



HAL
open science

Sur la résolution numérique de quelques problèmes non linéaires

Patrick Witomski

► **To cite this version:**

Patrick Witomski. Sur la résolution numérique de quelques problèmes non linéaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I; Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1983. Français. NNT : . tel-00010606

HAL Id: tel-00010606

<https://theses.hal.science/tel-00010606>

Submitted on 13 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

et à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES

Mathématiques

par

WITOMSKI Patrick



SUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DE QUELQUES

PROBLEMES NON LINEAIRES.



Thèse soutenue le 20 décembre 1983 devant la commission d'examen.

R. GLOWINSKI	Président
J. DUCHON	
J.M. LASRY	
P.J. LAURENT	Examineurs
A. PONCET	
R. ROBERT	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAÏEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : D. BLOCH

**Vice-Président : René CARRE
Hervé CHERADAME
Marcel IVANES**

PROFESSEURS DES UNIVERSITES :

ANCEAU François	E.N.S.I.M.A.G.
BARRAUD Alain	E.N.S.I.E.G.
BAUDELET Bernard	E.N.S.I.E.G.
BESSON Jean	E.N.S.E.E.G.
BLIMAN Samuel	E.N.S.E.R.G.
BLOCH Daniel	E.N.S.I.E.G.
BOIS Philippe	E.N.S.H.G.
BONNETAIN Lucien	E.N.S.E.E.G.
BONNIER Etienne	E.N.S.E.E.G.
BOUVARD Maurice	E.N.S.H.G.
BRISSONNEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
BUYLE BODIN Maurice	E.N.S.E.R.G.
CAVAIGNAC Jean-François	E.N.S.I.E.G.
CHARTIER Germain	E.N.S.I.E.G.
CHENEVIER Pierre	E.N.S.E.R.G.
CHERADAME Hervé	U.E.R.M.C.P.P.
CHERUY Arlette	E.N.S.I.E.G.
CHIAVERINA Jean	U.E.R.M.C.P.P.
COHEN Joseph	E.N.S.E.R.G.
COUMES André	E.N.S.E.R.G.
DURAND Francis	E.N.S.E.E.G.
DURAND Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
FELICI Noël	E.N.S.I.E.G.
FOULARD Claude	E.N.S.I.E.G.
GENTIL Pierre	E.N.S.E.R.G.
GUERIN Bernard	E.N.S.E.R.G.
GUYOT Pierre	E.N.S.E.E.G.
IVANES Marcel	E.N.S.I.E.G.
JAUSSAUD Pierre	E.N.S.I.E.G.
JOUBERT Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
JOURDAIN Geneviève	E.N.S.I.E.G.
LACOUME Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
LATOMBE Jean-Claude	E.N.S.I.M.A.G.

LESSIEUR Marcel	E.N.S.H.G.
LESPINARD Georges	E.N.S.H.G.
LONGEQUEUE Jean-Pierre	E.N.S.I.E.G.
MAZARE Guy	E.N.S.I.M.A.G.
MOREAU René	E.N.S.H.G.
MORET Roger	E.N.S.I.E.G.
MOSSIERE Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
PARIAUD Jean-Charles	E.N.S.E.E.G.
PAUTHENET René	E.N.S.I.E.G.
PERRET René	E.N.S.I.E.G.
PERRET Robert	E.N.S.I.E.G.
PIAU Jean-Michel	E.N.S.H.G.
POLOUJADOFF Michel	E.N.S.I.E.G.
POUPOT Christian	E.N.S.E.R.G.
RAMEAU Jean-Jacques	E.N.S.E.E.G.
RENAUD Maurice	U.E.R.M.C.P.P.
ROBERT André	U.E.R.M.C.P.P.
ROBERT François	E.N.S.I.M.A.G.
SABONNADIÈRE Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
SAUCIER Gabrielle	E.N.S.I.M.A.G.
SCHLENKER Claire	E.N.S.I.E.G.
SCHLENKER Michel	E.N.S.I.E.G.
SERMET Pierre	E.N.S.E.R.G.
SILVY Jacques	U.E.R.M.C.P.P.
SOHM Jean-Claude	E.N.S.E.E.G.
SOUQUET Jean-Louis	E.N.S.E.E.G.
VEILLON Gérard	E.N.S.I.M.A.G.
ZADWORNY François	E.N.S.E.R.G.

PROFESSEURS ASSOCIES

BASTIN Georges	E.N.S.H.G.
BERRIL John	E.N.S.H.G.
CARREAU Pierre	E.N.S.H.G.
GANDINI Alessandro	U.E.R.M.C.P.P.
HAYASHI Hirashi	E.N.S.I.E.G.

PROFESSEURS UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES (Grenoble II)

BOLLIET Louis
Chatelin Françoise

PROFESSEURS E.N.S. Mines de Saint-Etienne

RIEU Jean
SOUSTELLE Michel

CHERCHEURS DU C.N.R.S.

FRUCHART Robert
VACHAUD Georges

Directeur de Recherche
Directeur de Recherche

.../...

ALLIBERT Michel	Maître de Recherche
ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
ARMAND Michel	Maître de Recherche
BINDER Gilbert	
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DEPORTES Jacques	
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
GIGNOUX Damien	
GIVORD Dominique	
GUELIN Pierre	
HOPFINGER Emil	Maître de Recherche
JOUD Jean-Charles	Maître de Recherche
KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Dore	Maître de Recherche
LASJAUNIAS J.C.	
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche
PIAU Monique	
PORTESEIL Jean-Louis	
THOLENCE Jean-Louis	
VERDILLON André	

CHERCHEURS du MINISTERE de la RECHERCHE et de la TECHNOLOGIE (Directeurs et Maîtres de Recherches, ENS Mines de St. Etienne)

LESBATS Pierre	Directeur de Recherche
BISCONDI Michel	Maître de Recherche
KOBYLANSKI André	Maître de Recherche
LE COZE Jean	Maître de Recherche
LALAUZE René	Maître de Recherche
LANCELOT Francis	Maître de Recherche
THEVENOT François	Maître de Recherche
TRAN MINH Canh	Maître de Recherche

PERSONNALITES HABILITEES à DIRIGER des TRAVAUX de RECHERCHE (Décision du Conseil Scientifique)

ALLIBERT Colette	E.N.S.E.E.G.
BERNARD Claude	E.N.S.E.E.G.
BONNET Rolland	E.N.S.E.E.G.
CAILLET Marcel	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Catherine	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Christian	E.N.S.E.E.G.
COULON Michel	E.N.S.E.E.G.
DIARD Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
EUSTAPOPOULOS Nicolas	E.N.S.E.E.G.
FOSTER Panayotis	E.N.S.E.E.G.

.../...

GALERIE Alain	E.N.S.E.E.G.
HAMMOU Abdelkader	E.N.S.E.E.G.
MALMEJAC Yves	E.N.S.E.E.G. (CENG)
MARTIN GARIN Régina	E.N.S.E.E.G.
NGUYEN TRUONG Bernadette	E.N.S.E.E.G.
RAVAINE Denis	E.N.S.E.E.G.
SAINFORT	E.N.S.E.E.G. (CENG)
SARRAZIN Pierre	E.N.S.E.E.G.
SIMON Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
TOUZAIN Philippe	E.N.S.E.E.G.
URBAIN Georges	E.N.S.E.E.G. (Laboratoire des ultra-réfractaires ODEILLON)
GUILHOT Bernard	E.N.S. Mines Saint Etienne
THOMAS Gérard	E.N.S. Mines Saint Etienne
DRIVER Julien	E.N.S. Mines Saint Etienne
BARIBAUD Michel	E.N.S.E.R.G.
BOREL Joseph	E.N.S.E.R.G.
CHOVET Alain	E.N.S.E.R.G.
CHEHIKIAN Alain	E.N.S.E.R.G.
DOLMAZON Jean-Marc	E.N.S.E.R.G.
HERAULT Jeanny	E.N.S.E.R.G.
MONLLOR Christian	E.N.S.E.R.G.
BORNARD Guy	E.N.S.I.E.G.
DESCHIZEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
GLANGEAUD François	E.N.S.I.E.G.
KOFMAN Walter	E.N.S.I.E.G.
LEJEUNE Gérard	E.N.S.I.E.G.
MAZUER Jean	E.N.S.I.E.G.
PERARD Jacques	E.N.S.I.E.G.
REINISCH Raymond	E.N.S.I.E.G.
ALEMANY Antoine	E.N.S.H.G.
BOIS Daniel	E.N.S.H.G.
DARVE Félix	E.N.S.H.G.
MICHEL Jean-Marie	E.N.S.H.G.
OBLED Charles	E.N.S.H.G.
ROWE Alain	E.N.S.H.G.
VAUCLIN Michel	E.N.S.H.G.
WACK Bernard	E.N.S.H.G.
BERT Didier	E.N.S.I.M.A.G.
CALMET Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTIN Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTOIS Bernard	E.N.S.I.M.A.G.
DELLA DORA Jean	E.N.S.I.M.A.G.
FONLUPT Jean	E.N.S.I.M.A.G.
SIFAKIS Joseph	E.N.S.I.M.A.G.
CHARUEL Robert	U.E.R.M.C.P.P.
CADET Jean	C.E.N.G.
COEURE Philippe	C.E.N.G. (LETI)

.../...

DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIEB Maurice
VINCENDON Marc

C.E.N.G. (STT)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G.
C.E.N.G.
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G.
C.E.N.G.

LABORATOIRES EXTERIEURS

DEMOULIN Eric
DEVINE
GERBER Roland
MERCKEL Gérard
PAULEAU Yves
GAUBERT C.

C.N.E.T.
C.N.E.T. (R.A.B.)
C.N.E.T.
C.N.E.T.
C.N.E.T.
I.N.S.A. Lyon

Je veux remercier ici outre les Membres du Jury, tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de cette Thèse.

Je remercie Monsieur R. GLOWINSKI de venir présider ce Jury. Son soutien exprimé à plusieurs reprises a été un encouragement pour conclure cette Thèse.

Je dois à J.M. LASRY et R. ROBERT qui ont guidé mes premiers pas dans la recherche, l'acquisition d'un savoir faire précieux dans l'exercice de mon métier d'enseignant-chercheur.

R. ROBERT a dirigé cette Thèse. Ses qualités de discernement et de rigueur, la clarté de ses méthodes de travail sont pour moi un modèle d'efficacité. Je lui suis reconnaissant d'avoir guidé ce travail dans un climat de confiance et d'amitié.

L'intuition et l'ouverture d'esprit de J.M. LASRY, qu'il partage si généreusement, ont été une aide constante tout au long de mon travail. Je lui en suis très reconnaissant.

Le dialogue avec J. DUCHON a toujours été source de réflexion et ma reconnaissance va également à M. SCHATZMAN qui séjourne actuellement aux Etats-Unis et n'a pu participer à ce Jury.

L'orientation résolument concrète de A. PONCET m'a été une aide précieuse dans la mise en oeuvre des méthodes numériques.

Je remercie P.J. LAURENT de la sympathie qu'il me témoigne en acceptant de faire partie de ce Jury.

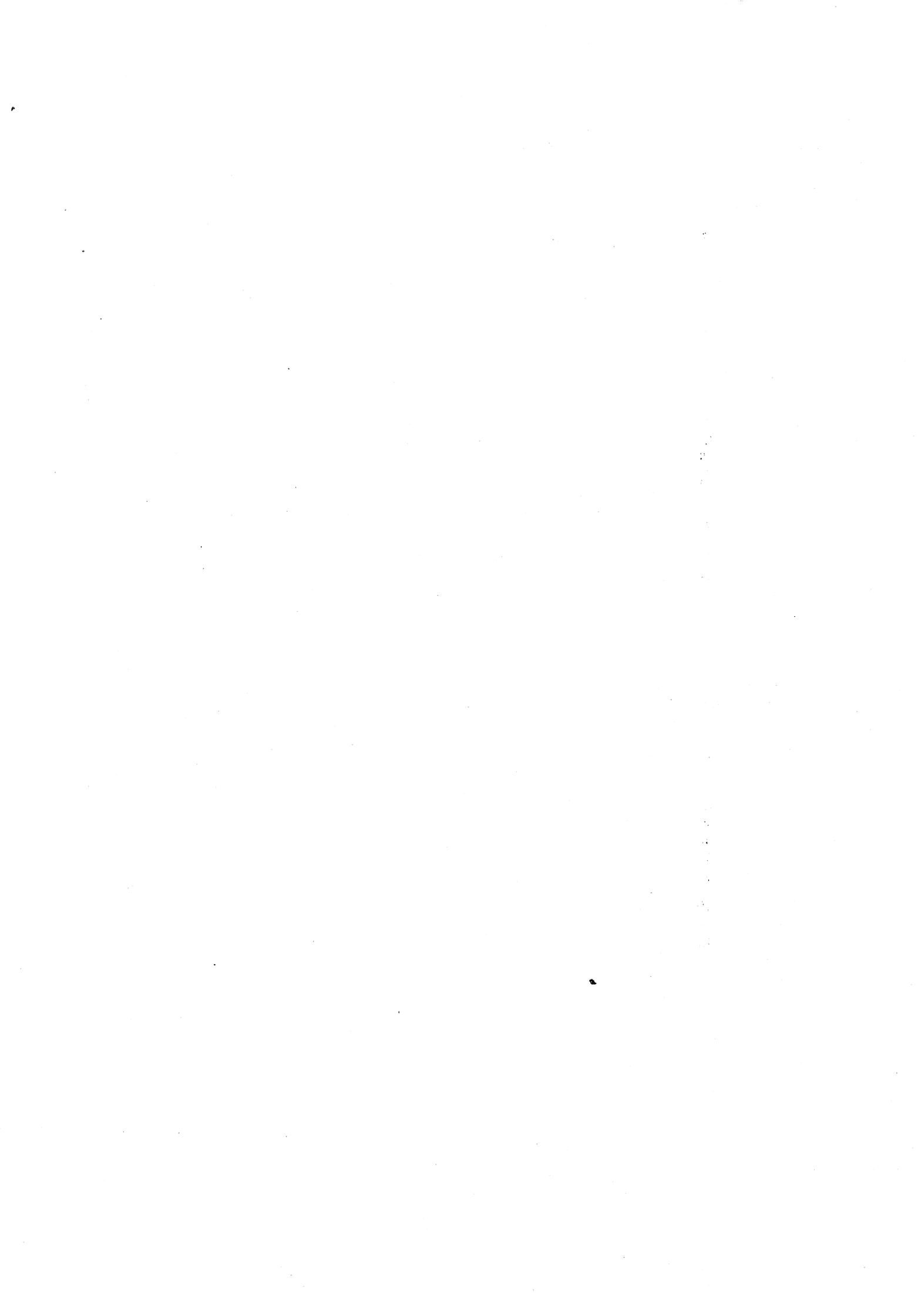
Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe d'Analyse Numérique et ma pensée va particulièrement en ce moment vers Monsieur N. GASTINEL, son fondateur.

La venue dans notre équipe de P. BARAS a été très stimulante. J'espère que nos projets communs verront le jour...

Je remercie C. DI CRESCENZO et A. EBERHARD qui ont développé un outil de calcul sur micro-ordinateurs dont j'ai pu largement profiter, C. MEYRIEUX qui en assurant la frappe de certains articles m'a sauvé des pannes de traitement de textes, le Service Reprographie qui a donné forme à ce document et je n'oublie pas tous ceux avec qui j'ai partagé l'Histoire de la Salle 65...

TABLE DES MATIÈRES

	pages
INTRODUCTION	1 à 12
<u>PREMIERE PARTIE</u>	
"Sur la modélisation d'une expérience de croissance cristalline"	II à 120
<u>DEUXIEME PARTIE</u>	
"Sur un modèle d'éruptions solaires" ...	III à III68
<u>TROISIEME PARTIE</u>	
"Autour d'un problème de la chimie des surfaces"	III1 à III99



INTRODUCTION

SUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES NON LINÉAIRES

I N T R O D U C T I O N

Le travail présenté dans cette Thèse peut se diviser en trois parties dont chacune correspond à la modélisation d'un phénomène physique par une équation aux dérivées partielles non linéaire. Ces problèmes proviennent d'horizons divers (procédé industriel de cristallisation, modèle d'éruptions solaires, modèles de corrosion électrochimique). Ils ont en commun de poser des problèmes d'analyse numérique de taille moyenne du point de vue du calcul.

Je me suis particulièrement intéressé à l'interaction entre les méthodes théoriques et numériques ainsi qu'à la réalisation de logiciels permettant la confrontation des résultats avec les expériences et les modèles physiques. Ceci m'a permis de travailler en collaboration avec des chercheurs de disciplines variées.

Cette introduction situe les problèmes traités et les résultats obtenus et l'on trouvera à la fin les références des articles constituant la thèse ainsi qu'une bibliographie sommaire.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA MODÉLISATION D'UNE EXPÉRIENCE DE CROISSANCE CRISTALLINE

Cette partie est consacrée à la simulation d'un procédé industriel de fabrication de monocristaux (méthode Czochralski [10] , [11]). Il s'agit de simuler l'évolution d'une interface liquide-solide dans des conditions thermiques bien spécifiées (enceinte chauffée, échanges de chaleur par rayonnement et convection). C'est un problème de surface libre particulier (interface de cristallisation contrôlée) régi par un système d'équations elliptiques mixtes avec conditions aux limites non linéaires de type Neumann.

Le schéma itératif de calcul de l'interface [11] nécessite la résolution d'un problème de la forme :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad ; \quad \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ u|_{\Gamma_1} = 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_2} = \phi(u) \end{array} \right.$$

où ϕ est un opérateur lipschitzien. On obtient pour (1) un résultat d'existence lorsque ϕ est borné ou monotone (point fixe par compacité). Lorsque ϕ est localement lipschitzien et lorsqu'il existe une sous-solution et une sur-solution on a un algorithme itératif convergent vers une solution de (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{n+1} = 0 \\ u_{n+1}|_{\Gamma_1} = 0 \\ -\frac{\partial u_{n+1}}{\partial n} + \lambda u_{n+1}|_{\Gamma_2} = \phi(u_n) + \lambda u_n \end{array} \right.$$

où λ est ajusté pour que l'itération $u_n \rightarrow u_{n+1}$ soit monotone.

On trouvera dans [12] une approche numérique par optimisation dans le cas où ϕ est croissante.

Les propriétés de cet algorithme sont conservées dans la discrétisation par éléments finis qui prend en compte la symétrie axiale du problème physique. Les essais numériques réalisés avec le code d'éléments finis DELTA (A. Poncet [13]) ont confirmé les résultats expérimentaux pour certains monocristaux (germanium, silicium) et montré les limites du modèle pour d'autres.

DEUXIÈME PARTIE

SUR UN MODÈLE D'ÉRUPTIONS SOLAIRES

Le travail présenté dans cette partie résulte d'une collaboration entre J. Heyvaerts (Observatoire de Meudun), J.M. Lasry, M. Schatzman et moi-même. J. Heyvaerts a proposé un modèle pour l'étude des éruptions solaires qui conduit à une équation elliptique semi-linéaire dans le demi-espace. J.M. Lasry et M. Schatzman ont étudié l'existence et le comportement à l'infini des solutions et je me suis consacré à la résolution numérique de ce problème en mettant au point un algorithme et un code de calcul pour obtenir les branches de solutions dépendant d'un paramètre pour une équation du type $-\Delta u = \lambda f(u)$.

Par une technique classique de sous-solutions et sur-solutions on peut atteindre les branches stables du système. Nous avons dans un premier temps avec J.M. Lasry ([2], [14]) proposé un algorithme sur le principe de la méthode de Newton qui permet par l'ajustement d'un paramètre supplémentaire de calculer les solutions au voisinage des points de retournement et sur les branches instables.

J'ai ensuite développé un algorithme de cheminement (suivant un principe de H.B. Keller [15]) par intégration du système différentiel obtenu en différentiant l'équation $-\Delta u - \lambda f(u) = 0$. Cet algorithme est couplé avec une méthode de discrétisation du type multigrille qui permet la résolution au voisinage des points de retournements ([2], [5], [16]). Cette méthode se prête au calcul parallèle.

Un code de calcul interactif a été écrit et les résultats numériques fournissent une réponse qualitative quant aux configurations du champ magnétique lors des éruptions solaires ([2], [3]).

En relation avec cette deuxième méthode nous avons étudié avec C. Devys et J.M. Morel ([6]) un algorithme d'homotopie pour résoudre l'équation $-\Delta u = f(u)$. On définit la notion de pseudo inverse et de pseudo déterminant pour des opérateurs de type Laplace ce qui permet d'obtenir un résultat global justifiant la méthode de cheminement et qui généralise les résultats connus en dimension finie.

TROISIÈME PARTIE

AUTOUR D'UN PROBLÈME DE LA CHIMIE DES SURFACES

La motivation initiale de ce travail est l'étude de l'évolution d'une interface liquide-solide sous l'effet de forces capillaires et de la diffusion en phase volume au niveau d'un joint de grain (ligne de dislocation dans le solide) ([17], [18]).

Outre son importance au niveau physique, l'intérêt de ce problème est de fournir des équations non linéaires demandant une analyse mathématique spécifique ([18], [19]) et des méthodes numériques adaptées ([7], [8], [9]).

1. LE MODÈLE COMPLET, SIMULATION NUMÉRIQUE.

Lorsque l'on chauffe un métal polycristallin en présence d'une phase liquide en équilibre thermodynamique avec ce métal, des sillons apparaissent aux lignes d'émergence des joints de grain dans la phase fluide. Ces sillons ont un angle dièdre constant et évoluent approximativement de façon homothétique dans le temps suivant une loi en $t^{1/3}$ pour une diffusion en volume et en $t^{1/4}$ pour une diffusion de surface. Nous étudions ici le modèle de diffusion en volume.

L'interface liquide-solide se déplace dans le sens du gradient de concentration d'atomes de solides dans le liquide. Ce gradient à l'instant t est obtenu en résolvant le problème de Dirichlet dans le domaine liquide avec une condition de Dirichlet sur l'interface fonction de la courbure.

Le problème est de calculer la forme de l'interface quasi-stationnaire qui s'établit quant $t \rightarrow +\infty$.

R. Robert et moi-même avons débuté l'étude de ce problème dans le cadre d'une ATP commune avec l'Institut d'Electrochimie de Grenoble. Nous avons fait une simulation par éléments finis avec le code DELTA ([13], [20]). La simulation de l'évolution de l'interface est délicate et coûteuse pour plusieurs raisons :

i) il est nécessaire de ne pas créer d'oscillations sur l'interface par des déplacements de trop grande amplitude ou des déformations de la triangulation trop importantes (ce qui altère le calcul des gradients) ;

ii) il faut prendre un pas de temps petit et tenir compte de la diffusion dans un volume suffisamment grand.

Ceci nous a conduit à mettre au point une méthode pour diminuer le coût du calcul dans la résolution du problème de Dirichlet (ce travail a été conduit également avec J. Duchon ([7])).

A chaque itération sur l'interface on doit résoudre un problème de la forme :

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = f \end{cases}$$



L'existence et l'unicité d'une solution pour (2) est montrée pour un ouvert Ω image bilipschitzienne d'un demi-espace ; on travaille dans l'espace de Beppo-Levi des fonctions d'énergie finie sur Ω dont on caractérise les traces sur Γ .

Lorsque Ω contient un demi-espace Ω_1 on utilise le noyau de Poisson dans Ω_1 pour donner une formulation variationnelle dans $\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_1$ équivalente à (2) . Cette méthode permet un gain sensible en précision et en temps de calcul par rapport à une troncature classique.

2. UN MODÈLE NON LINÉAIRE APPROCHÉ.

Dans cette partie on étudie une approximation de l'équation d'évolution donnant la forme de l'interface ([8]) .

Soit Λ^1 l'opérateur défini par transformation de Fourier par $\widehat{\Lambda^1 f}(\xi) = |\xi| \widehat{f}(\xi)$. On a l'équation d'évolution approchée :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Lambda^1 \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{(1 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2)^{3/2}} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0^\pm) = \pm m \quad w(0, x) = w_0 \end{cases}$$

La linéarisation de la courbure dans (3) conduit à étudier l'équation d'évolution integro-différentielle singulière :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Lambda^1 \frac{\partial}{\partial x} (\phi \frac{\partial w}{\partial x}) = 0 \quad \text{où } \phi \text{ est une fonction donnée.} \\ w(0, x) = w_0 \end{cases}$$

L'existence d'une solution pour (4) est prouvée par une méthode de Galerkin. Une estimation a priori suffisante est obtenue en utilisant une propriété de commutation de la multiplication par ϕ et de l'opérateur Λ^1 due à R. Coifman et Y. Meyer [21].

Pour la résolution numérique on construit une approximation de $H^2(\mathbb{R})$ et une base permettant un calcul explicite des coefficients de la matrice (pleine à cause de l'opérateur pseudo-différentiel Λ^1) associée au système différentiel discrétisé.

En cherchant des solutions de (3) sous la forme $w(t,x) = t^{1/3} u(t^{-1/3}x)$ on est conduit à l'équation stationnaire en u

$$(5) \quad \begin{cases} u - xDu - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 \frac{D^2u - 2m\delta}{(1+(Du)^2)^{3/2}} = 0, & x \in \mathbb{R} \\ D(O_{\pm}^{\pm}) = \pm m \end{cases}$$

où $m > 0$, $D = \frac{d}{dx}$ et δ est la distribution de Dirac en 0.

En procédant par régularisation elliptique on définit un algorithme du genre méthode de la parallèle qui permet d'établir de façon constructive l'existence d'une solution de (5) en reprenant des estimations obtenues en [18]. La résolution numérique se fait par éléments finis avec une base adaptée et la programmation de la méthode itérative a été réalisée sur micro-ordinateur.

ARTICLES

PREMIÈRE PARTIE

- [1] P. WITOMSKI : "The Steady State Heat Equation With Mixed Nonlinear Boundary Conditions - An Example In Cristallography".
Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering
35 (1982) 47-66.

DEUXIÈME PARTIE

- [2] J. HEYVAERTS, J.M. LASRY, M. SCHATZMAN, P. WITOMSKI :
"A Nonlinear Eigenvalue Problem In An Unbounded Domain".
Lecture Notes in Mathematics, N° 782 "Bifurcation and Non-linear Eigenvalue Problems" (1978) p. 160-191.
- [3] "A Mathematical Model of Solar Flares"
Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XLI, N° 1 (1983)
p. 1-30.
- [4] "Blowing up of two-dimensional Magnetohydrostatic Equilibria by an increase of electric current or pressure
Astronomy and Physics 111 (1982) p. 104-112.
- [5] P. WITOMSKI : "Resolution de $\Delta u = \lambda f(u)$ par méthode de cheminement et décomposition en sous-domaines.
R.R. N° 246, IMAG (1981).
- [6] C. DEVYS, J.M. MOREL, P. WITOMSKI
"A homotopy Method for solving an equation of the type
 $-\Delta u = F(u)$ ".
A paraître dans Annales IHES (1983).

TROISIÈME PARTIE

- [7] J. DUCHON, R. ROBERT, P. WITOMSKI
"Problème de Dirichlet dans un domaine image bilipschitzienne d'un demi-espace".
Num. Math. 36 (1981) p. 129-149.
- [8] R. ROBERT, P. WITOMSKI
"Sur une équation d'évolution intégrodifférentielle singulière linéaire".
A paraître dans Num. Math. (1983).
- [9] P. WITOMSKI
"Sur la résolution numérique d'une équation intégrodifférentielle singulière non linéaire de la chimie des surfaces. p. 1-51
Rapport de Recherche, IMAG, à paraître.

REFERENCES

- [10] J.C. BRICE
"The Growth of crystals from the melt".
Selected topics in solid state physics. North-Holland.
- [11] P. WITOMSKI
Thèse Troisième Cycle, Grenoble (1977).
- [12] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS, R. TREMOLIERES
"Analyse Numérique des inéquations variationnelles".
Méthodes Mathématiques de l'Informatique, Dunod (1976).

- [13] A. PONCET
"Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis".
Thèse, Grenoble (1980).
- [14] J. HEYVAERTS, J.M. LASRY, M. SCHATZMAN, P. WITOMSKI
"Solar flares : blowing up of force free magnetic configurations".
Pré-Publications Mathématiques, Paris, Nord, Fasc 7 (1978).
- [15] H.B. KELLER
"Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problem".
dans "Applications of Bifurcation Theory",
Academic Press (1977).
- [16] CHAN, TONY F.C., H.B. KELLER
"Arc-length continuation and multigrid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems".
SIAM J. Sci. Statist. Comput. 3 (1982) n° 2, p. 173-194.
- [17] L. COUDURIER, N. EUSTATOPOULOS, J.C. GJOUD, P. DESRE
"Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb liquide sous l'effet des forces capillaires".
Journal de chimie physique, 3, 289-294 (1977).
- [18] J. DUCHON, R. ROBERT
"Creusement d'un sillon par capillarité".
R.R. N° 280, IMAG (1981).
- [19] J. DUCHON, R. ROBERT
"A nonlinear singular integrodifferential equation arising in surface chemistry".
A paraître dans J. Diff. Equation (1983).

- [20] R. ROBERT, P. WITOMSKI
"Rapport d'ATP n° 3878", (1980).
- [21] R. COIFMAN, Y. MEYER
"Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs
multilinéaires".
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) n° 3 p. 177-202.

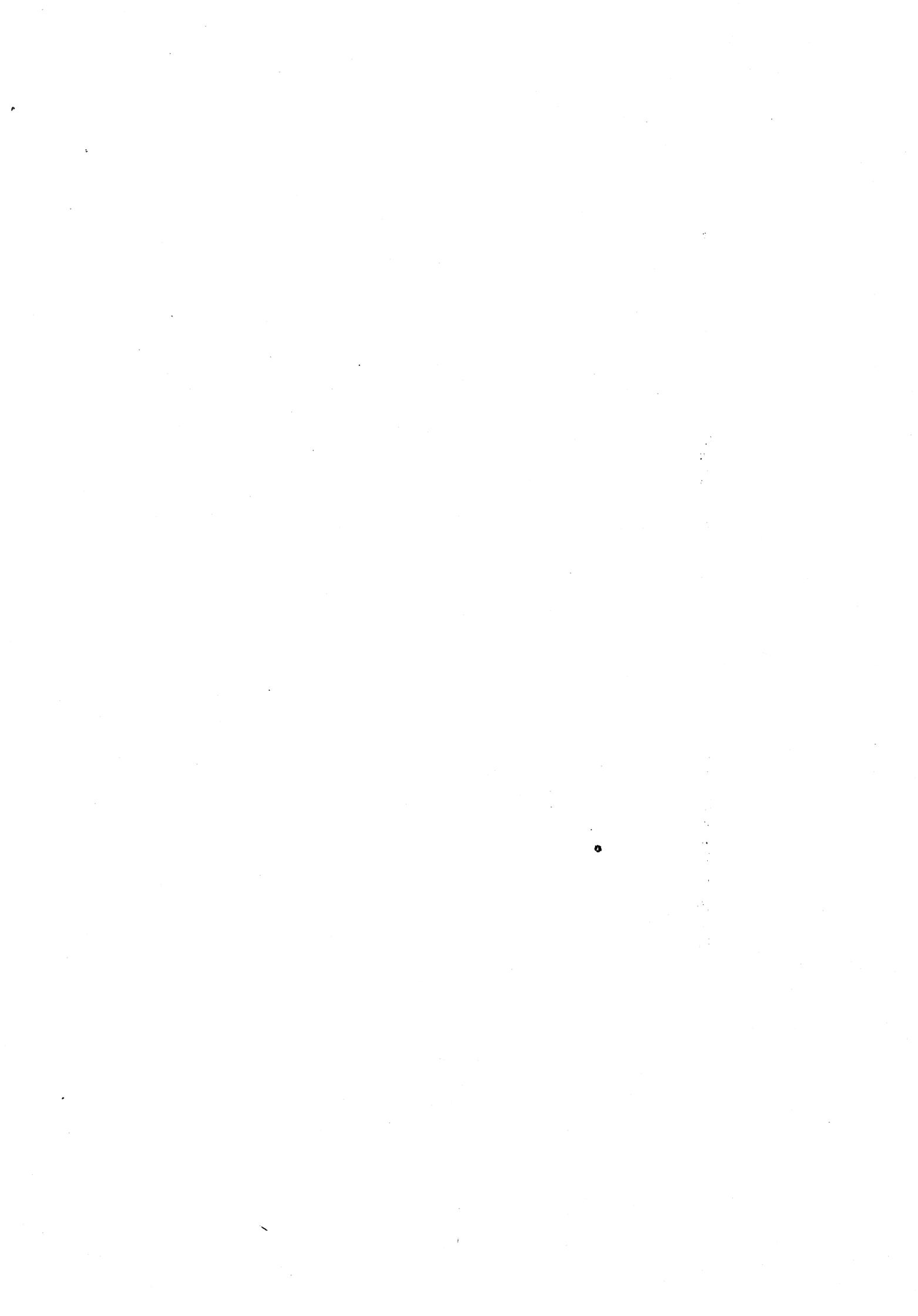
P R E M I È R E P A R T I E

SUR LA MODÉLISATION D'UNE EXPÉRIENCE DE
CROISSANCE CRISTALLINE

"The steady state heat equation with mixed nonlinear
boundary conditions. An example in cristallography" *

p. 11 à 120

* Reproduit avec l'aimable autorisation de
North-Holland Publishing.



THE STEADY STATE HEAT EQUATION WITH MIXED NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS—AN EXAMPLE IN CRYSTALLOGRAPHY

P. WITOMSKI

*Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble, IMAG, Grenoble, F-38041,
 Grenoble Cedex, France*

Received 5 October 1981

Revised manuscript received 4 January 1982

This article deals with the resolution of a nonlinear boundary value problem arising from a crystallisation experiment. The model developed requires that the heat equation be solved in an open bounded set Ω of \mathbb{R}^3 with mixed non-linear boundary conditions. The existence of a unique solution is shown using monotone operators. This same result can be found by a constructive method using lower and upper solutions. The numerical analysis of the problem is presented. The axial symmetry of revolution of Ω is allowed for by the use of rotationally invariant finite elements which allow the problem to be reduced to one in two dimensions only.

1. The physical problem

The model treated arises from an experiment in crystal growth by the Czochralski method [2, 9]. This is a method in which single crystals are pulled from a liquid melt. The material to be crystallised is heated above its melting point in a crucible and a monocrystalline germ is placed on the surface of the melt using a vertical holder. The crystallisation occurs around this germ. A pulling mechanism allows the holder to be raised as the crystal forms. The final product is a cylindrical monocrystal.

The form of the liquid–solid interface is an important factor in the quality of the monocrystal. We have previously proposed a model which simulates the growth of the monocrystal and which allows the form of the interface to be determined [16].

We calculate here the heat distribution in the melt and in the solid crystal for a stationary state of the interface.

1.1. The system of equations for thermal exchange

Fig. 1 shows a schematic diagram of the oven in which the monocrystal is formed.

The experimental conditions allow the heat equation to be taken in a stationary form in Ω_1 and Ω_2 (see [16]):

$$\Delta T = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \text{ and } \Omega_2, \quad (1)$$

where T is the temperature.

The boundary conditions arise from heat exchange by radiation (term in T^4), free convection (term in $(T - T_a)^{2.25}$) and by the crucible temperature [15]. They fall in two classes:

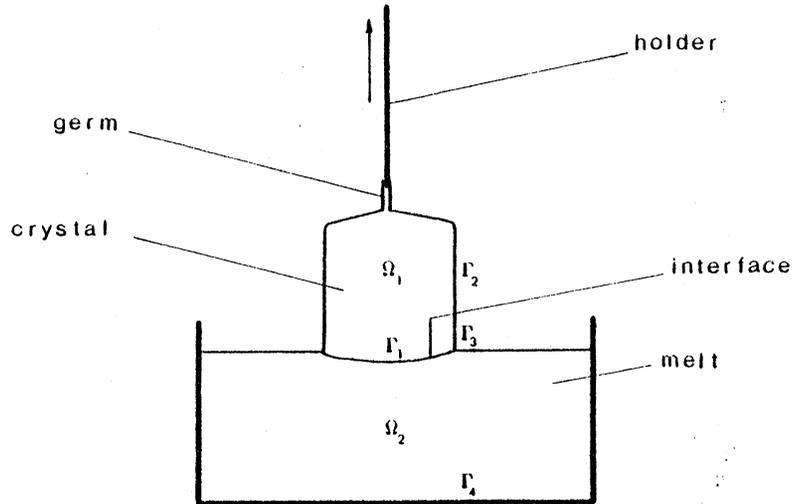


Fig. 1. Schematic diagram of the crystal growth model.

(a) Dirichlet conditions:

$$T|_{\Gamma_4} = T_c, \quad \text{the crucible temperature;} \quad (2)$$

and

$$T|_{\Gamma_1} = T_i, \quad \text{the melting temperature;} \quad (3)$$

(b) Neumann conditions:

$$-\lambda_l \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \alpha(T - T_a)^{1.25} + \mu_l T^4 - \eta_l; \quad (4)$$

and

$$-\lambda_s \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \alpha(T - T_a)^{1.25} + \mu_s T^4 - \eta_s; \quad (5)$$

where α , λ_l , λ_s are positive constants, T_a is the ambient temperature and μ_s , μ_l , η_s , η_l are positive bounded functions (see [15, 16] for more details).

The conditions at the liquid–solid interface Γ_1 are

$$T = T_i, \quad (6)$$

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial n_s} = -\lambda_l \frac{\partial T}{\partial n_l} + fl \cos \theta \quad (7)$$

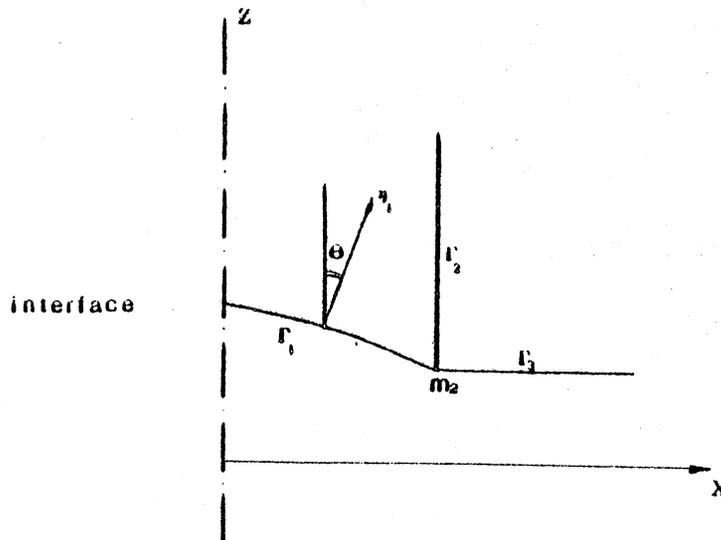


Fig. 2. The liquid-solid interface.

where f represents the pulling speed and θ the angle between the normal η_1 to Ω_1 and the Oz -axis (see Fig. 2). Also $\eta_2 = -\eta_1$.

The system of equations (1)–(7), represents a free surface problem depending on the parameter f . A supplementary condition is imposed on the system: the pulling speed must be such that the interface Γ_1 is always at m_2 (see Fig. 2). This condition completes the formulation of the problem.

The solution of this model is carried out by iteration on the interface. At each iteration step, for a fixed interface, two non-linear problems of the same type are solved:

(P₁) consisting of (1), (3), (5) in Ω_1 ;

(P₂) consisting of (1), (2), (4) in Ω_2 .

We propose to solve P₁ which, after change of variables can be written:

$$\varphi_1 \begin{cases} \Delta T = 0 & \text{in } \Omega_1, \\ T|_{\Gamma_1} = 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \mu(T + T_0)^3 + \alpha(T + T_1 - T_0)^{1.25} - \eta \end{cases}$$

and redesignated φ_1 , as shown.

2. Mathematical formulation of the problem

We first recall some useful results (see [1, 10]).

2.1. The trace operator and Green's formula

In what follows, Ω represents a regular bounded open set of \mathbb{R}^3 with boundary Γ . Let $\gamma_0: u \rightarrow u|_{\Gamma}$ be the trace operator on $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. γ_0 extends into a bounded linear operator from

$H^1(\Omega)$ onto $H^{1/2}(\Gamma)$ (see [10, 17] for the definition of the spaces). For $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ the operator $\gamma_1 : u \rightarrow (\partial u / \partial n)|_\Gamma$ associates with u its normal derivative to Γ . γ_1 is extended to a bounded linear operator from $H^1(\Omega, \Delta) = \{u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ into $H^{-1/2}(\Gamma)$. Introducing the duality between $H^{-1/2}(\Gamma)$ and $H^{1/2}(\Gamma)$, written $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$. Green's formula becomes

$$\forall u \in H^1(\Omega) \quad \text{and} \quad \forall v \in H^1(\Omega, \Delta),$$

$$\int_\Omega \Delta v \cdot u \, d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle \gamma_1 v, \gamma_0 u \rangle_\Gamma.$$

Now let Γ_1 be a regular open set of Ω of non-zero measure. For $h \in L^2(\Gamma)$, $\Sigma_1 h$ represents the function on $L^2(\Gamma)$ equal to h on Γ_1 and zero elsewhere. Let j be the injection of $H^{1/2}(\Gamma)$ into $L^2(\Gamma)$. $\Sigma_1 j$ takes values in $H^{1/2}(\Gamma)$ and the projection operator σ_1 so defined is continuous. We put $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$ and let σ_1^* represent the adjoint of σ_1 (similarly σ_2^* is the adjoint of σ_2).

2.2. A new formulation for \mathcal{P}_1

We now regard the original physical problem as belonging to a class of non-linear problems so as to be able to use the theory of monotone operators [3].

2.2.1. Modification of the non-linear condition on Γ_2

If m represents a point on Γ_2 we have seen that the condition in the statement of problem \mathcal{P}_1 at the end of Section 1 can be written

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(m) = \frac{1}{\lambda} (\alpha(u(m) + T_f - u_a)^{1.25} + \mu(m)(u(m) + T_f)^4 - \eta(m))$$

where we are using α , μ , λ and η , introduced in (5) above.

For $x \geq u_a - T_f$ and $m \in \Gamma_2$ we set

$$f(x, m) = (1/\lambda)(\alpha(x + T_f - u_a)^{1.25} + \mu(m)(x + T_f)^4 - \eta(m)).$$

$\mu(m)$ and $\eta(m)$ are positive functions and $T_f > u_a > 0$. The function $x \rightarrow f(x, m)$ increases for all fixed $m \in \Gamma_2$.

Put

$$g(x, m) = \begin{cases} f(u_a - T_f, m), & x \leq u_a - T_f, \\ f(x, m), & x \in [u_a - T_f, 0], \\ f(0, m), & x \geq 0. \end{cases}$$

$g(x, m)$ is extended to include the zero on $\mathbb{R} \times (\Gamma \setminus \Gamma_2)$. $x \rightarrow g(x, m)$ is monotone, increasing and bounded on \mathbb{R} .

An operator φ from $L^2(\Gamma)$ to $L^2(\Gamma)$ is associated with g and defined by:

$$\varphi(u)(m) = g(u(m), m)$$

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

where $m \in L^2$ a.e.

PROPOSITION 2.1. φ is a monotone Lipschitzian operator from $L^2(\Gamma)$ into $L^2(\Gamma)$.

PROOF. Let $u \in L^2(\Gamma)$; since η and μ are in $L^\infty(\Gamma)$ it follows that $\varphi(u)$ belongs to $L^2(\Gamma)$.

$$|g(x, m) - g(y, m)| \leq c|x - y| \quad \text{on } \mathbb{R} \times \Gamma$$

so

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|u - v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

The monotony of φ arises simply because $g(u, m)$ is monotone increasing with respect to u for fixed m .

2.3. A class of mixed non-linear problems

The condition on Γ_2 is expressed in terms of the operator φ by

$$-\partial u / \partial n = \varphi(u).$$

The experimental conditions impose upon φ the hypotheses:

- (a) $\varphi(0) \geq 0$;
- (b) $\varphi(u_s - T_s) \leq 0$.

The problem \mathcal{P}_1 can be put into the form of the following more general problem. Find $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ such that

$$\mathcal{P}_M \begin{cases} -\Delta u = 0, \\ \sigma_1 \gamma_0 u = 0, \\ \sigma_2^* (\gamma_1 u + \varphi(\gamma_0 u)) = 0. \end{cases}$$

We now give the results concerning the uniqueness and existence of a solution for this class of problem. Two methods are described. The first uses monotone operators; the second which is based on the techniques of lower and upper solutions (see [13] for example) leads quite naturally to a numerical method. Refs. [7, 8] should be consulted for descriptions of the use of optimisation methods.

3. The existence and uniqueness of a solution to the problem \mathcal{P}_M . Monotone method

This section depends essentially on the following theorem for monotone operators.

THEOREM 3.1 (Surjectivity theorem, see [3]). Let V be a reflexive Banach space. Let A be an operator from V to its dual space V^* having the following properties:

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

- (a) A is monotone, bounded and hemicontinuous;
 (b) $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \langle Av, v \rangle / \|v\| = +\infty$, where $v \in V$,
 then A is surjective from V onto V^* .

The non-linearity of the problem \mathcal{P}_M resides in its Neuman condition at the boundary. We pose the problem on the space

$$W = \{g \in H^{1/2}(\Gamma), \sigma_1 g = 0\}.$$

W , with the induced norm, is a Hilbert space.

Let $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Introduce u_g as the solution of

$$-\Delta u_g = 0, \quad \gamma_0 u_g = g.$$

The operator $R: g \rightarrow u_g$ is an isomorphism from $H^{1/2}(\Gamma)$ to the space $\{u \in H^1(\Omega), \Delta u = 0\}$. We now introduce the operator $T: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ defined by

$$Tg = \gamma_1 Rg + \varphi(\gamma_0 Rg)$$

and $A: W \rightarrow W^*$ with values

$$Ag = (i^* \sigma_2^* T i)g,$$

where i is the injection from W into $H^{1/2}(\Gamma)$. Note that $\langle Ag_1, g_2 \rangle_W = \langle Tg_1, g_2 \rangle_\Gamma$

THEOREM 3.2 (Uniqueness theorem). \mathcal{P}_M has one and only one solution.

PROOF. We show first that the function A satisfies the hypothesis of Theorem 3.1.

