

Théories de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle de Born-Infeld

Soutenance de thèse

Emmanuel Sérié

Laboratoire de Physique Théorique des Liquides, Université Paris VI
Laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI

Orsay, Septembre 2005



Plan

Géométrie non commutative

Algèbres d'endomorphismes

Généralisations du modèle de Born-Infeld

Conclusion

Perspectives

Géométrie non commutative

Motivations

Notion de calcul différentiel

Théories de jauge

Algèbres d'endomorphismes

Généralisations du modèle de Born-Infeld

Conclusion

Perspectives

Motivations

Théories fondamentales : Relativité Générale, Théorie Quantique des Champs.

- ▶ M.Q. \rightsquigarrow incertitudes d'Heisenberg, $[x, p] = i\hbar$.
 \rightarrow espace de phase non commutatif?
- ▶ M.Q. + R.G. \rightsquigarrow non commutativité des coordonnées?
- ▶ Nécessité de généraliser les outils de la géométrie aux algèbres
 \rightsquigarrow mène à la **Géométrie Non Commutative**.
Exemples : supersymétrie, groupes quantiques, algèbres de von Neumann, C^* -algèbres, K -théorie, cohomologie cyclique, etc. . .
 \rightsquigarrow Domaine mathématique d'investigation très vaste!
 \rightsquigarrow Vers une **géométrie différentielle** non commutative?

Pour l'instant, à quoi ça sert ?

- ▶ Théories de jauge en GNC \rightsquigarrow Higgs et champs de jauge unifiés.
 \rightsquigarrow Formulation du modèle Standard ($m_H \sim 200\text{GeV}$).
- ▶ Systèmes statistiques : quasi-cristaux, effet Hall quantique. . .
- ▶ En Théorie des cordes \rightarrow modèles effectifs sur espaces NC " $[x^\mu, x^\nu] = B_{\mu\nu}$ ".
- ▶ Structure du Groupe de renormalisation perturbatif \rightarrow algèbres de Hopf.
- ▶ TQC sur espaces non commutatifs, théories constructives . . .

Notion de calcul différentiel

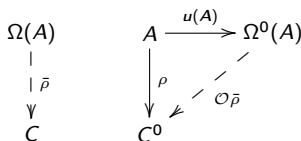
Calcul différentiel de de Rham en géo. diff. \rightsquigarrow structure algébrique :

- ▶ **Algèbre différentielle graduée** ($\Omega^* = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n, d$) :
 - ▶ produit gradué : $\Omega^n \times \Omega^m \rightarrow \Omega^{n+m}$
 - ▶ différentielle $d : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}$ telle que $d^2 = 0$.
 - ➔ satisfait la règle de Leibnitz graduée : $d(ab) = (da)b + (-1)^n a(db)$.
- ▶ \mathcal{A} algèbre associative (non commutative).
 - ➔ **calcul différentiel** sur \mathcal{A} : a.d.g. (Ω, δ) telle que $\Omega^0 = \mathcal{A}$.

Pour \mathcal{A} algèbre associative,

 Quel calcul différentiel choisir ?

- ▶ Calcul différentiel universel.
 - \rightsquigarrow a.d.g. libre générée par \mathcal{A} .
- ▶ Calcul différentiel basé sur les dérivations
 - \rightsquigarrow $\text{Der}(\mathcal{A})$ dérivations, $X : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tel que $X(ab) = X(a)b + aX(b)$.
 - \rightsquigarrow $\text{Int}(\mathcal{A})$ dérivations intérieures, $a \mapsto ad_b(a) = [b, a]$, idéal de Lie.
 - \rightsquigarrow $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$: applications $\text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ -multilinéaires anti-symétriques.
 - \rightsquigarrow d différentielle définie par la formule de Koszul.
- ▶ Calcul de Connes \rightsquigarrow généralisation des variétés Riemanniennes.
 - K -cycle (\mathcal{H}, D) sur \mathcal{A} , \mathcal{H} espace de Hilbert, D opérateur de Dirac.
- ▶ D'autres choix sont possibles ...



Théories de jauge

Géométrie ordinaire : Champ de jauge \Leftrightarrow connexion sur un fibré principal.

\rightsquigarrow formulation en termes algébriques :

- ▶ \mathcal{M} module à droite sur \mathcal{A} .
- ▶ Connexion N.C. : $\widehat{\nabla}_X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

$$\widehat{\nabla}_X(ma) = m(X \cdot a) + \widehat{\nabla}_X(m)a \quad \text{et} \quad \widehat{\nabla}_{fX}m = f\widehat{\nabla}_Xm$$

- ▶ Courbure : $\widehat{R}(X, Y)m = \left([\widehat{\nabla}_X, \widehat{\nabla}_Y] - \widehat{\nabla}_{[X, Y]} \right) m$

\rightsquigarrow morphisme de \mathcal{A} -module à droite.

Pour le module libre $\mathcal{M} = \mathcal{A}$:

- ▶ $\widehat{\nabla}$ donnée par $\widehat{\nabla}_X \mathbb{1} = \omega(X) \rightarrow \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathcal{A})$.

$$\widehat{\nabla}_X m = Xm + \omega(X)m$$
- ▶ $\widehat{R}(X, Y)$ est la multiplication à gauche par $d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$
 \rightarrow 2-forme de courbure $\Omega = d\omega + \omega^2 \in \Omega_{\text{Der}}^2(\mathcal{A})$.
- ▶ Si \mathcal{A} a une involution : $U(\mathcal{A})$ groupe des éléments unitaires de \mathcal{A} .
 $U \in U(\mathcal{A})$ automorphisme de module à droite : $m \mapsto Um$.

