



HAL
open science

Le contrôle des systèmes asynchrones : concepts, propriétés, analyse statique

Joseph Sifakis

► **To cite this version:**

Joseph Sifakis. Le contrôle des systèmes asynchrones : concepts, propriétés, analyse statique. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1979. Français. NNT : . tel-00010598

HAL Id: tel-00010598

<https://theses.hal.science/tel-00010598>

Submitted on 13 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES - SCIENCES
MATHEMATIQUES

par

Joseph SIFAKIS



LE CONTROLE DES SYSTEMES ASYNCHRONES :
CONCEPTS, PROPRIETES, ANALYSE STATIQUE



Thèse soutenue le 25 Juin 1979 devant la commission d'examen.

L. BOLLIET **Président**

P. AZEMA

C. GIRAULT

Ph. JORRAND **Examineurs**

M. NIVAT

M. SINTZOFF

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hydrodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et crytogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Biophysique
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
BEGUIN Claude	Chimie organique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
BUISSON Roger	Physique IUT 1
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
COHEN Henri	Mathématiques pures
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CONTE René	Physique IUT 1
CYROT Michel	Physique du solide
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
GLENAT René	Chimie organique
GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KERCKOVE Claude	Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minérale
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépatogastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophthalmologie

MM. PARAMELLE Bernard	Pneumologie
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
RAPHAEL Bernard	Stomatologie
SCHAEFER René	Cancérologie
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie
STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD
M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

MM. SARRAZIN Pierre
 SOUQUET Jean-Louis
 TOUZAIN Philippe
 URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
 BOOS Jean-Yves
 GUILHOT Bernard
 KOBILANSKI André
 LALAUZE René
 LANCELOT François
 LE COZE Jean
 LESBATS Pierre
 SOUSTELLE Michel
 THEVENOT François
 THOMAS Gérard
 TRAN MINH Canh
 DRIVER Julian
 RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
 CHEHIKIAN Alain
 VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
 DESCHIZEAUX Pierre
 GLANGEAUD François
 JAUSSAUD Pierre
 Mme JOURDAIN Geneviève
 MM. LEJEUNE Gérard
 PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
 LATOMBE Jean-Claude
 LUCAS Michel
 VERDILLON André

Je remercie

Monsieur L.BOLLINET, Professeur à l'Université de Grenoble, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse,

Monsieur P.AZEMA, Maître de recherches au CNRS, qui a bien voulu accepter de juger ce travail et a contribué par ses remarques à son amélioration,

Monsieur C.GIRAULT, Professeur à l'Université de Paris VI, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et a accepté de le juger,

Monsieur Ph.JORRAND, Maître de recherches au CNRS, pour la confiance qu'il m'a témoignée en m'accueillant dans son équipe et l'intérêt qu'il a porté au développement et à la mise en valeur de ce travail,

Monsieur M.NIVAT, Professeur à l'Université de Paris VII, qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury,

Monsieur M.SINTZOFF, Ingénieur à la Société PHILIPS, qui s'est intéressé à ce travail en y apportant des critiques importantes.

Je tiens également à remercier,

ceux qui par leur collaboration ont contribué au développement de résultats contenus dans cette thèse, P.GUERREIRO, M.MOALLA, J.PULOU et J.P.QUEILLE ;

tous ceux qui par leurs discussions critiques et suggestions ont contribué à l'amélioration de ce travail et plus particulièrement P.BERLIOUX, J.PLEYBER et J.VOIRON ;

Mesdames H.DIAZ et M.J.DOREL qui ont dactylographié avec soin ce mémoire ;

Mesdames E.HERRMANN et A.BOUVET de la Bibliothèque de l'IMAG pour l'aide qu'elles ont apportée dans la recherche de ma documentation ainsi que le personnel du Service de reprographie de l'IMAG qui a contribué à l'impression de cette thèse.

LE CONTROLE DES SYSTEMES ASYNCHRONES:
CONCEPTS, PROPRIETES, ANALYSE STATIQUE

INTRODUCTION

Ch. I -HYPOTHESES DE TRAVAIL

Ch. II -LES SYSTEMES DE TRANSITIONS

Ch. III-CONTROLEURS A COMMANDES GARDEES

Ch. IV -LES RESEAUX DE PETRI EN TANT QUE CONTROLEURS

Ch. V -ANALYSE DES PROPRIETES LOGIQUES DES RESEAUX DE PETRI

Ch. VI -LA NOTION DE PLACE IMPLICITE : DEUX APPLICATIONS

Ch. VII-ANALYSE DES PROPRIETES DYNAMIQUES : LES RESEAUX DE PETRI TEMPORISES

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE : PRINCIPALES NOTATIONS ET ABREVIATIONS.

INTRODUCTION

La première motivation pour étudier les problèmes relatifs au parallélisme a été le désir d'obtenir un meilleur emploi des ressources et une accélération des calculs dans les ordinateurs. A partir de la fin des années "60", les progrès dans le domaine des composants électroniques et par conséquent la perspective d'utilisation d'architectures parallèles et distribuées, ont posé aux informaticiens un grand nombre de problèmes relatifs au calcul parallèle touchant aux domaines de la conception des machines, de l'algorithmique (recherche d'algorithmes de nature parallèle, transformation d'algorithmes séquentiels en parallèles), des langages de programmation (enrichissement en primitives de façon à pouvoir exprimer directement le parallélisme dans les programmes).

La recherche sur ces problèmes a mené à l'étude de questions plus fondamentales concernant, le phénomène de flot de l'information, la nature du parallélisme et les concepts nécessaires à la modélisation des systèmes parallèles.

En ce qui concerne la modélisation des systèmes parallèles, il est vite apparu commode de les considérer comme un ensemble de sous-systèmes ou de processus séquentiels qui interagissent en transformant des objets communs. Cette interaction traduit sur le plan fonctionnel la coordination des composantes d'un système pour réaliser son comportement global et revêt deux aspects fondamentaux et complémentaires: la concurrence (pour l'acquisition par les actions des ressources nécessaires à leur exécution) et la coopération (l'utilisation par une action du résultat d'une autre). Aujourd'hui, la décomposition d'un système en sous-systèmes évoluant en parallèle est considérée non seulement comme une commodité mais comme une étape nécessaire de la démarche de la conception.

Un système parallèle étant conçu comme un ensemble de sous-systèmes évoluant simultanément, il n'est pas réaliste, pour des raisons technologiques, logiques et méthodologiques, de faire une hypothèse quelconque sur l'existence de relations entre les durées des actions dans chacun de ses sous-systèmes. Ceci a mené à

considérer l'asynchronisme comme une des caractéristiques fondamentales des systèmes parallèles, c'est-à-dire à adopter l'hypothèse qu'il n'existe pas de mesure commune des durées de leurs actions. Une conséquence de cette hypothèse est que les actions ont des durées finies mais non bornées et qu'un système parallèle bien conçu doit avoir un comportement indépendant de sa vitesse. L'idée de construire des machines totalement asynchrones en espérant une meilleure utilisation du matériel et donc un gain en rapidité - dans ce cas les durées des actions sont leurs durées réelles et non une borne supérieure comme dans le cas synchrone - a motivé un certain nombre de travaux et projets qui n'ont pas abouti jusqu'à aujourd'hui à des résultats facilement exploitables [MUL63] [KEL74] [JUM75] [PAT70] [RUM75]. Néanmoins, l'asynchronisme reste une hypothèse très commode lorsqu'on modélise des systèmes parallèles à partir d'un certain niveau d'abstraction même si leur implémentation est de nature synchrone.

Les systèmes parallèles étant considérés comme des ensembles de sous-systèmes qui interagissent mais ayant chacun son propre rythme d'évolution, leur fonctionnement, par rapport à celui des systèmes séquentiels, est caractérisé par un haut degré de non-déterminisme. Ce non-déterminisme est dû aussi bien à leur caractère asynchrone qu'au fait qu'il existe à un moment donné plusieurs évolutions possibles respectant les contraintes de coordination entre sous-systèmes. Le caractère non-déterministe des systèmes parallèles rend le problème de leur vérification beaucoup plus difficile que celui de la vérification des systèmes séquentiels.

En effet, lors de la modélisation d'un système séquentiel le concepteur a la notion d'état global et peut plus facilement appréhender le fonctionnement engendré à partir d'un état initial donné et ses propriétés. Par contre, pour les systèmes parallèles la connaissance de chacun de ses sous-systèmes et leur conformité à certains critères de validité ou de bon fonctionnement, n'implique qu'une connaissance imparfaite du comportement global et de ses propriétés. De plus, si pour les systèmes séquentiels la vérification par simulation est envisageable, le non-déterminisme des systèmes parallèles rend les méthodes de ce type impraticables dans la

mesure où leur application présuppose que le fonctionnement à partir du même état initial mène au même résultat.

Un grand nombre de modèles ont été proposés dans le but de représenter et d'étudier les systèmes parallèles. Pour une étude comparative des principaux parmi ces modèles on peut se référer à [PET74] [MIL73] [MIL74] [MIL75] [MIL76]. Il est affirmé dans [PET74] que toute description dans un de ces modèles est décomposable en deux parties : une partie contrôle et une partie opérative. Dans la première on représente seulement les aspects du système relatifs au séquençement et la coordination des actions tandis que dans la partie opérative on décrit les actions, leur effet sur les objets qu'elles transforment en définissant une interprétation du contrôle. Les premiers modèles pour l'étude du calcul parallèle [LUC68] [ROD67] sont des modèles interprétés. Dans les modèles les plus récents, la tendance est de faire abstraction de la nature et des caractéristiques des actions et des objets de la partie opérative. Ceci permet d'étudier sur des modèles plus simples des propriétés inhérentes aux systèmes parallèles.

Ce principe de l'étude séparée du contrôle a été adopté dans ce travail motivé par la recherche d'un "bon" modèle pour la représentation du contrôle des systèmes asynchrones, c'est-à-dire d'un modèle permettant la description aisée et naturelle, par les concepts et primitives qu'il introduit, et offrant des possibilités d'analyse statique.

Par analyse statique d'un système, nous entendons l'extraction d'informations (relatives à la vérification d'une propriété) à partir d'un modèle de ce système sans faire appel à une simulation. Cette distinction est parfois difficile à cerner: plusieurs méthodes d'analyse statique sont basées sur la simulation exhaustive sur un modèle en faisant intervenir des artifices simplificateurs. La différence de fond se situe au niveau des résultats que l'on peut obtenir : les méthodes d'analyse statique permettent la démonstration des propriétés et donnent donc des résultats "absolus", tandis que les méthodes par simulation ne permettent

qu'une vérification partielle relative au contexte de fonctionnement simulé. Cette distinction justifie d'ailleurs l'intérêt porté aux méthodes d'analyse statique.

Les propriétés étudiées caractérisent la façon dont la coordination des actions de la partie opérative est assurée et peuvent être étudiées sur la partie contrôle en faisant abstraction de son environnement. On peut les classer en deux catégories :

- Les propriétés logiques dont la vérification se ramène à la démonstration d'une proposition indépendante de la vitesse de fonctionnement du système.
- Les propriétés dynamiques dont l'étude permet de déterminer les limites d'utilisation d'un système (temps de réponse, débits) à partir d'informations sur les caractéristiques dynamiques de ses composantes (durées des actions, densités des probabilités d'exécution des actions).

Cette étude, menée sur un ensemble de modèles, est divisée en deux parties. La première (chapitres I, II, III), présente des résultats d'application générale et la deuxième (chapitres IV, V, VI, VII) des résultats propres aux réseaux de Petri. Chaque chapitre est précédé d'une brève présentation. La bibliographie est organisée par chapitres et une liste des symboles et notations utilisées est donnée en annexe.

Le premier chapitre est consacré à la présentation des hypothèses et de l'objet de travail, à savoir la définition progressive des notions utilisées et du domaine d'application des résultats présentés.

Les systèmes de transitions constituent un modèle primitif sur lequel sont présentés, au deuxième chapitre, des résultats d'application générale pour la vérification du contrôle. On montre que ces propriétés sont exprimables à partir de deux concepts de base, ceux d'invariant et de trajectoire, et que leur vérification se ramène au problème du calcul de points fixes d'opérateurs monotones.

Au troisième chapitre, les résultats du chapitre précédent sont illustrés sur deux modèles dont les actions sont "gardées" par un ensemble de conditions ou par un invariant. De plus, deux types d'invariants particuliers sont étudiés sur ces modèles: les invariants caractéristiques et les verrous.

Dans les quatre chapitres qui suivent nous étudions les propriétés et les méthodes d'analyse des systèmes parallèles sur les réseaux de Petri qui constituent le modèle le plus "représentatif" parmi les modèles utilisés pour la représentation du flot du contrôle tels que les "graphes biologiques" [BAE70], les systèmes d'addition des vecteurs [KAR69], les systèmes de remplacement des vecteurs [KEL72].

Les trois premiers chapitres sur les réseaux de Petri sont respectivement consacrés, à la présentation et comparaison des différentes extensions de ce modèle, à la présentation de résultats sur l'analyse statique de leurs propriétés et à l'étude de concepts propres à ce modèle. Le dernier chapitre porte sur la vérification des propriétés dynamiques des systèmes à partir des réseaux de Petri temporisés. De plus, ce dernier modèle est comparé à d'autres types de réseaux tels que les réseaux à impédance et les réseaux à dipôles linéaires.

Ce travail a été effectué depuis décembre 1976 dans le cadre du projet "Description des Systèmes Dynamiques Discrets" développé dans l'équipe "Conception et Mise en Oeuvre de Langages". L'objectif de ce projet est de concevoir, puis de mettre en oeuvre, un formalisme de description qui soit de haut niveau et qui repose sur un modèle facilement analysable. Ceci doit permettre une description aisée et naturelle à l'aide de notions de base évoluées ainsi que l'analyse statique de cette description. L'idée consiste à définir un langage de description évolué conçu pour qu'il soit possible d'obtenir de façon automatique, à partir d'une description faite dans ce langage, un modèle représentant certains aspects du fonctionnement et en particulier le contrôle du système décrit. Le modèle ainsi obtenu doit être analysé statiquement pour vérifier des propriétés logiques et dynamiques.

Initialement, le modèle "facilement analysable" était les réseaux de Petri. L'insuffisance de ce modèle à exprimer efficacement le contrôle lorsque ceci dépend fortement de l'état de la partie opérative [QUE78] nous a amené à considérer des modèles de plus haut niveau étudiés dans la première partie de ce travail.

CHAPITRE I

HYPOTHESES DE TRAVAIL

I.1.	LA NOTION PRIMITIVE DE SYSTEME -----	2
I.2.	LES SYSTEMES ETUDIES -----	3
I.3.	MODELISATION D'UN SYSTEME A FONCTIONNEMENT PARALLELE	
I.3.1.	L'approche "objective" -----	6
I.3.2.	L'approche "phenomenologique" -----	7
I.3.3.	Comparaison des deux approches -----	9
I.3.4.	Conclusions -----	10

CHAPITRE I

PRESENTATION

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'objet de cette étude qui est le contrôle des systèmes asynchrones. Il a été écrit dans le but de clarifier des notions relatives au fonctionnement parallèle des systèmes qui, quoique couramment utilisées, n'ont pas été encore suffisamment bien étudiées dans leur ensemble. En particulier, l'utilisation de modèles non déterministes séquentiels, tels que les réseaux de Petri et les programmes non déterministes, soulève un certain nombre de questions relatives aux liens entre parallélisme et non déterminisme ainsi qu'à la possibilité de représenter les aspects principaux d'un fonctionnement parallèle par un modèle séquentiel non déterministe.

Ce chapitre doit être considéré plutôt comme un support pour la meilleure compréhension des chapitres qui suivent qu'un ensemble de résultats mathématiques bien établis.

I.1. - LA NOTION PRIMITIVE DE SYSTEME

Nous admettons qu'un système S est un ensemble d'objets $\{V_i\}_{i=1}^n$ interagissant suivant des lois qui peuvent être décrites par des relations mathématiques [MES72] :

$$S \subseteq V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$$

Un objet V_i est un ensemble dont les éléments sont appelés états. L'ensemble des états de V_i correspond à l'ensemble des différents aspects sous lesquels cet objet est perçu ou utilisé.

Un système est un mécanisme qui évolue ; la relation S décrit précisément l'ensemble des configurations d'état possibles au cours de son évolution. D'une façon imagée, le fonctionnement d'un système peut être considéré comme un "jeu" qui est le résultat de l'activité d'un ou plusieurs "joueurs" modifiant indépendamment l'état des objets mais agissant de sorte que la contrainte représentée par S soit vérifiée. Par exemple,

- $S_1 \subseteq V_1 \times V_2$ avec $V_1 = V_2 = \mathbb{R}_+$, $(a, b) \in S_1 \iff ab=1$ est un système dont le lieu des états est une hyperbole.

- $S_2 \subseteq V_3 \times V_4$ avec $V_3 = \{0, 1\}^*$, $V_4 = \{0, 1\}$

$$S_2 = \{(0+1)^* 1 0 1\} \times \{1\} \cup \{(0+1)^* - (0+1)^* 1 0 1\} \times \{0\}$$

représente le comportement d'un automate ayant comme vocabulaire d'entrée et comme vocabulaire de sortie $\{0, 1\}$ et qui reconnaît tous les mots se terminant par 1 0 1. Il faut remarquer que dans cet exemple on attribue des rôles particuliers aux objets V_3 et V_4 : V_3 représente les entrées et V_4 représente les sorties de S_2 . Ceci implique en particulier qu'il existe une relation cause-effet entre les changements des états de ces objets, c'est-à-dire que pour tout changement de l'état de V_3 l'état de V_4 doit être éventuellement modifié de façon que la contrainte donnée par S_2 soit satisfaite.

Cette définition constitue un cadre suffisamment général pour en déduire, en apportant des précisions supplémentaires, la définition de différents types de systèmes. Il s'agit notamment de préciser, si certains objets jouent un rôle particulier pour le fonctionnement, la signification de certains termes comme par exemple "configuration d'état" ou "modification d'état". On peut en effet se demander si n'importe quelle modification des états est permise, si ces modifications ont une "durée" et si dans ce cas elles sont superposables dans le temps. De plus, il est évident que la vérification du fait qu'une configuration d'états des objets constituant un système appartient à S ne peut être effectuée qu'à des instants où celle-ci est définie, c'est-à-dire à des instants où aucune modification n'est en train de se produire.

Nous pensons que l'étude des questions que soulève cette définition primitive doit mener à une meilleure appréhension de ce concept et une classification générale qui n'a pas été faite, à notre connaissance, jusqu'à aujourd'hui. Notre objectif dans ce chapitre est d'introduire et de justifier (intuitivement) certaines notions utilisées le long de cette thèse concernant la nature, le fonctionnement et la modélisation des systèmes asynchrones à évolutions parallèles.

I.2. - LES SYSTEMES ETUDIES

Pour le type des systèmes étudiés - qui sont des systèmes discrets - on suppose que l'état des objets constituant un système ne peut être modifié que par l'exécution d'une action. Une action a_r est une relation sur un ensemble d'objets $a_r \subseteq (V_{i_1} \times V_{i_2} \times \dots \times V_{i_s})^2$ où $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ et n est le nombre d'objets du système. Elle ne peut être exécutée que si le vecteur $s = (s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_s})$ représentant les états des V_{i_j} , $1 \leq j \leq s$ appartient au domaine de a_r . Après son exécution, le vecteur représentant les états de V_{i_j} devient $s' = (s'_{i_1}, s'_{i_2}, \dots, s'_{i_s})$ tel que $(s, s') \in a_r$. Pour ce qui suit, un système est défini par une relation $S \subseteq \prod_{i=1}^n V_i$ munie d'un ensemble fini d'actions $A = \{a_i\}_{i=1}^m$ dont l'exécution peut seulement modifier l'état des objets. De plus, on suppose que l'exécution d'une

action commence par un évènement, son début, et se termine par un évènement, sa fin. Par conséquent elle peut avoir une "durée" : entre le début et la fin d'une action, d'autres débuts et fins d'actions peuvent se produire, leur nombre donnant une mesure de sa durée. Aucune relation entre les durées des actions n'est supposée. Elles sont par hypothèse finies mais non bornées ; entre le début et la fin d'une action, un nombre fini mais non borné de débuts et fins d'action peut se produire. Cette hypothèse donne le caractère d'asynchrone aux systèmes considérés. Aussi il est important de supposer, pour l'étude de ces systèmes, que les évènements début et fin d'action sont élémentaires, c'est-à-dire de durée nulle. Cette hypothèse permet de caractériser le fonctionnement des systèmes par l'ensemble des séquences d'évènements de début et de fin d'actions qui peuvent se produire.

On dira que le fonctionnement d'un système $S \subseteq \prod_{i=1}^n V_i$, $A = \{a_i\}_{i=1}^m$ est séquentiel si ses actions s'exécutent l'une après l'autre, c'est-à-dire aucun évènement n'a lieu entre le début et la fin d'une action. Le fonctionnement séquentiel d'un système consiste en l'exécution d'une séquence d'actions $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s} \dots$. L'exécution de cette séquence peut être conçue comme le résultat de l'activité d'un "joueur" qui seul peut transformer l'état du système en exécutant une action à la fois. Un tel "joueur" peut être défini par la donnée de la séquence d'actions qu'il exécute et s'appelle processus séquentiel ou plus simplement processus. L'état $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ d'un système à fonctionnement séquentiel est un vecteur dont les composantes sont les états des objets qui le constituent ; il est défini uniquement pendant les instants compris entre la fin d'une action et le début de l'action qui lui succède. L'exécution d'un processus $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s} \dots$ à partir d'un état initial $s_0 \in S$ consiste à transformer successivement : s_0 par a_{i_1} , l'état ainsi atteint s_1 par a_{i_2} etc...

Un système S sera dit déterministe si pour chaque état $s \in S$ il existe au plus un état successeur direct de cet état. Evidemment, un système déterministe ne peut engendrer qu'un seul processus à partir d'un état donné. Un système dont on ne considère que le fonctionnement séquentiel est un système de transitions. Pour les systèmes de transitions on peut supposer que la durée des actions est nulle étant donné qu'aucun évènement ne se produit entre leur début et leur fin. Les

actions de ces systèmes seront appelées transitions. Remarquons qu'un système de transitions $S \subseteq \prod_{i=1}^n V_i$ $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ peut être considéré comme un automate non déterministe dont l'ensemble d'états est S et le vocabulaire d'entrée est en bijection avec les transitions.

On dira que le fonctionnement d'un système est parallèle lorsqu'il n'est pas séquentiel, c'est-à-dire lorsqu'il y a superposition des actions dans le temps. Pour introduire ce type de fonctionnement il faut définir une relation d' "indépendance" entre actions : deux actions a_i et a_j sont indépendantes si les ensembles d'objets qu'elles transforment sont disjoints. Cette relation est symétrique mais non transitive.

Soient a_1 et a_2 deux actions indépendantes telles que la séquence $a_1 a_2$ soit exécutable à partir d'un état $s_0 \in S$. Ces actions agissant sur des objets différents, on peut les exécuter en parallèle en initialisant a_2 avant la fin de l'exécution de a_1 . L'état du système après la fin des exécutions de ces deux actions sera le même qu'après leur exécution séquentielle. On peut généraliser ce raisonnement en permettant l'exécution en parallèle d'un ensemble d'actions deux à deux indépendantes si après leur exécution le système atteint un état s , $s \in S$. Evidemment, il est possible d'exhiber pour un système des fonctionnements parallèles pendant lesquels son état n'est jamais défini en imposant un degré de parallélisme suffisamment grand (une action au moins est en cours à tout instant). Remarquons enfin que des fonctionnements parallèles ne peuvent être définis que pour des systèmes non déterministes.

I.3. - MODELISATION D'UN SYSTEME A FONCTIONNEMENT PARALLELE

Dans ce paragraphe nous présentons deux approches pour la modélisation des systèmes asynchrones, la première consistant à considérer un système comme un ensemble d'objets avec des règles de transformation de leurs états et la seconde comme un ensemble de processus avec des règles de coordination.

I.3.1. L'approche "objective"

On peut étudier le fonctionnement parallèle d'un système $S \subseteq \prod_{i=1}^n V_i$, $A = \{a_i\}_{i=1}^m$ sur un modèle qui est un système de transitions S' dont les transitions correspondent aux débuts et fins des actions de S et qui peut être défini de la façon suivante :

1/ $S' \subseteq (\prod_{i=1}^n V_i) \times P(A)$ où $P(A)$ est l'ensemble des parties de A

$A' = \{\overline{a_i}\}_{i=1}^m \cup \{\underline{a_i}\}_{i=1}^m$ où $\overline{a_i}$ et $\underline{a_i}$ sont des transitions associées au début et à la fin de $a_i \in A$.

2/ Pour $s \in S$ et $b \in P(A)$ on a $(s,b) \in S'$ ssi les actions de b sont indépendantes. Initialement si S se trouve à l'état s_0 , S' se trouve à l'état (s_0, \emptyset) .

3/ La transition $\overline{a_i}$ est exécutable à partir de l'état (s,b) si a_i est exécutable dans S à partir de s et $b \cup \{a_i\}$ ne contient que des actions deux à deux indépendantes. Si s_i est l'état atteint après l'exécution de a_i dans S alors $(s_i, b \cup \{a_i\})$ est l'état de S' après l'exécution de $\overline{a_i}$.

La transition $\underline{a_i}$ n'est exécutable à partir de l'état (s,b) que si $a_i \in b$. L'état atteint après son exécution est $(s, b - \{a_i\})$.

On peut vérifier que S' est bien une représentation de S : si S' se trouve à l'état $s' = (s,b)$ alors dans S les actions de b s'exécutent en parallèle et s est l'état de S lorsque leur exécution sera terminée.

Le fonctionnement du modèle S' peut être considéré de façon classique [PET74] comme le fonctionnement d'un automate qui contrôle un environnement où se trouvent les objets V_i et des opérateurs réalisant les actions a_i . L'ensemble des états de cet automate est l'ensemble S' , son vocabulaire d'entrée est en bijection avec $\{\overline{a_i}\}_{i=1}^m \cup \{\underline{a_i}\}_{i=1}^m$ et son vocabulaire de sortie est en bijection avec $\{\overline{a_i}\}_{i=1}^m$. Sa fonction de transition est définie par 3/. On peut imaginer le dialogue de l'automate avec son environnement de la façon suivante :

- R1/ Avant l'exécution d'une action a_i , l'environnement présente le symbole d'entrée $\overline{a_i}$ à l'automate pour lui demander l'autorisation d'exécuter cette action. Si la transition $\overline{a_i}$ est exécutable dans l'automate, alors le symbole $\overline{a_i}$ est présenté en sortie ; ceci est interprété par l'environnement comme l'autorisation d'exécuter l'action a_i . Sinon, le symbole d'entrée $\overline{a_i}$ est mémorisé.
- R2/ Lorsqu'une action se termine, l'environnement présente à l'automate le symbole a_i . A la lecture de ce symbole l'automate exécute la transition a_i et ne présente en sortie aucun symbole (on admettra par la suite que dans ce cas il présente le mot vide de $(\{\overline{a_i}\}_{i=1}^m)^*$ lorsqu'on considérera les automates de ce type comme générateurs de langages).
- R3/ Aucune hypothèse n'étant faite sur les vitesses relatives de l'environnement et de l'automate, on admettra que les symboles d'entrée qui correspondent à des demandes non traitées, ou refusées, sont mémorisés et que l'automate choisit au hasard le symbole à lire à un moment donné.

Nous appellerons les automates utilisés dans un tel contexte contrôleurs. Cette distinction entre contrôle et environnement contrôlé est à la base de plusieurs modèles de description de systèmes à fonctionnement parallèle [KAR69][KEL73] [ROU78] [VAL76].

I.3.2. L'approche "phenomenologique"

Il est parfois commode et naturel d'associer au fonctionnement parallèle d'un système un objectif global et de considérer que cet objectif est atteint grâce à la "coordination" de processus séquentiels, chacun remplissant une fonction particulière par l'exécution de la séquence d'actions qui le caractérise. Cette "coordination" est le résultat de leur interaction en transformant des objets communs. Remarquons que vu sous cette optique, un système "existe" indépendamment du fait qu'il engendre un, plusieurs ou aucun processus.

On peut adopter une vision plus "subjective" d'un système à fonctionnement parallèle en considérant non pas ce qu'il est effectivement, mais comment son activité est perçue par un observateur qui ne peut observer que les événements qui s'y produisent. Celui-ci considère que le système est un ensemble de processus $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$, qui respectent pendant leur exécution des contraintes qui sont exprimables à partir de variables représentant des quantités observables telles que le nombre d'exécutions d'une action, l'activité ou la non activité d'une action. On supposera que ces contraintes, appelées contraintes de synchronisation s'expriment par une relation $S' \subseteq \prod_{i=1}^n V_i'$ où les V_i' sont des variables de synchronisation. L'effet sur ces variables V_i' des événements qui sont significatifs pour le respect des contraintes, est représenté par un ensemble d'actions $A' = \{a_i'\}_{i=1}^m$ en bijection avec ces événements.

On peut dans ce cas, comme précédemment, modéliser un système en considérant qu'il est constitué de deux parties, un contrôleur et son environnement :

- 1/ L'environnement est constitué de r processus $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$. Chaque processus π_i est décrit séparément par la donnée d'une séquence d'actions σ_i et d'un ensemble d'objets dont l'état est modifiable uniquement par ses propres actions. On distinguera également les actions lorsqu'elles sont utilisées par des processus différents c'est-à-dire pour π_i, π_j deux processus distincts on a $A^i \cap A^j = \emptyset$ où A^i et A^j sont respectivement leurs ensembles d'actions.
- 2/ Le contrôleur est un automate qui sera construit à partir du système de transition $S' \subseteq \prod_{i=1}^n V_i'$ $A' = \{a_i'\}_{i=1}^m$ comme précédemment. On suppose que A' est en bijection avec $\{\overline{A^i}\}_{i=1}^r \cup \{\underline{A^i}\}_{i=1}^r$ où $\overline{A^i}$ et $\underline{A^i}$ sont des ensembles de symboles correspondant respectivement aux débuts et aux fins des actions de A^i .

Cette méthodologie de description des systèmes à fonctionnement parallèle a été proposée par E.W.Dijkstra [DIJ68] et adoptée par [CAM75] [PUL78] [AGE74] [ROB77].

Remarque 1 :

Les ensembles d'actions des processus étant disjoints, on peut réduire le vocabulaire d'entrée du contrôleur à $\{\overline{A^i}\}_{i=1}^n$ en supposant que lorsque un processus

demande l'autorisation d'une action, il signale également la fin de l'action qui le précède.

1.3.3. Comparaison des deux approches

La comparaison des deux approches présentées peut susciter un certain nombre de questions d'ordre épistémologique qui se situent au-delà du domaine de cette recherche. Si nous les avons présentées ici c'est parce que ces deux approches soutiennent deux méthodologies de description des systèmes "entre" lesquelles se situent celles utilisées en pratique.

- Selon la première approche, le système est considéré comme un ensemble d'objets muni d'un ensemble de règles de "manipulation" de ces objets définies par les actions et la contrainte $S \subseteq \prod_{i=1}^n V_i$. La notion de processus n'est pas primitive: un système est défini indépendamment du fait qu'il engendre un, plusieurs ou aucun processus.
- Selon l'approche dite phénoménologique, la notion de processus est primitive. Un système est un ensemble de processus ayant leurs propres objets et leurs propres actions. Les processus respectent pendant leur exécution des contraintes portant sur des variables qui représentent des quantités observables.

Ici, il est important de noter cependant que les deux approches mènent à des modèles qui sont formellement équivalents :

Les deux cas conduisent à une même notion de contrôleur tandis que les environnements ne diffèrent que par la "structuration" des actions en processus. Le modèle obtenu par l'approche "objective" n'est donc qu'un cas particulier du second ; on peut en effet considérer qu'à chaque action a_i correspond le processus $a_i^\infty = a_i a_i a_i \dots$. Inversement, si l'on part d'un modèle à processus, on peut obtenir un modèle du premier type en modifiant le contrôleur (le nouveau contrôleur vérifie que les actions de chaque processus s'exécutent dans l'ordre spécifié par la séquence qui le caractérise).

Dans ce qui suit, un système sera représenté par un contrôleur dont l'environnement est un ensemble de processus. Pour simplifier on admettra que la fin de l'exécution d'une action par un processus est signalée en même temps que la demande de l'action qui lui succède (remarque 1).

1.3.4. Conclusions

Tout système à fonctionnement parallèle S peut être représenté par un système de transitions non déterministe S' . De plus S' peut être décomposé en deux parties qui dialoguent : un automate non déterministe, appelé contrôleur, et un environnement composé des actions et des objets de S .

On peut étudier le fonctionnement de S à partir de son contrôleur si on suppose que ce fonctionnement est représenté par l'ensemble des séquences d'évènements de début et de fin d'action qui peuvent se produire dans S .

CHAPITRE II

LES SYSTEMES DE TRANSITIONS

II.1.	LES SYSTEMES DE TRANSITIONS EN TANT QUE CONTROLEURS	
II.1.1.	Définitions -----	2
II.1.2.	Construction d'un controleur à partir ----- d'un système de transitions	3
II.1.3.	Comparaison des controleurs en tant que ----- générateurs de langages.	5
II.2.	DEUX CONCEPTS DE BASE: INVARIANTS ET TRAJECTOIRES	
II.2.1.	Les fonctions PRE et POST -----	7
II.2.2.	Invariants et trajectoires en tant que points fixes de fonctions monotones	
II.2.2.1.	Définitions et propriétés -----	10
II.2.2.2.	Rappel de résultats sur les points fixes des fonctions monotones -----	13
II.2.2.3.	Continuité des fonctions monotones cons- truites à partir de pre et post -----	14
II.2.2.4.	Calcul des invariants et des trajectoires -----	17
II.3.	PROPRIETES DES SYSTEMES DE TRANSITIONS	
II.3.1.	Présentation informelle des propriétés -----	20
II.3.2.	Types d'atteignabilité -----	23
II.3.3.	Etude systématique des propriétés	
II.3.3.1.	Propriétés relatives au blocage -----	30
II.3.3.2.	Propriétés d'activabilité	
II.3.3.2.1.	Activabilité d'un ensemble de transitions -----	34
II.3.3.2.2.	Activabilité d'un système de transitions -----	36
II.3.3.2.3.	Propriétés de coactivabilité -----	38
II.3.3.3.	Persistance -----	38
II.4.	LE CONCEPT DE VARIANT -----	39

CHAPITRE II

PRESENTATION

Les concepts et propriétés du contrôle des systèmes asynchrones lorsque ceci est représenté par un système de transitions, sont étudiés.

Après avoir montré comment on peut définir des contrôleurs à partir d'un système de transitions, deux notions fondamentales pour leur étude sont introduites : celles d'invariant et de trajectoire.

Il est montré que les propriétés caractéristiques du contrôle s'expriment en termes de ces deux notions et que la vérification de ces propriétés se ramène au calcul de points fixes de fonctions monotones.

II.1. - LES SYSTEMES DE TRANSITIONS EN TANT QUE CONTROLEURS

II.1.1. Définitions

Un système de transitions [KEL72] est défini par un triplet $S=(Q,T,Rel)$ où

- Q est un ensemble (non nécessairement fini) d'états
- T est un ensemble fini de transitions
- Rel est un sous-ensemble de $Q \times T \times Q$.

On écrit $q \rightarrow q'$ à la place de $(q,t,q') \in Rel$ et $q \rightarrow q'$ pour présenter le fait qu'il existe $t \in T$ tel que $q \rightarrow q'$. On dit que t est validée par $q \in Q$ ssi il existe $q' \in Q$ tel que $q \rightarrow q'$; q' est l'état atteint à partir de q après activation de t . La notation $q \rightarrow$ signifie que t est validée par q .

A un système de transitions on peut associer un graphe dont l'ensemble des sommets est Q et les arcs sont étiquetés par T : il y a un arc de q à q' étiqueté par t ssi $q \rightarrow q'$. Si Q est fini alors ce graphe représente un automate non-déterministe.

La notation $q \xrightarrow{*} q'$ représente le fait qu'il existe une séquence d'états q_1, q_2, \dots, q_r et une séquence de transitions t_1, t_2, \dots, t_{r-1} telles que $q_i \xrightarrow{t_i} q_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq r$ et $q_1 = q$ $q_r = q'$. On dira alors que q' est atteignable à partir de q . La séquence $\sigma = t_1, t_2, \dots, t_{r-1}$ définit un chemin à partir de q .

On dira que q est un état puits si il n'existe pas de transition t telle que $q \rightarrow$; q est un état source si pour chaque état q' il n'existe pas de transition t telle que $q' \rightarrow q$.

La donnée de Rel est équivalente à la donnée d'un ensemble $\{R_i\}_{i=1}^m$, $m=|T|$, de relations binaires

$$R_i = \{(q,q') \in Q \times Q \mid q \xrightarrow{t_i} q'\}$$

c'est-à-dire R_i est la projection de Rel suivant la transition t_i (figure 1).

L'inverse d'un système de transitions $S=(Q,T,\{R_i\}_{i=1}^m)$ est le système de transitions $S^{-1}=(Q,T,\{R_i^{-1}\}_{i=1}^m)$ où R_i^{-1} représente l'inverse de la relation R_i .

Commentaire :

On peut vérifier que la définition des systèmes de transitions donnée dans le chapitre précédent est équivalente à la définition précédente. Les systèmes de transitions constituent le modèle le plus primitif des systèmes discrets : les grammaires formelles, les réseaux de Petri, les programmes séquentiels ou parallèles peuvent être considérés à un certain niveau d'abstraction comme des systèmes de transitions [KEL76] [KWO77] [ROS76]. La simplicité et la généralité de ce modèle le rendent un support très utile pour l'étude des concepts et des propriétés des systèmes.

II.1.2. Construction d'un contrôleur à partir d'un système de transitions

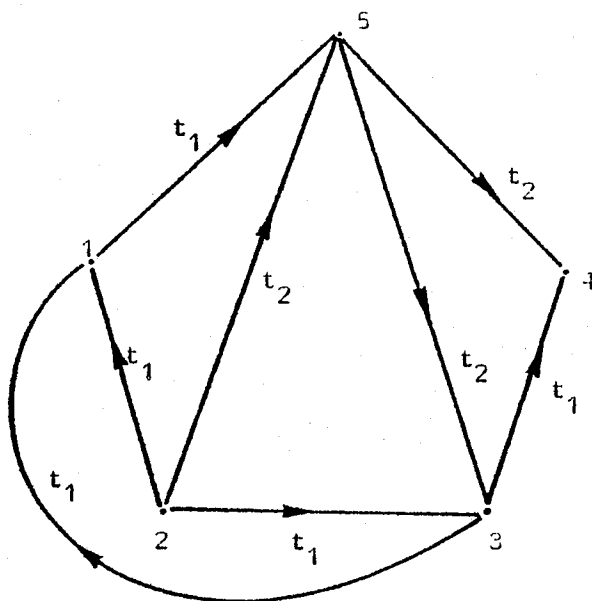
Un système de transitions $S=(Q,T,Rel)$ peut être utilisé comme contrôleur d'un environnement constitué d'un ensemble de processus asynchrones de la façon suivante :

Soit A l'ensemble des événements de l'environnement qui sont significatifs pour l'expression des contraintes de synchronisation. Selon la remarque 1 du chapitre précédent, A peut être considéré comme un ensemble de symboles représentant des demandes d'autorisation de l'exécution d'une action.

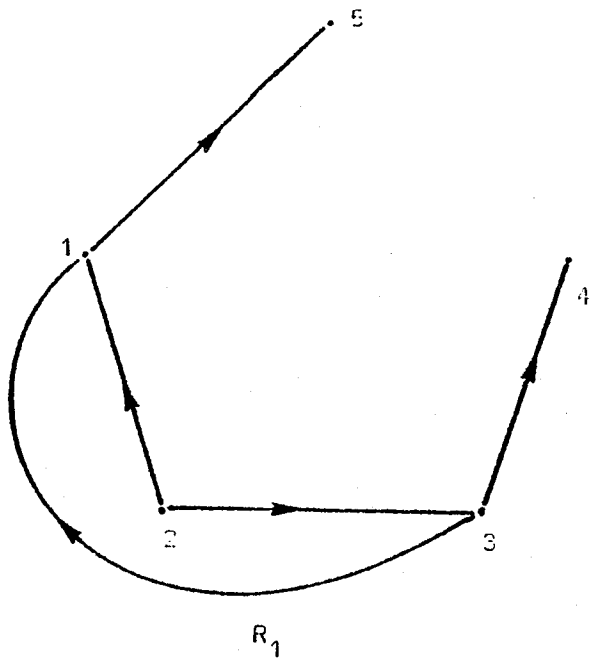
On définit une fonction d'étiquetage f des transitions de S , $f : T \rightarrow A \cup \{\lambda\}$ où λ est l'élément neutre (mot vide) du monoïde libre A^* . De plus, f est telle que sa restriction f_T , sur T' , $T' = \{t \in T \mid f(t) \neq \lambda\}$ est une bijection ($|T'| = |A|$).

Règles de fonctionnement

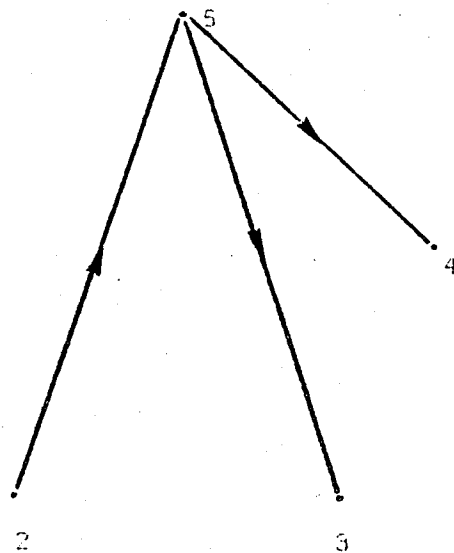
R1/ Chaque processus avant l'exécution d'une action demande l'autorisation au contrôleur en présentant le symbole correspondant. Les requêtes pendantes sont mémorisées.



$S = (Q, T, Rel) = (Q, T, \{R_1, R_2\})$



R_1



R_2

$\underline{P} = \{1, 5\}$

$\text{pre}[S](P) = V$

où $\underline{V} = \{1, 2, 3\}$

$\text{p}\tilde{\text{r}}\text{e}[S](P) = \neg \text{pre}[S](\neg P) = W$

où $\underline{W} = \{1, 4\}$

$(\text{pre}[S] \wedge \text{p}\tilde{\text{r}}\text{e}[S])(P) = Z$

où $\underline{Z} = \{1\}$

Figure 1

R2/ Supposons que le contrôleur n'est pas en train de traiter une demande et que $A' \subseteq A$ est l'ensemble des requêtes pendantes à cet instant. Le contrôleur choisit arbitrairement une transition t appartenant à l'ensemble $f^{-1}(A) \cup (T-T')$.

Si cette transition t est validée

- il modifie son état en effectuant cette transition,
- si $t \in f^{-1}(A)$ alors il autorise l'action $f(t)$; sinon il choisit une autre transition.

R3/ Après l'exécution d'une transition le contrôleur rajoute à A' les requêtes présentées entre temps.

Observation :

Les transitions étiquetées par λ n'ont pas d'effet direct sur l'environnement contrôlé et correspondent à des événements internes au contrôleur.

II.1.3. Comparaison des contrôleurs en tant que générateurs de langages

On peut considérer un contrôleur comme générateur d'un langage sur son vocabulaire d'entrée A en supposant que chaque fois qu'une transition t_j est exécutée, il présente en sortie le symbole $f(t_j)$. Le langage ainsi généré représente l'ensemble des séquences d'actions autorisées et caractérise d'une certaine manière la coordination que le contrôleur peut effectuer. On peut donc comparer des contrôleurs ayant le même vocabulaire d'entrée A en comparant les langages générés.

On représentera par $C=(S,A,f)$ un contrôleur construit à partir d'un système de transitions S , ayant A comme vocabulaire d'entrée et f comme fonction d'étiquetage ; (C,q_0) est un contrôleur initialisé à l'état q_0 .

Définitions :

Le langage généré par un contrôleur initialisé (C,q_0) représenté par $L(C,q_0)$ est l'ensemble des séquences de sortie possibles de C lorsqu'on prend comme état initial q_0 . C'est-à-dire

$$L(C,q_0) = \{f(\sigma) \mid \sigma \in T^* \exists q \in Q : q_0 \xrightarrow{\sigma} q\}$$

où f représente également l'extension de la fonction d'étiquetage sur T^* :

$$\forall t \in T, \forall \sigma \in T^*, f(\sigma t) = f(\sigma) f(t) \text{ et } f(\lambda) = \lambda.$$

Étant donnés deux contrôleurs initialisés (C, q_0) et (C', q'_0) on dira que (C, q_0) contient (C', q'_0) si $L(C', q'_0) \subseteq L(C, q_0)$. On dira également qu'un contrôleur C contient un contrôleur C' si pour chaque état q' de C' il existe un état q de C tel que (C, q) contient (C', q') .

Deux contrôleurs initialisés (C, q_0) (C', q'_0) sont dits équivalents si $L(C, q_0) = L(C', q'_0)$. On dira également que deux contrôleurs C et C' sont équivalents si C contient C' et inversement.

On dira enfin qu'un contrôleur C réalise un contrôleur C' si pour chaque état q' de C' il existe un état q de C tel que (C, q) et (C', q') soient équivalents.

Ces définitions s'appliquent également aux systèmes de transitions. On peut en effet considérer un système de transitions $S=(Q, T, Rel)$ comme un contrôleur $C=(S, A, f)$ avec $A=T$ et $f=$ identité.

Remarquons que la relation d'équivalence définie ici est liée à l'utilisation que l'on fait des systèmes de transitions en tant que contrôleurs. Si par exemple les systèmes de transitions représentaient des programmes de calcul, la relation d'équivalence serait exprimée non comme une relation entre langages, mais comme une relation entre ensembles d'états puits atteints à partir des états initiaux (voir par exemple [ASH70] page 31).

Enfin, il faut signaler que nous avons adopté la définition d'équivalence proposée faute de meilleure. En effet cette définition ne préserve pas des propriétés caractéristiques de la qualité de la coordination réalisée. Dire par exemple que (C, q_0) et (C', q'_0) génèrent le même langage signifie que leurs ensembles des séquences de sortie possibles sont les mêmes mais ceci ne garantit le fait qu'une

séquence générée par (C, q_0) sera certainement générée par (C', q'_0) (voir à ce propos la définition des situations de coalition au paragraphe II.3.1. et la remarque 4 du chapitre IV).

II.2. - DEUX CONCEPTS DE BASE : INVARIANTS ET TRAJECTOIRES

II.2.1. Les fonctions PRE et POST

Soit Q un ensemble et P l'ensemble des prédicats sur Q :
 $P \in \mathcal{P} \iff P: Q \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$. On représente par $L = (P, \vee, \wedge, \neg, \top, \perp)$ le treillis booléen sur P avec respectivement $\vee, \wedge, \neg, \top, \perp$, les opérations de conjonction, disjonction, négation, le prédicat "toujours vrai" ($\vee P$) et le prédicat "toujours faux" ($\wedge P$). L est isomorphe au treillis booléen des parties de Q : à chaque $P \in \mathcal{P}$ on peut associer de façon biunivoque son ensemble caractéristique $\underline{P} = \{q \in Q \mid P(q) = \text{vrai}\}$. \subseteq représentera la relation d'ordre sur L .

Soit $F(P)$ l'ensemble des fonctions à une variable P définie sur P et R l'ensemble des relations binaires sur Q . On associe à chaque $R \in \mathcal{R}$ une fonction $\text{pre}[R] \in F(P)$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathcal{P}, \text{pre}[R](P) = W \quad \text{où} \\ W \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad (\forall q \in Q) \quad (W(q) = \text{vrai} \iff \exists q', P(q') = \text{vrai} \text{ et } (q, q') \in R) \end{aligned}$$

On représentera par $R(P)$ l'ensemble des fonctions ainsi définies à partir de R et pour chaque $R \in \mathcal{R}$, par $\text{post}[R]$ la fonction $\text{pre}[R^{-1}]$.

Proposition 1 :

Soit $F \in F(P)$. Alors, $F \in R(P)$ ssi $F(\perp) = \perp$ et pour chaque séquence $\{P_i\}_i$ de prédicats de P , $F(\vee_i P_i) = \vee_i F(P_i)$.

Démonstration :

Si $F \in R(P)$ alors $F(\perp) = \perp$ par la définition précédente.

Aussi, tout élément de $R(P)$ étant une fonction croissante on a : $F(P_i) \subseteq F(\vee_i P_i)$.

Ceci implique : $\forall F(P_i) \in F(\forall P_i)$. Inversement, supposons que $\exists q \in Q$ tel que $(F(\forall P_i))(q) = \text{vrai}$. Soit R tel que $F = \text{pre}[R]$. On a alors : $\exists q', (\forall P_i)(q') = \text{vrai}$ et $(q, q') \in R \Rightarrow \exists q'$ et $\exists k \in \mathbb{N}$, $P_k(q') = \text{vrai}$ et $(q, q') \in R \Rightarrow F(P_k)(q) = \text{vrai} \Rightarrow (\forall F(P_i))(q) = \text{vrai}$.

On démontre maintenant que $F(1) = 1$ et $F(\forall P_i) = \forall F(P_i)$ implique que $F \in R(P)$.

A chaque élément q_i de Q on associe un prédicat P_{q_i} tel que $P_{q_i}(q) = \text{vrai}$ ssi $q = q_i$.

Il est évident que tout prédicat de P est exprimable comme la disjonction d'un ensemble de ces prédicats. Soit R la relation de R telle que pour $(\forall q_i \in Q)$ $((q, q_i) \in R \text{ ssi } F(P_{q_i}(q) = \text{vrai})$. Alors, $\forall P_{q_i} \text{ pre}[R](P_{q_i}) = F(P_{q_i})$. Ceci implique que $\text{pre}[R] = F$ à cause de la distributivité de F par rapport à la disjonction.

On peut également démontrer les propriétés suivantes pour les éléments de $R(P)$.

Propriétés 1 :

Pour chaque,

a/ $R_1, R_2 \in R$, $\text{pre}[R_1 \circ R_2] = \text{pre}[R_1] \circ \text{pre}[R_2]$

b/ $R \in R$, $\{P_i\}_i$ séquence de prédicats de P , $\text{pre}[R](\bigwedge P_i) \in \bigwedge \text{pre}[R](P_i)$.

c/ $R_1, R_2 \in R$, $\text{pre}[R_1 \cup R_2] = \text{pre}[R_1] \vee \text{pre}[R_2]$ où \cup représente l'union sur les relations de R .

d/ $P \in P$, $P \neq 1$, $\text{pre}[0_R](P) = 1$, $\text{pre}[1_R](P) = P$, $\text{pre}[Q \times Q](P) = T$ où 0_R est la relation vide, $1_R = \{(q, q') \in Q \times Q \mid q = q'\}$.

Etant donné un système de transitions $S = (Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$ on représentera par $\text{pre}[S]$ et $\text{post}[S]$ les fonctions

$$\text{pre}[S] = \bigvee_{i=1}^m \text{pre}[R_i]$$

$$\text{post}[S] = \bigvee_{i=1}^m \text{post}[R_i]$$

1/ Le prédicat $\text{pre}[S](P)$ représente l'ensemble des prédécesseurs directs possibles de P c'est-à-dire tous les états à partir desquels un état de P peut être

atteint en activant une transition de T . De façon analogue, $\text{post}[S](P)$ représente l'ensemble des successeurs directs possibles de P . On notera par c_i (respectivement k_i) le prédicat $\text{pre}[R_i](\tau)$ (respectivement $\text{post}[R_i](\tau)$). Le prédicat c_i représente l'ensemble des états qui valident une transition t_i .

Donc, les prédicats $\bigwedge_{i=1}^m \neg c_i$ et $\bigwedge_{i=1}^m \neg k_i$ caractérisent respectivement l'ensemble des états puits et l'ensemble des états sources.

Notation :

Etant donné $F \in \mathcal{F}(P)$ on représentera par \tilde{F} la duale de F : $\forall P \in \mathcal{P}, \tilde{F}(P) = \neg F(\neg P)$.

2/ Le prédicat $\tilde{\text{pre}}[S](P)$ représente l'ensemble des états à partir desquels il n'est pas possible d'atteindre un élément de $\neg P$ en activant une transition.

Evidemment, $\bigwedge_{i=1}^m \neg c_i \subseteq \tilde{\text{pre}}[S](P)$ pour chaque $P \in \mathcal{P}$.

De façon analogue, $\tilde{\text{post}}[S](P)$ représente l'ensemble des états qui ne peuvent pas être atteints à partir de $\neg P$. Evidemment, $\bigwedge_{i=1}^m \neg k_i \subseteq \tilde{\text{post}}[S](P)$ pour chaque $P \in \mathcal{P}$.

3/ Les prédicats $(\tilde{\text{pre}}[S] \wedge \text{pre}[S])(P)$ et $(\tilde{\text{post}}[S] \wedge \text{post}[S])(P)$ représentent respectivement l'ensemble des états qui ne sont pas des états puits (sources) et dont tout successeur direct est un élément de \underline{P} (tout prédécesseur direct est un élément de \underline{P}).

Les propriétés suivantes peuvent être démontrées. Aussi, toute propriété dérivable à partir de ces propriétés en remplaçant pre par post , post par pre et c_i par k_i est également vraie.

Propriétés 2 :

a/ Pour toute séquence $\{P_i\}_i$ de prédicats de \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \text{pre}[S] (\vee P_i) &= \vee_i \text{pre}[S](P_i) \\ \tilde{\text{pre}}[S] (\wedge P_i) &= \wedge_i \tilde{\text{pre}}[S](P_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pre}[S](\bigwedge_i P_i) &\quad \underline{\underline{E}} \quad \bigwedge_i \text{pre}[S](P_i) \\ \text{p\~{r}e}[S](P_i) &\quad \underline{\underline{E}} \quad \bigvee_i \text{p\~{r}e}[S](VP_i) \end{aligned}$$

b/ $\forall P \in \mathcal{P} \quad , \text{pre}[S](P) \vee \text{pre}[S](\neg P) \vee (\bigwedge_{i=1}^m \neg c_i) = \tau$

c/ $\forall P \in \mathcal{P} \quad , (\text{pre}[S] \circ \text{p\~{o}st}[S])(P) \underline{\underline{E}} P$

d/ $\forall P \in \mathcal{P} \quad , P \underline{\underline{E}} (\text{p\~{r}e}[S] \circ \text{post}[S])(P)$

II.2.2. Invariants et trajectoires en tant que points fixes de fonctions monotones

II.2.2.1. Définitions et propriétés

Soit $S=(Q,T,\{R_i\}_{i=1}^m)$ un système de transitions.

- Un invariant J de S , est un prédicat $J \in \mathcal{P}$ tel que pour chaque couple d'états q, q' :

$$J(q)=\underline{\underline{\text{vrai}}} \quad \text{et} \quad q \rightarrow q' \Rightarrow J(q')=\underline{\underline{\text{vrai}}}$$

Tout invariant de S^{-1} sera appelé invariant inverse de S .

- Une trajectoire W de S , est un prédicat $W \in \mathcal{P}$ tel que pour chaque état q , $W(q)=\underline{\underline{\text{vrai}}}$ soit il existe un état q' , $q \rightarrow q'$, $W(q')=\underline{\underline{\text{vrai}}}$ soit q est un état puits. Une trajectoire sans fin W de S est une trajectoire de S telle que $W \wedge \bigwedge_{i=1}^m \neg c_i = 1$. Toute trajectoire (sans fin) de S^{-1} sera appelée trajectoire inverse (sans fin) de S .

Remarques :

- 1/ Notre définition d'invariant correspond à la notion de q_0 -inductif présentée dans [KEL76] avec la différence que nous n'attachons pas au prédicat J un état particulier q_0 .

- 2/ Si J est un invariant de S alors $\forall q, J(q)=\text{vrai}$, J est vérifié pour tous les successeurs directs possibles de q (et par conséquent pour tous les successeurs possibles de q). Si J est un invariant inverse de S , alors $\forall q, J(q)=\text{vrai}$, J est vérifié pour tous les prédécesseurs possibles de q .
- 3/ La notion de trajectoire correspond exactement à la notion de "computation" de [ROS76] définie sur des systèmes de transitions particuliers.

Proposition 2 :

Soit S un système de transitions. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- a/ J est un invariant,
- b/ J est solution de $\text{post}[S](P) \subseteq P$
- c/ J est solution de $P \subseteq \text{pre}[S](P)$

Démonstration :

a/ et b/ sont évidemment équivalentes. Supposons que $\text{post}[S](J) \subseteq J$. Alors, $(\text{pre}[S] \circ \text{post}[S])(J) \subseteq \text{pre}[S](J)$ et par la propriété 2d on a $J \subseteq \text{pre}[S](J)$. Inversement, supposons que $J \subseteq \text{pre}[S](J)$. Alors $\text{post}[S](J) \subseteq (\text{post}[S] \circ \text{pre}[S])(J)$ et par la propriété 2c (en interchangeant pre et post) on a $\text{post}[S](J) \subseteq J$.

Proposition 3 :

Soit S un système de transitions. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- a/ J est un invariant inverse,
- b/ J est une solution de $\text{pre}[S](P) \subseteq P$
- c/ J est une solution de $P \subseteq \text{post}[S](P)$.

Proposition 4 :

J est un invariant de S ssi $\neg J$ est un invariant inverse de S .

Démonstration :

Si $J \in \text{pre}[S](J)$ alors $\text{pre}[S](\neg J) \in \neg J$ et inversement.

Proposition 5 :

Soit S un système de transitions.

a/ W est trajectoire de S ssi W est solution de $P \in \text{pre}[S](P) \vee \bigwedge_{i=1}^m \neg c_i$
ssi $\neg W$ est solution de $(\text{pre}[S] \wedge \text{pre}[S])(P) \in P$.

b/ W est trajectoire sans fin de S ssi W est solution de $P \in \text{pre}[S](P)$
ssi $\neg W$ est solution de $\text{pre}[S](P) \in P$.

Démonstration :

Les relations $P \in \text{pre}[S](P) \vee \bigwedge_{i=1}^m \neg c_i$ et $P \in \text{pre}[S](P)$ expriment directement les définitions de trajectoire et trajectoire sans fin. On a, par la propriété 2b, $\text{pre}[S](P) \vee \bigwedge_{i=1}^m \neg c_i = \text{pre}[S](P) \vee \text{pre}[S](P)$ et par dualisation de la première inéquation $(\text{pre}[S] \wedge \text{pre}[S])(P) \in P$.

Remarque :

Si W est une trajectoire alors $\neg W$ contient tous les états q qui ne sont pas des états puits et dont chaque successeur direct appartient à $\neg W$.

Proposition 6 :

Soit S un système de transitions.

a/ W est une trajectoire inverse de S ssi W est une solution de

$P \in \text{post}[S](P) \vee \bigwedge_{i=1}^m \neg k_i$ ssi $\neg W$ est solution de
 $(\text{post}[S] \wedge \text{post}[S])(P) \in P$.

b/ W est une trajectoire inverse sans fin de S ssi W est une solution
 $P \sqsubseteq \text{post}[S](P)$ ssi $\neg W$ est solution de $\tilde{\text{post}}[S](P) \sqsubseteq P$.