A is bounded and hemicontinuous because φ is Lipschitzian and continuous [16]. We have

$$\langle Ag_1 - Ag_2, g_1 - g_2 \rangle_W = \langle Tg_1 - Tg_2, g_1 - g_2 \rangle_\Gamma$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ denotes the duality between W^* and W . Using Green's formula and the monotone property of φ we find

$$\begin{aligned} \langle Ag_1 - Ag_2, g_1 - g_2 \rangle_W &= \langle \gamma_1 R(g_1 - g_2) + \varphi(g_1) - \varphi(g_2), g_1 - g_2 \rangle_\Gamma \\ &\geq \|\nabla(R(g_1 - g_2))\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Friedrichs' inequality [11] and the fact that R is by construction, an isomorphism from $H^{1/2}(\Gamma)$ onto $\{u \in H^1(\Omega), \Delta u = 0\}$ give

$$\langle Ag_1 - Ag_2, g_1 - g_2 \rangle_W \geq \text{const.} \cdot \|g_1 - g_2\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

A is therefore monotone as well as coercive. Then by Theorem 3.1 above, $t \in W$ exists such that $A(t) = 0$. As a direct consequence, $R(t)$ is the only solution of \mathcal{P}_M .

We now set out the variational formulation of \mathcal{P}_M .

PROPOSITION 3.3. *Let $H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \sigma_1 \gamma_0 u = 0\}$. Then, u is the solution of \mathcal{P}_M if and only if $u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ and satisfies, for all v in $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \langle \varphi(\gamma_0 u), \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} = 0.$$

The proof is readily carried out using Green's formula as in the linear case [16].

4. Relationship between the problem \mathcal{P}_M and the original physical problem

If we can show that the solution of the problem \mathcal{P}_M takes its values in the interval $[u_* - T_1, 0]$ we will have $(u + T_1)$ as the solution to the original problem. The physical problem has thus a unique solution in the interval $[u_*, T_1]$.

4.1. Positiveness in $H^1(\Omega)$

We recall some results on the positivity of functions in $H^1(\Omega)$ (see [14, 16]). Let E be a subset of $\bar{\Omega}$. $u \in H^1(\Omega)$ is said to be non-negative on E in the sense of $H^1(\Omega)$ if there exists a sequence $\{u_m\}$ functions from $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ such that

- (i) $u_m \geq 0$ on E ;
- (ii) $u_m \rightarrow u$, strongly in $H^1(\Omega)$.

We set $v^+ = \sup(v, 0)$ and $v^- = -\inf(v, 0)$. The properties of v^+ and v^- are examined in detail in [16]. In particular we have the three properties:

- (1) v^+ and v^- are in $H^1(\Omega)$;
- (2) $\int_{\Omega} \nabla v^+ \cdot \nabla v^- \, d\Omega = 0$;
- (3) $\gamma_0 u^+ \cdot \gamma_0 u^- = (\gamma_0 u)^+ \cdot (\gamma_0 u)^- = 0$.

PROPOSITION 4.1. *Let u be the solution of \mathcal{P}_1 . For almost every x in Ω , $u(x) \in [u_* - T_1, 0]$.*

PROOF. We show that u is negative by proving that $u^+ = 0$. The variational formulation (Proposition 3.3) of \mathcal{P}_M with $v = u^+$ and $u = u^+ - u^-$ yields

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 \, d\Omega + \langle \varphi((\gamma_0 u)^+), (\gamma_0 u)^+ \rangle_{\Gamma} = 0.$$

Since $\varphi(0) \geq 0$ (see Section 2.3) and since φ is monotone, the Friedrichs inequality gives

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 \, d\Omega + \langle \varphi((\gamma_0 u)^+) - \varphi(0), (\gamma_0 u)^+ \rangle_{\Gamma} + \langle \varphi(0), (\gamma_0 u)^+ \rangle_{\Gamma} \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 \, d\Omega \geq \text{const.} \cdot \|u^+\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Therefore $u^+ = 0$. In the same way it can be shown that $u \geq u_* - T_1$.

Thus, $u + T_f$ satisfies the equations set up in section 1 and since physically the solution is unique on Ω , $u + T_f$ must be that solution.

5. A constructive method of solution for \mathcal{P}_M : lower and upper solutions

This method leads to an algorithm for calculating the solution which is enclosed by a set of lower and upper solutions. The existence of a solution to \mathcal{P}_M is shown by the convergence of the method.

LEMMA 5.1 (Positiveness lemma). *Let $u \in H^1(\Omega)$ and $\lambda \in \mathbb{R}^+$ such that*

$$\Delta u = 0, \quad \sigma_1 \gamma_0 u \geq 0, \quad \sigma_2^*(\lambda \gamma_0 u + \gamma_1 u) \geq 0.$$

Then $u \geq 0$.

PROOF. We show that $u^- = 0$. Writing Green's formula with u and u^- we find

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \Delta u \cdot u^- \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- \, d\Omega - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 u^- \rangle_{\Gamma} \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \, d\Omega - \langle \lambda \gamma_0 u + \gamma_1 u, \gamma_0 u^- \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle \gamma_0 u, \gamma_0 u^- \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

But $\sigma_1 \gamma_0 u \geq 0$ implies that $\gamma_0 u^- = \sigma_2 \gamma_0 u^-$. It follows that

$$0 = \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0 u^-, \gamma_0 u^- \rangle_{\Gamma} + \langle \sigma_2^*(\lambda \gamma_0 u + \gamma_1 u), \gamma_0 u^- \rangle_{\Gamma}$$

and using Friedrichs' inequality this becomes

$$0 \geq \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \, d\Omega \geq \text{const.} \cdot \|u^-\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Therefore $u^- = 0$.

In order to resolve \mathcal{P}_M numerically we will construct a sequence of iterations which are solutions of linear problems. A choice must be made for the linearisation procedure.

5.1. Linearisation of the problem \mathcal{P}_M

We use the following linearisation in order to construct a monotone sequence of iterations.

$$\mathcal{P}_{L,n} \begin{cases} -\Delta u_n = 0, \\ \sigma_1 \gamma_0 u_n = 0, \\ \sigma_2^*(\lambda \gamma_0 u_n + \gamma_1 u_n) = \sigma_2^*(-\varphi(\gamma_0 u_{n-1})) + \lambda \gamma_0 u_{n-1}. \end{cases}$$

where λ , real and positive, is chosen such that

$$u \geq v \Rightarrow -\varphi(\gamma_0 u) + \varphi(\gamma_0 v) + \lambda(\gamma_0 u - \gamma_0 v) \geq 0.$$

It suffices to take λ greater than or equal to the Lipschitz constant since Lemma 5.1 clearly shows that the correspondence $u_{n-1} \rightarrow u_n$ is monotone.

REMARK 5.2. The introduction of λ amounts to linearising in the form $-\partial u_n / \partial n = u_n u_{n-1}^2$ instead of $-\partial u_n / \partial n = u_{n-1}^2$ (see [16]).

5.2. Construction of the iterations

The problem $\mathcal{P}_{\lambda, t}$ has the form: given $t \in H^{-1/2}(\Gamma)$, find $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ such that

$$\mathcal{P}_{\lambda} \begin{cases} -\Delta u = 0, \\ \sigma_1 \gamma_0 = 0, \\ \sigma_2^*(\lambda \gamma_0 u + \gamma_1 u) = \sigma_2^*(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

THEOREM 5.3. *The following two statements are equivalent:*

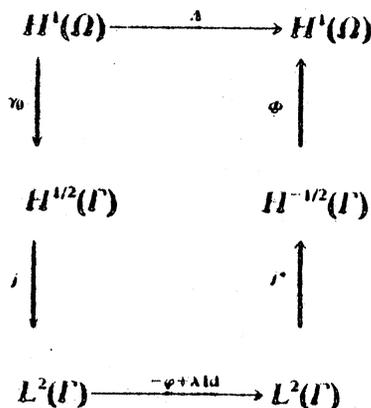
- (i) u is solution of \mathcal{P}_{λ} ;
- (ii) $u \in H^1_1(\Omega)$ and satisfies, for all $v \in H^1_1(\Omega)$, the equality

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda(\gamma_0 u, \gamma_0 v)_\Gamma = (t, \gamma_0 v)_\Gamma.$$

The problem \mathcal{P}_{λ} has a unique solution which depends continuously on t .

The proof follows quite simply from the Lax-Milgram lemma.

The operator which associates with $u \in H^1_1(\Omega)$, the solution of \mathcal{P}_{λ} , an element $t \in H^{-1/2}(\Gamma)$ is denoted by Φ . The following diagram indicates the pathway from one iteration to the next.



Recall from Section 2.1 that j is the injection from $H^{1/2}(\Gamma)$ into $L^2(\Gamma)$. It is obvious that Λ is

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

a continuous operator from $H^1(\Omega)$ into $H^1(\Omega)$ and that Λ is increasing in the sense that

$$u_1 \geq u_2 \text{ a.e.} \Rightarrow \Lambda u_1 \geq \Lambda u_2 \text{ a.e. on } \Omega.$$

The sequence of the iterations is given by $u_n = \Lambda u_{n-1}$.

DEFINITION 5.4. We call u a lower (or upper) solution if $\Lambda u \geq u$ (or $\Lambda u \leq u$).

PROPOSITION 5.5. (i) $u_0 = u_a - T_f$ is a lower solution of \mathcal{P}_L .

(ii) $v^0 = 0$ is an upper solution of \mathcal{P}_L .

PROOF. Put $u_1 = \Lambda u_0$. We have

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_0) &= 0, \\ \sigma_1 \gamma_0(u_1 - u_0) &= -(u_a - T_f) > 0, \\ \sigma_2^*(\lambda \gamma_0(u_1 - u_0) + \gamma_1(u_1 - u_0)) &= \sigma_2^*(-\varphi(\gamma_0 u_0)) \geq 0, \end{aligned}$$

since $\varphi(u_a - T_f) \leq 0$. It follows from Lemma 5.1 that $u_1 = \Lambda u_0 \geq u_0$.

(ii) The proof is identical with $\varphi(0) \geq 0$.

5.3. The convergence of the iterations

THEOREM 5.6. The sequence of iterations $u_n = \Lambda u_{n-1}$, $v^n = \Lambda v^{n-1}$ converges strongly in $H^1(\Omega)$ to \underline{u} (respectively \bar{v}). The solution of \mathcal{P}_M is given by $\underline{u} = \bar{v} = u$.

PROOF. We first show that u_n converges. We have a sequence of measurable functions such that

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq 0.$$

Set $\underline{u} = \sup_n u_n$. The theorem of dominated convergence applied to $(\underline{u} - u_n)^2$ shows that $u_n \rightarrow \underline{u}$ strongly in $L^2(\Omega)$.

Suppose now that the sequence u_n is bounded in $H^1(\Omega)$. $\{\Lambda u_n, n \in N\}$ is relatively compact in $H^1(\Omega)$. (Λ transforms the bounded set into a relatively compact set since j^* is compact and φ is Lipschitzian.) Thus, there exists a sub-sequence $u_{n'}$ which converges strongly to u in $H^1(\Omega)$ and we have $\underline{u} = u$.

It remains to be shown that u_n is bounded in $H^1(\Omega)$. Use the variational form. For

$$\begin{aligned} u_n &\in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \quad \text{and} \quad \forall v \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0 u_n, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} &= \langle t_{n-1}, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

where $t_{n-1} = -\varphi(\gamma_0 u_{n-1}) + \lambda \gamma_0 u_{n-1}$. Hence on taking $v = u_n$:

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle u_{n-1}, \gamma_0 u_n \rangle_{\Gamma}.$$

Since $\gamma_0 u_0 \leq \gamma_0 u_1 \leq \dots \leq \gamma_0 u_n \leq \dots \leq 0$ the sequence $\gamma_0 u_n$ is bounded in $L^2(\Gamma)$. It follows that $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$ is bounded and, using Friedrich's inequality, that u_n is bounded in $H^1(\Omega)$. Since A is continuous on $H^1(\Omega)$ at the limit we find that $\underline{u} = A\underline{u}$ and in the same way $\bar{v} = A\bar{v}$. $\underline{u} - \bar{v}$ is the solution of

$$\begin{cases} -\Delta(\underline{u} - \bar{v}) = 0, \\ \sigma_1 \gamma_0(\underline{u} - \bar{v}) = 0, \\ \sigma_2^* \gamma_1(\underline{u} - \bar{v}) = \sigma_2^*(-\varphi(\gamma_0 \underline{u}) + \varphi(\gamma_0 \bar{v})). \end{cases}$$

$\underline{u} - \bar{v}$ therefore satisfies

$$0 = \|\nabla(\underline{u} - \bar{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \varphi(\gamma_0 \underline{u}) - \varphi(\gamma_0 \bar{v}), \gamma_0 \underline{u} - \gamma_0 \bar{v} \rangle_{\Gamma}.$$

The monotony of φ and Friedrich's inequality imply that $\underline{u} - \bar{v} = 0$ is the unique solution of \mathcal{P}_M .

This method of upper and lower solutions yields an algorithm for the numerical calculation of an approximation of \mathcal{P}_M . This is developed in greater detail in the next section.

REMARK 5.7. The above theoretical results can be extended to a non-linear Lipschitzian operator φ from $L^2(\Gamma)$ into $L^2(\Gamma)$ by using the fixed point theory with compactness methods (Schauder, Schaeffer, as quoted in [16]).

6. The numerical method

6.1. Rotational invariance of the problem \mathcal{P}_M

Let (Ox, Oy, Oz) be orthonormal axes in \mathbb{R}^3 . The domain Ω , the boundaries Γ_1 and Γ_2 , have symmetry of revolution about the Oz -axis. We will show that the solution u of \mathcal{P}_M also has this symmetry.

NOTATION 6.1. Let \mathcal{R}_θ be the rotational operator (Oz, θ) :

$$\mathcal{R}_\theta : M(x, y, z) \rightarrow M(x_\theta, y_\theta, z_\theta),$$

where

$$x_\theta = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y_\theta = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

\mathcal{R}_θ leaves each of Ω , Γ_1 and Γ_2 invariant.

\mathcal{R}_θ is linear, continuous and one to one; its inverse is

$$\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta}.$$

We consider the mapping \mathcal{S}_θ from $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^1$ into $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ defined by

$$\mathcal{S}_\theta \psi = \psi \circ \mathcal{R}_{-\theta} = \psi_\theta.$$

\mathcal{S}_θ is an isometry from $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ to $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ in the norm of $H^1(\Omega)$; it extends by density to become a linear isometry from $H^1(\Omega)$ to $H^1(\Omega)$ (see [16]).

DEFINITION 6.2. $u \in H^1(\Omega)$ is said to be *invariant under rotation* if $\forall \theta \in \mathbb{R} \mathcal{S}_\theta u = u$.

A density argument and the rotational invariance properties can be used to show that the solution of \mathcal{P}_M and \mathcal{P}_L are invariant under rotation about the Oz -axis (see [16]).

DEFINITION 6.3. The sub-space of $H^1_{r_1}(\Omega)$ represented by the rotationally invariant functions will be denoted V , namely,

$$V = \{u \in H^1_{r_1}(\Omega), \forall \theta \in \mathbb{R} u_\theta = u\}.$$

PROPOSITION 6.4. (i) u is a solution of \mathcal{P}_M if and only if $u \in V$ and satisfies

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \langle \varphi(\gamma_0 u), \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall v \in V.$$

(ii) u is a solution of \mathcal{P}_L if and only if $u \in V$ and satisfies

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0 u, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} = \langle -\varphi(\gamma_0 u) + \lambda \gamma_0 u, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma}$$

for all v in V .

The proof is obvious. It then becomes quite natural to introduce the following.

6.2. Approximation to the problem \mathcal{P}_M by finite elements of revolution

Given the symmetry of revolution of the problem we seek the numerical solution of \mathcal{P}_M in a finite dimensional sub-space of rotationally invariant functions.

6.2.1. The sub-space V_h of V

Denote the following bounded open set of \mathbb{R}^2 by

$$\omega = \Omega \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y = 0\}.$$

We will suppose that ω is an open polygonal set of \mathbb{R}^2 . We take a triangulation \mathcal{T}_h on $\bar{\omega}$

¹ $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ is the space of infinitely differentiable functions on $\bar{\Omega}$.

defined by:

- (i) $\forall T \in \mathcal{T}_h, T \subset \bar{\omega}$ and $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\omega}$;
- (ii) if T_1 and T_2 belong to \mathcal{T}_h , then either $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ or their intersection reduces to one side or to a vertex;
- (iii) if we set $\Gamma_{1h} = \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\omega}$ and $\Gamma_{2h} = \bar{\Gamma}_2 \cap \bar{\omega}$, then Γ_{1h} and Γ_{2h} are junctions of sides of triangles.

The quantity h parameterises the triangulation: it is the largest diameter of the triangles constructed.

We now associate the following sub-space with \mathcal{T}_h :

$$\mathcal{W}_h = \{u \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega}), \forall T \in \mathcal{T}_h, u|_T \text{ affine}\},$$

$$\mathcal{V}_h = \{u \in \mathcal{W}_h, u|_{\Gamma_{1h}} = 0\}.$$

We denote by $\{b_i\}$ a basis of \mathcal{V}_h . We now construct V_h using the basis of \mathcal{V}_h by the mapping

$$\mathcal{P}: \text{Lip}(\bar{\omega}) \rightarrow \text{Lip}(\bar{\Omega})$$

defined by $\mathcal{P}\psi(x, y, z) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. $\text{Lip}(\bar{\omega})$ (similarly $\bar{\Omega}$) denotes the space of Lipschitzian functions on $\bar{\omega}$ (similarly on $\bar{\Omega}$). It is quite clear that the functions $\mathcal{P}b_i$ produce a space V_h whose elements are invariant with respect to rotations about the Oz -axis. We also have $\dim V_h = \dim \mathcal{V}_h$.

The problem \mathcal{P}_h is expressed in \mathbb{R}^2 by introducing (see [11])

$$L^2(\omega) = \left\{ u \text{ measurable, } \int_{\omega} u^2 r \, dr \, dz < +\infty \right\},$$

$$H^1(\omega) = \{u \in L^2(\omega); \partial u / \partial r, \partial u / \partial z \in L^2(\omega)\}.$$

With the scalar product

$$(u, v)_{H^1(\omega)} = \int_{\omega} uv r \, dr \, dz + \int_{\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) r \, dr \, dz,$$

$H^1(\omega)$ is a Hilbert space.

PROPOSITION 6.5. *The mapping \mathcal{P} extends into a linear continuous mapping from $H^1(\omega)$ to $H^1(\Omega)$ and gives*

$$\|\mathcal{P}\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{2\pi} \|1\|_{H^1(\omega)}.$$

PROOF (see [16]).

From a practical point of view the problem reduces to a classical solution in a domain of \mathbb{R}^2 . The integrals are taken with respect to the measure $r \, dr \, dz$. The scalar product $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$ defines a norm on V which is equivalent to the norm induced by $H^1(\Omega)$. We will use the notation

r_h : the projection of V on V_h in the sense of this scalar product; and
 p_h : the injection of V_h into V .

In general we will omit p_h in order to simplify the notation.

6.2.2. The problem $\mathcal{P}_M(h)$

The numerical solution of the problem \mathcal{P}_M by finite elements method consists in:

$$\mathcal{P}_M(h) \left\{ \begin{array}{l} \text{find } u_h \in V_h \text{ such that, for all } v_h \in V_h, \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \langle \varphi(\gamma_0 u_h), \gamma_0 v_h \rangle_{\Gamma} = 0. \end{array} \right.$$

$\mathcal{P}_M(h)$ is solved by linearisation as explained in Section 5.2.

6.3. The algorithm for solving $\mathcal{P}_M(h)$

The linearisation of $\mathcal{P}_M(h)$ leads to its reformulation as

$$\mathcal{P}_L(h) \left\{ \begin{array}{l} \text{given } w_h \in V_h \text{ find } u_h \in V_h \text{ such that, for all } v_h \in V_h, \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0 u_h, \gamma_0 v_h \rangle_{\Gamma} = \langle -\varphi(\gamma_0 w_h) + \lambda \gamma_0 w_h, \gamma_0 v_h \rangle_{\Gamma}. \end{array} \right.$$

$\mathcal{P}_L(h)$ has a unique solution u_h .

Let Λ_h be the operator which associates the solution u_h of $\mathcal{P}_L(h)$ with w_h . We write q_h for the projection of V on V_h in the sense of the modified scalar product:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0 u, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} \quad (\lambda > 0).$$

PROPOSITION 6.6. $\Lambda_h = q_h \Lambda p_h$.

PROOF. Let $w_h \in V_h$. $\Lambda p_h w_h$ satisfies

$$\int_{\Omega} \nabla(\Lambda p_h w_h) \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0(\Lambda p_h w_h), \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} = \langle -\varphi(\gamma_0 w_h) + \lambda \gamma_0 w_h, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma}, \quad \forall v \in V.$$

Writing the orthogonality property for the projections we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(q_h \Lambda p_h w_h) \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0(q_h \Lambda p_h w_h), \gamma_0 v_h \rangle_{\Gamma} = \\ = \langle -\varphi(\gamma_0 w_h) + \lambda \gamma_0 w_h, \gamma_0 v_h \rangle_{\Gamma}, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

So, $q_h \Lambda p_h w_h$ is a solution of $\mathcal{P}_L(h)$. The uniqueness implies $u_h = \Lambda_h w_h = q_h \Lambda p_h w_h$ and we conclude that $\Lambda_h = q_h \Lambda p_h$.

6.3.1. Numerical lower and upper solutions

We will take u_h to be a numerical lower (upper) solution if

$$\Lambda_h u_h \geq u_h \quad (\Lambda_h u_h \leq u_h).$$

The positiveness is taken in the classical sense since $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$.

6.3.2. Numerical algorithm

The algorithm described uses the techniques of lower and upper solutions as in Section 5. We obtain an enclosure of the solution. The proof of the convergence shows the existence and the uniqueness of a solution of $\mathcal{P}_M(h)$.

The algorithm is as follows:

- (1) Determination of a lower solution u_{0h} and of an upper solution v_h^0 .
- (2) Construction of the sequence $u_{i+1h} = \Lambda_h u_{ih}$ and $v_{i+1h}^0 = \Lambda_h v_{ih}^{0-1}$.

We will show the convergence under the following hypothesis:

$$(NN) \left\{ \begin{array}{l} \text{Let } \Phi_h \text{ be the operator from } L^2(\Gamma) \text{ to } V_h \text{ which associates with } g \text{ the solution } \\ \Phi_h(g) \text{ of the equation } (\forall v_h \in V_h): \\ \int_{\Omega} \nabla \Phi_h(g) \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \lambda (\gamma_0 \Phi_h(g), \gamma_0 v_h)_{\Gamma} = (g, \gamma_0 v_h)_{\Gamma}. \\ \Phi_h \text{ is supposed to be positive in the following sense} \\ g \geq 0 \Rightarrow \Phi_h(g) \geq 0. \end{array} \right.$$

This hypothesis is related to the discrete maximum principle and the notion of non-negative triangulation (see [6]). We will develop this point later.

6.4. Convergence of the algorithm

The proof of the convergence of the algorithm is based on the increasing nature of Λ_h which we show in the following lemma.

LEMMA 6.7. Λ_h is an increasing operator from V_h to V_h , in the sense that $v_h^1 \geq v_h^2 \Rightarrow \Lambda_h v_h^1 \geq \Lambda_h v_h^2$.

PROOF. The choice of λ allows us to write:

$$-\varphi(\gamma_0 v_h^1) + \lambda \gamma_0 v_h^1 + \varphi(\gamma_0 v_h^2) - \lambda \gamma_0 v_h^2 \geq 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma.$$

$$(NN) \Rightarrow \Phi_h(-\varphi(\gamma_0 v_h^1) + \lambda \gamma_0 v_h^1 + \varphi(\gamma_0 v_h^2) - \lambda \gamma_0 v_h^2) \geq 0,$$

which together with the linearity of Φ_h is equivalent to

$$\Lambda_h v_h^1 - \Lambda_h v_h^2 \geq 0.$$

THEOREM 6.8. Under the hypothesis (NN) we have:

- (i) $u_h^0 = 0$ is a numerical upper solution, $v_{0h} = u_a - T_f$ is a numerical lower solution.
(ii) The iterations $u_h^n = \Lambda_h u_h^{n-1}$ and $v_{nh} = \Lambda_h v_{(n-1)h}$ converge towards the unique solution of $\mathcal{P}_M(h)$.

PROOF. (i) We recall the hypothesis made in Section 2.3 concerning φ . We have

$$0 \leq \varphi(0) \quad \text{and} \quad \varphi(u_a - T_f) \leq 0.$$

Further $-\varphi(0) \leq 0$ and (NN) above imply $-\Lambda_h(0) \geq 0$. u_h^0 is therefore a numerical upper solution. Moreover it is easily verified that

$$\Phi_h(-\varphi(u_a - T_f)) = \Lambda_h(u_a - T_f) - (u_a - T_f).$$

$\varphi(u_a - T_f) \leq 0$ and (NN) imply further that

$$\Lambda_h(u_a - T_f) \geq u_a - T_f.$$

$v_{0h} = u_a - T_f$ is therefore a numerical lower solution.

(ii) The sequences u_h^n and v_{nh} thereby generated are monotone and from the increasing nature of Λ_h we obtain

$$v_{0h} \leq v_{1h} \leq \dots \leq v_{nh} \leq \dots \leq u_h^n \leq \dots \leq u_h^1 \leq u_h^0.$$

Since the sequences are bounded and monotone we have

$$\lim_n u_h^n = u_h \quad \text{and} \quad \lim_n v_{nh} = v_h \quad \text{when } n \rightarrow +\infty,$$

The uniqueness of the solution of $\mathcal{P}_M(h)$ is obtained as in the continuous case using the coercivity, and we have $u_h = v_h$.

6.5. Sufficient conditions on the triangulation \mathcal{T}_h

We give the conditions on \mathcal{T}_h which ensure that the hypothesis (NN) is satisfied. They should be compared to the conditions given in [6] in the case of the uniform convergence of the finite element method for a model Dirichlet problem.

We will say that a triangulation \mathcal{T}_h is non-negative if the following two hypotheses are satisfied:

(\mathcal{T})₁: For all $h > 0$ and all triangles $T \in \mathcal{T}_h$, the angles of T are strictly less than $\frac{1}{2}\pi$.

(\mathcal{T})₂: For all $h > 0$ and all triangles T having a side common with Γ_{2h} , the angle opposite this side is less than $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ independently of h).

The following proposition ensures that the hypothesis (NN) is satisfied.

PROPOSITION 6.9. Let G be the matrix of the linear system associated with $\mathcal{P}_L(h)$. Let

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

$X = [x_1, \dots, x_{N(h)}] \in \mathbb{R}^{N(h)}$ be such that $GX \geq 0$. Under the hypothesis $(\mathcal{P})_1$ and $(\mathcal{P})_2$ and for h sufficiently small, then, $X \geq 0$.

The proof is long and rather technical; the details can be found in [16].

6.6. Estimation of the error

We now estimate the error between the theoretical solution of \mathcal{P}_M and the numerical solution of $\mathcal{P}_M(h)$.

(i) The theoretical solution $u \in V$ of \mathcal{P}_M satisfies

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \langle \varphi(\gamma_0 u), \gamma_0 v \rangle_r = 0, \quad \forall v \in V.$$

(ii) The numerical solution $u_h \in V_h$ of $\mathcal{P}_M(h)$ satisfies

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega + \langle \varphi(\gamma_0 u_h), \gamma_0 v_h \rangle_r = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

(iii) We denote by $u(h)$ the solution in V of

$$\int_{\Omega} \nabla u(h) \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \langle \gamma_0 u(h), \gamma_0 v \rangle_r = (-\varphi(\gamma_0 r_h u) + \lambda \gamma_0 r_h u, \gamma_0 v)_r, \quad \forall v \in V.$$

PROPOSITION 6.10. *There exists a constant K independent of h such that*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq K \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)}.$$

PROOF. We first show that a constant K_1 exists such that

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq K_1 \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)}.$$

We have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u - u(h))|^2 \, d\Omega &= \langle \varphi(\gamma_0 r_h u) - \varphi(\gamma_0 u), \gamma_0(u - u(h)) \rangle_r \\ &\quad + \lambda \langle \gamma_0(u(h) - u), \gamma_0(u - u(h)) \rangle_r \\ &\quad + \lambda \langle \gamma_0(u - r_h u), \gamma_0(u - u(h)) \rangle_r. \end{aligned}$$

Since φ is Lipschitzian, with constant lower than λ , we obtain

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - u(h))|^2 \, d\Omega \leq 2\lambda \|\gamma_0(u - u(h))\| \cdot \|\gamma_0(u - r_h u)\|.$$

Using the Friedrichs' inequality we obtain

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{2\lambda \|\gamma_0\|^2}{c} \|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)}$$

(where c is a constant), whence

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq K_1 \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Similarly we can show that a constant K_2 also independent of h exists such that

$$\|u - r_h u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq K_2 \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)},$$

where $r_h u(h)$ is the projection of $u(h)$ on V_h . The proof is therefore complete.

The evaluation of the error involved in replacing u by u_h is therefore reduced to estimating the distance between u and V_h .

6.7. A theorem of convergence

DEFINITION 6.11. The triangulation \mathcal{T}_h is said to be *regular* if: $\forall h > 0$, all the angles of \mathcal{T}_h have a lower bound $\theta_0 > 0$ (see [4]).

THEOREM 6.12. If the triangulation \mathcal{T}_h is regular then we have

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)} = 0, \quad \forall u \in V.$$

The usual results cannot be applied directly since V_h has no polynomial basis. The problem is reduced in two dimensions.

LEMMA 6.13. (see [16]). $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap V$ is dense in V for the norm $H^1(\Omega)$.

The proof of Theorem 6.12 also requires

LEMMA 6.14. If the triangulation \mathcal{T}_h is regular, then $\forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap V$ there exists $v_h \rightarrow V_h$ such that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

PROOF. Let $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap V$; denoting its trace on $\bar{\omega}$ by Tu , we have $Tu|_{\Gamma_h} = 0$. Since the triangulation is regular the projection $p_{V_h}(Tu)$ on V_h converges strongly to Tu in $H^1(\Omega)$ (see [5]). According to Proposition 6.5 we have

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{S}p_{V_h}(Tu)\|_{H^1(\Omega)} &= \|\mathcal{S}Tu - \mathcal{S}p_{V_h}(Tu)\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \sqrt{2\pi} \|Tu - p_{V_h}(Tu)\|_{H^1(\omega)}. \end{aligned}$$

P. Witomski, Heat equation with nonlinear boundary conditions

Since Ω is bounded: $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \leq K \|\cdot\|_{H^1(\omega)}$, $\mathcal{S}p_{r_k}(Tu) \in V_k$ and therefore converges strongly towards u in $H^1(\Omega)$.

The proof of Theorem 6.12 now follows directly.

Given $u \in V$, \tilde{u}_k is chosen in $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap V$ such that $\|u - \tilde{u}_k\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$. According to Lemma 6.14, there exists v_k such that $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - v_k\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Therefore $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - r_k u\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. The theorem is proved.

6.8. Numerical experiments

We now give the results of numerical calculations derived from the experimental values obtained for the growth of a germanium crystal. The results after three iterations are shown in Fig. 3. We have used the values:

$$\text{initial lower solution} \begin{cases} T = T_i = 937^\circ\text{C} & \text{in the melt,} \\ T = T_i - u_k = 573^\circ\text{C} & \text{in the crystal,} \end{cases}$$

$$\text{initial upper solution} \begin{cases} T = T_c = 947^\circ\text{C} & \text{in the melt,} \\ T = T_i = 937^\circ\text{C} & \text{in the crystal.} \end{cases}$$

The numerical experiments were carried out with the finite element code DELTA [12] installed at the Institute of Applied Mathematics at Grenoble (I.M.A.G).

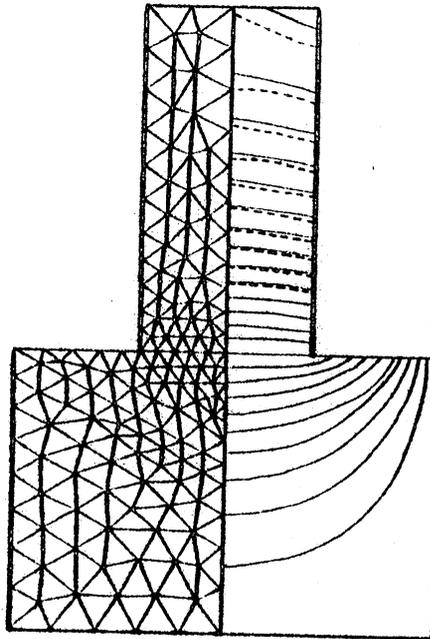


Fig. 3. Triangulation of the domain. Isothermals in the melt with 1°C steps. Isothermals in the crystal with 20°C steps. — upper solutions; - - - - lower solutions.

References

- [1] J.P. Aubin, *Approximation of Elliptic Boundary Value Problem* (Wiley, New York, 1972).
- [2] J.C. Brice, *The Growth of Crystals from the Melt* (North-Holland, Amsterdam, 1968).
- [3] F.E. Browder, *Problèmes Non Lineaires* (Presses de l'Université de Montreal, Montreal).
- [4] P.G. Ciarlet, *Numerical analysis of the finite element method*, *Seminaire de Mathematiques superieure de Montreal, Université de Montreal*, 1975.
- [5] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart, *General Lagrange and Hermité interpolation in R^n with applications to the finite element method*, *Arch. Rational and Mech. Anal.* 46 (1972) 177-199.
- [6] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart, *Maximum principle and uniform convergence for the finite element method*, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 2 (1973) 17-31.
- [7] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inequations en Mécanique et en Physique* (Dunod, Paris, 1972).
- [8] R. Glowinski, J.L. Lions and R. Trémolières, *Analyse Numeriques des Inequations Variationnelles*, Tome 2 (Dunod, Paris, 1976).
- [9] R.A. Laudise, *The Growth of Single Crystals* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970).
- [10] J.L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites Non Homogenes et Applications* (Dunod, Paris, 1968).
- [11] J. Necas, *Les Methodes Directes dans la Théorie des Equations aux Derivées Partielles* (Masson, Paris, 1967).
- [12] A. Poncet, *Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis*, *Thesis, Université Scientifique et Médicale de Grenoble*, 1979.
- [13] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problem* (Wiley, New York, 1979).
- [14] G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus* (Presses Universitaires de Montreal, Montreal).
- [15] A. Weil, *Elements des échanges thermiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1965).
- [16] P. Witomski, *Modelisation et étude numerique d'une problème de croissance cristalline*, *Thesis, Université Scientifique et Médicale de Grenoble*, 1977.
- [17] G. Strang and G.J. Fix, *An analysis of the Finite Element Method* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973).

DEUXIÈME PARTIE

SUR UN MODÈLE D'ÉRUPTIONS SOLAIRES *

- "Résolution de $Au = \lambda f(u)$ par méthode de cheminement et décomposition en sous-domaines". p.111 à 1139
- "A homotopy method for solving an equation of the type $-\Delta u = F(u)$ " p.1141 à 1170

* Les références [2],[3],[4] ne sont pas reproduites ici.

Résolution de $Au = \lambda f(u)$ par méthode de
cheminement et décomposition en sous domaines

R.R. N° 246

P. WITOMSKI

Avril 1981

RESUME

On propose, sous des hypothèses convenables, une méthode pour le calcul numérique d'une branche de solutions de l'équation $Au = \lambda F(u)$ où A est un opérateur linéaire non borné fermé d'un espace de Hilbert H , F est non linéaire de H dans H et $\lambda \in \mathbb{R}$. Connaissant une solution (λ_0, u_0) , on cherche la branche de solutions passant par (λ_0, u_0) . On suppose qu'il n'y a pas de bifurcations secondaires le long de la courbe solution mais au plus des singularités du type point de retournement.

La méthode consiste à montrer que (λ, u) vérifie au voisinage de (λ_0, u_0) une équation différentielle $(\dot{\lambda}(s), \dot{u}(s)) = H(\lambda(s), u(s))$ que l'on intègre ensuite numériquement. Cette méthode s'inscrit dans la lignée d'un certain nombre de travaux initialisés par HB Keller (cf. [5], [11], [13], ...).

Elle permet l'adaptation automatique de l'incrément s pour passer de $(\lambda(s), u(s))$ à $(\lambda(s+\Delta s), u(s+\Delta s))$ en particulier au point de retournement. Cette adaptation est faite en considérant l'aspect dynamique du parcours de la trajectoire des solutions.

Un deuxième point important est la méthode de calcul du vecteur tangent à la courbe des solutions.

On est amené à résoudre des systèmes linéaires creux, non symétriques, où la dernière ligne et la dernière colonne sont pleines. La méthode développée s'appuie sur l'adaptation de la résolution du problème de Dirichlet par décomposition en sous domaines (méthode de Schwarz). Elle conduit à une résolution en parallèle de petits systèmes élémentaires.

Les résultats numériques présentés sont ceux obtenus pour un problème elliptique provenant de la modélisation d'un problème d'astrophysique (éruptions solaires) (cf. [3]).

I . INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail au calcul numérique d'une branche de solutions de l'équation

$$Au = \lambda f(u) \quad u \in H \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où H est un espace de Hilbert, A un opérateur linéaire non borné fermé de H dans H , de domaine $D(A)$ dense dans H . On supposera de plus que A est autoadjoint, à résolvante compacte et que son spectre est borné à gauche. f est un opérateur non linéaire de H dans H . Nous préciserons ultérieurement les hypothèses sur f (cf. § IV).

On pose $X = D(A)$ muni de la norme du graphe † . X est un espace de Hilbert. On note G l'application de $\mathbb{R} \times X$ dans X définie par

$$G(\lambda, u) = -Au + \lambda f(u)$$

On cherche des solutions (i.e. des couples (λ, u)) de l'équation :

$$(E) \quad G(\lambda, u) = 0 .$$

Notons :

$G'(\lambda^*, u^*)$ la différentielle de Fréchet de G au point (λ^*, u^*) .
 $G'_\lambda(\lambda^*, u^*)$ (respectivement $G'_u(\lambda^*, u^*)$) la différentielle partielle de G par rapport à λ (respectivement u) au point (λ^*, u^*) .

† cf. [4] pour la terminologie usuelle.

Nous supposons dans la suite que $G'_u(\lambda^*, u^*)$ est un opérateur non borné fermé, de domaine $D(A)$, autoadjoint à résolvante compacte.

Cette hypothèse, qui sera vérifiée au § IV lorsque nous étudierons la régularité de l'application $u \rightarrow f(u)$, donne à $G'_u(\lambda^*, u^*)$ les propriétés suivantes :

1. PROPOSITION

- | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(1) $\text{Im } G'_u(\lambda^*, u^*)$ est fermée dans H</p> <p>(2) $\dim \text{Ker } G'_u(\lambda^*, u^*) = \text{codim } \text{Im } G'_u(\lambda^*, u^*) = d < +\infty$</p> <p>(3) $[\text{Ker } G'_u(\lambda^*, u^*)]^\perp = \text{Im } G'_u(\lambda^*, u^*)$ (orthogonalité dans H).</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

~~X~~

DEMONSTRATION

Elle se déduit de résultats classiques sur les opérateurs à résolvante compacte (cf. [4]) que nous résumons dans le

2. LEMME

<p>Soit T un opérateur non borné fermé de H dans H. Si T est à résolvante compacte, $\text{Im } T$ est fermée et $\dim \text{Ker } T < +\infty$. Si $D(T)$ est dense et T autoadjoint on a $\dim \text{Ker } T = \text{codim } \text{Im } T$ et $[\text{Ker } T]^\perp = \text{Im } T$.</p>

~~X~~

DEMONSTRATION

Le théorème sur le spectre des opérateurs à résolvante compacte ([4] p. 187) donne $\dim \text{Ker } T < +\infty$. Montrons que $\text{Im } T$ est fermée dans H .

Soit $y_n = T x_n$, $y_n \rightarrow y$.

Il existe $\xi_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(T - \xi_0)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$.
 En décomposant H sous la forme $H = \text{Ker } T \oplus Z$ il vient

$$x_n = k_n + z_n$$

$$y_n = T z_n = (T - \xi_0 + \xi_0) z_n$$

$$z_n = (T - \xi_0)^{-1} (y_n - \xi_0 z_n)$$

Supposons que z_n soit borné. Par compacité de $(T - \xi_0)^{-1}$ il existe une sous-suite notée encore z_n qui converge vers z . A la limite on a :

$$z = (T - \xi_0)^{-1} (y - \xi_0 z)$$

Soit $Tz = y$.

Il reste à prouver que z_n est borné. Supposons, en extrayant au besoin une sous-suite, que $\|z_n\| \rightarrow +\infty$.

On pose $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$. On a $u_n = (T - \xi_0)^{-1} \left(\frac{z}{\|z_n\|} - \xi_0 u_n \right)$.

Comme précédemment, on peut passer à la limite et trouver $u = (T - \xi_0)^{-1} (-\xi_0 u)$ avec $\|u\| = 1$. D'où $Tu = 0$, i.e. $u \in \text{Ker } T$, et $u \in Z$. Donc $u = 0$ ce qui contredit $\|u\| = 1$.

Les relations $\dim \text{Ker } T = \text{codim } \text{Im } T$ et $[\text{Ker } T]^\perp = \text{Im } T$ découlent alors immédiatement du théorème 5.13 p. 234 (cf. [4]) dans le cas T autoadjoint.

Rappelons maintenant quelques définitions sur la classification des solutions de (E).

3. DEFINITION

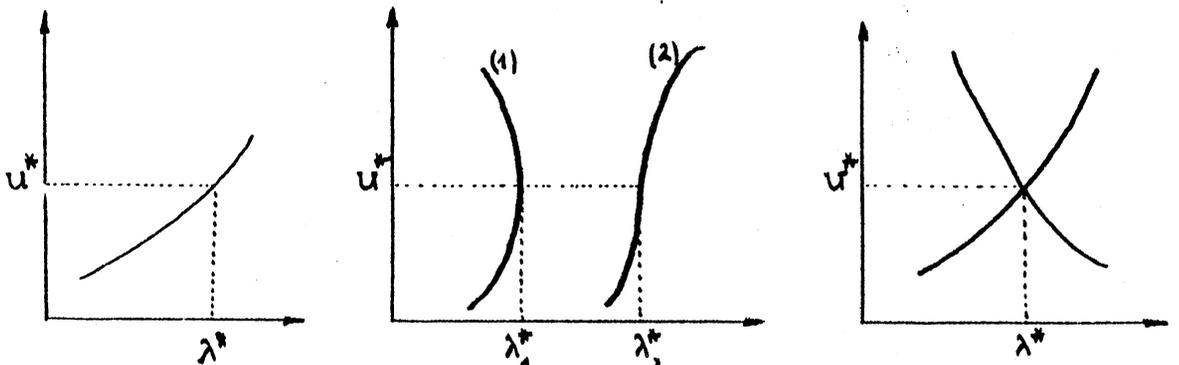
Soit (λ^*, u^*) une solution de (E). (λ^*, u^*) est un point régulier de (E) si $G'_u(\lambda^*, u^*)$ admet un inverse borné (i.e. $G'^{-1}_u(\lambda^*, u^*) \in \mathcal{B}(H, X)^\dagger$). Sinon on dit que (λ^*, u^*) est un point singulier de (E).
 Lorsque $\dim \text{Ker } G'_u(\lambda^*, u^*) = \text{codim Im } G'_u(\lambda^*, u^*) = 1$, (λ^*, u^*) est appelé point singulier simple.

Notons v^* un vecteur de X qui engendre $\text{Ker } G'_u(\lambda^*, u^*)$ et P^* l'application de H dans \mathbb{R} définie par $P^*(u) = \langle u, v^* \rangle$.

4. DEFINITION

Soit (λ^*, u^*) un point singulier simple de (E). On note G'_{λ^*} le représentant dans H de $G'_\lambda(\lambda^*, u^*)$. Si $P^*(G'_{\lambda^*}) \neq 0$ on dit que (λ^*, u^*) est un point de retournement de (E).

Si (λ^*, u^*) est un point singulier simple et si $P(G'_{\lambda^*}) = 0$, on a en général à faire à un point de bifurcation^{††}.



point régulier point de retournement^{††} point de bifurcation^{††}

Dans ce travail nous n'étudierons pas le cas des points de bifurcation.

[†] On en déduit que $G'_u(\lambda^*, u^*)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$.

^{††} Voir [15] pour les conditions au deuxième ordre sur G .

5. PROPOSITION

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (4) (λ^*, u^*) est un point de retournement
 (5) $\dim \text{Ker } G_u^0(\lambda^*, u^*) = 1$ et $G_{\lambda^*}^1 \notin \text{Im } G_u^1(\lambda^*, u^*)$
 (6) $\dim \text{Ker } G^0(\lambda^*, u^*) = 1$ et $\dim \text{Ker } G_u^1(\lambda^*, u^*) = 1$.

DEMONSTRATION

(4) \Rightarrow (5) il faut simplement vérifier que $G_{\lambda^*}^1 \notin \text{Im } G_u^1(\lambda^*, u^*)$
 Supposons qu'il existe $v \in X$ tel que $G_u^1(\lambda^*, u^*)(v) = G_{\lambda^*}^1$.
 On applique P^* . $G_u^1(\lambda^*, u^*)$ étant autoadjoint on obtient :

$$P^*(G_{\lambda^*}^1) = \langle G_u^1(\lambda^*, u^*)(v), v^* \rangle_H = \langle v, G_u^1(\lambda^*, u^*)(v^*) \rangle_H = 0$$

ce qui contredit (4)

(5) \Rightarrow (6) soit $(\mu, v) \in \text{Ker } G_u^1(\lambda^*, u^*)$. On a :

$$G_u^1(\lambda^*, u^*)(v) + \mu G_{\lambda^*}^1 = 0$$

Comme $G_{\lambda^*}^1 \notin \text{Im } G_u^1(\lambda^*, u^*)$ on en déduit que $\mu = 0$ et

$$\text{Ker } G^1(\lambda^*, u^*) = \{0\} \times \text{Ker } G_u^1(\lambda^*, u^*),$$

d'où $\dim \text{Ker } G^1(\lambda^*, u^*) = 1$.