Transformation de jauge sur une connexion n.c. :

$$\widehat{\nabla}_X^U m = U^{-1} \widehat{\nabla}_X(Um)$$

Géométrie non commutative

Algèbres d'endomorphismes

L'algèbre et ses dérivations

Connexions non commutatives sur \mathcal{A}

Structure Riemannienne

Modèle de "Maxwell non commutatif"

Généralisations du modèle de Born-Infeld

Conclusion

Perspectives

L'algèbre et ses dérivations

- ▶ \mathcal{E} un fibré vectoriel sur M , groupe de structure $SU(n)$.
- ▶ $\text{End}(\mathcal{E})$ fibré des endomorphismes de \mathcal{E} .
- ▶ \mathcal{A} l'algèbre des sections de $\text{End}(\mathcal{E})$, $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = C^\infty(M)$.
- ▶ Cas trivial : $\mathcal{E} = M \times \mathbb{C}^n$ fibré trivial $\rightarrow \mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes M_n$.
- ▶ Involution, trace et déterminant ($\text{Tr}, \det : \mathcal{A} \rightarrow C^\infty(M)$) bien définis.
- ▶ On a :

$$\text{Int}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \text{Der}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\rho} \text{Out}(\mathcal{A}) = \Gamma(TM)$$

$$\mathcal{X} \longmapsto X$$

- ▶ \mathcal{A}_0 éléments sans trace de \mathcal{A} .
- ▶ $\mathcal{A}_0 \xrightarrow[\text{ad}]{\simeq} \text{Int}(\mathcal{A})$, inverse : $i\theta(ad_\gamma) = \gamma \rightsquigarrow i\theta \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathcal{A})|_{\text{Int}(\mathcal{A})}$.
- ▶ $\nabla^{\mathcal{E}}$ connexion sur $\mathcal{E} \rightarrow \nabla = \nabla^{\mathcal{E}} \otimes \nabla^{\mathcal{E}^*}$ connexion sur $\text{End}(\mathcal{E})$.

$$\rightsquigarrow \text{scinde la suite : } \mathcal{A}_0 \hookrightarrow \text{Der}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM)$$

$$\nabla_X \longleftarrow X$$

$$-\alpha(\mathcal{X}) = i\theta(\mathcal{X} - \nabla_{\rho(\mathcal{X})}) \longleftarrow X$$

- \rightarrow Toute dérivation se décompose sous la forme $\mathcal{X} = \nabla_{\rho(\mathcal{X})} - ad_{\alpha(\mathcal{X})}$.
- $\rightarrow \alpha \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathcal{A})$, $\alpha(ad_\gamma) = -\gamma \in \mathcal{A}_0 \rightarrow \alpha$ généralise $-i\theta$.
- $\rightarrow \alpha$ est similaire à la **forme de connexion** associée à $\nabla^{\mathcal{E}}$.

Connexions non commutatives sur \mathcal{A}

- ▶ Connexion n.c. définie par $\omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathcal{A})$.
- ▶ Le groupe de jauge $SU(\mathcal{A})$ est exactement le groupe de jauge sur \mathcal{E} .
- ▶ $\nabla^{\mathcal{E}}$ connexion ordinaire sur $\mathcal{E} \rightarrow$ 1-forme n.c. $\alpha \rightarrow$ connexion n.c. $\widehat{\nabla}^{\alpha}$:

$$\widehat{\nabla}_{\mathcal{X}}^{\alpha} m := \nabla_{\mathcal{X}} m + m\alpha(\mathcal{X}) = \mathcal{X}m + \alpha(\mathcal{X})m$$

Les courbures coïncident, les transformations de jauge sont compatibles. . .

- ▶ Les connexions n.c. sur \mathcal{A} généralisent les connexions ordinaires sur \mathcal{E} .
- ▶ Décomposition des degrés de liberté :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(M, \text{End } \mathcal{E}) \subset & \xrightarrow{\rho^*} & \Omega_{\text{Der}}^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{ad^*} \gg \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_0^* = \Omega_{\text{Int}}^1(\mathcal{A}) \\ \omega^M = \omega \circ \nabla & \longleftarrow & \omega \\ & & -\omega_{\text{Int}} \circ \alpha \longleftarrow \omega_{\text{Int}} \end{array}$$

\rightarrow On peut décomposer $\omega = \rho^* \omega^M - \alpha^* \omega_{\text{Int}}$, avec $\omega_{\text{Int}} = \omega \circ ad$.

ω^M : forme tensorielle \rightsquigarrow dynamique d'un **champ de Yang-Mills**.

ω_{Int} : section d'un fibré vectoriel, fibres $M_n \otimes \mathfrak{sl}_n^* \rightsquigarrow$ **champs de Higgs**.

Structure Riemannienne

- ▶ Soit g et h deux métriques non dégénérées sur $\text{Der}(\mathcal{A})$ et $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$.
- ▶ Elles définissent une structure Riemannienne sur \mathcal{A} .
- ▶ Localement, dans les bases (∂_μ, ad_{E_a}) et $(dx^\mu, i\theta^a)$, on a :

$$g_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu b} \\ g_{a\nu} & g_{ab} \end{pmatrix} \quad h_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} h^{\mu\nu} & h^{\mu b} \\ h^{a\nu} & h^{ab} \end{pmatrix}$$

