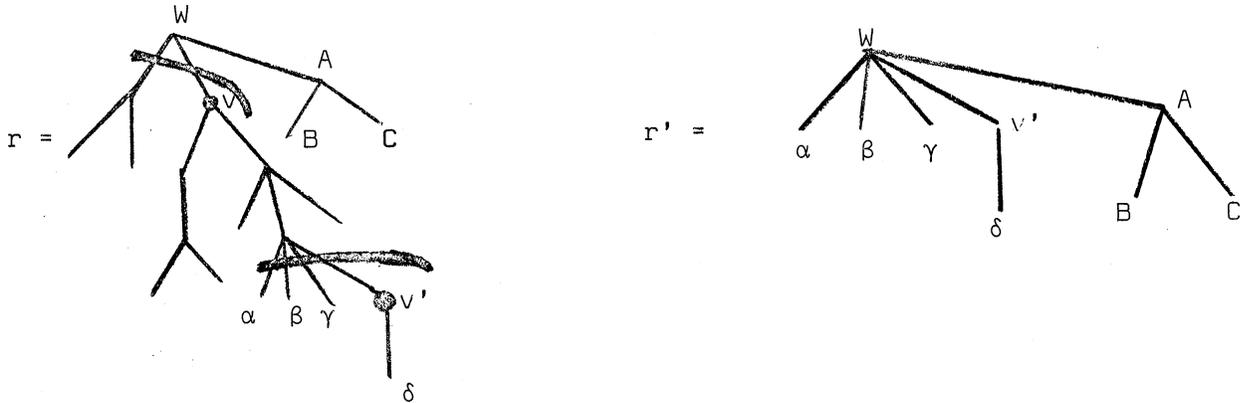
Soit alors r' la ramification obtenue en remplaçant dans r l'occurrence de $r(v)$ par une occurrence de $r(v')$. On a :

$$\hat{f}(r') = \hat{f}(r) = q$$

Si $h(r') \geq \#Q$, on lui réapplique le même algorithme. Comme à chaque pas le nombre de sommets de la ramification décroît strictement, on s'arrête au bout d'un nombre fini de pas avec une ramification r_1 telle que $h(r_1) < \#Q$ et $\hat{f}(r_1) = q$.

Remarquons que $la(r_1)$ peut être supérieur à $la(r)$.

Exemple d'application de l'algorithme a)



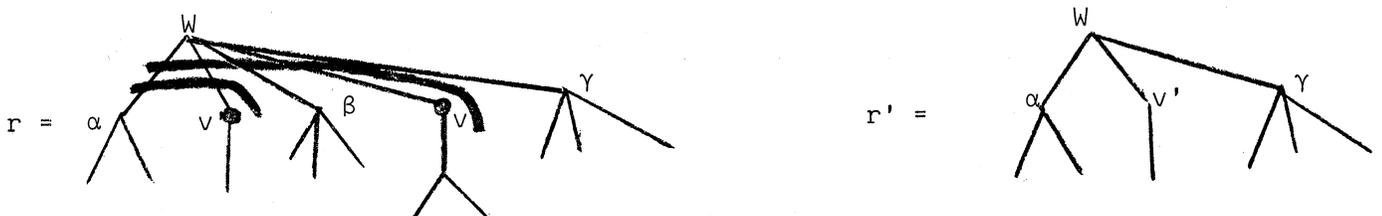
b) Si $la(r) \geq \#Q$

On procède de façon analogue.

Considérons un chemin d'un frère aîné à un benjamin de longueur égale à $la(r)$. Quand il parcourt un tel chemin, l'automate doit nécessairement passer par le même état au moins à deux reprises. Il existe alors deux sommets v et v' de ce chemin tels que, si $r(v)$ et $r(v')$ sont les sous-ramifications de r complètes à gauche de v (resp. v'), $\hat{f}(r(v)) = \hat{f}(r(v'))$.

Si c'est v' qui est "à gauche" de v , c'est-à-dire si $r(v')$ est une sous-ramification stricte complète à gauche de $r(v)$, on remplace dans r l'occurrence de $r(v)$ par une occurrence de $r(v')$. On obtient une ramification r' telle que $\hat{f}(r') = \hat{f}(r) = q$ et $h(r') \leq h(r)$. Si $la(r') \geq \#Q$, on réapplique à r' le même algorithme. Le nombre de sommets de la ramification décroissant strictement à chaque pas de l'algorithme, on s'arrête au bout d'un nombre fini de pas avec une ramification r_1 telle que $la(r_1) < \#Q$, $\hat{f}(r_1) = q$ et $h(r_1) \leq h(r)$.

Exemple d'application de l'algorithme b)



En résumé, la ramification s du lemme est trouvée à partir de r de la façon suivante :

si $h(r)$ et $la(r) < \#Q$ alors $s=r$

si $h(r) < \#Q$ et $la(r) > \#Q$ alors s est fourni par l'algorithme b)

sinon s est obtenu en appliquant à r l'algorithme a), suivi éventuellement de l'algorithme b).

