THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERISTÉ DE POITIERS
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 25 avril 2002)

ÉCOLE DOCTORALE : SCIENCE POUR L'INGÉNIEUR
SECTEUR DE RECHERCHE : MÉCANIQUE DES FLUIDES

présentée par

Paul FERREY

MODÈLES AUX TENSIONS DE REYNOLDS AVEC PRISE EN COMPTE DE L'INTERMITTENCE DE FRONTIÈRE

Directeur de thèse :

T.	**ALZIARY DE ROQUEFORT**	LEA Poitiers
B.	**AUPOIX**	ONERA Toulouse

soutenue le 06 décembre 2004
devant la Commission d'Examen

JURY

MM.	J.	PIQUET	Président
	J.B.	CAZALBOU	Rapporteur
	D.	LAURENCE	Rapporteur
	T.	ALZIARY DE ROQUEFORT	
	B.	AUPOIX	
	E.	PAULOUIN	DGA

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier Monsieur Jean Piquet d'avoir présidé le jury et Messieurs Jean Bernard Cazalbou et Dominique Laurence pour avoir assumé la charge de rapporteur de cette thèse.

Je remercie mes directeurs de thèse Bertrand Aupoix et Thierry Alziary de Roquefort pour m'avoir encadrer durant ma thèse. Je remercie tout particulièrement Bertrand avec qui j'ai travaillé au DMAE et qui a contribué au bon déroulement de ma thèse.

J'exprime ma reconnaissance à Jean Cousteix pour m'avoir accueilli au sein de son département. Je le remercie également pour les conseils qu'il m'a prodigués sur les méthodes asymptotiques.

Je tiens à remercier Hervé Bezard pour sa convivialité et sa toujours grande disponibilité ainsi que pour m'avoir aider sur SIMIL (ah ce code là je m'en souviendrais !).

Je remercie Corinne Plantade et Christine Pujol pour leur accueil et leur gentillesse.

Je tiens à remercier sincèrement et chaleureusement tous les doctorants que j'ai croisé durant ces trois années et qui ont contribué à la bonne ambiance et au bon déroulement de ma thèse. Pour procéder par ordre chronologique, je remercie tout d'abord Thomas Daris puis Frédéric Louis pour leur indéfectible bonne humeur, Damien Guenot et Christophe Millet pour ses discussions scientifiques toujours passionnantes. Je remercie, pour les parties de coinches débridées et la bonne ambiance qu'il ont su entretenir au DMAE : Thierry Feraille, Cécilia Robatillié, Laure Dupland, Mylène Thiery ("Mimi"), Yann Chauvat ("yanou" ou "l'ours"), Gilles Studer ("Gilou" la star), Damien Biau (dit le "teigneux"), Ludovic Perrin (compositeur émérite de "Polopopopo....") et les derniers arrivants Julien Cliquet et François Chedevergne. Enfin, je remercie spécialement mon collègue de bureau Laurent Albugues pour, entre autres, sa gentillesse et sa disponibilité.

Et qu'auraient été les différents pots sans le SRI ! Merci à Pierre Malecki pour ses discussions de fin de pot (qu'est ce qu'on a pu rigoler avec toi), ainsi que, bien entendu, à Manu et les Nicos pour leur bonne humeur, leur gentillesse légendaire et les bonnes parties de rigolades.

Je tiens également à remercier mes différents compères de karting, dont le très véloce Yves Biscos (j'en ai bavé pour réussir à te suivre !), avec lesquels nous avons écumé les circuits de la région et participé au challenge INTER-CE à Carcassonne. J'ai vraiment passé de bons moments ces fameux samedis matin du challenge INTER-CE. Et je ne parle même pas de l'opportunité qui m'a été donnée, grâce à l'association sportive de l'ONERA, de pouvoir conduire des formules Renault à Nogaro et des voitures sur terre à Fronton ("dose, dose

mais DOSE....”).

Enfin, je remercie ma famille et mes amis qui m’ont soutenu pendant ma thèse.

Table des matières

REMERCIEMENTS

NOTATIONS **vii**

INTRODUCTION **1**

I LA MODÉLISATION EN UN POINT - MODÈLES AUX TENSIONS DE REYNOLDS 3

1 La modélisation en un point **5**
1.1 Le problème de fermeture 5
1.2 Relations constitutives 5
1.3 Hypothèse d'équilibre ou deuxième hypothèse de similitude de Kolmogorov 6
1.4 Les différents niveaux de fermeture 6
1.4.1 Modèles à viscosité turbulente 6
1.4.2 Modèles du second ordre ou aux tensions de Reynolds (RSM) 8

2 Fermeture des équations de transport pour les tensions de Reynolds **11**
2.1 Modélisation du terme de diffusion D_{ij} 11
2.1.1 Daly-Harlow 12
2.1.2 Hanjalic-Launder 12
2.1.3 Mellor-Herring 12
2.1.4 Lumley 13
2.2 Modélisation du terme de redistribution Π_{ij} (corrélation pression-déformation) 13
2.2.1 Partie lente Π^1_{ij} 14
2.2.2 Partie rapide Π^2_{ij} 14
2.3 Modèles pour le tenseur de dissipation ε_{ij} 17
2.3.1 Modélisation isotrope 17
2.3.2 Modélisation anisotrope 17
2.4 Contraintes mathématiques de réalisabilité sur la modélisation 17
2.4.1 Contraintes sur le terme rapide 18
2.4.2 Contraintes sur le terme lent 18
2.5 Quelques modèles aux tensions de Reynolds 19
2.5.1 Modèle IP (Isotropisation de la Production) 19

2.5.2 Modèle de Launder et Shima (1989) . . . 19
2.5.3 Modèle LRR . . . 20
2.5.4 Modèle SSG . . . 20
2.5.5 Tableau récapitulatif . . . 21
2.6 Modèle choisi . . . 22

3 Fermeture de l'équation d'échelle à grand nombre de Reynolds de turbulence 25
3.1 Les différentes fermetures de l'équation d'échelle . . . 25
3.1.1 Fermeture terme à terme . . . 25
3.1.2 Fermeture "a priori" . . . 26
3.2 Équation d'échelle générique . . . 27
3.3 Qualification de l'équation en homogène . . . 28
3.3.1 Turbulence isotrope . . . 28
3.3.2 Turbulence homogène cisaillée . . . 29
3.4 Qualification de l'équation pour améliorer la prévision du décollement . . . 29
3.4.1 Structure de la couche limite 2D incompressible . . . 30
3.4.2 Respect de l'invariance de la loi logarithmique par rapport au gradient de pression . . . 32
3.4.3 Respect de la loi en racine pour les forts gradients de pression adverses . . . 35
3.5 Conclusion . . . 38

II COMPORTEMENT DES MODÈLES DE TURBULENCE AU VOISINAGE D'UNE FRONTIÈRE LIBRE 39

4 Analyse asymptotique au voisinage de la frontière libre 43
4.1 Développement asymptotique local régulier . . . 44
4.2 Dégénérescence des équations . . . 46
4.2.1 Pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow . . . 46
4.2.2 Pour le modèle de diffusion de Hanjalić-Launder . . . 48
4.3 Solutions de la dégénérescence des équations . . . 50
4.3.1 Solutions en puissance . . . 50
4.3.2 Solution paramétrique . . . 50
4.3.3 Solution paramétrique : unique solution significative . . . 51
4.3.4 Étude de la solution paramétrique . . . 52

5 Conséquences de l'analyse asymptotique sur l'étude de la sensibilité des modèles aux conditions extérieures - contraintes revisitées 57
5.1 Sensibilités aux conditions extérieures . . . 57
5.2 Contrainte supplémentaire sur le choix de la grandeur transportée dans l'équation d'échelle . . . 59
5.3 Influence de la viscosité moléculaire . . . 60
5.4 Incompatibilité avec les contraintes sur la structure de la couche limite . . . 61

6 Comparaisons entre le comportement d'un modèle RSM et certains comportements "physiques" à la frontière libre 63
6.1 Comportements physiques 63
6.2 Comparaisons par rapport aux comportements des modèles de turbulence 63
6.3 Étude du comportement de quelques modèles de turbulence à la frontière libre 64

7 Conclusion sur le comportement des modèles au voisinage d'une frontière libre 67

III MODÈLE RSM AVEC FONCTION D'INTERMITTENCE 69

8 Effet de l'intermittence de frontière sur les fermetures en un point 73
8.1 Moyennes conditionnelles 73
8.2 Décomposition des moyennes usuelles avec les moyennes conditionnelles 74
8.3 Méthode de fermeture des équations avec effet d'intermittence en terme de moyennes conventionnelles 75
8.3.1 Partie non turbulente négligeable ? 75
8.3.2 Relations constitutives pour les corrélations portant sur la partie turbulente 76
8.3.3 Équation de transport pour le facteur d'intermittence 77
8.3.4 Modélisation des sauts de vitesse 78
8.4 Comportements physiques au voisinage de la frontière libre 79
8.4.1 Notations au voisinage de la frontière libre : notations dans une couche mince 79
8.4.2 Comportement des sauts de vitesse 80
8.4.3 Comportement des tensions de Reynolds 80

9 Fermeture des équations de transport des tensions de Reynolds 83
9.1 Modélisation de la diffusion turbulente 83
9.1.1 Modélisation sans intermittence 83
9.1.2 Modélisation avec effet d'intermittence 84
9.2 Modélisation de la corrélation pression-vitesse 85
9.2.1 Modélisation dans un écoulement pleinement turbulent 85
9.2.2 Modélisation dans une région intermittente 86
9.2.3 Modélisation du saut de pression 86
9.3 Modélisation de l'ensemble diffusion par la pression et diffusion turbulente 89
9.4 Comparaison avec DNS et expériences : validation de l'approche et calibration des constantes 90

10 Influence de l'intermittence de frontière sur la fermeture de l'équation pour la dissipation 93
10.1 Fermeture sans effet d'intermittence 93
10.2 Décomposition dans les régions intermittentes 93
10.3 Contraintes sur le comportement du modèle au voisinage de la frontière libre 96
10.3.1 Dégénérescences des équations pour la dissipation et pour la viscosité turbulente équivalente au voisinage de la frontière libre 96
10.3.2 Contraintes sur le comportement du temps caractéristique de la turbulence k/ε 97
10.3.3 Contraintes sur le comportement de $l = k^{1,5}/\varepsilon$ 100

10.4 Conclusion sur le modèle pour l'équation d'échelle avec effet d'intermittence 100

11 Modèle simplifié 101
11.1 Modèle pour les équations aux tensions de Reynolds 102
11.2 Équation de transport pour γ 103
11.3 Modèle pour l'équation de transport de la dissipation 103
11.4 Généricité du modèle 104
11.5 Comportement à la frontière libre des variables transportées standards 104
11.6 Comportements physiques du modèle et calage de certaines constantes 105
11.7 Implantation du modèle dans un code de calcul 106

12 Conclusion sur le modèle développé 107

IV QUALIFICATION DU MODÈLE AVEC FONCTION D'INTERMITTENCE 109

13 Qualification du modèle sur les écoulements vérifiant les hypothèses de similitude 113
13.1 Écoulements étudiés 113
13.1.1 Similitude des écoulements étudiés 113
13.1.2 Équations de transport écrites en variable de similitude 117
13.2 Calibration du modèle 118
13.2.1 Méthode de calibration : étude paramétrique 118
13.2.2 Choix de la grandeur transportée dans l'équation d'échelle 119
13.2.3 Modèle calibré 119
13.3 Comportement du modèle optimisé $SSG - \gamma$ sur les écoulements cisaillés libres 120
13.3.1 Couche de mélange 120
13.3.2 Jet plan 122
13.3.3 Jet rond 123
13.3.4 Sillage 125
13.4 Région externe de la couche limite 125
13.4.1 Couche limite sans gradient de pression ($\beta = 0$) 125
13.4.2 Couche limite avec gradient de pression adverse modéré ($\beta \simeq 5$) 126
13.4.3 Couche limite avec gradient de pression adverse élevé ($\beta = 20$) 126

14 Qualification du modèle en couche limite 139
14.1 Modélisation des effets de paroi 139
14.1.1 Comportements théoriques au voisinage de la paroi 139
14.1.2 Équations de transport des tensions de Reynolds 139
14.1.3 Équation d'échelle : choix de la grandeur transportée dans 3C3D 140
14.2 Calculs de couches limites bidimensionnelles avec 3C3D 141
14.2.1 Couche limite sur plaque plane 141
14.2.2 Couches limites à divers gradients de pression adverse 143
14.2.3 Analyse des résultats et conclusions 145
14.3 Couche limite tridimensionnelle : cas de l'aile GARTEUR 146

14.3.1 Présentation de l'expérience . . . 146
14.3.2 Calculs extrados . . . 146
14.3.3 Analyse des résultats en mode inverse sur l'extrados . . . 147
14.4 Conclusion sur les performances du modèle $SSG - \gamma$ en couche limite . . . 149

CONCLUSION **173**

V Annexes **175**

A Dégénérescence significative d'un modèle à deux équations **177**

B Dégénérescence significative des équations aux tensions de Reynolds pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow **181**
B.1 Équation du mouvement . . . 182
B.2 Équation pour k . . . 182
B.3 Équation pour $\overline{v'^2}$ . . . 184
B.4 Équations pour $\overline{u'^2}$, $\overline{w'^2}$ et $\overline{u'v'}$ . . . 185

C Calcul de la solution paramétrique **187**

D Démonstration du caractère significatif de la solution paramétrique **189**

E Calcul de la solution paramétrique pour les cas particuliers $b = 0$ et $\Delta = 0$ **193**
E.1 Cas $b = 0$ . . . 193
E.2 Cas $\Delta = 0$ . . . 194

F Autres tentatives de modification de l'équation d'échelle **195**
F.1 Définition du modèle pour l'équation d'échelle . . . 195
F.2 Optimisation du modèle RSM sur les écoulements libres . . . 196
F.3 Fonction correctrice sur $C_{\omega 1}$ . . . 197
F.3.1 Comportement dans la région logarithmique . . . 197
F.3.2 Comportement dans la région en racine . . . 197
F.3.3 Construction de la fonction correctrice . . . 197
F.3.4 Tests en couche limite . . . 198
F.4 Conclusion . . . 202

NOTATIONS

Lettres latines

a_{ij}	tenseur d'anisotropie des tensions de Reynolds	$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$
b_{ij}	tenseur d'anisotropie des tensions de Reynolds	$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$
C_f	coefficient de frottement	$C_f = 2\tau_p/\rho_e u_e^2$
D_{ij}	terme de diffusion turbulente et par la pression	
II_a	second invariant du tenseur d'anisotropie a_{ij}	$II_a = a_{ij}a_{ij}$
II_b	second invariant du tenseur d'anisotropie b_{ij}	$II_b = b_{ij}b_{ij}$
III_a	troisième invariant du tenseur d'anisotropie a_{ij}	$III_a = a_{ij}a_{jk}a_{ki}$
e_{ij}	déviateur du tenseur de dissipation ε_{ij}	$e_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} - 2/3\delta_{ij}$
F	facteur d'aplatissement	$F = 1 - 4,5\,II_a + 9\,III_a$
I	fonction indicatrice du caractère turbulent ou non-turbulent	$I = 1$ ou 0
k	énergie cinétique de turbulence	$k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$
l ou l^*	échelle de longueur caractéristique de la turbulence	
P	pression statique	
p^+	paramètre de pression en zone interne	$p^+ = \frac{\nu}{\rho u_\tau^3}\frac{dP}{dx}$
P_{ij}	terme de production dans l'équation de transport de $\overline{u'_i u'_j}$	$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}$
P_k	production d'énergie cinétique de turbulence	$P_k = \frac{1}{2}P_{ii}$
Q_{ij}		$Q_{ij} = -\overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_i}$
Q		$Q = \frac{1}{2}Q_{ii} = P_k$
R_t	nombre de Reynolds turbulent	$R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$
R_θ	nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement θ	$R_\theta = \frac{U_e\theta}{\nu}$
S_{ij}	Tenseur des taux de déformation moyenne	$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)$
S		$S = \sqrt{2\,S_{ij}S_{ij}}$

u_i	vitesse instantanée	
U_i	vitesse moyenne	$U_i = \overline{U_i} =< u_i >$
u_i'	fluctuation de vitesse	$u_i' = u_i - U_i$
$\overline{u_i' u_j'}$	tenseur de Reynolds	
U_e	vitesse U à la frontière externe d'une couche limite (i.e. lorsque $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$)	
u^+	vitesse réduite en notation de paroi	$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$
u_τ	vitesse de frottement	$u_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho_p}$
y^+	coordonnée de paroi réduite	$y^+ = \frac{y u \tau}{\nu}$
$\vec{V}$	vecteur vitesse dans le repère global	

Lettres grecques

β	paramètre adimensionné de gradient de pression en zone externe	$\beta = \frac{\delta_1}{\tau_p}\frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta}{u_\tau}\frac{dU_e}{dx}$
β^*	paramètre adimensionné de gradient de pression en zone externe	$\beta^* = -\frac{\delta}{u_\tau}\frac{dU_e}{dx}$
δ	épaisseur conventionnelle de la couche limite	
δ_1	épaisseur de déplacement	$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy$
Δ	épaisseur de Clauser	$\Delta = \frac{\delta_1}{\sqrt{C_f/2}}$
δ_{ij}	symbole de Kronecker	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
ε	dissipation ou pseudo-dissipation	$\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}}$
ε_{ij}	tenseur de dissipation	$\varepsilon_{ij} = \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}$
$\widehat{\varepsilon}$	dissipation ou taux cinématique de dissipation par agitation turbulente	$\widehat{\varepsilon} = \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}$
γ	facteur d'intermittence	$\gamma = \overline{I}$
κ	constante de von Kármán	$\kappa = 0,41$
μ	coefficient de viscosité dynamique du fluide	
ν	coefficient de viscosité cinématique du fluide	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$
ν_t	vicsosité turbulente	$\nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}$
ν_t^{eq}	vicsosité turbulente équivalente pour un modèle RSM	$\nu_t^{eq} = \frac{k\overline{v'^2}}{\varepsilon}$
Ω_{ij}	tenseur des taux de rotation moyenne	$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)$
Π_{ij}	corrélation pression-déformation	$\Pi_{ii} = \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}$
Π_{ij}^1	terme lent de la corrélation pression-déformation	
Π_{ij}^2	terme rapide de la corrélation pression-déformation	
ρ	masse volumique	
τ	temps caractéristique de la turbulence	
τ_p	contrainte de frottement pariétale (Pa)	$\tau_p = \left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)_p$
θ	épaisseur de quantité de mouvement	$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy$
ξ	petit paramètre de l'étude asymptotique	

Exposants et indices

$^+$	Grandeur adimensionnée en variable de paroi	
$_e$	relatif aux conditions à la frontière extérieure d'une couche mince	
$_p$	relatif aux conditions à la paroi	
$_t$	valeur turbulente	
$\overline{(\,)}$	moyenne statistique	
$\widetilde{(\,)}$	moyenne conditionnelle turbulente	$\widetilde{(\,)} = \frac{\overline{I.()}}{\gamma}$
$\overline{\overline{(\,)}}$	moyenne conditionnelle non-turbulente	$\overline{\overline{(\,)}} = \frac{\overline{(1-I).()}}{(1-\gamma)}$

Notations impilictes au voisinage d'une frontière libre

y	direction transversale perpendiculaire à la surface de la frontière libre.	
x	direction tangente à la frontière libre	
z	direction orthogonale à x et y	
λ	distance à la frontière libre	$\lambda = y_e - y$
$\widehat{\lambda}$	distance réduite à la frontière libre et variable locale	$\widehat{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta(\xi)}$
U	vitesse selon la direction x	
V	vitesse transversale à la frontière libre selon y	
W	vitesse perpendiculaire à U et V soit selon z	

INTRODUCTION

La turbulence est un phénomène fréquemment rencontré dans les écoulements de fluide comme l'air. Par exemple, lorsqu'un corps aérodynamique se déplace suffisamment vite dans l'air, il génère de la turbulence dans les couches limites près des parois ainsi que dans son sillage. L'atmosphère terrestre est également un écoulement turbulent. Le développement de la puissance des calculateurs ces trente dernières années a conduit les industriels à s'intéresser de plus en plus à la simulation numérique des écoulements turbulents qui reste bien moins onéreuse qu'une approche expérimentale.

La résolution directe des équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent est encore trop coûteuse en temps et se limite à des nombres de Reynolds peu élevés (temps de calcul évoluant comme un nombre de Reynolds puissance trois). La technique de la simulation des grandes échelles LES (large Eddy Simulation) est elle aussi encore trop souvent coûteuse en temps de calcul pour des calculs d'intérêt industriel. Or, bien souvent, seules certaines grandeurs statistiques (moyennes, écarts types,...) sont suffisantes pour caractériser une traînée ou une portance ou encore des échanges thermiques moyens. Pour ne calculer que certaines grandeurs statistiques de la turbulence, la modélisation en un point de la turbulence est suffisante. La rapidité de calcul qu'offre cette modélisation de la turbulence en fait le moyen le plus utilisé actuellement dans l'industrie.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet européen FLOMANIA ("Flow Physics Modelling : An Integrated Approach"). L'objectif de ce projet européen est de supporter l'industrie aéronautique européenne en créant un lien entre les travaux de recherche sur la turbulence et les applications d'intérêt industriel. Notre contribution dans ce projet intervient au niveau de la modélisation de la turbulence par des modèles de turbulence en un point du second ordre appelés modèles aux tensions de Reynolds ou RSM ("Reynolds Stress Models"). L'objectif est de proposer un modèle qui améliore la prévision de couches limites en situation proche du décollement. Le calcul de la portance et de la traînée d'une aile dans des configurations proches du décollement intéresse en effet fortement l'industrie aéronautique européenne et les modèles aux tensions de Reynolds restent incapables de reproduire correctement ce type d'écoulement. Dans ce but, les travaux effectués par Catris (1999) ont été étendus par Flachard (2000) aux modèles RSM. Nous reprenons donc la suite de Flachard afin de poursuivre ses travaux et d'aboutir à un modèle RSM qui remplisse les objectifs qui lui ont été imposés. La modélisation se limitera, toujours dans le cadre de FLOMANIA, aux écoulements incompressibles et stationnaires en moyenne.

Ce mémoire se décompose en quatre parties. La première présente dans un premier temps une étude bibliographique sur les modèles aux tensions de Reynolds. Dans un second temps, la modélisation de l'équation d'échelle (équation nécessaire au calcul de l'échelle de longueur des grosses structures) est étudiée. Cette équation de transport est l'équation sur laquelle porteront les principaux développements afin que les modèles RSM soient capables de reproduire correctement une couche limite proche du décollement. Pour cela, le modèle doit

reproduire correctement l'influence d'un gradient de pression adverse, modéré ou intense, sur la structure de la couche limite.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude du comportement des modèles de turbulence (RSM et à deux équations) au voisinage d'une frontière libre c'est à dire d'une interface entre un écoulement turbulent et un écoulement laminaire ou du moins faiblement turbulent. L'étude de Cazalbou et al. (1993) a été ici réexaminée et complétée. L'objectif de cette analyse théorique est de faire ressortir des contraintes à appliquer au modèle afin que ce dernier vérifie certains comportements physiques tels que le fait que l'écoulement turbulent ne soit pas dépendant des conditions extérieures lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro. Il en effet préférable que le calcul numérique ne soit pas dépendant de ce type de paramètres sans quoi le résultat du calcul aurait un caractère arbitraire. Ces contraintes ont d'autant plus d'importance que la plupart des écoulements turbulent en aérodynamique externe, telles que les couches limites et les sillages, possèdent une frontière libre.

La troisième partie présente la construction d'un modèle RSM avec effet d'intermittence de frontière. L'étude théorique de la seconde partie nous a en effet amené, pour respecter les objectifs fixés, à prendre en compte l'effet de l'intermittence de frontière sur les diverses fermetures en un point d'un modèle aux tensions de Reynolds. Le phénomène d'intermittence de frontière est caractéristique de toute frontière libre entre un écoulement turbulent et un écoulement faiblement turbulent ou laminaire. L'observation d'une fumée sortant d'une cheminée ou bien de la frontière libre d'une couche limite, d'un sillage ou d'une couche de mélange montre en effet que sa frontière n'est pas régulière mais au contraire échancrée. Ce phénomène d'intermittence rend les relations constitutives obsolètes comme l'ont fait remarquer Cazalbou et Bradshaw (1993) sur les DNS de Spalart (1988) en plaque plane. Une explication de cette déficience est que le temps caractéristique de la turbulence utilisé pour les fermetures en un point est difficilement définissable lorsque l'écoulement est, selon l'instant considéré, turbulent ou non-turbulent. Plusieurs modèles tenant compte de l'effet d'intermittence de frontière sur les fermetures ont été développés par Cebeci et Smith (1974), Byggstoyl et Kollmann (1981, 1986a,b) et Cho et Chung (1992). La méthode employée ici pour fermer les équations aux tensions de Reynolds et l'équation d'échelle sera différente des méthodes employées précédemment : elle se situe en quelque sorte à mi-chemin entre le modèle de Cho et Chung et les modèles RSM développés par Byggstoyl et Kollmann. Dans un premier temps, une étude de l'influence de l'intermittence de frontière sur les fermetures en un point sera réalisée sur les termes de diffusion dans les équations de transport des tensions de Reynolds ainsi que sur l'équation de transport de la dissipation. Un modèle simplifié a été dérivé de cette étude afin qu'il puisse être implanté dans le code Navier-Stokes elsA.

La performance d'un modèle de turbulence sur une configuration complexe passe d'abord par l'amélioration de ses performances sur des écoulements plus simples représentatifs des écoulements turbulents en aérodynamique externe. C'est pourquoi la dernière partie est dédiée à la qualification et à l'optimisation du modèle construit dans la partie précédente sur des écoulements types tels que les écoulement libres (couche de mélange, sillage, jet plan et jet axisymétrique) et la couche limite pour divers gradients de pression. Les performances du modèle sont également estimées sur une configuration de couche limite tridimensionnelle plus proche des applications industrielles (aile GARTEUR).

Première partie

LA MODÉLISATION EN UN POINT - MODÈLES AUX TENSIONS DE REYNOLDS

Chapitre 1

La modélisation en un point

1.1 Le problème de fermeture

Les équations de la mécanique des fluides pour un fluide incompressible sont constituées des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \, \partial x_j} \tag{1.2}$$

Dans le cadre de la modélisation en un point de la turbulence, on ne s'intéresse qu'aux moyennes statistiques de la vitesse et de la pression. On décompose ainsi les grandeurs instantanées selon la règle de Reynolds :

$$\begin{aligned} u_i &= \overline{U}_i + u_i' \\ P &= \overline{P} + p' \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $\overline{(\,)}$ désigne la moyenne statistique et $(\,)'$ la valeur fluctuante. Les équations (1.1) sont dès lors moyennées par la moyenne statistique :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \, \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \tag{1.5}$$

L'effet de la moyenne engendre bien entendu une perte d'information, caractérisée ici par l'apparition d'une corrélation inconnue $\overline{u_i' u_j'}$ appelée tenseur de Reynolds. Pour résoudre ce problème de fermeture, il est nécessaire d'introduire des relations constitutives pour relier le tenseur de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$ à d'autres corrélations ou moyennes connues ou calculables.

1.2 Relations constitutives

En accord avec Truesdell (1974), une relation constitutive dans le cadre de la modélisation de la turbulence en un point doit satisfaire à trois principes :

1. indifférence matérielle, c'est à dire invariance par changement de repère
2. déterminisme (l'état d'un système est déterminé par son histoire)
3. action locale c'est à dire que les corrélations inconnues dépendent uniquement des caractéristiques locales de la turbulence et du champ moyen

auxquels il faut ajouter le principe de compatibilité pour que le modèle ait les mêmes caractéristiques tensorielles que le terme exact qu'il représente. La notion d'action locale est problématique en turbulence car il existe une "mémoire spatiale" (cohérence spatiale) de l'ordre de l'échelle intégrale Λ. Peut on alors établir des relations constitutives en un point pour des grandeurs statistiques ? Comme le fait remarquer Chassaing (2000), une large communauté scientifique (Pope, Speziale, Lumley...) s'accorde pour admettre le principe de localité en turbulence en guise de première approximation pour l'élaboration de schémas de fermeture.

Le principe de ces fermetures en un point est donc de relier les corrélations inconnues au champ moyen ainsi qu'aux caractéristiques locales des structures porteuses d'énergie (appelées aussi grosses structures) telles que leur échelle de longueur ou de vitesse caractéristique.

1.3 Hypothèse d'équilibre ou deuxième hypothèse de similitude de Kolmogorov

Les petites structures sont reliées aux plus grandes par le principe de la cascade d'énergie (des plus grandes échelles vers les plus petites) dû au caractère non linéaire des équations de Navier-Stokes. Une hypothèse d'équilibre de la turbulence permet en effet de relier la dissipation aux caractéristiques des grosses structures. Cette hypothèse d'équilibre revient à supposer que le temps caractéristique de la dissipation est égal au temps caractéristique de la turbulence. On parle donc aussi d'hypothèse d'échelle de temps unique en lieu et place d'hypothèse d'équilibre. On obtient alors une relation explicite entre la dissipation et le temps caractéristique de la turbulence égal au temps caractéristique des grosses structures à nombre de Reynolds turbulent élevé :

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon} \tag{1.6}$$

L'hypothèse d'équilibre est valable en turbulence pleinement développée.

1.4 Les différents niveaux de fermeture

1.4.1 Modèles à viscosité turbulente

L'idée de Prandlt est de considérer que la turbulence agit comme une diffusion supplémentaire à la diffusion moléculaire. Boussinesq relie ainsi le tenseur de Reynolds au champ moyen par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente ν_t :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \tag{1.7}$$

qui se généralise sous la forme suivante :

$$-\overline{u_i' u_j'} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.8}$$

L'objectif des modèles à deux équations est de calculer la viscosité turbulente ν_t afin de déterminer le champ de vitesse moyen. Cette viscosité turbulente peut s'écrire dimensionnellement sous la forme d'un produit entre une échelle de vitesse u^* et une échelle de longueur l^* caractéristique de la turbulence :

$$\nu_t \sim u^* \, l^* \tag{1.9}$$

Le principe de certains modèles de turbulence est donc de déterminer à la fois une échelle de vitesse et une échelle longueur caractéristique de la turbulence (soit en fait des structures porteuses d'énergie) :

1. l'échelle de vitesse est souvent déduite de l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ car $u^* \sim \sqrt{k}$
2. l'échelle de longueur l^* est calculée soit via une relation algébrique soit via une équation de transport

Modèles de longueur de mélange

La particularité des modèles de longueur de mélange est de calculer l'échelle de vitesse u^* non pas à l'aide de k mais par une relation algébrique. Pour cela, l'échelle de temps $\tau^* = l^*/u^*$ est estimée de la façon suivante :

$$\tau^* \propto \frac{1}{S} \tag{1.10}$$

Dès lors la viscosité turbulente est modélisée par une relation du type :

$$\nu_t = F^2 l^{*2} \sqrt{2\, S_{ij} S_{ij}} \quad \text{avec} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.11}$$

qui se simplifie en couche mince :

$$\nu_t = F^2 l^{*2} \sqrt{\left(\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial y}\right)^2\right)} \tag{1.12}$$

L'échelle de longueur des grosses structures l^* est modélisée via une relation algébrique. Michel modélise l^* sous la forme suivante :

$$\frac{l^*}{\delta} = 0,085 \tanh\left(\frac{\kappa}{0,085}\frac{y}{\delta}\right) \tag{1.13}$$

Modèle à une équation de transport sur ν_t

Le modèle de Spalart et Allmaras (1992, 1994) utilise une équation de transport pour ν_t de la forme :

$$\frac{D\nu_t}{Dt} = C_{b1} S \nu_t + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu_t \frac{\partial \nu_t}{\partial x_k}\right) + c_{b2}\frac{\partial \nu_t}{\partial x_k}\frac{\partial \nu_t}{\partial x_k}\right] \text{ où } S = \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \text{ et } \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.14}$$

Cela nous donne accès aux contraintes croisées ($\overline{u'v'}$ en particulier), ce qui est suffisant en couche mince (couche de mélange, couche limite, jets...) pour fermer les équations du mouvement moyennées. Ce modèle de Spalart et Allmaras (1992, 1994) est également utilisé en Navier-Stokes : l'énergie cinétique turbulente k issue de la relation de Boussinesq généralisée n'a pas besoin d'être calculée car elle est regroupée avec le terme de pression dans les équations du mouvement. Ce type de modèles présente l'intérêt d'être simple, robuste et rapide d'un point de vue temps de calcul.

Modèles à une ou deux équations

Le principe de ces modèles est de calculer, via son équation de transport, l'énergie cinétique turbulente k. Cette équation de transport est souvent modélisée sous la forme :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + \frac{1}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left((\nu_t + \nu)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right) \tag{1.15}$$

où $P_k = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ est le terme de production de l'équation de transport. L'échelle de vitesse des grosses structures est dès lors connue. Pour fermer les équations du mouvement moyennées à partir de la relation de Boussinesq, il reste seulement à calculer l'échelle de longueur l. Pour un modèle à une équation, cette dernière est calculée via la relation algébrique comme pour les modèles de longueur de mélange. Pour un modèle à deux équations, une équation de transport pour une grandeur reliée explicitement à l'échelle de longueur caractéristique des grosses structures l^* est utilisée pour calculer cette échelle de longueur.

La limitation de ce type de fermeture à viscosité turbulente est la perte de certains effets d'histoire de la turbulence en reliant localement les échelles caractéristiques des grosses structures à l'écoulement moyen. Une alternative pour contourner cette limitation est d'utiliser un modèle d'ordre supérieur où les tensions de Reynolds sont calculées à partir de leur équation de transport et non par une relation algébrique.

1.4.2 Modèles du second ordre ou aux tensions de Reynolds (RSM)

En incompressible, les équations de transport des tensions de Reynolds, obtenues à partir des équations du mouvement (1.2), se mettent sous la forme suivante :

$$\frac{D\overline{u_i' u_j'}}{Dt} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} + D_{ij} + D_{ij}^{\nu} \tag{1.16}$$

où :

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= -\overline{u_i' u_k'}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \overline{u_j' u_k'}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} \quad \text{(production)} \\
\Pi_{ij} &= \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} \quad \text{(redistribution)} \\
\varepsilon_{ij} &= 2\,\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}} \quad \text{(dissipation)} \\
D_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i' u_j' u_k'} + \overline{\frac{p'}{\rho}\left(u_i'\delta_{jk} + u_j'\delta_{ik}\right)}\right) \quad \text{(diffusion)} \\
D_{ij}^{\nu} &= \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k\,\partial x_k} \quad \text{(diffusion moléculaire)}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Les termes ε_{ij} , D_{ij} et Π_{ij} nécessitent une fermeture. Une analyse dimensionnelle montre que tous ces termes sont de la dimension suivante :

$$\left[\frac{u^{*2}}{\tau^*}\right] = \left[\frac{u^{*3}}{l^*}\right] \tag{1.18}$$

et donc que la fermeture des corrélations D_{ij}, Π_{ij} et ε_{ij} est envisageable via la connaissance d'une échelle de temps τ^* ou de longueur l^* caractéristique de la turbulence, l'échelle de vitesse étant donnée par le tenseur de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$. Le tenseur de dissipation ε_{ij}, sous l'hypothèse d'équilibre de la turbulence, est en effet relié aux grosses structures par la relation (1.6).

L'échelle de longueur caractéristique de la turbulence est calculée pour les modèles RSM via une équation de transport désignée par la suite par le terme d'**équation d'échelle**. La fermeture de cette équation de transport est donc un des points essentiels des modèles de turbulence en un point et c'est sur cette fermeture que nous nous sommes particulièrement concentré.

L'intérêt des modèles RSM par rapport aux modèles du premier ordre est qu'ils permettent de s'affranchir d'une relation locale entre les tensions de Reynolds et l'écoulement moyen. Ces modèles permettent donc de mieux prendre en compte les effets d'histoire ou encore d'anisotropie de la turbulence.

Des modèles d'ordre supérieur, basés sur la fermeture d'équations de transport d'ordre égal ou supérieur à trois, sont difficilement envisageables, d'une part par le manque de données expérimentales sur ce type de corrélations, et d'autre part par la lourdeur de la démarche engagée. Les modèles RSM constituent donc un bon intermédiaire entre les modèles à viscosité turbulente et les méthodes du type LES.

Chapitre 2

Fermeture des équations de transport pour les tensions de Reynolds

2.1 Modélisation du terme de diffusion D_{ij}

Le terme de diffusion des équations de transport des tensions de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$ est défini de la façon suivante :

$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i' u_j' u_k'} + \overline{\frac{p'}{\rho}\left(u_i'\delta_{jk} + u_j'\delta_{ik}\right)}\right] \tag{2.1}$$

où $D_{ij}^t = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i' u_j' u_k'}\right)$ diffusion turbulente

$D_{ij}^p = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{\frac{p'}{\rho}\left(u_i'\delta_{jk} + u_j'\delta_{ik}\right)}\right]$ diffusion par la pression

Le terme de diffusion par la pression est, de par les travaux de Lumley (1978), souvent intégré dans la diffusion turbulente. En effet, Lumley modélise la corrélation pression-vitesse par l'expression :

$$-\overline{\frac{p'}{\rho}u_i'} = \frac{2}{5}\overline{u_i' k'} \tag{2.2}$$

Les modèles de diffusion présentés par la suite font tous cette hypothèse ou négligent la diffusion par la pression si bien que l'on est ramené au seul problème de fermeture de la corrélation triple $\overline{u_i' u_j' u_k'}$.

Ce terme de corrélation triple est de la forme $\overline{u_i' f'}$. La turbulence ayant tendance à homogénéiser le mélange, on adopte généralement une modélisation de type premier gradient pour ce type de corrélation :

$$\overline{u_i' f'} \simeq -K_f \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i} \text{ pour } f = \overline{F} + f' \tag{2.3}$$

par analogie avec la modélisation des effets visqueux dans les équations du mouvement d'un fluide newtonien, ou avec la modélisation de la diffusion dans la loi de Fick, ou encore avec la modélisation de la diffusion dans l'équation de la chaleur.

Le modèle de diffusion suivant reprend le principe de modélisation par gradient mais sous une forme généralisée nommée GGDH (“Generalized Gradient Diffusion Hypothesis”) pour prendre en compte l’anisotropie spatiale des grosses structures :

$$-\overline{u_i' f'} \simeq K_{ij}^f \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_j} = C\overline{u_i' u_j'}\,\tau \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_j} \tag{2.4}$$

où τ est une échelle de temps caractéristique de la turbulence.

2.1.1 Daly-Harlow

À partir de l’hypothèse généralisée de diffusion par gradient (GGDH) précédente (2.4), Daly et Harlow (1970) construisent un modèle simple pour la diffusion turbulente :

$$D_{ij} = D_{kk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k' u_l'}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}\right) \tag{2.5}$$

Ce modèle pour $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ n’a pas les mêmes propriétés tensorielles que $\overline{u_i' u_j' u_k'}$: si on inverse les indices j et k par exemple, le modèle a un comportement différent alors que $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ reste inchangé. Le modèle de Daly-Harlow ne vérifie donc pas les relations de compatibilité (paragraphe 1.2) avec $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ mais par contre les vérifie au niveau de D_{ij}.

2.1.2 Hanjalic-Launder

Hanjalić et Launder (1972) définissent le modèle suivant à partir d’une fermeture de l’équation pour la corrélation triple $\overline{u_i' u_j' u_k'}$:

$$D_{ij} = D_{kk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_i' u_l'}\frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_l} + \overline{u_j' u_l'}\frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_l} + \overline{u_k' u_l'}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}\right)\right] \tag{2.6}$$

Ce modèle généralise en quelque sorte le modèle de Daly-Harlow pour le rendre compatible avec $\overline{u_i' u_j' u_k'}$.

2.1.3 Mellor-Herring

Le modèle de Mellor et Herring (1973) est une simplification du modèle précédent :

$$D_{ij} = \frac{2}{3}C_S\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}\right)\right] \tag{2.7}$$

Cette modélisation conduit à des résultats moins bons que le modèle, plus simple, de Daly et Harlow. Elle n’offre donc pas d’intérêt et ne sera pas étudiée.

2.1.4 Lumley

En extension du modèle de Hanjalic et Launder, Lumley (1978) construit le modèle suivant :

$$D_{ij} = C_S^1 \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{k}{\varepsilon}\left(G_{ijk} + C_S^2\left(G_{ill}\delta_{jk} + G_{jll}\delta_{ik} + G_{kll}\delta_{ij}\right)\right)\right] \tag{2.8}$$

avec :

$$G_{ijk} = \overline{u_i' u_l'}\frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_l} + \overline{u_j' u_l'}\frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_l} + \overline{u_k' u_l'}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}$$

2.2 Modélisation du terme de redistribution Π_{ij} (corrélation pression-déformation)

Le terme de redistribution, comme son nom l'indique, est en grande partie responsable des échanges d'énergie entre les différentes tensions. Il conditionne grandement la qualité de la modélisation du tenseur de Reynolds.

Rappelons tout d'abord l'équation pour la pression fluctuante issue des équations du mouvement :

$$-\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\,\partial x_i} = 2\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_m'}{\partial x_l} + \frac{\partial^2}{\partial x_m\,\partial x_l}\left(u_m' u_l' - \overline{u_m' u_l'}\right) \tag{2.9}$$

Ainsi pour connaître la pression fluctuante en un point $B(x_{i,0})$ de l'écoulement, il faut connaître le champ de vitesse moyen et fluctuant en tout point $A(x_i)$. Ce caractère non local est à l'origine d'une des difficultés majeures de l'étude de la turbulence par la modélisation en un point.

En multipliant l'équation de Poisson par $\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B$, il vient :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_i}\left[p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B\right] = 2\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_m'}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B + \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B \frac{\partial^2}{\partial x_m\,\partial x_l}\left(u_m' u_l' - \overline{u_m' u_l'}\right) \tag{2.10}$$

Entre deux point A et B suffisamment éloignés, la moyenne statistique de $p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B$ est nulle. On suppose donc que l'on peut intégrer l'équation ci-dessus sur un domaine assez grand. En intégrant sur ce domaine, loin des parois et en prenant la moyenne statistique, il vient :

$$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B} = \Pi_{ij,1}^* + \Pi_{ij,2}^* \tag{2.11a}$$

$$\Pi_{ij,1}^* = \frac{1}{4\pi}\int_{Vol.} \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B \frac{\partial^2 u_m' u_l'}{\partial x_m\,\partial x_l}}\frac{dVol}{|AB|} \tag{2.11b}$$

$$\Pi_{ij,2}^* = \frac{1}{2\pi}\int_{Vol.} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m}\overline{\frac{\partial u_m'}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_{j,0}}\right)_B}\frac{dVol}{|AB|} \tag{2.11c}$$

Ainsi le terme de redistribution se décompose en :

1. une partie $\Pi_{ij,2}$ dite rapide : elle réagit immédiatement au gradient de vitesse car elle en dépend de manière linéaire

2. une partie $\Pi_{ij,1}$ dite lente car elle fait seulement intervenir des fluctuations de vitesse.

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,2} \quad \text{avec} \quad \Pi_{ij,1} = \Pi^*_{ij,1} + \Pi^*_{ji,1} \text{ et } \Pi_{ij,2} = \Pi^*_{ij,2} + \Pi^*_{ji,2} \tag{2.12}$$

Il est à noter que la présence d'une paroi génère une intégrale supplémentaire dans la solution de l'équation de Poisson (Chassaing, 2000).

2.2.1 Partie lente Π^1_{ij}

Cette partie lente de la corrélation pression-déformation agit comme un terme de retour à l'isotropie. En effet, dans le cas d'un écoulement homogène à gradient de vitesse moyenne nul, les équations aux tensions de Reynolds se réduisent à :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = \Pi^1_{ij} + \varepsilon_{ij} = \Pi^1_{ij} + e_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{2.13}$$

avec e_{ij} déviateur du tenseur d'anisotropie. En outre :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon \Longrightarrow \Pi^1_{ij} + e_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) \tag{2.14}$$

L'ensemble $\Pi^1_{ij} + e_{ij}$ assure donc le retour à l'isotropie. Le terme lent ou l'ensemble $\Pi^1_{ij} + e_{ij}$ est alors modélisé généralement comme une fonction du tenseur d'anisotropie des tensions de Reynolds $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j}/k - 2/3\delta_{ij}$ et de la dissipation. Le théorème de Cayley-Hamilton limite le développement aux termes ci-dessous :

$$\Pi_{ij,1} = \alpha_0\, \varepsilon\, a_{ij} + \alpha_1\, \varepsilon \left(a_{ik}a_{kj} - \frac{II_a}{3}\delta_{ij}\right) \tag{2.15}$$

2.2.2 Partie rapide Π^2_{ij}

Modélisation homogène

Sous l'hypothèse de turbulence homogène, le gradient de vitesse peut être sorti de l'intégrale de volume :

$$\Pi^*_{ij,2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m} \underbrace{\int_{Vol.} \overline{\frac{\partial u'_m}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_{j,0}}\right)_B \frac{dVol}{|AB|}}}_{M_{milj}} \tag{2.16}$$

Pour traduire l'hypothèse d'écoulement homogène, le changement de variables suivant est effectué :

$$\begin{pmatrix} x_{i,0} \\ x_i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_i = x_{i,0} \\ \xi_i = x_i - x_{i,0} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Soit R_{im} la corrélation double des vitesses en deux points :

$$R_{im}\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{\xi}, t\right) = \overline{u'_i\left(B(\overline{x_0}), t\right)\, u'_m\left(A(\overline{x}), t\right)} \tag{2.18}$$

Étant donné que X_i et x_i sont des variables indépendantes en turbulence homogène, il vient :

$$\overline{\frac{\partial u'_m(A,t)}{\partial x_l}\frac{\partial u'_i(B,t)}{\partial x_{j,0}}} = \frac{\partial^2 R_{im}}{\partial X_j\,\partial \xi_l} - \frac{\partial^2 R_{im}}{\partial \xi_j\,\partial \xi_l} \tag{2.19}$$

En écoulement homogène, la corrélation R_{im} ne dépend pas de X_j mais seulement du vecteur $\overrightarrow{\xi}$. On en déduit :

$$M_{imlj} = -\frac{1}{2\Pi}\int_{Vol}\frac{\partial^2 R_{im}}{\partial \xi_j\,\partial \xi_l}\frac{dVol}{\left|\overrightarrow{\xi}\right|} \tag{2.20}$$

De là on en déduit que le tenseur du quatrième ordre vérifie les propriétés suivantes :

$$M_{injn} = M_{ninj} = 0 \text{ (équation de continuité)} \tag{2.21a}$$
$$M_{ijpq} = M_{ijqp} = M_{jiqp} \text{ (conditions de symétrie)} \tag{2.21b}$$
$$M_{ijnn} = \overline{u'_i u'_j} \text{ (formule de Green)} \tag{2.21c}$$

On peut ainsi exprimer la partie rapide de la corrélation pression-déformation sous la forme :

$$\Pi_{ij,2} = 2\left(S_{pq} + \Omega_{pq}\right)\left(M_{iqpj} + M_{jqpi}\right) \tag{2.22}$$

En supposant que le tenseur M ne soit dépendant que de l'anisotropie des tensions de Reynolds $b_{ij} = \overline{u'_i u'_j}/2k - 1/3\delta_{ij}$, en s'appuyant sur le théorème de Cayley-Hamilton et en imposant au modèle d'être invariant par changement de repère (cf. relation constitutive 1.2), Reynolds et Kassinos (1995) puis Hallbäck et al. (1989) donnent l'expression la plus générale du tenseur d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\frac{M_{ijpq}}{2k} = {} & c_1\delta_{ij}\delta pq + c_2\left(\delta_{ip}\delta jq + \delta_{iq}\delta_{jp}\right) + c_3\delta_{ij}b_{pq} + c_4\delta_{pq}b_{jp} \\ & + c_5\left(\delta_{ip}b_{jq} + \delta_{iq}b_{jp} + \delta_{jp}b_{iq} + \delta_{jq}b_{ip}\right) + c_6 b_{pq}^2\delta_{ij} + c_7 b_{ij}^2\delta_{pq} \\ & + c_8\left(\delta_{ip}b_{jq}^2 + \delta_{iq}b_{jp}^2 + \delta_{jp}b_{iq}^2 + \delta_{jq}b_{ip}^2\right) + c_9 b_{ij}b_{pq} + c_{10}\left(b_{ip}b_{jq} + b_{iq}b_{jp}\right) \\ & + c_{11}b_{ij}b_{pq}^2 + c_{12}b_{ij}^2 b_{pq} + c_{13}\left(b_{ip}b_{jq}^2 + b_{iq}b_{jp}^2 + b_{jp}b_{iq}^2 + b_{jq}b_{ip}^2\right) \\ & + c_{14}b_{ij}^2 b_{pq}^2 + c_{15}\left(b_{ip}^2 b_{jq}^2 + b_{iq}^2 b_{jp}^2\right)\end{aligned} \tag{2.23}$$

où les coefficients c_k sont des fonctions des invariants $II_b = b_{ij}b_{ji}$ et $III_b = b_{ij}b_{jk}b_{ki}$.

Modélisation inhomogène

Chou (1945) montre que la modélisation de la partie rapide de la corrélation $\overline{p_{,j}u_i}$, établie en homogène, s'étend en inhomogène :

$$\frac{1}{\rho}\overline{p_{,j}u_i}^{(r)} = -\frac{1}{2\pi}U_{m,n}\int\int\int\left(\overline{u_n^* u_i}\right)^*_{,mj}\frac{1}{r}dV^* \tag{2.24}$$

où $''*''$ signifie que la grandeur est calculée au point A parcourant tout le volume et r désigne la distance entre A et le point B où est évalué la corrélation $\overline{p_{,j}u_i}^{(r)}$. La modélisation ci-dessus est une première approximation car

cela suppose que le gradient de vitesse moyenne $U_{m,n}$ varie plus lentement que la corrélation en deux points $\overline{u_n^* u_i}^*$.

van Slooten et al. (1997) construisent un modèle pour les écoulements inhomogènes, à partir de la fermeture de l'équation pour la PDF (fonction densité de probabilité) de la vitesse. Le modèle ainsi construit pour le terme rapide se présente sous la forme suivante :

$$\Pi_{ij,2} = 2\frac{\partial \overline{U_n}}{\partial x_m}\left(\overline{e_i e_n u'_j u'_m} + \overline{e_j e_n u'_i u'_m}\right) \tag{2.25}$$

où $\overrightarrow{e}$ est le vecteur nombre d'onde normalisé associé aux fluctuations de vitesse, c'est à dire le nombre d'onde de la transformée de Fourier de u'_i. Le terme rapide est donc là encore modélisé comme un terme proportionnel aux gradients de vitesse moyenne. En ce sens, cette modélisation en inhomogène est similaire au modèle de Chou (1945) et ne diffère pas de la modélisation adoptée en homogène (2.22).

Bradshaw et al. (1987) ont montré sur des DNS d'écoulements en canal que cette hypothèse était valable en dehors de la sous-couche visqueuse c'est à dire pour $y^+ > 30$. Launder et Tselepidakis (1988) proposent alors un modèle tenant compte des inhomogénéités de l'écoulement au voisinage d'une paroi en remplaçant le gradient de vitesse en facteur dans le terme rapide (2.25) par un gradient de vitesse effectif :

$$\left.\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\right)_{eff} = \frac{\partial U_n}{\partial x_m} + c_1\, l\, \frac{\partial l}{\partial x_k}\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_k\, \partial x_m} \tag{2.26}$$

où l est une échelle de longueur caractéristique de la turbulence.

En résumé, la modélisation du terme rapide comme une fonction proportionnelle au gradient de vitesse (2.25) s'étend, du moins en première approximation en dehors du voisinage des parois, aux écoulements inhomogènes. Le problème de fermeture est ainsi ramené, que ce soit en écoulement homogène ou non, à la fermeture d'un tenseur d'ordre quatre M_{injm}. Établir une relation constitutive pour ce tenseur consiste, comme on l'a vu au paragraphe 1.2, à le relier aux caractéristiques des grosses structures turbulentes (dimensions, temps caractéristiques, orientations, ...).

Prise en compte des effets de rotation

Par définition, les modèles aux tensions de Reynolds offrent un avantage indéniable par rapport aux modèles à deux équations pour des écoulements soumis à des effets de rotation. Pour autant, la fermeture classique de la partie rapide du terme de corrélation pression-déformation ne peut être qu'imparfaite : que ce soit en écoulement homogène ou inhomogène, le tenseur M_{injm} d'ordre quatre ne peut dépendre du seul tenseur de Reynolds pour les écoulements soumis à des rotations axiales. Comme l'ont noté Reynolds et Kassinos (1995) puis Pope (2000), la partie rapide dépend également de l'orientation des corrélations de vitesses (via le vecteur nombre d'onde e_i), caractéristiques non contenue dans le seul tenseur de Reynolds. En écoulement homogène, une modélisation du type $M = M(\bar{\bar{b}})$ sous l'hypothèse de distorsion rapide est en effet incapable de reproduire un effet de rotation axiale. Des propositions pour ajouter d'autres arguments dans la modélisation de M ont été formulées par Reynolds et Kassinos (1995) et Cambon et al. (1992). Cadiou (1996) propose, en alternative aux modèles classiques, de calculer le tenseur d'ordre quatre M via des équations de transport. van Slooten et al. (1997) utilisent un modèle basé sur la résolution de la PDF de la vitesse ainsi que du vecteur nombre d'onde associé aux fluctuations de vitesse pour prendre en compte ces effets de rotations.

Néanmoins, la modélisation du type $M = M(\bar{\bar{b}})$ sera conservée car on se restreint aux écoulements turbulents cisaillés et non soumis à de fortes rotations axiales.

2.3 Modèles pour le tenseur de dissipation ε_{ij}

2.3.1 Modélisation isotrope

En accord avec les idées de Kolmogorov et sous l'hypothèse de grand nombre de Reynolds de turbulence, le tenseur de dissipation est supposé isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{2.27}$$

2.3.2 Modélisation anisotrope

Plusieurs données expérimentales montrent que le tenseur de dissipation n'est pas isotrope, y compris à Reynolds élevé. Hallbäck et al. (1989) ont en effet publié une étude sur le retour à l'isotropie d'une turbulence après action d'une contraction axiale dans un convergent pour un nombre de Reynolds élevé ($R_\Lambda \simeq 1000$). En dépit de cette valeur du nombre de Reynolds, les mesures des micro échelles de Taylor dans le sens de l'écoulement (λ_x) et perpendiculairement à celui-ci (λ_y) s'établissent, dans le circuit de relaxation, à un rapport (λ_x/λ_y) de l'ordre de 2,6, soit près du double du montant voulu par la situation isotrope ($\lambda_x/\lambda_y = \sqrt{2} \simeq 1,4$). Ces données expérimentales ont été confirmées par Durbin et Speziale (1991) qui, à partir de l'équation de transport exacte de ε_{ij}, montrent qu'un modèle isotrope conduit à un comportement inconsistant et irréaliste.

Hallbäck et al. (1989) modélisent le tenseur de dissipation sous une forme anisotrope de la façon suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} + e_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} + \varepsilon\left[b_{ij} + \alpha\left(b_{ij}\left(\frac{II_b}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(b_{ik}b_{kj} - \frac{II_b}{3}\delta ij\right)\right)\right] \tag{2.28}$$

La partie anisotrope e_{ij} du tenseur de dissipation (cf. Lumley) est donc parfois incluse dans la partie dite lente du terme de corrélation pression-déformation. De plus, e_{ij} participant au retour à l'isotropie (2.14), il est logique de l'intégrer dans le terme de retour à l'isotropie Π_{ij}.

2.4 Contraintes mathématiques de réalisabilité sur la modélisation

Les contraintes de réalisabilité sont des conditions mathématiques sur la modélisation évitant que des comportements aberrants, de type énergie cinétique turbulente k négative, se produisent. Ces contraintes de réalisabilité sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{u'_\alpha u'_\alpha} &\geq 0 \\ \overline{u'_\alpha u'_\beta}^2 &\leq \overline{u'_\alpha u'_\alpha}\,.\,\overline{u'_\beta u'_\beta} \quad \text{(inégalité de Schwartz)} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Il existe néanmoins plusieurs notions de réalisabilité comme la réalisabilité au sens faible ou la réalisabilité au sens fort.

Schumann (1977) et Lumley (1978) définissent les conditions de réalisabilité suivantes pour les valeurs propres $\overline{u'_\alpha u'_\alpha}$ du tenseur de Reynolds :

$$\frac{D\overline{u'_\alpha u'_\alpha}}{Dt} = 0 \quad \text{si} \quad \overline{u'_\alpha u'_\alpha} = 0 \tag{2.30}$$

Mais ces conditions de réalisabilité sont sujettes à controverse. Speziale et al. (1993) prétendent en effet que les conditions précédentes ne sont des conditions ni nécessaires ni suffisantes pour assurer la réalisabilité. Pope (1985) montre d'ailleurs que les contraintes (2.30) doivent être remplacées par $D\overline{u'_\alpha u'_\alpha} \,/\, Dt \geq 0$ pour assurer la positivité des contraintes normales. Toutefois, nous ne présenterons, en guise d'exemple, que les contraintes découlant de la notion de réalisabilité introduites ci-dessus (2.30) par Schumann et Lumley.

Conséquences des contraintes de réalisabilité introduites par Schumann et Lumley sur la modélisation de l'équation de transport des tensions de Reynolds

Le tenseur de dissipation ainsi que le terme lent sont modélisés comme on l'a vu sous la forme $-\varepsilon_{ij} + \Pi_{ij,1} = \varepsilon\left(-2\delta_{ij}/3 + \phi_{ij}\right)$. Si $\overline{u'_\alpha u'_\alpha}$ est la tension normale qui s'annule, son équation de transport s'écrit après fermeture sous la forme :

$$\frac{D\overline{u'_\alpha u'_\alpha}}{Dt} = 4\frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_l} M_{\alpha l \alpha k} + \varepsilon\left(-\frac{2}{3} + \phi_{\alpha\alpha}\right) + D_{\alpha\alpha} + D^\nu_{\alpha\alpha} \tag{2.31}$$

Lorsque $\overline{u'_\alpha u'_\alpha} \to 0$, le membre de droite doit être nul quelle que soit la configuration c'est à dire quelle que soit la dissipation et le gradient de vitesse moyenne. Les trois égalités ci-dessous doivent donc être satisfaites (Schumann (1977) et Lumley (1978)) en $\overline{u'_\alpha u'_\alpha} = 0$:

$$4\frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_l} M_{\alpha l \alpha k} = 0 \tag{2.32a}$$

$$-\frac{2}{3} + \phi_{\alpha\alpha} = 0 \tag{2.32b}$$

$$D_{\alpha\alpha} + D^\nu_{\alpha\alpha} = 0 \tag{2.32c}$$

2.4.1 Contraintes sur le terme rapide

Pour que la relation (2.32a) soit vérifiée quelle que soit le gradient de vitesse moyenne, il est nécessaire d'imposer des relations entre les coefficients du modèle pour le terme rapide. D'autres contraintes (2.21) sur la symétrie ou encore sur l'incompressibilté viennent s'ajouter aux contraintes de réalisabilité. Pour une modélisation du type (2.23) du tenseur M en fonction du seul tenseur de Reynolds, neuf relations sont ainsi obtenues et il reste six coefficients libres. Nous ne détaillerons pas toutes ces relations du fait de leur caractère arbitraire (lié à la condition de réalisabilité de Schumann (1977)). Il s'agit juste de montrer qu'une partie des coefficients du modèle pour le terme rapide est fixée par les conditions de réalisabilité et les conditions (2.21).

2.4.2 Contraintes sur le terme lent

La contrainte (2.32b) appliquée au terme lent signifie que :

$$\phi_{\alpha\alpha} \to \frac{2}{3} \quad \text{si} \quad \overline{u'_\alpha u'_\alpha} \to 0 \tag{2.33}$$

Dans le cas d'une modélisation de l'ensemble dissipation - terme lent du type :

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{ij} + \Pi_{ij,1} &= \varepsilon\left(-2\delta_{ij}/3 + \phi_{ij}\right) \\ \text{avec :} \quad \phi_{ij} &= \beta_0 \frac{\varepsilon}{k} a_{ij} + \beta_1 \frac{\varepsilon}{k}\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{a_{kl}a_{lk}}{3}\delta_{ij}\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

la condition nécessaire de réalisabilité au sens de Schumann se traduit sur l'ensemble terme lent - dissipation par la contrainte :

$$-\beta_0 - 2 + \frac{\beta_1}{2}\left(\frac{2}{3} - a_{ij}a_{ji}\right) = 0 \tag{2.35}$$

2.5 Quelques modèles aux tensions de Reynolds

Plusieurs modèles classiques pour l'ensemble terme de redistribution et dissipation sont présentés. La partie anisotrope e_{ij} du tenseur de dissipation ε_{ij} est incluse dans le terme lent Π^1_{ij} de la corrélation pression-déformation, si bien que l'on parlera plutôt de terme de retour à l'isotropie que de terme lent.

2.5.1 Modèle IP (Isotropisation de la Production)

Ce modèle linéaire est modèle le plus simple parmi tous les modèles présentés.

Terme de retour à l'isotropie

Ce terme est modélisé suivant les travaux de Rotta (1951) :

$$\Pi^1_{ij} - \varepsilon_{ij} = -3,6\,\varepsilon a_{ij} \tag{2.36}$$

Terme rapide

Cette fermeture revient à supposer que la partie rapide du terme de redistribution serait "forcée" par l'écart à l'isotropie du taux de production P_{ij} de $\overline{u'_i u'_j}$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \Pi^2_{ij} &= -0,6\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P_{kk}\delta_{ij}\right) \text{ où } P_{ij} = -\overline{u'_i u'_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l} - \overline{u'_j u'_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l} \\ &= 0,8\,k\,S_{ij} + 1,2\,k\left(a_{mi}S_{jm} + a_{mj}S_{im} - \frac{2}{3}a_{mn}S_{nm}\delta_{ij}\right) + 1,2\,k\left(a_{mi}\Omega_{mj} + a_{mj}\Omega_{mi}\right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

La partie rapide est donc modélisée de façon linéaire par rapport au tenseur d'anisotropie des tensions a_{ij}.

2.5.2 Modèle de Launder et Shima (1989)

Ce modèle linéaire constitue une extension du modèle IP dans lequel ont fait apparaître le facteur $F = 1 - 4,5\,II_a + 9\,III_a$ avec $II_a = a_{ij}a_{ji}$ et $III_a = a_{ij}a_{jk}a_{ki}$.

Terme de retour à l'isotropie

$$\Pi_{ij}^1 - \varepsilon_{ij} = -\left(2 + 7,3\, FII_a{}^{1/4}\right) \varepsilon a_{ij} \tag{2.38}$$

Terme rapide

La partie rapide est modélisée comme suit :

$$\Pi_{ij}^2 = \sqrt{F} k S_{ij} + 1,5\sqrt{F} k \left(a_{mi} S_{jm} + a_{mj} S_{im} - \frac{2}{3} a_{mn} S_{nm} \delta_{ij}\right) + 1,5\sqrt{F} k \left(a_{mi}\Omega_{mj} + a_{mj}\Omega_{mi}\right) \tag{2.39}$$

2.5.3 Modèle LRR

Ce modèle linéaire de Launder et al. (1975) a été ajusté sur l'expérience de Champagne et al. (1970) et sur la décroissance de turbulence de grille isotrope.

Terme de retour à l'isotropie

Le terme de retour à l'isotropie est modélisée suivant les travaux de Rotta (1951) :

$$\Pi_{ij}^1 - \varepsilon_{ij} = -2\, C_1\, \varepsilon\, b_{ij} \tag{2.40}$$

Terme rapide

La partie rapide est modélisée de façon linéaire par rapport au tenseur d'anisotropie des tensions :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^2 \;=\; & \frac{4}{5} k S_{ij} + \frac{18 C_2^{LRR} + 12}{11} k \left(b_{mi} S_{jm} + b_{mj} S_{im} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{nm} \delta_{ij}\right) \\ & + \frac{14 C_2^{LRR} - 20}{11} k \left(b_{mi}\Omega_{mj} + b_{mj}\Omega_{mi}\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec : $C_1^{LRR} = 1,5$ et $C_2^{LRR} = 0,4$. Néanmoins, Taulbee (1992) préconise les valeurs $C_1^{LRR} = 1,8$ et $C_2^{LRR} = 5/9$.

2.5.4 Modèle SSG

Le modèle SSG de Speziale et al. (1991) a été bâti sans faire la séparation entre partie rapide et lente du terme de corrélation pression-déformation. Il s'agit là d'un avantage par rapport aux modèles précédents car la modélisation séparée des parties lente et rapide revient à supposer qu'elles sont indépendantes l'une de l'autre ce qui n'est pas le cas (démontré par Jones et Musonge (1988) car le terme lent est influencé par le gradient de vitesse moyenne). Le modèle SSG a été calibré par rapport à des résultats basés sur la théorie de la distorsion rapide (RDT) et sur deux expériences : retour à l'isotropie et écoulement homogène cisaillé.

Terme de redistribution

Les parties lente et rapide du terme de corrélation pression-déformation sont modélisées par :

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} &= -C_1\,\varepsilon a_{ij} + C_2\,\varepsilon\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{II_a}{3}\delta_{ij}\right) + C_3\,k\left(S_{ij} - \frac{s_1}{3}\delta_{ij}\right) \\ &\quad + C_4\,k\left(S_{ik}a_{kj} + S_{jk}a_{ki} - \frac{2}{3}S_{kl}a_{kl}\delta_{ij}\right) + C_5\,k\left(\Omega_{ik}a_{kj} - \Omega_{jk}a_{ki}\right)\end{aligned} \tag{2.42}$$

ce qui correspond à un modèle pour lequel la partie rapide est linéaire mais par contre le terme de retour à l'isotropie est quadratique par rapport au tenseur d'anisotropie. Les coefficients sont définis ci-dessous :

$$C_1 = 1,7 + 0,9\frac{P_k}{\varepsilon}\ ,\ C_2 = 1,05\ ,\ C_3 = 0,8 - 0,65\sqrt{II_a}\ ,\ C_4 = 0,625\ ,\ C_5 = 0,2 \tag{2.43}$$

2.5.5 Tableau récapitulatif

Pour la majorité des modèles aux tensions de Reynolds, Π_{ij} est modélisé sous la forme générique suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\Pi_{ij}}{k} &= \alpha_0\frac{\varepsilon}{k}a_{ij} + \alpha_1\frac{\varepsilon}{k}\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{a_{kl}a_{lk}}{3}\delta_{ij}\right) + \alpha_2\,S_{ij} + \alpha_3\frac{P_k}{k} \\ &\quad + \alpha_4\left(a_{ik}S_{kj} + a_{jk}S_{ki} - \frac{2}{3}a_{kl}S_{lk}\delta_{ij}\right) + \alpha_5\left(a_{ik}\Omega_{jk} + a_{jk}\Omega_{ik}\right) \\ &\quad + \alpha_6\left(a_{ik}a_{kl}S_{lj} + a_{jk}a_{kl}S_{li} - 2\,a_{kj}a_{li}S_{kl}\right) + \alpha_7\left(a_{ik}a_{kl}\Omega_{jl} + a_{jk}a_{kl}\Omega_{il}\right) \\ &\quad + \alpha_8\left[a_{nl}a_{nl}\left(a_{ik}\Omega_{jk} + a_{jk}\Omega_{ik}\right) + 3\,a_{mi}a_{nj}\left(a_{mk}\Omega_{nk} + a_{nk}\Omega_{mk}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.44}$$

Plusieurs modèles pour le terme de redistribution, reprenant la convention précédente, sont détaillés dans le tableau suivant :

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
LS	-2-7,3$FII_a{}^{1/4}$	0	$\sqrt{F}$	0	1,5$\sqrt{F}$	1,5$\sqrt{F}$	0	0	0
IP	-3,6	0	0,8	0	1,2	1,2	0	0	0
LRR	-3	0	0,8	0	1,745	1,309	0	0	0
LRR - modifié	-3,6	0	0,8	0	2,0	1,111	0	0	0
SSG	-3,4	4,2	0,8-1,3$\sqrt{II_a}$	-1,8	1,25	0,4	0	0	0
FLT	-2-60$II_a\sqrt{F} + 2\sqrt{F}$	-72$II_a\sqrt{F}$	0,8	1,2	1,2	1,73	0,8	0,8	11,2

où le modèle FLT a été construit par Launder et Tselepidakis (1988).

2.6 Modèle choisi

Modèle de diffusion

Le modèle de diffusion HL (2.6) aurait pu s'avérer intéressant car il est compatible avec $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ contrairement au modèle DH (2.5). Mais, comme l'ont montré Cazalbou et Chassaing (2002), au voisinage d'une frontière libre ce modèle de diffusion ne prévoit pas de bons niveaux d'anisotropie. Les autres modèles de diffusion plus complexes comme celui de Lumley (2.8) ne semblent pas apporter de réelles améliorations mais plutôt une diminution de la robustesse numérique du modèle. La diffusion est par conséquent modélisée suivant le modèle de Daly-Harlow (2.5).

Modélisation du tenseur de dissipation

La partie anisotrope $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 2/3\,\delta_{ij}\,\varepsilon$ du tenseur de dissipation est intégrée dans le terme de redistribution Π_{ij}. Cela revient à prendre $\varepsilon_{ij} = 2/3\delta_{ij}\varepsilon$.

Modèle pour la corrélation pression-déformation et le tenseur de dissipation

Nous avons choisi le modèle de Speziale, Sarkar et Gatski (SSG), décrit en (2.42), pour le terme de redistribution $\Pi_{ij} - e_{ij}$. Il a pour intérêt principal de ne pas modéliser séparément le terme de retour à l'isotropie et le terme rapide. Par ailleurs, ce modèle a été calibré sur des écoulements homogènes cisaillés et fortement cisaillés. Speziale et al. (1991) montrent en effet que le modèle SSG se comporte bien mieux que le modèle de Launder et al. (1975) sur ces écoulements (cf. figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4). Il en va de même pour le modèle LRR modifié par Taulbee ($C_1^{LRR} = 1,8$ et $C_2^{LRR} = 5/9$) qui n'offre pas d'aussi bons résultats que le modèle SSG sur ce type d'écoulements homogènes cisaillés (cf. figures 2.5). Si l'on se restreint aux écoulements non soumis à de fortes rotations, le modèle SSG devrait être suffisant pour modéliser le terme de redistribution. Par contre, il devra être envisagé de revoir la modélisation du terme de redistribution pour les écoulements soumis à des rotations axiales, ou plus généralement pour les écoulements où l'orientation de grosses structures influence de façon significative $\Pi_{ij} - e_{ij}$ (cf. paragraphe 2.2.2).

Comportement du modèle SSG et du modèle LRR sur les écoulements homogènes

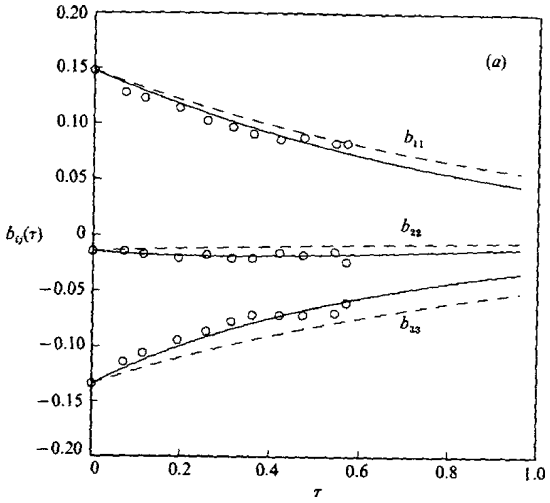


FIG. 2.1 – Évolution du tenseur d'anisotropie durant le retour à l'isotropie (∘ : exp. de Choi et Lumley en 1984)

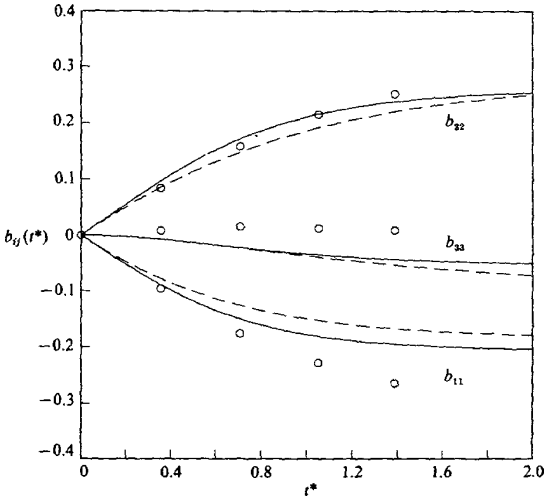


FIG. 2.2 – Évolution temporelle du tenseur d'anisotropie pour un écoulement cisaillés à $\varepsilon_0/SK_0 = 1$ (∘ : DNS de Lee et Reynolds en 1985)

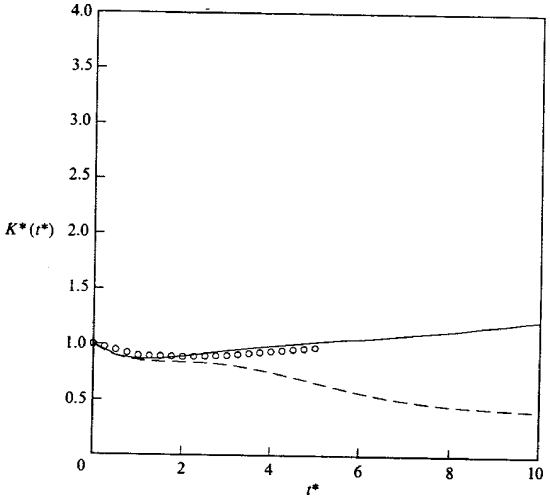


FIG. 2.3 – Évolution temporelle de k pour un écoulements cisaillés avec rotation à $\Omega/S = 0.5$ (∘ : LES de Bardina *et al.* en 1983)

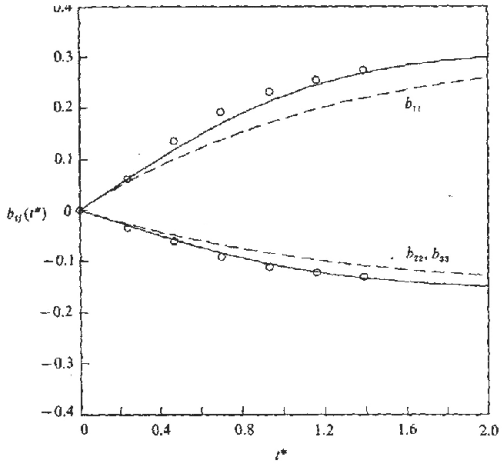


FIG. 2.4 – Évolution temporelle du tenseur d'anisotropie pour une expansion axisymétrique à $\varepsilon_0/SK_0 = 2.45$ (∘ : DNS de Lee et Reynolds en 1985)

Légende : — : SSG ; $\cdots$: LRR ($C_1^{LRR} = 1,5$ et $C_2^{LRR} = 0,4$)

Origine des planches : Speziale et al. (1991)

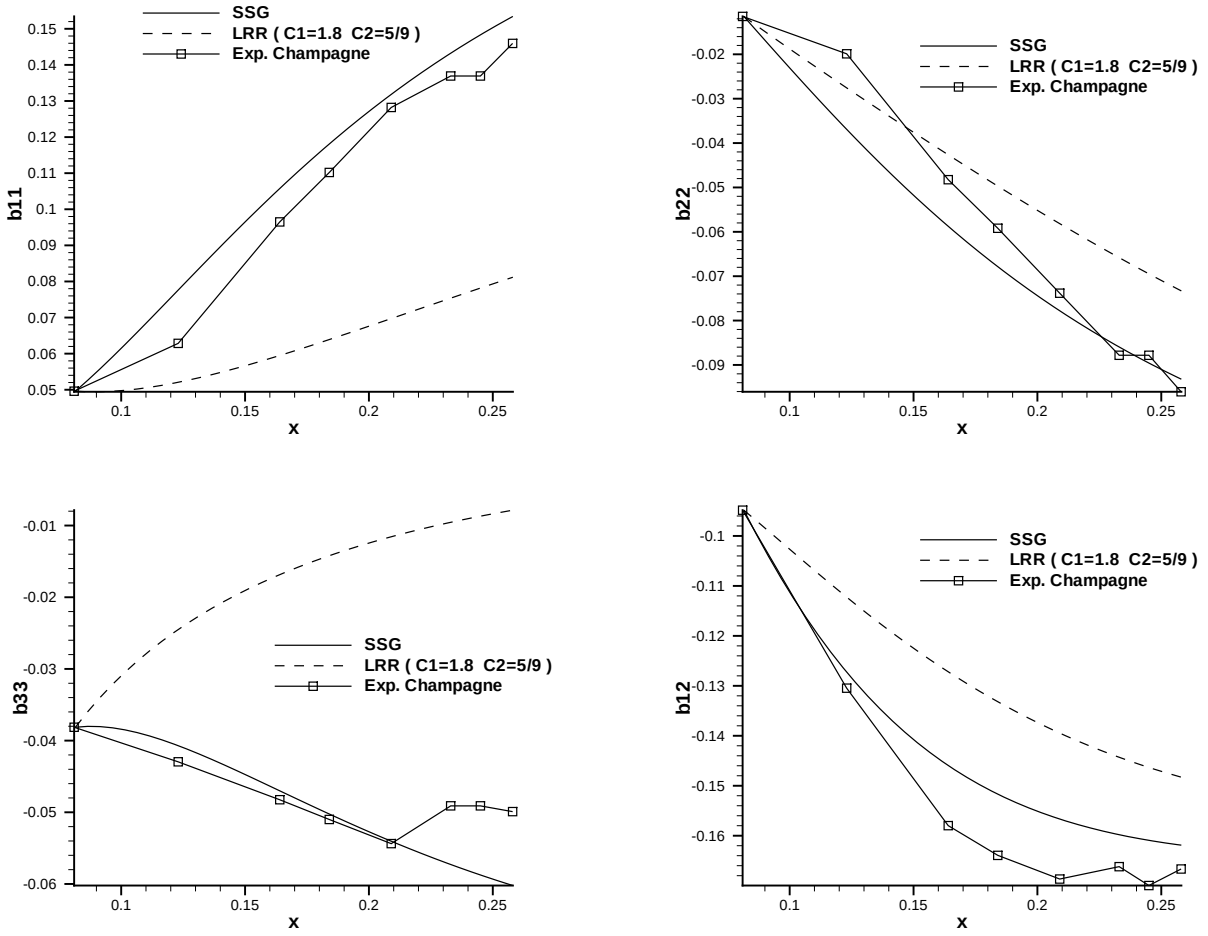


FIG. 2.5 – Comparaison sur l'expérience de Champagne et al. (1970) entre le modèle SSG et le modèle LRR modifié par Taulbee

Chapitre 3

Fermeture de l'équation d'échelle à grand nombre de Reynolds de turbulence

Les fermetures en un point des termes de redistribution, dissipation et diffusion dans les équations aux tensions de Reynolds nécessitent toutes la connaissance d'une échelle de temps ou de longueur caractéristique des grosses structures (cf. paragraphe 1.2 et 1.4.2). Il existe ainsi un fort couplage entre le calcul de l'échelle de longueur des grosses structures et les modèles de fermeture des équations aux tensions de Reynolds. Le calcul de l'échelle de longueur est par conséquent primordial pour les modèles de fermeture en un point.