- ▶ On définit : $(g_{\text{Int}}^{ab}) = (g_{ab})^{-1}$ et $(h_{\text{Int}}^M) = (h^{\mu\nu})^{-1}$.
- ▶ Cela définit alors un potentiel de jauge : $A_\mu^a = -g_{\text{Int}}^{ab} g_{b\mu} = h_{\text{Int}}^M h^{a\nu}$.
- ▶ Correspond à une connexion ∇ sur $\text{End } \mathcal{E}$ et une 1-forme n.c. $\alpha \underset{\text{loc}}{\simeq} A - i\theta$.
 \rightsquigarrow fournit une **connexion de référence** particulière.
- ▶ Dans la base (∇_μ, ad_{E_a}) , (dx^μ, α^a) , nous avons :

$$g_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^M & 0 \\ 0 & g_{ab} \end{pmatrix} \quad h_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} h^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & h_{\text{Int}}^{ab} \end{pmatrix} \quad \text{où : } \begin{cases} g_{\mu\nu}^M = g_{\mu\nu} - A_\mu^a A_\nu^b g_{ab} \\ h_{\text{Int}}^{ab} = h^{ab} - h^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^b \end{cases}$$

- ▶ Condition de compatibilité entre g et h : $h_{\text{Int}}^M = g_{\text{Int}}^M$ et $h_{\text{Int}}^{ab} = g_{\text{Int}}^{ab} \dots$

 Construction similaire aux constructions de type Kaluza-Klein.

➔ On peut aussi définir le dual de Hodge et une notion d'intégration.


Modèle de “Maxwell non commutatif”

- ▶ Algèbre \mathcal{A} + métrique h (\rightsquigarrow connexion de référence α) + connexion n.c. ω .
- ▶ Paramétrisation : $\omega = \rho^* \tilde{a} + \alpha - \alpha^* \varphi$
 $\rightsquigarrow \tilde{a}$ **forme tensorielle**, $\varphi \in \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_0^*$ **champ scalaire**.
- ▶ Courbure : $\Omega = d\omega + \omega^2 = \dots$
- ▶ On considère l'action suivante :

$$\begin{aligned}
 S[\omega] &= \|\Omega\|^2 = \int_M \int_{n.c.} \Omega \star \Omega \\
 &= \|F_{A+\tilde{a}} - \varphi(F_A)\|^2 + \|\nabla_A \varphi + [\tilde{a}, \varphi]\|^2 + \|\varphi^2 - \varphi\|^2 .
 \end{aligned}$$

➔ *Interprétation* : modèle de Yang-Mills-Higgs sur un fibré non trivial.

$$\text{Vides : } \begin{cases} F_{\mu\nu}^{A+\tilde{a}} = \varphi(F_{\mu\nu}^A) & \varphi = 0 \text{ et } F_{\mu\nu}^{A+\tilde{a}} = 0 \\ [\varphi_a, \varphi_b] = \varphi_c C_{ab}^c & \Rightarrow \text{ou} \\ \nabla_\mu \varphi_b + [\tilde{a}_\mu, \varphi_b] = 0 & \varphi = \text{Id}_{\mathcal{A}_0} \text{ et } \tilde{a} = a\mathbb{1}, \quad da = 0 \end{cases}$$

- ▶ A champ de fond \rightsquigarrow solutions instantoniques, monopoles, ...
- ▶ Métrique dynamique \rightsquigarrow action de type Yang-Mills-Higgs + Einstein-Hilbert.
 couplage inhabituel entre théories de jauge et gravitation.

Généralisations du modèle de Born-Infeld

Géométrie non commutative

Algèbres d'endomorphismes

Généralisations du modèle de Born-Infeld

- Le modèle de Born-Infeld

- Généralisation non commutative

- Étude des solutions pour $G = SU(2)$

- Recherche numérique des solutions

Conclusion

Perspectives

Le modèle de Born-Infeld

- ▶ Modèle particulier d'électrodynamique non linéaire, éq. de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

- ▶ Motivations (début XXème) : Relations entre la matière et le champ E.M.
 \rightsquigarrow deux points de vue en opposition : dualistes et unitaires.

- ▶ Principe de finitude \rightsquigarrow Mie (1912) fait une analogie avec la relativité :

$$L_{Mie} = \sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2}{\beta^2}}, \quad \beta = \frac{e}{r_0^2} : \text{ "champ absolu" } \rightsquigarrow \text{ théorie non covariante.}$$

- ▶ Charge ponctuelle e : énergie H finie, champ \vec{E} régularisé à l'origine ...
 $H = \text{énergie de masse} \Rightarrow r_0 = 3.48 \text{ fm}, \beta \simeq 1.8 \cdot 10^{18} \text{ volt/cm.}$
- ▶ Born et Infeld (1934) généralisent l'élément de volume en R.G. :

$$\begin{aligned} S_{BI}[g, F] &= \int_{\mathbb{R}^4} \beta^2 \left(\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} - \sqrt{|\det(g_{\mu\nu} + \beta^{-1} F_{\mu\nu})|} \right) d^4x \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + \beta^{-2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)} - \beta^{-4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right) \sqrt{|g|} d^4x \end{aligned}$$

- ▶ Propriétés : dualité électrique-magnétique, Legendre, propagation \rightsquigarrow unicité.

Généralisation non commutative

- ▶ '85 théorie des cordes : S_{BI} = action effective \rightsquigarrow dynamique des D-branes.
- ▶ N D-branes coïncidentes \rightsquigarrow généralisation non abélienne de S_{BI} pour des champs de jauge à valeurs matricielles.
Problème : le déterminant n'a plus de sens \rightsquigarrow généralisation non univoque.
- ▶ Plusieurs propositions : la trace symétrisée (cf. Tseytlin), produit tensoriel (cf. T. Hagiwara, H. Park, E.S.-T.M.-R.K.).

Généralisation non commutative : Algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes M_n(\mathbb{C})$.

- ▶ Connexion n.c. : $\omega = A + \theta + \phi \rightsquigarrow$ courbure $\Omega = F + D\phi + V(\phi)$.

$$\mathcal{L}_{binc} = \sqrt{\det |g|} - |\det(\mathbb{1} \otimes g + J \otimes \Omega)|^{1/4n}$$

où $J \in SL(2, \mathbb{C})$ et $J^2 = -\mathbb{1}$, puissance $1/(4n) \rightsquigarrow$ Diff-invariant.