3.1.2. Soit alors $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ un ARR déterministe. Le bilangage qu'il reconnaît est le bilangage vide si et seulement si, pour tout $q \in F$, il n'existe pas de ramification r telle que $\hat{f}(r)=q$. Ce qui, d'après le lemme 3.1.1., est vrai si et seulement si pour tout $q \in F$, il n'existe pas de ramification r de hauteur et de largeur $< \#Q$ telle que $\hat{f}(r)=q$. Le problème de bilangage vide est donc décidable pour les bilangages réguliers, car il n'y a qu'un nombre fini de ramification sur V de hauteur et de largeur $< \#Q$.

3.2. Théorème

Le problème du bilangage infini est décidable pour les bilangages réguliers.

Comme le précédent, ce théorème résulte du théorème analogue concernant les langages hors-contexte. On pourrait aussi le démontrer en adaptant pour les ARR la démonstration du théorème analogue concernant les langages d'états finis à partir des automates d'états finis.

Les problèmes que nous allons maintenant examiner sont indécidables pour les langages hors-contexte ; considérer les bilangages réguliers comme des langages hors-contexte particuliers ne conduit alors à rien.

3.3. Théorème

Soit L un bilangage régulier sur V . Le problème $L=\hat{V}$? est décidable.

Démonstration

Notons \bar{L} le complémentaire de L . $L=\hat{V}$? est équivalent à $\bar{L}=\emptyset$?

D'autre part, si L est reconnu par l'ARR $\langle Q, V, q_0, F, f \rangle$, \bar{L} est reconnu par l'ARR $\langle Q, V, q_0, \bar{F}, f \rangle$, et le problème du bilangage vide est décidable pour \bar{L} .

3.4. Définition du produit de deux ARR

Soient $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$ et $A' = \langle T, V, t_0, G, g \rangle$ deux ARR déterministes de même vocabulaire V .

Le produit de A et A' , $A \times A'$ est par définition l'ARR déterministe $\langle Q \times T, V, \langle q_0, t_0 \rangle, F \times G, f \times g \rangle$

où $Q \times T$ et $F \times G$ sont les produits cartésiens de Q et T , et F et G respectivement, et $f \times g$ la fonction de $(Q \times T) \times V$ dans $F \times G$ définie par :

$$\forall q, q' \in Q, t, t' \in T, v \in V, (f \times g)(\langle q, t \rangle, \langle q', t' \rangle, v) = \langle f(q, q', v), g(t, t', v) \rangle$$

3.5. Théorème

Le langage reconnu par le produit de deux ARR A et A' est l'intersection du langage reconnu par A et de celui reconnu par A' .

Démonstration

3.5.1. Montrons par récurrence sur $r \in \hat{V}$ que :

$$\widehat{(f \times g)}(r) = \langle \hat{f}(r), \hat{g}(r) \rangle$$

La proposition est vraie pour $r = \Lambda$ car

$$\widehat{(f \times g)}(\Lambda) = \langle q_0, t_0 \rangle = \langle \hat{f}(\Lambda), \hat{g}(\Lambda) \rangle$$

Si la proposition est vraie pour $r = x, y$, elle est vraie pour $r = x + y \times A$

$$\begin{aligned} \widehat{(f \times g)}(x + y \times A) &= (f \times g)(\widehat{(f \times g)}(x), \widehat{(f \times g)}(y), A) \\ &= (f \times g)(\langle \hat{f}(x), \hat{g}(x) \rangle, \langle \hat{f}(y), \hat{g}(y) \rangle, A) = \langle f(\hat{f}(x), \hat{f}(y), A), g(\hat{g}(x), \hat{g}(y), A) \rangle \\ &= \langle \hat{f}(x + y \times A), \hat{g}(x + y \times A) \rangle \end{aligned}$$

3.5.2.

$$\begin{aligned} r \in L(A \times A') &\iff \widehat{(f \times g)}(r) \in F \times G \\ &\iff \langle \hat{f}(r), \hat{g}(r) \rangle \in F \times G \\ &\iff \hat{f}(r) \in F \text{ et } \hat{g}(r) \in G \iff r \in L(A) \text{ et } r \in L(A') \\ &\iff r \in L(A) \cap L(A') \end{aligned}$$

3.6. Corollaire

Soient L et L' deux bilangages réguliers. Le problème $L \cap L' = \emptyset$? est décidable.

En effet, si A et A' sont des ARR déterministes reconnaissant respectivement L et L' , $L \cap L'$ est reconnu par AxA' , et AxA' peut être effectivement construit à partir de A et A' .

3.7. Théorème

Soient L et L' deux bilangages réguliers. Alors le problème $L = L'$? est décidable.