Pour calculer cette échelle de longueur en prenant en compte la physique de l'écoulement, il est préférable d'introduire au moins une équation de transport supplémentaire (équation d'échelle) pour une variable reliée à l'échelle de longueur des grosses structures. Cette équation doit à son tour être fermée. Nous nous sommes donc principalement intéressé à la fermeture de l'équation d'échelle.

3.1 Les différentes fermetures de l'équation d'échelle

Deux approches sont envisageables dans le cas d'une turbulence à l'état d'équilibre, c'est à dire pour laquelle le temps caractéristique de la turbulence s'écrit :

$$\tau \simeq \frac{k}{\varepsilon}$$

La première approche consiste à fermer terme à terme l'équation d'échelle pour une grandeur transportée donnée. Aupoix (2004) fait remarquer que lorsque la grandeur transportée Φ est liée à la viscosité soit aux petites structures, comme par exemple ε et $\omega = \varepsilon/k$, la fermeture terme à terme de son équation de transport est impossible. Pour fermer terme à terme une équation de transport, il faut utiliser une variable transportée qui ne soit pas dépendante de la viscosité c'est à dire des petites structures. C'est le cas de $kl = k^{2,5}/\varepsilon$ ou encore $k\tau = k^2/\varepsilon$.
La seconde méthode revient à se donner la forme a priori de l'équation de transport pour ε ou toute autre grandeur du type $k^m\varepsilon^n$.

3.1.1 Fermeture terme à terme

Smith (1990) et Wolfshtein (1970) ont examiné la fermeture de l'équation pour $kl = k^{2,5}/\varepsilon$. Cette grandeur est reliée à l'échelle de longueur des grosses structures car reliée à la corrélation en deux points $Q_{i,j}(A,B,t) = \overline{u'_{i,A}u'_{j,B}}$ par $kl(A,t) = \int_V Q_{i,i}\left(\frac{dV}{|AB|^2}\right)$. Cet aspect présente une grande importance car il ainsi possible de fermer l'équation pour kl terme à terme. Wolfshtein (1970) aboutit à un modèle de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{D(kl)}{Dt} &= -\frac{1}{2}l_G\,\overline{u'_iu'_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{L,k} - \overline{u'_kp'}\,l_p\right) \\ &\quad +\nu\frac{\partial^2 kl}{\partial x_k^2} + \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\,l_D^1 + \nu\overline{u'_i\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}}\,l_D^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

où l_G, l_p... sont des échelles de longueur et $q_{L,k} - \overline{u'_kp'}\,l_p$ correspond à la diffusion. Cette corrélation est modélisée selon un schéma en premier gradient (2.4) pour des raisons analogues aux termes de diffusion dans l'équation pour k. Le terme de dissipation, sous l'hypothèse d'une turbulence à l'équilibre, est modélisé comme suit :

$$\nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \simeq C\frac{k^{1,5}}{l_D^1} \tag{3.2}$$

Le dernier terme demandant une fermeture est $\nu\overline{u'_i\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}}$. Il représente une dissipation additionnelle due aux inhomogénéités de la turbulence. Ces inhomogénéités peuvent être représentées par des gradients de k ou l. Wolfshtein choisit de modéliser ce dernier terme de la façon suivante :

$$\nu\overline{u'_i\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}} \simeq \frac{l}{k^{1/2}}\left(\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)^2 \tag{3.3}$$

Enfin, les différentes échelles de longueur l_G, l_p, l_D^1 et l_D^2 sont supposées proportionnelles, du moins en première approximation et à Reynolds turbulent élevé.

Wolfshtein aboutit ainsi, à Reynolds turbulent élevé, à une fermeture du type :

$$\frac{D(kl)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_L}\frac{\partial(kl)}{\partial x_k}\right) + \left(d_GP_k - C_1\frac{k^{3/2}}{l}\right)l - C_2\frac{l^2}{k^{1/2}}\left(\frac{\partial k}{\partial x_k}\right)^2 \tag{3.4}$$

3.1.2 Fermeture "a priori"

Les équations de transport pour la dissipation ou la pseudo dissipation ε ne peuvent être fermées terme à terme du fait de la présence de la viscosité dans les corrélations inconnues. Dans le cas particulier de ε, l'expression formelle à fermer est du type :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k\varepsilon'}\right) - \psi\frac{\varepsilon}{\tau} \tag{3.5}$$

D'après Lumley, la fonction adimensionnelle ψ est supposée dépendre, à nombre de Reynolds turbulent élevé, des tensions de Reynolds et du gradient de vitesse moyenne. Lorsque les gradients de vitesse sont faibles, on

peut exprimer ψ sous la forme d'un développement en série de puissances limité aux termes du premier ordre en $\partial\overline{U}_i/\partial x_j$:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \frac{k}{\varepsilon} b_{ij} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \psi_2 \frac{k}{\varepsilon} b_{ik} b_{kj} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + ... \tag{3.6}$$

soit en situation quasi-isotrope ($b_{ij} \ll 1$) et avec $\tau \simeq k/\varepsilon$ sous l'hypothèse d'équilibre de la turbulence :

$$-\frac{\varepsilon}{\tau}\psi \simeq -C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k + ... \tag{3.7}$$

Le terme de diffusion est quant à lui souvent fermé sous une forme en gradient issue de l'hypothèse généralisée de diffusion par gradient (2.4). La fermeture classique de l'équation correspondant à une situation où l'anisotropie des tensions de Reynolds ainsi que le gradient de vitesse sont faibles, est par conséquent de la forme :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + D_{\varepsilon\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k u'_l}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}\right)$$

3.2 Équation d'échelle générique

Étant donné que les deux types de fermetures ci-dessus sont similaires et en s'inspirant de ce qui a déjà été fait pour les modèles à deux équations par Catris (1999) puis pour les modèles RSM par Flachard (2000), l'équation d'échelle est fermée de manière générique pour toute grandeur du type $\Phi = k^m \varepsilon^n$ avec $n \neq 0$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{\Phi}{k}\left(C_{\Phi 1}P_k - C_{\Phi 2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi\Phi}\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi k}\frac{\Phi}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) \\ &+ C_{\Phi\Phi}\frac{k}{\varepsilon\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} + C_{\Phi k}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} + C^{\Phi}_{kk}\frac{\Phi}{k\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Toutes les modélisations, que ce soit pour l'équation de transport de la dissipation ou l'équation de transport de kl nous ramènent à une modélisation du type (3.8). Ainsi, l'intérêt principal de cette forme générique est qu'elle contient la plupart des modèles de fermeture de l'équation d'échelle.

Wolfshtein (1970) fait tout de même remarquer que certaines constantes ne devraient pas en être car elles sont a priori dépendantes du nombre de Reynolds turbulent $R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$. En première approximation à Reynolds turbulent modéré, on conservera donc cette modélisation même si cette dernière nécessitera probablement une correction bas Reynolds.

L'équation dépend du modèle pour la diffusion choisi pour les équations aux tensions de Reynolds. Dans le cas présent, l'équation générique correspond au modèle de diffusion de Daly-Harlow (2.1.1).

Généricité

Le caractère générique (une seule forme de l'équation d'échelle quel que soit la grandeur transportée $\Phi =$

$k^m\varepsilon^n$) de cette équation a été démontré par Flachard (2000), établissant les relations entre les coefficients d'une grandeur $\Phi = k^m\varepsilon^n$ quelconque (vérifiant tout de même $n \neq 0$ pour des raisons évidentes) et ceux de ε :

$$C_{\Phi 1} = n\,C_{\varepsilon 1} + m \tag{3.9a}$$
$$C_{\Phi 2} = n\,C_{\varepsilon 2} + m \tag{3.9b}$$
$$D_{\Phi\Phi} = D_{\varepsilon\varepsilon} \tag{3.9c}$$
$$D_{\Phi k} = m\,(D_{kk} - D_{\Phi\Phi}) + n\,D_{\varepsilon k} \tag{3.9d}$$
$$C_{\Phi\Phi} + D_{\Phi\Phi} = (C_{\varepsilon\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon})/n \tag{3.9e}$$
$$C_{\Phi k} = C_{\varepsilon k} - m/n\,D_{kk} - m\,D_{\Phi\Phi} + (1-n)/n\,(D_{\Phi k} + mD_{\Phi\Phi}) - 2m\,C_{\Phi\Phi} \tag{3.9f}$$
$$C^{\Phi}_{kk} = n\,C^{\varepsilon}_{kk} + m\,(D_{kk} - C_{\Phi k} - D_{\Phi k} - m\,(C_{\Phi\Phi} + D_{\Phi\Phi})) \tag{3.9g}$$

L'intérêt d'une telle équation est donc de pouvoir passer aisément d'une grandeur à une autre par des relations explicites simples (3.9) tout en gardant une équivalence de comportement. Il n'est alors pas nécessaire de requalifier l'équation lorsque la variable transportée change. Il faudra tout de même prêter attention au comportement de la grandeur transportée au voisinage d'une paroi et d'une frontière libre comme nous le verrons dans la partie II.

L'équation d'échelle étant bien souvent un des facteurs limitant de la modélisation en un point, on lui impose certains comportements physiques à respecter en couche limite ainsi que certaines limitations pour les écoulements isotropes et homogènes cisaillés.

3.3 Qualification de l'équation en homogène

3.3.1 Turbulence isotrope

En turbulence isotrope, que ce soit pour un modèle aux tensions de Reynolds ou bien pour un modèle à deux équations, les équations du modèle de turbulence se réduisent à :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon \tag{3.10a}$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{3.10b}$$

Ce système peut se résoudre aisément en combinant les deux équations ci-dessus :

$$C_{\varepsilon 2}\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)^2 - k\frac{\partial^2 k}{\partial t^2} = 0 \tag{3.11}$$

Les solutions de cette équation différentielle sont alors des puissances s du temps, où s est reliée à la valeur de $C_{\varepsilon 2}$ par la relation :

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{s-1}{s} \tag{3.12}$$

Des études expérimentales permettent d'estimer la valeur de s dans une fourchette allant de -1,25 ($C_{\varepsilon 2} = 1,8$) selon Bellot et Corssin (1966) à -1 ($C_{\varepsilon 2} = 2$) selon Batchelor (1953). D'autres arguments (Aupoix, 1987) à

partir de la forme du spectre d'énergie $E(\kappa)$ montrent que $C_{\varepsilon 2}$ peut avoir des valeurs entre 1,7 et 2. En résumé, $C_{\varepsilon 2}$ se trouve dans l'intervalle suivant :

$$C_{\varepsilon 2} \in [1,7\,;\,2] \tag{3.13}$$

Aupoix (1987), à partir d'une analyse spectrale en écoulement isotrope, préconise une valeur voisine de $\frac{11}{6}$ afin d'assurer une densité d'énergie constante pour les grands nombres d'onde. Ce point de vue est également partagé par Speziale et al. (1991). Reynolds et Kassinos (1995) et Wilcox (1988) utilisent cette valeur dans leurs modèles.

3.3.2 Turbulence homogène cisaillée

Comme pour les modèles à deux équations (Catris et Aupoix (2000)), les équations pour k et ε se réduisent, en écoulement cisaillé homogène, à :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P_k - \varepsilon \tag{3.14a}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{3.14b}$$

Sous l'hypothèse d'équilibre (1.6) de la turbulence, l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence l est proportionnelle à $k^{1.5}/\varepsilon$. On déduit alors des deux équations précédentes l'équation de transport de l :

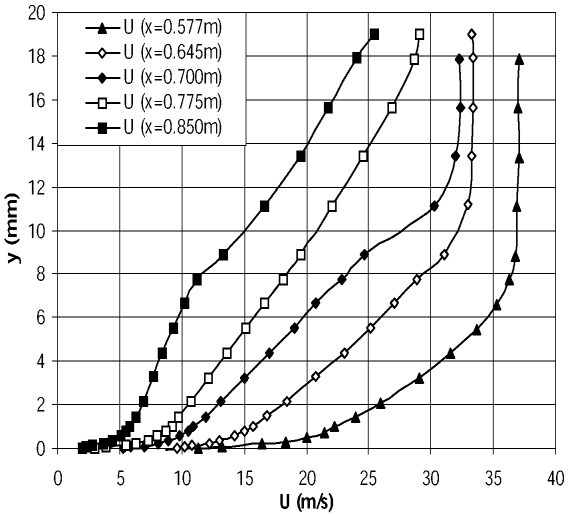
$$\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial t} = \left(\frac{3}{2} - C_{\varepsilon 1}\right) P_k \frac{1}{k} + \left(\frac{3}{2} - C_{\varepsilon 2}\right) \frac{\varepsilon}{k} \tag{3.15}$$

Or, Tennekes (1989) énonce que, d'un point de vue dimensionnel, l ne peut dépendre du cisaillement car celui-ci est homogène et ne peut pas imposer une échelle de longueur caractéristique de la turbulence. Autrement dit, il suggère :

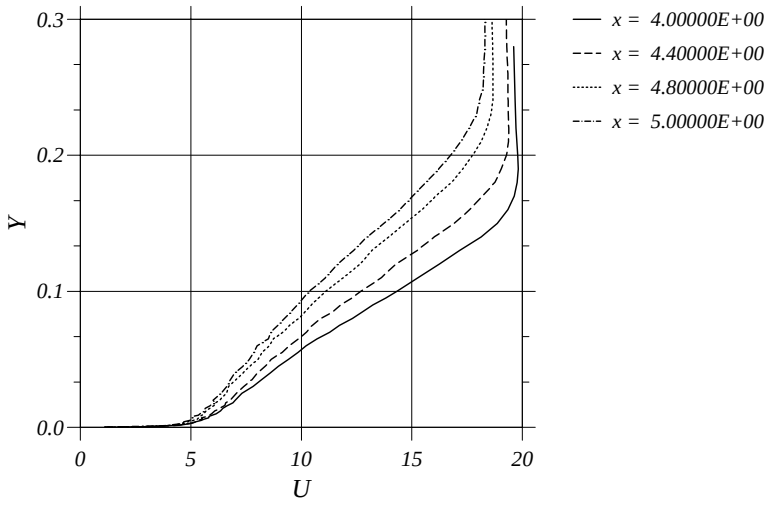
$$C_{\varepsilon 1} = \frac{3}{2} \tag{3.16}$$

3.4 Qualification de l'équation pour améliorer la prévision du décollement

La couche limite, lorsqu'elle est soumise à un gradient de pression adverse suffisamment élevé, décolle. La figure 3.1 montre l'évolution du profil de vitesse lorsque le gradient de pression augmente suivant la direction principale x. Ce profil évolue sensiblement et se creuse lorsque le gradient de pression longitudinal est élevé. Un modèle de turbulence, pour qu'il reproduise correctement une couche limite en situation proche d'un décollement, doit modéliser correctement l'influence du gradient de pression sur la structure de la couche limite (rappelée au paragraphe 3.4.1).



Expérience de Gustavsson (1998)



Expérience de Skåre et Krogstad (1994)

FIG. 3.1 – Évolution du profil de vitesse en fonction du gradient de pression

3.4.1 Structure de la couche limite 2D incompressible

Les équations du mouvement en couche limite 2D incompressible stationnaire se simplifient sous l'hypothèse de couche mince selon la forme suivante :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \tag{3.17a}$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3.17b}$$

Rappelons la structure d'une couche limite bidimensionnelle incompressible soumise à un gradient de pression positif. À faible gradient de pression, la couche limite est constituée de deux régions :
- une région interne où la turbulence est négligeable devant les effets visqueux - on parle aussi de sous-couche visqueuse
- une région externe dite zone de sillage
Ces deux régions sont séparées par une zone intermédiaire appelée région logarithmique car le profil y évolue comme le logarithme de la distance à la paroi (notation ci-dessous en variable de paroi) :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + C_0 \quad \text{avec :} \quad y^+ = yu_\tau/\nu \quad \text{et} \quad u^+ = u/u_\tau \tag{3.18}$$

avec $C_0 \simeq 5,2$ et $\kappa = 0,41$. Cette région logarithmique, comme on peut le remarquer sur la figure 3.2 tracée en variable logarithmique, est indépendante du gradient de pression. Pour une couche limite sans gradient de

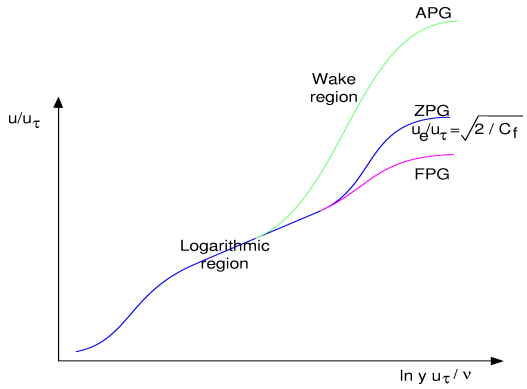


FIG. 3.2 – Profil de vitesse en couche limite en variable logarithmique

pression (ZPG) ou avec gradient de pression favorable (FPG), il apparaît sur la figure 3.2 que la partie sillage est peu étendue et donc que la loi logarithmique contribue grandement à la valeur de $u_e/u_\tau = \sqrt{2/C_f}$ soit du coefficient de frottement C_f. Pour une couche limite soumise à un gradient de pression adverse (APG), la région de sillage est plus étendue. L'étendue de la zone logarithmique diminue au fur et à mesure que le gradient de pression longitudinal augmente. Le C_f est donc dépendant à la fois de la pente de la loi logarithmique et du sillage. En tout état de cause, il est nécessaire que le modèle reproduise la loi logarithmique quel que soit le gradient de pression afin de tenir compte de l'effet du gradient de pression sur la structure de la couche limite et le coefficient de frottement.

Pour des gradients de pression adverse élevés, une autre zone apparaît "au dessus" de la loi logarithmique. Il s'agit de la loi en racine, que l'on peut observer sur la figure 3.3 :

$$\begin{aligned} \widehat{u} &= \frac{2}{\kappa}\sqrt{\widehat{y}} + R_0 \\ \text{avec :}\quad \widehat{u} &= \frac{u}{u_p}\ ,\ \widehat{y} = \frac{y u_p}{\nu}\ ,\ u_p^3 = p^+ u_\tau^3 = \frac{\nu}{\rho}\frac{dP}{dx} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Le respect de la structure physique de la couche limite et donc de la réponse de celle-ci aux forts gradients de pression adverse est un élément nécessaire à la prévision du décollement. Ces comportements physiques, comme il sera démontré dans les paragraphes suivants, imposent des contraintes sur l'équation d'échelle. L'importance de la fermeture de cette équation de transport apparaît la encore cruciale pour les modèles de turbulence en un point.

Les travaux effectués au sein même de l'ONERA par Catris (1999) sur les modèles à deux équations ont été étendus par Flachard (2000) pour les modèles aux tensions de Reynolds. Ses travaux ont été ici repris et complétés, notamment en ce qui concerne les contraintes pour la zone en racine.

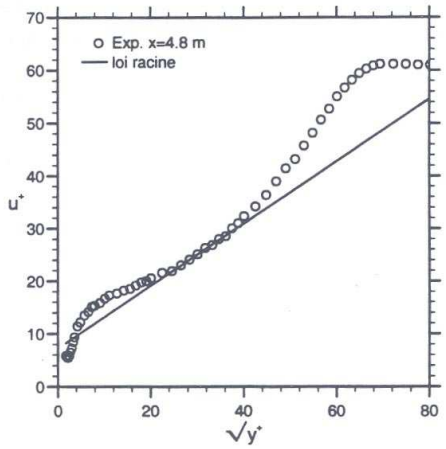


FIG. 3.3 – Loi en racine

3.4.2 Respect de l'invariance de la loi logarithmique par rapport au gradient de pression

Comme nous venons de le voir, le respect de la pente de la loi logarithmique, quel que soit le gradient de pression, est une condition nécessaire pour bien reproduire l'influence du gradient de pression sur la structure de la couche limite.

Soit $p^+ = \frac{\nu}{\rho u_\tau^3}\frac{dP}{dx}$. En effectuant un développement limité des équations de transport par rapport à $p^+y^+ \ll 1$, Huang et Bradshaw (1995) puis Catris (1999) pour les modèles à deux équations et Flachard (2000) pour les modèles RSM ont montré que l'on pouvait déterminer des conditions nécessaires à imposer aux coefficients pour que la pente logarithmique soit préservée dans la zone où $p^+y^+ \ll 1$, quel que soit le gradient de pression. Cette méthode d'obtention de contraintes est rappelée ci-dessous.

Développements limités

L'objectif est de faire ressortir des contraintes pour que le profil de vitesse vérifie la loi logarithmique pour $p^+y^+ \ll 1$. On s'impose donc :

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa^* y^+} \tag{3.20}$$

L'équation du mouvement, selon la direction principale de l'écoulement x, se réduit à :

$$-\overline{u'v'}^+ = 1 + p^+y^+ \tag{3.21}$$

On se restreint aux $p^+y^+ \ll 1$ pour pouvoir effectuer des développements limités des grandeurs turbulentes et de κ^* par rapport à p^+y^+ :

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \kappa_0 + p^+y^+\kappa_1 + ... \\ k^+ &= k_0^+ + p^+y^+k_1^+ + ... \\ \overline{u_i'u_j'}^+ &= \overline{u_i'u_j'}_{,0}^+ + p^+y^+\overline{u_i'u_j'}_{,1}^+ + ... \\ \varepsilon^+ &= \frac{1}{y^+}\left(\varepsilon_0^+ + p^+y^+\varepsilon_1^+ + ...\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Imposer la loi logarithmique à un ordre donné $(p^+y^+)^i$ revient à imposer :

$$\kappa_0 = \kappa = 0,41 \ ; \ \kappa_1 = 0 \ ; \ ... \ ; \ \kappa_i = 0 \tag{3.23}$$

Le développement limité se limitera ici à l'ordre p^+y^+.

Équations aux tensions de Reynolds

Les équations aux tensions de Reynolds ($\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, k et $\overline{u'v'}$) se réduisent dans la zone logarithmique à :

$$\begin{aligned} 0 &= -2\overline{u'v'}^+\frac{\partial u^+}{\partial y^+} + \Pi_{11}^+ - \frac{2}{3}\varepsilon^+ + D_{kk}\frac{d}{dy^+}\left(\frac{\overline{v'^2}^+k^+}{\varepsilon^+}\frac{d\,\overline{u'^2}^+}{dy^+}\right) \\ 0 &= \Pi_{22}^+ - \frac{2}{3}\varepsilon^+ + D_{kk}\frac{d}{dy^+}\left(\frac{\overline{v'^2}^+k^+}{\varepsilon^+}\frac{d\,\overline{v'^2}^+}{dy^+}\right) \\ 0 &= -\overline{u'v'}^+\frac{\partial u^+}{\partial y^+} - \varepsilon^+ + D_{kk}\frac{d}{dy^+}\left(\frac{\overline{v'^2}^+k^+}{\varepsilon^+}\frac{d\,k^+}{dy^+}\right) \\ 0 &= -\overline{v'^2}^+\frac{\partial u^+}{\partial y^+} + \Pi_{12}^+ + D_{kk}\frac{d}{dy^+}\left(\frac{\overline{v'^2}^+k^+}{\varepsilon^+}\frac{d\,\overline{u'v'}^+}{dy^+}\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Étant donné que $\overline{u'v'}^+$ et $\frac{\partial u^+}{\partial y^+}$ sont connus, les équations des tensions pour les différents ordres l du développement limité forment un système fermé à quatre équations et quatre inconnues : $\overline{u'^2}_l^+$, $\overline{v'^2}_l^+$, k_l^+ et ε_l^+. On peut ainsi déterminer analytiquement ou du moins numériquement (avec MAPLE) les valeurs de ces quatre inconnues en fonction du modèle et des constantes choisis pour la diffusion et le terme de redistribution.

Un tableau récapitulatif présente les résultats obtenus pour l'ordre 0 avec le modèle LRR modifié (avec $C_1^{LRR} = 1,8$ et $C_2^{LRR} = 5/9$) et le modèle SSG (modèles détaillés aux paragraphes 2.5.3 et 2.5.4) quelle que soit la valeur de la constante de diffusion D_{kk} :

	k_0^+	$\overline{u'^2}_0^+/k_0^+$	$\overline{v'^2}_0^+/k_0^+$
LRR	3,387	0,914	0,420
SSG	3,119	1,068	0,413

On retrouve les résultats obtenus par Flachard (2000).

L'ordre du développement limité en p^+y^+ s'obtient suite au calcul de l'ordre 0. Les résultats obtenus pour les modèles LRR et SSG (cf. paragraphes 2.5.3 et 2.5.4), pour la constante de diffusion $D_{kk} = 0,22$ préconisée par Daly et Harlow (1970), sont présentés dans la tableau ci-dessous :

	k_1^+	$\overline{u'^2}_1^+/k_1^+$	$\overline{v'^2}_1^+/k_1^+$	ε_1^+
LRR	3,359	0,814	0,519	3,898
SSG	3,179	1,024	0,454	3,592

Les résultats pour une autre valeur $D_{kk} = 0,3$ sont également donnés ci-dessous, cette valeur de la constante de diffusion étant par la suite reprise par le modèle RSM défini au chapitre 11 (valeur issue d'un processus d'optimisation) :

	k_1^+	$\overline{u'^2}_1^+/k_1^+$	$\overline{v'^2}_1^+/k_1^+$	ε_1^+
LRR	3,17	0,747	0,586	4,317
SSG	3,185	1,001	0,474	4,014

Équation d'échelle

On réinjecte dans l'équation d'échelle, pour un modèle RSM donné, les développements limités précédents pour $\overline{u'^2}^+$, $\overline{v'^2}^+$, k^+ et ε^+. Les coefficients des développements limités étant connus (calculés précédemment avec les équations pour les tensions), on obtient une relation explicite entre les coefficients de fermeture de l'équation d'échelle pour chaque ordre du développement. Ces contraintes correspondent à des conditions nécessaires pour que la loi logarithmique soit satisfaite jusqu'à l'ordre du développement limité considéré. Dans le cas de l'équation générique (3.8) appliquée à ε, les contraintes aux ordres 0 et 1 s'écrivent :

$$C_{\varepsilon\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{\kappa^2 k_0^+ \overline{v'^2}_0^+}(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) = \alpha\,(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \tag{3.25a}$$

$$C_{\varepsilon k} = h_d D_{\varepsilon\varepsilon} + h_1 C_{\varepsilon 1} + h_2 C_{\varepsilon 2} \tag{3.25b}$$

Les coefficients présents dans ces relations sont donnés pour $D_{kk} = 0,22$:

	α	h_d	h_1	h_2
LRR	0,3648	0,986	0,950	-1,170
SSG	0,4743	0,791	1,051	-1,271

et pour $D_{kk} = 0,3$:

	α	h_d	h_1	h_2
LRR	0,3648	1,385	1,220	-1,520
SSG	0,4743	1,077	1,265	-1,565

Il est à noter que les coefficients pour une autre variable transportée peuvent être aisément obtenus par généricité (3.9) à partir de ceux pour l'équation de ε.

Écart par rapport à la loi logarithmique pour quelques modèles RSM

Si les contraintes précédentes ne sont pas appliquées à l'équation d'échelle, alors la loi logarithmique ne peut être satisfaite à l'ordre 0 ou/et à l'ordre 1. On se place dans la configuration classique d'un modèle RSM ($D_{kk} = 0,22$) couplé avec une équation pour la dissipation sans termes croisés : $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $D_{\varepsilon\varepsilon} = 0,18$ et $C_{\varepsilon\varepsilon} = C_{\varepsilon k} = C^{\varepsilon}_{kk} = 0$. En imposant la loi logarithmique à l'ordre zéro c'est à dire la valeur de $C_{\varepsilon 1}$, on peut représenter l'écart par rapport à la loi logarithmique avec le paramètre κ_1 calculé à partir de l'équation d'échelle.

	$C_{\varepsilon 1}$	κ_1/κ^2
LRR	1,427	3,587
SSG	1,661	3,277

Les modèles classiques pour l'équation d'échelle ne satisfont donc pas la loi logarithmique à l'ordre 1.

3.4.3 Respect de la loi en racine pour les forts gradients de pression adverses

L'existence de cette zone où le profil de vitesse évolue comme la racine carrée de la distance à la paroi a été mise en évidence par les travaux théoriques de Townsend (1976). Une description de la structure de la couche limite, pour des modèles à viscosité turbulente, a été réalisée par Durbin et Belcher (1992) à partir d'une analyse asymptotique pour une perturbation singulière permettant de décomposer la couche limite soumise à un fort gradient de pression adverse selon plusieurs couches. Le niveau élevé du gradient de pression, relié directement à la notion de petit paramètre, est à l'origine de la structure asymptotique de la couche limite dans cette configuration. La zone en racine apparaît dans ce problème de perturbation singulière comme une zone intermédiaire, comme l'est la zone logarithmique dans une couche limite sans gradient de pression (cf. Yajnik (1970), Mellor (1972)...). Il apparaît donc sous cet angle important de reproduire la zone en racine pour tenir compte de l'influence d'un fort gradient de pression adverse sur la structure du profil de vitesse.

Méthode d'obtention de contrainte

L'objectif est d'établir une condition nécessaire à partir des coefficients du modèle pour respecter la présence de la zone en racine pour les forts gradients de pression adverse. Le principe est le même que pour la loi logarithmique : la loi en racine est imposée et réinjectée dans les équations de transport pour faire ressortir des conditions nécessaires sur les constantes du modèle afin qu'il reproduise la loi en racine. Plusieurs travaux en ce sens ont été effectuées par Catris (1999) sur les modèles à deux équations puis par Flachard (2000) sur les

modèles RSM. Ils montrent notamment qu'une fermeture classique (sans terme croisé par exemple) de l'équation d'échelle ne peut reproduire la loi en racine, que ce soit pour un modèle à deux équations ou un modèle RSM.

Plaçons nous dans la variable locale $\widehat{y}$ définie ci-dessous :

$$\widehat{u} = \frac{u}{u_p}\ ,\ \widehat{y} = \frac{y u_p}{\nu} \quad \text{avec :} \quad u_p = \left(\frac{\nu}{\rho}\frac{dP}{dx}\right)^{\frac{1}{3}} = p^{+\frac{1}{3}} u_\tau \tag{3.26a}$$

$$\widehat{\overline{u_i' u_j'}} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{u_p^2}\ ,\ \widehat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \nu}{u_p^4} \tag{3.26b}$$

correspondant à la variable intérieure dans l'étude de Durbin et Belcher (1992). Dans la zone en racine, le profil de vitesse s'exprime de la façon suivante :

$$\widehat{u} = \frac{2}{\kappa}\sqrt{\widehat{y}} + R_0 \tag{3.27}$$

Rappelons que la zone en racine est une variable intermédiaire à la zone intérieure de la couche limite (zone de proche paroi où les effets visqueux sont non négligeables), zone dans laquelle les termes d'advection sont négligeables. Les équations aux tensions de Reynolds se réduisent donc dans la zone en racine à un bilan où l'advection est également négligeable :

$$0 = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij} \tag{3.28}$$

tout comme l'équation du mouvement selon la direction longitudinale x qui conduit à :

$$-\overline{u'v'}^{+} \simeq 1 + p^+ y^+ \simeq p^+ y^+ \Longrightarrow -\widehat{\overline{u'v'}} \simeq \widehat{y} \tag{3.29}$$

On suppose que les tensions de Reynolds ainsi que la dissipation évoluent comme des puissances de $\widehat{y}$:

$$\widehat{k} = A_k\, \widehat{y}^{\,e_k} \tag{3.30a}$$

$$\widehat{\overline{u_i' u_j'}} = A_{ij}\, \widehat{y}^{\,e_{ij}} \tag{3.30b}$$

$$\widehat{\varepsilon} = A_\varepsilon\, \widehat{y}^{\,e_\varepsilon} \tag{3.30c}$$

En incorporant dans l'équation pour k ces expressions ainsi que l'évolution du profil de vitesse selon la loi en racine (3.27), il vient :

$$0 = \frac{1}{\kappa}\widehat{y}^{\frac{1}{2}} - A_\varepsilon \widehat{y}^{\,e_\varepsilon} + D_{kk}\frac{(A_k)^2\, A_{22}}{A_\varepsilon}\, \widehat{y}^{\,2\,e_k + e_{22} - e_\varepsilon - 2} \tag{3.31}$$

Ainsi, pour que $\widehat{\overline{u_i' u_j'}}$ et $\widehat{\varepsilon}$ (3.30) soient solutions de (3.28), il faut que :

$$e_\varepsilon = 1/2 \quad \text{et} \quad 2\,e_k + e_{22} = 3 \tag{3.32}$$

En procédant de même dans autres équations pour les tensions, on montre (Flachard (2000)) qu'il faut de plus que :

$$e_{ij} = e_k = 1 \tag{3.33}$$

Équations aux tensions de Reynolds

Les équations pour les tensions de Reynolds forment un système fermé pour A_{11}, A_{22}, A_k et A_ε. Les valeurs de A_ε et A_{ij} sont alors fonctions du modèle choisi pour les équations de transport des tensions. Un tableau récapitule les résultats pour les modèles LRR (avec $C_1^{LRR} = 1,8$ et $C_2^{LRR} = 5/9$) et SSG et le modèle de diffusion DH, lorsque $D_{kk} = 0,22$:

	A_k	A_{11}	A_{22}	A_ε
LRR	3,598	3,072	1,726	4,196
SSG	3,222	3,319	1,441	3,754

et pour $D_{kk} = 0,3$:

	A_k	A_{11}	A_{22}	A_ε
LRR	3,675	3,088	1,812	4,755
SSG	3,257	3,321	1,484	4,147

De premier abord il peut paraître surprenant de trouver des valeurs réelles alors que Flachard (2000) trouve des valeurs complexes pour A_ε. Mais la méthode employée par Flachard est différente car elle consiste à ne pas s'imposer la loi en racine sous la forme (3.27) mais sous la forme suivante :

$$\widehat{u} = A_u \sqrt{\widehat{y}} + R_0$$

Les équations pour les tensions avec l'équation d'échelle forment alors un système fermé pour les variables A_u, A_{11}, A_{22}, A_k et A_ε. Le fait qu'il trouve des valeurs complexes pour A_ε montre que les modèles testés ne peuvent donner une loi en racine. Dans notre cas, on cherche justement, en s'imposant $A_u = 2/\kappa$, à faire ressortir des contraintes pour que cette loi soit reproduite.

Équation pour l'échelle de longueur

En remplaçant ces différentes valeurs dans l'équation pour ε, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-C_{\varepsilon 1}\widehat{\overline{u'v'}}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}} - C_{\varepsilon 2}\widehat{\varepsilon}\right)\frac{\widehat{\varepsilon}}{\widehat{k}} + \frac{\partial}{\partial \widehat{y}}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\frac{\widehat{k}}{\widehat{\varepsilon}}\widehat{\overline{v'^2}}\frac{\partial \widehat{\varepsilon}}{\partial \widehat{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial \widehat{y}}\left(D_{\varepsilon k}\widehat{\overline{v'^2}}\frac{\partial \widehat{k}}{\partial \widehat{y}}\right) \\ &\quad + C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{\widehat{k}\,\widehat{\overline{v'^2}}}{\widehat{\varepsilon}^2}\left(\frac{\partial \widehat{\varepsilon}}{\partial \widehat{y}}\right)^2 + C_{\varepsilon k}\frac{\widehat{\overline{v'^2}}}{\widehat{\varepsilon}}\frac{\partial \widehat{k}}{\partial \widehat{y}}\frac{\partial \widehat{\varepsilon}}{\partial \widehat{y}} + C_{kk}^{\varepsilon}\frac{\widehat{\overline{v'^2}}}{\widehat{k}}\left(\frac{\partial \widehat{k}}{\partial \widehat{y}}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow 0 &= \left(\frac{1}{2\kappa}C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2}A_\varepsilon\right)\frac{A_\varepsilon}{A_k} + A_k A_{22}\left[\frac{1}{2}D_{\varepsilon\varepsilon} + D_{\varepsilon k} + \frac{1}{4}C_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{1}{2}C_{\varepsilon k} + C_{kk}^{\varepsilon}\right] \end{aligned} \tag{3.34}$$

En conclusion, le modèle vérifie la loi en racine définie avec $A_u = 2/\kappa$ si :

$$C^{\varepsilon}_{kk} = R_1\, C_{\varepsilon 1} + R_2\, C_{\varepsilon 2} - \frac{1}{2}\left(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon k} + \frac{C_{\varepsilon\varepsilon}}{2}\right) - D_{\varepsilon k} \tag{3.35}$$

avec pour $D_{kk} = 0,22$:

	R_1	R_2
LRR	-0,458	0,788
SSG	-0,612	0,942

et pour $D_{kk} = 0,3$:

	R_1	R_2
LRR	-0,474	0,924
SSG	-0,643	1,093

Remarquons au passage que les contraintes sur la zone en racine concernent encore une fois la fermeture de l'équation d'échelle.

3.5 Conclusion

Les contraintes inhérentes à la structure de la couche limite sont rarement satisfaites par les modèles à deux équations et a priori jamais par les modèles aux tensions de Reynolds. De part son importance dans l'établissement de ces contraintes sur la structure de la couche limite, l'équation d'échelle apparaît comme une des parties les plus importantes de la modélisation en un point. Il est en effet logique que l'équation qui détermine l'échelle caractéristique des grosses structures soit responsable du comportement physique ou non du modèle de turbulence, et ce d'autant plus que les différentes fermetures dans les équations pour les tensions dépendent de cette échelle de longueur. La forme générique adoptée pour l'équation d'échelle ainsi que les contraintes que nous lui avons imposées devraient améliorer le comportement des modèles RSM, notamment en situation proche du décollement.

Une autre contrainte théorique vient s'ajouter aux contraintes précédentes portant sur la structure la couche limite. Il s'agit de contraintes liées au comportement des modèles de turbulence au voisinage d'une frontière libre (interface d'un écoulement libre avec un écoulement extérieur faiblement turbulent voire laminaire). Ce comportement des modèles sera étudié dans la prochaine partie II.

Deuxième partie

COMPORTEMENT DES MODÈLES DE TURBULENCE AU VOISINAGE D'UNE FRONTIÈRE LIBRE

La plupart des écoulements turbulents, comme les couches limites ou encore les écoulements cisaillés libres, possèdent une frontière libre avec un écoulement dont le taux de turbulence peut être considéré comme faible devant celui de l'écoulement turbulent. Dans ce cas, c'est à dire lorsque le niveau de turbulence extérieur tend vers zéro, les modèles de turbulence sont susceptibles d'être sensibles aux conditions extérieures sur l'échelle de longueur l ou encore sur ν_t, comme cela est le cas pour le modèle k-ω (Menter (1992a)) ou le modèle k-l (Prasad et Hassan (1998)). Pour éviter de telles dépendances non physiques, une analyse du comportement des modèles de turbulence a été réalisée au voisinage de la frontière libre par Paullay et al. (1985), Cazalbou et al. (1993) puis par Oberlack et Guenther (2003).

Approche de Paullay et Cazalbou

Dans le cas d'un modèle à viscosité turbulente :

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\right) \\ \frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{\Phi}{k}\left(C_{\Phi 1}P_k - C_{\Phi 2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Paullay et al. (1985) puis Cazalbou et al. (1993) ont supposé que la vitesse déficitaire $W = U_e - U$ et toutes les grandeurs turbulentes se comportaient comme des lois en puissance de la distance Y à l'interface laminaire-turbulent (frontière libre). En particulier, l'énergie cinétique turbulente k et la grandeur transportée $\Phi = k^m \varepsilon^n$ sont supposées se comporter de la façon suivante :

$$k \sim |Y|^{\alpha_k} \ ; \ \Phi \sim |Y|^{\alpha_p} \tag{3.37}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations de transport pour un écoulement stationnaire bidimensionnel, Cazalbou déduit la valeur des puissances α_k et α_p :

$$\alpha_k = \frac{n\sigma_k}{(m+2n)\,\sigma_k - \sigma_\phi} \quad \text{et} \quad \alpha_p = (m+2n)\,\alpha_k - n \tag{3.38}$$

La conclusion qui s'impose alors est de s'assurer que α_k soit strictement positif afin que l'information se propage de la région turbulente vers la région non-turbulente et non l'inverse, ceci dans le but d'éviter une dépendance non physique aux conditions extérieures. L'exposant α_p doit être lui aussi positif afin que la grandeur transportée dans l'équation d'échelle reste bornée pour des raisons numériques évidentes. Cette étude a été étendue aux modèles RSM par Cazalbou et Chassaing (2002). Catris (1999) montre qu'il existe deux valeurs possibles pour la puissance α_k et non une seule. Mais il conclut que la puissance qui apparaît réellement est la même que celle définie par Cazalbou et Paullay.

Approche précédente incomplète ou déficiente ?

Les figures 3.4 présentent plusieurs calculs numériques dans une couche limite avec gradient de pression adverse où le niveau extérieur de turbulence est très faible ($k^+_{ext} = 10^{-12}$). Le modèle considéré est un modèle RSM ($SSG - kL$) satisfaisant les contraintes sur les lois logarithmique et en racine (paragraphe 3.4). Concernant le raccord à la frontière libre, ce modèle présente une puissance de raccordement α_k positive et une autre négative. Mais, a priori, seule la solution pour la puissance positive peut apparaître car elle seule satisfait les

conditions aux limites à la frontière libre. Les contraintes de Cazalbou sur le raccord à la frontière libre sont donc satisfaites par le modèle. Les deux figures présentent le profil de $\nu_t = k^2/\varepsilon$ en fonction de la distance à la paroi adimensionnée $\eta = y/\Delta$ (Δ est l'épaisseur de Clauser). La figure de gauche montre le résultat du calcul numérique lorsque le niveau de ν_t extérieur est très petit : la solution évolue temporellement (la méthode de résolution numérique est une méthode pseudo-instationnaire) selon le sens de la flèche jusqu'à ce qu'elle présente des raccords très abrupts et devienne instable. Par contre, lorsque le niveau extérieur de ν_t est plus élevé (figure de droite), la solution est différente et ne présente pas de raccords abrupts mais elle est dépendante du niveau extérieur de ν_t. Le modèle considéré ne se comporte donc pas comme attendu. La solution en puissance négative n'a pourtant pas été observée. Mais elle a probablement un impact sur la solution que l'analyse de Cazalbou ne peut expliquer.

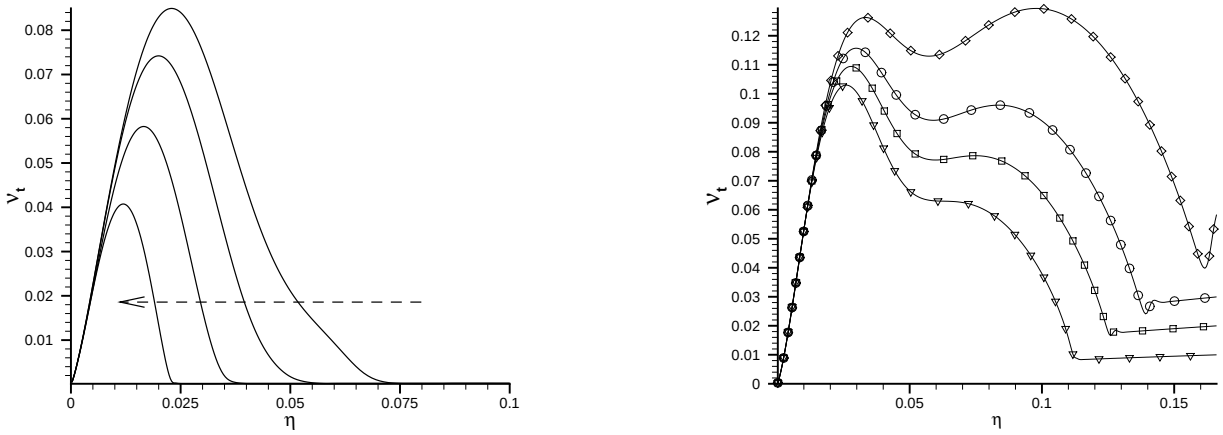


FIG. 3.4 – Calcul numérique dans la région externe d'une couche limite d'un modèle RSM vérifiant les contraintes sur la couche limite concernant les lois logarithmique et en racine et vérifiant les contraintes de Cazalbou et Chassaing (2002) sur le raccord à la frontière libre

L'analyse jusque là utilisée semble donc trop restrictive pour rendre compte du comportement de certains modèles de turbulence à la frontière libre des écoulements turbulents. Elle doit être réexaminée de manière plus générale sans se donner la forme a priori de la solution au voisinage de la frontière.

Chapitre 4

Analyse asymptotique au voisinage de la frontière libre

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement des modèles de turbulence au voisinage d'une frontière libre d'un écoulement turbulent.

Au voisinage d'une frontière libre, lorsque le niveau de turbulence extérieure tend vers zéro, toutes les composantes du tenseur de Reynolds tendent vers zéro et les équations de transport se réduisent à un équilibre entre advection et diffusion (Cazalbou et al. (1993)). Il est ainsi justifié de regarder le niveau de turbulence extérieure comme un petit paramètre et d'effectuer une analyse asymptotique au voisinage de la frontière libre. Le calcul du premier ordre du développement asymptotique devrait être suffisant pour étudier le comportement des modèles au voisinage de la frontière libre.

Il est intéressant de remarquer que les études de Paullay et al. (1985) et Cazalbou et al. (1993) considèrent un problème "convection - diffusion" où le niveau de turbulence extérieur est nul. L'analyse présentée ici est réalisée pour un niveau de turbulence extérieur non nul et permettra donc de voir si la simplification de Paullay et Cazalbou est pertinente ou non (paragraphe 4.1).

Adimensionnements, définition du petit paramètre et hypothèses

On suppose le système d'équations adimensionné, l'adimensionnement étant réalisé de sorte que les grandeurs turbulentes soient d'ordre 1 au coeur de l'écoulement turbulent. Il est dès lors possible de comparer le niveau de turbulence extérieure à son niveau dans l'écoulement pleinement turbulent et par conséquent de définir le petit paramètre de l'étude asymptotique comme le niveau extérieur d'énergie cinétique turbulente adimensionné :

$$\xi = k_\infty \tag{4.1}$$

Pour réaliser cette étude asymptotique, on se place dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire et bidimensionnel. L'étude pourra être aisément étendue aux écoulements tridimensionnels. La viscosité moléculaire est négligée dans un premier temps. Son influence sur le comportement des modèles au voisinage de la frontière sera examinée au chapitre 5.3.

4.1 Développement asymptotique local régulier

Un développement asymptotique régulier au premier ordre de la solution du modèle de turbulence est recherché pour le petit paramètre $\xi = k_\infty$ au voisinage de la frontière libre. Plaçons nous dans un repère local lié à la frontière libre (figure 4.1). Soient y la direction normale à la frontière libre et x tangent à la frontière

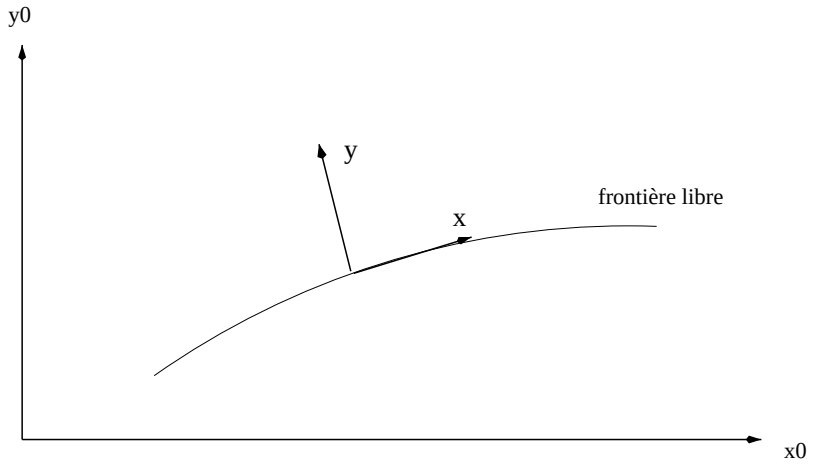


FIG. 4.1 – Définition du repère local lié à la frontière libre

libre et dirigé dans le sens de l'écoulement principal. Le développement local est donc calculé pour une distance à la frontière libre $\lambda = y_e - y \geq 0$ (y_e : valeur de y à la frontière) très petite. Dans une étude asymptotique où le petit paramètre est ξ, cela signifie que λ est suffisamment petit et du même ordre que $\delta(\xi)$ afin que les tensions de Reynolds soient suffisamment petites en comparaison de leur niveau au coeur de la région turbulente de l'écoulement. Le développement asymptotique local régulier est ainsi calculé dans la variable locale ci-dessous :

$$\widehat{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta(\xi)} = O(1) \tag{4.2}$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}$ au voisinage de $y = y_e$, le premier ordre du développement asymptotique ne dépend que de $\widehat{\lambda}$ et ξ. Le développement asymptotique s'écrit par conséquent comme suit :

$$\begin{aligned}
U &= Ue - V(\xi)\widehat{W}_0(\widehat{\lambda}) + V_1(\xi)\widehat{W}_1(\widehat{\lambda}, x) + ... \text{ avec } V = o(1) \\
k &= K(\xi)\widehat{k}_0(\widehat{\lambda}) + K_1(\xi)\widehat{k}_1(\widehat{\lambda}, x) + ... \text{ avec } K = o(1) \\
\overline{u_i' u_j'} &= F_{ij}(\xi)\widehat{\overline{u_i' u_j'}}_0(\widehat{\lambda}) + F_{ij}^1(\xi)\widehat{\overline{u_i' u_j'}}_1(\widehat{\lambda}, x) + ... \text{ avec } F_{ij} = o(1) \\
\nu_t^{eq} &= \frac{k\overline{v'^2}}{\varepsilon} = N(\xi)\widehat{\nu}_{t0}(\widehat{\lambda}) + N_1(\xi)\widehat{\nu}_{t1}(\widehat{\lambda}, x) + ... \text{ avec } N = o(1)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où K, N, F_{ij} et V sont les ordres de grandeur respectivement de k, ν_t, $\overline{u_i' u_j'}$ et $W = U_e - U$. La série $F\widehat{f}_0 + F_1\widehat{f}_1 + F_2\widehat{f}_2 + ...$ est définie de sorte que : $F\widehat{f}_0 >> F_1\widehat{f}_1 >> F_2\widehat{f}_2 ...$ quelle que soit la fonction f

considérée.
Notons au passage que $\nu_t^{eq} = \frac{k\overline{v'^2}}{\varepsilon}$ est une viscosité turbulente équivalente pour un modèle RSM car elle intervient dans la loi de diffusion (du moins pour le modèle de Daly et Harlow) de la même manière que $\nu_t = k^2/\varepsilon$ pour un modèle à deux équations.

Les conditions limites en $y = y_e \Leftrightarrow \widehat{\lambda} = 0$ sont :

$$\nu_t^{eq} \to \sigma(\xi) \ ; \ k \to \xi \ ; \ \overline{u_i' u_j'} \to O(\xi) \ ; \ W = U_e - U \to 0 \tag{4.4}$$

La condition limite $\sigma(\xi)$ sur ν_t est pour l'instant une inconnue du problème.

Définition de la variable locale pour une résolution analytique

La variable locale $\widehat{\lambda}$ n'a pas une définition unique car toute variable telle que $\delta(\xi) \ll 1$ convient. La variable locale que l'on serait tenté de prendre serait celle pour laquelle $k \sim \xi$. Mais le calcul analytique du premier ordre du développement asymptotique est alors impossible puisque la dégénérescence des équations n'est pas intégrable de façon analytique. Pour calculer **analytiquement** le premier ordre, la variable locale $\widehat{\lambda}$ doit être définie de sorte que :

$$1 \gg k \gg \xi \Longleftrightarrow K(\xi) \gg \xi \tag{4.5}$$

Conditions aux limites sur le premier ordre du développement asymptotique

Le développement asymptotique au premier ordre est régulier sur un intervalle $[0,1]$ si, entre autres :

$$\lim_{\xi \to 0} \left[\sup_{[0,1]} \left| \frac{k}{K(\xi)} - \widehat{k}_0 \right| \right] = 0 \tag{4.6}$$

Ainsi, pour que le développement asymptotique soit régulier pour la variable locale $\widehat{\lambda}$ définie ci-dessus (4.5), le premier ordre du développement asymptotique doit satisfaire les conditions limites en $\widehat{\lambda} = 0$ suivantes :

$$\widehat{k}_0 = 0 \ ; \ \widehat{\overline{u_i' u_{j_0}'}} = 0 \ ; \ \widehat{W}_0 = 0 \tag{4.7}$$

sans quoi on aurait par exemple à la frontière libre :

$$\left[k(0)/K(\xi) - \widehat{k}_0(0) \right] = \xi/K(\xi) - \widehat{k}_0(0) \to -\widehat{k}_0(0) \neq 0 \quad \text{lorsque } \xi \to 0$$

et le développement asymptotique ne serait pas régulier.

Ce développement asymptotique régulier caractérise le comportement du modèle de turbulence au voisinage la frontière libre. Il est logique que ce dernier ait à la frontière libre une condition limite de nullité sur $\widehat{k}_0$ car le taux de turbulence extérieur symbolisé par ξ ne doit pas influencer le comportement du modèle lorsque $\xi \to 0$.

Notations simplifiées pour un taux de turbulence extérieur nul

D'après les conditions aux limites précédentes, il semble que le calcul du premier ordre du développement asymptotique pour un taux de turbulence extérieur non nul soit équivalent aux calculs de Paullay puis Cazalbou d'une solution du problème convection-diffusion pour une turbulence extérieure nulle. En conséquence, les notations prises seront celles de Cazalbou afin de simplifier le formalisme. Les conditions aux limites sur la vitesse et k seront les suivantes :

$$\lim_{\lambda\to 0} k = 0 \; ; \; \lim_{\lambda\to 0} \overline{u_i' u_j'} = 0 \; ; \; \lim_{\lambda\to 0} U = U_e \tag{4.8}$$

et la solution des équations dégénérées (convection-diffusion) ne dépendra que de la variable λ. Mais ceci reste seulement une simplification d'un formalisme un peu "lourd" et la seule approche justifiée et justifiable pour établir la dégénérescence des équations est d'utiliser le développement asymptotique précédent afin de pouvoir évaluer les différents ordres de grandeur en fonction ξ et de façon indépendante de $\widehat{\lambda}$.

4.2 Dégénérescence des équations

4.2.1 Pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow

Dégénérescence significative des équations aux tensions de Reynolds et du mouvement

En écoulement bidimensionnel stationnaire, les équations du mouvement et les équations pour les tensions s'écrivent dans le repère local lié à la frontière libre (figure 4.1) :

$$\begin{aligned} U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \\ U\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x} + V\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial y} &= S_{ij} + D_{kk}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2}\frac{d\overline{u_i' u_j'}}{d\lambda}\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Il a été montré en annexe B, de façon similaire aux modèles à deux équations (annexe A), que les termes de production, dissipation et de redistribution sont négligeables par rapport aux termes de diffusion et advection au voisinage de la frontière libre lorsque le niveau de turbulence extérieur tend vers zéro. La dégénérescence significative locale des équations de transport des tensions de Reynolds s'écrit alors :

$$\frac{d\overline{u_i' u_j'}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(g\frac{d\overline{u_i' u_j'}}{d\lambda}\right) \tag{4.10}$$

$$\text{où : } g = -\frac{D_{kk}}{V_0}\,\frac{\overline{v'^2}k}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad V_0 = \lim_{\lambda\to 0} V \tag{4.11}$$

Notons au passage que la dégénérescence significative est obtenue pour $\nu_t^{eq} = \frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2} \simeq g \sim \lambda$ (notation : $g \sim \lambda$ signifie que g est du même ordre de grandeur que λ) afin que la diffusion soit du même ordre de grandeur que la convection. La condition limite sur g en $\lambda = 0$ est dès lors la suivante :

$$\lim_{\lambda\to 0} g = 0 \tag{4.12}$$

Après intégration de (4.10) et en tenant compte des conditions aux limites (4.8, 4.12) sur $\overline{u_i' u_j'}$ et g en $\lambda = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} -\overline{u_i' u_j'} + g\frac{d\overline{u_i' u_j'}}{d\lambda} &= -k + g\frac{dk}{d\lambda} = 0 \\ \Longrightarrow \quad g &= \frac{1}{\overline{u_i' u_j'}}\frac{d\overline{u_i' u_j'}}{d\lambda} = \frac{1}{k}\frac{dk}{d\lambda} \qquad (4.13) \\ \Longrightarrow \quad \overline{u_i' u_j'} &= c_{ij} k \qquad (4.14) \end{aligned}$$

En conséquence, l'anisotropie est constante en première approximation au voisinage de la frontière libre.

Puisque $k \geq 0$ et $k \to 0$ lorsque $\lambda \geq 0 \to 0$, on a nécessairement $\frac{\partial k}{\partial \lambda} \geq 0$. La relation (4.13) entre k et g impose alors à g d'être positif. Ainsi, d'après l'expression (4.11) de g, V_0 doit être négatif si $k \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$. Autrement dit, la vitesse dans la direction normale à la frontière libre est, comme attendue, dirigée de l'écoulement extérieur vers l'écoulement turbulent.

Dégénérescence de l'équation d'échelle

Reprenons la forme générique (3.8) de l'équation d'échelle. Le fait que la dégénérescence des équations pour les tensions se réduise à un équilibre convection-diffusion impose à l'équation d'échelle de se réduire, quelle que soit la grandeur transportée, à un équilibre entre les termes de convection, diffusion et les termes croisés. On choisit néanmoins de transporter la variable $\nu_t = k^2/\varepsilon$ pour simplifier la dégénérescence de l'équation d'échelle et pouvoir ainsi calculer sa solution le plus simplement possible. Cette dégénérescence fait alors apparaître une viscosité équivalente dans les termes de diffusion et les termes croisés :

$$\nu_t^{eq} = \frac{\overline{v'^2}}{k}\frac{k^2}{\varepsilon} \simeq c_{22}\,\nu_t \text{ d'après } (4.14) \qquad (4.15)$$

L'équation de transport de ν_t dégénère sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{V_0}{c_{22}}\,\nu_t \,+\, D_{nn}\,\nu_t\,\frac{d\nu_t}{d\lambda} \,+\, D_{nk}\,\frac{{\nu_t}^2}{k}\,\frac{dk}{d\lambda}\right) \,+\, C_{nn}\left(\frac{d\nu_t}{d\lambda}\right)^2 \qquad (4.16) \\ & + C_{nk}\,\frac{\nu_t}{k}\,\frac{d\nu_t}{d\lambda}\,\frac{dk}{d\lambda} \,+\, C^n_{kk}\left(\frac{\nu_t}{k}\,\frac{dk}{d\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus est récrite pour la fonction g définie précédemment (4.11) :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{d}{d\lambda}\left(-D_{kk}\,g \,+\, D_{nn}\,g\,\frac{dg}{d\lambda} \,+\, D_{nk}\,\frac{g^2}{k}\,\frac{dk}{d\lambda}\right) \,+\, C_{nn}\left(\frac{dg}{d\lambda}\right)^2 \qquad (4.17) \\ & + C_{nk}\,\frac{g}{k}\,\frac{dg}{d\lambda}\,\frac{dk}{d\lambda} \,+\, C^n_{kk}\left(\frac{g}{k}\,\frac{dk}{d\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

La dégénérescence des différentes équations d'un modèle RSM, pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow, se réduit alors à une seule équation pour g après avoir remplacé (4.13) dans (4.17) :

$$a\,g\,g'' + b\,\left(g'\right)^2 + c\,g' + d = 0 \tag{4.18}$$

où a, b, c et d sont définis à partir des constantes de diffusion et des termes croisés du modèle :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -D_{nn} \\ b = -\left(D_{nn} + C_{nn}\right) \\ c = -\left(C_{nk} + D_{nk} - D_{kk}\right) \\ d = -C^n_{kk} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -D_{\varepsilon\varepsilon} \\ b = D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon} \\ c = -4\left(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}\right) + D_{kk} - D_{\varepsilon k} - C_{\varepsilon k} \\ d = 4\left(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}\right) + 2\left(D_{\varepsilon k} + C_{\varepsilon k} - D_{kk}\right) + C^{\varepsilon}_{kk} \end{array}\right. \tag{4.19}$$

La dégénérescence des équations d'un modèle RSM avec le modèle de diffusion de Daly et Harlow (1970) est donc identique à celle d'un modèle à deux équations (cf. calcul en annexe A).

4.2.2 Pour le modèle de diffusion de Hanjalić-Launder

Concernant les autres modèles de diffusion comme celui d'Hanjalić et Launder (1972), une étude de leur comportement au voisinage de la frontière d'une couche de mélange temporelle a été menée par Cazalbou et Chassaing (2002). Cette analyse s'étend au problème de la frontière libre considéré puisqu'il y a, en quelque sorte, équivalence entre les deux types de frontières. Seul le modèle de diffusion de Hanjalic-Launder (2.6) est étudié ici étant donné que les autres (comme celui de Lumley (1978)) sont très rarement utilisés de par leur complexité et de par leur gain en précision peu significatif. Le terme de diffusion de l'équation d'échelle est modélisé sous la forme suivante (2.6) :

$$D_\Phi = D_{\Phi\Phi}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right) \tag{4.20}$$

et l'équation d'échelle s'écrit sous une forme générique :

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{\Phi}{k}\left(C_{\Phi 1}P_k - C_{\Phi 2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi\Phi}\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right) \qquad (4.21) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi k}\frac{\Phi}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) + C_{\Phi\Phi}\frac{k}{\varepsilon\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \\ &+ C_{\Phi k}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} + C^{\Phi}_{kk}\frac{\Phi}{k\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l} + f\left(\bar{\bar{b}}\right) \qquad (4.22) \end{aligned}$$

où $f\left(\bar{\bar{b}}\right)$ est fonction du tenseur d'anisotropie et vaut zéro lorsque l'anisotropie est constante. Cette fonction assure le caractère générique de l'équation d'échelle.

On montre que la dégénérescence des équations pour les tensions est significative pour les ordres de grandeurs suivants : $\overline{u'^2} = O(\overline{v'^2}) = O(k) = O(\overline{u'v'})$. On démontre alors que les termes de production, redistribution et dissipation sont négligeables au voisinage de la frontière libre. Les équations pour les tensions

dégénèrent donc, pour g défini par (4.11), sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_0^{\overline{u'^2}} &= \frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(-\overline{u'^2} + g\left(\frac{2\,\overline{u'v'}}{\overline{v'^2}}\,\frac{d\overline{u'v'}}{d\widehat{\lambda}} + \frac{d\overline{u'^2}}{d\widehat{\lambda}}\right)\right) = 0\\
\widehat{L}_0^{\overline{v'^2}} &= \frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(-\overline{v'^2} + g\left(3\,\frac{d\overline{v'^2}}{d\widehat{\lambda}}\right)\right) = 0\\
\widehat{L}_0^{\overline{w'^2}} &= \frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(-\overline{w'^2} + g\left(\frac{d\overline{w'^2}}{d\widehat{\lambda}}\right)\right) = 0\\
\widehat{L}_0^{k} &= \frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(-k + g\left(\frac{dk}{d\widehat{\lambda}} + \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v'^2}}\,\frac{d\overline{u'v'}}{d\widehat{\lambda}} + \frac{d\overline{v'^2}}{d\widehat{\lambda}}\right)\right) = 0\\
\widehat{L}_0^{\widetilde{u'v'}} &= \frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(-\overline{u'v'} + g\left(2\,\frac{d\overline{u'v'}}{d\widehat{\lambda}} + \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v'^2}}\,\frac{d\overline{v'^2}}{d\widehat{\lambda}}\right)\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

L'équation d'échelle (4.21) dégénère pour la variable $\nu_t = k^2/\varepsilon$ en :

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(V_0\,\nu_t \,+\, D_{nn}\,\nu_t\,f_v\frac{d\nu_t}{d\widehat{\lambda}} \,+\, D_{nk}\,\frac{\nu_t^2}{k}\,f_v\frac{dk}{d\widehat{\lambda}}\right) \,+\, C_{nn}\,f_v\left(\frac{d\nu_t}{d\widehat{\lambda}}\right)^2\\
& + C_{nk}\,f_v\frac{\nu_t}{k}\,\frac{d\nu_t}{d\widehat{\lambda}}\,\frac{dk}{d\widehat{\lambda}} \,+\, C_{kk}^n\,f_v\left(\frac{\nu_t}{k}\,\frac{dk}{d\widehat{\lambda}}\right)^2 \,+ f(\bar{\bar{b}})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

pour $f_v = \overline{v'^2}/k$.

L'étude du comportement à la frontière libre de modèles RSM pour différents modèles de diffusion, réalisée par Cazalbou et Chassaing (2002), montre que l'anisotropie des tensions est constante au voisinage de la frontière libre pour le modèle de diffusion de Hanjalic-Launder de même que pour le modèle de Daly-Harlow. Puisque $f_v = \overline{v'^2}/k$ est constant, $f(\bar{\bar{b}}) = 0$ et l'équation (4.24) est indépendante de l'anisotropie des tensions de Reynolds lorsqu'elle est récrite pour $g \propto f_v\,\nu_t$. La dégénérescence des équations de transport se ramène donc à une forme semblable (4.18) à celle obtenue pour le modèle de Daly-Harlow mais avec des coefficients a, b, c et d différents :

$$\begin{aligned}
a &= -D_{\varepsilon\varepsilon}\\
b &= D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}\\
c &= -4\,(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}) + D_{kk}/3 - D_{\varepsilon k} - C_{\varepsilon k}\\
d &= 4\,(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}) + 2\,(D_{\varepsilon k} + C_{\varepsilon k} - D_{kk}/3) + C_{kk}^{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Le calcul qui suit des solutions de la dégénérescence des équations de transport concerne donc les modèles à deux équations (cf. annexe A) ainsi que les modèles RSM reprenant le modèle de diffusion de Daly-Harlow ou de Hanjalić-Launder.

4.3 Solutions de la dégénérescence des équations

Pour la variable locale définie en (4.5), la dégénérescence des équations de transport **d'un modèle aux tensions de Reynolds pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow ainsi que d'un modèle à deux équations**, se réduit à une seule équation pour g :

$$a\,g\,g'' \,+\, b\,\left(g'\right)^2 \,+\, c\,g' \,+\, d \,=\, 0 \tag{4.26}$$

$$\text{avec :} \quad \frac{g}{k}\frac{dk}{d\lambda} = 1$$

4.3.1 Solutions en puissance

L'équation (4.18) admet deux solutions telles que $g'' = 0$, correspondant aux solutions trouvées par Catris (1999) :

$$g \,=\, \frac{\lambda}{\alpha_k^+} \Longrightarrow k = K_0\,\lambda^{\alpha_k^+} \tag{4.27a}$$

$$g \,=\, \frac{\lambda}{\alpha_k^-} \Longrightarrow k = K_0\,\lambda^{\alpha_k^-} \tag{4.27b}$$

où $1/\alpha_k^+$ et $1/\alpha_k^-$ sont solutions de $bx^2 + cx + d = 0$. Dès lors, si $\Delta = c^2 - 4bd > 0$ et $b \neq 0$:

$$\frac{1}{\alpha_k^+} = -\gamma^+ = -\left(\frac{c+\sqrt{\Delta}}{2b}\right) \tag{4.28a}$$

$$\frac{1}{\alpha_k^-} = -\gamma^- = -\left(\frac{c-\sqrt{\Delta}}{2b}\right) \tag{4.28b}$$

Ces deux solutions particulières se caractérisent par le fait que toutes les quantités transportées se comportent comme des puissances de la distance λ à la frontière libre. De plus, ces solutions contiennent la solution que Cazalbou et al. (1993) ont construit au voisinage de la frontière.

Le calcul des solutions de la dégénérescence lorsque $\Delta = 0$ ou $b = 0$ est détaillé en annexe E. Il apparaît que ces configurations ne donnent pas des raccordement doux (dérivées finies) à la frontière libre. C'est pourquoi nous nous limiterons par la suite à $\Delta > 0$ et $b \neq 0$. Le cas $\Delta < 0$ ne semble pas dénué d'intérêt mais il n'a pas été étudié par manque de temps et du fait de la complexité du calcul de toutes les solutions de l'équation pour g.

4.3.2 Solution paramétrique

L'équation (4.18) possède une troisième solution telle que $g'' \neq 0$, du moins sur un intervalle non vide. Cette solution n'est pas, à la différence des précédentes, une solution en puissance de λ. Le calcul de cette nouvelle solution est détaillé en annexe C et conduit à une description paramétrique, où $m = g' = \frac{dg}{d\lambda}$ est le

paramètre :

$$g = G_0 \left|g' + \gamma^+\right|^{\beta^+} \left|g' + \gamma^-\right|^{\beta^-} = G_0 \left|m + \gamma^+\right|^{\beta^+} \left|m + \gamma^-\right|^{\beta^-} \tag{4.29}$$

$$\text{avec : } \beta^+ = -\frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{\alpha_k^+}\ ,\ \beta^- = \frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{\alpha_k^-} \tag{4.30}$$

λ se déduit de g car $\dfrac{d\lambda}{dm} = \dfrac{d\lambda}{dg}\dfrac{dg}{dm} = \dfrac{1}{m}\dfrac{dg}{dm}$:

$$\lambda(m) = c_0 + c_1 \left|m + \gamma^-\right|^{\beta^-} F\left(m + \gamma^-\right) \tag{4.31}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} F(x) = Hypergeom\left(\left[\beta^-, 1 - \beta^+\right], \left[1 + \beta^-\right], \dfrac{x}{\gamma^- - \gamma^+}\right) \\ c_0 = \lambda(m_0) - c_1 \left|m_0 + \gamma^-\right|^{\beta^-} F\left(m_0 + \gamma^-\right) \end{cases}$$

où la fonction hypergéométrique de Gauss est définie de la façon suivante :

$$Hypergeom\left([a, b], [c], z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!} \tag{4.32}$$

k se déduit également de g par la relation (4.13) :

$$k(m) = K_0 \left|\frac{m + \gamma^-}{m + \gamma^+}\right|^{\frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}}} \tag{4.33}$$

L'équation du mouvement selon x implique que $W = U_e - U \sim \overline{u'v'}$. Puisque $\overline{u'v'} \sim k$ pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow, la vitesse évolue pour la solution paramétrique de la façon suivante :

$$U(m) = U_e - C_U \left|\frac{m + \gamma^-}{m + \gamma^+}\right|^{\frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}}} \tag{4.34}$$

4.3.3 Solution paramétrique : unique solution significative

Il vient d'être montré que la dégénérescence du modèle de turbulence au voisinage de la frontière libre possède :
- deux solutions en puissance comme l'avait montré Catris (1999) soit une de plus que ce qu'avaient supposé Cazalbou et al. (1993),
- une troisième solution obtenue sous une forme paramétrique.

Si la solution paramétrique n'était pas solution sur tout le domaine de validité, il existerait $\lambda_0 \neq 0$ tel que, lorsque $\lambda \to \lambda_0$, la solution paramétrique tende vers une solution en puissance ($g'' \to 0$). Ainsi, d'après (4.18), $m = g' \to -\gamma^+$ ou $-\gamma^-$ dès lors que $\lambda \to \widehat{\lambda}_0$. L'expression de g en (4.29) montre alors que $g \to 0$ ou $g \to \infty$ lorsque $\lambda \to \widehat{\lambda}_0$. Le comportement $g \to \infty$ lorsque $\lambda \to \lambda_0 \neq 0$ est incompatible avec les hypothèses de continuité. Si $g \to 0$ lorsque $\lambda \to \lambda_0$, alors cela signifie que la solution paramétrique vérifie les conditions aux

limites $k = 0$ et $g = 0$ en λ_0 ce qui implique $\lambda_0 = 0$ et contredit donc l'hypothèse de départ ($\lambda_0 \neq 0$). En résumé, chaque solution ne peut apparaître que si elle est la seule solution sur tout le domaine de validité.