II.2.2.2. Rappel de résultats sur les points fixes des fonctions monotones

Dans ce paragraphe nous rappelons des résultats connus sur les points fixes des fonctions monotones qui sont utilisés par la suite [TAR55] [PAR69] [SIN76].

Définition :

Soit $F \in F[P]$ une fonction monotone.

- F est inférieurement continue ou i-continue ssi pour chaque séquence croissante $\{P_i\}_i, P_i \sqsubseteq P_{i+1}, i=0,1,2,\dots$ de prédicats de P :

$$F(\bigvee_i P_i) = \bigvee_i F(P_i)$$

- F est supérieurement continue ou s-continue ssi pour chaque séquence décroissante $\{P_i\}_i, P_{i+1} \sqsubseteq P_i, i=0,1,2,\dots$ de prédicats de P :

$$F(\bigwedge_i P_i) = \bigwedge_i F(P_i).$$

Proposition 7 :

Soit $F \in F(P)$ une fonction i-continue et P_1 un prédicat tel que $P_1 \sqsubseteq F(P_1)$.

Le plus petit point fixe de F supérieur ou égal à P_1 est égal à $\bigvee_{i=0}^{\infty} F^i(P_1) = F^*(P_1)$.

La proposition suivante est la duale de la proposition 7.

Proposition 7' :

Soit $F \in F(P)$ une fonction s-continue et P_1 un prédicat tel que $F(P_1) \sqsubseteq P_1$.

Le plus grand point fixe de F inférieur ou égal à P_1 est égal à $\bigwedge_{i=0}^{\infty} F^i(P_1) = F^X(P_1)$.

Lemme 1 :

Soit $\{P_i\}_i$ un ensemble de prédicats de P. Alors, $\bigvee_i \neg P_i = \neg \bigwedge_i P_i$.

Proposition 8 :

Soit F une fonction monotone de $F(P)$.

- a/ F est i-continue ssi \tilde{F} est s-continue.
- b/ Pour chaque P prédicat de P si P_0 est le plus petit point fixe de F supérieur ou égal à P alors $\neg P_0$ est le plus grand point fixe de \tilde{F} inférieur ou égal à $\neg P$ (et inversement). En particulier, si F est i-continue alors $F^*(P) = \neg(\tilde{F}^*(\neg P))$.

Démonstration :

a/ Supposons que F est i-continue : $\forall F(P_i) = F(\vee P_i)$ avec $P_i \sqsubseteq P_{i+1}$
 $i=0,1,2,\dots$. Par complémentation on obtient grâce au lemme précédent :
 $\wedge \neg F(P_i) = \neg F(\neg \wedge \neg P_i)$. Posons $W_i = \neg P_i$ pour $i=0,1,2,\dots$. On a : $\wedge \neg F(\neg W_i) = \neg F(\neg \wedge W_i)$
 ce qui donne $\wedge F(W_i) = \tilde{F}(\wedge W_i)$ et $\{W_i\}_i$ est une séquence décroissante.

b/ Démonstration par dualisation.

Dans ce qui suit, nous montrons qu'il existe une sous-classe de $F(P)$ dont les fonctions sont i-continues et s-continues.

II.2.2.3. Continuité des fonctions monotones construites à partir de pre et post

Proposition 9 :

- a/ Toute fonction $\text{pre}[R]$ de $R(P)$ est i-continue.
- b/ Toute fonction $\text{pre}[R]$ de $R(P)$ est s-continue ssi $\forall q \in Q$, le nombre des successeurs directs de q dans R est fini.

Démonstration :

a/ Toute fonction $\text{pre}[R]$ est non seulement i-continue mais aussi distributive par rapport à la conjonction (proposition 1).

b/ Démontrons d'abord que si $\forall q \in Q, |\{q' \mid (q,q') \in R\}|$ est fini alors $\text{pre}[R]$ est s-continue.

Soit $\{P_i\}_i, P_{i+1} \sqsubseteq P_i, i=0,1,2,\dots$ une séquence décroissante de prédicats.

Alors $\text{pre}[R]$ étant une fonction croissante on a $\text{pre}[R](\bigwedge_i P_i) \sqsubseteq \bigwedge_i \text{pre}[R](P_i)$.

Il reste à démontrer que si $\exists q \in Q$ tel que $(\bigwedge_i \text{pre}[R](P_i))(q) = \text{vrai}$ alors

$(\text{pre}[R](\bigwedge_i P_i))(q) = \text{vrai}$.

$(\bigwedge_i \text{pre}[R](P_i))(q) = \text{vrai} \Rightarrow \forall s \in \mathbb{N}, (\text{pre}[R](P_s))(q) = \text{vrai} \Rightarrow$

$\forall s \in \mathbb{N}, \exists q' (P_s(q') = \text{vrai} \text{ et } (q, q') \in R) \Rightarrow$

$\forall s \in \mathbb{N}, \exists q' (\bigwedge_{i=0}^s P_i(q') = \text{vrai} \text{ et } (q, q') \in R)$, parce que $\{P_i\}_i$ est une séquence

décroissante.

Supposons que $(\text{pre}[R](\bigwedge_i P_i))(q) = \text{faux} \Leftrightarrow \exists q' \in Q, ((\bigwedge_i P_i)(q') = \text{vrai} \text{ et } (q, q') \in R)$.

Si on représente par P_q le prédicat ayant comme ensemble caractéristique $\{q\}$ on a :

$\text{post}[R](P_q) \wedge (\bigwedge_i P_i) = 1 \Rightarrow \text{post}[R](P_q) \sqsubseteq \bigvee_i P_i$ (par le lemme 1). Ceci implique

que $\forall q_r \in Q, \text{post}[R](P_{q_r})(q_r) = \text{vrai}, \exists P_{j_r}, j_r \in \mathbb{N}, P_{j_r}(q_r) = \text{faux}$. $\{P_i\}_i$ étant une

séquence décroissante et l'ensemble caractéristique de tout prédicat $\text{post}[R](P_q)$ étant fini on déduit que :

$\forall q_r \in Q, \text{post}[R](P_{q_r})(q_r) = \text{vrai}, \exists j, j \geq \max\{j_r\}, (\bigwedge_{i=0}^j P_i)(q_r) = \text{faux}$, contradiction.

Inversement, supposons qu'il existe $q \in Q$ tel que $|\{q' | (q, q') \in R\}|$ est infini.

Considérons $\{q_{s_j}\}_j$ une suite d'éléments distincts de $\{q' | (q, q') \in R\}$

et la suite décroissante d'ensembles d'indices: $I_0 = \mathbb{N}, I_1 = \mathbb{N} - \{0\}, \dots, I_k = \mathbb{N} - \{0, \dots, (k-1)\}$.

Alors la suite des prédicats $\{P_i\}_i$ telle que $P_i = \{q_{s_j} \mid j \in I_i\}$ est également

décroissante. De plus $\bigwedge_i P_i = 1$ ce qui implique $\text{pre}[R](\bigwedge_i P_i) = 1$. D'autre part, $\forall i \in \mathbb{N}$

$\text{pre}[R](P_i)(q) = \text{vrai}$ ce qui est équivalent à $(\bigwedge_i \text{pre}[R](P_i))(q) = \text{vrai}$. Par conséquent

$\bigwedge_i \text{pre}[R](P_i) \neq \text{pre}[R](\bigwedge_i P_i)$.

Proposition 10 :

Soient F_1 et F_2 deux fonctions i -continues de $F(P)$. Alors $F_1 \vee F_2$ et $F_1 \wedge F_2$ sont également i -continues.

Démonstration :

Si F_1, F_2 sont i -continues alors évidemment $F_1 \vee F_2$ est i -continue.

Soit $\{P_i\}_1, P_i \subseteq P_{i+1}, i=0,1,2,\dots$. On a $F_1(P_i) \wedge F_2(P_i) \subseteq F_1(\vee P_i) \wedge F_2(\vee P_i)$

ce qui implique $\vee_i (F_1(P_i) \wedge F_2(P_i)) \subseteq F_1(\vee_i P_i) \wedge F_2(\vee_i P_i)$

Supposons que $(F_1(\vee_i P_i) \wedge F_2(\vee_i P_i))(q) = \text{vrai}$. Ceci implique que

$$((\vee_i F_1(P_i)) \wedge (\vee_i F_2(P_i)))(q) = \text{vrai} \Rightarrow$$

$\exists r, s \in \mathbb{N}, F_1(P_r)(q) = \text{vrai} \text{ et } F_2(P_s)(q) = \text{vrai} \Rightarrow$

si $r \leq s, (F_1(P_s) \wedge F_2(P_s))(q) = \text{vrai} \rightarrow (\vee_i F_1(P_i) \wedge F_2(P_i))(q) = \text{vrai}$.

Corollaire :

Soient F_1 et F_2 deux fonctions s -continues de $F(P)$. Alors, $F_1 \vee F_2$ et $F_1 \wedge F_2$ sont également s -continues.

Observations :

. Toute fonction constante de $F(P)$ est à la fois i -continue et s -continue.

. Si F_1 et F_2 sont deux fonctions i -continues (s -continues) de $F(P)$ alors $F_1 \circ F_2$ est i -continue (s -continue).

Notation :

Etant donné $F \in F(P)$ on représentera par F^* la fonction $F^* = I \vee F \vee F^2 \vee \dots = \vee_i F^i$ et par F^X la fonction $F^X = I \wedge F \wedge F^2 \wedge \dots = \wedge_i F^i$.

Proposition 11 :

Si $F \in F(P)$ est i -continue (s -continue) alors F^* (F^X) est également i -continue (s -continue).

Démonstration :

$$F^*(\vee_i P_i)(q) = \text{vrai} \Leftrightarrow \exists k, F^k(\vee_i P_i)(q) = \text{vrai} \Leftrightarrow \exists k, \vee_i F^k(P_i)(q) = \text{vrai} \text{ parce que } F^k$$

est i -continue si F est i -continue $\Leftrightarrow \exists k \exists j F^k(P_j)(q) = \underline{\text{vrai}} \Leftrightarrow \exists j F^*(P_j)(q) = \underline{\text{vrai}}$
 $\Leftrightarrow (\forall F^*(P_i))(q) = \underline{\text{vrai}}$.

Théorème 1 :

Soit $R_b = \{R \in R \mid \forall q \in Q \exists k \in \mathbb{N}, |\{q' \mid (q, q') \in R\}| \leq k\}$ et $R_b(P)$ l'ensemble des éléments de $R(P)$ définis à partir des relations de R_b . Toute fonction de $F(P)$ construite à partir d'éléments de $R_b(P)$ et de constantes en effectuant un nombre fini de fois les opérations de conjonction, disjonction, dualisation, composition, étoilage est à la fois i -continue et s -continue.

D'après ce théorème toutes les fonctions définies au paragraphe précédent sont à la fois i -continues et s -continues si les relations R_i appartiennent à R_b . Cette condition implique que le non-déterminisme du système de transitions $S=(Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$ est bornée ([DIJ76] chapitre 9). Pour ce qui suit, on suppose que les R_i des systèmes de transitions étudiés appartiennent à R_b . Cette hypothèse permet une présentation plus élégante des résultats sans être d'une importance quelconque en ce qui concerne leur exploitation pratique.

Résoudre des inéquations du type $P \sqsubseteq G(P)$ ou $G(P) \sqsubseteq P$ où G est i -continue et s -continue revient à calculer des points fixes respectivement de $I \wedge G$ et $I \vee G$ où I est la fonction identité. Pour $P_1 \in P$ on a $P_1 \sqsubseteq (I \vee G)(P_1)$ et $(I \wedge G)(P_1) \sqsubseteq P_1$. Par conséquent $(I \vee G)^*(P_1)$ est la plus petite solution de $G(P) \sqsubseteq P$ supérieure ou égale à P_1 et $(I \wedge G)^X(P_1)$ est la plus grande solution de $P \sqsubseteq G(P)$ inférieure ou égale à P_1 .

II.2.2.4. Calcul des invariants et des trajectoires

Pour simplifier les notations on représente par $\text{pre}[S]$ et $\text{post}[S]$ définies pour un système de transitions $S=(Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$. Aussi, on écrit $\bigwedge_{i=1}^m \neg c_i$ à la place de $\bigwedge_{i=1}^m \neg c_i$ et $\bigvee_{i=1}^m c_i$ à la place de $\bigvee_{i=1}^m c_i$.

Proposition 12 :

Soit P_1 un prédicat de P .

- a/ $\text{pre}^X(P_1)$ est le plus grand invariant de S inférieur ou égal à P_1 .
- b/ $\text{post}^*(P_1)$ est le plus petit invariant de S supérieur ou égal à P_1 .
- c/ $\text{post}^X(P_1)$ est le plus grand invariant inverse de S inférieur ou égal à P_1 .
- d/ $\text{pre}^*(P_1)$ est le plus petit invariant inverse de S supérieur ou égal à P_1 .

Démonstration :

Cette proposition est conséquence directe des résultats du paragraphe précédent si on tient compte du fait que $(I \vee F)^*(P) = F^*(P)$ si F est distributive par rapport à la disjonction et $(I \wedge F)^X(P) = F^X(P)$ si F est distributive par rapport à la conjonction.

Observation :

$\text{post}^*(P_1)$ et $\text{pre}^*(P_1)$ représentent respectivement les ensembles des successeurs possibles et des prédécesseurs possibles à partir des états vérifiant P_1 .

La proposition suivante est obtenue par application de la proposition 8 au cas des invariants.

Proposition 13 :

- a/ J est le plus petit invariant inverse de S supérieur ou égal à $P_1 \in P$ ssi $\neg J$ est le plus grand invariant de S inférieur ou égal à $\neg P_1$.
- b/ J est le plus petit invariant de S supérieur ou égal à $P_1 \in P$ ssi $\neg J$ est le plus grand invariant inverse de S inférieur ou égal à $\neg P_1$.

Observation :

Les propositions 12 et 13 suggèrent 4 différentes approches pour le calcul des invariants de S .

Proposition 14 :

L'ensemble des invariants d'un système de transitions S forme un sous-treillis distributif de L .

Démonstration :

Soit J_1 et J_2 deux invariants, $J_1 \in \text{pre}(J_1)$ et $J_2 \in \text{pre}(J_2)$. Alors $J_1 \wedge J_2 \in \text{pre}(J_1) \wedge \text{pre}(J_2) = \text{pre}(J_1 \wedge J_2)$. Aussi, $J_1 \vee J_2 \in \text{pre}(J_1) \vee \text{pre}(J_2) \in \text{pre}(J_1 \vee J_2)$.

Le plus grand et le plus petit invariant sont respectivement τ et \perp . L étant distributif, le treillis des invariants est distributif.

Observation :

Les éléments atomiques du treillis des invariants de S sont des prédicats dont les ensembles caractéristiques contiennent soit un état puits, soit les états des composantes fortement connexes du graphe associé à S .

Définition :

Un invariant J de S est dit invariant sans blocage si $J \in \text{vc}_i$.

Observation :

Si J est un invariant sans blocage de S et si S est initialisé à un état q , $J(q) = \text{vrai}$ alors S n'atteindra jamais un état puits (ne se bloquera jamais).

Proposition 15 :

J est invariant sans blocage de S ssi J est solution de $P \in (\text{pre} \wedge \text{pre})(P)$.

Observation :

Le plus grand invariant sans blocage de S est $(I \wedge \text{pre} \wedge \text{pre})^X(\tau) = (I \wedge \text{pre} \wedge \text{pre})^X(\text{vc}_i)$. En remarquant que $\text{pre}(\text{vc}_i) \in \text{vc}_i$ on trouve que le plus grand invariant

sans blocage de S est égal à $(I \wedge \text{pre})^X(\text{vc}_i)$ c'est-à-dire le plus grand invariant inférieur ou égal à vc_i . (On peut vérifier par ailleurs que ce résultat découle de la définition même des invariants sans blocage : pour chaque invariant J de ce type, $J \sqsubseteq \text{vc}_i$). Aussi, si on utilise la propriété $F^*(P) = \neg(\tilde{F}^X(\neg P))$ (proposition 8) on trouve que le plus grand invariant sans blocage de S est égal à $\neg(\text{pre}^*(\wedge \neg \text{vc}_i))$; ce prédicat caractérise l'ensemble des états qui ne sont pas prédécesseurs possibles de l'ensemble des états puits.

Proposition 16 :

La plus grande trajectoire sans fin d'un système de transitions est égale à $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{pre}^r(\text{vc}_i)$.

Démonstration :

La plus grande trajectoire sans fin est égale à $(I \wedge \text{pre})^X(\tau)$. On a, $(\text{vc}_i) \vee \text{pre}(\text{vc}_i) = \text{vc}_i$. Donc $(I \wedge \text{pre})^X(\tau) = \wedge_r \text{pre}^r(\text{vc}_i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{pre}^r(\text{vc}_i)$.

II.3. - PROPRIETES DES SYSTEMES DE TRANSITIONS

II.3.1. Présentation informelle des propriétés étudiées

La démonstration de la validité d'un système passe par la démonstration de propositions où interviennent des relations entre ses variables, son état initial, l'ensemble des états atteints, l'ensemble des séquences d'actions possibles etc... Parmi ces propositions d'autres sont spécifiques au fonctionnement du système étudié et d'autres ont un caractère général dans la mesure où elles expriment des situations dont l'étude est intéressante dans un grand nombre de systèmes. Dans ce paragraphe nous présentons des propriétés générales qui caractérisent le fonctionnement des systèmes asynchrones à fonctionnement parallèle.

Propriétés de vivacité :

Ces propriétés sont utilisées pour exprimer le fait que une ou plusieurs actions d'un système peuvent se reproduire au cours de son fonctionnement à partir d'un état initial. Il y a différentes façons d'introduire ces propriétés, la plus naturelle étant à notre avis, leur définition d'abord pour un état initial et une transition (action) t . Trois variantes de ce concept peuvent être définies suivant le fait que t est activable un nombre fini, non borné, ou infini de fois à partir de l'état initial (voir [KEL72] pages 38-41 et leur comparaison sur les réseaux de Petri, paragraphe V.1.). Le type de vivacité la plus forte pour une transition t et un état initial q_0 est celui qui implique que t est activable non seulement à partir de q_0 mais aussi à partir de tout état successeur possible de q_0 . On peut étendre ces propriétés de différentes manières en introduisant la notion de vivacité, pour un ensemble d'états initiaux, pour un ensemble de transitions, pour un système (l'ensemble de ses transitions). Nous ne donnerons pas une liste exhaustive des propriétés de ce type mais seulement celles que nous considérons fondamentales ou qui sont facilement exprimables et vérifiables sur chacun des modèles étudiés.

Soit $S=(Q,T,Rel)$ un système de transitions, $t \in T$, $q_0 \in Q$. On dira que t est

- . 1-vivante à partir de q_0 si il existe $\sigma \in T^*$ tel que $q_0 \xrightarrow{\sigma} t$.
- . vivante à partir de q_0 si pour chaque q successeur possible de q_0 , t est 1-vivante à partir de q .

La non satisfaction de propriétés de vivacité caractérise des situations de blocage (total ou partiel) c'est-à-dire des situations où une ou plusieurs actions ne peuvent pas se produire à partir d'un certain instant au cours du fonctionnement.

Propriétés caractérisant les situations de "coalition" :

La vivacité d'un système, même la plus forte, ne garantit pas que toutes les actions vont certainement se reproduire à partir d'un certain instant au cours de son fonctionnement. En effet, si un système est vivant, alors chaque transition peut être activée à partir de tout état successeur de l'état initial ;

néanmoins son activation n'est pas sûre.

Étant donné $S=(Q,T,Rel)$ un système de transitions $t \in T$, $q_0 \in Q$ on dira qu'il y a coalition contre t si il existe une séquence infinie de transitions σ telle que $q_0 \xrightarrow{\sigma}$ et pour chaque préfixe σ_1 de σ ($\sigma = \sigma_1 \sigma_2$) l'état q_1 , $q_0 \xrightarrow{\sigma_1} q_1$, ne valide pas t.

Propriétés de persistance :

Lorsque pour un état q d'un système de transitions, deux transitions distinctes t et t' sont validées, un choix doit être fait pour déterminer un parmi les états successeurs possibles. Les propriétés de persistance caractérisent la reversibilité des choix de ce type, c'est-à-dire si l'occurrence de t a comme conséquence l'inhibition de l'occurrence de t' . Des variantes de cette propriété ont été proposées par [KAR69] [KEL72] et [HAC76] page 38. Pour ce qui suit nous adopterons la définition suivante :

Étant donné un système de transitions $S=(Q,T,Rel)$ et $q_0 \in Q$ on dira que S est persistant pour q_0 si pour chaque couple de transitions distincts t et t' et chaque état q successeur possible de q_0 , tel que $q \xrightarrow{t}$ et $q \xrightarrow{t'}$ on a $q \xrightarrow{tt'}$ (et par symétrie $q \xrightarrow{t't}$).

Ces propriétés, lorsque les systèmes de transitions sont utilisés comme contrôleurs, caractérisent la façon dont les conflits entre actions sont résolus. Elles ont été étudiées en liaison avec les propriétés, de commutativité pour les systèmes de transitions [KEL72], de déterminé [KAR69] et de confluence [ROS76] [KWO77] pour les programmes parallèles.

Propriétés de borné :

Un système de transition S avec état initial q_0 est dit borné pour q_0 si l'ensemble des états successeurs de q_0 est fini.

II.3.2. Types d'atteignabilité

Nous partons de la constatation qu'un grand nombre de propriétés des systèmes est exprimable par la donnée :

- a/ de deux prédicats P_1 et P_2 caractérisant respectivement un ensemble d'états initiaux et un ensemble d'états "buts" ;
- b/ d'un type d'atteignabilité.

Dans ce paragraphe, nous définissons neuf types d'atteignabilité que nous exprimons à partir de relations entre les concepts définis précédemment.

Définitions :

Etant donné un système de transitions S et $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ on dira que :

- P_2 est potentiellement atteignable ou 1-atteignable à partir de P_1 ssi $\forall q \in Q, P_1(q) = \text{vrai}$ il existe un chemin à partir de q menant à $q' \in Q, P_2(q') = \text{vrai}$, c'est-à-dire $P_1 \sqsubseteq \text{pre}^*(P_2)$.
- P_2 est obligatoirement atteignable ou 2-atteignable à partir de P_1 ssi $\forall q \in Q, P_1(q) = \text{vrai}$ pour toute évolution de S à partir de q soit il atteint un état puits, soit il passe par un état $q' \in Q, P_2(q') = \text{vrai}$, c'est-à-dire $P_1 \sqsubseteq (I \vee \text{pre})^*(P_2)$.
- P_2 est inévitablement atteignable ou 3-atteignable à partir de P_1 ssi $\forall q \in Q, P_1(q) = \text{vrai}$ pour toute évolution de S il passe par un état $q' \in Q, P_2(q') = \text{vrai}$, c'est-à-dire $P_1 \sqsubseteq (I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(P_2)$.

On introduit maintenant la notion d'atteignabilité systématique pour qualifier les situations où un ensemble d'états "buts" P_2 est atteignable non seulement à partir de tout état d'un ensemble d'états initiaux P_1 mais aussi à partir de tout état successeur des états de P_1 .

- P_2 est 1-systématiquement atteignable ou 1-s-atteignable à partir de P_1 ssi P_2 est 1-atteignable à partir de $\text{post}^*(P_1)$ c'est-à-dire $\text{post}^*(P_1) \subseteq \text{pre}^*(P_2)$.
- P_2 est 2-systématiquement atteignable ou 2-s-atteignable à partir de P_1 ssi $\text{post}^*(P_1) \subseteq (I \vee \text{pre})^*(P_2)$.
- P_2 est 3-systématiquement atteignable ou 3-s-atteignable à partir de P_1 ssi $\text{post}^*(P_1) \subseteq (I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(P_2)$.

On introduit la notion d'atteignabilité quasi-systématique.

- Pour $i=1,2,3$ P_2 est i-quasi-systématiquement atteignable (i-qs-atteignable) à partir de P_1 ssi P_2 est i-atteignable à partir de P_1 et P_2 n'est pas i-s-atteignable à partir de P_1 .

On utilisera aussi les notions de s-atteignabilité et de qs-atteignabilité en se référant non à un ensemble d'états initiaux P_1 , mais à un invariant J de la façon suivante. Pour $i=1,2,3$:

- P_2 est i-s-atteignable sous l'invariant J ssi P_2 est i-atteignable à partir de J .
- P_2 est i-qs-atteignable sous l'invariant J ssi $P_2 \wedge J \neq 1$ et P_2 n'est pas i-s-atteignable sous l'invariant J .

Remarque :

Les types d'atteignabilité définis correspondent à différents types de causalité ou d'"implication dans le temps". Pour les introduire, nous avons considéré trois notions d'atteignabilité, l'atteignabilité simple, systématique et quasi-systématique, et pour chacune de ces notions, trois différentes modalités, potentiellement, obligatoirement et inévitablement (tableau 1).

Les trois types d'atteignabilité simple permettent d'exprimer les cas où à partir des états vérifiant un prédicat P_1 il est possible, obligatoire ou inévitable de passer une fois (au moins) par un état vérifiant P_2 . On peut en particulier exprimer à l'aide de ces types d'atteignabilité les propriétés de terminaison d'un système si P_2 représente l'ensemble de ses états d'arrêt.

Les types d'atteignabilité systématique permettent d'exprimer les situations où à partir des états vérifiant un prédicat P_1 et à partir de tout successeur de ces états il est possible, obligatoire, inévitable, de passer par un état vérifiant P_2 ; autrement dit, P_2 est atteignable un nombre non borné de fois si le système est initialisé à un état vérifiant P_1 . Ces types d'atteignabilité permettent en particulier d'exprimer les propriétés de vivacité, d'absence de coalition et leurs variantes.

Enfin, les types d'atteignabilité quasi-systématique ont été introduits pour caractériser des situations intermédiaires et peuvent être utilisés en pratique pour exprimer des propriétés telles que la vivacité partielle et la présence de coalition.

Proposition 17 :

P_2 est 1-atteignable à partir de P_1 ssi pour tout invariant J inférieur ou égal à $\neg P_2$, $P_1 \wedge J = 1$.

Démonstration :

P_2 est 1-atteignable $\Leftrightarrow P_1 \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) = 1$. Mais d'après la proposition 8 $\neg \text{pre}^*(P_2) = \text{pre}^X(\neg P_2)$ est le plus grand invariant contenu dans $\neg P_2$.

Remarque :

Lorsque P_2 est tel que $\neg \text{pre}^*(P_2) = 1$, P_2 est 1-atteignable à partir de tout état initial.

On peut démontrer de façon analogue les propositions suivantes :

Tableau 1 : TYPES D'ATTEIGNABILITE

Notion d'atteignabilité y Modalités X	atteignable	systématiquement atteignable	quasi-systématiquement atteignable
1 potentiellement	$P_1 \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) = \perp$	$\text{post}^*(P_1) \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) = \perp$	$P_1 \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) = \perp$ $\text{post}^*(P_1) \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) \neq \perp$
2 obligatoirement	$P_1 \wedge \neg ((I \vee \text{pre})^*(P_2)) = \perp$	$\text{post}^*(P_1) \wedge \neg ((I \vee \text{pre})^*(P_2)) = \perp$	$P_1 \wedge \neg ((I \vee \text{pre})^*(P_2)) = \perp$ $\text{post}^*(P_1) \wedge \neg ((I \vee \text{pre})^*(P_2)) \neq \perp$
3 inévitablement	$P_1 \wedge \neg ((I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(P_2)) = \perp$	$\text{post}^*(P_1) \wedge \neg ((I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(P_2)) = \perp$	$P_1 \wedge \neg ((I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(P_2)) = \perp$ $\text{post}^*(P_1) \wedge \neg ((I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(P_2)) \neq \perp$

P_2 est "x" "y" atteignable à partir de P_1

Proposition 18 :

P_2 est 2-atteignable à partir de P_1 ssi pour toute trajectoire sans fin W inférieure ou égale à $\neg P_2$, $P_1 \wedge W=1$.

Proposition 19 :

P_2 est 3-atteignable à partir de P_1 ssi pour toute trajectoire W inférieure ou égale à $\neg P_2$, $P_1 \wedge W=1$.

Proposition 20 :

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a/ P_2 est 1-s-atteignable à partir de P_1 ,
- b/ pour tout invariant J inférieur ou égal à $\neg P_2$, $\text{post}^*(P_1) \wedge J=1$,
- c/ il n'existe pas d'invariant J , $J \neq 1$, tel que $J \models \text{post}^*(P_1) \wedge \neg P_2$.

Démonstration :

Par la proposition 17 et la définition de la 1-s-atteignabilité a/ est équivalent à b/.

Si P_2 n'est pas 1-s-atteignable à partir de P_1 alors $\text{post}^*(P_1) \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) \neq 1$. Cette dernière expression représente la conjonction de deux invariants, donc un invariant J . Cet invariant est contenu d'une part dans $\text{post}^*(P_1)$ et d'autre part dans $\neg P_2$.

Inversement, supposons que $\text{post}^*(P_1) \not\models \text{pre}^*(P_2)$ et qu'il existe un invariant J , $J \neq 1$, $J \models \text{post}^*(P_1) \wedge \neg P_2$. On a alors $J \not\models \text{pre}^*(P_2)$. Donc $J \not\models \neg P_2$.

Corollaire :

$$\text{post}^*(P_1) \wedge \neg \text{pre}^*(P_2) = \text{pre}^*(\text{post}^*(P_1) \wedge \neg P_2)$$

Corollaire :

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a/ P_2 est 1-s-atteignable sous l'invariant J_0 ,
- b/ Pour chaque invariant J , $J \in \neg P_2$, $J \wedge J_0 = 1$.
- c/ Il n'existe pas d'invariant J , $J \neq 1$, tel que $J \in J_0 \wedge \neg P_2$.

Proposition 21 :

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a/ P_2 est 2-s-atteignable à partir de P_1 (sous l'invariant J_0),
- b/ Pour chaque trajectoire sans fin W contenue dans $\neg P_2$,
 $\text{post}^*(P_1) \wedge W = 1 \quad (J_0 \wedge W = 1)$
- c/ Il n'existe pas de trajectoire sans fin W , $W \neq 1$, telle que
 $W \in \text{post}^*(P_1) \wedge \neg P_2 \quad (W \in J_0 \wedge \neg P_2)$.

Démonstration :

Analogue à la précédente. Remarquer que la conjonction d'un invariant et d'une trajectoire sans fin est une trajectoire sans fin.

Proposition 22 :

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a/ P_2 est 3-s-atteignable à partir de P_1 (sous l'invariant J_0),
- b/ Pour chaque trajectoire W , $W \in \neg P_2$, $\text{post}^*(P_1) \wedge W = 1 \quad (J_0 \wedge W = 1)$,
- c/ Il n'existe pas de trajectoire W , $W \neq 1$, telle que $W \in \text{post}^*(P_1) \wedge \neg P_2$
 $(W \in J_0 \wedge \neg P_2)$.

Le résultat principal de ce paragraphe est que l'on peut exprimer les neuf types d'atteignabilité définis, en termes de relations entre, d'une part, le prédicat de départ P_1 ou le plus petit invariant supérieur ou égal à P_1 , et, d'autre part, le plus grand invariant, trajectoire sans fin, trajectoire inférieure ou égale à $\neg P_2$. Ces situations sont illustrées en figure 2.

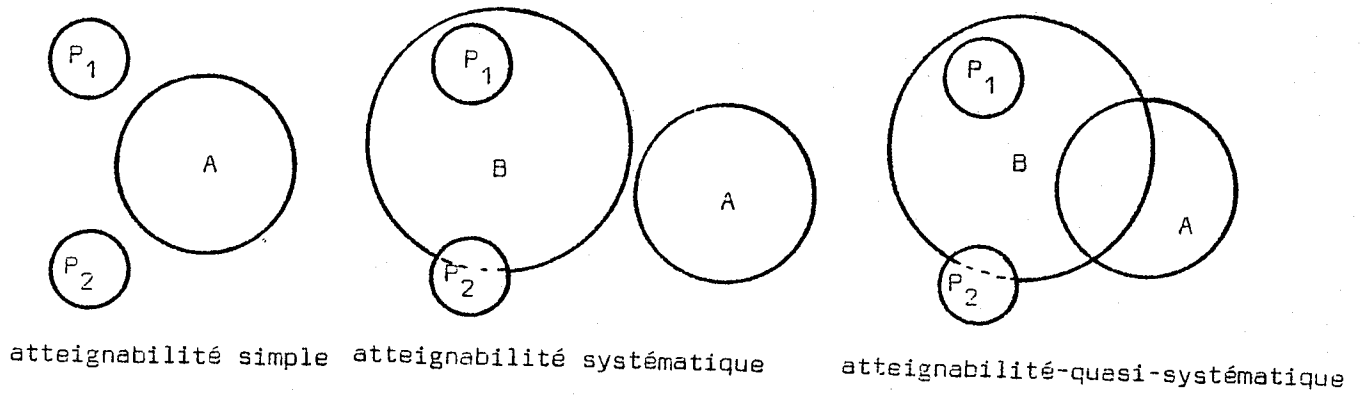


Figure 2

$B = \text{post}^*(P_1)$ ou invariant quelconque.

Définition de A :

- 1 -**- atteignable: A est le plus grand invariant contenu dans $\neg P_2$
- 2 -**- atteignable: A est la plus grande trajectoire sans fin contenue dans $\neg P_2$
- 3 -**- atteignable: A est la plus grande trajectoire contenue dans $\neg P_2$

(** représente les préfixes "s", "qs" ou l'absence de préfixe)

II.3.3. Etude systématique des propriétés

II.3.3.1. Propriétés relatives au blocage

On introduit différentes variantes de la notion de "blocabilité" d'un système obtenues à partir des types d'atteignabilité de la façon suivante :

On dira qu'un système de transitions S est est "x"-blocable à partir de P_1 ssi $\wedge \neg c_i$ est "x"-atteignable à partir de P_1 dans S . De même, pour $i=1,2,3$ on dira que S est i -s-blocable (i -qs-blocable) sous l'invariant J ssi $\wedge \neg c_i$ est i -s-atteignable (i -qs-atteignable) sous l'invariant J dans S .

Lemme 2 :

Si P_2 est un prédicat tel que $\wedge \neg c_i \sqsubseteq P_2$ alors,
 $P_2 \vee \tilde{\text{pre}}(P_2) = P_2 \vee \tilde{\text{pre}}(P_2) \wedge \text{pre}(P_2)$.

Proposition 23 :

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a/ S est 2-blocable à partir de P_1
- b/ S est 3-blocable à partir de P_1
- c/ S est 2-s-blocable à partir de P_1
- d/ S est 3-s-blocable à partir de P_1 .

Démonstration :

Par le lemme précédent on a a) \equiv b) et c) \equiv d).

De plus, si $P_1 \sqsubseteq (I \vee \tilde{\text{pre}})^*(\wedge \neg c_i)$ alors tout successeur possible d'un état vérifiant P_1 vérifie le prédicat $(I \vee \tilde{\text{pre}})^*(\wedge \neg c_i)$.

Donc, $\text{post}^*(P_1) \sqsubseteq (I \vee \tilde{\text{pre}})^*(\wedge \neg c_i)$ c'est-à-dire a) \equiv c).

Proposition 24 :

Les propositions suivantes sont des contradictions :

- a/ S est 2-qs-blocable à partir de P_1
 b/ S est 3-qs-blocable à partir de P_1 .

Proposition 25 :

Un système de transitions S est 2-s-blocable à partir de P_1 (resp. sous un invariant J_0) ssi pour toute trajectoire sans fin W on a $W \wedge P_1 = 1$ (resp. $W \wedge J_0 = 1$).

Démonstration :

Par application de la proposition 18 et en remarquant que toute trajectoire sans fin est inférieure ou égale à vc_i .

Observation :

Si S est tel que la plus grande trajectoire sans fin $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{pre}^r(v c_i) = 1$ alors S est inévitablement blocable à partir de tout état initial.

Proposition 26 :

S est 1-blocable à partir de P_1 ssi pour tout invariant J sans blocage $P_1 \wedge J = 1$.

Démonstration :

Conséquence immédiate de la proposition 17.

Observation :

Si S est tel que le plus grand invariant sans blocage $(I \wedge \text{pre})^x(v c_i) = 1$ alors S est possiblement blocable pour tout état initial.

Proposition 27 :

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a/ S est 1-s-blocable à partir de P_1 (sous l'invariant J_0),
- b/ Pour tout invariant sans blocage J de S, $J \wedge \text{post}^*(P_1) = 1$ ($J \wedge J_0 = 1$),
- c/ Il n'existe pas d'invariant J, $J \neq 1$, tel que $J \in \text{post}^*(P_1) \wedge (\forall c_i)$,
 $(J \in J_0 \wedge (\forall c_i))$.

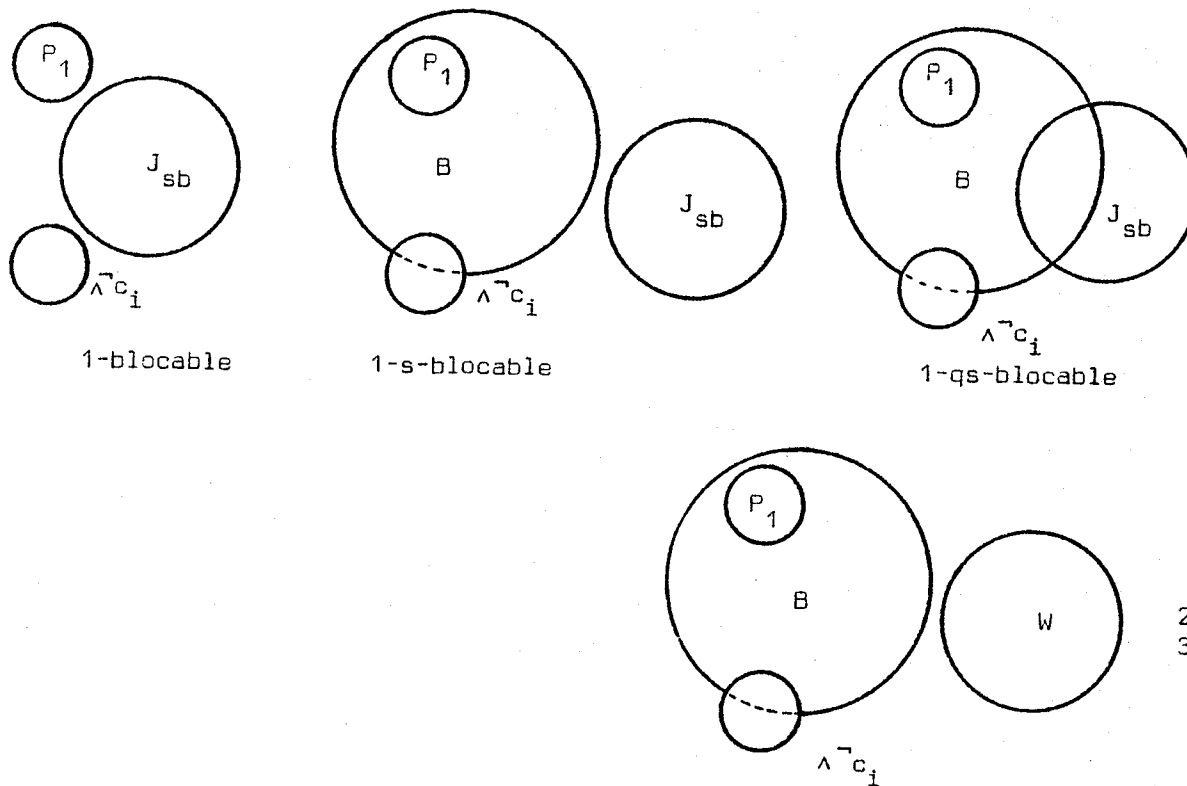
Démonstration :

Par application de la proposition 20.

La figure 3 résume les principaux résultats de ce paragraphe.

Remarques :

- a/ Le plus grand invariant J tel que S soit 1-s-blocable sous J est égal à $\tilde{\text{pre}}^x(\text{pre}^*(\wedge \neg c_i)) = \neg \text{pre}^*(\neg \text{pre}^*(\wedge \neg c_i)) = \neg \text{pre}^*(\tilde{\text{pre}}^x(\vee c_i))$. $\tilde{\text{pre}}^x(\vee c_i)$ est le plus grand invariant sans blocage et $\neg \text{pre}^*(\tilde{\text{pre}}^x(\vee c_i))$ représente l'ensemble des états à partir desquels cet invariant n'est pas atteignable.
- b/ Le plus grand invariant J tel que S soit 2-s-blocable sous J est égal à $\tilde{\text{pre}}^x((I \vee \tilde{\text{pre}})^*(\wedge \neg c_i)) = \neg \text{pre}^*(\neg (I \vee \tilde{\text{pre}})^*(\wedge \neg c_i)) = \neg \text{pre}^*((I \wedge \text{pre})^x(\vee c_i))$. Ce dernier prédicat représente l'ensemble des états à partir desquels la plus grande trajectoire sans fin n'est pas atteignable.



J_{sb} = le plus grand invariant sans blocage
 B = $\text{post}^*(P_1)$ ou invariant quelconque
 W = la plus grande trajectoire sans fin

figure 3

II.3.3.2. Propriétés d'activabilité

II.3.3.2.1. Activabilité d'un ensemble de transitions

Soit S un système de transitions, $P_1 \in P$, J_0 un invariant de S et $L \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ où m est le nombre de transitions de S. On introduit la famille des propriétés d'activabilité pour un ensemble de transitions $\{t_i\}_{i \in L}$ de S.

On dira que $\{t_i\}_{i \in L}$ est "x"-activable à partir de P_1 ssi $\forall c_i$ est "x"-atteignable à partir de P_1 dans S. De même, pour $j=1, 2, 3$ on dira que $\{t_i\}_{i \in L}$ est j-s-activable (j-qs-activable) sous J_0 ssi $\forall c_i$ est j-s-atteignable (j-qs-atteignable) sous J_0 .

Evidemment les propriétés préfixées par "2" ne présentent pas un intérêt pratique. La figure 4 montre comment on peut caractériser les autres types d'activabilité en utilisant les propositions 17, 19, 20 et 22.

Si $|L|=1$ alors les propriétés préfixées par "1" correspondent à des propriétés de vivacité d'une transition : ces propriétés expriment la possibilité d'activer une transition sans toutefois garantir que son activation sera effective. Par contre les propriétés préfixées par "3" expriment dans quelle mesure l'activation d'une transition aura inévitablement lieu et peuvent caractériser l'absence ou la présence de coalition.

On peut simplifier les énoncés des propositions 20 et 22 lorsque $P_2 = \bigvee_{i \in L} c_i$ de la façon suivante :

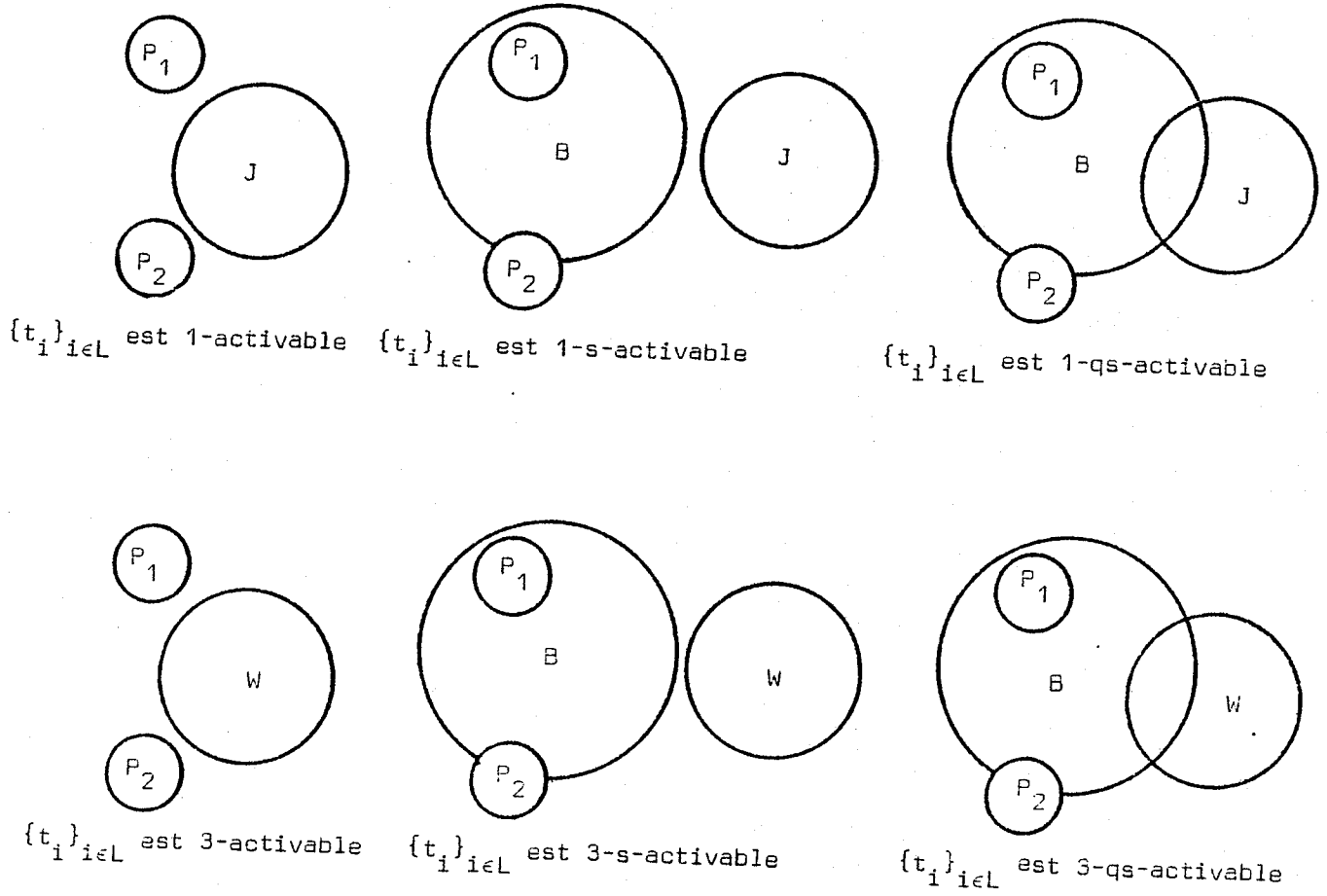
Proposition 28 :

Soit $S=(Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$ et $L \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

L'ensemble des transitions $\{t_i\}_{i \in L}$ est 1-s-activable dans S à partir de P_1

(sous un invariant J_0) ssi il n'existe pas d'invariant J de S tel que

$$J \wedge \text{post}[S]^*(P_1) \neq 1 \quad (J \wedge J_0 \neq 1) \quad \text{et} \quad J \wedge \left(\bigvee_{i \in L} c_i \right) = 1.$$



- $P_2 = \bigcap_{i \in L} v_{c_i}$
- $J = \text{le plus grand invariant contenu dans } \bigwedge_{i \in L} \bar{c}_i$
- $W = \text{la plus grande trajectoire contenue dans } \bigwedge_{i \in L} \bar{c}_i$
- $B = \text{post}^*(P_1) \text{ ou invariant quelconque.}$

Figure 4

Proposition 29 :

Soit $S=(Q,T,\{R_i\}_{i=1}^m)$ et $L \subseteq \{1,2,\dots,m\}$.

L'ensemble des transitions $\{t_i\}_{i \in L}$ est 3-activable dans S à partir de P_1 (sous l'invariant J_0) ssi il n'existe pas de trajectoire W de S telle que $W \wedge \text{post}[S]^*(P_1) \neq 1$ ($W \wedge J_0 \neq 1$) et $W \wedge (\bigvee_{i \in L} c_i) = 1$.

Remarque :

a/ Le plus grand invariant sous lequel $\bigvee_{i \in L} c_i$ est 1-s-activable est égal à $\text{pre}^x(\text{pre}^*(\bigvee_{i \in L} c_i)) = \neg \text{pre}^*(\neg \text{pre}^*(\bigvee_{i \in L} c_i)) = \neg \text{pre}^*(\text{pre}^x(\bigwedge_{i \in L} \neg c_i))$.

b/ Le plus grand invariant sous lequel $\bigvee_{i \in L} c_i$ est 3-s-activable est égal à $\text{pre}^x((I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(\bigvee_{i \in L} c_i)) = \neg \text{pre}^*((I \wedge (\text{pre} \vee \text{pre}))^x(\bigwedge_{i \in L} \neg c_i)) = \neg \text{pre}^*(W)$ où W est la plus grande trajectoire inférieure ou égale à $\bigwedge_{i \in L} \neg c_i$.

II.3.3.2.2. Activabilité d'un système de transitions

Un système de transitions S est dit "x"-activable à partir de P_1 ssi $\bigvee_{i \in L} c_i$ est "x"-activable à partir de P_1 dans S .

Propriétés :

- a/ $\text{pre}^*(\bigvee_{i \in L} c_i) = \bigvee_{i \in L} c_i$
- b/ $\bigvee_{i \in L} c_i \vee \text{pre}(\bigvee_{i \in L} c_i) = \bigvee_{i \in L} c_i$
- c/ $(I \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(\bigvee_{i \in L} c_i) = \bigvee_{i \in L} c_i$

La proposition suivante présente des résultats découlant des propriétés précédentes et de l'application des propositions 17, 18, 19, 20, 21 et 22.

Proposition 30 :

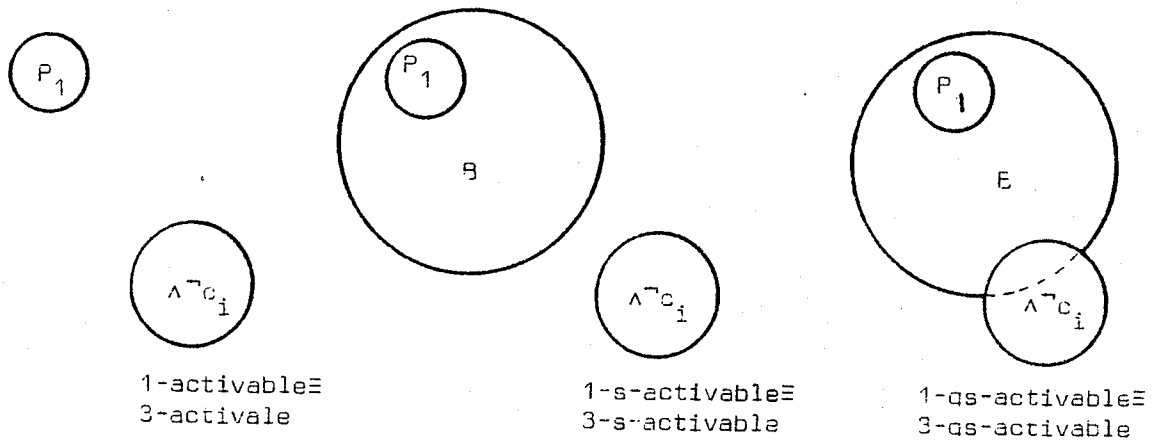
Soit S un système de transitions, $P_2 \in P$ et J_0 un invariant de S .

- a/ S est 1-activable à partir de P_1 ssi S est 3-activable à partir de P_1 ,
- b/ S est 2-activable à partir de P_1 est une tautologie,
- c/ S est 1-s-activable à partir de P_1 (sous J_0) ssi S est 3-s-activable à partir de P_1 (sous J_0),
- d/ S est 2-s-activable à partir de P_1 (sous J_0) est une tautologie,
- e/ S est 1-qs-activable à partir de P_1 (sous J_0) ssi S est 3-qs-activable à partir de P_1 (sous J_0),
- f/ S est 2-qs-activable à partir de P_1 (sous J_0) est une contradiction.

Observation :

$\Lambda^{\neg}c_i$ est en même temps invariant et trajectoire.

La figure 5 représente les principaux résultats de ce paragraphe.



$B = \text{post}^*(P_1)$ ou invariant quelconque

Figure 5

Remarque :

Le plus grand invariant sous lequel S est 1-s-activable est égal à $\text{pr}^x(\text{pre}^*(vc_1)) = \text{pr}^x(vc_1) =$ le plus grand invariant sans blocage.

II.3.3.2.3. Propriétés de coactivabilité

Soit S un système de transitions, $P_1 \in P$, J_0 un invariant de S et $L \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ avec $m = \text{nb}$ de transitions de S. On dira qu'un ensemble de transitions $\{t_i\}_{i \in L}$ est "x"-coactivable à partir de P_1 (sous J_0) ssi $\forall i \in L, \{t_i\}$ est "x"-activable à partir de P_1 (sous J_0).

Pour $i=1, 2, 3$, i-coactivable et i-s-coactivable implique respectivement i-activable et i-s-activable (mais i-qs-coactivable n'implique pas i-qs-activable).

La figure 4 pourrait être utilisée pour illustrer les cas de 1-coactivabilité et de 3-coactivabilité d'un ensemble de transitions $\{t_i\}_{i \in L}$ en remplaçant J par l'invariant $\bigvee_{i \in L} \text{pre}^*(c_i)$ et W par la trajectoire $\bigvee_{i \in L} (\text{I} \vee \text{pre} \wedge \text{pre})^*(c_i)$.

Remarque :

Les termes 1-s-coactivable et 3-s-coactivable correspondent aux notions de vivant ou de sans coalition pour un ensemble de transitions ou pour un système (dans ce dernier cas on prend $L = \{1, 2, \dots, m\}$).

II.3.3.3. Persistance

On peut généraliser la définition de persistance pour un ensemble d'états initiaux défini par un prédicat P_1 et l'exprimer pour un système de transitions $S = (Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$ de la façon suivante :

L'ensemble des états qui valident deux transitions t_i et t_j est représenté par le prédicat $c_i \wedge c_j \wedge \text{post}^*[S](P_1)$. Donc, pour que S soit persistant à partir de P_1 il faut que pour chaque couple de transitions t_i et t_j

$$\text{post}[R_i](c_i \wedge c_j \wedge \text{post}^*[S](P_1)) \subseteq c_j$$

II.4. - LE CONCEPT DE VARIANT

Définitions :

Soit J un invariant et P_1 un prédicat $P_1 \in J$.

Pour $i=1,2,3$ on dira que P_1 est une i -pente sous l'invariant J ssi $\neg P_1 \wedge J$ est i -atteignable à partir de P_1 . On appellera $\neg P_1 \wedge J$ i -bassin sous J .

Proposition 31 :

P_1 est une 1-pente sous J ssi P_1 ne contient pas d'invariant et $P_1 \in J$.

Démonstration :

Si P_1 est une 1-pente sous J alors d'après la proposition 17 $P_1 \wedge \text{pre}^X(P_1 \vee \neg J) = 1$. Mais $\text{pre}^X(P_1) \vee \text{pre}^X(\neg J) \in \text{pre}^X(P_1 \vee \neg J)$. Ceci donne $P_1 \wedge \text{pre}^X(P_1) = \text{pre}^X(P_1) = 1$. Donc si P_1 est 1-pente sous J alors P_1 ne contient pas d'invariant.

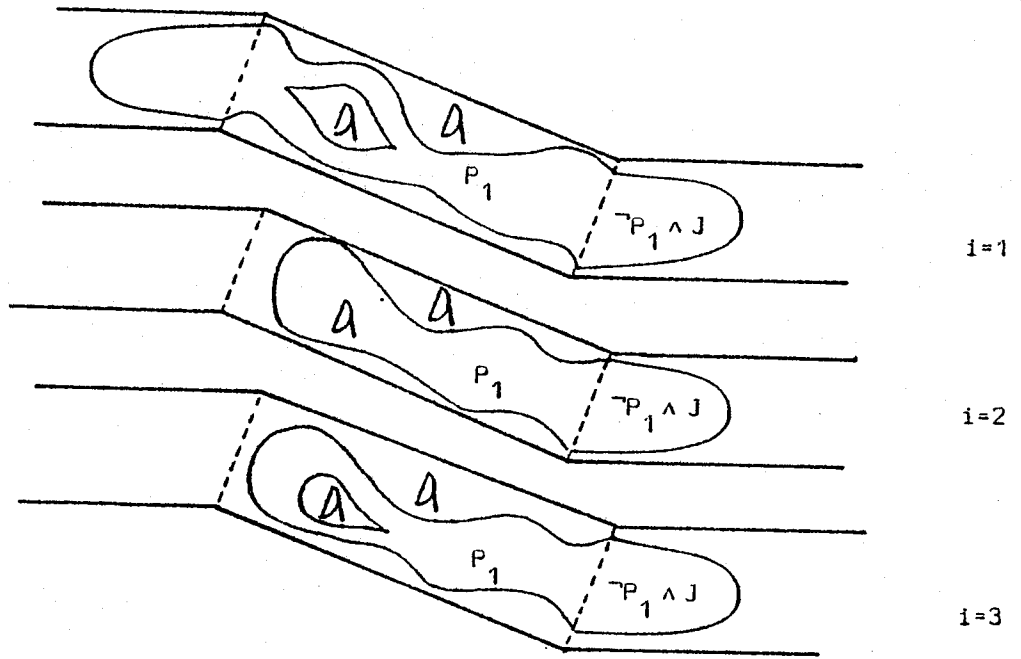
Inversement, supposons que P_1 ne contient pas d'invariant et $P_1 \in J$. Alors, $\text{pre}^X(P_1) = 1 \Rightarrow \text{pre}^*(\neg P_1) = \tau \Rightarrow \neg P_1 \vee \text{pre}^*(P_1) = \tau \Rightarrow P_1 \in \text{pre}^*(\neg P_1)$. Supposons que P_1 n'est pas 1-pente : $P_1 \wedge \text{pre}^X(P_1 \vee \neg J) \neq 1$. L'invariant $\text{pre}^X(P_1 \vee \neg J)$ n'est pas contenu dans P_1 parce que $\text{pre}^X(P_1) = 1$. Donc, $\neg J \wedge \text{pre}^X(P_1 \vee \neg J) \neq 1$. Ceci veut dire qu'il existe au moins un état de P_1 à partir duquel on peut atteindre $\neg J$. Absurde parce que J est un invariant et $P_1 \in J$.

Proposition 32 :

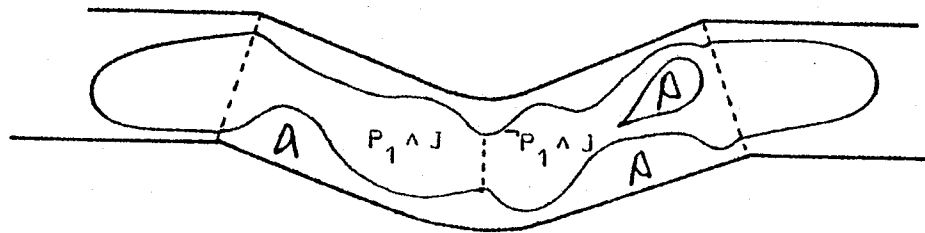
P_1 est une 2-pente sous J ssi P_1 ne contient pas de trajectoire sans fin et $P_1 \in J$.