- ▶ Connexion ordinaire : $\omega = A + \theta \rightsquigarrow$ généralisation non abélienne :

$$\mathcal{L}_{bina} = \sqrt{|g|} - \left| \det_{M_2 \otimes \mathcal{M} \otimes M_n} (\mathbb{1}_2 \otimes g_{\mu\nu} \otimes \mathbb{1}_n + \beta^{-1} J \otimes F_{\mu\nu}^a \otimes T_a) \right|^{\frac{1}{4n}}$$

\rightsquigarrow limite $\beta \rightarrow \infty$: modèle de "Maxwell non commutatif" ou de Yang-Mills.

\rightsquigarrow limite $n \rightarrow 1$: théorie de Born-Infeld.

Étude des solutions pour $G = SU(2)$

On considère dans cet exemple des connexions ordinaires.

- Configurations magnétiques ($\vec{E}_a = 0$), statiques, à symétrie sphérique.
 \rightsquigarrow ansatz de 't Hooft :

$$A_k^a = \frac{(1 - k(r))}{r^2} \epsilon^a_{km} x^m$$

- L'action prend la forme :

$$S_{bina} = \int \left(1 - \left\{ \left(1 + \frac{(1 - k^2)^2 + 2(rk')^2}{r^4} \right)^2 + \frac{4}{r^{12}} (1 - k^2)^2 (rk')^4 \right\}^{1/4} \right) r^2 dr$$

- Solutions aux équations du mouvement \rightsquigarrow développements asymptotiques :

$$k(r) = k_0 + ar - k_0 \left(\frac{5a^2}{6g} + \frac{g}{12a^2} \right) r^2 + O(r^3) \quad g = 1 - k_0^2, a \neq 0$$

$$k(r) = \pm \left(1 - \frac{c}{r} + \frac{3c^2}{4r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right) \quad c \geq 0$$

- Solutions qui interpolent ces deux développements ?

Recherche numérique des solutions

Les développements asymptotiques se raccordent-ils ?

- ▶ Ajustement des paramètres k_0 , a et $c \rightsquigarrow$ méthodes numériques.
- ▶ Intégration depuis $r = \infty \rightsquigarrow a$ et k_0 fonctions de $\tau_c = \log(c)$.
- ▶ On représente les solutions dans l'espace de phase $(k, u = \frac{dk}{d \log(r)})$:

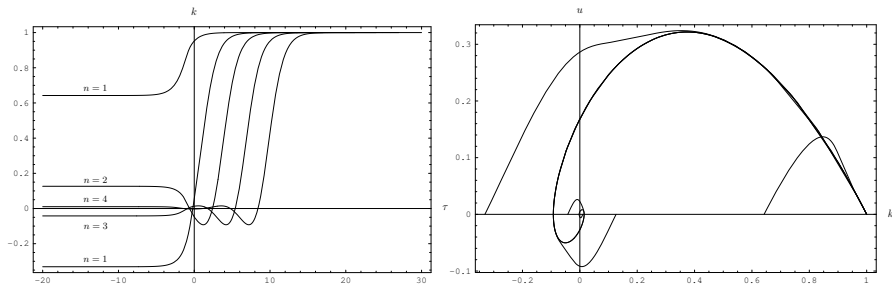


Fig.: Solutions pour les valeurs de paramètre $\tau_c = -3, 1.2, 4, 7, 10$.

- ▶ Transitions “topologiques” aux valeurs de paramètre :

$\tau_c = \log(c)$	1.658	4.781	7.510	10.092	13.218	16.530	19.813
--------------------	-------	-------	-------	--------	--------	--------	--------

Conclusion

$\mathcal{A} = \Gamma(\text{End}(\mathcal{E})) \rightsquigarrow$ bon candidat pour remplacer le fibré principal P .

- ▶ $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ contient les connexions ordinaires, \mathcal{A} Morita équivalente à $C^\infty(M)$.
 \rightsquigarrow nouvelle grille de lecture des théories de jauge.
Ex : Transformations de jauge \in Automorphismes intérieurs de \mathcal{A} . . .
- ▶ Généralisation des théories de jauge aux connexions non commutatives
 \rightsquigarrow unification des champs de Higgs et de Yang-Mills.
- ▶ Fibrés non triviaux \Rightarrow nouveau couplage entre métrique et champs de Higgs.
- ▶ Autres constructions possibles :
 \rightsquigarrow Morphisme de Chern-Weil \rightsquigarrow remplace la construction à partir de P .
 \rightsquigarrow Connexions invariantes \rightsquigarrow généralise la construction sur P .

Généralisation du modèle de Born-Infeld :

- ▶ Naturelle dans le cadre de la GNC des matrices.
 \rightsquigarrow Généralisation non linéaire du modèle de Maxwell en GNC.
- ▶ Existence de solutions de type solitonique pour B.I.N.A.
 \rightsquigarrow D'autres solutions ont été étudiées pour la partie scalaire.

Perspectives

- ▶ Modèle de Maxwell n.c. + réduction symétrique :
↔ étude de situations concrètes.
- ▶ Généraliser cette approche pour d'autres types de fibrés en algèbres.
Ex : algèbres de Clifford, C^* -algèbres, ...
↔ traitement de la gravitation dans un cadre similaire?
↔ K-théorie twistée et classe de Dixmier-Douady \rightarrow applications en théorie des cordes.
- ▶ Liens avec la T.Q.C. algébrique.
Ex : morphisme de Chern-Weil et cohomologie B.R.S.T.
- ▶ Développer de nouvelles méthodes en GNC :
↔ morphisme de Chern-Weil ↔ construction homologique plus générale?
↔ liens avec d'autres constructions comme le caractère de Chern-Connes?
- ▶ Relations entre théories de jauge, brisure de symétrie et gravitation ?