Mais comment savoir quelle solution va réellement apparaître ? Des considérations sur le caractère significatif ou non des différentes solutions permettent de répondre à cette question. Pour cela revenons aux notations d'une étude asymptotique locale pour la variable locale $\widehat{\lambda}$ définie en (4.5). Une solution en puissance associée à un exposant positif (pour assurer son existence par rapport aux conditions limites en $\widehat{\lambda} = 0$) correspond à une valeur de $m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}}$ constante et égale à $-\gamma^- = 1/\alpha_k^-$ ou $-\gamma^+ = 1/\alpha_k^+$. Or, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, $g(m)$ (de la solution paramétrique) tend vers zéro ou l'infini lorsque $m \to 1/\alpha_k^-$ ou $m \to 1/\alpha_k^+$. Une solution en puissance correspond donc soit à une asymptote en $\widehat{\lambda} = \infty$ soit à une tangente en $\widehat{\lambda} = 0$ de la solution paramétrique. Il a été alors montré en annexe D que les solutions en puissance sont non-significatives car incluses dans la solution paramétrique. **En conclusion, la solution paramétrique est la seule solution significative de la dégénérescence (4.18). Les solutions en puissance étant non-significatives, elles constituent des approximations moins précises ou trop localisées en comparaison de la solution paramétrique. C'est pourquoi nous utiliserons la solution paramétrique pour décrire le comportement au premier ordre des modèles de turbulence au voisinage de la frontière libre.**

La solution paramétrique, en tant qu'approximation à l'ordre zéro au voisinage de la frontière libre, a été confirmée par des calculs numériques effectués sur un grand nombre de points, en particulier dans la zone externe d'une couche limite. Ces calculs ont été effectués à l'aide d'un code de similitude (Bézard, 2000) dans lequel la viscosité est négligée ce qui en fait un bon outil de comparaison. Un calcul numérique, dans la zone externe d'une couche limite, est présenté sur la figure 4.2 pour un modèle RSM (SSG et modèle de diffusion de Daly et Harlow avec une équation d'échelle transportant kL) tel que : $\alpha_k^- = 0,5$ et $\alpha_k^+ = 11,5$. Le niveau extérieur à la couche limite des tensions de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}^+$, adimensionnées en variable de paroi, est non nul (pour des raisons numériques évidentes) et vaut 10^{-12}. Il a été vérifié que ce niveau était suffisamment faible pour que l'approximation au premier ordre calculée précédemment représente, avec une bonne précision, la solution réelle au voisinage de la frontière libre. Des valeurs plus faibles de n'ont en effet pas d'incidence notable sur la forme de la solution. La condition $\xi \ll 1$ est donc satisfaite. Il apparaît dans ce calcul et dans bons nombres de calculs réalisés en couche limite ou en écoulements cisaillés libres (couches de mélange, jets...) que la viscosité turbulente est non linéaire par rapport à la distance à la frontière libre contrairement aux solutions en puissance pour lesquelles $\nu_t \sim \lambda$ (tracées en pointillés sur la figure 4.2).

4.3.4 Étude de la solution paramétrique

Pour étudier le comportement à la frontière, il nous faut étudier la solution paramétrique car elle correspond à un développement asymptotique significatif régulier au voisinage de la frontière libre.

Condition d'existence

Les conditions aux limites (4.8) doivent être satisfaites par la solution paramétrique. L'expression de k (4.33) conditionne la limite du paramètre m quand $\lambda \to 0$:

$$k \to 0 \Longrightarrow m \to -\gamma^- = \frac{1}{\alpha_k^-} \tag{4.35}$$

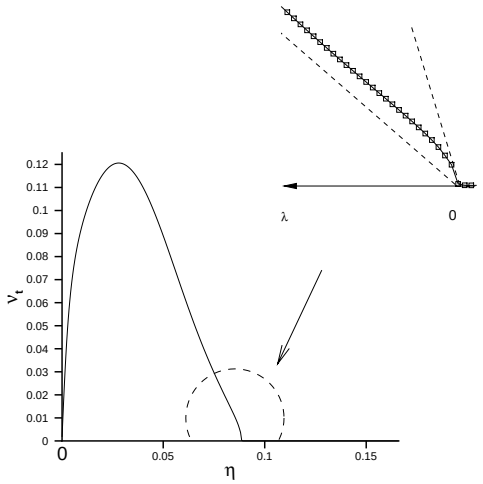


FIG. 4.2 – Calcul numérique de la viscosité turbulente dans la zone externe de la couche limite ($\eta = y/\Delta$)

Le paramètre m étant positif puisque $g \geq 0$ tend vers zéro lorsque $\lambda \geq 0$ tend vers zéro, la condition ci-dessous est une condition nécessaire à l'existence du développement asymptotique :

$$\frac{1}{\alpha_k^-} > 0 \tag{4.36}$$

Puisque k tend vers zéro implique, par définition, que λ tende vers zéro, λ défini en (4.31) peut être récrit pour $m_0 = -\gamma^-$:

$$\lambda(m) = c_1 \left| m + \gamma^- \right|^{\beta^-} F\left(m + \gamma^-\right) \tag{4.37}$$

Forme de la solution paramétrique

Considérons le cas $D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon} > 0 \Leftrightarrow b > 0$. Ce cas est en général satisfait par tous les modèles de turbulence car lorsque la loi logarithmique est satisfaite pour les gradients de pression nul (3.25a), on a :

$$D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{\kappa^2 k_0^+ \overline{v'^2}_0^+} \left(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}\right) > 0$$

Les cas $1/\alpha_k^+ > 0$ et $1/\alpha_k^+ < 0$ doivent être distingués. Dans les deux cas, le paramètre $m = dg/d\lambda$ peut prendre deux voies différentes :

$$\begin{aligned} m < \frac{1}{\alpha_k^-} &\Longleftrightarrow g'' < 0 \\ m > \frac{1}{\alpha_k^-} &\Longleftrightarrow g'' > 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Les figures suivantes présentent ces deux configurations de solution paramétrique pour $1/\alpha_k^+$ positif (figure 4.3) et négatif (figure 4.4). Les figures de gauche correspondent au cas $g'' < 0$ et celles de droite au cas $g'' > 0$.

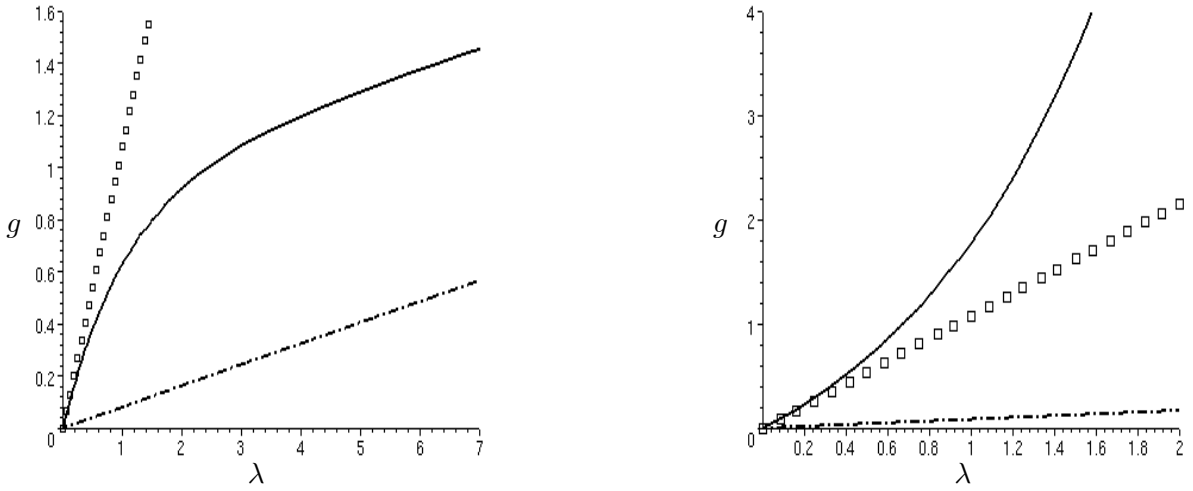


FIG. 4.3 – Solutions de l'équation pour g lorsque les deux puissances sont positives
□ : α_k^- et $- \cdot -$: α_k^+ (solutions en puissance) ; — : solution paramétrique

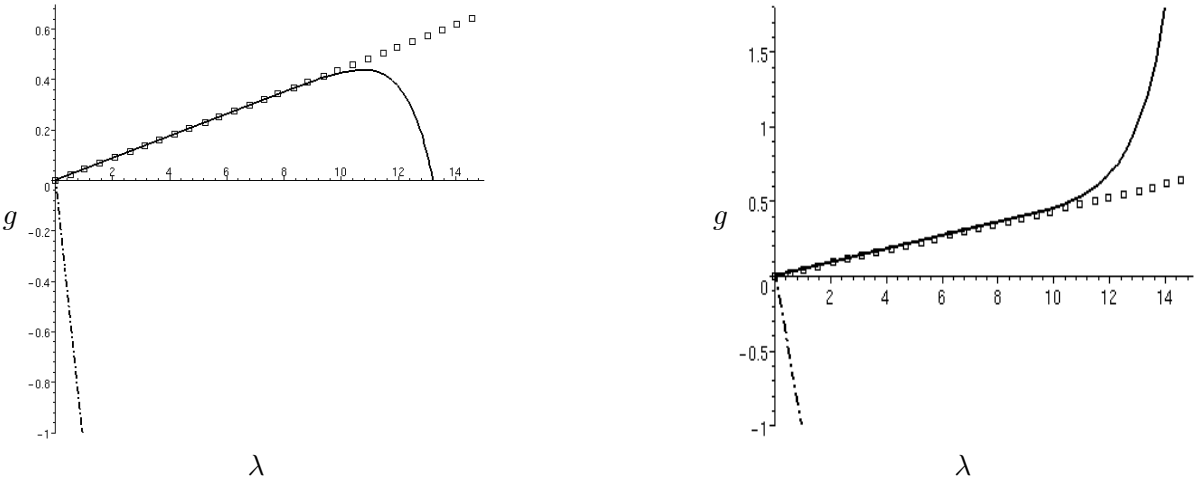


FIG. 4.4 – Solutions de l'équation pour g lorsque $\alpha_k^+ < 0$
□ : α_k^- et $- \cdot -$: α_k^+ (solutions en puissance) ; — : solution paramétrique

Théorème d'extension

Si une approximation dans une variable locale $\widehat{\lambda}$ est régulière pour $\widehat{\lambda} = O(1)$, le théorème d'extension (Eckhaus (1978)) permet d'étendre le domaine de validité (où l'approximation est régulière) à $\widehat{\lambda} \in]0, 1/\rho(\xi)[$, pour $\rho = o(1) >> \delta(\xi)$ afin que $\lambda = \delta(\xi)\widehat{\lambda}$ reste très petit. Le premier ordre du développement asymptotique est donc régulier pour des valeurs $\widehat{\lambda} \gg 1$. Cette propriété essentielle définit, puisque m est relié à $\widehat{\lambda}$, la valeur de m lorsque $\widehat{\lambda} \gg 1$. L'expression (4.37) de $\widehat{\lambda}$ contient une forme hypergéométrique $hypergeom([\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_3], x)$ qui tend vers l'infini lorsque $x \to \infty$ et lorsque $x \to 1$ si $\alpha_3 > \alpha_1 + \alpha_2$, c'est à dire si $\beta^+ < 0$. Par conséquent, pour $\widehat{\lambda} \to +\infty$:

$$\begin{aligned} &\text{si } \beta^+ < 0 \Longleftrightarrow 1/\alpha_k^+ > 0 \quad : \quad m \to \frac{1}{\alpha_k^+} \text{ ou } m \to \infty \\ &\text{si } \beta^+ > 0 \Longleftrightarrow 1/\alpha_k^+ < 0 \quad : \quad m \to \infty \end{aligned} \tag{4.39}$$

Conclusion sur la solution paramétrique

Le théorème d'extension exclut le cas où $m \in]1/\alpha_k^+, 1/\alpha_k^-[$ lorsque $1/\alpha_k^+ < 0$. Ainsi, lorsque $1/\alpha_k^+ < 0$, seule la solution correspondant à la figure de droite dans la figure 4.4, c'est à dire à $m > 1/\alpha_k^-$, est solution de la dégénérescence (4.26).

Dans le cas où $1/\alpha_k^+ > 0$, le théorème d'extension ne permet pas d'éliminer une des deux solutions. Néanmoins, les solutions en puissance sont non-significatives car incluses dans la solution paramétrique telle que $m \in]1/\alpha_k^+, 1/\alpha_k^-[$ (figure de gauche dans la figure 4.3). La solution paramétrique telle que $m > 1/\alpha_k^-$ (figure de droite dans la figure 4.3) ne contient quant à elle qu'une seule des solutions en puissance. Par ailleurs, cette solution paramétrique s'étend d'après le théorème d'extension jusqu'à $m = dg/d\lambda \to 1/\rho(\xi) >> 1$ soit à des valeurs qui contredisent la condition $g \sim \nu_t \sim \lambda$ pour que la dégénérescence soit significative.
Lorsque $1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ > 0$, la solution de l'équation (4.26) pour g telle que $m > 1/\alpha_k^-$ n'a donc, à priori, pas de raison d'exister. Pour tous les modèles que nous avons testés dans la configuration $\alpha_k^+ > 0$, c'est en effet la solution telle que $m \in]1/\alpha_k^+, 1/\alpha_k^-[$ qui était la solution numérique des équations de transport (cf. exemple sur la figure 4.2).

En conclusion, la solution paramétrique prend la forme donnée sur les figures 4.5 et 4.6, forme qui diffère selon que $1/\alpha_k^+$ est positif ou négatif. Le cas $1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ > 0$ apparaît alors comme la seule possibilité d'avoir un raccordement "doux" (dérivées finies) des grandeurs turbulentes à la frontière libre. Dans ce cas de figure, les deux solutions en puissance (4.27) font office de tangente en $\widehat{\lambda} = 0$ et d'asymptote en $\widehat{\lambda} = \infty$ à la solution paramétrique. Pour revenir à l'analyse de Cazalbou et al. (1993), le fait que la solution en puissance ait été validée numériquement s'explique par le fait qu'elle correspond en général à une asymptote de la solution paramétrique. Ainsi, lorsque le niveau de turbulence résiduel est suffisamment faible, la solution paramétrique tend à se confondre avec son asymptote (solution en puissance). Mais cette solution en puissance reste une moins bonne approximation que ne l'est la solution paramétrique (cf paragraphe 4.3.3). Cette dernière est donc plus à même de décrire le comportement des modèles de turbulence au voisinage de la frontière libre.

Le prochain chapitre examinera la question de la sensibilité aux conditions extérieures et de ses liens avec la forme de la solution paramétrique.

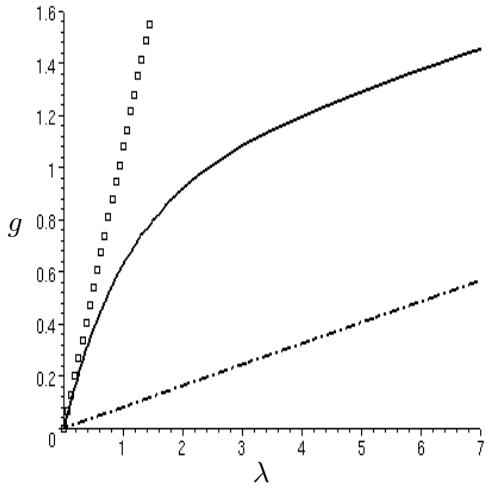


FIG. 4.5 – Forme de la solution paramétrique lorsque $1/\alpha_k^+ > 0$

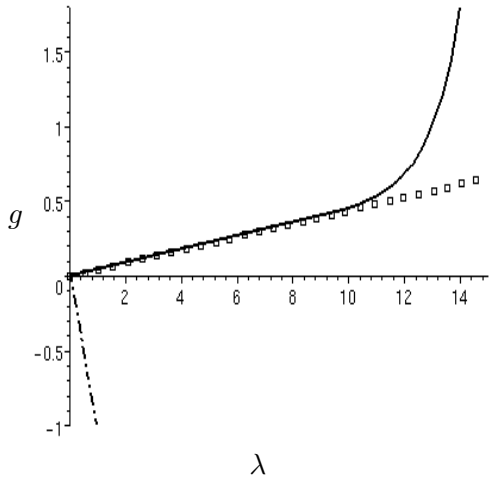


FIG. 4.6 – Forme de la solution paramétrique lorsque $1/\alpha_k^+ < 0$

Forme de la solution paramétrique vérifiant sa condition d'existence $1/\alpha_k^- > 0$

Remarque :

Le comportement numérique, exposé sur les figures 3.4, d'un modèle ayant une puissance de raccordement négative et l'autre positive ($\alpha_k^- > 0$ et $\alpha_k^+ < 0$) est maintenant explicable :

1. la figure de gauche (figure 3.4) pour laquelle le raccordement était abrupt (dérivée de k ou ν_t infinie) correspond à la solution paramétrique pour $\alpha_k^- > 0$ et $\alpha_k^+ < 0$. Cela confirme l'étude précédente de la solution paramétrique.
2. la figure de droite (figure 3.4) ne vérifie pas la condition limite $\lim_{\lambda \to 0} \nu_t = 0$ et donc ce n'est pas une solution de la dégénérescence significative des équations. L'analyse du comportement des modèles à la frontière libre que nous avons réalisée ne permet pas d'expliquer cette solution numérique. Par ailleurs, lorsque le nombre de points du maillage augmente, la solution est significativement altérée : il n'y a pas de convergence en maillage pour ce type de solution numérique. De plus, lorsqu'on raffine suffisamment le maillage, elle conduit à la solution de gauche pour laquelle le raccordement est abrupt. Cette solution obtenue est donc un artefact numérique, lié sans doute aux schémas hybrides utilisés ajoutant une diffusion numérique artificielle au voisinage de la frontière libre.

Chapitre 5

Conséquences de l'analyse asymptotique sur l'étude de la sensibilité des modèles aux conditions extérieures - contraintes revisitées

5.1 Sensibilités aux conditions extérieures

Les liens entre l'analyse précédente de la solution paramétrique et la sensibilité du modèle aux conditions extérieures lorsque $\xi \to 0$ sont étudiés.

Si la solution paramétrique ne peut constituer un développement local régulier, cela signifie qu'il n'existe pas de développement asymptotique régulier au voisinage de la frontière libre. Dans ce cas, le modèle ne peut pas avoir un comportement asymptotique lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro. Le modèle se trouve alors anormalement sensible aux conditions extérieures sur ν_t, $\overline{u_i' u_j'}$... Si par contre la solution paramétrique existe, le comportement asymptotique du modèle au voisinage de la frontière libre est connu (à l'ordre zéro). L'étude de la solution paramétrique doit nous permettre de savoir si le modèle est significativement sensbile ou non aux conditions extérieurs de ν_t ou $\overline{u_i' u_j'}$ lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro (i.e. $\xi \to 0$). Voyons alors, à partir de l'analyse de la solution paramétrique faite au chapitre précédent, quelles sont les conditions nécessaires à la non sensibilité des modèles aux conditions extérieures lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro.

1. Tout d'abord, examinons l'importance de la condition $1/\alpha_k^- > 0$. Cette condition est une condition nécessaire afin que la solution paramétrique vérifie les conditions aux limites (4.8) et donc afin que la solution paramétrique constitue un développement asymptotique local et régulier. Compte tenu du lien entre l'existence de ce développement asymptotique et la sensibilité aux conditions extérieures (paragraphe précédent), la condition $1/\alpha_k^- > 0$ d'existence de la solution paramétrique est une condition nécessaire à la non sensibilité aux conditions extérieures lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro.

2. Supposons maintenant que la condition précédente $1/\alpha_k^- > 0$ est remplie et donc que la solution paramétrique et le développement asymptotique local régulier existent. Dans ce cas, l'étude de la solution

paramétrique doit nous permettre de conclure quant à la sensibilité ou non du modèle de turbulence aux conditions extérieures.

Cazalbou et al. (1993) ont établi une condition sur le signe de l'exposant α_k (3.38) de leur solution en puissance pour éviter les problèmes de sensibilité non physiques aux conditions extérieures : $1/\alpha_k > 0$. Dans la majorité des cas c'est à dire pour les modèles où l'équation d'échelle est de la forme (3.36) et où $\Phi = \varepsilon^n k^m$ avec $n > 0$, cet exposant correspond à α_k^+. Cette condition semblant fonctionner pour bon nombre de modèles de turbulence, voyons en quoi la condition $\alpha_k^+ > 0$ serait une condition nécessaire pour éviter les problèmes de sensibilité non physique aux conditions extérieures. Pour cela nous allons étudier plus en détail la solution paramétrique (déjà étudiée au paragraphe 4.3.4) lorsque $1/\alpha_k^+$ est positif et négatif.

Plaçons nous dans la configuration $1/\alpha_k^+ > 0$ et $1/\alpha_k^- > 0$ correspondant à la figure 4.5. Le théorème d'extension montre que la frontière du domaine de régularité peut être étendue à $\widehat{\lambda} \to 1/\rho(\xi) \gg 1$. Ainsi, lorsque $\xi \to 0$, on a $\widehat{\lambda} \to \infty$ à la frontière du domaine de régularité et par voie de conséquence $m = \frac{\partial g}{\partial \lambda} \to 1/\alpha_k^+$. La solution paramétrique a dès lors un comportement asymptotique indépendant de ξ lorsque $\xi \to 0$. Il est intéressant de remarquer que la solution en puissance associée à α_k^+ trouvée par Cazalbou correspond ici à la limite asymptotique de la solution paramétrique lorsque $\xi \to 0$. La solution paramétrique est également indépendante des conditions extérieures car $\widehat{k}_0 \to 0$ et $\widehat{g}_0 \to 0$ pour $\widehat{\lambda} \to 0$.
Plaçons nous maintenant dans la configuration $1/\alpha_k^+ < 0$ et $1/\alpha_k^- > 0$ correspondant à la figure 4.6. Lorsque $\xi \to 0$ et à la frontière du domaine de régularité pour laquelle $\widehat{\lambda} \to 1/\rho(\xi)$, on a $m >> 1$. En d'autres termes, $m = \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ prend des valeurs d'autant plus grandes que ξ est petit. Le premier ordre du développement asymptotique dépend alors de façon non négligeable de ξ lorsque $\xi \to 0$.
En conclusion, la condition $1/\alpha_k^+ > 0$ en plus de celle imposée sur $1/\alpha_k^-$ (4.36) constitue la seule possibilité d'avoir une solution paramétrique et par là même un modèle ayant un comportement asymptotique lorsque $\xi \to 0$ indépendant de ξ.

En résumé, les contraintes ci-dessous sont des conditions nécessaires pour que le modèle de turbulence ne soit pas anormalement sensible aux conditions extérieures ainsi qu'au niveau de turbulence extérieur lorsque ce dernier tend vers zéro :

$$\frac{1}{\alpha_k^-} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_k^+} > 0 \tag{5.1}$$

Les profils de g et k pour la solution paramétrique, lorsque les conditions précédentes sont satisfaites, sont données sur les figures 5.1 et 5.2. Dans ce cas de figure, les deux solutions en puissance (4.27) font office d'asymptotes en $\widehat{\lambda} = 0$ et $\widehat{\lambda} = \infty$ à la solution paramétrique (figure 4.3). Cette dernière peut ainsi être vue comme une fonction encadrée par les deux solutions en puissance, le comportement du modèle de turbulence au voisinage de la frontière libre pouvant alors être analysé à partir de ces deux solutions particulières.

Ces conclusions sont confirmées par des calculs numériques à partir d'un code de similitude. Un exemple est donné sur la figure 5.3 pour le même modèle que sur la figure 4.2. Le modèle est bien, comme attendu, insensible aux conditions extérieures de ν_t. Dans le cas d'un modèle RSM (SSG - Daly-Harlow avec une

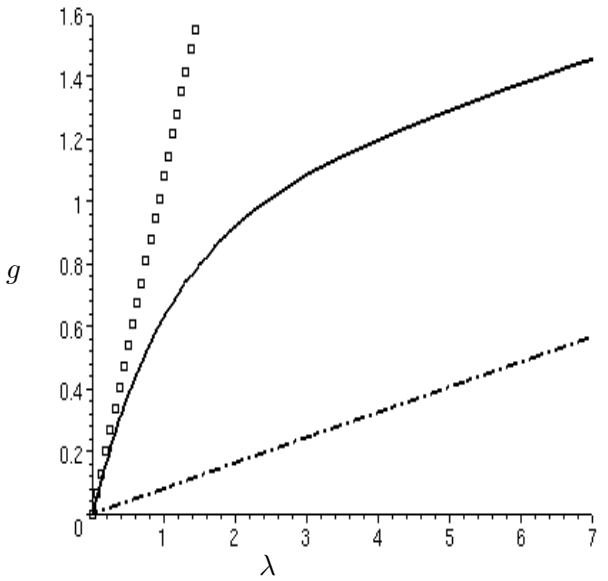


FIG. 5.1 – Solutions de l'équation pour g lorsque les conditions (5.1) sont satisfaites

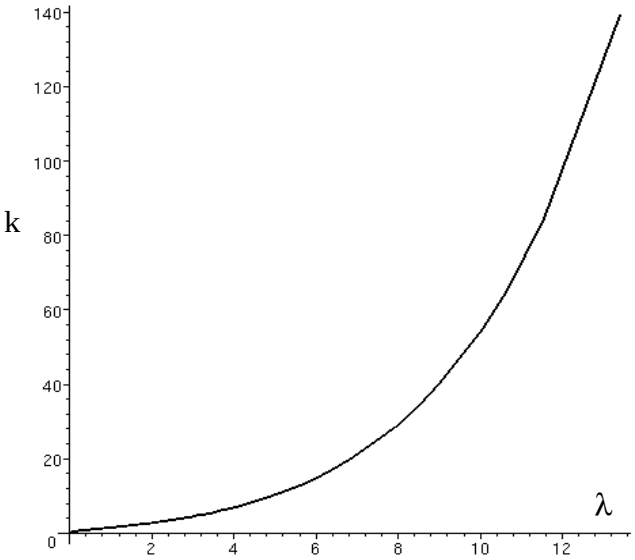


FIG. 5.2 – Énergie cinétique turbulente k pour la solution paramétrique

$\square$: α_k^- et $- \cdot -$: α_k^+ (solutions en puissance) ; — : solution paramétrique

équation d'échelle transportant kL) tel que $1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ < 0$, il apparaît clairement que ce modèle est sensible aux conditions extérieures (figure 5.4).

5.2 Contrainte supplémentaire sur le choix de la grandeur transportée dans l'équation d'échelle

Pour éviter des dépendances irréalistes d'un modèle de turbulence aux tensions de Reynolds (ou bien d'un modèle à deux équations) par rapport aux conditions extérieures, la quantité transportée $\Phi = k^m \varepsilon^n$ par l'équation d'échelle doit être bornée au voisinage de la frontière libre. En supposant les conditions précédentes satisfaites ($1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ > 0$), le comportement de Φ peut être analysé à partir des deux solutions en puissance (4.27).
Pour que la quantité transportée Φ soit bornée à la frontière libre, il faut que $\alpha_\Phi(\alpha_k)$, défini ci-contre, soit positif pour les valeurs α_k^- et α_k^+ déterminées par le modèle :

$$\begin{aligned} &\alpha_\Phi(\alpha_k) = (m+2n)\,\alpha_k - n \\ &\text{tel que } \alpha_\phi\left(\alpha_k^+\right) \geq 0\ ;\ \alpha_\phi\left(\alpha_k^-\right) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

La figure 5.5 présente le comportement, au voisinage de la frontière libre, de plusieurs grandeurs transportées classiques (pour les modèles RSM autant que pour les modèles à deux équations) en fonction de la valeur

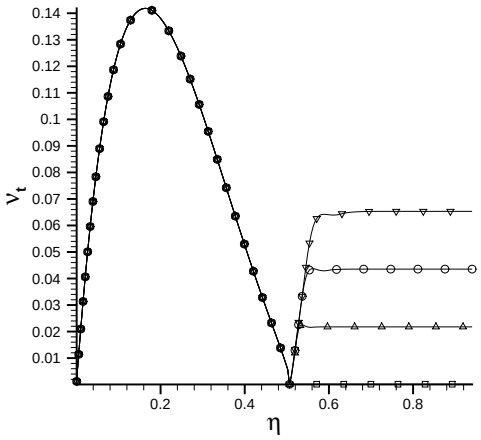


FIG. 5.3 – Sensibilité aux conditions extérieures d'un modèle RSM vérifiant les conditions nécessaires (5.1)

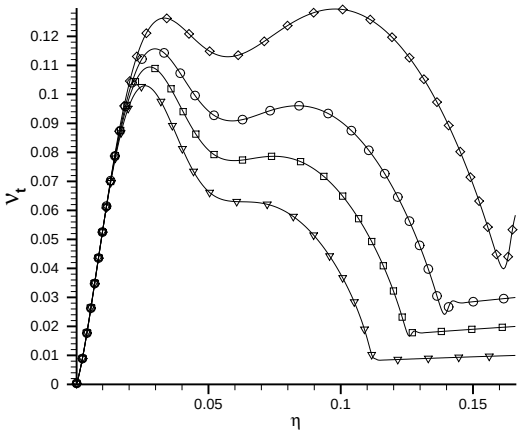


FIG. 5.4 – Sensibilité aux conditions extérieures d'un modèle RSM ne vérifiant pas les conditions nécessaires (5.1)

de α_k. Si les conditions à imposer sont $\alpha_k > 0$ et $\alpha_\Phi(\alpha_k) > 0$, toutes les grandeurs transportées classiques ($\tau \propto \frac{\varepsilon}{k}$, $L \propto \frac{k^{1,5}}{\varepsilon}$, $kL \propto \frac{k^{2,5}}{\varepsilon}$, ε, $\varphi \propto \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ et $\omega \propto \frac{\varepsilon}{k}$) peuvent être utilisées. Si par contre α_k ou α_Φ est imposé à une valeur supérieure à un afin d'avoir un raccord "doux" (dérivées finies pour les tensions de Reynolds et la vitesse) à la frontière libre, $\tau \propto \frac{\varepsilon}{k}$ et $L \propto \frac{k^{1,5}}{\varepsilon}$ sont à proscrire.

En ce qui concerne les grandeurs ε, $\varphi = \varepsilon/\sqrt{k}$ ou encore ω, il existe des valeurs de $\alpha_k < 1$ pour lesquelles $\alpha_\Phi < 0$ c'est à dire pour lesquels la grandeur transportée Φ tend vers l'infini. Par contre, kL ne présente pas cet inconvénient.

5.3 Influence de la viscosité moléculaire

Le développement asymptotique se doit d'être reconsidéré si la viscosité moléculaire n'est plus négligée ou négligeable. Dans le cas d'équations adimensionnées, la viscosité moléculaire apparaît sous la forme de l'inverse d'un nombre de Reynolds R_e. Puisque R_e est indépendant de $\xi = k_\infty$, deux cas de figures doivent être considérés : $N(\xi) \gg 1/R_e \Leftrightarrow \nu_t \gg \nu$ et $N(\xi) \ll 1/R_e \Leftrightarrow \nu_t \ll \nu$ où $N(\xi)$ a été défini en (4.3) et correspond à l'ordre de grandeur de ν_t. Le premier cas de figure correspond à l'étude asymptotique précédente. Dans le second cas, l'équation pour k dégénère sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{\lambda}} \left(V_0 \widehat{k}_0 + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \widehat{k}_0}{\partial \widehat{\lambda}} \right) = 0$$

La dégénérescence ainsi obtenue est identique pour chaque variable. Ainsi, toutes les tensions de Reynolds se comportent comme $1 - e^{(-V_0 \lambda / Re)}$ de façon indépendante du modèle de turbulence. La diffusion moléculaire ne peut donc en aucun cas engendrer de comportements non-physiques, bien au contraire. Un comportement irréaliste du modèle du point de vue de sa sensibilité aux conditions extérieures ne peut ainsi provenir que du

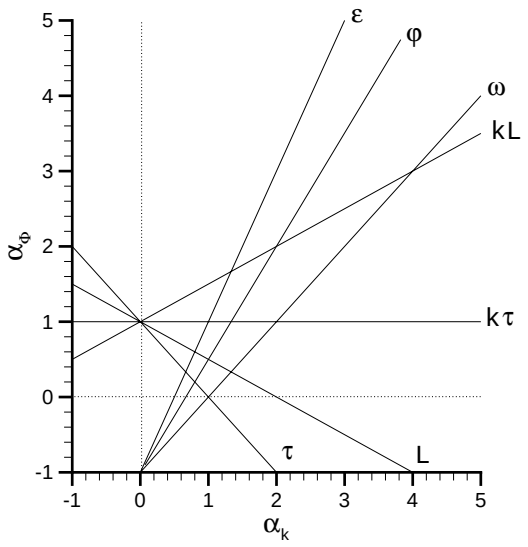


FIG. 5.5 – Comportement au voisinage de la frontière libre de quelques grandeurs transportées pour le calcul de l'échelle de longueur de grosses structures

comportement du modèle pour $\nu_t \gg \nu$. En résumé, les conditions nécessaires à propos de la sensibilité des modèles de turbulence aux conditions extérieures ne nécessitent pas de modifications pour prendre en compte l'effet de la viscosité moléculaire.

5.4 Incompatibilité avec les contraintes sur la structure de la couche limite

Il n'a été trouvé aucun modèle satisfaisant les contraintes sur la loi logarithmique et la loi en racine et dans le même temps les contraintes sur le comportement à la frontière libre (5.1). Voyons pourquoi ces contraintes semblent incompatibles.

Considérons un modèle RSM pour lequel la diffusion est modélisée suivant le modèle DH. Lorsque les contraintes sur la loi logarithmique à l'ordre zéro (3.4.2) et les contraintes sur la loi en racine (3.35) sont vérifiées, on a :

$$4\,b = 4\,(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}) = x \implies C^{\varepsilon}_{kk} \simeq x \text{ dans la pratique}$$

La contrainte sur la loi logarithmique à l'ordre 1 (3.4.2) implique :

$$(C_{\varepsilon k} + D_{\varepsilon k} - D_{kk}) = y < 0$$

On en déduit que :

$$-c \simeq x + y\ ,\ d \simeq 2(x+y) \text{ et } \Delta = c^2 - 4bd \simeq (x+y)^2 - 2x(x+y) = (y-x)(x+y)$$

Ainsi, pour que Δ soit positif, puisque y est négatif et x positif, il faut que :

$$x + y < 0 \Longrightarrow -c < 0 \text{ et } d < 0$$

En conséquence :

$$\alpha_k^- = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2\,d} > \frac{-c}{2\,d} > 0$$

et α_k^+ est nécessairement négatif car sinon :

$$\alpha_k^+ = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2\,d} > 0 \Longleftrightarrow 0 \leq \sqrt{\Delta} \leq c \Longleftrightarrow c^2 - 4bd < c^2$$

ce qui est faux puisque $b > 0$ et $d < 0$.

On en conclut que pour les modèles RSM reprenant le modèle de diffusion de Daly-Harlow (et également pour les modèles à deux équations), les contraintes que l'on s'impose pour respecter la structure de la couche limite (paragraphe 3.4) sont incompatibles avec les contraintes sur la sensibilité aux conditions extérieures (5.1) : ces modèles conduisent à une solution paramétrique pour $\alpha_k^- > 0$ et $\alpha_k^+ < 0$.

Chapitre 6

Comparaisons entre le comportement d'un modèle RSM et certains comportements "physiques" à la frontière libre

Les modèles de turbulence classiques ne peuvent modéliser précisément le comportement des corrélations au voisinage de la frontière car cette dernière possède un caractère intermittent non pris en compte par les fermetures classiques en un point. En guise d'exemple, un modèle RSM reprenant le modèle de diffusion de Daly-Harlow ou Hanjalic-Launder ne peut en effet pas reproduire le comportement suivant à la frontière :

$$\overline{u'v'} \ll k \text{ lorsque } y \to y_e$$

puisque $\overline{u'v'} \sim k$ pour le modèle.

6.1 Comportements physiques

Il est malgré tout intéressant d'étudier dans quelle mesure le modèle de turbulence est capable de représenter certains comportements physiques. Le comportement des modèles de turbulence à la frontière étant connu par l'analyse asymptotique au premier ordre précédente, il est possible de le comparer à des comportements physiques établis au voisinage de cette frontière laminaire-turbulent (cf. Cazalbou et al. (1993)) :

1. pas de discontinuité sur la vitesse
2. la diffusion et l'advection sont les termes prépondérants des équations de transport
3. le fluide turbulent diffuse vers le fluide non turbulent à une vitesse finie
4. les frontières pour l'énergie cinétique turbulente et la dissipation sont les mêmes
5. condition sur la dissipation (Lumley (1978)) : ε tend vers zéro plus vite que l'énergie cinétique turbulente k.

6.2 Comparaisons par rapport aux comportements des modèles de turbulence

La comparaison ci-dessous s'applique à la fois aux modèles RSM pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow ainsi qu'aux modèles à deux équations.

1. D'après les relations (4.34) et (A.6) entre la vitesse et k, la vitesse est continue pourvu que l'énergie cinétique le soit c'est à dire pourvu que les conditions (5.1) soient satisfaites.

2. Il a été montré que les équations de transport, pour l'énergie cinétique turbulente par exemple, se réduisaient à un équilibre entre convection et diffusion. Les modèles RSM (cf. annexe B) ne nécessitent pas de contraintes supplémentaires pour assurer cela contrairement aux modèles à deux équations qui requièrent $D_{kk} > 1/2$ (cf. annexe A).

3. Dans le cas d'un modèle RSM, $W = U_e - U$ évolue proportionnellement par rapport à k d'après la relation (4.34). Pour un modèle à deux équations, W évolue comme une puissance de k d'après la relation (A.6). Lorsque les conditions (5.1) sont satisfaites, k reste fini et il en va donc de même pour la vitesse. De plus, dans une couche de mélange temporelle, l'interface laminaire-turbulent se déplace de l'écoulement turbulent vers la partie non turbulente de l'écoulement.

4. Il a été montré au paragraphe 4.3.4 que si k tendait vers zéro alors la viscosité turbulente ν_t en faisait de même si la solution paramétrique vérifiait $\alpha_k^- > 0$. Puisque $\varepsilon \simeq k^2/\nu_t$, les frontières pour k et ε sont identiques si les contraintes (5.1) sont vérifiées.

5. Lorsque $k \sim \lambda^{\alpha_k}$ alors $\nu_t \sim \lambda$ et $\varepsilon/k \sim \lambda^{\alpha_k - 1}$. La condition sur la dissipation est vérifiée si et seulement si :

$$\alpha_k^- > 1 \ \text{ et } \ \alpha_k^+ > 1 \tag{6.1}$$

   La condition de Lumley sur la dissipation est donc équivalente à imposer que la dérivée de k par rapport à λ, soit en fait par rapport à y, tende vers zéro.
   Pourtant, pour un modèle $k-\varepsilon$ sans terme croisé tel que $\alpha_k^+ > 1$ (par exemple le modèle de Chien (1982)), on a $\alpha_k^- = 0,5$ et la dérivée $\frac{\partial k}{\partial y}$ de la solution numérique tend tout de même vers zéro à la frontière libre. Comment expliquer cette apparente incohérence ? La partie de la solution pouvant entraîner des dérivées $\frac{\partial k}{\partial y}$ infinies, c'est à dire la partie telle que $g \simeq \lambda/\alpha_k^-$, est confinée dans une zone très petite au voisinage de la frontière libre. Dans cette région de l'écoulement, la viscosité moléculaire tend à devenir non négligeable et, comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3, l'expression de k lorsque $\nu_t \leq \nu$ est telle que la dérivée de k tende vers zéro à la frontière libre. En conséquence, si les conditions (5.1) et la condition $\alpha_k^+ > 1$ sont vérifiées, on peut supposer que, dans un code Navier-Stokes, la dérivée $\frac{\partial k}{\partial y}$ tende vers zéro à la frontière libre c'est à dire que la condition de Lumley soit satisfaite.

6.3 Étude du comportement de quelques modèles de turbulence à la frontière libre

La modélisation pour les termes de redistribution et de dissipation n'intervenant pas dans le raccord à la frontière libre (du moins au premier ordre), le comportement du modèle RSM à la frontière est uniquement relié au modèle pour la diffusion ainsi qu'au modèle de fermeture de l'équation d'échelle. Le comportement de deux modèles de diffusion d'un modèle RSM ainsi que le comportement de quelques modèles à deux équations classiques sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	α_k^-	α_k^+	$\alpha_\Phi\left(\alpha_k^+\right) > 0$ $\alpha_\Phi\left(\alpha_k^-\right) > 0$	conditions satisfaites ?
k-ε de Chien (1982)	0,5	1,43	$\surd$	$\surd$
k-ω de Wilcox (1988)	1	∞	$\surd$	?
k-ω SST de Menter (1992b)	1	0,55	$\surd$	$\surd$
k-l de Smith (1994)	2	-2	$\times$	$\times$
de Ng et Spalding (1972)	-2	0,75	$\times$	$\times$
RSM - $\Phi = \varepsilon$ (Daly et Harlow (1970))	0,5	1,3	$\surd$	$\surd$

Chapitre 7

Conclusion sur le comportement des modèles au voisinage d'une frontière libre

Il a été montré que, pour un modèle RSM-DH ou un modèle à deux équations, la solution attendue au voisinage de la frontière libre n'est pas une solution en puissance mais une solution plus complexe obtenue sous forme paramétrique (les solutions en puissance étant incluses dans cette solution paramétrique).

Ceci a amené bien évidemment à revoir les contraintes établies par Cazalbou. Il a été montré que $1/\alpha_k^-$ et $1/\alpha_k^+$, définies en (4.28), doivent être strictement positifs afin que le modèle de turbulence ne soit pas anormalement sensible aux conditions extérieures lorsque le taux extérieur de turbulence tend vers zéro. Une contrainte supplémentaire vient s'ajouter à ces deux contraintes : il s'agit des contraintes (5.2) sur le choix de la grandeur transportée dans l'équation d'échelle afin que cette grandeur reste finie à la frontière libre d'un écoulement turbulent.

Les contraintes établies dans ce chapitre complètent donc les conditions établies par Cazalbou. Cela s'explique par le fait que la solution paramétrique contient la solution en puissance de Cazalbou. Néanmoins, la solution en puissance de Cazalbou correspond en général à une asymptote c'est à dire à la limite quand $\xi \to 0$ de la solution paramétrique. Dans ce cas de figure, la solution en puissance de Cazalbou constitue une approximation régulière à l'ordre zéro au voisinage de la frontière libre. Cette propriété explique le succès de l'analyse de Cazalbou et pourquoi les grandeurs turbulentes et la vitesse semblaient se comporter comme des puissances de la distance λ à la frontière libre (la viscosité turbulente semblait se comporter comme une fonction linéaire de λ). Toutefois, cette solution en puissance reste une moins bonne approximation que la solution paramétrique et ne se limite qu'au cas de figure où la solution en puissance est associée à l'exposant α_k^+ et à la configuration $1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ > 0$.

Par ailleurs, il a été montré pourquoi les contraintes sur la loi logarithmique et en racine sont incompatibles avec les contraintes revisitées ($1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ > 0$) sur le raccord à la frontière libre.

Troisième partie

MODÈLE RSM AVEC FONCTION D'INTERMITTENCE

Comme cela a été montré au paragraphe 5.4 de la partie II sur le raccord à la frontière libre, les contraintes que nous nous sommes imposé en couche limite sont incompatibles avec les contraintes sur le comportement des modèles au voisinage de la frontière libre. Une première méthode consisterait à modifier la fermeture de l'équation d'échelle car c'est elle qui pilote le raccord à la frontière libre ainsi que le comportement des modèles de turbulence dans les zones logarithmique et en racine. En rendant variables certaines constantes, il est à priori envisageable de découpler les différentes contraintes sur la couche limite des contraintes sur la frontière libre. Ce type de méthode est exposé en annexe F. S'il a été possible de reproduire, avec cette méthode, la loi logarithmique pour divers gradients de pression, il a en revanche été impossible de vérifier les contraintes sur la loi en racine. Ce constat nous a amené à explorer d'autres alternatives afin de satisfaire à la fois les contraintes sur la structure de la couche limite et celles concernant le raccord à une frontière libre.

Les frontières libres d'écoulements turbulents possèdent un caractère intermittent comme en témoigne la figure 7.1 représentant la frontière libre instantanée d'une couche limite. Cette frontière s'établit entre un écoulement turbulent et un écoulement extérieur faiblement turbulent. Cet écoulement extérieur peut-être approximé à Reynolds élevé, par un écoulement de fluide parfait donc non-turbulent et irrotationnel. Cette approximation de l'écoulement extérieur par un écoulement non turbulent sera examinée plus en détail au paragraphe 8.3.1. C'est pourquoi, on parlera toujours d'écoulement turbulent et d'écoulement non-turbulent ou irrotationnel lorsqu'il sera nécessaire de séparer les deux écoulements de part et d'autre de la frontière intermittente.

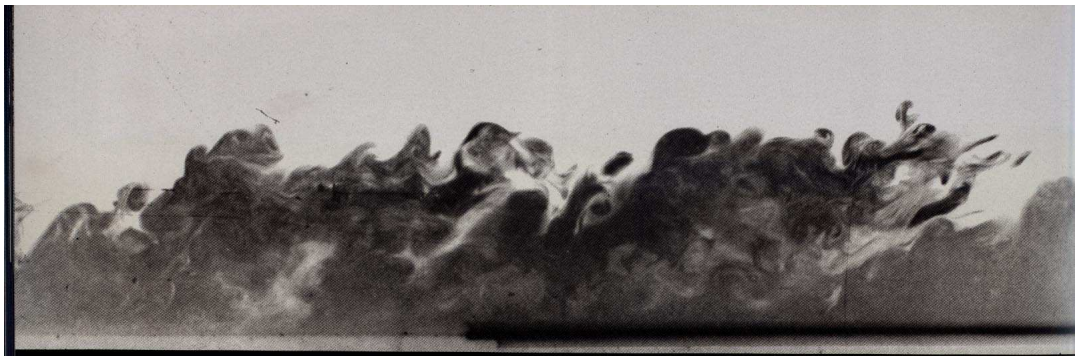


FIG. 7.1 – Vue instantanée d'une couche limite : visualisation d'une frontière intermittente (Falco (1997))

Comme l'ont fait remarquer Cazalbou et Bradshaw (1993) sur des DNS (Spalart (1988)) de couche limite sur plaque plane, le modèle de diffusion, en particulier, n'est plus valable dans la zone intermittente proche d'une frontière libre. Le tracé de $C_S = -\overline{v'k'}/(\nu_t \frac{\partial k}{\partial y})$ sur la figure 7.2 à partir de DNS en canal plan et en couche limite montrent en effet que C_S est approximativement constant en canal alors qu'il ne l'est pas en couche limite. Autrement dit, dans la région intermittente de la frontière libre qui différencie la couche limite du canal, C_S n'est pas constant et donc le modèle de diffusion non valide. L'explication principale de cette déficience tient au fait que les modèles de fermeture en un point nécessitent la connaissance d'une échelle de temps caractéristique de la turbulence, échelle que l'on ne peut définir lorsque l'écoulement n'est pas pleinement turbulent. Les modèles de fermeture sont donc déficients au voisinage d'une frontière libre du fait de son caractère intermittent. Un modèle tenant compte de l'effet de l'intermittence de frontière sur les fermetures en un point devrait découpler le comportement du modèle au voisinage de la frontière libre de son comportement dans une zone logarithmique ou en racine. Un tel modèle devrait donc nous permettre de satisfaire toutes les

contraintes que nous nous sommes imposé.

Pour tenir compte de cet effet d'intermittence de frontière dans la fermeture des équations de transport, il est nécessaire de distinguer les parties turbulentes et non-turbulentes (irrotationnelles) des corrélations, c'est à dire d'introduire la notion de moyenne conditionnelle pour les parties turbulente et non turbulente. Plusieurs travaux en ce sens ont été effectués, d'abord par Lumley (1979), ensuite par Byggstoyl et Kollmann (1981, 1986a,b). Ces derniers ont développé des modèles aux tensions de Reynolds en terme de moyennes conditionnelles. Toutefois ce type de formulation est compliqué à mettre en oeuvre et il est préférable, dans le but d'implanter le modèle RSM dans un code Navier-Stokes à vocation industrielle, de fermer les équations aux tensions de Reynolds avec des moyennes conventionnelles tout en tenant compte de l'effet de l'intermittence de frontière. Cho et Chung (1992) ont développé ce type de fermetures sur un modèle $k-\varepsilon$. La thèse de Bousquet (1999) récapitule les différents modèles avec effet d'intermittence de frontière et développe une correction du modèle de Cho et Chung pour la couche limite.

Toutefois, la méthode employée ici pour fermer les équations aux tensions de Reynolds et l'équation d'échelle sera différente des méthodes employées précédemment : elle se situe en quelque sorte à mi-chemin entre le modèle de Cho et Chung et les modèles RSM développés par Byggstoyl et Kollmann.

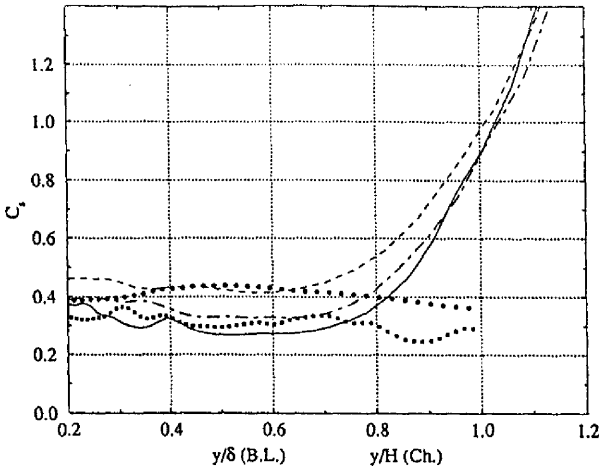


FIG. 7.2 – Validité du modèle pour la diffusion turbulente ($C_S = -\overline{v'k'}/(\nu_t \frac{\partial k}{\partial y})$ calculé à partir de DNS) - Cazalbou et Bradshaw (1993)
traits et pointillés : couche limite ; • : canal plan (à différents Reynolds)

Objectifs

L'effet de l'intermittence de frontière sur les fermetures en un point en terme de moyenne conventionnelle des modèles RSM est étudié dans les deux chapitres qui suivent. L'objectif est de pouvoir en déduire une forme simplifiée permettant de satisfaire toutes les contraintes et qui pourra être implantée dans un code Navier-Stokes.

Chapitre 8

Effet de l'intermittence de frontière sur les fermetures en un point

8.1 Moyennes conditionnelles

Comme nous l'avons vu précédemment, la notion de moyenne conditionnelle doit être introduite afin de distinguer les parties turbulentes et non-turbulentes des corrélations nécessitant une fermeture. Soit $I(\overrightarrow{x}, t)$, définie par Byggstoyl et Kollmann (1986b), la fonction indicatrice du caractère turbulent ou non au point $\overrightarrow{x}$ et au temps t :

$$\begin{aligned} I &= 1 \quad \text{dans la zone turbulente} \\ I &= 0 \quad \text{dans la zone non turbulente} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Il est dès lors possible, en un point donné de l'écoulement, de définir la notion de facteur d'intermittence γ

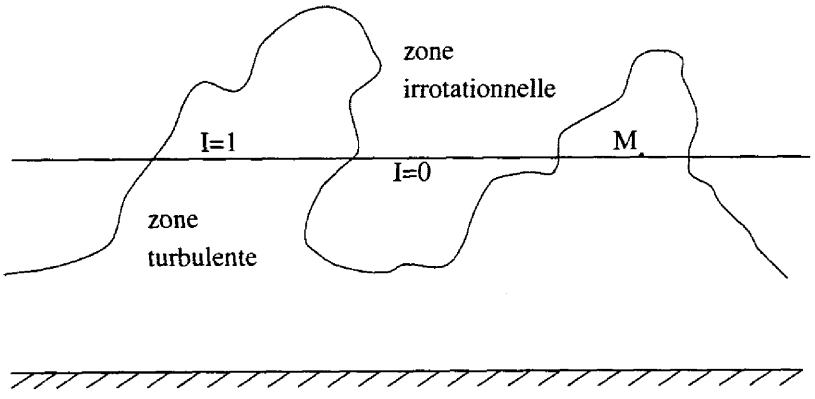


FIG. 8.1 – Frontière intermittente

ainsi que les moyennes conditionnelles liées à la fonction indicatrice ci-dessus :

$$\begin{aligned} \gamma &= \overline{I} \\ \widetilde{f} &= \frac{\overline{I\,f}}{\gamma} \\ \overline{\overline{f}} &= \frac{\overline{(1-I)\,f}}{(1-\gamma)} \end{aligned} \tag{8.2}$$

où $\widetilde{f}$ représente la moyenne statistique dans la partie turbulente et $\overline{\overline{f}}$ la moyenne statistique dans la partie irrotationnelle. On définit à partir de cela les grandeurs fluctuantes conditionnelles ainsi que les corrélations dans les régions turbulentes et non turbulentes, corrélations pour lesquelles on adopte une notation implicite (en omettant les notations indicielles des grandeurs fluctuantes conditionnelles $f'_{(1)}$ et $f'_{(2)}$) :

$$\begin{aligned} f'_{(1)} &= f - \widetilde{f}\,;\; f'_{(2)} = f - \overline{\overline{f}} \\ \widetilde{f'g'} &= \widetilde{f'_{(1)}g'_{(1)}}\,;\; \overline{\overline{f'g'}} = \overline{\overline{f'_{(2)}g'_{(2)}}} \end{aligned} \tag{8.3}$$

8.2 Décomposition des moyennes usuelles avec les moyennes conditionnelles

Les moyennes et corrélations d'ordre deux conventionnelles se décomposent à partir des moyennes conditionnelles de la façon suivante (Chevray et Tutu, 1978) :

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \gamma\widetilde{f} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{f}} \\ \overline{f'g'} &= \gamma\widetilde{f'g'} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{f'g'}} + \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{f} - \overline{\overline{f}}\right)\left(\widetilde{g} - \overline{\overline{g}}\right) \end{aligned} \tag{8.4}$$

d'où il vient :

$$\overline{u'_i u'_j} = \gamma\widetilde{u'_i u'_j} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{u'_i u'_j}} + \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{U_j} - \overline{\overline{U_j}}\right) \tag{8.5}$$

De façon similaire, $\varepsilon = \overline{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}$ se décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \gamma\widetilde{\varepsilon} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{\varepsilon}} + \gamma\,(1-\gamma)\,\nu\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right) \\ &\simeq \gamma\widetilde{\varepsilon} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{\varepsilon}} \quad \text{à } R_e \text{ élevé} \end{aligned} \tag{8.6}$$

À Reynolds turbulent élevé, la pseudo-dissipation ε se décompose, en première approximation, de la même manière qu'un scalaire.

Une corrélation d'ordre trois se développe comme suit :

$$\overline{f'g'h'} = \gamma\widetilde{f'g'h'} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{f'g'h'}} + \gamma\,(1-\gamma)\,A_{fgh} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned} \text{avec :}\quad A_{fgh} &= \left(\widetilde{f} - \overline{\overline{f}}\right)\left(\widetilde{g'h'} - \overline{\overline{g'h'}}\right) + \left(\widetilde{g} - \overline{\overline{g}}\right)\left(\widetilde{f'h'} - \overline{\overline{f'h'}}\right) + \left(\widetilde{h} - \overline{\overline{h}}\right)\left(\widetilde{f'g'} - \overline{\overline{f'g'}}\right) \\ &\quad + \left(\gamma^2 + (1-\gamma)^2\right)\left(\widetilde{f} - \overline{\overline{f}}\right)\left(\widetilde{g} - \overline{\overline{g}}\right)\left(\widetilde{h} - \overline{\overline{h}}\right) \end{aligned}$$

Puisque, à Reynolds turbulent élevé, ε se décompose selon l'expression (8.6), la corrélation d'ordre trois $\overline{u_i'\varepsilon'}$ se développe, en première approximation à Reynolds turbulent élevé, comme une corrélation d'ordre deux :

$$\overline{u_i'\varepsilon'} \simeq \gamma\widetilde{u_i'\varepsilon'} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{u_i'\varepsilon'}} + \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{\varepsilon} - \overline{\overline{\varepsilon}}\right) \quad \text{à } R_e \text{ élevé} \tag{8.8}$$

8.3 Méthode de fermeture des équations avec effet d'intermittence en terme de moyennes conventionnelles

Rappelons (cf. introduction de la partie III) que, pour tenir compte de l'effet d'intermittence de frontière sur les fermetures en un point, les corrélations inconnues doivent être décomposées selon, par exemple, les formulations (8.5) et (8.7) afin de mettre en évidence leur partie turbulente $\widetilde{(\,)}$ et non turbulente $\overline{\overline{(\,)}}$. Afin de distinguer la contribution des parties turbulentes de celle des parties non-turbulentes, Byggstoyl et Kollmann (1986b,a) formulent un modèle de fermeture pour les équations aux tensions de Reynolds en terme de moyennes conditionnelles :

1. un modèle de fermeture des équations de transport de $\widetilde{u_i'u_j'}$
2. un modèle de fermeture des équations de transport de $\overline{\overline{u_i'u_j'}}$

Le nombre d'équations est donc multiplié par deux par rapport à un modèle RSM classique. Ce type de formulation est compliqué et il est préférable, dans le but d'implanter le modèle RSM dans un code Navier-Stokes à vocation industrielle, de fermer les décompositions (8.5) et (8.7) à partir des seules moyennes conventionnelles soit à partir de k, ε, $\overline{u_i'u_j'}$ et U_i.

A priori, si on conserve les termes non turbulents $(1-\gamma)\overline{\overline{(\,)}}$, il est impossible de fermer les décompositions de corrélations du type (8.5, 8.6, 8.7, 8.8) en terme de moyenne conventionnelle. Il n'y a en effet pas forcément de lien entre la partie turbulente $\widetilde{(\,)}$ et la partie la partie non-turbulente $\overline{\overline{(\,)}}$ d'une corrélation. Dès lors, peut on négliger cette partie non turbulente des décompositions de corrélations d'ordre supérieur ou égal à deux ?

8.3.1 Partie non turbulente négligeable ?

Dans une frontière intermittente, la fonction densité de probabilité (PDF) des composantes de la vitesse est similaire à la PDF tracée sur la figure 8.2 où $\overline{A}^{(1)}$ représente $\widetilde{U}_i$ et $\overline{A}^{(2)}$ correspond à $\overline{\overline{U_i}}$. Dans cette configuration, le niveau des fluctuations dans l'écoulement irrotationnel est donc faible devant le niveau des fluctuations dans l'écoulement turbulent. Il est donc justifié de négliger la partie non turbulente des décompositions de $\overline{u_i'u_j'}$ et $\overline{u_i'u_j'u_k'}$ dans ce type de configuration c'est à dire lorsque $\gamma = O(1)$ et ne tend pas vers zéro :

$$\begin{aligned} \overline{u_i'u_j'} &>> (1-\gamma)\,\overline{\overline{u_i'u_j'}} \\ \overline{u_i'u_j'u_k'} &>> (1-\gamma)\,\overline{\overline{u_i'u_j'u_k'}} \end{aligned} \tag{8.9}$$

Par contre, lorsque $\gamma \to 0$, on a : $\overline{u_i'u_j'} \to \overline{\overline{u_i'u_j'}}$ et la partie non-turbulente n'est à l'évidence plus négligeable. Néanmoins, comme on l'a vu dans la partie II sur le raccordement à une frontière libre, le taux de turbulence extérieur, lorsqu'il tend vers zéro, n'influence pas de façon significative le comportement du modèle dans

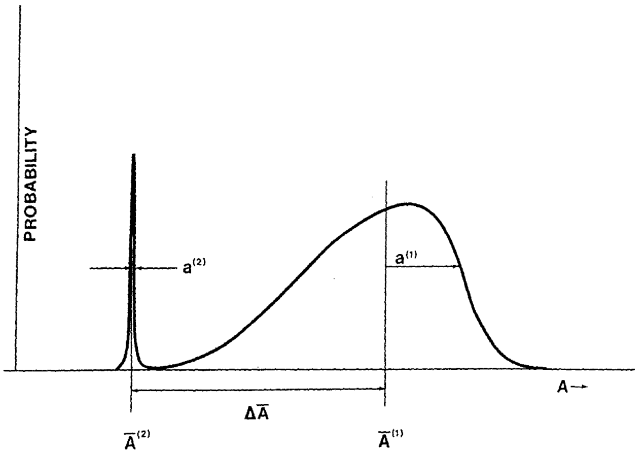


FIG. 8.2 – Fonction densité de probabilité (PDF) d'une grandeur scalaire A (Lumley, 1979)

la zone turbulente. Le comportement du modèle à la frontière libre est en effet piloté par le développement asymptotique au premier ordre défini au paragraphe 4.1 par :

$$1 \gg k \gg k_\infty \simeq \overline{\overline{k}}$$
$$1 \gg \overline{u_i' u_j'} \gg \overline{u_i' u_j'}_\infty \simeq \overline{\overline{u_i' u_j'}}$$

si les différentes grandeurs turbulentes ainsi que la vitesse sont adimensionnées de sorte qu'elles soient d'ordre unité au coeur de l'écoulement turbulent. Cet adimensionnement est nécessaire pour étudier le comportement des modèles de fermeture au voisinage de la frontière libre ainsi que pour définir le petit paramètre de l'étude asymptotique : $k_\infty \ll 1$ (cf. hypothèses faites au chapitre 4 sur le comportement des modèles à la frontière libre).

En conséquence, négliger les termes non-turbulents dans les décompositions ne change rien au comportement du modèle au premier ordre au voisinage de la frontière libre lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro, ce qui est par définition le cas lorsque la frontière libre a un caractère intermittent. L'erreur commise en négligeant les parties "non-turbulentes" des corrélations est donc minime en regard des erreurs provenant intrinsèquement des fermetures en un point. C'est pourquoi dans l'étude et la construction d'un modèle tenant compte de l'effet d'intermittence de frontière, **l'écoulement extérieur est supposé non-turbulent et irrotationnel** (en première approximation). Employer le terme non-turbulent dans les décompositions ou parler d'écoulement extérieur non-turbulent ou irrotationnel, alors que ce dernier ne l'est pas au sens strict du terme, prend ici tout son sens.

8.3.2 Relations constitutives pour les corrélations portant sur la partie turbulente

La moyenne conditionnelle turbulente $\widetilde{(\,)}$ présente toutes les propriétés d'une moyenne statistique. Puisque toutes les éventualités se situent dans la partie turbulente de l'écoulement, les fermetures classiques en un point

s'appliquent à la moyenne conditionnelle turbulente. La fermeture des grandeurs $\widetilde{()}$ nécessite donc la connaissance d'un temps caractéristique $\widetilde{\tau}$ de la partie turbulente de l'écoulement. La partie turbulente de l'écoulement étant supposée toujours dans un état d'équilibre, il est légitime de modéliser le temps caractéristique de la partie turbulente de manière similaire à sa modélisation dans un écoulement pleinement turbulent :

$$\widetilde{\tau} = f_\gamma \frac{\widetilde{k}}{\widetilde{\varepsilon}} \tag{8.10}$$

Le facteur f_γ correspond à l'atténuation de l'échelle de temps caractéristique dans la frontière intermittente. Ceci revient à émettre l'hypothèse suivante : la taille ou le temps caractéristique des grosses structures est influencée par le caractère intermittent de la frontière libre, comme le laisse penser la figure 8.1. La réciproque semble également vraie et sera d'ailleurs utilisée pour fermer l'équation de transport de γ ainsi que les sauts de vitesse. En résumé, le facteur f_γ est fonction du facteur d'intermittence. Le choix est fait de représenter f_γ comme une puissance de γ même si ce choix reste bien-entendu arbitraire. Le temps caractéristique de la partie turbulente est alors modélisé comme suit :

$$\widetilde{\tau} = \gamma^{m_0} \frac{\widetilde{k}}{\widetilde{\varepsilon}} \tag{8.11}$$

Le nombre de Reynolds turbulent de la partie turbulente de l'écoulement $R_e^t = \frac{\widetilde{\tau}\widetilde{k}}{\nu}$ étant élevé, les fermetures en un point ne nécessitent pas de tenir compte d'un quelconque effet bas Reynolds. En effet, à la frontière libre, la turbulence tend vers zéro non pas par effet visqueux mais par mélange avec l'écoulement externe laminaire ou faiblement turbulent. La viscosité n'agit que très localement sur les grandeurs turbulentes dans la "super-couche visqueuse", là où la viscosité turbulente équivalente $\nu_t^{eq} \sim \widetilde{\tau}\widetilde{k}$ est de l'ordre de la viscosité moléculaire soit lorsque $R_e^t \sim 1$.

En conclusion, pour fermer les corrélations triples sur la vitesse ou les corrélations $\overline{u_i'\varepsilon'}$, il ne reste qu'à fermer γ et $\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}$. La fermeture consiste à les relier aux caractéristiques du champ moyen ainsi qu'aux caractéristiques des grosses structures en terme de moyenne statistique conventionnelle, c'est à dire à ε, $\overline{u_i'u_j'}$, γ et U_i.

8.3.3 Équation de transport pour le facteur d'intermittence

La plupart des auteurs, comme par exemple Byggstoyl et Kollmann (1986b,a), s'accordent pour fermer cette équation de transport selon la forme :

$$\frac{D\,\gamma}{D\,t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\right) + S_\gamma \tag{8.12}$$

Dans ce type de fermeture, la modélisation de S_γ est sujette à controverse et diverses modélisations pour ce terme ont été proposées par Libby (1976), Chevray et Tutu (1978)... Byggstoyl et Kollmann (1981) décomposent quant à eux le terme source S_γ en trois contributions :

$$S_\gamma = S_\gamma^1 + S_\gamma^2 - S_\gamma^3 \tag{8.13}$$

S_γ^1 représente une production associée à la production d'énergie cinétique de turbulence. Ce terme devant s'annuler pour $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$, il est modélisé par :

$$S_\gamma^1 = C_g^{prod} P_k\,(1-\gamma)\,\frac{\gamma}{k}$$

Le second terme S_γ^2 est aussi un terme de production représentant l'augmentation de γ lié aux inhomogénéités de γ lui-même :

$$S_\gamma^2 = C_g^2 \widetilde{\tau} \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} \widetilde{u_k' u_l'} \frac{\partial \gamma}{\partial x_l}$$

Enfin le troisième terme est un terme de destruction qui doit également s'annuler pour $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$:

$$S_\gamma^3 = C_g^{diss} \varepsilon \left(1 - \gamma\right) \frac{\gamma}{k}$$

En résumé, Byggstoyl et Kollmann (1981) modélisent le terme source de la façon suivante :

$$S_\gamma = C_g^{prod} P_k \left(1 - \gamma\right) \frac{\gamma}{k} - C_g^{diss} \varepsilon \left(1 - \gamma\right) \frac{\gamma}{k} + C_g^2 \widetilde{\tau} \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} \widetilde{u_k' u_l'} \frac{\partial \gamma}{\partial x_l} \tag{8.14}$$

où les constantes C_g^{prod}, C_g^{diss} et C_g^2 valent respectivement $1,8$, $0,05$ et 0.15 selon Byggstoyl et Kollmann. Remarquons au passage que cette modélisation inclut la modélisation adoptée par Lumley (1979).

Ce modèle de fermeture nécessite là encore la modélisation du saut de vitesse $\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}$ pour pouvoir fermer le terme de diffusion.

8.3.4 Modélisation des sauts de vitesse

Lumley (1979) modélise le saut de vitesse par :

$$-\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right) \quad = \quad F_1\left(\gamma\right) \nu_t \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} + F_2\left(\gamma\right) \frac{k}{\varepsilon} \left(\widetilde{U_l} - \overline{\overline{U_l}}\right) \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_l} \tag{8.15}$$

La justification par Lumley de cette modélisation du saut de vitesse consiste à dire que le saut de vitesse est le fruit de deux contributions :

1. l'une due au fait que la vitesse $\widetilde{U_k}$ de la partie turbulente de l'écoulement est dirigée de l'écoulement le plus intermittent vers le moins intermittent c'est à dire dans le sens du gradient de γ,

2. l'autre liée au fait que le saut de vitesse est d'autant plus grand que la vitesse moyenne de l'écoulement dont provient l'écoulement turbulent est grande. Byggstoyl et Kollmann (1981) constatent en effet qu'un second terme doit être ajouté au terme en premier gradient $F_1\left(\gamma\right) \nu_t \frac{\partial \gamma}{\partial x_k}$ afin que le saut de vitesse longitudinal à l'écoulement principal $\left|\widetilde{U} - \overline{\overline{U}}\right|$ puisse être supérieur au saut de vitesse $\left|\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right|$ selon la direction normale à la frontière libre, du moins dans une certaine partie de la région intermittente. Ce constat a été fait sur plusieurs expériences d'écoulements paraboliques comme le jet plan (Gutmark et Wygnanski, 1976) ou la couche limite (Hedley et Keffer, 1974).

Dans la construction d'un modèle RSM pour les parties turbulentes et non turbulentes de $\overline{u_i' u_j'}$, Byggstoyl et Kollmann (1986a) modélisent le saut de vitesse, selon la direction normale à la frontière libre ($k = 2$), par :

$$-\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right) \quad = \quad C_g \frac{\widetilde{k}}{\widetilde{\varepsilon}} \frac{\widetilde{u_k' u_l'}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x_l} \tag{8.16}$$

Ainsi, pour tenir compte de la modélisation du saut de vitesse adoptée par Lumley (1979) puis Byggstoyl et Kollmann (1986a), nous retiendrons le modèle suivant pour le saut de vitesse :

$$-\left(\widetilde{U_k}-\overline{\overline{U_k}}\right) \;=\; C_g\frac{\widetilde{\tau}}{\gamma}\widetilde{u_k'u_l'}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}+D_g\gamma\widetilde{\tau}\left(\widetilde{U_l}-\overline{\overline{U_l}}\right)\frac{\partial\overline{U_k}}{\partial x_l} \tag{8.17}$$

où $\widetilde{\tau}$ est l'échelle de temps de la partie turbulente modélisée par (8.11). Mais cette modélisation ne permet pas de fermer avec des moyennes conventionnelles le tenseur $\widetilde{u_i'u_j'}$ défini par :

$$\widetilde{u_i'u_j'}=\frac{\overline{u_i'u_j'}}{\gamma}-(1-\gamma)\left(\widetilde{U_i}-\overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{U_j}-\overline{\overline{U_j}}\right) \tag{8.18}$$

Du part l'expression des sauts de vitesse en (8.16) ou (8.17), le tenseur $\widetilde{u_i'u_j'}$ est en effet dépendant de lui-même (récurrence infinie) et ne peut être fermé par (8.17) et (8.18). Il est dès lors nécessaire de tronquer cette relation de récurrence à un certain ordre au delà duquel le saut de vitesse sera fermé par des moyennes conventionnelles tout en conservant une équivalence de comportement lorsque $\gamma\to 0$ et $\gamma\to 1$:

$$-\left(\widetilde{U_k}-\overline{\overline{U_k}}\right) \;=\; C_g^*\frac{k\gamma^{m_0}}{\varepsilon\gamma^2}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}+D_g^*\gamma\frac{k\gamma^{m_0}}{\varepsilon}\left(\widetilde{U_l}-\overline{\overline{U_l}}\right)\frac{\partial\overline{U_k}}{\partial x_l} \tag{8.19}$$

Avec cette troncature, le saut de vitesse ne dépend plus que de corrélations exprimées en terme de moyenne conventionnelle. Il est alors aisé de calculer ce saut de vitesse par une simple inversion de matrice. Les termes turbulents comme $\widetilde{u_i'u_j'}$ sont ainsi entièrement fermés.

La troncature effectuée ci-dessus ne devrait pas affecter grandement la précision du modèle. Elle est d'autant plus négligeable que l'on repousse l'ordre à laquelle elle apparaît.

8.4 Comportements physiques au voisinage de la frontière libre

8.4.1 Notations au voisinage de la frontière libre : notations dans une couche mince

Au voisinage d'une frontière libre, la direction y normale à la frontière est la direction privilégiée car $\frac{\partial}{\partial y}\gg\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\gg\frac{\partial}{\partial z}$. Tout se passe donc, au voisinage de la frontière libre, comme si l'on se trouvait dans une couche mince. C'est pourquoi nous utiliserons implicitement les notations de couche mince lorsque l'on étudiera le comportement au premier ordre de grandeurs quelconques ou bien lorsque l'on calculera une dégénérescence au voisinage de la frontière libre :

$$\begin{aligned} y &: \text{ normale à la surface de la frontière libre} \\ u &: \text{ vitesse selon } x \\ v &: \text{ vitesse selon } y \\ w &: \text{ vitesse selon } z \end{aligned} \tag{8.20}$$

Par ailleurs, pour étudier le comportement à la frontière libre, on procède de la même manière que dans la partie II où **toutes les grandeurs sont adimensionnées** de sorte qu'elles soient de l'ordre de l'unité dans la région pleinement turbulente.

8.4.2 Comportement des sauts de vitesse

Le saut de vitesse $\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}$ selon cette direction y reste fini d'après Lumley (1979). Ce résultat peut être démontré à partir de l'équation de transport de γ :

$$\frac{D\,\gamma}{D\,t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\right) + S_\gamma \tag{8.21}$$

qui dégénère au voisinage de la frontière libre en un équilibre convection-diffusion :

$$V_0 \frac{\partial \gamma}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y}\left[-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right)\right] \tag{8.22}$$

où V_0 est la vitesse moyenne selon la direction y à la frontière libre (en $\gamma = 0$). Pour que cet équilibre soit satisfait il faut par conséquent que $\left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right)$ tende vers une constante non nulle à la frontière libre :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(V_0\,\gamma\right) \simeq V_0 \frac{\partial \gamma}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y}\left[-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right)\right] \simeq \frac{\partial}{\partial y}\left[-\gamma\left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right)\right] \Longrightarrow \left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right) \simeq -V_0$$

Les sauts de vitesse selon les autres directions perpendiculaires à y tendent quant à eux vers zéro lorsque $\gamma \to 0$. En résumé, lorsque $\gamma \to 0$:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{U} - \overline{\overline{U}} & \to & 0 \\ \widetilde{V} - \overline{\overline{V}} & \to & Cte \neq 0 \\ \widetilde{W} - \overline{\overline{W}} & \to & 0 \end{array} \tag{8.23}$$

8.4.3 Comportement des tensions de Reynolds

Le spectre tracé sur la figure 8.2 étant similaire à celui de la vitesse instantanée $v = \overline{V} + v'$, la variance $\overline{v'^2}$ de v est en partie liée à l'écart entre les spectres turbulents et irrotationnels, et ce d'autant plus que $\gamma \to 0$. La partie non turbulente des corrélations d'ordre supérieur à deux étant négligée (cf paragraphe 8.3.1), il vient :

$$\overline{v'^2} = O\left(\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}}\right)^2\right) \quad \text{lorsque} \quad \gamma \to 0$$

Dès lors, d'après (8.23) et en rappelant que $\overline{v'^2}$ a été préalablement adimensionné (cf. paragraphe 8.4.1), il vient lorsque $\gamma \to 0$:

$$\overline{v'^2} \sim \gamma \implies k \sim \overline{u'^2} \sim \overline{v'^2} \sim \overline{w'^2} \sim \gamma \tag{8.24}$$

où l'expression $\overline{v'^2} \sim \gamma$ signifie que $\overline{v'^2}$ est du même ordre de grandeur que γ lorsque $\gamma \to 0$. On devrait d'un point de vue mathématique, plutôt écrire $\overline{v'^2} = Ord(\gamma)$ ou $\overline{v'^2} = O_S(\gamma)$ mais $\sim$ est plus parlant et sera conservé.