(6) \Rightarrow (4) il résulte de la proposition 1, que (λ^*, u^*) est un point singulier simple. Supposons maintenant que

$$P^*(G_{\lambda^*}^1) = 0 \text{ i.e. } G_{\lambda^*}^1 \in [\text{Ker } G_u^1(\lambda^*, u^*)]^\perp = \text{Im } G_u^1(\lambda^*, u^*)$$

((3) prop. 1). Il existe donc $v \in D(A)$ tel que

$$G_u^1(\lambda^*, u^*)(v) = G_{\lambda^*}^1, \text{ ce qui montre que le couple } (1, -v)$$

est dans $\text{Ker } G^1(\lambda^*, u^*)$. Comme $(0, v^*) \in \text{Ker } G^1(\lambda^*, u^*)$ et

$\dim \text{Ker } G^1(\lambda^*, u^*) = 1$ on a $v^* = 0$ ce qui contredit

$$\dim \text{Ker } G_u^1(\lambda^*, u^*) = 1.$$

6. DEFINITION

On dit que 0 est valeur régulière de G si
 $\dim \text{Ker } G'(\lambda^*, u^*) = 1$ pour toute solution
 (λ^*, u^*) de (E) .

Nous supposerons par la suite que 0 est valeur régulière de G . Ceci revient à dire qu'il n'y a pas de bifurcation le long des branches de solutions de G :

7. PROPOSITION

0 étant valeur régulière de G , les solutions de
 (E) sont des points réguliers ou des points de
retournement.

DEMONSTRATION

Si $\dim \text{Ker } G'_u(\lambda^*, u^*) = 0$, on a $\text{Im } G'_u(\lambda^*, u^*) = H$
et d'après le théorème du graphe fermé $[G'_u(\lambda^*, u^*)]^{-1}$ est
borné. Donc (λ^*, u^*) est un point régulier de (E) . Si
 $\dim \text{Ker } G'_u(\lambda^*, u^*) = 1$, (λ^*, u^*) est un point de retournement
car on vérifie l'assertion (6) proposition 5.

On se propose maintenant de calculer les solutions
 (λ, u) au voisinage d'une solution (λ_0, u_0) connue. On étu-
diera le cas où l'on sait que ces solutions forment un arc
régulier $[\lambda(s), u(s)]$ paramétré par s sur un intervalle de
 \mathbb{R} et composé de points réguliers ou de points de retournements.

II . EXISTENCE D'UN ARC DE SOLUTIONS DIFFERENTIABLE AU
VOISINAGE D'UNE SOLUTION (λ_0, u_0) CONNUE

Nous examinerons simultanément le cas des points réguliers et des points de retournement. L'existence d'un arc de solution au voisinage de (λ_0, u_0) et sa régularité se déduiront du théorème des fonctions implicites [1] et du lemme suivant :

8. LEMME :

Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach et L un opérateur borné de $\mathbb{R} \times B_1$ dans $\mathbb{R} \times B_2$ de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} L_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & L_2 : B_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ L_3 : \mathbb{R} \rightarrow B_2 & L_4 : B_1 \rightarrow B_2 \end{array}$$

1°/ Si L_4 est bijectif, L est bijectif (donc d'inverse borné) si et seulement si :

$$(1) \quad L_1 - L_2 L_4^{-1} L_3 = 0$$

2°/ Si L_4 est non inversible et vérifie

$$\dim \text{Ker } L_4 = \text{codim } \text{Im } L_4 = 1$$

Alors L est bijectif (d'inverse borné) si et seulement si

$$(2) \quad L_3(1) \notin \text{Im } L_4$$

$$(3) \quad L_2 \notin \text{Im}(L_4^*)$$

DEMONSTRATION cf Keller [5]

Il est clair qu'au voisinage d'un point régulier (λ_0, u_0) on peut paramétrer les solutions en λ par application directe du théorème des fonctions implicites. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$ on ait une solution unique $u(\lambda)$ vérifiant $G(\lambda, u(\lambda)) = 0$; de plus $\lambda \mapsto u(\lambda)$ a la régularité de G .

Cette optique qui consiste à calculer u en fonction de λ ne permet pas de connaître les solutions au voisinage de points non réguliers. Il convient plutôt de calculer u et λ en fonction d'un paramètre supplémentaire s .

Soit donc (λ_0, u_0) une solution de (E) (régulière ou non). On prolonge le problème (E) dans une famille dépendant d'un paramètre en posant :

$$(E)_s \quad H(s, \lambda, u) = \begin{pmatrix} \ell(\lambda, u) - \ell(\lambda_0, u_0) - s \\ G(\lambda, u) \end{pmatrix}$$

où ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{R} \times H$ (donc sur $\mathbb{R} \times X$). On choisit ℓ de façon que :

$$(4) \quad \ell|_{\text{Ker } G'(\lambda_0, u_0)} \neq 0$$

On explicitera ℓ par la suite.

On a $H(0, \lambda_0, u_0) = 0$. En cherchant l'existence de solutions à l'équation $H(s, \lambda, u) = 0$ dans un voisinage de $(0, \lambda_0, u_0)$ on trouvera les solutions pour (E) au voisinage de (λ_0, u_0) .

9 . PROPOSITION

Soit (λ_0, u_0) une solution de (E) . Il existe un voisinage V de (λ_0, u_0) dans $\mathbb{R} \times X$ et $\epsilon > 0$ tels que pour tout $s \in]-\epsilon, +\epsilon[$ il existe $(\lambda(s), u(s))$ unique dans V vérifiant $H(s, \lambda(s), u(s)) = 0$.
L'application $s \rightarrow [\lambda(s), u(s)]$ à la même régularité que G et on a $G(\lambda(s), u(s)) = 0$ pour tout $s \in]-\epsilon, +\epsilon[$.

X

DEMONSTRATION

On a $H(0, \lambda_0, u_0) = 0$. Notons $H'_{[\lambda, u]}(0, \lambda_0, u_0)$ la différentielle de H par rapport à la variable $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$. Si $H'_{[\lambda, u]}(0, \lambda_0, u_0)$ admet un inverse continu de $\mathbb{R} \times H$ sur $\mathbb{R} \times X$, on applique le théorème des fonctions implicites à $H(s, \lambda, u)$ et la proposition est démontrée.
 $\ell(\lambda, u)$ est de la forme $\ell(\lambda, u) = \tilde{a}(\lambda) + \tilde{\ell}(u)$ avec $\tilde{\ell}$ (respectivement \tilde{a}) forme linéaire continue sur H (respectivement \mathbb{R}). On a :

$$H'_{[\lambda, u]}(0, \lambda_0, u_0) = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{\ell} \\ G'_\lambda(\lambda_0, u_0) & G'_u(\lambda_0, u_0) \end{pmatrix}$$

Appliquons le lemme 8 en posant $B_1 = X$ et $B_2 = H$

i) Si (λ_0, u_0) est un point régulier $G'_u(\lambda_0, u_0)$ admet un inverse borné de H dans X . Vérifions que $\tilde{a} - \tilde{\ell} G'^{-1}_u(\lambda_0, u_0) G'_\lambda(\lambda_0, u_0) \neq 0$. Il existe $(\mu, v) \in \text{Ker } G'(\lambda_0, u_0)$ avec $\mu \neq 0$. $[\tilde{a} - \tilde{\ell} G'^{-1}_u(\lambda_0, u_0) G'_\lambda(\lambda_0, u_0)](\mu) = \tilde{a}(\mu) + \tilde{\ell}(v) = \ell(\mu, v) \neq 0$ par construction de ℓ .

ii) Si (λ_0, u_0) est un point de retournement, on a par définition

$$1) \quad \dim \text{Ker } G'_u(\lambda_0, u_0) = \text{codim } \text{Im } G'(\lambda_0, u_0) = 1$$

$$2) \quad \text{Im } G'(\lambda_0, u_0) \cap \text{Im } G'_u(\lambda_0, u_0) = \{0\}$$

Comme ℓ vérifie (4) \tilde{a} et $\tilde{\ell}$ ne peuvent pas être nuls.

Donc $\dim \text{Im } \tilde{a} = \dim \text{Im } \tilde{\ell} = 1$.

Vérifions enfin que $\text{Ker } \tilde{\ell} \cap \text{Ker } G'_u(\lambda_0, u_0) = \{0\}$.

Soit v tel que $\tilde{\ell}(v) = G'_u(\lambda_0, u_0)(v) = 0$. Alors

$$\ell(0, v) = G'_\lambda(\lambda_0, u_0)(0) + G'_u(\lambda_0, u_0)(v) = 0 \quad \text{et donc} \quad v = 0.$$

-----X

L'équation différentielle vérifiée par l'arc de solutions au voisinage de (λ_0, u_0) est (cf. [1])

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}(s) \\ \dot{u}(s) \end{pmatrix} = -[H'_{[\lambda, u]}(s, \lambda(s), u(s))]^{-1} \circ H'_s(s, \lambda(s), u(s))$$

avec comme conditions initiales $\lambda(0) = \lambda_0$ et $u(0) = u_0$.

En explicitant ce système on obtient :

$$(E.D) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}(s) \\ \dot{u}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{\ell} \\ G'(\lambda(s), u(s)) & G'_u(\lambda(s), u(s)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda(0) = \lambda_0 \quad \quad \quad u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

Le problème du calcul d'un arc de solutions paramétrés $s \rightarrow (u(s), \lambda(s))$ devient donc un problème de résolution d'une équation différentielle. Dans la pratique, après discrétisation, on a souvent suffisamment de différentiabilité pour utiliser un solveur classique : la méthode de Runge-Kutta par exemple.

III . CALCUL NUMERIQUE DES SOLUTIONS AU VOISINAGE D'UNE SOLUTION (λ_0, u_0)

Les méthodes numériques proposées pour le calcul de branches de solution au voisinage des points de retournement sont basées sur le principe du calcul d'un arc de solutions (λ, u) en fonction d'un paramètre s . L'équation $G(\lambda, u) = 0$ est couplée avec des relations supplémentaires pour former un nouveau système $H(s, \lambda, u) = 0$. Les points singuliers pour G sont réguliers pour H .

L'idée initiale de ces méthodes est due à Keller [5]. Pour les développements de cette méthode voir [11], [12], [13] ainsi que la bibliographie et l'article de synthèse de H.D. Mittelmann et H. Weber [10] dans lequel on trouvera une liste de travaux assez exhaustive.

Nous proposons ici une méthode de cheminement utilisant l'intégration numérique du système (E.D).

Deux points sont importants :

i) Le choix de la forme linéaire qui fournit l'équation supplémentaire. Nous prendrons une relation qui permet de contrôler le vecteur vitesse $(\dot{\lambda}(s), \dot{u}(s))$ le long de la trajectoire des solutions (déplacement continu, sans rebroussement). Avec un algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif, ce vecteur vitesse est automatiquement réduit au passage des points de retournement.

ii) Le calcul du second membre du système différentiel (E.D). Dans le cas où A est un opérateur aux dérivées partielles de type elliptique la matrice du système discrétisé est creuse et presque bande ; la dernière ligne et la dernière colonne sont pleines. En adaptant la méthode de partitionnement de Schwarz on obtient une technique de résolution pour ce type de matrices permettant le calcul en parallèle et le traitement de systèmes de grande taille.

Précisons maintenant le premier point.

Soit (λ_0, u_0) une solution de (E). On se donne un élément (λ_T, u_T) de $\mathbb{R} \times H$ qui n'est pas dans l'orthogonal de $\text{Ker } G'(\lambda_0, u_0)$. On prend alors comme forme linéaire continue sur $\mathbb{R} \times H$:

$$\ell(\lambda, u) = \lambda_T \lambda + (u_T, u)$$

Par construction, ℓ ne s'annule pas sur $\text{Ker } G'(\lambda_0, u_0)$

Nous appellerons (λ_T, u_T) le vecteur témoin.

On déduit de la proposition 9 que le vecteur tangent à la trajectoire des solutions au point $(\lambda(s), u(s))$, $s \in [0, \epsilon[$, est donné par le couple (μ, v) solution de :

$$(T) \quad \begin{cases} \lambda_T \mu + (u_T, v) = 1 \\ G'_\lambda(\lambda(s), u(s))\mu + G'_u(\lambda(s), u(s))v = 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 8, on peut résoudre le système (T) tant que (λ_T, u_T) n'est pas orthogonal au $\text{Ker } G'(\lambda(s), u(s))$.

Choix du vecteur témoin :

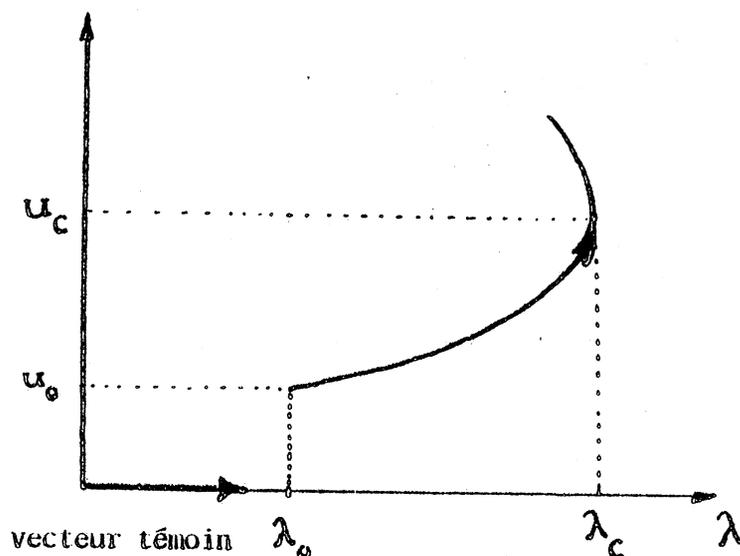
Nous examinerons deux cas usuels :

T_1 : $\lambda_T = 1$, $u_T = 0$. En reportant dans la première équation de (E.D) on obtient $\dot{\lambda}(s) = 1$ ce qui revient à dire que l'on choisit λ comme paramètre.

Si (λ_0, u_0) n'est pas un point de retournement on peut intégrer (E.D) jusqu'à ce que $(\lambda(s), u(s))$ soit un point singulier. En effet si (λ, u) est un point régulier.

$\ell(\lambda, u) \neq 0$ et le système (T) est inversible en vertu du lemme 8.

Lorsque l'on se rapproche du premier point de retournement le système (T) devient difficilement inversible et l'algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif réduit l'accroissement en λ ce qui donne un point d'accumulation.

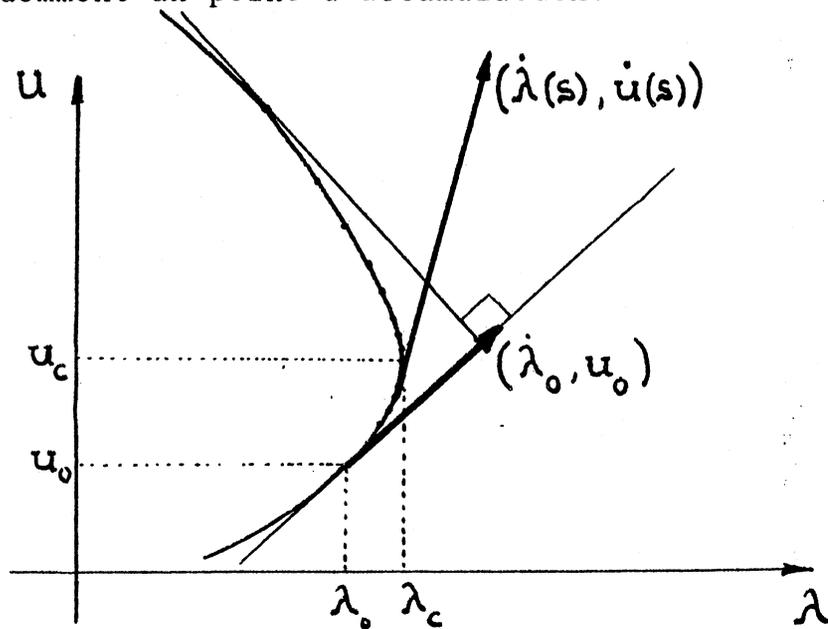


Pour franchir le point singulier (λ_c, u_c) il faut prendre le choix suivant :

T_2 : Soit (λ_0, u_0) une solution de (E). On note $(\dot{\lambda}_0, \dot{u}_0)$ un vecteur normalisé tangent à la courbe en (λ_0, u_0) . On pose $\lambda_T = \lambda_0$ et $u_T = u_0$. On peut intégrer (E.D) tant que (λ_T, u_T) n'est pas orthogonal à $\text{Ker } G'(\lambda(s), u(s))$ car (T) est alors inversible (lemme 8).

La relation $\lambda_T \lambda + (u_T, u) = 1$ assure que le parcours de la trajectoire se fait sans rebroussement. De plus, au voisinage des points de retournement la condition se vérifie avec une augmentation du module du vecteur tangent. L'algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif réduit donc l'incrément s ce qui donne un nombre plus important de points sur la courbe. Il faut actualiser et normaliser le vecteur témoin au moins après le passage de chaque point de retournement et

après chaque itération de Runge-Kutta. Sinon, on obtient comme précédemment un point d'accumulation.



Le deuxième point concernant la méthode de résolution du système (T) sera explicité dans le paragraphe suivant sur un exemple d'application. Le problème est le suivant : après discrétisation et réarrangement des équations on est conduit à inverser un système linéaire dont la matrice M a la structure :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

M_{11} est de taille $(n-1) \times (n-1)$

M_{12} est de taille $(n-1) \times 1$

M_{21} est de taille $(1) \times (n-1)$

M_{22} est de taille 1×1

Au voisinage des points de retournement, la matrice M_{11} devient non inversible. Pour inverser M il faut chercher un pivot non nul dans M_{21} ce qui détruit la structure bande de M_{11} (si elle est de cette forme). L'idée consiste à reporter les équations dans lesquelles apparaissent des pivots nuls en fin d'élimination. On obtiendra pour finir un système $\tilde{M}X = B$ de la forme

$$\tilde{M}X = \begin{pmatrix} \diagup & \tilde{M}_S \\ 0 & \tilde{M}_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_S \\ X_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_S \\ B_C \end{pmatrix}$$

On résout alors le système en deux étapes.

- i) Inversion par retour arrière du système $\tilde{M}_S X_S = B_S$ en prenant comme paramètres les valeurs X_C
- ii) Résolution de $\tilde{M}_C X_C = B_C$ par une méthode directe et reconstitution de X à partir des valeurs de couplage X_C calculées.

Si la matrice M est creuse, la méthode permet de respecter cette structure. Dans le cas où l'opérateur $A = -\Delta$ nous donnons une interprétation de cette méthode dans le paragraphe suivant.

IV . UN EXEMPLE D'APPLICATION

Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ .
 On se donne une application f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on définit
 sur $L^2(\Omega)$ l'opérateur F par $F(u)(x) = f(u(x))$
 p.t.x $x \in \Omega$. On notera de même $F'(u) : x \rightarrow f'(u(x))$.
 On cherche des solutions du problème :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda F(u) & \text{sur } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Posons $H = L^2(\Omega)$, $D(-\Delta) = \{u \in H_0(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$
 et $G(\lambda, u) = -\Delta u - \lambda F(u)$. Sous des hypothèses convenables
 pour f , $G(\lambda, u)$ est une application de $\mathbb{R} \times D(-\Delta)$ dans
 H et (λ, u) est solution de (P) si et seulement si
 $G(\lambda, u) = 0$.

10. PROPOSITION

1°/ Si f est bornée sur tout compact, pour tout
 $u \in D(-\Delta)$, $F(u) \in L^\infty(\Omega)$.

2°/ Si f' est bornée sur tout compact on a

i) $\forall u \in D(-\Delta)$, $F'(u) \in L^\infty(\Omega)$

ii) F est Gâteaux-différentiable de $L^2(\Omega)$
 dans $L^2(\Omega)$.

La différentielle en u est l'opérateur borné
 $DF(u) : v \rightarrow F'(u).v$

3°/ Si f' est continue, F est continûment Fréchet
 différentiable de $L^2(\Omega)^*$ dans $L^2(\Omega)$.

DEMONSTRATION

1°/ Soit $u \in D(-\Delta)$. Comme $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{\Omega})$
(cf. p. 41 [8]) u est continu. On a :

$$|f(u(x))| \leq \text{Sup} \{f(r) \mid |r| \leq \|u\|_{\infty}\}$$

f étant bornée sur tout compact on en déduit que
 $F(u) \in L^{\infty}(\Omega)$, (donc à $L^2(\Omega)$).

2°/ i) le raisonnement précédent appliqué à f'
donne $F'(u) \in L^{\infty}(\Omega)$

ii) Soit $v \in L^2(\Omega)$. On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((u+tv)(x)) - f(u(x))}{t} = f'(u(x))v(x)$$

p.t.x. $\in \Omega$

comme $F'(u) \in L^{\infty}(\Omega)$, on déduit du théorème de convergence dominée que $u \mapsto F(u)$ est Gâteaux-différentiable en u .

La différentielle en u est l'application $DF(u) : v \mapsto F'(u) \cdot v$, bornée de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ puisque
 $\|F'(u) \cdot v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|F'(u)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}$.

3°/ Si f' est continue, $u \mapsto F'(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. ([7] p. 22), montrons que $u \mapsto DF(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))$. On a :

$$\begin{aligned} \|(DF(u_1) - DF(u_2))v\|_{L^2(\Omega)} &= \|(F'(u_1) - F'(u_2)) \cdot v\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|F'(u_1) - F'(u_2)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|DF(u_1) - DF(u_2)\|_{(L^2(\Omega))} \leq \|F'(u_1) - F'(u_2)\|_{L^2(\Omega)}$$

et la proposition est démontrée.

11 . REMARQUE

En itérant le raisonnement précédent, si $\rho \in C^P(\mathbb{R})$, F est de classe C^P de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

—————X—

Etudions maintenant les propriétés de G :

12 . PROPOSITION

- i) G est une application Fréchet-différentiable de $\mathbb{R} \times D(-\Delta)$ dans $L^2(\Omega)$ qui possède la régularité de f .
- ii) $G'_u(\lambda^*, u^*)$ est un opérateur non borné de $L^2(\Omega)$, fermé autoadjoint, à résolvante compacte.

—————X—

DEMONSTRATION

L'injection de $D(-\Delta)$ dans $L^2(\Omega)$ étant continue, le point i) est évident avec la proposition 10 et la remarque 11.

$$G'_u(\lambda^*, u^*) = -\Delta - \lambda^* F'(u^*)$$

$-\Delta$ est un opérateur non borné fermé de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, autoadjoint, à résolvante compacte. $\lambda^* F'(u^*)$ est un opérateur borné de $L^2(\Omega)$, autoadjoint. En utilisant un théorème de perturbation ([4] p. 214) on obtient que $-\Delta - \lambda^* F'(u^*)$ est à résolvante compacte.

—————X—

Explicitons maintenant la méthode numérique exposée au paragraphe 3. Au voisinage d'une solution (λ_0, u_0) on a un arc de solutions vérifiant le système différentiel

$$\begin{cases} \lambda_T \dot{\lambda}(s) + (u_T, \dot{u}(s)) = 1 \\ -F(u(s)) \dot{\lambda}(s) - \Delta \dot{u}(s) - \lambda(s) F'(u(s)) \dot{u}(s) = 0 \\ \lambda(0) = \lambda_0 \quad u(0) = u_0 \quad (\lambda(s), u(s)) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

λ_T, u_T est le vecteur témoin normalisé précisé au paragraphe III : par exemple un vecteur normalisé tangent en (λ_0, u_0) .

Le problème est de savoir calculer un vecteur tangent pour chaque valeur du paramètre s . Il faut trouver $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ vérifiant :

$$(T) \quad \begin{cases} \lambda_T \mu + (u_T, v) = 1 \\ -F(u(s)) \mu - \Delta v - \lambda(s) F'(u(s)) v = 0 \end{cases}$$

Nous allons utiliser une méthode par *décomposition du domaine* Ω qui permet une résolution simultanée de petits problèmes élémentaires couplés. La résolution de ces équations de couplage fournit les relations pour assembler la solution.

Cette méthode est une adaptation de la technique de Schwarz pour montrer l'existence d'une solution au problème de Dirichlet. (Voir aussi [2] pour son utilisation dans les problèmes de mécanique des fluides). Elle est basée sur la remarque suivante :

11. PROPOSITION

Soit Ω' un ouvert inclus dans Ω tel que $\text{mes}(\partial\Omega' \cap \partial\Omega) \neq 0$.

Si $\text{mes} \Omega'$ est suffisamment petite, l'opérateur $-\Delta - \lambda F'(u)$ est inversible sur Ω' .

DEMONSTRATION

Soit $w \in H^1(\Omega')$ tel que $w|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega'} = 0$. On a l'estimation (cf. [8]).

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega')}^2 \geq \frac{1}{C_0 \times \text{mes}\sqrt{(\Omega')}} \|w\|_{L^2(\Omega')}^2$$

Comme $F'(u) \in L^\infty(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |\nabla w|^2 d\Omega' - \lambda \int_{\Omega'} F'(u) w d\Omega' \\ \geq \int_{\Omega'} |\nabla w|^2 d\Omega' - |\lambda| \|F'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{\Omega'} w^2 d\Omega' \end{aligned}$$

En prenant $\text{mes}(\Omega') \leq \frac{2C_0}{|\lambda| \|F'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}}$ on obtient donc un

opérateur coercif et on conclut avec le théorème de Lax-Milgram.

-----X

12. REMARQUE

Le spectre de $-\Delta$ est borné à gauche par un réel γ ; $\lambda F'(u)$ étant un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ son spectre est borné par $|\lambda| \cdot \|F'(u)\|_\infty$. Le spectre de $-\Delta - \lambda F'(u)$ est donc borné à gauche par $\gamma - |\lambda| \|F'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}$. On réduit donc Ω de façon que la première valeur propre du Laplacien soit plus grande que $|\lambda| \|F'(u)\|_\infty$, ainsi $0 \notin$ spectre de $-\Delta - \lambda F'(u)$.

-----X

La mise en oeuvre de la méthode pour résoudre (T) se décompose en trois parties :

- décomposition de Ω en sous domaines Ω_i
- résolution des problèmes élémentaires sur chaque sous domaines Ω_i
- résolution des équations de couplage et assemblage de la solution.

Nous exposerons le principe de la méthode dans le cas monodimensionnel. L'adaptation pour un ouvert de \mathbb{R}^2 se transpose aisément. On considère le problème

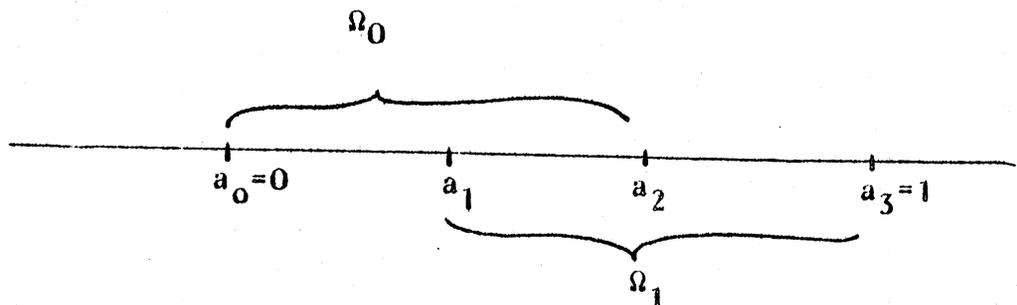
$$(1) \quad \begin{cases} -u'' = \lambda F(u) & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Rappelons que la méthode de cheminement demande la résolution du problème tangent :

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_T \mu + (u_T, v) = 1 \\ -\mu F(u) - v'' - \lambda F'(u)v = 0 \end{cases}$$

On se donne une partition régulière de $]0, 1[$ avec $n+1$ points, $a_0 = 0$, $a_n = 1$.

On note $\Omega_i =]a_i, a_{i+2}[$. La mesure des subdivisions est choisie suivant la proposition 11. Pour simplifier nous supposons que $n = 3$.



On discrétise Ω_0 et Ω_1 et on résoud par différences finies les problèmes suivants :

$$(3) \quad \begin{cases} -e_i'' - \lambda f'(u)e_i = f(u) & \text{sur } \Omega_{ih} \quad i=0,1 \\ e_i(a_i) = e_i(a_{i+2}) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} -h_0'' - \lambda f'(u)h_0 = 0 & \text{sur } \Omega_{0h} \\ h_0(a_0) = 0 \quad h_0(a_2) = 1 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} -h_1'' - \lambda f'(u)h_1 = 0 & \text{sur } \Omega_{1h} \\ h_1(a_1) = 1 \quad h_1(a_3) = 0 \end{cases}$$

Soient $v(a_1)$ et $v(a_2)$ les valeurs (inconnues) de la solution v de (2) aux noeuds a_1 et a_2 . La solution approchée v_h vérifie :

$$(6) \quad v_h = \mu e_0 + v(a_2)h_0 \quad \text{sur } \Omega_{0h}$$

$$(7) \quad v_h = \mu e_1 + v(a_1)h_1 \quad \text{sur } \Omega_{1h}$$

Les relations de couplage pour $v(a_1)$ et $v(a_2)$ sont obtenues avec :

$$(8) \quad v_h(a_1) = \mu e_0(a_1) + v(a_2)h_0$$

$$(9) \quad v_h(a_2) = \mu e_1(a_2) + v(a_1)h_1$$

La relation discrétisée du vecteur témoin fournit la relation manquante pour μ :

$$(10) \quad \lambda_T \mu + \langle (u_T)_h \cdot v_h \rangle = 1$$

Les relations de couplage (8), (9), (10) forment un système linéaire qui se résoud dans la pratique avec une méthode de Gauss avec recherche de pivot maximum. Lorsque $\mu, v(a_1)$ et $v(a_2)$ sont calculés on assemble les solutions élémentaires avec les relations (6) et (7).

13. REMARQUES

1. Pour un problème dans un ouvert rectangulaire de \mathbb{R}^2 , on prendra par exemple un découpage en bandes horizontales. Si n (respectivement m) est le nombre de points de discrétisation en x (respectivement y) et p le nombre de sous-domaines la résolution de (11) demande $(p-1)(2n+1)$ problèmes de Dirichlet de taille $(2m-p+1)/(p+1)$. Mais ces résolutions sont adaptées au calcul en parallèle et le gain en place mémoire est en $1/m$ si l'on considère la résolution en un seul bloc du système (T).

2. Dans les exemples pratiques, il faut normaliser finement la condition témoin lorsque des différences de grandeur existent entre u et μ (points de retournement très aplatis). Par un changement de variables, on se ramène au cas où toutes les composantes du système différentiel discrétisé ont un poids équivalent.

EXEMPLE (cf. [3])

Dans ce papier est traité un problème avec conditions mixtes. La méthode utilisée est celle décrite précédemment avec les adaptations nécessaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda F(u) \quad \Omega =]0, 1[\times]0, 2[\\ u|_{\partial\Omega_1} = g \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_2} = 0 \end{array} \right.$$

$$F(x) = \begin{cases} (x-0.2)^2(1-x)^2 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les figures suivantes donnent

- a) la courbe $u(\lambda)$ pour un point du domaine Ω .
Remarquer que les points d'intersections ne sont pas des bifurcations mais résultent de "l'aplatissement de la surface solution sur \mathbb{R} ".
- b) Les courbes de niveaux relatives à certaines valeurs de λ (voir sur la courbe $u(\lambda)$ les numéros d'itérations correspondants).

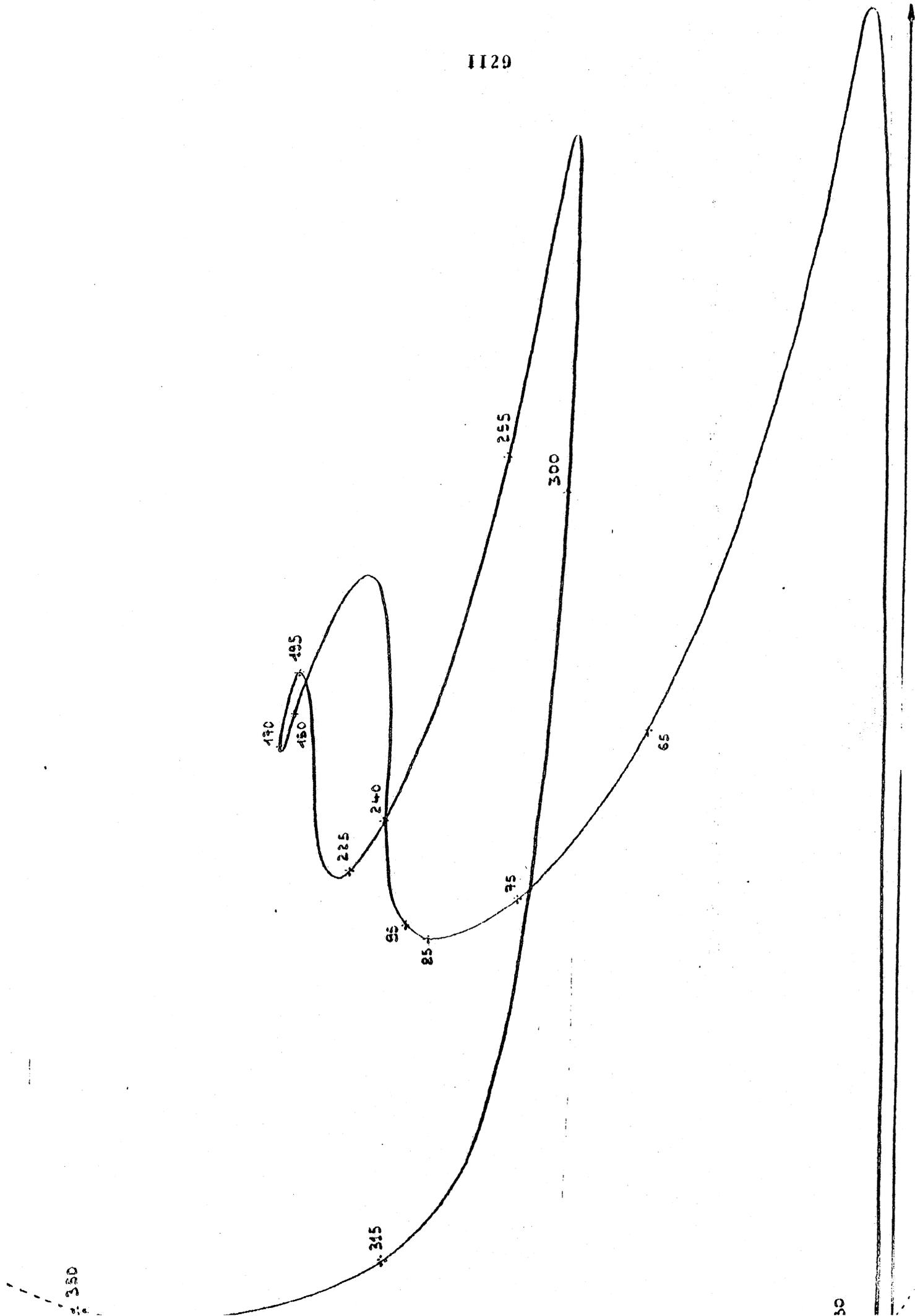
BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DIEUDONNE : Foundations of modern analysis .
Academic Press (1960).
- [2] R.V. DINH, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX : Applications of domain decomposition techniques to the numerical solution of the Navier-Stokes equations (à paraître).
- [3] J. HEYVAERT, J.M. LASRY, M. SCHATZMAN, P. WITOMSKI :
Solar flares : a non linear eigenvalue problem in a unbounded domain.
Lecture Notes in Mathematics n° 782. Springer-Verlag (1980).

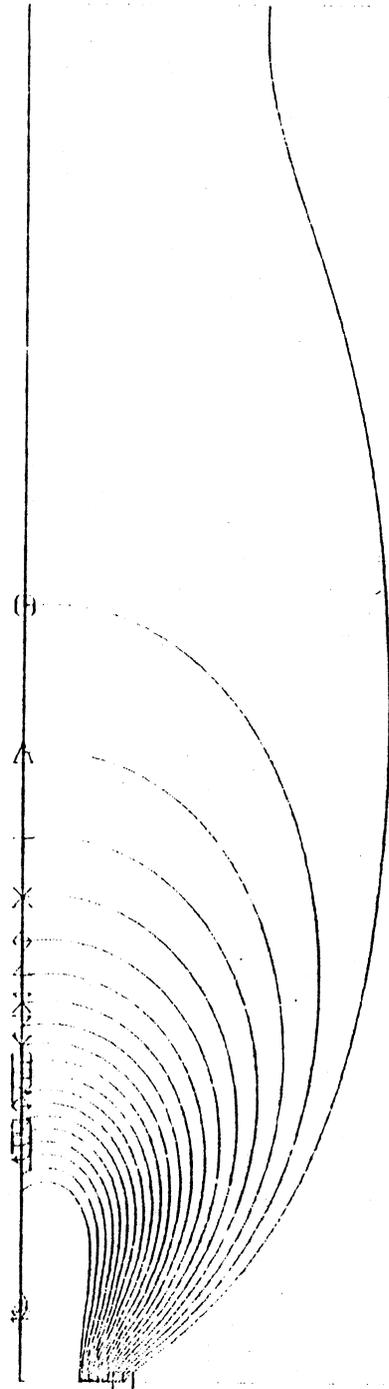
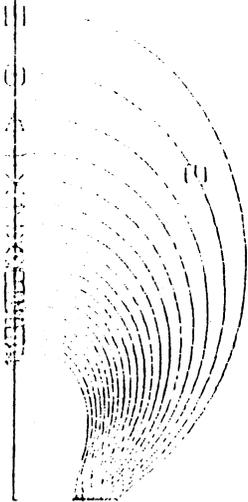
- [4] T. KATO : Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag (1966).
- [5] H.B. KELLER : Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. Paru dans : Applications of bifurcation theory. (Ed. P.H. Rabinowitz) Academic Press, New-York (1977).
- [6] F. KIKUCHI : Finite element approximations to bifurcation problems of turning point type. Paru dans Computing methods in Applied Sciences and Engineering (Ed. R. Glowinski, J.L. Lions). Lecture Notes in Maths. Springer-Verlag 704 (1979).
- [7] M.A. KRASNOSEL'SKII : Topological methods in the theory of non linear integral equations. Pergamon Press (1964).
- [8] O.A. LADYZENSKAJA, N.N. URAL'CEVA : Equations aux dérivées partielles de type elliptique. Dunod (1968).
- [9] R. LOZI : Analyse numérique de certains problèmes de bifurcation. Thèse. Nice (1975).
- [10] H.D. MITTELMANN, H. WEBER : Numerical methods for bifurcation problems. A survey and classification. Paru dans Bifurcation problems and their numerical solution. Birkhäuser Verlag (1980).
- [11] G. MOORE, A. SPENCE : The calculation of turning points of non linear equations. SIAM J. Numer. Anal. (vol. 17 n° 4) (1980).
- [12] J.C. PAUMIER : Calcul numérique de points de retournement. Séminaire Paris VI (1980).

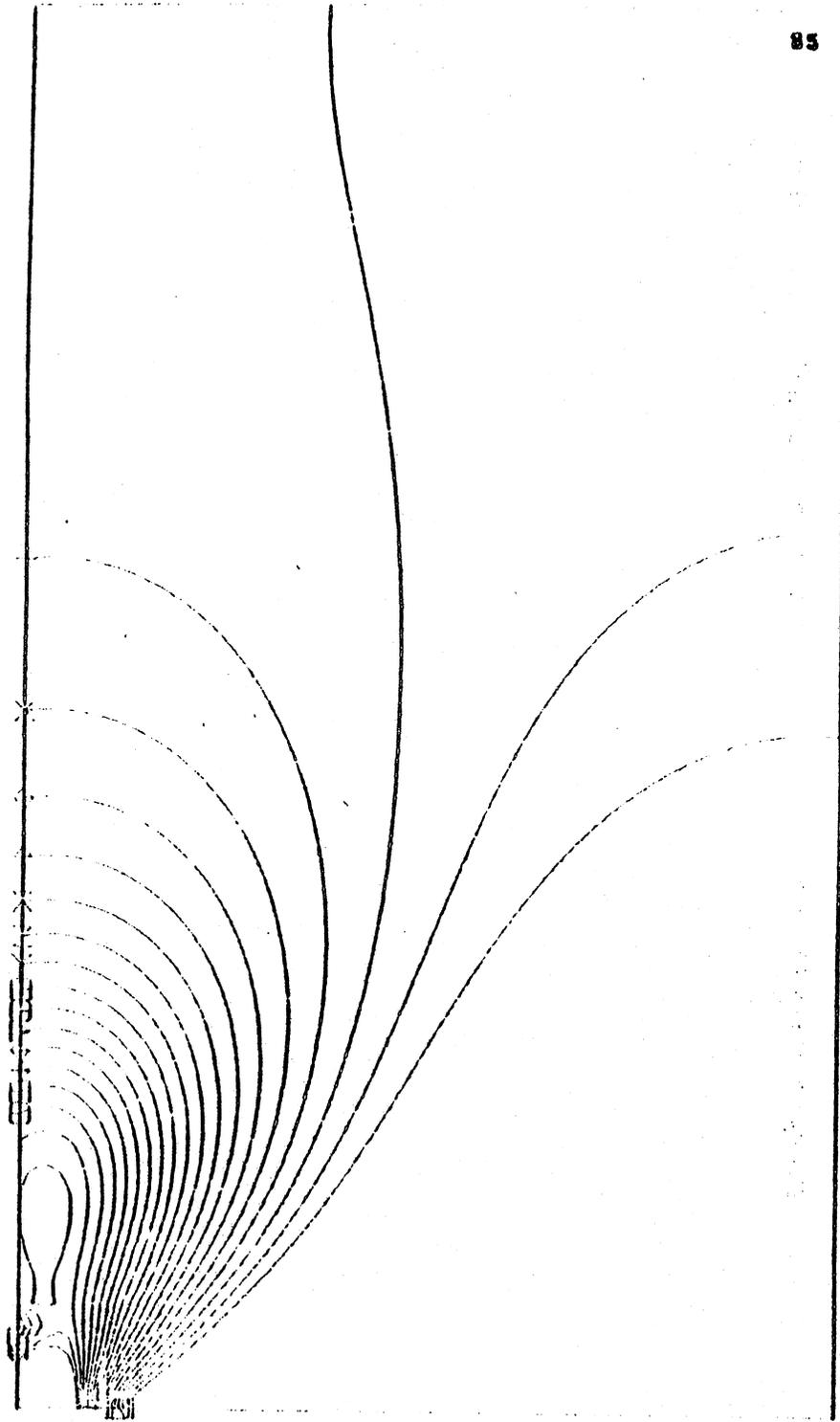
- [13] L. REINHART : Sur la solution numérique de problèmes aux limites aux linéaires par des méthodes de continuation. Thèse. Paris VI (1980).
- [14] M.M. VAINBERG : Variational method and method of monotone operators in the theory of non linear equations J. Wiley and Sons (1972).
- [15] M.FUJII, M.YAMAGUTI : Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity.
Research Report KSU/ICS 79-09 - Kyoto University