Annexe

Suppléments sur les algèbres d'endomorphismes

Liens avec les symétries de jauge usuelles

Point de vue local des dérivations de \mathcal{A}

Opération de Hodge

Intégration

Connexions invariantes

Expressions locales pour le modèle de "Maxwell non commutatif"

Morphisme de Chern-Weil

Relations avec le fibré principal

La nécessité d'une algèbre plus grande

Relations globales

Dérivations sur \mathcal{A} et \mathcal{B}

Suites scindées par une connexion

Notions algébriques

Calcul différentiel basé sur les dérivations

Opérations de Cartan

Courbes supplémentaires pour l'étude numérique

Courbe d'énergie

Dépendance du paramètre k_0

Liens avec les symétries de jauge usuelles

Tant que l'on considère des connexions ordinaires, \mathcal{A} joue le même rôle que le fibré principal.

- ▶ $\nabla^{\mathcal{E}} \mapsto \alpha$, isomorphisme entre les espaces affines.

$SU(n)$ -connexions sur \mathcal{E}

1-formes sur \mathcal{A} anti-hermitiennes et sans trace telles que $\alpha(ad_\gamma) = -\gamma$

- ▶ $R^{\mathcal{E}}$ courbure de $\nabla^{\mathcal{E}}$, $R^{\mathcal{E}}(X, Y) = \hat{d}\alpha(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + [\alpha(\mathcal{X}), \alpha(\mathcal{Y})]$
- ▶ $ad_\gamma \in \text{Int}(\mathcal{A})$, $\mathcal{L}_{ad_\gamma}\alpha = -\hat{d}\gamma - [\alpha, \gamma]$

Transformations de jauge infinitésimales sur les connexions

=

Dérivées de Lie par rapport aux dérivations intérieures de \mathcal{A} .

L'algèbre de Lie du groupe de jauge de \mathcal{E} est exactement formée des éléments de \mathcal{A} sans trace et antihermitien.

- ▶ Voir compléments opération de Cartan.

Point de vue local des dérivations de \mathcal{A}

U sous ensemble ouvert au dessus duquel $\text{End}(\mathcal{E})$ est trivial.

▶ Restreint à U , \mathcal{A} est isomorphe à $\mathcal{A}_{\text{loc}} := C^\infty(U) \otimes M_n$.

▶ $a \in \mathcal{A} \mapsto a_{\text{loc}} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$.

▶ $\mathcal{X} \in \text{Der}(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{X}_{\text{loc}} \in \text{Der}(C^\infty(U) \otimes M_n)$.

Décomposons en deux parties : $\mathcal{X}_{\text{loc}} = X|_U + ad_{\gamma_{\text{loc}}}$.

▶ $U \cap U' \neq \emptyset$.

▶ Fonction de transition $g : U \cap U' \rightarrow SU(n)$.

▶ a_{loc} et a'_{loc} sont reliés par

$$a'_{\text{loc}} = Ad_{g^{-1}} a_{\text{loc}}$$

▶ \mathcal{X}_{loc} et $\mathcal{X}'_{\text{loc}}$ sont reliés par

$$X'_{|U} = X_{|U}$$

$$\gamma'_{\text{loc}} = Ad_{g^{-1}} \gamma_{\text{loc}} + g^{-1} X_{|U} \cdot g$$

Opération de Hodge

- ▶ Opération de Hodge naturelle : $\star : \Omega_{\text{Der}}^k(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega_{\text{Der}}^{d+n^2-1-k}(\mathcal{A})$ (d : dimension de M , n : rang de \mathcal{E}).
- ▶ Définition locale pour $\omega_{\text{loc}} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p, r_1 \dots r_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \alpha^{r_1} \dots \alpha^{r_q}$:

$$\begin{aligned}
 (\star\omega)_{\text{loc}} &= \frac{(-1)^{q(d-p)}}{(d-p)!(n^2-1-q)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p, r_1 \dots r_q} h^{\mu_1 \nu_1} \dots h^{\mu_p \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \nu_{p+1} \dots \nu_d}^M \\
 &\quad \times h_{\text{Int}}^{r_1 s_1} \dots h_{\text{Int}}^{r_q s_q} \epsilon_{s_1 \dots s_q s_{q+1} \dots s_{n^2-1}} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_d} \alpha^{s_{q+1}} \dots \alpha^{s_{n^2-1}}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

avec ϵ^M et ϵ sont des tenseurs définis par :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_d}^M &= \sqrt{\det(g_{\mu\nu}^M)} \delta_{\nu_1 \dots \nu_d}^{1 \dots d} \\
 \epsilon_{s_1 \dots s_{n^2-1}} &= \sqrt{\det(g_{ab})} \delta_{s_1 \dots s_{n^2-1}}^{1 \dots n^2-1}
 \end{aligned}$$

et $\delta_{A_1 \dots A_N}^{1 \dots N}$ est le symbole Kronecker totalement antisymétrique.

- ▶ On a la relation $\star\star = (-1)^{r(d+n^2-1-r)}$ sur les formes de degré r .