Démonstration

Soient $A = \langle Q, V, q_0, F, f \rangle$, $A' = \langle Q', V, q'_0, F', f' \rangle$ 2 ARR déterministes tels que $L(A) = L$ et $L(A') = L'$

Notons $\bar{C}A = \langle Q, V, q_0, \bar{C}F, f \rangle$, $\bar{C}A' = \langle Q', V, q'_0, \bar{C}F', f' \rangle$.

$L = L' \iff L \cap \bar{C}L' = \emptyset$ et $\bar{C}L \cap L' = \emptyset$

$\iff L(A \times \bar{C}A') = \emptyset$ et $L(\bar{C}A \times A') = \emptyset$ qui est décidable d'après 3.6.

3.8. Théorème

Soient L et L' deux bilangages réguliers. Alors le problème $L \subseteq L'$? est décidable.

En effet, $L \subseteq L' \iff L \cap \bar{C}L' = \emptyset$ et la démonstration est analogue à 3.7.

CHAPITRE 5

TRANSDUCTION DE RAMIFICATIONS

1. INTRODUCTION

Les transducteurs de mots sont des automates auxquels on a ajouté une fonction de sortie qui, pour chaque couple <état, lettre>, fournit un mot du vocabulaire de sortie. Nous nous proposons de faire la même chose avec les automates de ramifications réguliers déterministes, postfixés et postfixés inversés. Il n'y a pas de difficultés supplémentaires pour définir des transductions non déterministes, ou à pile.

La fonction de sortie d'un transducteur de ramifications, pour chaque couple <état, lettre>, fournira une ramification sur le vocabulaire de sortie. Il s'agit alors de composer les différentes sorties. Pour les transductions de mots, cette composition est simplement une concaténation. Pour les ramifications, il y a deux opérations, la concaténation et l'enracinement. Si la première est une opération entre ramifications, la deuxième est une opération entre ramifications et lettres ; or, en sortie, on a besoin de deux opérations entre ramifications, du moins dès que l'application réalisée par le transducteur n'est pas une simple transcription. On peut utiliser comme deuxième opération l'enracinement sur les dioïdes, qui est une opération entre ramifications ; on obtient ainsi les transductions que nous appelons simples. On peut utiliser une opération plus générale, la greffe, que nous définirons plus loin ; on obtient alors les transducteurs à greffe. Comme il n'y a pas de raisons de se limiter à ces deux exemples, nous commencerons par donner une définition générale des transducteurs, où les sorties sont composées à l'aide d'opérations définies pour chaque transducteur et non pas à priori.

2. TRANSDUCTEUR DE RAMIFICATIONS POSTFIXE

2.1. Un transducteur de ramifications postfixé est un 6-uplet

$$T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$$

où Q est un ensemble fini d'états

V un ensemble fini, le vocabulaire d'entrée

W un ensemble fini, le vocabulaire de sortie

q_0 un élément de Q , l'état initial

f une application de $Q^2 \times V$ dans Q , la fonction de transition du transducteur

g une application de $Q^2 \times V$ dans $\hat{W} \times O^2$, où O est un ensemble fini d'opérations binaires sur \hat{W} ; g est la fonction de sortie du transducteur. On pose,

pour tout $q, q' \in Q, v \in V$

$$g(q, q', v) = \langle g_1(q, q', v), g_2(q, q', v), g_3(q, q', v) \rangle$$

2.2 On définit une application \hat{f} de \hat{V} dans Q en posant :

$$\hat{f}(\Lambda) = q \text{ pour tout } q, q' \in Q$$

$$\hat{f}(r+sxv) = f(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v), \text{ pour tout } r, s \in \hat{V}, v \in V$$

Soit \hat{g} l'application de \hat{V} dans \hat{W} ainsi définie :

$$\hat{g}(\Lambda) = \Lambda$$

$$\hat{g}(r+sxA) = \hat{g}(r)g_2(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v)(\hat{g}(s)g_3(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v)g_1(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v))$$

pour tout $r, s \in \hat{V}, A \in \hat{V}$.

Etant donné une ramification r sur V , le transducteur T fournit comme résultat la ramification $\hat{g}(r)$ sur W .

2.3. Exemples

2.3.1. Transducteur qui applique chaque ramification sur sa ramification réfléchie

$$T_1 = \langle \{q_0\}, V, V, q_0, f, g \rangle$$

avec $\forall v \in V, g(q_0, q_0, v) = \langle v, \hat{+}, x \rangle$,

où $\hat{+}$ est définie par, $r\hat{+}s = s+r, \forall r, s \in \hat{V}$

et x est l'enracinement.

Alors $\hat{g}(r) = \hat{r}$ pour tout $r \in \hat{V}$.