Démonstration :

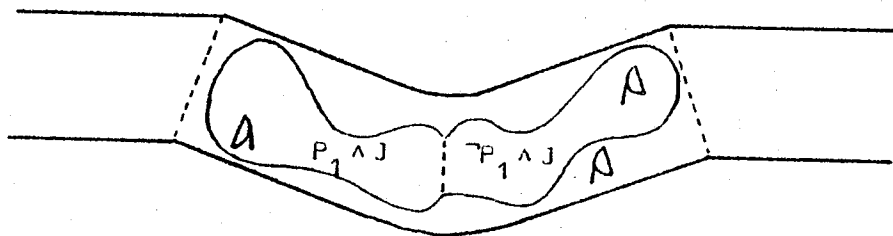
Si P_1 est une 2-pente sous J alors $P_1 \in (I \vee \text{pre})^*(\neg P_1 \wedge J) \in (I \vee \text{pre})^*(\neg P_1) \Rightarrow (I \vee \text{pre})^*(\neg P_1) = \tau \Rightarrow (I \wedge \text{pre})^X(P_1) = 1$. Donc P_1 ne contient pas de trajectoire sans fin.



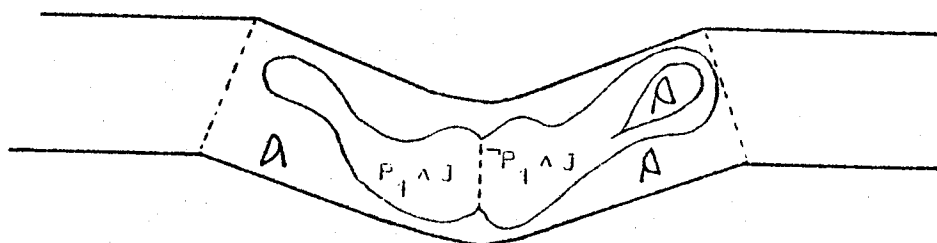
P_1 est i-pente



P_1 est 1-variant



P_1 est 2-variant



P_1 est 3-variant

Figure 6

Inversement, supposons que $P_1 \models (I \vee \text{pre})^*(\neg P_1)$ et $P_1 \models J$. Si P_1 n'est pas une 2-pente alors, $P_1 \wedge (I \wedge \text{pre})^*(P_1 \vee \neg J) \neq 1$.

Donc, $(I \wedge \text{pre})^*(P_1 \vee \neg J)$ est une trajectoire sans fin contenue dans $P_1 \vee \neg J$ et non dans P_1 . Donc, on peut atteindre $\neg J$ à partir de P_1 ce qui implique que J n'est pas invariant.

Proposition 33 :

P_1 est 3-pente sous J ssi $P_1 \models J$ et P_1 ne contient pas de trajectoire.

Remarque :

Les 1-pentes et les 3-pentes ne contiennent pas d'états puits.

Définition :

Soit $P_1 \models J$ où J est un invariant. Pour $i=1,2,3$, P_1 est i -variant sous J ssi P_1 et $\neg P_1 \wedge J$ sont des i -pentes.

La figure 6 illustre les notions définies. Ces notions semblent être intéressantes dans la mesure où elles permettent d'exprimer de façon naturelle un grand nombre de propriétés. Par exemple, t_i est j -activable sous J_0 signifie que $\neg c_i \wedge J_0$ est une j -pente sous J_0 . La notion de 1-pente est une généralisation de la notion de "homing predicate" dans [KEL76] : si P_1 est une 1-pente sous J_0 alors prouver que P_2 est 1-atteignable à partir de J_0 revient à montrer que P_2 est 1-atteignable à partir de $\neg P_1 \wedge J_0$.

La notion de variant permet d'exprimer le fait qu'une propriété n'est pas vérifiée "tout le temps" par un système. Si P_1 est 1-variant sous J_0 , alors pour chaque invariant $J \models J_0$ on a $P_1 \wedge J \neq 1$ et $\neg P_1 \wedge J \neq 1$. Autrement dit si l'état du système satisfait initialement $P_1 \wedge J$ alors on peut atteindre un état qui satisfait $\neg P_1 \wedge J$ et inversement. Si P_1 est un 3-variant sous J_0 alors après initialisation à J_0 , le système "oscille" : à partir d'un état vérifiant $P_1 \wedge J_0$ on

atteint inévitablement un état vérifiant $\neg P_1 \wedge J_0$ et inversement. Les notions de 3-pente et 3-variant sont illustrées dans l'exemple 8 du chapitre III.

Calculer des pentes et des variants revient à calculer des points fixes de fonctions non-monotones. En effet, toute 1-pente sous l'invariant J doit vérifier

$$\text{pre}^X(P) = 1 \quad \text{et} \quad P \subseteq J$$

Ce qui est équivalent à

$$P \subseteq J \wedge \text{pre}^*(\text{pre}(\neg P))$$

En posant $\neg U = \text{pre}^*(\text{pre}(\neg P))$ on a :

$$P = P \wedge J \wedge \neg U$$

$$U = \text{pre}^X(\text{pre}(P)) \Rightarrow U = \text{pre}(P) \wedge \text{pre}(U)$$

Les solutions "intéressantes" de ce système d'équation sont évidemment les solutions maximales.

Remarque :

On peut introduire les concepts d'invariant, trajectoire, pente, variant en les exprimant non à partir de prédicats mais comme des relations $\rho \subseteq Q \times E$ où E est un ensemble quelconque de la façon suivante :

Etant donné $\rho \subseteq Q \times E$ on définit l'ensemble des prédicats sur Q, $\{\rho_e\}_{e \in E}$:

$$\forall e \in E, \forall q \in Q \quad (\rho_e(q) = \text{vrai} \Leftrightarrow e \in \rho(q))$$

Evidemment, si $|E|=1$ alors ρ représente un prédicat. La relation ρ sera dite relation invariante, relation trajectoire, relation pente, relation variante ssi $\forall e \in E, \rho_e$ est respectivement invariant, trajectoire, pente, variant.

Si ρ est une fonction (partielle) de Q dans E ($\forall q \in Q, |\rho(q)| \leq 1$) on parlera de fonction invariante, fonction trajectoire, fonction i-pente, fonction i-variante. On peut simplifier les définitions de fonction invariante et fonction variante.

Si ρ est une fonction invariante alors d'après la définition:

$$\forall q \in Q \ \forall e \in E \ (\rho_e(q) = \underline{\text{vrai}} \text{ et } \exists q' \in Q, q \xrightarrow{*} q' \Rightarrow \rho_e(q') = \underline{\text{vrai}})$$

Mais ρ étant une fonction, on peut écrire la définition précédente:

$$\forall q, q' \in Q \ (q \xrightarrow{*} q' \Rightarrow \rho(q) = \rho(q'))$$

Cette définition est équivalente à celle donnée par [AMY78].

De même, on peut définir une fonction 1-variante par:

$$\forall q \in Q, \exists q' \in Q \ (q \xrightarrow{*} q' \text{ et } \rho(q) \neq \rho(q')).$$

CHAPITRE III

CONTROLEURS A COMMANDES GARDEES

III.1.	CA-systèmes et IA-systèmes -----	2
III.2.	Invariants caractéristiques des CA-systèmes -----	3
III.3.	La notion de verrou -----	6
III.4.	Application des résultats présentés au chapitre II -----	13
III.5.	Dérivation de systèmes corrects -----	21
III.6.	Exemples d'application aux réseaux de Petri -----	23
III.7.	Conclusions -----	27

Présentation :

Nous présentons deux modèles de description du contrôle qui sont des systèmes de transitions dont les actions sont "gardées" soit par un ensemble de conditions soit par un invariant. Les réseaux de Petri constituent un cas particulier de ces modèles qui sont comparés en introduisant un nouveau type d'invariants : les invariants caractéristiques.

Les verrous constituent un autre type d'invariants qui peuvent être facilement calculés sur les modèles introduits sans recourir à la méthode générale.

Enfin, les résultats du chapitre précédent sont illustrés sur des exemples.

III.1. - CA-SYSTEMES et IA-SYSTEMES

Définition :

Un système "condition-action" ou CA-système est un triplet $S = (V, C, A)$ où

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un ensemble de variables d'état dont on donne également les domaines de définition, respectivement, D_1, D_2, \dots, D_n .
- $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ est un ensemble de conditions sur V , chaque condition étant un prédicat calculable.
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ est un ensemble d'actions en bijection avec les conditions. Chaque action a_i est un ensemble d'assignations $V := \alpha_i(V)$. Les membres droits de ces assignations sont des fonctions calculables de V évaluées "simultanément" (tous les membres droits sont évalués pour la même valeur de V avant l'assignation).

On considérera un CA-système comme un système de transitions non-déterministe $S = (Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$ tel que $Q \subseteq \prod_{i=1}^n D_i$ et les relations R_i sont définies par :

$$(q, q') \in R_i \quad \text{ssi} \quad c_i(q) = \underline{\text{vrai}} \quad \text{et} \quad \alpha_i(q) = q'$$

Remarquons que ce modèle est équivalent à la sous-classe des programmes à "commandes gardées" [DIJ75].

$$\underline{\text{do}} \quad c_1 \rightarrow SL_1 \quad \square \quad c_2 \rightarrow SL_2 \quad \square \quad \dots \quad \square \quad c_m \rightarrow SL_m \quad \underline{\text{od}}$$

où les SL_i sont les affectations a_i .

Définition :

Un système "invariant-action" ou IA-système est un triplet $S = (V, J, A)$ où V et A sont définis comme dans la définition précédente et J est un prédicat appelé invariant caractéristique de S .

On considérera un IA-système comme un système de transitions $S = (Q, T, \{R_i\}_{i=1}^m)$ avec $Q \subseteq \prod_{i=1}^n D_i$ et les R_i définis par

$$(q, q') \in R_i \text{ ssi } J(q) = \underline{\text{vrai}}, q' = \alpha_i(q) \text{ et } J(q') = \underline{\text{vrai}}$$

Remarquons que tout IA-système représente un système de transitions dont J est un invariant.

Les deux modèles introduits dans ce paragraphe étant des systèmes de transitions particuliers on peut les comparer en utilisant les définitions du paragraphe II.1.3.

Proposition 1 :

Etant donné un IA-système $S = (V, J, A)$, le CA-système $S' = (V, C, A)$ avec $c_i = J \wedge \alpha_i J$, où $\alpha_i J$ représente le prédicat $\alpha_i J(q) = J(\alpha_i(q))$, est équivalent à S .

III.2. - INVARIANTS CARACTERISTIQUES DES CA-SYSTEMES

D'après la proposition précédente étant donné un IA-système on peut trouver un CA-système qui lui est équivalent, ce qui implique que toute coordination réalisée par des IA-systèmes peut être réalisée par les CA-systèmes. On peut se demander si l'inverse est également vrai, c'est-à-dire si étant donné un CA-système S' on peut trouver un IA-système S qui lui est équivalent. Ce problème se ramène à la recherche d'invariants particuliers de S' . Soit en effet J un invariant quelconque de $S' = (V, C, A)$. Alors pour chaque état q tel que $J(q) = \underline{\text{vrai}}$, (S, q) contient (S', q) où S est le IA-système obtenu à partir de S' en remplaçant C par J , $S = (V, J, A)$.

Définition :

Etant donné $S' = (V, C, A)$ un CA-système, on appellera invariant caractéristique de S' un prédicat J tel que pour chaque état $q, J(q) = \underline{\text{vrai}}, (S, q) \in (S', q)$ où $S = (V, J, A)$.

Les invariants caractéristiques d'un CA-système constituent une classe d'invariants plus précis que les autres, dans la mesure où leur donnée est équivalente à la donnée de l'ensemble des conditions C. Dans ce paragraphe nous montrons que le calcul des invariants caractéristiques d'un CA-système se ramène au problème du calcul de points fixes de fonctions non monotones.

Soit $S = (V, C, A)$ un CA-système ayant Q comme ensemble d'états et $|A|=m$. Nous représentons par \mathcal{A} l'ensemble des applications internes de Q . \mathcal{A} sera considéré comme un sous-ensemble de R (ensemble des relations binaires sur Q) dont les éléments α sont tels que :

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \forall q \in Q \quad |\text{post}[\alpha](q)| = 1$$

On peut alors exprimer pour les CA-systèmes S les fonctions $\text{pre}[S]$ et $\text{post}[S]$ sous la forme

$$\begin{aligned} \text{pre}[S] &= \bigvee_{i=1}^m c_i \wedge \text{pre}[\alpha_i] \\ \text{post}[S] &= \bigvee_{i=1}^m \text{post}[\alpha_i](c_i) \wedge \text{post}[\alpha_i] \end{aligned}$$

Aussi les propriétés suivantes peuvent être démontrées facilement.

Propriétés :

- a/ $\alpha \in \mathcal{A}, P_1, P_2 \in P, \text{pre}[\alpha](P_1 \wedge P_2) = \text{pre}[\alpha](P_1) \wedge \text{pre}[\alpha](P_2)$
- b/ $\alpha \in \mathcal{A}, P_1 \in P, \neg \text{pre}[\alpha](P_1) = \text{pre}[\alpha](\neg P_1)$
- c/ $\alpha \in \mathcal{A}, P_1 \in P, q \in Q, \text{pre}[\alpha](P_1(q)) = P_1(\alpha(q))$

Notation :

Pour simplifier l'écriture de $\text{pre}[\alpha](P)$ on le représentera par αP où αP représente par définition le prédicat $\alpha P(q) = \text{vrai}$ ssi $P(\alpha(q)) = \text{vrai}$ (propriété c/).

Pour que J soit un invariant caractéristique de S il faut et suffit que

I/ J est un invariant de S c'est-à-dire

$$c_i \wedge J \in \alpha_i J, \text{ pour } i=1,2,\dots,m$$

II/ Chaque transition possible dans le IA-système (V,J,A) soit possible dans S, c'est-à-dire

$$J \wedge \alpha_i J \in c_i, \text{ pour } i=1,2,\dots,m$$

I et II sont respectivement équivalents à

$$J \in \bigwedge_{i=1}^m (\neg c_i \vee \alpha_i J)$$

$$J \in \bigwedge_{i=1}^m (c_i \vee \neg \alpha_i J)$$

Donc pour que J soit invariant caractéristique de S il faut et suffit que

$$J \in \bigwedge_{i=1}^m (\neg c_i \vee \alpha_i J) \wedge (c_i \vee \neg \alpha_i J)$$

ce qui est équivalent à

$$J \in \bigwedge_{i=1}^m (c_i = \alpha_i J)$$

Exemple 1 :

Soit le CA-système $S = (V,C,A)$ avec $V = \{v\}$, $C = \{c\}$, $A = \{a\}$, $c = (v > 3) \vee (v < 0)$, $a = (v := v-2)$, domaine de $v = \mathbb{R}$.

Pour trouver des invariants caractéristiques il faut calculer des solutions de $J \in \neg c \oplus \alpha J$ où \oplus représente l'opérateur "ou exclusif". On peut calculer un invariant caractéristique particulier en résolvant l'équation linéaire à retards

$$J = \neg c \oplus \alpha J.$$

$$J = \neg c \oplus \alpha \neg c \oplus \alpha^2 \neg c \oplus \dots \oplus \alpha^k \neg c \oplus \dots$$

Ce qui donne

$$J = (0 \leq v < 2) \vee \bigvee_{k=1}^{\infty} (2k+1 \leq v < 2k+2)$$

Exemple 2 :

Soit le CA-système $S = (V, C, A)$ avec $V = \{v_1, v_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, $A = \{a_1, a_2\}$, domaine des $v_i = \mathbb{N}$. Les conditions et les actions sont définies par

$$c_1 = (v_1 > 0) \quad c_2 = (v_2 > 0)$$

$$a_1 = (v_1 := v_1 - 1, v_2 := v_2 + 1) \quad a_2 = (v_1 := v_1 + 1, v_2 := v_2 - 1)$$

On peut essayer de trouver des invariants caractéristiques contenus dans un prédicat donné J_0 en calculant itérativement :

$$J_{k+1} = J_k \wedge (\neg c_1 \oplus \alpha_1 J_k) \wedge (\neg c_2 \oplus \alpha_2 J_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si on prend $J_0 = (v_1 + v_2 = 1) \wedge (v_1 \geq 0) \wedge (v_2 \geq 0)$ on trouve

$$J_1 = (v_1 = 1) \wedge (v_2 = 0) \vee (v_1 = 0) \wedge (v_2 = 1) = J_0$$

Si on prend $J_0 = (v_1 + v_2 = 2) \wedge (v_1 \geq 0) \wedge (v_2 \geq 0)$ on trouve

$$= J_1 = (v_1 = 2) \wedge (v_2 = 0) \vee (v_1 = 1) \wedge (v_2 = 1) \vee (v_1 = 0) \wedge (v_2 = 2) = J_0 .$$

On peut généraliser ce résultat et démontrer que chaque prédicat du type $(v_1 + v_2 = k) \wedge (v_1 \geq 0) \wedge (v_2 \geq 0) \quad k=0, 1, 2, \dots$ est un invariant caractéristique.

III.3. - LA NOTION DE VERROU

Le problème de la détection et de la protection contre les verrous a été toujours étudié dans un contexte particulier, celui du partage d'un ensemble de ressources par un ensemble de processus utilisateurs [COF71] [HOL72]. Dans ce paragraphe nous introduisons la notion de verrou dans les CA-systèmes comme un type d'invariants particuliers : un verrou correspond à une configuration de valeurs d'un sous-ensemble de variables qui ne sont pas modifiées pour toute évolution possible. Cette définition présente l'avantage d'être indépendante de tout contexte d'utilisation du système et d'englober aussi bien la notion de verrou total (ou mortel) que celle de verrou partiel.

Notation :

Soit $\eta = \{1, 2, \dots, n\}$ et $\eta_1 \subseteq \eta$, $\eta_1 \neq \emptyset$. Etant donné un ensemble $V = \{v_i\}_{i=1}^n$ on représentera par V/η_1 le sous-ensemble de V , $\{v_i\}_{i \in \eta_1}$.

Définition :

Soit $S = (V, C, A)$ un CA-système à n variables. Un verrou de S est un invariant D de S tel que pour chaque couple d'états q et q' , $D(q) = \text{vrai}$ et $q \rightarrow q'$, on a $q/\eta_1 = q'/\eta_1$ où $\eta_1 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ et V/η_1 est l'ensemble des variables dont dépend effectivement D .

Proposition 2 :

Soit $S = (V, C, A)$, $|V|=n$, $|A|=m$, un CA-système et D un prédicat sur V dépendant effectivement d'un ensemble de variables $V_1 = V/\eta_1$, $\eta_1 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $\eta_1 \neq \emptyset$. D est un verrou de S si il existe $\mu_1 \subseteq \{1, 2, \dots, m\} = \mu$ tel que

$$D \subseteq \bigwedge_{i \in \mu_1} \neg c_i$$

et

$$(\forall j \in \mu - \mu_1)(\forall q \in Q) \text{ (si } (c_j \wedge D)(q) = \text{vrai} \text{ alors } \alpha_j(q)/\eta_1 = q/\eta_1)$$

Démonstration :

On démontre d'abord que D ainsi défini est un invariant. Donc D doit satisfaire les relations $D \wedge c_k \subseteq \alpha_k D$ pour $k=1, 2, \dots, m$. Ces relations sont satisfaites pour $k \in \mu_1$ étant donné que $D \subseteq \bigwedge_{i \in \mu_1} \neg c_i$. Si $k \in \mu - \mu_1$ et pour un état q , $(D \wedge c_k)(q) = \text{vrai}$

alors $\alpha_k D(q) = \text{vrai}$ parce que $\alpha_k D(q) = D(\alpha_k(q)) = D(\alpha_k(q)/\eta_1) = D(q/\eta_1) = D(q)$.

De plus, si q_0 est un état initial $D(q_0) = \text{vrai}$, en effectuant une transition à partir de q_0 seulement les composantes de q_0 dont les indices appartiennent à l'ensemble $\eta - \eta_1$ peuvent changer.

Les verrous correspondent à des situations de blocage partiel qui peuvent être détectées en appliquant la proposition 28 du chapitre II. On peut cependant déterminer plus facilement des verrous d'un certain type en exploitant le résultat de la proposition précédente.

La méthode présentée ci-dessous est une généralisation de la méthode de calcul de l'ensemble des verrous d'un réseau de Petri (chapitre V paragraphe V 4.1.3.).

Soit un CA-système $S = (V, C, A)$ avec $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Le graphe de la figure 1 donne d'une part la relation de dépendance des conditions par rapport aux variables v_i et d'autre part les variables qui sont modifiées par une action a_j . Par exemple la condition c_3 dépend des variables v_1 et v_5 et l'action a_4 modifie les variables v_3, v_4 et v_5 .

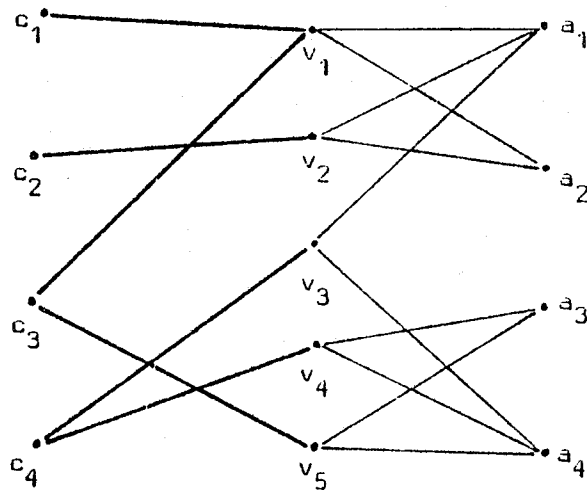


figure 1

Recherche d'un verrou $D = \bigwedge_{i \in \mu_1} c_i$:

Supposons que S contient un verrou $D = \bigwedge_{i \in \mu_1} c_i$ où $\mu_1 \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Pour déterminer

un tel ensemble μ_1 il suffit, d'après la proposition 2, que pour chaque variable v_s dont dépend une condition $c_i, i \in \mu_1 : \forall j \in \mu - \mu_1, a_j$ ne modifie pas v_s .

Si, par exemple, $1 \in \mu_1$ il faut que $2 \in \mu_1$ parce que a_2 transforme la variable v_1

dont dépend c_1 . De même si $3 \in \mu_1$ il faut que $1 \in \mu_1$, $2 \in \mu_1$ et $4 \in \mu_1$ parce que c_3 dépend de v_1 et de v_5 et ces variables sont modifiables, la première par a_1 et a_2 et la seconde par a_3 et a_4 .

On peut chercher les verrous de ce type à partir des implications

$$1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 1, 3 \Rightarrow 1 \wedge 2 \wedge 4, 4 \Rightarrow 1 \wedge 2 \wedge 3$$

Il faut interpréter une implication $i \Rightarrow j \wedge k \wedge l$ comme la proposition "si $i \in \mu_1$ alors $j \in \mu_1$ et $k \in \mu_1$ et $l \in \mu_1$ ".

Cet ensemble d'implications est équivalent à :

$$\begin{aligned} & (\neg 1 \vee 2) \wedge (\neg 2 \vee 1) \wedge (\neg 3 \vee 1 \wedge 2 \wedge 4) \wedge (\neg 4 \vee 1 \wedge 2 \wedge 3) = \\ & = \neg 1 \wedge \neg 2 \wedge \neg 3 \wedge \neg 4 \vee 1 \wedge 2 \wedge \neg 3 \wedge \neg 4 \vee 1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \end{aligned}$$

On trouve donc comme "solutions" $\mu_1 = \{1, 2\}$ et $\mu_1 = \{1, 2, 3, 4\}$. C'est-à-dire $\neg c_1 \wedge \neg c_2$ et $\neg c_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg c_3 \wedge \neg c_4$ sont des verrous.

Recherche d'un verrou $D \subseteq \bigwedge_{i \in \mu_1} \neg c_i$:

Si à part le graphe de la figure 1 on connaît une décomposition des c_i en conjonction de prédicats on peut chercher des verrous $D \subseteq \bigwedge_{i \in \mu_1} \neg c_i$ en appliquant le même principe.

Supposons par exemple que $c_1 = \phi_1(v_1)$, $c_2 = \phi_2(v_2)$, $c_3 = \phi_3(v_1) \wedge \phi_4(v_5)$, $c_4 = \phi_5(v_3) \wedge \phi_6(v_4)$. Les verrous cherchés sont des conjonctions de sous-ensembles de l'ensemble des prédicats $\{\neg \phi_i\}_{i=1}^6$.

On peut écrire de nouveau les implications

$$1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 1, 3 \Rightarrow 1 \wedge 2, 4 \Rightarrow 5 \vee 6, 5 \Rightarrow 1, 6 \Rightarrow 3 \vee 4$$

(l'implication $i \Rightarrow j \wedge k$ ($i \Rightarrow j \vee k$) représente la proposition "si $\neg \phi_i$ est facteur de D alors $\neg \phi_j$ et (ou) $\neg \phi_k$ sont facteurs de D ").

L'ensemble des implications précédentes est équivalent à l'expression (on omet les opérateurs \wedge) :

$$\begin{aligned} & (\neg 1 \vee 2) (\neg 2 \vee 1) (\neg 3 \vee 1 \vee 2) (\neg 4 \vee 5 \vee 6) (\neg 5 \vee 1) (\neg 6 \vee 3 \vee 4) = \\ & = \neg 1 \neg 2 \neg 3 \neg 4 \neg 5 \neg 6 \vee \neg 1 \neg 2 \neg 3 \neg 4 \neg 5 \vee 1 \neg 2 \neg 4 \neg 6 \vee 1 \neg 2 \neg 5 \neg 6 \vee \\ & \vee 1 \neg 2 \neg 3 \neg 4 \vee 1 \neg 2 \neg 3 \neg 5 \vee 1 \neg 2 \neg 3 \neg 6 \vee 1 \neg 2 \neg 4 \neg 5 \vee 1 \neg 2 \neg 4 \neg 6 \end{aligned}$$

On trouve donc que $\bigwedge_{i \in L} \neg \phi_i$ est un verrou où L peut être un des ensembles d'indices.

- {1,2}, {4,6}, {1,2,3}, {1,2,5}, {1,2,3,5}, {1,2,3,6},
- {1,2,4,5}, {1,2,4,6}, {1,2,3,4,5}, {1,2,3,4,6}
- {1,2,3,5,6}, {1,2,4,5,6}, {1,2,3,4,5,6}.

Exemple 3 :

Soit le CA-système décrit par le programme non déterministe ([Fl077] page 600).

```

do
  p1=0  $\wedge$  r1=1  $\rightarrow$  r1:=r1-1 ; p1:=1  []
  p1=1  $\wedge$  r2=1  $\rightarrow$  r2:=r2-1 ; p1:=2  []
  p1=2           $\rightarrow$  r1:=1 ; r2:=1 ; p1:=0  []
  p2=0  $\wedge$  r2=1  $\rightarrow$  r2:=r2-1 ; p2:=1  []
  p2=1  $\wedge$  r1=1  $\rightarrow$  r1:=r1-1 ; p2:=2  []
  p2=2           $\rightarrow$  r1:=1 ; r2:=1 ; p2:=0
od
  
```

On représente par c_i et a_i respectivement la condition et l'action de la i-ème commande gardée (les indices correspondent à l'ordre d'écriture).

On pose :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (p_1=0) , \phi_2=(p_1=1) , \phi_3=(p_1=2) \\ \phi_4 &= (p_2=0) , \phi_5=(p_2=1) , \phi_6=(p_2=2) \\ \phi_7 &= (r_1=1) , \phi_8=(r_2=1). \end{aligned}$$

Cherchons des verrous du type $D = \bigwedge_{j \in K} \neg \phi_j$, $K \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ par cette méthode.

On écrit à l'aide du graphe de la figure 2, les implications :

- 1 \Rightarrow (2 \vee 8)3
- 2 \Rightarrow (1 \vee 7)3
- 3 \Rightarrow (1 \vee 7)(2 \vee 8)
- 4 \Rightarrow (5 \vee 7)6
- 5 \Rightarrow (4 \vee 8)6
- 6 \Rightarrow (4 \vee 8)(5 \vee 7)
- 7 \Rightarrow 3(7 \vee 5)6
- 8 \Rightarrow 3(8 \vee 4)6

Cet ensemble d'implications est équivalent à :

$$\neg 1 \neg 2 \neg 3 \neg 4 \neg 5 \neg 6 \neg 7 \neg 8 \vee 1 2 3 \neg 4 \neg 5 \neg 6 \neg 7 \neg 8 \vee 4 5 6 \neg 1 \neg 2 \neg 3 \neg 7 \neg 8 \vee \\ \vee 3 6 7 8 \vee 2 3 4 6 7 \vee 1 3 5 6 8 \vee 1 2 3 4 5 6.$$

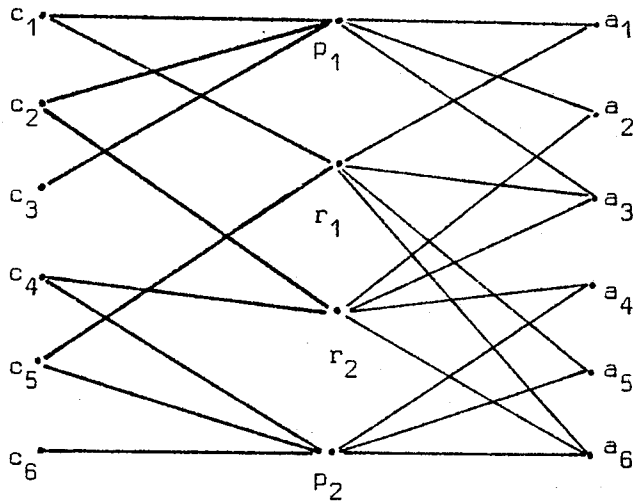


figure 2

Donc on trouve que $\bigwedge_{j \in K} \bar{\phi}_j$ est un verrou pour K un parmi les ensembles (minimaux)
d'indices :

{1,2,3}, {4,5,6}, {3,6,7,8}, {2,3,4,6,7}, {1,3,5,6,8}.

III.4. - APPLICATION DES RESULTATS PRESENTES AU CHAPITRE II

Les résultats présentés au chapitre précédent sont applicables à n'importe quel modèle pourvu qu'on arrive à exprimer pour chaque système S décrit dans ce modèle les fonctions $\text{pre}[S]$ et $\text{post}[S]$. Nous avons déjà montré dans le paragraphe III.2. comment on peut exprimer ces fonctions pour un CA-système ou un programme non déterministe du type $\underline{\text{do}} c_1 \rightarrow a_1 \{ \square c_i \rightarrow a_i \} \underline{\text{od}}$.

Exemple 4 :

Le contrôle d'un système lecteurs-rédacteurs est représenté par le CA-système $S = (\{x\}, \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ avec :

$$\begin{array}{ll} c_1 = (x > 0) & a_1 = (x := x - 1) \\ c_2 = (x \geq 0) & a_2 = (x := x + 1) \\ c_3 = (x = 0) & a_3 = (x := x - 1) \\ c_4 = (x = -1) & a_4 = (x := x + 1) \end{array}$$

La variable de synchronisation x est définie sur \mathbb{Z} : $x=0, x=k > 0, x=-1$ correspondent respectivement aux situations où la ressource partagée est libre, k lecteurs utilisent la ressource, un rédacteur utilise la ressource. Les transitions t_2 et t_3 sont associées respectivement aux demandes des lecteurs et des rédacteurs pour utiliser la ressource tandis que les transitions t_1 et t_4 aux signaux de libération de la ressource par des lecteurs et des rédacteurs.

Pour trouver le plus grand invariant sans blocage, il faut itérer :

On a :

$$P_{k+1} = P_k \wedge \text{pre}(P_k) \quad \text{avec } P_0 = \bigvee_{i=1}^4 c_i$$

$$\bigvee_{i=1}^4 c_i = x \geq -1$$

et

$$\begin{aligned} \text{pre}(F) &= [\neg c_1 \wedge \neg c_3 \vee \alpha_1 P] \wedge [\neg c_2 \wedge \neg c_4 \vee \alpha_2 P] \\ \text{pre}(P_0) &= [x < 0 \vee x \geq 0] \wedge [x < -1 \vee x \geq -2] = \tau \end{aligned}$$

Donc $P_1 = P_0 = x \geq -1$ est le plus grand invariant sans blocage.

- Cherchons la plus grande trajectoire sans fin contenue dans $\neg c_3 = (x \neq 0)$ pour vérifier s'il y a coalition contre la transition t_3 . On calcule itérativement :

$$\begin{aligned}
 P_{k+1} &= P_k \wedge \text{pre}(P_k) && \text{avec} && P_0 = \neg c_3 \\
 P_0 &= (x \neq 0) \\
 P_1 &= (x \neq 0) \wedge [(x \geq 0) \wedge (x \neq 1) \vee (x \geq -1) \wedge (x \neq -1)] = x \geq 1 \\
 P_2 &= (x \geq 1) \wedge [(x \geq 0) \wedge (x \geq 2) \vee (x \geq -1) \wedge (x \geq 0)] = x \geq 1
 \end{aligned}$$

Donc il y a coalition contre t_3 .

- Cherchons la plus grande trajectoire sans fin contenue dans $\neg c_2 = (x < 0)$:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= (x < 0) \\
 P_1 &= (x < 0) \wedge [(x \geq 0) \wedge (x < 1) \vee (x \geq -1) \wedge (x < -1)] = \perp
 \end{aligned}$$

Donc il n'y a pas de coalition contre t_2 .

Exemple 5 :

Deux processus cycliques exécutent successivement des opérations de lecture et d'écriture sur une ressource commune (figure 3). Les opérations d'écriture et de lecture-écriture doivent s'exécuter en mutuelle exclusion.

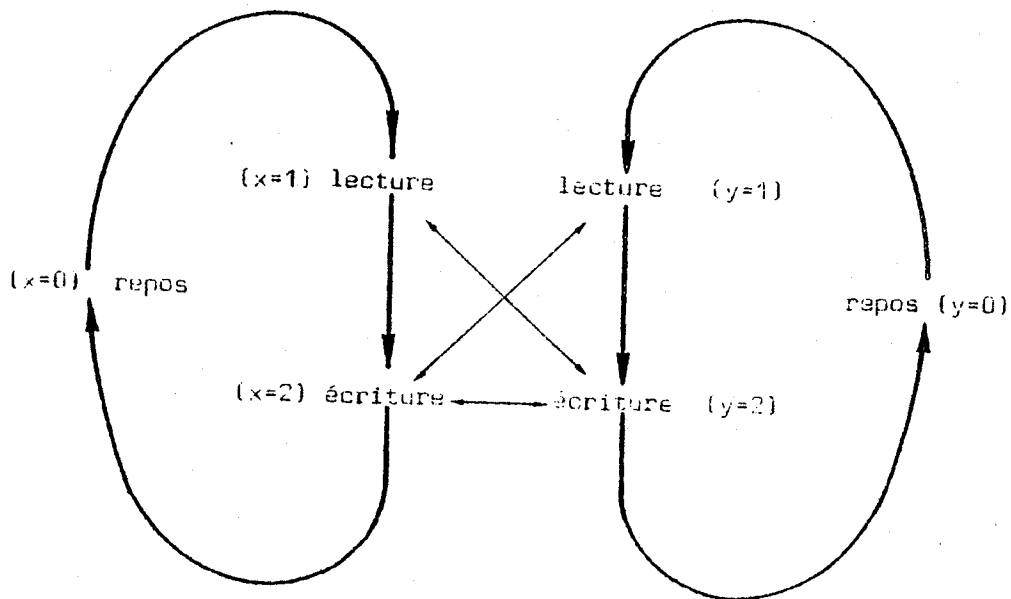


figure 3

Le contrôle est représenté par le CA-système $S = (\{x,y\}, \{c_i\}_{i=1}^6, \{a_i\}_{i=1}^6)$

$c_1 = (x=0) \wedge (y \neq 2)$	$a_1 = (x:=1)$
$c_2 = (x=1) \wedge (y \neq 1) \wedge (y \neq 2)$	$a_2 = (x:=2)$
$c_3 = (x=2)$	$a_3 = (x:=0)$
$c_4 = (y=0) \wedge (x \neq 2)$	$a_4 = (y:=1)$
$c_5 = (y=1) \wedge (x \neq 1) \wedge (x \neq 2)$	$a_5 = (y:=2)$
$c_6 = (y=2)$	$a_6 = (y:=0)$

On veut vérifier si le système est blocable. Le plus grand invariant sans blocage est $\neg \text{pre}^*(\wedge \neg c_i)$. Si on tient compte du fait que le fonctionnement représenté n'a de sens que si $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 2$ on a :

- $\wedge \neg c_i = (x=1) \wedge (y=1)$, représenté par le vecteur $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$
- $\text{pre}(\wedge \neg c_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$
- $\text{pre}^2(\wedge \neg c_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$
- $\text{pre}^3(\wedge \neg c_i) = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$
- $\text{pre}^4(\wedge \neg c_i) = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Mais $\bigvee_{i=0}^4 \text{pre}^i(\wedge \neg c_i) = \tau = \text{pre}^*(\wedge \neg c_i)$

Donc le plus grand invariant sans blocage est τ et par conséquent ce système est 1-s-blocable à partir de tout état initial.

Exemple 6 :

Un producteur et un consommateur sont reliés par un buffer de capacité 5. Pour chaque accès au buffer, le producteur dépose 4 objets et le consommateur en retire 3.

Le fonctionnement du système producteur-consommateur est représenté par le programme :

```
do 0 ≤ x ≤ 1 → x := x+4 [] x ≥ 3 → x := x-3 od
```

On peut montrer que ce système est inévitablement blocable à partir de tout état initial. En effet,

$$\begin{aligned}
 Vc_i &= c_i \vee c_2 = (0 \leq x \leq 1) \vee (x \geq 3) \\
 \text{pre}(Vc_i) &= (0 \leq x \leq 1) \wedge [(-4 \leq x \leq -3) \vee (x \geq -1)] \vee \\
 &\quad (x \geq 3) \wedge [(3 \leq x \leq 4) \vee (x \geq 6)] \\
 &= (x=0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, \dots) \\
 \text{pre}^2(Vc_i) &= (x=0, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, \dots) \\
 \text{pre}^3(Vc_i) &= (x=0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \dots) \\
 \text{pre}^4(Vc_i) &= (x=3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, \dots) \\
 \text{pre}^s(Vc_i) &= (x= k+3 \text{ où } k \in \underline{\text{pre}^4(Vc_i)})
 \end{aligned}$$

Généralement pour $s \geq 0$:

$$\text{pre}^{4+s}(Vc_i) = (x = k+3s \text{ où } k \in \underline{\text{pre}^4(Vc_i)})$$

Donc la plus grande trajectoire sans fin est égale à $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{pre}^r(Vc_i) = 1$ et par conséquent ce système est inévitablement blocable à partir de tout état initial.

On peut appliquer ces résultats pour la vérification non seulement du contrôle mais aussi des systèmes parallèles après transformation à des systèmes non-déterministes à fonctionnement séquentiel équivalents [FLO77]. Cette approche qui consiste à étudier un système parallèle à partir d'un modèle non déterministe a été suivie par Flon et Suzuki [FLO77][FLI78] et Sintzoff et Van Lamswerde [LAM76][LAM78][SIN78]. Le travail de ces derniers est à l'origine de la recherche sur la vérification présentée dans les chapitres II et III.

Exemple 7 :

Cet exemple est pris dans [FLO77] où on considère le problème de mutuelle exclusion discuté par Dijkstra [DIJ65] et on démontre que deux processus A et B ne peuvent pas se trouver simultanément en section critique.

La solution proposée dans [FLC77] est :

```

var inA,inB: boolean initially false
    prty: (A,B) initially A ;

processA: while true do
    <think>
    inA ← true ;
    while inB do
        if prty=B then
            inA ← false ;
            while prty=B do skip od ;
            inA ← true
        fi
    od ;
    <critical section>
    inA ← false ;
    prty ← B
cd

processB: while true do
    <think>
    inB ← true ;
    while inA do
        if prty=A then
            inB ← false ;
            while prty=A do skip od ;
            inB ← true ;
        fi
    od ;
    <critical section>
    inB ← false ;
    prty ← A
od

```

La version non déterministe de ce système parallèle est :

$p1 \leftarrow p2 \leftarrow 1$; $inA \leftarrow inB \leftarrow false$; $prty \leftarrow A$;

```

do
     $p1=1 \rightarrow inA \leftarrow true ; p1 \leftarrow 2$  []
     $p1=2 \wedge inB \rightarrow p1 \leftarrow 3$  []
     $p1=3 \wedge prty=B \rightarrow inA \leftarrow false ; p1 \leftarrow 4$  []
     $p1=4 \wedge prty=B \rightarrow skip$  []
     $p1=4 \wedge prty \neq B \rightarrow inA \leftarrow true ; p1 \leftarrow 2$  []
     $p1=3 \wedge prty \neq B \rightarrow p1 \leftarrow 2$  []
     $p1=2 \wedge \neg inB \rightarrow \langle \text{critical section} \rangle ; p1 \leftarrow 5$  []
     $p1=5 \rightarrow inA \leftarrow false ; p1 \leftarrow 6$  []
     $p1=6 \rightarrow prty \leftarrow B ; p1 \leftarrow 1$  []
od

```

```

p2=1 → inB←true ; p2←2  []
p2=2 ∧ inA → p2←3  []
p2=3 ∧ prty=A → inB←false ; p2←4  []
p2=4 ∧ prty=A → skip  []
p2=4 ∧ prty≠A → inB←true ; p2←2  []
p2=3 ∧ prty≠A → p2←2  []
p2=2 ∧ ¬inA → <critical section> ; p2←5  []
p2=5 → inB←false ; p2←6  []
p2=6 → prty←A ; p2←1

```

od

Pour montrer qu'il y a mutuelle exclusion, il suffit de démontrer que les gardes des sections critiques ne peuvent être vérifiées en même temps. C'est-à-dire qu'il existe un invariant J contenu dans

$$J_0 = \neg[(p_1=2) \wedge (\neg inB) \wedge (p_2=2) \wedge (\neg inA)]$$

et que le système est bien initialisé dans J.

Pour cela calculons itérativement: $J_{k+1} = J_k \wedge \tilde{pre}(J_k)$, $k=0,1,2 \dots$

On a $J_1 = J_0 \wedge \tilde{pre}(J_0) = J_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^8 [\neg c_i \vee \alpha_i J_0]$ où les c_i et α_i sont respectivement les conditions et les actions du CA-système représenté par le programme non-déterministe ci-dessus (on suppose que les indices correspondent à l'ordre d'écriture, par exemple $c_{10} = (p_2=1)$). La solution proposée étant symétrique

pour évaluer $\bigwedge_{i=1}^8 (\neg c_i \vee \alpha_i J_0)$ il suffit d'évaluer $\bigwedge_{i=1}^9 (\neg c_i \vee \alpha_i J_0)$

Remarquons que toute action α_i contenant une affectation du type $p_j \leftarrow j$, $j \neq 2$ on a $\alpha_i J_0 = T$ étant donné que $J_0 = p_1 \neq 2 \vee inB \vee p_2 \neq 2 \vee inA$.

Il reste donc à calculer $\neg c_i \vee \alpha_i J_0$ pour $i = 1,4,5,6$

Pour $i=1$

$$\neg c_1 \vee \alpha_1 J_0 = p_1 \neq 1 \vee (2 \neq 2) \vee inB \vee p_2 \neq 2 \vee T = T$$

Pour $i=4$

$$\neg c_4 \vee \alpha_4 J_0 = \neg c_4 \vee J_0$$

Pour $i=5$

$$\neg c_5 \vee \alpha_5 J_0 = p_1 \neq 4 \vee prty=B \vee inB \vee p_2 \neq 2 \vee T = T$$

Pour $i=6$

$$\neg c_6 \vee \alpha_6 J_0 = p_1 \neq 3 \vee \text{prty}=B \vee \text{inB} \vee p_2 \neq 2 \vee \text{inA} = K$$

Posons $L = p_2 \neq 3 \vee \text{prty}=A \vee \text{inA} \vee p_1 \neq 2 \vee \text{inB}$

On a $J_1 = J_0 \wedge \tilde{\text{pre}}(J_0) = J_0 \wedge K \wedge L$

Calculons $J_2 = J_1 \wedge \tilde{\text{pre}}(J_1) = J_0 \wedge \tilde{\text{pre}}(J_0) \wedge \tilde{\text{pre}}(K) \wedge \tilde{\text{pre}}(L)$

On a $\tilde{\text{pre}}(K) = \bigwedge_{i=1}^{18} (\neg c_i \vee \alpha_i K)$

Remarquons que pour chaque i , $1 \leq i \leq 18$, tel que α_i contient une affectation du type $p_1 \leftarrow j$, $j \neq 3$, $\text{prty} \leftarrow B$, $\text{inB} \leftarrow \text{true}$, $p_2 \leftarrow s$, $s \neq 2$, $\text{inA} \leftarrow \text{true}$, on a $\neg c_i \vee \alpha_i K = \tau$. De plus, lorsque $\alpha_i = \text{skip}$ on a $\neg c_i \vee \alpha_i K = \neg c_i \vee K$ et ce terme est absorbé par $\tilde{\text{pre}}(J_0)$. Donc il reste à évaluer $\neg c_i \vee \alpha_i K$ pour

$$i=2, \neg c_2 \vee \alpha_2 K = p_1 \neq 2 \vee \neg \text{inB} \vee \text{prty}=B \vee \text{inB} \vee p_2 \neq 2 \vee \text{inA} = \tau$$

$$i=15, \neg c_{15} \vee \alpha_{15} K = p_2 \neq 3 \vee \text{prty}=A \vee p_1 \neq 3 \vee \text{prty}=B \vee \text{inB} \vee p_2 \neq 2 \vee \text{inA} = \tau$$

Donc $\tilde{\text{pre}}(K) = \tau$ et par symétrie $\tilde{\text{pre}}(L) = \tau$

Par conséquent le plus grand invariant pour lequel la mutuelle exclusion est respectée est égal à

$$J = J_1 = J_0 \wedge K \wedge L$$

$$J = \text{inA} \vee \text{inB} \vee (p_1 \neq 2) \wedge (p_2 \neq 2) \vee (p_1 \neq 2) \wedge (p_2 \neq 3) \vee (p_2 \neq 2) \wedge (p_1 \neq 3) \vee (p_2 \neq 2) \wedge (\text{prty}=A) \vee (p_1 \neq 2) \wedge (\text{prty}=B)$$

Cet invariant est vérifié pour les valeurs initiales des variables et par conséquent les deux processus accèdent en mutuelle exclusion aux sections critiques.

Remarquons enfin que, contrairement à ce qui est fait dans [FLO77], la mutuelle exclusion a été prouvée sans recourir à une astuce ou intuition quelconque.

Exemple 8 :

Considérons le problème de l'auto-stabilisation d'un ensemble de machines connectées en anneau étudié par Dijkstra [DIJ74]. La première solution proposée peut être décrite par le programme :

$$S = \underline{\text{do}} \ S_0 \ \square \ S_1 \ \square \ \dots \ \square \ S_n \ \underline{\text{od}} \ \text{avec}$$

$$S_0 = (x_0 = x_n \rightarrow x_0 := (x_0 + 1) \bmod n)$$

$$S_i = (x_i \neq x_{i-1} \rightarrow x_i := x_{i-1}) \ , \ 1 \leq i \leq n$$

Commentaire :

On considère le cas où il y a un " démon central". Les x_i représentent les variables d'état des $n+1$ machines et les opérations sur les indices s'effectuent modulo $(n+1)$.

Soient c_i et a_i la condition et l'action respectivement de la i -ème commande gardée et représentons par B_i le monôme $B_i = \neg c_0 \wedge \neg c_1 \dots \wedge \neg c_{i-1} \wedge c_i \wedge \neg c_{i+1} \dots \wedge \neg c_n$. Prouver que la solution proposée est conforme aux spécifications du problème revient à démontrer que :

- $J = \bigvee_{i=0}^n B_i$ est un invariant (sans blocage) c'est-à-dire tout successeur d'un état légal est un état légal.
- Pour tout couple (B_i, B_j) , $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, B_i est contenu dans l'ensemble des prédécesseurs inévitables de B_j . (Ceci implique en particulier que chacun des B_i est 3-variant sous J).
- Le système s'autostabilise : indépendamment de son état initial, il atteint après l'exécution d'un nombre fini de transitions un état légal. (Ceci est équivalent au fait que $\neg J$ est 3-pente sous τ).

On a :

$$B_0 = (x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = x_k = \dots = x_n)$$

$$B_k = (x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} \neq x_k = \dots = x_n), \quad 1 \leq k \leq n$$

Démontrons que $B_i \subseteq (\text{pre}[S_i] \wedge \tilde{\text{pre}}[S_i])(B_{i+1})$; ceci est équivalent à

$$B_i \subseteq (c_i \wedge \alpha_i B_{i+1}) \wedge (\neg c_i \vee \alpha_i B_{i+1}) = c_i \wedge \alpha_i B_{i+1}$$

Pour $i=0$ on a :

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_n \subseteq x_0 + 1 \neq x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Pour $i = k \neq 0$ on a :

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} \neq x_k = \dots = x_n \subseteq x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = x_{k-1} \neq x_{k+1} = \dots = x_n$$

Donc $B_i \subseteq (\text{pre}[S_i] \wedge \tilde{\text{pre}}[S_i])(B_{i+1})$

Les B_i étant disjoints on a :

$$B_i \subseteq (\text{pre}[S] \wedge \tilde{\text{pre}}[S])(B_{i+1})$$

Ceci donne $\bigvee_{i=0}^n B_i \subseteq \bigvee_{i=0}^n (\text{pre}[S] \wedge \tilde{\text{pre}}[S])(B_i) \subseteq (\text{pre}[S] \wedge \tilde{\text{pre}}[S])(\bigvee B_i)$

La dernière relation prouve que J est un invariant sans blocage. De plus, les relations $B_i \subseteq (\text{pre}[S] \wedge \tilde{\text{pre}}[S])(B_{i+1})$ pour $0 \leq i \leq n$ prouvent que si le système est initialisé à un état vérifiant B_i alors il parcourt cycliquement des états vérifiant successivement $B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_0, B_1, \dots$ pour atteindre un état vérifiant B_i après $n+1$ transitions. Donc chaque B_i est 3-variant sous J .

Pour démontrer que $\neg J$ est une 3-pente sous T il faut démontrer que la plus grande trajectoire contenue dans $\neg J$ est $\perp ((I \wedge \text{pre}[S])^X (\neg J) = \perp)$. Le calcul de $(I \wedge \text{pre}[S])^X (\neg J)$ à la main pose des problèmes de simplification et de manipulation de prédicats non triviaux.

III.5. - DERIVATION DE SYSTEMES CORRECTS

M. Sintzoff et A. van Lamsweerde [LAM76] [LAM78] [SIN78] ont travaillé sur le problème de la dérivation, à partir d'un système parallèle donné, décrit par un programme non déterministe, un système "compatible" avec le précédent et qui de plus satisfait une ou plusieurs propriétés caractéristiques d'un fonctionnement correct. Dans notre langage ce problème de l' "amélioration" des programmes peut être exprimé de la façon suivante :

" Etant donné un CA-système $S=(V,C,A)$, $|C|=m$ et une propriété P , trouver un CA-système $S'=(V,C',A)$ tel que

a/ $c'_i \subseteq c_i \quad i=1,2,\dots,m$ (ce qui veut dire que S contient S')

b/ S' satisfait la propriété P

c/ Les c'_i sont maximums (ou maximaux) pour les contraintes a/ et b/. "

Ce problème se pose lorsque en modélisant un système on ne trouve pas directement le modèle qui le représente effectivement. Si donc on sait que le système modélisé doit satisfaire une propriété P et ce n'est pas le cas pour le modèle trouvé S , on peut se demander comment il faut renforcer les conditions de S pour trouver un modèle S' "proche" de S qui satisfait P . Ce problème a été étudié dans les cas où P correspond aux propriétés "S' ne se bloque pas totalement" [LAM76] (S' est 1-s-activable), "S' se termine toujours" [LAM78] (S' est 3-blocable) et "S' est sans coalition" [LAM76] (S' est 3-s-coactivable).

A titre d'application, nous étudions ici le cas où le CA-système S' est 1-s-activable. S' doit avoir un invariant sans blocage J . D'où les relations :

- $c'_i \in \alpha_i J, i = 1, 2, \dots, m$ (J est invariant de S')
- $J \in \text{pre}[S'](J)$ (J est trajectoire sans fin de S')
- $c'_i \in c_i, i = 1, 2, \dots, m$

Les conditions c'_i et J sont solutions du système itératif

$$c'_{i_{k+1}} = c'_{i_k} \wedge c_i \wedge \alpha_i J_k$$

$$J_{k+1} = J_k \wedge \text{pre}[S'](J_k) = J_k \wedge \left(\bigvee_{i=1}^m c'_{i_k} \wedge \alpha_i J_k \right)$$

Remarquons que $J \in \bigvee_{i=1}^m c'_i$ étant donné que J est un invariant sans blocage de S' ,

donc $J \in \bigvee_{i=1}^m c_i$. Pour trouver la plus grande solution de ce système on itère

en prenant

$$c'_{i0} = c_i \text{ pour } i=1, 2, \dots, m, \text{ et } J_0 = \bigvee_{i=1}^m c_i$$

On a :

$$c'_{i1} = c_i \wedge \alpha_i \left(\bigvee_{i=1}^m c_i \right)$$

$$J_1 = \left(\bigvee_{i=1}^m c_i \right) \wedge \text{pre}[S'] \left(\bigvee_{i=1}^m c_i \right) = \text{pre}[S'] \left(\bigvee_{i=1}^m c_i \right)$$

En utilisant les propriétés du paragraphe III.2. on trouve

$$c'_{i2} = c_i \wedge \alpha_i \left(\text{pre}[S'] \left(\bigvee_{i=1}^m c_i \right) \right)$$

$$J_2 = \text{pre}^2[S'] \left(\bigvee_{i=1}^m c_i \right)$$

On peut montrer par induction que

$$c'_{i_{k+1}} = c_i \wedge \alpha_i ((\text{pre}[S])^k (\bigvee_{i=1}^m c_i))$$

$$J_{k+1} = (\text{pre}[S])^{k+1} (\bigvee_{i=1}^m c_i)$$

Donc J est égal à la plus grande trajectoire sans fin de S et $c'_i = c_i \wedge \alpha_i J$ pour $i=1,2,\dots,m$. D'où la proposition :

Proposition 3 :

Etant donné un CA-système $S=(V,C,A)$, $|C|=m$, le plus grand CA-système $S'=(V,C',A)$ contenu dans S et qui est 1-s-activable à partir de $\bigvee_{i=1}^m c_i$ est défini par $c'_i = c_i \wedge \alpha_i J$ où J est la plus grande trajectoire sans fin de S.

III.6. - EXEMPLES D'APPLICATION AUX RESEAUX DE PETRI

Nous appliquons ci-dessous les méthodes proposées au deuxième chapitre à des CA-systèmes qui représentent des réseaux de Petri. Nous montrons à travers ces exemples comment ces méthodes peuvent être simplifiées lorsqu'elles sont appliquées à des CA-systèmes particuliers. Aussi, nous estimons que la présentation de ces exemples donne au lecteur la possibilité d'apprécier les différences entre les méthodes d'application générale et les méthodes propres aux réseaux de Petri présentées dans les chapitres suivants.