Par ailleurs, la figure 8.3 montre que la variance $\widetilde{u'_\alpha u'_\alpha}$ de la partie turbulente de la PDF de u_α tend vers une valeur non nulle au voisinage de la frontière libre (section C dans la figure 8.3). Cela symbolise le fait

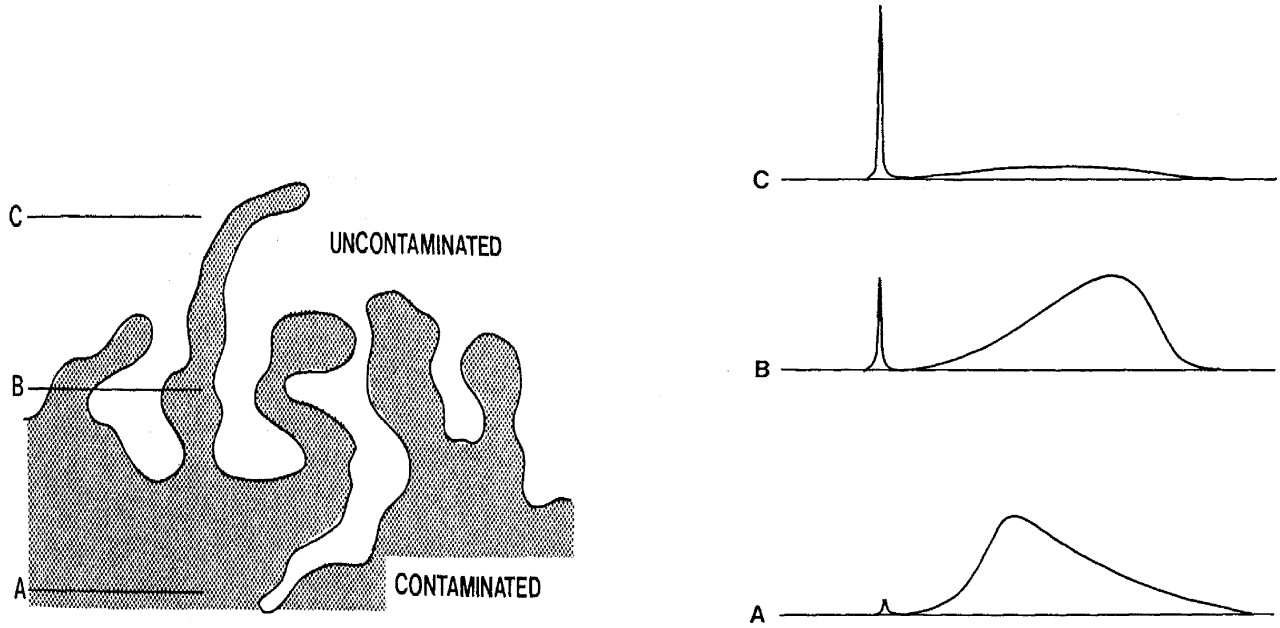


FIG. 8.3 – Fonction densité probabilité de grandeur scalaire à trois stations différentes dans la frontière intermittente (Lumley, 1979)

que le taux de turbulence de la partie turbulente de l'écoulement ne tend pas vers zéro à la frontière libre. En conséquence :

$$\begin{aligned} \widetilde{u'_\alpha u'_\alpha} &\rightarrow Cte \neq 0 \text{ lorsque } \gamma \rightarrow 0 \\ \Longrightarrow \frac{\overline{u'_\alpha u'_\alpha}}{\gamma} &\rightarrow Cte \neq 0 \text{ lorsque } \gamma \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Les décompositions des tensions normales se réduisent donc au voisinage de $\gamma = 0$ à :

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} &\simeq \gamma \widetilde{u'^2} \\ \overline{v'^2} &\simeq \gamma \widetilde{v'^2} + \gamma (1-\gamma) \left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}} \right)^2 \\ \overline{w'^2} &\simeq \gamma \widetilde{w'^2} \end{aligned} \tag{8.26}$$

Chapitre 9

Fermeture des équations de transport des tensions de Reynolds

Π_{ij}, ε_{ij} et D_{ij} sont les termes non fermés dans les équations aux tensions de Reynolds. Toutes ces fermetures sont susceptibles d'être altérées par les effets de l'intermittence de frontière. Or, au voisinage de la frontière libre où l'intermittence de frontière a un effet prépondérant, l'équilibre dans les équations pour les tensions se réduit à un équilibre entre advection et diffusion. Rappelons que l'objectif final est de construire un modèle qui se comporte correctement au voisinage de la frontière libre. Ainsi, seule la modélisation de la diffusion turbulente (paragraphe 9.1) et de la diffusion par la pression (paragraphe 9.2) sera considérée.

Les effets de l'intermittence de frontière sont modélisables, d'après le paragraphe 8.3, sur la fermeture du terme de diffusion turbulente. Une décomposition du type (8.5) pour la corrélation pression-vitesse fait intervenir quant à elle un terme de saut de pression $\widetilde{p} - \overline{\overline{p}}$ pour lequel aucune modélisation n'est proposée dans la littérature. Un modèle sera alors proposé (paragraphe 9.2), ce modèle reposant sur certains comportements physiques au voisinage de la frontière libre. Notons au passage que, si il est possible de modéliser ce saut de pression, alors il est envisageable de modéliser les effets de l'intermittence de frontière sur la fermeture de la corrélation pression-déformation Π_{ij}.

9.1 Modélisation de la diffusion turbulente

9.1.1 Modélisation sans intermittence

La diffusion turbulente est définie de la façon suivante :

$$D_{ij} = -\frac{\partial \overline{u_i' u_j' u_k'}}{\partial x_k} \tag{9.1}$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 2.1, $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ peut être modélisée de différentes manières. Pour étudier l'effet de l'intermittence de frontière sur la fermeture de $\overline{u_i' u_j' u_k'}$, il est indispensable que le modèle considéré soit compatible, c'est à dire ait les mêmes caractéristiques tensorielles que $\overline{u_i' u_j' u_k'}$. Le modèle de Daly-Harlow (2.5) ne satisfait pas ce principe de compatibilité même si il le vérifie une fois revenu à la diffusion D_{ij}. Le modèle de diffusion de Hanjalic-Launder (2.6) satisfait quant à lui les conditions de compatibilité au niveau

de $\overline{u_i' u_j' u_k'}$. D'autres modèles plus complexes comme celui de Lumley ne présentant pas d'avantage significatif par rapport à celui de Hanjalic-Launder, c'est ce dernier modèle que nous avons choisi pour étudier l'effet de l'intermittence de frontière sur la modélisation des termes de diffusion.

9.1.2 Modélisation avec effet d'intermittence

La partie intermittente de la corrélation d'ordre 3 $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ est modélisée suivant le modèle de Hanjalic et Launder (2.6) :

$$-\widetilde{u_i' u_j' u_k'} = C_S \widetilde{\tau} \left(\widetilde{u_k' u_l'} \frac{\partial \widetilde{u_i' u_j'}}{\partial x_l} + \widetilde{u_j' u_l'} \frac{\partial \widetilde{u_i' u_k'}}{\partial x_l} + \widetilde{u_i' u_l'} \frac{\partial \widetilde{u_j' u_k'}}{\partial x_l} \right) \tag{9.2}$$

Le terme de saut de vitesse d'ordre trois dans la décomposition (8.7) de $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ est approché par :

$$\gamma(1-\gamma)\left(\gamma^2 + (1-\gamma)^2\right)\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{U_j} - \overline{\overline{U_j}}\right)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right) \simeq \gamma(1-\gamma)^2\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{U_j} - \overline{\overline{U_j}}\right)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)$$

car $\gamma^2 + (1-\gamma)^2 - (1-\gamma) = \gamma(2\gamma - 1)$ est négligeable devant $(1-\gamma)$ pour $\gamma \in [0, 0.6]$ d'après la figure 9.1 et au delà les termes de saut de vitesse sont négligeables devant les autres termes des décompositions (figure 9.2).

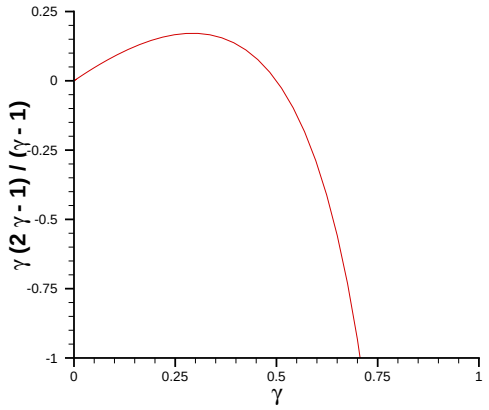


FIG. 9.1 – Validité de l'approximation faite sur le terme de saut de vitesse d'ordre 3

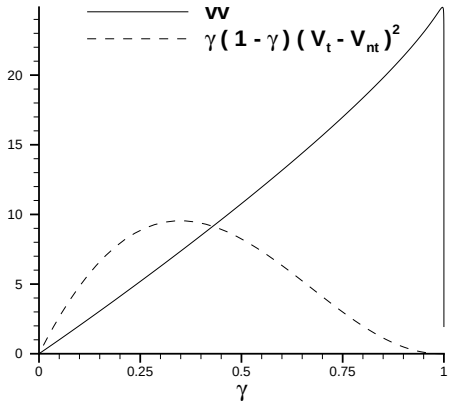


FIG. 9.2 – Sauts de vitesses, calculés par une relation approchée (8.19), négligeables dans les décompositions pour $\gamma > 0.7$

Par conséquent, la décomposition de $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ est approchée par :

$$\begin{aligned} \overline{u_i' u_j' u_k'} &= \gamma \widetilde{u_i' u_j' u_k'} + \gamma(1-\gamma)\left(\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\widetilde{u_j' u_k'} + \left(\widetilde{U_j} - \overline{\overline{U_j}}\right)\widetilde{u_i' u_k'} + \left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\widetilde{u_i' u' j}\right) \\ &\quad + \gamma(1-\gamma)^2\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{U_j} - \overline{\overline{U_j}}\right)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right) \end{aligned} \tag{9.3}$$

La décomposition (8.5) permet d'écrire, une fois les corrélations associées à l'écoulement non-turbulent négligées :

$$\overline{u_i' u_j' u_k'} = \gamma \widetilde{u_i' u_j' u_k'} + \gamma(1-\gamma)\left[\gamma\left(\widetilde{U_i} - \overline{\overline{U_i}}\right)\overline{u_j' u_k'} + \left(\widetilde{U_j} - \overline{\overline{U_j}}\right)\widetilde{u_i' u_k'} + \left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\widetilde{u_i' u_j'}\right] \quad (9.4)$$

La corrélation triple $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ se développe donc en couche mince ou au voisinage d'une frontière libre (cf notations définies au paragraphe 8.4.1) selon les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned}
-\overline{v'u'^2} &= \widetilde{\tau}\,\gamma\,\widetilde{v'^2}\left[C_S \frac{\partial \widetilde{u'^2}}{\partial y} + 2\,C_S \frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}\frac{\partial \widetilde{u'v'}}{\partial y}\right] + \widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[C_g(1-\gamma)\left(\frac{\overline{u'^2}}{\gamma} + 2\frac{\widetilde{u'v'}^2}{\widetilde{v'^2}} + 2\frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}H\right)\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \\
-\overline{v'v'^2} &= \widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[3\,C_S\gamma\frac{\partial \widetilde{v'^2}}{\partial y} + C_g(1-\gamma)\left(\frac{\overline{v'^2}}{\gamma} + 2\widetilde{v'^2}\right)\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \quad (9.5) \\
-\overline{v'w'^2} &= \widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[C_S\gamma\frac{\partial \widetilde{w'^2}}{\partial y} + C_g\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\overline{w'^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \\
-\overline{v'u'v'} &= \widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[2\,C_S\gamma\frac{\partial \widetilde{u'v'}}{\partial y} + C_S\gamma\frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}\frac{\partial \widetilde{v'^2}}{\partial y}\right] + \widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[C_g(1-\gamma)\left(\frac{\overline{u'v'}}{\gamma} + 2\widetilde{u'v'} + 2\,H\right)\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right]
\end{aligned}$$

où $H = D_g\gamma\frac{\widetilde{k}}{\widetilde{\varepsilon}}\widetilde{v'^2}\frac{\partial U}{\partial y}$.

Cette écriture du modèle démontre que l'intermittence de frontière modifie grandement la modélisation du terme de diffusion turbulente. Voyons maintenant ce qui l'en est du terme de diffusion par la pression.

9.2 Modélisation de la corrélation pression-vitesse

Ce terme de corrélation pression-vitesse est difficile à mesurer et il est souvent déduit des autres termes de l'équation de transport de k. Le calcul de ce terme est donc perturbé par l'ensemble des erreurs de mesures. Seules des DNS peuvent calculer ce terme correctement. Les DNS de Spalart (1988) et Rogers et Moser (1994) montrent que le transport par la pression est principalement non négligeable dans une région intermittente. Une modélisation prenant en compte les effets de l'intermittence de frontière doit nous permettre de proposer une fermeture pour cette corrélation, du moins en dehors des effets de paroi.

9.2.1 Modélisation dans un écoulement pleinement turbulent

La corrélation pression-vitesse est modélisée selon le modèle de Lumley (2.2) :

$$-\overline{u_i'\,p'/\rho} = \frac{2}{5}\overline{u_i' k'} \simeq C_p\,\tau\,\overline{u_i' u_l'}\,\frac{\partial k}{\partial x_l} \text{ avec } C_p < 0 \quad (9.6)$$

9.2.2 Modélisation dans une région intermittente

La décomposition avec les moyennes conditionnelles de la corrélation pression-vitesse $\overline{v'\,p'/\rho}$ s'écrit :

$$\overline{u_i'\,p'/\rho} = \gamma\widetilde{u_i'\,p'/\rho} + (1-\gamma)\,\overline{\overline{u_i'\,p'/\rho}} + \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}}\right) \tag{9.7}$$

La partie non-turbulente des corrélations d'ordre supérieur ou égal à deux étant négligée d'après le paragraphe 8.3.1, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{u_i'\,p'/\rho} &= \gamma\,\widetilde{u_i'\,p'/\rho} + \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}}\right) && (9.8)\\ \Longleftrightarrow -\overline{u_i'\,p'/\rho} &= C_p\,\gamma\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{u_i'u_l'}\,\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l} - \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}}\right) && (9.9)\end{aligned}$$

Le modèle pour la corrélation pression-vitesse est donc assujetti au modèle pour le saut de pression $\widetilde{p} - \overline{\overline{p}}$.

9.2.3 Modélisation du saut de pression

Pour les notations de couche mince décrites au paragraphe 8.4.1 et utiles pour l'étude de comportements au premier ordre au voisinage de la frontière libre, le modèle doit satisfaire aux comportements suivants lorsque $\gamma \to 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{V} - \overline{\overline{V}} \to C^{te} \text{ et } \widetilde{U} - \overline{\overline{U}} \to 0 \text{ d'après (8.23)}\\ \overline{u'v'}/k \to 0\\ \overline{u'^2} \sim \overline{v'^2} \sim \overline{w'^2} \sim \gamma \text{ d'après (8.24)}\\ \widetilde{u_\alpha'u_\alpha'} \to C^{te} \neq 0 \text{ d'après (8.25)} \Longrightarrow \overline{u_\alpha'u_\alpha'}/\gamma \to C^{te} \neq 0\\ \overline{v'^2}/k \to 1 \text{ d'après Phillips (1955) et Stewart (1957)}\end{array}\right. \tag{9.10}$$

Cette dernière condition sur le niveau de $\overline{v'^2}/k$ à la frontière libre tient au fait que l'écoulement externe est irrotationnel (du moins en première approximation).

Reprenons l'étude faite au chapitre 4 sur l'analyse asymptotique du comportement d'un modèle RSM au voisinage d'une frontière libre. Lorsque $\gamma \to 0$, les équations de transport pour les tensions se réduisent à un équilibre entre advection et diffusion. Si les comportements physiques précédents $\frac{\partial\widetilde{u_\alpha'u_\alpha'}}{\partial y} \simeq 0$, $\overline{u'v'} \ll k$, $\widetilde{V} - \overline{\overline{V}} \to C^{te}$ et $\widetilde{U} - \overline{\overline{U}} \to 0$ étaient satisfaits par le modèle, le bilan advection-diffusion se réduirait à :

$$\begin{aligned} V_0\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\overline{u'^2}\,\widetilde{\tau}\widetilde{v'^2}\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) && (9.11a)\\ V_0\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\overline{v'^2}\,\widetilde{\tau}\widetilde{v'^2}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + 2\,C_g\widetilde{v'^2}^2\widetilde{\tau}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + 2\,C_g\widetilde{v'^2}\widetilde{\tau}\left(\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) && (9.11b)\\ V_0\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\overline{w'^2}\,\widetilde{\tau}\widetilde{v'^2}\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) && (9.11c)\end{aligned}$$

et l'équation de transport de γ se réduit au même équilibre :

$$V_0 \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g \widetilde{v'^2} \widetilde{\tau} \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \tag{9.12}$$

De plus, puisque l'on doit avoir $\overline{v'^2}/\gamma \simeq C^{te} \neq 0$ d'après (8.25), l'équation précédente (9.12) est équivalente à :

$$V_0 \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g \widetilde{v'^2} \widetilde{\tau} \frac{\overline{v'^2}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \tag{9.13}$$

En soustrayant la relation (9.13) à la dégénérescence (9.11b) de l'équation de transport de $\overline{v'^2}$, il apparaît que la diffusion par la pression doit nécessairement équilibrer une partie de la diffusion turbulente afin que $\overline{v'^2}$ soit du même ordre grandeur que γ :

$$2C_g \widetilde{v'^2} \widetilde{\tau} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + 2C_g \widetilde{\tau} \left(\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0 \tag{9.14}$$

$$\iff \quad \widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}} = -\widetilde{v'^2} \simeq (1-\gamma)\left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}} \right)^2 - \overline{v'^2}/\gamma$$

Or, p/ρ est un scalaire et ne peut dépendre de $\overline{v'^2}$ en particulier. Mais, à la frontière libre, on a :

$$\overline{v'^2}/k \to 1 \quad \text{d'après (9.10)} \tag{9.15}$$

$$\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right) = \left(\widetilde{V} - \overline{\overline{V}} \right)^2 \tag{9.16}$$

Le saut de pression doit par conséquent s'exprimer comme suit, du moins lorsque $\gamma \to 0$:

$$\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}} \simeq (1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right) - k/\gamma \tag{9.17}$$

$$= -\frac{1}{2}\widetilde{\left(U_i - \widetilde{U}_i \right)\left(U_i - \widetilde{U}_i \right)} + \frac{1}{2}(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right) \tag{9.18}$$

L'expression ci-dessus (9.17) est en quelque sorte comparable à la relation de Bernoulli :

$$\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}} = p_1/\rho - p_2/\rho = -\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 \tag{9.19}$$

où les grandeurs $0,5V_1^2$ et $0,5V_2^2$ sont définies ci-dessous :

$$\frac{k}{\gamma} = \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 \tag{9.20}$$

avec :

$$\frac{1}{2}V_1^2 = \frac{1}{2}\widetilde{\left(U_i - \widetilde{U}_i \right)\left(U_i - \widetilde{U}_i \right)} \quad \text{partie turbulente} \tag{9.21}$$

$$\frac{1}{2}V_2^2 = \frac{1}{2}(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}} \right) \text{ complément lié à la zone non turbulente} \tag{9.22}$$

L'expression (9.17) est dès lors supposée, en première approximation, valable non seulement pour $\gamma \to 0$ mais aussi pour $\gamma = O(1)$.

Analyse de la physique du modèle pour le saut de pression

L'étude du comportement des modèles de diffusion au voisinage de la frontière libre a montré que le terme de diffusion par la pression devait contrebalancer une partie de la diffusion turbulente. Cette caractéristique est de plus indépendante des modèles choisis pour la diffusion ou encore les sauts de vitesse. Les PDF tracées sur les figures 8.2 et 8.3 montrent que le coefficient de dissymétrie $\overline{v'^3}$ de la grandeur instantanée v ne dépend, au voisinage de la frontière libre, que de l'écart entre les parties turbulente et non-turbulente du spectre, c'est à dire de la partie liée aux sauts de vitesse :

$$\overline{v'^3} \simeq \gamma\widetilde{v'^3} + (1-\gamma)\left(\widetilde{V}-\overline{\overline{V}}\right)\left(2\gamma\widetilde{v'^2}+\overline{v'^2}\right) \simeq \left(\widetilde{V}-\overline{\overline{V}}\right)\left(2\gamma\widetilde{v'^2}+\overline{v'^2}\right) \text{ lorsque } \gamma \to 0$$

En supposant qu'il en va de même pour la corrélation pression-vitesse (i.e. que la partie turbulente est négligeable devant la partie liée au saut de pression), l'équation de transport de $\overline{v'^2}$ dégénère au voisinage de la frontière libre en un équilibre entre convection et diffusion de la forme :

$$V_0\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\left(\widetilde{V}-\overline{\overline{V}}\right)\left(2\gamma\widetilde{v'^2}+\overline{v'^2}\right)\right) \tag{9.23}$$

Par ailleurs, puisque $\overline{v'^2}/\gamma \to C^{te}$ lorsque $\gamma \to 0$ d'après (8.25), les équations de transport de γ et $\overline{v'^2}$ dégénèrent en :

$$V_0\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\left(\widetilde{V}-\overline{\overline{V}}\right)\gamma\right) \quad \text{et} \quad V_0\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\left(\widetilde{V}-\overline{\overline{V}}\right)\overline{v'^2}\right)$$

et la diffusion par la pression doit bien contrebalancer une partie de la diffusion turbulente.

De plus, le modèle est cohérent avec l'analyse de Townsend (1976) qui suppose que la vorticité au niveau de l'interface est compensée par un effet de compression, cet effet étant symbolisé par :

$$\widetilde{p/\rho} - \overline{\overline{p/\rho}} \to Cte \neq 0 \quad \text{lorsque } \gamma \to 0 \tag{9.24}$$

Ces deux caractéristiques semblent de plus liées puisque le saut de pression permet, par l'intermédiaire de la diffusion par la pression, d'équilibrer une partie de la diffusion turbulente.

9.3 Modélisation de l'ensemble diffusion par la pression et diffusion turbulente

Le modèle construit s'écrit sous la forme tensorielle suivante :

$$
\begin{aligned}
&-\overline{u_i' u_j' u_k'} - \frac{1}{\rho}\left(\overline{p' u_i'}\delta_{jk} + \overline{p' u_j'}\delta_{ik}\right) = \\
&C_S\,\widetilde{\tau}\left(\widetilde{u_k' u_l'}\frac{\partial \widetilde{u_i' u_j'}}{\partial x_l} + \widetilde{u_j' u_l'}\frac{\partial \widetilde{u_i' u_k'}}{\partial x_l} + \widetilde{u_i' u_l'}\frac{\partial \widetilde{u_j' u_k'}}{\partial x_l}\right) + C_p\,\widetilde{\tau}\,\left(\widetilde{u_i' u_l'}\,\delta_{jk} + \widetilde{u_j' u_l'}\,\delta_{ik}\right)\frac{\partial \widetilde{k}}{\partial x_l} \\
&-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \widetilde{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{u_j' u_k'} + \delta_{jk}\Delta P\right) - \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_j} - \widetilde{\overline{U_j}}\right)\left(\widetilde{u_i' u_k'} + \delta_{ik}\Delta P\right) \\
&-(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k} - \widetilde{\overline{U_k}}\right)\overline{u_i' u_j'}
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

Le saut de pression ΔP est défini par la relation (9.17) et le saut de vitesse est défini par la relation (8.17) ou (8.19) selon l'ordre de la troncature (cf. paragraphe 8.3.4). Le temps caractéristique $\widetilde{\tau}$ de la partie turbulente de l'écoulement est modélisé par la relation (8.11). Enfin , le tenseur de Reynolds conditionnel turbulent $\widetilde{u_i' u_j'}$ est relié au tenseur de Reynolds conventionnel $\overline{u_i' u_j'}$ par la relation :

$$
\widetilde{u_i' u_j'} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\gamma} - (1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \widetilde{\overline{U_i}}\right)\left(\widetilde{U_j} - \widetilde{\overline{U_j}}\right) \tag{9.26}
$$

Ce modèle s'écrit alors en couche mince de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
-\overline{v' u'^2} &= \gamma\widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[C_S\frac{\partial \widetilde{u'^2}}{\partial y} + 2\,C_S\frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}\frac{\partial \widetilde{u'v'}}{\partial y} + C_g\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\left(\frac{\overline{u'^2}}{\gamma} + 2\frac{\widetilde{u'v'}^2}{\widetilde{v'^2}} + 2\,D_g\gamma\frac{\widetilde{k}}{\widetilde{\varepsilon}}\,\widetilde{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \\
-\overline{v'^3} - 2\,\overline{v'\,p'/\rho} &= \gamma\widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[3\,C_S\frac{\partial \widetilde{v'^2}}{\partial y} + 2C_p\frac{\partial \widetilde{k}}{\partial y} + C_g\,(1-\gamma)\,\frac{\overline{v'^2}}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + 2\,C_g\,(1-\gamma)\,\frac{\overline{v'^2} - k}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \\
-\overline{v' w'^2} &= \widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[C_S\gamma\frac{\partial \widetilde{w'^2}}{\partial y} + C_g\,(1-\gamma)\,\frac{\overline{w'^2}}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right] \\
-\overline{v'u'v'} - \overline{u'\,p'/\rho} &= \gamma\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\left[2\,C_S\frac{\partial \widetilde{u'v'}}{\partial y} + C_S\frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}\frac{\partial \widetilde{v'^2}}{\partial y} + C_p\frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}\frac{\partial \widetilde{k}}{\partial y} + C_g\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\left(\frac{\overline{u'v'}}{\gamma} + \widetilde{u'v'}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\widetilde{u'v'}}{\widetilde{v'^2}}\frac{\overline{v'^2} - k}{\gamma} + D_g\gamma\frac{\widetilde{k}}{\widetilde{\varepsilon}}\,\widetilde{v'^2}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\overline{v'^2} - k}{\gamma}\right)\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right]
\end{aligned}
\tag{9.27}
$$

Conclusion sur le modèle développé

La forme obtenue est liée au modèle choisi pour la diffusion turbulente (HL) et par la pression (Lumley). La méthode développée pour tenir compte de l'effet de l'intermittence de frontière est applicable à d'autres

fermetures pour les termes de diffusion ainsi que pour les termes de corrélation pression-déformation et de dissipation, soit en fait à toutes les fermetures en un point. Le seul inconvénient est que ce type de modèle est difficile à mettre en oeuvre dans un code de calcul et un modèle simplifié sera dérivé de cette approche afin de tenir compte de l'effet d'intermittence seulement au voisinage de la frontière libre et pas nécessairement sur toute la zone intermittente.

9.4 Comparaison avec DNS et expériences : validation de l'approche et calibration des constantes

Contrainte sur m_0

Au voisinage d'une frontière libre, lorsque $\gamma \to 0$, le terme $\widetilde{\widetilde{\tau}v'^2} \sim k^2\gamma^{m_0-1}/\varepsilon$ fait office de viscosité turbulente équivalente. D'après la section 4.2 sur le calcul de la dégénérescence d'un modèle RSM au voisinage d'une frontière libre, cette viscosité équivalente vérifie :

$$k^2\gamma^{m_0-1}/\varepsilon \sim \lambda$$

où $\lambda = y_e - y$ est, rappelons-le, la distance à la frontière libre. Puisque $k \sim \gamma$, la dissipation est donc équivalente à :

$$\varepsilon \sim \frac{k}{\lambda}\gamma^{m_0} \tag{9.28}$$

Or, $\frac{k}{\lambda}$ est du même ordre que $\frac{dk}{d\lambda}$ au voisinage de la frontière libre d'après l'annexe B (s'insérant dans l'étude asymptotique du raccord à la frontière libre menée dans le chapitre 4). Par conséquent :

$$\varepsilon \sim \frac{dk}{d\lambda}\gamma^{m_0} \tag{9.29}$$

Pour que la dissipation soit négligeable devant l'advection $V_0\frac{\partial k}{\partial \lambda}$ au voisinage de la frontière libre, il faut donc que :

$$m_0 > 0 \tag{9.30}$$

Valeur de m_0 calibrée sur les DNS

La valeur de m_0 est déterminée à partir de profils de DNS en couche limite sans gradient de pression réalisées par Spalart (1988) à $R_\theta = 1410$. La figure 7.2 montre, par le tracé de $C_S = -\overline{v'k'}/\left(k\overline{v'^2}/\varepsilon\frac{\partial k}{\partial y}\right)$, que le modèle de diffusion n'est pas valable dans la frontière intermittente. Étant donné que le modèle construit vérifie :

$$-\overline{v'k'} \sim \frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2}\gamma^{m-1}\frac{\partial k}{\partial y}$$

lorsque $\gamma \to 1$ et lorsque $\gamma \to 0$, si $C_S\gamma^{1-m_0} = -\overline{v'k'}/\left(k\overline{v'^2}\gamma^{m_0-1}/\varepsilon\frac{\partial k}{\partial y}\right)$ est constant lorsque $\gamma \to 0$ alors le modèle de diffusion établi précédemment sera valable.

Calculons γ par la formule de Klebanoff (1954) :

$$\gamma(y) = \frac{1}{2}(1 - \text{erf}\,\xi) \tag{9.31}$$
$$\text{avec :} \quad \xi = \left(\sqrt{2}\frac{\sigma}{\delta}\right)^{-1}\left[\frac{y-\overline{Y}}{\delta}\right]$$

où $\overline{Y}/\delta = 0,78$ et $\sigma/\delta = 0,14$. La figure 9.3 ci-dessous démontre alors que $C_S\gamma^{1-m_0}$ est approximativement constant dans la zone intermittente pour :

$$m_0 \simeq 2/3 \tag{9.32}$$

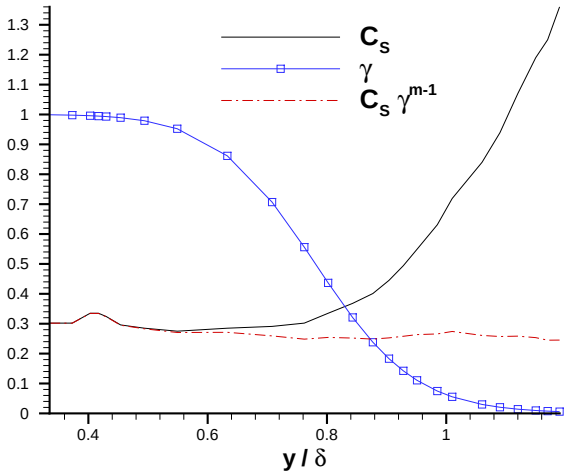


FIG. 9.3 – Validité du modèle pour le temps caractéristique $\widetilde{\tau}$ de la partie turbulente de l'écoulement

Ordres de grandeur de C_p et C_g

Le modèle pour la diffusion par la pression est testé en couche de mélange et couche limite de plaque plane. Un modèle de turbulence avec effet d'intermittence (chapitre 11), donnant des résultats satisfaisants pour ces deux écoulements (cf. chapitre 13), est utilisé pour estimer cette diffusion par la pression. Les valeurs de C_p et C_g sont ainsi calibrées de manière qualitative par rapport aux DNS de Rogers et Moser (1994) en couche de mélange et sur les DNS de Spalart (1988) sur plaque plane :

$$C_p \simeq -C_g \; ; \; C_g \simeq 0,1 \tag{9.33}$$

Les figures 9.5 et 9.7 montrent les prévisions de notre modèle pour la diffusion par la pression en couche de mélange et en couche limite de plaque plane. En comparant ces résultats aux DNS de Rogers et Spalart (figures 9.4 et 9.6), il semble que le modèle se comporte de façon tout à fait satisfaisante pour les valeurs de C_g et C_p définies ci-dessus. Cela valide en quelque sorte les modèles construits dans ce chapitre pour la diffusion par la pression (9.6) (modèle dérivé du modèle de Lumley) et le saut de pression (9.17).

Bilans de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente k en couche de mélange

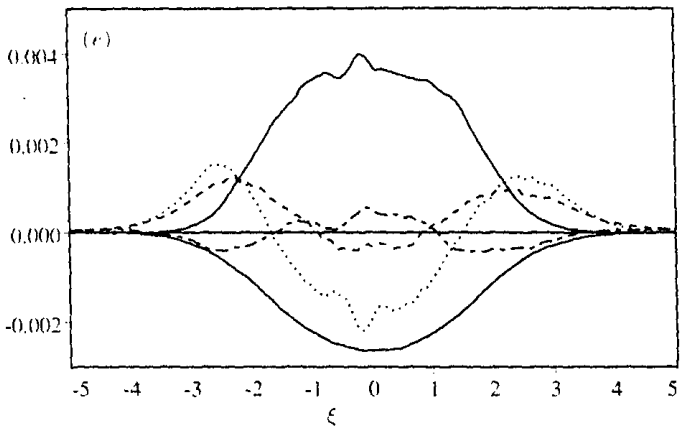


FIG. 9.4 – DNS de Rogers et Moser (1994) en couche de mélange

· · · : Diff. turb., – – : conv.

– · – : Diff. press., — : diss. et prod.

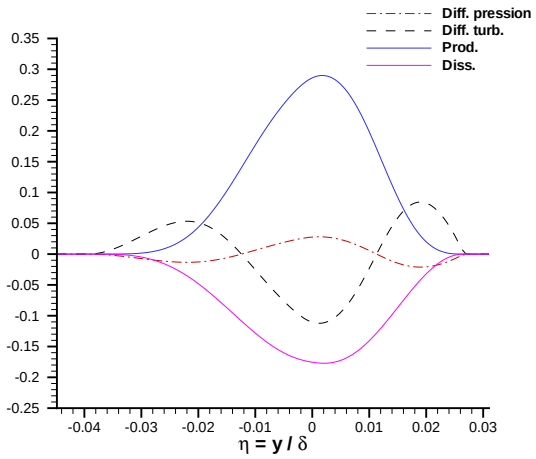


FIG. 9.5 – Diffusion par la pression en couche de mélange pour le modèle construit

Bilans de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente k en couche limite

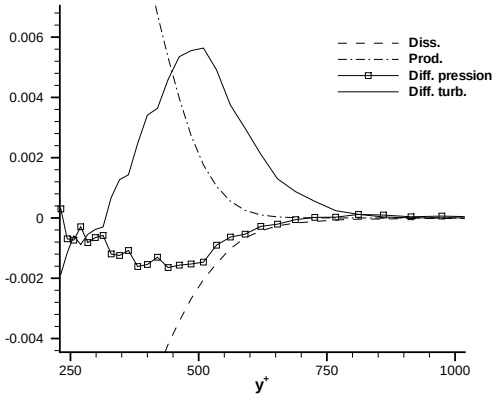


FIG. 9.6 – DNS de Spalart (1988) en couche limite de plaque plane

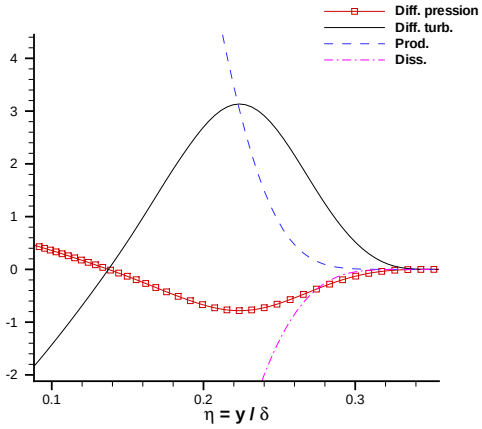


FIG. 9.7 – Diffusion par la pression en couche limite de plaque plane pour le modèle construit

Chapitre 10

Influence de l'intermittence de frontière sur la fermeture de l'équation pour la dissipation

10.1 Fermeture sans effet d'intermittence

L'équation de transport exacte de la pseudo-dissipation ε s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k\varepsilon'} - 2\frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}\frac{\partial p'}{\partial x_l}}\right) - 2\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\varepsilon'_{ik}} - 2\,\nu^2\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j\,\partial x_k}} \\ &\quad -2\left(\overline{\nu u'_k\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_l\partial x_k}} + \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}} + \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}}\right) + \nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_k\,\partial x_k}\end{aligned} \tag{10.1}$$

Le choix a été fait au paragraphe 3.2 de se donner la forme "à priori" de la fermeture de l'équation de transport de la dissipation sous une forme générique (3.8). Cette modélisation à Reynolds élevé (où la viscosité moléculaire a été négligée) est la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} &= C_{\varepsilon 1}P_k\frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) \\ &\quad +C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l} + C_{\varepsilon k}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l} + C^{\varepsilon}_{kk}\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\end{aligned} \tag{10.2}$$

Cette modélisation est, pour les mêmes raisons que pour la diffusion des équations aux tensions de Reynolds, déficiente dans les régions à caractère intermittent. En outre, l'intermittence de frontière pilote le raccord extérieur des grandeurs turbulentes tout comme l'équation d'échelle dans les modèles de turbulence en un point (cf. partie II). Le caractère intermittent de l'écoulement au voisinage des frontières libres doit donc être pris en compte dans la fermeture de l'équation d'échelle, en particulier celle pour la dissipation ε.

10.2 Décomposition dans les régions intermittentes

Le second membre de l'équation pour la dissipation (10.1) est récrit sous la forme suivante :

$$G_\varepsilon = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x_k} + C_\varepsilon + S_\varepsilon$$

$$\text{où :} \left\{ \begin{array}{l} H_\varepsilon = -\overline{u'_k \varepsilon'} - 2\frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}\frac{\partial p'}{\partial x_l}} - 2\overline{u'_i \varepsilon'_{ik}} \\ C_\varepsilon = 2\overline{u'_i \frac{\partial \varepsilon'_{ik}}{\partial x_k}} - 2\,\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j\,\partial x_k}} \\ S_\varepsilon = -2\left(\overline{\nu u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_l \partial x_k}} + \overline{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}} + \overline{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}}\right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \end{array} \right.$$

Le but de cette réécriture est de distinguer les termes de diffusion des autres termes afin de décomposer comme il se doit le second membre (10.1) de l'équation pour la dissipation.

La décomposition en moyennes conditionnelles est alors appliquée à H_ε, C_ε et S_ε. Elle se simplifie, en négligeant les parties non-turbulentes (cf. paragraphe 8.3.1), en un terme turbulent $\gamma\widetilde{()}$ et un terme additionnel lié aux sauts de vitesse ou de pression $(\,)^\gamma$:

$$\begin{array}{rcl} H_\varepsilon & = & \gamma\widetilde{H_\varepsilon} + \gamma\,(1-\gamma)\,H_\varepsilon^\gamma \\ C_\varepsilon & = & \gamma\widetilde{C_\varepsilon} + \gamma\,(1-\gamma)\,C_\varepsilon^\gamma \\ S_\varepsilon & = & \gamma\widetilde{S_\varepsilon} + \gamma\,(1-\gamma)\,S_\varepsilon^\gamma \end{array} \tag{10.3}$$

Ainsi le second membre G_ε de (10.1) est décomposé selon la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} G_\varepsilon & = & {G_\varepsilon}^t + {G_\varepsilon}^{add} \\ \text{avec :} & & {G_\varepsilon}^t = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\gamma\widetilde{H_\varepsilon}\right) + \gamma\left(\widetilde{C_\varepsilon} + \widetilde{S_\varepsilon}\right) \\ & & {G_\varepsilon}^{add} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\gamma\,(1-\gamma)\,H_\varepsilon^\gamma\right) + \gamma\,(1-\gamma)\,(C_\varepsilon^\gamma + S_\varepsilon^\gamma) \end{array} \tag{10.4}$$

Le terme ${G_\varepsilon}^t$ correspond à la partie turbulente de l'ensemble des corrélations. Le terme additionnel ${G_\varepsilon}^{add}$ est en particulier dépendant des sauts de vitesse $\widetilde{U_k} - \widetilde{\overline{U_k}}$.

Modélisation de la partie turbulente

La décomposition (10.4) du second membre nous oblige à distinguer la modélisation du terme de diffusion de la modélisation du terme source $\widetilde{C_\varepsilon} + \widetilde{S_\varepsilon}$. Or, dans un écoulement pleinement turbulent, la modélisation (10.2) de l'équation pour ε consiste à fermer ensemble les termes C_ε et S_ε car nous ne pouvons pas les fermer termes à termes (cf. paragraphe 3.1). Le terme de diffusion peut être modélisé quant à lui à part. Dans la partie turbulente de l'écoulement, les termes $\widetilde{H_\varepsilon}$ et $\widetilde{C_\varepsilon} + \widetilde{S_\varepsilon}$ sont dès lors modélisés en terme de moyennes conditionnelles turbulentes de la même manière qu'en écoulement pleinement turbulent (cf. paragraphe 8.3.2 sur la modélisation des corrélations inconnues en terme de moyenne conditionnelle turbulente) :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H_\varepsilon} & = & D_{\varepsilon\varepsilon}\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{u'_k u'_l}\dfrac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + D_{\varepsilon k}\,\widetilde{\tau}\,\dfrac{\widetilde{u'_k u'_l}\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}}\dfrac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l} \\ \widetilde{C_\varepsilon} + \widetilde{S_\varepsilon} & = & C_{\varepsilon 1}\widetilde{P_k}\dfrac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}} - C_{\varepsilon 2}\dfrac{\widetilde{\varepsilon}^2}{\widetilde{k}} + C_{\varepsilon\varepsilon}\dfrac{\widetilde{\tau}}{\widetilde{\varepsilon}}\dfrac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_k}\widetilde{u'_k u'_l}\dfrac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + C_{\varepsilon k}\,\widetilde{\tau}\,\dfrac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_k}\dfrac{\widetilde{u'_k u'_l}}{\widetilde{k}}\dfrac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + C^\varepsilon_{kk}\,\widetilde{\tau}\,\dfrac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}^2}\dfrac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_k}\widetilde{u'_k u'_l}\dfrac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l} \end{array} \tag{10.5}$$

La partie turbulente ${G_\varepsilon}^t$, définie par la relation (10.4), est alors fermée de la même manière suivante :

$$\begin{aligned} {G_\varepsilon}^t &= C_{\varepsilon 1}\gamma\widetilde{P_k}\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}} - C_{\varepsilon 2}\gamma\frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{\widetilde{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{u'_k u'_l}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon k}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\frac{\widetilde{u'_k u'_l}}{\widetilde{k}}\widetilde{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l}\right) \\ &+C_{\varepsilon\varepsilon}\gamma\frac{\widetilde{\tau}}{\widetilde{\varepsilon}}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_k}\widetilde{u'_k u'_l}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + C_{\varepsilon k}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_k}\frac{\widetilde{u'_k u'_l}}{\widetilde{k}}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + C^{\varepsilon}_{kk}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}^2}\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_k}\widetilde{u'_k u'_l}\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l} \end{aligned} \tag{10.6}$$

Modélisation du terme additionnel

Pour calculer le terme additionnel ${G_\varepsilon}^{add}$, il est nécessaire de décomposer chacune des corrélations apparaissant dans l'équation de transport (10.1) de la dissipation.

La partie de S_ε dépendante du champ moyen est a priori négligeable au voisinage de la frontière libre comme peut l'être la production de turbulence dans les équations pour les tensions de Reynolds. Le terme de diffusion visqueuse est lui aussi négligeable à Reynolds élevé. C'est pourquoi le terme additionnel S^γ_ε dans la décomposition de S_ε sera négligé ici. Nous cherchons en effet à construire un modèle reproduisant un comportement à la frontière libre tenant compte de l'effet d'intermittence de frontière et le terme S^γ_ε n'est pas nécessaire à la construction de notre modèle.

Examinons la décomposition des corrélations apparaissant dans H_ε et C_ε. De la même manière que pour ε en (8.6) mais en négligeant la partie non-turbulente d'après le paragraphe 8.3.1, les termes suivants :

$$-2\frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l}\frac{\partial p'}{\partial x_l}} \quad \text{et} \quad -2\,\nu^2\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j\,\partial x_k}}$$

ne font pas apparaître de terme additionnel lors de leur décomposition à Reynolds turbulent élevé. Toujours à Reynolds turbulent élevé, les termes $\overline{u'_i\varepsilon'_{ik}}$ et $\overline{u'_i\frac{\partial\varepsilon'_{ik}}{\partial x_k}}$ se décomposent quant à eux de la même manière que $\overline{u'_i\varepsilon'}$ en (8.8) :

$$\begin{aligned} \overline{u'_i\varepsilon'_{ik}} &\simeq \gamma\widetilde{u'_i\varepsilon'_{ik}} + (1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\varepsilon_{ik} \\ \overline{u'_i\frac{\partial\varepsilon'_{ik}}{\partial x_k}} &\simeq \gamma\widetilde{u'_i\varepsilon'_{ik}} + (1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\frac{\partial\,\varepsilon_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{10.7}$$

En résumé, à Reynolds élevé, le terme additionnel ${G_\varepsilon}^{add}$ est approché par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\gamma\,(1-\gamma)\,\widetilde{H^\gamma_\varepsilon}\right) + \gamma\,(1-\gamma)\,\widetilde{C^\gamma_\varepsilon} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\gamma\,(1-\gamma)\left(\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\widetilde{\varepsilon} + \left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\widetilde{\varepsilon}_{ik}\right)\right] \\ &\quad +2\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U}_i - \overline{\overline{U_i}}\right)\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{10.8}$$

En supposant que les petites échelles ont un caractère isotrope (hypothèse de similitude de Kolmogorov), le terme additionnel est modélisé comme suit :

$$\begin{aligned} {G_\varepsilon}^{add} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\gamma\,(1-\gamma)\,\widetilde{H^\gamma_\varepsilon}\right) + \gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{C^\gamma_\varepsilon} + S^\gamma_\varepsilon\right) \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\alpha\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\varepsilon\right) - \beta\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k} - \overline{\overline{U_k}}\right)\frac{\partial\varepsilon/\gamma}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{10.9}$$

Deux nouvelles constantes α et β apparaissent donc lorsque l'effet d'intermittence de frontière est pris en compte dans la fermeture en un point de l'équation de transport pour la dissipation.

Modélisation finale de l'équation de transport pour la dissipation

En résumé, pour un nombre de Reynolds turbulent élevé, l'équation de transport pour la dissipation est modélisée par :

$$\begin{aligned}\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} &= C_{\varepsilon 1}\gamma\widetilde{P_k}\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}} - C_{\varepsilon 2}\gamma\frac{\widetilde{\varepsilon}^2}{\widetilde{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{u'_k u'_l}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon k}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\frac{\widetilde{u'_k u'_l}}{\widetilde{k}}\widetilde{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l}\right) \\ &+C_{\varepsilon\varepsilon}\gamma\frac{\widetilde{\tau}}{\widetilde{\varepsilon}}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_k}\widetilde{u'_k u'_l}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + C_{\varepsilon k}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_k}\frac{\widetilde{u'_k u'_l}}{\widetilde{k}}\frac{\partial\widetilde{\varepsilon}}{\partial x_l} + C^{\varepsilon}_{kk}\gamma\,\widetilde{\tau}\,\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{k}^2}\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_k}\widetilde{u'_k u'_l}\frac{\partial\widetilde{k}}{\partial x_l} \\ &+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\alpha\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k}-\overline{\overline{U_k}}\right)\varepsilon\right) - \beta\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k}-\overline{\overline{U_k}}\right)\frac{\partial\varepsilon/\gamma}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{10.10}$$

10.3 Contraintes sur le comportement du modèle au voisinage de la frontière libre

Dans le but de construire un modèle possédant un comportement à la frontière libre le plus physique possible, des contraintes sur le comportement des échelles caractéristiques de longueur $l \propto k^{1,5}/\varepsilon$ et de temps $\tau \propto k/\varepsilon$ sont appliquées au modèle. Effectuons pour cela une étude du comportement à la frontière libre du modèle en calculant la dégénérescence de ses équations de transport selon la méthode employée dans la partie II. Pour cela, rappellons que **toutes les grandeurs sont adimensionnées** (cf. partie II) de sorte qu'elles soient de l'ordre de l'unité dans la région pleinement turbulente.

10.3.1 Dégénérescences des équations pour la dissipation et pour la viscosité turbulente équivalente au voisinage de la frontière libre

Au voisinage de la frontière libre, les comportements suivants doivent être satisfaits (cf notations du paragraphe 8.4.1) :

$$\frac{k}{\gamma} \simeq C^{te}\ ;\ \widetilde{U} - \overline{\overline{U}} \to 0\ ;\ \widetilde{V} - \overline{\overline{V}} \to Cte \tag{10.11}$$

$$\Longrightarrow \widetilde{k} \simeq C^{te} \Longrightarrow \frac{\partial\widetilde{k}}{\partial y} \simeq 0 \tag{10.12}$$

Reprenons l'étude faite au chapitre 4 sur le calcul de la dégénérescence significative d'un modèle RSM et de son équation d'échelle au voisinage d'une frontière libre. L'équation pour la dissipation (10.10) dégénère sous

la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\widetilde{N}\,\frac{\partial \varepsilon/\gamma}{\partial y}\right)+C_{\varepsilon\varepsilon}\gamma\frac{\widetilde{N}}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon/\gamma}{\partial y}\right)^2 \\ &\quad +C_g\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\varepsilon}{\gamma^2}\widetilde{N}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)+\beta\frac{1}{\gamma}\widetilde{N}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon/\gamma}{\partial y}\right] \\ &\quad \text{avec } \widetilde{N}=\widetilde{k}\widetilde{v'^2}\gamma^{m_0-1}/\widetilde{\varepsilon} \end{aligned} \tag{10.13}$$

Pour étudier le comportement au voisinage de la frontière libre ($\gamma \ll 1$) du modèle construit, il est nécessaire de calculer (cf. section 4.2) la dégénérescence de l'équation pour la viscosité turbulente équivalente du problème représentée ici par $\widetilde{N}$. Puisque la grandeur $\nu_t^{eq}=\gamma^{m_0-1}k^2/\varepsilon$ lui est équivalente lorsque $\gamma \ll 1$, tout revient à calculer la dégénérescence de l'équation de transport de ν_t^{eq}. Cette dégénérescence est obtenue en combinant l'expression ci-dessus aux dégénérescences de l'équation pour k et de l'équation pour γ. L'équation pour le facteur d'intermittence dégénère selon la relation (8.4.2), c'est à dire :

$$V_0\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\widetilde{N}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)$$

Puisque les tensions normales vérifient $\overline{u'_\alpha u'_\alpha}/\gamma \simeq C^{te}$ lorsque $\gamma \ll 1$, l'équation pour k dégénère suivant l'équilibre ci-dessous :

$$V_0\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\frac{k}{\gamma}\,\widetilde{N}\,\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) \tag{10.14}$$

De manière similaire à ce qui a été fait dans la section 4.2, l'équation dégénérée de ν_t^{eq} est récrite pour la grandeur g proportionnel à ν_t^{eq}, à savoir $g=-\widetilde{N}\,C_g/V_0$:

$$0 = a\,g\,\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}+b\left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)^2+c\,\frac{\partial g}{\partial \lambda}+d \quad \text{avec } \lambda=y_e-y \tag{10.15}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a=-D_{\varepsilon\varepsilon} \\ b=D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon} \\ c=-2m_0\left(D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon}\right)-C_g\left(\alpha+1-\beta\right)-D_{\varepsilon\varepsilon} \\ d=m_0^2\left(D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon}\right)+m_0\left(C_g\left(\beta-1+\alpha\right)+D_{\varepsilon\varepsilon}\right)+C_g\left(\beta-1\right) \end{cases}$$

La dégénérescence de l'équation pour g s'écrit alors sous forme relativement compacte :

$$D_{\varepsilon\varepsilon}\,g\,\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}=\left(D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}-m_0\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}-m_0\right)\left[C_g\left(\alpha+1-\beta\right)-D_{\varepsilon\varepsilon}\right]+C_g\left(\beta-1\right) \tag{10.16}$$

10.3.2 Contraintes sur le comportement du temps caractéristique de la turbulence k/ε

Comportement physique de k/ε à la frontière libre

Une fois adimensionnée afin qu'elle soit de l'ordre de l'unité au coeur de l'écoulement turbulent, la grandeur ε/k (adimensionné) est censée être très petite devant l'unité au voisinage de la frontière libre pour que la condition de vraisemblance sur la dissipation soit satisfaite (paragraphe 6.1). Par ailleurs, les DNS de Spalart

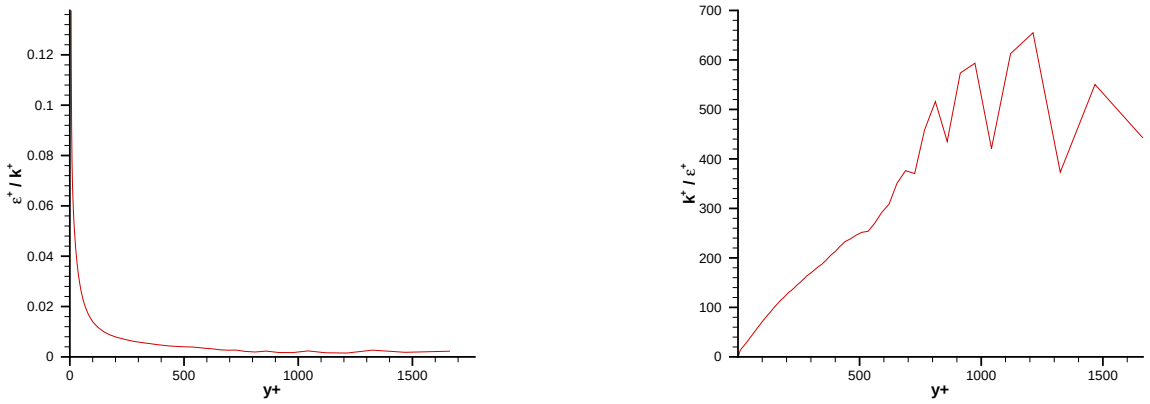


FIG. 10.1 – DNS de Spalart (1988) en couche limite de plaque plane (pour $R_\theta = 1410$ et $y \simeq \delta \Leftrightarrow y^+ \simeq 800$)

(figure 10.1) en couche limite de plaque plane semblent montrer que k/ε reste borné au voisinage de la frontière libre. Mais cette conclusion reste peu fiable de part le caractère "bruité" des DNS au voisinage de la frontière libre, ce "bruitage" s'expliquant par le manque de structures turbulentes dans cette zone. Néanmoins, afin que les grandeurs statistiques de l'écoulement turbulent se raccordent de façon continue avec l'écoulement extérieur faiblement turbulent, il semble justifié d'avoir un niveau de k/ε élevé mais borné.

Contraintes sur le comportement du modèle au voisinage de la frontière libre

Le comportement asymptotique de ε/k au voisinage de la frontière libre (où la viscosité moléculaire est négligeable) est étudié en reprenant les résultats de la partie II appliqués à l'équation pour g (10.15). Reprenons alors les notations d'un développement asymptotique c'est à dire remplaçons la distance à la frontière libre $\lambda = y_e - y$ par la variable locale $\widehat{\lambda} = \lambda/\delta(\xi)$ définie au paragraphe 4.1. Comme cela a été montré au paragraphe 5.1, le comportement de ε/k peut être étudié à l'aide des deux solutions en puissance (4.27) puisque la solution paramétrique (4.29) est encadrée par ces deux solutions particulières (cf figure 4.3). Au voisinage de $\widehat{\lambda} = 0$, la solution paramétrique tend vers la solution en puissance α_k^- et au voisinage de $\widehat{\lambda} = \infty$, la solution tend vers la solution en puissance α_k^+. Ces deux exposants associés aux solutions en puissance sont solutions (x) de l'équation du second degré :

$$(1/x - m_0)^2 + (1/x - m_0)\left[C_g\left(\alpha + 1 - \beta\right) - D_{\varepsilon\varepsilon}\right] + C_g\left(\beta - 1\right) = 0 \tag{10.17}$$

Puisque pour chaque solution en puissance $\nu_t^{eq} = \gamma^{m_0 - 1} k^2/\varepsilon \propto \widehat{\lambda}$, le comportement de ε/k à la frontière libre est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\varepsilon}_0}{\widehat{k}_0} &\sim \widehat{\lambda}^{\left(m_0\,\alpha_k^- - 1\right)} \quad \text{lorsque } \widehat{\lambda} \to 0 \\ \frac{\widehat{\varepsilon}_0}{\widehat{k}_0} &\sim \widehat{\lambda}^{\left(m_0\,\alpha_k^+ - 1\right)} \quad \text{lorsque } \widehat{\lambda} \gg 1 \end{aligned} \tag{10.18}$$

En revenant en variable globale λ, ε/k ne doit plus dépendre que de $\lambda \ll 1$:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\varepsilon}{k} & \sim & \lambda^{\left(m_0\,\alpha_k^- - 1\right)} & \text{lorsque } \widehat{\lambda} \to 0 \\ \dfrac{\varepsilon}{k} & \sim & \lambda^{\left(m_0\,\alpha_k^+ - 1\right)} & \text{lorsque } \widehat{\lambda} \gg 1 \end{array} \tag{10.19}$$

Le comportement asymptotique imposé au modèle est, d'après le paragraphe précédent :

$$\frac{\varepsilon}{k} \ll 1 \text{ et } \frac{k}{\varepsilon} \text{ borné} \tag{10.20}$$

Pour $m_0\,\alpha_k^- - 1 = 0$ et $m_0\,\alpha_k^+ - 1 > 0$, la condition (10.20) est satisfaite car :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\varepsilon}{k} & \to & Cte & \text{lorsque } \widehat{\lambda} \to 0 \\ \dfrac{\varepsilon}{k} & \ll & 1 & \text{lorsque } \widehat{\lambda} \gg 1 \text{ car on a toujours } \lambda \ll 1 \end{array} \tag{10.21}$$

Pour avoir $\alpha_k^- = 1/m_0$, il est nécessaire d'imposer d'après l'expression (10.16) :

$$\beta = 1 \tag{10.22}$$

Pour définir le raccord (c'est à dire α_k^+) à l'aide de la constante α apparue dans la relation (10.9), la constante α_k^0 est introduite par l'intermédiaire de la relation ci-dessous de sorte que $\alpha_k^+ = \alpha_k^0$:

$$\alpha = \frac{1}{C_g}\left[-D_{\varepsilon\varepsilon} - \left(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}\right)\left(m_0 - 1/\alpha_k^0\right)\right] \tag{10.23}$$

Pour les définitions (10.22) et (10.23), on vérifie que :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -D_{\varepsilon\varepsilon} \\ b = D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon} \\ c = \left(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}\right)\left(-m_0 - 1/\alpha_k^0\right) \\ d = m_0\left(D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon}\right)\left(1/\alpha_k^0\right) \end{array}\right. \tag{10.24}$$

et que les deux puissances de raccordement s'écrivent :

$$\alpha_k^- = \frac{1}{m_0} \quad , \quad \alpha_k^+ = \alpha_k^0 \tag{10.25}$$

Rappelons que la constante α_k^0 doit être supérieure à $1/m_0$ afin que l'on ait $\varepsilon/k \ll 1$ d'après l'expression (10.19).

D'après (5.1), puisque les deux puissances sont positives, le modèle n'est pas sensible aux conditions extérieures lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro.

10.3.3 Contraintes sur le comportement de $l = k^{1,5}/\varepsilon$

De manière similaire au paragraphe précédent, le comportement de l peut être étudié à l'aide des deux solutions en puissances puisque la solution paramétrique est encadrée par ces deux solutions particulières. Pour une solution en puissance, on a :

$$\begin{aligned} l &\propto \frac{k^{1,5}}{\varepsilon} \sim \lambda^{(1+(0,5-m_0)\alpha_k)} \\ \text{soit :} \quad l &\sim \lambda^{\left(1+(0,5-m_0)\alpha_k^-\right)} \text{ lorsque } \widehat{\lambda} \to 0 \\ l &\sim \lambda^{\left(1+(0,5-m_0)\alpha_k^+\right)} \text{ lorsque } \widehat{\lambda} \gg 1 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Puisque $m_0\,\alpha_k^- = 1$, l'échelle de longueur l tend vers zéro lorsque $\widehat{\lambda} \to 0$. Pour que l soit également très petit devant l'unité pour la solution en puissance liée au second exposant α_k^+, il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} & 1 + (1/2 - m_0)\,\alpha_k^+ > 0 \\ \iff \quad & \alpha_k^+ < \frac{1}{m_0 - 1/2} \quad \text{lorsque} \quad m_0 > \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{10.27}$$

Pour la valeur $m_0 = 2/3$ choisie (cf. section 9.4), l'exposant $\alpha_k^+ = \alpha_k^0$ doit rester inférieur à 6.

10.4 Conclusion sur le modèle pour l'équation d'échelle avec effet d'intermittence

Lorsque les contraintes précédentes sont appliquées, l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence $l = k^{1,5}/\varepsilon$ tend vers zéro à la frontière libre et l'échelle de temps k/ε caractéristique de l'écoulement devient très grande devant l'unité d'après (10.21) mais reste bornée.

Le modèle construit pour la diffusion et pour l'équation pour la dissipation est donc cohérent avec la plupart des comportements physiques constatés au voisinage de la frontière libre, contrairement à la plupart des modèles de turbulence. D'après le paragraphe 9.4 plusieurs constantes sont fixées. Le nombre de paramètres inconnus est alors assez réduit.

Remarquons que, pour le modèle établi pour l'équation de transport de ε, le raccord à la frontière libre est piloté par des termes qui s'annulent lorsque $\gamma = 1$. **Le comportement du modèle à la frontière libre est donc piloté par l'intermittence de frontière**. Cet aspect est cohérent avec la physique de la frontière intermittente : l'intermittence de frontière, en procédant au mélange entre l'écoulement turbulent et l'écoulement irrotationnel, assure le raccordement des grandeurs turbulentes à la frontière libre. Cette caractéristique possède de plus un intérêt très pratique : **le comportement du modèle à la frontière libre est découplé de son comportement dans une zone pleinement turbulente**. Il est dès lors possible de satisfaire les contraintes sur la loi logarithmique et la loi en racine et dans le même temps les contraintes sur le raccord à la frontière libre (qui sont vérifiées par construction du modèle).

Chapitre 11

Modèle simplifié

Pour des raisons de robustesse numérique, le modèle précédent n'a pas pu être testé dans un code de calcul. Ces problèmes de robustesse semblent liés aux équations aux tensions de Reynolds dans lesquelles un trop grand nombre de termes de diffusion doivent être traités en tant que terme source. Néanmoins, eu égard aux imprécisions de modélisation du terme de redistribution ou encore de l'équation d'échelle, il n'est sans doute pas nécessaire de représenter aussi finement les effets de l'intermittence de frontière sur les fermetures en un point. C'est pourquoi, en s'appuyant sur le développement du modèle précédent, un modèle plus simple est construit, ce modèle ne visant à reproduire les effets de l'intermittence de frontière qu'au voisinage de la frontière libre c'est à dire lorsque $\gamma \to 0$. On ne cherchera donc qu'à vérifier le comportement asymptotique au premier ordre du modèle établi précédemment lorsque $\gamma \to 0$. La figure 11.1 symbolise sur le facteur d'intermittence les zones où l'erreur commise dans la construction du modèle simplifié reste négligeable devant les termes modélisés.

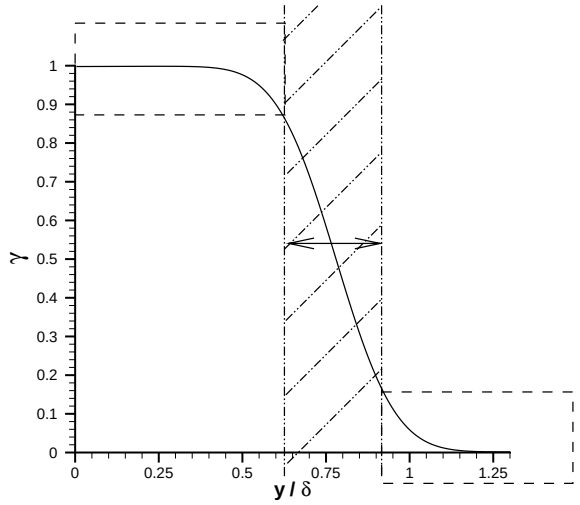


FIG. 11.1 – Domaines de validité (rectangles en pointillées) du modèle simplifié en tant qu'approximation du modèle construit aux chapitres 9 et 10

Cette simplification peut paraître assez grossière. Mais l'objectif est de construire un modèle de turbulence qui respecte certains comportements physiques donnés afin de reproduire correctement la physique de l'écoulement. Par exemple, il est demandé au modèle de reproduire correctement la réponse de l'écoulement à certains paramètres comme le gradient de pression longitudinal ou la turbulence extérieure. Ici, l'objectif recherché est de pouvoir combiner le comportement à la frontière libre et les contraintes concernant la couche limite. Le modèle pour l'équation d'échelle établi au chapitre précédent permet de combiner ces deux aspects (cf. paragraphe 10.4) et il en sera de même d'un modèle simplifié qui lui serait équivalent lorsque $\gamma \to 0$.

11.1 Modèle pour les équations aux tensions de Reynolds

Au voisinage de la frontière extérieure d'une couche mince, le modèle pour l'équation de transport du facteur d'intermittence :

$$\frac{D\,\gamma}{D\,t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{U_k}-\overline{\overline{U_k}}\right)\right)+S_\gamma \tag{11.1}$$

se réduit à l'équilibre convection-diffusion suivant (cf. paragraphe 8.4) :

$$V\frac{\partial\gamma}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y}\left[-\gamma\,(1-\gamma)\left(\widetilde{V}-\overline{\overline{V}}\right)\right] \tag{11.2}$$

La modélisation (8.17) du saut de vitesse conduit alors à :

$$V\frac{\partial\gamma}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{v'^2}\,\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) \tag{11.3}$$

Puisque toutes les tensions normales sont proportionnelles (en première approximation) à γ d'après le paragraphe 8.4, les équations de transport pour les tensions normales se réduisent à l'équilibre suivant :

$$\begin{aligned}
V\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial y} &\simeq \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\widetilde{\tau}\widetilde{v'^2}\,\frac{\overline{u'^2}}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\\
V\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} &\simeq \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\widetilde{\tau}\widetilde{v'^2}\,\frac{\overline{v'^2}}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\\
V\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial y} &\simeq \frac{\partial}{\partial y}\left(C_g\,\widetilde{\tau}\widetilde{v'^2}\,\frac{\overline{w'^2}}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Ainsi le modèle pour la corrélation pression-vitesse peut, que ce soit au voisinage de $\gamma = 0$ ou bien pour $\gamma = 1$, être intégré dans le modèle pour la diffusion turbulente puisqu'il a tendance à compenser une partie de cette diffusion turbulente. De plus, l'ensemble diffusion turbulente et diffusion par la pression semble pouvoir être modélisé sous une forme en premier gradient (2.4) que ce soit pour $\gamma \to 0$ d'après (11.4) ou pour $\gamma \sim 1$ comme pour le modèle de Daly et Harlow (1970). La diffusion turbulente et par la pression est donc modélisée comme suit :

$$D_{ij} = D_{kk}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon\,\gamma^{1-m_0}}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l}\right) \tag{11.5}$$

l'effet de l'intermittence de frontière sur la fermeture du terme de diffusion étant ainsi de modifier l'échelle de temps caractéristique des structures porteuses d'énergie dans la zone intermittente. Cette modélisation ressemble beaucoup à celle de Patel et Scheuerer (1982) qui avait, sur un modèle $k-\varepsilon$, modifié ν_t en le divisant par γ. Ici, nous avons divisé en quelque sorte ν_t par γ^{1-m_0}.

11.2 Équation de transport pour γ

Pour que le modèle soit cohérent avec le modèle pour la diffusion précédent, l'équation de transport pour γ est modélisée de sorte qu'elle soit équivalente à l'équation plus générale (cf. paragraphe 8.3.3) lorsque $\gamma \to 0$:

$$\begin{aligned}\frac{D\,\gamma}{D\,t} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_g\,(1-\gamma)\,\frac{k}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\right) + C_g^{prod}P_k\,(1-\gamma)\,\frac{\gamma}{k} - C_g^{diss}\varepsilon\,(1-\gamma)\,\frac{\gamma}{k} \\ &\quad + C_g^2\,\frac{k}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\end{aligned} \tag{11.6}$$

Pour que k soit équivalent à γ lorsque $\gamma \to 0$, il est nécessaire que :

$$C_g = D_{kk} \tag{11.7}$$

11.3 Modèle pour l'équation de transport de la dissipation

De manière similaire à la diffusion turbulente, l'équation pour la dissipation (10.10) est simplifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} &= C_{\varepsilon 1}P_k\frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon k}\overline{u'_k u'_l}\gamma^{m_0-1}\frac{\varepsilon}{k}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) \\ &\quad + C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon^2}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l} + C_{\varepsilon k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l} + C_{kk}^{\varepsilon}\frac{\overline{u'_k u'_l}}{k}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\partial k}{\partial x_l} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\gamma}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\gamma}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\right) + C_{\varepsilon\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon\gamma}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l} + C_{\gamma k}^{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\overline{u'_k u'_l}}{\gamma}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l} \\ &\quad + C_{\gamma\gamma}^{\varepsilon}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\gamma^2}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\end{aligned} \tag{11.8}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} D_{\varepsilon\gamma} = -D_{\varepsilon\varepsilon} - D_{\varepsilon k} + \beta \\ C_{\varepsilon\gamma} = -2C_{\varepsilon\varepsilon} - C_{\varepsilon k} + \alpha \\ C_{\gamma k}^{\varepsilon} = -C_{kk}^{\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon} - \alpha \\ C_{\gamma\gamma}^{\varepsilon} = 0 \\ \beta = C_g \\ \alpha = -D_{\varepsilon\varepsilon} - (D_{\varepsilon\varepsilon} + C_{\varepsilon\varepsilon})\left(m - 1/\alpha_k^0\right) \end{array}\right. \tag{11.9}$$

Puisque le modèle simplifié pour D_{ij} et pour l'équation de transport de γ assurent que $k/\gamma \simeq C^{te}$ et $\widetilde{k} \simeq C^{te}$, le modèle ci-dessus est équivalent au modèle (10.10) lorsque $\gamma \to 0$. Il s'agit d'une approximation au premier ordre du modèle complet lorsque $\gamma \ll 1$. Les contraintes sur le comportement de τ et l établies au paragraphe 10.3 sont par conséquent toujours satisfaites. La modélisation de l'équation d'échelle avec effet d'intermittence de frontière apporte donc toujours les mêmes avantages (cf. paragraphe 10.4) :

1. amélioration du comportement du modèle RSM au voisinage d'une frontière libre,
2. le raccord à la frontière libre est piloté par l'intermittence de frontière,
3. en conséquence, le comportement du modèle à la frontière libre est découplé de son comportement dans un région pleinement turbulente, cette caractéristique nous permettant de satisfaire toutes les contraintes que nous nous sommes imposé.

11.4 Généricité du modèle

La généricité est toujours assurée pour le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\frac{D\,\Phi}{D\,t} &= \frac{\Phi}{k}\left(C_{\Phi 1}P_k - C_{\Phi 2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi\Phi}\frac{k}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi k}\frac{\Phi}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) \\ &+C_{\Phi\Phi}\frac{k}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} + C_{\Phi k}\frac{1}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} + C^{\Phi}_{kk}\frac{\Phi}{k\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l} \\ &+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Phi\gamma}\frac{k\Phi}{\varepsilon\gamma^{2-m_0}}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\right) + C_{\Phi\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\frac{k}{\varepsilon\gamma^{2-m_0}}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} + C^{\Phi}_{\gamma k}\frac{\Phi}{\varepsilon\gamma^{2-m_0}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\end{aligned} \tag{11.10}$$

où les constantes pour la variable transportée $\Phi = k^m\varepsilon^n$ sont reliées à celles définies précédemment pour ε :

$$D_{\Phi\gamma} = n\,D_{\varepsilon\gamma} \tag{11.11a}$$
$$C_{\Phi\gamma} = C_{\varepsilon\gamma} + (1-n)\,D_{\varepsilon\gamma} \tag{11.11b}$$
$$C^{\Phi}_{\gamma k} = n\,C^{\varepsilon}_{\gamma k} - m\,(C_{\varepsilon\gamma} + D_{\varepsilon\gamma}) \tag{11.11c}$$

permettant, avec les relations (3.9), d'assurer la généricité du modèle pour l'équation d'échelle.

11.5 Comportement à la frontière libre des variables transportées standards

La prise en compte de l'effet d'intermittence de frontière dans les fermetures en un point modifie le comportement de φ, τ ,.... à la frontière libre. Reprenons alors ce qui été fait au paragraphe 5.2 et adaptons le à la nouvelle définition de la viscosité équivalente : $\nu_t^{eq} = k^2\gamma^{m_0-1}/\varepsilon$. Pour une solution en puissance $k \propto \lambda^{\alpha_k}$ au voisinage de la frontière libre, on a $\Phi = k^m\varepsilon^n \propto \lambda^{\alpha_\Phi}$ avec :

$$\alpha_\Phi = \alpha_k\,[m + n\,(1+m_0)] - n \tag{11.12}$$

Pour $m_0 = 2/3$, le comportement de α_Φ en fonction de α_k symbolisant le comportement de Φ à la frontière libre, est présenté sur la figure 11.2. L'échelle kL apparaît là encore comme la seule grandeur présentée qui assure $\alpha_\Phi \geq 1$, c'est à dire telle que sa dérivée tend vers zéro à la frontière libre, quel que soit $\alpha_k \geq 0$.

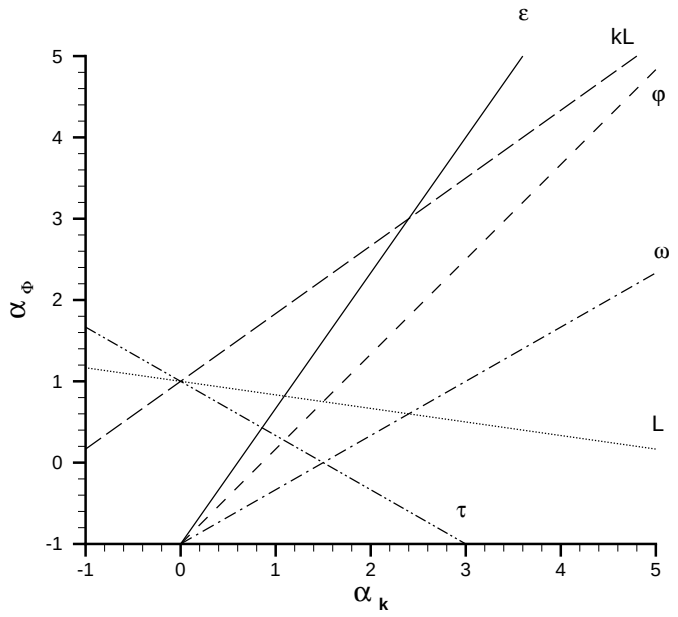


FIG. 11.2 – Comportement de quelques grandeurs au voisinage de la frontière libre

11.6 Comportements physiques du modèle et calage de certaines constantes

Pour cette modélisation, le comportement de $\overline{u'v'}$ à la frontière n'est plus aussi réaliste que pour le modèle complet car $\overline{u'v'} \sim k \sim \gamma$ alors que l'on devrait avoir $\overline{u'v'} \ll k$. Néanmoins, la performance du modèle est surtout liée à la modélisation de l'équation d'échelle, soit en particulier pour la dissipation ε. Et nous avons vu que le modèle simplifié se comportait de la même façon que le modèle complet développé au chapitre précédent au voisinage de la frontière libre et offrait par conséquent toujours les mêmes avantages (cf. paragraphe 11.3).

Certaines des constantes du modèle sont fixées par rapport à des DNS (cf. paragraphe 9.4) et des expériences :

1. comme le montre la figure 9.7, la grandeur $-\overline{v'k'}/\left(k\overline{v'^2}\gamma^{m-1}/\varepsilon\frac{\partial k}{\partial y}\right)$ est approximativement constante dans tout la couche limite pour $m_0 = 2/3$. La valeur $m_0 = 2/3$ semble ainsi donner un bon accord entre le modèle pour la diffusion (11.5) et les DNS de Spalart.
2. Pour satisfaire les contraintes (cf. paragraphe 10.3) sur le comportement à la frontière libre de l et τ, il faut que $\alpha_k^0 \in]1/m_0, 1/(m_0 - 1/2)[$ c'est à dire $\alpha_k^0 \in]1,5\,;\,6[$ pour $m_0 = 2/3$. Une valeur $\alpha_k^0 \sim 4$ correspond approximativement à la puissance de raccord de k calculée sur la DNS de Spalart (1988) à $R_\theta = 1410$. Les DNS de Rogers et Moser (1994) semblent elles aussi donner une puissance de raccord de l'ordre de quatre. Mais puisque le bilan de l'équation de transport de k présente des résidus très élevés dans la zone proche de la frontière libre, il est difficile de fixer une fois pour toute la valeur de α_k^0 à partir de ces DNS. Tout au plus, les DNS de Spalart et Rogers déterminent un ordre de grandeur situant α_k^0 dans l'intervalle]3 ;6[.
3. le choix est fait de prendre $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ car c'est une valeur standard et qui semble donner les meilleurs

résultats en jet plan, notamment dans la zone avoisinant le centre du jet (là où les dérivées sont nulles et où les équations de transport se réduisent à un équilibre entre dissipation, diffusion et advection) .

En résumé, les constantes suivantes sont fixées :

$$m_0 = 2/3 \ , \ C_g = D_{kk} \ , \ C_{\varepsilon 2} = 1,92 \tag{11.13}$$

et la constante α_k^0 n'est pas fixée mais devrait se trouver dans l'intervalle]3 ;6[.