2.3.2. Transducteur qui applique chaque ramification sur sa duale

$$T_2 = \langle \{q_0\}, V, V, q_0, f, g \rangle$$

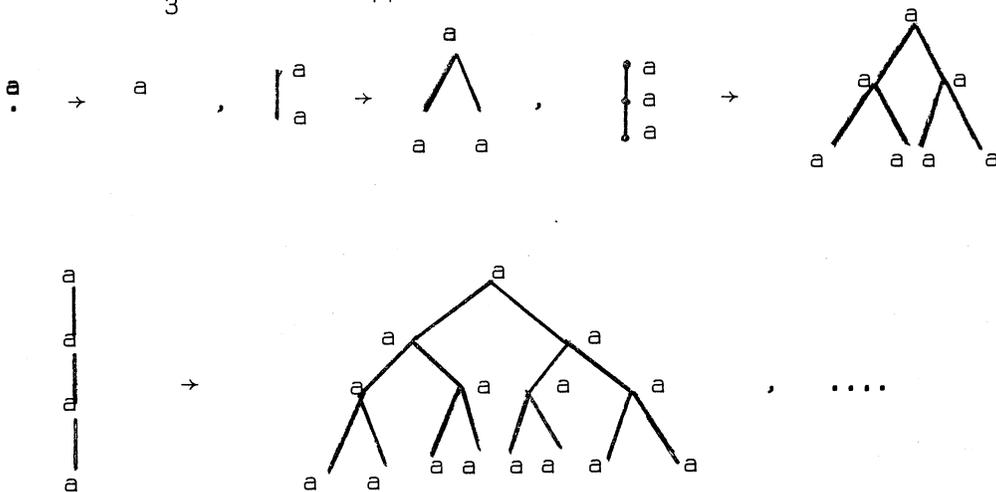
avec $\forall v \in V, g(q_0, q_0, v) = \langle v, x, \hat{v} \rangle$, où x est l'enracinement sur le dioïde \hat{V} , et \hat{v} l'opération définie en 2.3.1.
Alors $\hat{g}(r) = \bar{r}$, pour tout $r \in \hat{V}$.

2.3.3.

$$T_3 = \langle \{q_0\}, \{a\}, \{a\}, q_0, f, g \rangle$$

avec $g(q_0, q_0, a) = \langle a, +, \theta \rangle$, où $+$ est la concaténation et θ l'opération définie par $s \theta a = (s+s)xa$

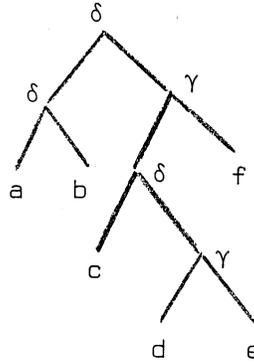
T_3 réalise l'application suivante :



2.3.4. Transducteur qui réalise l'algorithme d'interprétation des structures syntaxiques du CETA

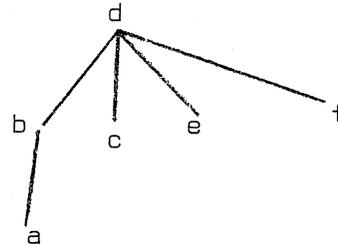
2.3.4.1. Cet algorithme, utilisé par le système du C.E.T.A., travaille sur des pseudo-arborescences binaires, dont les feuilles sont étiquetées par des éléments d'un certain vocabulaire V , et les autres sommets portent comme étiquette soit δ , soit γ , $\delta, \gamma \notin V$, δ (resp. γ) signifiant que la liaison du sommet à son fils cadet (resp. aîné) est privilégiée. L'algorithme condense en un seul sommet les sommets liés par des relations privilégiées tout en conservant toutes les autres liaisons ; l'étiquette portée par le sommet ainsi créé est celle de la feuille qui fait partie de l'ensemble de sommets condensés.

Par exemple, la structure



donne

la structure interprétée



2.3.4.2. Cet algorithme est réalisé par le transducteur

$T_4 = \langle \{q_0, q_1\}, V', V', q_0, f, g \rangle$ où $V' = V \cup \{\gamma, \delta\}$ et pour tout $v \in V$

$f(q_0, q_0, v) = f(q_1, q_0, v) = f(q_0, q_1, v) = f(q_1, q_1, v) = q_1$

et $g(q_0, q_0, v) = \langle v, +, x \rangle$

$g(q_1, q_0, v) = \langle v, +, x \rangle$

$g(q_0, q_1, v) = \langle v, +, \theta \rangle$

$g(q_1, q_1, v) = \langle v, +, \theta \rangle$

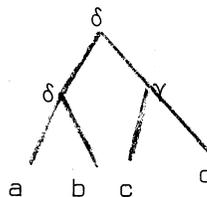
où θ est l'opération définie par :

$(rxa+spb) \theta \delta = (rxa+s)xb$

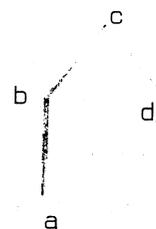
$(rxa+spb) \theta \gamma = (r+spb)xa$, pour tout $r, s \in \hat{V}$, $a, b \in V$.