Exemple 9 :

Soit le CA-système $S=(V,C,A)$, $V=\{v_i\}_{i=1}^5$, $C=\{c_i\}_{i=1}^4$, $A=\{a_i\}_{i=1}^4$, domaine des $v_i = \mathbb{N}$, avec

$$c_1 = \{v_1 > 0\}, c_2 = \{v_2 > 0\}, c_3 = \{v_1 > 0\} \wedge \{v_5 > 0\},$$

$$c_4 = \{v_3 > 0\} \wedge \{v_4 > 0\}$$

$$a_1 = \{v_1 := v_1 - 1, v_2 := v_2 + 1, v_3 := v_3 + 1\}$$

$$a_2 = \{v_1 := v_1 + 1, v_2 := v_2 - 1\}$$

$$a_3 = \{v_1 := v_1 - 1, v_4 := v_4 + 1, v_5 := v_5 - 1\}$$

$$a_4 = \{v_1 := v_1 + 1, v_3 := v_3 - 1, v_4 := v_4 - 1, v_5 := v_5 + 1\}$$

On étudie ce système - qui est en fait un réseau de Petri - pour les fonctionnements tels que $v_i \leq 1$, $i=1,2,3,4,5$. On représente par x_i et $\overline{x_i}$ les prédicats $v_i=1$ et $v_i=0$ respectivement. Par hypothèse, le système a un invariant qui est $J = \bigwedge_{i=1}^5 (x_i \vee \overline{x_i})$ ce qui nous permet de renforcer les conditions c_i en calculant des nouvelles conditions c'_i , $c'_i = c_i \wedge \alpha_i$]

$$\begin{aligned} c'_1 &= x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \\ c'_2 &= x_2 \overline{x_1} \\ c'_3 &= x_1 x_5 \overline{x_4} \\ c'_4 &= x_3 \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_5} \end{aligned}$$

Calculons la plus grande trajectoire sans fin

$$\begin{aligned} \text{pre}^4(\bigvee_{i=1}^4 c'_i) &= x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} x_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_5} \\ \text{pre}^2(\bigvee_{i=1}^4 c'_i) &= x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \\ &\quad \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \\ &\quad \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \\ \text{pre}^3(\bigvee_{i=1}^4 c'_i) &= \text{pre}^4(\bigvee_{i=1}^4 c'_i) = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \\ &\quad \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \\ &\quad \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \end{aligned}$$

Cette dernière expression représente la plus grande trajectoire sans fin de S lorsqu'on ne considère que les fonctionnements tels que $v_i \leq 1$ $i=1,2,3,4,5$. On peut renforcer les conditions c'_i pour obtenir un système sans blocage total (proposition 3). Les conditions c''_i de ce système sont :

$$\begin{aligned} c''_1 &= c'_1 (\overline{x_4} x_5 \vee x_4 \overline{x_5}) \\ c''_2 &= c'_2 x_5 (\overline{x_3} \vee x_4) \end{aligned}$$

$$c''_3 = c'_3(x_2 \vee x_3)$$

$$c''_4 = c'_4$$

Remarque :

Pour le cas des réseaux de Petri dont les variables sont bornées par 1 on peut systématiser les calculs en introduisant une "opération" * sur les x_i telle que $x_i * x_i = 1$, $\overline{x_i} * \overline{x_i} = 1$, $x_i * \overline{x_i} = x_i$, $\overline{x_i} * x_i = \overline{x_i}$. Si on veut par exemple calculer $c_1 \wedge \alpha_1 P$ avec $c_1 = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}$, $P = \overline{x_1} x_2 x_4$ il suffit de calculer

$$(x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}) * (\overline{x_1} x_2 x_4) = (x_1 * \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_2} * x_2) \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$$

Exemple 10 :

Considérons le CA-système $S=(V,C,A)$, $V=\{v_i\}_{i=1}^4$, $C = \{c_i\}_{i=1}^5$, $A = \{a_i\}_{i=1}^5$,
 domaine des $v_i = \mathbb{N}$, avec

$$c_1 = (v_1 > 0) \wedge (v_2 > 0), c_2 = (v_2 > 0), c_3 = (v_1 > 0)$$

$$c_4 = (v_3 > 0), c_5 = (v_4 > 0)$$

$$a_1 = \{v_1 := v_1 - 1, v_2 := v_2 - 1, v_3 := v_3 + 1, v_4 := v_4 + 1\}$$

$$a_2 = \{v_1 := v_1 + 1, v_2 := v_2 - 1\}$$

$$a_3 = \{v_1 := v_1 - 1, v_2 := v_2 + 1\}$$

$$a_4 = \{v_2 := v_2 + 1, v_3 := v_3 - 1\}$$

$$a_5 = \{v_1 := v_1 + 1, v_4 := v_4 - 1\}$$

S est représenté par le réseau de Petri de la figure 3, chapitre V. Il est facile de prouver à partir du réseau que S est 1-s-blocable à partir de tout état initial, c'est-à-dire que le plus grand invariant sans blocage de S est égal à 1. On peut cependant, en utilisant le résultat de la proposition 3, trouver un CA-système 1-s-activable contenu dans S. Considérons comme pour l'exemple précédent les fonctionnements de S tels que les $v_i \leq 1$ et renforçons les conditions c_i pour obtenir les conditions c'_i :

$$c'_1 = x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4}, c'_2 = x_2 \overline{x_1}, c'_3 = \overline{x_1} x_2, c'_4 = x_3 \overline{x_2}, c'_5 = x_4 \overline{x_1}$$

La plus grande trajectoire sans fin:

$$\text{pre} \left(\bigvee_{i=1}^5 c'_i \right) = \text{pre}^2 \left(\bigvee_{i=1}^5 c'_i \right) = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_4$$

Le plus grand CA-système 1-s-activable contenu dans S est $S''=(V,C'',A)$ avec

$$\begin{aligned} c''_1 &= x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} = c'_1 \\ c''_2 &= x_2 \overline{x_1} = c'_2 \\ c''_3 &= x_1 \overline{x_2} = c'_3 \\ c''_4 &= x_3 \overline{x_2} (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) = c'_4 (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) \\ c''_5 &= x_4 \overline{x_1} (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) = c'_5 (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}). \end{aligned}$$

Exemple 11 :

Soit le CA-système $S=(V,C,A)$, $V=\{v_i\}_{i=1}^5$, $C=\{c_i\}_{i=1}^4$, $A=\{a_i\}_{i=1}^4$, domaine des $v_i=\{0,1\}$. Si on représente par $x_i, \overline{x_i}$ les prédicats ($v_i=1$) et ($v_i=0$), les c_i sont définis par :

$$c_1 = x_1 \overline{x_2} \overline{x_4}, c_2 = x_4 \overline{x_1} \overline{x_2}, c_3 = x_2 \overline{x_3} \overline{x_5}, c_4 = x_5 \overline{x_2} \overline{x_3}$$

Les a_i sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= \{x_1 := x_1 - 1, x_2 := x_2 - 1, x_4 := x_4 + 1\} \\ a_2 &= \{x_1 := x_1 + 1, x_2 := x_2 + 1, x_4 := x_4 - 1\} \\ a_3 &= \{x_2 := x_2 - 1, x_3 := x_3 - 1, x_5 := x_5 + 1\} \\ a_4 &= \{x_2 := x_2 + 1, x_3 := x_3 + 1, x_5 := x_5 - 1\} \end{aligned}$$

S est utilisé pour contrôler l'accès à une ressource de deux processus en mutuelle exclusion. Il y a mutuelle exclusion si la contrainte $\overline{x_4} \vee \overline{x_5}$ est vérifiée. Le plus grand invariant J sous lequel on a mutuelle exclusion est égal à $\neg \text{pre}^*(\neg(\overline{x_4} \vee \overline{x_5}))$. On a

$$\text{pre}^*(\overline{x_4} \vee \overline{x_5}) = x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5}$$

Donc

$$J = (\overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

Remarquons que $\text{pre}(\bigvee_{i=1}^4 c_i) = \bigvee_{i=1}^4 c_i$. Donc, le plus grand invariant sans blocage est égal à $J_{sb} = \bigvee_{i=1}^4 c_i$ et le plus grand invariant sous lequel le système est 1-s-activable et la mutuelle exclusion est respectée est égal à

$$J \wedge J_{sb} = x_1 x_2 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 .$$

III.7. - CONCLUSIONS

Il a été montré dans le chapitre précédent que le problème de la vérification des propriétés des systèmes se ramène au problème du calcul de points fixes de fonctions monotones. Ces points fixes peuvent être calculés itérativement, le seul critère d'arrêt des itérations étant la stabilisation. L'application de ces méthodes en pratique soulève un certain nombre de problèmes dont les plus importants sont celui de la manipulation, simplification et comparaison de prédicats sur plusieurs variables. A ces difficultés s'ajoute le fait qu'il n'existe généralement pas de critère garantissant la convergence des itérations ni de notion d'approximation permettant d'apprécier l'écart entre le résultat de la i-ème itération et le point fixe approché.

Tous ces problèmes rendent l'utilisation de ces méthodes de vérification difficile même pour des systèmes "simples". C'est pourquoi nous estimons que dans l'état actuel des choses l'apport essentiel de ce travail est plutôt l'approfondissement des concepts fondamentaux et des propriétés des systèmes que des méthodes de vérification exploitables en pratique.

Il faut enfin insister sur la généralité des résultats présentés au chapitre II ; ils peuvent être appliqués pour l'analyse des descriptions d'un système discret S à condition de pouvoir exprimer les fonctions $\text{pre}[S]$ et $\text{post}[S]$ à partir de ces descriptions. Dans [GUE79] on montre comment ces résultats peuvent être utilisés pour étudier et analyser sémantiquement des programmes non-déterministes.

CHAPITRE IV

LES RESEAUX DE PETRI EN TANT QUE CONTROLEURS

IV.1.	RESEAUX DE PETRI ORDINAIRES	
IV.1.1.	Définition -----	2
IV.1.2.	Réseaux de Petri particuliers -----	3
IV.1.3.	Règles de fonctionnement d'un RdP -----	4
IV.2.	PRINCIPALES EXTENSIONS DES RdP	
IV.2.1.	Réseaux de Petri à arcs inhibiteurs (RdPZ) -----	5
IV.2.2.	Réseaux de Petri Généralisés (RdPG) -----	6
IV.2.3.	Réseaux de Petri à Priorité (RdPP) -----	6
IV.2.4.	Réseaux de Petri à Priorité Élémentaire (RdPPE)-----	7
IV.2.5.	Réseaux de Petri à contraintes d'Exclusion (RdPEX)-----	7
IV.3.	COMPARAISON DES EXTENSIONS DES RdP	
IV.3.1.	Réseaux de Petri étiquetés -----	8
IV.3.2.	Proposition 1 -----	9
IV.3.3.	Proposition 2 -----	11
IV.3.4.	Proposition 3 -----	16
IV.3.5.	Proposition 4 -----	18
IV.3.6.	Conclusion -----	19
IV.4.	RESEAUX DE PETRI ET CONTROLEURS A COMMANDES GARDEES	
IV.4.1.	Réseaux de Petri à contraintes d'exclusion et IA-systèmes---	20
IV.4.2.	Contraintes synchroniques et contraintes d'exclusion-----	23

CHAPITRE IV

PRESENTATION

Les différentes extensions des réseaux de Petri sont présentées et leur puissance de description en tant que contrôleurs comparée. En particulier, deux nouvelles extensions sont introduites qui ont été utilisées l'une pour l'étude des réseaux de Petri non autonomes et l'autre pour la comparaison des réseaux de Petri aux IA-systèmes. Cette dernière extension est également utilisée pour démontrer que tout CA-système possède un invariant caractéristique et par conséquent il est représentable par un IA-système.

IV.1. RESEAUX DE PETRI ORDINAIRES

IV.1.1. Définition

Un réseau de Petri est un quadruplet $R = (P, T, \alpha, \beta)$ tel que :

P = ensemble d'objets appelés places, $P \neq \emptyset$.

T = ensemble d'objets appelés transitions, $T \neq \emptyset$ et $P \cap T = \emptyset$

$\alpha \subseteq P \times T$ = relation d'incidence avant

$\beta \subseteq T \times P$ = relation d'incidence arrière.

Représentation :

On représente un RdP par un graphe biparti orienté. Les noeuds du graphe sont les places et les transitions, représentées respectivement par des cercles et des barres (figure 1). Il y a un arc de la place p_s à la transition t_j ssi $(p_s, t_j) \in \alpha$. De même, il y a un arc de la transition t_r à la place p_w ssi $(t_r, p_w) \in \beta$.

Conventions de notation :

Les notations suivantes sont adoptées

a) $t \in T$, $\cdot t = \{p \in P \mid (p, t) \in \alpha\}$

$\cdot t$ est dit ensemble des places d'entrée de t .

b) $t \in T$, $t \cdot = \{p \in P \mid (t, p) \in \beta\}$

$t \cdot$ est dit ensemble des places de sortie de t .

c) $p \in P$, $\cdot p = \{t \in T \mid (t, p) \in \beta\}$

$\cdot p$ est dit ensemble des transitions d'entrée de p .

d) $p \in P, p^* = \{t \in T \mid (p, t) \in \alpha\}$

p^* est dit ensemble des transitions de sortie de p.

IV.1.2. Réseaux de Petri particuliers

Un réseau de Petri pur est un RdP tel que :

$$\forall t_i \in T \quad {}^*t_i \cap t_i^* = \emptyset$$

autrement dit, aucune transition n'a une place d'entrée qui est en même temps place de sortie.

Un réseau de Petri simple est un RdP tel que :

$$\forall t_i \in T, \left| \bigcup_{t_j \in T, j \neq i} ({}^*t_i \cap {}^*t_j) \right| \leq 1$$

autrement dit, tel que toute transition a au plus une place d'entrée qui est partagée avec d'autres transitions.

Un réseau de Petri libre choix est un RdP tel que :

$$\forall p \in P, \text{ si } |p^*| > 1 \text{ alors } \forall t_i \in p^* \quad |{}^*t_i| = 1$$

autrement dit, tel que si deux transitions t_i et t_j ont en commun une place d'entrée p alors p est la seule place d'entrée de t_i et t_j .

Un graphe marqué est un RdP tel que :

$$\forall p \in P, |{}^*p| \leq 1 \text{ et } |p^*| \leq 1$$

autrement dit, tel que toute place a au plus une transition d'entrée et une transition de sortie.

Un graphe d'état est un RdP tel que :

$$\forall t \in T, |{}^*t| \leq 1 \text{ et } |t^*| \leq 1$$

autrement dit, tel que toute transition a au plus une place d'entrée et une place de sortie.

IV.1.3. Règles de fonctionnement d'un RdP

Etant donné un RdP $R = (P, T, \alpha, \beta)$, on définit un marquage M de R comme étant une application de P dans \mathbb{N} . (\mathbb{N} étant l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \dots$).

Dans le cas où R a un nombre fini de places, $|P| = n$, un marquage M de R est défini par la donnée d'un vecteur de \mathbb{N}^n . On note :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{et } m_i = M(p_i)$$

Sur le graphe associé à R , on peut alors représenter un marquage M par une distribution, dans les places, d'objets appelés marques. Une marque est représentée par un point et chaque place p_i contiendra m_i marques (figure 1).

$$\alpha = \{(p_1, t_1), (p_3, t_1), (p_2, t_2), (p_4, t_3), (p_5, t_4), (p_6, t_5), (p_7, t_6), (p_8, t_6)\}$$

$$\beta = \{(t_1, p_2), (t_2, p_1), (t_1, p_4), (t_3, p_5), (t_3, p_6), (t_4, p_7), (t_5, p_8), (t_6, p_3)\}$$

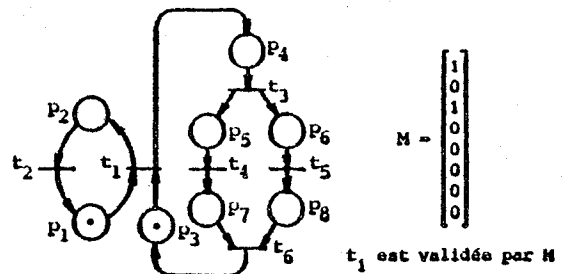


Figure 1

Une transition t de R est dite tirable ou validée par le marquage M ssi :

$$\forall p \in {}^*t, \text{ on a } M(p) \geq 1$$

autrement dit, ssi toute place d'entrée de t contient au moins une marque.

Soient M l'ensemble des marquages d'un RdP R , et t une transition de R . On définit la mise à feu de t comme étant l'opération qui à un marquage $M_i \in M$ fait correspondre le marquage M_j tel que :

$$\forall p \in P, M_j(p) = \begin{cases} M_i(p)-1 & \text{si } p \in {}^*t-(^*t \text{ n } t^*) \\ M_i(p)+1 & \text{si } p \in t^*-(^*t \text{ n } t^*) \\ M_i(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $MAF_t(M_i) = M_j$. L'opération MAF_t est définie seulement pour les marquages M qui valident t .

Sur la représentation graphique associée à R avec un marquage M , l'opération MAF_t consiste à enlever une marque de toute place d'entrée de t et à déposer une marque dans toute place de sortie de t . Cette opération n'est possible que si chaque place d'entrée de t contient au moins une marque.

Définition 8 :

On désigne par T^* le monoïde libre construit sur l'ensemble T des transitions d'un RdP R . Soient $\sigma = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_s}$, $\sigma \in T^*$, et M_0 un marquage de R . On dira que σ est une séquence de simulation ou séquence de mises à feu à partir de M_0 ssi il existe une suite de marquages M_1, M_2, \dots, M_s telle que $MAF_{t_{i_j}}(M_{j-1}) = M_j$ $\forall j = 1, 2, \dots, s$.

On note $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_s$. M_s est le marquage atteint par application de σ à partir de M_0 .

La séquence $\sigma = \lambda$, λ mot vide de T^* , est dite séquence de simulation vide. On note $M_0 \xrightarrow{\lambda} M_0$.

On appelle classe des marquages successeurs de M_0 l'ensemble

$$\vec{M}_0 = \{M \in M \mid \exists \sigma \in T^* \text{ et } M_0 \xrightarrow{\sigma} M\}$$

IV.2. PRINCIPALES EXTENSIONS DES RdP

IV.2.1. Réseaux de Petri à Arcs Inhibiteurs (RdPZ) [AGE73]

Un RdPZ est un doublet $R_Z = (R, I)$ tel que :

R est un RdP (P, T, α, β) et

$I \subseteq P \times T$ est un ensemble d'arcs inhibiteurs, $I \cap \alpha = \emptyset$.

Règles de fonctionnement :

Sur la représentation graphique associée à un RdPZ, on distinguera les arcs inhibiteurs des arcs ordinaires dans R en plaçant un petit cercle aux extrémités incidentes aux transitions (voir exemple sur figure 2).

Une transition t est validée par un marquage M ssi chaque place d'entrée reliée à t par un arc ordinaire contient au moins une marque et chaque place d'entrée reliée à t par un arc inhibiteur est vide. L'opération mise à feu de t est définie pour M ssi M valide t , et son exécution consiste à enlever une marque de toute place d'entrée reliée par un arc ordinaire et à déposer une marque dans toute place de sortie.

IV.2.2. Réseaux de Petri Généralisés (RdPG) [HAC75]

Un RdPG est un doublet $R_G = (R, \varphi)$ tel que :

R est un RdP (P, T, α, β) et

φ est une application de l'ensemble $U = \alpha \cup \beta$ des arcs de R dans $\mathbb{N} - \{0\}$.

Sur la représentation graphique associée à un RdPG, chaque arc $u \in U$ porte comme renseignement la valeur $\varphi(u)$. Cette valeur est appelée poids de l'arc (voir exemple sur figure 3).

Règles de fonctionnement :

Une transition t est validée par un marquage M ssi chacune de ses places d'entrée contient un nombre de marques au moins égal au poids de l'arc qui la connecte à t . L'opération mise à feu de t est définie pour M ssi M valide t . Son exécution consiste alors à enlever de chaque place d'entrée un nombre de marques égal au poids de l'arc qui la connecte à t et à déposer dans chaque place de sortie un nombre de marques égal au poids de l'arc qui la connecte à t .

IV.2.3. Réseaux de Petri à Priorité (RdPP) [HACK75]

Un RdPP est un doublet $R_P = (R, O)$ tel que :

R est un RdP (P, T, α, β) et

O est une relation d'ordre sur T .

Si $(t, t') \in O$, on dira que t est plus prioritaire que t' .

Règles de fonctionnement :

Une transition t est validée par un marquage M ssi chacune de ses places d'entrée contient au moins une marque. L'opération mise à feu de t est définie pour M ssi M valide t et ne valide aucune transition plus prioritaire. Son exécution s'effectue comme pour les RdP.

IV.2.4. Réseau de Petri à Priorité Élémentaire (RdPPE) [MOA78]

Un RdPPE est un RdPP (R, O) tel que O définit deux classes de transitions non comparables T_λ et T_0 avec : $T_\lambda \cup T_0 = T$, et

$$(t_\lambda, t_0) \in T_\lambda \times T_0 \iff (t_\lambda, t_0) \in O, t_\lambda \neq t_0$$

IV.2.5. Réseaux de Petri à contraintes d'exclusion (RdPEX) [SIF78]

Un RdPEX est un doublet $R_{ex} = (R, \xi)$ tel que :

R est un RdP (P, T, α, β) et

ξ est une relation symétrique, non réflexive, $\xi \subseteq P \times P$.

Sur la représentation graphique associée à un RdPEX, on représentera la relation ξ par des arcs entre les places (voir exemple sur figure 7).

Règles de fonctionnement :

La relation ξ représente une contrainte de mutuelle exclusion qui doit être respectée aussi bien par le marquage initial que par tout marquage successeur de ce marquage : $(p_i, p_j) \in \xi \implies p_i$ et p_j ne peuvent pas être marquées par le même marquage M . Autrement dit pour tout marquage M , $M(p_i) * M(p_j) = 0$. Une transition t_i est validée par un marquage M si elle est validée dans R et le marquage M' , $M \xrightarrow{t_i} M'$, respecte la contrainte de mutuelle exclusion donnée par ξ . Les mises à feu des transitions validées s'effectuent comme pour les RdP ordinaires.

Remarque 1 :

Les RdP et leurs extensions sont des CA-systèmes particuliers dont les variables sont définies dans \mathbb{N} et les actions sont des incréments et décréments par des entiers. Leurs conditions sont des prédicats particuliers construits à

partir de prédicats portant sur une seule variable du type $(v_i > 0)$ ou $(v_i = 0)$.

Dans ce qui suit, la dénomination RdP sera utilisée pour désigner un réseau quelconque appartenant à l'une des classes définies ci-dessus. On utilisera la dénomination explicite RdP ordinaire pour désigner un réseau répondant à la définition primitive donnée en IV.1.1.

IV.3. COMPARAISON DES EXTENSIONS DES RdP

Dans ce paragraphe, nous comparons la puissance de description des différentes extensions des RdP lorsqu'elles sont utilisées en tant que contrôleurs. On représentera un contrôleur construit à partir d'un RdP, par un RdP dont les transitions sont étiquetées pour les éléments d'un vocabulaire V ; ces éléments correspondent à des noms d'actions de l'environnement contrôlé.

IV.3.1. Réseaux de Petri étiquetés

Définition :

Un RdP étiqueté est un triplet (R, V, f) où :

R est un RdP,

V est un vocabulaire, et

f est une application de l'ensemble T des transitions de R dans $V \cup \{\lambda\}$ où

λ est le mot vide du monoïde libre V^* construit sur V .

Remarque 2 :

Tout RdP peut être considéré comme étant étiqueté de façon triviale en prenant $V = T$ et $f =$ application identité.

Remarque 3 :

Etant donné $f : T \rightarrow V$, on notera par f^* l'extension naturelle de f , $f^* : T^* \rightarrow V^*$, définie de la façon suivante : si $t \in T$, $\alpha \in T^*$ et λ_1 est le mot vide de T^*

on a $f^*(t\sigma) = f(t) f^*(\sigma)$ et $f^*(\lambda_1) = \lambda$.

Définition :

Soient $R_E = (R, V, f)$ un RdP étiqueté et M un marquage de R . On note par $L_\sigma(R_E, M)$ l'ensemble des séquences de mise à feu de R_E à partir de M . ($L_\sigma(R_E, M) = L_\sigma(R, M)$). Le langage généré par R_E à partir de M , que l'on note par $L_V(R_E, M)$ est le sous-ensemble de V^* défini par :

$$L_V(R_E, M) = \{f^*(\sigma) \mid \exists \sigma \in L_\sigma(R_E, M)\}$$

Définition :

Soient $R_{E1} = (R_1, V_1, f_1)$ et $R_{E2} = (R_2, V_2, f_2)$ deux RdP étiquetés. On dira que R_{E1} réalise R_{E2} ssi pour tout marquage M_2 de R_2 il existe un marquage M_1 de R_1 tel que : $L_V(R_{E1}, M_1) = L_V(R_{E2}, M_2)$.

Définition :

On dira que deux RdP étiquetés R_{E1} et R_{E2} sont équivalents ssi chacun des deux réseaux réalise l'autre.

IV.3.2. Proposition 1

Etant donné un RdPZ R_Z (considéré comme étant étiqueté de façon triviale), on peut toujours construire un RdPPE étiqueté R_E qui le réalise.

Démonstration :

Un arc inhibiteur (p, t) dans un RdPZ représente la condition que la transition t ne peut être validée par un marquage M que si le test $\langle \text{place } p \text{ vide pour } M \rangle$ est vrai. Ce test peut être transformé en $\langle \text{place } \bar{p} \text{ contient une marque?} \rangle$ si l'on peut garantir la propriété de "complémentarité" suivante : pour tout marquage de départ M_0 et pour tout marquage successeur $M \in \vec{M}_0$ pour lesquels l'opération MAF_t est définie, \bar{p} contient une marque ssi p est vide.

Ce principe est appliqué pour la construction du RdPPE étiqueté R_E qui réalise le RdPZ R_Z . Si $R_Z = (R_Z, I)$ avec $R_Z = (P, T, \alpha, \beta)$, alors $R_E = (R_e, V_e, f_e)$ avec $R_e = ((P_e, T_e, \alpha_e, \beta_e), O)$ construit selon les règles suivantes :

- $r_1)$ $\forall p \in P \Rightarrow p \in P_e$
- $r_2)$ $\forall t \in T \Rightarrow t \in T_e$
- $r_3)$ $\forall (p, t) \in \alpha \Rightarrow (p, t) \in \alpha_e$
- $r_4)$ $\forall (t, p) \in \beta \Rightarrow (t, p) \in \beta_e$
- $r_5)$ pour toute place $p \in P$ de laquelle est issu un arc inhibiteur $(p, t) \in I$, on crée une place \bar{p} et une transition $t_{\lambda p}$ telles que :
 - $\bar{p} \in P_e, t_{\lambda p} \in T_e, (p, t_{\lambda p}) \in \alpha_e, (\bar{p}, t_{\lambda p}) \in \alpha_e, (t_{\lambda p}, p) \in \beta_e$
 - $\forall t_i \in T, (p, t_i) \in \alpha \Rightarrow (t_i, \bar{p}) \in \beta_e$
 - $\forall t_j \in T, (p, t_j) \in I \Rightarrow (\bar{p}, t_j) \in \alpha_e, (t_j, \bar{p}) \in \beta_e$
- $r_6)$ $(t_i, t_j) \in O, t_i \neq t_j \Leftrightarrow t_i \in T_e - I$ et $t_j \in I$
- $r_7)$ $V_e = T$
- $r_8)$ $\forall t \in T_e, f_e(t) = t$ si $t \in T$ et λ sinon.

Cette construction est illustrée par la figure 2.

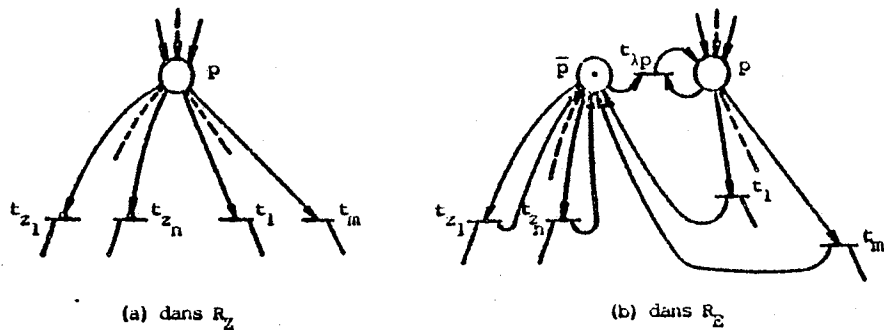


Figure 2

Soient M l'ensemble des marquages de R_Z et M_e l'ensemble des marquages de R_E .
On définit l'application $g : M \rightarrow M_e$ telle que :

si $g(M) = M_e$ alors $\forall p_i \in P, M_e(p_i) = M(p_i)$
 $\forall \bar{p}_j \in P_e - P, M_e(\bar{p}_j) = 0$ si $M(p_j) > 0$ et 1 sinon.

Les déductions suivantes sont triviales :

- d1) $\forall t \in T$, si t est validée par M_0 dans R_Z alors t est validée par
 $M_{e_0} = g(M_0)$ dans R_E .
- d2) si $MAF_t(M_i) = M_j$ dans R_Z alors $MAF_t(g(M_i)) = M'_j$ dans R_E tel qu'il existe
une séquence de simulation unique (à une permutation près)
 $\sigma = t_{\lambda p_1} t_{\lambda p_2} \dots t_{\lambda p_r}, t_{\lambda p_i} \in T_e - T$, telle que :
- $M'_{e_j} \xrightarrow{\sigma} M_{e_j} = g(M_j)$,
- aucune transition $t_{\lambda p} \in T_e - T$ n'est validée par M_{e_j} .
- d3) si R_Z est borné (resp. vivant) pour M_0 alors R_E est borné (resp. vivant)
pour $M_{e_0} = g(M_0)$.
- d4) si R_Z est persistant pour M_0 alors R_E est persistant pour $M_{e_0} = g(M_0)$.
- d5) $L_V(R_E, M_{e_0}) = L_V(R_Z, M_0)$.

IV.3.3. Proposition 2

Etant donné un RdPG R_G (considéré comme étant étiqueté de façon triviale), on
peut toujours construire un RdPPE étiqueté R_E qui le réalise.

Démonstration :

Soit $R_G = (R_g, \varphi)$ avec $R_g = (P, T, \alpha, \beta)$. On considère le réseau R_e obtenu à partir
de R_G en effectuant pour chaque place p les deux transformations illustrées en
figure 3 et figure 4.

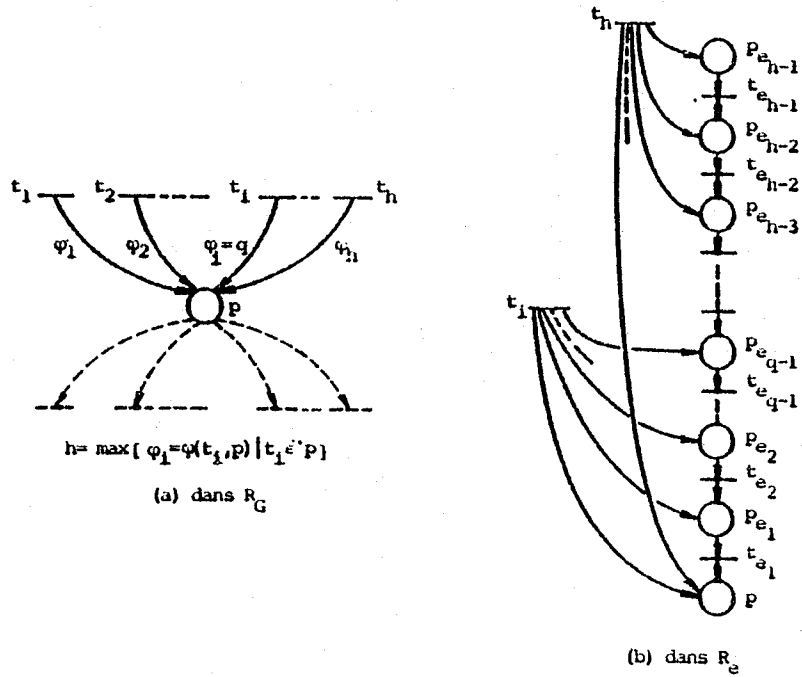


Figure 3

La transformation en figure 3 introduit $h-1$ places $p_{e_1}, p_{e_2}, \dots, p_{e_{h-1}}$ et $h-1$ transitions $t_{e_1}, t_{e_2}, \dots, t_{e_{h-1}}$ avec $h = \max \{ \varphi_i = \varphi(t_i, p) \mid t_i \in \cdot p \}$.
 Chaque transition t_{e_j} a comme place d'entrée p_{e_j} et comme place de sortie $p_{e_{j-1}}$ pour $j = 1, 2, \dots, h-1$ en prenant $p_{e_0} = p$. Pour toute transition $t_i \in \cdot p$, si $\varphi(t_i, p) = q$ alors l'arc (t_i, p) dans R_G est remplacé par q arcs connectant t_i aux places $p, p_{e_1}, p_{e_2}, \dots, p_{e_{q-1}}$.

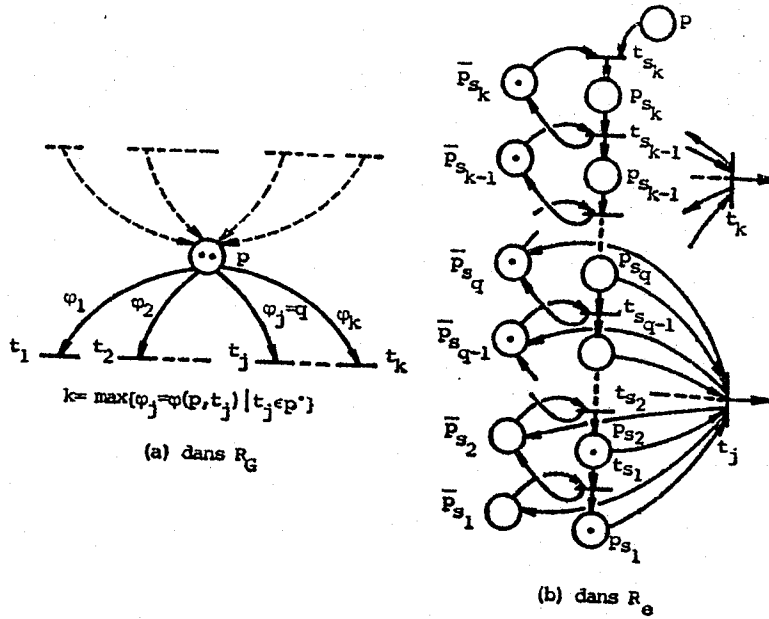


Figure 4

La transformation en figure 4 introduit $2k$ places $p_{s_1}, \bar{p}_{s_1}, p_{s_2}, \bar{p}_{s_2}, \dots, p_{s_k}, \bar{p}_{s_k}$ et k transitions $t_{s_1}, t_{s_2}, \dots, t_{s_k}$ avec $k = \max \{ \varphi_j = \varphi(p, t_j) \mid t_j \in p' \}$. Ces transitions sont connectées de façon que $t_{s_j} = \{ \bar{p}_{s_j}, p_{s_{j+1}} \}$ et $t_{s_j} = \{ p_{s_j}, \bar{p}_{s_{j+1}} \}$ pour $j = 1, 2, \dots, k-1$. La transition t_{s_k} a comme places d'entrée p et \bar{p}_{s_k} , et comme place de sortie p_{s_k} . Pour toute transition $t_j \in p'$ dans R_G , si $\varphi(p, t_j) = q$ alors l'arc (p, t_j) de R_G est remplacé par q arcs connectant les places $p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_q}$ à t_j et q arcs connectant t_j aux places $\bar{p}_{s_1}, \bar{p}_{s_2}, \dots, \bar{p}_{s_q}$.

Soit $R_E = ((R_e, O), V_e, f_e)$ le RdPPE étiqueté défini tel que :

- $(t_i, t_j) \in O, t_i \neq t_j \Leftrightarrow t_i \in T_e - T$ et $T_j \in T$
- $V_e = T$
- $\forall t \in T_e, f_e(t) = t$ si $t \in T$ et λ sinon.

Soient M l'ensemble des marquages de R_G et M_e l'ensemble des marquages de R_E .

On définit l'application $g : M \rightarrow M_e$ telle que si $g(M) = M_e$ alors :

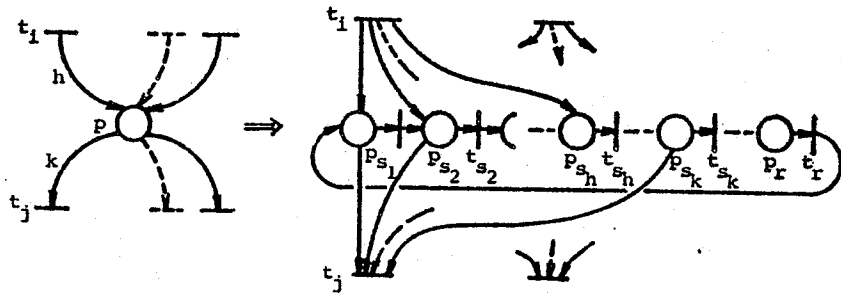
- si $M(p) = m$ avec $0 < m \leq k = \max \{ \varphi_j = \varphi(p, t_j) \mid t_j \in p \}$
alors $M_e(p_{s_1}) = M_e(p_{s_2}) \dots = M_e(p_{s_m}) = 1$
- si $M(p) = m$ avec $m > k$ alors $M_e(p_{s_1}) = M_e(p_{s_2}) \dots = M_e(p_{s_k}) = 1$ et
 $M_e(p) = m - k$
- $\forall j = 1, 2, \dots, k, M_e(\bar{p}_{s_j}) = 1 \Leftrightarrow M_e(p_{s_j}) = 0$
- pour toutes les autres places, $M_e(p) = 0$.

Il est aisé de vérifier les déductions suivantes :

- d1) $\forall t \in T$, si t est validée pour M_0 dans R_G alors t est validée pour $M_{e_0} = g(M_0)$ dans R_E .
- d2) si $MAF_L(M_i) = M_j$ dans R_G alors $MAF_L(g(M_i)) = M'_j$ dans R_E tel qu'il existe une séquence de simulation unique (à une permutation près)
 $\sigma = t_{\lambda_1} t_{\lambda_2} \dots t_{\lambda_n}, t_{\lambda_i} \in T_e - T$, telle que :
 - $M'_{e_j} \xrightarrow{\sigma} M_{e_j} = g(M_j)$,
 - aucune transition $t_{\lambda} \in T_e - T$ n'est validée par M_{e_j} .
- d3) si R_G est borné (resp. vivant) pour M_0 alors R_E est borné (resp. vivant) pour $M_{e_0} = g(M_0)$.
- d4) si R_G est persistant pour M_0 alors R_E est persistant pour $M_{e_0} = g(M_0)$.
- d5) $L_V(R_E, M_{e_0}) = L_V(R_G, M_0)$.

Remarque 4 :

Une solution très voisine a été proposée par Hack dans [HAC75] qui consiste à substituer à la place p un "anneau" comportant r places $p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_r}$ et r transitions $t_{s_1}, t_{s_2}, \dots, t_{s_r}$ étiquetées avec λ (figure 5). Tout arc (t_i, p) de poids h est remplacé par h arcs connectant t_i à $p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_h}$. De même, tout arc (p, t_j) de poids k est remplacé par k arcs connectant les places $p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_k}$ à t_j . Aucune priorité n'étant définie entre les transitions.



$$r = \max_{i,j}(\varphi_i, \varphi_j) \text{ avec } \varphi_i = \varphi(t_i, p) \mid t_i \in p \text{ et } \varphi_j = \varphi(p, t_j) \mid t_j \in p.$$

Figure 5

Le réseau obtenu réalise effectivement le réseau initial. On peut, cependant, noter les deux inconvénients suivants :

1) Il n'est pas donné d'algorithme qui gère la répartition des marques dans l'anneau. Quand une opération de mise à feu d'une transition d'entrée amène une marque dans une phase p_s , cette marque peut boucler indéfiniment sans quitter l'anneau. Dans ce sens, le réseau obtenu n'est pas simulable.

2) En conséquence de 1, la propriété de persistance du réseau initial pour un marquage donné M_0 n'est pas nécessairement conservée dans le réseau obtenu.

IV.3.4. Proposition 3

Étant donné un RdPP R_p (considéré comme étant étiqueté de façon triviale), on peut toujours construire un RdPPE étiqueté R_e qui le réalise.

Démonstration :

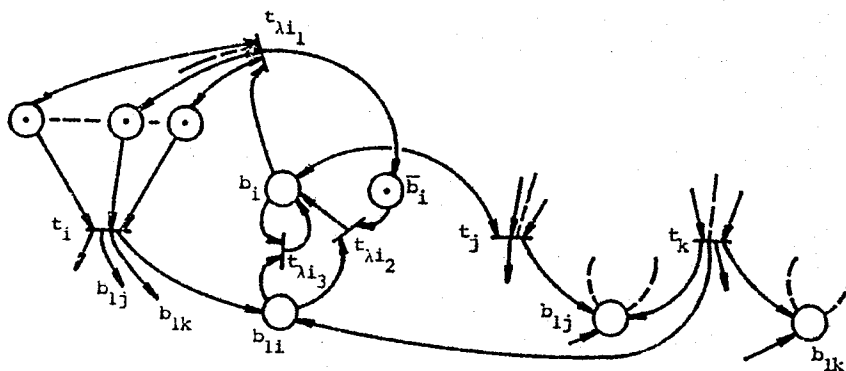
Soit $R_p = (P, T, \alpha, \beta, O)$. On considère le réseau $R_e = (P_e, T_e, \alpha_e, \beta_e)$ construit à partir de R_p tel que :

- r₁) $\forall p \in P \Rightarrow p \in P_e$
- r₂) $\forall t \in T \Rightarrow t \in T_e$
- r₃) $\forall (p, t) \in \alpha \Rightarrow (p, t) \in \alpha_e$
- r₄) $\forall (t, p) \in \beta \Rightarrow (t, p) \in \beta_e$
- r₅) pour chaque transition t_i , on introduit trois places b_i, \bar{b}_i et b_{1i} et trois transitions $t_{\lambda_{i1}}, t_{\lambda_{i2}}$ et $t_{\lambda_{i3}}$ connectées de la façon suivante :
 - $(b_i, t_{\lambda_{i1}}) \in \alpha_e, (t_{\lambda_{i1}}, \bar{b}_i) \in \beta_e, (\bar{b}_i, t_{\lambda_{i2}}) \in \alpha_e,$
 $(b_{1i}, t_{\lambda_{i2}}) \in \alpha_e, (t_{\lambda_{i2}}, b_i) \in \beta_e, (b_{1i}, t_{\lambda_{i3}}) \in \alpha_e,$
 $(b_i, t_{\lambda_{i3}}) \in \alpha_e, (t_{\lambda_{i3}}, \bar{b}_i) \in \beta_e, (\bar{b}_i, b_{1i}) \in \beta_e$
 - $\forall p \in P \Rightarrow (p, t_{\lambda_{i1}}) \in \alpha_e$ et $(t_{\lambda_{i1}}, p) \in \beta_e$
- r₆) $\forall t_j \in T \quad t_j \neq t_i, (t_i, t_j) \in O \Rightarrow \begin{cases} (b_i, t_j) \in \alpha_e \\ (t_j, \bar{b}_i) \in \beta_e \end{cases}$
 $(t_i, t_j) \notin O \Rightarrow (t_j, b_{1i}) \in \beta_e$

Cette construction est illustrée par la figure 6.

Soit $R_e = ((R_e, O_e), V_e, f_e)$ le RdPPE étiqueté défini tel que :

- $(t_i, t_j) \in O_e, t_i \neq t_j \Leftrightarrow t_i \in I_e^{-1}$ et $t_j \in I_e$
- $V_e = T$
- $\forall t \in T_e, f_e(t) = t$ si $t \in I$ et λ sinon.



t_i est plus prioritaire que t_j ,
 t_i et t_k sont non comparables.

Figure 6

Soient M l'ensemble des marquages de R_P et M_e l'ensemble des marquages de R_E .
 On définit l'application $g : M \rightarrow M_e$ telle que si $g(M) = M_e$ alors :

$$- \forall p \in P, M_e(p) = M(p)$$

$$- \forall b_i \in P_e - P, M_e(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{si la transition } t_i \text{ est validée par } M \text{ dans } R_P \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$- \forall \bar{b}_i \in P_e - P, M_e(\bar{b}_i) = 1 \text{ si } M_e(b_i) = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

$$- \forall b_{li} \in P_e - P, M_e(b_{li}) = 0$$

On peut vérifier facilement les résultats suivants :

d1) $\forall t \in T$, si $MAF_t(M_0)$ est définie dans R_P alors $MAF_t(g(M_0))$ est définie dans R_E .

d2) si $MAF_t(M_i) = M_j$ dans R_P alors $MAF_t(g(M_i)) = M'_j$ dans R_E tel qu'il existe une séquence de simulation unique (à une permutation près)

$$\sigma = t_{\lambda_1} t_{\lambda_2} \dots t_{\lambda_n}, t_{\lambda_i} \in T_e - T, \text{ telle que :}$$

$$- M'_{e_j} \stackrel{Q}{\rightarrow} M_{e_j} = g(M_j),$$

- aucune transition $t_j \in T_e - I$ n'est validée par M_{e_j} .

- d3) si R_p est borné (resp. vivant) pour M_0 alors R_E est borné (resp. vivant) pour $M_{e_0} = g(M_0)$.
- d4) si R_p est persistant pour M_0 alors R_E est persistant pour $M_{e_0} = g(M_0)$.
- d5) $L_v(R_E, M_{e_0}) = L_v(R_p, M_0)$.

IV.3.5. Proposition 4

Étant donné un RdPZ R_Z considéré comme étant étiqueté de façon triviale, on peut toujours construire un RdPEX étiqueté qui le réalise.

Démonstration :

Il est possible d'obtenir à partir de $R_Z = (R_Z, I)$ un RdPEX étiqueté $R_E = (R_e, V, f)$ avec $R_e = (R, \xi)$ en appliquant successivement les règles suivantes :

- R1) Pour toute transition t_i de R_Z telle que $\exists p, (p, t_i) \in I$, remplacer t_i par deux transitions t_i^+ et t_i^- et une place p_{t_i} comme il est montré en figure 7. Mettre (p_{t_i}, p_i) dans ξ .
- R2) Soit T_0 l'ensemble des transitions de R_Z qui ne sont pas touchées par l'application de la règle précédente. Ajouter à l'ensemble des places de R_Z une place p_0 telle qu'elle soit place d'entrée et place de sortie de chaque transition de T_0 . De plus, p_0 est place d'entrée de toute transition t_i^+ et place de sortie de toute transition t_i^- .
- R3) Soit R_e le RdPEX ainsi obtenu. La fonction d'étiquetage f de R_e est définie par :
- $$f(t_i^+) = t_i, \quad f(t_i^-) = \lambda, \quad f(t_i) = t_i.$$

Il n'est pas difficile de montrer que le RdPEX étiqueté ainsi obtenu réalise R_Z . Si M_0 est le marquage initial de R_Z soit M_{oe} le marquage tel que

- $M_{oe}(p) = M_0(p)$ pour chaque place p de R
- $M_{oe}(p_{t_i}) = 0$
- $M_{oe}(p_o) = 1$.

Pour démontrer que $(R_Z, M_0) \equiv (R_E, M_{oe})$, il suffit de remarquer que si $(p, t_i) \in I$ dans R_Z alors $(p_{t_i}, p) \in \xi$ et que la mise à feu de t_i dans R_Z correspond à la mise à feu successivement de t_i^+ et de t_i^- dans R_E .

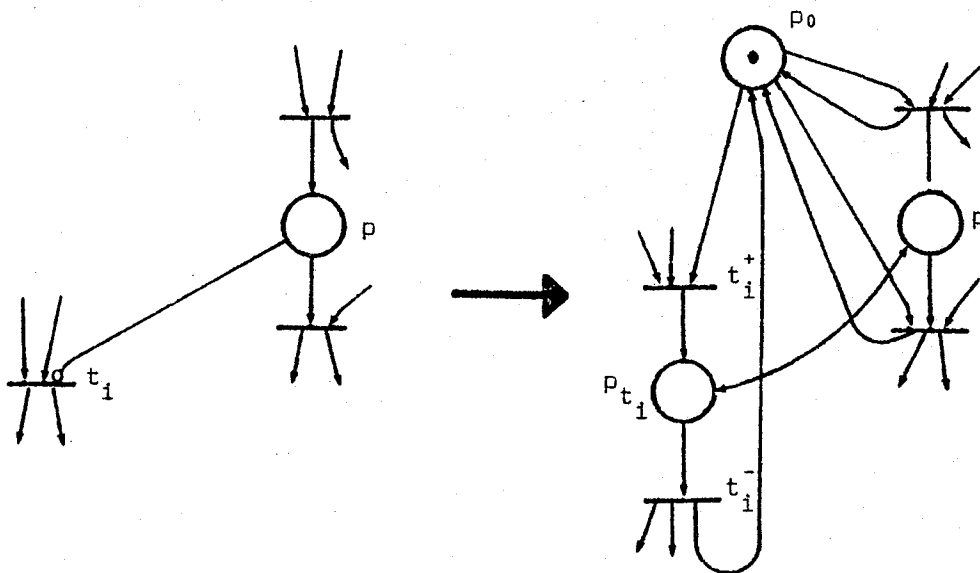


Figure 7

De plus, on peut remarquer que cette construction préserve les propriétés borné, vivant, consistant du réseau initial.

IV.3.6. Conclusion

Deux nouvelles extensions des RdP ont été présentées dans ce paragraphe : les RdPPE et les RdPEX. Si on combine les résultats présentés avec des résultats déjà connus, à savoir que :

- Toute coordination représentable par une machine de Turing est représentable par un RdPZ étiqueté et inversement [AGE74].
- Toute coordination représentable par un RdPZ étiqueté est représentable par un RdPP étiqueté et inversement [HACK75].

On arrive à la conclusion que les modèles RdPPE et RdPEX ont la même puissance de description que la machine de Turing.

Les résultats relatifs aux RdPPE ont été utilisés pour définir des réseaux dont l'évolution est forcée par des événements externes, les RdP synchronisés [MOA78]. Les RdPEX sont utilisés dans ce chapitre pour comparer les modèles de CA-système et IA-système.

IV.4. RESEAUX DE PETRI ET CONTROLEURS A COMMANDES GARDEES

IV.4.1. Réseaux de Petri à contraintes d'exclusion et IA-systèmes

D'après le résultat présenté dans le paragraphe précédent étant donné un contrôleur construit à partir d'un CA-système, il existe un contrôleur réalisé à partir d'un RdPEX qui le réalise. L'objectif de ce paragraphe est de montrer en se servant de résultats sur les RdP, que toute coordination réalisable par les CA-systèmes est réalisable par les IA-systèmes.

Proposition 5 :

Etant donné un RdP non pur considéré comme étiqueté de façon triviale, on peut trouver un RdP étiqueté pur qui le réalise.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer au RdP non pur R les transformations décrites par les règles suivantes :

- R1) Remplacer chaque transition t_i de R par deux transitions t_i^+ et t_i^- et une place p_{t_i} comme il est montré en figure 8. C'est-à-dire les arcs entrants à t_i entrent à t_i^+ et les arcs sortants de t_i sortent de t_i^- .

- R2) Rajouter une place p_0 à l'ensemble des places de R telles que p_0 soit place d'entrée de chaque transition t_i^+ et place de sortie de chaque transition t_i^- .
- R3) La fonction d'étiquetage f du RdP obtenu R' est définie par $f(t_i^+) = t_i$ et $f(t_i^-) = \lambda$.

Etant donné un marquage M_0 de R , le réseau R' est équivalent à R si on prend comme marquage initial M'_0 : $M'_0(p) = M_0(p)$ où p est une place du réseau initial, $M'_0(p_{t_i}) = 0$ où p_{t_i} est une place rajoutée par la règle R1) et $M'_0(p_0) = 1$.

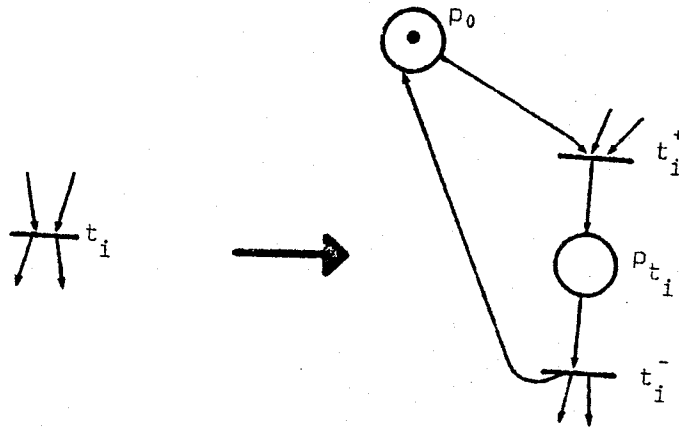


Figure 8

La matrice d'incidence d'un RdP ordinaire [LAU74]

Soit $R = (P, T, \alpha, \beta)$ un RdP ordinaire, $|P| = n$, $|T| = m$. La matrice d'incidence de R est une matrice $C = [c_{ij}]_{n \times m}$

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } (p_i, t_j) \in \alpha \text{ et } (p_i, t_j) \notin \beta^{-1} \\ 1 & \text{si } (p_i, t_j) \in \beta^{-1} \text{ et } (p_i, t_j) \notin \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observations :

- Si R est pur, la donnée de C est équivalente à la donnée du graphe représentant le réseau.
- Si dans un RdP R, ayant comme matrice d'incidence C, on a à partir d'un marquage $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ alors $M = M_0 + C v(\sigma)$ où $v(\sigma) \in \mathbb{N}^m$ est un vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale au nombre d'occurrences de la transition t_i dans σ ; $v(\sigma)$ est appelé vecteur de mise à feu de σ .

Proposition 6 :

- a) Etant donné un RdP ordinaire pur, on peut trouver un IA-système qui le réalise.
- b) Etant donné un RdPEX pur, on peut trouver un IA-système qui le réalise.

Démonstration :

- a) Soit $R = (P, T, \alpha, \beta)$, $|P| = n$, $|T| = m$ un RdP ordinaire pur ayant $C = [C_1, C_2, \dots, C_m]$ comme matrice d'incidence (les C_i sont les colonnes de C).
On construit à partir de R le IA-système $S = (V, J, A)$ où $V = \{v_i\}_{i=1}^n$, domaine des $v_i = \mathbb{N}$, $A = \{a_i\}_{i=1}^m$. On prend $J = \bigwedge_{i=1}^n (v_i \geq 0)$ et $a_i = (V := V + C_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Si M_0 est le marquage initial de R on prendra initialement $v_i = m_{0_i}$.
- b) Si on considère un RdPEX $R_{ex} = (R, \xi)$, il suffit de renforcer l'invariant précédent par les contraintes de mutuelle exclusion données par ξ . C'est-à-dire il faut prendre comme invariant caractéristique :

$$J = \bigwedge_{i=1}^n (v_i \geq 0) \wedge \bigwedge_{V(p_k, p_s) \in \xi} [(v_k = 0) \vee (v_s = 0)]$$

En combinant les résultats des propositions 5 et 6 avec d'autres résultats de ce chapitre, on peut démontrer qu'étant donné un CA-système S, il existe un IA-système S' tel que toute coordination réalisable par S (utilisé comme contrôleur) est réalisable par S'. En effet, étant donné un CA-système S, on peut trouver un

RdPEX étiqueté R_{ex} qui le réalise. D'après la proposition 5, on peut trouver un RdPEX étiqueté par R'_{ex} qui réalise R_{ex} et par conséquent un contrôleur construit à partir d'un IA-système S' qui réalise S .

Si on rajoute à la constatation précédente le résultat de la proposition 1 du chapitre III, on a :

Proposition 7 :

Etant donné un CA-système S , il existe un IA-système S' tel que toute coordination réalisable par S (utilisé comme contrôleur) est réalisable par S' et inversement.

IV.4.2. Contraintes synchroniques et contraintes d'exclusion

Soit $R_{ex} = (R, \xi)$ un RdPEX pur avec $R = (P, T, \alpha, \beta)$, $|P| = n$, $|T| = m$, ayant $C = [C_1, C_2, \dots, C_m]$ comme matrice d'incidence. D'après une observation du paragraphe précédent, on peut associer à R initialisé à un marquage M_0 , un IA-système $S = (X, J, A)$ avec

- $X = \{x_i\}_{i=1}^m$, domaine des $x_i = \mathbb{N}$. X représente également un vecteur colonne à m composante et est initialisé à 0.
- $A = \{a_i\}_{i=1}^m$, $a_i = (X := X + e_i)$ où e_i est un vecteur colonne ayant toutes ses composantes égales à 0 sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est égal à 1.
- $J = (M_0 + CX \geq 0)$.

Le IA-système représentant R_{ex} peut être obtenu à partir de S en rajoutant à J les contraintes :

$\forall M \in M_0^{\rightarrow}, \forall (p_i, p_j) \in \xi, m_i m_j = 0$ où m_i et m_j sont respectivement la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ composante de M .

Soit $Q = [q_{ij}]_{n \times n}$ une matrice symétrique avec $q_{ij} \in \mathbb{N}$ si $(p_i, p_j) \in \xi$ et $q_{ij} = 0$ sinon. Alors les contraintes précédentes peuvent être mises sous la forme

$\forall M \in M_0^{\rightarrow}, M^t Q M = 0$ où M^t est le transposé de M .

Si on tient compte du fait qu'à tout moment $M = M_0 + CX$, l'invariant du IA-système représentant R_{ex} est :

$$J = (M_0 + CX \geq 0) \wedge (2X^t C_1^t Q M_0 + X^t C^t Q C X = 0).$$

La relation $M_0 + CX \geq 0$ définit un polyèdre ; les états doivent être situés à l'intérieur de ce polyèdre. La deuxième relation représente une surface passant par l'origine des axes. Si $C^t Q M_0 = 0$ (le marquage initial ne marque pas de places impliquées dans la relation ξ), cette surface est un cône.

Nous appellerons les contraintes $M_0 + CX \geq 0$ contraintes synchroniques.

Conclusion : D'après les résultats qui précèdent toute coordination réalisable par une machine de Turing, utilisée en tant que contrôleur [AGE74], peut être décrite par un invariant composé de contraintes de deux types sur des variables choisies de façon appropriée : des contraintes synchroniques et des contraintes de mutuelle exclusion.

Ce résultat rappelle la distinction entre "structure enlogique" et "structure synchronique" d'un réseau faite par C.A. Petri [PETR75]. Les contraintes de mutuelle exclusion sont des contraintes "enlogiques" ; elles peuvent être représentées par des transitions "interdites" appelées "facts" dans [PETR75] [PETR77].

Nous avons introduit la classe des RdPEX dans le but d'étudier les relations entre les modèles de CA-système et IA-système. Nous pensons néanmoins que l'utilisation de cette extension peut être intéressante aussi bien dans le domaine de la modélisation que de l'analyse [SIF78].

CHAPITRE V

ANALYSE DES PROPRIETES LOGIQUES DES RESEAUX DE PETRI

V.1.	PROPRIETES LOGIQUES DES RESEAUX DE PETRI -----	2
V.2.	RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS CONCERNANT LE PROBLEME DE L'ANALYSE -----	4
V.3.	LES METHODES D'ANALYSE STATIQUE -----	6
V.4.	PROPRIETES STRUCTURELLES DES RESEAUX DE PETRI	
V.4.1.	Verrous et trappes	
V.4.1.1.	Définitions -----	7
V.4.1.2.	Quelques résultats sur la vivacité -----	9
V.4.1.3.	Méthode de calcul des verrous et des trappes -----	11
V.4.2.	Analyse d'un RdP à partir de sa matrice d'incidence	
V.4.2.1.	Définitions et notations -----	17
V.4.2.2.	Matrice d'incidence et propriétés structurelles -----	18
V.4.2.3.	Composantes d'un RdP et propriétés structurelles ----	25

CHAPITRE V

PRESENTATION

Ce chapitre porte sur la présentation de méthodes d'analyse des propriétés logiques et plus particulièrement les méthodes d'analyse des propriétés structurelles. Ces méthodes consistent à étudier les propriétés des RdP en liaison avec leur structure, donc indépendamment (ou presque) de leur marquage initial.

Après avoir rappelé des résultats généraux sur le problème de l'analyse et situé les différentes méthodes existantes par rapport aux méthodes étudiées, nous présentons des résultats liant la vivacité à l'existence de trappes et de verrous dans un RdP. Une méthode de calcul de l'ensemble des verrous et des trappes d'un RdP est donnée.

Les notions de borné et de vivant sont introduites de façon à être indépendantes du marquage initial : un RdP est structurellement borné ssi il est borné pour tout marquage initial et il est structurellement vivant ssi il existe un marquage initial pour lequel il est vivant. Il est montré que les propriétés ainsi introduites peuvent être étudiées à partir de la matrice d'incidence d'un RdP.

L'intérêt porté à l'étude de ces propriétés est justifié par le fait qu'il est souvent plus facile de prouver qu'un RdP est structurellement borné (structurellement non vivant) plutôt que borné (non vivant) pour un marquage donné. De plus, l'approfondissement de ces propriétés permet d'apprécier l'influence de la structure d'un RdP sur la vérification des propriétés correspondantes dépendant du marquage.

V.1. PROPRIETES LOGIQUES DES RESEAUX DE PETRI

Dans ce paragraphe, nous définissons les propriétés introduites au paragraphe II.3.1. pour les systèmes de transitions en termes de concepts et de primitives des RdP.

Propriétés de vivacité :

Etant donné (R, M_0) un RdP initialisé et t une transition de R , on dira que :

- t est 1-vivante si il existe une séquence de mise à feu σ à partir de M_0 telle que $M_0 \xrightarrow{\sigma t}$.
- t est ω -vivante si pour chaque entier naturel k il existe une séquence de mise à feu σ_k , $M_0 \xrightarrow{\sigma_k}$, et le nombre d'occurrences de t dans σ_k est égal à k .
- t est ∞ -vivante si il existe une séquence de mise à feu σ , $M_0 \xrightarrow{\sigma}$, et contient t une infinité de fois.
- t est vivante (1-s-activable) si pour chaque $M \in M_0 \rightarrow$ t est 1-vivante dans (R, M) .

On généralise ces définitions pour un RdP initialisé (R, M_0) :

R sera dit 1-vivant, ω -vivant, ∞ -vivant, vivant pour M_0 si chacune de ses transitions vérifie la propriété correspondante.

Pour une comparaison entre ces différents types de vivacité voir dans [KEI.72].

Il n'est pas difficile de démontrer que

$$\text{vivant} \Rightarrow \infty\text{-vivant} \Rightarrow \omega\text{-vivant} \Rightarrow 1\text{-vivant}$$

Propriétés caractérisant les situations de coalition :

Etant donné un RdP (R, M_0) et t une transition de R , on dira qu'il y a coalition contre t si il existe une séquence de mise à feu infinie σ telle que lors de son application R parcourt un ensemble de marquages dont aucun ne valide t .