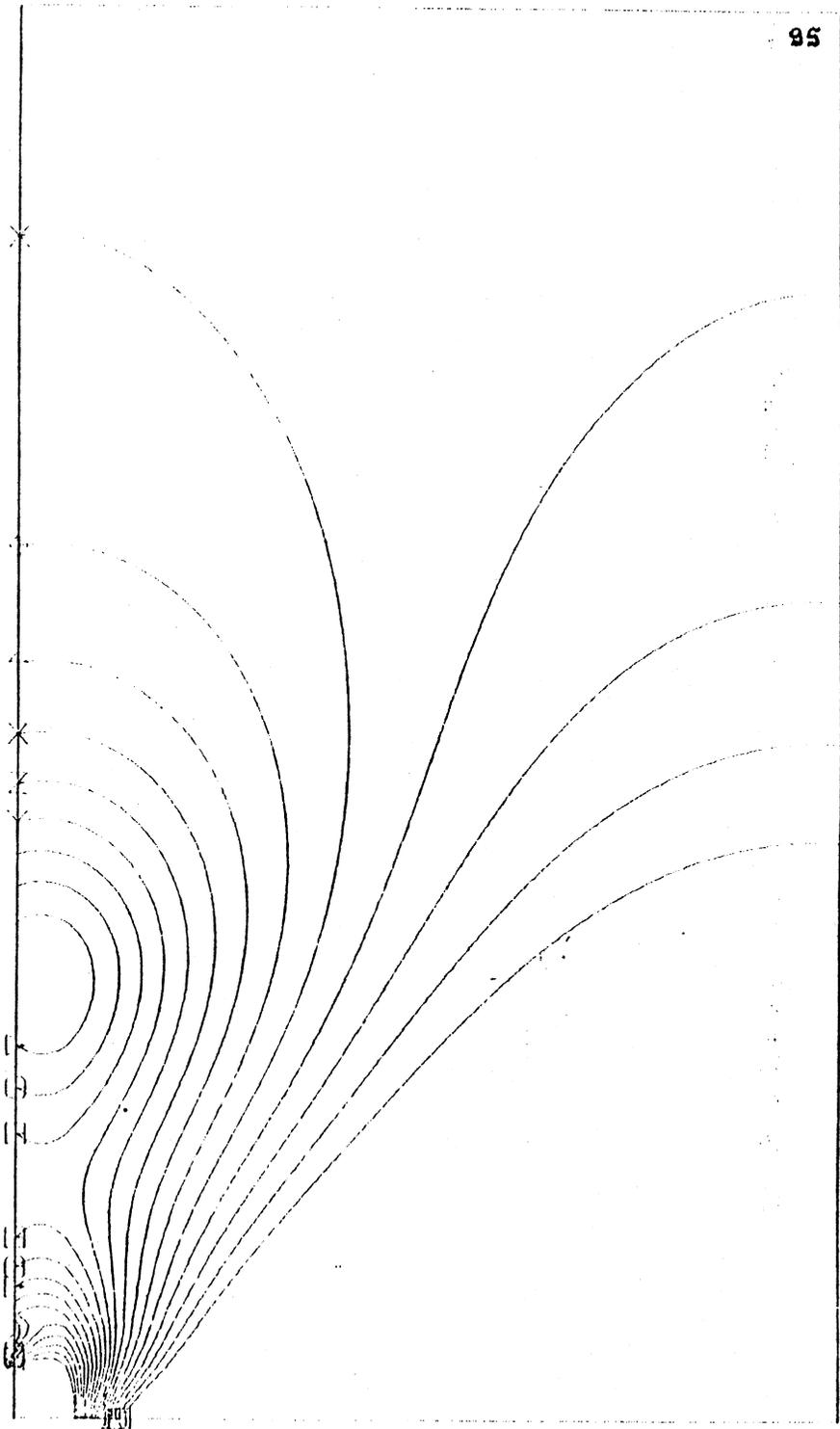
1129

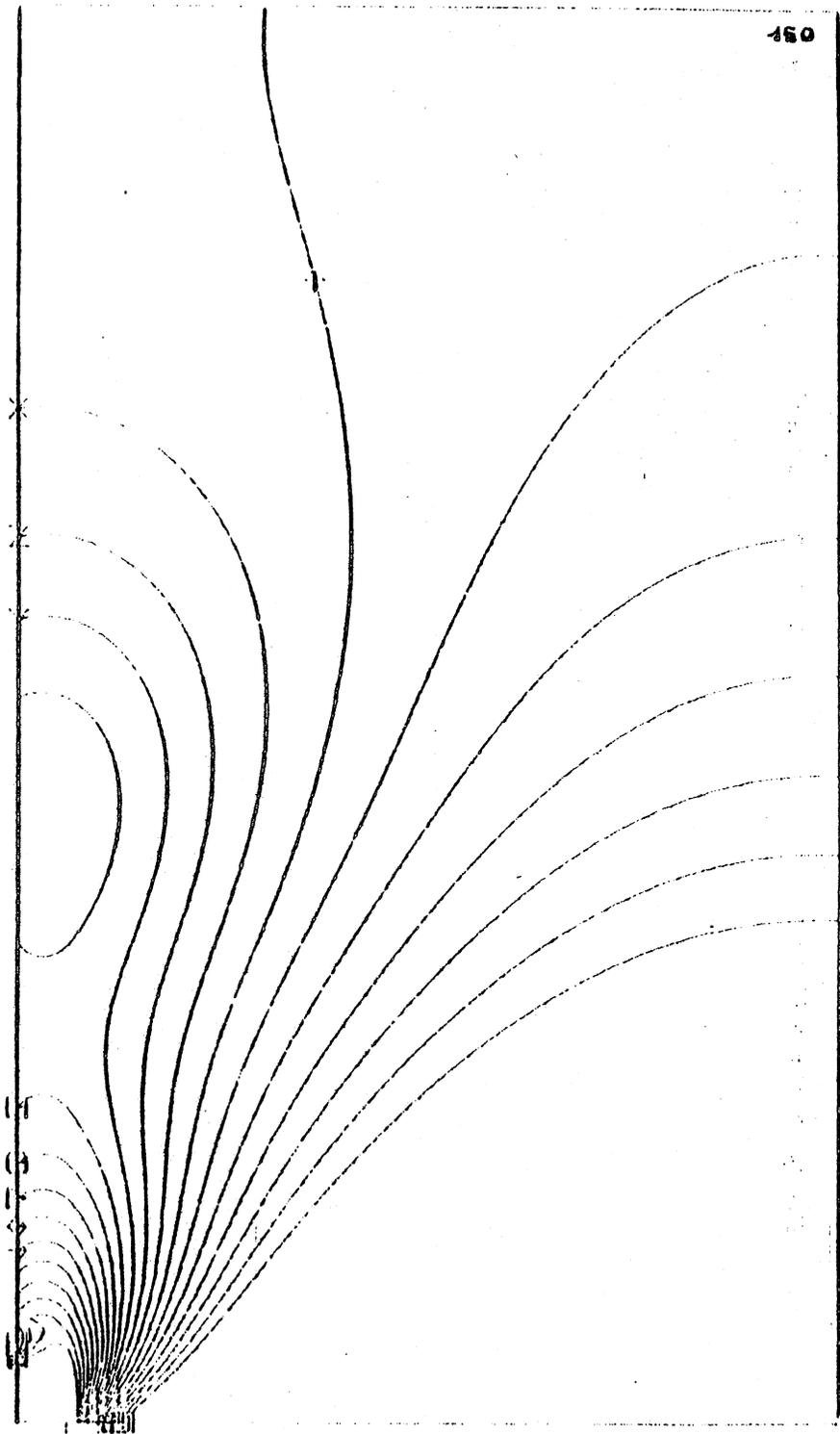


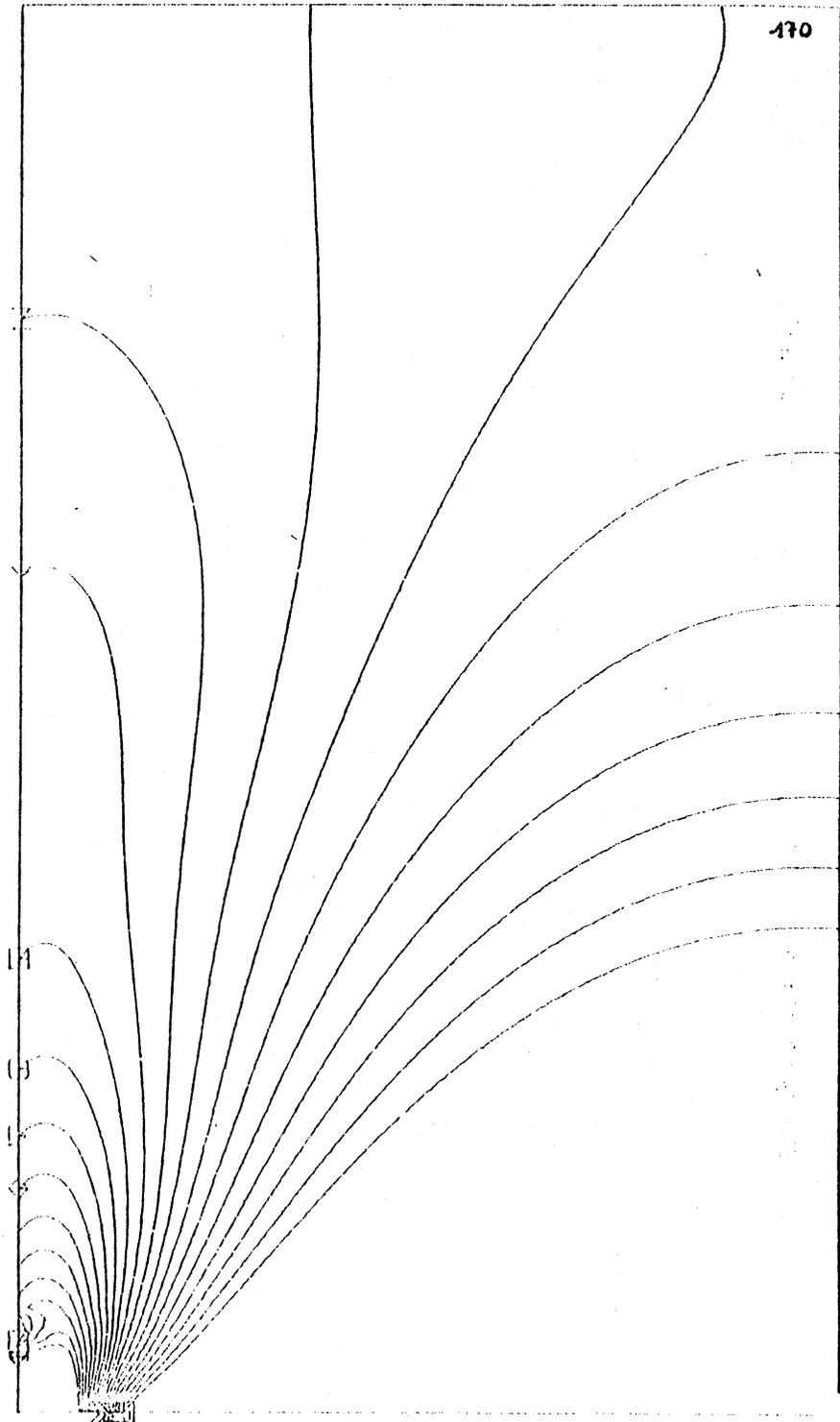
II30

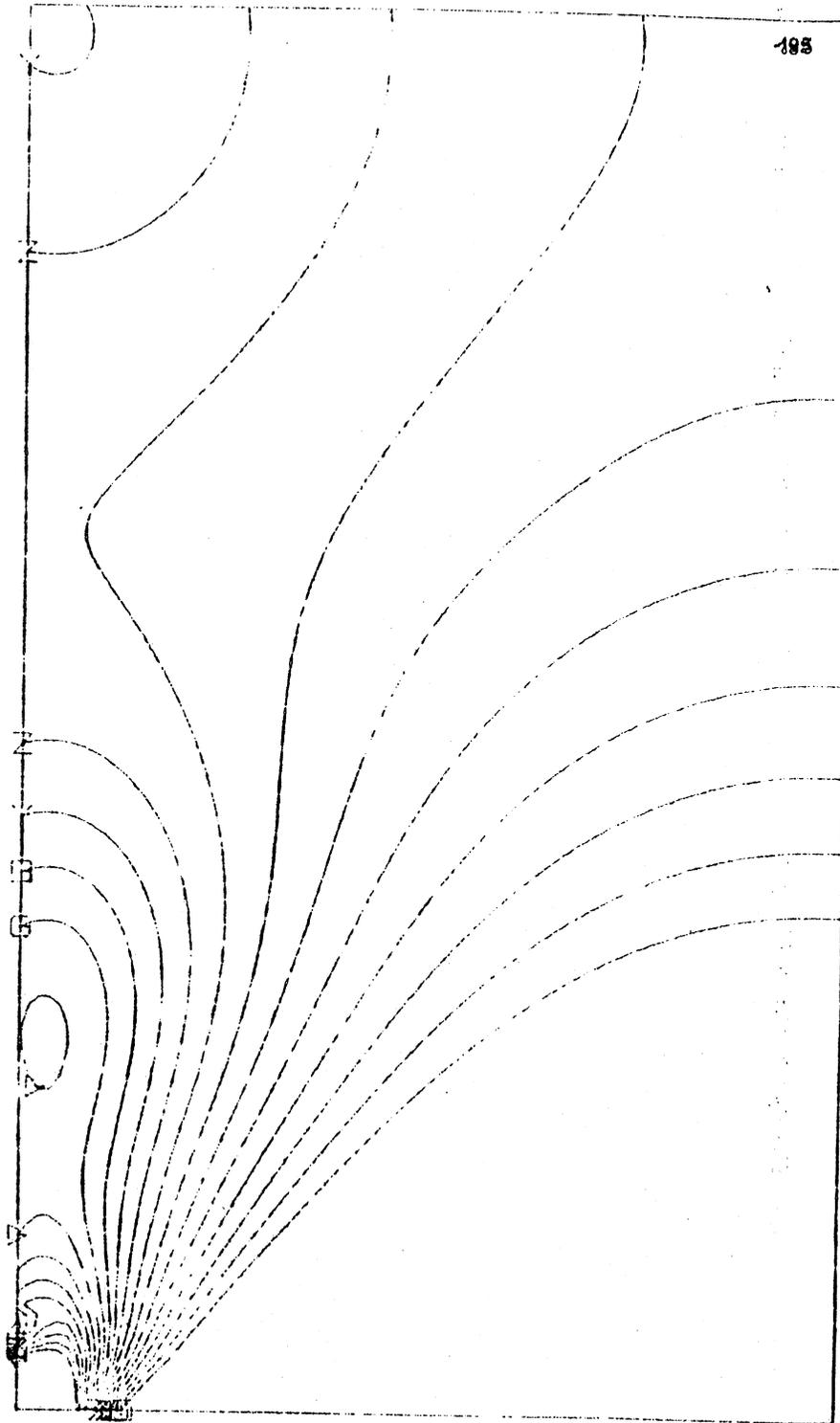


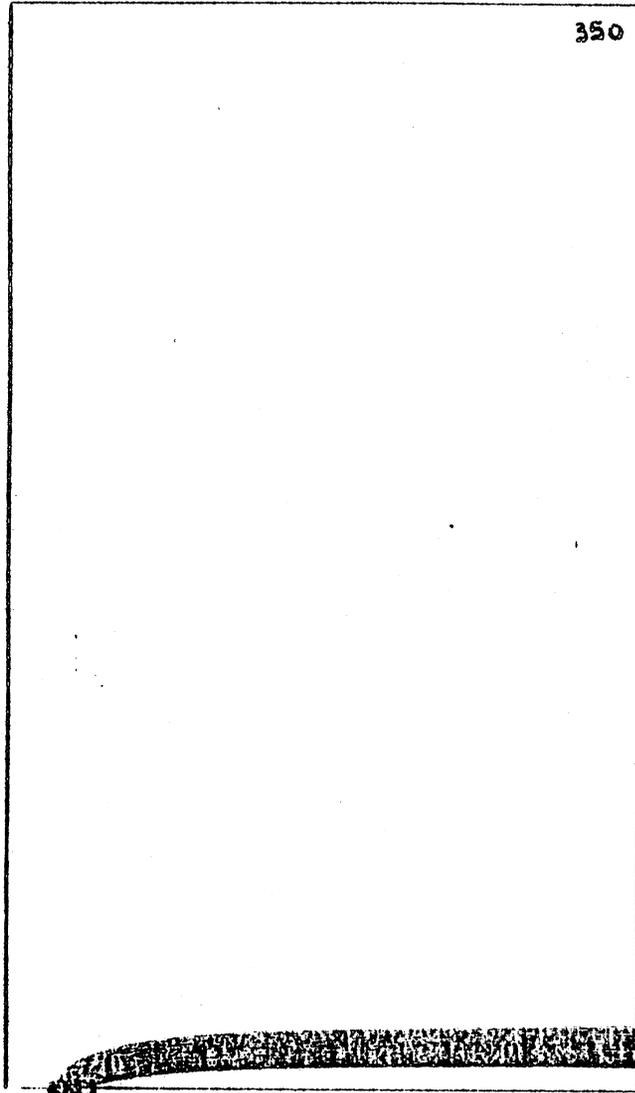


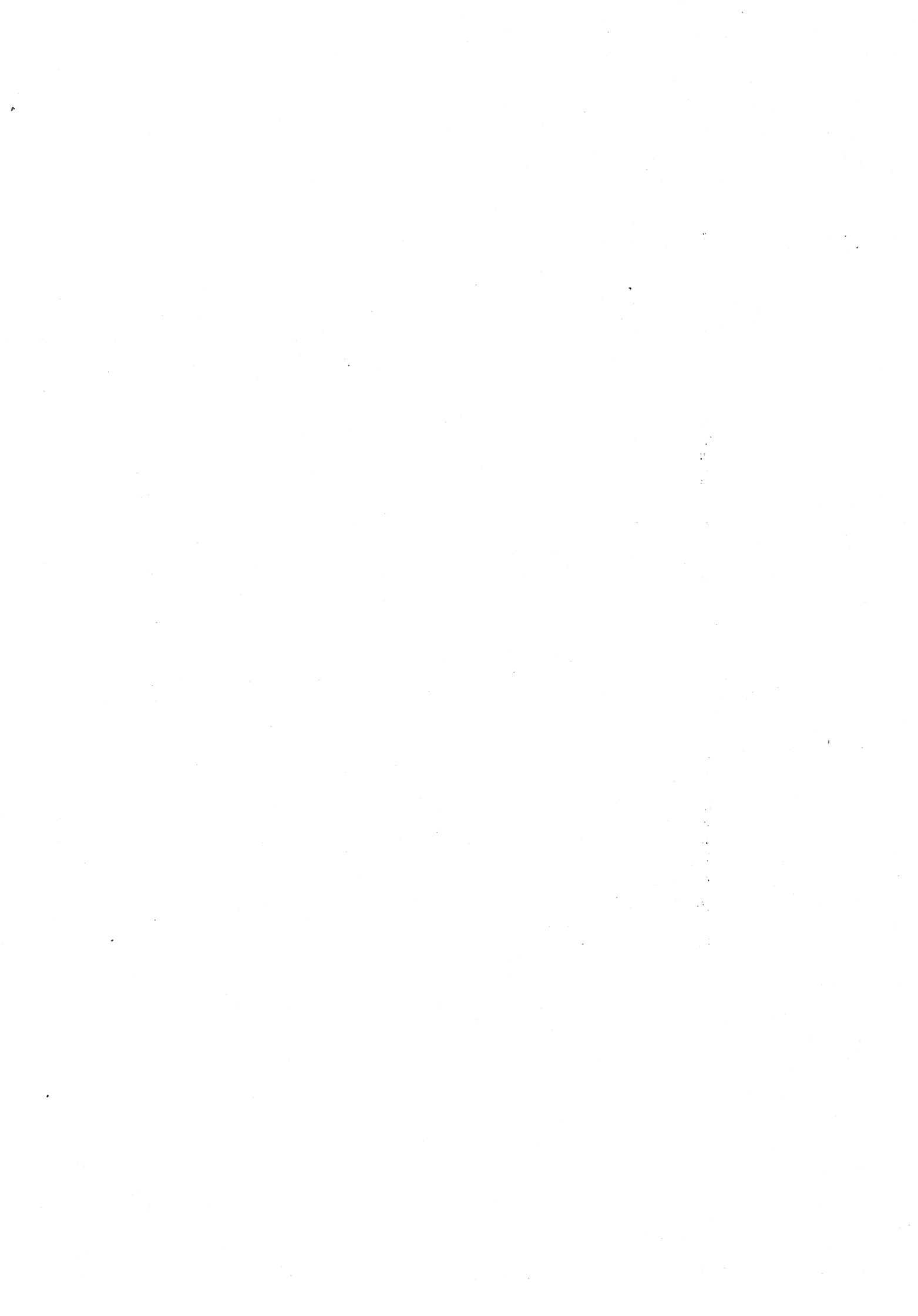












A HOMOTOPY METHOD FOR SOLVING AN EQUATION
OF THE TYPE $-\Delta u = F(u)$

by *

Christophe DEVYS

Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique,
91128 - PALAISEAU CEDEX - FRANCE.

Jean-Michel MOREL

Département de Mathématique-Informatique
Faculté des Sciences de Luminy, 70 route Léon-Lachamp,
13288 MARSEILLE CEDEX 9 - FRANCE.

P. WITOMSKI ·

Université de Grenoble, IRMA, St Martin d'Hères,
38041 GRENOBLE CEDEX - FRANCE.

Abstract : We describe a homotopy algorithm for solving the equation $-\Delta u = F(u)$. To this end, we define a pseudo-inverse and a pseudo-determinant with sufficient regularity properties, for operators of Laplacian type.

* The authors are indebted to Jean-Michel LASRY and Michèle SCHATZMAN for many valuable suggestions.

In this paper, a homotopy algorithm is given to solve the following problem :

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = F(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is some bounded regular domain in \mathbb{R}^n and $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a given function with compact support^{*}. More precisely, we define a homotopy continuation method as given recently in Alexander-Yorke [3], Chow and Mallet-Paret and Yorke [4], Eaves-Saigal [5], Kellogg-Li-Yorke [7], Smale [1] and others.

All these methods have been elaborated in order to numerically solve finite dimensional problems of the type $g(x) = x$ or $g(x) = y$. In fact, any problem which can be shown to have a solution using topological degree, or a certain generalization thereof, fits into the general framework of homotopy continuation. Our aim is to generalize these methods to infinite dimensional problems whose resolution involves Leray-Schauder degree. Before expounding our results, let us briefly explain the finite dimensional method worked out in the preceding papers.

* The compact support assumption is not so restrictive. Indeed, let F be a more general function. In many cases, (for instance under monotonicity assumptions on F), one can find by some maximum principle a L^∞ -bound b for the solutions of (1). Therefore, instead of F , we can consider a truncature of F with compact support $[-b, +b]$.

Let $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ be a C^2 -map. Suppose we are searching for a u^* such that $g(u^*) = 0$. For this, define a C^2 -homotopy $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, such that $G(u, 1) = g(u)$, and assume we know some u_0 such that $G(u_0, 0) = 0$. The main idea of the method is that for "almost every" homotopy G , the set $\{(u, \lambda), G(u, \lambda) = 0\}$ defines a curve in \mathbb{R}^N , $(u(s), \lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$, passing through $(u_0, 0)$. This curve can be numerically computed until a point of interest ($\lambda = 1$) is encountered. One moves along the curve by solving a Cauchy problem as following :

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = (G'_u)^{\#} G'_\lambda(u, \lambda) \\ \frac{d\lambda}{ds} = -\det [G'_u(u, \lambda)] \\ (u(0), \lambda(0)) = (u_0, 0) . \end{cases}$$

(If A is a regular $N \times N$ -matrix, we set $A^{\#} = (\det A) A^{-1}$, and we extend by continuity the mapping $A \rightarrow A^{\#}$ to all $N \times N$ -matrix).

Then the problem of numerical computation is driven back to a usual differential equation solver. Moreover, one usually obtains constructive proofs for existence theorems of the Brouwer type.

Let us now return to our problem. We have to solve $g(u) = 0$, with $g(u) = -\Delta u - F(u)$ and $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Consider the following homotopy :

$$G : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega) ,$$

$$\text{with } G(u, \lambda) = \Delta u + \lambda F(u) + (1 - \lambda) h , \text{ where } h \in L^2(\Omega)$$

is arbitrary. The associated problem is

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda F(u) + (1 - \lambda) h & \text{in } \Omega , \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega . \end{cases}$$

In order to extend the finite dimensional method expounded above, the main difficulties are :

- 1) To obtain that the solution set $\{(u, \lambda)\}$ of (2) is a regular curve.
- 2) To extend in a constructive way definitions of $A^\#$ and $\det A$ to infinite dimensional operators of the Laplacian type.
- 3) To show that the method provides a solution of (1).

We now summarize our results in this way, and give the plan of this paper.

First section. Using Smale's density theorem, we prove that for most h in $L^2(\Omega)$, the set E of solutions (u, λ) of (2) is a one-dimensional C^1 -submanifold of $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ (see Theorem 1).

Second section. Let h be as above, and $(u(s), \lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$ be a smooth arc of solutions of (2). Then $G(u(s), \lambda(s)) = 0$, and therefore :

$$(3) \quad G_u^1(u(s), \lambda(s)) u'(s) + G_\lambda^1(u(s), \lambda(s)) \lambda'(s) = 0.$$

Here $G_u^1(u, \lambda) : H^2 \cap H_0^1 \rightarrow L^2(\Omega)$

$v \rightarrow \Delta v + \lambda F'(u)v$ is a perturbation of Δ .

We define maps $J : A \rightarrow A^\#$ and $\delta : A \rightarrow \delta(A)$ on a set of operators of the Laplacian type, verifying $AA^\# = \delta(A) \text{Id}$, and $A^\#A = \delta(A) \text{Id}$. These definitions are explicit, and they ensure that δ and J are regular enough to obtain classical solutions for (C).

This is the object of Theorem 2, and will be treated in a general functional framework.

Third Section. Using the result of Section 1, and some compactness property of the solution set of (2), we prove that the algorithm (C) obtained in Section 2 accomplishes its task : It provides a t^* such that $\lambda(t^*) = 1$, and then $u(t^*)$ is a solution of (1). We show this in Theorems 3 and 4. Thus we obtain a constructive existence proof of a solution for Problem (1).

Theorem 1. Assume the following property :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ is a regular value of } \Delta + F(\cdot) \text{ , i.e. for every solution} \\ u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \text{ of } \Delta u + F(u) = 0 \text{ , the linear operator} \\ v \mapsto \Delta v + F'(u) \cdot v \\ H^2 \cap H_0^1 \rightarrow L^2 \end{array} \right. \text{ is onto.}$$

Then there exists a residual subset R of $L^2(\Omega)$, such that, for h in R , the set

$$E = \{(u, \lambda) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times R, G(u, \lambda) = \Delta u + \lambda F(u) + (1 - \lambda)h = 0\}$$

is a one-dimensional C^1 - submanifold of $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times R$

In order to prove Theorem 1, assume first the next proposition :

Proposition 1. Suppose that, for every (u, λ) in E ,

$G'(u, \lambda) : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times R \rightarrow L^2(\Omega)$ is an onto linear map. Then E is a one-dimensional C^1 - submanifold of $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times R$.

Proof of Theorem 1 :

Let G'_u and G'_λ be the partial derivatives of G :

$$G'_u(u, \lambda) : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$v \mapsto G'_u(u, \lambda)v = \Delta v + \lambda F'(u)v .$$

$$G'_\lambda(u, \lambda) : R \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$\mu \mapsto G'_\lambda(u, \lambda)\mu = \mu(F(u) - h) .$$

Thus we have : $G^1(u, \lambda) = (G^1_u(u, \lambda), G^1_\lambda(u, \lambda))$ and

$$G^1(u, \lambda)(v, \mu) = \Delta v + \lambda F^1(u)v + \mu(F(u) - h) \quad \text{for } v \in H^2 \cap H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}.$$

Lemma 1. $G^1_u(u, \lambda)$, as an operator from $L^2(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$, is self adjoint with compact resolvent, and therefore :

- (I) $\text{Im } G^1_u(u, \lambda)$ is closed in $L^2(\Omega)$
 $\dim \text{Ker } G^1_u(u, \lambda) = \text{codim } \text{Im } G^1_u(u, \lambda) < +\infty$
- (II) $\text{Ker } G^1_u(u, \lambda) = (\text{Im } G^1_u(u, \lambda))^\perp$

Remark. $G^1_u(u, \lambda)$ is a Fredholm operator with index 0.

Lemma 1 is an immediate consequence of a perturbation theorem of Kato [5] (th. 3.17, p.214).

In order to prove Theorem 1, it is sufficient, by Proposition 1, to show that for almost every h in $L^2(\Omega)$, the map $G^1(u, \lambda)$ is surjective for (u, λ) in $E = \{(u, \lambda), G(u, \lambda) = 0\}$.

Define the auxillar map :

$$\begin{aligned} \Psi : H^2 \cap H^1_0(\Omega) \times (\mathbb{R} \setminus \{1\}) &= X \rightarrow L^2(\Omega) = Y \\ (u, \lambda) &\rightarrow \Psi(u, \lambda) = \frac{\Delta u + \lambda F(u)}{\lambda - 1} \end{aligned}$$

and apply to Ψ Smale's density theorem (Abraham-Robbin [1]).

Density theorem.

Let X and Y be C^r -manifolds, with X Lindelöff (every open cover of X has a countable subcover), and $\Psi : X \rightarrow Y$ a C^r -Fredholm map.

Suppose that $r > \max(0, \text{index } \Psi'(x))$ for every x in X . Then the set of regular values of Ψ , $R_\Psi = \{y \in Y, \forall x \in X, (y = \Psi(x) \Rightarrow \Psi'(x) \text{ is surjective})\}$ is a residual subset of Y .

Recall that a map $\Psi \in C^1 : X \rightarrow Y$ is said to be Fredholm if, for every $x \in X$, $\Psi'(x)$ is a linear Fredholm operator, i.e. :

- (i) $\text{Ker } \Psi'(x)$ is finite-dimensional
- (ii) $\text{Im } \Psi'(x)$ is closed and finite codimensional.

We define the index of $\Psi'(x)$ to be :

$$\text{Ind } \Psi'(x) = \dim \text{Ker } \Psi'(x) - \text{codim } \text{Im } \Psi'(x).$$

Let us first admit that Smale's theorem applies to Ψ with $r = 2$. Then, if $h \in R_\Psi$, $\Psi'(u, \lambda)$ is surjective for every (u, λ) such that $\Psi(u, \lambda) = 0$ ($\Leftrightarrow G(u, \lambda) = 0, \lambda \neq 1$).

But, for such a (u, λ) , we have :

$$\begin{aligned} \Psi'(u, \lambda) &= (\Psi'_u(u, \lambda), \Psi'_\lambda(u, \lambda)) = \left(\frac{\Delta + \lambda F'(u)}{\lambda - 1}, \frac{F(u)(\lambda - 1) - (\Delta u + \lambda F(u))}{(\lambda - 1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda - 1} (\Delta + F'(u), F(u) - h) = \frac{1}{\lambda - 1} G'(u, \lambda). \end{aligned}$$

Therefore, if $h \in R_\Psi$, $(u, \lambda) \in E$ and if $\lambda \neq 1$, $G'(u, \lambda)$ is surjective. According to Property (P) this result still holds for $\lambda = 1$. Then applying Proposition 1 concludes the proof of theorem 1.

We have now to verify the hypothesis of Smale's theorem :

- a) The map Ψ is Fredholm, and $\text{index } \Psi'(x) \leq 1$ for every x in X .

Indeed, $\Psi^1(u, \lambda) = (\Psi_u^1(u, \lambda), 0) + (0, \Psi_\lambda^1(u, \lambda))$

$$= \frac{1}{\lambda - 1} (\Delta + \lambda F^1(u), 0) + \frac{1}{\lambda - 1} (0, F(u) + \frac{\Delta u + \lambda F(u)}{1 - \lambda})$$

with $(\Delta + \lambda F^1(u), 0)(v, \mu) = \Delta v + \lambda F^1(u)v$ for $(v, \mu) \in H_0^1 \cap H^2(\Omega) \times \mathbb{R}$

and $(0, F(u) + \frac{\Delta u + \lambda F(u)}{1 - \lambda})(v, \mu) = [F(u) + \frac{1}{1 - \lambda}(\Delta u + \lambda F(u))]\mu$.

Now, by Lemma 1, $\Delta + \lambda F^1(u) = G_u^1(u, \lambda)$ is a Fredholm operator with null index and :

$$\text{Ker}(\Delta + \lambda F^1(u), 0) = \text{Ker}(\Delta + \lambda F^1(u)) \times \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\Delta + \lambda F^1(u), 0) = \text{Im}(\Delta + \lambda F^1(u)).$$

Thus $T = (\Delta + \lambda F^1(u), 0)$ is a Fredholm operator with index 1.

Moreover, it is well known (Lang [6] p.202) that, if T is Fredholm and A a compact linear map, then $T + A$ is Fredholm and $\text{Index}(T + A) = \text{Index } T$.

Now $A = (0, F(u) + \frac{\Delta u + \lambda F(u)}{1 - \lambda})$ is of finite rank and then compact.

We conclude that $\Psi^1(u, \lambda)$ is a Fredholm operator with index 1.

b) Ψ is $C^2 : X \rightarrow Y$.

Using Sobolev embedding, it is easy to see that

$$F : \begin{cases} H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ u \rightarrow F \circ u \end{cases} \text{ is } C^2. \text{ Then } \Psi \text{ is } C^2 : X \rightarrow Y.$$

Proof of Proposition 1 : We are going to use two lemmas.

Lemma 2 : The following relations are equivalent :

- (i) $\dim \text{Ker } G'_u(u, \lambda) = 1$ and $G'_\lambda(u, \lambda) \notin \text{Im } G'_u(u, \lambda)$
 (ii) $\dim \text{Ker } G'_u(u, \lambda) = 1$ and $\dim \text{Ker } G^1(u, \lambda) = 1$.

(A point (u, λ) which verifies one of these assertions is said to be a turning point).

The proof is obvious.

Lemma 3 : $G^1(u, \lambda)$ is surjective if and only if :

$$\dim \text{Ker } G^1(u, \lambda) = 1 .$$

Proof : Assume $G^1(u, \lambda)$ is surjective. Let us consider two cases :

a) $G'_u(u, \lambda)$ is surjective :

Since $G'_u(u, \lambda)$ is Fredholm with index 0, we have :

$\dim \text{Ker } G'_u(u, \lambda) = 0$. This implies :

$$G^1(u, \lambda)(v, \mu) = 0 \Leftrightarrow v = - (G'_u(u, \lambda))^{-1} (\mu G'_\lambda(u, \lambda)) ,$$

and therefore $\text{Ker } G^1(u, \lambda) = \mathbb{R} ((G'_u(u, \lambda))^{-1} G'_\lambda(u, \lambda), -1)$ is a one dimensional subspace of $H^2 \cap H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}$.

b) $G'_u(u, \lambda)$ is not surjective :

Then $G'_\lambda(u, \lambda) \notin \text{Im } G'_u(u, \lambda)$ and since

$\dim \text{Ker } G'_u(u, \lambda) = \text{codim Im } G'_u(u, \lambda)$ (Lemma 1), we have $\dim \text{Ker } G'_u(u, \lambda) =$

From Lemma 2, we obtain :

$$\dim \text{Ker } G^1(u, \lambda) = 1 .$$

The converse is easy to check in the same way.

Now we can achieve the proof of Proposition 1 :

By Lemma 3, $\dim \text{Ker } G^1(u, \lambda) = 1$ for every (u, λ) in E . We claim that for every (u, λ) in E there exists a C^1 -chart from a neighbourhood of (u, λ) to \mathbb{R} .

We examine two cases :

a) $\dim \text{Ker } G^1_u(u_0, \lambda_0) = 0$.

Thus we have $\text{codim } \text{Im } G^1_u(u_0, \lambda_0) = 0$. So $G^1_u(u_0, \lambda_0)$ is an isomorphism from $H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$.

It follows from the Implicit Function Theorem that there exist a neighbourhood I of λ_0 in \mathbb{R} , a neighbourhood V of (u_0, λ_0) in $H^2 \cap H^1_0(\Omega) \times \mathbb{R}$ and a C^1 -function $\varphi : I \rightarrow H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ such that :

$$\begin{cases} G(u, \lambda) = 0 \\ (u, \lambda) \in V \end{cases} = \begin{cases} (u, \lambda) = (\varphi(\lambda), \lambda) \\ \lambda \in I \end{cases}$$

This defines a local chart of E at (u_0, λ_0) .

b) $\dim \text{Ker } G^1_u(u_0, \lambda_0) = 1$. (Then (u_0, λ_0) is a turning point).

Write now for u in $L^2(\Omega)$: $u = u_1 + u_2$ with $u_1 \in \text{Ker } G^1_u(u_0, \lambda_0)$ and $u_2 \in \text{Im } G^1_u(u_0, \lambda_0)$. In particular : $u_0 = u_{1,0} + u_{2,0}$

By Lemma 2, $G^1_\lambda(u_0, \lambda_0) \notin \text{Im } G^1_u(u_0, \lambda_0)$: so the restriction of $G^1(u_0, \lambda_0)$ to $\text{Im } G^1(u_0, \lambda_0) \times \mathbb{R}$ is an isomorphism onto $L^2(\Omega)$.

By using the Inverse Mapping Theorem, we easily deduce that the mapping χ defined by :

$$(u, \lambda) = (u_1 + u_2, \lambda) \rightarrow (u_1, G(u, \lambda)) = \chi(u, \lambda)$$

is a diffeomorphism from a neighbourhood V of (u_0, λ_0) on a neighbourhood W of $(u_1, 0, G(u_0, \lambda_0))$. Thus we have :

$$\begin{cases} G(u, \lambda) = 0 \\ (u, \lambda) \in V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u, \lambda) = \chi^{-1}(u_1, 0) \\ (u_1, 0) \in W \end{cases}$$

This provides a local chart of E at (u_0, λ_0) .

= : = : = : = : = : = : = : = : =

SECTION 2.A. DEFINITION OF A PSEUDO-INVERSE AND A PSEUDO-DETERMINANT.

Let H be a Hilbert space and V a closed subspace of H . Consider the set \mathcal{K} of self adjoint operators $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ with compact resolvent, bounded from below spectrum, and $D(A) = V$. For every A in \mathcal{K} , V is a Hilbert space under the graph norm : $\|x\|_H + \|Ax\|_H$. Note that if A and B are two elements of \mathcal{K} , the associated graph norms are equivalent.

Theorem 2. There exist (and we construct explicitly) a map

$$J : D(J) = \mathcal{K} \subset \mathcal{L}(V, H) \rightarrow \mathcal{L}(H, V), \text{ that we note } J(A) = A^\#,$$

and a map :

$$\delta : D(\delta) = \mathcal{K} \subset \mathcal{L}(V, H) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta : A \rightarrow \delta(A),$$

such that :

$$1) AA^\# = \delta(A) \text{Id}_H$$

$$2) A^\#A = \delta(A) \text{Id}_V$$

$$3) \text{(i) Ker } A \neq \{0\} \Rightarrow \delta(A) = 0$$

(ii) If $\text{Ker } A = \{0\}$, $\text{sgn } \delta(A) = (-1)^p$, where p is the total multiplicity of the negative eigenvalues.

4) (i) δ is locally Lipschitz from \mathcal{K} to \mathbb{R} .

(ii) J is locally Lipschitz on the subset of the elements of \mathcal{K} such that $\dim \text{Ker } A \leq 1$.

Remarks :

1) The preceding properties allow us to call $A^\#$ pseudo-inverse of A , and $\delta(A)$ pseudo-determinant. Note that if $V = H = \mathbb{R}^N$, $\delta(A) = \det A$ and $A^\#$ is the matrix defined in Introduction.

2) It is possible to generalize the property 4 (ii) in the following way :

4 (ii) bis : J is locally Lipschitz from \mathcal{K} to $\mathcal{L}(H, V)$.

The proof of this result is somewhat tedious and we shall omit it here.

Proof of theorem 2,

Since A is self-adjoint with compact resolvent, it admits an orthonormal basis of eigenvectors $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ associated with the eigenvalues : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, multiple eigenvalues being counted repeatedly.

Relatively to this basis, we write A as an infinite matrix :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} .$$

Now, set $N = \sup \{ 1 / \lambda_1 \leq 1 \}$,

Let now F be an arbitrary n -dimensional subspace of V .
 Since $\dim F \cap F^\perp \geq 1$, one can choose $x \in F \cap F_{n-1}^\perp$ verifying
 $\|x\|_H = 1$.

Thus : $x = \sum_{i \geq n} x_i e_i$ and then $(Ax, x)_{H_i} = \sum_{i \geq n} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_n$.

Lemma 5. Let $A_0 \in \mathcal{L}$. Define on V the norm

$\|x\|_V = \|x\|_H + \|A_0 x\|_H$, and on $\mathcal{L}(V, H)$ the corresponding norm $\|\cdot\|_{V, H}$.

Then for every pair of elements of \mathcal{L} , A and B , which verify :

$$\|A - A_0\|_{V, H} \leq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \|B - A_0\|_{V, H} \leq \frac{1}{2},$$

one has :

$$(6) \quad \lambda_n \leq \mu_n + \|A - B\|_{V, H} \quad (2 + 2 \sup(|\mu_1|, |\mu_n|))$$

$$(7) \quad \mu_n \leq \lambda_n + \|A - B\|_{V, H} \quad (2 + 2 \sup(|\lambda_1|, |\lambda_n|)).$$

Here λ_n and μ_n are the n^{th} eigenvalues of A and B respectively,
 multiple eigenvalues being counted repeatedly.

Proof. For every x in V , we have :

$$\|A_0 x\|_H \leq \|Ax\|_H + \|A - A_0\|_{V, H} \|x\|_V,$$

then $\|A_0 x\|_H \leq \|Ax\|_H + \frac{1}{2} (\|x\|_H + \|A_0 x\|_H)$ and therefore :

$$(8) \quad \|A_0 x\|_H \leq 2 \|Ax\|_H + \|x\|_H.$$

On the same way :

$$(9) \quad \|A_0 x\|_H \leq 2 \|Bx\|_H + \|x\|_H.$$

Let E_n (resp. F_n) be the subspace of V generated by the
 n first eigenvectors of an orthonormal eigenvectors basis for A (resp. B).

Then, for every $x \in V$ with $\|x\|_H = 1$,

$$(Ax - Bx, x)_H \leq \|A - B\|_{V, H} \|x\|_V.$$

Hence $(Ax, x)_H \leq (Bx, x)_H + \|A - B\|_{V, H} (1 + \|A_0 x\|_H)$,

Therefore :

$$\sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} (Ax, x)_H \leq \sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} (Bx, x)_H + \|A - B\|_{V, H} \sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} (1 + \|A_0 x\|_H).$$

Recall that by Lemma 4 :

$$\lambda_n \leq \sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} (Ax, x)_H$$

and

$$\mu_n = \sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} (Bx, x)_H$$

Moreover, according to (9) :

$$\sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} \|A_0 x\|_H \leq 2 \sup_{\substack{x \in F_n \\ \|x\|_H = 1}} \|Bx\|_H + 1 \leq 2 \sup (|\mu_1|, |\mu_n|) + 1.$$

This provides relation (6). In order to check (7), we exchange A and B.

Lemma 6 : Note λ_n the map $A \rightarrow \lambda_n(A)$ which associates to A its n^{th} eigenvalue, multiple eigenvalues being counted repeatedly.

Then $\lambda_n : \mathcal{T} \subset \mathcal{L}(V, H) \rightarrow \mathbb{R}$ is locally Lipschitz.

Proof :

1) Fix an element $A_0 \in \mathcal{T}$, with eigenvalues $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0, \dots$

We first prove that the eigenvalues μ_1 and μ_n of an operator B in \mathcal{T} are bounded if $\|B - A_0\|_{V, H} \leq \frac{1}{4}$.

Indeed, applying (6) to A_0 and B provides :

$$\lambda_1^0 \leq \mu_1 + \frac{1}{2} (1 + |\mu_1|)$$

and then : $\mu_1 \geq 2 \lambda_1^0 - 1$ (if $\mu_1 \leq 0$),

and $\mu_1 \geq \frac{1}{3} (2 \lambda_1^0 - 1)$ (if $\mu_1 \geq 0$).

Similarly we obtain by (7) :

$$\mu_n \leq \lambda_n^0 + \frac{1}{2} (1 + \sup (|\lambda_1^0|, |\lambda_n^0|)) .$$

2) Let us consider now two operators A and B in \mathcal{L} such that :

$$\|A - A_0\|_{V,H} \leq \frac{1}{4} \quad \text{and} \quad \|B - A_0\|_{V,H} \leq \frac{1}{4} .$$

From lemma 5 we deduce the following inequality :

$$|\lambda_n - \mu_n| \leq \|A - B\|_{V,H} (2 + \sup (|\lambda_1|, |\lambda_n|, |\mu_1|, |\mu_n|)) .$$

Using the result of paragraph 1) achieves the proof.

We are now able to prove property 4 (i) of Theorem 2 :

Notice that $\delta(A)$ may be written :

$$\delta(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \theta(\lambda_i(A)) \quad \text{where} \quad \begin{cases} \theta(\lambda) = \lambda & \text{if } \lambda \leq 1 \\ \theta(\lambda) = 1 & \text{if } \lambda \geq 1 \end{cases}$$

Set $\lambda_{N+1}^0 = \lambda_{N+1}(A_0) = \inf \{ \lambda_n^0(A), n \in \mathbb{N}^{\text{it}}, \lambda_n^0 > 1 \}$.

By Lemma 6, if $\|A - A_0\|_{V,H}$ is small enough, we have $\lambda_{N+1}(A) > 1$, and then :

$$\delta(A) = \prod_{i=1}^N \theta(\lambda_i(A)) .$$

The function δ , being locally the product of N Lipschitz functions, is still locally Lipschitz.

Proof of property 4 (ii) of Theorem 2 :

Let A_0 be an element of \mathcal{L} such that $\dim \text{Ker } A_0 \leq 1$.

Two eventualities are to consider :

$$1) \text{ Ker } A_0 = \{0\} .$$

Since $\text{Isom}(V, H)$ is open, there exists an open neighbourhood W of A_0 in \mathcal{L} such that :

$$A \in W \Rightarrow \text{Ker } A = \{0\} .$$

Thus, from the definition of $A^\#$, we have :

$$A \in W \Rightarrow A^\# = \delta(A)A^{-1} .$$

Upon applying property 4 (i) and reducing W if necessary, it follows that $\delta : A \rightarrow \delta(A)$, $A \rightarrow A^{-1}$, and so $J : A \rightarrow A^\#$ are Lipschitz on W .

$$2) \text{ Dim Ker } A_0 = 1 .$$

Note : $\lambda_{l_0-1}^0$ the greatest strictly negative eigenvalue of A_0 ,

$\lambda_{l_0}^0$ its null eigenvalue,

and $\lambda_{l_0+1}^0$ its smallest strictly positive eigenvalue.

Let γ be the circle with centre 0 and radius

$$\rho = \inf \left(\frac{|\lambda_{l_0-1}^0|}{2} , \lambda_{l_0+1}^0 \right) \quad \text{oriented in the direct sense.}$$

Let $W_\eta = \{A \in \mathcal{L}, \|A - A_0\|_{V, H} \leq \eta\}$.

By Lemma 6 and inequalities (5) and (6), there readily exists a real η such that every A in W_η verifies :

(i) $\lambda_{l_0}(A)$ is the unique eigenvalue of A enclosed by γ ;

(ii) $\text{dist}(\gamma, \text{spectrum of } A) \geq \frac{\rho}{2}$.

Consider, for A in W_η , the orthogonal projection $Q(A)$ on the eigenspace associated to $\lambda_{i_0}(A)$. Thus we have :

$$Q(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - A)^{-1} dz \quad (\text{see Kato [5]}) .$$

We wish to prove the mapping $A \rightarrow Q(A)$ is Lipschitz from $W_\eta \subset \mathcal{L}(V, H) \rightarrow \mathcal{L}(H, V)$. For this, let A and B be two elements of W_η . We have :

$$\|Q(A) - Q(B)\|_{H, V} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \|(z - A)^{-1} - (z - B)^{-1}\|_{H, V} |dz| ,$$

then :

$$\|Q(A) - Q(B)\|_{H, V} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \|(z - A)^{-1}\|_{H, V} \|A - B\|_{V, H} \|(z - B)^{-1}\|_{H, V} .$$

Therefore $\|Q(A) - Q(B)\|_{H, V} \leq \frac{C}{\rho^2} \|A - B\|_{V, H}$.

Now, setting $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $A^\#$ may be written in the following way :

$$A^\# = \left(\prod_{i \neq i_0} \theta(\lambda_i) - \frac{\delta(A)}{1 + \lambda_{i_0}} \right) Q(A) + \delta(A) (A + Q(A))^{-1} .$$

Indeed, writing this formula relatively to the basis of eigenvectors yields the relation :

$$A^\# = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \prod_{i \neq i_0} \theta(\lambda_i) - \frac{\delta(A)}{1 + \lambda_{i_0}} & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} + \delta(A) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \cdots \frac{1}{\lambda_{i_0-1}} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \frac{1}{1 + \lambda_{i_0}} \\ & & & & \\ & & & & \frac{1}{\lambda_{i_0+1}} \cdots \end{pmatrix}$$

which is obvious.