2.3.4.3. Exemple de calcul de T_4

Sur la pseudo-arborescence



, qui donne



$$\begin{aligned}\widehat{g}(((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma)x\delta) &= \widehat{g}(\Lambda)g_2(\widehat{f}(\Lambda),\widehat{f}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma),\delta) (\\ \widehat{g}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma)g_3(\widehat{f}(\Lambda),\widehat{f}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma),\delta)g_1(\widehat{f}(\Lambda),\widehat{f}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma),\delta)\end{aligned}$$

$$\text{Comme } \widehat{f}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma) = q_1,$$

$$\widehat{g}(((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma)x\delta) = \Lambda + \widehat{g}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma)\theta\delta$$

$$\widehat{g}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma)$$

$$= \widehat{g}((a+b)x\delta) + (\widehat{g}(c+d)g_3(q_1, q_1, \gamma)g_1(q_1, q_1, \gamma)) = \widehat{g}((a+b)x\delta) + \widehat{g}(c+d)\theta\gamma$$

$$\widehat{g}(c+d) = \widehat{g}(c) + (\widehat{g}(\Lambda)g_3(q_1, q_0, d)g_1(q_1, q_0, d))$$

$$= \widehat{g}(c) + \Lambda xd$$

$$= c+d$$

$$\widehat{g}((a+b)x\delta) = \widehat{g}(\Lambda) + (\widehat{g}(a+b)g_3(q_0, q_1, \delta)g_1(q_0, q_1, \delta))$$

$$= \Lambda + ((a+b)\theta\delta)$$

$$= axh$$

Donc

$$\widehat{g}((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma) = axb + ((c+d)\theta\gamma)$$

$$= axb + dxc$$

et finalement

$$\widehat{g}(((a+b)x\delta+(c+d)x\gamma)x\delta) = (axb + dxc)\theta\delta$$

$$= (axb + d)xc$$

3. TRANSDUCTEURS DE RAMIFICATIONS POSTFIXES INVERSES

Alors que les transducteurs définis en 2 parcourent la ramification d'entrée comme les ARR, ceux que nous allons définir la parcourent comme les ARRI.

3.1. Un transducteur de ramifications postfixé inversé est un 6-uplet

$$T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$$

où Q est un ensemble fini d'états

V un ensemble fini, le vocabulaire d'entrée

W un ensemble fini, le vocabulaire de sortie

q_0 un élément de Q , l'état initial

f une application de $Q \times V$ dans Q^2 , la fonction de transition du transducteur

g une application de $Q \times V$ dans $\hat{W} \times O^2$, où O est un ensemble fini d'opérations binaires sur \hat{W} ; g est la fonction de sortie du transducteur. On pose,

pour tout $q \in Q, v \in V$,

$$g(q, v) = \langle g_1(q, v), g_2(q, v), g_3(q, v) \rangle$$

$$f(q, v) = \langle f_1(q, v), f_2(q, v) \rangle$$

3.2. On définit une application \hat{g} de $Q \times \hat{V}$ dans \hat{W} comme suit :

$$\left[\begin{array}{l} \hat{g}(q, \Lambda) = \Lambda \text{ pour tout } q \in Q \\ \hat{g}(q, r + sv) = \hat{g}(f_1(q, v), r) g_2(q, v) \{ \hat{g}(f_2(q, v), s) g_3(q, v) g_1(q, v) \} \end{array} \right.$$

pour tout $q \in Q, r, s \in \hat{V}, v \in V$.

Remarque : Pour définir \hat{g} , on n'a pas besoin de généraliser à $Q \times \hat{V}$ la fonction de transition f .

Pour $r \in \hat{V}$, le transducteur T donne la ramification $S(r) \in \hat{W}$ telle que $S(r) = \hat{g}(q_0, r)$.

3.3. Exemple

Transducteur postfixé inversé qui réalise l'algorithme d'interprétation des structures syntaxiques (cf. 2.3.4.1.).

$$3.3.1. \quad T_5 = \langle \{q_0\}, V', V', f, g \rangle \quad V' = V \cup \{\delta, \gamma\}$$

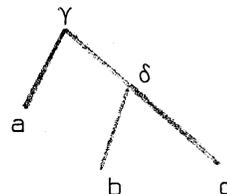
avec $g(q_0, v) = \underline{\text{si}} \ v \in V \ \underline{\text{alors}} \ \langle x, +, x \rangle \ \underline{\text{sinon}} \ \langle x, +, \theta \rangle$

θ étant l'opération définie comme suit :

$$(rxv+sxy)\theta\delta = (rxv+s)xy$$

$$(rxv+sxy)\theta\gamma = (r+sxy)xy, \text{ pour tout } r, s \in V', v, y \in V'$$