11.7 Implantation du modèle dans un code de calcul

Les écoulements à frontière libre nécessitent une condition limite à la frontière du domaine correspondant dans l'écoulement externe. Cette condition limite k_∞ sur l'énergie cinétique turbulente par exemple ne peut être une valeur nulle pour des raisons numériques évidentes (présence de terme dont le dénominateur tend vers zéro lorsque $k \to 0$).

Qu'en est-il de la condition limite appliquée à γ ? Par définition de γ, la condition limite devrait être une condition de nullité à la frontière extérieure du domaine. Mais la modélisation adoptée fait apparaître γ au dénominateur dans les termes de diffusion par exemple. Ainsi, comme pour k, la condition limite ne peut être une condition de nullité. Pour cela, on choisit de prendre une condition limite non nulle du type :

$$\gamma_\infty = \frac{k_\infty}{\max(k)} \tag{11.14}$$

Cette condition limite ne modifie pas le comportement du modèle à la frontière libre car ce comportement est dicté par le développement asymptotique au premier ordre (cf. chapitre 4) pour :

$$1 \gg \frac{k_\infty}{\max(k)} \gg \frac{k_\infty}{\max(k)}$$
$$1 \gg \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\max(k)} \gg \frac{\overline{u_i' u_j'}_\infty}{\max(k)}$$

L'erreur commise est donc d'autant plus faible que le taux de turbulence extérieur est faible.

Chapitre 12

Conclusion sur le modèle développé

Dans une région intermittente, les fermetures deviennent obsolètes car l'écoulement n'est pas pleinement turbulent. Pour prendre en compte l'effet de l'intermittence de frontière et résoudre ce problème de fermeture, il est nécessaire de distinguer les parties turbulentes et non-turbulentes des corrélations inconnues et donc de faire appel à des moyennes conditionnelles. Une fermeture est alors nécessaire pour chacune des parties turbulentes et non-turbulentes. L'approche retenue a été :
- de négliger les corrélations non-turbulentes (i.e. exprimées en terme de moyenne conditionnelle non-turbulente) d'ordres supérieurs ou égales à deux
- de fermer les corrélations turbulentes à l'aide des fermetures classiques.
Cette approche originale se situe en quelque sorte à mi chemin entre le modèle de Cho et Chung (1992) et les modèles RSM de Byggstoyl et Kollmann (1981, 1986a,b).

Un modèle aux tensions de Reynolds avec effet d'intermittence a été dérivé de l'approche décrite ci-dessus. Ce modèle a été construit dans l'objectif de pouvoir combiner le comportement à la frontière libre avec les contraintes concernant la couche limite. La prise en compte de l'intermittence de frontière dans l'équation d'échelle permet au raccord à la frontière libre d'être entièrement piloté par l'intermittence de frontière. De ce fait, le comportement du modèle dans une région turbulente est découplé de son comportement au voisinage d'une frontière libre et toutes les contraintes peuvent être satisfaites par le modèle. L'impact de l'intermittence de frontière dans les équations pour les tensions de Reynolds est plus limité et n'apparaît que dans le terme de diffusion pour lequel le temps caractéristique de la turbulence $\tau \propto k/\varepsilon$ a été modifié en $\tau \propto k\gamma^{m_0-1}/\varepsilon$.

Ainsi, c'est encore une fois sur l'équation d'échelle que portent les principales modifications. C'est en effet le calcul de l'échelle caractéristique des grosses structures qui conditionne en grande partie le comportement physique ou non du modèle. On cherche ici à prendre en compte le caractère intermittent de la frontière libre et, dans le même temps, la physique des couches limites soumises à un gradient de pression.

Quatrième partie

QUALIFICATION DU MODÈLE AVEC FONCTION D'INTERMITTENCE

Rappelons que le modèle pour les équations aux tensions de Reynolds choisi est toujours constitué du modèle SSG pour les termes de redistribution et de dissipation. Le modèle simplifié avec fonction d'intermittence, construit au chapitre 11, pour le terme de diffusion D_{ij}, l'équation de transport de γ et l'équation d'échelle sera désigné par le nom $SSG - \gamma$. La grandeur transportée $\Phi = k^m \varepsilon^n$ dans l'équation d'échelle n'est pas encore définie. La généricité du modèle nous laisse en effet le choix entre plusieurs grandeurs.

Les constantes du modèle pour l'équation d'échelle (11.10) sont définies de sorte que les contraintes sur la loi logarithmique aux ordres zéro et un ainsi que la contrainte sur la loi en racine soient satisfaites (cf. paragraphe 3.4).

Ce modèle est tout d'abord calibré sur les écoulements cisaillés libres ainsi que sur la partie externe (zone de sillage) de la couche limite.

Chapitre 13

Qualification du modèle sur les écoulements vérifiant les hypothèses de similitude

13.1 Écoulements étudiés

Les écoulements considérés sont les jets plans et jets ronds (figure 13.1), la couche de mélange (figure 13.2), le sillage (figure 13.3) et la partie externe de la couche limite. L'intérêt d'étudier le comportement des modèles de turbulence sur de tels écoulements est multiple. Tout d'abord, ce type d'écoulements incompressibles de couche mince est très souvent rencontré en écoulement turbulent à Reynolds élevé, notamment en aérodynamique externe. Ces écoulements bidimensionnels peuvent être calculés via des codes Navier-Stokes ou paraboliques mais ils présentent l'intérêt de vérifier les hypothèses de similitude. Les équations de transport d'un modèle de turbulence peuvent ainsi être résolues, en variable de similitude, sous une forme monodimensionnelle et pour un temps de calcul très faible. Cet aspect est très pratique pour tester les modèles de turbulence et réaliser facilement des convergences en maillage. Ensuite, les divers écoulements testés présentent tous une frontière intermittente et constituent donc une base de calibration pour notre modèle $SSG - \gamma$. Enfin, l'absence de paroi permet de s'affranchir du problème de la modélisation de l'effet de paroi. On peut ainsi travailler de manière découplée pour définir au mieux un modèle de turbulence en dehors des effets de paroi.

13.1.1 Similitude des écoulements étudiés

Les divers écoulements testés relèvent tous de l'approximation de couche mince ($\delta \ll L$). Ils sont de plus bidimensionnels et stationnaires en moyenne. Les équations du mouvement se simplifient alors, en première approximation, selon les équations de Prandtl :

$$\begin{aligned} U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \tag{13.1}$$

$$W(\eta) = \frac{U}{U_S}$$

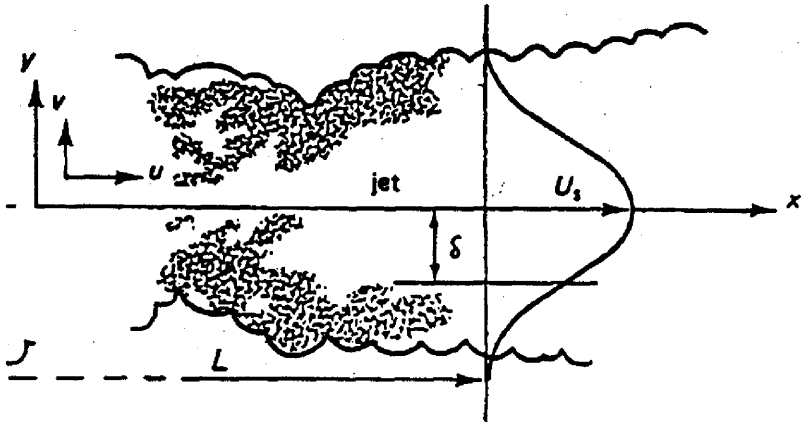


FIG. 13.1 – Jet plan ou jet axisymétrique

$$W(\eta) = \frac{U - U_2}{\Delta U}$$
$$\Delta U = U_1 - U_2 = U_s$$

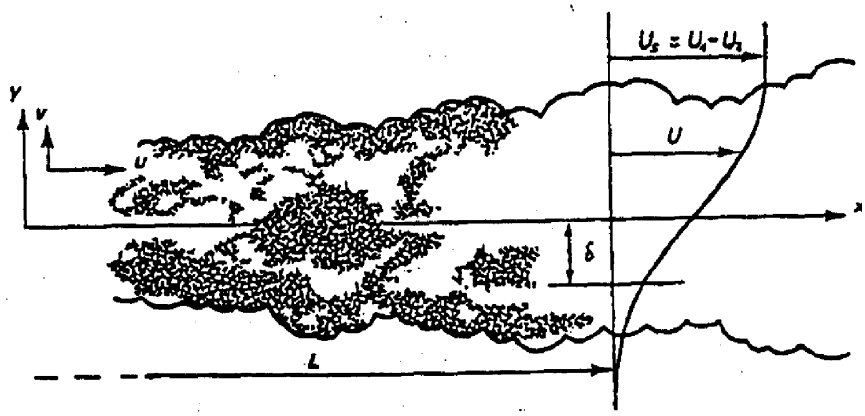


FIG. 13.2 – Couche de mélange

$$W(\eta) = \frac{U_0 - U}{U_s}$$

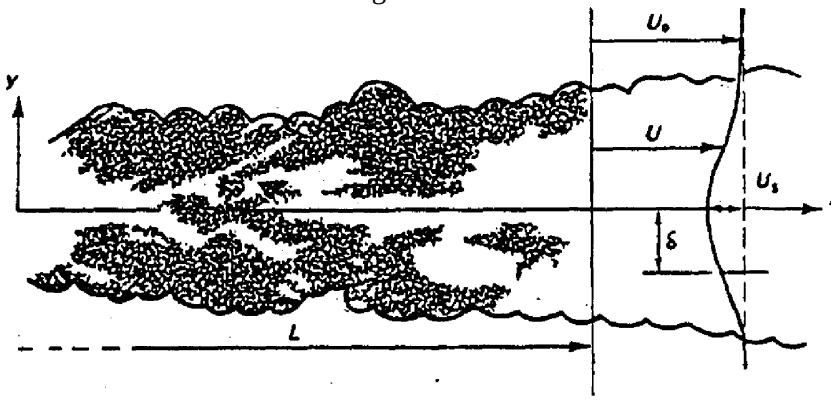


FIG. 13.3 – Sillage

et les équations aux tensions de Reynolds sont approchées, pour le modèle de diffusion de Daly et Harlow (1970), par :

$$U\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x}+V\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial y} \quad = \quad P_{ij}+\Pi_{ij}-\varepsilon_{ij}+D_{kk}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\overline{v'^2}}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial y}\right) \tag{13.2}$$

Par ailleurs, les écoulements cisaillés libres et la zone externe de la couche limite sont des écoulements qui, suffisamment loin de leur origine, prennent une forme d'auto-similitude à la fois sur la vitesse, les tensions de Reynolds $\overline{u_i'u_j'}$ et ε. Cela signifie que ces grandeurs, lorsqu'elles sont adimensionnées d'une certaine façon, ne dépendent plus séparément de x et y mais du seul rapport :

$$\eta=\frac{y}{\delta(x)} \tag{13.3}$$

où $\delta(x)$ représente une échelle de longueur transversale. La variable η est alors appelée variable de similitude. Les paragraphes suivants examinent la notion de similitude pour chacun des écoulements étudiés.

Jets plans et axisymétriques

La figure 13.1 présente un jet plan ou un jet axisymétrique. La vitesse au centre du jet est notée par U_S et l'échelle transversale de vitesse est toujours désignée par $\delta(x)$. L'hypothèse de similitude sur la vitesse et les tensions de Reynolds est vérifiée lorsque U/U_S et $\overline{u_i'u_j'}/U_S^2$ ne dépendent plus que de la seule variable η définie en (13.3). Dans le cas du jet plan, la similitude est obtenue pour :

$$\delta(x)=A\,x \quad \text{et} \quad U_S(x)=\frac{B}{\sqrt{x}} \tag{13.4}$$

où A et B sont deux constantes. Pour ce qui concerne le jet axisymétrique, la similitude est obtenue pour :

$$\delta(x)=A\,x \quad \text{et} \quad U_S(x)=\frac{B}{x} \tag{13.5}$$

Couches de mélange

La figure 13.2 présente schématiquement une couche de mélange. La vitesse de l'écoulement le plus rapide est notée U_1 est celle du plus lent U_2. La différence de vitesse entre les deux écoulements est notée $\Delta U = U_1 - U_2$. Les conditions de similitude sur les vitesse et les tensions de Reynolds en couche de mélange sont vérifiées lorsque :

$$\left(U-U_2\right)/\Delta U \quad \text{et} \quad \overline{u_i'u_j'}/\Delta U^2 \tag{13.6}$$

ne dépendent plus que de η. Il faut pour cela que U_1 et U_2 soient des constantes et que :

$$\delta(x)=x \tag{13.7}$$

Sillages

La figure 13.3 définit les notations utilisées pour le sillage. La vitesse U_0 représente la vitesse extérieure au sillage et U_S le déficit de vitesse au centre de sillage. Nous ne considérerons ici que des sillages sans gradient de pression. La similitude sur la vitesse et les tensions de Reynolds est obtenue pour l'adimensionnement :

$$(U_0 - U)/U_S \quad \text{et} \quad \overline{u_i' u_j'}/U_S^2 \tag{13.8}$$

La similitude est vérifiée lorsque :

$$\delta(x) = \sqrt{\theta x} \quad \text{et} \quad U_S(x) = Q\, U_0 \sqrt{\theta} x \tag{13.9}$$

où θ est l'épaisseur de quantité de mouvement définie en sillage par :

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U}{U_0}\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy \tag{13.10}$$

Cette dernière est constante dans un sillage lorsque le gradient de pression longitudinal $\frac{\partial P}{\partial x}$ est nul. La grandeur Q est définie par :

$$Q = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{U_0 - U}{U_S} d\eta} \tag{13.11}$$

avec $\eta = y/\delta$.

Couches limites

Soient les définitions ci-dessous :

$$\begin{aligned} u_\tau &= \sqrt{\tau_p/\rho} \text{ vitesse de frottement} \\ \Delta &= \frac{\delta_1}{\sqrt{C_f/2}} \text{ épaisseur de Clauser} \\ \beta &= \frac{\delta_1}{\tau_p}\frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta}{u_\tau}\frac{du_e}{dx} \text{ paramètre de gradient de pression} \end{aligned} \tag{13.12}$$

L'hypothèse d'auto-similitude de la couche limite est vérifiée, en ce qui concerne la vitesse, lorsque $\frac{U_e - U}{u_\tau}$ ne dépend plus que de $\eta = y/\Delta$:

$$\frac{U_e - U}{u_\tau} = W(\eta) \tag{13.13}$$

On parle aussi, lorsque cette hypothèse d'auto-similitude est vérifiée, de couches limites d'équilibre. Pour que cela se réalise, il est nécessaire que le paramètre de gradient de pression β soit constant. Remarquons que la variable de similitude η est définie à partir de l'épaisseur de Clauser Δ plutôt qu'à partir de l'épaisseur de la couche limite δ. La similitude sur la vitesse, définie en (13.13), est en effet mieux établie pour cette définition de η.

13.1.2 Équations de transport écrites en variable de similitude

Les équations de transport d'un modèle de turbulence se réduisent alors à des équations mono-dimensionnelles fonction de la variable de similitude η (cf. Paullay et al. (1985) et Bézard (2000)). Ces équations de transport peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$-A\varphi - B\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{\eta^j}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^j C\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + S \tag{13.14}$$

où φ est la vitesse adimensionnée ou bien une grandeur turbulente adimensionnée. Les variables adimensionnées ainsi que les coefficients pour les divers écoulements de similitude sont présentés dans les deux tableaux récapitulatifs 13.1 et 13.2. La grandeur F est définie par $F = \int_0^\eta \eta^j W d\eta$ et $F_\infty = \lim_{\eta\to\infty} F$. Notons que la

	W	$\overline{u_i'u_j'}$	ε
Couche de Mélange	$\frac{U-U_2}{U_1-U_2}$	$\frac{\overline{u_i'u_j'}}{(U_1-U_2)^2}$	$\frac{\varepsilon\delta}{(U_1-U_2)^3}$
Jets	$\frac{U}{U_S}$	$\frac{\overline{u_i'u_j'}}{U_S^2}$	$\frac{\varepsilon\delta}{U_S^3}$
Sillage	$\frac{U_\infty-U}{U_S}$	$\frac{\overline{u_i'u_j'}}{U_S^2}$	$\frac{\varepsilon\delta}{U_S^3}$
Couche limite	$\frac{U_e-U}{u_\tau}$	$\frac{\overline{u_i'u_j'}}{u_\tau^2}$	$\frac{\varepsilon\Delta}{u_\tau^3}$

TAB. 13.1 – Adimensionnement

	A			B
	W	$\overline{u_i'u_j'}$	ε	Tous
Couche de Mélange	0	0	$\frac{U_2}{U_1-U_2}+W$	$\eta\frac{U_2}{U_1-U_2}+F$
Jets	$\frac{W}{2}$	W	$\frac{5\,W}{2}$	$\frac{F}{2}$
Sillage	F_∞	$2\,F_\infty$	$4\,F_\infty$	ηF_∞
Couche limite	$2\,\beta$	$2\,\beta$	$1+6\,\beta$	$(1+2\,\beta)\,\eta$

TAB. 13.2 – Valeurs de A et B

puissance j apparaissant dans l'équation (13.14) est égale à zéro pour tous les écoulements cités excepté le jet axisymétrique pour lequel $j = 1$.

13.2 Calibration du modèle

Un code de calcul 1D écrit en variable de similitude, nommé SIMIL, a été développé à l'ONERA par Bézard (2000). Nous avons implanté le modèle $SSG - \gamma$ dans ce code de calcul afin de l'optimiser pour reproduire les écoulements cisaillés libres présentés précédemment. La couche limite avec et sans gradient de pression adverse est également intégrée dans le processus de calibration.

13.2.1 Méthode de calibration : étude paramétrique

Plusieurs types d'optimisation existent. Le plus connu est le processus d'optimisation par gradient. Mais il reste très limité dans le sens où il n'est capable de fournir qu'un minimum local et que ce minimum peut s'avérer difficile à trouver si trop de constantes (>2) sont utilisées pour l'optimisation, ou bien si l'optimisation est faite sur un trop grand nombre d'écoulements. C'est pourquoi il est tout aussi préférable, dans notre cas, de procéder à une étude paramétrique sur les constantes encore libres du modèle. Notons qu'il serait intéressant d'envisager un processus d'optimisation par algorithme génétique au vu du grand nombre de constantes à optimiser ainsi que du nombre conséquent d'écoulements sur lesquels l'optimisation pourrait être faite.

Le critère d'optimisation doit être défini. Dans un premier temps, il est nécessaire de définir quels sont les écoulements qui présentent le plus d'intérêt, l'optimisation étant pondérée en conséquence. Le sillage est d'intérêt moindre du fait que les conditions de similitude sont rarement satisfaites (seulement valables en sillage lointain) et le jet rond n'est pas non plus intégré dans le processus d'optimisation du fait de l'anomalie jet plan / jet rond qui risquerait de "brouiller" l'optimisation. On se restreint donc aux écoulements libres de couches de mélange et de jet plan, sans oublier la couche limite. La couche de mélange et la couche limite étant des écoulement fréquemment rencontrés, elles resteront prioritaires vis à vis du jet plan.
Dans un second temps, le critère d'optimisation doit être défini en tant que tel. L'objectif étant de reproduire au mieux le taux d'ouverture pour la couche de mélange tout comme pour le jet plan, c'est donc sur ce critère que l'on se base pour ces deux écoulements. Un second critère sera également envisagé : l'écart maximum entre les profils (de vitesse ou de $\overline{u'v'}$) issus de la simulation et les profils expérimentaux. L'idéal serait évidemment que les minimums trouvés soient identiques pour chacun de ces deux critères. En ce qui concerne la couche limite, le critère d'optimisation est basé sur l'écart maximum entre les profils de vitesse expérimentaux et ceux issus du code de calcul pour différents β. Mais il s'avère que les cas à gradients de pression adverses élevés (en l'occurrence le cas à $\beta = 20$) sont dimensionnants. L'optimisation est également basée, pour un gradient de pression nul, sur l'écart entre le facteur d'intermittence γ donné par la loi empirique de Klebanoff (1954) et celui calculé par le modèle $SSG - \gamma$.

Plusieurs constantes du modèle sont fixées (cf. chapitre 11) :

$$m_0 = 2/3 \ , \ D_{kk} = C_g \ , \ C_{\varepsilon 2} = 1,92 \tag{13.15}$$

et $\alpha_k^0 \in]3;6[$. Pour bon nombre de modèles, les valeurs $C_g^{prod} = 1,6$ et $C_g^{diss} = 0,05$ nous ont semblé représenter de manière optimale la contribution de la production et de la dissipation dans le transport de γ. En d'autres termes, les valeurs $C_g^{prod} = 1,6$ et $C_g^{diss} = 0,05$ ajustent correctement la répartition entre la région avec intermittence de frontière ($\gamma \neq 1$) et la région pleinement turbulente ($\gamma = 1$). L'étude paramétrique porte alors sur un nombre restreint de constantes : $C_{\varepsilon 1}$, $D_{\varepsilon\varepsilon}$, $D_{\varepsilon k}$, α_k^0 et C_g^2.

13.2.2 Choix de la grandeur transportée dans l'équation d'échelle

Le choix de la grandeur transportée dans l'équation d'échelle ne modifie en rien la solution numérique obtenue du fait de la généricité du modèle $SSG-\gamma$, pourvu que cette grandeur soit choisie afin que le code de calcul aboutisse à une solution convergée. L'optimum obtenu par l'étude paramétrique est donc le même quel que soit la grandeur transportée. Plusieurs grandeurs transportées sont possibles grâce au caractère générique du modèle pour l'équation d'échelle. Le choix d'une grandeur plutôt qu'une autre est principalement dicté par son comportement au voisinage d'une paroi ou d'une frontière libre. Les variables ε, ω, kL et φ nous ont semblé les plus robustes au voisinage de la frontière libre d'un point de vue théorique d'après la figure 11.2. Cependant, la variable kL s'est avérée la plus robuste dans la pratique. Il a été impossible d'aboutir à une solution convergée avec ε par exemple. D'un point de vue théorique, la grandeur kL a un comportement à la frontière libre tel que sa dérivée reste toujours bornée à la frontière libre d'après le paragraphe 11.5. Étant donné que le terme source de l'équation de transport de kL est de l'ordre du terme de convection c'est à dire de la dérivée de kL, il tend vers zéro à la frontière libre. Ce n'est pas cas des grandeurs ε, ω et φ. Cette analyse confirme donc que le modèle est robuste d'un point de vue numérique pour la grandeur transportée kL. Cet aspect numérique est d'autant plus important que nous utilisons ici un code de similitude où la viscosité moléculaire a été supprimée. Ces considérations font que $\Psi = kL$ est la grandeur que nous avons choisie de transporter dans le code de similitude. Ce choix de la variable transportée par l'équation d'échelle ne tient pas compte des effets de paroi. Ces effets seront étudiés ultérieurement au chapitre 14.

13.2.3 Modèle calibré

Le processus d'optimisation sous contraintes (valeur de $C_{\varepsilon 1}$ et α_k^0 bornées par exemple) conduit à une valeur de D_{kk} et C_g de $0,3$ ainsi qu'à des valeurs élevées de $D_{\varepsilon\varepsilon}$ de l'ordre de $0,4$ afin d'avoir un bon accord en couche limite avec fort gradient de pression adverse. Le modèle optimisé est défini par les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} D_{kk} &= C_g = 0,3\ ,\ D_{\varepsilon\varepsilon} = 0,4\ ,\ D_{\varepsilon k} = 0,08\ ,\ C_{\varepsilon 1} = 1,4\ ,\ C_{\varepsilon 2} = 1,92 \\ m_0 &= 2/3\ ,\ \alpha_k^0 = 3,5\ ,\ C_g^{prod} = 1,6\ ,\ C_g^{diss} = 0,05\ ,\ C_g^2 = 0,1 \end{aligned} \tag{13.16}$$

L'ensemble de ces relations définit le modèle $SSG-\gamma$. La grandeur transportée par l'équation d'échelle est ici kL. L'équation d'échelle pour $\Psi = kL$ se déduit de l'équation pour ε par généricité (3.9,11.11) :

$$\begin{aligned} \frac{D\,\Psi}{D\,t} &= \frac{\Psi}{k}\left(C_{\Psi 1}P_k - C_{\Psi 2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Psi\Psi}\frac{k}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\Psi}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Psi k}\frac{\Psi}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) \\ &+ C_{\Psi\Psi}\frac{k}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\Psi}{\partial x_l} + C_{\Psi k}\frac{1}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\Psi}{\partial x_l} + C_{kk}^{\Psi}\frac{\Psi}{k\varepsilon\gamma^{1-m_0}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial k}{\partial x_l} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\Psi\gamma}\frac{k\Psi}{\varepsilon\gamma^{2-m_0}}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\right) + C_{\Psi\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\frac{k}{\varepsilon\gamma^{2-m_0}}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\Psi}{\partial x_l} + C_{\gamma k}^{\Psi}\frac{\Psi}{\varepsilon\gamma^{2-m_0}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l} \end{aligned} \tag{13.17}$$

avec :

$$\begin{aligned} &C_{\Psi 1} = 1,1\ ;\ C_{\Psi 2} = 0,58\ ;\ D_{\Psi\Psi} = 0,4\ ;\ D_{\Psi k} = -0,33\ \ C_{\Psi\Psi} = -0,6467\ \ C_{\Psi k} = 0,84\ ;\ C_{kk}^{\Psi} = -0,3417 \\ &D_{\Psi\gamma} = 0.18\ ;\ C_{\Psi\gamma} = 0,2559\ ;\ C_{\gamma k}^{\Psi} = -0,0723 \end{aligned}$$

13.3 Comportement du modèle optimisé $SSG-\gamma$ sur les écoulements cisaillés libres

Le modèle $SSG-\gamma$ défini précédemment sera comparé sur les écoulements libres (couche de mélange, sillage et jets) à des données expérimentales ainsi qu'au modèle SSG "standard" pour lequel :
- le modèle (2.42) pour les termes de redistribution et de dissipation est celui de Speziale et al. (1991),
- le modèle de diffusion est celui de Daly et Harlow (1970) avec $D_{kk}=0,22$,
- le modèle pour l'équation de transport de ε est donné ci-dessous :

$$\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} = 1,35P_k\frac{\varepsilon}{k}-1,8\frac{\varepsilon}{k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(0,15\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) \tag{13.18}$$

Cette version du modèle SSG (il y autant de modèle SSG que de modèle pour l'équation d'échelle associée) a été choisie comme point de comparaison car c'est ce modèle RSM qui a été retenu dans un premier temps dans le cadre du projet européen Flomania.

La convergence en maillage a été vérifiée (en passant de 200 à 1000 points de maillage) pour tous les écoulements testés. Les résultats présentés par la suite sont donnés pour environ 500 points de maillage car le résultat du calcul n'était pas modifié de façon perceptible au delà de ce nombre de points.

13.3.1 Couche de mélange

Taux d'évasement

Le taux d'évasement correspond à la dérivée selon x de l'épaisseur de vorticité δ_ω qui est définie comme la différence de vitesse $\Delta U=U_1-U_2$ entre les deux écoulements divisé par le cisaillement maximum :

$$\delta_\omega=\frac{U_1-U_2}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{max}} \tag{13.19}$$

Le taux d'évasement est approché par une loi empirique définie par Brown et Roshko (1974) :

$$\delta_\omega{}' = \frac{d\delta_\omega}{dx}\simeq C_w\frac{(1-r)\,(1+\sqrt{s})}{2\,(1+r\sqrt{s})} \tag{13.20}$$

$$\text{avec :}\qquad r=\frac{U_2}{U_1}\text{ et }s=\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

C_w est définie par Brown et Roshko comme une constante valant $0,181$ mais leur expérience semble biaisée et une valeur $C_w=0,135$ semble plus réaliste. La calibration du modèle a été faite pour partie sur cette loi empirique qui se réduit en incompressible à une expression plus simple :

$$\left(\delta_\omega{}'\right)_{th}=0,135\frac{\Delta U}{U_1+U_2}=0,135\frac{1}{2\frac{U_2}{\Delta U}+1} \tag{13.21}$$

Les résultats de calculs avec le code de calcul SIMIL pour le modèle optimisé $SSG-\gamma$ et le modèle SSG "standard" sont comparés à la loi empirique précédente dans le tableau ci-dessous et tracés sur la figure 13.5 :

$\frac{U_2}{\Delta U}$	$(\delta'_\omega)_{th}$	$(\delta'_\omega)_{SSG}$	$(\delta'_\omega)_{SSG-\gamma}$	$\frac{(\delta'_\omega)_{SSG-\gamma}}{(\delta'_\omega)_{th}} - 1$
0	0,135	0,113	0,120	-11 %
0,5	0,0675	0,666	0,0718	+7 %
1	0,045	0,0462	0,0435	-3 %
1,5	0,034	0,0354	0,0357	+5 %
2	0,027	0,0286	0,0297	+10%

On note que le modèle $SSG - \gamma$ approche à $\pm 10\%$ le taux d'évasement de la couche de mélange donné par la loi empirique. Le modèle SSG reste assez proche du modèle $SSG - \gamma$ comme le montre la figure 13.5.

Profils de vitesse, profils turbulents et facteur d'intermittence

Pour $U_2/\Delta U = 0$, le calcul est comparé aux données expérimentales de Patel (1973) pour lesquelles $U_1 \simeq 8\, m.s^{-1}$ et le nombre de Reynolds R_x basé sur la longueur de l'écoulement varie entre $5,02.10^5$ et $1,84.10^6$. Pour $U_2/\Delta U = 1,5$, le calcul est comparé aux données expérimentales de Bell et Mehta (1990). Cette expérience a été réalisée pour $U_1 = 15\, m.s^{-1}$ et $U_2 = 9\, m.s^{-1}$. Le facteur d'intermittence de frontière est comparé aux données expérimentales de Wygnanski et Fiedler (1970) pour lesquelles $U_1/U_2 = 28$ et $U_1 = 12\, m.s^{-1}$ soit un rapport $U_2/\Delta U$ d'environ $0,037$. Cette configuration se trouve donc proche de celle de Patel (1973).

Les profils de vitesse déficitaire W et de tension croisée $\overline{u'v'}$ sont donnés pour les configurations à $U_2/\Delta\, U = 0.$ et $1,5$ sur les figures 13.6, 13.7, 13.8 et 13.9. Il apparaît alors que le modèle $SSG - \gamma$ est en bon accord avec l'expérience pour $U_2/\Delta\, U = 1,5$. Dans le cas $U_2/\Delta\, U = 0$, on constate que l'expérience de Patel ne correspond par vraiment à $U_2 = 0$ (cf. figure 13.6) et la définition de $\eta = 0$ est différente entre l'expérience et le calcul avec SIMIL. Malgré ces différences entre calcul et expérience, on constate que le profil de $\overline{u'v'}$ est assez bien reproduit par le modèle $SSG - \gamma$ si le positionnement de $\eta = 0$ est ajusté pour coïncider avec celui de l'expérience.

La différence constatée sur les profils de vitesse et les profils turbulents entre calcul et expérience à $U_2/\Delta U = 0$ se répercute sur γ comme le montre une comparaison avec les mesures de Wygnanski et Fiedler (1970) sur la figure 13.10. Mais comme nous l'avons déjà constaté sur le profil de $\overline{u'v'}$, une partie de l'écart est due à un décalage sur le positionnement de $\eta = 0$ entre calcul et expérience. Si le positionnement de $\eta = 0$ est ajusté pour coïncider avec celui de l'expérience (cf. figure 13.10 de droite), le facteur d'intermittence reste malgré tout éloigné des valeurs expérimentales. On retrouve ici le fait que le modèle $SSG - \gamma$ produit un taux d'évasement à $U_2/\Delta U \simeq 0$ en deçà de la loi empirique (13.20).
L'évolution du facteur d'intermittence pour le modèle $SSG - \gamma$ pour différents paramètres $U_2/\Delta\, U$ est présenté sur la figure 13.11. Le profil de γ est tracé en fonction de la vitesse déficitaire W plutôt qu'en fonction de η afin de mieux évaluer les différences entre les plusieurs configurations de couche de mélange. Il apparaît que l'influence de $U_2/\Delta\, U$ sur le facteur d'intermittence est difficile à évaluer si ce n'est sur la dissymétrie de γ par rapport à W. Il semble néanmoins que lorsque $U_2 \to U_1$ la région intermittente soit plus étendue que lorsque $U_2 \to 0$.

13.3.2 Jet plan

Les résultats sont comparés avec l'expérience de Gutmark et Wygnanski (1976) pour laquelle la vitesse de sortie du jet est de $35\,m.s^{-1}$; l'ouverture de la fente est $d = 1,3cm$ soit un nombre de Reynolds basé sur la taille de la fente $R_d \simeq 30000$. L'écoulement devient auto-semblable à partir de $x/d = 10$ pour la vitesse et à partir de $x/d = 40$ en ce qui concerne les grandeurs k et $\overline{u'v'}$. Les profils expérimentaux sont donnés pour un rapport $x/d = 120$.

Profil de vitesse et profils turbulents

Les profils de $\overline{u'v'}$ ou de k (figures 13.13 et 13.14) issus du calcul sont en bon accord avec l'expérience de Gutmark et Wygnanski (1976). Par contre, un léger écart a été noté sur le profil de vitesse (figure 13.12). La frontière libre pour les profils turbulents correspond pourtant bien à un cisaillement nul c'est à dire à $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ (comme tout écoulement de couche limite) mais la vitesse ne tend pas vers zéro dans l'expérience contrairement au résultat du calcul numérique avec SIMIL. Cet écart est plutôt surprenant car, dans l'expérience de jet axisymétrique de Ninomiya et Kasagi (1993), la vitesse tend vers zéro à la frontière libre du jet. Le modèle de turbulence ne peut être incriminé puisque $\overline{u'v'}$ est bien reproduit par le modèle. S'agit-il alors d'une erreur de mesures ? L'écart est suffisamment important pour ne pas être attribué aux seules erreurs de mesures de fil chaud lorsque la vitesse devient faible. Il est probable que cela vienne plutôt d'un effet de confinement du jet plan dans l'expérience de Gutmark et Wygnanski (1976). En tout état de cause, l'écart entre les profils de vitesse issu du calcul et de l'expérience de Gutmark et Wygnanski (1976) reste dans l'intervalle des différentes mesures en jet plan (cf. figure 13.4) effectuées par Heskestad (1965) ou Bradbury (1965) pour ne citer qu'eux. Remarquons tout de même que le modèle $SSG - \gamma$ donne un profil de vitesse proche de mesures de Heskestad

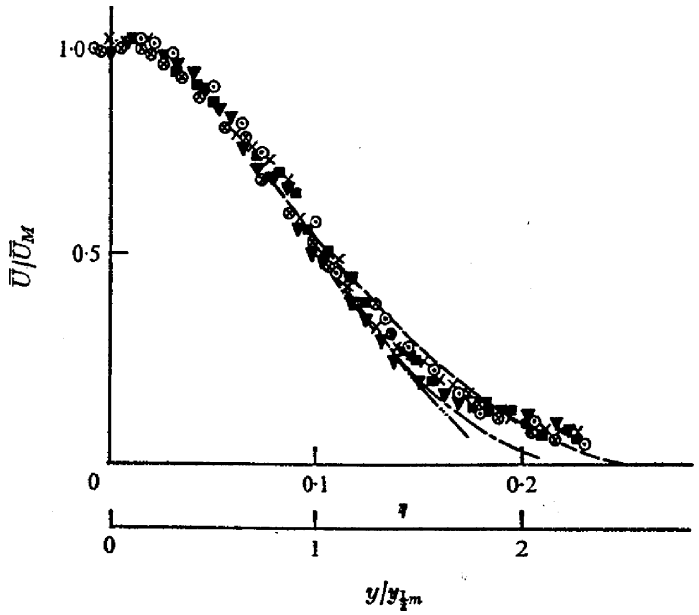


FIG. 13.4 – Comparaison entre les profils expérimentaux de vitesse de différentes expériences de jet plan
—— —— : Heskestad (1965) ; —— – —— : Bradbury (1965) ; ■ : Gutmark et Wygnanski (1976)

(1965).

Les modèles SSG et $SSG - \gamma$ donnent des résultats très proches que ce soit sur le profil de vitesse ou sur les tensions de Reynolds. En comparaison du modèle SSG, le modèle $SSG - \gamma$ apporte toutefois une légère amélioration sur les différents profils turbulents au voisinage de la frontière libre et prévoit un niveau d'énergie cinétique turbulente k au centre du jet plus proche des valeurs expérimentales de Gutmark et Wygnanski (1976).

La comparaison du facteur d'intermittence (figure 13.15) par rapport aux mesures de Gutmark et Wygnanski (1976) démontre que le modèle reproduit bien, en jet plan, la distribution de l'intermittence de frontière.

Taux d'ouverture

Le taux d'ouverture à 10% du jet est défini en variable de similitude par :

$$\delta' = \eta_{(W=0,1)} \tag{13.22}$$

Le taux d'ouverture à 10% donné par le calcul numérique pour les modèles SSG et $SSG - \gamma$ est comparé au taux d'ouverture de l'expérience de Gutmark et Wygnanski dans le tableau ci-dessous :

	Exp. Gutmark et Wygnanski	SSG	$SSG - \gamma$	erreur relative
$\delta'_{10\%}$	0,186	0,208	0,199	+7%

On note un léger écart avec la valeur expérimentale que ce soit pour le modèle $SSG - \gamma$ ou pour le modèle SSG. L'écart entre expérience et calcul provient bien évidemment de l'écart observé sur les profils de vitesse (figure 13.12). La valeur $\delta'_{(W=0,1)} \simeq 0,186$ de l'expérience de Gutmark et Wygnanski (1976) est donc peu représentative. Le modèle n'en est pas moins proche des valeurs expérimentales de Gutmark et Wygnanski (1976) pour $\overline{u'v'}$ et de Heskestad (1965) pour la vitesse.

13.3.3 Jet rond

Les résultats numériques obtenus avec le code de similitude sont comparés aux données expérimentales de Ninomiya et Kasagi (1993). Cette expérience a été réalisée à partir d'un jet de diamètre initial $d = 5mm$ et de nombre de Reynolds initial $R_d = 2566$. L'écoulement devient auto-semblable à partir de $x/d = 10$ pour la vitesse et à partir de $x/d = 40$ en ce qui concerne les grandeurs k et $\overline{u'v'}$.

Le jet rond (axisymétrique) est un écoulement souvent mal représenté par les modèles de turbulence. La plupart des modèles de turbulence présente en effet ce que l'on appelle communément une anomalie jet plan / jet rond : le modèle produit un taux d'ouverture en jet rond plus élevé que celui en jet plan alors que c'est le contraire qui se produit dans la réalité. Une explication de cette anomalie a été donnée par Pope (1978). Selon lui, le jet axisymétrique ne peut être calculé correctement par les modèles de turbulence classiques en raison d'un effet d'étirement tourbillonnaire spécifique au jet rond influant sur le processus de cascade d'énergie et donc sur les fermetures en un point. Pour résoudre cette difficulté, Pope (1978) introduit une correction dans l'équation de transport de la dissipation.
Bézard (2000) parvient tout de même à construire, par optimisation, un modèle à deux équations ne présentant

pas d'anomalie jet plan / jet rond en diminuant la valeur de la constante de diffusion σ_k. Il n'est donc pas forcément indispensable de faire appel à une correction comme celle de Pope pour résoudre l'anomalie jet plan / jet rond.

Modèle sans correction

Sans apporter de correction aux modèles, les résultats obtenus pour le modèle SSG classique sur la vitesse ou l'énergie cinétique turbulente (figure 13.16 et 13.17) sont assez proches des mesures de Ninomiya et Kasagi (1993). Les résultats pour le modèle $SSG-\gamma$ en jet axisymétrique restent quant à eux assez éloignés des données expérimentales de Ninomiya et Kasagi (1993). L'anomalie jet plan / jet rond n'apparaît pas pour ce modèle et c'est même l'effet inverse qui se produit puisque l'épaisseur du jet rond est trop faible. La prise en compte de l'effet d'intermittence de frontière sur les fermetures en un point a donc un effet très significatif en jet axisymétrique. L'optimisation du modèle $SSG-\gamma$ n'a pas tenu compte du jet rond et il n'est pas surprenant de ne pas bien reproduire cet écoulement compte tenu des problèmes d'anomalie jet plan / jet rond souvent constatés.

Modèle avec correction

Une correction de l'équation pour la dissipation a été développée par Pope (1978) pour un modèle $k-\varepsilon$. Cette correction revient à ajouter un terme supplémentaire au terme source S_ε dans l'équation pour la dissipation :

$$S_\varepsilon \rightarrow S_\varepsilon + C_{\varepsilon 3}\frac{k^2}{\varepsilon}S_{ij}R_{ik}R_{kj} \tag{13.23}$$

où $R_{ij}=\overline{u_i'u_j'}$ et $C_{\varepsilon 3}=0,79$. La grandeur $\frac{k^2}{\varepsilon^2}S_{ij}R_{ik}R_{kj}$ correspond à une mesure adimensionnelle de l'étirement tourbillonnaire. La correction a été adaptée pour le modèle avec effet d'intermittence de frontière :

$$S_\varepsilon \rightarrow S_\varepsilon + C_{\varepsilon 3}\frac{k^2}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}S_{ij}R_{ik}R_{kj} \tag{13.24}$$

Le fait que cette correction ne s'active qu'en écoulement axisymétrique et les bons résultats obtenus par Pope nous conduisent à l'intégrer dans l'équation d'échelle du modèle $SSG-\gamma$. Mais les résultats restent malgré cela encore médiocres. Nous avons donc décidé d'ajouter une correction similaire dans l'équation pour le facteur d'intermittence :

$$S_\gamma \rightarrow S_\gamma + (1-\gamma)\,\frac{\gamma}{\varepsilon}C_{\gamma 3}\frac{k^2}{\varepsilon\gamma^{1-m_0}}S_{ij}R_{ik}R_{kj} \tag{13.25}$$

Une étude paramétrique conduit aux constantes $C_{\gamma 3}=3$ et $C_{\varepsilon 3}=1,5$. Les résultats pour le modèle $SSG-\gamma$ avec correction et le modèle SSG classique sont présentés sur les figures 13.18, 13.19 et 13.20 en comparaison des données expérimentales de Wygnanski et Fiedler (1969). La correction permet d'améliorer très nettement tous les profils turbulents et de vitesse, mais améliore surtout la prévision du taux d'ouverture $\delta_{10\%}$ à 10% défini comme en jet plan comme égal . Le taux d'ouverture à 10% obtenu avec les modèles $SSG-\gamma$ avec correction, $SSG-\gamma$ sans correction et SSG classique est comparé au taux d'ouverture issu des valeurs expérimentales de Wygnanski et Fiedler (1969) :

	Exp. Ninomiya	SSG	$SSG-\gamma$	$SSG-\gamma$ avec correction	erreur relative
$\delta_{(W=0,1)}$	0,168	0,21	0,08	0,175	4%

Le facteur d'intermittence du modèle $SSG-\gamma$ avec correction est comparé aux données expérimentales de Wygnanski et Fiedler (1969) sur la figure 13.21. Le facteur γ calculé par le modèle est proche des valeurs expérimentales.

Ainsi, le taux d'ouverture et le facteur d'intermittence sont bien reproduits par le modèle ce qui valide le modèle et la correction (13.24,13.25) apportée aux équations de transport de γ et d'échelle. Pour éviter de recourir à des corrections comme celle de Pope (1978), il serait préférable au vu des résultats obtenus par Bézard (2000) d'intégrer le jet rond aux autres écoulements (couche de mélange, couche limite et jet plan) dans le processus d'optimisation. Mais une étude paramétrique ou un processus d'optimisation par gradient ne permettent pas de réaliser une optimisation sur un tel nombre d'écoulements.

13.3.4 Sillage

Les résultats numériques sont comparés avec les mesures de sillage réalisées par Marasli et al. (1991) pour un écoulement extérieur dont la vitesse est de $7\,m.s^{-1}$. Le nombre de Reynolds R_θ associé à cette vitesse est de 1027.

Les résultats pour les profils de vitesse et le profil de la tension croisée $\overline{u'v'}$ sont présentés sur les figures 13.22 et 13.23. Le modèle $SSG-\gamma$ semble apporter une amélioration sur ces deux profils en comparaison du modèle SSG "standard". Le raccord à la frontière libre du sillage est néanmoins plus abrupt pour le modèle $SSG-\gamma$ que pour l'expérience.

Mais, compte tenu des difficultés rencontrées pour calculer cet écoulement avec le modèle $SSG-\gamma$ dans SIMIL, les résultats présentés sur les figures 13.22 et 13.23 sont difficilement exploitables. Il nous a en effet semblé que le raccordement abrupt de la vitesse et des grandeurs turbulentes à la frontière libre bloquait l'évolution de la solution au cours du temps et ainsi altérait le résultat convergé du calcul numérique.

13.4 Comportement du modèle dans la région externe de la couche limite

Le code de similitude permet de calculer la région externe de la couche limite se situant entre la zone logarithmique (condition limite) et la frontière libre. Le modèle $SSG-\gamma$ a été calibré sur cette région de la couche limite pour divers gradients de pression adverse.

13.4.1 Couche limite sans gradient de pression ($\beta=0$)

Profils de vitesse et profils turbulents

Les résultats du calcul avec SIMIL sont comparés aux données expérimentales de Smith et Smits (1998) sur une plaque plane et par conséquent à $\beta=0$. Les mesures par fil chaud de la vitesse et des grandeurs turbulentes sont données à $R_\theta=13052$.

Les figures 13.24 et 13.25 donnent les profils de vitesse déficitaire et le profil de $\overline{u'v'}$ pour les modèles SSG et $SSG-\gamma$ et l'expérience de Smith et Smits (1998). Le modèle $SSG-\gamma$ est plus proche de l'expérience que ne l'est le modèle SSG. Les grandeurs turbulentes pour les deux modèles de turbulence au voisinage de $\eta = 0$ restent éloignées des valeurs expérimentales. Or, la condition limite en $\eta = 0$ se situe au niveau de la zone logarithmique et non au niveau de la paroi. La région entre la paroi et la zone logarithmique pour laquelle $y^+ \leq 100 \Leftrightarrow \eta = y/\Delta \leq 0,035$ ne peut donc pas être représentée correctement par les hypothèses de similitude, ce qui explique les écarts observés.

Facteur d'intermittence

Klebanoff a déterminé une fonction empirique représentant l'évolution du facteur d'intermittence dans l'épaisseur δ d'une couche limite turbulente à gradient de pression nul :

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \frac{1}{2}(1-\operatorname{erf}\xi) \\ \text{avec :}\quad \xi &= \left(\sqrt{2}\frac{\sigma}{\delta}\right)^{-1}\left[\frac{y-\overline{Y}}{\delta}\right] \end{aligned} \tag{13.26}$$

où, selon Klebanoff (1954), $\overline{Y}/\delta = 0,78$ et $\sigma/\delta = 0,14$. D'autres mesures du facteur d'intermittence dans une couche limite de plaque plane donnent des valeurs très proches, notamment pour σ/δ. Seul Hedley et Keffer (1974) trouvent une valeur assez éloignée : $\sigma/\delta = 0,24$. Cependant, dans leur expérience, la couche limite n'est pas dans un état d'équilibre. Cette valeur est donc à proscrire et il semble que les valeurs données par Klebanoff soient assez précises.

La figure 13.26 donne l'évolution du facteur d'intermittence γ en fonction de y/δ pour le modèle $SSG-\gamma$ et la fonction empirique de Klebanoff (13.26). Il apparaît alors que, malgré les différents critères d'optimisation, le modèle soit en très bon accord avec cette loi empirique. Rappelons que le bon accord avec la loi de Klebanoff fait partie de nos critères d'optimisation.

13.4.2 Couche limite avec gradient de pression adverse modéré ($\beta \simeq 5$)

Bradshaw et al. (1967) ont réalisé une expérience de couche limite soumise à un gradient de pression adverse modéré. Les données expérimentales présentées ici sont issues de cette expérience et se situent à $\beta \simeq 5$.

La figure 13.27 présente le profil de vitesse déficitaire pour les modèles SSG et $SSG-\gamma$ en comparaison du profil issu de l'expérience de Bradshaw. Le modèle $SSG-\gamma$ apporte une amélioration par rapport au modèle SSG lorsque $\eta \to 0$. Or, la zone à $\eta \ll 1$ contient la zone logarithmique et le fait que le modèle SSG se comporte de telle sorte que la dérivée de la vitesse $\frac{\partial U}{\partial y}$ change de signe lorsque $\eta \to 0$ indique que la loi logarithmique n'est pas satisfaite pour ce modèle. La figure 13.28 montre en effet que la loi logarithmique n'est pas satisfaite pour le modèle SSG mais l'est pour le modèle $SSG-\gamma$.

13.4.3 Couche limite avec gradient de pression adverse élevé ($\beta = 20$)

Pour vérifier que la loi logarithmique et surtout la loi en racine sont bien reproduites pour des gradients de pression adverses élevés, plaçons nous dans la configuration à gradient de pression adverse élevé de Skåre et

Krogstad (1994). Cette dernière présente en effet une loi en racine (cf. figure 3.3). Les données expérimentales de Skåre et Krogstad (1994) présentées en guise de comparaison se situent à $\beta = 20$ c'est à dire dans une configuration proche du décollement.

Les profils de vitesse, d'énergie cinétique turbulente, de tension croisée et de dissipation sont donnés sur les figures 13.29, 13.30, 13.31 et 13.32. L'amélioration apportée par le modèle $SSG - \gamma$ par rapport au modèle SSG est significative, notamment en ce qui concerne le profil de vitesse au voisinage de $\eta = 0$.

Les figures 13.33 et 13.34 montrent que les lois logarithmique et en racine sont bien reproduites par le modèle $SSG - \gamma$ dans cette configuration proche du décollement. Les contraintes (paragraphe 3.4) que nous nous sommes imposé ont donc bien l'effet escompté. L'intérêt de satisfaire les contraintes sur la couche limite apparaît le plus clairement sur le profil de vitesse (figure 13.29) au voisinage de $\eta = 0$ c'est à dire au niveau de la zone logarithmique.

La figure 13.35 présente le facteur d'intermittence γ obtenu avec le modèle $SSG - \gamma$ dans la couche limite avec gradient de pression adverse de Skåre et Krogstad ($\beta = 20$) et dans une couche limite sans gradient de pression ($\beta = 0$). Il apparaît que le profil de γ n'est pas significativement perturbé par le gradient de pression adverse. Cette caractéristique de notre modèle est en accord avec les observations de Nagano et al. (1998) qui ne constatent pas de changement notable sur γ entre les cas avec et sans gradient de pression (pour p^+ allant de zéro à $3,08\,10^2$ et β allant de 0 à $5,32$). Par contre, à la différence du modèle $SSG - \gamma$, Fiedler et Head (1966) constatent que la déviation standard σ/δ, définissant la fonction de Klebanoff en (13.26), se réduit avec l'augmentation du gradient de pression.

Le code de similitude nous a permis de vérifier que le modèle satisfaisait bien les comportements physiques que nous nous sommes imposés sur la structure de la couche limite. Il nous a également permis de calibrer notre modèle sur la zone externe de la couche limite à différents gradients de pression. Mais pour évaluer le comportement du modèle sur toute la couche limite, il est nécessaire de calculer la zone de proche paroi. Le prochain chapitre est dédié à cette étude.

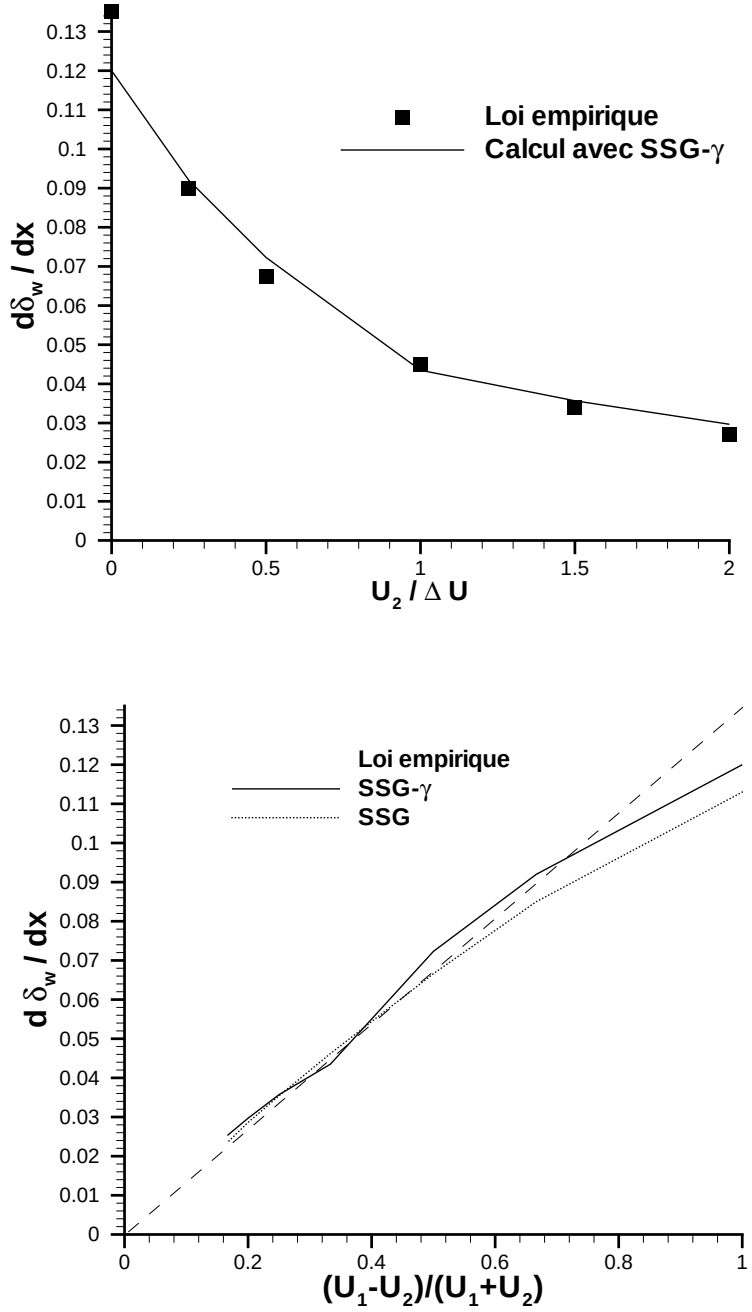


FIG. 13.5 – Comparaison, en fonction de $U_2/\Delta U$ et $\Delta U/\left(U_1+U_2\right)$, entre le taux d'évasement δ'_ω de la couche de mélange issu du calcul avec le modèle $SSG-\gamma$ et celui donné par la loi empirique 13.20

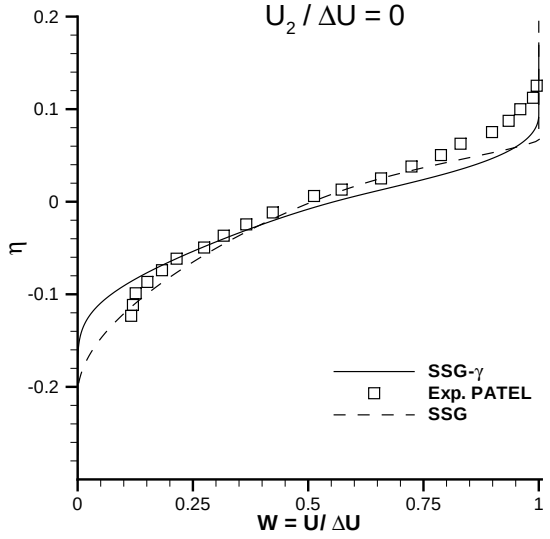


FIG. 13.6 – Profil de vitesse en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 0$

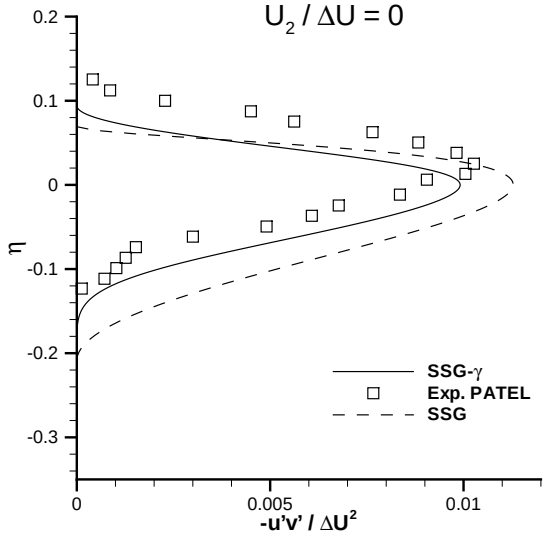


FIG. 13.7 – Profil de $\overline{u'v'}$ en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 0$

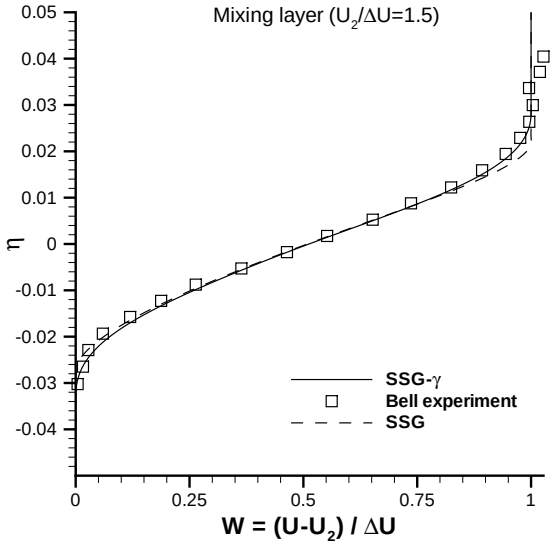


FIG. 13.8 – Profil de vitesse en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 1.5$

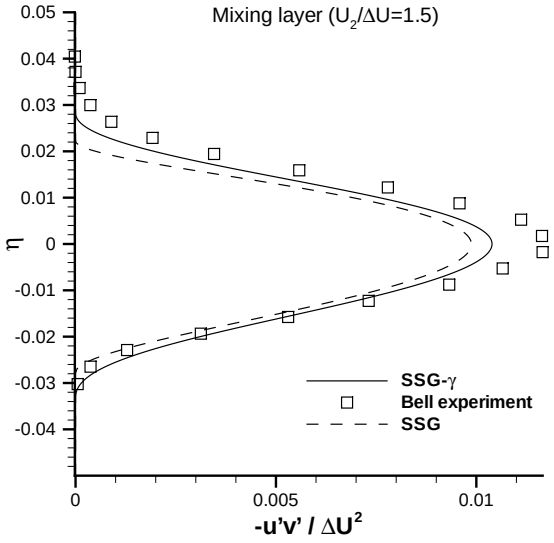


FIG. 13.9 – Profil de $\overline{u'v'}$ en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 1.5$

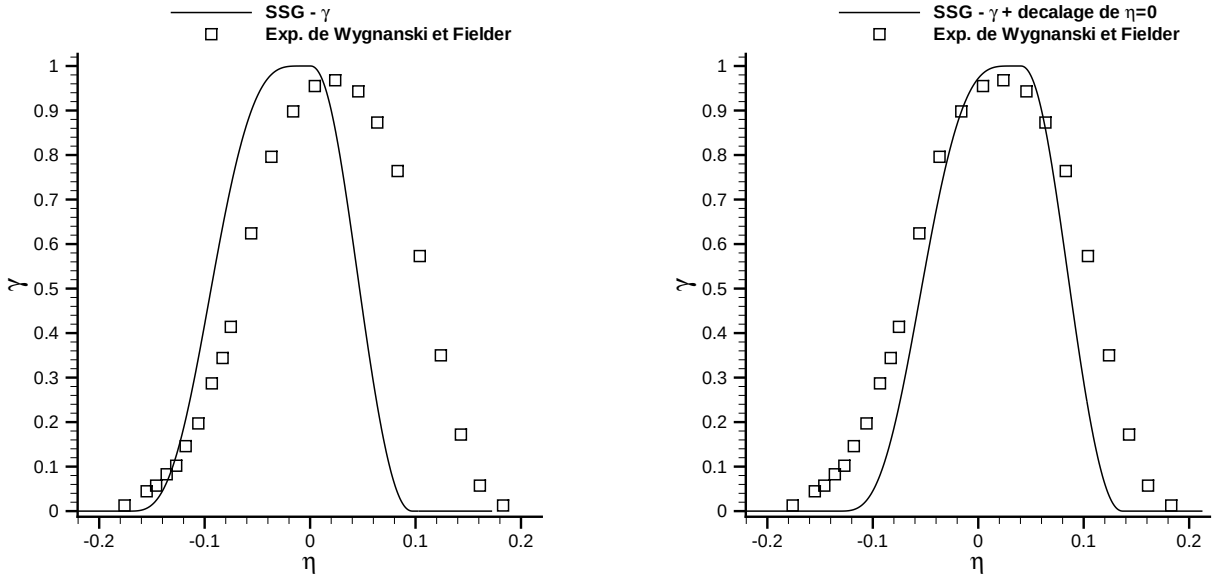


FIG. 13.10 – Profil de γ dans une couche de mélange à $U_2/\Delta U \simeq 0$: comparaison entre le calcul avec le modèle $SSG - \gamma$ et l'expérience de Wygnanski et Fiedler (1970)

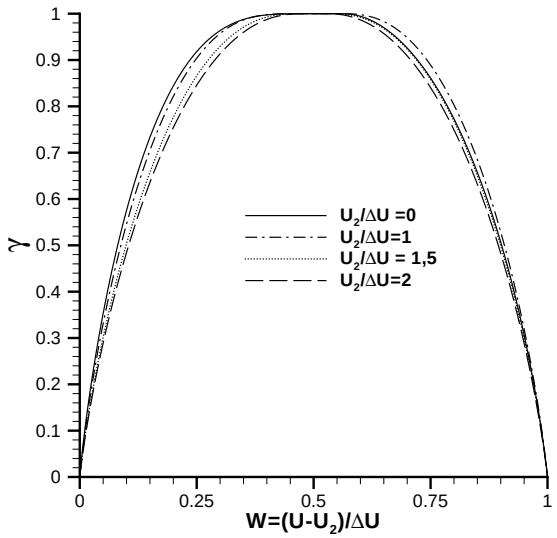


FIG. 13.11 – Comparaison des profils de γ en couche de mélange en fonction de $U_2/\Delta U$ pour le modèle $SSG - \gamma$

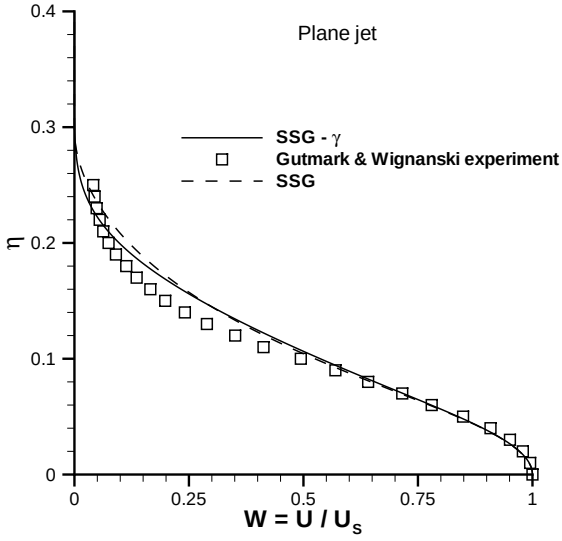


FIG. 13.12 – Profils de vitesse en jet plan

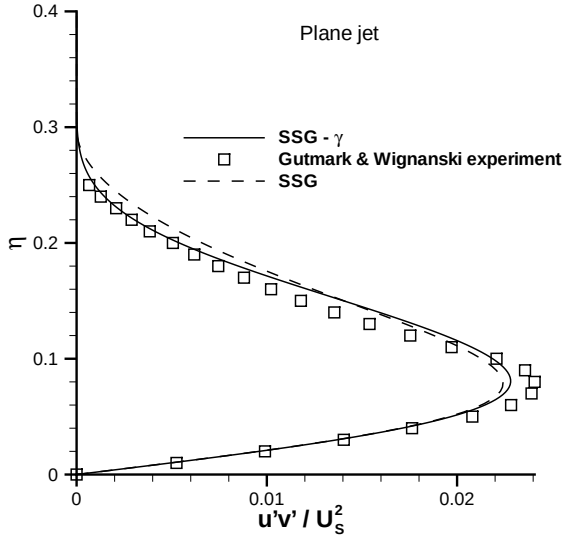


FIG. 13.13 – Profil de $\overline{u'v'}$ en jet plan

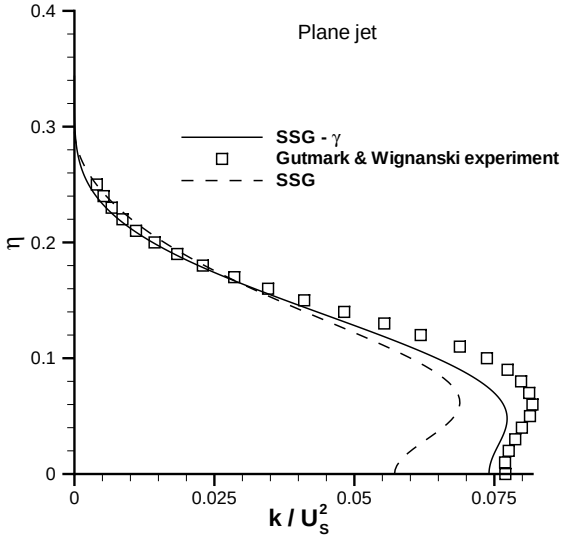


FIG. 13.14 – Profils k en jet plan

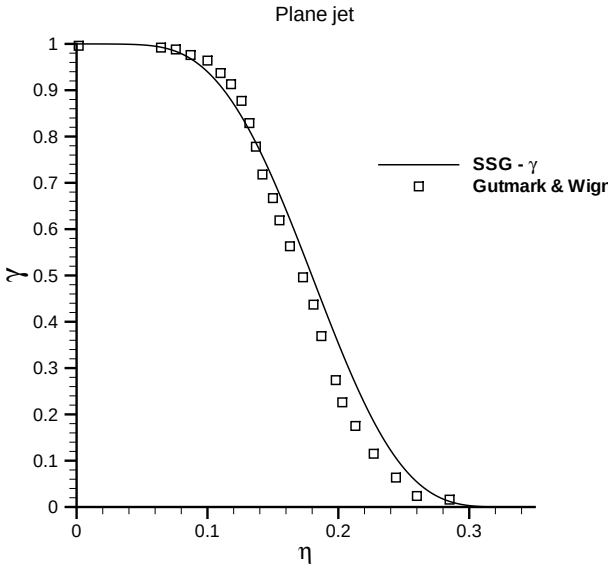


FIG. 13.15 – Profil de γ en jet plan

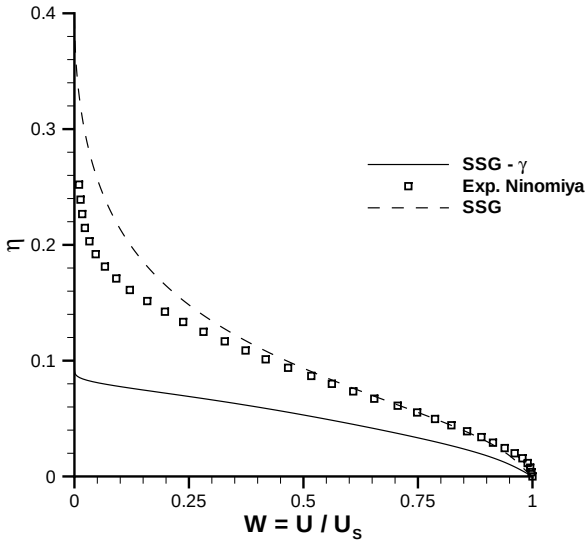


FIG. 13.16 – Profils de vitesse en jet axisymétrique sans correction

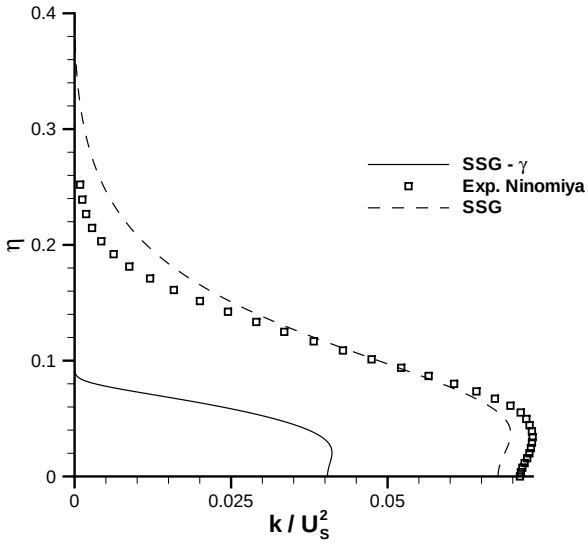


FIG. 13.17 – Profil de k en jet axisymétrique sans correction

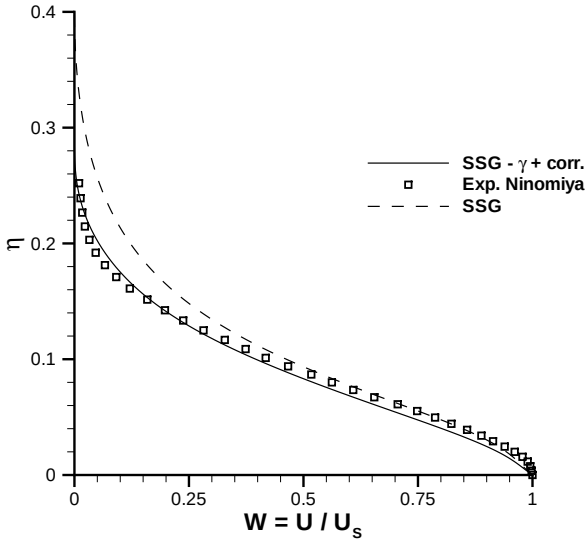


FIG. 13.18 – Profils de vitesse en jet axisymétrique avec correction

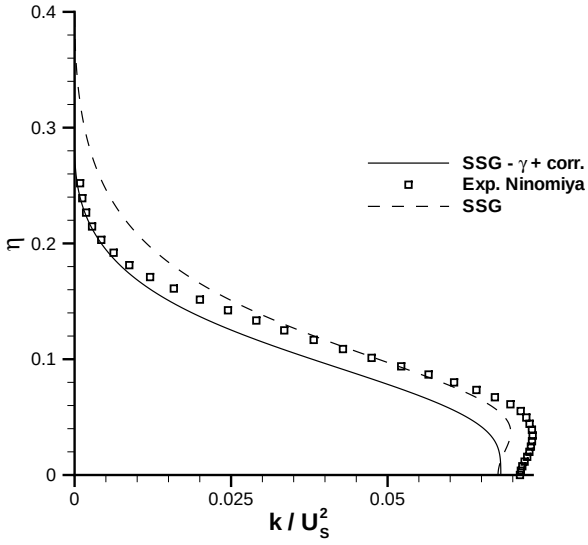


FIG. 13.19 – Profil de k en jet axisymétrique avec correction

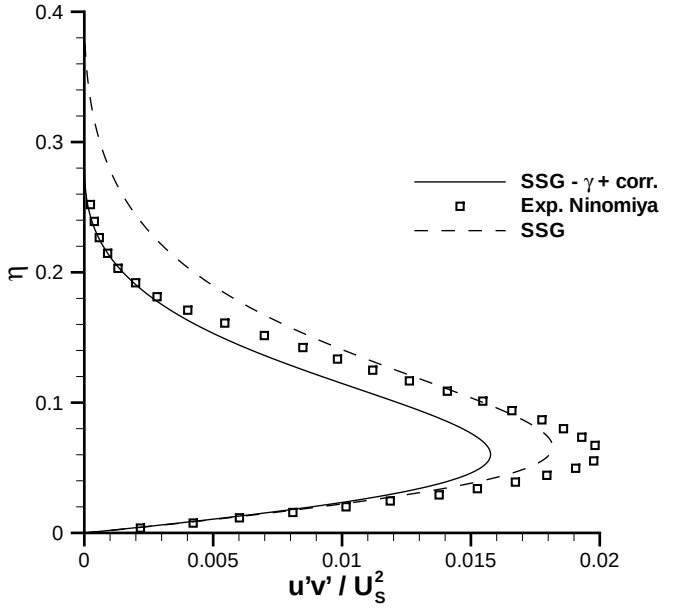


FIG. 13.20 – Profils de $\overline{u'v'}$ en jet axisymétrique avec correction

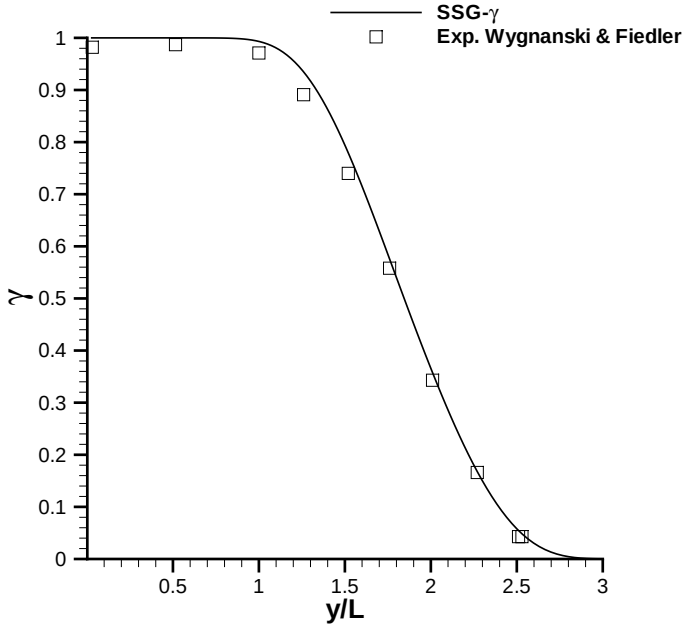


FIG. 13.21 – Profil de γ en jet axisymétrique avec correction

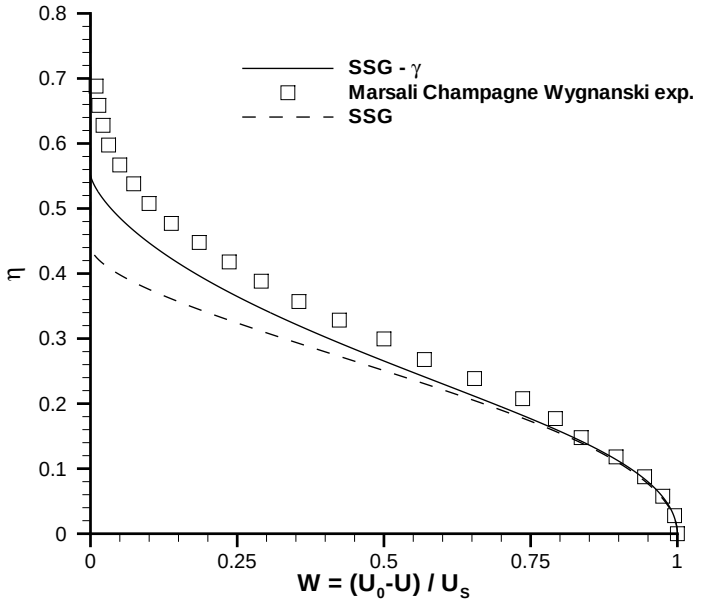


FIG. 13.22 – Profils de vitesse en sillage

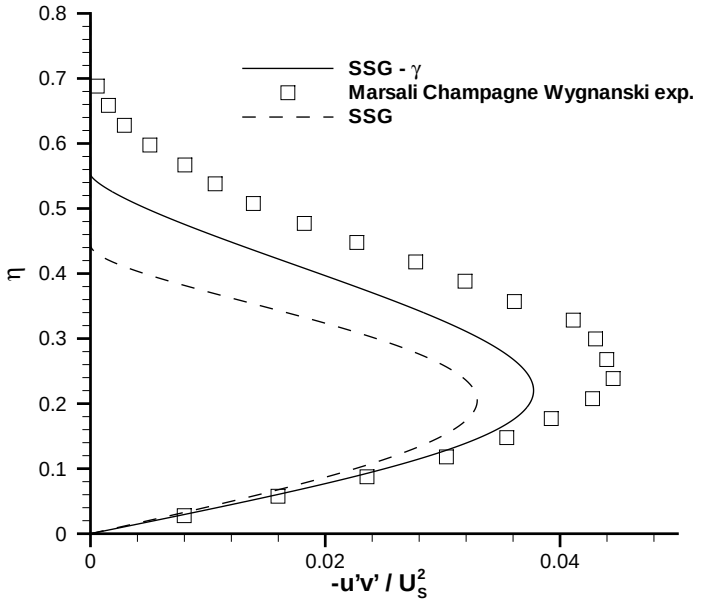


FIG. 13.23 – Profil de $\overline{u'v'}$ en sillage

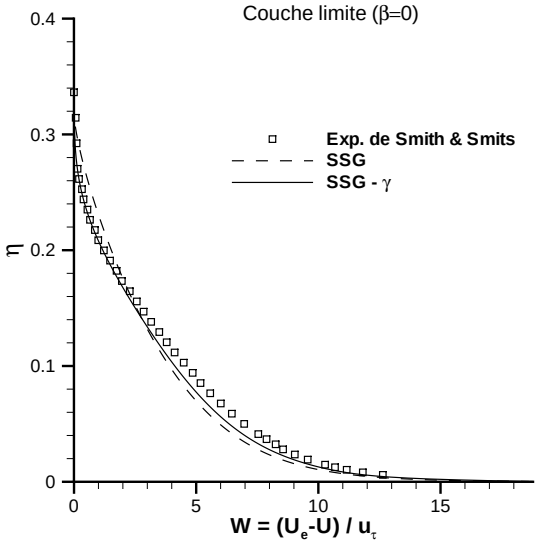


FIG. 13.24 – Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 0$

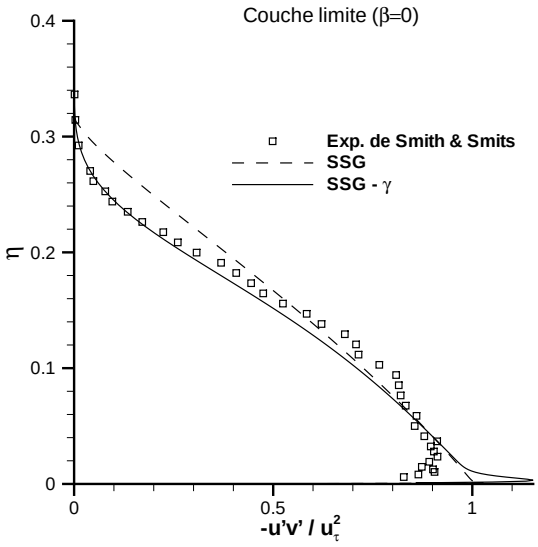


FIG. 13.25 – Profil de $\overline{u'v'}$ en couche limite à $\beta = 0$

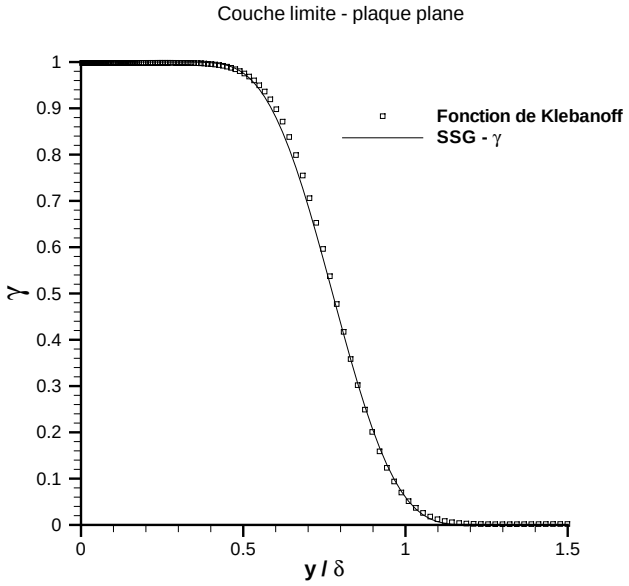


FIG. 13.26 – Facteur d'intermittence dans une couche limite sans gradient de pression