Reducing W_η if necessary, the mappings $A \rightarrow \prod_{i \neq i_0} \theta(\lambda_i)$, $A \rightarrow \delta(A)$, $A \rightarrow \lambda_{i_0}(A)$, $A \rightarrow Q(A)$ and $A \rightarrow (A + Q(A))^{-1}$ are clearly Lipschitz on W_η . So is the mapping $A \rightarrow A^\#$. This achieves the proof of Theorem 2.

B. PARAMETRIZING BY DIFFERENTIAL EQUATION (4) THE COMPONENT OF MANIFOLD E WHICH CONTAINS $(u_0, 0)$.

For every (u, λ) in $V \times R = H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times R$, $-G'_u(u, \lambda) = -\Delta - \lambda F'(u)$ is a self adjoint with compact resolvent operator. Its spectrum is bounded from below, its domain is $V = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ and it ranges in $H = L^2(\Omega)$. Upon applying Theorem 2 to this operator, we can define differential equation (4) in V :

$$(4) \begin{cases} \frac{du}{ds}(s) = [G'_u(u(s), \lambda(s))]^\# G'_\lambda(u(s), \lambda(s)) \\ \frac{d\lambda}{ds}(s) = \delta(-G'_u(u(s), \lambda(s))) \\ (u(0), \lambda(0)) = (u_0, 0) \end{cases}$$

Readily for every solution $(u(s), \lambda(s))_{s \in [0, T[}$ of (4) :

$$G(u(s), \lambda(s)) = G(u_0, 0) = 0,$$

and then : $(u(s), \lambda(s))_{s \in [0, T[} \subset E$.

We claim that differential equation (4) is locally Lipschitz on an open U containing E .

Indeed, for every (u, λ) in E : $\dim \text{Ker } (G'_u(u, \lambda)) \leq 1$.

Referring to Lemma 6, there exists a neighbourhood W of $G'_u(u, \lambda)$

in $\mathcal{L}(V, H)$ such that for every A in $W \cap \mathcal{E}$: $\dim \text{Ker } A \leq 1$.

But the mapping $(u, \lambda) \rightarrow G'_u(u, \lambda)$ is continuous from $V \times R$ to $\mathcal{L}(V, H)$.

Then by Lemma 6 there exists a ball $B_{u, \lambda}$ in $V \times R$ with centre (u, λ) such that for every (v, μ) in $B_{u, \lambda}$ we still have :

$$\dim \text{Ker } (G'_u(v, \mu)) \leq 1 \text{ .}$$

$$\text{Set now : } U = \bigcup_{(u, \lambda) \in E} B_{u, \lambda} \text{ .}$$

Thus, the following mappings are locally Lipschitz :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, \lambda) \rightarrow G'_u(u, \lambda) \\ U \subset V \times R \rightarrow \mathcal{L}(V, H) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (u, \lambda) \rightarrow G'_\lambda(u, \lambda) \\ U \subset V \times R \rightarrow \mathcal{L}(H, V) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow A^\# \\ G'_u(U) \subset \mathcal{L}(V, H) \rightarrow \mathcal{L}(H, V) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \delta(A) \\ G'_u(U) \subset \mathcal{L}(V, H) \rightarrow R \end{array} \right. \text{ .}$$

Equation (4) is therefore locally Lipschitz on U . Then the branch of E containing $(u_0, 0)$ can be partially parametrized by the maximal solution $(u(s), \lambda(s))_{s \in [0, T[}$ of (4) .

= : = : = : = : = : = : = : =

SECTION 3.

The continuation method defined above provides a point $(u(t^*), \lambda(t^*))$ such that $\lambda(t^*) = 1$ (so $u(t^*)$ is a solution of (1)) :

Theorem 3. Under the assumptions of Theorem 1, there exists a residual set R of $L^2(\Omega)$ such that for every h in R the maximal solution $(u(s), \lambda(s))_{s \in [0, T[}$ of the differential equation (4) associated with h verifies :

$$\exists t^* < T, \lambda(t^*) = 1 \text{ and } \begin{cases} -\Delta(u(t^*)) = F(u(t^*)) \\ u(t^*) \in H_0^1 \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

Proof.

Let R be the residual set whose existence is ensured by Theorem 1. Fix h in R . Thus E , defined as in the Introduction, is a one-dimensional C^1 -submanifold of $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.

Following a classical way of the homotopy method, we wish to prove successively that :

- A. For $s > 0$ small enough, $\lambda(s) > 0$.
- B. Solution $(u(s), \lambda(s))$ for $s > 0$ does not "recross" the hyperplane $H^2 \times H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.
- C. Trajectory $(u(s), \lambda(s))_{s \in [0, T[}$ cannot be entirely enclosed in $H^2 \cap H_0^1 \times [0, 1]$.

Theorem 3 follows immediately from A., B., C.

Proof of A. Since all the eigenvalues of Laplacian are strictly positive, we obtain by Theorem 2 (3 (ii)) :

$$\frac{d\lambda}{ds}(0) = \delta(-G'_u(u_0, 0)) = \delta(-\Delta) > 0 .$$

Proof of B. Set $t = \inf \{s \in]0, T[, \lambda(s) = 0\}$. Thus by A., $t > 0$, and $\lambda(s) \geq 0$ for $s \leq t$. Therefore, if $t < +\infty$, $\lambda'(t) \leq 0$.

$$\text{But } \lambda'(t) = \delta(-G'_u(u(t), 0)) = \delta(-\Delta) > 0 .$$

This is a contradiction.

Proof of C. First of all, prove the following assertions :

Assertion 1 : The set $D = E \cap (H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times [0, 1])$ is compact in $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$.

Indeed, for every (u, λ) in D ,

$$-\Delta u = \lambda F(u) + (1 - \lambda)h .$$

$$\text{Thus } \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq 2 \int_{\Omega} F(u)u \, dx + \|h\|_{L^2} \|u\|_{L^2} .$$

Therefore, since Ω is bounded ,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq C \|F\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} + \|h\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$

for some constant C . Using Friedrichs-Poincaré's inequality (Adams [2]),

it follows that :

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq C .$$

Thus D is bounded in $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, and then relatively compact in $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$. Let now $(u_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in D . Then there exists a subsequence which we still note $(u_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, that converges in $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ to some (u, λ) in $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$. Thus we have :

$$\begin{aligned} -\Delta u_n &= \lambda_n F(u_n) + (1 - \lambda_n)h \rightarrow \lambda F(u) + (1 - \lambda)h \text{ in } L^2(\Omega) \\ u_n &\rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega) . \end{aligned}$$

Since $(-\Delta)$ is a closed operator : $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$,
and $-\Delta u = \lambda F(u) + (1 - \lambda)h$. (Then, $(u, \lambda) \in D$).

Now we have :

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega) , \\ \Delta u_n &\rightarrow \Delta u \text{ in } L^2(\Omega) , \end{aligned}$$

and therefore :

$$u_n \rightarrow u \text{ in } H^2 \cap H_0^1(\Omega) .$$

Assertion 2 : Set, for $(u, \lambda) \in E$,

$$K(u, \lambda) = [(G_u^i(u, \lambda))^\# G_\lambda^i(u, \lambda), \delta(-G_u^i(u, \lambda))] .$$

$K(u, \lambda)$ is the second member of (4). Then $K(u, \lambda)$ never vanishes for (u, λ) in E .

Indeed, $\dim \text{Ker } G_u^i(u, \lambda) \leq 1$. Consider two cases :

- a) $\dim \text{Ker } G_u^i(u, \lambda) = \{0\}$. Then, by Theorem 2 (3 (i)) ,
 $\delta(G_u^i(u, \lambda)) \neq 0$.
- b) $\dim \text{Ker } G_u^i(u, \lambda) = 1$. Let λ_{i_0} be the single null eigenvalue of $G_u^i(u, \lambda)$.

Then $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^N \lambda_i(G_u^i(u, \lambda)) \neq 0$, and therefore $(G_u^i(u, \lambda))^\# \neq 0$

(See the definition of $J : A \rightarrow A^\#$).

Assume, by contradiction, the trajectory $(u(s), \lambda(s))_{s \in [0, T]}$ is contained in D . Then D being compact, there exists a sequence $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that :

$$s_n \rightarrow T \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$(u(s_n), \lambda(s_n)) \rightarrow (u^{**}, \lambda^{**}) \text{ for some } (u^{**}, \lambda^{**}) \text{ in } D .$$

Thus, by assertion 2 $K(u^*, \lambda^*) \neq 0$, and Theorem 4 below provides an immediate contradiction and achieves the proof of Theorem 3.

Theorem 4, Let H be a Hilbert space, and E a one-dimensional closed C^0 -submanifold of H . Let K be a locally Lipschitz mapping from some open set $U \supset E$ to H . Assume the maximal solution $(y(t))_{t \in [0, T[}$ of the differential system

$$(10) \quad \begin{cases} y'(t) = K(y(t)) \\ y(0) = y_0 \in E \end{cases} \quad \text{remains in } E \text{ and is not periodic.}$$

Then every adherent point y^* of $y(t)$ as $t \rightarrow T$ is a stationary point of (10) (i.e. $K(y^*) \neq 0$).

Proof. Assume, by contradiction, that for some sequence $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converging to T one has :

$$y(s_n) \rightarrow y^* \quad \text{and} \quad K(y^*) \neq 0.$$

Clearly, we can suppose that $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an increasing sequence.

Note that, since E is closed, $y^* \in E$.

Step 1 : Define an open ball B in H such that $\bar{B} \subset U$, with centre y^* and radius r small enough to ensure that the following conditions are realized :

- a) $(K(y), K(y^*)) \geq \frac{1}{2} \|K(y^*)\|^2, \forall y \in \bar{B}$.
- b) There exists $\hat{t} \in [0, T[$ such that $y(\hat{t}) \notin \bar{B}$. (Indeed, the trajectory is not stationary).
- c) There is an homeomorphism $h : B \cap E \rightarrow]0, 1[$. (h is a local chart of E).

Step 2: Since $y(\hat{t}) \notin \bar{B}$, we can choose s_n such that $y(s_n) \in B$ and $s_n > \hat{t}$. Now consider the maximal interval containing s_n , $I =]t_0, t_1[$, such that $y(t) \in B$ for every t in I . I is open since, at every point of H , there exists a local solution of (9).
Moreover: $\hat{t} < t_0 < s_n < t_1$.

Step 3: We claim that $t_1 < T$, i.e. $y(t)$ "leaves" B for some $t > t_1$.

If not, the whole trajectory $(y(t))_{t \in [t_0, T[}$ would be enclosed in B . Apply now a classical property of the locally Lipschitz differential equations: since $y(t)$ does not explode as $t \rightarrow T$, we would have: $T = +\infty$.
But, by c):

$$\frac{d}{dt} (y(t), K(y^*)) = (K(y), K(y^*)) \geq \frac{1}{2} \|K(y^*)\|^2$$

and then:

$$(y(t), K(y^*)) \geq (y(t_0), K(y^*)) + \frac{t - t_0}{2} \|K(y^*)\|^2.$$

Thus $\|y(t)\| \rightarrow +\infty$, therefore $y(t)$ would leave B , which contradicts our assumption.

Step 4: We now prove that $y :]t_0, t_1[\rightarrow E \cap B$ is onto, i.e. $h \circ y :]t_0, t_1[\rightarrow]0, 1[$ is onto. First remark that since the solution $y(t)$ of (10) is not periodic, the mapping $t \rightarrow y(t)$ is one to one. Thus the map $h \circ y :]t_0, t_1[\rightarrow]0, 1[$ is one to one, continuous and therefore monotone. Then it has a limit λ_0 as $t \rightarrow t_0^+$, and a limit λ_1 as $t \rightarrow t_1^-$.

Necessarily $\lambda_0 = 0$. If not, as $t \rightarrow t_0$, $h(y(t))$ would remain in a compact interval $[\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]$.

Then $y(t)$ would remain in the compact $h^{-1}([\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon])$ and would admit some adherent point in this compact as $t \rightarrow t_0$.

We would obtain : $y(t_0) \in h^{-1}([\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]) \subset B$. This contradicts the definition of t_0 . In the same way, we can prove $\lambda_1 = 1$.

Step 5 : Let us show now that $y(t)$ "returns" in B for some $t > t_1$. Thus it will "pass again" by some point of the trajectory, and this contradicts the nonperiodicity assumption.

Let s_p be some element of the sequence $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $s_p > t_1$ and $y(s_p) \in B \cap E$. Such a s_p exists by Step 3.

From Step 1 c), there exists τ in $]0, 1[$ such that : $y(s_p) = h^{-1}(\tau)$ and then : $h \circ y(s_p) = \tau \in]0, 1[$. But, by Step 4, we can find t_2 in $]t_0, t_1[$ such that $h \circ y(t_2) = \tau$.

Thus $y(s_p) = y(t_2)$ with $s_p > t_2$. This achieves the proof.

= : = : = : = : = : = : = :

BIBLIOGRAPHY

- [1] ABRAHAM - ROBBIN
Transversal Mappings and Flows. W.A. Benjamin, Inc., 1967.
- [2] R.A. ADAMS Sobolev Spaces. Academic Press, New-York, 1975.
- [3] J.C. ALEXANDER and J.A. YORKE
A numerical continuation method that works generically. University of Maryland, Dept. of Math., MD 77-9-JA, TR 77-9, 1977.
- [4] S.N. CHOW, J. MALLET PARET and J.A. YORKE
Finding zeros of maps : Homotopy methods that are constructive with probability one. Math. Comp., 32, 887-899, 1978.
- [5] B.C. EAVES and R. SAIGAL
Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions, Mathematical Programming 3, 2, pp. 225-237, 1972.
- [6] T. KATO Perturbation theory for nonlinear operators. Springer Verlag, 1966.
- [7] R.B. KELLOGG, T.Y. LI and J. YORKE
A Method of Continuation for Calculating a Brouwer Fixed Point, in : Computing Fixed Points with Applications, S. Karamardian, ed., Academic Press, New-York, 1977.

.../...

- [8] S. LANG Analysis, Madison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [9] S. SMALE An infinite dimensional version of Sard's theorem.
American Journal of Math., 87, pp. 861-866, 1965.
- [10] S. SMALE A convergent process of price adjustment and global
Newton methods, J. Math. Econ., 3, pp. 1-14.

TROISIÈME PARTIE

AUTOUR D'UN PROBLÈME DE LA CHIMIE DES SURFACES

- "Problème de Dirichlet dans un domaine image bilipschitzienne d'un demi-espace" * p. III1 à III33
- "Sur une équation d'évolution intégrodifférentielle singulière linéaire" p. III35 à III48
- "Sur la résolution numérique d'une équation intégrodifférentielle singulière non linéaire de la chimie des surfaces" p. III49 à III99

* Reproduit avec l'aimable autorisation de Springer-Verlag (Numerische Mathematik)

PROBLEME DE DIRICHLET
DANS UN DOMAINE IMAGE BILIPSCHITZIENNE
D'UN DEMI-ESPACE

Jean DUCHON, Raoul ROBERT, Patrick WITOMSKI

I.R.M.A.

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

B.P. 53 X

38041 GRENOBLE CEDEX

Introduction

Ce travail tend à mettre en place un cadre théorique simple pour traiter le problème de Dirichlet dans un domaine Ω image bilipschitzienne d'un demi-espace. Utilisant le noyau de Poisson pour un demi-espace contenu dans Ω , on se ramènera à résoudre un problème variationnel dans une "bande".

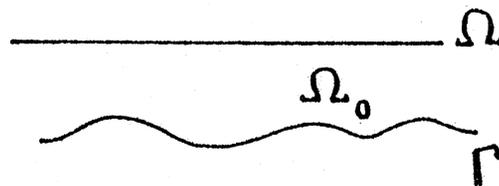
De telles méthodes, couplant éléments finis et intégrales de bord sont utilisées pour les problèmes extérieurs (cf. [1], [2], [8], [17]).

On utilise l'espace de Beppo-levi des fonctions d'énergie finie sur Ω , que nous notons $V^1(\Omega)$; on évite ainsi d'avoir recours aux espaces de Sobolev à poids (cf. [6]).

Le même point de vue est développé dans [9] lorsque Ω est un demi-espace.

On caractérise l'espace des traces de $V^1(\Omega)$ sur Γ , noté $V^{1/2}(\Gamma)$ et on montre que le problème :

$$\begin{cases} u \in V^1(\Omega) \\ \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega \\ u|_{\Gamma} = f \end{cases}$$



admet une solution unique pour toute f donnée dans $V^{1/2}(\Gamma)$. On donne ensuite une formulation variationnelle équivalente du problème dans la bande Ω_0 .

Cette étude trouve sa motivation en [14]. La méthode a été testée sur différents exemples qui font apparaître un gain en précision et en temps de calcul par rapport à une troncature classique.

1 - LES ESPACES $V^1(\Omega)$, $V_0^1(\Omega)$, $V^{-1}(\Omega)$

Notations :

Ω désigne un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note : $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$
 et $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^n$$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1, \dots, n\}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées.

\mathcal{F} désigne la transformée de Fourier d'une distribution tempérée u .

Nous travaillons dans ce qui suit dans l'espace de Beppo-Levi relatif à $L^2(\Omega)$ (cf. Deny-Lions [5]) que nous notons :

$$V^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1, \dots, n\}$$

on le munit de la semi-norme $|u|_1 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$.

On vérifie (cf. [5]) que cet espace semi-normé est complet.

On munit également $V^1(\Omega)$ d'une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé, notée \mathfrak{E} , et définie par :

$$u_k \rightarrow u \text{ pour } \mathfrak{E} \text{ si et seulement si } \nabla u_k \rightarrow \nabla u \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \\ \text{et } u_k \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Proposition 1.1. :

L'espace $V^1(\Omega)$ muni de \mathfrak{E} est hilbertisable (i.e. il existe un produit scalaire qui en fait un espace de Hilbert et qui donne la même topologie).

Démonstration :

Prenons $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \rho dx = 1$
et considérons :

$$(u, v)_{\rho} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega} u \rho dx \cdot \int_{\Omega} \bar{v} \rho dx$$

on vérifie que c'est un produit scalaire sur $V^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \left| \int_{\Omega} u \rho dx \right|^2 = 0 \quad \text{implique} \quad u = 0.$$

Pour montrer que ce produit scalaire redonne bien la topologie, il suffit de montrer que :

$\nabla u_k \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\int_{\Omega} \rho u_k dx \rightarrow 0$ implique
 $\int_{\Omega} u_k \phi dx \rightarrow 0$ pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour cela, on applique le théorème de Krylov (cf. [15]) : puisque $u_k \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, il existe des constantes C_k telles que $u_k - C_k \rightarrow 0$ dans $L^2_{loc}(\Omega)$
et donc $\int_{\Omega} (u_k - C_k) \rho dx = \int_{\Omega} u_k \rho dx - C_k$ tend vers 0, d'où $C_k \rightarrow 0$, ce qui implique $u_k \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

La complétude est immédiate toujours en appliquant le théorème de Krylov. \square

On désigne par $V^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $V^1(\Omega)$ pour la topologie séparée. On a alors une version généralisée du théorème de Poincaré.

Proposition 1.2. :

Si le complémentaire de Ω n'est pas de mesure nulle^(*), sur $V^1_0(\Omega)$ la trace de la topologie séparée de $V^1(\Omega)$ est définie par la norme $(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que sur $\mathcal{D}(\Omega)$ on a une inégalité :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \left| \int_{\Omega} u \rho dx \right|^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

ou ce qui revient au même : $\nabla u_k \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ implique $u_k \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Étendons u_k par 0 en dehors de Ω , alors $u_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\nabla u_k \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, appliquons encore le théorème de Krylov : il existe des constantes C_k telles que $u_k - C_k \rightarrow 0$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et donc en considérant la restriction de ces fonction à un compact de mesure strictement positive contenu dans le complémentaire de Ω , on obtient : $C_k \rightarrow 0$. Et donc $u_k \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. \square

(*) Cette condition n'est pas optimale, il suffit que Ω ne soit pas de capacité nulle. (Cf. Deny-Lions [5]).

On note $V^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $V_0^1(\Omega)$, on a immédiatement :

$$V^{-1}(\Omega) = \left\{ \sum_{i=1}^n \partial_i f_i \mid f_i \in L^2(\Omega) \quad i = 1, \dots, n \right\}.$$

2. ETUDE POUR UN DEMI-ESPACE, TRACE ET RELEVEMENT

π désignera le demi espace $\mathbb{R}^{n-1} \times]0, +\infty[$ de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) et \mathbb{R}^{n-1} son bord. On note (x, y) , $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, un point de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et (ξ, η) les variables duales par transformation de Fourier. On note :

$$V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = \{u \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{n-1}) \mid \widehat{\partial_1 u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\text{et } |\xi|^{-1/2} \widehat{\partial_1 u} \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \dots, n-1\}$$

On munit cet espace de la semi-norme :

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-1} |\widehat{\partial_i u}|^2 d\xi)^{1/2}$$

On note $(u, v)_{\frac{1}{2}}$ le semi. produit scalaire associé.

On vérifie facilement que $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ est complet pour cette semi-norme et que pour $u \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{n-1})$, on a :

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi| |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

On va montrer qu'il existe un opérateur de trace γ de $V^1(\pi)$ sur $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Commençons par remarquer qu'il existe un opérateur de prolongement $P : V^1(\pi) \rightarrow V^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla Pu|^2 dx = 2 \int_{\pi} |\nabla u|^2 dx$.

En effet, il suffit de considérer P défini par :

$$Pu(x, y) = u(x, y) \text{ si } y \geq 0$$

$$\text{et } Pu(x, y) = u(x, -y) \text{ si } y < 0$$

Notons γ l'opérateur de trace usuel de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{1/2}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$. Comme $V^1(\mathbb{R}^n) \subset H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, considérons $\gamma \circ P$, que nous noterons toujours γ , on a alors :

Proposition 2.1. :

$\gamma[V^1(\pi)] \subset V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et γ est continue pour les topologies séparées.

Démonstration :

Montrons que si $u \in V^1(\mathbb{R}^n)$, $\gamma u \in V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Pour cela, on va approximer u pour la semi-norme par des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.2. :

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est partout dense dans $V^1(\mathbb{R}^n)$ pour la semi-norme (*).

Démonstration :

Il suffit de vérifier que si $u \in V^1(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)$, alors u est constante.

En effet, alors u est tempérée et vérifie $\Delta u = 0$ sur \mathbb{R}^n , donc u est un polynôme et comme son gradient est dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est une constante. \square

Prenons donc $\phi_k \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla \phi_k \rightarrow \nabla u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous allons maintenant utiliser une propriété de la trace sur $D(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.3. :

Si $u \in D(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi| |\widehat{\gamma u}|^2 d\xi \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

Démonstration :

Ecrivons la formule d'inversion de Fourier:

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} \hat{u}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$\text{d'où} \quad u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i x\xi} \, d\xi \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi, \eta) \, d\eta$$

$$\text{soit} \quad \widehat{\gamma u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi, \eta) \, d\eta = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + \eta^2}} \sqrt{|\xi|^2 + \eta^2} \hat{u}(\xi, \eta) \, d\eta$$

$$\text{d'où} \quad |\widehat{\gamma u}(\xi)|^2 \leq \frac{\pi}{|\xi|} \int_{\mathbb{R}} (|\xi|^2 + \eta^2) |\hat{u}(\xi, \eta)|^2 \, d\eta$$

(*)

On notera que si $n \geq 3$ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $V^1(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie séparée cf. [11].

et donc
$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{\gamma u}|^2 d\xi \leq \Pi \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{4\Pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \quad \square$$

On déduit du lemme 2.3. que $\gamma\phi_k$ est une suite de Cauchy pour la semi-norme dans $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Toujours d'après le théorème de Krylov, il existe des constantes C_k telles que $\phi_k - C_k \rightarrow u$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\phi_k - C_k \rightarrow u$ dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, et donc $\gamma\phi_k - C_k \rightarrow \gamma$ dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$.

On conclut au moyen du lemme suivant:

Lemme 2.4. :

Si u_k est une suite de Cauchy pour la semi-norme dans $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et si $u_k \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ alors $u \in V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $u_k \rightarrow u$ pour la semi-norme.

Démonstration :

Puisque $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ est complet, il existe v tel que:

$$|\xi|^{-1/2} \widehat{\partial_i u_k} \rightarrow |\xi|^{-1/2} \widehat{\partial_i v} \quad \text{dans } L^2, \quad i = 1 \dots n-1$$

d'où $\widehat{\partial_i u_k} \rightarrow \widehat{\partial_i v}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$

et donc $\partial_i u_k \rightarrow \partial_i v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$

et comme $\partial_i u_k \rightarrow \partial_i u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$

on a $\partial_i u = \partial_i v, i = 1 \dots n-1$ d'où $u \in V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. \square

La continuité de γ pour les topologies séparées est immédiate: en effet d'une part l'inégalité du lemme 2.3. s'étend par densité à toutes les fonctions de $V^1(\mathbb{R}^n)$ et donc pour $u \in V^1(\Pi)$.

$$|\gamma u|_{1/2}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla Pu|^2 dx = \int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx$$

D'autre part, si $u_k \rightarrow u$ pour la topologie séparée, $Pu_k \rightarrow Pu$ pour la topologie séparée.

Or le théorème de Krylov nous dit que

$$Pu_k - C_k \rightarrow Pu \text{ dans } H_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

Comme $Pu_k \rightarrow Pu$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a $C_k \rightarrow 0$ et donc $\gamma Pu_k \rightarrow \gamma Pu$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

On va maintenant construire un relèvement harmonique $\rho : V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow V^1(\Pi)$, à partir du noyau de Poisson.

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, on considère :

$$\rho f(x,y) = \frac{2}{S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{y}{(y^2 + |x-z|^2)^{n/2}} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2i\pi x\xi} e^{-2\pi|\xi|y} \hat{f}(\xi) d\xi$$

où S_n désigne l'aire de la sphère unité de \mathbb{R}^n .

Proposition 2.5. :

Pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, on a :

$$\int_{\Pi} |\nabla \rho f|^2 dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi| |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Démonstration :

Vérification directe à partir de l'expression

$$\rho f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2i\pi x\xi} e^{-2\pi|\xi|y} \hat{f}(\xi) d\xi \quad \square$$

On va maintenant étendre le relèvement à tout l'espace $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ par densité.

Lemme 2.6. :

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ est partout dense dans $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ pour la semi-norme.

Démonstration :

Il suffit de montrer que si $u \in V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ est orthogonal à tous les éléments

de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ pour le semi-produit scalaire $(u,v)_{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-1} \widehat{\partial_i u} \overline{\widehat{\partial_i v}} d\xi \right)$, alors u est constant .

Supposons donc $\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-1} \xi_k \widehat{\partial_k u} \overline{\widehat{\phi}} d\xi = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$.

ceci entraîne $|\xi|^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \widehat{\partial_k u} = 0$ presque partout, et donc $\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \widehat{\partial_k u} = 0$;

d'où $\Delta u = 0$. Et comme $u \in \mathcal{Y}^0$, u est un polynôme et la condition $\widehat{\partial_k u} \in L^1_{loc}$,

$k = 1 \dots n-1$ implique que tous les $\partial_k u$ sont nuls, et donc u est une constante. \square

Soit maintenant $u \in V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$; prenons $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\phi_k \rightarrow u$ pour la semi-norme. Il découle de la proposition 2.5. que $\rho\phi_k$ est une suite de Cauchy pour la semi-norme dans $V^1(\Pi)$, elle converge donc pour cette semi-norme vers un certain élément $v \in V^1(\Pi)$.

Alors il existe une constante C telle que :

$$\gamma v = u + C$$

En effet, il existe des constantes C_k telles que

$$\rho\phi_k - C_k \rightarrow v \quad \text{pour la topologie séparée,}$$

d'où $\gamma(\rho\phi_k - C_k) = \phi_k - C_k + \gamma v$ pour la topologie séparée

or $\phi_k - C_k$ tend vers u pour la semi-norme

donc $\gamma v = u + C$

et on pose $\rho u = v - C$.

On vérifie que ρu ne dépend pas de la suite ϕ_k choisie.

On voit immédiatement que ρ vérifie les propriétés suivantes :

- (i) ρ est continue pour les topologies séparées
- (ii) $\int_{\Pi} \nabla \rho u \cdot \overline{\nabla \rho v} \, dx = (u, v)_{1/2}$, $\forall u, v \in V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
- (iii) $\gamma \rho = \text{identité}$

Proposition 2.7. :

Pour toute f donnée dans $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ $u = \rho f$ est l'unique solution du problème.

$$\begin{cases} u \in V^1(\Pi) \\ \Delta u = 0 \text{ sur } \Pi \\ \gamma u = f \end{cases}$$

Démonstration :

Il est immédiat que $u = \rho f$ est une solution. En effet, si $\phi_k \rightarrow f$ pour la semi-norme, il existe des constantes C_k telles que $\rho \phi_k - C_k \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\Pi)$ et donc u est harmonique sur Π .

Unicité :

Soit $u \in V^1(\Pi)$ telle que $\Delta u = 0$ et $\gamma u = 0$.

Alors, utilisant le principe de réflexion, on voit que nécessairement $u = 0$. \square

On notera $V^1(\Pi) = \{u \in V^1(\Pi) \mid \gamma u = 0\}$

Proposition 2.8. :

$V_{\Gamma}^1(\Pi)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int_{\Pi} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx$.

Démonstration :

Immédiate. \square

Proposition 2.9. :

On a $V_{\Gamma}^1(\Pi) = V_0^1(\Pi)$.

Démonstration :

Le résultat découle directement de la densité de $\mathcal{D}(\Pi)$ dans $V_{\Gamma}^1(\Pi)$. Pour vérifier ce dernier point, supposons que $\int \nabla u \cdot \overline{\nabla \phi} \, dx = 0$ pour tout ϕ dans $\mathcal{D}(\Pi)$; alors on a $\Delta u = 0$ et $\gamma u = 0$ ce qui entraîne $u = 0$. \square

Remarque 2.10 :

Les fonctions de $V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ ne sont pas forcément bornées ; prendre par exemple la fonction $(\text{Log}(1+x^2))^{\alpha}$ pour $\alpha < 1/2$, c'est une fonction de $V^{1/2}(\mathbb{R})$ car c'est la trace sur \mathbb{R} de la fonction $(\text{Log}(1+x^2+y^2))^{\alpha}$ qui est dans $V^1(\mathbb{R}^2)$.

3. TRACE ET RELEVEMENT POUR UN DOMAINE IMAGE BILIPSCHITZIENNE D'UN DEMI-ESPACE :

Dans ce paragraphe, π désigne le demi-espace ouvert $\{(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x_n > 0\}$, $\bar{\pi}$ le demi-espace fermé, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $\bar{\Omega}$ son adhérence.

On suppose qu'il existe un homéomorphisme $\phi : \bar{\pi} \rightarrow \bar{\Omega}$ tel que ϕ et ϕ^{-1} soient des fonctions Lipschitziennes.

On va étendre à de tels ouverts les résultats du paragraphe 2, à savoir, l'existence d'un opérateur de trace et d'un relèvement.

On désigne par ϕ la restriction de ϕ à \mathbb{R}^{n-1}

$$\phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Gamma = \partial\Omega, \quad \phi(x) = \phi(x, 0).$$

Sur Γ on définit une mesure superficielle $d\sigma$ de la façon suivante : pour toute f continue à support compact sur Γ on pose :

$$\int_{\Gamma} f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \circ \phi(x) \left(\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} \right) \right)^{1/2} dx$$

ou $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ désigne le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

et $\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}$ le produit scalaire usuel.

On vérifie par changement de variable que $d\sigma$ ne dépend pas de ϕ . (*)

Pour $0 < S < 1$ et $1 \leq p < +\infty$ on définit :

$$V^{S,p}(\Gamma) = \{u \in L^1_{loc}(\Gamma, d\sigma) \mid \iint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+Sp}} d\sigma(x) d\sigma(y) < +\infty\}$$

Nous allons montrer que l'espace $V^{1/2,2}(\Gamma)$ est l'espace des traces de $V^1(\Omega)$.

On voit par changement de variable que $u \in V^{1/2,2}(\Gamma)$ si et seulement si $u \circ \phi \in V^{1/2,2}(\mathbb{R}^{n-1})$. On va voir que pour ce dernier espace, on a :

$$V^{1/2,2}(\mathbb{R}^{n-1}) = V^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

(*) pour la validité du changement de variable Lipschitzien voir [16].

Et même plus généralement, on a :

Proposition 3.1. :

Pour tout $s, 0 < s < 1$, on a :

$$V^{s,2}(\mathbb{R}^k) = V^s(\mathbb{R}^k) \quad \text{où on note :}$$

$$V^s(\mathbb{R}^k) = \{u \in \mathcal{Y}^0(\mathbb{R}^k) \mid \widehat{\partial_1 u} \in L^1_{loc} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^k} |\xi|^{2s-2} |\widehat{\partial_1 u}|^2 d\xi < +\infty, i = 1, \dots, k\}$$

Démonstration :

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2. :

Soit $u \in L^1_{loc} \cap \mathcal{Y}^0(\mathbb{R}^k)$ telle que $\widehat{\partial_1 u} \in L^1_{loc}, i = 1, \dots, k$. Alors, on a, pour $0 < s < 1$:

$$|u|_{s,2} = C |u|_s$$

où on a posé :

$$|u|_{s,2}^2 = \iint_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{k+2s}} dx dy$$

$$|u|_s^2 = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} |\xi|^{2s-2} |\widehat{\partial_1 u}|^2 d\xi$$

$$C^2 = C^2(s,k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^k} |e^{2\pi i x_1} - 1|^2 \frac{dx}{|x|^{k+2s}}$$

Démonstration :

Par le changement de variable $(x,y) \rightarrow (x,y-x)$, on a :

$$|u|_{s,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{dh}{|h|^{k+2s}} \int_{\mathbb{R}^k} |u(x+h)-u(x)|^2 dx$$

cette quantité pouvant être éventuellement $+\infty$.

Posant $\tau_h u(x) = u(x+h)$, on a : $\tau_h u - u \in \mathcal{Y}^0$

$$\text{et } (\tau_h u - u)^\wedge = (e^{2\pi i h \cdot \xi} - 1) \widehat{u} = \frac{e^{2\pi i h \cdot \xi} - 1}{2\pi i h \cdot \xi} \sum_{j=1}^k h_j \widehat{\partial_j u}$$

donc $(\tau_h u - u)^\wedge \in L^1_{loc}$ comme produit d'une fonction mesurable bornée par une fonction localement sommable. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}^k} |(\tau_h u - u)^\wedge|^2 d\xi$ a donc un sens (elle peut être finie ou non) et est égale à :

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\tau_h u - u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^k} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \quad \text{d'après le théorème de Plancherel.}$$

D'autre part, les fonctions (localement sommables dans \mathbb{R}^k)

$$\frac{e^{2\pi i h \cdot \xi_{-1}}}{2\pi |\xi|} \widehat{\partial_j u} \quad \text{et} \quad \frac{1 \xi_j}{|\xi|} (\tau_h u - u)^\wedge$$

coïncident au sens des distributions sur $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ donc presque partout, d'où :

$$\begin{aligned} |(\tau_h u - u)^\wedge|^2 &= \sum_{j=1}^k \frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2} |(\tau_h u - u)^\wedge(\xi)|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^k \frac{|e^{2\pi i h \cdot \xi_{-1}}|^2}{|\xi|^2} |\widehat{\partial_j u}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |u|_{s,2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} \frac{dh}{|h|^{k+2s}} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{|e^{2\pi i h \cdot \xi_{-1}}|^2}{|\xi|^2} |\widehat{\partial_j u}|^2 d\xi$$

Appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$|u|_{s,2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} |\xi|^{-2} |\widehat{\partial_j u}|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^k} |e^{2\pi i h \cdot \xi_{-1}}|^2 \frac{dh}{|h|^{k+2s}}$$

Posant $x = |\xi|h$ dans la dernière intégrale, on trouve :

$$|u|_{s,2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} |\xi|^{2s-2} |\widehat{\partial_j u}|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^k} |e^{2\pi i x \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \cdot (-1)}|^2 \frac{dx}{|x|^{k+2s}}$$

mais cette dernière intégrale ne dépend pas de ξ et vaut par exemple :

$$\int_{\mathbb{R}^k} |e^{2\pi i x \cdot (-1)}|^2 \frac{dx}{|x|^{k+2s}}$$

d'où $|u|_{s,2} = C |u|_s \quad \square$

Pour achever la démonstration de la proposition, il suffit alors de voir que $V^s \subset L^1_{loc}$, $V^{s,2} \subset \mathcal{F}'$ et $u \in V^{s,2}$ entraîne $\widehat{\partial_j u} \in L^1_{loc}$.

1er point : $V^s \subset L^1_{loc}$

En fait, toute fonction u de V^s se décompose en somme d'une fonction analytique u_1 et de $u_2 \in H^s(\mathbb{R}^k)$ (prendre $\widehat{u}_1 = \alpha \widehat{u}$, $\widehat{u}_2 = (1-\alpha)\widehat{u}$ où $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$, $\alpha(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$).

2ème point : $V^{s,2} \subset \mathcal{F}'$

On a : $|u(x)|^2 \leq 2|u(y)|^2 + 2|u(y)-u(x)|^2$

d'où :

$$\int_{|x| < N} |u(x)|^2 dx \leq 2 \int_{|y| < 1} |u(y)|^2 dy + 2 \int_{|x| < N} |u(y)-u(x)|^2 dy$$

et comme $|x-y| \leq N+1$ dans le domaine d'intégration, il vient :

$$\int_{|x| < N} |u(x)|^2 dx \leq 2N^k \int_{|x| < 1} |u(x)|^2 dx + C_k (N+1)^{k+2s} |u|_{s,2}^2$$

c'est-à-dire que $\int_{|x| < N} |u|^2 dx$ ne croît pas plus vite à l'infini

qu'une puissance de N . Donc $u \in \mathcal{F}'$.

3ème point : $u \in V^{s,2} \Rightarrow \widehat{\partial_j u} \in L^1_{loc}$.

Soit $u \in V^{s,2}$, le théorème de Fubini entraîne que $(e^{2\pi i h \cdot \xi - 1}) \widehat{u} \in L^2(d\xi)$ pour presque tout $h \in \mathbb{R}^k$.

On peut donc choisir k vecteurs de norme $\leq \frac{1}{2N}$, soit h^1, \dots, h^k , formant une base de \mathbb{R}^k , et tels que $(e^{2\pi i h^\ell \cdot \xi - 1}) \widehat{u} \in L^2$. Ensuite, comme $|h^\ell \cdot \xi| \leq C_N |e^{2\pi i h^\ell \cdot \xi - 1}|$ pour $|\xi| \leq N$ (puisque alors $|h^\ell \cdot \xi| \leq 1/2$), on a :

$$\sum_{j=1}^k h_j^\ell \xi_j \widehat{u} = \frac{h^\ell \cdot \xi}{e^{2\pi i h^\ell \cdot \xi - 1}} (e^{2\pi i h^\ell \cdot \xi - 1}) \widehat{u} \text{ et ceci est dans } L^2(|\xi| \leq N)$$

d'où $\widehat{\partial_j u} \in L^2(|\xi| \leq N)$, ceci pour tout N , donc $\widehat{\partial_j u} \in L^1_{loc}$. \square

Afin de définir trace et relèvement, montrons :

Proposition 3.3. L'application $u \mapsto u \circ \phi$

est un homéomorphisme de $V^1(\Omega)$ sur $V^1(\pi)$ (pour les topologies séparées).

Démonstration :

Soit $u \in V^1(\Omega)$, alors $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et par changement de variable, on a, sur tout compact K :

$$\int_K u(x) dx = \int_{\Phi^{-1}(K)} u \circ \Phi(y) |\det \Phi'(y)| dy$$

donc $u \circ \Phi \in L^1_{\text{loc}}(\pi)$ puisque il existe $C > 0$ telle que $|\det \Phi'(\Omega)| \geq C$ presque partout.

Montrons maintenant qu'on a au sens des distributions :

$$\partial_\ell (u \circ \Phi) = \sum_{j=1}^n (\partial_j u) \circ \Phi \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_\ell} \quad (1)$$

C'est immédiat si u est régulière (par exemple \mathcal{C}^1 sur Ω); pour $u \in V^1(\Omega)$, il suffit de montrer cette propriété pour toute $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ (la propriété est locale) autrement dit, on peut supposer u à support compact.

On considère alors une suite u_k de $\mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers u dans $H^1(\Omega)$ c'est-à-dire : $u_k \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$. On en déduit par changement de variable que $u_k \circ \Phi$ tend vers $u \circ \Phi$ dans $L^2(\pi)$, de même $(\partial_j u_k) \circ \Phi$ tend vers $(\partial_j u) \circ \Phi$ dans $L^2(\pi)$.

Or pour chaque u_k , on a :

$$\partial_\ell (u_k \circ \Phi) = \sum_{j=1}^n (\partial_j u_k) \circ \Phi \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_\ell}$$

et donc en passant à la limite dans $\mathcal{D}'(\pi)$:

$$\partial_\ell (u \circ \Phi) = \sum_{j=1}^n (\partial_j u) \circ \Phi \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_\ell}$$

La propriété est ainsi démontrée pour toutes les fonctions de $V^1(\Omega)$, ce qui montre que $u \circ \Phi \in V^1(\pi)$.

Vérifions la continuité de l'application $u \rightarrow u \circ \Phi$. Soit u_k telle que $u_k \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$, alors en appliquant le théorème de Krylov, on voit que : $u_k \rightarrow u$ dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, on en déduit que $u_k \circ \Phi \rightarrow u \circ \Phi$ dans $L^2_{\text{loc}}(\pi)$ et donc dans $\mathcal{D}'(\pi)$; d'autre part, la convergence des gradients dans L^2 se déduit de la formule (1).

Le diagramme suivant permet alors de définir des opérateurs de trace et de relèvement γ, ρ via les bijections $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\phi}^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc}
 V^1(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & V^1(\pi) \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 \uparrow \rho & & \uparrow \rho \\
 V^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})
 \end{array}$$

ou $\tilde{\phi}(u) = u \circ \phi$
 $\tilde{\gamma}(u) = u \circ \phi$

On vérifie que cette trace coïncide avec la trace locale obtenue dans $L^2_{\text{loc}}(\Gamma)$ lorsque Γ est au voisinage de chaque point le graphe d'une fonction Lipschitzienne (cf. Necas [12]) (*).

On notera $V^1_{\Gamma}(\Omega)$ le sous espace de $V^1(\Omega)$ formé des éléments de trace nulle. On a alors :

Proposition 3.4. :

$V^1_{\Gamma}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx$

Démonstration :

$\tilde{\phi}$ est une bijection linéaire de $V^1(\Omega)$ sur $V^1(\pi)$ bicontinue pour les semi-normes et qui transforme $V^1_{\Gamma}(\Omega)$ en $V^1_{\Gamma}(\pi)$ et ce dernier est séparé et complet.

Proposition 3.5. :

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $V^1_{\Gamma}(\Omega)$.

(*) Ce n'est pas toujours le cas ; l'image bilipschitzienne d'une boule par exemple n'est pas forcément un ouvert à frontière Lipschitzienne (cf. D. Chenais [3]).

Démonstration :

Soit $u \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$, alors $u \circ \phi \in V_{\Gamma}^1(\pi)$ et d'après la proposition 2.9. il existe une suite ϕ_k de $\mathcal{D}(\pi)$ telle que $\phi_k \rightarrow u \circ \phi$ dans $V_{\Gamma}^1(\pi)$. Alors $\phi_k \circ \phi^{-1} \rightarrow u$ dans $V_{\Gamma}^1(\Omega)$. On peut donc approcher u dans $V_{\Gamma}^1(\Omega)$ par des fonctions Lipschitziennes à support compact dans Ω . Il suffit alors d'approcher de telles fonctions par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ ce qui est immédiat (convoluer avec une suite régularisante). \square

Corollaire 3.6. :

$$V_{\Gamma}^1(\Omega) = V_O^1(\Omega).$$

Démonstration :

L'inclusion $V_O^1(\Omega) \subset V_{\Gamma}^1(\Omega)$ est évidente ; l'égalité résulte du fait que $V_O^1(\Omega)$ est à la fois complet et dense dans $V_{\Gamma}^1(\Omega)$ pour la norme $(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. \square

4. LE PROBLEME DE DIRICHLET

Ω désigne un ouvert vérifiant les hypothèses du paragraphe 3. On pose alors le problème suivant :

pour f donnée dans $V^{1/2}(\Gamma)$, on cherche w telle que :

$$(P) \quad \begin{cases} w \in V^1(\Omega) \\ \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega \\ \gamma w = f \end{cases}$$

on a le résultat suivant :

Théorème 4.1.

Pour toute f donnée dans $V^{1/2}(\Gamma)$, le problème (P) possède une solution unique.

Démonstration :

Unicité : supposons que $u \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$ et $\Delta u = 0$, on a alors $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{\phi} dx = 0$ pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ et par densité (proposition 3.5.), on a $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} dx = 0$ pour toute fonction $v \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$, et donc $u = 0$ (proposition 3.4.).

Existence : posons $F = \rho f$ où ρ désigne un relèvement de $V^{1/2}(\Gamma)$ dans $V^1(\Omega)$. Posant $u = w - F$ le problème devient :

$$\begin{cases} u \in V_{\Gamma}^1(\Omega) \\ \Delta u = -\Delta F \end{cases}$$

qu'on peut écrire sous la forme variationnelle équivalente :

$$(PV) \begin{cases} u \in V_{\Gamma}^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx = - \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \bar{v} \, dx \end{cases} \quad \forall v \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$$

ou encore :

$$\text{Min}_{u \in V_{\Gamma}^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \bar{u} \, dx \right\}$$

le problème (PV) admet trivialement une solution unique. \square

Remarque 4.2. :

De par le fait que $V_{\Gamma}^1(\Omega) = V_0^1(\Omega)$ on est conduit à une formulation variationnelle unique. Si on n'avait pas cette égalité^(*), on pourrait chercher à résoudre également le problème :

$$\begin{cases} u \in V_0^1(\Omega) \\ \Delta u = -\Delta F \end{cases}$$

$$\text{Soit } \text{Min}_{u \in V_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \bar{v} \, dx \right\}$$

problème qui admet une solution unique.