3.3.2. Calcul de T_5 pour la ramification



$$\begin{aligned} & \hat{g}(q_0, (a+(b+d)x\delta)xy) \\ &= \hat{g}(q_0, \Lambda) + \hat{g}(q_0, a+(b+d)x\delta)\theta\gamma \\ &= \Lambda + (\hat{g}(q_0, a) + \hat{g}(q_0, b+d)\theta\delta)\theta\gamma \\ &= \Lambda + (a + (\hat{g}(q_0, b) + d)\theta\delta)\theta\gamma \\ &= (a + (b+d)\theta\delta)\theta\gamma \\ &= (a + bxd)\theta\gamma \\ &= bxdxa \end{aligned}$$

4. TRANSDUCTEURS SIMPLES

Ce sont des transducteurs postfixés ou postfixés inversés où $\theta_1 = +$ et $\theta_2 = \otimes$, $+$ étant la concaténation des ramifications et \otimes l'opération ainsi définie :

$r \otimes s = sxr$ pour tout $r, s \in \hat{W}$, x notant l'enracinement des ramifications définies au chapitre 1, 3.7.

4.1. Transducteurs simples postfixés

4.1.1. Un transducteur simple postfixé est un 6-uplet

$$T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$$

où Q, V, W, q_0, f sont définis comme en 2.1. et g est une application de $Q^2 \times V$ dans \hat{W} .

4.1.2. On définit \hat{f} application de \hat{V} dans Q de la façon habituelle :

$$\hat{f}(\Lambda) = q$$

$$\hat{f}(r+sxA) = f(\hat{f}(r), \hat{f}(s), A) \text{ pour tout } r, s \in \hat{V}, A \in V$$

On définit la fonction \hat{g} de \hat{V} dans \hat{W} :

$$\hat{g}(\Lambda) = \Lambda \text{ pour tout } q, q' \in Q$$

$$\hat{g}(r+sxA) = \hat{g}(r) + \hat{g}(s) \otimes g(\hat{f}(r), \hat{f}(s), A) \text{ pour tout } q, q' \in Q, r, s \in \hat{V}, A \in V$$

T applique toute ramification $r \in \hat{V}$ sur la ramification $\hat{g}(r) \in \hat{W}$.

4.1.3. Proposition

Tout calcul d'un transducteur simple postfixé $T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$ tel que $g(q, q', v)$ est une ramification de hauteur 1 (resp. de largeur 1) pour tout v sur une ramification de hauteur 1 (resp. de largeur 1) est identique au calcul d'une "generalized sequential machine" [Gi] sur la chaîne correspondant à la ramification.

La g.sm sera $\langle Q, V, W, q_0, f', g' \rangle$ avec, s'il s'agit d'une ramification de hauteur 1,

$$f'(q, v) = f(q, q_0, v) \text{ pour tout } q \in Q, v \in V$$

$$g'(q, v) = g(q, q_0, v) \text{ pour tout } q \in Q, v \in V$$

et s'il s'agit d'une ramification de largeur 1

$$f'(q, v) = f(q_0, q, v) \text{ pour tout } q \in Q, v \in V$$

$$g'(q, v) = g(q_0, q, v) \text{ pour tout } q \in Q, v \in V.$$

En ce sens, les transducteurs simples postfixés sont une généralisation aux ramifications des gsm.

On a pour les gsm le théorème suivant [Gi] : Tout langage transduit par une gsm d'un langage d'états finis est d'états finis. Le théorème analogue concernant les transducteurs simples postfixés et les bilangages réguliers est faux.

4.1.4. Proposition

Il existe des transducteurs simples postfixés qui appliquent des bilangages réguliers sur des bilangages qui ne le sont pas.

Démonstration

Nous donnons un transducteur simple postfixé qui applique chaque ramification sur son mot des feuilles, considéré comme une ramification de hauteur 1. Ceci suffit pour démontrer la proposition 4.1.4. car il existe des bilangages réguliers dont l'ensemble des mots des feuilles forme un langage hors-contexte non d'états finis, et les bilangages de hauteur 1 réguliers sont les langages d'états finis et eux seuls. Ce transducteur est :

$$T_6 = \langle \{q_0, q_1\}, V, V, q_0, f, g \rangle$$

avec pour tout $v \in V$,

$$f(q_0, q_0, v) = f(q_0, q_1, v) = f(q_1, q_1, v) = f(q_1, q_0, v) = q_1$$

$$g(q_0, q_0, v) = g(q_1, q_0, v) = v$$

$$g(q_0, q_1, v) = g(q_1, q_1, v) = \Lambda$$

4.2. Transducteurs simples postfixés inversés

4.2.1. Un transducteur simple postfixé inversé est un 6-uplet

$$T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$$

où Q, V, W, q_0, f sont définis comme en 3.1. et g est une application de $Q \times V$ dans \hat{W} .