Un RdP R sera dit sans coalition pour M_0 si pour chacune de ses transitions t il n'y a pas de coalition contre t dans (R, M_0) .

Les situations de ce type peuvent être caractérisées par des relations entre nombres d'occurrences de mises à feu et peuvent être étudiées à l'aide des notions d'avance et de distance synchronique présentées au chapitre VI.

Propriétés relatives au partage des ressources :

Etant donné un RdP R on dira que R est persistant à partir de M_0 si pour chaque marquage $M \in \vec{M}_0$ et chaque couple de transitions (t, t') telles que $M \xrightarrow{t}$ et $M \xrightarrow{t'}$ on a $M \xrightarrow{tt'}$ (et par symétrie $M \xrightarrow{t't}$).

On dira que deux transitions t et t' d'un RdP R sont en conflit si $t \# t' \neq \emptyset$.

La propriété de conflit ainsi introduite est une propriété topologique des réseaux. La connaissance des conflits facilite la vérification de la persistance : un réseau initialisé (R, M_0) est non persistant ssi il existe deux transitions t et t' en conflit et un marquage $M \in \vec{M}_0$ tel que M valide chacune séparément mais la séquence tt' n'est pas applicable à partir de M .

D'autres propriétés relatives au partage des ressources sont la mutuelle exclusion et d'une façon générale, les propriétés exprimant le fait que plusieurs actions ne sont pas simultanément exécutables. Leur vérification sur un RdP initialisé (R, M_0) se ramène à la vérification du fait que deux ou plusieurs places du RdP ne seront jamais simultanément marquées ; c'est-à-dire à des

propriétés du type :

$$\exists M \in M_0, M \geq M'$$

où M' est le plus petit marquage qui correspond à une configuration de marques "interdite".

Propriété de borné :

Etant donné un RdP initialisé (R, M_0) et p une place de R , on dira que la place p est bornée ssi il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $M \in \vec{M}_0$ $M(p) \leq k$. Si p est bornée, le plus petit k pour lequel cette propriété est satisfaite sera appelé borne de p . Un RdP R sera appelé borné pour M_0 si chacune de ses places est bornée dans (R, M_0) .

Un RdP R borné pour M_0 sera appelé sauf pour M_0 si le maximum des bornes de ses places est égal à 1.

V.2. RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS CONCERNANT LE PROBLEME DE L'ANALYSE

Depuis la publication par A.W. HOLT et ses collaborateurs des premiers résultats sur la modélisation et l'analyse des systèmes à évolutions parallèles à l'aide des RdP [HOL68][HOL70], un grand nombre de travaux a été effectué dans ce domaine. Notre objectif ici n'est pas de passer en revue tous ces travaux - ce qui a été relativement bien fait dans [PET77] - mais de présenter des résultats qui concernent directement le problème de l'analyse. On peut classer ces résultats en deux catégories :

- ceux dont la connaissance mène à des méthodes d'analyse directement applicables et qui font l'objet d'une étude plus approfondie dans les paragraphes qui suivent ;
- ceux dont la connaissance ne mène pas à une méthode de vérification d'une propriété quelconque ; ils portent essentiellement sur la comparaison des problèmes posés par la vérification des différentes propriétés, entre eux ou avec d'autres problèmes connus.

L'essentiel, en ce qui nous concerne, des résultats de cette dernière catégorie est que le problème de la vérification des propriétés présentées sur les RdP ordinaires et les RdPG se ramène à la solution de deux problèmes de complexité inégale :

- le problème de couverture ("coverability problem") [HAC75] à savoir : "Etant donné un RdP initialisé (R, M_0) à n places et un vecteur $M' \in \mathbb{N}^n$ vérifier si il existe $M \in \vec{M}_0$ tel que $M \geq M'$ ".

- le problème d'atteignabilité à savoir "Etant donné un RdP initialisé (R, M_0) à n places et un vecteur $M' \in \mathbb{N}^n$ vérifier si il existe $M \in \vec{M}_0$ tel que $M = M'$ ".

Il a été démontré [KEL72] [HAC76] que le problème de la couverture est récursivement équivalent aux problèmes de la vérification de propriétés : borné, 1-vivant, ω -vivant, mutuelle exclusion. Ce problème est décidable (pour les RdP ordinaires et généralisés) et de complexité exponentielle en temps et en espace mémoire [LIP76].

Aussi il a été démontré que le problème de l'atteignabilité est équivalent au problème de la vérification des propriétés de vivant [HAC76] et de persistant [LAN75], ainsi qu'aux problèmes de l'atteignabilité du marquage 0 (zéro) à partir d'un marquage donné et de l'atteignabilité d'un marquage donné à partir du marquage 0 [NAS73].

Enfin, dans [HAC76] un certain nombre de problèmes relatifs à la comparaison des classes des marquages ou les langages générés par les RdP ordinaires ou généralisés sont prouvés indécidables.

En ce qui concerne les extensions des RdP qui ont la puissance d'une machine de Turing, toutes les propriétés intéressantes en pratique (borné, vivant, persistant) ont été prouvées indécidables [HAC75].

V.3. LES METHODES D'ANALYSE STATIQUE

On peut classer les méthodes d'analyse statique des RdP en trois catégories :

1 - Méthodes d'analyse à partir de l'arbre des marquages

Le point de départ de ces méthodes est l' "algorithme de Karp et Miller" [KAR69] [HAC76] [BER78]. Cet algorithme peut être utilisé pour résoudre le problème de couverture et par conséquent pour vérifier les propriétés de borné, 1-vivant, ω -vivant et mutuelle exclusion.

2 - Méthodes d'analyse par transformation

Ces méthodes consistent à transformer un RdP initialisé (R, M_0) , sur lequel on veut vérifier une propriété PR, en un RdP initialisé (R', M_0') tel que

- si (R', M_0') satisfait PR alors (R, M_0) la satisfait également,
- cette propriété est plus facilement vérifiable sur (R', M_0') que sur (R, M_0) .

Comme un cas particulier de ces méthodes peuvent être considérées les méthodes par "réduction" [BER76] [BER78] [SZL77] où la vérification d'une propriété sur (R, M_0) est ramenée à la vérification de cette propriété sur un ensemble de RdP $\{(R_i, M_{0_i})\}_{i=1}^S$ plus simples que le réseau initial ("plus simples" signifie "ayant un nombre de places et/ou de transitions plus petit que le réseau initial"). L'intérêt de ces méthodes repose sur le fait qu'elles consistent à réduire le RdP à analyser en appliquant des règles de transformation locale et donc de complexité indépendante de la taille du réseau. Leur inconvénient est que leur efficacité dépend de la structure du RdP à analyser.

3 - Méthodes d'analyse structurelle

Ces méthodes étudient les propriétés des RdP en liaison avec leur structure, donc indépendamment de leur marquage initial. Elles consistent à chercher des sous-ensembles de noeuds ou des sous-réseaux du réseau à analyser dont l'existence est significative pour la vérification ou non des propriétés.

Les méthodes de ce type sont présentées dans ce chapitre.

La deuxième partie du paragraphe suivant porte sur l'analyse des RdP à partir de leur matrice d'incidence. Plusieurs auteurs ont publié dans ce domaine, [LAU74], [LAU75], [CRE76], [BYR75], [MUR77], [LIE76],[LIEN76], [MEM78], [SIF78], et il est difficile de déterminer qui est à l'origine des résultats existants. Notre apport consiste à la présentation d'une approche plus ou moins complète et unifiée pour l'étude des propriétés des RdP en utilisant des techniques d'algèbre linéaire.

V.4. PROPRIETES STRUCTURELLES DE RESEAUX DE PETRI

Notation

Pour ce qui suit on représentera un RdPG par un quadruplet $R=(P,T,a,b)$ où

$a : PxT \rightarrow \mathbb{N}$, fonction d'incidence avant
 $b : PxT \rightarrow \mathbb{N}$, fonction d'incidence arrière

Les fonctions a et b définies de la façon suivante à partir des relations α , β et la fonction ϕ (paragraphe IV.2.2.)

$(p,t) \in PxT$: $a(p,t) = s \iff (p,t) \in \alpha$ et $\phi(p,t)=s$
 $(p,t) \in PxT$: $b(p,t) = w \iff (t,p) \in \beta$ et $\phi(t,p)=w$

Le terme réseau de Petri (RdP) sera utilisé pour désigner la classe des RdPG.

V.4.1. Verrous et trappes

V.4.1.1. Définitions

Soit V un verrou d'un RdP ordinaire R et M un marquage tel que $V(M)=\text{vrai}$. Il est évident que M doit avoir un ensemble non vide de composantes égales à 0 et qui restent égales à 0 pour toute évolution à partir de M . Soit n_1 l'ensemble des indices de ces composantes. Alors le prédicat $\bigwedge_{i \in n_1} (m_i=0)$ est un verrou.

Nous appellerons par extension l'ensemble des places $\{p_i\}_{i \in n_1}$ ainsi définis verrous de R [HAC72] c'est-à-dire on appellera verrou tout ensemble de places qui si elles ne sont pas initialement marquées, elles resteront non marquées pour toute évolution.

Proposition 1 :

Un ensemble de places P_1 d'un RdP ordinaire est un verrou ssi chaque transition qui est transition d'entrée d'une place de P_1 est également transition de sortie d'une place de P_1 , c'est-à-dire ${}^*P_1 \subseteq P_1$.

Démonstration :

Si ${}^*P_1 \not\subseteq P_1$ alors il existe au moins une place de P_1 qui étant initialement vide peut être remplie en marquant initialement les places de $P - P_1$ (P est l'ensemble des places du réseau).

Inversement si ${}^*P_1 \subseteq P_1$ et les places de P_1 sont initialement vides, alors la mise à feu d'une transition d'entrée d'une place de P_1 n'est pas possible tant qu'il y a au moins une de ses places d'entrée qui est vide.

Considérons pour un RdP ordinaire les invariants du type $\sum_{i \in n_1} m_i > 0$, n_1

étant comme précédemment un ensemble d'indices. L'ensemble des places $\{p_i\}_{i \in n_1}$ a la propriété caractéristique suivante : si la somme des marques initialement posées dans ces places est positive alors elle restera positive pour toute évolution de R. Nous appellerons les ensembles de places de ce type trappes de R [HAC72].

Proposition 2 :

Un ensemble de places P_2 d'un RdP ordinaire est une trappe ssi chaque transition étant transition de sortie d'une place de P_2 est également transition d'entrée d'une place de P_2 c'est-à-dire $P_2 \subseteq {}^*P_2$.

Démonstration :

Analogue à la précédente.

Pour ce qui suit, le terme verrou sera utilisé pour désigner un sous-ensemble de places $\{p_i\}_{i \in \Pi_1}$ d'un RdP ordinaire telles que $\bigwedge_{i \in \Pi_1} (m_i=0)$ soit un invariant.

V.4.1.2. Quelques résultats sur la vivacité

Lemme 1 :

Soit R un RdP simple. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a/ t est non vivante pour M_0 dans R

b/ $\exists M \in \vec{M}_0$ et $p \in t$ tels que $\forall M' \in \vec{M}, M'(p)=0$.

Proposition 3 :

Soit R un RdP simple. Si (R, M_0) est vivant alors $\forall M \in \vec{M}_0$ et $\forall P_V$ verrou de R, $\exists p \in P_V$ tel que $M(p) > 0$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe une transition t_0 de R qui soit non vivante pour M_0 . D'après le lemme précédent il existe alors au moins une place $p_1 \in t_0$ et un marquage $M_1 \in \vec{M}_0$ tel que : $\forall M \in \vec{M}_1, M(p_1)=0$. Notons par P_1 l'ensemble constitué de la place p_1 . A partir de (P_1, M_1) on peut définir de façon récurrente la suite $(P_1, M_1), (P_2, M_2), \dots, (P_i, M_i) \dots$ vérifiant :

$$\forall i, P_i \subseteq P, M_i \in \vec{M}_0 \text{ et } \forall p_r \in P_i, \forall M \in \vec{M}_i, M(p_r)=0.$$

(P_{i+1}, M_{i+1}) est défini à partir de (P_i, M_i) de la façon suivante:

Soit T_i l'ensemble des transitions d'entrée des places de P_i qui ne sont pas transitions de sortie de places de P_i . Si $T_i = \emptyset$ alors $P_{i+1} = P_i$ et $M_{i+1} = M_i$.

Sinon, soit t_i une transition de T_i . Par définition de T_i , t_i est non vivante pour M_i ; il existe donc $p_{i+1} \in t_i$, $p_{i+1} \notin P_i$ et $M' \in \vec{M}_i$ tels que :

$\forall M \in \vec{M}', M(p_{i+1})=0$. On prendra alors $P_{i+1} = P_i \cup \{p_{i+1}\}$ et $M_{i+1} = M'$.

Le nombre des places du réseau étant fini il existe un rang h tel que :
 $\forall k < h$ on a $P_{k+1} \neq P_k$ et $\forall s \geq h$ on a $P_s = P_h$. P_h est un verrou et M_h est
 un marquage de \vec{M}_0 tel que : $\forall p \in P_h, M_h(p)=0$. Donc R n'est pas vivant.

Remarque 1 :

Cette proposition n'est pas vraie pour les RdP non simples. Le RdP de la
 figure 1 est non vivant (t_s est non-vivante). Les verrous minimaux de ce
 RdP sont $\{p_1, p_2\}$, $\{p_3, p_4\}$ et $\{p_2, p_4, p_5\}$ et on peut démontrer que pour
 chaque marquage M successeur du marquage initial $m_1+m_2 > 0$, $m_3+m_4 > 0$,
 $m_2+m_4+m_5 > 0$.

La proposition suivante due à Commoner [HAC72] donne une C.N.S. pour qu'un
 RdP libre choix soit vivant.

Proposition 4 :

Un RdP libre choix (R, M_0) est vivant ssi chaque verrou contient une trappe dont
 au moins une place est marquée par M_0 .

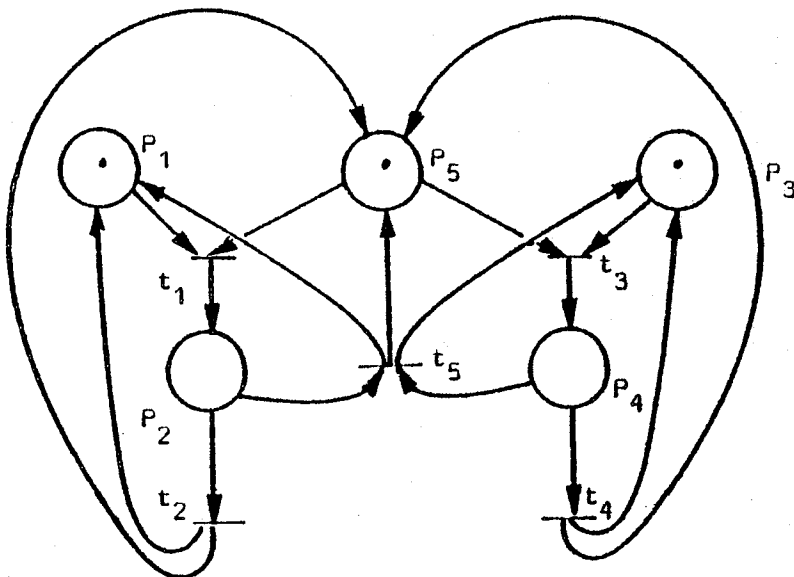


Figure 1

L'application de la proposition précédente devient très simple dans le cas des graphes marqués fortement connexes. Pour les réseaux de ce type tout ensemble de places qui est un verrou est également une trappe et inversement. De plus, chaque verrou définit un circuit du graphe représentant le graphe marqué. D'où la proposition suivante démontrée dans [COM71].

Proposition 5 :

Un graphe marqué fortement connexe est vivant ssi chaque circuit élémentaire contient initialement au moins une marque.

V.4.1.3. Méthode de calcul des verrous et des trappes

Soit $R=(P,T,\alpha,\beta)$ un RdP ordinaire à n places. On lui associe un ensemble de n implications

$$\{ w_i \Rightarrow \bigwedge_{t_k \in \cdot p_i} \left(\bigvee_{p_j \in \cdot t_k} w_j \right) \}_{i=1}^n \quad (I)$$

où les variables w_i sont booléennes. Remarquons que si $\{w_{i0}\}_{i=1}^n$ est une solution de (I) alors l'ensemble des places correspondant à $w_{i0}=1$ est un verrou et inversement, étant donné un ensemble de places $\{p_i\}_{i \in \eta_1}$ qui est un verrou, il détermine une solution de (I) : $w_{i0}=1$ ssi $i \in \eta_1$.

Proposition 6 :

Soit $R=(P,T,\alpha,\beta)$ un RdP ordinaire à n places et $\{w_i \Rightarrow u_i\}_{i=1}^n$ avec $u_i = \bigwedge_{t_k \in \cdot p_i} \left(\bigvee_{p_j \in \cdot t_k} w_j \right)$ un ensemble d'implications. On peut calculer

tous les verrous de R de la façon suivante :

a/ Transformer $\bigwedge_{i=1}^n (\bar{w}_i \vee u_i)$ en somme de monomes.

b/ Soit $\left(\bigwedge_{i \in k_1} \bar{w}_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in k_2} w_i \right)$ un de ces monomes, k_1, k_2 étant des ensembles

d'indices, $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, $k_1 \cup k_2 \subseteq k = \{1, 2, \dots, n\}$. Alors, tout ensemble de places $\{p_i\}_{i \in k_3}$, $k_2 \subseteq k_3 \subseteq k - k_1$ est un verrou.

c/ L'ensemble des verrous de R est l'union des ensembles des verrous obtenus à partir des monômes de cette somme.

Démonstration :

Evidemment tout ensemble de places obtenu après application des règles a/ et b/ est un verrou. Le problème est donc de démontrer que tous les verrous de R sont calculables par cette méthode.

Lemme :

Soit $\{p_i\}_{i \in k - k_1}$ un verrou de R. Alors l'expression $\bigwedge_{i \in k - k_1} u_i$, transformée en somme de monômes, contient un monôme $\bigwedge_{i \in k_2} w_i$ avec $k_2 \subseteq k - k_1$.

Soit $i \in k - k_1$. Alors u_i après transformation en somme de monômes contient un monôme dont les indices des lettres appartiennent tous à $k - k_1$. Les u_i étant formés de variables directes (non complémentées), $\bigwedge_{i \in k - k_1} u_i$ après transformation en somme de monômes contient au moins un monôme dont les indices des lettres appartiennent à $k - k_1$.

Supposons que $\{p_i\}_{i \in k - k_1}$ est un verrou et que aucune simplification n'est appliquée lors de l'application de cette méthode sauf la règle $w_i \wedge \bar{w}_i = 0$.

Alors, d'après le lemme précédent $\bigwedge_{i \in k - k_1} u_i = \bigwedge_{i \in k_2} w_i \vee a$ où $k_2 \subseteq k - k_1$ et a est

une somme de monômes. On peut alors écrire $\bigwedge_{i \in k - k_1} (\bar{w}_i \vee u_i) = b \vee \bigwedge_{i \in k - k_1} u_i =$

$c \vee \bigwedge_{i \in k_2} w_i$ où $c = a \vee b$ est une somme de monômes.

Le produit $\bigwedge_{i \in k} (\bar{w}_i \vee u_i)$ contient le terme $(\bigwedge_{i \in k_1} \bar{w}_i) \wedge (\bigwedge_{i \in k - k_1} (\bar{w}_i \vee u_i))$ qui à

son tour contient le terme $(\bigwedge_{i \in k_1} \neg w_i) \wedge (\bigwedge_{i \in k-k_1} w_i)$. Ceci implique que chaque ensemble $\{p_i\}_{i \in k_3}$, $k_2 \subseteq k_3 \subseteq k-k_1$ est un verrou et en particulier $\{p_i\}_{i \in k-k_1}$.

Il n'est pas difficile de prouver que par application des règles de simplification $a \vee \lambda \wedge a = a$ et $a \wedge \lambda \vee b \wedge \neg \lambda \vee a \wedge b = a \wedge \lambda \vee b \wedge \neg \lambda$ les verrous sont conservés.

Exemple 1 :

Soit le RdP de la figure 2

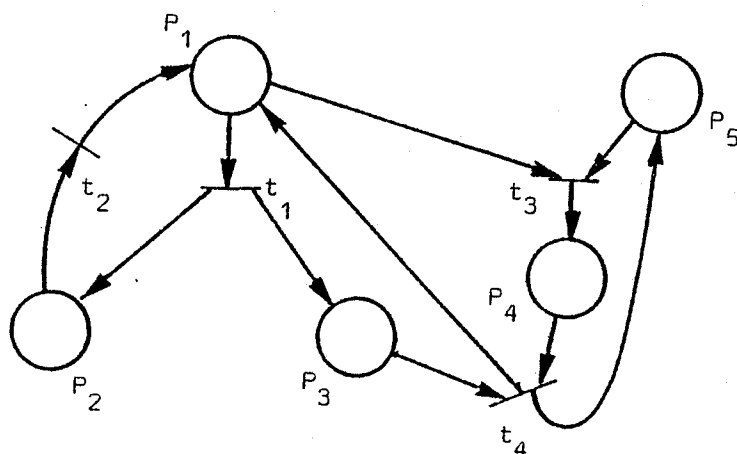


Figure 2

On a l'ensemble des implications (pour simplifier on omet les opérateurs \wedge).

$$w_1 \Rightarrow w_2 \quad (w_3 \vee w_4)$$

$$w_2 \Rightarrow w_1$$

$$w_3 \Rightarrow w_1$$

$$w_4 \Rightarrow w_1 \vee w_5$$

$$w_5 \Rightarrow w_3 \vee w_4$$

$$\bigwedge_{i=1}^5 (\neg w_i \vee u_i) = \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 \neg w_4 \neg w_5 \vee w_1 w_2 w_4 \vee w_1 w_2 w_3 \vee \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 w_4 w_5$$

Ensembles de verrous générés par chacun des monômes :

$$\begin{array}{ll}
 \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 \neg w_4 \neg w_5 & \emptyset \\
 w_1 w_2 w_4 & \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \\
 w_1 w_2 w_3 & \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \\
 \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 w_4 w_5 & \{p_4, p_5\}
 \end{array}$$

Donc l'ensemble des verrous de R est égal à :

$$\{ \{p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_5\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \\
 \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \}.$$

Remarque :

Un verrou ne se décompose pas généralement en verrous minimaux. Dans l'exemple précédent $\{p_1, p_2, p_3, p_5\}$ n'est pas minimal et il n'est pas exprimable comme l'union de verrous minimaux.

On peut appliquer une méthode analogue pour le calcul des trappes d'un RdP. Dans ce cas il faut considérer un ensemble de $n=|P|$ implications

$$\{ w_i \Rightarrow \bigwedge_{t_k \in \rho_i} (\bigvee_{p_j \in t_k} w_j) \}_{i=1}^n \quad (II)$$

Pour toute solution $\{w_{i0}\}_{i=1}^n$ de (II), l'ensemble des places correspondant à $w_{i0}=1$ est une trappe et inversement étant donné un ensemble de places

$\{p_i\}_{i \in \eta_1}$ qui est une trappe, il détermine une solution de (II) : $w_{i0}=1$

ssi $i \in \eta_1$.

Proposition 7 :

Soit $R=(P, T, \alpha, \beta)$ un RdP ordinaire à n places et $\{w_i \Rightarrow v_i\}_{i=1}^n$ avec

$v_i = \bigwedge_{t_k \in \rho_i} (\bigvee_{p_j \in t_k} w_j)$ un ensemble d'implications. On peut calculer les

trappes de R de la façon suivante :

- a/ Transformer $\bigwedge_{i=1}^n (\neg w_i \vee v_i)$ en somme de monômes.
- b/ Soit $(\bigwedge_{i \in k_1} \neg w_i) \wedge (\bigwedge_{i \in k_2} w_i)$ un de ces monômes, k_1, k_2 étant deux ensembles d'indices, $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, $k_1 \cup k_2 \subseteq k = \{1, 2, \dots, n\}$. Alors tout ensemble de places $\{p_i\}_{i \in k_3}$, $k_2 \subseteq k_3 \subseteq k - k_1$ est une trappe.
- c/ L'ensemble de trappes de R est l'union des ensembles des trappes obtenues à partir des monômes de cette somme.

Démonstration :

Analogue à la précédente.

Exemple 2 :

Pour le RdP de la figure 2 on a les implications :

$$\begin{aligned} w_1 &\Rightarrow (w_2 \vee w_3) w_4 \\ w_2 &\Rightarrow w_1 \\ w_3 &\Rightarrow w_1 \vee w_5 \\ w_4 &\Rightarrow w_1 \vee w_5 \\ w_5 &\Rightarrow w_4 \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{i=1}^5 (\neg w_i \vee v_i) = \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 \neg w_4 \neg w_5 \vee w_1 w_3 w_4 \vee w_1 w_2 w_4 \vee \neg w_1 \neg w_2 w_4 w_5$$

Ensembles de trappes générées pour chacun des monômes :

$$\begin{array}{ll} \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 \neg w_4 \neg w_5 & \emptyset \\ w_1 w_3 w_4 & \{p_1, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \\ w_1 w_2 w_4 & \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \\ \neg w_1 \neg w_2 w_4 w_5 & \{p_4, p_5\}, \{p_3, p_4, p_5\} \end{array}$$

Donc l'ensemble des trappes de R est égal à :

$$\{ \{p_4, p_5\}, \{p_1, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \}$$

On peut également calculer les ensembles des places d'un RdP qui sont en même temps verrous et trappes en appliquant la même méthode à partir de l'ensemble des implications :

$$\{w_i \Rightarrow u_i \wedge v_i\}_{i=1}^n$$

où

$$u_i = t_k \wedge_{\epsilon} p_i \left(\rho_j \vee_{\epsilon} t_k w_j \right) \text{ et } v_i = t_k \wedge_{\epsilon} p_i \left(\rho_j \vee_{\epsilon} t_k w_j \right)$$

Exemple 3 :

Pour le RdP de la figure 2 on a les implications :

$$\begin{aligned} w_1 &\Rightarrow w_2 w_4 \\ w_2 &\Rightarrow w_1 \\ w_3 &\Rightarrow w_1 \\ w_4 &\Rightarrow w_1 w_5 \\ w_5 &\Rightarrow w_4 \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{i=1}^5 (\neg w_i \vee u_i \wedge v_i) = \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 \neg w_4 \neg w_5 \vee w_1 w_2 w_4 \vee \neg w_1 \neg w_2 \neg w_3 w_4 w_5$$

D'où l'ensemble des ensembles de places de R qui sont verrous et trappes en même temps.

$$\{ \{p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \}$$

Remarque :

On peut utiliser des méthodes analogues pour calculer des ensembles de transitions T_1, T_2 tels que $T_1 \subseteq T_1'$ et $T_2 \subseteq T_2'$. Nous n'avons pas pu trouver des propriétés caractéristiques de ces ensembles analogues à celles données par les propositions 1 et 2. Il est montré dans le paragraphe V.4.2.2. que des ensembles de transitions de ce type jouent un rôle particulier pour la vérification par un RdP des propriétés de borné et de vivant.

V.4.2. Analyse d'un RdP à partir de sa matrice d'incidence

V.4.2.1. Définitions et notations

- Un RdP est dit structurellement borné ou simplement borné ssi pour tout marquage initial M_0 , (R, M_0) est borné.
- Un RdP R est dit structurellement vivant ou simplement vivant ssi il existe un marquage initial M_0 tel que (R, M_0) est vivant.
- Le graphe des marquages d'un RdP, $R=(P, T, a, b)$ avec marquage initial M_0 est un graphe orienté étiqueté dont l'ensemble des états est M_0^+ et l'ensemble des étiquettes T . Il y a un arc étiqueté par t_s d'un sommet M_i à un sommet M_j ssi $M_i \xrightarrow{t_s} M_j$.
- Etant donné un RdP $R=(P, T, a, b)$, $|P|=n$, $|T|=m$ la matrice

$$C = [c_{ij}]_{n \times m} \quad \text{où} \quad c_{ij} = b(p_i, t_j) - a(p_i, t_j)$$
 est appelée matrice d'incidence de R [LAU74].

Notations :

Un RdP initialisé et un RdP ayant comme matrice d'incidence C seront représentés par (C, M_0) et $(C, -)$ respectivement. Par convention m et n représenteront respectivement le nombre de transitions et le nombre des places d'un RdP. Les symboles \mathbb{Q} , \mathbb{Z} , \mathbb{N} représentent respectivement les ensembles des rationnels, des entiers et des entiers naturels. Si A est une matrice, A^t représente sa transposée. Pour $U, V \in \mathbb{F}^n$, $U \geq V$ représente la comparaison composante par composante des vecteurs U et V . De plus, $(U > V) \iff (U \geq V \text{ et } U \neq V)$. Si U et V sont tels qu'aucune parmi les relations $U \geq V$ $V \geq U$ soit vérifiée, alors U et V sont dits incomparables.

- Etant donné un RdP, $R=(P, T, a, b)$, un sous-réseau de R est un RdP, $R_1=(P_1, T_1, a_1, b_1)$ tel que $P_1 \subseteq P$ et $T_1 \subseteq T$ et a_1, b_1 sont respectivement les restrictions de a et b sur $P_1 \times T_1$. Un sous-réseau est défini par la donnée de (P_1, T_1) .

L'union de deux sous-réseaux R_1 et R_2 d'un RdP R définis respectivement par (P_1, T_1) et (P_2, T_2) est le sous-réseau $(P_1 \cup P_2, T_1 \cup T_2)$. On dira pour un ensemble $\{R_i\}_{i \in I}$ de sous-réseaux de R qu'il couvre R ou qu'il est une décomposition de R ssi $R = \bigcup_{i \in I} R_i$.

- Etant donné un RdP, $R=(P,T,a,b)$ et un vecteur $V \in \mathbb{Q}^m$, le support de V dans R , représenté par $S(V)$ est le sous-réseau de R défini par (P_1, T_1) où $T_1 = \{t_i \in T \mid v_i \neq 0\}$ et $P_1 = {}^*T_1 \cup T_1^*$. Aussi pour $V \in \mathbb{Q}^n$ le support de V dans R est le sous-réseau $S(V)$ de R défini par (P_2, T_2) où $P_2 = \{p_i \in P \mid v_i \neq 0\}$ et $T_2 = {}^*P_2 \cup P_2^*$.
- Etant donné un RdP ayant comme matrice d'incidence C , un t-flot (p-flot) est tout vecteur $X \in \mathbb{Q}^m$ ($X \in \mathbb{Q}^n$) tel que $CX=0$ ($X^t C=0$). On parlera de t-semiflot (p-semiflot) si $X > 0$.
- Un RdP ayant un t-semiflot (p-semiflot) dont toutes les composantes sont positives sera dit consistant (conservatif).

V.4.2.2. Matrice d'incidence et propriétés structurelles

Proposition 8 :

Soit $R=(P,T,a,b)$ un RdP.

- a/ R est consistant ssi il existe un marquage M et une séquence σ tels que $M \not\leq M$ et σ contient toutes les transitions de T .
- b/ Si R est borné et vivant pour un marquage M alors il est consistant.
- c/ Si R est consistant alors ${}^*T=T^*$.

Démonstration :

a/ et b/ sont démontrées dans [RAM73]. Pour démontrer c/ remarquer que si une place d'un RdP consistant a une transition d'entrée, alors elle doit avoir une transition de sortie au moins (parce que sinon, il n'existe pas de vecteur X positif tel que $CX=0$).

Proposition 9 :

Soit $R=(P,T,a,b)$ un RdP conservatif.

- a/ R est structurellement borné ,
- b/ L'ensemble des places de R est verrou et trappe en même temps.

Démonstration :

a/ est un résultat bien connu [LIE76]. b/ démonstration analogue à celle de (c).

Proposition 10 :

Soit $(C,-)$ un RdP pour lequel il existe $Y \in \mathbb{Q}^n$, $Y > 0$ tel que $Y^t C < 0$.

- a/ $(C,-)$ n'est pas structurellement vivant,
- b/ $(C,-)$ n'est pas consistant,
- c/ L'ensemble des places de $S(Y)$ est un verrou.

Démonstration :

a/ On peut toujours supposer que les composantes de Y sont des entiers naturels. Posons $Y^t C = K^t = [k_1, k_2, \dots, k_m] < 0$. K^t définit une partition l'ensemble T des transitions de $(C,-)$: $T = T_- \cup T_0$ où

$$T_- = \{t_j \mid k_j < 0\} \quad T_0 = \{t_j \mid k_j = 0\}$$

Supposons qu'il existe un marquage M_0 tel que (C, M_0) est vivant et remarquons que

$$\begin{aligned} \forall t_0 \in T_0, \text{ si } M_i \xrightarrow{t_0} M_j \text{ alors } Y^t M_i &= Y^t M_j \\ \forall t_- \in T_-, \text{ si } M_s \xrightarrow{t_-} M_q \text{ alors } Y^t M_s &> Y^t M_q \end{aligned}$$

Soit $S = M_0, M_1, M_2, \dots, M_r, \dots$ une séquence de marquages atteints successivement à partir de M_0 et $M_0, M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_w}, \dots$ la sous-séquence de S formée à partir de ses marquages qui sont atteints juste après la mise à feu d'une transition de T_- . Alors, $Y^t M_0 > Y^t M_{i_1} > Y^t M_{i_2} > \dots > Y^t M_{i_w} > \dots$. Donc, la vivacité de (C, M_0) implique qu'il existe une séquence infinie et strictement décroissante d'entiers naturels (absurde).

- b/ est une application directe du théorème de Stiemke ([DAN63] page 138).
 c/ Une démonstration similaire à celle suggérée par la proposition 8c/ peut être faite.

Proposition 11 :

Soit (C, M_0) un RdP vivant. Si il existe $\gamma \in \mathbb{Q}^n$, $\gamma > 0$ tel que $\gamma^t C > 0$ alors (C, M_0) est non borné.

Démonstration :

On peut supposer que $\gamma \in \mathbb{N}^n$, sans pour cela restreindre la généralité des hypothèses. Posons $\gamma^t C = K = [k_1, k_2, \dots, k_m] > 0$. K^t définit une partition sur l'ensemble T des transitions de $(C, -)$: $T = T_0 \cup T_+$ où

$$T_0 = \{t_j \mid y_j = 0\} \quad \text{et} \quad T_+ = \{t_j \mid y_j > 0\}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \forall t_0 \in T_0, \quad \text{si } M_i \xrightarrow{t_0} M_j \quad \text{alors} \quad \gamma^t M_i &= \gamma^t M_j \\ \forall t_+ \in T_+, \quad \text{si } M_s \xrightarrow{t_+} M_q \quad \text{alors} \quad \gamma^t M_q &> \gamma^t M_s \end{aligned}$$

Soit $S = M_0, M_1, M_2, \dots, M_r, \dots$ une séquence de marquages successivement atteints à partir de M_0 et $M_0, M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_w}, \dots$ la séquence extraite de S et formée par ses marquages atteints juste après la mise à feu d'une transition de T_+ . Alors, $\gamma^t M_0, \gamma^t M_{i_1}, \gamma^t M_{i_2}, \dots, \gamma^t M_{i_w}, \dots$ est une séquence strictement croissante d'entiers positifs. Si (C, M_0) est vivant on peut mettre à feu les transitions T_+ un nombre infini de fois et par conséquent (C, M_0) n'est pas borné.

Proposition 12 :

Soit $(C, -)$ un RdP pour lequel il existe $\gamma \in \mathbb{Q}^n$, $\gamma > 0$ tel que $\gamma^t C > 0$.

- a/ Si $(C, -)$ est structurellement vivant alors il n'est pas structurellement borné.
 b/ $(C, -)$ n'est pas consistant,
 c/ L'ensemble des places de $S(\gamma)$ est une trappe.

Démonstration :

a/ est conséquence directe de la proposition précédente. Des démonstrations parallèles à celles des propositions 10b/ et 8c/ peuvent être faites pour b/ et c/ respectivement.

Proposition 13 :

- a/ Un RdP n'est pas structurellement borné ssi il existe $X \in \mathbb{Q}^m$, $X > 0$ tel que $CX > 0$.
- b/ Si il existe $X \in \mathbb{Q}^m$, $X > 0$ tel que $CX > 0$ alors l'ensemble des transitions T_1 de $S(X)$ est tel que $\cdot T_1 \subseteq T_1 \cdot$.

Démonstration :

a/ Supposons qu'il existe un marquage M_0 tel que (C, M_0) n'est pas borné. Alors il peut être démontré [HAC 75] qu'il existe deux marquages $M_1, M_2 \in \vec{M}_0$ tels que $M_2 \in \vec{M}_1$ et $M_2 > M_1$. Ceci implique que $M_2 = M_1 + CX$, $X \in \mathbb{N}^m$, et $CX > 0$. Inversement, supposons que $\exists X \in \mathbb{N}^m$, $CX > 0$. Alors, on peut trouver deux marquages M_1, M_2 et une séquence σ tels que $M_1 \xrightarrow{\sigma} M_2$ et le vecteur de mise à feu de σ , $v(\sigma) = X$.

b/ Démonstration analogue à celle de 8c/.

Proposition 14 :

Soit $(C, -)$ un RdP et $X \in \mathbb{Q}^m$, $X > 0$ tel que $CX < 0$.

- a/ Si $(C, -)$ est structurellement borné alors il n'est pas structurellement vivant.
- b/ $(C, -)$ n'est pas conservatif.
- c/ L'ensemble des transitions T_2 de $S(X)$ est tel que $T_2 \cdot \subseteq \cdot T_2$.

Démonstration :

Supposons que $(C, -)$ est structurellement borné et vivant. Ceci implique qu'il est consistant. Donc, il existe un t-semiflot X_0 tel que $CX_0 = 0$. Dans ce cas

on peut trouver un rationnel positif λ tel que $X' = \lambda X_0 - X > 0$. On a, $CX' = 0$ et $(C, -)$ est supposé être borné (contradiction).

Remarque :

Il peut être vérifié que les inverses des propositions 8c, 9b, 10c/ ne sont pas vraies. Par exemple, le RdP de la figure 2 contient le verrou $\{p_1, p_2, p_3\}$ mais il n'y a pas de vecteur $Y, Y^t C < 0$, tel que $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0, y_3 \neq 0, y_4 = 0, y_5 = 0$.

Lemme 1 :

Soit $(C, -)$ un RdP.

a/ Ou bien $(C, -)$ est consistant ou bien il existe un vecteur $Y \in \mathbb{Z}^n$ tel que $Y^t C > 0$.

b/ Ou bien $(C, -)$ est conservatif ou bien il existe un vecteur $X \in \mathbb{Z}^m$ tel que $CX > 0$.

Démonstration :

Ce lemme est une formulation du théorème de Stiemke pour les matrices C et C^t .

Proposition 15 :

Soit $(C, -)$ un RdP borné et consistant.

a/ $(C, -)$ est conservatif.

b/ Pour tout RdP initialisé (C, M_0) l'ensemble \vec{M}_0 est formé de vecteurs deux à deux incomparables.

Démonstration :

a/ Pour prouver cette proposition, il est suffisant de montrer que si un RdP $(C, -)$ est borné et consistant il n'existe pas de vecteur $X, X \in \mathbb{Z}^m$ tel que $CX > 0$. Alors la preuve est complétée en utilisant le lemme 1b/.

Supposons qu'il existe un vecteur $X, X \in \mathbb{Z}^m, CX > 0$. $(C, -)$ est consistant et

il existe un t-semiflot X_0 , $CX_0=0$, avec toutes ses composantes positives. Alors il est possible de trouver un vecteur X_1 , $X_1 > 0$, qui est combinaison linéaire de X et de X_0 tel que $CX_1 > 0$. Ceci implique que $(C, -)$ n'est pas borné.

b/ Soient $M_i, M_j \in \vec{M}_0$. Alors $M_i = M_0 + CX_i$ et $M_j = M_0 + CX_j$ où $X_i, X_j \in \mathbb{N}^m$ sont des vecteurs de mise à feu. Si $M_i > M_j$ alors $C(X_i - X_j) > 0$ et d'après le lemme 1b/ $(C, -)$ n'est pas conservatif.

Le résultat suivant peut être démontré à partir de la proposition 15 et de la proposition 8b/ .

Proposition 16 :

Si un RdP est structurellement vivant et borné alors il est consistant et conservatif.

Remarque :

La proposition 15 permet de calculer pour un RdP structurellement borné et consistant une borne supérieure du cardinal de ses classes de marquages. Si par exemple (C, M_0) est sauf alors $|\vec{M}_0| \leq \binom{n}{k}$ où $k = \frac{n}{2}$ si n est pair et $k = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

Proposition 17 :

Soit $(C, -)$ un RdP.

- a/ Si $(C, -)$ est conservatif et non-consistant alors il est non structurellement vivant.
- b/ Si $(C, -)$ est non-conservatif et consistant alors il est non structurellement borné.
- c/ Si $(C, -)$ est non-conservatif et non-consistant, alors il est non structurellement borné et non structurellement vivant.

Démonstration :

a/ Si $(C, -)$ est non-consistant alors il existe $Y \in \mathbb{Z}^n$ tel que $Y^t C > 0$.

Si de plus il est conservatif, alors il existe un p-semiflot Y_0 , $Y_0^t C = 0$ tel que toutes ses composantes soient positives. Dans ce cas on peut trouver $Y_1 \in \mathbb{N}^n$, combinaison linéaire de Y et de Y_0 tel que $Y_1^t C < 0$.

Des démonstrations analogues peuvent être faites pour b/ et c/.

Remarque :

La réciproque de la proposition 16 n'est pas vraie. Le RdP de la figure 3 est consistant et conservatif mais il n'est pas structurellement vivant.

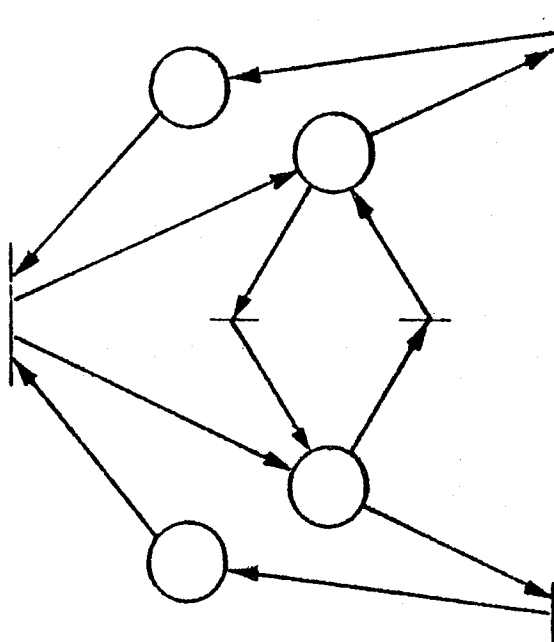


figure 3

Proposition 18 :

Un RdP $(C, -)$ est consistant et conservatif ssi il n'existe pas de vecteurs $X_1, X_2 \in \mathbb{N}^m$ et $Y_1, Y_2 \in \mathbb{N}^n$ tels que $CX_1 > 0$, $CX_2 < 0$, $Y_1^t C > 0$, $Y_2^t C < 0$.

Démonstration :

Par application du théorème de Stiemke pour les matrices C et C^t .

Lemme 2 :

Si un RdP $(C, -)$ est consistant (conservatif) alors tout vecteur engendré par l'espace des colonnes (lignes) de C peut être exprimé comme leur combinaison linéaire avec des coefficients positifs.

Proposition 19 :

- a/ Soit $(C, -)$ un RdP consistant tel que il existe $w \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $w \neq \emptyset$, tel que : $\forall Y \in \mathbb{Z}^n$, $Y^t C = 0 \Rightarrow y_i = 0 \quad \forall i \in w$. Alors $(C, -)$ est non (structurellement) borné.
- b/ Soit $(C, -)$ un RdP conservatif tel que il existe $w \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, $w \neq \emptyset$, tel que : $\forall X \in \mathbb{Z}^n$, $CX = 0 \Rightarrow x_i = 0, \quad \forall i \in w$. Alors $(C, -)$ est non (structurellement) vivant.

Démonstration :

- a/ Considérer un vecteur U tel que $u_i = 0$ si $i \in w$ et $u_i > 0$ sinon. Alors $Y^t U = 0$, $U > 0$ et U appartient à l'espace des colonnes de C . Suivant le lemme 2 il existe $X > 0$ tel que $CX = U$. Donc $(C, -)$ est non borné.
- b/ Démonstration analogue à la précédente.

V.4.2.3. Composantes d'un RdP et propriétés structurelles**Définitions :**

- . Etant donné $(C, -)$ un RdP et $X \in \mathbb{N}^m$, $Y \in \mathbb{N}^m$ on appellera :
- $S(X)$ composante consistante (respectivement, composante surconsistante, composante sousconsistante) de $(C, -)$ si $CX = 0$ (respectivement, $CX > 0$, $CX < 0$).

- $S(Y)$ composante conservative (respectivement, composante surconservative, composante sousconservative) de $(C, -)$ si $Y^t C = 0$ (respectivement, $Y^t C > 0$, $Y^t C < 0$).

- . Une composante R_1 d'un RdP R sera dit élémentaire ssi il n'y a pas de composante du même type contenue dans R_1 .

La proposition suivante peut être démontrée facilement.

Proposition 20 :

Etant donné un RdP R

- a/ L'union de deux composantes du même type est une composante du même type.
- b/ L'union d'une composante consistante avec une composante surconsistante (respectivement sousconsistante) et une composante surconsistante (respectivement sousconsistante).
- c/ L'union d'une composante conservative avec une composante surconservative (respectivement sousconservative) est une composante surconservative (respectivement sousconservative).

Proposition 21 :

Tout couple de vecteurs ayant comme support la même composante consistante élémentaire ou composante conservative élémentaire, sont linéairement dépendants.

Démonstration :

Soient X_1, X_2 deux vecteurs linéairement indépendants tels que $S(X_1) = S(X_2)$ et $S(X_1)$ une composante consistante élémentaire.

Si $\lambda = \min_{x_{2j} \neq 0} \left\{ \frac{x_{1j}}{x_{2j}} \right\}$ et $X_3' = X_1 - \lambda X_2$, alors $X_3' > 0$. A partir de X_3' on peut

trouver un vecteur $X_3 = \mu X_3'$, $X_3 > 0$, ayant des composantes entières. On a $CX_3 = 0$ et $S(X_3) \not\subseteq S(X_1)$. Par conséquent $S(X_1)$ n'est pas élémentaire.

Proposition 22 :

Tout RdP consistant (conservatif), $R=(C,-)$, est décomposable à un ensemble de composantes consistantes (conservatives) élémentaires.

Démonstration :

Soit X_0 un t-semiflot de R tel que $S(X_0)=R$. Si R n'est pas une composante consistante élémentaire, alors il existe une composante consistante R_1 contenue dans R et $X_1 > 0$, $CX_1=0$, tel que $R_1=S(X_1)$.

Soient, comme dans la démonstration précédente, $\lambda = \min \left\{ \frac{x_{0j}}{x_{1j}} \right\}$ et $X'_2 = X_0 - \lambda X_1$.

Alors $X'_2 > 0$ et on peut trouver un vecteur $X_2 = \mu X'_2$, $X_2 > 0$, ayant ses composantes entières. De plus $S(X_0) = S(X_1) \cup S(X_2)$.

Cette méthode peut être appliquée itérativement pour décomposer un RdP consistant en un ensemble de composantes consistantes élémentaires.

Proposition 23 :

- a/ Soit R_1 une composante surconsistante ou sousconsistante élémentaire d'un RdP R . Alors, il n'existe pas de composante consistante de R contenue dans R_1 .
- b/ Soit R_1 une composante surconservative ou sousconservative élémentaire d'un RdP R . Alors, il n'existe pas de composante conservative de R contenue dans R_1 .

Démonstration :

Des démonstrations similaires peuvent être faites pour a/ et b/.

Soit $X_1 \in \mathbb{N}^m$, $CX_1 > 0$, $R_1=S(X_1)$ et $X_2 \in \mathbb{N}^m$, $CX_2=0$, $R_2=S(X_2)$. Supposons que R_2 est contenu dans R_1 . Alors on peut trouver un rationnel positif λ tel que $X'_3 = X_1 - \lambda X_2 > 0$ et un vecteur $X_3 \in \mathbb{N}^m$, multiple de X'_3 par un scalaire. $S(X_3)$ est une composante surinvariante contenue dans $S(X_1)$. Donc $S(X_1)$ n'est pas élémentaire.

Proposition 24 :

Les graphes des marquages d'une composante surconsistante ou sousconsistante élémentaire sont acycliques.

Démonstration :

Cette proposition est conséquence de la proposition 23a/ : si un graphe de marquages d'une composante surconsistante ou sousconsistante contient un circuit alors elle n'est pas élémentaire.

Proposition 25 :

a/ Une composante surconsistante (sousconsistante) élémentaire ne contient pas de composante sousconsistante (surconsistante).

b/ Une composante surconservatrice (sousconservatrice) élémentaire ne contient pas de composante sousconservatrice (surconservatrice).

Démonstration :

Analogue à celle de la proposition 23.

Remarque :

Il est facile de vérifier que les composantes autres que les consistantes et les conservatives, ne sont pas décomposables en composantes du même type. Par exemple, le RdP R de la figure 4 est une composante surconsistante non élémentaire puisque elle contient R_1 qui est également une composante surconsistante. Mais il n'existe pas de composante du même type R_2 , contenue dans R telle que $R = R_1 \cup R_2$.

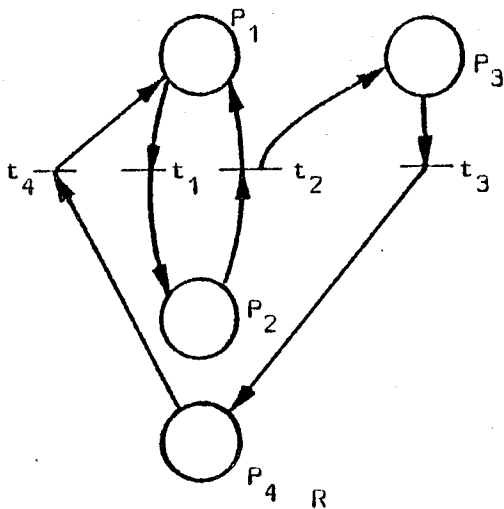
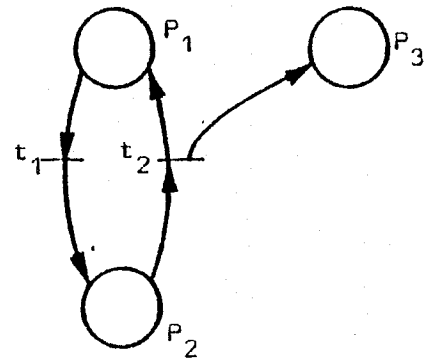


figure 4



R_1

Figure 4

Définition :

Un RdP sera dit connexe (fortement connexe) si le graphe qui le représente est connexe (fortement connexe).

Proposition 26 :

Si un RdP consistant est connexe mais non fortement connexe alors il est non structurellement borné et il est décomposable en une composante surconsistante et une composante sousconsistante.

Démonstration :

Si R est connexe mais non fortement connexe alors il est constitué d'au moins deux composantes fortement connexes K_1 et K_2 telles que de tout noeud de K_1 il existe un chemin orienté vers tout noeud de K_2 mais il n'existe pas de chemin d'un noeud de K_2 vers un noeud de K_1 . R étant consistant il existe une séquence de mise à feu σ et un marquage M_0 tels que $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_0$ et σ contient toutes les transitions de R .

Soit σ_1 une sous-séquence de σ obtenue en éliminant toutes les transitions de σ qui n'appartiennent pas à K_1 . Représentons par \tilde{M}_0 le vecteur $\tilde{m}_{0_i} = m_{0_i}$ si $p_i \in K_1$ et $\tilde{m}_{0_i} = 0$ sinon. Alors, $\tilde{M}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \tilde{M}_0$ parce que les mises à feu des transitions qui n'appartiennent pas à K_1 ne font que décroître de nombre de marques de ses places. Soit u_0, u_1, \dots, u_s un chemin orienté d'un noeud u_0 de K_1 vers un noeud u_s de K_2 et u_i un noeud de ce chemin tel que $u_i \in K_1$ et $u_{i+1} \notin K_1$. Alors si u_i est une place, le fait que $\tilde{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \tilde{M}_0$ implique que σ n'est pas une séquence cyclique. Donc, u_i est une transition et l'ensemble des transitions T_1 de K_1 est tel que $T_1 \subseteq T_1^*$. De plus l'application de σ_1 fait augmenter le nombre de marques de places p_i , $p_i \notin K_1$. Donc R n'est pas borné et le sous-réseau (T_1^*, T_1) est une composante surconsistante. Aussi $v(\sigma) - v(\sigma_1) > 0$ et $S(v(\sigma) - v(\sigma_1))$ est une composante sousconsistante telle que $R = S(v(\sigma_1)) \cup S(v(\sigma) - v(\sigma_1))$.

Proposition 27 :

Si une composante conservative est connexe mais non fortement connexe alors elle est non structurellement vivante et décomposable en une composante surconservative et une composante sousconservative.

Démonstration :

En considérant le réseau dual du réseau représentant cette composante conservative : il est consistant, connexe mais non fortement connexe. Donc, ce résultat peut être démontré en se servant de la proposition précédente.

Remarque :

Les réciproques des propositions 26 et 27 ne sont pas vraies. Considérons, par exemple, le RdP de la figure 2. Il est une composante consistante et il est décomposable en une composante surconsistante et une composante sousconsistante mais il est fortement connexe.

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 26.

Proposition 28 :

Si un RdP est consistant, structurellement borné et connexe, alors il est fortement connexe.

CHAPITRE VI

LA NOTION DE PLACE IMPLICITE : DEUX APPLICATIONS

VI.1.	PLACES IMPLICITES -----	2
VI.2.	LES NOTIONS D'AVANCE ET DE DISTANCE SYNCHRONIQUE	
VI.2.1.	Avance et distance synchronique entre ensembles de transitions -----	5
VI.2.2.	Avance et distance synchronique entre bases de temps -----	9
VI.3.	HOMOMORPHISMES DE RESEAUX DE PETRI ET LEUR APPLICATION A LA REALISATION DE SYSTEMES TOLERANT LES FAUTES	
VI.3.1.	Homomorphismes de réalisation -----	14
VI.3.2.	Application à la réalisation de systèmes tolérant des fautes -----	19
VI.3.2.1.	Les notions de distance des marquages et de faute -----	19
VI.3.2.2.	Codage des réseaux de Petri -----	21
VI.3.2.3.	Réalisation du système tolérant les fautes	
VI.3.2.3.1.	Cas général -----	26
VI.3.2.3.2.	Réseaux de Petri restant bornés en cas de faute -----	28
VI.3.2.4.	Codage d'un RdP et composantes conservatives.-----	31

Chapitre VI

PRESENTATION

Dans ce chapitre sont présentés des concepts qui peuvent être introduits sur les réseaux de Petri à partir d'invariants particuliers qui sont les places implicites. Il est divisé en deux parties.

Les concepts d'avance et de distance synchronique étudiés dans la première partie permettent d'étudier l'interdépendance entre les événements d'un système asynchrone.

Dans la deuxième partie sont étudiés des homomorphismes de réalisation particuliers, la notion de codage des réseaux ainsi que leur application à la réalisation de systèmes tolérant les fautes.

VI.1. PLACES IMPLICITES

Définition :

Soit (R, M_0) un RdP initialisé $R=(P, T, a, b)$. Une place p_i de R est dite place implicite si le RdP R_1 défini par le sous-réseau $(P - \{p_i\}, T)$ est tel que (R, M_0) est équivalent à (R_1, M_{0_1}) où M_{0_1} est le marquage obtenu à partir de M_0 en enlevant la composante correspondant à p_i .

Proposition 1 :

Soit (C, M_0) un RdP et p_i une de ses places. Si la i -ème ligne L_i de C est exprimable comme combinaison linéaire à coefficients non négatifs des autres lignes $L_i = \sum_{s \neq i} \lambda_s L_s$ et $m_{0_i} \geq \sum_{s \neq i} \lambda_s m_{0_s}$, alors p_i est une place implicite.

Démonstration :

Evidemment le langage généré par (C, M_0) est contenu dans le langage généré par le RdP (C_1, M_{0_1}) obtenu à partir du premier en enlevant la place p_i .

Pour démontrer que le langage généré par (C_1, M_{0_1}) est contenu dans le langage généré par (C, M_0) il suffit de démontrer que

$$X \in \mathbb{N}^m, \quad M_{0_1} + C_1 X \geq 0 \Rightarrow M_0 + C X \geq 0$$

Ceci est toujours vrai si $L_i = \sum_{s \neq i} \lambda_s L_s$, $m_{0_i} \geq \sum_{s \neq i} \lambda_s m_{0_s}$ et les λ_s sont des rationnels non négatifs. En effet,

$$M_{0_1} + C_1 X \geq 0 \Rightarrow \sum_{s \neq i} \lambda_s m_{0_s} + \sum_{s \neq i} \lambda_s L_s X \geq 0 \Rightarrow (\sum_{s \neq i} \lambda_s m_{0_s}) + L_i X \geq 0 \Rightarrow m_{0_i} + L_i X \geq 0.$$

Proposition 2 :

Soient $Y \in \mathbb{N}^n$ et (C, M_0) un RdP initialisé à n places.

a/ Le RdP (C', M'_0) obtenu à partir de (C, M_0) en lui rajoutant une nouvelle place p_{n+1} telle que $C' = \begin{bmatrix} C \\ Y^t C \end{bmatrix}$, $M'_0 = \begin{bmatrix} M_0 \\ Y^t M_0 \end{bmatrix}$ est équivalent à (C, M_0) .

- b/ Si $(C, -)$ est conservatif, alors il existe une composante conservative dans $(C', -)$ qui contient la place rajoutée, autrement dit $(C', -)$ est également conservatif.

Démonstration :

- a/ Par application de la proposition précédente pour le RdP (C', M_0') .
- b/ Si J est un p -semiflot de $(C, -)$ tel que $S(J) = (C, -)$, alors le vecteur ligne $[J^t - Y^t, 1]$ est un p -flot de $(C', -)$. On peut toujours rendre ce p -flot positif par choix approprié de J .

Définition :

Soit $R = (P, T, a, b)$ un RdP et p_i une de ses places. La place p_i sera dite potentiellement implicite si le RdP R_1 défini par le sous-réseau $(P - \{p_i\}, T)$ est tel que pour tout marquage M_{0_1} de R_1 on peut trouver un marquage m_{0_1} de p_i rendant p_i explicite dans R .

Proposition 3 :

Soit $R = (P, T, a, b)$ un RdP conservatif et p_i une de ses places telle que le sous-réseau $(P - \{p_i\}, T)$ soit conservatif. Alors, p_i est potentiellement implicite.

Démonstration :

R étant conservatif on peut écrire $L_i = \sum_{i \neq j} \lambda_j L_j$ où les λ_j sont des coefficients non forcément positifs et L_i est la i -ème ligne de sa matrice d'incidence. Le sous-réseau $(P - \{p_i\}, T)$ étant conservatif il existe des coefficients $y_j > 0$ tels que $\sum_{i \neq j} y_j L_j = 0$. On peut en additionnant les deux égalités et en choisissant les y_j suffisamment grands, obtenir $L_i = \sum_{i \neq j} \lambda'_j L_j$ avec $\lambda'_j \geq 0$.