Intégration

- ▶ On a la forme volume sur $\Omega_{\text{Int}}(\mathcal{A})$ définie par :

$$\mathcal{V}_{\text{Int}} = \frac{1}{(n^2 - 1)!} \epsilon_{s_1 \dots s_{n^2-1}} \theta^{s_1} \circ ad \dots \theta^{s_{n^2-1}} \circ ad .$$

- ▶ Cela permet d'intégrer "le long des fibres".
On décompose : $\omega = \rho^* a \cdot \alpha^* \mathcal{V}_{\text{Int}} + \eta$, avec

$$a = \nabla^* (\star^{-1}(\star \omega \cdot \alpha^* \mathcal{V}_{\text{Int}})) \quad \in \Omega(M, \text{End } \mathcal{E})$$

$$\eta = \omega - \rho^* a \cdot \alpha^* \mathcal{V}_{\text{Int}} \quad \in \Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}) .$$

- ▶ L'intégration le long des fibres est donnée par :

$$\int_{n.c.} : \quad \Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}) \quad \longrightarrow \quad \Omega(M)$$

$$\omega = \rho^* a \cdot \alpha^* \mathcal{V} + \eta \quad \longmapsto \quad \int_{n.c.} \omega = \text{Tr}(a) .$$

- ▶ Définit un produit scalaire sur $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$:

$$(\omega, \eta) = \int_M \int_{n.c.} \omega \star \eta .$$

Connexions invariantes

- ▶ **But** : caractériser les degrés de liberté d'une connexion n.c. invariante sous l'action d'un groupe de symétrie.
 - ➔ symétrie sphérique, généralisation de l'ansatz de Witten ...
- ▶ **Méthodes utilisées** :
 - ▶ Géométrie différentielle ordinaire des fibrés G -symétriques.
 - ▶ Liens entre une algèbre d'endomorphismes et un fibré principal.
 - ↪ E : $SU(n)$ -fibré principal sur M , \mathcal{E} fibré associé.
 - ↪ On utilise la "grosse" algèbre $\mathcal{B} = C^\infty(E) \otimes M_n$.
 - ↪ $\mathcal{A} = (C^\infty(E) \otimes M_n)_{SU(n)\text{-Inv}}$.
- ▶ **Résultat principal** : $(\Omega_{\text{Der}}^1(\mathcal{A}))_{G\text{-Inv}} \simeq \Omega^1(\mathcal{C}) \oplus \mathcal{P}$
 - ▶ \mathcal{C} algèbre réduite : $(C^\infty(Q) \otimes \mathcal{W}_0)_{(z_0 + \mathcal{K})\text{-Inv}}$
 - ↪ Q sous-fibré de E , \mathcal{W}_0 sous-algèbre de M_n ...
 - ▶ $\Omega(\mathcal{C})$ calcul différentiel sur \mathcal{C} , \mathcal{P} module sur \mathcal{C} .
 - ↪ construit à partir d'objets reliés à la construction géométrique sur E .

Expressions locales pour le modèle de “Maxwell non commutatif”

- Expressions locales :

$$\|F_{A+\tilde{a}} - \varphi(F_A)\|_{\text{loc}}^2 = \text{Tr} \int_U \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^{A+\tilde{a}} - \varphi(F_{\mu\nu}^A)) h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} (F_{\rho\sigma}^{A+\tilde{a}} - \varphi(F_{\rho\sigma}^A))$$

$$\|\nabla_A \varphi + [\tilde{a}, \varphi]\|_{\text{loc}}^2 = \text{Tr} \int_U (\nabla_\mu \varphi_b + [\tilde{a}_\mu, \varphi_b]) h^{\mu\rho} h_{\text{Int}}^{bc} (\nabla_\rho \varphi_c + [\tilde{a}_\rho, \varphi_c])$$

$$\|\varphi^2 - \varphi\|_{\text{loc}}^2 = \text{Tr} \int_U \frac{1}{2} ([\varphi_a, \varphi_b] - \varphi_c C_{ab}^c) h_{\text{Int}}^{ae} h_{\text{Int}}^{bf} ([\varphi_e, \varphi_f] - \varphi_g C_{ef}^g)$$

où $\nabla_\mu \varphi_b = \partial_\mu \varphi_b + [A_\mu, \varphi_b] - C_{ab}^c A_\mu^a \varphi_c$

Morphisme de Chern-Weil

- Rappelons la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_0 \xrightarrow{ad} \text{Der}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0 \quad (2)$$

$\rightsquigarrow \mathcal{A}_0$: $\text{Der}(\mathcal{A})$ -module et $Z(\mathcal{A})$ -module.

- $f : S_{Z(\mathcal{A})}^q \mathcal{A}_0 \longrightarrow Z(\mathcal{A}) \simeq C^\infty(M)$, $Z(\mathcal{A})$ -linéaire, $\text{Der}(\mathcal{A})$ -invariante.

$$L_{\mathcal{X}} f = 0 \quad \forall \mathcal{X} \in \text{Der}(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_{\nabla_{\mathbf{X}}} f = 0 \\ L_{\text{ad}_\gamma} f = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma(M), \gamma \in \mathcal{A}_0$$

$\Rightarrow f$ définit un polynôme invariant sur $\mathfrak{sl}(n)$.

- $\nabla^{\mathcal{E}}$ connexion sur \mathcal{E} : scinde (2) $\rightsquigarrow R^{\mathcal{E}}$ associe à f un élément

$$f_{\nabla} = ASf(R^{\mathcal{E}} \otimes \cdots \otimes R^{\mathcal{E}}) \in \Omega^{2q}(M) \simeq \underline{\Omega}_{\text{Der}}^{2q}(\text{Out}(\mathcal{A}), Z(\mathcal{A}))$$

$\rightsquigarrow df_{\nabla} = 0 \Rightarrow f_{\nabla}$ co-bord.

\rightsquigarrow classe de cohomologie $[f_{\nabla}]$ indépendante de ∇ .

\Rightarrow application linéaire $f \mapsto [f_{\nabla}]$:

$$I(\mathfrak{sl}(n)) \simeq (S_{Z(\mathcal{A})} \mathcal{A}_0^{*Z(\mathcal{A})})_{\text{Der}(\mathcal{A})\text{-Inv}} \longrightarrow H^{\text{paire}}(M)$$

- Ce morphisme s'identifie au caractère de Chern-Weil usuel.