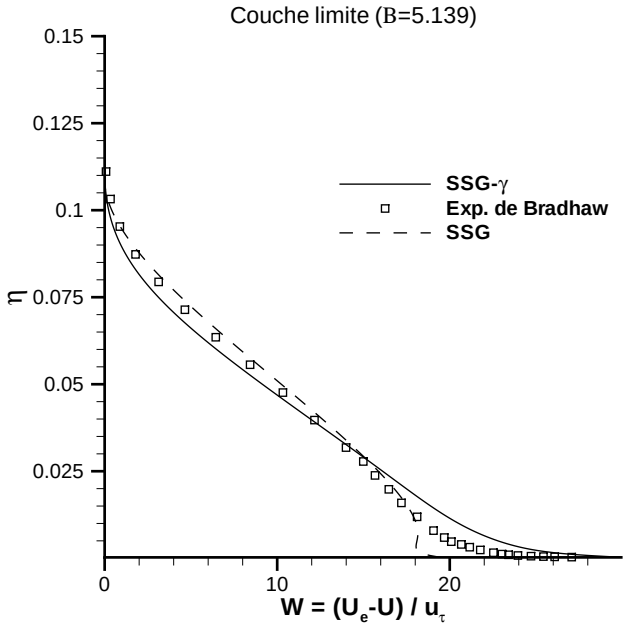


FIG. 13.27 – Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 5.139$

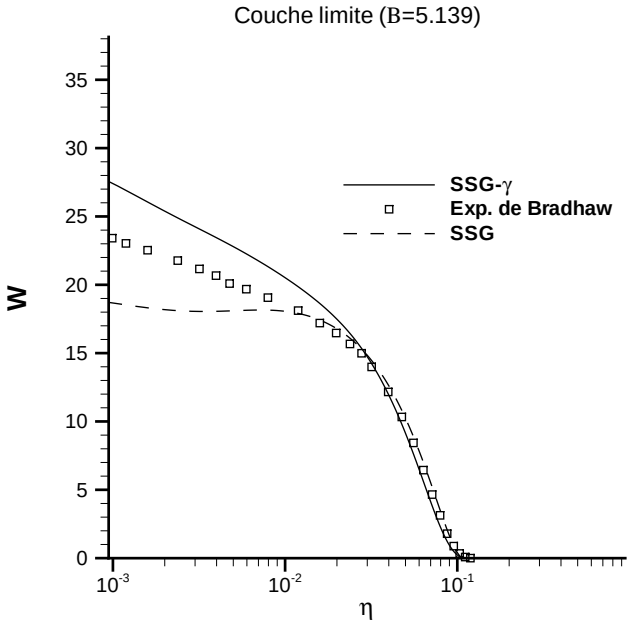


FIG. 13.28 – Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 5.139$: vérification de la loi logarithmique

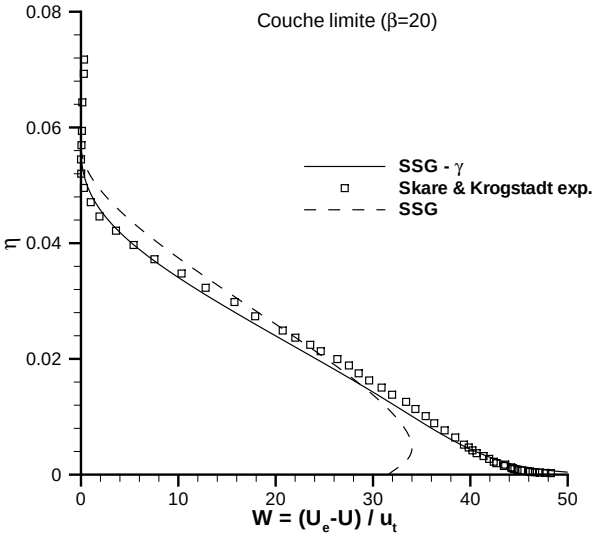


FIG. 13.29 – Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 20$

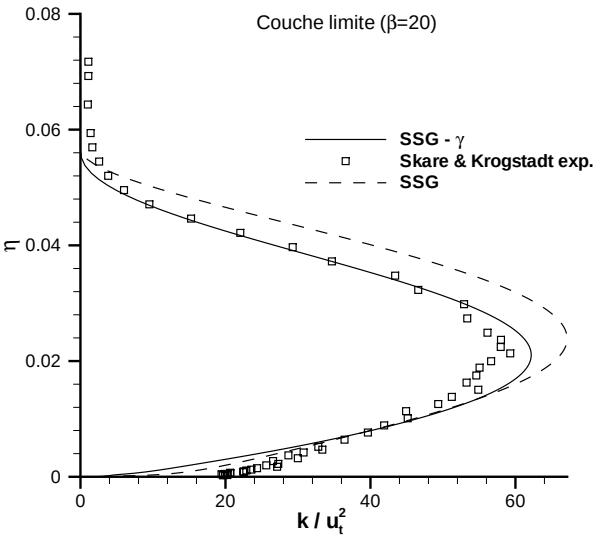


FIG. 13.30 – Profil de k en couche limite à $\beta = 20$

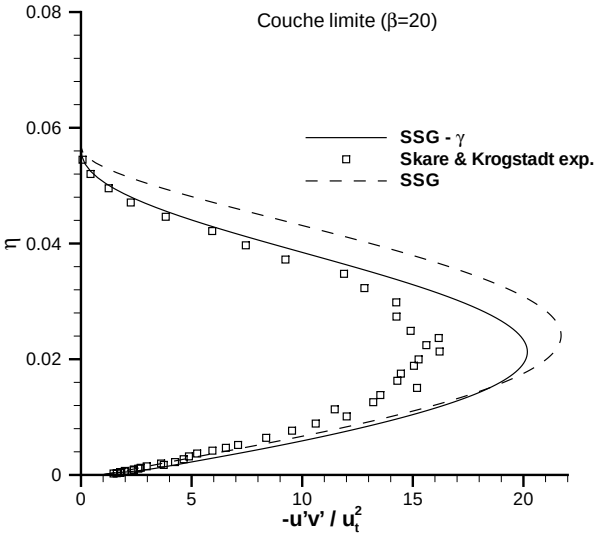


FIG. 13.31 – Profil de $-\overline{u'v'}$ en couche limite à $\beta = 20$

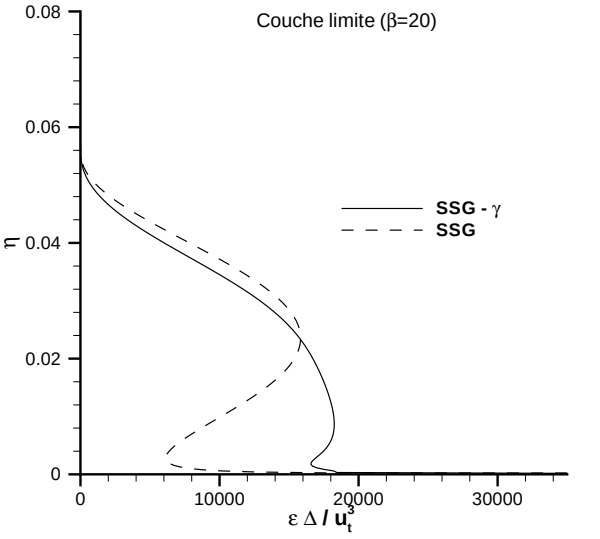


FIG. 13.32 – Profil de ε en couche limite à $\beta = 20$

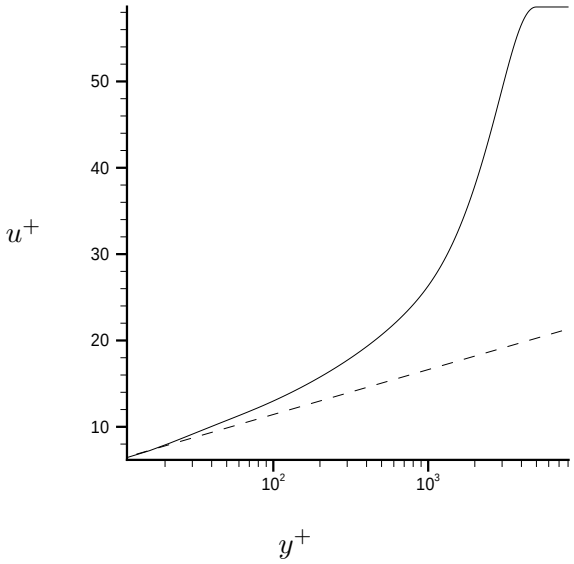


FIG. 13.33 – Vérification de la loi logarithmique à $\beta = 20$

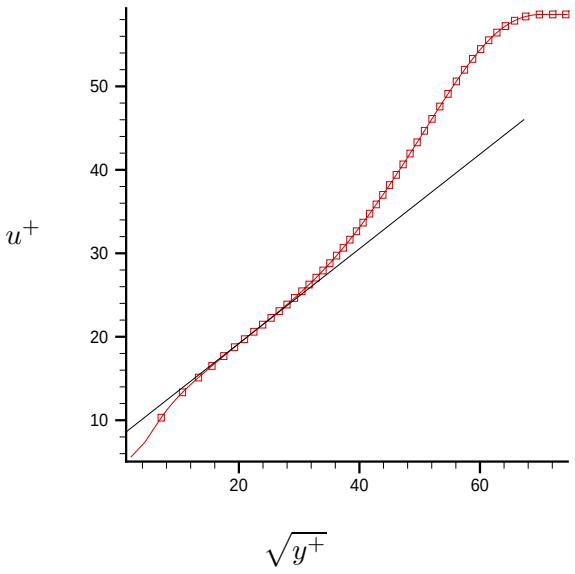


FIG. 13.34 – Vérification de la loi en racine à $\beta = 20$

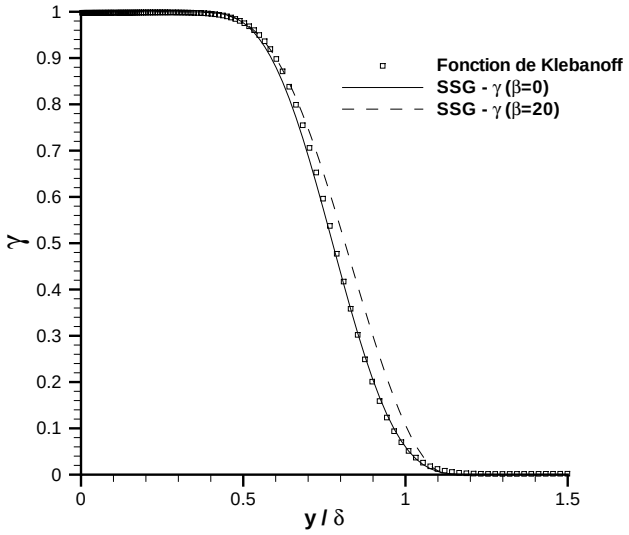


FIG. 13.35 – Facteur d'intermittence dans une couche limite avec et sans gradient de pression

Chapitre 14

Qualification du modèle en couche limite

14.1 Modélisation des effets de paroi

La paroi a un effet de forçage sur l'anisotropie des tensions et cet effet n'est pas reproduit par les modèles de turbulence à Reynolds élevé. En outre, la fermeture du terme de redistribution Π_{ij} contient, au voisinage d'une paroi, un terme supplémentaire (Chassaing, 2000). Ainsi, par construction, les modèles de turbulence établis à Reynolds turbulent élevé sont inaptes à rendre compte des spécificités de la turbulence au voisinage d'une paroi. Une correction dite de paroi doit être envisagée.

14.1.1 Comportements théoriques au voisinage de la paroi

Les tensions de Reynolds se comportent, au voisinage de la paroi, comme des puissances de la distance à la paroi y (Patel et al., 1985) :

$$\overline{u'v'} \sim y^3 \ , \ \overline{u'^2} \sim y^2 \ , \ \overline{v'^2} \sim y^4 \ , \ \overline{w'^2} \sim y^2 \tag{14.1}$$

La pseudo-dissipation ε ne tend pas vers zéro à la paroi :

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \rightarrow C^{te} \text{ lorsque } y \rightarrow 0 \tag{14.2}$$

de même que la dissipation vraie $\widehat{\varepsilon}$:

$$\widehat{\varepsilon} = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} \rightarrow C^{te} \text{ lorsque } y \rightarrow 0 \tag{14.3}$$

14.1.2 Équations de transport des tensions de Reynolds

Dans le cas du modèle SSG, Chen (1995) a proposé un modèle tenant compte de l'effet de paroi dans la fermeture du terme de redistribution en s'inspirant des travaux de Launder et Shima (1989). Nous utiliserons ce modèle de proche paroi car il a été retenu dans le cadre du projet européen FLOMANIA dans lequel nos

travaux sur les modèles RSM s'inscrivent. Le modèle de Chen se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi_{ij}^1}{\varepsilon} &= -C_1\left[1-\left(1-\frac{1}{C_1}\right)f_w\right]a_{ij} + C_2\left(1-f_w\right)\left(a_{ik}a_{kj}-\frac{II_a}{3}\delta_{ij}\right) \\
\frac{\Pi_{ij}^2}{k} &= C_3\left(S_{ij}-\frac{s_1}{3}\delta_{ij}\right) + C_4\left(S_{ik}a_{kj}+S_{jk}a_{ki}-\frac{2}{3}as\delta_{ij}\right) + C_5\left(\Omega_{ik}a_{kj}+\Omega_{jk}a_{ki}\right) \qquad (14.4)\\
\Pi_{ij}^w &= f_w\left[0,45\left(P_{ij}-\frac{P_k}{3}\delta_{ij}\right)-0,03\left(Q_{ij}-\frac{2}{3}Q\delta_{ij}\right)+0,16kS_{ij}\right] \\
\Pi_{ij} &= \Pi_{ij}^1+\Pi_{ij}^2+\Pi_{ij}^w
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&C_1 = 1,7+0,9\frac{P_k}{\varepsilon}\ ;\ C_2 = 1,05\ ;\ C_3 = 0,8-0,65\sqrt{II}\ ;\ C_4 = 0,625\ ;\ C_5 = 0,2 \qquad (14.5)\\
&Q_{ij} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}-\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\ ;\ Q=\frac{1}{2}Q_{ii}
\end{aligned}$$

et où la fonction de paroi f_w est définie par la relation :

$$f_w = e^{-\left(0,0184\frac{\sqrt{k}y}{\nu}\right)^4} \qquad (14.6)$$

où y est la distance à la paroi.

14.1.3 Équation d'échelle : choix de la grandeur transportée dans 3C3D

Le modèle de Chen (1995) ajoute une correction de paroi à l'équation de transport de la dissipation ε :

$$\begin{aligned}
\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} &= \left[C_{\varepsilon 1}P_k\left(1+C_{\varepsilon 4}f_w\right)-C_{\varepsilon 2}f_\varepsilon\varepsilon^*\right]\frac{\varepsilon}{k}+f_w\left[\left(-2+\frac{7}{9}C_{\varepsilon 2}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon^*}{k}-\frac{\varepsilon^{*2}}{2\,k}\right] \qquad (14.7)\\
&\text{où : } f_\varepsilon = 1-\frac{2}{9}e^{-(R_t/6)^2} \text{ avec } R_t=\frac{k^2}{\nu\varepsilon}\ ,\ \varepsilon^* = \varepsilon-2\frac{\nu k}{y^2}\ ,\ C_{\varepsilon 4}=1 \qquad (14.8)
\end{aligned}$$

La condition limite imposée à la paroi est $\varepsilon_p = \left(2\frac{\nu k}{y^2}\right)_p \Leftrightarrow \varepsilon_p^* = 0$. Le comportement de ε au voisinage de la paroi (14.2) est ainsi satisfait puisque le modèle de Chen dans les équations de transport pour les tensions de Reynolds est construit de sorte que $k \sim y^2$ au voisinage de la paroi.

La dissipation ε tend vers zéro à la frontière libre et fait donc partie des grandeurs transportées envisageables d'après le paragraphe 11.5. Toutefois, dans le code de similitude, c'est la grandeur kL qui avait été choisie comme grandeur transportée compte tenu du comportement de sa dérivée (qui reste finie) au voisinage d'une frontière libre (cf. paragraphe 11.5). Or, à la différence du code de similitude, les calculs ont montré qu'il était possible de transporter ε dans le code de couche limite 3C3D pour le modèle $SSG-\gamma$. Il apparaît ici que le code 3C3D est plus robuste qu'un code de similitude pour lequel nous ne pouvions transporter ε. Nous choisissons donc de transporter, dans un premier temps du moins, la dissipation ε afin de conserver la correction de paroi

de Chen (1995) pour le modèle $SSG-\gamma$. L'équation d'échelle transportant $\Psi = kL$, définie par la relation (13.17) dans le code de similitude, est alors récrite, par généricité (3.9,11.11), pour la grandeur ε dans le code de couche limite 3C3D. Cette équation de transport s'écrit avec la correction de Chen :

$$\begin{aligned}\frac{D\,\varepsilon}{D\,t} &= \left[C_{\varepsilon 1}P_k\left(1+C_{\varepsilon 4}f_w\right)-C_{\varepsilon 2}f_\varepsilon\varepsilon^*\right]\frac{\varepsilon}{k}+f_w\left[\left(-2+\frac{7}{9}C_{\varepsilon 2}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon^*}{k}-\frac{\varepsilon^{*2}}{2\,k}\right]\\ &+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon k}\overline{u'_k u'_l}\gamma^{m_0-1}\frac{\varepsilon}{k}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right)\\ &+C_{\varepsilon\varepsilon}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon^2}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}+C_{\varepsilon k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}+C^{\varepsilon}_{kk}\frac{\overline{u'_k u'_l}}{k}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\partial k}{\partial x_l}\\ &+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\varepsilon\gamma}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\gamma}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\right)+C_{\varepsilon\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\frac{k\overline{u'_k u'_l}}{\varepsilon\gamma}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}+C^{\varepsilon}_{\gamma k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\overline{u'_k u'_l}}{\gamma}\gamma^{m_0-1}\frac{\partial\gamma}{\partial x_l}\end{aligned}\tag{14.9}$$

avec :

$C_{\varepsilon 1}=1,4\ ;\ C_{\varepsilon 2}=1,92\ ;\ D_{\varepsilon\varepsilon}=0,4\ ;\ D_{\varepsilon k}=0,08\ \ C_{\varepsilon\varepsilon}=0,1533\ \ C_{\varepsilon k}=-0,8032\ ;\ C^{\varepsilon}_{kk}=1,3581$
$D_{\varepsilon\gamma}=-0,18\ ;\ C_{\varepsilon\gamma}=0,6159\ ;\ C^{\varepsilon}_{\gamma k}=-1,0175$

14.2 Calculs de couches limites bidimensionnelles avec 3C3D

Le modèle $SSG-\gamma$ avec la correction de Chen est implanté dans le code de calcul de couche limite 3C3D développé à l'ONERA par Houdeville et Malecki (1994). Ce code a été utilisé pour des raisons de rapidité de calcul ainsi que de robustesse.

L'initialisation des grandeurs turbulentes dans 3C3D est identique à celle réalisée par Malecki (1994).

14.2.1 Couche limite sur plaque plane

Cette configuration est à l'évidence le minimum qu'un modèle de turbulence doit être capable de reproduire, du moins à Reynolds élevé.

Coefficient de frottement

La fonction f_w définie par Chen (14.6) a dû être modifié car cette dernière conduisait à une mauvaise prévision du coefficient de frottement sur plaque plane. Ce phénomène s'explique simplement par le fait que l'étendue de la zone sous influence de f_w est trop importante ce qui a tendance à repousser la zone logarithmique plus loin de la paroi, ceci provoquant une diminution du coefficient de frottement. Pour diminuer l'étendue de la zone d'influence de la correction de paroi et ainsi mieux prévoir le coefficient de frottement, f_w est redéfini de la façon suivante :

$$f_w = e^{-\left(0{,}031\frac{\sqrt{k}y}{\nu}\right)^4}\tag{14.10}$$

Le coefficient de frottement, sur une plaque plane et pour le modèle $SSG - \gamma$ avec la correction de Chen, est comparé à la loi de Kármán et Schoenherr :

$$C_f = \frac{1}{17,08\left(\log_{10} R_\theta\right)^2 + 25,11 \log_{10} R_\theta + 6,012} \tag{14.11}$$

sur la figure 14.1. Grâce à la modification de f_w en (14.10), on observe un bon accord entre le calcul et la loi empirique pour les nombre de Reynolds élevés. Par contre, il semble y avoir un écart pour les nombres de Reynolds plus faibles. Cette question est étudiée au paragraphe 14.2.3.

Loi logarithmique

La pente de la loi logarithmique est comme attendue bien reproduite (figure 14.2) ainsi que son positionnement en $u^+ = \log(y^+)/\kappa + 5,2$. Ce positionnement a été ajusté via la fonction d'amortissement f_w (14.10) garantissant dans le même temps une bonne prévision du coefficient de frottement. Ces deux caractéristiques sont liées car, si on s'en réfère à la figure 3.2, un écart sur la pente ou la position de la loi logarithmique entraîne un écart sur le coefficient de frottement.

Comportement du modèle au voisinage de la paroi

Les DNS de Spalart (1988) donnent une base de comparaison pour évaluer les profils des tensions et de la pseudo-dissipation au voisinage de la paroi.

Pour comparer le profils turbulents donnés par 3C3D pour notre modèle $SSG - \gamma$ aux DNS de Spalart, il faut réaliser un calcul sur plaque plane à un nombre de Reynolds initial très faible car inférieur au nombre de Reynolds de la DNS : $R_\theta = 1410$. Le calcul a donc été initialisé en turbulent à un nombre de Reynolds voisin de 1000. Les tensions de Reynolds obtenues dans 3C3D à la station où $R_\theta = 1410$ sont validées sur la figure 14.3 par les tensions obtenues à un nombre de Reynolds bien plus élevé : $R_{theta} = 10400$. Le plateau obtenu sur les tensions et donc sur k^+ à grand R_θ se situe à environ $k^+ = 3,1$. Cette valeur de k^+ se situe dans la zone logarithmique. Elle est cohérente avec le comportement théorique du modèle SSG imposant $k^+ \simeq 3,119$ dans la zone logarithmique lorsque le gradient de pression est nul (cf. paragraphe 3.4.2). Par contre, la valeur expérimentale est $k^+ = 3,33$ et donc le modèle SSG sous-estime légèrement k^+ dans la zone logarithmique. Il en va de même pour tous les modèles RSM basés sur le SSG et en particulier pour $SSG - \gamma$ car la valeur de k^+ dans la zone logarithmique est uniquement déterminée par le modèle pour les termes de redistribution et dissipation (cf. paragraphe 3.4.2). En ce qui concerne les niveaux de $\overline{u'^2}/k$, $\overline{v'^2}/k$ et $\overline{w'^2}/k$ dans la loi logarithmique, on constate qu'ils sont proches des niveaux obtenus dans les DNS de Spalart.

En comparaison des profils tirés des DNS de Spalart (figure 14.4), on constate que le niveau maximum de $\overline{u'^2}^+$ est sous-estimé. Pour l'ancienne définition de f_w définie par l'expression (14.6), les niveaux étaient corrects car la correction de paroi était prolongée un peu plus loin de la paroi permettant d'accroître le maximum de $\overline{u'^2}^+$ mais décalant dans le même temps la zone logarithmique et provoquant une sous-estimation du coefficient de frottement. Dès lors, il s'agit d'un compromis et puisque le coefficient de frottement est un paramètre bien plus essentiel que le profil des grandeurs turbulentes au voisinage de la paroi, on conserve la correction de paroi définie ci-dessus (14.10).

Le profil de la dissipation ε^+ pour $R_\theta = 1410$ issu du modèle $SSG - \gamma$ est très proche des DNS de Spalart dans toute la couche limite excepté la zone de proche paroi pour laquelle $y^+ < 20$ (cf. figure (14.5). Le niveau de ε^+ à la paroi est assez éloigné du niveau observé sur les DNS de Spalart (figure 14.5). Néanmoins, ε^+ tend vers une constante non nulle à la paroi. La condition limite à la paroi imposant $\varepsilon^* = \varepsilon - 2\,\nu k/y^2 = 0$, on vérifie que le modèle $SSG - \gamma$ avec la correction de Chen se comporte de telle sorte que $k^+ \sim y^{+2}$ à la paroi. Les comportements physiques de k et ε à la paroi sont donc satisfaits avec la correction de paroi apportée par Chen (1995) que ce soit pour le modèle SSG ou pour le modèle $SSG - \gamma$.

14.2.2 Couches limites à divers gradients de pression adverse

Plusieurs configurations de couches limites bidimensionnelles à gradient de pression positif ont été testées. Le paramètre de gradient de pression $\beta = -\frac{\Delta}{u_\tau}\frac{\partial U_e}{\partial x}$ est utilisé pour évaluer l'intensité du gradient de pression adverse pour chacune des configurations testées.

Le modèle $SSG - \gamma$ avec la correction de Chen (1995) est comparé :
- au modèle SSG standard avec l'équation pour la dissipation définie en (13.18) et avec la correction de Chen,
- au modèle RSM de Launder et Shima (1989) car ce modèle RSM est déjà implanté dans 3C3D par Malecki (1994) et parce qu'il possède une correction de paroi qui lui est adaptée,
- au modèle à deux équations SST de Menter (1992b) car c'est le modèle à deux équations qui donne les meilleurs résultats pour les couches limites avec gradient de pression adverse.

Les résultats pour les modèles RSM sont obtenus avec 3C3D et ceux pour le modèle SST sont obtenus avec le code CLIC développé à l'ONERA par Aupoix (1999). Les calculs 3C3D sont initialisés en turbulent (Malecki, 1994) et la distribution de vitesse extérieure U_e est celle de l'expérience.

Samuel et Joubert (1974)

Samuel et Joubert (1974) ont réalisé une expérience de couche limite soumise à un gradient de pression positif modéré. L'étude s'étend sur une distance de $3m$ avec une vitesse initiale de $26\,m.s^{-1}$ et une vitesse finale de $19\,m.s^{-1}$. Le nombre de Reynolds R_θ se situe entre $5,9\,10^3$ et $1,5\,10^4$. Le paramètre de gradient de pression β est continûment croissant : il débute à pratiquement 0 pour finir à 4.

Les résultats tracés sur les figures 14.6 et 14.7 montrent que le modèle $SSG-\gamma$ reproduit bien le coefficient de frottement ainsi que son évolution suivant x à la différence des modèles LS et SSG. L'intérêt d'avoir une équation d'échelle qui satisfasse les contraintes apparaît donc sur la prévision du C_f. Concernant le profil de vitesse, il est trop creusé pour le modèle $SSG - \gamma$ en comparaison du profil expérimental. Pourtant le gradient de pression adverse est faible et le profil ne devrait pas se creuser autant.

Ludwieg et Tillmann (1950)

Ludwieg et Tillmann (1950) ont effectué une expérience ($n^o 1200$) à gradient de pression positif. Il est à noter que les résultats ne devront être étudiés que jusqu'à $2,87m$. Au delà, le résultat est perturbé par des effets tridimensionnels non pris en compte dans notre calcul bidimensionnel. De la station initiale à la station $X = 2,782m$, le nombre de Reynolds R_θ se situe entre $6\,10^3$ et $1,8\,10^4$. La vitesse évolue de $33\,m.s^{-1}$ jusqu'à

$24,65\,m.s^{-1}$. Le paramètre de gradient de pression β varie entre $0,3$ et 4.

La figure 14.8 montre, en ce qui concerne le C_f, un bon accord entre l'expérience de Ludwieg et les résultats du modèle $SSG-\gamma$ jusqu'à $X = 2,87m$. L'amélioration est significative par rapport aux modèles SSG et LS. Le modèle SST reste très proche du modèle $SSG-\gamma$ même si ce dernier apporte une amélioration.

Le profil de vitesse est présenté sur la figure 14.9 à la station $X = 2,782m$. Le profil de vitesse issu du modèle $SSG-\gamma$ est en bon accord avec l'expérience tout comme pour le modèle SST. Comme pour le C_f, les modèles LS et SSG sont plus éloignés des valeurs expérimentales.

Marušić et Perry (1995)

Marušić et Perry (1995) ont réalisé des expériences de couche limite avec gradient de pression adverse modéré. Deux configurations existent : l'une pour une vitesse initiale de $10m.s^{-1}$ et l'autre pour une vitesse de $30m.s^{-1}$. Seuls les résultats pour la configuration à $10m.s^{-1}$ seront présentés. Le paramètre de gradient de pression β varie de 0 à 5. Le nombre de Reynolds R_θ se situe entre $2,2\,10^3$ et $7,2\,10^3$.

Les résultats sont présentés sur les figures 14.10, 14.11 et 14.12. Le modèle $SSG-\gamma$ reproduit bien le coefficient de frottement et l'amélioration par rapport aux modèles classiques SSG et LS est significative. Le profil de vitesse est également en bon accord avec l'expérience de Perry malgré un léger creusement du profil similaire à celui observé sur la configuration de Samuel.

Le profil de k est donné sur la figure 14.12. Cette figure fait apparaître que l'épaisseur de la couche limite est sous-évaluée dans le calcul avec le modèle $SSG-\gamma$ ou avec le modèle LS. Cette sous-estimation se retrouve sur le profil de vitesse (figure 14.11).

Bradshaw et al. (1967)

L'expérience n^o3300 de Bradshaw et al. (1967) est un cas test à gradient de pression adverse modéré pour lequel le paramètre de gradient de pression β évolue continûment de 1 à 3. Le nombre de Reynolds R_θ évolue entre $8\,10^3$ et $2\,10^4$.

Les figures 14.13 et 14.14 présentent le coefficient de frottement et le profil de vitesse pour les différents modèles de turbulence testés en comparaison des mesures de Bradshaw et al. (1967). L'amélioration sur le C_f et la vitesse par rapport aux modèles standards SSG et LS est encore plus significative que pour les configurations précédentes. Le modèle prévoit même mieux le coefficient de frottement que le modèle SST pourtant réputé pour son comportement dans les couches limites avec gradient de pression adverse. En ce qui concerne le profil de vitesse, les modèles $SSG-\gamma$ et SST sont proches l'un de l'autre et il est difficile de dire lequel des deux est le plus proche des mesures. Ces deux modèles se comportent bien mieux (cf. figure 14.14) dans la région proche de la paroi car ces deux modèles reproduisent la loi logarithmique pour des gradients de pression adverses non nuls contrairement aux modèles SSG et LS.

Skåre et Krogstad (1994)

Skåre et Krogstad (1994) ont réalisé une expérience de couche limite à gradient de pression adverse élevé, la couche limite restant en similitude et proche du décollement. La vitesse passe de $22,35\,m.s^{-1}$ à $18,30\,m.s^{-1}$

et le nombre de Reynolds R_θ est relativement élevé puisqu'il se situe entre $2,5\,10^4$ et $5,1\,10^4$. Le paramètre de gradient de pression β se situe entre $12,2$ et $21,4$. Ce cas test est un bon moyen de vérifier l'efficacité des contraintes que nous nous sommes imposées.

Les figures 14.15 et 14.16 montrent que le modèle est en très bon accord avec l'expérience pour des β de l'ordre de vingt correspondant à $X \geq 4.4m$. Le modèle est même en meilleur accord avec l'expérience de Skåre et Krogstad que le modèle SST que ce soit pour le profil de vitesse ou pour le C_f. En outre, l'amélioration est significative par rapport à un modèle SSG ou LS.

Les figures 14.17 et 14.18 montrent que les lois logarithmique et en racine sont satisfaites par le modèle $SSG-\gamma$ dans cette configuration proche du décollement. Ces lois ne sont pas reproduites par les modèles SSG et LS. Les contraintes que nous nous sommes imposées pour respecter la loi logarithmique quel que soit le gradient de pression ainsi que la loi en racine pour les gradients adverses élevés ont donc bien l'effet escompté. Cela confirme, sur un calcul de couche limite complet, les résultats obtenus avec le code de similitude SIMIL. Le fait que la loi logarithmique soit reproduite par le modèle $SSG-\gamma$ améliore très sensiblement le profil de vitesse au voisinage de la paroi (cf. figure 14.16) en comparaison des modèles SSG ou LS.

Remarquons au passage que les résultats sont comparables à ceux obtenus avec le code de similitude ce qui valide l'implantation du modèle $SSG-\gamma$ dans 3C3D. L'influence de la correction de paroi dans 3C3D semble aller dans le bon sens car le profil de vitesse (figure 14.16) est plus proche de l'expérience de Skåre et Krogstad avec 3C3D qu'avec SIMIL (figure 13.29) où le calcul s'arrête à la loi logarithmique (condition limite du calcul).

14.2.3 Analyse des résultats et conclusions

Le modèle $SSG-\gamma$ se comporte de façon tout à fait satisfaisante quel que soit le gradient de pression. Il apporte une amélioration dans la prévision du coefficient de frottement significative en comparaison des modèles aux tensions de Reynolds classiques tels que le modèle SSG standard ainsi que le modèle de Launder-Shima. L'amélioration est d'ailleurs d'autant plus significative que le gradient de pression adverse est élevé. Cela s'explique aisément par le fait qu'un modèle SSG standard aura une pente dans la loi logarithmique qui s'écartera d'autant plus de sa valeur théorique $1/\kappa$ que le gradient de pression sera élevé. Que ce soit sur le profil de vitesse ou le coefficient de frottement, le modèle $SSG-\gamma$ est également plus précis pour des couches limites proches du décollement que le modèle SST de Menter pourtant réputé pour ses bons résultats sur ce type d'écoulements. L'amélioration apportée tient sans doute au fait que, pour notre modèle, la loi logarithmique est satisfaite quel que soit le gradient de pression et que la loi en racine l'est également lorsque le gradient adverse devient suffisamment élevé. En bref, le modèle reproduit de façon très satisfaisante l'influence du gradient de pression adverse sur la structure et les caractéristiques (C_f par exemple) de la couche limite.

Néanmoins, le profil de vitesse a tendance à se creuser exagérément dans la configuration de Samuel ou de Perry ce qui a tendance à engendrer une sous-estimation de l'épaisseur de couche limite. Cette sous-estimation se répercute alors de façon encore plus marquée sur les tensions de Reynolds comme le montre la figure 14.12 dans la configuration de Perry. Mais puisque cet effet de creusement du profil disparaît lorsque l'on prolonge suffisamment loin (sous entendu en x) le calcul, ce problème n'est pas attribuable au seul modèle de turbulence. Il semble que ce soit un problème provenant de l'erreur introduite à l'initialisation du calcul en turbulent qui se propage sur une partie plus ou moins étendue du calcul. Plusieurs initialisations des grandeurs turbulentes à l'aide de relations algébriques semblables à celles utilisées par Malecki (1994) ont été tentées sans succès.

Le problème a été constatée sur tous les modèles RSM excepté le modèle IP qui est un modèle linéaire pour le terme de redistribution. Le couplage non-linéaire des tensions de Reynolds entre elles pour un modèle LS (du fait du paramètre F apparaissant dans le terme de redistribution) ou SSG (termes quadratiques par rapport au tenseur d'anisotropie a_{ij}) implique que ces modèles SSG et LS sont plus dépendants de leurs conditions initiales qu'un modèle linéaire comme IP. En d'autres termes, la perturbation induite par l'initialisation en début de calcul se propage sur le reste du calcul pour un modèle SSG ou LS contrairement à un modèle IP ou un modèle à deux équations. Pour résoudre cette difficulté, il faudrait initialiser le calcul de couche limite avec une solution convergée, par exemple avec une solution de similitude locale. Par contre, l'idée de démarrer le calcul plus en amont afin de laisser converger la solution est à proscrire : la figure 14.1 montre en effet sur un calcul de plaque plane que plus le calcul démarre à un Reynolds R_θ faible, plus l'erreur commise à l'initialisation du calcul se propage sur le domaine de calcul.

14.3 Couche limite tridimensionnelle : cas de l'aile GARTEUR

14.3.1 Présentation de l'expérience

La configuration de l'aile a été conçue dans le cadre d'une coopération européenne GARTEUR (Group for Aeronautical Research and Technology in Europe) pour répondre aux exigences d'industriels comme AIRBUS. La configuration de l'aile correspond à une situation transsonique. Les mesures de turbulence étant difficilement réalisables en écoulement transsonique, l'expérience a été faite à basse vitesse. Ce choix est motivé par le fait que, en transsonique, les effets de compressibilité sur la structure de la turbulence sont négligeables (Morkovin, 1961). La configuration basse vitesse AD/AG07 de l'aile GARTEUR a été conçue dans le but de reproduire une distribution de pressions similaire à celle rencontrée sur une voilure transsonique super-critique. L'écoulement autour de l'aile GARTEUR AD/AG07 étant incompressible, les modèles de turbulence construits en incompressible sont applicables.

Les caractéristiques de l'aile GARTEUR AD/AG07 sont détaillées dans les thèses de Maciel (1994) et Doussinault (1998). Sa forme géométrique est rappelée sur les figures 14.19 et 14.20. La voilure présente un gradient de pression défavorable sur la partie arrière de l'extrados (cf figure 14.23) donnant un écoulement à la limite du décollement tridimensionnel. Les lignes de courant extérieures et au voisinage de la paroi sont présentées sur les figures 14.21 et 14.22. Elles donnent une bonne idée de l'écoulement externe ainsi que de l'écoulement pariétal fortement tridimensionnel.

Cette configuration permet donc de juger des performances de notre modèle sur des couches limites tridimensionnelles proches du décollement.

14.3.2 Calculs extrados

Seul l'écoulement sur l'extrados de l'aile GARTEUR sera calculé car il présente, de part sa situation proche d'un décollement tridimensionnel, plus d'intérêt que l'intrados de l'aile.

Mode direct

Le mode direct consiste à calculer la couche limite à partir de la connaissance de la distribution de vitesse U_e extérieure à la couche limite. Un calcul de couche limite en mode direct conduit à une singularité au point de décollement (Cousteix et Houdeville, 1981). Au voisinage du point de décollement, le calcul est très sensible aux divers paramètres numériques tels que le schéma de discrétisation par exemple. La solution pour éviter cette sensibilité numérique consiste à calculer la couche limite en mode inverse.

Mode inverse

En mode inverse, la distribution de vitesse extérieure n'est plus une donnée mais une inconnue du système. Les conditions aux limites sur la vitesse extérieure sont remplacées dans 3C3D par la connaissance de la répartition des épaisseurs de déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy \quad \text{et} \quad \delta_2 = \int_0^\delta - \left(\frac{\rho W}{\rho_e U_e}\right) dy$$

où W est la vitesse dirigée selon la direction z perpendiculaire à la direction principale x de l'écoulement et à la direction y normale à la paroi. Cette méthode inverse est détaillée par Malecki (1994) et Doussinault (1998). Doussinault (1998) conclut que le mode inverse est le plus adapté aux calculs de couche limite sur l'aile GARTEUR car son extrados se trouve dans une situation proche du décollement.

14.3.3 Analyse des résultats en mode inverse sur l'extrados

Les mesures réalisées à F2 (Maciel, 1994) sur l'aile GARTEUR :
- de frottement par film chaud,
- de vitesse avec des sondes deux trous (s2t),
- des grandeurs turbulentes par LDA

sont utilisées pour évaluer les performances de différents modèles de turbulence dont le modèle $SSG - \gamma$ et le modèle de Launder et Shima (1989). Les modèles à deux équations de Chien (1982) et So et al. (1991) ainsi qu'un modèle de longueur de mélange sont également utilisés en guise de comparaison avec les modèles RSM.

Coefficient de frottement

La distribution du coefficient de frottement sur l'extrados de l'aile GARTEUR est présentée sur la figure 14.24 pour le modèle $SSG - \gamma$, le modèle LS et un modèle de longueur de mélange. Les résultats pour le mode direct et le mode inverse sont assez éloignés, en particulier dans la région proche du bord de fuite qui se trouve dans une situation proche du décollement. Le mode inverse apparaît donc ici plus adapté au calcul de l'extrados de l'aile GARTEUR et sera utilisé dans tous les calculs qui seront présentés par la suite.

Le coefficient de frottement issu du modèle $SSG - \gamma$ et du modèle de Launder et Shima (1989) est comparé à celui issu de l'expérience (sondes à deux trous) et d'un modèle de longueur de mélange (noté LDM). Les résultats sont présentés sur les figures 14.25 à une envergure de 44% et 14.26 à une envergure de 68%. Ces figures montrent que le modèle $SSG - \gamma$ prévoit bien mieux le C_f qu'un modèle RSM LS. Les résultats obtenus en bidimensionnel sont donc confirmés par ces calculs en tridimensionnel.

Les résultats pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991), présentés sur les figures 14.27 et 14.28, montrent que l'amélioration apportée par le modèle $SSG-\gamma$ est encore plus importante par rapport à ce type de modèles à deux équations que comparé au modèle RSM LS.

Néanmoins, les figures 14.25 et 14.26 montrent que le coefficient de frottement est perturbé au départ du calcul pour seulement revenir à des valeurs proches de l'expérience à $70-80\%$ de corde. L'évolution du C_f présente le même type de déficience qu'en bidimensionnel. Comme cela a déjà été mentionné (paragraphe 14.2.3), de part les problèmes d'initialisation du calcul en turbulent et des difficultés à converger d'un modèle RSM par rapport à un modèle à deux équations, le modèle SSG donnera avec le code 3C3D des résultats médiocres sur le début de la couche limite. Comme le constate Doussinault (1998), il semble même que ce problème soit plus prononcé qu'en bidimensionnel. Malgré tout, le coefficient de frottement reste proche des valeurs expérimentales pour le modèle $SSG-\gamma$, notamment en comparaison des modèles à deux équations et RSM testés.

Profils de vitesse

Les résultats pour les modèles $SSG-\gamma$ et LS sont présentés sur les figures 14.29 et 14.30. Ceux pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991) sont présentés sur la figure 14.31. Les résultats du modèle $SSG-\gamma$ sont dès lors assez satisfaisants notamment comparés aux modèles à deux équations. Comme attendu, les profils de vitesse montrent que le modèle $SSG-\gamma$ réagit mieux que le modèle aux tensions de Reynolds LS au gradient de pression adverse lorsque ce dernier est élevé. Cette caractéristique se retrouve d'ailleurs sur le C_f.

Les résultats pour le modèle de longueur de mélange sont présentés sur la figure 14.32. Ce modèle algébrique ne prévoit pas correctement la distribution de vitesse dans l'épaisseur de la couche limite. Un modèle de longueur de mélange est en effet incapable de représenter réellement les phénomènes mis en jeu dans cet écoulement de couche limite tridimensionnelle proche du décollement. Ce type de modèles ne donne, dans ce cas précis, que des résultats satisfaisants pour le coefficient de frottement C_f.

Grandeurs turbulentes

Le profil de l'énergie cinétique turbulente k dans l'épaisseur de la couche limite est présenté sur les figures 14.33 et 14.34 pour les modèles $SSG-\gamma$ et LS et sur la figure 14.35 pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991). Le profil de la tension croisée $\overline{u'v'}$ où (u est dans le sens de l'écoulement principal et v selon la normale à la paroi y) est présenté sur la figure 14.36 pour les modèles $SSG-\gamma$ et LS. Remarquons que cette tension croisée est notée $\overline{u'w'}$ dans le référentiel de l'aile Garteur (Doussinault, 1998).

D'un point de vue qualitatif, les tensions sont mieux représentées par le modèle $SSG-\gamma$ que par le modèle LS (figures 14.33 et 14.34). Mais d'un point de vue quantitatif, les tensions sont assez éloignées de leur valeur expérimentale, et ce d'autant plus que l'on se rapproche du bord de fuite. L'effet du gradient de pression adverse élevé devrait être pourtant bien reproduit par le modèle $SSG-\gamma$ si on s'en réfère aux résultats de ce modèle en bidimensionnel pour des situations proches du décollement.

Le profil des tensions montre que l'épaisseur de la couche limite est sous-évaluée par le modèle. Cette sous-évaluation de δ se retrouve d'ailleurs sur le profil de vitesse (figures 14.29 et 14.30). Nous retrouvons

ici les problèmes constatés sur l'expérience de Perry, mais de manière bien plus prononcée. Ainsi, comme en bidimensionnel mais de manière plus prononcée, il semble que l'erreur ne provienne pas entièrement du modèle de turbulence. Les problèmes d'initialisation et de dépendance aux conditions initiales énoncés précédemment en ce qui concerne les modèles RSM (cf. paragraphe sur le C_f) expliquent au moins en partie ces écarts. Là encore, il serait intéressant d'initialiser le calcul avec une solution déjà convergée afin d'évaluer l'erreur issue de l'initialisation défectueuse.

14.4 Conclusion sur les performances du modèle $SSG - \gamma$ en couche limite

Les calculs de couches limites bidimensionnelles effectués avec le modèle $SSG - \gamma$ ont montré que le modèle améliorait sensiblement la prévision du C_f et de la vitesse moyenne lorsque le gradient de pression adverse augmentait en comparaison du modèle SSG standard et du modèle de Launder et Shima (1989). Pour les gradients de pression adverse intense (Skåre et Krogstad, 1994), le modèle se comporte même mieux que le modèle SST de Menter (1992b) pourtant réputé pour ce type de configurations. Il a été vérifié que le modèle $SSG - \gamma$, à la différence des modèles SSG et LS, conservait la loi logarithmique quel que soit le gradient de pression adverse et qu'il reproduisait la loi en racine pour les gradients adverse élevés. Les contraintes pour reproduire la loi logarithmique et la loi en racine (paragraphe 3.4) ont donc bien eu l'effet escompté.

Par contre, l'initialisation des calculs turbulents pour les modèles RSM comme le SSG reste perfectible. Débuter le calcul avec une solution déjà convergée améliorerait sans doute les résultats obtenus avec 3C3D. Le calcul de couche limite en mode inverse sur l'extrados de l'aile Garteur a démontré des résultats encourageants sur le C_f pour le modèle $SSG - \gamma$ mais les profils de vitesse et des tensions de Reynolds restent encore trop perturbés par l'initialisation pour être comparés aux mesures.

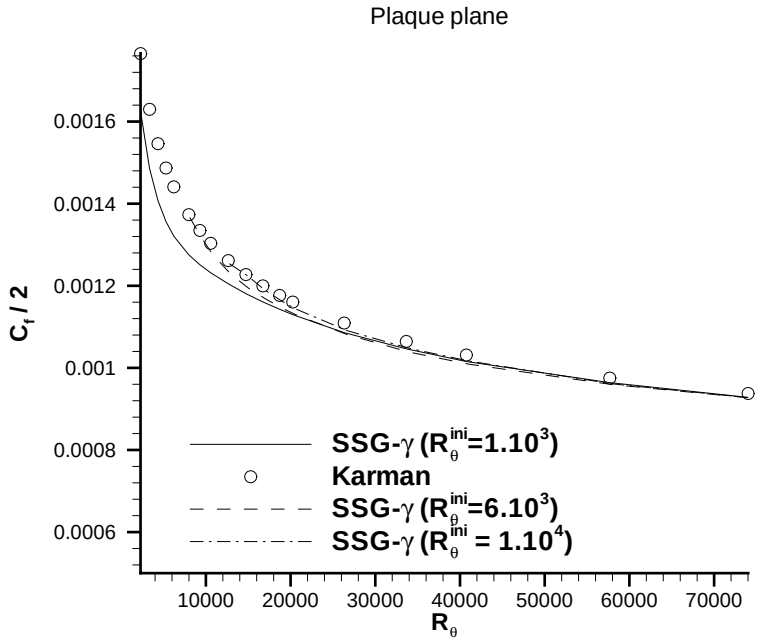


FIG. 14.1 – Coefficient de frottement en plaque plane - influence du nombre de Reynolds initial

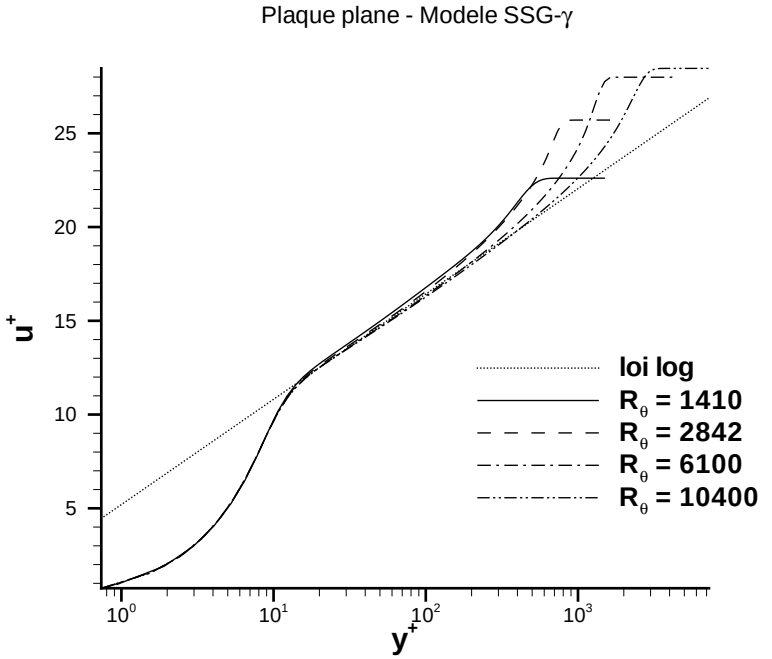


FIG. 14.2 – Vérification de la loi logarithmique en plaque plane

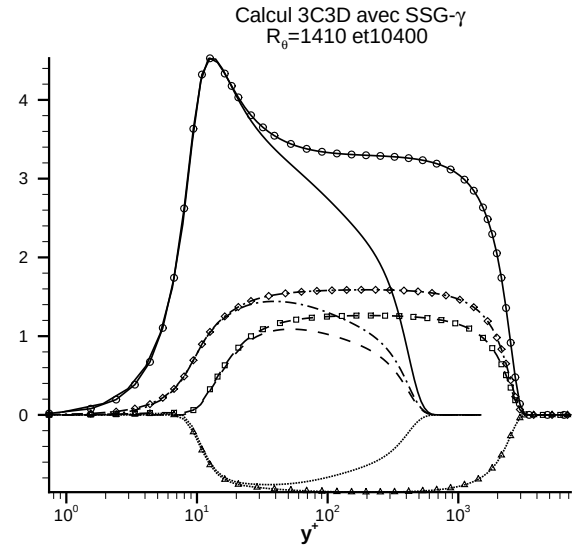


FIG. 14.3 – Profil des tensions de Reynolds pour le modèle $SSG-\gamma$ en variable de paroi sur plaque plane à $R_\theta = 1410$ et $R_\theta = 6010$

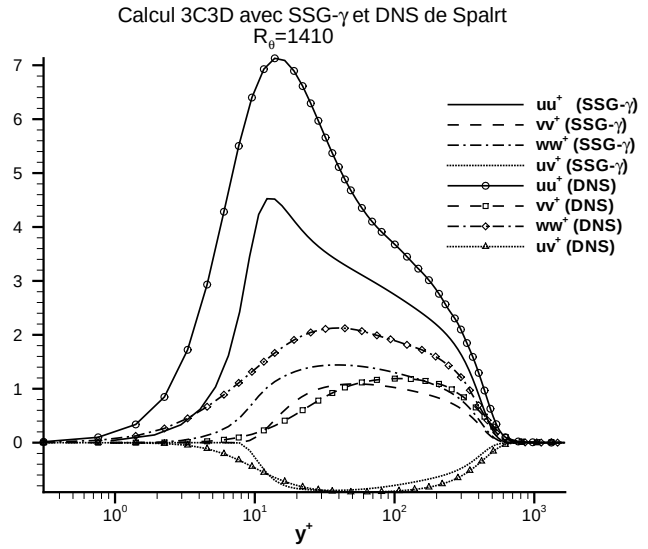


FIG. 14.4 – Tensions de Reynolds au voisinage de la paroi pour le modèle $SSG - \gamma$ et les DNS de Spalart à $R_\theta = 1410$

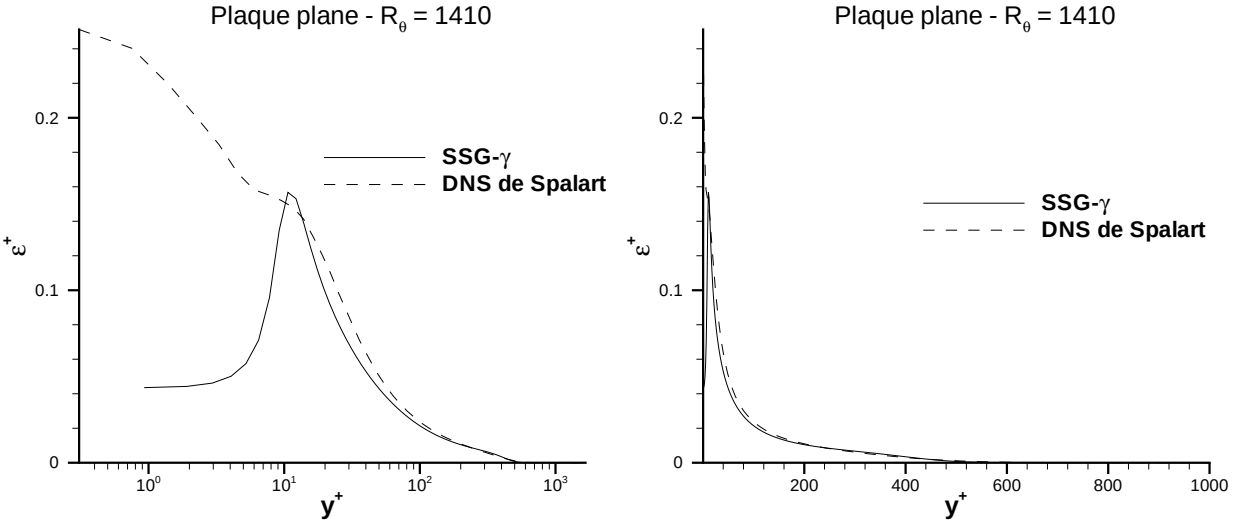


FIG. 14.5 – Profil de ε^+ sur plaque plane à $R_\theta = 1410$: comparaison entre le modèle $SSG - \gamma$ et les DNS de Spalart

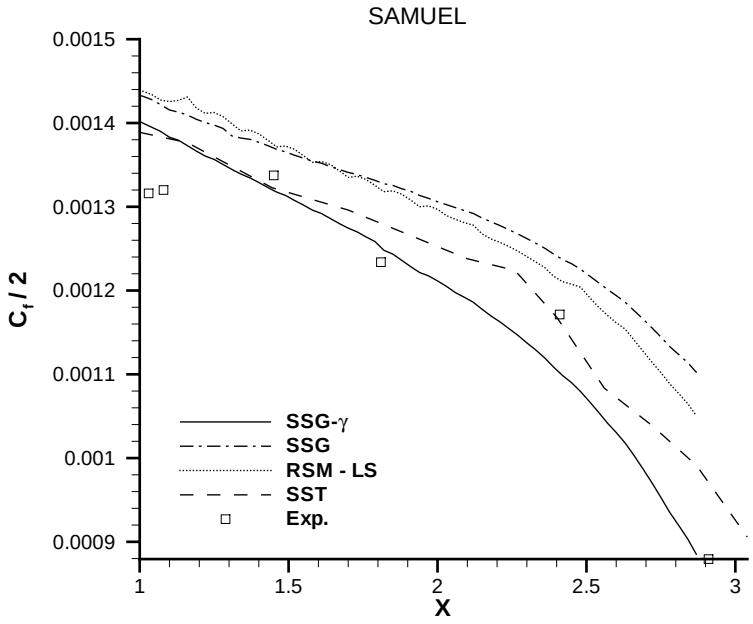


FIG. 14.6 – Coefficient de frottement (Samuel)

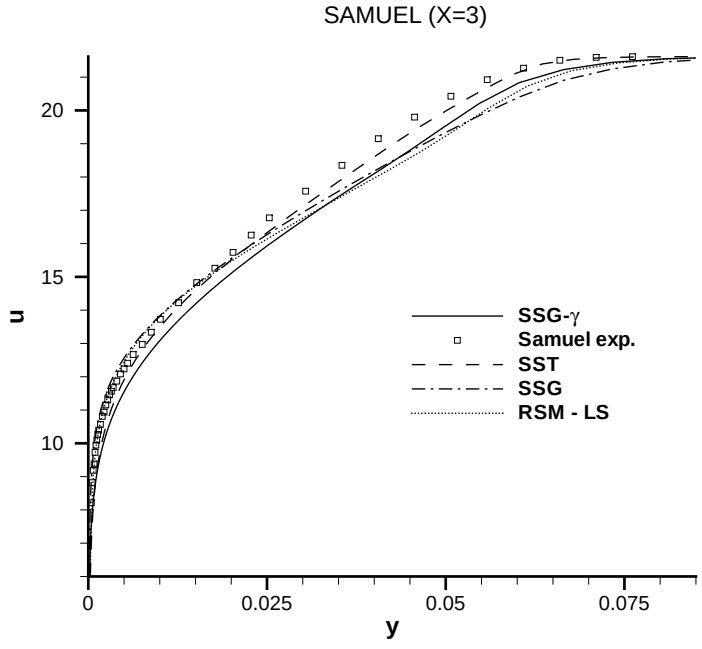


FIG. 14.7 – Profil de vitesse (Samuel)

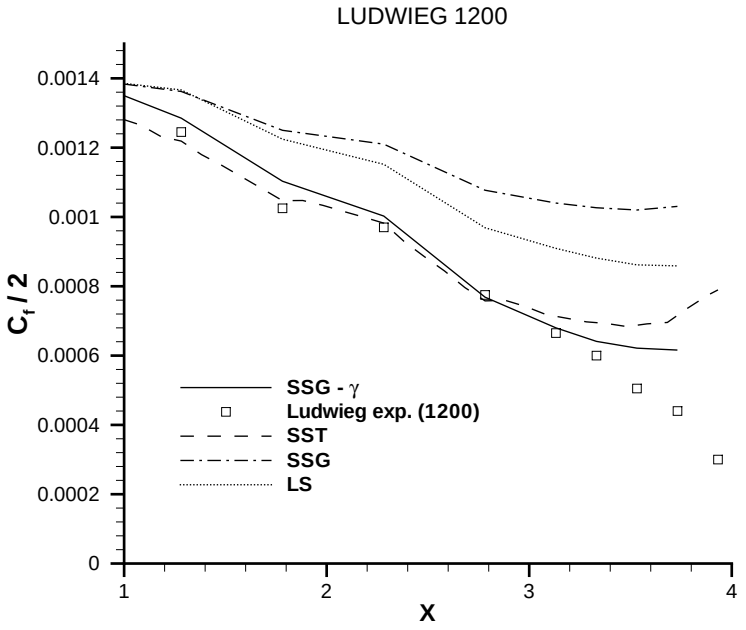


FIG. 14.8 – Coefficient de frottement (Ludwieg)

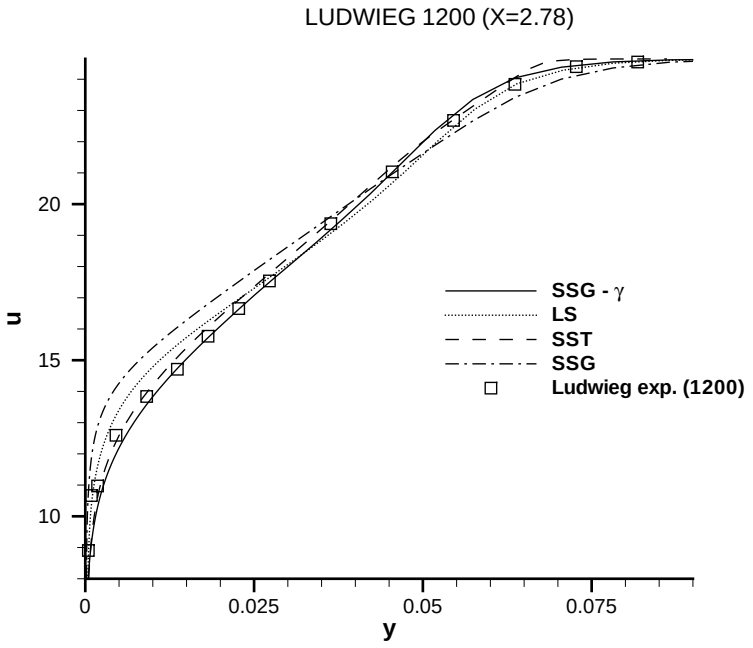


FIG. 14.9 – Profil de vitesse (Ludwieg)

Perry ($10m.s^{-1}$)

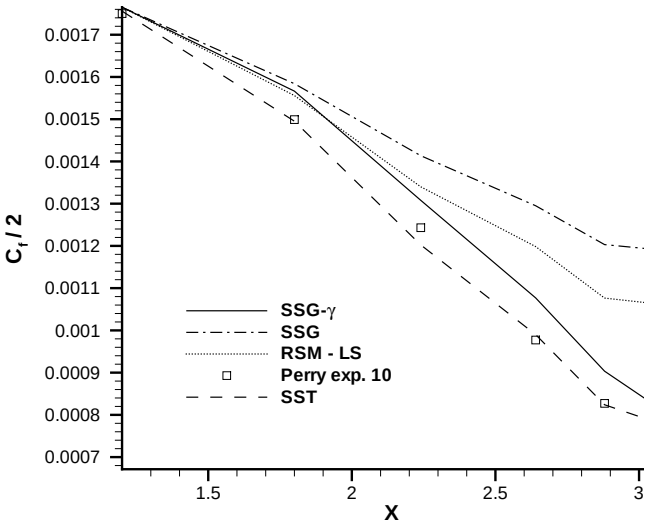


FIG. 14.10 – Coefficient de frottement (Perry)

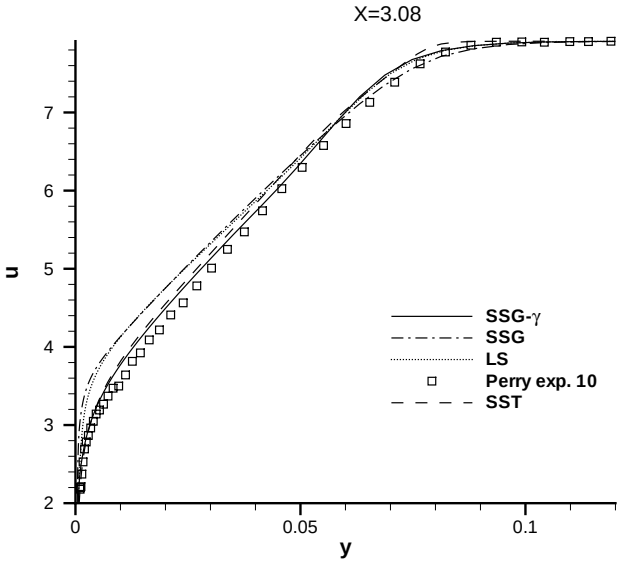


FIG. 14.11 – Profil de vitesse (Perry)

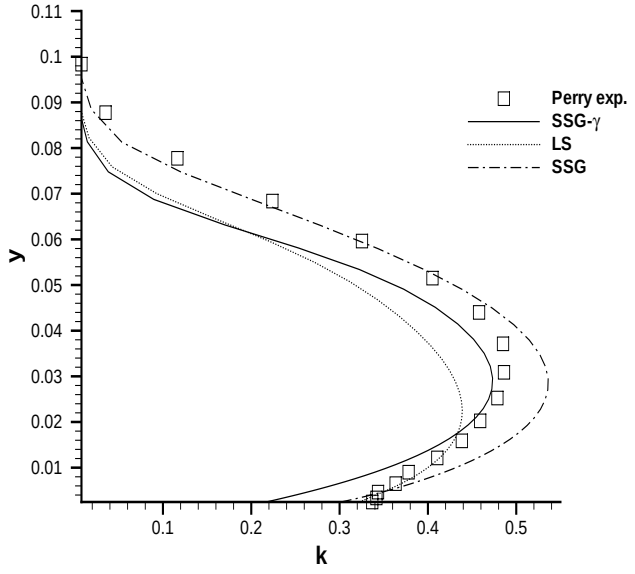


FIG. 14.12 – Profil d'énergie cinétique turbulente (Perry)

Bradshaw 3300

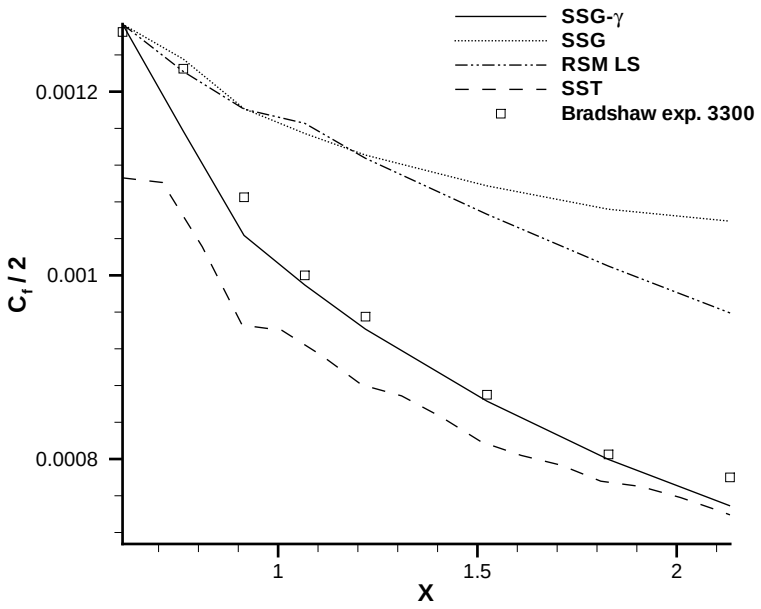


FIG. 14.13 – Coefficient de frottement (Bradshaw 3300)

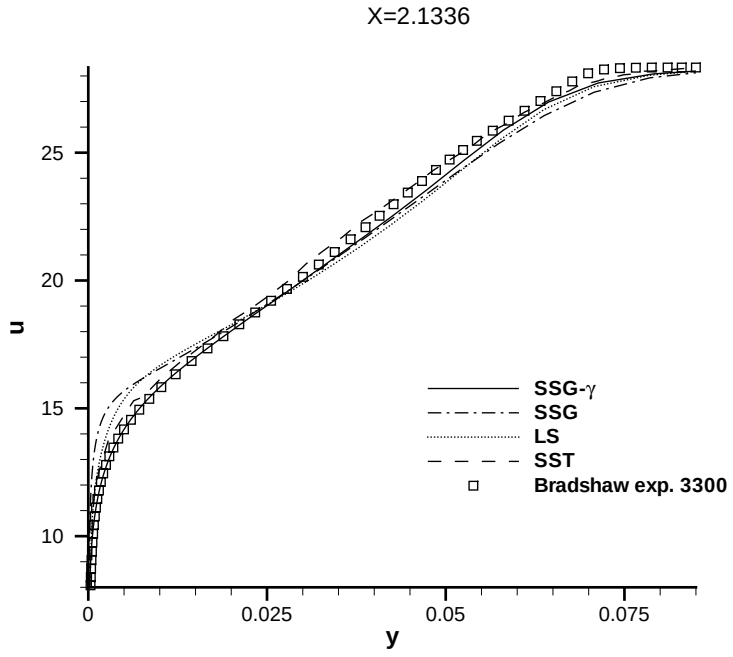


FIG. 14.14 – Profil de vitesse (Bradshaw 3300)

Skåre et Krogstad

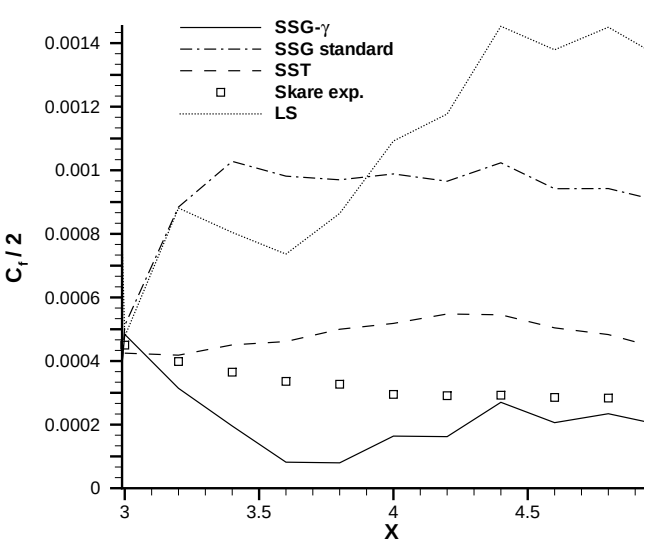


FIG. 14.15 – Coefficient de frottement (Skåre et Krogstad)

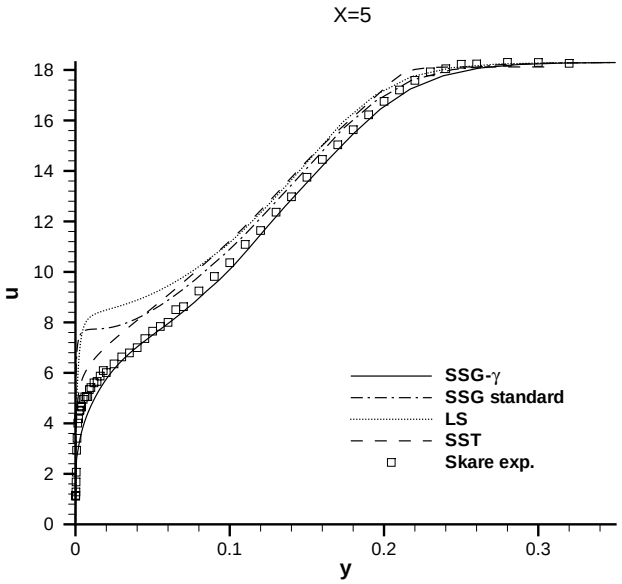


FIG. 14.16 – Profil de vitesse (Skåre et Krogstad)

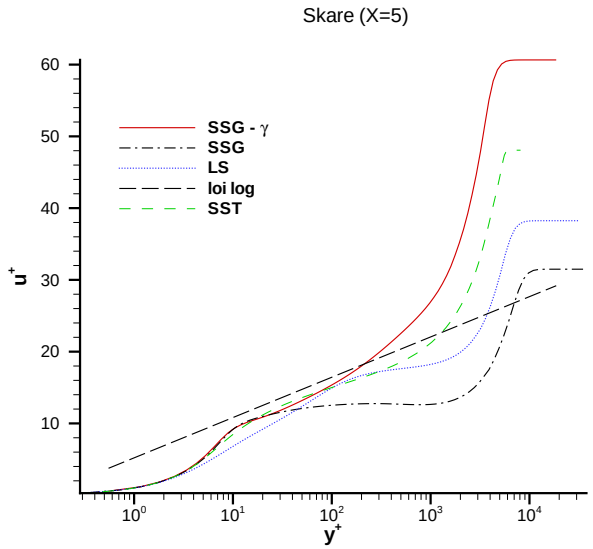


FIG. 14.17 – Vérification de la loi logarithmique (Skåre et Krogstad)

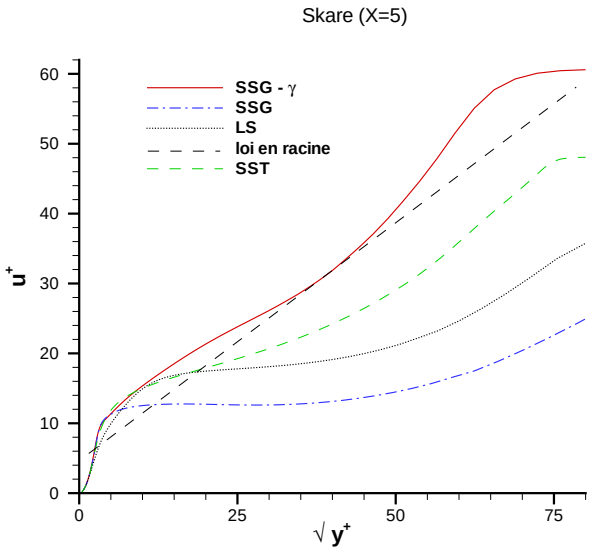


FIG. 14.18 – Vérification de la loi en racine (Skåre et Krogstad)