Remarque :

D'après les propositions précédentes on peut facilement rajouter des places implicites à un RdP initialisé. Aussi on peut utiliser la dernière proposition

pour "simplifier" un RdP en enlevant les places implicites étant donné que ces places ne jouent aucun rôle pendant le fonctionnement ([BFR78]).

Exemple :

Soit le RdP de la figure 1. Il a comme matrice d'incidence

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes conservatives élémentaires sont définies par les p-semiflats $[11000]$, $[00110]$, $[01011]$. On a d'après la proposition 3 (L_i représente la i -ème ligne de C).

$$L_1 = L_4 + L_5$$

$$L_3 = L_2 + L_5$$

$$L_5 = L_1 + L_3$$

Donc p_1 , p_3 et p_5 sont potentiellement implicites dans $(C, -)$. Elles sont effectivement implicites lorsque leurs marquages initiaux satisfont respectivement les relations :

$$m_{0_1} \geq m_{0_4} + m_{0_5}, \quad m_{0_3} \geq m_{0_2} + m_{0_5}, \quad m_{0_5} \geq m_{0_1} + m_{0_3}$$

Pour le marquage donné p_1 et p_3 sont implicites mais p_5 ne l'est pas.

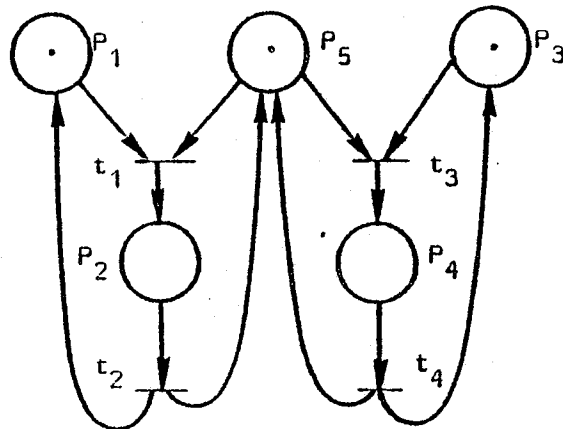


figure 1

VI.2. LES NOTIONS D'AVANCE ET DE DISTANCE SYNCHRONIQUE

VI.2.1. Avance et distance synchronique entre ensembles de transition

Définition :

Soit (R, M_0) un RdP initialisé, $R = \{P, T, a, b\}$, $|T| = m$, et T_1, T_2 deux sous-ensembles de T disjoints. On représente par $\underline{T}_1, \underline{T}_2$ les vecteurs caractéristiques de T_1, T_2 c'est-à-dire $\underline{T}_1 \in \{0, 1\}^m$ et la i -ème composante de \underline{T}_1 est égale à 1 ssi la transition $t_i \in T_1$. Les notations $v(\sigma)$ et $L(R, M_0)$ représentent respectivement le vecteur de mise à feu d'une séquence σ et le langage généré par (R, M_0) .

On définit l'avance de T_1 par rapport à T_2 dans $R(M_0)$

$$AV(T_1, T_2; M_0) = \begin{cases} \text{Max}_{\sigma \in L(R, M_0)} \{(\underline{T}_1^t - \underline{T}_2^t) v(\sigma)\} & \text{si cette quantité est positive} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 4 :

Soit (C, M_0) un RdP initialisé, T_1 et T_2 deux ensembles disjoints de transitions. Les propositions suivantes sont équivalentes.

a/ $AV(T_1, T_2; M_0) = s$, $s \in \mathbb{N}$, dans (C, M_0) .

b/ Le RdP initialisé (C', M'_0) obtenu à partir de (C, M_0) en lui rajoutant une nouvelle place p_{n+1} telle que $C' = \begin{bmatrix} C \\ \underline{T}_2^t - \underline{T}_1^t \end{bmatrix}$, $M'_0 = \begin{bmatrix} M_0 \\ s \end{bmatrix}$ est équivalent

à (C, M_0) . De plus, s est minimum pour cette propriété.

Démonstration :

$$AV(T_1, T_2; M_0) = s \iff s = \text{Max}_{\sigma \in L(R, M_0)} \{(\underline{T}_1^t - \underline{T}_2^t) v(\sigma)\} \iff s \geq (\underline{T}_1^t - \underline{T}_2^t) v(\sigma), \forall \sigma \in L(R, M_0)$$

et s est minimum pour cette propriété.

$$\text{Ceci donne : } s + (\underline{T}_2^t - \underline{T}_1^t) v(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in L(R, M_0).$$

Donc si σ est séquence de mise à feu possible dans (C, M_0) alors elle l'est dans $(\begin{bmatrix} C \\ T_2^t - T_1^t \end{bmatrix}, \begin{matrix} |M_0| \\ s \end{matrix})$. Aussi, toute séquence de mise à feu possible dans (C', M'_0) l'est dans (C, M_0) . Donc $(C, M_0) \equiv (C', M'_0)$.

On peut démontrer facilement l'inverse.

Remarque :

D'après la proposition précédente, si $AV(T_1, T_2; M_0) = s$, $s \in \mathbb{N}$, dans un RdP (R, M_0) alors en rajoutant une place p_{n+1} ayant $T_1 = p_{n+1}$, $T_2 = p_{n+1}$ et étant initialisée à s , cette place p_{n+1} est implicite (figure 2).

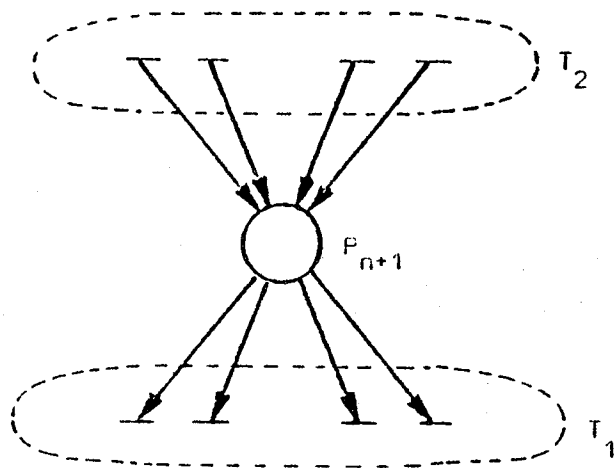


Figure 2

On peut en partant de cette remarque donner une autre définition de $AV(T_1, T_2; M_0)$:
 "AV($T_1, T_2; M_0$) dans un RdP (R, M_0) est le nombre minimum de marques qu'il faut mettre initialement dans une place p_{n+1} rajoutée à R , telle que $T_1 = p_{n+1}$, $T_2 = p_{n+1}$ pour que cette place devienne implicite".

Cette notion permet d'étudier l'interdépendance qui existe entre les événements (mises à feu de transitions) dans un RdP. Pour deux transitions t_1 et t_2 , $AV(\{t_1\}, \{t_2\}; M_0) = s$, $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$, signifie que le maximum de l'écart "nombre de mises à feu de t_1 moins nombre de mises à feu de t_2 " est égal à s , c'est-à-dire

l'évènement mise à feu de t_1 ne peut "précéder" l'évènement mise à feu de t_2 qu'un nombre fini de fois. De même, $AV(\{t_1\}, \{t_2\}; M_0) = 0$ signifie que l'évènement mise à feu de t_2 "précède" toujours l'évènement mise à feu de t_1 .

Proposition 5 :

Soit (R, M_0) un RdP initialisé et T_1, T_2, T_3 trois ensembles de transitions deux à deux disjoints. Alors,

$$AV(T_1, T_2; M_0) + AV(T_2, T_3; M_0) \geq AV(T_1, T_3; M_0)$$

Démonstration :

On a

$$\max_{\sigma \in L(R, M_0)} \left\{ \frac{T_1^t - T_2^t}{1 \quad 2} v(\sigma) \right\} + \max_{\sigma \in L(R, M_0)} \left\{ \frac{T_2^t - T_3^t}{2 \quad 3} v(\sigma) \right\} \geq$$

$$\max_{\sigma \in L(R, M_0)} \left\{ \frac{T_1^t - T_2^t}{1 \quad 2} v(\sigma) + \frac{T_2^t - T_3^t}{2 \quad 3} v(\sigma) \right\} = \max_{\sigma \in L(R, M_0)} \left\{ \frac{T_1^t - T_3^t}{1 \quad 3} v(\sigma) \right\}$$

Définition :

Soit (R, M_0) un RdP et T_1, T_2 deux ensembles de transitions de R disjoints.

On définit la distance synchronique entre T_1 et T_2 dans (R, M_0) comme la somme

$$DS(T_1, T_2; M_0) = AV(T_1, T_2; M_0) + AV(T_2, T_1; M_0)$$

La proposition suivante est une conséquence directe de la proposition 4 :

Proposition 6 :

Soit (C, M_0) un RdP initialisé et T_1, T_2 deux ensembles de transitions disjoints de ce réseau. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

a/ $DS(T_1, T_2; M_0) = s$, $s \in \mathbb{N}$, dans (C, M_0)

b/ Il existe deux entiers naturels s_1 et s_2 , $s = s_1 + s_2$ tels que si on rajoute à (C, M_0) deux places p_{n+1} et p_{n+2} avec $p_{n+1} = p_{n+2} = T_1$, $p_{n+1} = p_{n+2} = T_2$, initialisées respectivement à s_1 et s_2 , le RdP ainsi obtenu est équivalent à (C, M_0) . De plus, s est minimum pour cette propriété.

Propriétés :

Soit (R, M_0) un RdP. T_1, T_2, T_3 trois ensembles de transitions de ce réseau deux à deux disjoints. Alors

a/ $DS(T_1, T_1; M_0) = 0$

b/ Si $DS(T_1, T_2; M_0) = 0$ alors soit $T_1 = T_2$ soit les mots de $L(R, M_0)$ ne contiennent pas de transition t , $t \in T_1 \cup T_2$.

c/ $DS(T_1, T_2; M_0) = DS(T_2, T_1; M_0)$

d/ $DS(T_1, T_2; M_0) + DS(T_2, T_3; M_0) \geq DS(T_1, T_3; M_0)$

Démonstration :

a/ et c/ sont conséquences directes des définitions et d/ de la proposition 5.

b/ Supposons que $DS(T_1, T_2; M_0) = 0$, $T_1 \neq T_2$ et que $\exists \sigma \in L(R, M_0)$ σ contenant une transition de $T_1 \cup T_2$. Décomposer σ , $\sigma = \sigma_1 t \sigma_2$ où σ_1 ne contient pas de transition de $T_1 \cup T_2$ et $t \in T_1 \cup T_2$. Alors $\sigma_1 \in L(R, M_0)$ et au moins une des quantités $AV(T_1, T_2; M_0)$ où $AV(T_2, T_1; M_0)$ est positive. Absurde parce que $DS(T_1, T_2; M_0) = 0$.

Remarques :

. Si (R, M_0) est vivant, alors DS est une distance.

. Les prédicats $AV(T_1, T_2; M_0) = u$ et $DS(T_1, T_2; M_0) = s$ expriment des invariants d'un RdP. De plus, tout RdP ordinaire pur peut être décrit par un ensemble d'invariants du type $AV(T_1, T_2; M_0) \leq u$ chaque place définissant un tel invariant :

Considérons l'invariant caractéristique d'un RdP ordinaire pur $CX \geq -M_0$ (paragraphe IV.4.2.). Si L_i est la i -ème ligne de C la i -ème inéquation s'écrit $L_i X \geq -m_{0_i}$ ou $m_{0_i} \geq -L_i X$; ce qui est équivalent à $m_{0_i} \geq AV(T_1, T_2; M_0)$ où T_1 et T_2 sont respectivement les ensembles des transitions de sortie et d'entrée de la place p_i . Ainsi le RdP de la figure 1 peut être décrit par les contraintes:

$$\begin{aligned}
 1 &\geq AV(\{t_1\}, \{t_2\}; M_0) \\
 0 &= AV(\{t_2\}, \{t_1\}; M_0) \\
 1 &\geq AV(\{t_3\}, \{t_4\}; M_0) \\
 0 &= AV(\{t_4\}, \{t_3\}; M_0) \\
 1 &\geq AV(\{t_1, t_3\}, \{t_2, t_4\}; M_0)
 \end{aligned}$$

VI.2.2. Avance et distance synchronique entre bases de temps

Soit le RdP (R, M_0) de la figure 3a. Ce réseau étant une composante consistante élémentaire on peut vérifier facilement que $AV(\{t_1\}, \{t_2\}; M_0) = \omega$ où ω représente une quantité supérieure à tout entier naturel. En effet une mise à feu de t_2 est suivie de deux mises à feu de t_1 et si on rajoute à R une place p_7 , $\{t_2\} = p_7$, $\{t_1\} = p_7$ (figure 3b) le nombre des marques initialement posées dans p_7 doit être non borné pour que p_7 devienne place implicite. On peut remarquer cependant qu'en associant un poids de 2 à l'arc entrant de p_7 cette place devient implicite si elle contient initialement une marque (figure 3c).

Dans ce cas on a :

$$\max_{\sigma \in L(R, M_0)} \{ \underbrace{\{t_1\}^t}_1 - 2 \underbrace{\{t_2\}^t}_2 \} v(\sigma) = 1$$

Cette dernière relation illustre mieux les liens qui existent entre les événements mise à feu de t_1 et mise à feu de t_2 que la relation $AV(\{t_1\}, \{t_2\}; M_0) = \omega$. Ceci nous a amenés à généraliser les notions d'avance et de distance synchronique de la façon suivante.

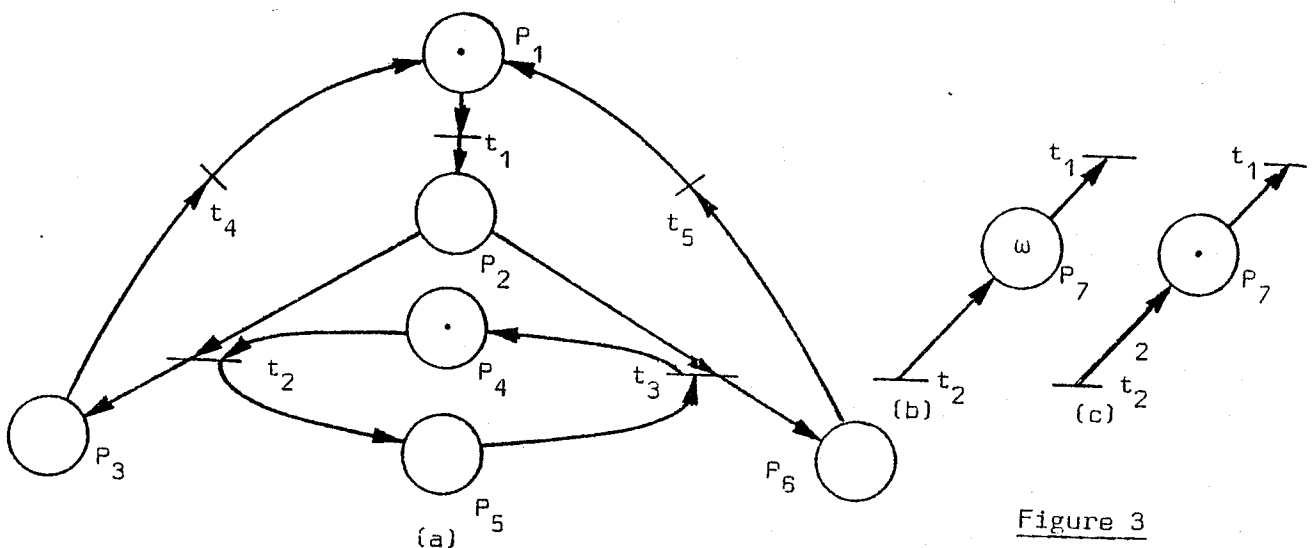


Figure 3

Définitions :

Etant donné un RdP $R=(P,T,a,b)$ une base de temps de R sera une application BT de T^* dans un ensemble totalement ordonné (E, \geq) telle que $\forall \sigma \in T^*$
 $\forall t \in T \quad BT(\sigma t) \geq BT(\sigma)$.

On s'intéresse plus particulièrement à une famille de bases de temps appelées bases de temps linéaires (BTL). Etant donné $X \in \mathbb{N}^m$, $m=|T|$, on définit la base de temps linéaire avec échelle X comme l'application $BTL[X]:T^* \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall \sigma \in T^* \quad BTL[X](\sigma) = X^t v(\sigma)$.

Remarque :

Les bases de temps sont des fonctions qui permettent d'associer à l'évolution d'un système un paramètre qui est le temps. Pour les BTL les composantes de l'échelle X correspondent à des durées. Si la i -ème composante x_i de X est différente de 0 alors la durée de temps qui sépare l'occurrence de la mise à feu de t_i de tout événement qui le précède est x_i . Le fait qu'une composante x_j de X est égale à 0, signifie que les occurrences des mises à feu de la transition correspondante t_j sont "sans importance" ou "non observables" pour la base de temps choisie.

Définition :

Etant donné un RdP (R, M_0) et $X_1, X_2 \in \mathbb{N}^m$ on définit :

- L'avance de $BTL[X_1]$ par rapport à $BTL[X_2]$ dans (R, M_0) comme la quantité

$$AV(X_1, X_2; M_0) = \begin{cases} \max_{\sigma \in L(R, M_0)} \{(X_1^t - X_2^t) v(\sigma)\} & \text{si cette quantité est positive} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La distance synchronique entre $BTL[X_1]$ et $BTL[X_2]$ dans (R, M_0) comme la somme

$$DS(X_1, X_2; M_0) = AV(X_1, X_2; M_0) + AV(X_2, X_1; M_0)$$

On peut vérifier que les définitions d'avance et de distance synchronique entre ensembles de transitions peuvent être considérées comme cas particuliers des définitions ci-dessus. De même, on peut généraliser les propositions 4 et 6 ainsi que les propriétés du paragraphe précédent.

Proposition 7 :

Soit (C, M_0) un RdP initialisé à m transitions et X_1, X_2 deux vecteurs éléments de \mathbb{N}^m . Les propositions a/ et b/ et c/ et d/ sont équivalentes.

- a/ $AV(X_1, X_2; M_0) = u$, $u \in \mathbb{N}$, dans (C, M_0)
- b/ Le RdP initialisé (C', M'_0) obtenu à partir de (C, M_0) en lui rajoutant une nouvelle place p_{n+1} telle que $C' = \begin{bmatrix} C \\ X_2^t - X_1^t \end{bmatrix}$ et $M'_0 = \begin{bmatrix} M_0 \\ u \end{bmatrix}$ est équivalent à (C, M_0) . De plus, u est minimum pour cette propriété.
- c/ $DS(X_1, X_2; M_0) = s$, $s \in \mathbb{N}$, dans (C, M_0)
- d/ Il existe des entiers naturels s_1 et s_2 , $s = s_1 + s_2$ tels que si on rajoute à (C, M_0) deux places p_{n+1} p_{n+2} définies respectivement par les vecteurs lignes $X_2^t - X_1^t$ et $X_1^t - X_2^t$, initialisées à s_1 et s_2 , le RdP ainsi obtenu est équivalent à (C, M_0) . De plus, s est minimum pour cette propriété.

Propriétés :

Soit (R, M_0) un RdP initialisé à m transitions et X_1, X_2, X_3 trois vecteurs de \mathbb{N}^m . Alors :

- a/ Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, $AV(\lambda X_1, \lambda X_2; M_0) = \lambda AV(X_1, X_2; M_0)$
- b/ $AV(X_1 + X_3, X_2 + X_3; M_0) = AV(X_1, X_2; M_0)$
- c/ $DS(X_1, X_1; M_0) = 0$
- d/ Si $DS(X_1, X_2; M_0) = 0$ alors soit $X_1 = X_2$ soit $L(R, M_0)$ ne contient pas de transition du sous-réseau $S(X_1) \cup S(X_2)$.

$$e/ \quad DS(X_1, X_2; M_0) = DS(X_2, X_1; M_0)$$

$$f/ \quad DS(X_1, X_2; M_0) + DS(X_2, X_3; M_0) \geq DS(X_1, X_3; M_0)$$

Définition :

Étant donné un RdP R à m transitions et $X_1, X_2 \in \mathbb{N}^m$ on dira que

- L'avance de $BTL[X_1]$ par rapport à $BTL[X_2]$ dans R (notée $AV(X_1, X_2; -)$) est bornée ssi VM_0 marquage initial de R , $\exists u \in \mathbb{N}$ tel que $AV(X_1, X_2; M_0) = u$.
- La distance synchronique entre $BTL[X_1]$ et $BTL[X_2]$ dans R (notée $DS(X_1, X_2; -)$) est bornée ssi VM_0 marquage initial de R , $\exists s \in \mathbb{N}$ tel que $DS(X_1, X_2; M_0) = s$.

Remarque :

$AV(X_1, X_2; -)$ est bornée ssi la place définie par le vecteur ligne $X_2^t - X_1^t$ est potentiellement implicite.

Proposition 8 :

Soit $(C, -)$ un RdP à m transitions et X_1, X_2 deux vecteurs de \mathbb{N}^m . Si $AV(X_1, X_2; -)$ est bornée, alors $\forall X \in \mathbb{N}^m$, $CX \geq 0$, on a $(X_1^t - X_2^t)X \leq 0$.

Démonstration :

Supposons que $AV(X_1, X_2; -)$ est bornée et qu'il existe $X \in \mathbb{N}^m$, $CX \geq 0$, tel que $(X_1^t - X_2^t)X > 0$. Le support de X est soit une composante consistante soit une composante surconsistante. On peut donc trouver une séquence σ , $v(\sigma) = X$ et un marquage M_0 tel que σ soit itérativement applicable à partir de M_0 . Mais $AV(X_1, X_2; -)$ étant supposée bornée la place définie par le vecteur ligne $X_2^t - X_1^t$ est potentiellement implicite dans $(C, -)$. Donc pour le RdP initialisé (C, M_0) on doit pouvoir trouver un marquage initial qui rende cette place implicite. Mais ceci est impossible si $(X_1^t - X_2^t)X > 0$ parce que chaque fois que σ est appliquée on enlève de cette place $(X_1^t - X_2^t)X > 0$ marques. Donc $\forall k \in \mathbb{N}$ la séquence σ^k est applicable dans (C, M_0) mais elle n'est pas applicable lorsqu'on rajoute la place définie par $X_2^t - X_1^t$.

Conséquence directe de la proposition précédente est :

Proposition 9 :

Soit $(C, -)$ un RdP à m transitions et X_1, X_2 deux vecteurs de \mathbb{N}^m . Si $DS(X_1, X_2; -)$ est bornée alors $\forall X \in \mathbb{N}^m, CX \geq 0$, on a $(X_1^t - X_2^t)X = 0$.

Remarque :

Si $AV(X_1, X_2; -)$ est bornée alors si t_1 est transition de $S(X_1)$ et t_1 appartient à une composante consistante ou surconsistante, alors il existe une transition t_2 de $S(X_2)$ qui appartient à cette composante.

Proposition 10 :

Soit $(C, -)$ un RdP consistant et conservatif à m transitions et $X_1, X_2 \in \mathbb{N}^m$. Alors $DS(X_1, X_2; -)$ est borné ssi $X_1^t - X_2^t$ est exprimable comme combinaison linéaire à coefficients rationnels non négatifs des lignes de C .

Démonstration :

D'après la proposition précédente si $DS(X_1, X_2; -)$ est bornée alors $\forall X \in \mathbb{N}^m, CX \geq 0$ $(X_1^t - X_2^t)X = 0$. $(C, -)$ étant conservatif ceci devient $\forall X \in \mathbb{N}^m, CX = 0$ $(X_1^t - X_2^t)X = 0$. Mais puisque $(C, -)$ est également consistant (l'espace des t -flots a une base positive) le vecteur $X_1^t - X_2^t$ appartient à l'espace des lignes de C . Mais d'après le lemme 2 du chapitre précédent on peut exprimer $X_1^t - X_2^t$ comme la combinaison linéaire des lignes de C à coefficients positifs.

Pour démontrer la réciproque, il suffit d'utiliser la proposition 2 de ce chapitre.

VI.3. HOMOMORPHISMES DES RESEAUX DE PETRI ET LEUR APPLICATION A LA REALISATION DE SYSTEMES TOLERANT LES FAUTES

VI.3.1. Homomorphismes de réalisation

Définitions :

Soient $R = (P, T, a, b)$, $R' = (P', T', a', b')$ deux RdP avec $T=T'$, $|P|=n$, $|P'|=n'$ ($T=T'$ signifie qu'il existe une bijection entre les ensembles des transitions des deux RdP).

- . Si (R, M_0) et (R', M'_0) sont deux RdP initialisés et g une application $g : \vec{M}_0 \rightarrow \vec{M}'_0$, on dira que g est un homomorphisme de (R, M_0) dans (R', M'_0) ssi $M'_0 = g(M_0)$ et $\forall \sigma \in T^*$: si $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ dans (R, M_0) alors $g(M_0) \xrightarrow{\sigma} g(M)$ dans (R', M'_0) .
- . Une application $g, g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^{n'}$ sera dite homomorphisme de R dans R' ssi $\forall M_0 \in \mathbb{N}^n$ g est un homomorphisme de (R, M_0) dans $(R', g(M_0))$. Une telle application g sera dite homomorphisme de réalisation de R dans R' si de plus (R, M_0) est équivalent à $(R', g(M_0))$.

Propriétés :

Soit g un homomorphisme de (R, M_0) dans (R', M'_0) . Alors

- a/ $L(R, M_0) \subseteq L(R', M'_0)$
- b/ Si g est injective, le graphe des marquages de (R, M_0) est un sous-graphe partiel du graphe des marquages de (R', M'_0)
- c/ Si g est surjective : (R, M_0) est borné implique que (R', M'_0) est borné et (R, M_0) est vivant implique que (R', M'_0) est vivant.
- d/ Si g est bijective, les graphes de marquages de (R, M_0) et (R', M'_0) sont isomorphes et $(R, M_0) \equiv (R', M'_0)$.

Proposition 11 :

Soit (C, M_0) un RdP initialisé avec n places et $g : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n'}$ une application linéaire telle que $\forall M \in \vec{M}_0, M \neq 0, g(M) \in \mathbb{N}^{n'} - \{0\}$. Alors g est un homomorphisme de (C, M_0) dans (gC, gM_0) .

Démonstration :

On peut facilement démontrer que $\forall \sigma \in T^*$, $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$, on a $g(M_0) \xrightarrow{\sigma} g(M)$ par induction sur la longueur de σ .

Exemple :

L'application g , $g(M) = M'$ où $m'_1 = m_1 + m_3$, $m'_2 = m_4 + m_5$, est un homomorphisme linéaire de (R, M_0) dans (R', M'_0) (figure 4).

Dans ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement aux homomorphismes linéaires qui sont également homomorphismes de réalisation. On veut caractériser les applications linéaires g telles que pour chaque RdP à n places $(C, -)$ le RdP $(gC, -)$ réalise $(C, -)$ et en particulier $\forall M_0 \in \mathbb{N}^n$ $(C, M_0) \equiv (gC, gM_0)$.

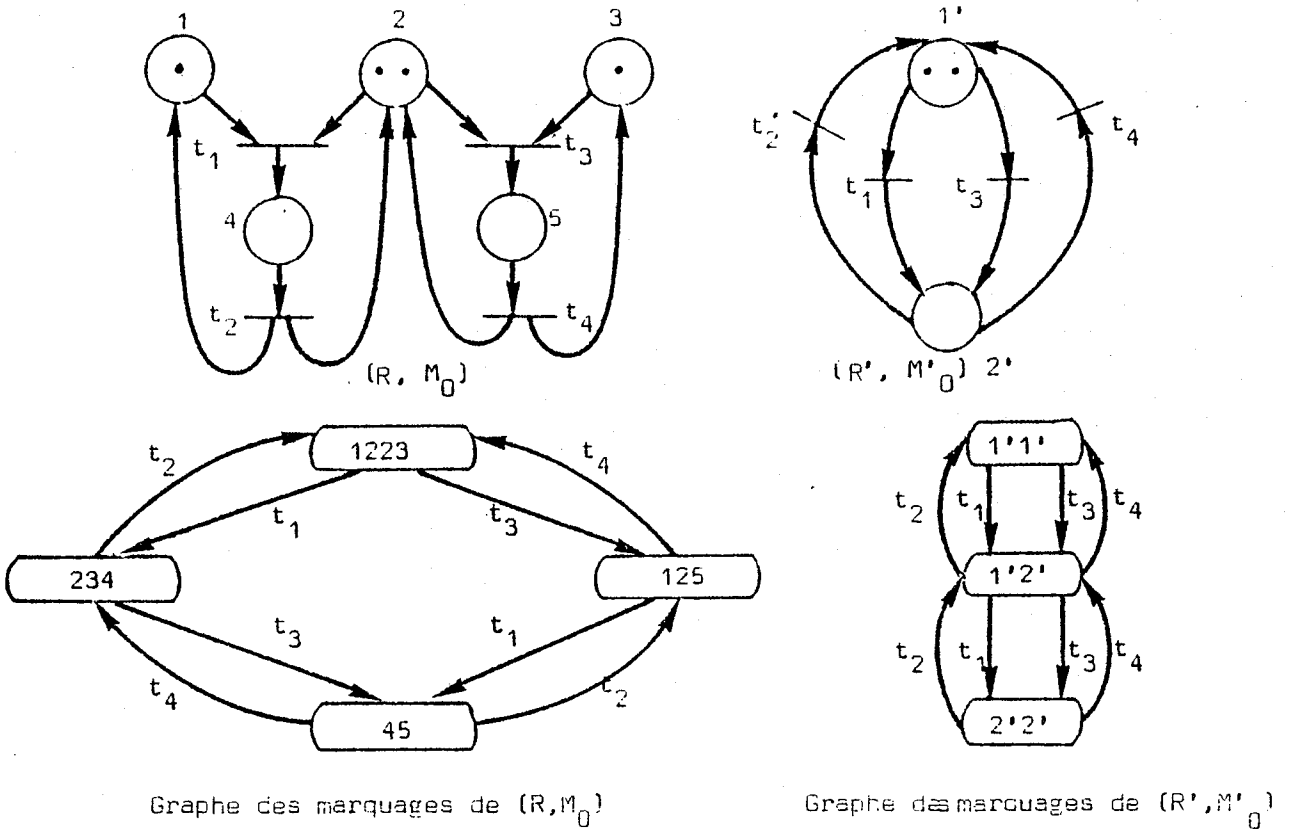


Figure 4

Lemme 3 :

Si g est une application linéaire, $g : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n'}$ telle que $\forall X \in \mathbb{Q}^n$ ($X > 0$ ssi $g(X) > 0$) alors g est injective.

Démonstration :

Supposons que g n'est pas injective et que $\forall X \in \mathbb{Q}^n$ $X > 0$ ssi $g(X) > 0$. Alors il existe X_0 , $X_0 \neq 0$, tel que $g(X_0) = 0$. X_0 ne peut pas être positif ($X_0 \neq 0$) suivant notre hypothèse. Soit $X_1 \in \mathbb{Q}^n$ $X_1 > 0$ tel que $X_0 + X_1 \neq 0$. On a $g(X_0 + X_1) > g(X_0) = 0$. Contradiction.

Proposition 12 :

Soit g une application linéaire $g : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n'}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

a/ $\forall X \in \mathbb{Q}^n$ ($X > 0$ ssi $g(X) > 0$) et $g(\mathbb{IN}^n) \subseteq \mathbb{IN}^{n'}$.

b/ g est un homomorphisme de réalisation pour tout RdP $(C, -)$ à n places, c'est-à-dire $\forall M_0 \in \mathbb{IN}^n$ $(C, M_0) \equiv (gC, gM_0)$.

Démonstration :

On démontre d'abord que a/ implique b/. Dans ce but, il est suffisant de démontrer que si (C, M_0) est un RdP initialisé à n places, alors g est un homomorphisme de (C, M_0) dans (gC, gM_0) et $g : \vec{M}_0 \rightarrow \vec{g(M_0)}$ est bijective. Par la proposition 11, g est un homomorphisme et par le lemme précédent elle est injective. Il reste donc à démontrer que $g : \vec{M}_0 \rightarrow \vec{g(M_0)}$ est surjective. Supposons que

$\exists M'_i, M'_{i+1} \in \vec{g(M_0)}, M'_i \xrightarrow{t_j} M'_{i+1}$ et que $g^{-1}(M'_i) = M_i \in \vec{M}_0$. Il suffit de montrer que t_j est validée par M_i :

$(M'_{i+1} = M'_i + gCv(t_j)) \Rightarrow (M'_{i+1} = g(M_i + Cv(t_j)))$. Puisque $g(M_i + Cv(t_j)) > 0$, on a $M_i + Cv(t_j) > 0$ et par conséquent M_i valide t_j .

Pour démontrer que b/ implique a/ supposons que $(gC, -)$ est réalisation de $(C, -)$ c'est-à-dire $\forall M_0 \in \mathbb{N}^n, (C, M_0) \equiv (gC, gM_0)$.

Pour que les RdP initialisés (C, M_0) et (gC, gM_0) soient équivalents pour tout marquage M_0 , il est nécessaire que $g(\mathbb{N}^n) \subseteq \mathbb{N}^{n'}$ et $\forall X \in \mathbb{Q}^n$ si $X > 0$ alors $g(X) > 0$.

Supposons qu'il existe $X \in \mathbb{Q}^n$ $X \not\geq 0$ tel que $g(X) > 0$. Ceci implique qu'il existe $M \in \mathbb{Z}^n$, $M \not\geq 0$ tel que $g(M) > 0$. On peut alors construire un RdP initialisé (C, M_0) ayant une transition t telle que $M_0 + C \nu(t) = M$. Alors dans le RdP (gC, gM_0) la transition t est validée par $g(M_0)$ tandis que t n'est pas validée par M_0 dans (C, M_0) .

Notation :

On représentera par $HR(n, n')$ la classe des homomorphismes de réalisation $g : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n'}$ qui transforment tout $(C, -)$ à n places à un RdP $(gC, -)$ à n' places qui le réalise.

Représentation matricielle des éléments de $HR(n, n')$:

Caractériser les matrices $G = [g_{ij}]_{n' \times n}$ qui représentent les éléments de $HR(n', n)$ consiste à chercher des contraintes sur leurs éléments g_{ij} pour que les deux systèmes d'inéquations $X > 0$ et $GX > 0$ soient équivalents.

Remarquons que chaque colonne de G doit être un élément de $\mathbb{N}^{n'} - \{0\}$ parce que sinon il existe un vecteur unitaire e_j tel que $Ge_j \notin \mathbb{N}^{n'} - \{0\}$. De plus, G représentant une application injective, $n' \geq n$ et elle doit avoir n lignes linéairement indépendantes. Les éléments de G étant non négatifs, pour que toute solution de $GX > 0$ satisfait $X > 0$ il faut que $GX > 0$ contient n inéquations du type $\lambda_j x_j > 0$ $\lambda_j \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $j=1, 2, \dots, n$.

Donc G doit être telle que :

- I) toutes ses colonnes sont positives, éléments de $\mathbb{N}^{n'}$
- II) si $\{L_i\}_{i=1}^{n'}$ est l'ensemble des lignes de G , il existe un sous-ensemble $\{L_{k_i}\}_{i=1}^n$ tel que $L_{k_i} = e_i^t \lambda_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ et e_i représente le vecteur colonne à n composantes dont la $i^{\text{ème}}$ est égale à 1 et toutes les autres sont égales à 0.

On peut démontrer facilement que si une matrice $G_{n',n}$ satisfait I) et II) alors elle représente un élément de $HR(n',n)$. D'où la proposition :

Proposition 13 :

Une matrice $G_{n',n}$ représente un élément de $HR(n',n)$ ssi chacune de ses colonnes est un élément de $\mathbb{N}^{n'}$ et il existe un sous-ensemble de n lignes de G , $\{L_{k_i}\}_{i=1}^n$ tel que $L_{k_i} = e_i^t \lambda_i$, $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Définition :

Deux homomorphismes linéaires éléments de $HR(n',n)$ et représentés respectivement par les matrices G_1 et G_2 seront dits équivalents ssi pour chaque RdP à n places $(C,-)$ on a $(G_1 C,-) \equiv (G_2 C,-)$.

Observation :

Etant donné une matrice G représentant un homomorphisme de $HR(n',n)$, les opérations suivantes sur G mènent à des matrices représentant des homomorphismes équivalents.

- a/ Permutation des lignes
- b/ Multiplication d'une ligne par un rationnel positif qui laisse entiers les éléments de cette ligne.

Proposition 14 :

Etant donné une matrice G représentant un élément de $HR(n',n)$, on peut trouver une matrice G' représentant un homomorphisme équivalent de la forme

$G' = \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}^n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n et F est une matrice quelconque de dimensions $(n'-n) \times n$, $F > 0$.

Démonstration :

Il est suffisant de permuer les lignes de G de telle manière que les n premières lignes soient des multiples des n vecteurs unitaires et de diviser chacune de ses lignes par son élément diagonal.

Remarque :

On peut retrouver les propositions 10a) et 11 du chapitre V à partir des résultats de ce paragraphe. En effet, si pour un RdP $(C, -)$ il existe $Y \in \mathbb{N}^n$, $Y^t C < 0$, tout RdP initialisé (C, M_0) est équivalent au RdP initialisé (GC, GM_0) où $G = \begin{bmatrix} I_n \\ Y^t \end{bmatrix}$. De plus (C, M_0) est vivant ssi (GC, GM_0) est vivant. Mais (GC, GM_0) n'est pas vivant parce qu'il a une place qui a seulement des arcs sortants et pas d'arc rentrant. Une démonstration analogue peut être faite pour la proposition 11.

VI.3.2. Application à la réalisation de systèmes tolérant les fautes [SIF79]

D'après la proposition 14, étant donné un système représenté par un RdP $(C, -)$, on peut obtenir un système qui le réalise, représenté par $(GC, -)$ où $G = \begin{bmatrix} I_n \\ F \end{bmatrix}$. Remarquons que si $M'_0 = GM_0$ est le marquage initial de $(GC, -)$ alors tout marquage $M' \in M'_0$ appartient à l'espace engendré par les colonnes de G . Dans ce paragraphe nous montrons comment on peut détecter et corriger sur $(GC, -)$ des fautes d'un certain type en donnant à l'espace des colonnes de G des propriétés de distance qui sont vérifiables en utilisant des techniques des codes linéaires.

VI.3.2.1. Les notions de distance des marquages et de faute**Définitions :**

- On appellera poids d'un vecteur $v \in \mathbb{Q}^n$, le nombre de ses composantes non nulles. La distance (de Hamming) $d(v_1, v_2)$ de deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}^n$ est le poids de leur différence : $d(v_1, v_2) = \text{poids}(v_1 - v_2)$. La distance d'un ensemble de vecteurs $V, V \subseteq \mathbb{Q}^n$ est par définition égale à $D(V) = \min_{v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j} \{d(v_i, v_j)\}$.
- Soit R un RdP à n places. La distance des marquages de R , $\delta(R)$, est le minimum des distances de toutes les classes de marquages possibles de R , c'est-à-dire $\delta(R) = \min_{M_0 \in \mathbb{N}^n} \{D(M_0^{\rightarrow})\}$.

Remarque :

La distance des marquages d'un RdP est une constante caractéristique de sa structure, donc indépendante de son marquage initial.

Lemme 4 [PET72]

Si V est un sous-espace de \mathbb{Q}^n alors sa distance est égale au minimum des poids de ses vecteurs.

Proposition 15 :

Soit $R = (C, -)$ un RdP. La distance des marquages δ de R est supérieure ou égale à la distance D de l'espace des colonnes de C . De plus, si R est consistant alors $D = \delta$.

Démonstration :

Soit M_0 un marquage initial de R et $M_1, M_2 \in \vec{M}_0$, $M_1 \neq M_2$. Alors il existe des séquences de transitions σ_1 et σ_2 telles que $M_0 \xrightarrow{\sigma_1} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{\sigma_2} M_2$. Ceci implique que : $M_1 = M_0 + C v(\sigma_1)$, $M_2 = M_0 + C v(\sigma_2)$ et $d(M_1, M_2) = \text{poids}(C v(\sigma_1) - v(\sigma_2))$. Alors pour le lemme 4, $\text{Min}_{M_1, M_2 \in \vec{M}_0, M_1 \neq M_2} \{d(M_1, M_2)\} \geq D$. Par conséquent, $\delta > D$.

$$\text{Min}_{M_1, M_2 \in \vec{M}_0, M_1 \neq M_2} \{d(M_1, M_2)\} \geq D$$

Supposons que $(C, -)$ est consistant et $V \in \mathbb{N}^n$ est un vecteur de l'espace des colonnes de C de poids minimum D . Alors d'après le lemme 2 du chapitre V, il est possible de trouver $X \in \mathbb{N}^m$ ($m = \text{nombre de transitions de } R$) tel que $CX = V'$ où V' est égal à V ou à un multiple de V par un scalaire différent de zéro. Soit σ une séquence de transitions, $v(\sigma) = X$, et M_0 un marquage de $(C, -)$ tel que $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_1$. Alors $d(M_0, M_1) = D$ et par conséquent $\delta \leq D$. Donc $\delta = D$.

Définition :

Etant donné une réalisation physique d'un RdP, une faute de multiplicité s est l'effet d'un mauvais fonctionnement transformant son marquage M_i à un marquage

M_j tel que $d(M_i, M_j) = s$. Une faute de multiplicité 1 sera appelée faute simple.

Remarque :

Une faute simple correspond à la "génération" ou la "disparition" d'un certain nombre de marques dans une place. Elle peut être l'effet de mauvais fonctionnements de différents types suivant la façon dont le RdP est implémenté.

La proposition suivante exprime pour les RdP un résultat bien connu liant la capacité de détection d'un code et sa distance ([PET72] page 9).

Proposition 16 :

Soit δ la distance des marquages d'un RdP R . Alors il est possible de détecter toutes les fautes de multiplicité inférieure ou égale à $\delta - 1$ et de corriger toutes les fautes de multiplicité inférieure ou égale à $s : 2s + 1 \leq \delta \leq 2s + 2$.

VI.3.2.2. Codage des réseaux de Petri

Soit $R = (C, -)$ un RdP, $G = \begin{bmatrix} I_n \\ F \end{bmatrix}$ une matrice telle que $R' = (GC, -)$ est une réalisation de R et H la matrice $H^t = [-F, I_{(n', -n)}]$. Alors, l'espace des colonnes de H est orthogonal à l'espace des colonnes de G qui contient les marquages de R' . Donc vérifier si un marquage M' appartient à l'espace des colonnes de G revient à vérifier si $S = H^t M'$ est égal à 0.

L'espace des colonnes de G est le code généré par G , H est sa matrice de test et S est son syndrome [PET72]. Le terme RdP codé sera utilisé pour représenter le RdP $R' = (GC, -)$.

La proposition suivante présente un résultat bien connu permettant de déterminer la distance d'un code à partir de sa matrice d'incidence.

Proposition 17 [PET72] :

Soit H la matrice de test d'un code. La distance de ce code est au moins égale à d ssi tout ensemble de $(d-1)$ lignes de H est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.

Par cette proposition, étant donné un RdP $(C, -)$, on peut obtenir un RdP $(GC, -)$ qui le réalise et ayant une distance des marquages au moins égale à un entier donné d : par choix approprié des lignes de H , on peut donner à l'espace des colonnes de G une distance d . Par conséquent, la distance D de l'espace des colonnes de GC est supérieure ou égale à d et par la proposition 15 :

$$\delta \geq D \geq d.$$

Plusieurs solutions sont possibles pour la construction d'un code de distance donné. Les choix possibles de H mènent à des RdP codés plus ou moins complexes et on pourrait s'intéresser à caractériser les matrices qui donnent, dans un certain sens, des réseaux minimaux. Deux critères de "minimalité", qui semblent être "opposés" en général, sont d'une part la minimisation du nombre des places et d'autre part la minimisation des poids des arcs du RdP codé. Nous donnons ci-dessus quelques suggestions pour la construction de codes de distance $d=2$ et $d=3$ dans l'optique de leur utilisation pour le codage des RdP.

a/ $d=2$

On peut obtenir un RdP codé avec $\delta \geq 2$ en introduisant une seule place implicite ; pour cela, on prend $G = \begin{bmatrix} I_n \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ f_1, f_2, \dots, f_n \end{bmatrix}$, $H^t = [-f_1, -f_2, \dots, -f_n, 1]$ où les f_i sont des entiers positifs. Le choix de f_i peut être fait de façon à minimiser les poids des arcs du RdP codé. Si par le fait que les f_i doivent être des entiers positifs, il n'est pas possible de réduire suffisamment les poids des arcs du RdP codé $(GC, -)$, on peut rajouter au RdP initial plusieurs places implicites en respectant la contrainte que les colonnes de F doivent être différentes de zéro.

b/ $d=3$

Si les lignes de H sont construites à partir d'éléments de l'ensemble $\{0,1,2,\dots,(q-1)\}$ alors le nombre maximum w , de lignes deux à deux linéairement indépendantes est supérieur ou égal à $\frac{q^{(n'-n)}-1}{q-1}$. Ce résultat est une conséquence directe du fait que $w = \frac{q^{(n'-n)}-1}{q-1}$ si les lignes de H sont considérées comme éléments de $\mathbb{Z}_q^{(n'-n)}$ où \mathbb{Z}_q est le corps des entiers modulo q (q est premier dans ce cas) [PET72].

Lorsque $\delta = 3$ et on peut corriger les fautes simples. La procédure de correction peut être simplifiée en choisissant les lignes de H de telle manière que le premier élément non nul soit égal à 1. Si une faute simple se produit, ayant comme effet la transformation de la $i^{\text{ème}}$ composante m_j d'un marquage M en $m_j + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{Z}$, en calculant le syndrome S on trouve un vecteur dont le premier élément non nul est λ . Si S est divisé par λ , le vecteur obtenu est égal à la ligne de H correspondant à la place p_j où la faute a eu lieu. La correction est complétée en faisant $m_j := m_j - \lambda$.

Exemple :

Considérons le RdP initialisé de la figure 5a ayant comme matrice d'incidence C.

En prenant $G = \begin{bmatrix} I_5 \\ 11111 \end{bmatrix}$ on obtient $C' = GC = \begin{bmatrix} C \\ 100-1 \end{bmatrix}$. $(C', -)$ est représenté en figure 5b. La distance des marquages de $(C', -)$ est ≥ 2 . De plus, pour tout marquage M de $(C, -)$, le marquage $M' = GM$ de $(C', -)$ satisfait l'équation :

$$H^t M' = 0 \iff m'_6 = m'_1 + m'_2 + m'_3 + m'_4 + m'_5$$

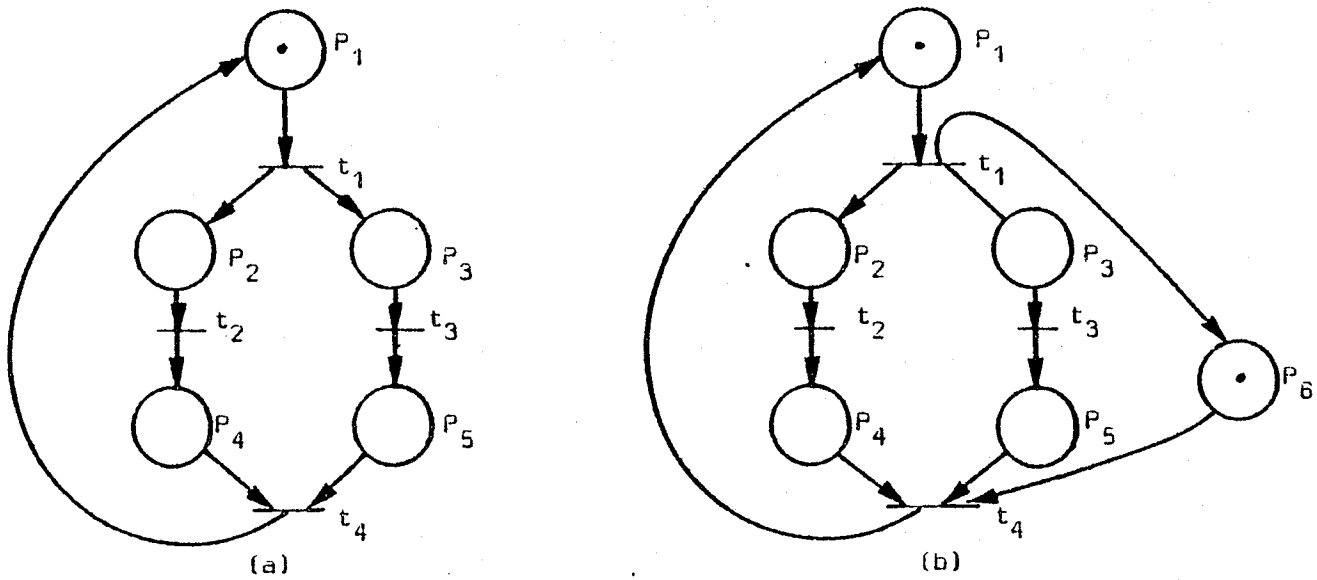


Figure 5

Exemple :

Soit le RdP $R=(C, -)$ représenté par la figure 6a. On cherche une réalisation donnant la possibilité de corriger les fautes simples. Pour cela, on prend :

$$H^t = \begin{bmatrix} - & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

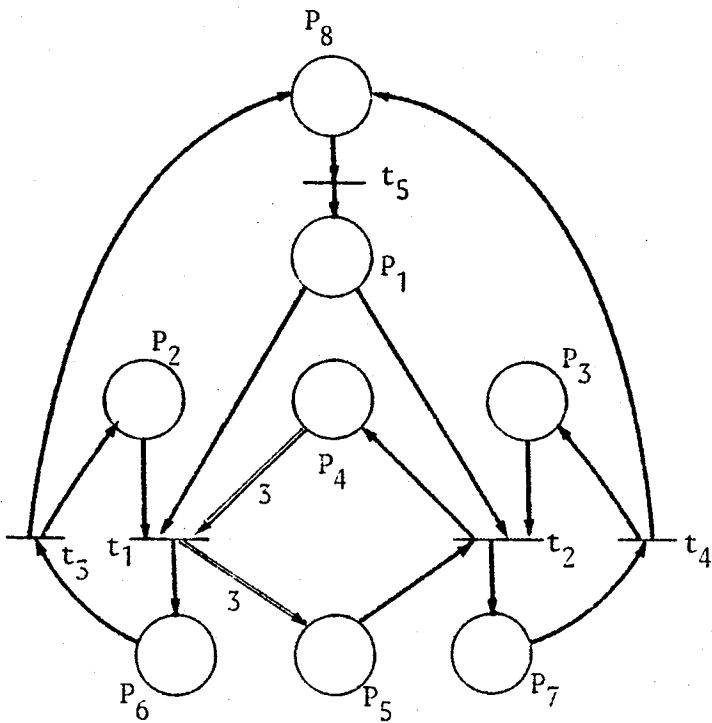
On obtient

$$G = \begin{bmatrix} & & & & & & & & I_8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \text{La matrice d'incidence du RdP}$$

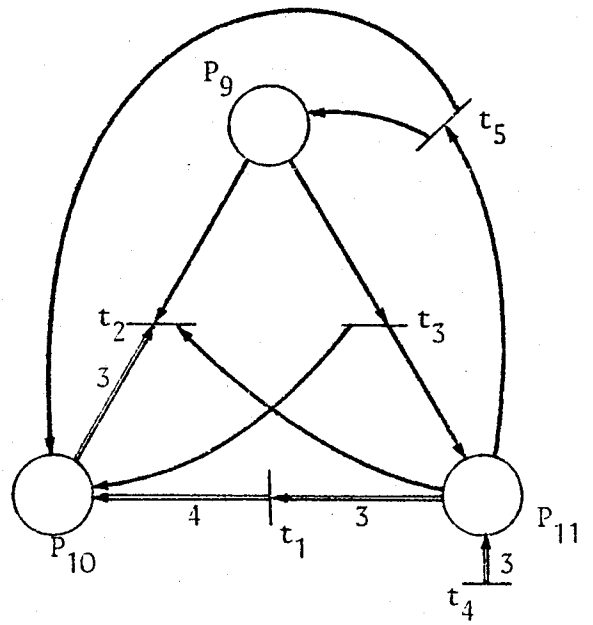
codé est

$$C' = GC = \begin{bmatrix} & C \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Le RdP codé est obtenu en confondant les transitions correspondantes de R et du RdP $R_1 = (FC, -)$ donné en figure 6b.



(a)



(b)

Figure 6

VI.3.2.3. Réalisation du système tolérant les fautes

VI.3.2.3.1. Cas général

Etant donné un système non redondant représenté par un RdP (C,-) à n places

et un code généré par une matrice $G = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$, une réalisation tolérant les fautes peut être obtenue comme il est montré en figure 7.

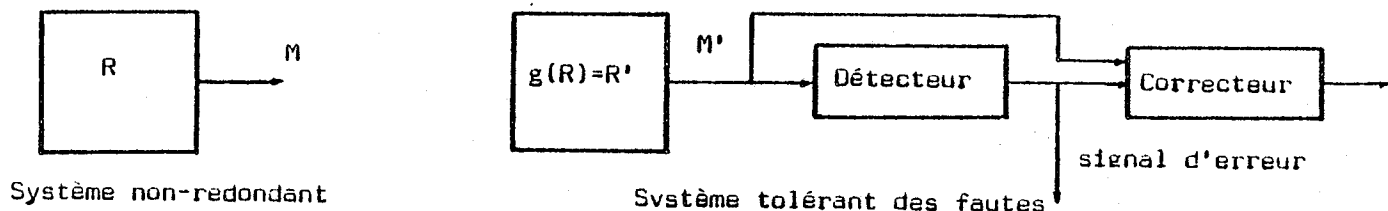


Figure 7

Le marquage M' du RdP codé (GC,-) est observé par un détecteur de fautes qui calcule le syndrome $S = H^t M'$. Si le code offre des possibilités de correction, un correcteur peut être utilisé pour masquer les fautes. On suppose que le détecteur et le correcteur fonctionnent sans fautes.

Une réalisation séparée [RA074] peut être obtenue pour le système tolérant des fautes comme il est montré figure 8.

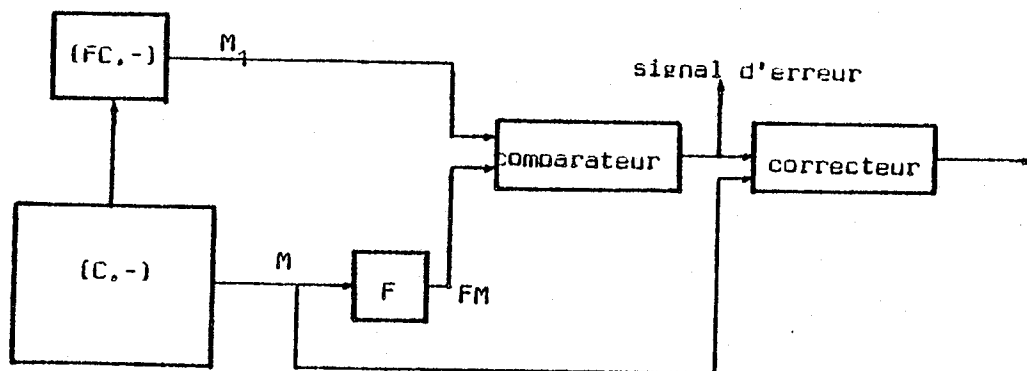


Figure 8

Le système codé est décomposé en deux sous-systèmes représentés respectivement par (C,-) et (FC,-) connectés de la façon suivante :

Si M_0 est le marquage initial de (C,-), alors FM_0 est le marquage initial de (FC,-). Remarquons que (FC,-) est homomorphe de (C,-) par F et que si t est une transition validée par M dans (C,-) alors t est validée dans (FC,-) par FM (plus généralement pour une séquence σ , $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ dans (C,-) implique que $FM_0 \xrightarrow{\sigma} FM$ dans (FC,-)). Par conséquent, si la mise à feu d'une transition t dans (FC,-) est synchronisée par la mise à jeu de la même transition dans (C,-), alors (C,-) et (FC,-) constituent un système fonctionnellement équivalent à (GC,-). Ceci peut être fait en connectant en série (C,-) et (FC,-), et en modifiant légèrement les règles de fonctionnement de (FC,-). Quand une transition se met à feu dans (C,-), un signal est envoyé à (FC,-) qui provoque la mise à feu quasi-simultanée de la même transition. Aussi, remarquons que vérifier si un marquage M' de (GC,-), $M' = GM$, $M \in \text{IN}^n$ appartient au code est équivalent à vérifier dans le système décomposé si les marquages M et M_1 de (C,-) et de (FC,-) satisfont la relation $FM = M_1$. Par conséquent, le détecteur de la figure 7 peut être remplacé par un module calculant FM et un comparateur.

Commentaire :

La méthode proposée est directement applicable aux RdP indépendamment du type de leur implémentation. Cependant, elle présente un inconvénient inhérent - à notre avis - à toutes les techniques de réalisation de systèmes tolérant des fautes par redondance sélective. Le concepteur doit répondre à la question, généralement non triviale suivante : Comment les fautes de multiplicité s au niveau de la description par un RdP sont liées aux fautes des niveaux de description inférieurs ? Généralement aucune relation ne peut être supposée connue entre une représentation fonctionnelle par un RdP et la structure sous-jacente de matériel et de logiciel ; donc ce problème doit être étudié en fonction du type d'implémentation et du degré de tolérance aux fautes souhaité.

Cependant, l'hypothèse de faute adoptée - "génération" ou "disparition" des marques d'une place - semble être réaliste dans le cas des réalisations câblées ou microprogrammées, où une place est physiquement réalisée par des éléments de

mémorisation binaires (cas des RdP saufs) ou compteurs. Aussi, plusieurs auteurs ayant utilisé des RdP ou des modèles graphiques dérivés pour modéliser au niveau fonctionnel des mauvais fonctionnements considèrent que la manifestation des fautes à un niveau de description inférieur est la génération ou la disparition des marques [MER75][MER76][JAC75][HAN77][AZE77].

VI.3.2.3.2. Réseaux de Petri restant bornés en cas de faute

Dans le paragraphe précédent, le problème d'obtenir un système tolérant des fautes est étudié indépendamment du fait que ceci est borné ou non. Remarquons que les RdP représentant des systèmes physiquement réalisés sont bornés et restent bornés en cas de fautes puisqu'ils sont implémentés sur une mémoire finie. En particulier pour des RdP saufs, souvent utilisés pour la modélisation du contrôle [FUR71][PAT75][MIT76][KWA77], les places sont réalisées par des éléments de mémorisation binaires et les fautes simples ont comme effet la complémentation d'une variable binaire.

Soit $(C, -)$ un RdP à m transitions tel que le nombre de marques dans chacune de ses places reste dans tous les cas inférieur à un nombre premier r . On représente par \oplus l'addition modulo r et par $(EXPR)_r$ l'expression $EXPR$ évaluée modulo r . Considérons une réalisation tolérante des fautes séparée de $(C, -)$ en prenant $G = \begin{bmatrix} In \\ F \end{bmatrix} = [g_{ij}]_{n \times n}$ avec les g_{ij} éléments de $Z_r = \{0, 1, \dots, (r-1)\}$.