La nécessité d'une algèbre plus grande

E le fibré principal de groupe de structure $SU(n)$ au dessus de M auquel est associé \mathcal{E} .

Regardons les relations entre E et \mathcal{A} .

On introduit l'algèbre $\mathcal{B} = C^\infty(E) \otimes M_n$

- ▶ $\text{Der}(\mathcal{B}) = [\Gamma(E) \otimes \mathbb{1}] \oplus [C^\infty(E) \otimes \text{Der}(M_n)]$
 $(\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{B}), \hat{d}) = (\Omega(E) \otimes \Omega_{\text{Der}}(M_n), d + d')$.
- ▶ $\mathfrak{su}(n) \ni \xi \mapsto \xi^E$ champ de vecteurs vertical sur $E \rightarrow M$ dérivé sur \mathcal{B} .
- ▶ $\mathfrak{su}(n) \ni \xi \mapsto ad_\xi$ dérivé intérieure sur \mathcal{B} .
- ▶ $\mathfrak{g}_1 = \{ad_\xi / \xi \in \mathfrak{su}(n)\}$ sous algèbre de Lie de $\text{Der}(\mathcal{B})$.
 $C^\infty(E)$ est la sous algèbre invariante pour la dérivée de Lie dans la direction \mathfrak{g}_1 .
- ▶ $\mathfrak{g}_2 = \{\xi^E + ad_\xi / \xi \in \mathfrak{su}(n)\}$ sous algèbre de $\text{Der}(\mathcal{B})$.
 \mathcal{A} est la sous algèbre invariante pour la dérivée de Lie dans la direction \mathfrak{g}_2 .

Relations globales

On a les relations suivantes au niveau des calculs différentiels :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega(E) \otimes \Omega_{\text{Der}}(M_n) & \xleftarrow[\text{su}(n) \ni \xi \mapsto \text{ad}_\xi]{\text{éléments basiques}} & \Omega(E) \\
 \uparrow \text{éléments basiques} & & \uparrow \text{éléments basiques} \\
 \text{su}(n) \ni \xi \mapsto \xi^E + \text{ad}_\xi & & \text{su}(n) \ni \xi \mapsto \xi^E \\
 \Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xleftarrow[\text{Int}(\mathcal{A})]{\text{éléments basiques}} & \Omega(M)
 \end{array}$$

Autres relations :

- Intégration n.c. “le long des fibres n.c.”

$$\begin{aligned}
 \Omega(E) \otimes \Omega_{\text{Der}}(M_n) &\rightarrow \Omega(E) \\
 \Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}) &\rightarrow \Omega(M)
 \end{aligned}$$

- Relations entre les algèbres de Lie des dérivations.

Dérivations sur \mathcal{A} et \mathcal{B}

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \Gamma(TVE) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_E} & \Gamma_M(E) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \pi_* \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Der}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(TM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Ce diagramme commutatif (exact) montre quelques relations entre les dérivations sur \mathcal{A} , les dérivations sur \mathcal{B} et les champs de vecteurs sur E .

Dérivations sur \mathcal{A} et \mathcal{B}

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \Gamma(TVE) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_E} & \Gamma_M(E) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \pi_* \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Der}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(TM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Séquence exacte courte qui relie les champs de vecteurs sur M , les dérivations sur \mathcal{A} et les dérivations intérieures sur \mathcal{A} .

Dérivations sur \mathcal{A} et \mathcal{B}

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \Gamma(TVE) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_E} & \Gamma_M(E) \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \pi_* & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Der}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(TM) \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

$\mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) \subset \text{Der}(\mathcal{B})$ sous ensemble des dérivations sur \mathcal{B} qui préservent $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

$\mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) \subset \text{Der}(\mathcal{B})$ sous ensemble des dérivations sur \mathcal{B} qui s'annulent sur \mathcal{A} .

L'algèbre de Lie $\mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ est générée en tant que $C^\infty(E)$ module par les éléments particuliers $\xi^E + ad_\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{su}(n)$.

Dérivations sur \mathcal{A} et \mathcal{B}

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \Gamma(TVE) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_E} & \Gamma_M(E) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \pi_* \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Der}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(TM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Objets géométriques. $\Gamma(TVE)$ champs de vecteurs verticaux sur E .

$\Gamma_M(E) = \{\hat{X} \in \Gamma(E) / \pi_* \hat{X}(p) = \pi_* \hat{X}(p') \forall p, p' \in E \text{ s.t. } \pi(p) = \pi(p')\}$

algèbre de Lie des champs de vecteurs sur E qui peuvent être envoyés sur des champs de vecteurs sur M par l'application tangente $\pi_* : T_p E \rightarrow T_{\pi(p)} M$.

Dérivations sur \mathcal{A} et \mathcal{B}

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \Gamma(TVE) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_E} & \Gamma_M(E) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \pi_* \\
 0 & \longrightarrow & \text{Int}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{Der}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(TM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Éléments de $\text{Int}(\mathcal{A})$ considérés comme ad_γ pour $\gamma \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

ρ_E restriction à $\mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ de la projection sur le premier terme dans

$$\text{Der}(\mathcal{B}) = [\Gamma(E) \otimes \mathbb{1}] \oplus [C^\infty(E) \otimes \text{Der}(M_n)]$$

Suites scindées par une connexion

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_E} & \Gamma_M(E) \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \pi_* \\
 \text{Der}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(TM)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\pi_* \hat{X})^h + \omega_E(\hat{X})^E + ad_{\omega_E(\hat{X})} & \longleftarrow & \hat{X} \\
 \uparrow \rho(\mathcal{X})^h - ad_{\alpha(\mathcal{X})} & & \uparrow X^h \\
 \mathcal{X} & & X \\
 \nabla_X \longleftarrow & & X
 \end{array}$$