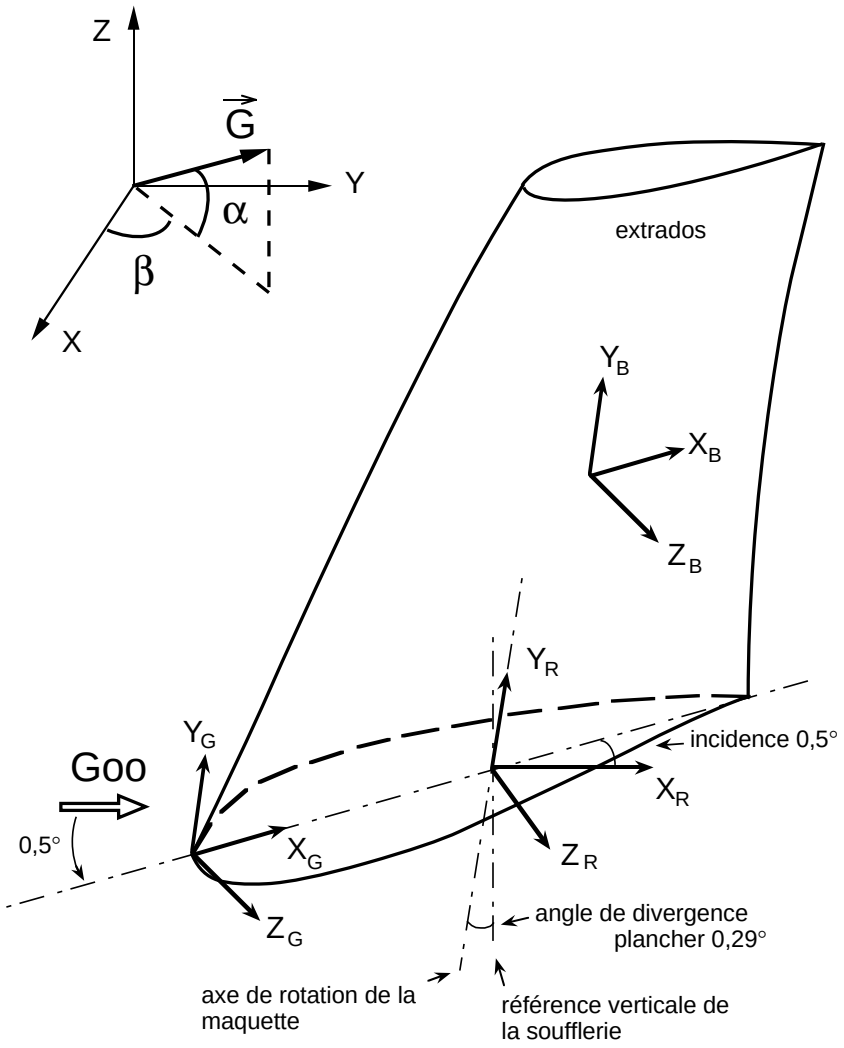


FIG. 14.19 – Aile GARTEUR

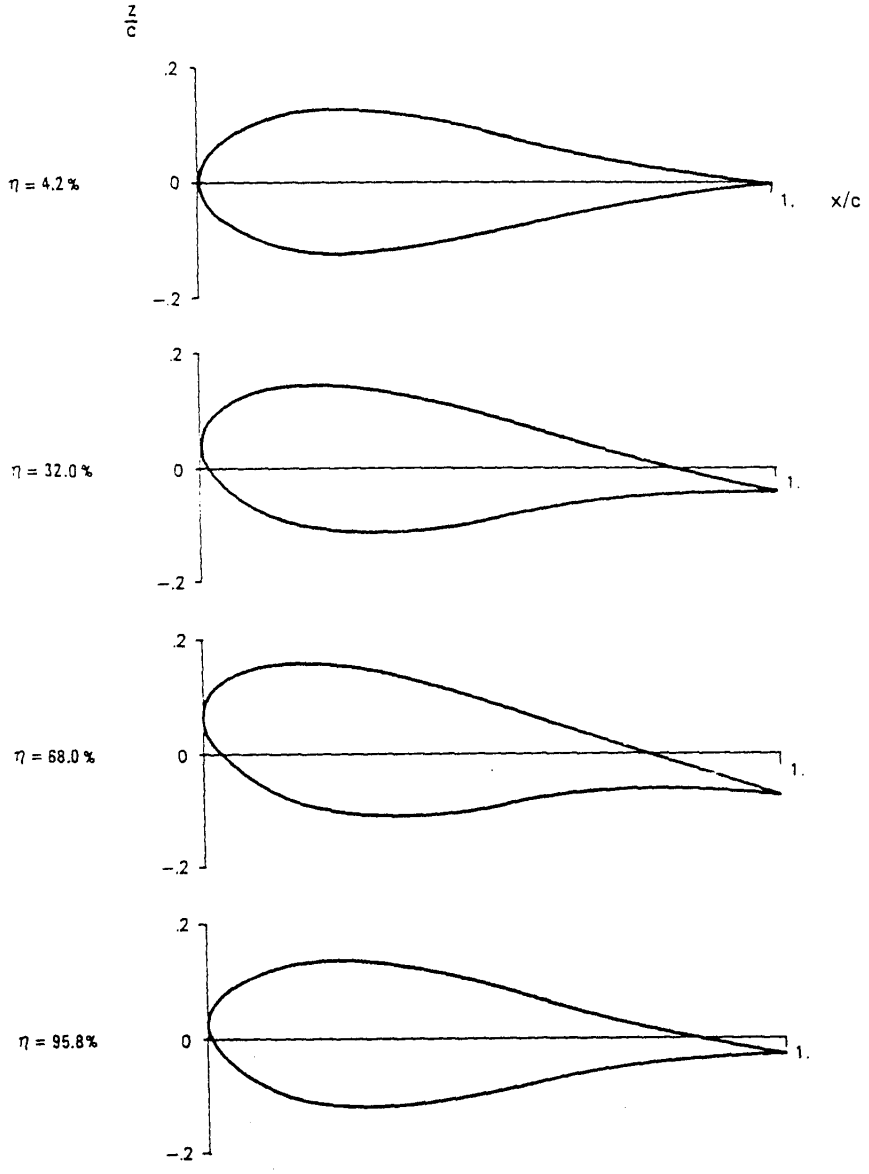


FIG. 14.20 – Sections longitudinales de l'aile Garteur

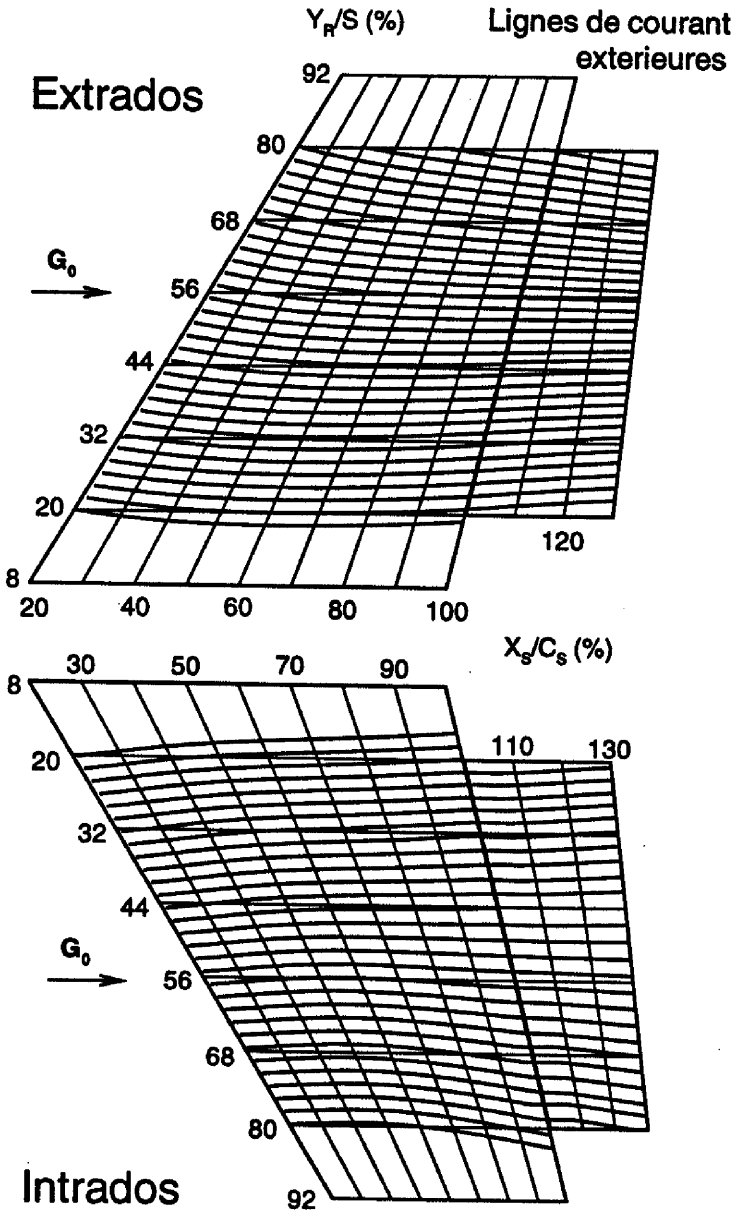


FIG. 14.21 – Lignes de courant extérieures à la couche limite (Garteur)

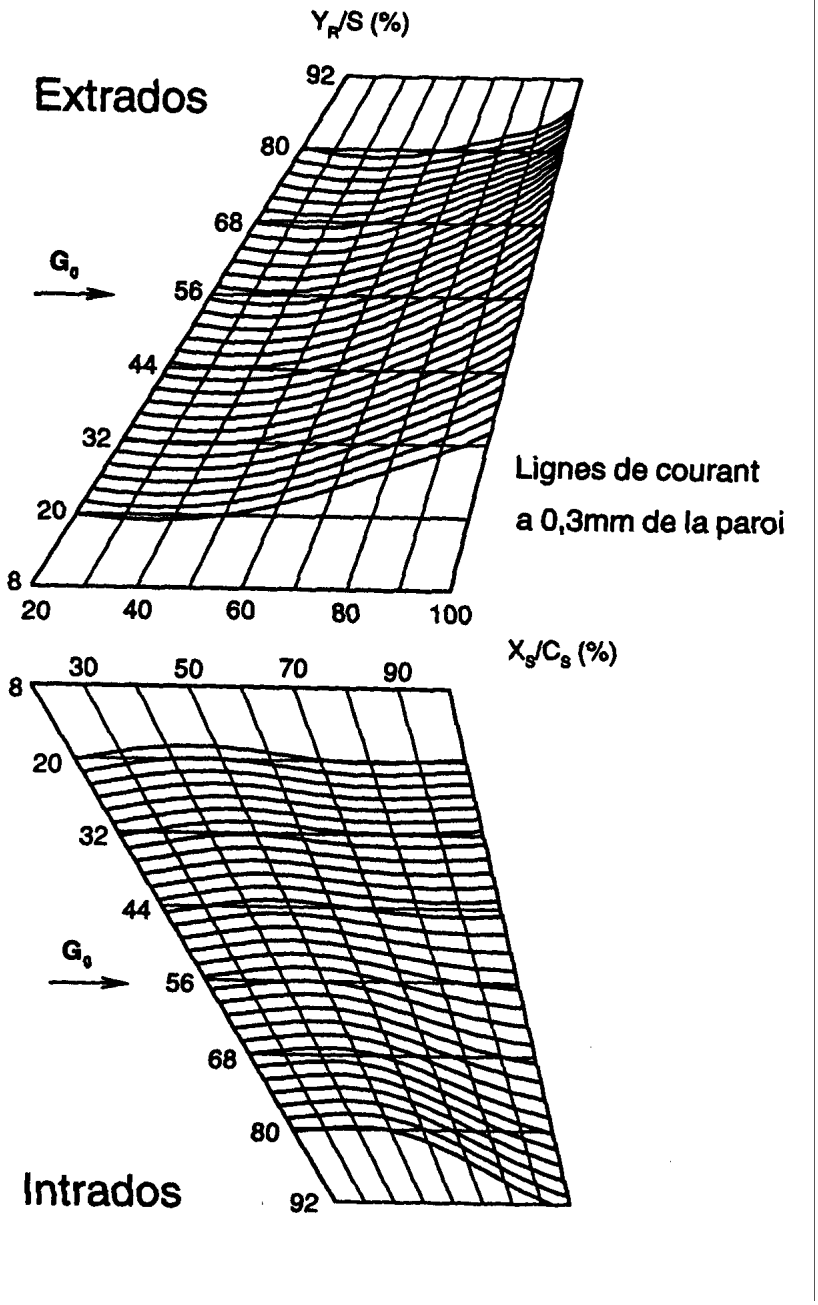


FIG. 14.22 – Lignes de courant à $0,3mm$ de la paroi à F2 (Garteur)

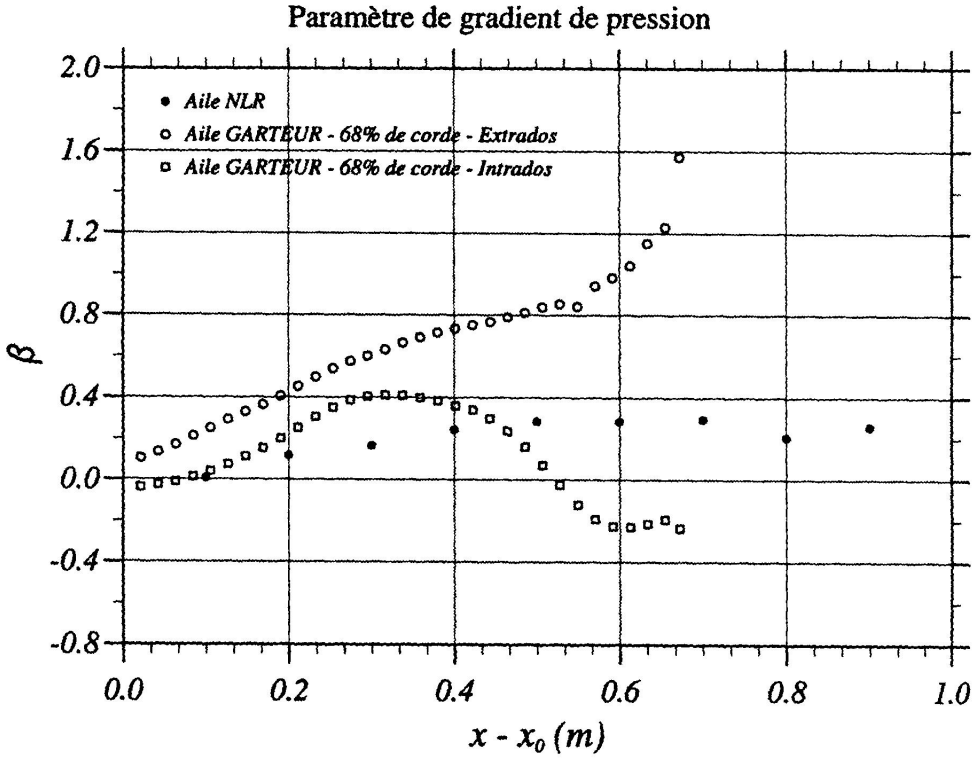


FIG. 14.23 – Distribution du gradient de pression adimensionné β à 68% d'envergure de l'aile Garteur

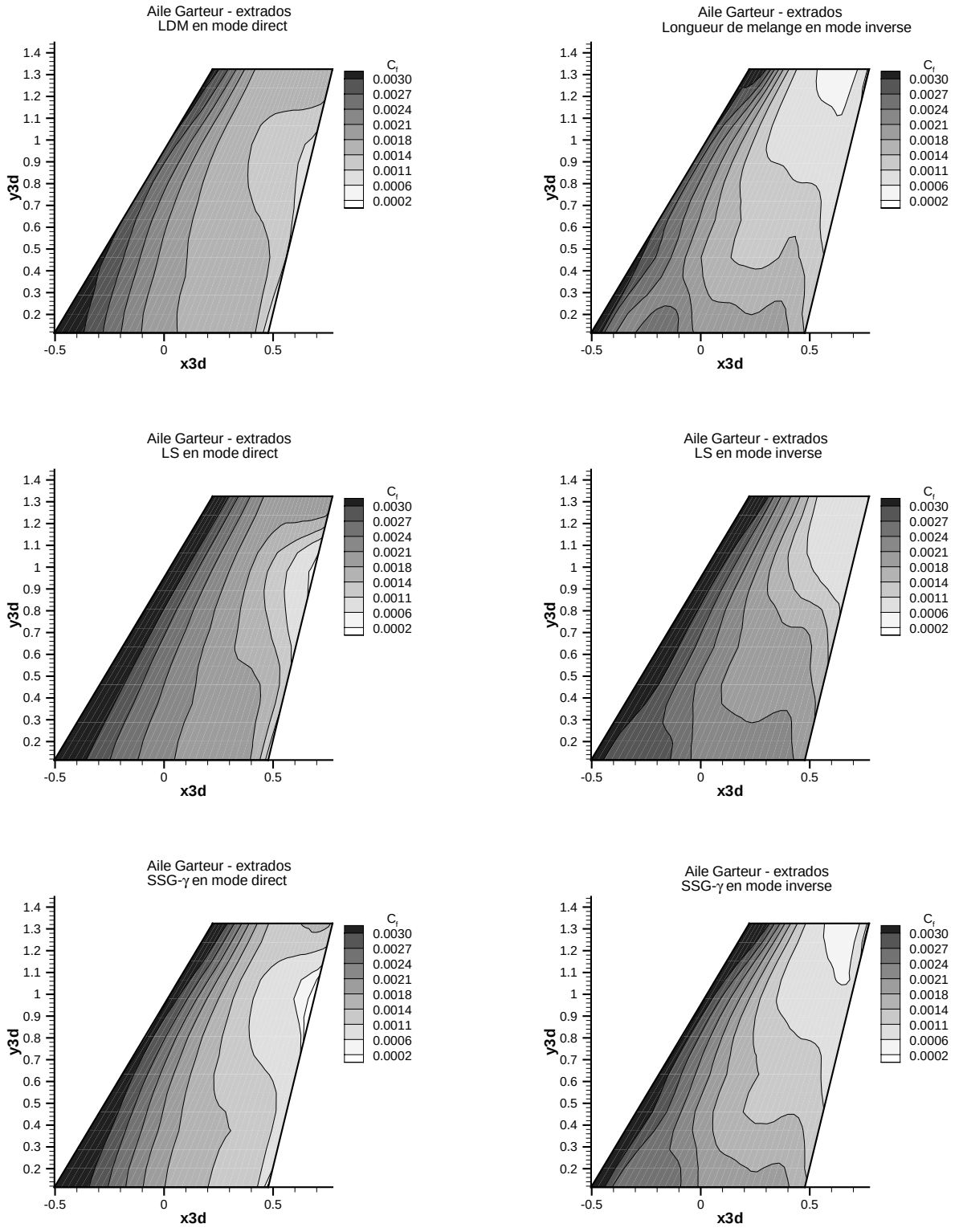


FIG. 14.24 – Distribution du coefficient de frottement sur l'extrados de l'aile Garteur

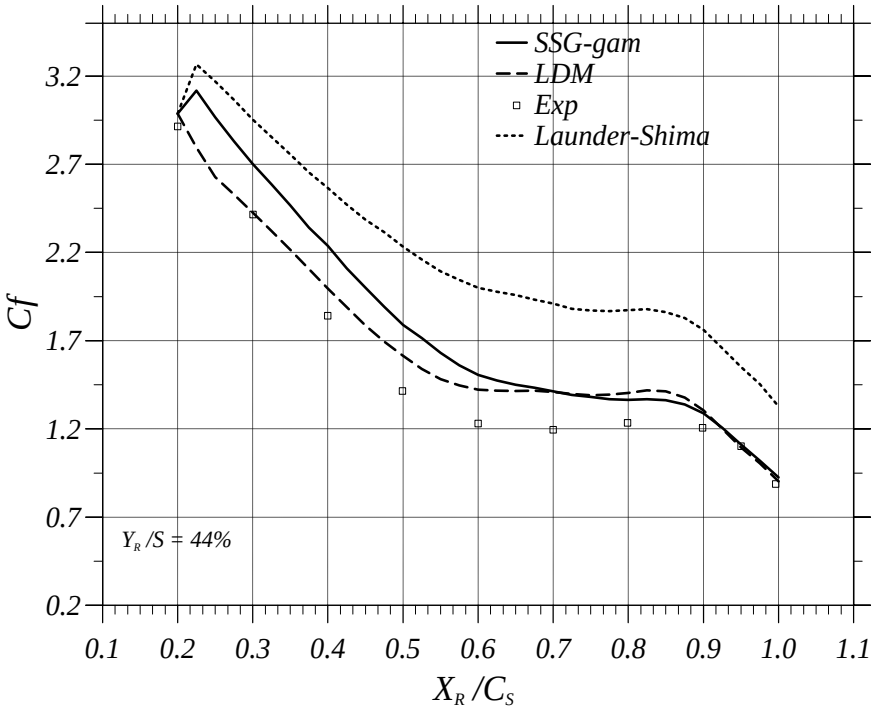


FIG. 14.25 – Coefficient de frottement à 44% d'envergure pour le modèle $SSG - \gamma$ et le modèle LS (Garteur)

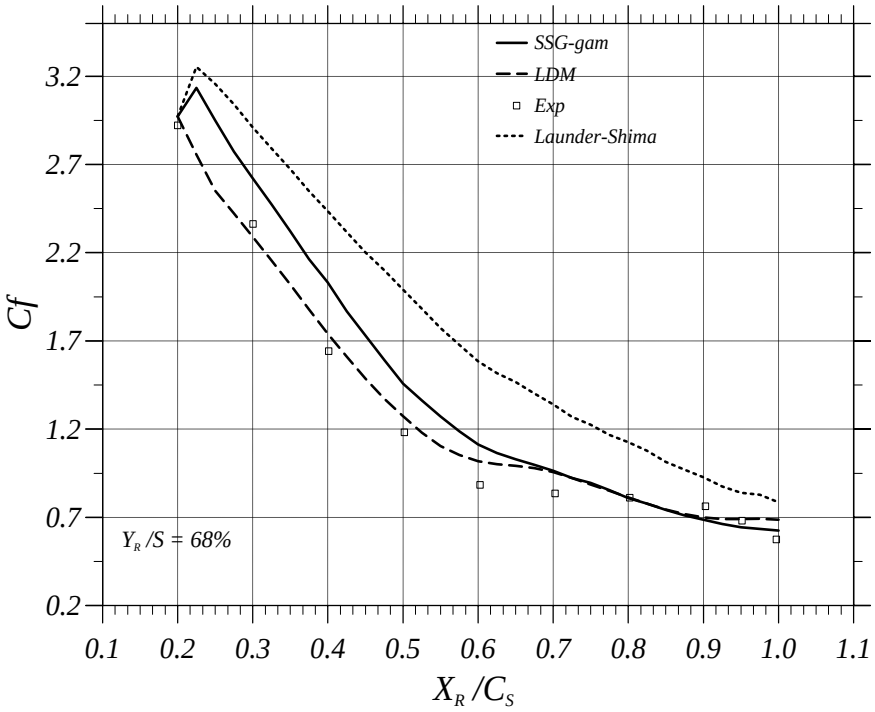


FIG. 14.26 – Coefficient de frottement à 68% d'envergure pour le modèle $SSG - \gamma$ et le modèle LS (Garteur)

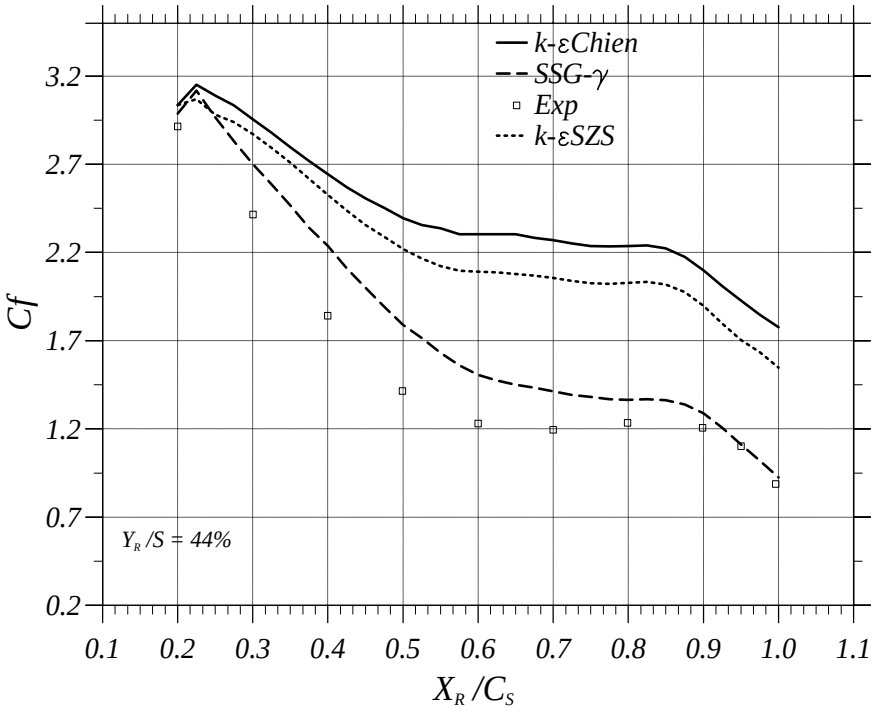


FIG. 14.27 – Coefficient de frottement à 44% d'envergure pour des modèles $k-\varepsilon$ (Garteur)

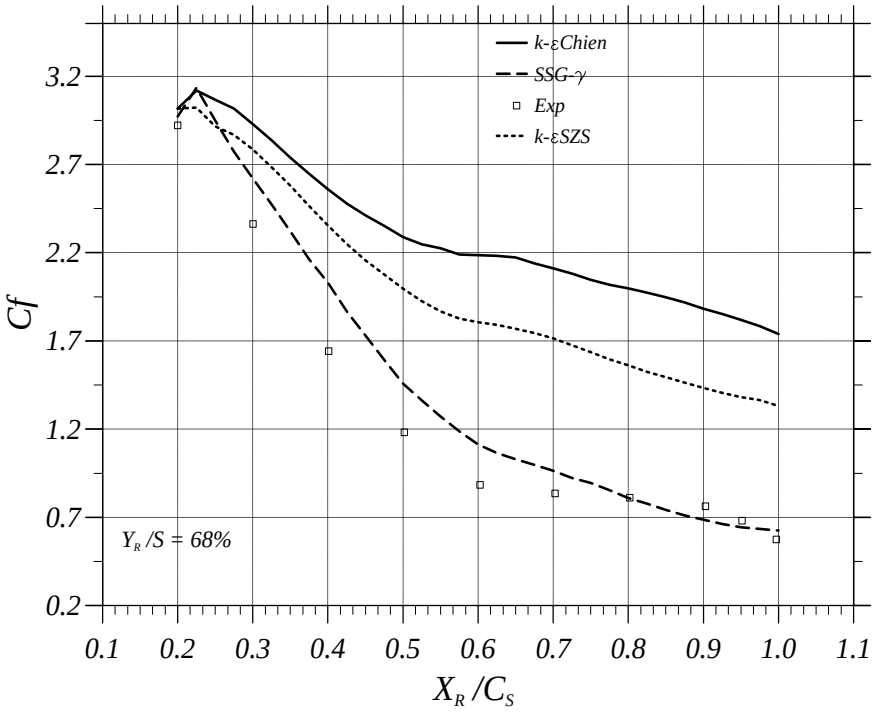


FIG. 14.28 – Coefficient de frottement à 68% d'envergure pour des modèles $k-\varepsilon$ (Garteur)

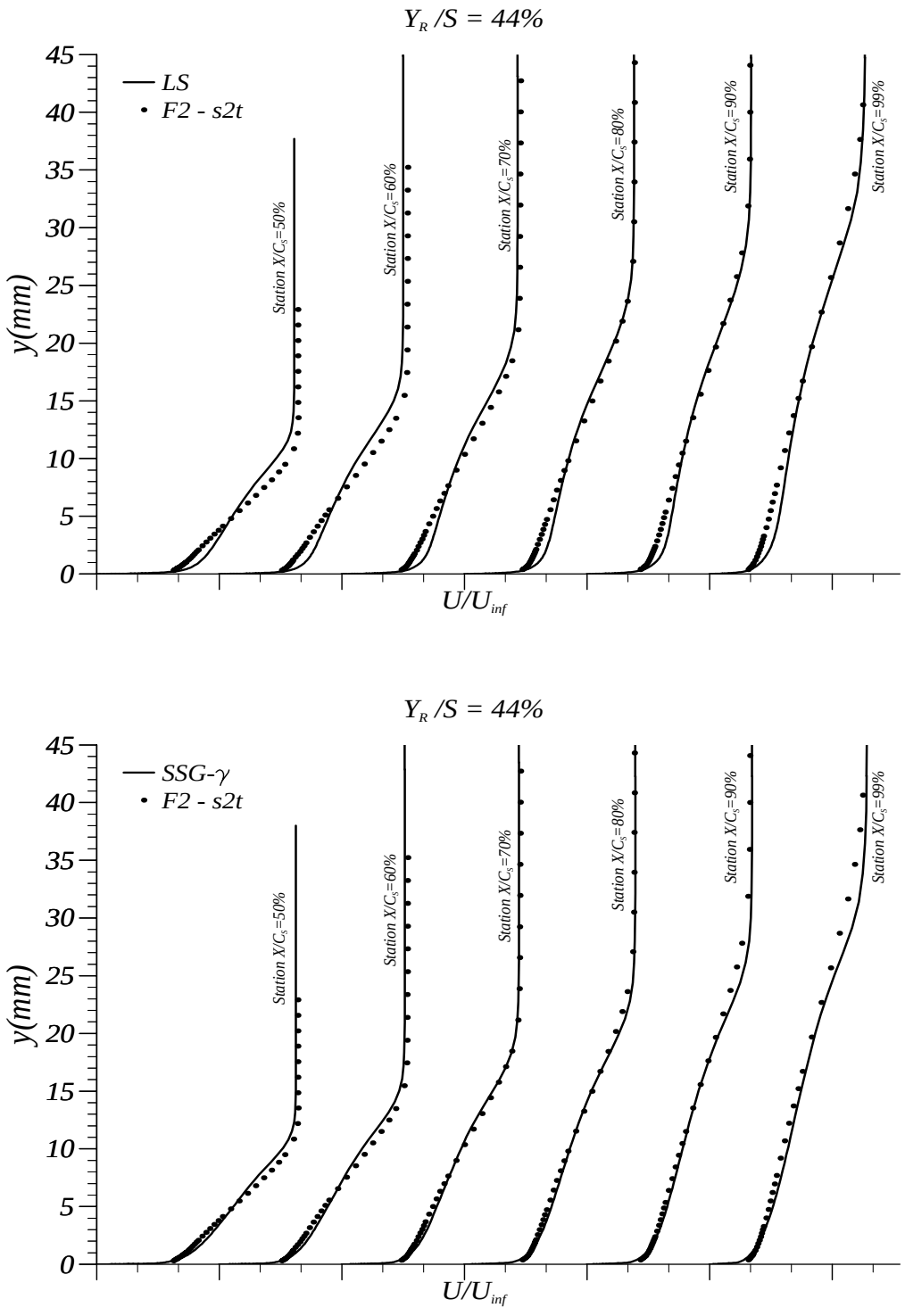


FIG. 14.29 – Profils de vitesse à 44% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur)

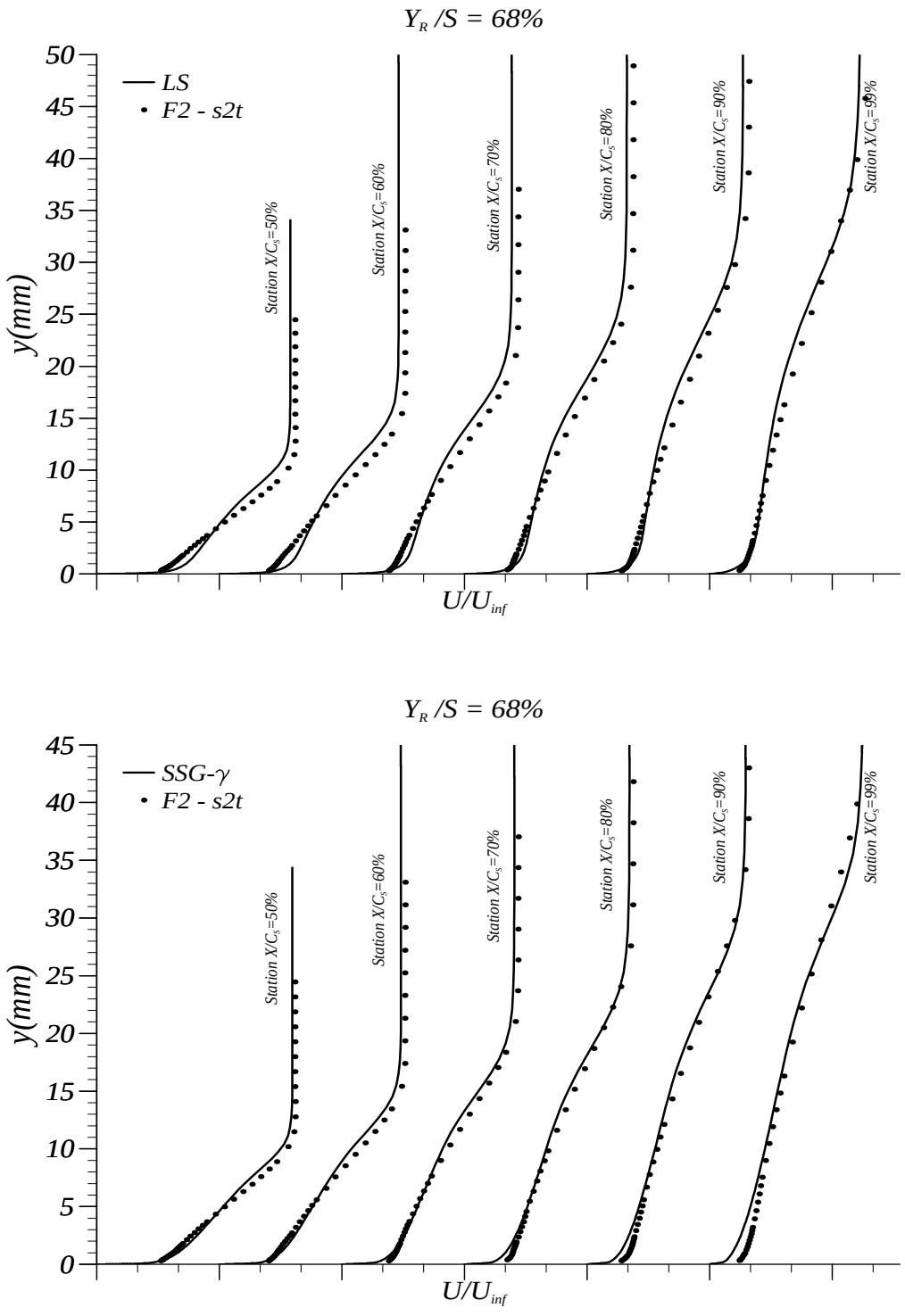


FIG. 14.30 – Profils de vitesse à 68% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur)

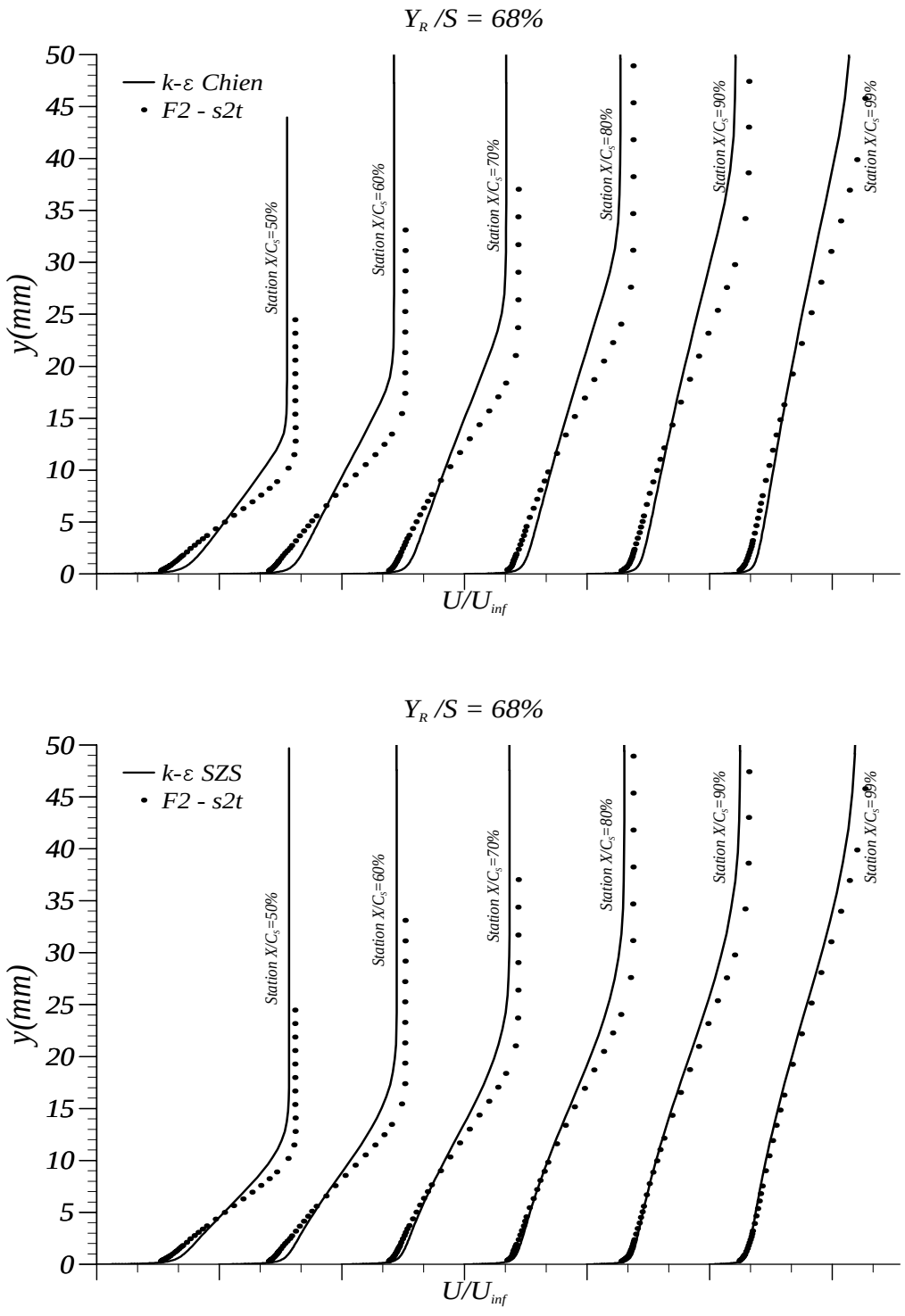


FIG. 14.31 – Profils de vitesse à 68% d'envergure pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991) (Garteur)

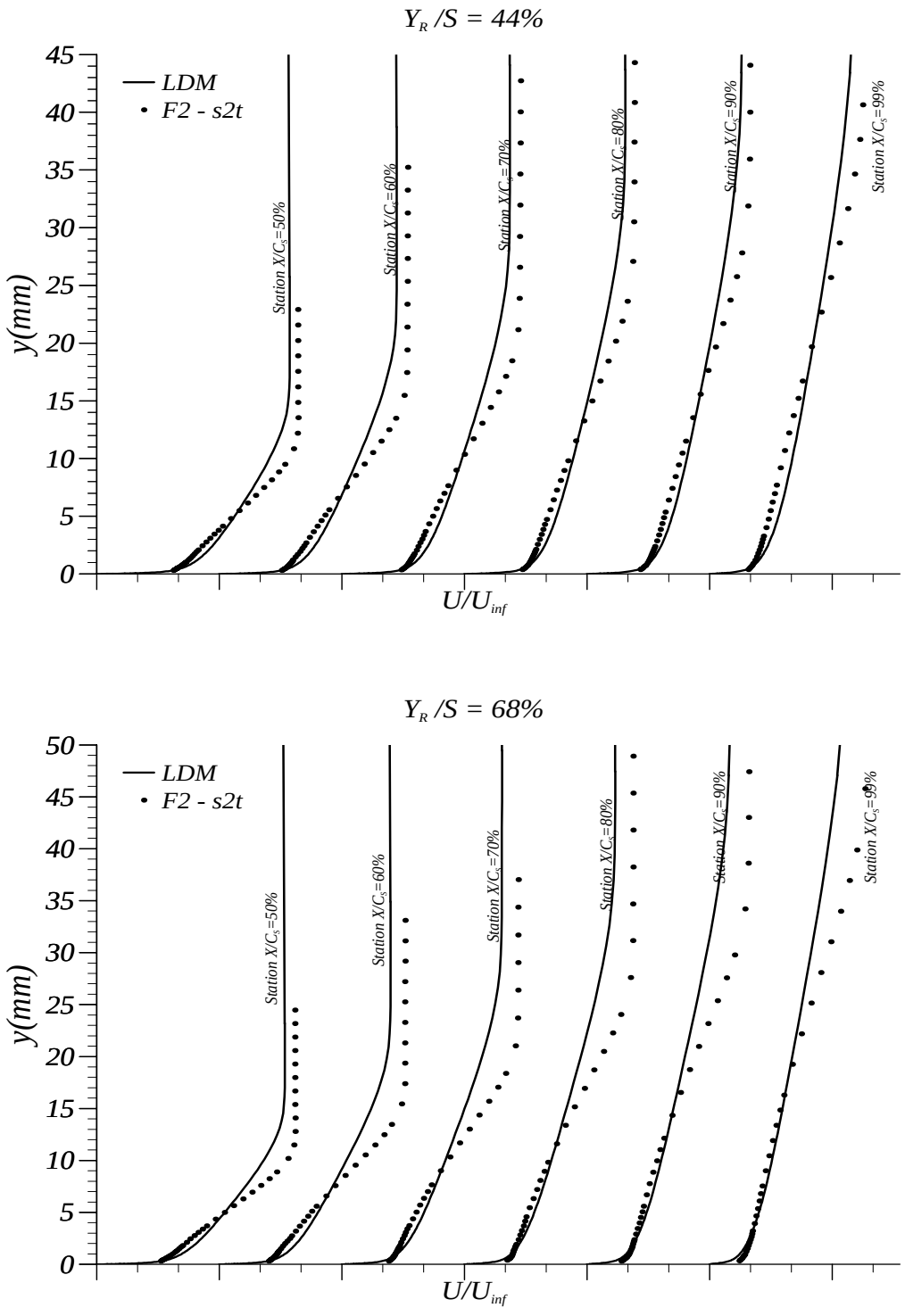


FIG. 14.32 – Profils de vitesse à 44% et 68% d'envergure pour un modèle de longueur de mélange (Garteur)

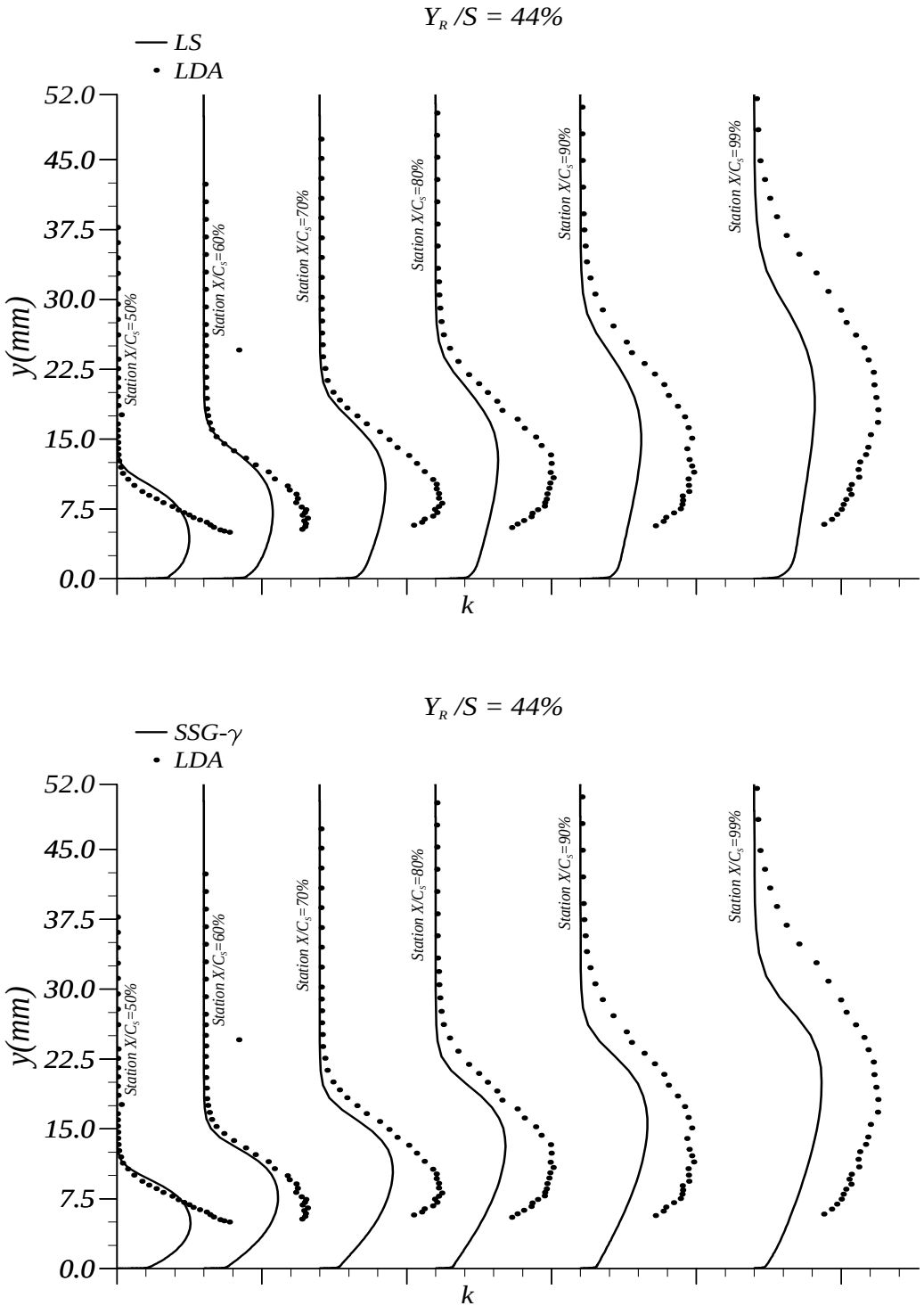


FIG. 14.33 – Profils de k à 44% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur)

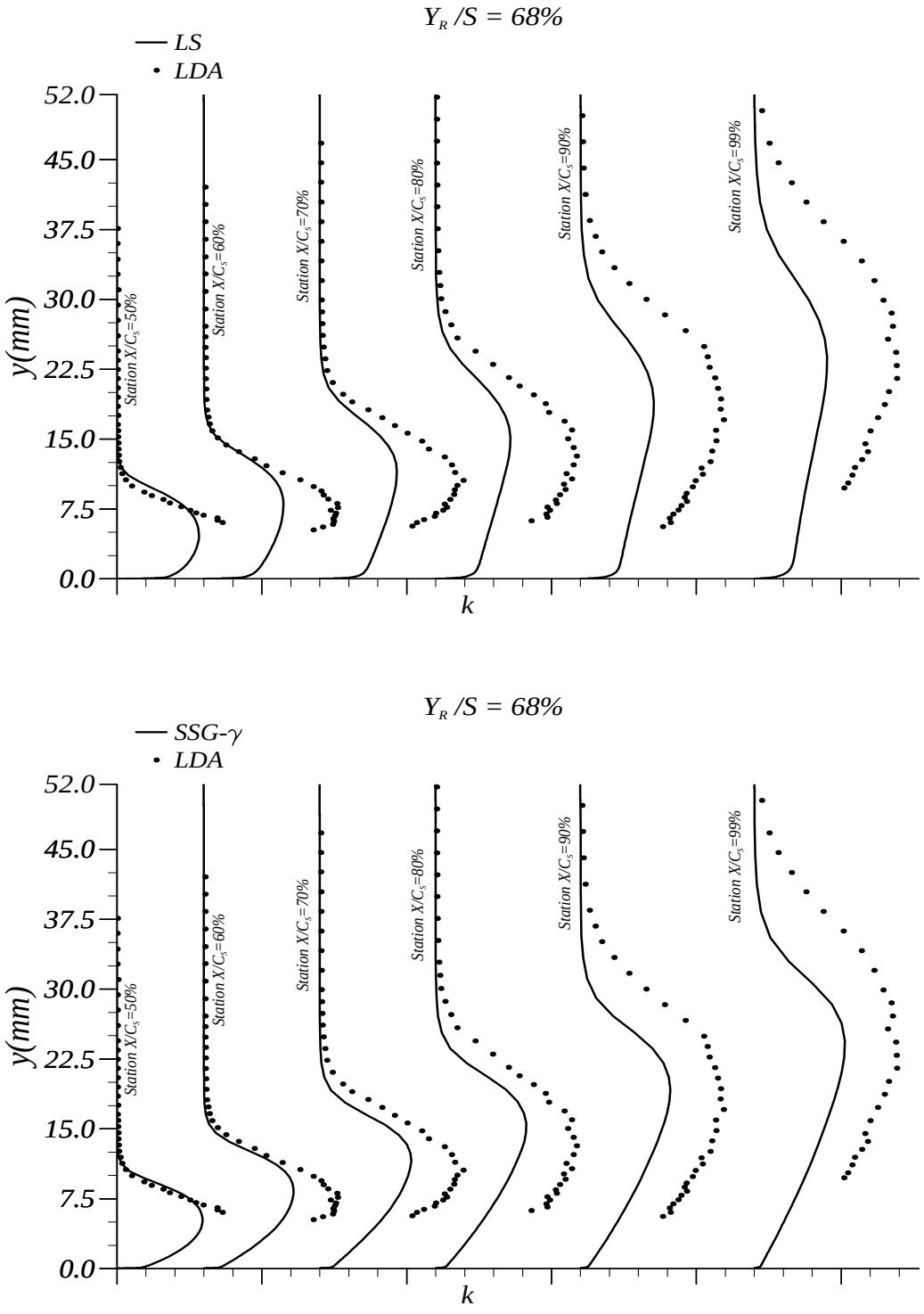


FIG. 14.34 – Profils de k à 68% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur)

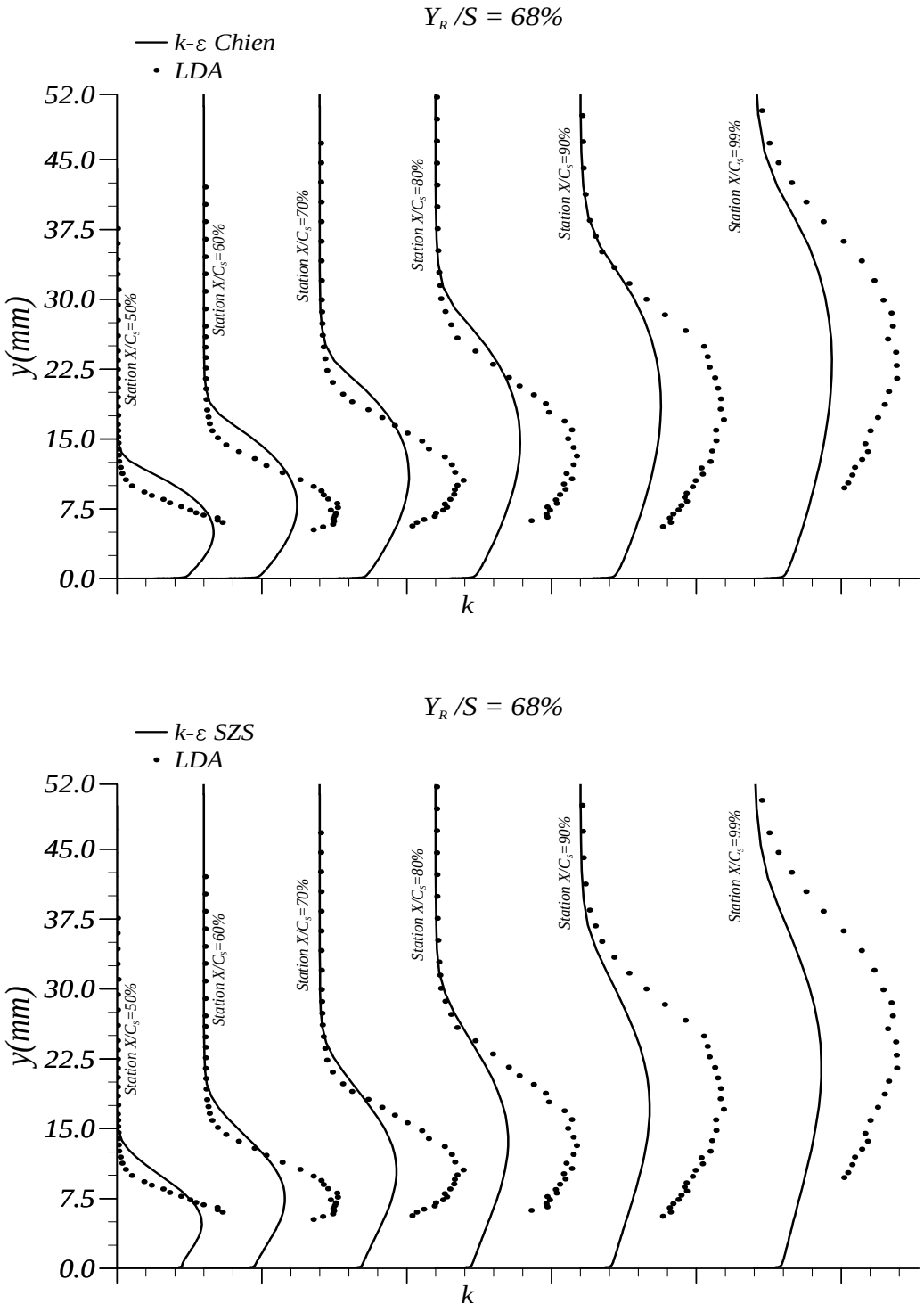


FIG. 14.35 – Profils de k à 68% d'envergure pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991) (Garteur)

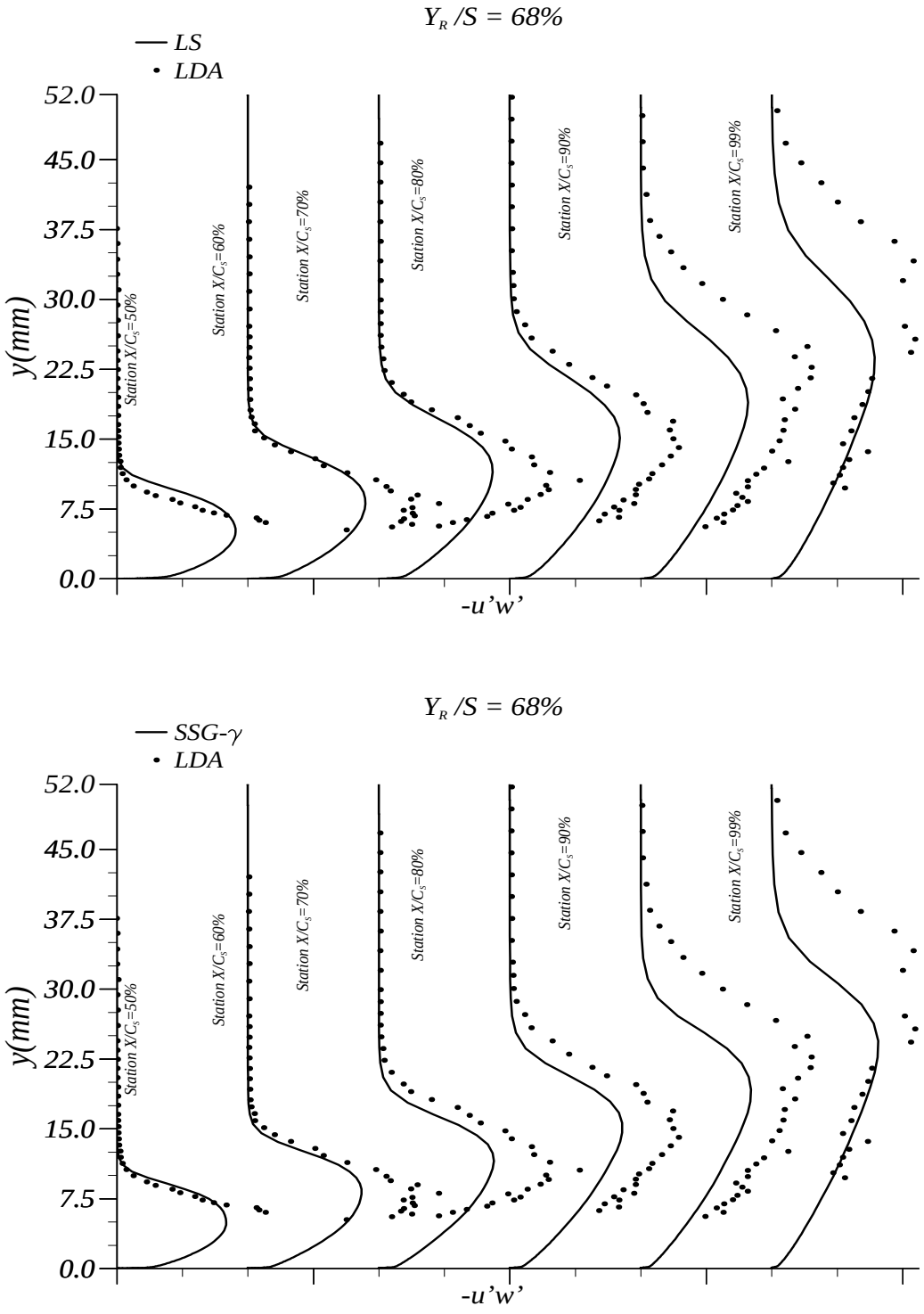


FIG. 14.36 – Profils de $\overline{u'w'}$ à 68% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur)

CONCLUSION

L'étude du comportement des modèles de turbulence (et des modèles RSM en particulier) au voisinage d'une frontière libre (partie II) a montré que la solution en puissance supposée à priori par Cazalbou et al. (1993) et Paullay et al. (1985) était non-significative appelée solution paramétrique. Il découle de cet état de fait que les inverses des deux puissances α_k^- et α_k^+ trouvées par Catris (1999) doivent être strictement positives afin que le modèle de turbulence ne soit pas anormalement sensible aux conditions extérieures lorsque le taux extérieur de turbulence tend vers zéro. Les contraintes établies ici complètent par conséquent les conditions établies par Cazalbou et al. (1993) pour lesquelles une seule des deux puissances doit être strictement positive.

Néanmoins, la solution en puissance de Cazalbou correspond en général à une asymptote c'est à dire à la limite quand $\xi \rightarrow 0$ de la solution paramétrique. Dans ce cas de figure, la solution en puissance de Cazalbou constitue une approximation régulière à l'ordre zéro au voisinage de la frontière libre. Cette propriété explique le succès de l'analyse de Cazalbou et pourquoi les grandeurs turbulentes et la vitesse semblaient se comporter comme des puissances de la distance λ à la frontière libre (la viscosité turbulente semblait se comporter comme une fonction linéaire de λ). Toutefois, cette solution en puissance reste une moins bonne approximation que la solution paramétrique et ne se limite qu'au cas de figure où la solution en puissance est associée à l'exposant α_k^+ et à la configuration $1/\alpha_k^- > 0$ et $1/\alpha_k^+ > 0$.

Il a alors été montré (cf. paragraphe 5.4) que les contraintes définies au paragraphe 3.4 sur la loi logarithmique et la loi en racine sont incompatibles avec les contraintes sur le raccord à la frontière libre (α_k^- et α_k^+ strictement positifs). Pour remédier à cette difficulté, nous avons choisi de prendre en compte l'effet de l'intermittence de frontière dans les fermetures en un point sachant que ces dernières sont déficientes dans une frontière intermittente i.e. au voisinage d'une frontière libre. Un modèle a été développé pour les termes de diffusion et l'équation de transport pour la dissipation. Un modèle simplifié a été dérivé de ce modèle afin qu'il respecte la plupart de ses comportements au premier ordre au voisinage de la frontière libre.

Lorsque l'intermittence de frontière est prise en compte dans la fermeture de l'équation de transport de la dissipation ε, le raccord à la frontière libre est piloté par des termes qui s'annulent en écoulement pleinement turbulent. Le comportement du modèle à la frontière libre est donc piloté par l'intermittence de frontière. Cet aspect est cohérent avec la physique de la frontière intermittente : l'intermittence de frontière, en procédant au mélange entre l'écoulement turbulent et l'écoulement irrotationnel, assure le raccordement des grandeurs turbulentes à la frontière libre. Cette caractéristique possède de plus un intérêt très pratique : le comportement du modèle à la frontière libre est découplé de son comportement dans une zone pleinement turbulente. Le modèle construit permet de satisfaire les contraintes sur la loi logarithmique et la loi en racine et dans le même temps les contraintes sur le raccord à la frontière libre (qui sont vérifiées par construction du modèle).

Le modèle aux tensions de Reynolds $SSG - \gamma$ que nous avons construit remplit les objectifs qui lui étaient

fixés dans le projet européen FLOMANIA. Les calculs de couche limite (chapitre 14) ont montré que le modèle améliorait très sensiblement la prévision du coefficient de frottement et des profils de vitesse lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression adverse élevé c'est à dire dans une situation proche du décollement. Les contraintes pour reproduire la loi logarithmique (paragraphe 3.4) quel que soit le gradient de pression et la loi en racine pour les gradients adverse élevés ont donc bien eu l'effet escompté. Reproduire ces comportements physiques semble suffir pour que l'effet du gradient de pression adverse sur la structure et le coefficient de frottement de la couche limite soient bien représentés.
Les calculs de couche limite avec 3C3D, s'ils ont permis de vérifier l'amélioration apportée par le modèle $SSG-\gamma$, sont restés parfois entachés d'erreurs dues à une initialisation des grandeurs turbulentes perfectible. Débuter le calcul avec une solution déjà convergée améliorerait sans doute les résultats. Le calcul de couche limite en mode inverse sur l'extrados de l'aile GARTEUR a en effet démontré des résultats encourageant sur le C_f pour le modèle $SSG-\gamma$ mais les profils de vitesse et des tensions de Reynolds restent encore trop perturbés par l'initialisation pour être comparés aux mesures.

De part son importance dans l'établissement des contraintes sur la structure de la couche limite, dans la prise en compte de l'effet de l'intermittence de frontière sur les fermetures et dans le comportement des modèles au voisinage d'une frontière libre, l'équation d'échelle apparaît comme une des parties les plus importantes de la modélisation en un point. Il est logique que l'équation qui détermine l'échelle caractéristique des grosses structures soit responsable du comportement physique ou non du modèle de turbulence, et ce d'autant plus que les différentes fermetures dans les équations pour les tensions dépendent de cette échelle de longueur.

Le modèle RSM construit a été calibré sur les écoulements libres et la couche limite. Mais cette calibration s'est faite "à la main" et il serait intéressant que les constantes du modèle non-fixées le soient par une méthode d'optimisation par algorithme génétique. Ce type de méthode d'optimisation devient incontournable lorsque l'optimisation doit être réalisée sur un nombre élevé de paramètres et d'écoulements. Les résultats du modèle $SSG-\gamma$ en couche de mélange devraient être améliorés sans altérer le comportement du modèle en couche limite ou en jet plan.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Dégénérescence significative d'un modèle à deux équations

Plaçons nous, pour simplifier l'analyse, dans une configuration bidimensionnelle et stationnaire où la viscosité est négligée. L'équation du mouvement longitudinale (écrite pour $W = U_e - U$) et les équations de transport de k et $\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$ s'écrivent :

$$U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial y}\right) \tag{A.1}$$

$$U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - \varepsilon + D_{kk}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial y}\right) \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} U\frac{\partial \nu_t}{\partial x} + V\frac{\partial \nu_t}{\partial y} &= \frac{\nu_t}{k}\left(C_{n1}P_k - C_{n2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{nn}\,\nu_t \frac{\partial \nu_t}{\partial y} + D_{nk}\,\frac{{\nu_t}^2}{k}\,\frac{\partial k}{\partial y}\right) \\ &\quad + C_{nn}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial y}\right)^2 + C_{nk}\,\frac{\nu_t}{k}\,\frac{\partial \nu_t}{\partial y}\,\frac{\partial k}{\partial y} + C^n_{kk}\left(\frac{\nu_t}{k}\,\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Équation du mouvement

En incorporant le développement asymptotique (4.3), l'équation (A.1) du mouvement peut être développée, dans la variable locale $\widehat{\lambda}$ définie en (4.2), sous la forme :

$$\frac{V(\xi)}{\delta(\xi)}\frac{\partial}{\partial \widehat{\lambda}}\left(V_0\widehat{W}_0 + \frac{N(\xi)}{\delta(\xi)}\widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial \widehat{W}_0}{\partial \widehat{\lambda}} + o(1)\right) = 0$$

La dégénérescence est significative si $N(\xi) = \delta(\xi)$ et s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{\lambda}}\left(V_0\widehat{W}_0 + \widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial \widehat{W}_0}{\partial \widehat{\lambda}}\right) = 0 \tag{A.4}$$

Équation de transport de k

L'équation de transport de k (A.2) peut être asymptotiquement développée sous la forme :

$$\frac{K(\xi)}{\delta(\xi)}\left(V_0\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}+\widetilde{P}-\widetilde{\varepsilon}+D_{kk}\frac{N(\xi)}{\delta(\xi)}\frac{\partial}{\partial\widehat{\lambda}}\left(\widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)+o(1)\right)=0$$
$$\widetilde{P}=\frac{N(\xi)V(\xi)^2}{\delta(\xi)K(\xi)}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\widehat{\lambda}}=O\left(\frac{V^2}{K}\right)$$
$$\widetilde{\varepsilon}=O\left(\frac{\delta(\xi)K(\xi)}{N(\xi)}\right)=O(K)=o(1)$$

Par conséquent, la dégénérescence est également significative si $N(\xi)=\delta(\xi)$. Le terme de production doit être négligeable. Si ce n'était pas le cas, $K\sim V^2$ et l'équation de transport de k dégénérerait, en utilisant (A.4), sous la forme :

$$-V_0\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}=\frac{\partial}{\partial\widehat{\lambda}}\left(D_{kk}\,\widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)-V_0\widehat{W}_0\frac{\partial\widehat{W}_0}{\partial\widehat{\lambda}}$$

où le terme de production a été récrit à l'aide de la relation (A.4). Étant donné que les conditions limites en $\widehat{\lambda}=0$ de $\widehat{k}_0$, $\widehat{W}_0$ et $\widehat{\nu}_{t0}$ sont des conditions de nullité (démontré de façon similaire à ce qui a été fait sur les modèles RSM au chapitre 4), l'intégration de l'expression ci-dessus conduit à :

$$V_0\widehat{k}_0+D_{kk}\,\widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}-V_0\widehat{W}_0^2/2=0$$

Si f est défini par $\widehat{k}_0=f\,\widehat{W}_0^2$, l'expression ci-dessus se réduit à :

$$(-1+(1-2D_{kk})\,f)=-D_{kk}\frac{\widehat{\nu}_{t0}}{V_0}\frac{\partial f}{\partial\widehat{\lambda}}$$
$$\Longrightarrow|-1/D_{kk}+(1/D_{kk}-2)\,f|^{\frac{1}{(1/D_{kk}-2)}}=C\left|\widehat{W}_0\right|$$

Si $D_{kk}>1/2$, l'expression ci-dessus conduit à une contradiction car f tendrait vers l'infini alors que $\widehat{W}_0$ tend vers zéro. Cette condition sur D_{kk} est une condition nécessaire et suffisante pour que la production soit négligeable devant la diffusion au voisinage de la frontière libre lorsque le niveau de turbulence extérieur tend vers zéro.
Finalement, la dégénérescence significative de l'équation de transport de k s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\widehat{\lambda}}\left(V_0\widehat{k}_0+D_{kk}\,\widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)=0 \tag{A.5}$$

Les ordres de grandeurs rendant la dégénérescence significative pour la variable locale $\widetilde{\lambda}$ sont donc :

$$N(\xi)=\delta(\xi)\ ;\ K=o(1)\ ;\ V=o(1)$$

Étant donné que $\widehat{k}_0=0$, $\widehat{W}_0=0$ et $\widehat{\nu}_{t0}=0$ en $\widehat{\lambda}=0$, l'intégration de l'équation pour k (A.5) et de l'équation du mouvement (A.4) aboutit à :

$$-\frac{\widehat{\nu}_{t0}}{V_0}=\frac{\widehat{W}_0}{\widehat{W}_0{}'}=\frac{1}{D_{kk}}\frac{\widehat{k}_0}{\widehat{k}_0{}'}\Longrightarrow W\sim k^{D_{kk}} \tag{A.6}$$

La vitesse évolue donc comme une puissance de l'énergie cinétique turbulente k.

Équation de transport d'échelle

L'équation d'échelle ne donne pas d'indication supplémentaire quant au caractère significatif. Si la production et la dissipation sont négligeables dans l'équation pour k, elles le sont également dans l'équation d'échelle quelle que soit la grandeur transportée. L'équation de transport se simplifie alors en un équilibre entre la diffusion, les termes croisés et l'advection :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(V_0\,\widehat{\nu}_{t0}+D_{nn}\,\widehat{\nu}_{t0}\frac{\partial\widehat{\nu}_{t0}}{\partial\widehat{\lambda}}+D_{nk}\,\frac{\widehat{\nu}_{t0}^2}{\widehat{k}_0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)+C_{nn}\,\left(\frac{\partial\widehat{\nu}_{t0}}{\partial\widehat{\lambda}}\right)^2\\ +C_{nk}\,\frac{\widetilde{\nu}_t}{\widetilde{k}}\frac{\partial\widehat{\nu}_{t0}}{\partial\widehat{\lambda}}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}+C_{kk}^n\,\left(\frac{\widehat{\nu}_{t0}}{\widehat{k}_0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)^2=0\end{aligned} \tag{A.7}$$

(A.7) est récrit pour la fonction $\widehat{g}_0=-D_{kk}\widehat{\nu}_{t0}/V_0$ dans le but de prouver que la dégénérescence est uniquement dépendante des constantes des termes de diffusion et des termes croisés :

$$\begin{aligned}(A.7)\Longleftrightarrow\frac{d}{d\widehat{\lambda}}\left(-D_{kk}\,\widehat{g}_0+D_{nn}\,\widehat{g}_0\frac{\partial\widehat{g}_0}{\partial\widehat{\lambda}}+D_{nk}\,\frac{\widehat{g}_0^2}{\widehat{k}_0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)\\ +C_{nn}\,\left(\frac{\partial\widehat{g}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)^2+C_{nk}\,\frac{\widehat{g}_0}{\widehat{k}_0}\frac{\partial\widehat{g}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}+C_{kk}^n\,\left(\frac{\widehat{g}_0}{\widehat{k}_0}\frac{\partial\widehat{k}_0}{\partial\widehat{\lambda}}\right)^2\;=\;0\end{aligned} \tag{A.8}$$

La dégénérescence d'un modèle à deux équations se réduit à une seule équation pour $\widehat{g}_0$:

$$a\,\widehat{g}_0\,\widehat{g}_0''\;+\;b\,\left(\widehat{g}_0'\right)^2\;+\;c\,\widehat{g}_0'\;+\;d\;=\;0 \tag{A.9}$$

où a, b, c et d sont définis à partir des constantes de diffusion et des termes croisés du modèle :

$$\begin{cases}a=-D_{\varepsilon\varepsilon}\\ b=D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon}\\ c=-4\,(D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon})+D_{kk}-D_{\varepsilon k}-C_{\varepsilon k}\\ d=4\,(D_{\varepsilon\varepsilon}+C_{\varepsilon\varepsilon})+2\,(D_{\varepsilon k}+C_{\varepsilon k}-D_{kk})+C_{kk}^{\varepsilon}\end{cases} \tag{A.10}$$

Annexe B

Dégénérescence significative des équations aux tensions de Reynolds pour le modèle de diffusion de Daly-Harlow

L'objectif est de démontrer que la dégénérescence significative d'un modèle RSM se réduit dans tous les cas à un équilibre advection-diffusion au voisinage de la frontière libre lorsque le niveau de turbulence extérieur tend vers zéro.

Considérons un modèle classique pour le terme de redistribution $\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^1 + \Pi_{ij}^2$ et le terme de dissipation, défini en (2.15) et (2.23).

Pour calculer la dégénérescence, nous pourrions procéder comme dans l'annexe précédente sur les modèles à deux équations, mais le formalisme risque de rendre la compréhension difficile dans le cas d'un modèle RSM. Nous raisonnerons donc directement sur les grandeurs globales comme $\overline{u_i' u_j'}$ ou ε. Il est en effet équivalent de réinjecter le développement asymptotique formel (4.3) :

$$\nu_t \frac{\partial k}{\partial \lambda} = \frac{N(\xi)}{\delta(\xi)} K(\xi) \left(\widehat{\nu}_{t0} \frac{\partial \widehat{k}_0}{\partial \widehat{\lambda}} + ... \right)$$

pour en déduire que :

$$\nu_t \frac{\partial k}{\partial \lambda} \sim \frac{N(\xi)}{\delta(\xi)} K(\xi) = K(\xi) \sim k \text{ lorsque } N = \delta$$

que d'écrire simplement que :

$$\nu_t \frac{\partial k}{\partial \lambda} \sim \frac{\nu_t}{\lambda} k \sim k \text{ lorsque } \nu_t \sim \lambda$$

Néanmoins, cette équivalence est assurée par le fait qu'il existe un développement asymptotique local. Par exemple, le fait que l'ordre de grandeur $K(\xi)$ de k soit indépendant de la variable locale $\widehat{\lambda}$ permet d'écrire que $\frac{\partial k}{\partial \lambda} \sim \frac{k}{\lambda}$.

En conclusion, en raisonnant sur les grandeurs globales et non locales, on passe sous silence tout le formalisme associé à une étude asymptotique mais il s'agit seulement d'une commodité d'écriture.

Rappelons que les conditions limites en $\lambda = 0$ sont :

$$\lim_{\lambda\to 0} k = 0 \; ; \; \lim_{\lambda\to 0} \overline{u_i' u_j'} = 0 \; ; \; \lim_{\lambda\to 0} U = U_e \tag{B.1}$$

B.1 Équation du mouvement

Cette dernière se réduit à l'équilibre suivant pour $\overline{u'v'} \sim W = U_e - U.$:

$$V_0 \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} \tag{B.2}$$

qui s'intègre, d'après les conditions limites (B.1), en :

$$\Longrightarrow V_0 W \simeq \overline{u'v'} \tag{B.3}$$

B.2 Équation pour k

La méthode employée est analogue à celle utilisée pour les modèles à deux équations en annexe A. Dans l'équation pour k, la dégénérescence significative est obtenue pour :

$$\nu_t^{eq} = \frac{k\overline{v'^2}}{\varepsilon} \sim \lambda \Longleftrightarrow N(\xi) = \delta(\xi) \tag{B.4}$$

La condition limite sur g en $\lambda = 0$ est dès lors la suivante :

$$\lim_{\lambda\to 0} g = 0 \tag{B.5}$$

La dissipation est, puisque $\nu_t^{eq} \sim \lambda$, de l'ordre de :

$$\varepsilon = \frac{k\overline{v'^2}}{\nu_t^{eq}} \sim \frac{k\overline{v'^2}}{\lambda} \sim \overline{v'^2}\frac{\partial k}{\partial \lambda} \ll V_0 \frac{\partial k}{\partial \lambda} \tag{B.6}$$

et est donc négligeable devant les termes de convection et diffusion.