Remplaçons $(C, -)$ par l'automate linéaire [GIL66] décrit par l'équation $Y(\tau+1) = Y(\tau) \oplus (FC)_r X(\tau)$ où

- $Y(\tau)$ est une variable généralisée représentant son état à l'instant τ .
- $X(\tau)$ est une variable d'entrée définie sur $\{0, 1\}^m$, telle que $x_i(\tau) = 1$ ssi la mise à feu de la transition t_i se produit à l'instant τ dans $(C, -)$.
- Si M_0 est le marquage initial (marquage à l'instant 0) de $(C, -)$, alors $Y(0) = (F M_0)_r$.

Remarquons que si M est le marquage de $(C, -)$ à l'instant τ , alors le vecteur $\begin{vmatrix} M \\ Y(\tau) \end{vmatrix}$ appartient à l'espace engendré par les colonnes de G considérées comme éléments de $(\mathbb{Z}_r)^{n'}$. Cette méthode mène à un système codé composé du RdP initial et d'un automate linéaire connecté en série. Vérifier que le vecteur $\begin{vmatrix} M \\ Y(\tau) \end{vmatrix}$ appartient au sous-espace de $(\mathbb{Z}_r)^{n'}$ engendré par les colonnes de G est équivalent à vérifier que l'équation $(FM)_r = Y(\tau)$ est satisfaite. L'automate linéaire peut être réalisé par $(n'-n)$ compteurs modulo r , $k_{n+1}, k_{n+2}, \dots, k_n$: si une transition t_j est mise à feu dans $(C, -)$, alors a_{ij} est rajouté (modulo r) au compteur k_{n+i} où $A = [a_{ij}] = (FC)_r$.

Exemple :

Soit le système représenté par le RdP de la figure 9a. Les places sont réalisées par des éléments de mémorisation binaires. On prend :

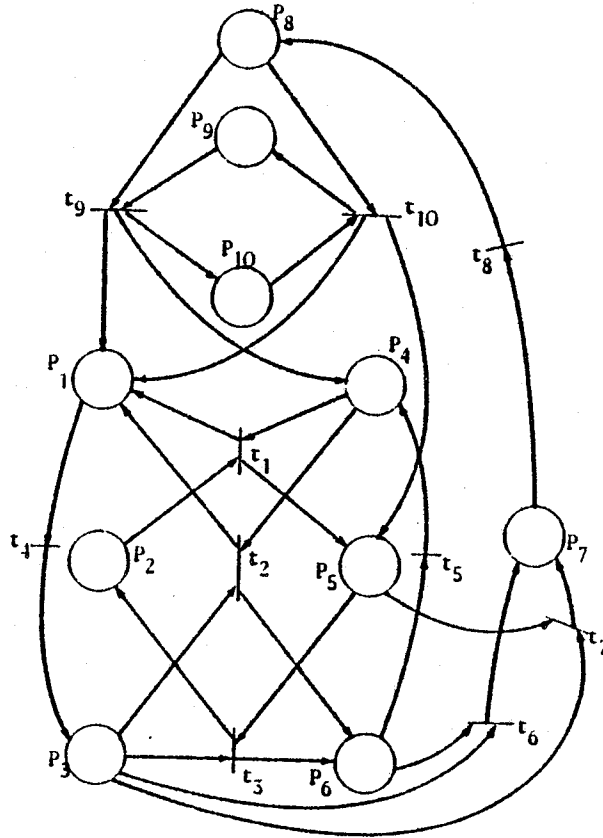
$$H^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \text{ Ceci donne } (FC)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'automate linéaire est décrit par l'équation $Y(\tau+1) = Y(\tau) \oplus (FC)_2 X(\tau)$ et il est réalisable par 4 compteurs modulo 2 $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$ (figure 9b).

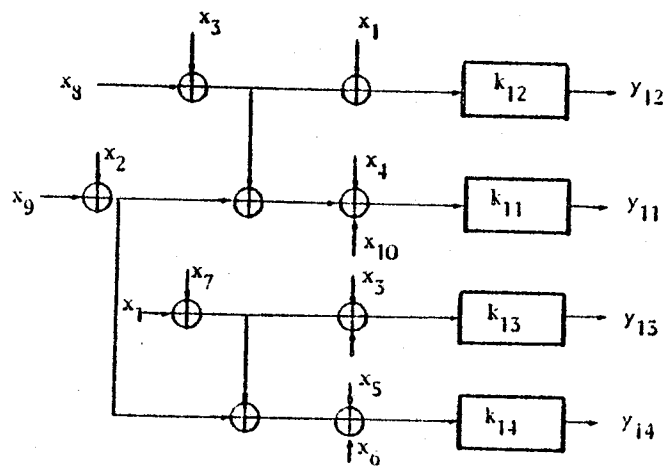
Si $y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}$ sont respectivement les variables internes de ces compteurs, le détecteur de fautes doit vérifier si pour tout marquage les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} y_{11} &= m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus m_9 \\ y_{12} &= m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_8 \oplus m_9 \\ y_{13} &= m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_5 \oplus m_7 \oplus m_8 \oplus m_{10} \\ y_{14} &= m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_{10} \end{aligned}$$

La distance de code généré est $d=2$. Les modules de détection et de correction peuvent être réalisés par des circuits combinatoires.



(a)



(b)

Figure 9

VI.3.2.4. Codage d'un RdP et composantes conservatives

Avant d'essayer de donner une distance δ aux marquages d'un RdP $(C, -)$ en rajoutant des places implicites suivant la méthode présentée au paragraphe VI.3.2.2, il est intéressant de profiter du fait que la distance des marquages de ce réseau est éventuellement supérieure à 1 (par le fait que l'espace des colonnes de C a une distance supérieure à 1).

La proposition 17 suggère une méthode facilement applicable pour calculer la distance de l'espace des colonnes d'une matrice C : il suffit de trouver une matrice H dont les colonnes forment une base de l'espace orthogonal à l'espace des colonnes de C .

Exemple :

Soit le RdP de la figure 10.

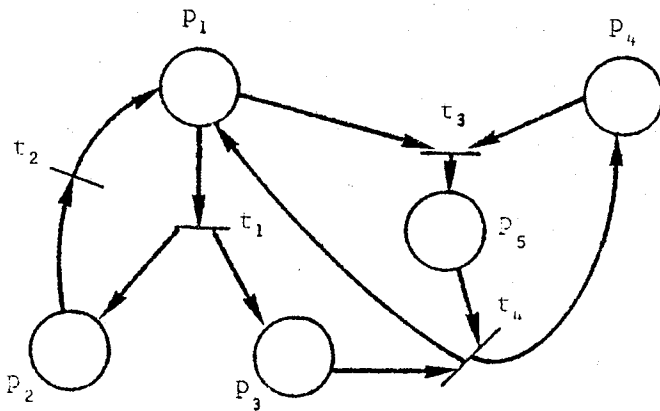


Figure 10

On peut à partir de la matrice d'incidence $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

trouver la matrice $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dont les colonnes forment une base pour l'espace

des colonnes de C . D'où la matrice $H^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La matrice H ayant une ligne égale à 0, la distance de l'espace des colonnes de C est égale à 1. De plus, ce réseau est consistant et par la proposition 15 sa distance des marquages est égale à 1.

Remarquons que, étant donné un RdP (C,-), la distance de l'espace des colonnes de C est supérieure ou égale à 2 ssi il existe un p-flot Y ayant toutes ses composantes non nulles. Ceci est une conséquence directe de la proposition 17 et implique en particulier que la distance des marquages de tout RdP conservatif peut être exploitée dans le but d'obtenir des RdP codés de complexité minimale comme il est montré dans les exemples qui suivent.

Exemple :

Soit le RdP de la figure 5a. Il est conservatif et $Y^t = [2,1,1,1,1]$ est un p-semiflot ayant toutes ses composantes non nulles. Codons ce RdP (C,-) avec la matrice $G = \begin{bmatrix} I_5 \\ 2,1,1,1,1 \end{bmatrix}$. On obtient $C' = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}, -$. C'est-à-dire le RdP codé a une place P_6 isolée et la relation à vérifier est $m_6 = 2m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$.

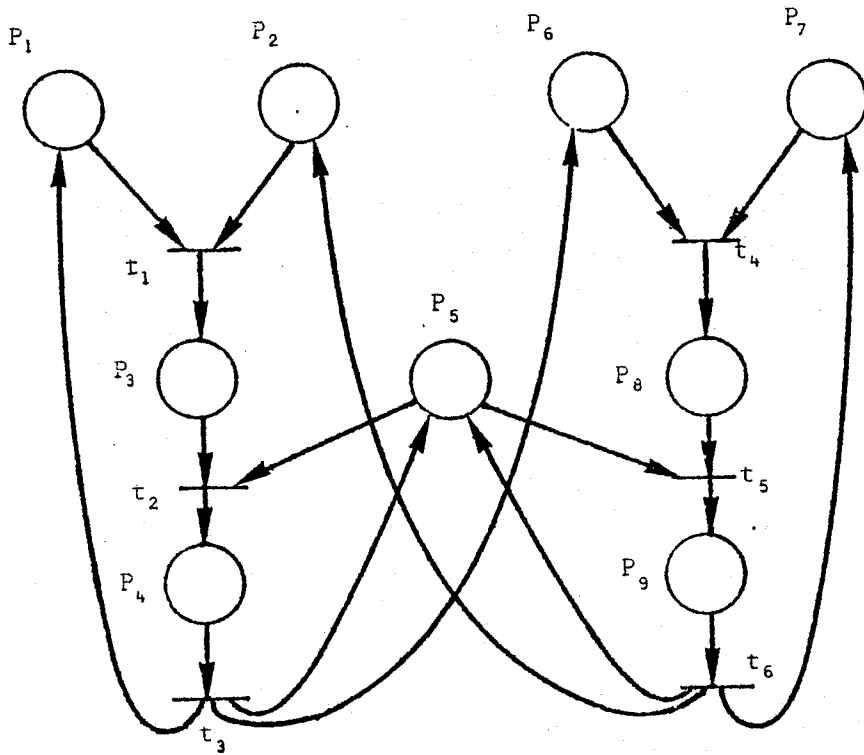
Exemple :

Soit le RdP de la figure 11a. Ses composantes conservatives élémentaires sont définies par les p-semiflots $Y_1^t = [101100000]$, $Y_2^t = [000000111]$, $Y_3^t = [011101011]$, $Y_4^t = [000110001]$.

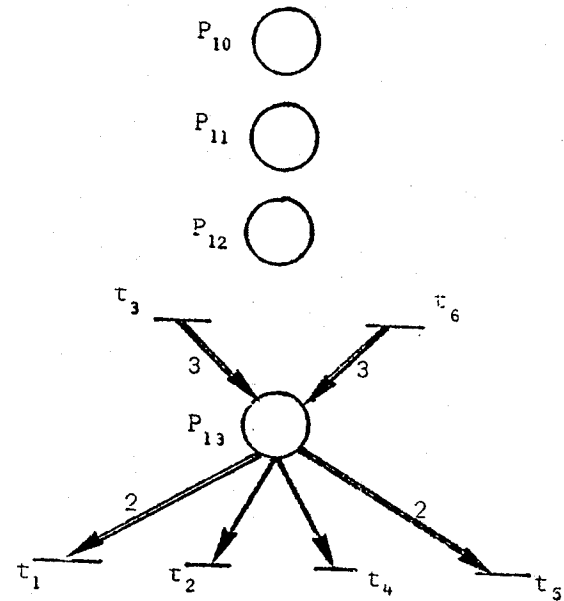
On peut vérifier que la distance de l'espace des colonnes de sa matrice d'incidence est égale à 2 et qu'il est consistant. Donc sa distance des marquages est égale à 2. Si on veut obtenir une réalisation permettant la correction de fautes simples, il faut rajouter une place implicite qui crée une relation invariante indépendante des relations dues à l'existence de composantes conservatives.

On fait le choix :

$$G = \begin{bmatrix} I_9 \\ F \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

Figure 11

Les trois premières lignes de F correspondent à des composantes conservatives du RdP donné et les éléments de la quatrième ligne ont été choisis de telle manière que les colonnes de H^t soient deux à deux linéairement indépendantes. Les places implicites introduites par cette solution sont montrées en figure 11b.

CHAPITRE VII

ANALYSE DES PROPRIETES DYNAMIQUES : LES RESEAUX DE PETRI TEMPORISES

VII.1	DEFINITIONS -----	2
VII.2	FONCTIONNEMENT EN REGIME PERMANENT D'UN RdPT	
	VII.2.1. Cas général -----	5
	VII.2.2. Fonctionnement en vitesse propre -----	8
	VII.2.3. Graphes marqués et graphes d'état temporisés -----	10
	VII.2.4. Applications à l'évaluation des performances -----	13
VII.3	COMPARAISON DES RdP AVEC D'AUTRES TYPES DE RESEAUX	
	VII.3.1. Les RdP en tant que porteurs de structures vectorielles --	23
	VII.3.2. RdPT et réseaux à impédance -----	26
	VII.3.3. RdPT et réseaux de dipôles -----	30

CHAPITRE VII

PRESENTATION :

Dans ce chapitre sont présentés des résultats sur l'analyse des propriétés dynamiques des systèmes à partir d'un réseau de Petri représentant leur contrôle.

Cette étude est menée sur les réseaux de Petri temporisés pour lesquels est donnée une méthode d'évaluation des fréquences maximales de mise à feu de leurs transitions en cas de fonctionnement permanent.

A la fin du chapitre les équations décrivant le fonctionnement en vitesse propre des réseaux de Petri temporisés sont comparées aux équations décrivant le fonctionnement de réseaux linéaires.

VII.1. DEFINITIONS

Un réseau de Petri temporisé (RdPT) est un triplet $R_T = (R, T, v)$ où

- $R = (P, T, a, b)$ est un RdP
- (T, \geq) est un ensemble totalement ordonné par une relation d'ordre \geq ; on appellera instants les éléments de T .
- v est une application de $P \times T$ dans T , appelée base de temps de R_T , telle que $v(p, \tau_1) \in P \times T$, $v(p, \tau_1) \geq \tau_1$.

Représentation :

On représente un RdPT par le RdP associé en indiquant à côté de chaque place p l'application $v(p, \tau)$.

Règles de fonctionnement à partir d'un marquage M_0 :

a/ Une marque dans RdPT peut se trouver dans l'un des deux états disponible ou indisponible. On associe au marquage initial M_0 un instant $\tau_0 \in T$; toutes les marques du réseau sont disponibles à τ_0 . A tout instant τ le marquage présent est la somme de deux marquages M_d et M_i où M_d est le marquage constitué des marques disponibles de M et M_i est le marquage constitué des marques indisponibles de M .

b/ Une transition est validée par $M = M_i + M_d$ si elle est validée par M_d dans le RdP associé.

c/ La mise à feu d'une transition t doit avoir lieu dès qu'elle est validée, s'effectue comme dans les RdP en ne déplaçant que des marques disponibles et elle est de durée nulle.

d/ Si à la suite d'une mise à feu effectuée à l'instant τ , une marque disponible est déplacée d'une place p à une place p' , cette marque devient indisponible pendant l'intervalle $[\tau, v(p', \tau)[$ puis elle devient disponible.

Remarques :

- . D'après la définition précédente les mises à feu des transitions dans un RdPT ne peuvent avoir lieu qu'à des instants de T .
- . L'application v définit une base de temps dans le sens de la définition du paragraphe VI .2.2.

D'autres auteurs (par exemple [RAM73]) ont introduit les RdPT en associant les temps d'indisponibilité des marques aux transitions. On peut vérifier que les deux modèles sont équivalents:

Un RdPT dont les temps d'indisponibilité sont associés aux transitions est également un triplet $R'_T = (R', T, v')$ où $R' = (P', T', a', b')$, T est un ensemble totalement ordonné et $v' : T' \times T' \rightarrow T$ telle que $\forall (t, \tau_i) \in T' \times T', v'(t, \tau_i) \geq \tau_i$.

On peut résumer ses règles de fonctionnement de la façon suivante:

Les marques de R'_T ont deux états réservé et non réservé ; seulement les marques à l'état non réservé peuvent être utilisées pour valider une transition. Si une transition t est validée à l'instant τ elle doit se mettre à feu immédiatement en rendant réservées $d(p, t)$ marques non-réservées dans chaque place $p \in t$ pendant l'intervalle $[\tau, v(t, \tau)[$. La mise à feu se termine à l'instant $v(t, \tau)$ en enlevant $a'(p, t)$ marques réservées de chaque place $p \in t$ et en mettant $b'(p, t)$ marques non réservées dans chaque place $p \in t$. Toutes les marques sont initialement non réservées.

On peut voir que étant donné R'_T on peut trouver un RdPT R_T équivalent ayant les temps d'indisponibilité associés aux places en effectuant la transformation illustrée sur la figure 1.

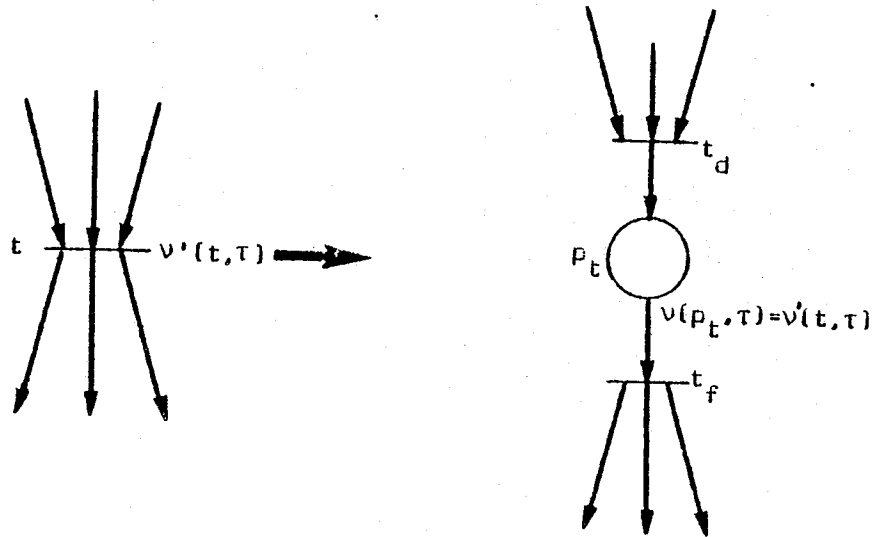


figure 1

Dans cette transformation on substitue chaque transition t de R_T' par un sous-réseau constitué de deux transitions t_d et t_f et d'une place p_t , $\{t_d\} = p_t$, $\{t_f\} = p_t$. Pour toute place ainsi ajoutée on pose $v(p_t, \tau) = v'(t, \tau)$ et pour les autres places p_i du réseau de départ on pose $v(p_i, \tau) = \tau$, $\forall \tau \in T$.

Inversement, étant donné un RdPT dont les temps d'indisponibilité sont associés aux places, $R_T = (R, T, v)$ on peut obtenir un RdPT $R_T' = (R', T, v')$ équivalent, dont les temps d'indisponibilité sont associés aux transitions en effectuant la transformation illustrée sur la figure 2.

Dans cette transformation on substitue chaque place p de R_T par un sous-réseau constitué de deux places p_d, p_f et une transition t_p telles que $\{p_d\} = t_p$, $\{p_f\} = t_p$.

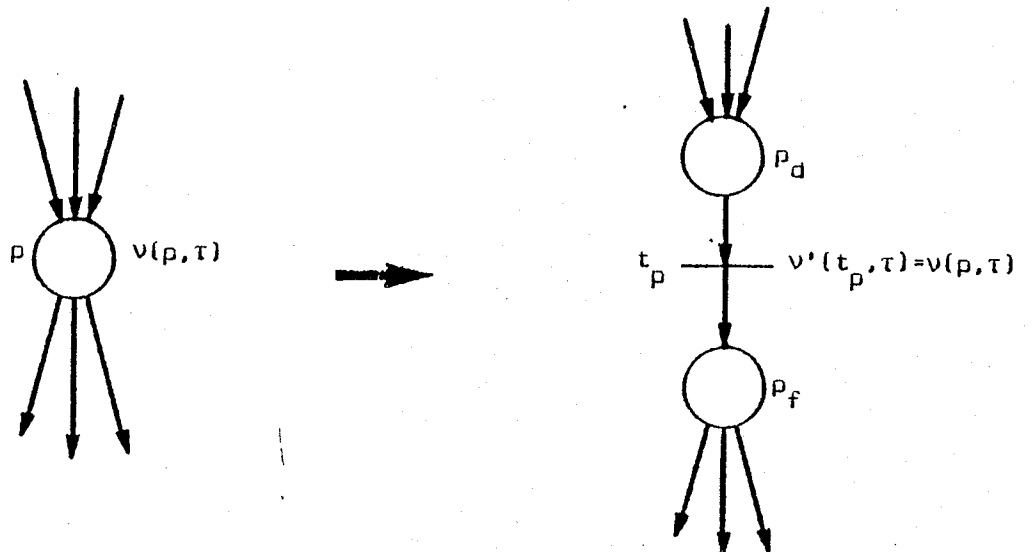


Figure 2

A toute transition t_p ainsi ajoutée on associe $v'(t_p, \tau) = v(p, \tau)$; à toutes les transitions t_i du réseau de départ on associe $v'(t_i, \tau) = \tau$, $\forall \tau \in T$. Si M_0 est le marquage initial de R_T le marquage M'_0 de R'_T sera tel que: $\forall p$ place de R_T $M'_0(p_f) = M_0(p)$ et $M'_0(p_d) = 0$.

Dans ce qui suit nous étudions le fonctionnement en régime permanent des RdPT bornés consistants et purs tels que le temps d'indisponibilité d'une marque dans une place, soit indépendant de l'instant de son arrivée. On prendra $T = \mathbb{R}$ et on posera pour chaque place p_i : $\forall \tau \in T$ $v(p_i, \tau) - \tau = z_i$. C'est-à-dire chaque marque est retardée dans une place p_i de z_i unités de temps où z_i est un réel non négatif.

VII.2. FONCTIONNEMENT EN REGIME PERMANENT D'UN RdPT [SIF77]

VII.2.1. Cas général

Soit un RdPT $R_T = (R, \mathbb{R}, v)$, $R = (P, T, a, b)$, $m = |T|$, $n = |P|$ et tel que les temps d'indisponibilité des marques associés aux places sont constants.

On suppose que R est pur et on définit les matrices.

$$C^+ = [c_{ij}^+]_{n \times m} \quad \text{avec} \quad c_{ij}^+ = b(p_i, t_j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$C^- = [c_{ij}^-]_{n \times m} \quad \text{avec} \quad c_{ij}^- = a(p_i, t_j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

(la matrice d'incidence C est égale à $C = C^+ - C^-$).

Pour étudier le fonctionnement de R_T on introduit deux variables temporelles générales:

- $(Q(\tau))^t = [q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_n(\tau)]$ telle que $Q(\tau)$ représente le marquage du réseau à l'instant τ .
- $(X(\tau))^t = [x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_m(\tau)]$ telle que $X(\tau)$ représente le vecteur de mise à feu à l'instant τ .

La relation $M = M_0 + Cv(\sigma)$ peut être donc écrite en utilisant ces variables

$$Q(\tau) = Q(\tau_0) + C X(\tau)$$

Si $\Delta\tau = \tau - \tau_0 \neq 0$ on peut écrire

$$\frac{\Delta Q(\tau)}{\Delta\tau} = \frac{Q(\tau) - Q(\tau_0)}{\tau - \tau_0} = C \frac{X(\tau)}{\Delta\tau} = C F(\tau) \quad \text{où}$$

- $\frac{\Delta Q(\tau)}{\Delta\tau}$ est un vecteur représentant la variation moyenne de la charge du réseau à l'intervalle $\Delta\tau$;
- la k -ième composante du vecteur $F(\tau)$ représente la fréquence moyenne de mise à feu de la transition t_k pendant $\Delta\tau$.

Nous étudierons le cas de fonctionnement où les fréquences de mise à feu des transitions d'un RdPT sont constantes et il est borné. Alors son fonctionnement est périodique et F est un t -semiflot

$$CF = 0 \quad F > 0 \quad (1)$$

Le problème est de déterminer F en fonction du marquage initial et des retards associés aux places.

Soient $Q(\tau_{k_1}), Q(\tau_{k_2}), \dots, Q(\tau_{k_s})$ les marquages successivement atteints par un RdPT au cours d'un fonctionnement périodique, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$ étant leurs durées respectives. Alors la valeur moyenne \bar{Q} de la variable $Q(\tau)$ est égale à

$$\bar{Q} = \frac{\delta_1 Q(\tau_{k_1}) + \delta_2 Q(\tau_{k_2}) + \dots + \delta_s Q(\tau_{k_s})}{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_s}$$

Si J est un p -flot du RdP R associé à R_T on a en multipliant par J^t la relation précédente:

$$J^t \bar{Q} = J^t Q(\tau_0) = J^t M_0$$

Mais la valeur moyenne \bar{q}_w de la charge d'une place p_w satisfait l'inégalité

$$\bar{q}_w \geq z_w C_w^+ F$$

où z_w est le retard associé à cette place, C_w^+ est la w -ième colonne de la matrice C^+ . Le produit $C_w^+ F$ représente la fréquence moyenne d'arrivée des marques à la place p_w , F étant le vecteur qui représente les fréquences de mise à feu des transitions.

Soit Z la matrice d'ordre n

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & z_n \end{bmatrix}$$

L'ensemble des inégalités $\{\bar{q}_w \geq z_w C_w^+ F\}_{w=1}^n$ peut être écrit sous la forme

$$\bar{Q} \geq Z C^+ F$$

Si J est un p -semiflot de R on a

$$J^t \bar{Q} = J^t M_0 \geq J^t Z C^+ F \quad (\text{II})$$

Cette dernière inéquation établit une relation entre le marquage initial M_0 , les retards associés aux places d'un RdPT et les fréquences de mise à feu de ses transitions.

Soit $\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$ l'ensemble des p -semiflots correspondant à l'ensemble des composantes conservatives élémentaires de R . Alors, toute inéquation de type (II) peut être exprimée comme la combinaison linéaire à coefficients non négatifs de l'ensemble des inéquations $\{J_i^t M_0 \geq J_i^t Z C^+ F\}_{i=1}^s$.

Les relations

$$C F = 0 \quad F > 0 \quad (\text{I})$$

$$\{J_i^t M_0 \geq J_i^t Z C^+ F\}_{i=1}^s \quad (\text{II})$$

décrivent le fonctionnement en régime permanent d'un RdPT dans le sens que pour toute évolution périodique le vecteur des fréquences des mises à feu F satisfait ces relations. Mais l'inverse n'est pas forcément vrai : si F est un vecteur vérifiant (I) et (II) alors F ne correspond pas forcément à une évolution périodique du RdPT à partir du marquage initial M_0 . Ceci est dû au fait que dans les relations (II) on ne tient compte que des retards z_i imposés aux marques dans les places. En réalité le retard d'une marque dans une place p_i est la somme du retard z_i imposé et d'un retard variable de "synchronisation" dû à l'attente éventuelle d'une marque pour que des marques deviennent disponibles dans d'autres places. Par conséquent, les solutions de (I) et (II) par rapport à F correspondent à des fréquences de fonctionnement qui ne sont pas forcément réalisables.

VII.2.2. Fonctionnement en vitesse propre d'un RdPT

Soit F_0 le vecteur des fréquences des mises à feu des transitions d'un RdPT R_T au cours d'une évolution périodique. On dira que R_T fonctionne en vitesse propre si F_0 satisfait les équations

$$C F = 0 \quad , \quad F > 0 \quad (I)$$

$$\{J_i^t M_0 = J_i^t Z C^+ F\}_{i=1}^s \quad (III)$$

où $\{J_i\}_{i=1}^s$ est une base de l'espace des p-flots.

Un fonctionnement en vitesse propre correspond à un fonctionnement à vitesse maximale ; les retards des marques aux places sont exactement égaux aux temps d'indisponibilité z_i . Evidemment, toute solution de ce système d'équations est solution maximale de (I) et (II) et par conséquent pour tout vecteur F correspondant à un fonctionnement réalisable il existe une solution F_0 de (I) et (III) telle que $F_0 \geq F$.

Proposition 1 :

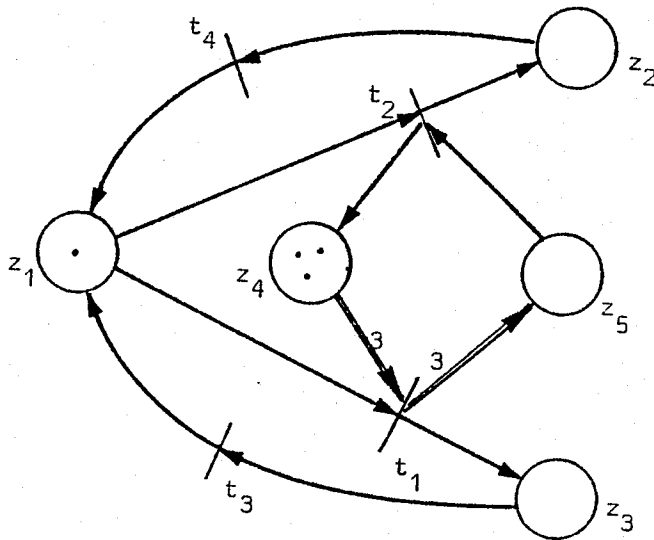
Il existe au maximum n équations linéairement indépendantes décrivant le fonctionnement en vitesse propre d'un RdPT pur à n places.

Démonstration :

$CF = 0$ contient ρ équations linéairement indépendantes où ρ est le rang de C et la dimension de l'espace des p -flots est égale à $n-\rho$.

Exemple:

Soit le RdPT de la figure 3. On veut déterminer les fréquences pour fonctionnement en vitesse propre si on connaît les temps d'indisponibilité des marques z_i et le marquage initial $Q(\tau_0) = M_0$.



$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution de $CF=0$: On trouve $f_2 = f_4 = 3f_1 = 3f_3$

figure 3

Une base positive de l'espace des p -flots est:

$$J_1^t = [111000] \quad J_2^t = [00011]$$

$$J_1^t Z C^+ F = J_1^t M_0 \iff m_{01} + m_{02} + m_{03} = z_1(f_3 + f_4) + z_2 f_2 + z_3 f_1$$

$$J_2^t Z C^+ F = J_2^t M_0 \iff m_{04} + m_{05} = z_4 f_2 + z_5 3f_1$$

Pour qu'une solution existe il faut que

$$\frac{m_{01} + m_{02} + m_{03}}{4z_1 + 3z_2 + z_3} = \frac{m_{04} + m_{05}}{3(z_4 + z_5)} \quad (\alpha)$$

Dans ce cas
$$f_1 = \frac{m_{04} + m_{05}}{3(z_4 + z_5)}$$

Si on a $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 1$ et $M_0^t = [10030]$, l'équation (α) n'est pas vérifiée et il n'y a pas de fonctionnement en vitesse propre possible.

Les inéquations (II) donnent:

$$m_{01} + m_{02} + m_{03} \geq z_1(f_3 + f_4) + z_2 f_2 + z_3 f_1 \Rightarrow 1 \geq 8 f_1$$

$$m_{04} + m_{05} \geq z_4 f_2 + z_5 3f_1 \Rightarrow 3 \geq 6 f_1$$

D'où: $f_{1\max} = \min \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{8}$ et $f_{2\max} = \frac{3}{8}$

VII.2.3. Graphes marqués et graphes d'état temporisés

Le problème de la détermination des m fréquences associées aux transitions d'un RdPT pour fonctionnement en vitesse propre, quand on connaît M_0 , C et Z , peut avoir plusieurs ou aucune solution les deux cas extrêmes correspondant aux graphes d'état et aux graphes marqués.

Graphes marqués temporisés

Pour les graphes marqués temporisés fortement connexes on a $n \geq m$, ($n = |P|, m = |T|$) l'égalité n'étant vérifiée que lorsque le graphe n'a qu'un seul circuit. Donc les fréquences déterminées en résolvant m parmi les n équations, décrivant le fonctionnement en vitesse propre, doivent satisfaire les $n-m$ équations qui restent. Sinon, il suffit de chercher des solutions de

$$\{ J_r^t M_0 \geq J_r^t Z C^+ F \}_{r=1}^{n-m+1} \quad \text{où}$$

- $\{ J_r^t \}_{r=1}^{n-m+1}$ est un ensemble de p -semiflots correspondant à l'ensemble des circuits élémentaires ;
- $F^t = [f, f, \dots, f]$ étant donné que toute solution de $CF=0$ pour un graphe marqué fortement connexe a ses composantes identiques.

La r-ième inéquation s'écrit:

$$\sum_{k_r} m_{0_i} \geq \left(\sum_{k_r} z_i \right) f \quad \text{où}$$

- $\sum_{k_r} m_{0_i}$ est la somme des marques posées initialement aux places du circuit k_r défini par le vecteur J_r ;
- $\sum_{k_r} z_i$ est la somme des retards associés aux places du circuit k_r .

Donc,

$$f_{\max} = \min_{r=1}^{n-m+1} \left\{ \frac{\sum_{k_r} m_{0_i}}{\sum_{k_r} z_i} \right\}$$

Cette formule est également donnée dans [RAM73].

Graphes d'état temporisés

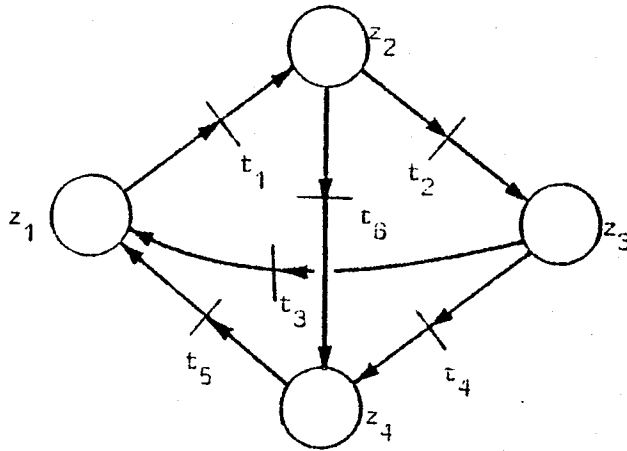
Pour les graphes d'état temporisés fortement connexes on a $m \geq n$ ($m = |T|$, $n = |P|$). Par conséquent, dans ce cas il existe plusieurs solutions du système décrivant le fonctionnement en vitesse propre. L'équation $CF=0$ a $(n-1)$ équations linéairement indépendantes et l'ensemble des équations (III) se réduit à une seule équation exprimant le fait que la somme des marques dans un graphe d'état reste constante.

Remarque :

Si on rajoute à ces équations, $m-n$ équations supplémentaires imposant un rapport constant entre les fréquences de mise à feu des transitions ayant la même place d'entrée, on a m équations indépendantes.

Exemple:

Soit le graphe d'état temporisé de la figure 4.



La solution de $CF=0$ donne:

$$f_1 = f_3 + f_4 + f_6$$

$$f_2 = f_3 + f_4$$

$$f_5 = f_4 + f_6$$

Figure 4

L'équation de conservation des marques dans le graphe d'état:

$$(z_1 + z_2) (f_3 + f_4 + f_5) + z_3 f_2 + z_4 (f_4 + f_6) = \sum_{i=1}^4 m_{0_i}$$

Si on suppose $\frac{f_2}{f_6} = \lambda_1$, $\frac{f_3}{f_4} = \lambda_2$ on a :

$$f_2 = \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_1 + 1}, \quad f_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 f_1}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)}, \quad f_4 = \frac{\lambda_1 f_1}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)}$$

$$f_5 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) f_1}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)}, \quad f_6 = \frac{f_1}{\lambda_1 + 1}$$

On peut maintenant déterminer f_1 :

$$f_1 \left[(z_1 + z_2) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} z_3 + \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)} z_4 \right] = \sum_{i=1}^4 m_{0_i}$$

Donc toutes les fréquences sont déterminées de façon unique à partir du marquage initial, des retards associés aux places et des paramètres λ_1 et λ_2 .

VII.2.4. Applications à l'évaluation des performances

Système Producteur-Consommateur

Une unité de production et une unité de consommation sont reliées par un magasin (figure 5). Le magasin peut contenir N_0 objets produits. Les deux unités ne peuvent pas accéder simultanément au magasin. L'unité de production peut déposer un objet dans le magasin si celui-ci n'est pas plein ; l'unité de consommation peut accéder au magasin s'il n'est pas vide. Les objets sont produits, retirés et consommés un par un.

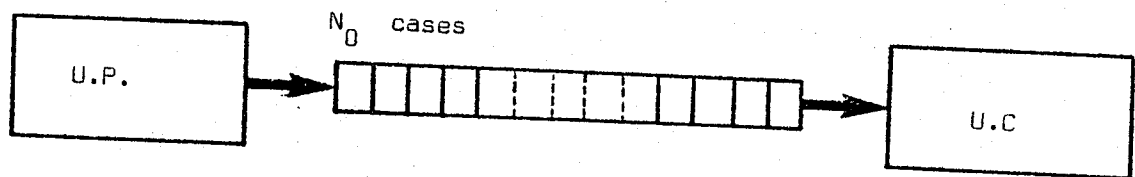


figure 5

Le RdPT de la figure 6 décrit ce système avec un marquage initial possible. Interprétation des retards z_i associés aux places :

- z_p : temps moyen de production d'un objet ,
- z_d : temps moyen de dépôt d'un objet ,
- z_r : temps moyen de retrait d'un objet ,
- z_c : temps moyen de consommation d'un objet ,
- z_s : temps moyen entre deux accès consécutifs au magasin ,
- z_a : temps moyen d'attente d'un objet dans le magasin.

On supposera que les z_i associés aux autres places sont nulles. C'est-à-dire le producteur et le consommateur tournent à vitesse maximum : le producteur, après avoir produit trouve toujours des cases vides dans le magasin et l'accès au magasin libre ; il peut donc tout de suite déposer l'objet produit. Aussi,

le consommateur après avoir consommé, trouve toujours des cases pleines dans le magasin et l'accès au magasin libre ; il peut donc tout de suite retirer un objet déposé dans le magasin.

En résolvant le système $CF=0$ on trouve que toutes les transitions doivent admettre la même fréquence f . D'autre part, l'ensemble des composantes conservatives élémentaires (des graphes d'état dans ce cas) est donné en figure 7 .

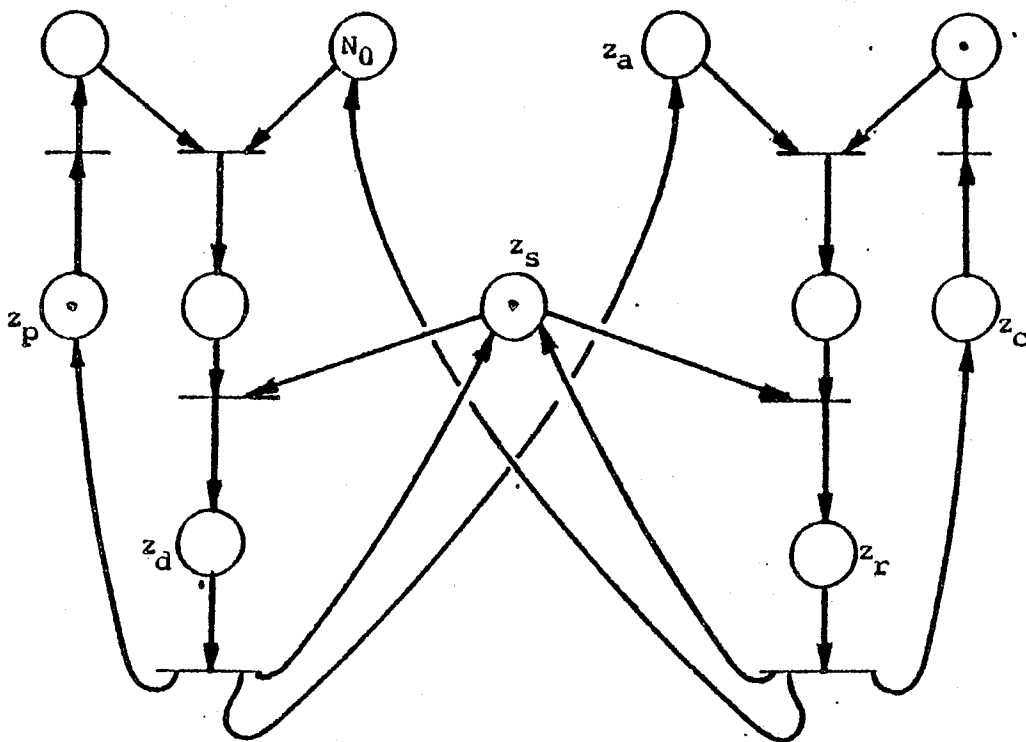


Figure 6

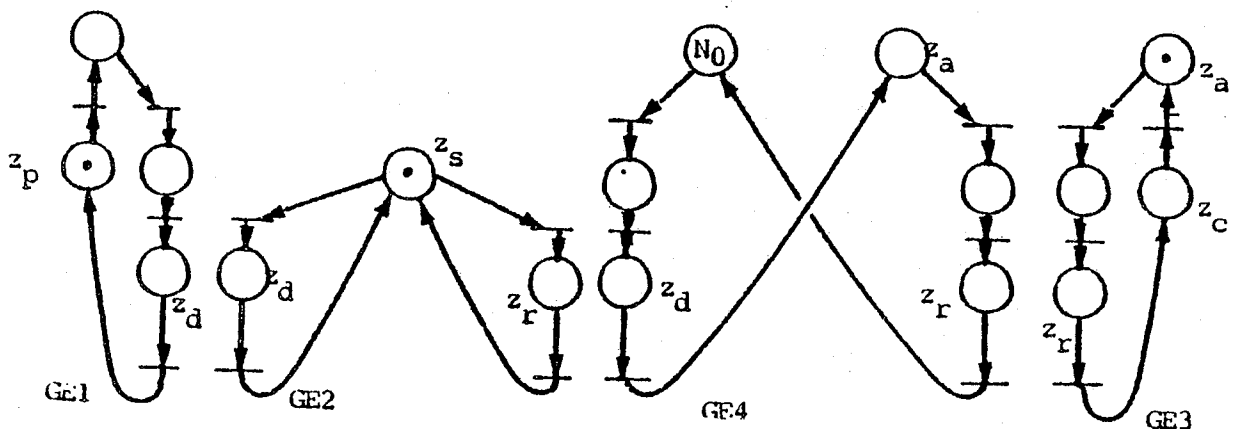


Figure 7

Problème

Si on considère comme marquage initial celui donné en figure 6 est-ce qu'un fonctionnement en vitesse propre est possible dans les cas suivants?

a/ $z_a = z_s = 0$

En écrivant les inéquations (II) pour GE1, GE2, GE3, GE4, on obtient respectivement:

$$f \leq \frac{1}{z_d+z_p}, \quad f \leq \frac{1}{z_d+z_r}, \quad f \leq \frac{1}{z_r+z_c}, \quad f \leq \frac{N_0}{z_d+z_r}$$

Donc dans le cas général :

$$f_{\max} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{z_d+z_p}, \frac{1}{z_d+z_r}, \frac{1}{z_r+z_c}, \frac{N_0}{z_d+z_r} \right\}$$

On a fonctionnement en vitesse propre si :

$$N_0 = 1, \quad z_d+z_p = z_d+z_r = z_r+z_c$$

Donc il faut que $N_0=1, z_p=z_r, z_d=z_c$

b/ $z_s \neq 0$ et $z_a = 0$

$$f_{\max} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{z_d+z_p}, \frac{1}{z_d+z_r+2z_s}, \frac{1}{z_r+z_c}, \frac{N_0}{z_r+z_d} \right\}$$

Fonctionnement en vitesse propre si :

$$z_p = z_r+2z_s, \quad z_c = z_d+2z_s, \quad N_0 = \frac{z_r+z_d}{z_r+z_d+2z_s} < 1$$

Ceci est impossible parce que N_0 doit être supérieur ou égal à 1.

c/ $z_s = 0, z_a \neq 0$

$$f_{\max} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{z_p+z_d}, \frac{1}{z_d+z_r}, \frac{1}{z_r+z_c}, \frac{N_0}{z_d+z_r+z_a} \right\}$$

Fonctionnement en vitesse propre si :

$$z_p=z_r, \quad z_d=z_c, \quad N_0-1 = \frac{z_a}{z_p+z_r}$$

d/ $z_s \neq 0$, $z_a \neq 0$

$$f_{\max} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{z_p + z_d} , \frac{1}{z_d + z_r + 2z_s} , \frac{1}{z_r + z_c} , \frac{N_0}{z_d + z_r + z_a} \right\}$$

Fonctionnement en vitesse propre si :

$$z_s = \frac{z_p - z_r}{2} = \frac{z_c - z_d}{2} \quad N_0 - 1 = \frac{z_a - 2z_s}{z_p + z_d} = \frac{z_a - 2z_s}{z_c + z_r}$$

Il faut donc que la période du producteur soit égale à la période du consommateur, les durées de production et de consommation soient supérieures ou égales respectivement aux durées de retrait et de dépôt d'un objet et $z_a \geq 2z_s$.

Système à r producteurs et w consommateurs

Soit un système à r-producteurs et w-consommateurs reliés par un magasin de capacité N_0 . L'accès simultané au magasin est interdit. Nous reprenons pour les retards associés aux places les mêmes notations que celles de l'exemple précédent en rajoutant un indice pour distinguer les producteurs ou les consommateurs entre eux. Ainsi z_{d_j} est le temps moyen de dépôt d'un objet pour

j-ième consommateur. On considère toujours le cas où producteurs et consommateurs tournent à vitesse maximum: pas d'attente pour le dépôt d'un objet et pas d'attente pour le retrait (figure 8).

En figure 9 on donne une décomposition du système en composantes conservatives élémentaires.

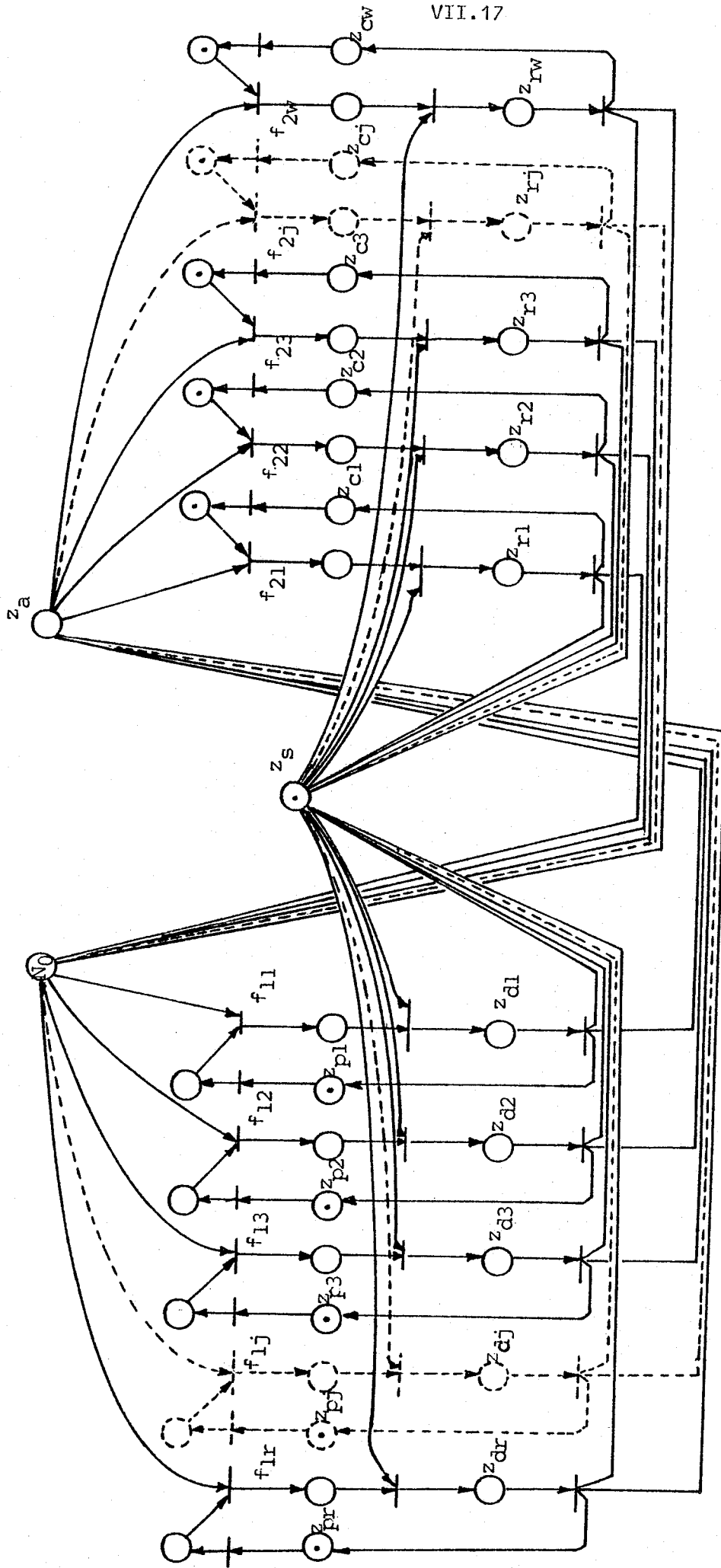


Figure 8

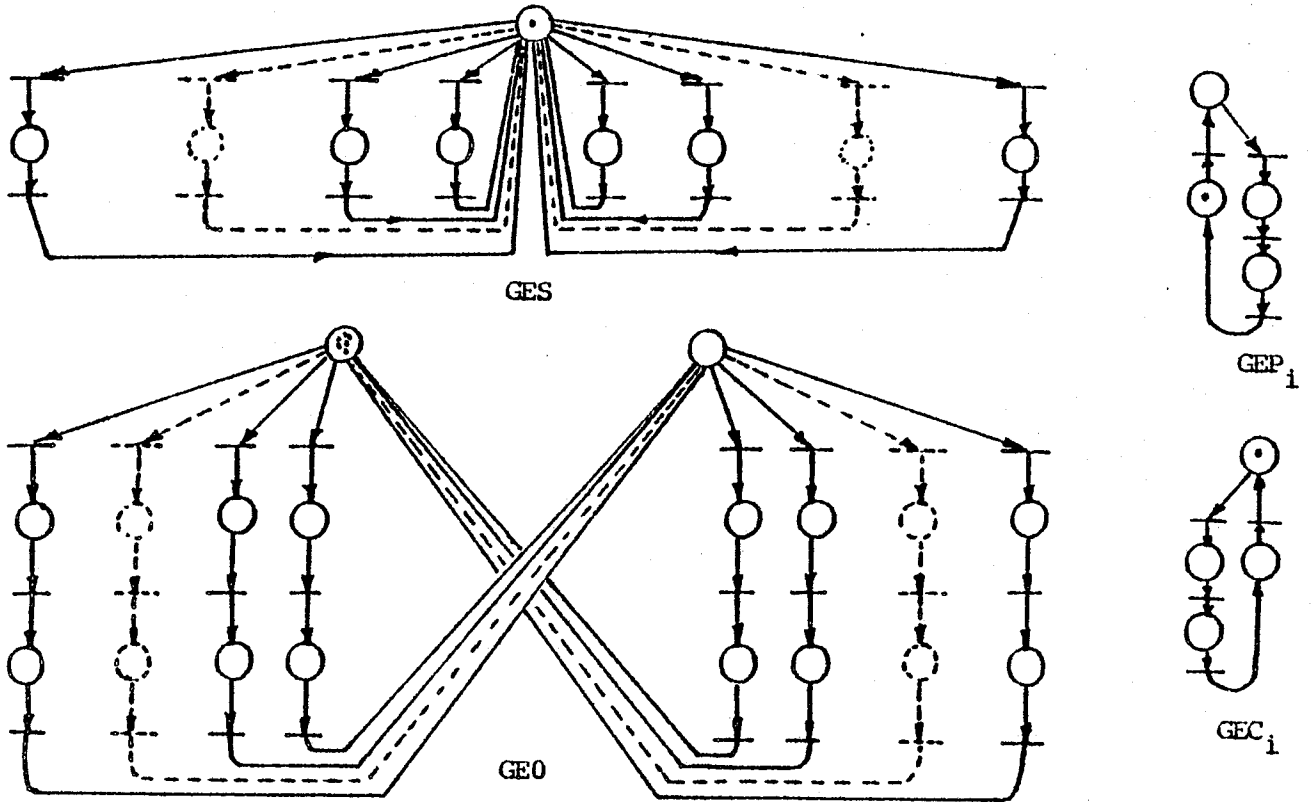


Figure 9

Si f_{1j} et f_{2j} sont les flots associés aux boucles du j -ième producteur et du j -ième consommateur on a :

$$\left\{ f_{1j} \leq \frac{1}{z_{d_j} + z_{p_j}} \right\}_{j=1}^r \quad \left\{ f_{2j} \leq \frac{1}{z_{c_j} + z_{r_j}} \right\}_{j=1}^w$$

D'autre part, il faut que $\sum_{j=1}^r f_{1j} = \sum_{j=1}^w f_{2j} = f_0$ où f_0 est le flot

qui traverse le magasin. Donc,

$$f_0 = \text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^R \frac{1}{z_{d_j} + z_{p_j}}, \sum_{j=1}^W \frac{1}{z_{c_j} + z_{r_j}} \right\}$$

D'autre part, l'équation de conservation de la charge dans GES (figure 9) donne:

$$\sum_{j=1}^n f_{1j} z_{d_j} + \sum_{j=1}^w f_{2j} z_{r_j} + 2f_0 z_s = 1$$

D'où:

$$z_s = \frac{1 - \sum_{j=1}^R f_{1j} z_{d_j} - \sum_{j=1}^W f_{2j} z_{r_j}}{2f_0}$$

$$\text{Mais, } \sum_{j=1}^R f_{1j} z_{d_j} \leq \sum_{j=1}^R \frac{z_{d_j}}{z_{d_j} + z_{p_j}} \text{ et } \sum_{j=1}^W f_{2j} z_{r_j} \leq \sum_{j=1}^W \frac{z_{r_j}}{z_{c_j} + z_{r_j}}$$

D'où une borne inférieure pour z_s :

$$z_s \geq \frac{1}{2f_0} \left(1 - \sum_{j=1}^R \frac{z_{d_j}}{z_{d_j} + z_{p_j}} - \sum_{j=1}^W \frac{z_{r_j}}{z_{c_j} + z_{r_j}} \right) = \frac{u}{2f_0}$$

$$\text{(On pose : } u = 1 - \sum_{j=1}^R \frac{z_{d_j}}{z_{d_j} + z_{p_j}} - \sum_{j=1}^W \frac{z_{r_j}}{z_{c_j} + z_{r_j}})$$

Enfin, pour GEO (figure 9) on a :

$$\sum_{j=1}^n f_{1j} z_{d_j} + \sum_{j=1}^w f_{2j} z_{r_j} + z_a f_0 = N_0 \Rightarrow 1 - 2f_0 z_s + f_0 z_a = N_0$$

Donc :

$$N_0 - 1 = (z_a - 2z_s) f_0$$

Aussi étant donné que $z_s \geq \frac{u}{2f_0}$ on a :

$$z_a = \frac{N_0 - 1}{f_0} + 2z_s \Rightarrow z_a \geq \frac{N_0 - 1}{f_0} + \frac{u}{f_0} \quad \text{ce qui donne}$$

$$z_a \geq \frac{1}{f_0} \left(N_0 - \sum_{j=1}^r \frac{z_{d_j}}{z_{d_j} + z_{p_j}} - \sum_{j=1}^w \frac{z_{r_j}}{z_{r_j} + z_{c_j}} \right)$$

Dans le cas où on a fonctionnement en vitesse propre les inégalités deviennent égalités. On peut d'ailleurs vérifier que pour $w=r=1$ on retrouve les résultats de l'exemple précédent.

Serveur à capacité bornée de deux classes de processus

Soit le RdPT de la figure 10. On pourrait imaginer qu'il représente le fonctionnement d'une entreprise de location de voitures, ayant deux types de clients. Les clients de type 1, dont le nombre est N_1 , ont un temps moyen d'utilisation d'une voiture z_1 et un temps moyen entre deux demandes successives z_{a1} .

De façon analogue les clients de type 2, dont le nombre est N_2 , ont un temps moyen d'utilisation z_2 et un temps moyen entre deux demandes successives z_{a2} . On suppose que le nombre des voitures de l'entreprise est N_0 et que après chaque utilisation on fait un service à une voiture de durée moyenne z_s . On admet enfin qu'une voiture prête à être louée attend en moyenne pendant z_0 avant d'être demandée par un client.

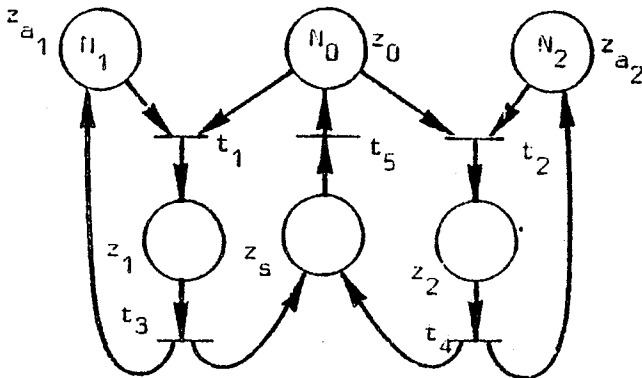


figure 10

En résolvant $CF=0$ on a :

$$f_1 = f_3, \quad f_2 = f_4, \quad f_5 = f_1 + f_2$$

Une décomposition du RdP en composantes conservatives élémentaires est donnée en figure 11.

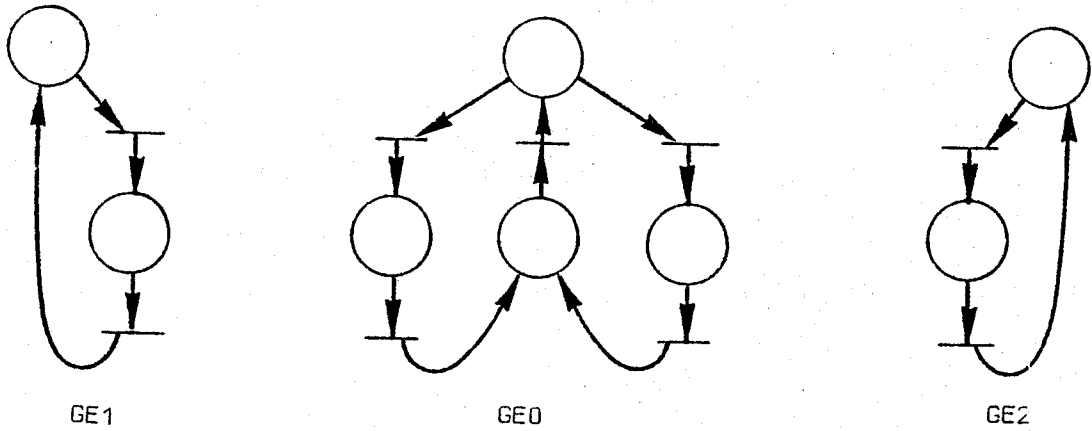


figure 11

Problème 1 :

Si on connaît N_1 et N_2 ainsi que les retards associés aux places, déterminer N_0 pour fonctionnement en vitesse propre.