Heuristiquement, la distinction entre ces deux problèmes correspond à la distinction entre les deux conditions aux limites à l'infini : $u = 0$ (choix de $V_0^1(\Omega)$) et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (choix de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$).

On va maintenant s'intéresser au cas où Ω contient le demi-espace $x_n \geq 0$ et utiliser le relèvement harmonique construit pour ce demi-espace pour écrire un problème variationnel équivalent dans la bande comprise entre Γ et l'hyperplan $x_n = 0$.

On notera Ω_0 cette bande, Ω_1 le demi-espace et D l'hyperplan. ρ désigne un relèvement de $V^{1/2}(\Gamma)$ dans $V^1(\Omega)$ harmonique sur Ω_1 . Un tel relèvement existe, il suffit en effet de prendre un relèvement quelconque dans $V^1(\Omega)$, de prendre sa trace dans $V^{1/2}(D)$ puis de considérer le relèvement harmonique de $V^{1/2}(D)$ dans $V^1(\Omega_1)$.

Nous noterons $\tilde{V}_{\Gamma}^1(\Omega_0)$ l'espace des restrictions à Ω_0 des éléments de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$. On fera attention au fait que cet espace n'est pas l'ensemble des distributions sur Ω_0 de

(*) par exemple si $n \geq 3$ et \int_{Ω} borné.

gradient dans $L^2(\Omega_0)$ dont la trace sur Γ est nulle (*).

Les éléments de $V_\Gamma^1(\Omega_0)$ ont une trace dans $V^{1/2}(D)$, nous désignerons par γ_1 cet opérateur de trace (il est clair que la trace des fonctions de $V^1(\Omega)$ sur D ne dépend que de la restriction de ces fonctions à Ω_0).

On peut alors reformuler le problème :

Proposition 4.3. :

Le problème (PV) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$(PVB) \quad \begin{cases} u \in \tilde{V}_\Gamma^1(\Omega_0) \\ \int_{\Omega_0} \nabla u \nabla \bar{v} dx + (\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{1/2} = - \int_{\Omega_0} \nabla F \cdot \nabla \bar{v} dx - (\gamma_1 F, \gamma_1 v)_{1/2} \\ v \in \tilde{V}_\Gamma^1(\Omega_0) \end{cases}$$

ou encore :

$$\text{Min}_{u \in \tilde{V}_\Gamma^1(\Omega_0)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} |\gamma_1 u|_{1/2}^2 + \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \bar{u} dx + (\gamma_1 F, \gamma_1 u)_{1/2} \right\}$$

Démonstration :

Soit u solution de (PV) et $v \in \tilde{V}_\Gamma^1(\Omega)$.

écrivons :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} dx = \int_{\Omega_0} \nabla u \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \bar{v} dx$$

si u est solution de (PV), on a $\Delta u = -\Delta F$ donc $\Delta u = 0$ sur Ω_1 ; on va utiliser ce fait pour transformer l'intégrale sur Ω_1 .

Lemme 4.4. :

Si $u \in V^1(\Omega_1)$ vérifie $\Delta u = 0$ alors $\forall v \in V^1(\Omega_1)$, on a :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \bar{v} dx = (\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{1/2}$$

Démonstration :

On a vu au paragraphe 2 que :

$$(\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{1/2} = \int_{\Omega_1} \nabla \rho \gamma_1 u \cdot \overline{\nabla \rho \gamma_1 v} dx$$

() cela est dû au fait que même lorsque Γ est l'hyperplan $x_n = -a$ ($a > 0$), l'espace $V^1(\Omega_0)$ est strictement plus grand que l'ensemble des restrictions à Ω_0 des fonctions de $V^1(\Omega)$. Contre exemple : prendre $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \alpha(x) dx \neq 0$, $u(x,y) = \int_0^x \alpha(t) dt$, alors $u \in V^1(\mathbb{R} \times]0,1[)$ mais $u(x,0) \notin V^{1/2}(\mathbb{R})$.

or ici $\rho\gamma_1 u = u$;

d'autre part $\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla (\overline{v - \rho\gamma_1 v}) \, dx = 0$

puisque $v - \rho\gamma_1 v$ est de trace nulle sur D (utiliser la densité de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ dans $V_D^1(\Omega_1)$).

Il vient donc : $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \overline{v} \, dx = \int_{\Omega_0} \nabla u \nabla \overline{v} \, dx + (\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{\frac{1}{2}}$

Si \tilde{u} désigne la restriction de u à Ω_0 , on obtient en effectuant la même opération pour l'intégrale $\int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \overline{u} \, dx$:

$$\tilde{u} \in \tilde{V}_{\Gamma}^1(\Omega_0) \text{ et}$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla u \nabla \overline{v} \, dx + (\gamma_1 \tilde{u}, \gamma_1 v)_{\frac{1}{2}} = - \int_{\Omega_0} \nabla F \cdot \nabla \overline{v} \, dx - (\gamma_1 F, \gamma_1 v)_{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in \tilde{V}_{\Gamma}^1(\Omega_0)$$

Réciproquement si \tilde{u} est solution de (PVB) son extension u par $\rho\gamma_1 \tilde{u}$ dans Ω_1 est un élément de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$ et est solution de (PV). \square

Il s'ensuit que le problème (PVB) possède une solution unique.

On peut aussi obtenir directement l'existence et l'unicité d'une solution au problème (PVB) au moyen de la proposition suivante :

Proposition 4.4. :

L'espace $\tilde{V}_{\Gamma}^1(\Omega_0)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire.

$$\int_{\Omega_0} \nabla u \nabla \overline{v} \, dx + (\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

Démonstration :

Le seul point à vérifier est la complétude et pour cela il suffit de remarquer que $\tilde{V}_{\Gamma}^1(\Omega_0)$ muni de ce produit scalaire est isomorphe au sous-espace des fonctions de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$ qui sont harmoniques sur Ω_1 et que ce dernier est fermé dans $V_{\Gamma}^1(\Omega)$. \square

5. APPROXIMATION DU PROBLEME DE DIRICHLET :

Pour résoudre numériquement le problème de Dirichlet, on va chercher une approximation de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$ ou de $\hat{V}_{\Gamma}^1(\Omega_0)$ suivant que l'on choisit la formulation variationnelle (PV) ou (PVB).

Étudions d'abord le cas de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$.

Soit Ω_R , $R > 0$, une famille croissante d'ouverts lipschitziens de réunion Ω .

En prolongeant les éléments de $H_O^1(\Omega_R)$ par 0 sur $\Omega \setminus \Omega_R$, on obtient un sous-espace de $V_{\Gamma}^1(\Omega)$ que l'on note H_R .

Proposition 5.1. :

Pour tout $u \in V_{\Gamma}^1(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que : $\text{dist}(u, H_R) < \varepsilon$
 (La distance étant celle du produit scalaire $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$).

Démonstration :

immédiate par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $V_{\Gamma}^1(\Omega)$. (3.4.). \square

On remplace (PV) par le problème variationnel.

$$(PV_R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_R \in H_R \\ \int_{\Omega} \nabla u_R \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_R \end{array} \right.$$

PV_R est la formulation variationnelle d'un problème de Dirichlet classique dans l'ouvert borné Ω_R . On a une solution unique.

Comparons maintenant les solutions.

Proposition 5.2. :

Soient u la solution de (PV) et u_R la solution de (PV_R) .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - u_R)|^2 \, dx < \varepsilon$$

Démonstration :

Pour tout $v \in H_R$, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u_R \overline{\nabla(v-u_R)} dx = \int_{\Omega} \nabla u \overline{\nabla(v-u_R)} dx$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(u-u_R)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(u_R-v)|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla(u-u_R)|^2 dx \end{aligned}$$

et la proposition se déduit de (5.1.). \square

On applique une méthode d'éléments finis classiques de type P_1 , (cf. [4]), pour résoudre (PV_R) . Tous les résultats de convergence s'appliquent. Cette méthode, utilisée en [14], sera comparée au §.6 avec celle associée à (PVB) .

Étudions maintenant l'approximation de $\tilde{V}_\Gamma^1(\Omega_0)$.

Désignons par V_R l'ensemble des fonctions de $\tilde{V}_\Gamma^1(\Omega_0)$ qui sont nulles à l'extérieur de Ω_R , on a alors :

Proposition 5.3. :

Pour tout $\tilde{u} \in \tilde{V}_\Gamma^1(\Omega_0)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que $\text{dist}(\tilde{u}, V_R) < \epsilon$.

Démonstration :

Soit u l'extension de \tilde{u} harmonique sur Ω_1 ; soit $R > 0$ tel que $\text{dist}(u, H_R) < \epsilon$, alors il existe $u_R \in H_R$ telle que $\int_{\Omega} \nabla(u-u_R)^2 dx < \epsilon^2$. Soit \tilde{u}_R la restriction de u_R à Ω_0 , on a $\tilde{u}_R \in V_R$ et

$$\int_{\Omega_0} \nabla(\tilde{u}-\tilde{u}_R)^2 dx + |\gamma_1 \tilde{u} - \gamma_1 \tilde{u}_R|_{1/2}^2 = \int_{\Omega_0} \nabla(\tilde{u}-\tilde{u}_R)^2 dx + \int_{\Omega_1} \nabla(u-\rho\gamma_1 \tilde{u}_R)^2 dx$$

et ceci $\leq \int_{\Omega} \nabla(u-u_R)^2 dx$. \square

On remplace maintenant (PVB) par le problème variationnel :

$$(PVB_R) \begin{cases} \text{Trouver } u_R \in V_R \\ \int_{\Omega_0} \nabla u_R \cdot \overline{\nabla v} \, dx + (\gamma_1 u_R, \gamma_1 v)_{1/2} = - \int_{\Omega_0} \nabla F \cdot \overline{\nabla v} - (\gamma_1 F, \gamma_1 v)_{1/2} \\ \forall v \in V_R \end{cases}$$

V_R est un espace de Hilbert et (PVB_R) admet une solution unique. Comparons les solutions :

Proposition 5.4. :

Soient u la solution de PVB et u_R la solution de (PVB_R) .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(u - u_R)|^2 \, dx + (\gamma_1(u - u_R), \gamma_1(u - u_R))_{1/2} < \varepsilon$$

Démonstration :

La démonstration se fait comme en (5.2.) en utilisant la proposition (5.3.).

D'un point de vue numérique, on va donc traiter le problème (PVB_R) . On utilisera une méthode d'éléments finis de type P_1 (cf. [4]).

On construit une approximation de V_R . On suppose que la frontière Γ est polygonale et on se donne une triangulation \mathcal{T}_R de $\Omega_0 \cap \Omega_R$ vérifiant les propriétés habituelles (cf. [4]). On pose :

$$V_R = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_0}) \mid \forall T \in \mathcal{T}_R \, v|_T \in \mathcal{P}_1 \text{ et } v(x) = 0 \text{ à l'extérieur de } \Omega_R\}$$

V_R est un sous-espace de dimension finie de V_R . Si l'on note I_0 (resp I_D) l'ensemble des indices des sommets appartenant à $\Omega_0 \cap \Omega_R$ (resp à $D \cap \Omega_R$), une base de V_R est donnée par les fonctions $\{b_i\}$, $i \in I_0 \cup I_D$, vérifiant $b_i(N_j) = \delta_{ij}$ pour tout sommet N_j de \mathcal{T}_R .

Le problème variationnel posé dans V_R conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = \sum_{i \in I_0 \cup I_D} u_i b_i \text{ vérifiant} \\ \sum_{j \in I_0 \cup I_D} u_j \int_{\Omega_0 \cap \Omega_R} \nabla b_j \cdot \nabla b_i \, dx + \sum_{j \in I_D} u_j (\gamma_1 b_j, \gamma_1 b_i)_{1/2} = \\ - \int_{\Omega_0 \cap \Omega_R} \nabla F \cdot \nabla b_i \, dx - (\gamma_1 F, \gamma_1 b_i)_{1/2} \quad i \in I_0 \cup I_D \end{array} \right.$$

Explicitons les termes $(\gamma_1 b_j, \gamma_1 b_i)_{1/2}$.

Afin de simplifier le calcul, nous supposons que les noeuds de la triangulation sont équidistants sur D et numérotés consécutivement. On obtient alors, pour

$N_i, N_j \in D$:

$$(\gamma_1 b_i, \gamma_1 b_j)_{1/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1} \widehat{b_i} \widehat{b_j} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (\text{vp}(\frac{1}{x}) * b_i) b_j dx$$

En notant $a = |i-j|$.

$$\begin{aligned} \pi (\gamma_1 b_i, \gamma_1 b_j)_{1/2} &= \frac{1}{2} (a+2)^2 \log |a+2| - 2(a+1)^2 \log |a+1| \\ &+ 3 a^2 \log |a| - 2(a-1)^2 \log (a-1) + \frac{(a-2)^2}{2} \log |a-2| \end{aligned}$$

avec $(\gamma_1 b_i, \gamma_1 b_i)_{1/2} = 4 \log 2$

$$(\gamma_1 b_i, \gamma_1 b_{i+1})_{1/2} = 9/2 \log 3 - 8 \log 2$$

$$(\gamma_1 b_i, \gamma_1 b_{i+2})_{1/2} = 28 \log 2 - 18 \log 3$$

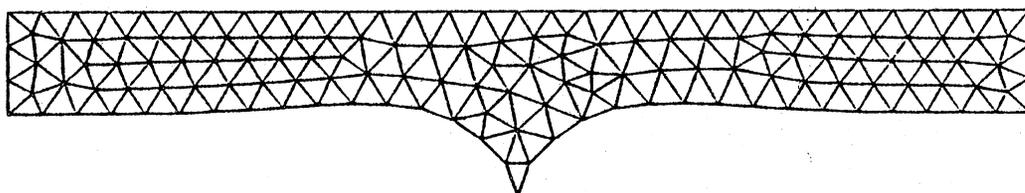
Remarquons que la présence de ces termes de bord rend pleine une partie de la matrice du système linéaire à résoudre.

6. RESULTATS NUMERIQUES

Les formulations variationnelles (PV) et (PVB) conduisent à deux méthodes numériques pour calculer la solution du problème de Dirichlet. Il faut noter que la méthode (PVB) est pratique lorsque l'on veut la solution près de Γ (par exemple si l'on s'intéresse à la dérivée normale sur Γ , cf. [14]). Pour avoir la solution en dehors de Ω_0 , on pourra utiliser l'intégrale de Poisson à partir de la solution calculée sur D.

Pour comparer les méthodes, nous avons choisi un domaine correspondant au problème de corrosion métallique traité en [14].

Les triangulations de Ω_R et $\Omega_O \cap \Omega_R$ coïncident sur $\Omega_O \cap \Omega_R$. Il y a 234 triangles dans $\Omega_O \cap \Omega_R$ et 490 triangles dans Ω_R . La triangulation de $\Omega_O \cap \Omega_R$ est sur la figure n° 1



234 TRIANGLES

figure n° 1

Pour le problème (PVB), il y a 152 inconnues. La largeur de la bande est : 35
 Pour le problème (PV), il y a 273 inconnues.

6.1. Nous donnons tout d'abord une comparaison des résultats pour une donnée sur Γ qui est la trace de la fonction :

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{y+7}{x^2+(y+7)^2} .$$

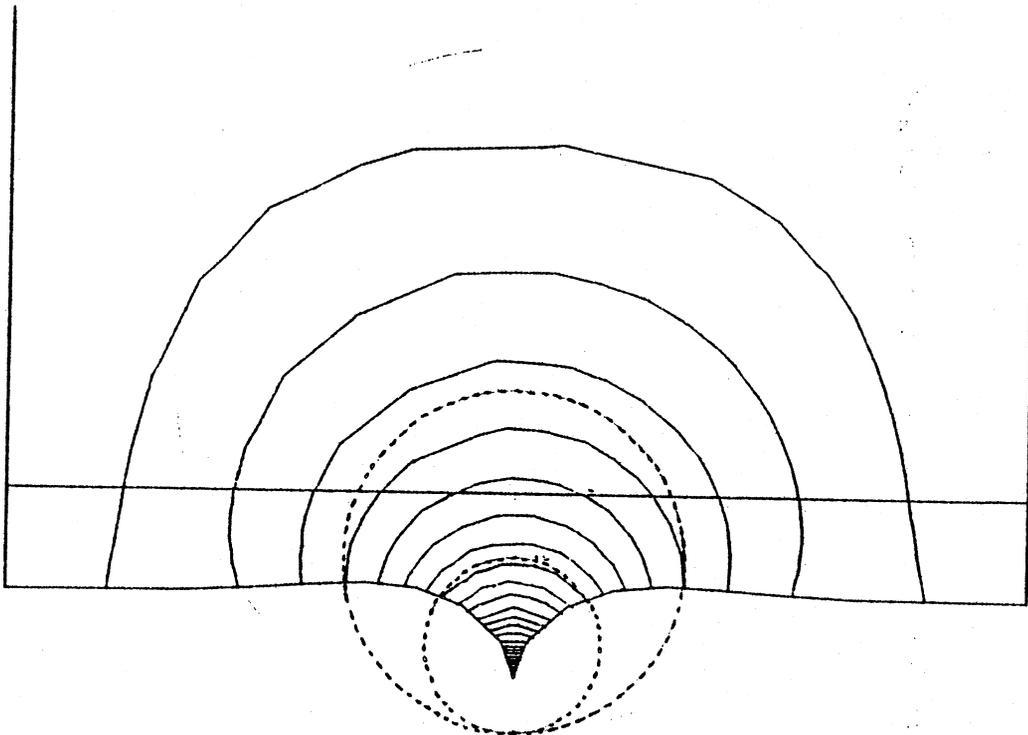
Pour le problème (PV), nous donnons les résultats pour une condition de Dirichlet ($u = 0$ sur $\partial\Omega_R \setminus \Gamma$) et une condition de Neumann ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega_R \setminus \Gamma$). Les valeurs sont testées sur D.

x	valeur exacte	méthode PVB	méthode PV + Dirichlet	méthode PV + Neumann
0.	0.142857	0.141276	0.133799	0.151498
2.	0.132075	0.130450	0.123719	0.141268
4.	0.107692	0.105473	0.099396	0.116952
6.	0.082352	0.079567	0.073676	0.092111
8.	0.061946	0.058300	0.052295	0.072676
10.	0.046979	0.041720	0.035529	0.059213
12.	0.036269	0.027649	0.021465	0.050860
14.	0.028571	0.012599	0.007468	0.046994
temps de calcul		9 s 30	17 s	17 s

Les temps de calcul indiqués ici concernent la seule résolution du système linéaire. Le rapport des temps est d'ailleurs dans celui des inconnues.

La méthode (PVB) donne les résultats les plus proches de la solution exacte.
 La méthode (PV) avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega_R$ donne une solution inférieure à la solution exacte tandis que la méthode (PV) avec condition de Neumann donne une solution supérieure. Les résultats qui s'interprètent bien physiquement soulignent le problème du choix des conditions aux limites.

Les figures représentent les équipotentiels relatives à cet exemple.



490 TRIANGLES

25

COURBES DE NIVEAU

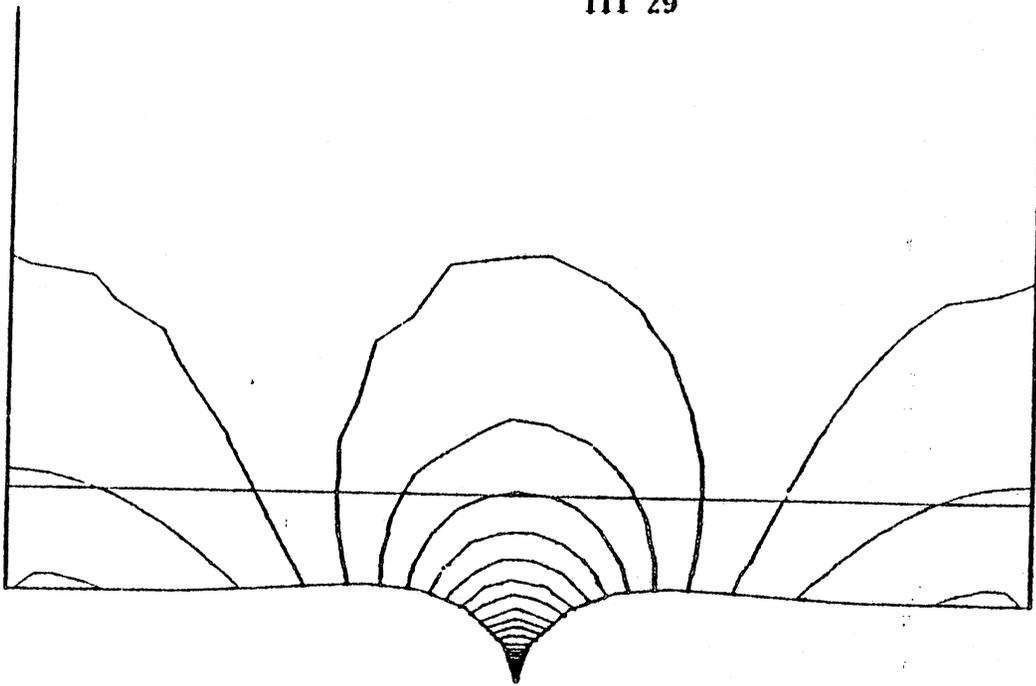
NIVEAU MINI. = 0

NIVEAU MAXI. = 0.6000E00

..... equipotentiels exactes

Figure n° 2

Méthode (PV) avec conditions
de Dirichlet sur $\partial\Omega_R$

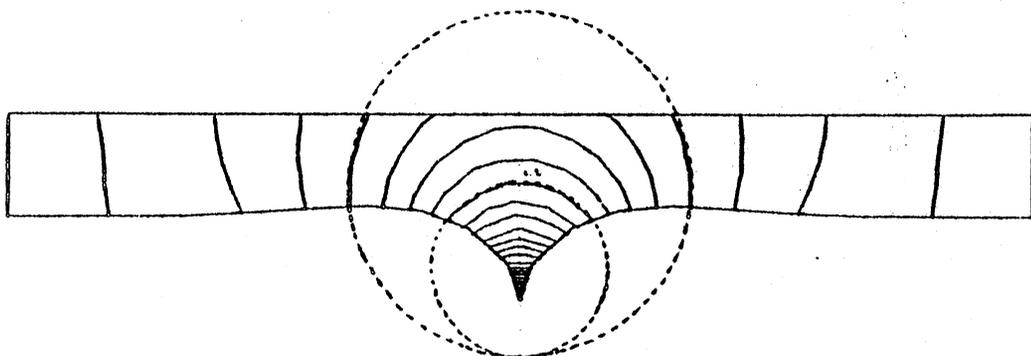


490 TRIANGLES

25 COURBES DE NIVEAU
 NIVEAU MINI. = 0
 NIVEAU MAXI. = 0.6000E00

figure n° 3

Methode (PV) avec condition
 de Neumann sur $\partial\Omega_R$



..... equipotentielles exactes

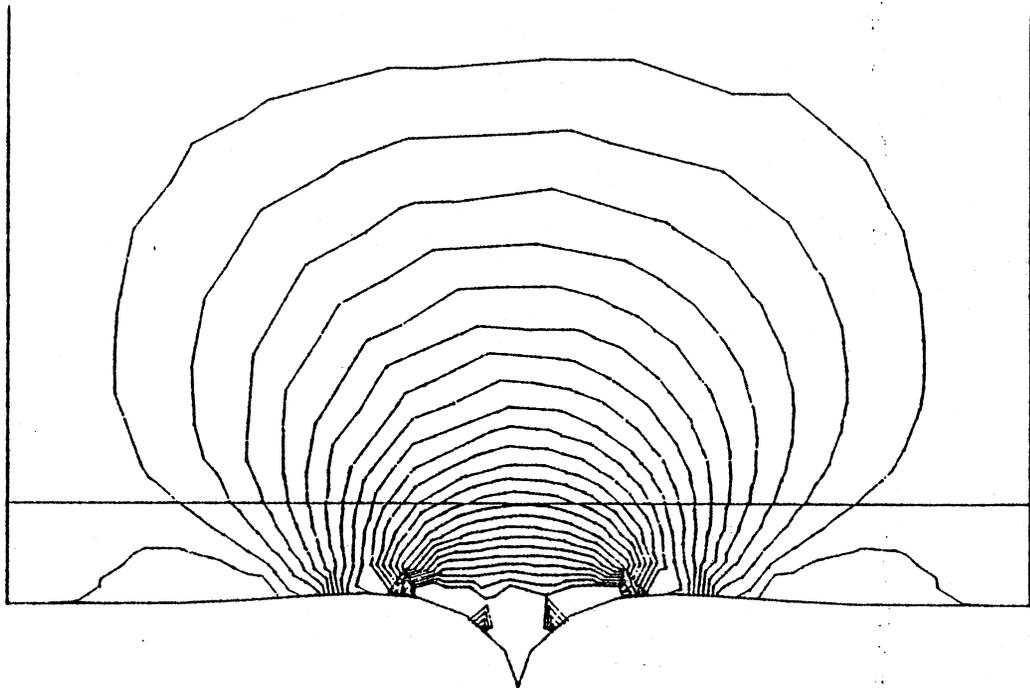
234 TRIANGLES

25 COURBES DE NIVEAU
 NIVEAU MINI. = 0
 NIVEAU MAXI. = 0.6000E00

figure n° 4

Methode (PVB)

6.2. Nous avons testé les méthodes sur le problème de la corrosion métallique où la condition de Dirichlet sur est fonction de la courbure. Les résultats obtenus sont illustrés par les figures 5, 6, 7, où l'on a représenté les lignes d'iso-concentration.



490 TRIANGLES

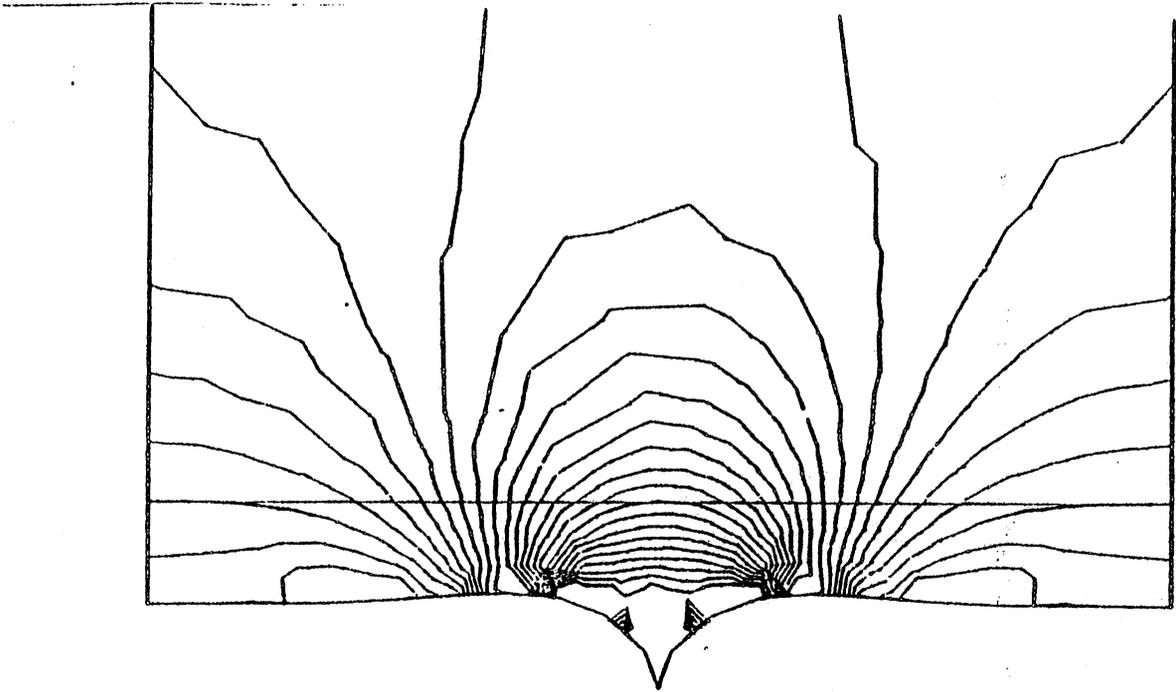
25

COURBES DE NIVEAU

NIVEAU MINI. = 0

NIVEAU MAXI. = 0.6500E01

figure n° 5Conditions de Dirichlet



490 TRIANGLES

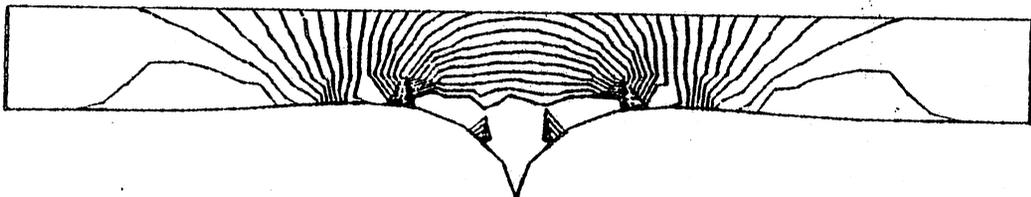
25 COURBES DE NIVEAU

NIVEAU MINI. = 0

NIVEAU MAXI. = 0.6500E01

figure n° 6

Conditions de Neumann



234 TRIANGLES

25 COURBES DE NIVEAU

NIVEAU MINI. = 0

NIVEAU MAXI. = 0.6500E01

figure n° 7

Méthode (PVB)

REFERENCES

- [1] F. BREZZI, C. JOHNSON, J.C. NEDELEC
On the coupling of boundary integral and finite element methods.
Ecole polytechnique rapport interne n° 39 (septembre 1978).
- [2] J. CEA, P. GRISVARD
Conférence, colloque d'Analyse Numérique de Giens (mai 1978).
- [3] D. CHENAIS
Sur une famille de variétés à bord Lipschitziennes.
Application à un problème d'identification de domaines.
Annales de l'Institut Fourier 27, n° 4 (1977), 201-232.
- [4] P.G. CIARLET
The finite element method for elliptic problems.
North-Holland, Amsterdam (1978).
- [5] J. DENY, J.L. LIONS
Les espaces du type de Beppo-Levi.
Annales de l'Institut Fourier 5, 305-370 (1953-54).
- [6] B. HANOZET
Espaces de Sobolev avec poids, application au problème de Dirichlet dans un demi-espace.
- [7] L. HORMANDER, J.L. LIONS
Sur la completion par rapport à une intégrale de Dirichlet.
Math. Scand. 4, 259-270 (1956).
-
- [8] A. JAMI
Résolution numérique des problèmes de Helmholtz extérieurs par couplage
entre éléments finis et représentation intégrale.
C.R.A.S. (30 octobre 1978).
-
- [9] L.D. KUDRJAVCEV
Imbedding theorem for a class of functions defined on the entire space or on a
half space.
A.M.S. Transl. 74, 199-226 et 227-260 (1973).
- [10] M.N. LE ROUX
Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs
en dimension 2.
R.A.I.R.O., vol. 11, n° 1, 27-60 (1977).
- [11] B. MALGRANGE
Sur l'intégrale de Dirichlet
Math. Scand. 4, 271-275 (1956).
- [12] J. NECAS
Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.
Masson, Paris (1967).

- [13] A. PONCET
Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis.
Thèse Grenoble mars 1979.
- [14] R. ROBERT, P. WITOMSKI
Etude numérique d'un mécanisme de corrosion métallique.
Rapport de Recherche n° 145, Grenoble 1979.
- [15] L. SCHWARTZ
Théorie des distributions
Hermann, Paris (1966).
- [16] D.E. VARBERG
Change of variables in multiple integrals
Am. Math. Monthly 78, n° 1, 42-45 (1971).
- [17] O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY, P. BETTISS
The coupling of the finite element method and boundary solution procedures.
Int. J. for Num. Math. in Eng., vol. 11, 355-375 (1977).



**SUR UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION
INTEGRO-DIFFÉRENTIELLE
SINGULIÈRE LINÉAIRE**

R.R. N° 341

**R. ROBERT et P. WITOMSKI
Novembre 1982**

Introduction:

Nous nous proposons d'étudier d'un point de vue théorique et numérique l'équation d'évolution linéaire :

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Lambda^1 D(\phi Dw) = f(t, x) & , \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ w(0, x) = w_0(x) \end{cases}$$

où $\phi(t, x)$, $f(t, x)$ sont des fonctions données, $D = \frac{\partial}{\partial x}$, et Λ^s , $s \in \mathbb{R}$, est défini par $\widehat{\Lambda^s u}(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi)$ où \hat{u} est la transformée de Fourier de u . En particulier:

$$\Lambda^1 u = \frac{1}{2\pi^2} D \left(\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \right) * u \quad (*)$$

Cette équation intervient de façon naturelle comme linéarisation d'une équation non linéaire de la chimie des surfaces (cf [2]). Elle joue un rôle essentiel dans sa résolution numérique.

L'existence d'une solution pour (E) est obtenue par une méthode de Galerkin. On montre une estimation a priori suffisante en utilisant une propriété de commutation de la multiplication par ϕ et de l'opérateur Λ^1 obtenue par R. Coifman et Y. Meyer (cf [1]). L'unicité de la solution est ensuite démontrée.

Pour la résolution numérique, on construit une approximation V_m de l'espace H^2 et une base e_i permettant un calcul explicite des coefficients de la matrice (pleine à cause de l'opérateur pseudo-différentiel Λ^1) associée au système différentiel discrétisé.

(*) $\text{vp}(1/x)$ désigne la valeur principale de Cauchy de $1/x$ et
* la convolution

Les notations suivantes sont adoptées :

$\|f\|$ désigne la norme de la fonction f dans $L^2 = L^2(\mathbb{R})$

$\|f\|_{\infty}$ la norme dans $L^{\infty} = L^{\infty}(\mathbb{R})$

Pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s = H^s(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Sobolev habituel, $\|\cdot\|_s$ sa norme habituelle et $\langle \dots \rangle$ la dualité entre H^s et H^{-s} . $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur \mathbb{R} . Remarquons que pour tout $s \in \mathbb{R}$, Λ^1 est un opérateur linéaire continu de H^s dans H^{s-1} .

1. Une relation de coercivité pour l'opérateur $-\Lambda^1 D(\phi D)$:

Dans ce paragraphe, le temps n'intervenant pas, nous noterons ϕ une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$, lipschitzienne, telle que $\phi(x) > \gamma > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1:

L'opérateur $-\Lambda^1 D(\phi D)$ est coercif au sens suivant:

pour tout $\alpha > 0$ il existe λ appartenant à \mathbb{R} tel que pour tout u dans H^2 , on ait:

$$-\langle \Lambda^1 D(\phi Du), u \rangle + \lambda |u|_1^2 > \alpha |u|_1^2$$

Démonstration:

Soit $u \in H^2$, on a:

$$-\langle \Lambda^1 D(\phi Du), u \rangle = \langle \Lambda^1 \phi Du, Du \rangle$$

On décompose $\Lambda^1 \phi Du$; en remarquant que $\sqrt{\phi}$ est un multiplicateur de H^1 et H^{-1} , on écrit:

$$\Lambda^1 \phi Du = \sqrt{\phi} \Lambda^1 \sqrt{\phi} D u + (\Lambda^1 \sqrt{\phi} - \sqrt{\phi} \Lambda^1) \sqrt{\phi} Du$$

d'où:

$$(1) \langle \Lambda^1 \phi Du, Du \rangle = \left| \Lambda^{1/2} \sqrt{\phi} Du \right|^2 + \langle (\Lambda^1 \sqrt{\phi} - \sqrt{\phi} \Lambda^1) \sqrt{\phi} Du, Du \rangle$$

Etudions le premier terme:

Lemme 1.2:

pour tout $\delta > 0$ il existe μ tel que pour tout v dans H^1 , on ait:

$$\left| \Lambda^{1/2} v \right|^2 + \mu |v|_{-1}^2 > \delta |v|^2$$

Démonstration:

Par transformation de Fourier, il est équivalent de montrer que :

$$\left| |\xi|^{1/2} \hat{v} \right|^2 + \mu (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{-1} |\hat{v}|^2 > \delta |\hat{v}|^2$$

d'où il suffit d'avoir:

$$|\xi| + \mu (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{-1} > \delta \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

ce qui est vrai pour $\mu > \delta (1 + 4\pi^2 \delta^2)$.

Appliquons le lemme en prenant $v = \sqrt{\phi} Du$ qui est dans H^1 car $\sqrt{\phi}$ est un multiplicateur de H^1 .

$\forall \delta > 0 \quad \exists \mu$ tel que $\forall u \in H^2$:

$$|\Lambda^{1/2} \sqrt{\phi} Du|_{-1}^2 + \mu |\sqrt{\phi} Du|_{-1}^2 > \delta |\sqrt{\phi} Du|^2.$$

Comme $\sqrt{\phi}$ est un multiplicateur de H^{-1} , on a :

$$|\sqrt{\phi} Du|_{-1}^2 \leq C_\phi |Du|_{-1}^2 \leq C_\phi |u|^2$$

où C_ϕ est une constante dépendant de ϕ .

D'où $|\Lambda^{1/2} \sqrt{\phi} Du|^2 + \mu C_\phi |u|^2 > \delta |\sqrt{\phi} Du|^2$.

Pour étudier le deuxième terme dans (1) on utilise la propriété suivante due à R. Coifman et Y. Meyer (cf [1]).

lemme 1.3:

Soit ψ une fonction lipschitzienne. Il existe une constante K indépendante de ψ telle que :

$$\forall u \in H^1 \quad |(\Lambda^1 \psi - \psi \Lambda^1)u| \leq K |D\psi|_\infty |u|.$$

En prenant $\psi = \sqrt{\phi}$ et en notant que $|D\sqrt{\phi}|_\infty \leq \frac{|D\phi|_\infty}{2\sqrt{\gamma}}$,

on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle (\Lambda^1 \sqrt{\phi} - \sqrt{\phi} \Lambda^1) \sqrt{\phi} Du, Du \rangle| &\leq K |D\sqrt{\phi}|_\infty |\sqrt{\phi} Du| |Du| \\ &\leq \frac{K}{2\sqrt{\gamma}} |D\phi|_\infty |\sqrt{\phi} Du| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} |\sqrt{\phi} Du| \\ &\leq \frac{K}{2\gamma} |D\phi|_\infty |\sqrt{\phi} Du|^2 \end{aligned}$$

D'où : $\forall \delta > 0 \quad \exists \mu > 0$ tel que $\forall u \in H^2$:

$$-\langle \Lambda^1 D(\phi Du), Du \rangle > |\Lambda^{1/2} \sqrt{\phi} Du|^2 - \frac{K}{2\gamma} |D\phi|_\infty |\sqrt{\phi} Du|^2$$

$$> -\mu C_\phi |u|^2 + \left(\delta - \frac{K}{2\gamma} |D\phi|_\infty\right) |\sqrt{\phi} Du|^2$$

Choisissons $\delta > \frac{K}{2\gamma} |D\phi|_\infty$. Comme $\sqrt{\phi} > \sqrt{\gamma} > 0$, on a:

$$- \langle \Lambda^1 D(\phi Du), Du \rangle + \mu C_\phi |u|^2 > \left(\delta - \frac{K}{2\gamma} |D\phi|_\infty\right) \gamma |Du|^2 \text{ et}$$

$$- \langle \Lambda^1 D(\phi Du), Du \rangle + \left(\mu C_\phi + \delta \gamma - \frac{K}{2} |D\phi|_\infty\right) |u|^2 >$$

$$\left(\delta \gamma - \frac{K}{2} |D\phi|_\infty\right) |u|_1^2, \text{ ce qui démontre la proposition 1.1.}$$

2. Un théorème d'existence et d'unicité.

Nous ferons maintenant sur $\phi(t, x)$ les hypothèses suivantes:

- i) $\phi \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$.
- ii) il existe $K \geq 0$ tel que $|\phi(t, x) - \phi(t, y)| \leq K |x - y|$.
- iii) il existe $\gamma > 0$ tel que $\phi(t, x) > \gamma > 0$.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème 2.1:

Etant donnés $f \in L^2(0, T; H^{-1})$ et $w_0 \in L^2$, il existe une solution w de l'équation (E) dans $L^2(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; L^2)$. Cette solution est unique et appartient à $\mathcal{C}([0, T]; H^{-1/2})$.

Démonstration:

On utilise la méthode de Galerkin. Remarquons que l'opérateur $\Lambda^1 D(\phi D)$ est linéaire continu de H^1 dans H^{-2} . Soit V_m une suite filtrante croissante de sous-espaces de H^2 telle que $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m} = H^2$ (on dira que la suite V_m est une approximation de H^2 , on explicitera V_m au paragraphe 3). Il existe une suite $w_{0m} \in V_m$ qui converge vers w_0 dans L^2 fort. Comme $f \in L^2(0, T; H^{-1})$ on a, pour tout m , l'existence d'une

solution unique w_m , absolument continue de $[0, T]$ dans V_m , vérifiant pour presque tout t :

$$(E_m) \begin{cases} \left\langle \frac{\partial w_m}{\partial t}, v \right\rangle - \langle \Lambda^1 D(\phi D w_m), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_m \\ w_m(0) = w_{0m} \end{cases}$$

Montrons que w_m est bornée dans $L^2(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; L^2)$. En prenant $v = w_m(t)$ dans (E_m) , on obtient:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_m(t)|^2 - \langle \Lambda^1 D(\phi D w_m), w_m \rangle = \langle f, w_m \rangle \quad \text{pour presque tout } t \text{ dans } [0, T].$$

La relation de coercivité sur $-\Lambda^1 D(\phi D)$, valable uniformément en t , donne:

$\forall \alpha > 0 \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_m(t)|^2 + \alpha |w_m(t)|_1^2 - \lambda |w_m(t)|^2 &< |f|_{-1} |w_m|_1 \\ &< \frac{1}{2\alpha} |f|_{-1}^2 + \frac{\alpha}{2} |w_m|_1^2 \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à t , il vient:

$$\begin{aligned} (2) \quad |w_m(t)|^2 - |w_m(0)|^2 + \alpha \int_0^t |w_m(s)|_1^2 ds - 2\lambda \int_0^t |w_m(s)|^2 ds \\ < \frac{1}{\alpha} \int_0^t |f(s)|_{-1}^2 ds \end{aligned}$$

D'où:

$$|w_m(t)|^2 < |w_{0m}|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t |f(s)|_{-1}^2 ds + 2\lambda \int_0^t |w_m(s)|^2 ds$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on voit que w_m reste bornée dans $L^\infty(0, T; L^2)$. On tire de (2):

$$\alpha \int_0^T |w_m(s)|_1^2 ds < |w_{0m}|^2 + 2\lambda \int_0^T |w_m(s)|^2 ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^T |f(s)|_{-1}^2 ds$$

ce qui montre que w_m reste bornée dans $L^2(0, T; H^1)$.

On obtient par passage à la limite standard l'existence d'une solution w de (E) dans $L^2(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; L^2)$. Le théorème de trace usuel (cf[3]) donne w dans $\mathcal{C}([0, T]; H^{-1/2})$.

Montrons maintenant l'unicité. Soit u dans $L^2(0, T; H^1)$ solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Lambda^1 D(\phi Du) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

On a:

$$u(t) = \int_0^t \Lambda^1 D(\phi Du(s)) ds = \Lambda^1 \int_0^t D(\phi Du(s)) ds$$

d'où, $\Lambda^{-1}u$ existe dans $\mathcal{C}([0, T]; H^{-1})$. Comme u est dans $L^2(0, T; H^1)$, on en déduit que $\Lambda^{-1}u \in L^2(0, T; H^2)$. On a alors

$\Lambda^{-1/2}u \in L^2(0, T; H^{3/2})$ et

$\Lambda^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{-1/2}u \in L^2(0, T; H^{-3/2})$, et on peut

écrire:

$$\left\langle \Lambda^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle = \left\langle \Lambda^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t}, \Lambda^{-1/2}u \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Lambda^{-1/2}u|^2$$

Comme $\left\langle \Lambda^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle = \left\langle D(\phi Du), u \right\rangle = -|\phi Du|^2$, on obtient:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Lambda^{-1/2}u|^2 + |\phi Du|^2 = 0$$

Intégrons par rapport à t :

$$|\Lambda^{-1/2}u(t)|^2 + 2 \int_0^t |\phi Du(s)|^2 ds = 0$$

d'où $\Lambda^{-1/2}u$ et $u=0$.

3. Résolution numérique:

Dans la résolution numérique, on est amené à approximer la fonction $\phi(t, x)$ par une suite $\phi_n(t, x)$ de fonctions affines par morceaux (en x); nous énonçons un résultat de convergence dans ce sens:

Proposition 3.1:

Soit V_m une approximation de H^2 et $\phi_m(t, x)$ une suite de fonctions convergeant vers $\phi(t, x)$ uniformément sur tout compact de $[0, T] \times \mathbb{R}$ et vérifiant les conditions i), ii), iii) uniformément en m . Si w_m désigne la solution du problème variationnel:

$$(\tilde{E}_m) \begin{cases} \left\langle \frac{\partial w_m}{\partial t}, v \right\rangle - \langle \Lambda^1 D(\phi_m) Dw_m, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_m \\ w_m(0) = w_{0m} \end{cases}$$

Alors w_m converge faiblement dans $L^2(0, T; H^1)$ vers la solution w du problème (E).

Démonstration:

Du fait que les fonctions ϕ_m vérifient i), ii), iii) uniformément en m , en procédant comme dans la démonstration du théorème 2.1, on obtient que la suite w_m est bornée dans $L^2(0, T; H^1) \cap L^\infty(0, T; L^2)$, et donc modulo l'extraction d'une sous suite on peut supposer que w_m converge faiblement vers w dans $L^2(0, T; H^1)$. Passant à la limite on voit que w est l'unique solution de (E), ceci en remarquant que Dw_m converge faiblement vers Dw dans $L^2([0, T] \times \mathbb{R})$ et donc que $\phi_m Dw_m$ converge faiblement vers ϕDw dans $L^2([0, T] \times \mathbb{R})$ puisque ϕ_m est bornée dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ et converge uniformément sur tout compact vers ϕ .

Remarque 3.2:

La suite obtenue en prenant pour t fixé comme $\phi_m(t, x)$ l'interpolée affine par morceaux de $\phi(t, x)$ aux points $x_i = i/m$, $i \in \mathbb{Z}$, vérifie les conditions de la proposition 3.1.

Nous explicitons maintenant une approximation de H^2 qui permet une évaluation commode des termes dans la formulation variationnelle (\tilde{E}_m) .