Remarquons que

$$(\pi_* \hat{X})^h + \omega_E(\hat{X})^E + ad_{\omega_E(\hat{X})} \neq \rho(\mathcal{X})^h - ad_{\alpha(\mathcal{X})}$$

En effet :

$$\text{Der}(\mathcal{B}) \ni \mathfrak{X} = X^h + \underbrace{ad_Z}_{\in \text{Int}(\mathcal{A})} + \underbrace{\omega_E(\hat{X})^E + ad_{\omega_E(\hat{X})}}_{\in \mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{A})}$$

Calcul différentiel basé sur les dérivations

- ▶ $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ centre de \mathcal{A} : sous algèbre commutative.
- ▶ $\text{Der}(\mathcal{A})$ espace vectoriel des dérivations de \mathcal{A} , algèbre de Lie, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ module.
 $X : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tel que $X(ab) = X(a)b + aX(b)$.
 \rightsquigarrow généralisation des champs de vecteurs en géométrie différentielle.
- ▶ $\text{Int}(\mathcal{A})$ espace vectoriel des dérivations intérieures,
 \rightsquigarrow idéal de Lie et $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ sous module.
 $a \mapsto X_b(a) = [b, a] = ad_b(a)$.
- ▶ $\text{Out}(\mathcal{A}) = \text{Der}(\mathcal{A})/\text{Int}(\mathcal{A})$ algèbre de Lie, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ -module.
- ▶ $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$, ensemble des applications $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ -multilinéaires anti-symétriques de $\text{Der}(\mathcal{A})$ dans \mathcal{A} . \mathbb{N} -algèbre graduée.
- ▶ d différentielle (de degré 1) définie par (formule de Koszul)

$$\hat{d}\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_{n+1})$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_{n+1}). \quad (3)$$

Opérations de Cartan

\mathcal{A} une algèbre associative, \mathfrak{g} une sous algèbre de Lie de $\text{Der}(\mathcal{A})$.

\mathfrak{g} définit une opération naturelle au sens de H. Cartan sur $(\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}), d)$.

- ▶ **Produit intérieur** : dérivation graduée de degré -1 sur $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$.

$$i_X : \Omega_{\text{Der}}^n(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega_{\text{Der}}^{n-1}(\mathcal{A}) \quad (i_X \omega)(X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{n-1})$$

$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall \omega \in \Omega_{\text{Der}}^n(\mathcal{A})$ et $\forall X_i \in \text{Der}(\mathcal{A})$.

i_X est nul sur $\Omega_{\text{Der}}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

- ▶ **Dérivée de Lie** : dérivation graduée de degré 0 sur $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$.

$$L_X = i_X d + d i_X : \Omega_{\text{Der}}^n(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega_{\text{Der}}^n(\mathcal{A})$$

- ▶

$i_X i_Y + i_Y i_X = 0$	$L_X i_Y - i_Y L_X = i_{[X, Y]}$
$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X, Y]}$	$L_X d - d L_X = 0$

- ▶ Sous espaces de $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ associés à ces opérations :

- ▶ Sous espace **horizontal** : noyaux de tous les i_X pour $X \in \mathfrak{g}$. Alg. Gr.
- ▶ Sous espace **invariant** : noyaux de tous les L_X pour $X \in \mathfrak{g}$. Alg. Diff. Gr.
- ▶ Sous espace **basique** : noyaux de tous les i_X et L_X pour $X \in \mathfrak{g}$. Alg. Diff. Gr.

Courbe d'énergie

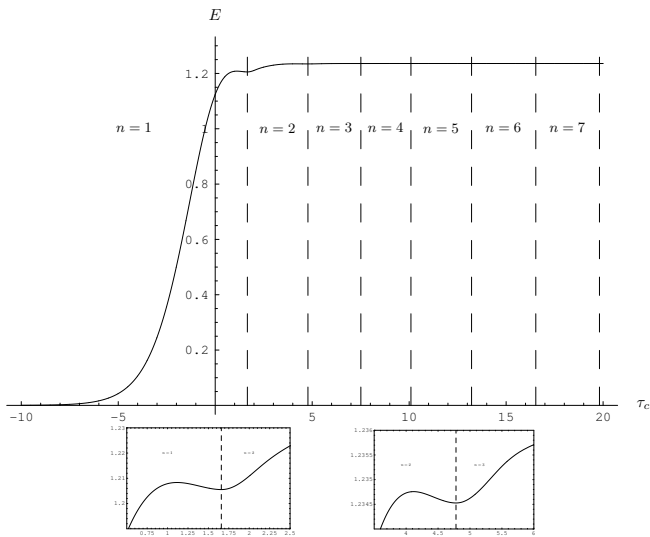


Fig.: Énergie en fonction du paramètre τ_c .

Dépendance du paramètre k_0

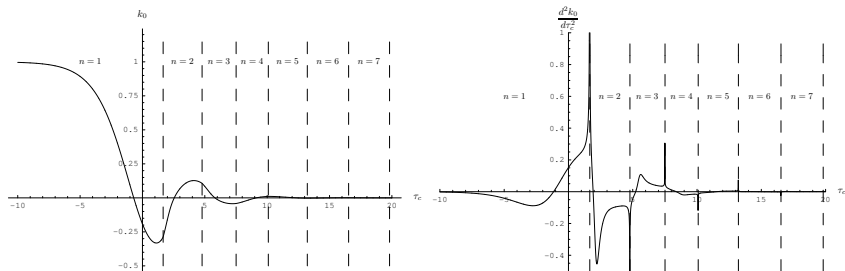


Fig.: k_0 en fonction du paramètre τ_c et sa dérivée seconde. Les singularités de $d^2 k_0 / d\tau_c^2$ coïncident avec les valeurs critiques du paramètre τ_c .