4.2.2. \hat{g} , application de $Q \times \hat{V}$ dans \hat{W} , est définie comme suit :

$$\hat{g}(q, \Lambda) = \Lambda \quad \text{pour tout } q \in Q$$

$$\hat{g}(q, r + sxA) = \hat{g}(f_1(q, A), r) + \hat{g}(f_2(q, A), s) \otimes g(q, A)$$

pour tout $q \in Q, r, s \in \hat{V}, A \in V$.

4.2.3. Proposition

Tout calcul d'un transducteur simple postfixé inversé $T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$ tel que $g(q, v)$ soit une ramification de hauteur 1 (resp. de largeur 1) $\forall q \in Q, v \in V$ sur une ramification de hauteur 1 (resp. de largeur 1) est identique au calcul d'une gsm sur la chaîne correspondant à la ramification.

La gsm sera $\langle Q, V, W, q_0, f', g \rangle$

avec $f'(q, v) = f_1(q, v)$ s'il s'agit de ramification de hauteur 1 et

$f'(q, v) = f_2(q, v)$ pour les transducteurs sur les ramifications de largeur 1,

pour tout $q \in Q, v \in V$.

5. TRANSDUCTEURS A GREFFE

5.1. Greffe de deux ramifications

Soit r et s deux ramifications sur un vocabulaire V , v un élément de V . La ramification $s \otimes_v r$, greffe en v de s sur r , est la ramification obtenue en accrochant s à chaque feuille étiquetée v de r . Cette opération est définie formellement par récurrence sur r :

$$s \otimes_v \Lambda = \Lambda$$

$$s \otimes_v (t+uxa) = \begin{array}{l} \text{si } a \neq v \text{ ou } u \neq \Lambda \text{ alors } s \otimes_v t + (s \otimes_v u)xa \\ \text{sinon } s \otimes_v t + sxa \end{array}$$

5.2. Transducteurs à greffe

Ce sont des transducteurs où $\theta_1 = +$ et θ_2 est une greffe.

5.2.1. Transducteur postfixé à greffe

5.2.1.1. Un transducteur postfixé à greffe est un 6-uplet

$$T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$$

où Q, V, W, q_0, f, g sont définis comme en 2.1. et g est une application de $Q^2 \times V$ dans $W \times W$.

On pose $g(q, q', v) = \langle g_1(q, q', v), g_2(q, q', v) \rangle$ pour tout $q, q' \in Q$, $v \in V$.

5.2.1.2. \hat{f} est l'application de \hat{V} dans Q telle que

$$\hat{f}(\Lambda) = q \text{ pour tout } q, q' \in Q$$

$$\hat{f}(r+sxv) = \hat{f}(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v) \text{ pour tout } r, s \in \hat{V}, v \in V.$$

\hat{g} est l'application de \hat{V} dans \hat{W} telle que

$$\hat{g}(\Lambda) = \Lambda$$

$$\hat{g}(r+sxv) = \hat{g}(r) + \{\hat{g}(s) \otimes_{g_2(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v)} g_1(\hat{f}(r), \hat{f}(s), v)\}$$

5.2.2. Transducteur postfixé inversé à greffe

5.2.2.1. Un transducteur postfixé inversé à greffe est un 6-uplet

$$T = \langle Q, V, W, q_0, f, g \rangle$$

où Q, V, W, q_0, f sont définis comme en 3.1. et g une application de $Q \times V$ dans $\hat{W} \times W$.

5.2.2.2. \hat{g} est l'application de $Q \times \hat{V}$ dans \hat{W} telle que

$$\hat{g}(q, \Lambda) = \Lambda$$

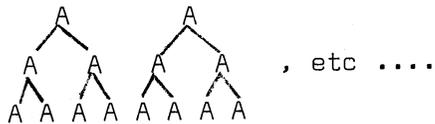
$$\hat{g}(q, r + s \times v) = \hat{g}(f_1(q, v), r) + (\hat{g}(f_2(q, v), s) \otimes g_2(q, v) \ g_1(q, v))$$

5.2.3. Proposition

Les transducteurs postfixés (resp. postfixés inversés) à greffe peuvent appliquer des bilangages réguliers sur des bilangages qui ne le sont pas.