Pour m entier positif on considère le maillage sur \mathbb{R} de pas $1/m$, ayant pour noeuds $x_i = i/m$, $i \in \mathbb{Z}$. On note f_i la fonction continue affine par morceaux telle que $f_i(x_i) = 1$ et $f_i(x) = 0$ pour $x \notin]x_{i-1}, x_{i+1}[$, $g_i = f_{i-1} - f_{i+1}$.

\mathcal{V}_m désigne l'espace engendré par les fonctions g_i dont le support est contenu dans $[-m, +m]$ (c'est à dire $-m^2+2 < i < m^2-2$).

V_m est l'espace des primitives à support compact des fonctions de \mathcal{V}_m , c'est à dire l'espace engendré par les fonctions $e_i(x) = \int_{-\infty}^x g_i(s) ds$, $-m^2+2 < i < m^2-2$. On a alors:

Proposition 3.3:

$$\bigcup_{m>0} V_m \text{ est dense dans } H^2.$$

Démonstration:

IL suffit d'approcher les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\eta > 0$, on veut montrer qu'il existe f dans un V_m telle que $\|u - f\|_2 < \eta$. Si u et f ont leur support dans un même compact $[-M, +M]$, l'inégalité de Poincaré nous donne : $\|u - f\|_2 < C_M \|Du - Df\|_1$. Notant $v = Du$, on se ramène à approcher dans H^1 une fonction v

de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int v(x)dx = 0$ par une fonction v d'un espace \mathcal{V}_m dont le support reste dans un compact fixe $[-M, +M]$ contenant le support de v .

Soit $A_m v$ l'interpolée affine par morceaux de v aux noeuds

$x_i = i/m, i \in \mathbb{Z}, (A_m v(x_i) = v(x_i))$. On a :

$$|A_m v(x) - v(x)| < C/m^2 \quad (\forall x),$$

$$|DA_m v(x) - Dv(x)| < C/m \quad (\forall x),$$

où C est une constante dépendant de v .

Il est facile de vérifier qu'on peut trouver une fonction continue r_m , affine par morceaux sur le maillage x_i , telle que :

$$\text{support } r_m \subset [-M, +M], |r_m(x)| < C/m^2, \int r_m(x)dx = \int A_m v(x)dx.$$

Alors $P_m v = A_m v - r_m$ vérifie :

$$\text{support } P_m v \subset [-M, +M], \int P_m v(x)dx = 0$$

$$|P_m v(x) - v(x)| < 2C/m^2 \quad (\forall x),$$

$$|DP_m v(x) - Dv(x)| < 3C/m \quad (\forall x),$$

Ceci montre qu'on peut approximer v dans H^1 par $P_m v$. Il suffit pour conclure de vérifier que $P_m v$ est dans \mathcal{V}_{2m} .

Soit I_m l'espace des fonctions continues affines par morceaux sur le maillage (i/m) à support dans $[-m, +m]$ et d'intégrale nulle; on a $\dim I_m = 2m^2 - 2$.

Soit W_m l'espace engendré par les fonctions $w_i, -m^2 + 1 < i < m^2 - 2$, définies par :

w_i est continue affine par morceaux sur le maillage (i/m)

$$w_i(x) = 0 \text{ si } x < (i-1)/m \text{ ou } x > (i+2)/m$$

$$w_i(i/m) = 1, w_i((i+1)/m) = -1.$$

On a $\dim W_m = 2m^2 - 2$ et comme $W_m \subset I_m$, on a $W_m = I_m$. D'autre part $W_m \subset \mathcal{V}_{2m}$ car on vérifie facilement que

$$w_{2i} = 1/2 w_{2i-1} + w_{2i+1} + 1/2 w_{2i+2}.$$

En choisissant ϕ_m comme dans la remarque 3.2 et en écrivant

$$w_m(t) = \sum_{i=-m^2+2}^{m^2-2} \alpha_i(t) e_i, \quad (\tilde{E}_m) \text{ s'écrit:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt} \langle e_i, e_j \rangle - \sum_i \alpha_i(t) \langle \Lambda^1 D(\phi_m De_i), e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle \\ j = -m^2 + 2, \dots, m^2 + 2 \end{array} \right.$$

Comme $\phi_m(t, x) = \sum_k \beta_m^k(t) f_k$, le problème essentiel est de calculer les termes du type $\langle \Lambda^1 D(f_k De_i), e_j \rangle = c_k(i, j)$.

Il est clair que:

$$c_k(i, j) = 0 \text{ sauf pour } k \in \mathbb{Z} \text{ compris entre } i-2 \text{ et } i+2.$$

On pose alors:

$$\begin{aligned} c_2(i, j) &= c_{i+2}(i, j) ; c_1(i, j) = c_{i+1}(i, j) ; \\ c_0(i, j) &= c_i(i, j) ; c_{-1}(i, j) = c_{i-1}(i, j) ; \\ c_{-2}(i, j) &= c_{i-2}(i, j). \end{aligned}$$

On obtient également les relations:

$$\begin{aligned} c_{+2}(i, j) &= -c_{-2}(i+3, j) \\ c_{+1}(i, j) &= -c_{-1}(i+2, j) \\ c_0(i, j) &= c_{-2}(i+1, j) - c_{-2}(i+2, j) \end{aligned}$$

On voit donc que seuls les tableaux $c_{-1}(i, j)$, $c_{-2}(i, j)$ sont à calculer. En utilisant les relations $De_i = f_{i-1} - f_{i+1}$ et

$\langle \Lambda^1 D(f_k De_i), e_j \rangle = -\langle \Lambda^1 f_k De_i, De_j \rangle$ et en posant $a = j-i$, on obtient par un calcul explicite:

$$\begin{aligned}
c_{-1}(i, j) = & - \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(a+4)^3 \log|a+4| \right. \\
& + (2a/3 + 4)(a+3)^2 \log|a+3| \\
& + 1/3(a-10)(a+2)^2 \log|a+2| \\
& - 4/3(a+1)^3 \log|a+1| \\
& + (a/3 + 4)a^2 \log|a| \\
& + 2/3(a-4)(a-1)^2 \log|a-1| \\
& \left. - 1/3(a-2)^3 \log|a-2| \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{-2}(i, j) = & - \frac{1}{2\pi} \left[1/6(2a + 5)(a+4)^2 \log|a+4| \right. \\
& - (a + 5/2)(a+3)^2 \log|a+3| \\
& + 1/3 (2a + 7)(a+2)^2 \log|a+2| \\
& + 1/3(2a - 1)(a+1)^2 \log|a+1| \\
& - (a + 1/2)a^2 \log|a| \\
& \left. + 1/6(2a + 1)(a-1)^2 \log|a-1| \right].
\end{aligned}$$

Bibliographie:

- [1] R. COIFMAN et Y. MEYER : Commutateurs d'intégrales
singulières et opérateurs multilinéaires.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) n°3 p177-202.
- [2] J. DUCHON et R. ROBERT : Evolution d'une interface
solide-liquide sous l'effet de forces capillaires.
C. R. Acad. Sc. Paris t 293 (1981) Série I p183-185.
- [3] J.L. LIONS et E. MAGENES : Problèmes aux limites non
homogènes et applications.
Vol 1 Dunod (Paris) 1968.

Sur la résolution numérique d'une
équation intégrodifférentielle
singulière non linéaire de la
chimie des surfaces

Juin 1983 - P. WITOMSKI

INTRODUCTION

On se propose d'étudier le problème non linéaire

$$(E) \begin{cases} u - xDu - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 \frac{[D^2u]}{(1+Du^2)^{3/2}} = 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \\ Du(O^{\pm}) = \pm m \end{cases}$$

où m est un nombre positif fixé, u est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $D = \frac{d}{dx}$, $[D^2u] = D^2u - 2m\delta$, δ désignant la masse de Dirac en 0 .

On note Λ^s , $s \in \mathbb{R}$, l'opérateur défini par transformation de Fourier par $\Lambda^s u(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi)$.

Cette équation intervient dans la modélisation de phénomènes de corrosion métallique ([2],[3]). J. Duchon et R. Robert ont montré un résultat d'existence et d'unicité pour (E) par régularisation elliptique et point fixe de Schauder [4].

Nous abordons ici la question du calcul numérique de la solution de (E).

Dans un premier paragraphe, on définit un schéma itératif qui permet d'établir de façon constructive l'existence d'une solution pour (E).

Pour cela, on montre que l'on peut approcher le problème au moyen d'une régularisation elliptique convenable permettant de se ramener à des itérations de point fixe pour un opérateur de puissance contractante. Le passage à la limite s'obtient en reprenant les estimations établies en [3].

Dans le deuxième paragraphe on étudie des approximations variationnelles pour les problèmes régularisés linéaires et non linéaires dans des espaces de fonctions à support compact. Ceci dans le but de traiter numériquement une approximation de (E) sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} .

Les questions de convergence liées au support sont étudiées.

Dans le paragraphe 3 on développe une approximation interne par éléments finis et on étudie les problèmes de convergence.

Le paragraphe 4 est consacré à la résolution numérique proprement dite et à la mise en oeuvre de la méthode sur un micro-ordinateur.

Les notations suivantes seront adoptées :

$|u|$ désigne la norme de la fonction u dans $L^2(\mathbb{R})$

$|u|_{\infty}$ la norme dans $L^{\infty}(\mathbb{R})$

$H^s(\mathbb{R})$, $H^s(\alpha, \beta)$ sont les espaces de Sobolev usuels,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre $H^s(\mathbb{R})$ et $H^{-s}(\mathbb{R})$ et

$|\cdot|_{H^s}$ la norme dans $H^s(\mathbb{R})$.

\mathcal{C}^{∞} est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R}
et

$\mathcal{D}(\alpha, \beta)$ l'espace des fonctions \mathcal{C}^{∞} à support compact dans $]\alpha, \beta[$.

1. UN SCHEMA ITÉRATIF CONVERGENT POUR L'EQUATION (E)

Notons f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par
 $f(y) = (1+y^2)^{-3/2}$. (E) s'écrit :

$$(E) \begin{cases} u - xDu - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f(Du) [D^2u] = 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \\ Du(0^\pm) = \pm m \end{cases}$$

Il est commode de poser dans (E) $u = u_0 + v$ où u_0 est l'unique solution tempérée de l'équation linéaire

$$(EL) \begin{cases} u_0 - xDu_0 - \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(1+m^2)^{1/2}} \Lambda^1 [D^2u_0] = 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \\ Du_0(0^\pm) = \pm m \end{cases}$$

Cette solution est obtenue par transformation de Fourier.

On a :

$$\hat{u}_0(\xi) = \frac{-m}{2\pi^2 \xi^2} (1 - e^{-\mu|\xi|^{3/3}}) \quad \text{où } \mu = (1+m^2)^{-1/2}$$

On remarque que u_0 est dans $H^1(\mathbb{R})$, paire et $[D^2u_0]$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. (E) s'écrit donc :

$$(VE) \begin{cases} v - xDv - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f(Du_0 + Dv) [D^2u_0 + D^2v] = \frac{-\mu}{4\mu^2} \Lambda^1 [D^2u_0] \\ Dv(0) = 0 \end{cases}$$

Nous procéderons de la façon suivante :

- i) régularisation elliptique de (VE) notée $(VE)_\epsilon$
- ii) linéarisation de $(VE)_\epsilon$
- iii) convergence du schéma itératif associé
- iv) convergence de la solution régularisée vers la solution de (E) .

1.1. RÉGULARISATION ELLIPTIQUE DE (VE)

Pour ε fixé, on pose :

$$f_{\varepsilon}(y) = \begin{cases} (1+y^2)^{-3/2} & \text{si } 1+y^2 \leq 1/\varepsilon \\ \varepsilon^{3/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$(VE)_{\varepsilon} \begin{cases} v - xDv - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f_{\varepsilon}(Du_0 + Dv) [D^2u_0 + D^2v] = \frac{-\mu}{4\pi^2} \Lambda^1 [D^2u_0] \\ Dv(0) = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire la condition $Dv(0) = 0$ on cherche une solution paire dans $H^2(\mathbb{R})$. L'existence de cette solution sera prouvée par la convergence dans $H^2(\mathbb{R})$ du schéma itératif que l'on explicite maintenant.

1.2. LINÉARISATION DE $(VE)_{\varepsilon}$

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous désignerons par $S_{\lambda}(f)$ l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$v - xDv + \lambda \Lambda^3 v = \Lambda^1 f$$

où λ est un réel strictement positif. Par transformation de Fourier on a :

$$(O) \quad \hat{v}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} e^{-\lambda |\xi|^3/3} \int_0^{\xi} e^{\lambda |s|^3/3} s |s| \hat{f}(s) ds$$

et on vérifie comme en [3] que v appartient à $H^2(\mathbb{R})$.

Nous allons maintenant donner un schéma itératif pour résoudre (VE) dans $\tilde{H}^2(\mathbb{R}) = \{u \in H^2(\mathbb{R}), u \text{ paire}\}$.

Pour $w \in \tilde{H}^2(\mathbb{R})$ on désigne par $T_\lambda(w)$ l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$(VEL)_\epsilon \quad v - \kappa Dv + \lambda \Lambda^3(v-w) = \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 H_\epsilon(Dw)$$

$$\text{où} \quad H_\epsilon(Dw) = f_\epsilon(Du_0 + Dw) ([D^2u_0] + D^2w) - \mu[D^2u_0]$$

Il est clair que $H_\epsilon(Dw) \in L^2(\mathbb{R})$ et que

$T_\lambda(w) = S_\lambda(H_\epsilon(Dw) + \lambda \Lambda^2 w)$. u_0 et w étant paires on vérifie que $T_\lambda(w)$ est dans $\tilde{H}^2(\mathbb{R})$.

On considère donc l'itération $v_{n+1} = T_\lambda(v_n)$ dans $\tilde{H}^2(\mathbb{R})$.

1.3. CONVERGENCE DU SCHÉMA ITÉRATIF

Pour montrer la convergence de la suite v_n on met en évidence un sous-ensemble H_R de $\tilde{H}^2(\mathbb{R})$, invariant par T_λ sur lequel T_λ est de puissance p ième contractante. Plus précisément on a le résultat suivant :

THEOREME 1.1.

Soit $0 < \epsilon \leq \mu^2$. Il existe $\lambda(\epsilon)$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda(\epsilon)$

i) on peut trouver $R > 0$ tel que T_λ laisse invariant

$$H_R = \{u \in \tilde{H}^2(\mathbb{R}), |\Lambda^1 u| \leq R, |\Lambda^2 u| \leq R\}$$

ii) il existe p entier tel que T_λ^p soit contractant sur H_R .

DEMONSTRATION

i) Nous écrivons $(VEL)_\epsilon$ sous une forme équivalente en utilisant le lemme suivant (voir [3]).

LEMME 1.2.

Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe une fonction tempérée unique u solution de l'équation

$$u - xDu = \Lambda^1 h$$

et vérifiant l'estimation $|\Lambda^{-1}u|^2 + 3\pi^2 |xu|^2 \leq |h|^2$.

Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\Lambda^{-1/2}u \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\langle h, u \rangle = 2|\Lambda^{-1/2}u|^2.$$

Pour w dans $H^2(\mathbb{R})$, $v \in H^2(\mathbb{R})$ est solution de $(VEL)_\varepsilon$ si et seulement si

$$(1) \quad \Lambda^{-1}(v-xDv) + \lambda\Lambda^2(v-w) = \frac{1}{4\pi^2} H_\varepsilon(Dw)$$

Nous aurons besoin de deux estimations.

ESTIMATION (E1)

Multiplions (1) par v et intégrons. Le lemme 1.2 donne

$$(2) \quad \langle \Lambda^{-1}(v-xDv), v \rangle = 2|\Lambda^{-1/2}v|^2.$$

Le second terme du premier membre donne

$$(3) \quad \lambda \langle \Lambda^2(v-w), v \rangle = \frac{\lambda}{2} |\Lambda^1 v|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Lambda^1 w|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Lambda^1(v-w)|^2.$$

On traite le second membre en intégrant par parties.

Notons F_ε la primitive de f_ε qui s'annule en 0.

F_ε vérifie la propriété de monotonie suivante

$$(4) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; (F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(y))(x-y) \geq \varepsilon^{3/2}(x-y)^2$$

Cette propriété essentielle résulte de la régularisation de f en f_ε qui est minorée par $\varepsilon^{3/2}$.

En remarquant que u_0 et w sont dans $H^2(I)$, ($I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$) et que sur I on a

$$D(F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - \mu Du_0) = H_\varepsilon(Dw) \quad \text{on obtient}$$

$$\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(Dw) v dx = [(-F_\varepsilon(Du_0 + Dw) + \mu Du_0) v]_{0^-}^{0^+} - \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - \mu Du_0) Dv dx$$

Comme $\varepsilon \leq \mu^2$, c'est-à-dire $1 + m^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, on a

$(F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - \mu Du_0)(0^\pm) = 0$. On décompose l'intégrale de droite en

$$(5) \quad - \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0)) Dv dx + \int_{\mathbb{R}} (\mu Du_0 - F_\varepsilon(Du_0)) Dv dx$$

Avec (4) on a :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0)) Dv dx = \\ & - \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0)) (Dw + D(v-w)) dx \\ & \leq -\varepsilon^{3/2} |Dw|^2 + |f_\varepsilon|_\infty |Dw| |D(v-w)| \end{aligned}$$

Comme $|f_\varepsilon|_\infty = 1$ et pour $v \in H^1(\mathbb{R})$, $|Dv| = 2\pi |\Lambda^1 v|$, il vient

$$(6) \quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0)) Dv dx \leq -\varepsilon^{3/2} |\Lambda^1 w|^2 + |\Lambda^1 w| |\Lambda^1(v-w)|$$

D'autre part, comme pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|\mu z - F_\varepsilon(z)| \leq |z|$ on a :

$$(7) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (\mu Du_0 - F_\varepsilon(Du_0)) Dv dx \leq |\Lambda^1 u_0| |\Lambda^1 v|$$

Avec (6) et (7) il vient

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} H_{\varepsilon}(Dw) v dx \\
 & \leq -\varepsilon^{3/2} |\Lambda^1 w|^2 + |\Lambda^1 w| |\Lambda^1(v-w)| + |\Lambda^1 u_0| |\Lambda^1 v| \\
 & \leq -\varepsilon^{3/2} |\Lambda^1 w|^2 + \frac{1}{2\rho} |\Lambda^1 w|^2 + \frac{\rho}{2} |\Lambda^1(v-w)|^2 + \frac{1}{2\beta} |\Lambda^1 v|^2 + \frac{\beta}{2} |\Lambda^1 u_0|^2
 \end{aligned}$$

avec $\rho > 0$ et $\beta > 0$ que nous allons maintenant déterminer.
Avec (2), (3) et (8) on a :

$$2|\Lambda^{-1/2} v|^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\beta}\right) |\Lambda^1 v|^2 - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2}\right) |\Lambda^1 w|^2 + \frac{\lambda - \rho}{2} |\Lambda^1(v-w)|^2 \leq \frac{\beta}{2} |\Lambda^1 u_0|^2$$

On choisit $\rho > \frac{1}{2\varepsilon^{3/2}}$, puis $\lambda \geq \rho$ et enfin β tel que

$$\frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2} + \frac{1}{2\beta} < 0.$$

Posons $K_1 = K_1(\varepsilon, \rho, \lambda, \beta) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2}\right) \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\beta}\right)^{-1}$

et

$$M_1 = M_1(\varepsilon, \rho, \lambda, \beta, u_0) = \frac{\beta}{2} |\Lambda^1 u_0|^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\beta}\right)^{-1}$$

La première estimation est

$$(E1) \quad |\Lambda^1 v|^2 \leq K_1 |\Lambda^1 w|^2 + M_1, \quad 0 < K_1 < 1$$

ESTIMATION (E2)

Multiplions (1) par $\Lambda^2 v$ et intégrons. On a immédiatement

$$\lambda \langle \Lambda^2(v-w), \Lambda^2 v \rangle = \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2 v|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2(v-w)|^2$$

Examinons le terme $\langle \Lambda^{-1}(v-xDv), \Lambda^2 v \rangle$.

On a $v-xDv = 2v - D(xv)$, $xv \in L^2(\mathbb{R})$ et $v \in H^2(\mathbb{R})$.

$$\text{Donc } \langle \Lambda^{-1}(v-xDv), \Lambda^2 v \rangle = 2|\Lambda^{1/2} v|^2 + \langle xv, D\Lambda^1 v \rangle.$$

Calculons ce dernier terme par transformation de Fourier.

$$\langle xv, DA^1 v \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{xv}(2i\pi\xi) |\xi| \widehat{v} d\xi = \int_{\mathbb{R}} D\widehat{v}(\xi) \xi |\xi| \widehat{v}(\xi) d\xi$$

v étant réelle et paire, \widehat{v} l'est aussi. Comme $D\widehat{v} \widehat{v} = \frac{1}{2} D\widehat{v}^2$ et $D(\xi|\xi|) = 2|\xi|$ il vient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \langle xv, DA^1 v \rangle &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} D\widehat{v}^2(\xi) \xi |\xi| d\xi \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} [a^2 \widehat{v}^2(a) - \int_{-a}^{+a} |\xi| \widehat{v}^2(\xi) d\xi] \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} a^2 \widehat{v}^2(a) - |\Lambda^{1/2} v|^2 \end{aligned}$$

On a $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^2 \widehat{v}^2(a) = 0$ en vertu du lemme suivant :

LEMME 1.3 (voir [3] pour la démonstration)

Soit v une fonction höldérienne d'ordre $\alpha/2$, $0 < \alpha \leq 2$.
Si $\xi^{1+\alpha} v$ est de carré sommable, $\xi^\alpha v$ tend vers 0
lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini.

Il suffit donc de montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} a \widehat{v}(a) = 0$. Comme xv est dans $L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{v} \in H^1(\mathbb{R})$. \widehat{v} est donc höldérienne d'ordre $1/2$. On applique le lemme 1.3 avec $\alpha = 1$ en remarquant que $\xi^2 \widehat{v} = \widehat{\Lambda^2 v}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ car $v \in H^2(\mathbb{R})$.
On a ainsi montré que $\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \Lambda^2 v \rangle = |\Lambda^{1/2} v|^2$ et donc

$$(9) \quad |\Lambda^{1/2} v|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2 v|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2(v-w)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}_\varepsilon(Dw) \Lambda^2 v dx$$

Le second membre s'écrit

$$(10) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}_\varepsilon(Du_0 + Dw) ([D^2 u_0] + D^2 v + D^2(w-v)) \Lambda^2 v dx - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} [D^2 u_0] \Lambda^2 v dx$$

Comme $\varepsilon^{3/2} \leq f_\varepsilon \leq 1$ on majore (10) par :

$$-\varepsilon^{3/2} |\Lambda^2 v|^2 + |\Lambda^2(w-v)| |\Lambda^2 v| + |[\Lambda^2 u_0]| |\Lambda^2 v|$$

Choisissons ρ et β comme précédemment. On obtient avec (9) et (10) :

$$|\Lambda^{1/2} v|^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\rho}\right) |\Lambda^2 v|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda - \rho}{2} |\Lambda^2(v-w)|^2 \leq \frac{\beta}{2} |[\Lambda^2 u_0]|^2$$

D'où en posant

$$K_2 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\rho}\right)^{-1}$$

$$M_2 = \frac{\beta}{2} |[\Lambda^2 u_0]|^2 \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\rho}\right)^{-1}$$

On a l'estimation (E2)

$$(E2) \quad |\Lambda^2 v|^2 \leq K_2 |\Lambda^2 w|^2 + M_2, \quad 0 < K_2 < 1$$

Achevons maintenant le point i) du théorème 1.1.

ε étant fixé, on choisit $\rho = \lambda(\varepsilon) > \frac{1}{2\varepsilon^{3/2}}$, $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$ et β tel que $\frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2} + \frac{1}{2\beta} < 0$. K_1, K_2, M_1 et M_2 sont alors calculés et on choisit $R^2 \geq \max\left(\frac{M_1}{1-K_1}, \frac{M_2}{1-K_2}\right)$. Avec les estimations (E1) et (E2) il est clair que $T_\lambda(H_R) \subset H_R$.

ii) Prenons w_1 et w_2 dans H_R et notons

$$v_1 = T_\lambda(w_1), \quad v_2 = T_\lambda(w_2), \quad w = w_1 - w_2, \quad v = v_1 - v_2.$$

on a

$$(11) \quad \Lambda^{-1}(v - xDv) + \lambda \Lambda^2(v-w) = \frac{1}{4h^2} (H_\varepsilon(Dw_1) - H_\varepsilon(Dw_2)).$$

Multiplions (11) par v et intégrons. En conduisant les calculs

comme pour l'estimation (E1) il vient :

$$\begin{aligned} & 2|\Lambda^{-1/2}v|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1v|^2 - \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1w|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1(v-w)|^2 \\ & \leq -\epsilon^{3/2}|\Lambda^1w|^2 + |\Lambda^1w||\Lambda^1(v-w)| \\ & \leq -\epsilon^{3/2}|\Lambda^1w|^2 + \frac{1}{2\rho}|\Lambda^1w|^2 + \frac{\rho}{2}|\Lambda^1(v-w)|^2 \end{aligned}$$

Soit

$$2|\Lambda^{-1/2}v|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1v|^2 + \frac{\lambda-\rho}{2}|\Lambda^1(v-w)|^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \epsilon^{3/2}\right)|\Lambda^1w|^2$$

Avec toujours le même choix pour λ et ρ on obtient en

posant $K_3 = K_3(\epsilon, \rho, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \epsilon^{3/2}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}$ et $M_3 = \frac{K_3}{\lambda}$

$$(12) \quad |\Lambda^1v|^2 \leq K_3|\Lambda^1w|^2 \quad 0 < K_3 < 1$$

$$(13) \quad |\Lambda^{-1/2}v|^2 \leq M_3|\Lambda^1w|^2$$

L'estimation sur Λ^2v s'obtient en multipliant (11) par Λ^2v et en intégrant. Il vient :

$$\begin{aligned} (14) \quad & |\Lambda^{1/2}v|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^2v|^2 - \frac{\lambda}{2}|\Lambda^2w|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^2(v-w)|^2 \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (H_\epsilon(Dw_1) - H_\epsilon(Dw_2)) \Lambda^2v dx \end{aligned}$$

Le second membre se décompose en la somme de deux termes

$$(15) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(Du_0 + Dw_1) D^2w \Lambda^2v dx \quad \text{et}$$

$$(16) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (f_\epsilon(Du_0 + Dw_1) - f_\epsilon(Du_0 + Dw_2)) ([D^2u_0] + D^2w_2) \Lambda^2v dx$$

On majore (15) par $-\varepsilon^{3/2} |\Lambda^2 v|^2 + \frac{\rho}{2} |\Lambda^2 (v-w)|^2 + \frac{1}{2\rho} |\Lambda^2 v|^2$ avec le choix habituel de ρ .

Pour (16) il faut une majoration plus fine si l'on veut obtenir la contraction.

f_ε est Lipschitzienne de constante $k \leq 3$. Posons

$N_1 = 3(|[\Lambda^2 u_0]| + R)$. On majore (16) par :

$$3|Dw|_\infty |[\Lambda^2 u_0] + \Lambda^2 w_2| |\Lambda^2 v| \leq \frac{1}{2\beta} |\Lambda^2 v|^2 + \frac{\beta}{2} N_1^2 |Dw|_\infty^2$$

Comme $|Dw|_\infty^2 \leq 2|Dw| |D^2 w| \leq 16\pi^3 (\frac{1}{2\nu} |\Lambda^1 w|^2 + \frac{\nu}{2} |\Lambda^2 w|^2)$ pour tout $\nu > 0$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\beta} |\Lambda^2 v|^2 + \frac{\beta}{2} N_1^2 |Dw|_\infty^2 &\leq \\ \frac{1}{2\beta} |\Lambda^2 v|^2 + 8N_1^2 \pi^3 (\frac{\beta\nu}{2} |\Lambda^2 w|^2 + \frac{\beta}{2\nu} |\Lambda^1 w|^2) & \end{aligned}$$

En reportant ces majorations dans (14) on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda^{1/2} v|^2 + (\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{2\beta}) |\Lambda^2 v|^2 \\ - (\frac{\lambda}{2} + 4\beta\nu N_1^2 \pi^3) |\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda - \rho}{2} |\Lambda^2 (v-w)|^2 \\ \leq \frac{8\pi^3}{\nu} |\Lambda^1 w|^2 \end{aligned}$$

On choisit maintenant $\nu > 0$ tel que

$$4\beta\nu N_1^2 \pi^3 < \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{2\beta}$$

On pose

$$\begin{aligned} K_4 &= (\frac{\lambda}{2} + 4\beta\nu N_1^2 \pi^3) (\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{2\beta})^{-1} \\ M_4 &= \frac{8\pi^3}{\nu} (\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{2\beta})^{-1} \end{aligned}$$

On obtient l'estimation

$$(17) \quad |\Lambda^2 v|^2 \leq K_4 |\Lambda^2 w|^2 + M_4 |\Lambda^1 w|^2 \quad 0 < K_4 < 1$$

L'estimation sur v se déduit de (12) et (13) et de la relation $|v|^2 \leq \frac{2}{3} |\Lambda^{-1/2} v|^2 + \frac{1}{3} |\Lambda^1 v|^2$. En posant $M_5 = \frac{2}{3} M_3 + \frac{1}{3} K_3$

il vient :

$$(18) \quad |v|^2 \leq M_5 |\Lambda^1 w|^2$$

Montrons maintenant que T_λ est de puissance p ième contractante pour la norme usuelle de $H^2(\mathbb{R})$ à partir de (12), (17), (18) et du calcul du rayon spectral de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_5 & 0 \\ 0 & K_3 & 0 \\ 0 & M_4 & K_4 \end{pmatrix} \quad \text{où } K_3 \text{ et } K_4 \text{ sont dans }]0, 1[$$

Il est clair que les valeurs propres de M sont $0, K_3, K_4$ et que le rayon spectral $\rho(M) = \max(K_3, K_4)$ est strictement inférieur à 1. Donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p = 0$.

Notons X_p le vecteur de composantes

$|T_\lambda^p(w)|^2, |\Lambda^1 T_\lambda^p(w)|^2$ et $|\Lambda^2 T_\lambda^p(w)|^2$. La matrice M étant à termes positifs on obtient avec la relation d'ordre classique sur \mathbb{R}^3 et (12), (17), (18)

$$X_p \leq M X_{p-1} \leq M^2 X_{p-2} \leq \dots \leq M^p X_0$$

Prenons sur \mathbb{R}^3 la norme $|X|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ où x_1, x_2, x_3 sont les composantes de X , et $\|M\|_1$ la norme matricielle induite. On a :

$$|X_p|_1 \leq \|M^p\|_1 |X_0|_1$$

Comme $|X_0|_1 = |w|_{H^2}^2$ et $|X_p|_1 = |T_\lambda^p(w)|_{H^2}^2$ on a donc prouvé que T_λ^p est contractant sur H_R pour p assez grand. —*

Enonçons maintenant le résultat d'existence et d'unicité pour l'équation $(VE)_\varepsilon$.

THEOREME 1.4.

L'équation $(VE)_\varepsilon$ admet une solution unique dans $H^2(\mathbb{R})$. Cette solution s'obtient comme limite de l'itération $v_{n+1} = T_\lambda v_n$ dans H_R . Elle est paire.

DEMONSTRATION

Supposons que v_1 et v_2 soient deux solutions de $(VE)_\varepsilon$. On a :

$$(19) \quad \Lambda^{-1}(v_1 - v_2 - xD(v_1 - v_2)) - \frac{1}{4\pi^2} (H_\varepsilon(Dw_1) - H_\varepsilon(Dw_2)) = 0$$

On multiplie (19) par $v_1 - v_2$ et on intègre.

$$|\Lambda^{-1/2}(v_1 - v_2)|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dv_1) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_2)) (Dv_1 - Dv_2) dx = 0$$

Avec (4) il vient $|\Lambda^{-1/2}(v_1 - v_2)|^2 + \varepsilon^{3/2} |\Lambda^1(v_1 - v_2)|^2 = 0$ ce qui prouve l'unicité.

La convergence de l'itération $v_{n+1} = T_\lambda v_n$ résulte du théorème 1.2. La limite est dans H_R donc paire par construction. C'est l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de $(VE)_\varepsilon$. —*

1.4. CONVERGENCE DE LA SOLUTION RÉGULARISÉE QUAND ϵ TEND VERS 0

Notons v_ϵ la solution de $(VE)_\epsilon$ et $u_\epsilon = u_0 + v_\epsilon$. Remarquons que les estimations obtenues dégèrent quand ϵ tend vers 0 et ne permettent pas de passer à la limite. Il faut d'autres estimations pour obtenir le résultat essentiel à savoir Du_ϵ borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$ indépendamment de ϵ . u_ϵ vérifie

$$(UE)_\epsilon \quad \begin{cases} u_\epsilon - x Du_\epsilon - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f_\epsilon(Du_\epsilon) [D^2 u_\epsilon] = 0 \\ Du_\epsilon(0_\pm) = \pm m \end{cases}$$

Comme $Du_\epsilon \in H^1(0, +\infty)$ on a

$$D \operatorname{Log}(1 + Du_\epsilon^2) = 2 \frac{Du_\epsilon D^2 u_\epsilon}{1 + Du_\epsilon^2} \quad \text{et pour tout } x \geq 0$$

$$\operatorname{Log}(1 + Du_\epsilon^2(x)) - \operatorname{Log}(1 + m^2) = 2 \int_0^x \frac{Du_\epsilon}{(1 + Du_\epsilon^2)^{1/4}} \frac{D^2 u_\epsilon}{(1 + Du_\epsilon^2)^{3/4}} dx$$

D'où

$$(20) \quad \left| \operatorname{Log}(1 + Du_\epsilon^2(x)) - \operatorname{Log}(1 + m^2) \right| \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{Du_\epsilon^2}{(1 + Du_\epsilon^2)^{1/2}} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{[D^2 u_\epsilon]^2}{(1 + Du_\epsilon^2)^{3/2}} dx \right)^{1/2}$$

Pour montrer que Du_ϵ reste borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$, nous allons obtenir des majorations sur le second membre en suivant [3]. Nous aurons besoin de trois estimations.

ESTIMATION (D1)

Appliquons le lemme 1.2 sur $(UE)_\varepsilon$. On obtient :

$$2|\Lambda^{-1/2}u_\varepsilon|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) [D^2u_\varepsilon] u_\varepsilon dx$$

On intègre le second membre par parties et il vient :

$$(D1) \quad 2|\Lambda^{-1/2}u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) Du_\varepsilon dx + \frac{1}{2\pi^2} \mu m u_\varepsilon(0) = 0.$$

ESTIMATION (D2)

u_ε vérifie

$$(21) \quad \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - x Du_\varepsilon) - \frac{1}{4\pi^2} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) [D^2u_\varepsilon] = 0$$

On multiplie (21) par $-[D^2u_\varepsilon]$ et on intègre :

$$- \langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - x Du_\varepsilon), [D^2u_\varepsilon] \rangle + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) |[D^2u_\varepsilon]|^2 dx = 0$$

Le crochet se calcule comme dans [3] où l'on trouvera la démonstration d'un lemme analogue :

LEMME 1.5

Si u_ε est solution de $(UE)_\varepsilon$, on a :

$$- \langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - x Du_\varepsilon), [D^2u_\varepsilon] \rangle = 4\pi^2 |\Lambda^{1/2}u_\varepsilon|^2 + 4m\Lambda^{-1}u_\varepsilon(0)$$

On remarquera que $\Lambda^{-1}u_\varepsilon(0)$ a un sens parce que $|\xi|^{-1}\hat{u}_\varepsilon$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc $\Lambda^{-1}u_\varepsilon$ est continue, nulle à l'infini. L'estimation (D2) est

$$(D2) \quad 4\pi^2 |\Lambda^{1/2}u_\varepsilon|^2 + 4m\Lambda^{-1}u_\varepsilon(0) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) |[D^2u_\varepsilon]|^2 dx = 0$$

ESTIMATION (D3)

Notons $B_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi^2} f_\varepsilon(Du_\varepsilon)[D^2u_\varepsilon]$. Avec le lemme 1.2

on a $\Lambda^{-1}u_\varepsilon$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Multiplions $(UE)_\varepsilon$ par $\Lambda^{-1}u_\varepsilon$ et intégrons.

$$\langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle + \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle = 0$$

Calculons le premier crochet :

$$\langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle = 2|\Lambda^{-1}u_\varepsilon|^2 - \langle \Lambda^{-1}D(xu_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle$$

Mais $-\langle \Lambda^{-1}D(xu_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle = \int_{\mathbb{R}} D\hat{u}_\varepsilon \frac{\bar{\bar{u}}_\varepsilon}{\xi} d\xi$. Posons $\hat{\theta} = \frac{\bar{\bar{u}}_\varepsilon}{\xi}$

$\hat{\theta} \in L^2(\mathbb{R})$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} D\hat{u}_\varepsilon \frac{\bar{\bar{u}}_\varepsilon}{\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} D(\xi\hat{\theta})\bar{\bar{\theta}} d\xi = |\hat{\theta}|^2 + \int_{\mathbb{R}} \xi D\hat{\theta}\bar{\bar{\theta}} d\xi$$

En intégrant par parties on a $\int_{\mathbb{R}} \xi D\hat{\theta}\bar{\bar{\theta}} d\xi = -\int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}D(\xi\bar{\bar{\theta}}) d\xi$.

Comme cette intégrale est réelle, elle vaut aussi

$$-\int_{\mathbb{R}} D(\xi\bar{\bar{\theta}})\hat{\theta} d\xi, \text{ d'où } \int_{\mathbb{R}} D(\xi\bar{\bar{\theta}})\hat{\theta} d\xi = \frac{1}{2}|\hat{\theta}|^2$$

et $-\langle \Lambda^{-1}D(xu_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle = \frac{1}{2}|\hat{\theta}|^2 = \frac{1}{2}|\Lambda^{-1}u_\varepsilon|^2$

L'estimation (D3) est

$$(D3) \quad \frac{5}{2} |\Lambda^{-1}u_\varepsilon|^2 + \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), \Lambda^{-1}u_\varepsilon \rangle = 0$$

d'où

$$(22) \quad |\Lambda^{-1}u_\varepsilon| \leq |B_\varepsilon(u_\varepsilon)|.$$

On utilise maintenant ces trois estimations pour montrer la

PROPOSITION 1.6

- i) $B_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.
- ii) $\Lambda^{-1}u_\varepsilon$ et $\Lambda^{1/2}u_\varepsilon$ sont bornés dans $L^2(\mathbb{R})$.
- iii) $Du_\varepsilon(1+Du_\varepsilon^2)^{-1/4}$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION

i) Pour tout $\alpha > 0$, il existe $C(\alpha) \geq 0$ tel que

$$|\Lambda^{-1}u_\varepsilon|_\infty \leq \alpha |\Lambda^{1/2}u_\varepsilon| + C(\alpha) |\Lambda^{-1}u_\varepsilon|$$

On porte cette inégalité dans (D2) en prenant $\alpha = \frac{\pi^2}{m}$.

On obtient

$$(23) \quad 2\pi^2 |\Lambda^{1/2}u_\varepsilon|^2 - \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), [D^2u_\varepsilon] \rangle \leq A_1 + A_2 |\Lambda^{-1}u_\varepsilon|$$

avec A_1 et A_2 deux constantes. Comme pour tout $z \in \mathbb{R}$
 $f_\varepsilon(z) \geq (f_\varepsilon(z))^2$, on a

$$(24) \quad - \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), [D^2u_\varepsilon] \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) [D^2u_\varepsilon]^2 dx \geq 4\pi^2 |B_\varepsilon(u_\varepsilon)|^2$$

En reportant (22) et (24) dans (23) on obtient $B_\varepsilon(u_\varepsilon)$ borné dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendamment de ε .

ii) On déduit de (22) que $\Lambda^{-1}u_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$ et avec (23) $\Lambda^{1/2}u_\varepsilon$ l'est aussi. Donc u_ε est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.

iii) Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 1.7 (voir [3] pour la démonstration)

Quel que soit $M > 1$, il existe $C(M) \geq 0$ tel que l'on ait

$$2|u(0)| \leq M \int_{\mathbb{R}} \frac{Du^2}{(1+Du^2)^{1/2}} dx + C(M) |u|^{2/3}$$

pour toute fonction paire u de $H^1(\mathbb{R})$.

On applique ce lemme à u_ε et en remarquant que pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a $z^2(1+z^2)^{-1/2} \leq F_\varepsilon(z)z$ il vient

$$(25) \quad 2|u_\varepsilon(0)| \leq M \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) Du_\varepsilon dx + C(M) |u_\varepsilon|^{2/3}$$

Reportons (25) dans (D1)

$$8\pi^2 |\Lambda^{-1/2} u_\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) Du_\varepsilon dx \leq \mu M \left(\int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) Du_\varepsilon dx + C(M) |u_\varepsilon|^{2/3} \right).$$

Choisissons M tel que $\mu M < 1$. $\Lambda^{-1/2} u_\varepsilon$ et u_ε étant bornés dans $L^2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) Du_\varepsilon dx$ est borné. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{Du_\varepsilon^2}{(1+Du_\varepsilon^2)^{1/2}} dx \text{ est borné.}$$

Pour finir de montrer que Du_ε est borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$ il suffit de remarquer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{[D^2 u_\varepsilon]^2}{(1+Du_\varepsilon^2)^{3/2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) [D^2 u_\varepsilon]^2 dx = -4\pi^2 \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), [D^2 u_\varepsilon] \rangle$$

Ce dernier terme est majoré avec (23) par $A_1 + A_2 |\Lambda^{-1} u_\varepsilon|^2$ qui est borné indépendamment de ε . —x—

Pour conclure, on peut donc obtenir la solution de l'équation (E) par un schéma itératif convergent.

THEOREME 1.8

Il existe $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ tels que le schéma

$$u_{n+1} - x Du_{n+1} + \lambda \Lambda^3 u_{n+1} = \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f_\varepsilon(Du_n) [D^2 u_n] + \lambda \Lambda^3 u_n$$

$$Du_{n+1}(0^\pm) = \frac{+}{-} m$$

avec u_0 solution de (EL), converge vers l'unique solution de (E) au sens suivant :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } H^1(\mathbb{R}) \text{ et } [D^2 u_n] \rightarrow [D^2 u] \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) .$$

u est paire.

DEMONSTRATION

Elle résulte immédiatement de l'estimation sur $|Du_\varepsilon|_\infty$.
On a $|Du_\varepsilon|_\infty \leq C$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $1 + C^2 \leq 1/\varepsilon$
et λ comme dans le théorème 1.1 qui donne la convergence du schéma itératif vers u_ε tel que

$$u_\varepsilon - x Du_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f_\varepsilon(Du_\varepsilon) [D^2 u_\varepsilon] = \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f(Du_\varepsilon) [D^2 u_\varepsilon]$$

$$Du_\varepsilon(0^\pm) = \frac{+}{-} m$$

u_ε est alors l'unique solution de (E). (L'unicité pour (E) s'obtient immédiatement par le même raisonnement que pour (VE) $_\varepsilon$).

2. APPROXIMATION VARIATIONNELLE À SUPPORT COMPACT

La résolution numérique de (E), outre la non-linéarité, pose le problème du domaine qui est non borné. Pour cela nous allons approcher $(VE)_\varepsilon$ et $(VEL)_\varepsilon$ dans un espace de fonctions à support compact. Le plan de ce paragraphe est :

- i) Un espace d'approximants à support compact. Propriétés.
- ii) Approximation variationnelle du problème linéaire $(VEL)_\varepsilon$.
- iii) Approximation variationnelle du problème non linéaire $(VE)_\varepsilon$.

Nous donnerons pour ces deux derniers points les résultats de convergence en fonction du support.

2.1. UN ESPACE D'APPROXIMANTS À SUPPORT COMPACT

Le calcul de la suite $v_{n+1} = T_\lambda v_n$ étudiée au paragraphe 1 nécessite la résolution d'une équation de la forme

$$(26) \quad v - xDv + \lambda \Lambda^3 v = \Lambda^1 f \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

Rappelons que l'on connaît analytiquement v par transformation de Fourier (voir §1.2). Mais ceci n'est pas exploitable numériquement. Aussi allons nous approcher v par la solution d'une équation variationnelle dans un espace de fonctions à support compact.

Énonçons d'abord quelques propriétés utiles de la solution v de (26).

PROPOSITION 2.1

Soit v l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de (26) .

- i) $\Lambda^{-1}(v-xDv)$ existe et appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
- ii) xv et $\Lambda^{-1/2}v$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$.
- iii) $v \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{v}(0) = 0$.

DEMONSTRATION

Les points i) et ii) résultent de l'application du lemme 1.2 à l'équation (26) . $v \in L^1(\mathbb{R})$ car

$v(x) = \frac{1}{x} (xv(x))$ et $xv \in L^2(\mathbb{R})$. Enfin d'après la formule (0) donnant $\hat{v}(\xi)$ et avec l'inégalité de Schwarz il vient $|\hat{v}(\xi)| \leq C|\xi|^{1/2}$ et donc $\hat{v}(0) = 0$. ~~—x~~

On approche maintenant v au sens suivant

THEOREME 2.2

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe σ_j à support compact dans $[-j, +j]$ ayant les propriétés suivantes :

- i) $\sigma_j \in H^2(\mathbb{R})$
- ii) $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sigma_j = v$ dans $H^2(\mathbb{R})$ fort .
- iii) $\lim_{j \rightarrow +\infty} x\sigma_j = xv$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort .
- iv) $\hat{\sigma}_j(0) = 0$.
- v) $\lim_{j \rightarrow +\infty} \Lambda^{-1/2}\sigma_j = \Lambda^{-1/2}v$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort .

DEMONSTRATION

On commence par trouver une suite α_j qui vérifie les points i) et ii). Pour cela on prend $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\Psi \equiv 1$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$0 \leq \Psi \leq 1 \text{ et } \text{supp } \Psi \subset [-1, 1].$$

On pose $\Psi_j(x) = \Psi(x/j)$ et $\alpha_j(x) = v(x)\Psi_j(x)$. On vérifie que α_j est dans $H^2(\mathbb{R})$, à support dans $[-j, j]$ et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha_j = v \text{ dans } H^2(\mathbb{R}) \text{ fort.}$$

Pour avoir des fonctions d'intégrale nulle on prend $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} v(x)dx = 1$ et $\text{supp } v \subset [-1, 1]$ et on pose

$$\sigma_j = \alpha_j + c_j v \quad \text{où} \quad c_j = -\int_{\mathbb{R}} \alpha_j(x)dx.$$

Puisque α_j converge ponctuellement vers v qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ et comme α_j est dominé par v on a

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} c_j = -\int_{\mathbb{R}} v(x)dx = 0.$$

Les points i), ii), iv) sont alors vérifiés par σ_j . Montrons maintenant que $x\sigma_j$ converge vers xv dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout x dans \mathbb{R} on a :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x\alpha_j(x) = xv(x) \text{ et } |x\alpha_j(x) - xv(x)|^2 \leq 4|xv(x)|^2$$

Comme xv est dans $L^2(\mathbb{R})$, on a par convergence dominée

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x\alpha_j = xv \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Quant au terme $c_j xv$ il est clair qu'il tend vers 0 puisque $xv \in L^2(\mathbb{R})$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} c_j = 0$.

Montrons le point v) . Comme $\hat{\sigma}_j$ est \mathcal{C}^∞ et $\hat{\sigma}_j(0) = 0$ on a $\hat{\sigma}_j(\xi) = \int_0^\xi D\hat{\sigma}_j(s) ds \leq |\xi|^{1/2} |D\hat{\sigma}_j|$ par l'inégalité de Schwarz .

Par transformation de Fourier le point iii) donne $\lim_{j \rightarrow +\infty} D\hat{\sigma}_j = D\hat{v}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort et $|\xi|^{-1/2} \hat{\sigma}_j(\xi)$ est donc borné au voisinage de l'origine et $\Lambda^{-1/2} \hat{\sigma}_j$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.
On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2 d\xi &= \\ &= \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2 d\xi + |\hat{v} - \hat{\sigma}_j|^2 \end{aligned}$$

Examinons l'intégrale du second membre. Comme $\hat{\sigma}_j$ converge vers \hat{v} dans $H^1(\mathbb{R})$ l'intégrande converge vers 0 pour tout $\xi \neq 0$. De plus $|\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2$ est borné sur $[-1, 1]$ indépendamment de j car on a

$$|\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2 \leq 2(|D\hat{v}|^2 + |D\hat{\sigma}_j|^2)$$

et $D\hat{\sigma}_j$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ fort .
Par le théorème de convergence dominée on obtient donc

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{-1} |\hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)|^2 d\xi = 0$$

et comme $\hat{\sigma}_j$ converge vers \hat{v} dans $L^2(\mathbb{R})$ on a montré v) .

On considère maintenant

$$V_j = \{v \in H^1(\mathbb{R}), \text{supp } v \subset [-j, j], \int_{\mathbb{R}} v(x) dx = 0\}$$

Muni de la norme induite par $H^1(\mathbb{R})$, V_j est un espace de Hilbert.

PROPOSITION 2.3

Λ^{-1} , $\Lambda^{-1/2}$ et $v \rightarrow \Lambda^{-1}(v - xDv)$ sont des opérateurs continus de V_j dans $L^2(\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION

On a $\widehat{\Lambda^{-1}v} = |\xi|^{-1} \widehat{v}$.

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-2} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{-2} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

\widehat{v} étant dans $H^1(\mathbb{R})$ on a $|\widehat{v}(\xi)| \leq |\xi| |D\widehat{v}|_{\infty}$.

$$|D\widehat{v}(\xi)| \leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} |x| |v(x)| dx \leq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C|v|$$

D'où $\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-2} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \leq 2C^2 |v|^2 + |v|^2 \leq C_1 |v|^2$ ce qui montre la continuité de Λ^{-1} .

La démonstration pour $\Lambda^{-1/2}$ et $v \rightarrow \Lambda^{-1}(v - xDv)$ est du même type. ~~—x~~

2.2. APPROXIMATION VARIATIONNELLE À SUPPORT COMPACT DE (VEL)^ε

On considère sur $V_j \times V_j$ la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \langle \Lambda^{-1}(u - xDu), v \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 u, \Lambda^1 v \rangle$$

Les crochets sont des produits scalaires dans $L^2(\mathbb{R})$ et λ est positif.

Notons que cette forme n'est pas symétrique à cause du terme $\langle \Lambda^{-1}(xDu), v \rangle$.

PROPOSITION 2.4

La forme $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V_j \times V_j$. Elle est coercive sur V_j .

DEMONSTRATION

Décomposons $\langle \Lambda^{-1}(u - xDu), v \rangle$ sous la forme

$$2 \langle \Lambda^{-1/2}u, \Lambda^{-1/2}v \rangle - \langle \Lambda^{-1}D(xu), v \rangle .$$

$$2 \langle \Lambda^{-1/2}u, \Lambda^{-1/2}v \rangle = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}(\xi) \bar{\hat{v}}(\xi)}{|\xi|} d\xi . \text{ Comme } \hat{u}(0) = 0 ,$$

on a $|\hat{u}(\xi)| \leq |\xi|^{1/2} |D\hat{u}|$ avec l'inégalité de Schwarz. D'où

$$2 |\langle \Lambda^{-1/2}u, \Lambda^{-1/2}v \rangle| \leq 2 \int_{|\xi| \leq 1} |D\hat{u}| |D\hat{v}| d\xi + 2 \int_{|\xi| > 1} |\hat{u}(\xi)| |\hat{v}(\xi)| d\xi$$

$$\leq 4 |D\hat{u}| |D\hat{v}| + 2 |\hat{u}| |\hat{v}|$$

$$\leq 16\pi^2 |\hat{xu}| |\hat{xv}| + 2 |u| |v|$$

$$\leq (16\pi^2 j^2 + 2) |u| |v|$$

Par suite

$$|a(u, v)| \leq (16\pi^2 j^2 + 2) |u| |v| + \lambda |\Lambda^1 u| |\Lambda^1 v|$$

ce qui prouve la continuité de $a(\cdot, \cdot)$.

Pour la coercivité on a

$$a(u, u) = 2 |\Lambda^{-1/2}u|^2 + \lambda |\Lambda^1 u|^2 - \langle \Lambda^{-1}D(xu), u \rangle$$

Montrons que $\langle \Lambda^{-1}D(xu), u \rangle = 0$.

On remarque que $D(|\hat{u}|^2) = 2\text{Re } \hat{u} \bar{D}\hat{u}$ et u étant réelle

$\langle \Lambda^{-1}D(xu), u \rangle$ est réel. D'où

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^{-1}D(xu), u \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \text{sign}(\xi) D\hat{u} \bar{D}\hat{u} d\xi = -\int_{\mathbb{R}} \text{sign}(\xi) \text{Re} D\hat{u} \bar{D}\hat{u} d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(\xi) D(|\hat{u}|^2) d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} D(|\hat{u}|^2) d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 D(|\hat{u}|^2) d\xi = 0 \end{aligned}$$

car \hat{u} est nulle en 0 et à l'infini ($u \in L^1(\mathbb{R})$). ~~—*~~

On déduit immédiatement du théorème de Lax-Milgram et de la proposition précédente le

THEOREME 2.5

Pour tout f dans $L^2(\mathbb{R})$ il existe une unique solution v_j de l'équation variationnelle

$$(27) \quad \langle \Lambda^{-1}(v_j - xDv_j), v \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 v_j, \Lambda^1 v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_j$$

Abordons maintenant l'étude de la convergence de v_j vers la solution v de (26). Nous allons montrer que v_j tend vers v dans $H^1(\mathbb{R})$ fort en comparant v_j et l'approximation σ_j de v exhibée dans le théorème 2.2.

La solution de (26) vérifie

$$(28) \quad \langle \Lambda^{-1}(v - xDv), v \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 v, \Lambda^1 v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_j$$

On décompose v en $\sigma_j + v - \sigma_j$ dans (28) puis on fait la différence entre (27) et (28) en posant $\theta_j = v_j - \sigma_j$ et en prenant $v = \theta_j$. Il vient :

$$(29) \quad \langle \Lambda^{-1}(\theta_j - xD\theta_j), \theta_j \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 \theta_j, \Lambda^1 \theta_j \rangle = \\ \langle \Lambda^{-1}(v - \sigma_j - xD(v - \sigma_j)), \theta_j \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v - \sigma_j), \Lambda^1 \theta_j \rangle$$

Le premier membre de (29) vaut $2|\Lambda^{-1/2}\theta_j|^2 + \lambda|\Lambda^1\theta_j|^2$

Le second membre est majoré par :

$$2|\Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j)| |\Lambda^{-1/2}\theta_j| + 2\pi|xv - x\sigma_j| |\theta_j| + \lambda|\Lambda^1(v - \sigma_j)| |\Lambda^1\theta_j| \\ \leq |\Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j)|^2 + |\Lambda^{-1/2}\theta_j|^2 + (\pi^2/\alpha)|xv - x\sigma_j|^2 + \alpha|\theta_j|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1(v - \sigma_j)|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1\theta_j|^2$$

Comme $|\theta_j|^2 \leq \frac{2}{3} |\Lambda^{-1/2}\theta_j|^2 + \frac{1}{3} |\Lambda^1\theta_j|^2$ on prend α assez petit de façon que $\frac{2\alpha}{3} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{\alpha}{3} \leq \frac{\lambda}{4}$ et on obtient finalement

$$\frac{1}{2}|\Lambda^{-1/2}\theta_j|^2 + \frac{\lambda}{4}|\Lambda^1\theta_j|^2 \leq |\Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j)|^2 + (\pi^2/\alpha)|xv - x\sigma_j|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1(v - \sigma_j)|^2$$

On conclut avec le théorème 2.2 que $\Lambda^{-1/2}\theta_j$ et $\Lambda^1\theta_j$ convergent vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ fort et donc $v_j - \sigma_j$ tend vers 0 dans $H^1(\mathbb{R})$ fort.

Comme σ_j converge vers v dans $H^2(\mathbb{R})$ fort, on a donc montré la

PROPOSITION 2.6

La solution v_j de l'équation variationnelle (27) converge dans $H^1(\mathbb{R})$ vers la solution v du problème linéaire (26).

REMARQUE 2.7

- i) On ne peut pas avoir d'ordre de convergence en fonction de j sans information supplémentaire (que l'on ne possède pas) sur la décroissance de v à l'infini.
- ii) Théoriquement, on peut approcher la solution du problème non linéaire (E) en utilisant le théorème 1.4 et la proposition 2.6. Pratiquement, on va utiliser le schéma itératif décrit au paragraphe 1 sur une approximation variationnelle à support compact de $(E)_\epsilon$.

2.3. APPROXIMATION VARIATIONNELLE À SUPPORT COMPACT DE (VE)

En reprenant les notations des paragraphes 2.1 et 2.2 on associe à $(VE)_\epsilon$ le problème variationnel

$$(EC)_\epsilon \left\{ \begin{array}{l} v_j \in V_j \text{ vérifie pour tout } v_j \in V_j \\ \langle \Lambda^{-1}(v_j - \chi Dv_j), v_j \rangle = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\epsilon(Du_0 + Dv_j), Dv_j \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, Dv_j \rangle \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que $(EC)_\epsilon$ admet une solution v_j unique dans V_j par une itération de point fixe suivant celle du théorème d'existence pour la solution v de $(E)_\epsilon$. Nous montrerons ensuite que v_j converge vers v lorsque j tend vers $+\infty$.

On considère le schéma itératif suivant :

$$(ECL)_\epsilon \left\{ \begin{array}{l} v_n \in V_j, v_{n+1} \in V_j \text{ et vérifie pour tout } v \in V_j \\ \langle \Lambda^{-1}(v_{n+1} - \chi Dv_{n+1}), v \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v_{n+1} - v_n), \Lambda^1 v \rangle \\ = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\epsilon(Du_0 + Dv_n), Dv \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, Dv \rangle \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour $(ECL)_\varepsilon$ découlent de la proposition 2.4 et du théorème de Lax-Milgram car on vérifie facilement que l'application

$$v \mapsto \lambda \langle \Lambda^1 v_n, \Lambda^1 v \rangle - \frac{1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n), Dv \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, Dv \rangle$$

est une forme linéaire continue sur V_j muni de la norme induite par $H^1(\mathbb{R})$.

Nous noterons $S_\lambda : v_n \rightarrow v_{n+1}$ l'opérateur de linéarisation défini par $(ECL)_\varepsilon$.

THEOREME 2.8

Soit $0 < \varepsilon \leq \mu^2$. Il existe $\lambda(\varepsilon)$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$, S_λ soit de puissance contractante sur V_j . L'itération $v_{n+1} = S_\lambda v_n$ converge quelque soit le point de départ dans V_j vers une solution de $(EC)_\varepsilon$. Cette solution est unique et paire.

DEMONSTRATION

Soient w_1 et w_2 dans V_j . On pose $v_1 = S_\lambda w_1$, $v_2 = S_\lambda w_2$, $w = w_1 - w_2$ et $v = v_1 - v_2$. On a pour tout v dans V_j

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda^{-1}(v - \varepsilon Dv), v \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v-w), \Lambda^1 v \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dw_2) - F_\varepsilon(Du_0 + Dw_1), Dv \rangle \end{aligned}$$

Prenons $v = v_1 - v_2$ et procédons comme dans le point ii) du théorème 1.1. Il vient :

$$\begin{aligned} & 2|\Lambda^{-1/2} v|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Lambda^1 v|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Lambda^1(v-w)|^2 \\ & \leq -\varepsilon^{3/2} |\Lambda^1 w|^2 + |\Lambda^1 w| |\Lambda^1(v-w)| \\ & \leq -\varepsilon^{3/2} |\Lambda^1 w|^2 + \frac{1}{2\rho} |\Lambda^1 w|^2 + \frac{\rho}{2} |\Lambda^1(v-w)|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$2|\Lambda^{-1/2}v|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^1v|^2 + \frac{\lambda-\rho}{2}|\Lambda^1(v-w)|^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \epsilon^{3/2}\right)|\Lambda^1w|^2.$$

Choisissons $\rho > 0$ tel que $\epsilon^{3/2} > 1/2\rho$ et $\lambda \geq \rho$.

On obtient en posant :

$$K_5 = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \epsilon^{3/2}\right), \quad M_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \epsilon^{3/2}\right)$$

$$(30) \quad |\Lambda^1v|^2 \leq K_5 |\Lambda^1w|^2, \quad 0 < K_5 < 1$$

$$(31) \quad |\Lambda^{-1/2}v|^2 \leq M_5 |\Lambda^1w|^2$$

Il est clair, à partir de (30) et (31) que S_λ^p est contractant en norme $H^1(\mathbb{R})$ pour p (dépendant de λ) assez grand et l'itération $v_{n+1} = S_\lambda v_n$ converge dans V_j . On en déduit que la solution v_j de $(EC)_\epsilon$ est unique.

Notons \tilde{v}_j obtenue par parité en posant $\tilde{v}_j(x) = v_j(-x)$. \tilde{v}_j vérifie

$$\langle \Lambda^{-1}(\tilde{v}_j - x D\tilde{v}_j), \tilde{v} \rangle = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\epsilon(Du_0 + D\tilde{v}_j), D\tilde{v} \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, D\tilde{v} \rangle$$

pour tout $v \in V_j$. Donc $\tilde{v}_j = v_j$. ~~—x~~

REMARQUES 2.9

- i) On vérifie que la suite des itérés obtenues par $(ECL)_\epsilon$ est formée de fonctions paires dès que l'un des itérés est pair.
- ii) Il n'y a pas de conditions sur l'itéré de départ comme dans le théorème 1.8. On prendra v_0 pair pour diminuer le nombre des calculs.

Précisons maintenant la convergence de v_j vers la solution du problème non linéaire $(VE)_\varepsilon$.

PROPOSITION 2.10

La solution v_j de l'équation variationnelle $(EC)_\varepsilon$ converge dans $H^1(\mathbb{R})$ vers la solution v de $(VE)_\varepsilon$ quand j tend vers l'infini.

DEMONSTRATION

On procède comme dans la proposition 2.6 pour le cas linéaire. La solution v de $(VE)_\varepsilon$ vérifie pour tout $v_j \in V_j$

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \langle \Lambda^{-1}(v - xDv), v_j \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv) ([D^2u_0] + D^2v), v_j \rangle - \frac{\mu}{4\pi^2} \langle [D^2u_0], v_j \rangle \\
 &= \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv), Dv_j \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, Dv_j \rangle
 \end{aligned}$$

Soit σ_j une approximation de v au sens du théorème 2.2. On écrit $v = \sigma_j + v - \sigma_j$, on pose $g_j = v_j - \sigma_j$ et on fait la différence entre $(EC)_\varepsilon$ et (32). Il vient :

$$\begin{aligned}
 & \langle \Lambda^{-1}(g_j - xDg_j), v_j \rangle \\
 &= \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv), Dv_j \rangle + \langle \Lambda^{-1}(v - \sigma_j + xD(v - \sigma_j)), v_j \rangle
 \end{aligned}$$

Prenons $v_j = g_j$. On obtient

$$\begin{aligned}
& 2|\Lambda^{-1/2}g_j|^2 \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\epsilon(Du_0 + Dv_j) - F_\epsilon(Du_0 + D\sigma_j) + F_\epsilon(Du_0 + D\sigma_j) - F_\epsilon(Du_0 + Dv) \rangle, Dg_j \rangle \\
&\quad + 2 \langle \Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j), \Lambda^{-1/2}g_j \rangle - \langle \Lambda^{-1}D(x(v - \sigma_j)), g_j \rangle
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& 2|\Lambda^{-1/2}g_j|^2 \\
&\leq -\epsilon^{3/2}|\Lambda^1g_j|^2 + |\Lambda^1(\sigma_j - v)| |\Lambda^1g_j| + 2|\Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j)| |\Lambda^{-1/2}g_j| + 2\pi|xv - x\sigma_j| |g_j|
\end{aligned}$$

On conclut comme dans la proposition 2.6 que g_j tend vers 0 dans $H^1(\mathbb{R})$ quand j tend vers l'infini. Puisque σ_j converge vers v dans $H^2(\mathbb{R})$ la proposition est démontrée. —x—

3. APPROXIMATION INTERNE PAR ÉLÉMENTS FINIS.

On donne dans ce paragraphe une approximation interne de v_j . On définit ensuite les problèmes approchés associés aux équations variationnelles étudiées au paragraphe 2 et on étudie la convergence des schémas obtenus.

3.1. APPROXIMATION DE v_j

On construit un maillage sur l'intervalle $[-j, +j]$ en posant :

$$(33) \quad x_p = ph \quad , \quad p = -N, -N+1, \dots, N-1, N \quad , \quad h = j/N$$

Pour $m = -N+1, \dots, N-1$ on note f_m la fonction continue sur \mathbb{R} affine sur chaque intervalle défini par (33) telle que $f_m(x_p) = \delta_{mp}$ pour $p = -N, \dots, N$.

Pour $m = -N+2, \dots, N-2$ on note $e_m = f_{m-1} - f_{m+1}$ et on note

V_{hj} le sous-espace de V_j engendré par la base e_p

$\pi_h : H_0^1(-j, j) \rightarrow H_0^1(-j, j)$ l'opérateur d'interpolation affine

V_{hj} approxime V_j au sens suivant :

PROPOSITION 3.1

Pour tout N , il existe un opérateur linéaire continu

$r_h : V_j \rightarrow V_{hj}$, ($h=j/N$), tel que :

pour tout $v \in V_j \cap H^2(\mathbb{R})$ $\lim_{N \rightarrow \infty} |r_h v - v|_{H^1} = 0$

DEMONSTRATION

Pour $f \in H_0^1(-j, j)$ on note $\omega_h(f)$ la fonction continue, affine par morceaux de pas h , nulle en $-j$ et $+j$, constante sur $[-j+h, j-h]$. La constante est déterminée par

$$\int_{-j}^{+j} \omega_h(f) dx = \int_{-j}^{+j} f(x) dx \quad \text{soit} \quad C(f)(2j-h) = \int_{-j}^{+j} f(x) dx .$$

Il est clair que ω_h^- est linéaire de $H_0^1(-j, j)$ dans $H_0^1(-j, j)$ et un calcul simple donne

$$(34) \quad |\omega_h(f)|_{H^1}^2 \leq \frac{2h}{3} C^2(f) + 2(j-h)C^2(f) + \frac{2}{h} C^2(f)$$

Comme $C(f)$ dépend continûment de f sur $H_0^1(-j, j)$, ω_h est continu.

On définit $r_h : H_0^1(-j, j) \rightarrow H_0^1(-j, j)$ par

$$r_h v = \pi_h v - \omega_h(\pi_h v) .$$

$r_h v$ est continu, affine par morceaux, de somme nulle.

Notons I_h l'espace des fonctions de $H_0^1(-j, j)$ affines par morceaux de pas h , de somme nulle. On a

$$V_{hj} \subset I_h \subset V_{h/2j}$$

D'où $r_h : H_0^1(-j, j) \rightarrow V_{h/2j}$.

Soit maintenant $v \in V_j \cap H^2(\mathbb{R})$. On a :

$$|v - r_h v|_{H^1} \leq |v - \pi_h v|_{H^1} + |\omega_h(\pi_h v)|_{H^1}$$

Les résultats classiques d'interpolation (cf [1]) donnent $|v - \pi_h v|_{H^1} \leq \text{cste } h$. On a d'autre part

$$\int_{-j}^{+j} (v - \pi_h v) dx = - \int_{-j}^{+j} \pi_h v dx = - \int_{-j}^{+j} \omega_h(\pi_h v) dx = -C(\pi_h v) (2j - h)$$

D'où $|C(\pi_h v)| \leq \text{cste } |v - \pi_h v|_{L^2} \leq \text{cste } h$.

Avec (34) il vient

$$|\omega_h(\pi_h v)|_{H^1}^2 \leq \text{cste } h \quad \text{et donc} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |r_h v - v|_{H^1} = 0 . \quad \text{---*}$$

3.2. APPROXIMATION DE $(EC)_\varepsilon$

La solution v_j de $(EC)_\varepsilon$ est approché par v_h solution de

$$v_h \in V_{hj} \text{ et vérifie pour } p = -N+2, \dots, N-2$$

$$\begin{aligned} (EC)_{\varepsilon, N} &< \Lambda^{-1}(v_h - xDv_h), e_p > \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} < F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h), De_p > + \frac{\mu}{4\pi^2} < Du_0, De_p > \end{aligned}$$

Rappelons que h et N sont liés par la relation $h = j/N$.

Nous montrerons en suivant la démarche du paragraphe 2.3 que $(EC)_{\varepsilon, N}$ admet une solution unique v_h dans V_{hj} par une itération de point fixe. Pour cela on considère le schéma itératif discrétisé associé à $(ECL)_\varepsilon$

$$(ECL)_{\varepsilon, N} \left\{ \begin{array}{l} v_n \in V_{hj}, v_{n+1} \in V_{hj} \text{ et vérifie pour } p = -N+2, \dots, N-2 \\ < \Lambda^{-1}(v_{n+1} - xDv_{n+1}), e_p > + \lambda < \Lambda^1(v_{n+1} - v_n), \Lambda^1 e_p > \\ = \frac{-1}{4\pi^2} < F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n), De_p > + \frac{\mu}{4\pi^2} < Du_0, De_p > \end{array} \right.$$

L'existence de v_{n+1} est donnée par le théorème de Lax-Milgram. Notons $S_{\lambda h} : v_n \rightarrow v_{n+1}$ l'opérateur de linéarisation défini par $(ECL)_{\varepsilon, N}$.

THEOREME 3.2

Soit $0 < \varepsilon \leq \mu^2$. Il existe $\lambda(\varepsilon)$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$ $S_{\lambda h}$ soit de puissance contractante sur V_{hj} .
 L'itération $v_{n+1} = S_{\lambda h} v_n$ converge quelque soit le point de départ dans V_{hj} vers une solution de $(EC)_{\varepsilon, N}$.
 Cette solution est unique et paire.

DEMONSTRATION

On procède comme dans le théorème 2.8 en remplaçant V_j par V_{hj} . —x—

3.3. UN RÉSULTAT DE CONVERGENCE

On étudie la convergence de v_h solution de $(EC)_{\varepsilon, N}$ quand la finesse du maillage sur $[-j, j]$ tend vers 0 c'est-à-dire quand $N \rightarrow +\infty$.

THEOREME 3.3

La solution v_h de $(EC)_{\varepsilon, N}$ converge dans $H^1(\mathbb{R})$ quand $N \rightarrow +\infty$ vers la solution v_j de $(EC)_{\varepsilon}$.

DEMONSTRATION

Pour tout v_h dans V_{hj} , on a

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda^{-1}(v_j - v_h - xD(v_j - v_h)), v_h \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \langle F_{\varepsilon}(Du_0 + Dv_h) - F_{\varepsilon}(Du_0 + Dv_j), Dv_h \rangle \end{aligned}$$

Prenons $v_h = r_h v - v_h$ avec $v \in V_j \cap H^2(\mathbb{R})$ fixé.

Il vient :

$$\begin{aligned} & 2|\Lambda^{-1/2}(v_j - v_h)|^2 + \langle \Lambda^{-1}(v_j - v_h - \varepsilon D(v_j - v_h)), r_h v - v_j \rangle \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h), Dv_j - Dv_h + Dr_h v - Dv_j \rangle \\ &\leq -\varepsilon^{3/2} |\Lambda^1(v_j - v_h)|^2 + |\Lambda^1(v_j - v_h)| |\Lambda^1(r_h v - v_j)| \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & 2|\Lambda^{-1/2}(v_j - v_h)|^2 + \varepsilon^{3/2} |\Lambda^1(v_j - v_h)|^2 \\ &\leq |\Lambda^1(v_j - v_h)| |\Lambda^1(r_h v - v_j)| + 2|\Lambda^{-1/2}(v_j - v_h)| |\Lambda^{-1/2}(r_h v - v_j)| + 2\pi j |v_j - v_h| \cdot |r_h v - v_j| \end{aligned}$$

En faisant les majorations habituelles, on peut trouver C_1, C_2, C_3 des constantes positives telles que :

$$\begin{aligned} & |\Lambda^{-1/2}(v_j - v_h)|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{3/2} |\Lambda^1(v_j - v_h)|^2 \\ &\leq C_1 |r_h v - v_j|^2 + C_2 |\Lambda^1(r_h v - v_j)|^2 + C_3 |\Lambda^{-1/2}(r_h v - v_j)|^2 \end{aligned}$$

Avec la proposition 3.1 et la continuité de $\Lambda^{-1/2}$ de V_j dans $L^2(\mathbb{R})$ (cf. proposition 2.3) on obtient la convergence de v_h vers v_j quand $N \rightarrow +\infty$. ~~—x~~

4. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Dans ce paragraphe on étudie la résolution numérique de $(EC)_{\varepsilon, N}$ en tenant compte des erreurs dues à l'intégration numérique. La convergence du schéma itératif proposé est montrée. On donne ensuite des indications sur la mise en oeuvre pratique et les résultats numériques obtenus.

4.1. INTÉGRATION NUMÉRIQUE

La méthode itérative proposée au paragraphe 3 demande la résolution d'un système linéaire à chaque pas. Les intégrales intervenant dans la formation de la matrice seront calculées formellement (voir § 4.2).

Examinons le second membre de $(EC)_{\varepsilon, N}$. On remplace Du_0 et $F_{\varepsilon}(Du_0 + Dv_n)$ par $\pi_h Du_0$ et $\pi_h F_{\varepsilon}(Du_0 + Dv_n)$. On notera que cette interpolation a un sens sur chaque intervalle $[x_p, x_{p+1}]$ car Du_0 est continu en dehors de l'origine et Dv_n est constant (0 est un noeud du maillage).

Pratiquement on doit trouver :

$$(EC)_{\varepsilon, N}^* \left\{ \begin{array}{l} v_h^* \in V_h \text{ tel que pour } p = -N+2, \dots, N-2 \\ < \Lambda^{-1}(v_h^* - x Dv_h^*), e_p > \\ = \frac{-1}{4\pi^2} < \pi_h F_{\varepsilon}(Du_0 + Dv_h^*), De_p > + \frac{\mu}{4\pi^2} < \pi_h Du_0, De_p > \end{array} \right.$$

Pour cela on forme le schéma itératif

$$(ECL)_{\varepsilon, N}^* \left\{ \begin{array}{l} v_n^* \in V_h, v_{n+1}^* \in V_h \text{ et vérifie pour } p = -N+2, \dots, N-2 \\ \langle \Lambda^{-1}(v_{n+1}^* - x Dv_{n+1}^*), e_p \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v_{n+1}^* - v_n^*), \Lambda^1 e_p \rangle \\ = \frac{-1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n^*), De_p \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle \pi_h Du_0, De_p \rangle \end{array} \right.$$

Notons $S_\lambda^* : v_n^* \rightarrow v_{n+1}^*$ l'opérateur de linéarisation défini par $(ECL)_{\varepsilon, N}^*$.

PROPOSITION 4.1

Soit $0 < \varepsilon \leq \mu^2$. Il existe $\lambda(\varepsilon)$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$, S_λ^* soit de puissance contractante sur V_{hj} . L'itération $v_{n+1}^* = S_\lambda^* v_n^*$ converge quelque soit le point de départ dans V_{hj} vers la solution v_h^* de $(EC)_{\varepsilon, N}^*$. Cette solution est paire.

DEMONSTRATION

L'existence de v_{n+1}^* dans $(ECL)_{\varepsilon, N}^*$ est donnée par le théorème de Lax-Milgram. Pour étudier la convergence il suffit d'adapter la démonstration du théorème 2.8. La seule modification provient du second membre.

Prenons w_1^* et w_2^* dans V_{hj} et notons v_1^* et v_2^* les solutions correspondantes de $(ECL)_{\varepsilon, N}^*$. Posons $w^* = w_1^* - w_2^*$ et $v^* = v_1^* - v_2^*$. On a

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \langle \Lambda^{-1}(v^* - xDv^*), v^* \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v^* - w^*), \Lambda^1 v^* \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\epsilon(Du_0 + Dw_2^*) - \pi_h F_\epsilon(Du_0 + Dw_1^*), Dv^* \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \langle \pi_h (F_\epsilon(Du_0 + Dw_2^*) - F_\epsilon(Du_0 + Dw_1^*)), Dw^* + Dv^* - Dw^* \rangle
 \end{aligned}$$

Pour majorer cette expression on somme sur chaque intervalle $[x_p, x_{p+1}]$. En notant pour une fonction h

$$h(x_p^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_p \\ x > x_p}} h(x) \quad \text{et} \quad h(x_p^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_p \\ x < x_p}} h(x) \quad \text{on obtient}$$

$$\langle \Lambda^{-1}(v^* - xDv^*), v^* \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v^* - w^*), \Lambda^1 v \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & < \frac{h}{8\pi^2} \sum_{p=-N}^{N-1} (F_\epsilon(Du_0 + Dw_2^*)(x_p^+) - F_\epsilon(Du_0 + Dw_1^*)(x_p^+)) (Dw^*(x_p^+) + D(v^* - w^*)(x_p^+)) \\
 & \quad + (F_\epsilon(Du_0 + Dw_2^*)(x_{p+1}^-) - F_\epsilon(Du_0 + Dw_1^*)(x_{p+1}^-)) (Dw^*(x_{p+1}^-) + D(v^* - w^*)(x_{p+1}^-)) \\
 & < \frac{1}{4\pi^2} (-\epsilon^{3/2} |Dw^*|^2 + |D(v^* - w^*)| |Dw^*|) \\
 & = -\epsilon^{3/2} |\Lambda^1 w^*|^2 + |\Lambda^1(v^* - w^*)| |\Lambda^1 w^*|
 \end{aligned}$$

On conclut la démonstration comme dans le théorème 2.8.

L'itération $v_{n+1}^* = S_\lambda^* v_n^*$ est convergente vers v_h^* unique solution du (EC) $_{\epsilon, N}^*$. —x—

REMARQUE 4.2

On notera comme dans la remarque 2.9 que la solution v_h^* est paire ainsi que la suite v_n^* dès lors que l'un des itérés est pair. La convergence est assurée pour tout point de départ.

Pour terminer étudions la convergence de v_h^* vers v_j solution de $(EC)_\epsilon$.

PROPOSITION 4.3

La solution v_h^* de $(EC)_{\epsilon,N}^*$ converge dans V_j vers la solution v_j de $(EC)_\epsilon$.

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que $v_h - v_h^*$ tend vers 0 dans V_j . En soustrayant $(EC)_{\epsilon,N}^*$ à $(EC)_{\epsilon,N}$, il vient :

$$\begin{aligned} 2|\Lambda^{-1/2}(v_h - v_h^*)|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\epsilon(Du_0 + Dv_h^*) - F_\epsilon(Du_0 + Dv_h), D(v_h - v_h^*) \rangle \\ &\quad + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0 - \pi_h Du_0, D(v_h - v_h^*) \rangle \\ &\leq -\epsilon^{3/2} |\Lambda^1(v_h - v_h^*)|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\epsilon(Du_0 + Dv_h) - F_\epsilon(Du_0 + Dv_h^*), D(v_h - v_h^*) \rangle \\ &\quad + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle \pi_h Du_0 - Du_0, D(v_h - v_h^*) \rangle \end{aligned}$$

Sur chaque intervalle $[x_p, x_{p+1}]$ on a une régularité H^2 pour Du_0 .

$DF_\epsilon(Du_0 + Dv_h) = f_\epsilon(Du_0 + Dv_h)(D^2u_0 + D^2v_h)$ est dérivable presque partout car Du_0 n'est pas constante sur un ensemble de mesure non nulle. Comme f_ϵ et f'_ϵ sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$, $F_\epsilon(Du_0 + Dv_h)$ a une régularité H^2 sur chaque intervalle.

En appliquant les résultats classiques d'interpolation (cf [1]), on obtient sur chaque intervalle

$$|F_\epsilon (Du_0 + Dv_h) - \pi_h F_\epsilon (Du_0 + Dv_h)|_{L^2[x_p, x_{p+1}]} \leq \text{cste } h^2$$

où la constante ne dépend pas de h .

Il vient alors

$$2|\Lambda^{-1/2}(v_h - v_h^*)|^2 + \epsilon^{3/2}|\Lambda^1(v_h - v_h^*)|^2 \leq \text{cste} \cdot h |\Lambda^1(v_h - v_h^*)|$$

et on en déduit que $v_h - v_h^* \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ dans V_j . —x—

4.2. CALCUL FORMEL DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE ASSOCIÉE

$$A \quad (\text{ECL})_{\epsilon, N}^*$$

Le terme général de la matrice associée à $(\text{ECL})_{\epsilon, N}^*$ est de la forme :

$$\langle \Lambda^{-1}(e_i - xDe_i), e_j \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 e_i, \Lambda^1 e_j \rangle$$

Ces termes peuvent s'intégrer exactement.

Λ^{-1} est l'opérateur $-2\log|x| *$ où $*$ désigne la convolution. En notant δ_s la distribution de Dirac au point sh et $\mathcal{P}_k \log|x|$ la primitive $k^{\text{ième}}$ de $\log|x|$ nulle en 0 on obtient

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda^{-1}(e_i - xDe_i), e_j \rangle \\ &= 2 | \mathcal{P}_3 \log|x| * ((i-2)\delta_{i-2} - 2(i-1)\delta_{i-1} + 2(i+1)\delta_{i+1} - (i+2)\delta_{i+2}), \delta_{j-2} - 2\delta_{j-1} + 2\delta_{j+1} - \delta_{j+2} \rangle \end{aligned}$$

Cette expression est développée en utilisant le code de calcul formel MACSYMA. En posant $a = j-i$ il vient

$$\begin{aligned}
& \langle \Lambda^{-1}(e_i - xDe_i), e_j \rangle = \\
& - \frac{h^3}{3} [(a+4)^3 \text{Log}|a+4| - 4(a+3)^3 \text{Log}|a+3| \\
& \quad + 4(a+2)^3 \text{Log}|a+2| + 4(a+1)^3 \text{Log}|a+1| \\
& \quad - 10a^3 \text{Log}|a| + 4(a-1)^3 \text{Log}|a-1| \\
& \quad + 4(a-2)^3 \text{Log}|a-2| - 4(a-3)^3 \text{Log}|a-3| \\
& \quad + (a-4)^3 \text{Log}|a-4|] \\
& - \frac{h^3}{3} [- 2(a+4)^3 \text{Log}|a+4| + 6(a+3)^3 \text{Log}|a+3| \\
& \quad - 4(a+2)^3 \text{Log}|a+2| - 2(a+1)^3 \text{Log}|a+1| \\
& \quad + 2(a-1)^3 \text{Log}|a-1| + 4(a-2)^3 \text{Log}|a-2| \\
& \quad - 6(a-3)^3 \text{Log}|a-3| + 2(a-4)^3 \text{Log}|a-4|]
\end{aligned}$$

REMARQUE 4.4

Pour l'évaluation numérique de ces expressions il faut grouper les termes de façon à minimiser la répercussion des erreurs d'arrondis.

Le calcul des termes $\langle \Lambda^1 e_i, \Lambda^1 e_j \rangle$ est simple. On a

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda^1 e_i, \Lambda^1 e_j \rangle &= \frac{-1}{4\pi^2} \langle D^2 e_i, e_j \rangle \\
&= \frac{-1}{4\pi^2 h} [e_j(x_{i-2}) - 2e_j(x_{i-1}) + 2e_j(x_{i+1}) - e_j(x_{i+2})]
\end{aligned}$$

4.3. MISE EN EOUVRE ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

La méthode a été programmée en langage PASCAL sur un micro-ordinateur MICRAL 90-50. La taille du code de calcul est de 43K0 et les données occupent 20K0 . Cet appareil dispose d'une arithmétique cablée ce qui permet des calculs itératifs assez rapides. Cependant la taille des systèmes linéaires que l'on peut inverser est limitée à environ 50 inconnues.

Il est important de constater que la matrice associée au schéma itératif ne varie pas au cours des itérations. La triangulation et les permutations de lignes sont donc effectuées au premier pas et ensuite on travaille seulement sur le second membre.

On résoud un système triangulaire à chaque pas.

Les remarques sur la parité des itérations prennent leur importance à ce niveau puisque la taille du système linéaire est divisée par deux.

On a utilisé les possibilités graphiques sur écran (propres au MICRAL) pour visualiser l'étude des itérations. Enfin, les calculs faits utilisent des programmes de la bibliothèque de calcul scientifique BANG réalisée sur MICRAL par l'équipe d'Analyse Numérique du Laboratoire IMAG de Grenoble, et,

je remercie particulièrement A. EBERHARD pour son aide à la mise au point des programmes.

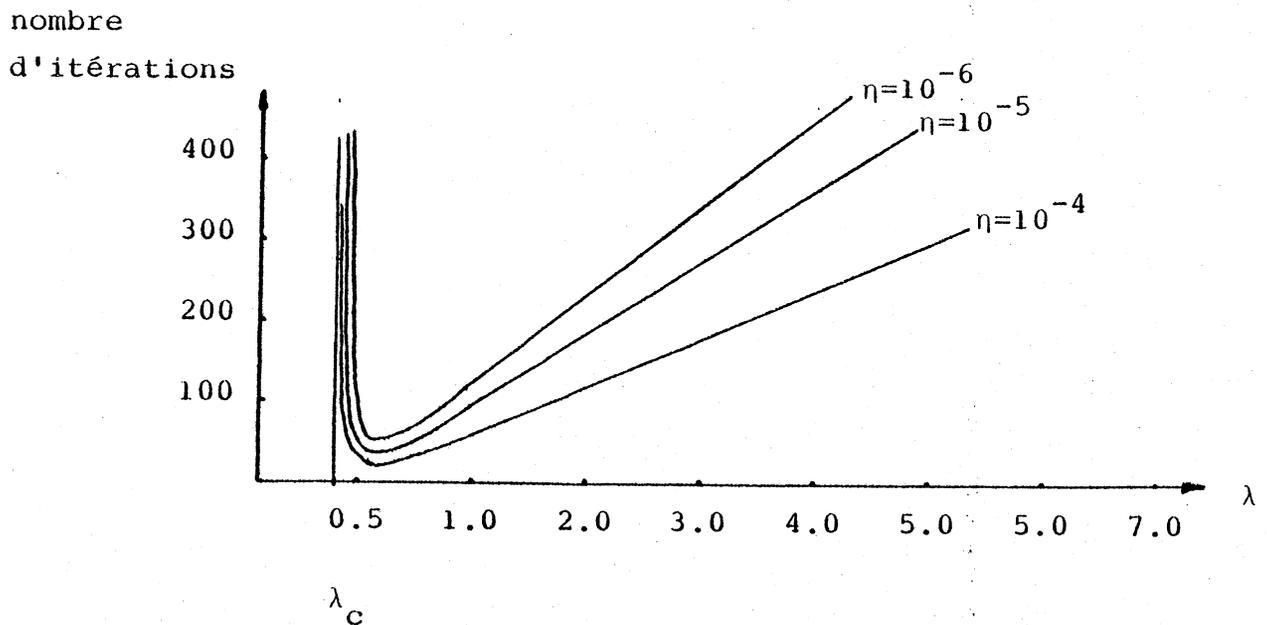
Nous avons effectué plusieurs séries d'expériences numériques afin de tester l'influence des différents paramètres.

i) influence de λ

On fixe $j = 0.5$, $h = 0.025$, $\epsilon = 0.14$.

On calcule la solution pour $\lambda = 22$. Cette valeur est supérieure au $\lambda(\epsilon)$ théorique qui assure la convergence du schéma. Pour obtenir la solution on itère jusqu'à ce que les 14 décimales significatives soient stabilisées.

Le graphique suivant indique le nombre d'itérations nécessaires en fonction de λ pour que la distance entre un itéré et la solution ci-dessus soit inférieure à η .



$$\eta = 10^{-6}$$

0.49	∞
0.50	538
0.51	132
0.52	77
0.54	44
0.56	34
0.58	33
0.60	34
0.80	47
λ	nombre d'ité- rations

1.00	60
2.00	124
3.00	189
4.00	253
5.00	317
6.00	381
7.00	446
8.00	510
9.00	574
λ	nombre d'ité- rations

On remarquera que la convergence du schéma est vérifiée pour des $\lambda < \lambda(\epsilon)$ mais qu'en dessous d'une valeur critique de l'ordre de 0.49 le schéma diverge. Numériquement cette divergence se traduit soit par l'apparition de cycles soit par l'explosion de la solution.

Fixons maintenant λ à 0.58 par exemple (pour minimiser les itérations) et diminuons η . On obtient les résultats suivants :

η	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
itérations	19	26	33	40	47	54	62	69	76	83	90

ce qui montre que la convergence est bien *linéaire*.

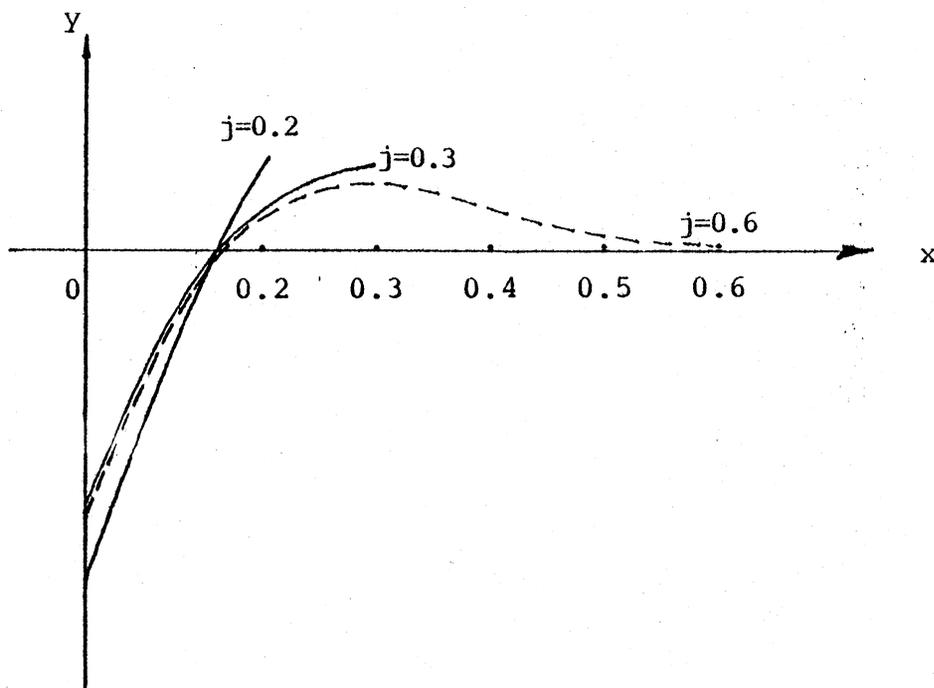
ii) influence de

On vérifie que la convergence ne dépend pas de ε choisi dans l'intervalle $]0, \mu^2]$ ce qui indique expérimentalement que l'estimation sur $|Du|_\infty$ semble être donnée par la pente à l'origine.

iii) influence de h et j

Les essais numériques sur ces paramètres sont limités car il se pose rapidement des problèmes de taille mémoire et de temps de calcul.

Les courbes suivantes montrent l'effet de troncature dû au choix du support et indiquent qu'il n'est pas utile de choisir j trop grand (ce que l'on sait par la physique du problème).



BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.G. CIARLET : "The finite element method for elliptic problems".
Studies in Mathematics and its Applications.
North-Holland, (1978).
- [2] L. COUDURIER, N. EUSTATOPOULOS, J.C. GJOUD, P. DESRE :
"Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb
liquide sous l'effet des forces capillaires".
Journal de Chimie Physique, 3, 289-294 (1977).
- [3] J. DUCHON, R. ROBERT : "Creusement d'un sillon par
capillarité. Un modèle approché".
Rapport de Recherche Imag n° 280, (1981).
- [4] J. DUCHON, R. ROBERT : "A nonlinear singular integro-
differential equation arising in surface chemistry".
A paraître dans J. Diff. Equation (1983).



AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. ..R. GŁOWINSKI.....

M. ..J. M. LASRY.....

M. ..R. ROBERT.....

M. ..P. WITOMSKI..... est autorisé à
présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à Grenoble, le 21 NOV. 1983

Le Président de l'U.S.M.G.



B. Tanché
Président
M. TANCHE