Les équations de conservation de la charge dans GE1 et GE2 donnent respectivement :

$$f_1 = \frac{N_1}{z_1 + z_{a_1}} \quad f_2 = \frac{N_2}{z_2 + z_{a_2}}$$

Pour GE0 on a :

$$N_0 = (f_1 + f_2) (z_0 + z_s) + f_1 z_1 + f_2 z_2 \Rightarrow N_0 = \frac{N_1 (z_0 + z_s + z_1)}{z_{a_1} + z_1} + \frac{N_2 (z_0 + z_s + z_2)}{z_{a_2} + z_2}$$

N_0 est le nombre minimum de voitures pour satisfaire les demandes des clients.

Problème 2 :

On connaît $z_0, z_{a_1}, z_1, z_{a_2}, z_2$, le nombre de voitures de l'entreprise N_0 , le nombre moyen des voitures en attente avant d'être louées N_3 , ainsi que la capacité N_4 du garage qui fait le service. Déterminer le nombre de clients des deux types que l'entreprise peut satisfaire pour fonctionnement en vitesse propre.

On a :

$$\frac{N_3}{z_0} = f_1 + f_2$$

L'équation de conservation de la charge dans GEO :

$$N_0 = N_3 + N_4 + f_1 z_1 + f_2 z_2 \quad N_0 = N_3 + N_4 + f_1 z_1 + \frac{N_3}{z_0} z_2 - f_1 z_2 \quad (a)$$

ce qui donne pour $z_1 \neq z_2$: $f_1 = \frac{N_0 z_0 - N_3(z_0 + z_2) - N_4 z_0}{z_0 (z_1 - z_2)}$

$$\text{et } f_2 = \frac{N_4 z_0 + N_3(z_0 + z_1) - N_0 z_0}{z_0 (z_1 - z_2)}$$

$$\text{D'où } N_1 = \frac{[N_0 z_0 - N_3(z_0 + z_2) - N_4 z_0]}{z_0 (z_1 - z_2)} (z_1 + z_{a_1})$$

$$N_2 = \frac{[N_4 z_0 + N_3(z_0 + z_1) - N_0 z_0]}{z_0 (z_1 - z_2)} (z_2 + z_{a_2})$$

Si $z_1 = z_2 = z$ l'équation (a) donne : $N_0 = N_3 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right) + N_4$

Cette dernière équation doit être vérifiée pour avoir un fonctionnement en vitesse propre. Dans ce cas on ne peut pas déterminer N_1 et N_2 uniques.

On a en effet :

$$f_1 = \frac{N_1}{z_1 + z_{a_1}}, \quad f_2 = \frac{N_2}{z_1 + z_{a_2}}$$

$$f_1 + f_2 = \frac{N_3}{z_0} \Rightarrow \frac{N_1}{z + z_{a_1}} + \frac{N_2}{z + z_{a_2}} = \frac{N_3}{z_0}$$

La dernière équation permet de déterminer les couples de solutions possibles.

VII.3. COMPARAISON DES RdP AVEC D'AUTRES TYPES DE RESEAUX

VII.3.1. Les RdP en tant que porteurs de structures vectorielles

Soit un RdP $R = (P, T, a, b)$ avec matrice d'incidence C , $\text{rang}(C) = \rho$, $|P| = n$, $|T| = m$. On appellera :

- t-potentiel une application $X: T \rightarrow \mathbb{R}$; p-potentiel une application $Y: P \rightarrow \mathbb{R}$.
On représentera X et Y par des vecteurs $X \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^n$.
- Le débit D induit par un t-potentiel X est le vecteur $D = CX$; la tension induite par un p-potentiel Y est le vecteur V , $V^t = Y^t C$.
- Un t-arbre de R est un sous-réseau (de R) qui est le support d'un ensemble de transitions correspondant à ρ colonnes linéairement indépendantes de C .
Un p-arbre est un sous-réseau qui est le support d'un ensemble de places correspondant à ρ lignes linéairement indépendantes.
- Une t-corde (resp. p-corde) par rapport à un t-arbre (p-arbre) de R est toute transition (place) qui n'appartient pas à cet arbre.

Proposition 2 :

Si $(C, -)$ est un RdP consistant avec $\text{rang}(C) = \rho$ alors on peut trouver une base de l'espace des t-flots positive.

Démonstration :

Soit F_1, F_2, \dots, F_s un ensemble de t-semiflots linéairement indépendants et supposons que $s < m - \rho$, $m = |T|$.

Si $\sum_{i=1}^s S(F_i) \notin R$ alors d'après la proposition 22 du chapitre V on peut trouver un t-semiflot F_{s+1} tel que $\{F_i\}_{i=1}^{s+1}$ est constitué de vecteurs linéairement indépendants.

Si $\sum_{i=1}^s (F_i) = R$ alors on peut trouver t-flot X tel que les vecteurs F_1, F_2, \dots, F_s, X soient linéairement indépendants. Si X n'est pas positif on peut trouver un t-semiflot $F_0 = \sum_{i=1}^s \lambda_i F_i$ $\lambda_i > 0$ tel que $F_0 + X > 0$. Les vecteurs $F_1, F_2, \dots, F_s, F_0 + X$ est un ensemble de $s+1$ t-semiflotes linéairement indépendants.

Donc, dans tous les cas on peut augmenter le nombre s de t-semiflotes linéairement indépendants jusqu'à la valeur $s=m-\rho$.

Remarque :

Etant donné $F_1, F_2, \dots, F_{m-\rho}$ un ensemble de t-semiflotes linéairement indépendants, on peut trouver un t-arbre dont les cordes est un ensemble de $m-\rho$ transitions distinctes $T_1 = \{t_i\}_{i=1}^{m-\rho}$ tel que t_i est une transition de $S(F_i)$. En effet le sous-réseau $((T-T_1) \cup (T-T_1)', (T-T_1))$ est un t-arbre: si C_i est une colonne de C correspondant à une t-corde $t_i \in T_1$ alors elle est exprimable comme la combinaison linéaire des colonnes correspondant aux transitions de $T - T_1$.

Soit $A = [F_1, F_2, \dots, F_{m-\rho}]$ une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace des t-flots. Alors tout t-flot F_0 est exprimable comme la combinaison linéaire des F_i , $1 \leq i \leq m-\rho$:

$$A\theta = F_0 \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}^{m-\rho}$$

Les colonnes correspondant aux cordes d'un t-arbre étant exprimables comme des combinaisons linéaires des colonnes correspondant à ses transitions, on peut mettre A sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} I \\ S \\ Q \end{bmatrix} \quad \text{où } s = m-\rho$$

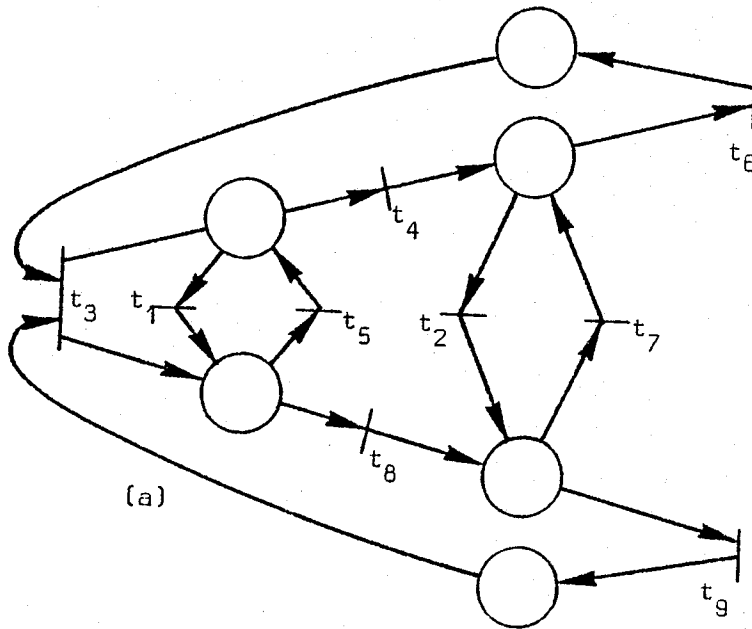
La relation $A\theta = F_0$ se réduit à $Q\theta = F_0$ où F_0 est un vecteur représentant les t-flots de l'arbre. Ce dernier résultat exprime le fait que les flots des transitions d'un t-arbre sont exprimables comme la combinaison linéaire des flots de ses cordes représentés par le vecteur θ . Les composantes de θ peuvent être considérées également comme des flots de "mailles".

Exemple :

Soit le RdP de la figure 12a dont les composantes consistantes élémentaires sont définies par les t-semiflots F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 . F_1, F_2, F_3, F_4 sont linéairement indépendants et nous avons $t_1 \in S(F_1)$, $t_2 \in S(F_2)$, $t_3 \in S(F_4)$ et $t_4 \in S(F_3)$.

Donc on peut considérer $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ comme l'ensemble des cordes du t-arbre représenté en figure 12b. On a :

$$A = \begin{bmatrix} & & & & I_4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} F_1^t &= [100 \ 010 \ 000] \\ F_2^t &= [010 \ 000 \ 100] \\ F_3^t &= [001 \ 101 \ 011] \\ F_4^t &= [101 \ 001 \ 121] \\ F_5^t &= [011 \ 211 \ 001] \end{aligned}$$

(b)

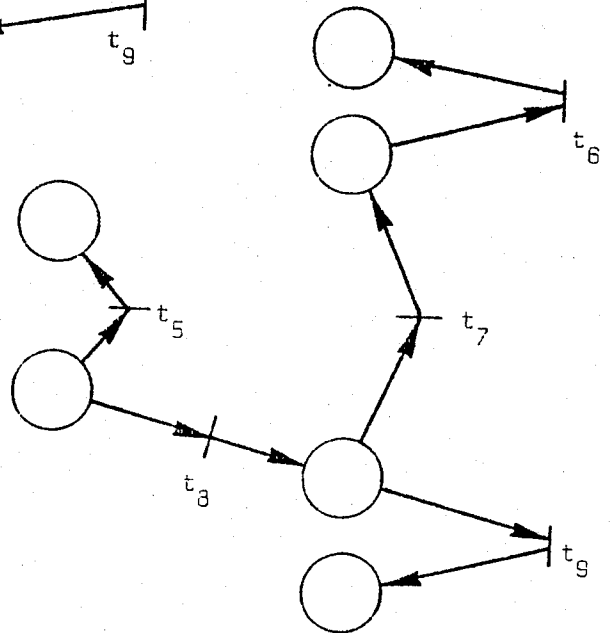


Figure 12

Les tensions d'un RdP (C,-) étant des vecteurs de l'espace des lignes de C on a : U est tension de (C,-) ssi $U^t A = 0$. Si A est sous la forme $A = \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix}$ on a $U_1^t + U_2^t Q = 0$ où U_1 est un vecteur constitué des s=m-p premières composantes de U. Cette relation signifie que les tensions des cordes d'un t-arbre sont exprimables comme la combinaison linéaire des tensions de ses transitions.

On peut obtenir par dualité des résultats analogues pour les p-arbres, p-cordes, p-flots et les débits d'un RdP. Pour ce qui suit, on représentera par B une matrice dont les lignes forment une base de l'espace des p-flots d'un RdP (C,-).

Réseaux de Petri temporisés et réseaux à impédance

On peut, en utilisant les concepts introduits dans le paragraphe précédent, comparer les équations décrivant le fonctionnement en vitesse propre des RdPT avec les équations décrivant le fonctionnement des réseaux à impédance ([KUN72] page 254).

Dans les équations (I) et (III) les quantités impliquées sont : les t-flots, les débits, le marquage initial et les temps d'indisponibilité des marques. On peut retrouver ces équations en appliquant les règles :

R1/ Dans chaque place il y a conservation des t-flots.

R2/ Pour chaque place p_i , le débit associé d_i est lié avec le flot qui

la traverse $f_{p_i} = C_i^+ F$ par la relation

$$d_i = m_{0_i} - z_i f_{p_i}$$

où m_{0_i} est le nombre de marques initialement posées dans p_i et z_i est le retard associé.

R3/ Pour chaque composante conservative support d'un p-semiflot J, la somme des débits de ses places pondérée par les composantes correspondantes de J est égale à 0.

Par contre, les quantités impliquées dans les équations décrivant un réseau à impédance sont : les t-flots, les tensions, les forces électromotrices et les impédances. On peut retrouver ces équations en appliquant les règles :

R1'/ Pour chaque place il y a conservation des t-flots.

R2'/ Pour chaque transition t_i la tension associée u_i est liée avec le t-flot f_i qui traverse t_i par la relation

$$u_i = e_i - z_i f_i$$

où, e_i est la force électromotrice de la transition, et z_i est l'impédance associée.

R3'/ Pour chaque composante consistante, support d'un flot F_1 la somme des tensions de ses transitions pondérée par les composantes correspondantes de F_1 est égale à 0.

Remarquons que dans le cas des RdPT on peut se ramener à un système de n équations indépendantes à m inconnues. Dans le deuxième cas, on peut se ramener à un système à m équations indépendantes à m inconnues. En effet, par application de R1'/, R24/, R3'/ on a respectivement p , m et $m-p$ équations indépendantes tandis que le nombre total des inconnues est $2m$ (m t-flots + m tensions). La différence entre les deux modèles est que "la 2ème loi de Kirchoff" s'applique aux composantes conservatives pour les RdPT tandis que pour les réseaux à impédance elle s'applique aux composantes consistantes.

D'après la comparaison précédente, si on rajoute aux équations exprimant la conservation de la charge $CF=0$, dans un graphe d'état temporisé, $|P|=n$, $|T|=m$, $m-n+1$ équations exprimant le fait que le nombre de marques de chaque circuit d'une base de circuits reste constant, alors on a m équations indépendantes. On peut donc déterminer de façon unique les fréquences associées aux transitions.

Exemple :

Considérons le graphe d'état temporisé de la figure 2 dont une décomposition en circuits élémentaires est représentée en figure 13.

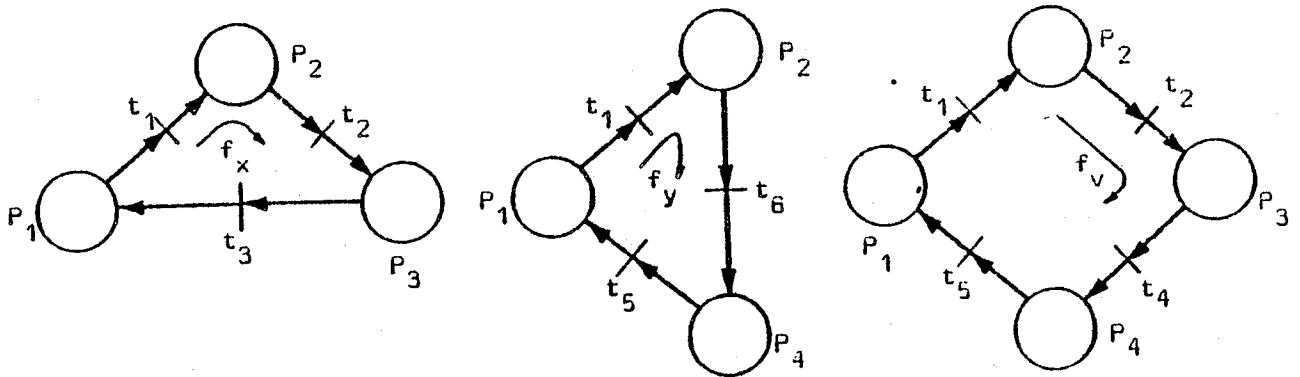


figure 13

On a :

$$f_1 = f_x + f_y + f_v$$

$$f_4 = f_v$$

$$f_2 = f_x + f_v$$

$$f_5 = f_y + f_v$$

$$f_3 = f_x$$

$$f_6 = f_y$$

Si on veut que le nombre des marques de chaque circuit x , y , v reste constant et égal à q_x , q_y , q_v on a les équations

$$q_x = (f_x + f_y + f_v) z_1 + (f_x + f_v) z_3 + (f_x + f_v + f_y) z_2$$

$$q_y = (f_x + f_y + f_v) z_1 + (f_x + f_y + f_v) z_2 + (f_y + f_v) z_4$$

$$q_v = (f_x + f_y + f_v) z_1 + (f_x + f_y + f_v) z_2 + (f_x + f_v) z_3 + (f_y + f_v) z_4$$

Ces trois équations permettent de déterminer les fréquences f_x , f_y , f_v et par conséquent les fréquences associées aux transitions. Le réseau à impédance équivalent est donné en figure 14.

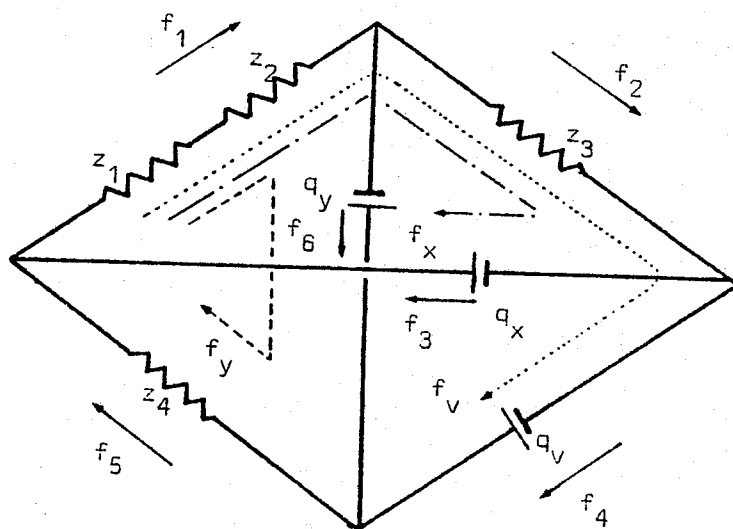


figure 14

Les analogies entre RdPT et réseaux à impédance ayant été mises en évidence, on peut généraliser les équations décrivant le fonctionnement d'un RdPT en vitesse propre en supposant que les f_i sont variables et les z_i des opérateurs intégrro-différentiels. Mais l'intérêt pratique de telles extensions n'est pas évident dans la mesure où on ne voit pas quelle interprétation associer à ces équations.

Exemple :

Pour le RdP de la figure 15 on a :

$$A^t = \begin{bmatrix} 211 & 011 \\ 211 & 120 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 00 \\ 00 & 00 & 11 \end{bmatrix}$$

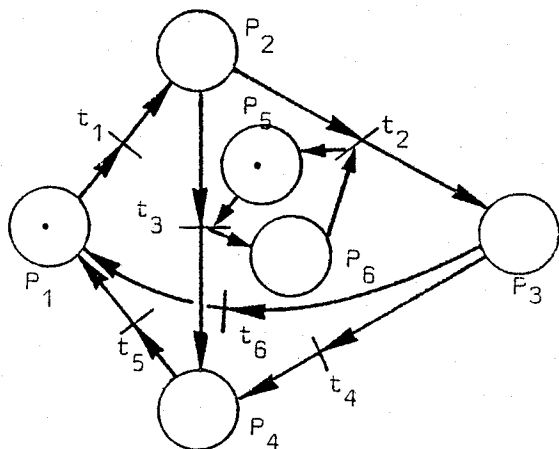


figure 15

Si f_x et f_y sont les fréquences associées aux composantes constantes élémentaires définies par les colonnes de A on a :

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Pour fonctionnement en vitesse propre on a $DM_0 = DZC^+F = DZC^+A \begin{vmatrix} f_x \\ f_y \end{vmatrix}$.

Ceci donne:

$$(f_x + f_y)2z_0 = 1 \quad (\text{on pose } z_5 = z_6 = z_0)$$

$$2(f_x + f_y)z_1 + 2(f_x + f_y)z_2 + (f_x + f_y)z_3 + (f_x + 2f_y)z_4 = 1$$

D'où :

$$f_x = \frac{2(z_1 + z_2 + z_4) + z_3 - 2z_0}{2z_0 z_4}, \quad f_y = \frac{2z_0 - 2(z_1 + z_4) - z_3 - z_4}{2z_0 z_4}$$

Pour que les fréquences associées aux transitions soient positives, il faut que $f_y \geq 0$ et $f_x + f_y \geq 0$. La deuxième est toujours vérifiée et la première donne :

$$z_0 \geq \frac{2(z_1 + z_2) + z_3 + z_4}{2}$$

Si les z_i prennent des valeurs dans $\mathbb{N} - \{0\}$, alors la plus petite valeur de z_0 est obtenue pour $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$ ($z_0 = 4$). Si $z_0 < 4$ alors il faut que $f_y = 0$ pour avoir fonctionnement en vitesse propre. Ceci s'explique par le fait que si $f_y > 0$ on a le circuit $p_1 t_1 p_2 t_2 p_3 t_4 p_4 t_5 p_1$ de retard total 4.

Réseaux de Petri temporisés et réseaux de dipôles

L'étude du fonctionnement en vitesse propre d'un RdPT R_T peut être ramené à l'étude du fonctionnement d'un réseau de dipôles ([KUN72] page 224) obtenu de façon systématique à partir de R_T . Pour cela il suffit de représenter une transition par une bifurcation et une place par un sous-réseau composé de deux mélangeurs et d'un dipôle représentant le retard associé (figure 16)

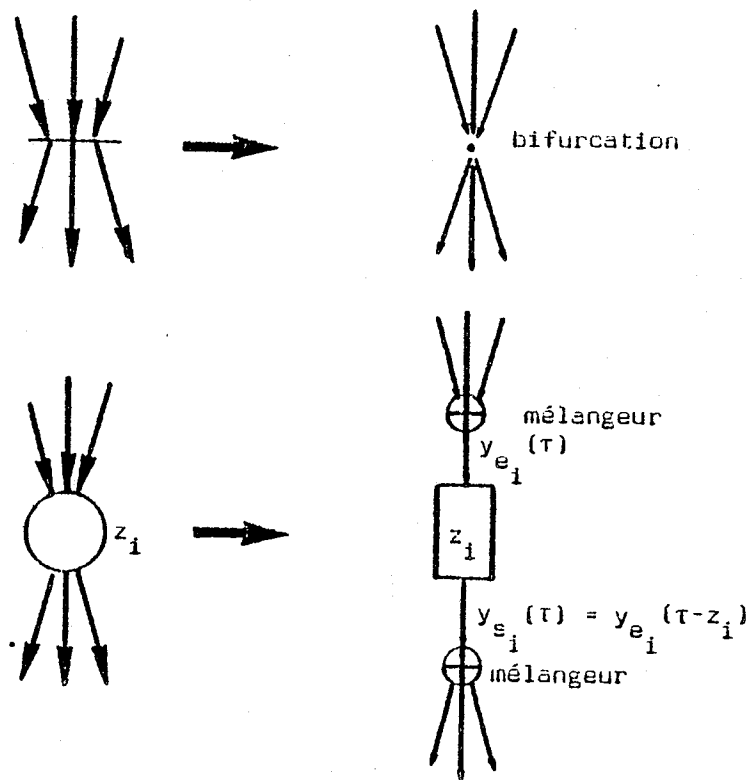


figure 16

Nous rappelons que d'après la terminologie utilisée dans [KUN72] :

- les bifurcations sont des noeuds dont les connecteurs (arcs incidents et sortants) portent la même valeur ;
- les mélangeurs sont des noeuds tels que la somme des valeurs portées par leurs connecteurs est nulle (en tenant compte de leur orientation).

Les réseaux de dipôles ainsi obtenus sont des systèmes linéaires discrets. Remarquons que l'état de tout connecteur de ces réseaux peut s'exprimer comme la combinaison linéaire des états des bifurcations et soient $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$, ..., $y_m(\tau)$ les variables d'état associées aux bifurcations d'un tel réseau. Nous

considérons que ces variables ont comme domaine l'ensemble des applications de T dans N où T est la base de temps du RdPT à partir duquel ce réseau de dipôles a été obtenu. On peut décrire les évolutions possibles du réseau de dipôles par n équations (une pour chaque retard) de la façon suivante:

Pour un retard donné z_i exprimer la variable d'état $y_{e_i}(\tau)$ de son entrée et la variable d'état $y_{s_i}(\tau)$ de sa sortie en terme des variables d'état des bifurcations. Ecrire $y_{s_i}(\tau) = y_{e_i}(\tau - z_i)$.

Soit Y_1, Y_2, \dots, Y_m une solution de ce système de n équations telle que $\forall i \leq m, \forall \tau \in T, 0 \leq Y_i(\tau) \leq 1$. On peut interpréter les solutions de ce type de la façon suivante:

les instants τ tels que $Y_i(\tau) = 1$ sont des instants de mise à feu de la transition t_i . Il n'est pas difficile de vérifier que cette interprétation est cohérente.

Exemple :

Soit le RdPT de la figure 17 a avec $T=N$.

Le réseau de dipôles associé est représenté en figure 17 b. Si d représente l'opérateur "retard unitaire" le fonctionnement de ce dernier est décrit par les équations (voir par exemple [GIL66] pp. 81-108).

$$y_1 = dy_2 + y_{10}$$

$$y_2 = d^2y_1 + dy_{21} + y_{20}$$

$$y_3 = d^2y_1 + dy_{31} + y_{30}$$

$$y_4 = d^2y_3 + dy_{41} + y_{40}$$

(y_{ij} représente la valeur de la variable y_i à l'instant $j, j \in N$).

Pour que ce système ait une solution, il faut que

$$y_1 = d^3y_1 + d^2y_{21} + dy_{20} + y_{10} = d^4y_1 + d^3y_{31} + d^2y_{30} + dy_{11} + y_{10}$$

$$d'où \quad y_1 = \frac{d^2y_{21} + dy_{20} + y_{10}}{1 - d^3} = \frac{d^3y_{31} + d^2y_{30} + dy_{11} + y_{10}}{1 - d^4}$$

Ceci implique que

$$\lambda = y_{10} = y_{11} = y_{20} = y_{21} = y_{30} = y_{31}$$

Les seuls choix possibles sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$

La solution non nulle est $y_1 = \frac{1}{1-d} = 1+d+d^2+d^3+\dots$ c'est-à-dire la séquence 1111...1... . On trouve également $y_2 = y_3 = \frac{1}{1-d}$.

Le RdPT de la figure 17 a étant un graphe marqué temporisé, ce résultat est conforme au résultat du paragraphe VII.2.3.

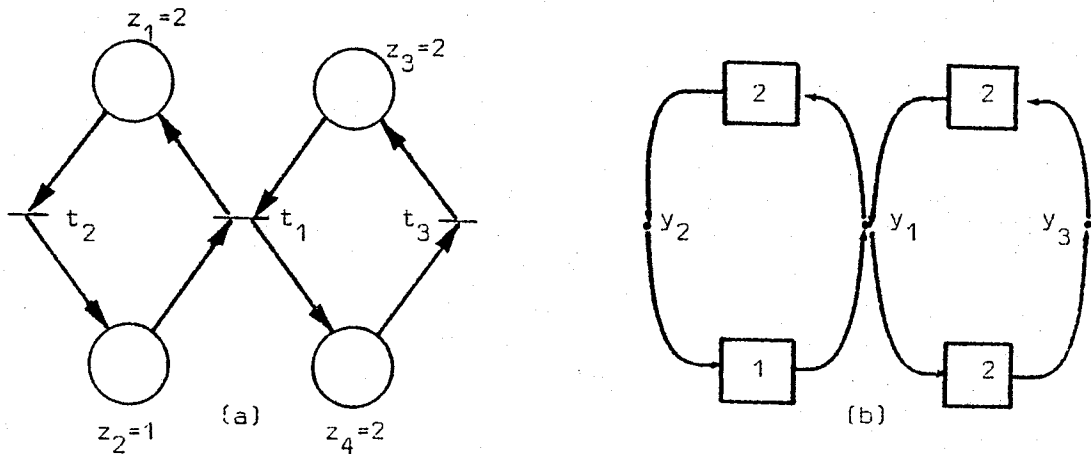


figure 17

Exemple :

Considérons le RdPT de la figure 18 a ayant $T=\mathbb{N}$ et le réseau de dipôles associé (figure 18 b).

On représente par $y_i(0 \div z)$ le polynôme qui représente $y_i(\tau)$ aux z premiers instants :

$$y(0 \div z) = y_{i0} + d y_{i1} + \dots + d^{z-1} y_{i(z-1)}$$

Le système des équations décrivant le fonctionnement du réseau des dipôles est:

$$y_1 = d^{z_1} y_2 + y_1(0 \div z_1)$$

$$y_2 = d^{z_2} y_1 + y_2(0 \div z_2)$$

$$y_3 = d^{z_3} y_4 + y_3(0 \div z_3)$$

$$y_4 = d^{z_4} y_3 + y_4(0 \div z_4)$$

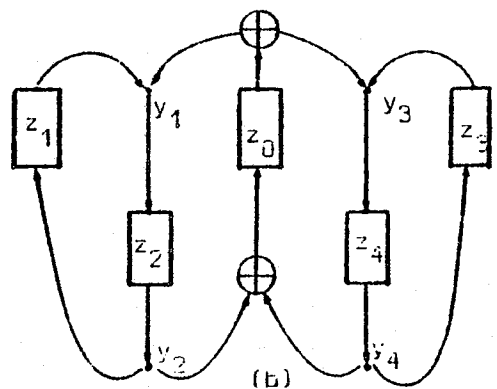
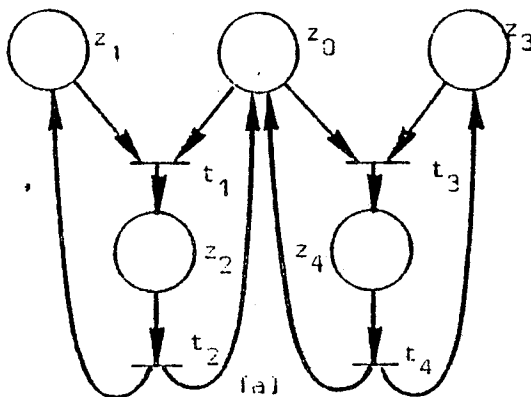
$$y_1 + y_3 = d^{z_0} (y_2 + y_4) + y_1(0 \div z_0) + y_3(0 \div z_0)$$

On a à partir des quatre premières équations :

$$y_1 = \frac{d^{z_1} y_2(0 \div z_2) + y_1(0 \div z_1)}{1 - d^{z_1 + z_2}}, \quad y_2 = \frac{d^{z_2} y_1(0 \div z_1) + y_2(0 \div z_2)}{1 - d^{z_1 + z_2}}$$

$$y_3 = \frac{d^{z_3} y_4(0 \div z_4) + y_3(0 \div z_3)}{1 - d^{z_3 + z_4}}, \quad y_4 = \frac{d^{z_4} y_3(0 \div z_3) + y_4(0 \div z_4)}{1 - d^{z_3 + z_4}}$$

Remarquons que les circuits comportant z_1, z_2 et z_3, z_4 sont des oscillateurs de période respectivement $z_1 + z_2$ et $z_3 + z_4$ et que si les valeurs initiales des y_i sont booléennes alors les séquences représentées par les y_i sont également booléennes. Mais pour satisfaire la contrainte de synchronisation entre ces deux processus cycliques, il faut que les y_i ainsi déterminés vérifient la cinquième équation.



Si on suppose (pour simplifier) que $z_1+z_2 = z_3+z_4$ alors les y_i doivent vérifier l'équation:

$$y_1(0:z_1) [1-d^{z_0+z_2}] - y_1(0:z_0) [1-d^{z_1+z_2}] + y_2(0:z_2) [d^{z_1}-d^{z_0}] + \\ + y_3(0:z_3) [1-d^{z_0+z_4}] - y_3(0:z_0) [1-d^{z_3+z_4}] + y_4(0:z_4) [d^{z_3}-d^{z_0}] = 0$$

Supposons que $z_1=3, z_2=1, z_3=1, z_4=3, z_0=2$

On trouve les relations entre les conditions initiales des y_i :

$$y_{31} = y_{40}$$

$$y_{12}+y_{41} = y_{10}+y_{20}+y_{40}$$

$$y_{20}+y_{42} = y_{41}+y_{11}$$

$$y_{10}+y_{30} = y_{42}+y_{12}$$

$$y_{11}+y_{31} = y_{30}$$

Parmi les solutions booléennes maximales on trouve :

$$y_{10} = y_{12} = y_{21} = y_{30} = y_{31} = y_{40} = y_{41} = y_{42} = 1 \text{ et } y_{11} = y_{20} = 0.$$

Ceci donne

$$y_1 = \frac{1+d^2}{1-d^4} \quad y_2 = \frac{d(1+d^2)}{1-d^4}$$

$$y_3 = y_4 = \frac{1}{1-d}$$

C'est-à-dire y_1, y_2, y_3 , représentent respectivement les séquences (101010....) (010101....) (1111....).

CONCLUSION

Nous avons présenté une étude des concepts, propriétés et des résultats sur l'analyse du contrôle des systèmes asynchrones sur trois modèles différents: les systèmes de transitions, les CA-systèmes, les réseaux de Petri et leurs extensions.

Les résultats présentés au deuxième chapitre sont d'une portée beaucoup plus générale dans la mesure où un grand nombre de modèles peuvent, à un certain niveau d'abstraction, être considérés comme des systèmes de transitions. Pour cela il suffit d'exprimer dans un modèle particulier les fonctions PRE, POST et leurs duales (comme il est fait au troisième chapitre pour les CA-systèmes et dans [HDA78] pour les programmes à commandes gardées). Nous avons montré qu'il existe deux concepts fondamentaux pour l'étude des systèmes, ceux de l'invariant et de trajectoire. L'approche adoptée pour l'expression des propriétés, à savoir leur définition par un ensemble d'états initiaux, d'un ensemble d'états buts et d'un type d'atteignabilité semble être suffisamment générale pour être appliquée à d'autres modèles (tels que les programmes). Cette approche est d'autant plus intéressante qu'elle permet une étude systématique des propriétés, étant donné que les différents types d'atteignabilité s'expriment par des relations très simples entre invariants et trajectoires particuliers. Les résultats sur l'analyse présentés dans ce chapitre constituent un cadre théorique très général pour aborder ce problème. Le fait que la vérification des propriétés se ramène au calcul de points fixes de fonctions monotones confirme (si besoin était) l'importance de ce problème pour l'analyse. Cependant, nous doutons de la possibilité d'exploiter en pratique les résultats présentés dans toute leur généralité à cause de la complexité des méthodes de calcul itératif actuellement utilisées. Il est nécessaire d'étudier dans ce domaine des notions d'extrapolation ou d'autres méthodes de calcul non-itératives comme il est suggéré dans [COU78].

Les CA-systèmes constituent un modèle de haut niveau pour la description du contrôle sur lequel nous illustrons une partie des résultats présentés au deuxième chapitre. Les invariants caractéristiques forment une classe d'invariants plus précis que les autres dont l'existence pour tout CA-système a été démontrée à l'aide des réseaux de Petri.

Les réseaux de Petri, qui sont des CA-systèmes particuliers constituent le modèle de représentation du contrôle le plus étudié entre autres à cause du fait qu'ils admettent des représentations dans différents systèmes formels tels que les graphes, l'algèbre linéaire, les langages. La majorité des concepts étudiés sur ce modèle (verrous, composante conservative, place implicite, distance synchrone) correspondent à des invariants particuliers. En ce qui concerne les méthodes d'analyse propres aux réseaux de Petri, il faut remarquer que la plupart des résultats existants sont applicables aux réseaux ordinaires ou généralisés mais pas aux extensions qui ont la puissance d'une machine de Turing. De plus, les méthodes existantes dans leur majorité consistent à la vérification de conditions suffisantes, l'efficacité de chacune d'elles restant limitée à des réseaux de taille réduite. Il reste cependant à étudier la possibilité d'une combinaison intelligente de ces méthodes et des résultats théoriques existants : suivant la structure du réseau étudié et la propriété à vérifier, effectuer une analyse progressive en choisissant judicieusement la méthode à appliquer à une étape. Toutefois, il ne faut pas se faire d'illusions sur les possibilités d'une telle approche si on ne restreint pas le type des réseaux étudiés ; on peut trouver facilement des réseaux qui ne sont pas réductibles, qui sont fortement connexes, conservatifs et consistants, et pour lesquels l'algorithme de Karp et Miller n'est pas applicable en pratique.

Cette dernière constatation pose un problème plus général concernant le choix des modèles : on peut soit utiliser les modèles dans leur généralité et essayer d'analyser un système après l'avoir décrit, soit les restreindre de façon que

les systèmes décrits satisfont par construction certaines propriétés ou sont facilement analysables (approche suivie par [PAT70] [CAM75] [VAL76] [KOT78]). Les résultats pour les RdfP et a fortiori pour les autres modèles de plus haut niveau montrent que la deuxième approche est beaucoup plus réaliste dans l'état actuel des choses, à condition de pouvoir trouver des règles de structuration d'une description qui ne rendent pas la modélisation difficile, voire impossible, par le fait qu'ils n'introduisent pas un nombre de concepts et de primitives suffisant pour une expression "naturelle" et "directe". Pour cette raison et aussi à cause du fait que la quasi totalité des problèmes relatifs à la vérification sont indécidables, nous pensons que la solution du problème de l'analyse passe par la restriction des modèles de façon à obtenir des descriptions "facilement analysables". De plus, nous croyons que la complexité de ces problèmes nous amènera à étudier des propriétés qui sont des "approximations" des propriétés caractéristiques plus facilement vérifiables en se contentant de résultats "moins absolus". Cette idée a certainement motivé la recherche sur les méthodes d'analyse structurelle des réseaux, mais aussi l'étude séparée sur le contrôle de propriétés dépendant de l'état de la partie opérative.

Enfin, nous pensons que le choix d'un modèle parmi un ensemble de modèles comparables doit correspondre à un compromis entre la puissance de description et les possibilités d'analyse. Les réseaux de Petri permettent la représentation de certains aspects "locaux" du contrôle tels que le séquençement, la convergence, la divergence, le conflit mais s'avèrent inefficaces pour la représentation de contraintes globales. Par contre, les CA-systèmes semblent être un modèle suffisamment général pour l'expression aisée du contrôle. La recherche de ce compromis passe d'une part par l'étude de méthodes d'analyse propres aux CA-systèmes et d'autre part, par l'étude de modèles intermédiaires entre les réseaux de Petri et les CA-systèmes.

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

- [BAE70] J.L.BAER, D.P.BOUET et G.ESTRIN: "Legality and other properties of graph models of computation", JACM, vol17, n°3, juillet 1970, pp.543/554.
- [JUM75] R.J.JUMP et P.S.THIAGARAJAN: "On the interconnection of asynchronous control structures", JACM, vol.22, n°4, octobre 1975, pp. 596/612.
- [KAR69] R.M.KARP et R.E.MILLER: "Parallel program schemata", JCSS, vol.3, mai 1969, pp. 147/195.
- [KEL72] R.M.KELLER: "Vector replacement systems: a formalism for modeling asynchronous systems", Princeton University, Tech. report n°117, décembre 1972.
- [KEL74] R.M.KELLER: "Towards a theory of universal speed independent modules", IEEE Trans. Comp., vol C-23, n°1, janvier 1974, pp. 21/33.
- [LUC68] F.L.LUCONI: "Asynchronous computational structures", MIT, Doctoral thesis, septembre 1968.
- [MIL73] R.E.MILLER: "A comparison of some theoretical models of parallel computation", IEEE Trans. Comp., C-22, 8, août 1973, pp. 710/717.
- [MIL74] R.E.MILLER: "Some relationships between various models of parallelism and synchronization", IBM T.J.Watson Research Center, RC 5074, octobre 1974.
- [MIL75] R.E.MILLER: "Parallel program schemata" in "Theoretical computer science", Edizioni Cremonese, Rome 1975, pp. 5/63.
- [MIL76] R.E.MILLER: "Mathematical studies of parallel computation" in Proc. First IBM Symposium on Math. Foundations of Comp. Science, octobre 1976, pp.1/23.

- [MUL63] D.E.MULLER: "Asynchronous logics and application to information processing" in Switching theory in space technology, Stanford, California, Stanford University Press 1963.
- [PAT70] S.S.PATIL: "Coordination of asynchronous events" PhD. thesis, MIT, mai 1970.
- [PET74] J.L.PETERSON et T.H.BREDT: "A comparison of models of parallel computation", Proc. IFIP 74, août 1974, pp. 466/470.
- [ROD67] J.E.RODRIGUEZ: "A graph model for parallel computation" PhD thesis, MIT, septembre 1967.
- [RUM75] J.E.RUMBAUGH: "A parallel asynchronous computer architecture for data flow programs", MIT, MAC TR-150, mai 1975.
- [QUE78] J.P.QUEILLE: "Une technique de modélisation des systèmes de processus parallèles adaptée à l'analyse statique", Projet de 3ème année, ENSIMAG, juin 1978.

CHAPITRE I

- [AGE74] T.AGERWALA: "A complete model for representing the coordination of asynchronous processes", John Hopkins University, Dept. El. Engin., report 32, juillet 1974.
- [CAM75] R.H.CAMPBELL et P.E.LAUER: "Formal semantics of high level primitives for coordinating concurrent processes", Acta Informatica 5, 1975, pp. 297/332.
- [DIJ68] E.W.DIJKSTRA: "Cooperating Sequential processes" in "Programming languages", Editor F.Genuys, Academic Press, 1968, pp. 43/112.
- [KAR69] R.M.KARP et R.E.MILLER: "Parallel program schemata", JCSS, vol.3, mai 1969, pp. 147/195.
- [KEL73] R.M.KELLER: "Parallel program schemata and maximal parallelism Fundamental results", JACM, vol.20, n°3, juillet 1973.
- [MES72] M.D.MESAROVIC: "A mathematical theory of general systems" in "Trends in general systems theory", Editor G.J.Klir, Wiley Interscience, 1972.
- [PET74] J.L.PETERSON et T.H.BREDT: "A comparison of models of parallel computation", Proc. IFIP 74, aout 1974, pp. 466/470.
- [PUL78] J.PULDU: "Un outil pour la spécification de la synchronisation dans les langages de haut niveau", RAIRO Informatique, vol.12, n°4, pp 291/306, 1978.
- [ROB77] P.ROBERT et J.P.VERJUS: "Towards autonomous descriptions of synchronization modules", Proc. IFIP 77, aout 1977, pp. 981/986.

[ROU78] G.ROUCAIROL: "Contribution à l'étude des équivalences syntaxiques et transformations de programmes parallèles", Thèse d'Etat, Université PARIS VI, novembre 1978.

[VAL76] R.VALETTE: "Sur la description, l'analyse et la validation des systèmes de commande parallèles", Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, novembre 1976.

CHAPITRE II

- [AMY78] B.AMY et M.CAPLAIN: "Invariances algorithmiques et récurrences"
Actes du 3ème colloque Int. sur la programmation, Paris, mars 1978, pp.218-231.
- [ASH70] E.ASHCROFT et Z.MANNA: "Formalization of properties of parallel
programs" in Machine Intelligence 6, B.Meltzer and D.Michie (eds), American
Elsevier, N.Y.1970.
- [DIJ76] E.W.DIJKSTRA: "A discipline of programming", Prentice Hall Inc,
1976.
- [HAC76] M.HACK: "Decidability questions for Petri nets", MIT, Laboratory
for Computer Science, Technical report 161, juin 1976.
- [KAR69] R.M.KARP et R.E.MILLER: "Parallel program schemata", JCSS, vol.3,
mai 1969, pp. 147/195.
- [KEL72] R.M.KELLER: "Vector replacement systems: a formalism for modeling
asynchronous systems", Princeton University, Technical report n°117, décembre 1972.
- [KEL76] R.M.KELLER: "Formal verification of parallel programs", CACM, vol.19,
n°7, juillet 1976, pp. 371/384.
- [KWO77] Y.S.KWONG: "On reduction of asynchronous systems", Theoretical
Comp. Science, 2, 1976, pp. 25/50.
- [PAR69] D.PARK: "Fixpoint induction and proofs of program properties"
in Machine Intelligence 5 (1969), pp. 59/78.
- [ROS76] B.K.ROSEN: "Correctness of parallel programs: the Church-Rosser
approach", Theoretical Comp.Science, 2, 1976, pp. 183/207.

[SIN76] M.SINTZOFF: "Iterative methods for the generation of successful programs" (tentative text), MBL Research Lab., décembre 1976.

[TAR55] A.TARSKI: "A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications", Pacific Journal of Mathematics, 5, 1955, pp. 285/309.

CHAPITRE III

- [COF71] E.G.COFFMAN, M.J.ELPHICK, A.SHOSHANI: "System deadlocks",
Comp. Surveys ACM, vol.3, n°2, juin 1971, pp. 67/78.
- [DIJ65] E.W.DIJKSTRA: "Solution of a problem in concurrent programming
control", Comm. ACM 8,9, septembre 1965, p.569.
- [DIJ74] E.W.DIJKSTRA: "Self-stabilizing systems in spite of distributed
control" Comm. ACM, novembre 1974, vol.17, n°11, pp. 643/644.
- [DIJ75] E.W.DIJKSTRA: "Guarded commands, non determinacy and formal
derivation derivation of programs" CACM, vol.18, n°8, aout 1975, pp. 453/457.
- [FLD77] L.FLON et N.SUZUKI: "Nondeterminism and the correctness of
parallel programs" in "Formal description of programming concepts" North-Holland
Pub.Co 1978, pp. 589/608.
- [FLON78] L.FLON et N.SUZUKI: "Consistent and complete proof rules for
the total correctness of parallel programs", CSL-78-6, Xerox Palo Alto Research
Center, novembre 1978.
- [GUE79] P.GUERREIRO: "Un modèle relationnel pour les programmes non-déter-
ministes", DEA Informatique, IMAG, juin 1979.
- [HOL72] R.C.HOLT: "Some deadlock properties of computer systems" Computing
Surveys ACM, vol.4, n°3, septembre 1972.
- [LAM76] A.Van LAMSWEERDE et M.SINTZOFF: "Formal derivation of strongly
correct parallel programs", MBLR Research Lab., report R338, octobre 1976.

[LAM78] A. Van LAMSWEERDE: "From verifying termination to guaranteeing it" in Proc. IFIP Working Conf. on Formal description of programming concepts, North Holland Pub. Co., 1978, pp. 609/620.

[SIN78] M. SINTZOFF: "Ensuring correctness by arbitrary postfix points" in "Mathematical Foundation of Computer Science 1978", Springer Verlag 1978, pp. 484/492.

CHAPITRE IV

- [AGE73] T.AGERWALA et M.J.FLYNN: "Comments on the capabilities, limitations and "correctness" of Petri nets" in Proc. First Annual Symp. on Comp. Architecture, University of Florida, 1973.
- [AGE74] T.AGERWALA: "A complete model for representing the coordination of asynchronous processes", John Hopkins University, Dep. El.Eng., report 32, juillet 1974.
- [HAC75] M.HACK: "Decision problems for Petri nets and vector additions systems", MIT, MAC Techn. Memorandum, n°59, mars 1975.
- [HACK75] M.HACK: "Petri net languages", MIT, Computation structures Group Memo 124, juin 1975.
- [LAU74] K.LAUTENBACH et H.A.SCHMID: "Use of Petri nets for proving correctness of concurrent process systems", IFIP 1974, North-Holland Pub. Co., 1974, pp. 187/191.
- [MOA78] M.MOALLA, J.PULOU et J.SIFAKIS: "Synchronized Petri nets: A model for the description of non-autonomous systems", Math. Found. of Comp. Science, 1978, Springer-Verlag, pp. 374/383 (Aussi: "Reseaux de Petri synchronisés" RAIRO Automatique, vol.12, n°2, 1978, pp. 103/130).
- [PETR75] C.A.PETRI: "Interpretations of net theory", GMD, Interner bericht 75-07, Bonn, juillet 1975.
- [PETR77] C.A.PETRI: "Non-sequential processes", GMD, report ISF-77-01, Bonn, juin 1977
- [SIF78] J.SIFAKIS et J.P.QUEILLE: "Synchronization controllers and Petri nets", Rapport de recherche RR124, IMAG, juin 1978.

CHAPITRE V

- [BER76] G.BERTHELOT et G.ROUCAIROL: "Reduction of Petri nets" in "Mathematical Foundations of Computer science 1976", Springer Verlag, pp.202/209.
- [BER78] G.BERTHELOT: "Vérification des réseaux de Petri", thèse de 3° cycle, Université PARIS VI , janvier 1978.
- [BYR75] W.H.BYRN: "Sequential processes, deadlocks and semaphore primitives" Harvard University, TR7-75, 1975.
- [COM71] F.COMMONER, A.W.HOLT, S.EVEN, A.PNUELI: "Marked directed graphs" J. of Comp. and Sys. Science, 5, 1971, pp. 511/523.
- [CRE76] S.CRESPI-REGHIZZI et D.MANDRIOLI: "Some algebraic properties of Petri nets", Alta Frequenza, n°2, vol. XLV-1976, pp. 130/137.
- [DAN63] G.B.DANZIG: "Linear programming and extensions", Princeton University Press, 1963.
- [HAC72] M.HACK: "Analysis of production schemata by Petri nets", MIT, Master of Science, 1972.
- [HAC75] M.HACK: "Decision problems for Petri nets and vector addition systems", MIT, MAC Technical memorandum, n°59, mars 1975.
- [HAC76] M.HACK: "Decidability questions for Petri nets", MIT, Lab. for Computer science, Technical report 161, juin 1976.
- [HOL68] A.W.HOLT: "Information system theory project", Applied Data Research inc., Princeton, New Jersey, septembre 1968.
- [HOL70] A.W.HOLT et F.COMMONER: "Events and conditions", Applied Data Research Inc., New-York, 1970.

- [KAR69] R.M.KARP et R.E.MILLER: "Parallel program schemata", JCSS, vol.3, mai 1969, pp. 147/195.
- [KEL72] R.M.KELLER: "Vector replacement systems: a formalism for modeling asynchronous systems", Princeton University, Technical report n°117, décembre 1972.
- [LAN75] L.H.LANDWEBER: "Properties of vector addition systems", University of Wisconsin, Comp.Science Dept., Technical report 258, juin 1975.
- [LAU74] K.LAUTENBACH et H.A.SCHMID: "Use of Petri nets for proving correctness of concurrent process systems", IFIP 74, North Holland Pub. Co., 1974, pp.187/191.
- [LAU75] K.LAUTENBACH: "Liveness in Petri nets", GMD, Internal report ISF-75-02-1, Bonn, juillet 1975.
- [LIE76] Y.E.LIEN: "Termination properties of generalized Petri nets" SIAM J.COMPT., vol.5, n°2, juin 1976, pp. 251/265.
- [LIEN76] Y.E.LIEN: "A note on transition systems", Information Science 10, 1976, pp. 347/362.
- [LIP76] R.LIPTON: "The reachability problem and the boundedness problem for Petri nets are exponential-space hard", Yale University, Dept. of Comp. Science, TR-62, janvier 1976.
- [MEM78] G.MEMMI: "Fuites et semi-flots dans les réseaux de Petri", thèse Docteur-ingénieur, Université PARIS VI, décembre 1978.
- [MUR77] T.MURATA: "Petri nets, marked graphs and circuit system theory" IEEE Circuits and Systems, vol.11, n°3, juin 1977, pp.2/12.
- [NAS73] B.O.NASH: "Reachability problems in vector addition systems" American Math. Monthly 80, 3, mars 1973, pp. 292/295.

- [PET77] J.L.PETERSON: "Petri nets", ACM Comp. Surveys, vol.9, n°3, septembre 1977, pp. 223/252.
- [RAM73] C.RAMCHANDANI: "Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets", MIT, PhD thesis, septembre 1973.
- [SIF78] J.SIFAKIS: "Structural properties of Petri nets" in Math. Found. of Comp. Science 1978, Springer Verlag, 1978, pp. 474/483.
- [SZL77] J.SZLANKO: "Petri nets for proving some correctness properties of parallel programs", IFAC-IFIP Workshop on Real-Time Programming, Eindhoven, juin 1977.

CHAPITRE VI

- [AZE77] P.AZEMA et M.DIAZ: "Checking experiments for concurrent systems" in Proc. FTCS-7, juin 1977, p.206.
- [BER78] G.BERTHELOT: "Vérification des réseaux de Petri", thèse de 3ème cycle, Université PARIS VI, janvier 1978.
- [FUR71] F.C.FURTEK: "Modular implementation of Petri nets", MIT, Master of science, septembre 1971.
- [HAN77] Y.W.HAN et W.L.HEIMERDINGER: "Transformation a Petri net like labelled graph to a directed graph for design error detection" in Proc. FTCS-7, juin 1977, p.205.
- [JAC76] L.A.JACK: "Functional faults", Workshop on distributed fault tolerant systems, Porto-Rico, Novembre 1976.
- [KWA77] KWAN CHI LEUNG et C.MICHEL: "Logical system design using PLA's and Petri nets - Programmable hardwired systems" in Proc. IFIP 77, North Holland Pub. Co., 1977, pp. 607/611.
- [MER75] Ph.MERLIN: "A study of the recoverability of computing systems" University of California, Dept. of Info. and Comp. science, Technical report 58, 1975.
- [MER76] Ph.MERLIN et D.J.FARDER: "Recoverability of communication protocols Implications of a theoretical study", IEEE Trans. Comm., septembre 1976, pp. 1036/1043.
- [MIT76] E.MITRANI, R.TELLEZ-GIRON et R.DAVID: "Emploi des CUSA pour la synthèse directe de systèmes asynchrones décrits pour des graphes ou des réseaux de Petri" in Colloque Automatismes Logiques, AFCET, PARIS, décembre 1976, pp.83/98.

- [PAT75] S.S.PATIL: "An asynchronous logic array", MIT, Computation structures Group, Memo 111-1, mars 1975.
- [PET72] J.L.PETERSON et E.W.WELDON Jr.: "Error-correcting codes", MIT Press, Second edition, 1972.
- [RAO74] T.R.N.RAO: "Error coding for arithmetic processors", Academic Press, New-York and London, 1974.
- [SIF79] J.SIFAKIS: "Realization of fault-tolerant systems by coding Petri nets" à paraître dans "Journal of design automation and fault tolerant computing", vol.III, n°2, 1979.

CHAPITRE VII

- [GIL66] A.GILL: "Linear sequential circuits", Mc Graw Hill, 1966.
- [KUN72] J.KUNTZMANN: "Théorie des réseaux", Dunod, Paris, 1972.
- [RAM73] C.RAMCHANDANI: "Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets", MIT, PhD thesis, septembre 1973.
- [SIF77] J.SIFAKIS: "Use of Petri nets for performance evaluation" in "Measuring, Modelling and Evaluating computer systems", H.Beilner et E.Gelenbe (eds), North Holland Pub. Co., 1977, pp.75/93.

CONCLUSION

- [CAM75] R.H.CAMPBELL et P.E.LAUER: "Formal semantics of high level primitives for coordinating concurrent processes", Acta Informatica 5, 1975, pp. 297/332.
- [COU78] P.COUSOT: "Methodes itératives de construction et d'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur un treillis, analyse sémantique des programmes", Thèse d'Etat, Grenoble, 1978.
- [HOA78] C.A.R.HOARE: "Some properties of predicate transformers", JACM, vol.25, n°3, juillet 1978, pp. 461/480.
- [KOT78] V.E.KOTOV: "An algebra for parallelism based on Petri nets" MFCS 78, Lecture notes in Comp.Sci., n°64, Springer Verlag, 1978, pp. 39/55.
- [PAT70] S.S.PATIL: "Coordination of asynchronous events", PhD thesis, MIT, mai 1970.
- [VAL76] R.VALETTE: "Sur la description, l'analyse et la validation des systèmes de commande parallèles", thèse d'Etat, Univ.Paul Sabatier, Toulouse, novembre 1976.

ANNEXE

PRINCIPALES NOTATIONS & ABREVIATIONS

1 - LETTRES

- A : ensemble d'actions
- a : action ; fonction d'incidence avant d'un réseau de Petri généralisé
($a : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$)
- α : relation ou application ; relation d'incidence avant d'un RdP
($\alpha \subseteq P \times T$)
- AV : Avance (chapitre VI)
- b : fonction d'incidence arrière d'un RdPG
- β : relation d'incidence arrière d'un RdP
- BTL : base de temps linéaire (chapitre VI)
- C : ensemble de conditions (chapitre III) ; matrice d'incidence d'un RdP
- c_i : prédicat représentant l'ensemble des états validant la transition t_i
d'un système de transitions
- d, δ : distance de Hamming et distance des marquages d'un RdP (chapitre VI)
- D.S : distance synchronique (chapitre VI)
- F : fonction quelconque ; flot d'un RdP (chapitre V)
- I : application identité
- J : invariant
- $L(S, q_0)$: langage généré par un système initialisé (S, q_0)
- λ : mot vide (élément neutre) d'un monoïde libre .
- M : marquage (état) d'un RdP
- m_i : nombre de marques contenues dans i-ème place d'un RdP
- m : nombre de transitions ou d'actions d'un système
- \mathbb{N} : l'ensemble des entiers naturels
- n : nombre des variables d'état d'un système, en particulier nombre de
places d'un RdP
- P : prédicat ; ensemble des places d'un RdP

P : ensemble de prédicats (chapitres II et III)
 P_i : la i -ème place d'un RdP
pre,post : fonctions définies au paragraphe II.2.1.
 Q : ensemble des états d'un système de transitions
 \mathbb{Q} : ensemble des rationnels
 $Q(\tau)$: variable des charges d'un RdPT (chapitre VII)
 R : relation ; un RdP, $R=(P,T, ,)$
 \mathbb{R} : l'ensemble des réels
 R : ensemble des relations sur Q
RdP : réseau(x) de Petri ; RdPG, RdPZ, RdPP, RdPPE, RdPEX représentent différentes extensions définies au chapitre IV.
 ρ : rang d'une matrice (chapitres V, VI, VII)
 S : système
 $S(F)$: sous-réseau support d'un vecteur F
 σ : séquence de transitions
 T : ensemble des transitions d'un système
 t, t_i : transition d'un système
 τ : instant d'une base de temps
 \mathbb{Z} : l'ensemble des entiers.

2 - AUTRES SYMBOLES

\leq : relation d'ordre du treillis des prédicats
 \wedge : conjonction
 \vee : disjonction
 \neg : négation, complémentation
 \top : le prédicat "toujours vrai"
 \perp : le prédicat "toujours faux"
 \rightarrow : relation d'atteignabilité
 \rightarrow^* : fermeture transitive de \rightarrow
 \Rightarrow : implication logique

- U : union ensembliste
- ∩ : intersection ensembliste
- ⊆ : relation d'inclusion ensembliste
- ∘ : composition de fonctions ou de relations
- \tilde{F} : la duale d'une fonction F
- $\{P_i\}_i$: séquence, ensemble d'éléments indicés par \mathbb{N}
- +
- ⊕ : addition sur un groupe fini
- ⊗ : addition sur un groupe fini
- ≤ : relation d'ordre sur un ensemble totalement ordonné ; son extension pour des vecteurs définis à partir de cete ensemble :

$$U \leq V \iff u_i \leq v_i \text{ pour chaque composante}$$
- < : $a < b$ est équivalent par définition à $a \leq b$. et $a \neq b$.