Démonstration

Nous donnons deux transducteurs T_7 et T_8 qui appliquent



Ils appliquent donc le bilangage A^n , $n \geq 1$, qui est régulier, sur un bilangage qui n'est pas régulier, car l'ensemble de ses mots des feuilles est le langage $A^{(2^n)}$, qui n'est pas hors contexte.

$$T_7 = \langle \{q_0\}, \{A\}, \{A\}, q_0, f, g \rangle$$

$$\text{avec } g(q_0, A) = \langle A+A, A \rangle$$

$$T_8 = \langle \{q_0\}, \{A\}, \{A\}, q_0, f', g' \rangle$$

$$\text{avec } g'(q_0, q_0, A) = \langle A+A, A \rangle$$

C O N C L U S I O N

On peut continuer cette étude

- en étudiant les bilangages, images des bilangages réguliers, par les différents transducteurs que nous avons définis.
- en définissant l'équivalent pour les ramifications des automates linéaires bornés, c'est-à-dire des automates de ramifications pouvant revenir sur les sommets déjà examinés.
- en définissant des machines de Turing pour ramifications et par suite une théorie de la calculabilité des fonctions de ramifications.

On peut aussi essayer de définir des grammaires de ramifications plus générales que celles étudiées ici, par exemple des grammaires générant les bilangages reconnus par les ARP, les automates linéaires bornés de ramifications, etc...

Parmi les applications possibles, citons plus particulièrement, en linguistique, les grammaires transformationnelles, et en programmation, la sémantique des langages de programmation et les langages extensibles, où l'on peut utiliser les transducteurs de ramifications pour réaliser effectivement des fonctions de ramifications.

En dehors du traitement de structures arborescentes, on peut citer, à la suite de QUERE [Qu], la discrétisation des figures planes, où l'on a jusqu'à présent utilisé la structure de monoïde (voir par exemple [Fe] alors qu'il est possible, étant donné le caractère "à deux dimensions" des bilangages, que celles de binoïde ou de dioïde soient mieux adaptées.

B I B L I O G R A P H I E

- [Ah] AHO A.V.
"Indexed grammars - An extension of Context-Free Grammars"
JACM, Oct. 1968, Vol. 15, N° 4
- [Ar] ARBIB M.A. et GIVE'ON Y.
Algebra automata I :
"Parallel programming a a prologomenar to the categorical
approach"
Information and Control, 12 (1968) 331-345
- [Be] BERGE
"Théorie des graphes et ses applications"
Dunod 1963
- [Br] BRAINERD W.S.
"Tree generating systems and tree automata"
Ph. dissertation Pudue University June 1967
- [Bu] BUCHI J.R.
"Regular Canonical Systems"
Archiv for Mathematische Logik und Grundlagenforschung
6/3-4 (Avril 1964) 91-111
- [Da] DAVIS M.
"Computability and Unsolvability"
Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1958
- [De] BARBAULT et DESCLEE
"Etude structurelle et catégorielle du système de transition
avec application à la science du calcul et à la linguistique
mathématique"
Thèse Paris Janvier 1970
- [Do] DONER J.E.
"Tree Acceptors and Some of their Applications"
System Development Corporation, Scientific report N° 8

- [G] GINSBURG S.
"An Introduction to Mathematical Machine Theory"
Addison-Wesley Publishing Company 1962
- [Gi] GINSBURG S.
"The mathematical Theory of context-free languages"
Mc Graw-Hill Book Company, 1966
- [Ho] HOLT A.W.
A mathematical and applied Investigation of Tree structures
for computers syntactic analysis
Thèse University of Pennsylvania
- [Le] LESCANNE P.
"Etude de quelques Théories des langages et généralisation du
Théorème de Kleene"
Thèse Nancy Juin 1971
- [Pa] PAIR et QUERE
"Définition et étude des bilangages réguliers"
Information and control 13 (1968) 563-593
- [Pa1] PAIR C.
"Etude de la notion de pile, application à l'analyse syntaxique"
Thèse Nancy 1965
- [Qu] QUERE
"Etude des ramifications et des bilangages"
Thèse Nancy Juillet 1969
- [Ra] RASIOWA M. et SIKORSKI R.
"The mathematics of metamathematics"
Pan'stwowe wydawnictwo naukowe
Warszawa 1963
- [Ro] ROUNDS W.C.
"Trees, transducers and transformations"
Ph. D. dissertation, Stanford University, August 1968

- [Th1] THATCHER J.W.
"Characterizing derivation tree of context-free grammars
Through a generalization of finite automata theory"
J. Comp. Sys. Sci. Vol. 1 n° 4 (December 1967) 317-322
- [Th2] THATCHER J.W.
"Generalized ² sequential machines maps"
Journal of Computer and system sciences
4, 339-367 (1970)
- [TW] THATCHER J.W. et WRIGHT J.B.
"Generalized finite automata theory with an application to
a decision problem of second-order logic"
Mathematical Syst. theory Vol. 2 N° 1 (1968) 57-81
- [Va] VAUQUOIS B.
Cours : Automates et Grammaires formelles
Grenoble 1968
- [Fe] FEDER J.F.
Languages of encoded line patterns
Information and Control, n° 13, pp. 230-244, 1968
- [Ku] KURODA S.Y.
Classes of Languages and linear-bounded Automata
Information and Control, n° 7, pp. 207-222, 1964.