En ce qui concerne la production, le raisonnement est moins évident mais similaire à celui effectué sur les modèles à deux équations. Si la production était non négligeable et du même ordre que la convection, alors on aurait $k \sim W\overline{u'v'}$ afin que la dégénérescence ne soit pas triviale (production=0). Puisque $\overline{u'v'} \simeq V_0\, W$ d'après l'équation du mouvement (B.3), k est du même ordre que W^2. La dégénérescence de l'équation de transport de k :

$$0 = V_0 \frac{\partial k}{\partial \lambda} - V_0\, W \frac{\partial W}{\partial \lambda} + D_{kk} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\nu_t^{eq} \frac{\partial k}{\partial \lambda}\right) \tag{B.7}$$

qui s'intègre, d'après les conditions limites (B.1) et (B.5), sous la forme suivante :

$$V_0\, k + D_{kk}\, \nu_t^{eq} \frac{\partial k}{\partial \lambda} - V_0\, \frac{1}{2} W^2 = 0 \tag{B.8}$$

Soit $f = O(1)$ tel que $k = fW^2$. L'équation ci-dessus, en utilisant (B.3), conduit à :

$$f - \frac{1}{2} + D_{kk} \frac{\nu_t^{eq}}{V_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} + f \frac{2}{\overline{u'v'}} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} \right) = 0 \tag{B.9}$$

La dégénérescence de l'équation de transport pour $\overline{u'v'}$ est dès lors nécessaire pour calculer f. Dans l'équation de transport de $\overline{u'v'}$, les termes liés aux gradients de vitesse moyenne (terme de redistribution et production) sont de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial y} \overline{u'_k u'_l} \sim \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} \ll \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

et les termes proportionnels aux tenseurs de dissipation sont de l'ordre de ε :

$$\varepsilon = \frac{k\, \overline{v'^2}}{\nu_t^{eq}} \sim \frac{k\, \overline{v'^2}}{\lambda} \sim \overline{v'^2} \frac{\partial k}{\partial \lambda} \sim \overline{v'^2}\, \overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} \ll V_0 \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda}$$

ou bien du même ordre que :

$$\varepsilon \frac{\overline{u'v'}}{k} \sim \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} \ll V_0 \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda}$$

En conséquence, les termes de production, dissipation et redistribution sont nécessairement négligeables devant les termes de convection et diffusion et il vient après intégration :

$$V_0\, \overline{u'v'} + D_{kk} \nu_t^{eq} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} = 0 \tag{B.10}$$

La grandeur f est dès lors solution de :

$$f + \frac{3}{2} = \frac{D_{kk}}{V_0} \nu_t^{eq} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \tag{B.11}$$

qui s'intègre en :

$$\left| f + \frac{3}{2} \right| \sim \frac{1}{\left| \overline{u'v'} \right|} \tag{B.12}$$

ce qui signifie que f tend vers l'infini lorsque $\overline{u'v'}$ tend vers zéro. Cela contredit le fait que $f = O(1)$. La production P_k doit donc être négligeable. La dégénérescence significative de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-k + g \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right) = 0 \text{ pour } g = -\frac{D_{kk}}{V_0} \nu_t^{eq} \tag{B.13}$$

B.3 Équation pour $\overline{v'^2}$

Dans le cas de l'équation de transport de la tension normale $\overline{v'^2}$:

$$\begin{aligned} \Pi_{22}^2 + P_{22} &\sim \overline{u'v'}\frac{\partial W}{\partial \lambda} \text{ ou } \sim \overline{v'^2}\frac{\partial W}{\partial \lambda} \\ \Pi_{22}^1 - \varepsilon_{22} &\sim \varepsilon \text{ ou } \sim \varepsilon\frac{\overline{u'_k u'_l}}{k} \end{aligned} \tag{B.14}$$

Par ailleurs, puisque $\nu_t^{eq} \sim \lambda$, on a :

$$\varepsilon \sim k\frac{\overline{v'^2}}{\lambda} \sim k\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial \lambda} \tag{B.15}$$

Puisque $k \ll 1$ et $\overline{u'_k u'_l} \ll 1$, la dissipation ainsi que $\Pi_{22}^1 - \varepsilon_{22}$ sont négligeables devant les termes de convection et diffusion.

En ce qui concerne le terme de production et le terme rapide Π_{22}^2, les termes équivalents à $\overline{v'^2}\frac{\partial W}{\partial \lambda} \sim \overline{u'v'}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial \lambda}$ sont négligeables devant la convection. Pour les termes équivalent à $\overline{u'v'}\frac{\partial W}{\partial \lambda}$ soit $\overline{u'v'}\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda}/V_0$ d'après l'équation du mouvement (B.3), la démonstration est moins évidente. Si ces termes étaient équivalents au terme de diffusion, on aurait :

$$\overline{u'v'}\, W \sim V_0\overline{v'^2} \Longrightarrow \overline{u'v'}^2 \sim \overline{v'^2} \tag{B.16}$$

si bien entendu les tensions turbulentes et vitesses sont adimensionnées de la façon décrite dans les hypothèses émises au début du chapitre 4 (afin de comparer les ordres de grandeur dépendant du petit paramètre ξ). Voyons si cette hypothèse nous amène à un contradiction comme pour l'équation de transport de k. Ceci impliquerait que l'équation de transport de $\overline{v'^2}$ se réduit elle aussi à un équilibre convection diffusion.

En procédant de manière tout à faire comparable à l'équation de transport de k, on peut écrire au premier ordre :

$$\Pi_{22}^2 + P_{22} \simeq c\, V_0 \frac{\partial \overline{u'v'}^2}{\partial \widehat{\lambda}} \tag{B.17}$$

L'intégration de la dégénérescence l'équation de transport de $\overline{v'^2}$ conduit alors à :

$$V_0\, \overline{v'^2} + D_{kk}\nu_t^{eq}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial \lambda} + c\, V_0 \overline{u'v'}^2 = 0 \tag{B.18}$$

Puisque $\overline{u'v'}^2 \sim \overline{v'^2}$, on peut définir $f = O\,(1)$ tel que :

$$\overline{v'^2} = f\,\overline{u'v'}^2 \tag{B.19}$$

et f est solution de l'équation différentielle :

$$f + c + \, D_{kk}\frac{\nu_t^{eq}}{V_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} + f\frac{2}{\overline{u'v'}}\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda}\right) = 0 \tag{B.20}$$

Par ailleurs, de la même manière que ce qui a été fait pour montrer que le terme de production est négligeable dans l'équation de transport pour k (cf paragraphe B.2), on montrerait que l'équation de transport de $\overline{u'v'}$ se réduit à un équilibre convection-diffusion si $\overline{u'v'}^2 \sim \overline{v'^2}$. Dans ce cas, on a :

$$V_0\,\overline{u'v'} + D_{kk}\nu_t^{eq}\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \lambda} = 0 \tag{B.21}$$

L'équation pour f se réduit alors à une équation différentielle du premier ordre :

$$f + c = \frac{D_{kk}}{V_0}\nu_t^{eq}\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Longrightarrow |f + c| \sim \frac{1}{|\overline{u'v'}|} \tag{B.22}$$

La condition limite imposée à U impose à $W = U_e - U$ et donc $\overline{u'v'}$ de tendre vers zéro lorsque $\lambda \to 0$. f tend vers l'infini lorsque $\lambda \to 0$ ce qui vient contredire l'hypothèse de départ ($f = O(1)$). Ainsi, les termes de production, redistribution et dissipation sont nécessairement négligeables et l'équation de transport de $\overline{v'^2}$ se réduit nécessairement à un équilibre entre advection et diffusion au voisinage de la frontière libre :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\overline{v'^2} + g\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial \lambda}\right) = 0 \tag{B.23}$$

B.4 Équations pour $\overline{u'^2}$, $\overline{w'^2}$ et $\overline{u'v'}$

Les deux premières équations suffisent au calcul du premier ordre du développement asymptotique de k, W et ν_t. Mais il est intéressant d'un point de vue analyse de l'anisotropie au voisinage de la frontière libre de calculer les dégénérescences des équations pour $\overline{u'^2}$, $\overline{w'^2}$ et $\overline{u'v'}$. De la même manière que pour k et $\overline{v'^2}$, on montre que l'on aboutit à une contradiction ou à une dégénérescence non significative si les termes de production, redistribution et dissipation ne sont pas tous négligeables devant la diffusion. Toutes les équations pour les tensions dégénèrent par conséquent, au voisinage de la frontière, en un équilibre entre advection et diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\overline{u_i'u_j'} + g\,\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial \lambda}\right) = 0 \quad \text{où : } g = -\frac{D_{kk}}{V_0}\,\frac{\overline{v'^2}\,k}{\varepsilon} \tag{B.24}$$

Annexe C

Calcul de la solution paramétrique

La solution paramétrique est solution de l'équation différentielle :

$$a\,g\,g'' + b\left(g'\right)^2 + c\,g' + d = 0 \tag{C.1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a\,g\,g''}{b\left(g'\right)^2 + c\,g' + d} = -1 \tag{C.2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-a\,g'\,g''}{b\left(g'\right)^2 + c\,g' + d} = \frac{g'}{g} \tag{C.3}$$

Puisque $b\left(g'\right)^2 + c\,g' + d = b\left(g' + \gamma^+\right)\left(g' + \gamma^-\right)$, la relation précédente peut se décomposer en :

$$\frac{a\gamma^-}{\sqrt{\Delta}}\frac{g''}{g' + \gamma^+} + \frac{-a\gamma^+}{\sqrt{\Delta}}\frac{g''}{g' + \gamma^-} = \frac{g'}{g} \tag{C.4}$$

L'intégration de (C.4) aboutit à :

$$g = G_0\left|g' + \gamma^+\right|^{\beta^+}\left|g' + \gamma^-\right|^{\beta^-} \tag{C.5}$$

avec, étant donné que $a = -D_{\varepsilon\varepsilon}$:

$$\beta^+ = -\frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{\alpha_k^+}\ ;\ \beta^- = \frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{\alpha_k^-} \tag{C.6}$$

Résolution par une méthode paramétrique

L'équation du premier degré (C.5) peut être vue comme une équation de Lagrange et ainsi reformulée comme suit :

$$\begin{cases} g = g\left(m\right) = G_0\left|m + \gamma^+\right|^{\beta^+}\left|m + \gamma^-\right|^{\beta^-} \\ \lambda = \lambda\left(m\right) \\ \text{où : } m = g' = \dfrac{dg}{d\lambda} \text{ est le paramètre} \end{cases} \tag{C.7}$$

Calcul de $\lambda(m)$:
Par définition de m :

$$\frac{d\lambda}{dm} = \frac{dg}{dm}\,\frac{1}{m} \tag{C.8}$$

Après dérivation de (C.7) :

$$\frac{dg}{dm} = \frac{2\,G_0\,\epsilon_0}{\alpha}\,m\,\left|m+\gamma^+\right|^{\beta^+-1}\,\left|m+\gamma^-\right|^{\beta^--1} \tag{C.9}$$

avec $\alpha = 2/\left(\beta^+ + \beta^-\right) = -2b/a$ et où ϵ_0 est issu de la dérivation des valeurs absolues :

$$\begin{cases} \epsilon_0 = +1 \;\; si \;\; (m+\gamma^+)\,(m+\gamma^-) > 0 \\ \epsilon_0 = -1 \;\; si \;\; (m+\gamma^+)\,(m+\gamma^-) < 0 \end{cases}$$

Après substitution de (C.9) par (C.8), il vient :

$$\lambda(m) = \lambda(m_0) + \int_{m_0}^{m} \frac{2\,G_0\,\epsilon_0}{\alpha}\left|m+\gamma^+\right|^{\beta^+-1}\,\left|m+\gamma^-\right|^{\beta^--1}\,dm$$

L'intégration entre m_0 (constante d'intégration arbitraire) et m est faite par le logiciel MAPLE et conduit à une fonction hypergéométrique :

$$\lambda(m) = c_0 + \frac{G_0}{\alpha\,\beta^-}\,|\Pi|^{\beta^+-1}\,\left|m+\gamma^-\right|^{\beta^-}\,F\left(m+\gamma^-\right) \tag{C.10}$$

$$\text{avec :} \begin{cases} F(x) = Hypergeom\left(\left[\beta^-, 1-\beta^+\right], \left[1+\beta^-\right], -\dfrac{x}{\Pi}\right) \\ c_0 = \lambda(m_0) - \dfrac{G_0}{\alpha\,\beta^-}\,|\Pi|^{\beta^+-1}\left|m_0+\gamma^-\right|^{\beta^-}\,F\left(m_0+\gamma^-\right) \\ \Pi = \gamma^+ - \gamma^- = 2\sqrt{\Delta} \neq 0 \end{cases}$$

Calcul de $k(m)$:
k est défini par la relation (4.18) :

$$g = \frac{k}{k'} \Longleftrightarrow \frac{1}{k}\frac{dk}{dm} = \frac{1}{g}\frac{d\lambda}{dm} = \frac{2}{\alpha}\,\frac{1}{(m+\gamma^+)\,(m+\gamma^-)}$$

$$\Longrightarrow k(m) = K_0\left|\frac{m+\gamma^-}{m+\gamma^+}\right|^{\frac{D_{\varepsilon\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}}} \tag{C.11}$$

Annexe D

Démonstration du caractère significatif de la solution paramétrique

Nous allons montrer que les solutions en puissance, si elles existent, sont des solutions non-significatives car incluses dans la solution paramétrique. La solution paramétrique apparaîtra alors comme le seul développement asymptotique significatif au premier ordre.

Soit une solution en puissance :

$$\widehat{g}_0^p = \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha_k} \tag{D.1}$$

avec $\alpha_k > 0$ afin que cette solution vérifie les conditions aux limites en $\widehat{\lambda} = 0$ et donc qu'elle puisse exister.

Soit une solution paramétrique :

$$\widehat{g}_0 = G_0 \left| m - \frac{1}{\alpha_k} \right|^{\beta} \left| m - \frac{1}{\alpha_k^*} \right|^{\beta^*} \tag{D.2}$$

Lorsque $m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}} \to 1/\alpha_k$, on a :

1. si $\beta > 0$ alors $\widehat{g}_0 \to 0$ et $\widehat{\lambda} \to 0$,
2. si $\beta < 0$ alors $\widehat{g}_0 \to \infty$ et $\widehat{\lambda} \to \infty$.

La solution en puissance ci-dessus (D.1) peut donc correspondre soit à une tangente en zéro soit à une asymptote en $\widehat{\lambda} = \infty$ de la solution paramétrique.

Pour étudier le caractère significatif ou non d'un développement asymptotique, il nous faut rappeler certaines notations (cf. Eckhaus (1978)). Soit $E_x^{(n)}\, f$ le développement asymptotique formel de la grandeur f dans la variable x et à l'ordre n. On dira qu'un développement $E_{x_1}^{(p)}\, f$ est contenu dans un autre $E_{x_2}^{(q)}\, f$ si :

$$E_{x_1}^{(p)}\, f = E_{x_1}^{(p)}\, E_{x_2}^{(q)}\, f \tag{D.3}$$

Dans le cas considéré, la solution en puissance correspond à :

$$E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p} g = N^p(\xi)\,\widehat{g}_0^p = N^p(\xi)\,\frac{\widehat{\lambda}^p}{\alpha_k} \tag{D.4}$$

et la solution paramétrique ($m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}}$) à :

$$E^{(0)}_{\widehat{\lambda}} g = N(\xi)\,\widehat{g}_0 = G_0\,N(\xi)\left|m - \frac{1}{\alpha_k}\right|^{\beta}\left|m - \frac{1}{\alpha_k^*}\right|^{\beta^*} \tag{D.5}$$

Les variables locales $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\lambda}^p$ sont définies par :

$$\widehat{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta(\xi)} \quad \text{et} \quad \widehat{\lambda}^p = \frac{\lambda}{\delta^p(\xi)} \tag{D.6}$$

L'ordre de grandeur de g devra toujours être égal à l'ordre de grandeur de λ pour assurer le caractère significatif de la dégénérescence des équations de transport (cf. annexes A et B sur le calcul de la dégénérescence des équations de transport d'un modèle à deux équations et d'un modèle RSM). En conséquence :

$$N(\xi) = \delta(\xi) \quad \text{et} \quad N^p(\xi) = \delta^p(\xi) \tag{D.7}$$

Démonstation

Pour démontrer qu'une solution en puissance (D.1) associée à la variable locale $\widehat{\lambda}^p$ est non significative car incluse dans la solution paramétrique (D.5), il faut choisir judicieusement la variable locale $\widehat{\lambda}$ qui lui est associée afin de montrer, pour cette variable locale $\widehat{\lambda}$, que :

$$E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p} g = E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p}\left[E^{(0)}_{\widehat{\lambda}} g\right] \tag{D.8}$$

1. β **est négatif :**
   Il existe deux possibilités de définition de la solution paramétrique comme cela a été montré dans l'étude de la solution paramétrique au paragraphe 4.3.4 : soit $m \to \infty$ ou soit $m \to 1/\alpha_k$ lorsque $\widehat{\lambda} \to \infty$ et $\widehat{g}_0 \to \infty$. Ici, la solution paramétrique est choisie de sorte que si $\widehat{g}_0 \to \infty$ alors $m \to 1/\alpha_k$: la solution en puissance est alors une asymptote à la solution paramétrique en $\widehat{\lambda} = \infty$. Dans cette configuration, la variable locale de la solution paramétrique est définie de telle sorte que $\delta^p \gg \delta$.

   Lorsque l'on passe de la variable $\widehat{\lambda}^p$ à la variable $\widehat{\lambda}$, cela revient à faire passer l'ordre de g de $N(\xi) = \delta(\xi)$ à $N^p(\xi) = \delta^p(\xi)$. Ainsi :

$$g = \delta(\xi)\,\widehat{g}_0 = \delta^p(\xi)\left[\widehat{g}_0\frac{\delta(\xi)}{\delta^p(\xi)}\right] \Longrightarrow \widehat{g}_0\frac{\delta(\xi)}{\delta^p(\xi)} = O(1) \tag{D.9}$$

   Étant donné que $\delta(\xi)\,/\,\delta^p(\xi) \ll 1$, on a $\widehat{g}_0 \gg 1$. Puisque $\widehat{g}_0 \to \infty \Longrightarrow m \to 1/\alpha_k$, il vient :

$$\widehat{g}_0 \sim \left|m - \frac{1}{\alpha_k}\right|^{\beta} \text{ lorsque } \widehat{g}_0 \gg 1 \tag{D.10}$$

d'où on en déduit que :

$$\left| m - \frac{1}{\alpha_k} \right| = O\left[\left(\frac{\delta(\xi)}{\delta^p(\xi)} \right)^{-\frac{1}{\beta}} \right] \ll 1 \tag{D.11}$$

puisque $\beta < 0$ et $\delta^p \gg \delta$. Dans ce cas, le passage de la variable locale $\widehat{\lambda}$ à la variable locale $\widehat{\lambda}^p$ de la solution en puissance entraîne :

$$m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}} = \frac{1}{\alpha_k} + o(1) \Longrightarrow \widehat{g}_0 = \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha_k} + cte + o(1) \tag{D.12}$$

Ainsi, on a bien :

$$\begin{aligned} E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p}\left[E^{(0)}_{\widehat{\lambda}} g \right] &= E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p}\left[\delta(\xi)\, \widehat{g}_0 \right] && \text{(D.13)} \\ &= E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p}\left[\delta(\xi) \left(\frac{\widehat{\lambda}}{\alpha_k} + cte + o(1) \right) \right] \\ &= E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p}\left[\delta^p(\xi) \left(\frac{\widehat{\lambda}^p}{\alpha_k} + \frac{\delta(\xi)}{\delta_p(\xi)} \left(cte + o(1) \right) \right) \right] \\ &= \delta^p(\xi) \frac{\widehat{\lambda}^p}{\alpha_k} = N^p(\xi) \frac{\widehat{\lambda}^p}{\alpha_k} \\ &= E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p} g && \text{(D.14)} \end{aligned}$$

ce qui prouve que la solution en puissance est incluse dans la solution paramétrique.

2. β **est positif :** Dans cette configuration la solution paramétrique est telle que $\widehat{g}_0 \to 0$ lorsque $m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}} \to 1/\alpha_k$: la solution en puissance est une tangente en $\widehat{\lambda} = 0$ à la solution paramétrique. En conséquence, la variable locale $\widehat{\lambda}$ de la solution paramétrique est choisie de telle sorte que $\delta^p \ll \delta$. Dans ce cas, on montre de la même manière que précédemment que le passage de $\widehat{\lambda}$ à $\widehat{\lambda}^p$ entrai ne :

$$m - \frac{1}{\alpha_k} \ll 1 \Longrightarrow \widehat{g}_0 = \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha_k} + o(1) \tag{D.15}$$

la constante d'intégration étant nulle puisque $\widehat{g}_0 \to 0$ lorsque $\widehat{\lambda} \to 0$. Ainsi, de manière analogue au cas précédent, on montre que :

$$E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p} g = E^{(0)}_{\widehat{\lambda}^p}\left[E^{(0)}_{\widehat{\lambda}} g \right] \tag{D.16}$$

ce qui prouve que la solution en puissance est là encore incluse dans la solution paramétrique.

Annexe E

Calcul de la solution paramétrique pour les cas particuliers $b = 0$ et $\Delta = 0$

E.1 Cas $b = 0$

L'équation pour $\widehat{g}_0$:

$$a\,\widehat{g}_0\,\widehat{g}_0{}'' + b\,\left(\widehat{g}_0{}'\right)^2 + c\,\widehat{g}_0{}' + d = 0 \tag{E.1}$$

est récrite pour $(c\,\widehat{g}_0' + d) \neq 0$ c'est à dire $\widehat{g}_0{}'' \neq 0$ de la façon suivante :

$$\frac{-a\,\widehat{g}_0'\,\widehat{g}_0''}{c\,\widehat{g}_0' + d} = \frac{\widehat{g}_0'}{\widehat{g}_0} \tag{E.2}$$

qui s'intègre, pour $c \neq 0$, en :

$$\widehat{g}_0 = G_0\,|m+\gamma|^{\alpha\gamma}\,e^{-\alpha m} \tag{E.3}$$
$$\text{avec : } \gamma = d/c\ ,\ \alpha = a/c$$

où $m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}}$ est toujours le paramètre de la fonction paramétrique. L'énergie cinétique turbulente évolue quant à elle au premier ordre selon :

$$\widehat{k}_0 = K_0\,|m+\gamma|^{-\alpha} \tag{E.4}$$

Étude la solution paramétrique

1. $\gamma > 0$
   (a) Si $c \leq 0$ alors $d > 0$ et $\alpha\gamma < 0$. Lorsque $m \to -\gamma$, $\widehat{g}_0$ et $\widehat{k}_0$ tendent vers l'infini. $\widehat{g}_0$ et $\widehat{k}_0$ tendent vers zéro uniquement si $m \to +\infty$ ce qui correspond à un raccord abrupt pour ν_t et k.
   (b) Si par contre $c > 0$ alors $\alpha\gamma > 0$. Lorsque $m \to -\gamma$, $\widehat{g}_0$ et $\widehat{k}_0$ tendent vers zéro. A la frontière du domaine de régularité, $\widehat{g}_0 \gg 1$ implique nécessairement que $m = \frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}} \gg 1$. Là encore, le raccord à la frontière libre est abrupt pour ν_t et k.
2. $\gamma < 0$:
   (a) Si $\alpha > 0$ alors lorsque $\widehat{g}_0 \to 0$ on a nécessairement $m \to +\infty$.
   (b) Si $\alpha < 0$ alors $\widehat{g}_0$ ne peut tendre vers zéro en $\widehat{\lambda} = 0$.

Conclusion

La solution paramétrique à $b = 0$, lorsqu'elle vérifie les conditions aux limites en $\widehat{\lambda} = 0$, présente des raccords abrupts ($m \gg 1$) en $\widehat{\lambda} \ll 1$ ou en $\widehat{\lambda} \gg 1$. Il vaudrait donc mieux éviter la configuration à $b = 0$ pour éviter d'avoir des solutions se raccordant de façon trop abrupte à la frontière libre.

E.2 Cas $\Delta = 0$

$$\frac{-a\,\widehat{g}_0'\,\widehat{g}_0''}{b\,(\widehat{g}_0')^2 + c\,\widehat{g}_0' + d} = \frac{\widehat{g}_0'}{\widehat{g}_0}$$

Puisque $b\,(\widehat{g}_0')^2 + c\,\widehat{g}_0' + d = b\,(\widehat{g}_0' + \gamma)^2$, la relation précédente s'intègre en :

$$\begin{aligned} \widehat{g}_0 &= G_0\,|m+\gamma|^{\alpha}\,e^{\frac{\alpha\gamma}{m+\gamma}} \\ &\quad \text{avec : } \alpha = -b/a \end{aligned} \tag{E.5}$$

$\widehat{k}_0$ et $\widehat{\lambda}$ se déduisent de $\widehat{g}_0$:

$$\widehat{\lambda}\,(m) = c_0\,\Gamma\left(3-\alpha, \frac{\alpha\gamma}{m+\gamma}\right) \tag{E.6}$$

$$\widehat{k}_0\,(m) = K_0 e^{\frac{\alpha\gamma}{m+\gamma}} \tag{E.7}$$

Étude la solution paramétrique

1. $\gamma > 0$:
   $\widehat{g}_0 \to 0$ si et seulement si $m + \gamma \to 0^-$ c'est à dire que $\widehat{g}_0 \to 0$ alors que $\frac{d\widehat{g}_0}{d\widehat{\lambda}} = m \to -\gamma < 0$. Cette proposition contredit le fait que $\widehat{g}_0 \to 0$ lorsque $\widehat{\lambda} \to 0$ puisque $\widehat{g}_0 \geq 0$ et $\widehat{\lambda} \geq 0$. La condition limite sur $\widehat{g}_0$ en $\widehat{\lambda} = 0$ ne peut donc être satisfaite que lorsque $\gamma < 0$.
2. $\gamma < 0$:
   $\widehat{g}_0 \gg 1$ implique nécessairement $m \gg 1$ soit un raccord abrupt.

Conclusion

Le cas $\Delta = 0$ est tout comme le cas $b = 0$ à proscrire si l'on veut éviter un raccordement abrupt à la frontière libre.

Le cas $\Delta < 0$ n'a pas été étudié mais il serait peut être intéressant de calculer la solution paramétrique dans ce cas là. Remarquons que les solutions en puissance n'existent pas dans cette configuration. Des calculs numériques semblent montrer que le cas $\Delta < 0$ donne des résultats intéressants avec des raccordement doux à la frontière libre et sans sensibilité aux conditions extérieures lorsque le taux de turbulence extérieur tend vers zéro.

Annexe F

Autres tentatives de modification de l'équation d'échelle

Étant donné qu'il est impossible de satisfaire à la fois toutes les contraintes que nous nous sommes imposé, il est nécessaire de découpler, du moins en partie, le modèle au niveau des zones logarithmique et éventuellement en racine du modèle au voisinage de la frontière libre. Or, rien n'indique que les constantes introduites par les modèles de fermeture soient réellement des constantes et il est donc justifié de modifier certaines constantes du modèle. L'équation d'échelle pilotant le raccord extérieur et permettant d'assurer la reproduction des zones logarithmique et en racine, c'est sur cette équation que porteront les modifications.
Il est ainsi envisageable de découpler le modèle de turbulence pour les écoulements libres du modèle en couche limite. Dans un premier temps, le modèle RSM est calibré sur les écoulements libres (couche de mélange et jet plan). La correction uniquement active en couche limite est alors définie de sorte que les contraintes sur la loi logarithmique et la loi en racine soient satisfaites pour le modèle optimisé.

Des travaux en ce sens ont été effectués au sein même de l'ONERA par Aupoix et al. (2000) sur un modèle à viscosité turbulente. Il s'agit d'une modification du modèle $k-\varphi$ développé par Cousteix et al. (1997). Une correction est apportée à la constante $C_{\varphi 1}$ du terme de production de l'équation de transport de φ de telle sorte que le modèle reproduise la zone logarithmique quel que soit le gradient de pression. Ces travaux sont extensibles au modèles aux tensions de Reynolds puisque, en couche limite, un modèle aux tensions de Reynolds se comporte de façon très similaire à un modèle à deux équations.

Le modèle pour les équations aux tensions de Reynolds choisi est toujours constitué du modèle SSG pour les termes de redistribution et de dissipation et du modèle DH pour la diffusion.

F.1 Définition du modèle pour l'équation d'échelle

On choisit de transporter la grandeur $\omega = \varepsilon/k$ de part le bon comportement des modèles $k-\omega$ en couche limite, reproduisant la loi logarithmique à des gradients de pression adverse non nuls. La correction à apporter à l'équation d'échelle en sera minimisée ce qui est toujours appréciable d'un point de vue robustesse numérique. En outre, le traitement de ω à la paroi ne pose pas de difficulté et son comportement à la frontière libre est

correct d'après la figure 5.5. Les difficultés bien connues du modèle $k-\omega$ de Wilcox ne sont en effet pas liées au choix de la grandeur transportée ω mais aux constantes de diffusion choisies (cf. paragraphe 6.3) : $\sigma_k = \sigma_\omega$.

On supprime les contraintes inhérentes au respect de la structure de la couche limite afin de satisfaire les contraintes établies à propos du raccord à la frontière libre. Le respect de la structure de la couche limite est réalisée via des fonctions correctrices ne s'activant qu'en couche limite.

L'équation de transport de ω est écrite sous la forme suivante :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\omega}{k}\left(C_{\omega 1}P_k - C_{\omega 2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{\omega\omega}\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial \omega}{\partial x_l} + D_{\omega k}\frac{\omega}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) + C_{\omega k}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l} \qquad \text{(F.1)}$$

Un terme croisé et un terme de diffusion sont donc ajoutés par rapport à la formulation de Wilcox (1988) afin de pouvoir, entre autres, choisir la puissance α_k^+ (4.28) pilotant le raccord à la frontière libre. Le choix de conserver ce terme croisé plutôt qu'un autre s'est fait par rapport à la robustesse numérique de ce terme qui nous a semblé plus importante que celle des deux autres termes croisés.

F.2 Optimisation du modèle RSM sur les écoulements libres

Une étude paramétrique a été réalisée afin d'optimiser le modèle $SSG-\omega$ sur les écoulements de couche de mélange et de jet plan. Ce processus est décrit au paragraphe 13.2.1. Toutefois, l'optimisation à la fois sur la couche de mélange et le jet plan s'est révélée problématique : le modèle de turbulence a tendance à sous-estimer le taux d'ouverture de la couche de mélange alors qu'il a tendance à le surestimer pour le jet plan. Une optimisation tenant compte du jet plan se ferait au détriment de la précision du modèle en couche de mélange, ce que l'on ne souhaite pas. Ainsi, l'optimisation se fera uniquement sur la couche de mélange.

Les figures F.2 et F.3 montrent les résultats de l'étude paramétrique en affichant l'écart maximum entre les valeurs expérimentales de Bell et Mehta (1990) et le résultat du calcul numérique avec le code de similitude SIMIL (Bézard, 2000) pour le modèle $SSG-\omega$. Ce écart est présenté pour le taux d'ouverture $d\delta_w/dx$ et la tension croisée $\overline{u'v'}$.

Les constantes suivantes offrent alors le meilleur compromis concernant la couche de mélange à divers $U_2/\Delta U$:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= 2,5 \\
D_{kk} &= 0,3 \\
D_{\omega\omega} &= 0,25 \\
D_{\omega k} &= -0,1 \\
C_{\omega k} &= D_{kk} + (1/\alpha_k - 1)\, D_{\omega\omega} - D_{\omega k} = 0,25 \\
C^0_{\omega 1} &= 0,273 \\
C_{\omega 2} &= 0,8
\end{aligned} \qquad \text{(F.2)}$$

Les figures F.4 présentent une comparaison entre le comportement du modèle $SSG-\omega$ optimisé et celui du modèle SSG classique en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 0$ et $U_2/\Delta U = 1,5$. Le calcul est effectué avec le

code de similitude SIMIL. L'amélioration apportée par l'optimisation est à l'évidence non négligeable. Le taux d'ouverture du modèle optimisé est comparé ci-dessous aux valeurs $(\delta'_w)_{th}$ issues de la loi empirique (13.20) :

$\frac{U_2}{\Delta U}$	$(\delta'_w)_{th}$	$(\delta'_w)_{SSG-\omega}$ optimisé
0	0,135	0,130
0,5	0,0675	0,071
1	0,045	0,047
1,5	0,034	0,036
2	0,027	0,029

La figure F.1 récapitule les résultats présentés dans le tableau précédent.

F.3 Fonction correctrice sur $C_{\omega 1}$

La construction d'une correction sur $C_{\omega 1}$ est réalisée par analogie avec la correction faite sur $C_{\varphi 1}$.

F.3.1 Comportement dans la région logarithmique

Pour que la loi logarithmique soit satisfaite quel que soit le gradient de pression à l'ordre deux en p^+y^+, le développement limité de $C_{\omega 1}$ à l'ordre deux dans zone logarithmique doit vérifier (cf. chapitre 3.4.2) :

$$C_{\omega 1} \simeq 0,273 + 1,423\, p^+y^+ + 1,0233\, (p^+y^+)^2 \tag{F.3}$$

F.3.2 Comportement dans la région en racine

De manière analogue aux contraintes établies pour la loi en racine, on montre que la loi en racine est satisfaite si et seulement si :

$$C_{\omega 1} \simeq 1,7\, C_{\omega 2} + 0,1945 \tag{F.4}$$

F.3.3 Construction de la fonction correctrice

Par analogie avec les travaux de Aupoix et al. (2000) sur le modèle $k-\varphi$, on se donne la forme de $C_{\omega 1}$ à priori pour vérifier les contraintes établies précédemment pour la région logarithmique et la région en racine :

$$C_{\omega 1} = C^0_{\omega 1}\ \left(1 + \alpha\zeta \frac{\zeta + a}{1 + b\zeta + \beta\zeta^2}\right) \tag{F.5}$$

On choisit le senseur ζ afin qu'il soit :
- sans dimension
- invariant par changement de repère
- actif seulement en couche limite et dans la région logarithmique

- $\zeta \sim p^+ y^+$ dans la région logarithmique.
En supposant que ζ soit uniquement dépendant de S_{ij}, ε et y, ζ est construit à partir du théorème de Vaschy-Buckingham de la façon suivante :

$$\zeta = \frac{1}{a_0} \max\left(0, \frac{\varepsilon}{S^3(\kappa y)^2} - 1\right) \quad \text{avec } S = \left|\left|\overline{\overline{grad}}\,\overrightarrow{u} + {}^t\overline{\overline{grad}}\,\overrightarrow{u}\right|\right| \tag{F.6}$$

Mais il a été impossible de satisfaire la contrainte pour la loi en racine car le calcul devenait instable. Ce constat a été fait pour plusieurs choix de senseur ζ. Une autre alternative doit être envisagée si l'on veut satisfaire à la fois les contraintes sur la structure de la couche limite et celles concernant le raccord à une frontière libre.

Si l'on ne cherche qu'à satisfaire les contraintes concernant la loi logarithmique, un modèle peut être construit. Après plusieurs essais, il s'est avéré que la fonction correctrice suivante offrait un bon compromis entre robustesse et précision :

$$C_{\omega 1} = 0,273\left(1 + 4,807\,\zeta\frac{\zeta + 1,084}{1 + \zeta + \zeta^2}\right) \quad \text{avec : } \zeta = \frac{1}{1,646}\max\left(0, \frac{\varepsilon}{S^3(\kappa y)^2} - 1\right) \tag{F.7}$$

et permettait de satisfaire la loi logarithmique jusqu'à l'ordre deux.

F.3.4 Tests en couche limite

Le modèle a été testé sur le code de similitude dans la zone externe de la couche limite à un gradient de pression réduit $\beta = 20$, correspondant à un gradient de pression adverse élevé ou en d'autres termes à une situation proche du décollement (Skåre et Krogstad, 1994). La variable de similitude η est définie en couche limite comme le rapport de la distance à la paroi divisée par l'épaisseur de Clauser (13.12). Il est alors possible de vérifier sur la figure F.6 que la correction apportée à un coefficient de l'équation d'échelle permet de bien vérifier la loi logarithmique pour les forts gradients de pression adverse, contrairement au modèle sans correction vérifiant uniquement la loi logarithmique à l'ordre zéro c'est à dire pour une couche limite sans gradient de pression adverse. Il est également intéressant de remarquer que le positionnement de la loi logarithmique en $u^+ = \frac{1}{\kappa}\log(y^+) + 5.2$ est respecté y compris dans une situation à gradient de pression adverse élevé. Remarquons que le passage d'un adimensionnement en variable de similitude y/Δ à un adimensionnement en variable de paroi y^+ est obtenu à partir de la connaissance des valeurs expérimentales (Skåre et Krogstad, 1994) de $u_\tau/U_e = \sqrt{C_f/2}$ et du nombre de Reynolds R_Δ.

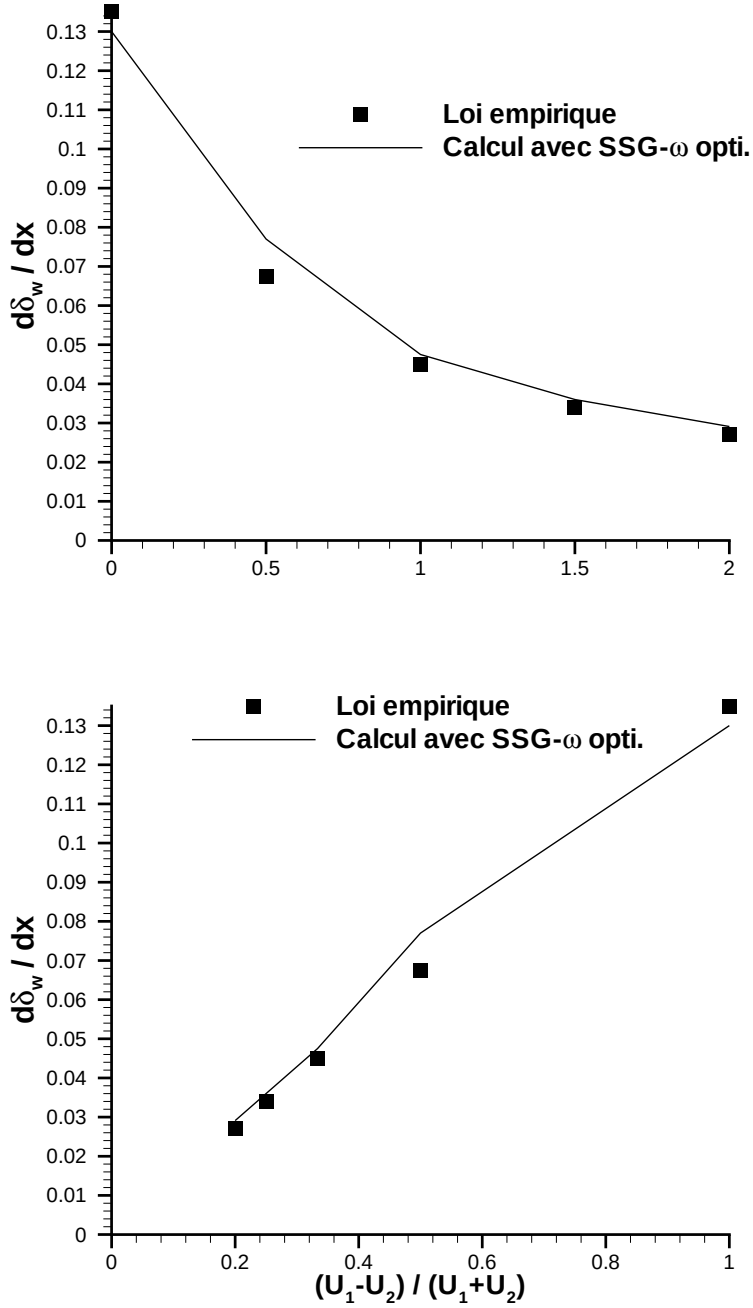


FIG. F.1 – Comparaison, en fonction de $U_2/\Delta U$ et $(U_1 - U_2)\,/\,(U_1 + U_2)$, entre le taux d'évasement δ'_w de la couche de mélange issu du calcul avec le modèle $SSG - \omega$ optimisé et celui donné par la loi empirique 13.20

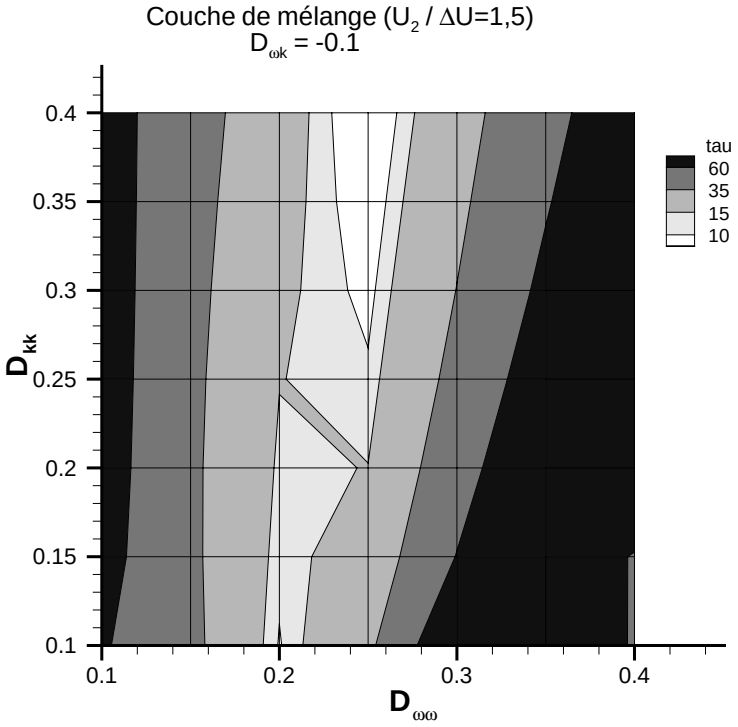


FIG. F.2 – Résultats de l'étude paramétrique en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 1,5$: tracé de l'erreur relative maximale entre calcul et expérience sur le taux d'ouverture $d\delta_w/dx$

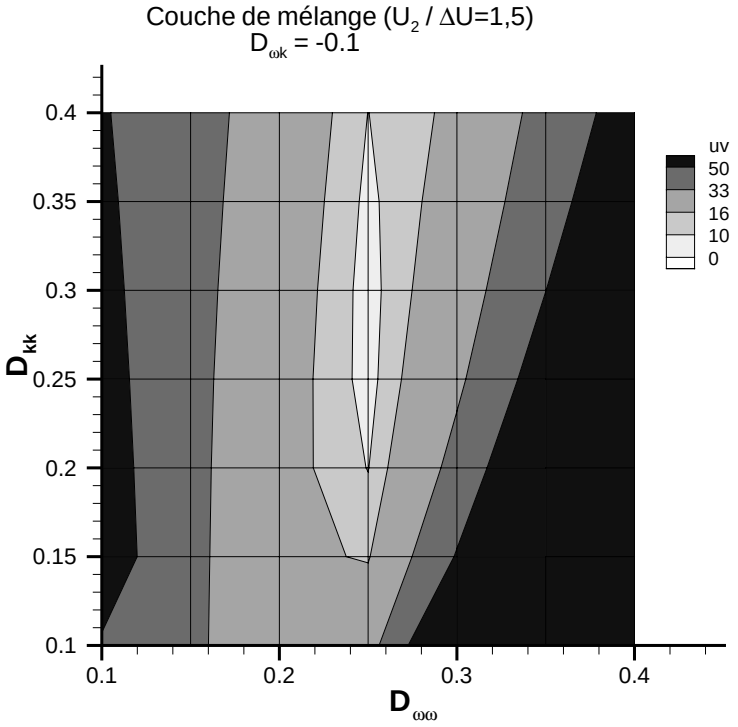


FIG. F.3 – Résultats de l'étude paramétrique en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 1,5$: tracé de l'erreur relative maximale entre calcul et expérience sur la tension croisée $\overline{u'v'}$

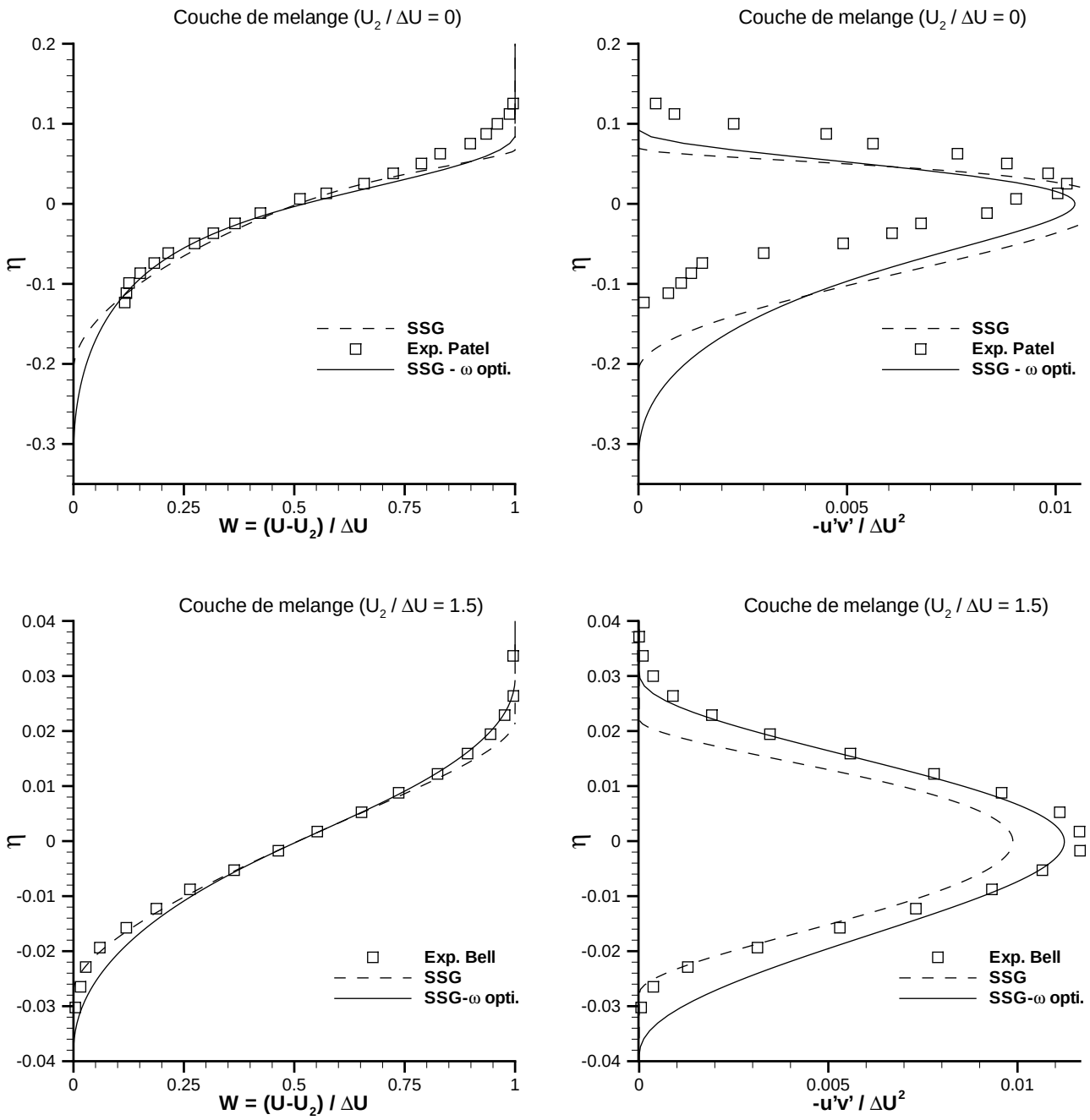


FIG. F.4 – Profils de vitesse et de $\overline{u'v'}$ en couche de mélange pour le modèle $SSG-\omega$ optimisé (calculs SIMIL)

F.4 Conclusion

Il a été impossible de satisfaire la contrainte pour la loi en racine par le biais d'une fonction correctrice. Lorsque cette contrainte était vérifiée, nous n'avons pu en effet aboutir à aucune solution numérique convergée. Ce constat a été fait pour plusieurs choix de senseur ζ et de grandeurs transportées (φ, ω et aussi ε). Des essais de fonctions correctrices appliquées à $C_{\Phi 2}$ ont conduit aux mêmes difficultés. Peut-être que le fait que $C_{\varepsilon 1}$ varie de façon brutale dans la zone proche de la région logarithmique (pour satisfaire à la fois les contraintes sur la loi logarithmique et la loi en racine) explique ces instabilités numériques.

Une autre méthode doit être envisagée si l'on veut satisfaire à la fois les contraintes sur la structure de la couche limite et celles concernant le raccord à une frontière libre. Il serait intéressant de porter la correction, non pas sur les coefficients $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$, mais plutôt sur les coefficients de diffusion D_{kk} et $D_{\varepsilon\varepsilon}$ afin d'avoir un jeu de constantes différent au voisinage de la frontière libre du reste de l'écoulement. Cette méthode permettrait peut-être de satisfaire toutes les contraintes.

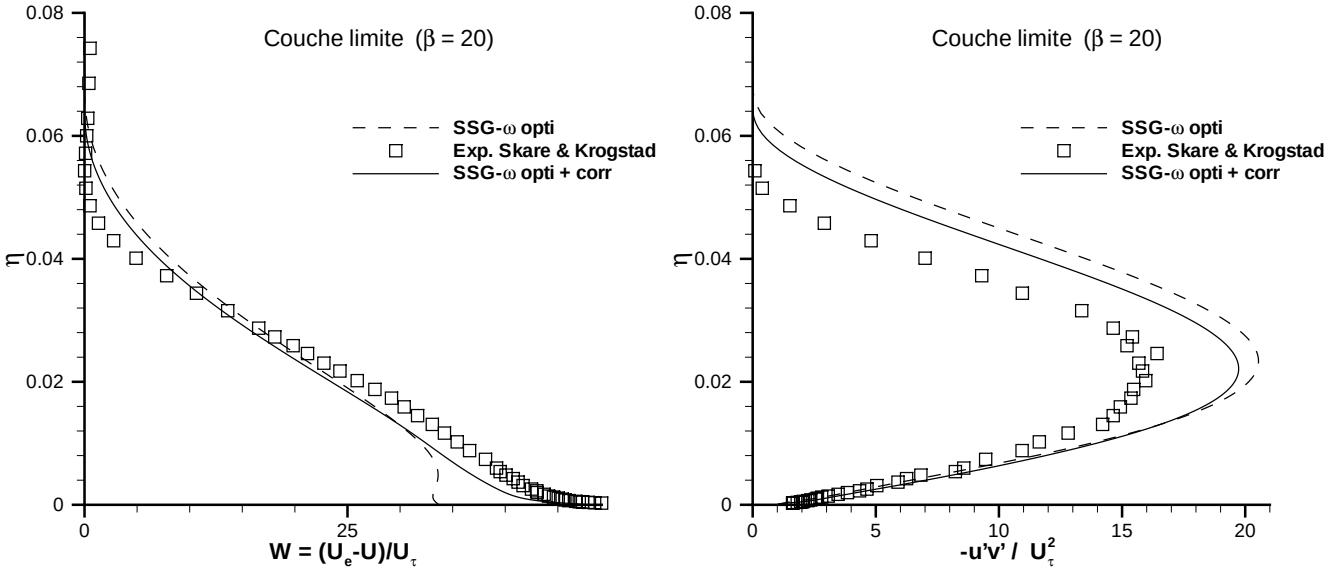


FIG. F.5 – Profils de vitesse déficitaire et de $-\overline{u'v'}$ dans une couche limite à $\beta = 20$, du modèle $SSG - \omega$ optimisé avec et sans correction sur $C_{\omega 1}$ (calculs SIMIL)

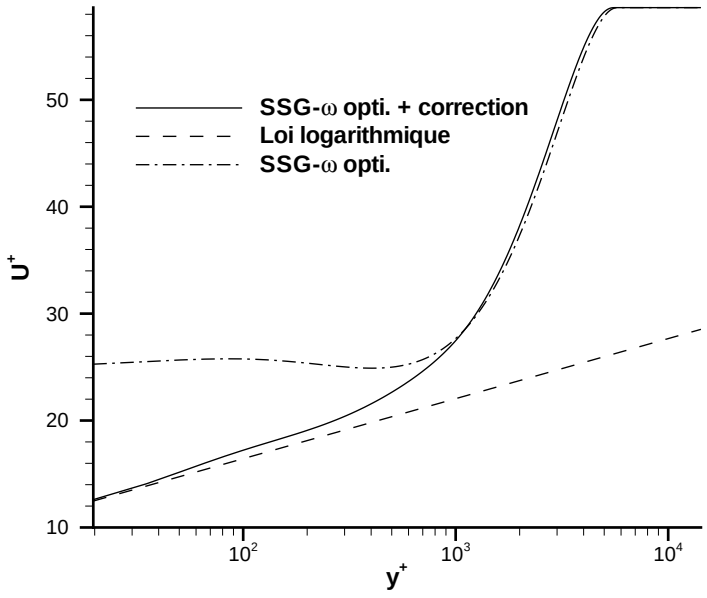


FIG. F.6 – Comportement, dans la zone logarithmique d'une couche limite à $\beta = 20$, du modèle $SSG - \omega$ optimisé avec et sans correction sur $C_{\omega 1}$ (calculs SIMIL)

Table des figures

2.1 Évolution du tenseur d'anisotropie durant le retour à l'isotropie ($\circ$: exp. de Choi et Lumley en 1984) . . . 23
2.2 Évolution temporelle du tenseur d'anisotropie pour un écoulement cisaillés à $\varepsilon_0/SK_0 = 1$ ($\circ$: DNS de Lee et Reynolds en 1985) . . . 23
2.3 Évolution temporelle de k pour un écoulements cisaillés avec rotation à $\Omega/S = 0.5$ ($\circ$: LES de Bardina *et al.* en 1983) . . . 23
2.4 Évolution temporelle du tenseur d'anisotropie pour une expansion axisymétrique à $\varepsilon_0/SK_0 = 2.45$ ($\circ$: DNS de Lee et Reynolds en 1985) . . . 23
2.5 Comparaison sur l'expérience de Champagne et al. (1970) entre le modèle SSG et le modèle LRR modifié par Taulbee . . . 24

3.1 Évolution du profil de vitesse en fonction du gradient de pression . . . 30
3.2 Profil de vitesse en couche limite en variable logarithmique . . . 31
3.3 Loi en racine . . . 32
3.4 Calcul numérique dans la région externe d'une couche limite d'un modèle RSM vérifiant les contraintes sur la couche limite concernant les lois logarithmique et en racine et vérifiant les contraintes de Cazalbou et Chassaing (2002) sur le raccord à la frontière libre . . . 42

4.1 Définition du repère local lié à la frontière libre . . . 44
4.2 Calcul numérique de la viscosité turbulente dans la zone externe de la couche limite ($\eta = y/\Delta$) 53
4.3 Solutions de l'équation pour g lorsque les deux puissances sont positives . . . 54
4.4 Solutions de l'équation pour g lorsque $\alpha_k^+ < 0$ . . . 54
4.5 Forme de la solution paramétrique lorsque $1/\alpha_k^+ > 0$ . . . 56
4.6 Forme de la solution paramétrique lorsque $1/\alpha_k^+ < 0$ . . . 56

5.1 Solutions de l'équation pour g lorsque les conditions (5.1) sont satisfaites . . . 59
5.2 Énergie cinétique turbulente k pour la solution paramétrique . . . 59
5.3 Sensibilité aux conditions extérieures d'un modèle RSM vérifiant les conditions nécessaires (5.1) . . . 60
5.4 Sensibilité aux conditions extérieures d'un modèle RSM ne vérifiant pas les conditions nécessaires (5.1) . . . 60
5.5 Comportement au voisinage de la frontière libre de quelques grandeurs transportées pour le calcul de l'échelle de longueur de grosses structures . . . 61

7.1 Vue instantanée d'une couche limite : visualisation d'une frontière intermittente (Falco (1997)) 71
7.2 Validité du modèle pour la diffusion turbulente ($C_S = -\overline{v'k'}/(\nu_t \frac{\partial k}{\partial y})$ calculé à partir de DNS) - Cazalbou et Bradshaw (1993) . . . 72

8.1 Frontière intermittente . . . 73
8.2 Fonction densité de probabilité (PDF) d'une grandeur scalaire A (Lumley, 1979) . . . 76
8.3 Fonction densité probabilité de grandeur scalaire à trois stations différentes dans la frontière intermittente (Lumley, 1979) . . . 81

9.1 Validité de l'approximation faite sur le terme de saut de vitesse d'ordre 3 . . . 84
9.2 Sauts de vitesses, calculés par une relation approchée (8.19), négligeables dans les décompositions pour $\gamma > 0.7$ . . . 84
9.3 Validité du modèle pour le temps caractéristique $\widetilde{\tau}$ de la partie turbulente de l'écoulement . . . 91
9.4 DNS de Rogers et Moser (1994) en couche de mélange . . . 92
9.5 Diffusion par la pression en couche de mélange pour le modèle construit . . . 92
9.6 DNS de Spalart (1988) en couche limite de plaque plane . . . 92
9.7 Diffusion par la pression en couche limite de plaque plane pour le modèle construit . . . 92

10.1 DNS de Spalart (1988) en couche limite de plaque plane (pour $R_\theta = 1410$ et $y \simeq \delta \Leftrightarrow y^+ \simeq 800$) 98

11.1 Domaines de validité (rectangles en pointillées) du modèle simplifié en tant qu'approximation du modèle construit aux chapitres 9 et 10 . . . 101
11.2 Comportement de quelques grandeurs au voisinage de la frontière libre . . . 105

13.1 Jet plan ou jet axisymétrique . . . 114
13.2 Couche de mélange . . . 114
13.3 Sillage . . . 114
13.4 Comparaison entre les profils expérimentaux de vitesse de différentes expériences de jet plan . 122
13.5 Comparaison, en fonction de $U_2/\Delta U$ et $\Delta U/(U_1 + U_2)$, entre le taux d'évasement δ'_ω de la couche de mélange issu du calcul avec le modèle $SSG - \gamma$ et celui donné par la loi empirique 13.20 . . . 128
13.6 Profil de vitesse en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 0$ . . . 129
13.7 Profil de $\overline{u'v'}$ en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 0$ . . . 129
13.8 Profil de vitesse en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 1.5$ . . . 129
13.9 Profil de $\overline{u'v'}$ en couche de mélange à $U_2/\Delta U = 1.5$ . . . 129
13.10 Profil de γ dans une couche de mélange à $U_2/\Delta U \simeq 0$: comparaison entre le calcul avec le modèle $SSG - \gamma$ et l'expérience de Wygnanski et Fiedler (1970) . . . 130
13.11 Comparaison des profils de γ en couche de mélange en fonction de $U_2/\Delta U$ pour le modèle $SSG - \gamma$ . . . 130
13.12 Profils de vitesse en jet plan . . . 131
13.13 Profil de $\overline{u'v'}$ en jet plan . . . 131
13.14 Profils k en jet plan . . . 131
13.15 Profil de γ en jet plan . . . 131
13.16 Profils de vitesse en jet axisymétrique sans correction . . . 132
13.17 Profil de k en jet axisymétrique sans correction . . . 132

13.18Profils de vitesse en jet axisymétrique avec correction 132
13.19Profil de k en jet axisymétrique avec correction 132
13.20Profils de $\overline{u'v'}$ en jet axisymétrique avec correction 133
13.21Profil de γ en jet axisymétrique avec correction 133
13.22Profils de vitesse en sillage 134
13.23Profil de $\overline{u'v'}$ en sillage 134
13.24Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 0$ 135
13.25Profil de $\overline{u'v'}$ en couche limite à $\beta = 0$ 135
13.26Facteur d'intermittence dans une couche limite sans gradient de pression 135
13.27Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 5.139$ 136
13.28Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 5.139$: vérification de la loi logarithmique . 136
13.29Profil de vitesse déficitaire en couche limite à $\beta = 20$ 137
13.30Profil de k en couche limite à $\beta = 20$ 137
13.31Profil de $-\overline{u'v'}$ en couche limite à $\beta = 20$ 137
13.32Profil de ε en couche limite à $\beta = 20$ 137
13.33Vérification de la loi logarithmique à $\beta = 20$ 138
13.34Vérification de la loi en racine à $\beta = 20$ 138
13.35Facteur d'intermittence dans une couche limite avec et sans gradient de pression 138

14.1 Coefficient de frottement en plaque plane - influence du nombre de Reynolds initial 150
14.2 Vérification de la loi logarithmique en plaque plane 150
14.3 Profil des tensions de Reynolds pour le modèle $SSG - \gamma$ en variable de paroi sur plaque plane à $R_\theta = 1410$ et $R_\theta = 6010$ 151
14.4 Tensions de Reynolds au voisinage de la paroi pour le modèle $SSG - \gamma$ et les DNS de Spalart à $R_\theta = 1410$ 151
14.5 Profil de ε^+ sur plaque plane à $R_\theta = 1410$: comparaison entre le modèle $SSG - \gamma$ et les DNS de Spalart 151
14.6 Coefficient de frottement (Samuel) 152
14.7 Profil de vitesse (Samuel) 152
14.8 Coefficient de frottement (Ludwieg) 153
14.9 Profil de vitesse (Ludwieg) 153
14.10Coefficient de frottement (Perry) 154
14.11Profil de vitesse (Perry) 154
14.12Profil d'énergie cinétique turbulente (Perry) 154
14.13Coefficient de frottement (Bradshaw 3300) 155
14.14Profil de vitesse (Bradshaw 3300) 155
14.15Coefficient de frottement (Skåre et Krogstad) 156
14.16Profil de vitesse (Skåre et Krogstad) 156
14.17Vérification de la loi logarithmique (Skåre et Krogstad) 156
14.18Vérification de la loi en racine (Skåre et Krogstad) 156
14.19Aile GARTEUR 157
14.20Sections longitudinales de l'aile Garteur 158
14.21Lignes de courant extérieures à la couche limite (Garteur) 159
14.22Lignes de courant à $0,3mm$ de la paroi à F2 (Garteur) 160

14.23 Distribution du gradient de pression adimensionné β à 68% d'envergure de l'aile Garteur . . . 161
14.24 Distribution du coefficient de frottement sur l'extrados de l'aile Garteur . . . 162
14.25 Coefficient de frottement à 44% d'envergure pour le modèle $SSG-\gamma$ et le modèle LS (Garteur) 163
14.26 Coefficient de frottement à 68% d'envergure pour le modèle $SSG-\gamma$ et le modèle LS (Garteur) 163
14.27 Coefficient de frottement à 44% d'envergure pour des modèles $k-\varepsilon$ (Garteur) . . . 164
14.28 Coefficient de frottement à 68% d'envergure pour des modèles $k-\varepsilon$ (Garteur) . . . 164
14.29 Profils de vitesse à 44% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur) . . . 165
14.30 Profils de vitesse à 68% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur) . . . 166
14.31 Profils de vitesse à 68% d'envergure pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991) (Garteur) . . . 167
14.32 Profils de vitesse à 44% et 68% d'envergure pour un modèle de longueur de mélange (Garteur) 168
14.33 Profils de k à 44% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur) . . . 169
14.34 Profils de k à 68% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur) . . . 170
14.35 Profils de k à 68% d'envergure pour les modèles $k-\varepsilon$ de Chien (1982) et So et al. (1991) (Garteur) . . . 171
14.36 Profils de $\overline{u'w'}$ à 68% d'envergure pour les modèles LS et $SSG-\gamma$ (Garteur) . . . 172

F.1 Comparaison, en fonction de $U_2/\Delta U$ et $(U_1-U_2)\,/\,(U_1+U_2)$, entre le taux d'évasement δ'_w de la couche de mélange issu du calcul avec le modèle $SSG-\omega$ optimisé et celui donné par la loi empirique 13.20 . . . 199
F.2 Résultats de l'étude paramétrique en couche de mélange à $U_2/\Delta U=1,5$: tracé de l'erreur relative maximale entre calcul et expérience sur le taux d'ouverture $d\delta_w/dx$ . . . 200
F.3 Résultats de l'étude paramétrique en couche de mélange à $U_2/\Delta U=1,5$: tracé de l'erreur relative maximale entre calcul et expérience sur la tension croisée $\overline{u'v'}$ . . . 200
F.4 Profils de vitesse et de $\overline{u'v'}$ en couche de mélange pour le modèle $SSG-\omega$ optimisé (calculs SIMIL) . . . 201
F.5 Profils de vitesse déficitaire et de $-\overline{u'v'}$ dans une couche limite à $\beta=20$, du modèle $SSG-\omega$ optimisé avec et sans correction sur $C_{\omega 1}$ (calculs SIMIL) . . . 203
F.6 Comportement, dans la zone logarithmique d'une couche limite à $\beta=20$, du modèle $SSG-\omega$ optimisé avec et sans correction sur $C_{\omega 1}$ (calculs SIMIL) . . . 203

Bibliographie

B. Aupoix, Application de modèles dans l'espace spectral à d'autres niveaux de fermeture en turbulence homogène, Thèse de doctorat d'État, Université Claude Bernard - Lyon I, Octobre 1987.

B. Aupoix, Couches Limites Bidimensionnelles Compressibles. Descriptif et Mode d'Emploi du Code CLIC 2, ONERA, Janvier 1999.

B. Aupoix, In *Introduction to Turbulence Modelling - From mixing length to Reynolds stress models*, VKI Lecture Series, March 2004.

B. Aupoix, H. Bézard, S. Catris, et M. Wolfshtein, Étude de Modèles de Turbulence, ONERA, Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique, Juillet 2000.

B.S. Baldwin et T.J. Barth. A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. AIAA Paper 91-0610, 29^{th} Aerospace Science Meeting & Exhibit, Reno, Nevada, January 7-10 1991.

G.K. Batchelor, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge university Press, 1953.

J.H. Bell et R.D. Mehta, Developpement of a two-stream mixing-layer from tripped and untripped boundary layers, *AIAA Journal*, 28(12) :2034–2042, 1990.

G. Comte Bellot et S. Corssin, The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 25(4) :657–682, 1966.

H. Bézard, Optimisation of Two-Equation Turbulence Models, In C. Dopazo, Éd., *Advances in Turbulence – Proceedings of the Eighth European Turbulence Conference*, page 978, Barcelona, June 27-30 2000.

A. Bousquet, Prise en compte de l'intermittence de frontière dans la modélisation des écoulements cisaillés turbulents, Thèse de doctorat, INP Toulouse, décembre 1999.

L.J.S. Bradbury, The structure of a self-preserving turbulent plane jet, *Journal of Fluid Mechanics*, 23 :31, 1965.

P. Bradshaw, Equilibium boundary layer in moderate positive pressure gradient, In *Computation of Turbulent Boundary Layers*, volume II, pages 2600–1 2600–8, AFSOR-IFP-Stanford Conference, 1968.

P. Bradshaw, D.H. Ferris, et N.P. Atwell, Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation, *Journal of Fluid Mechanics*, 28(3) :593–616, 1967.

P. Bradshaw, N.N. Mansour, et U. Piomelli, On local approximations of the pressure-strain term in turbulence models, In *Center for Turbulence Research, Standford University*, Proceedings of the Summer Program, pages 159–164, 1987.

G.L. Brown et A. Roshko, On density effects and large structure in turbulent mixing layers, *Journal of Fluid Mechanics*, 64(4) :775–816, July 1974.

S. Byggstoyl et W. Kollmann, Closure model for intermittent turbulent flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(11) :1811–1822, 1981.

S. Byggstoyl et W. Kollmann, A closure model for conditioned stress equations and its application to turbulent shear flows, *Physics of Fluids*, 29(5) :1430, 1986a.

S. Byggstoyl et W. Kollmann, Stress transport in the rotational and irrotational zones of turbulent shear flows, *Physics of Fluids*, 29(5) :1423, 1986b.

A. Cadiou, Contribution à l'étude de modèles de turbulence du second ordre, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes, 1996.

C. Cambon, L. Jacquin, et S.L. Lubrano, Towards a new Reynolds stress model for rotating turbulent flow, *Physics of Fluids*, 4(4) :812–824, 1992.

S. Catris, Études de contraintes et qualification de modèles à viscosité turbulente, Thèse de doctorat, Supaero, octobre 1999.

S. Catris et B. Aupoix, Towards a calibration of the length-scale equation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(5) :606–613, October 2000.

J. Cazalbou et P. Chaissaing, New results on the model problem of the diffusion of turbulence from a plane source, *Physics of Fluids*, 13(2), 2001.

J. Cazalbou et P. Chassaing, The structure of the solution obtained with Reynolds-stress-transport models at the free-stream edges of turbulent flows, *Physics of Fluids*, 14(2), 2002.

J. Cazalbou, J.R. Spalart, et P. Bradshaw, On the behavior of two-equation models at the edge of a turbulent region, *Physics of Fluids*, 6, 1993.

J.B. Cazalbou et P. Bradshaw, Turbulent transport in wall-bounded flows. Evaluatation of model coefficients using direct numerical simulation, *Physics of Fluids*, 5(12) :3233–3239, 1993.

T. Cebeci et A.M.O. Smith, Analysis of Turbulent Boundary Layers, volume 15 of *Applied Mathematics and Mechanics*, Academic Press, 1974.

F.H. Champagne, V.G. Harris, et S. Corrsin, Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 41(1) :81–139, March 1970.

P. Chassaing, Turbulence en mécanique des fluides, Cépaduès, 2000.

H.C. Chen, Submarine flows studied by second-moment closure, *Journal of Engineering Mechanics*, 121 : 1136–1146, 1995.

H.C. Chen, Y.J. Jang, et J.C. Han, Computation of heat transfer in rotating two-pass square channels by a second-moment closure model, *International Journal of Heat and Mass Transfert*, 43 :1603–1616, 2000.

R. Chevray et N.K. Tutu, Intermittency and preferential transport of heat in a round jet, *Journal of Fluid Mechanics*, 88 :133, 1978.

K.Y. Chien, Predictions of channel and boundary-layer flows with a low Reynolds-number turbulence model, *AIAA Journal*, 20(1) :33–38, 1982.

J.R. Cho et M.K Chung, A k-ε-γ turbulence model, *Journal of Fluid Mechanics*, 237 :301–322, 1992.

P.Y. Chou, On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, *Quart. Appl. Math.*, 3 :38–54, 1945.

J. Cousteix, Turbulence et Couche Limite, Toulouse, Cepadues, 1989.

J. Cousteix et R. Houdeville, Singularities in three-dimensional turbulent boundary-layer calculations and separation phenomena, *AIAA Journal*, 19(8) :976–985, August 1981.

J. Cousteix, V. Saint-Martin, R. Messing, H. Bézard, et B. Aupoix, Development of the $k - \varphi$ turbulence model, In *Eleventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, Institut National Polytechnique, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, September 8-11 1997.

B.J. Daly et F.H. Harlow, Transport equations in turbulence, *Physics of Fluids*, 13 :2634, 1970.

T. Daris, Études des modèles de turbulence à quatres équations de transport pour la prévision des écoulements turbulents faiblement chauffés, Thèse de doctorat, Supaero, octobre 2002.

M. Doussinault, Etude de modèles de turbulence appliqués à l'écoulement autour de l'aile Garteur AD/AG07 (couche limite et sillage), Thèse de doctorat, ENSAE, 1998.

P.A. Durbin et S.E. Belcher, Scaling of adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers, *Journal of Fluid Mechanics*, 238 :699–722, 1992.

P.A. Durbin et C.G. Speziale, Local anisotropy in strained turbulence at high Reynolds numbers, *Journal of Fluids Engineering*, 113 :707–709, December 1991.

W. Eckhaus, Asymptotic Analysis of singular perturbations - Studies in Mathematics and its applications Vol.9, North Holland publishing company - J.L. LIONS, 1978.

R.E. Falco, Coherent motions in the outer region of turbulent boundary layers, *The Physics of Fluids*, 20(10-Part II) :S124–S132, October 1997.

H. Fiedler et M.R. Head, Intermittency mesurements in the turbulent boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 25 :719–735, 1966.

L. Flachard, Études de contraintes et qualification de modèles aux tensions de Reynolds, Thèse de doctorat, Supaero, octobre 2000.

J. Gustavsson, Experiments on turbulent flow separation, Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology (Stockholm), July 1998.

E. Gutmark et I. Wygnanski, The planar turbulent jet, *Journal of Fluid Mechanics*, 73(3) :465–495, 1976.

M. Hallbäck, J. Groth, et A.J. Johansson, A Reynolds stress closure for the dissipation in anisotropic turbulent flows, In *Turb. Shear Flows*, 7th Symp., pages 17.2.1–17.2.6, Standford University, 1989.

K. Hanjalić et B.E. Launder, A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 52 :609, 1972.

T.B. Hedley et J.F. Keffer, Turbulent/non-turbulent decisions in an intermittent flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 64 :625–544, 1974.

G. Heskestad, xxx, *J. App. Mech.*, 32 :721–xxx, 1965.

R. Houdeville et P. Malecki, Calcul de couches limites tridimensionnelles. Description et mode d'emploi du code 3C3D, ONERA CERT, Septembre 1994.

P.G. Huang et P. Bradshaw, The law of the wall for turbulent flows in pressure gradients, *AIAA Journal*, 33 : 624–632, 1995.

W.P. Jones et B.L. Launder, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *International Journal of Heat and Mass Transfert*, 15 :301, 1972.

W.P. Jones et P. Musonge, Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations, *Physics of Fluids*, 31(12) : 3589–3604, December 1988.

P.S. Klebanoff, Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, *Technical report T.N. 3178, NACA*, 1954.

A.N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds number, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30 :301–305, 1941.

B.E. Launder, G.J. Reece, et W. Rodi, Progress in the developpement of a Reynolds-stress turbulence closure, *Journal of Fluid Mechanics*, 68(2) :537–566, 1975.

B.E. Launder et N. Shima, Second-moment closure for the near wall sublayer : developpement and applications, *AIAA Journal*, 27(10) :1319–1325, 1989.

B.E. Launder et D.P. Tselepidakis, Contribution to the second-moment modelling of sublayer turbulent transport, In *Zarić Memorial International Seminar on Near-Wall Turbulence, Dubrovnik, Yugoslavia*, 16 - 20 May 1988.

P.A. Libby, Prediction of the intermittent turbulent wake of a heated cylinder, *Phys. of Fluids*, 19(4), April 1976.

H. Ludwieg et W. Tillmann, Investigation of the wall shearing stress in turbulent boundary layers, Nat. Adv. Comm. Aero, Washington, 1950.

J.L. Lumley, Computational Modeling of Turbulent Flows, *Advances in applied mechanics*, 18 :123, 1978.

J.L. Lumley, Second order modelling of turbulent flows, In *V.K.I. for Fluid Mechanics*, Lecture Series 76, pages 1–30, 1979.

Y. Maciel, Etude expérimentale de l'écoulement cisaillé, turbulent et fortement tridimensionnel autour de l'aile en flèche Garteur AD (AG07), Thèse de doctorat, ENSAE, Octobre 1994.

P. Malecki, Étude de modèles de turbulence pour les couches limites tridimensionnelles, Thèse de doctorat, ENSAE, novembre 1994.

B. Marasli, F.H. Champagne, et I.J. Wygnanski, On linear evolution of unstable disturbances in a plane turbulent wake, *Physics of Fluids A*, 3(4) :665–674, April 1991.

I. Marušić et A.E. Perry, A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 2. Further experimental support, *Journal of Fluid Mechanics*, 298 :389–407, September 1995.

R.D. Mehta et R.V. Westphal, Near-field turbulence propoerties of single and two stream plane mixing layers, *Experiments in Fluids*, 4(5) :257–266, 1986.

G.L. Mellor, The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers, *International Journal of Engineering Sciences*, 10 :851–873, 1972.

G.L. Mellor et H.J. Herring, A survey of mean turbulent field closure models, *AIAA Journal*, 11(5) :590–599, May 1973.

F.R. Menter, The influence of free stream values on k-ω model prediction, *AIAA Journal*, 30 :1657, 1992a.

F.R. Menter, Two equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA Journal*, 32 (8) :1598–1605, 1992b.

M.V. Morkovin. Effects of compressibility on turbulent flows. Colloque International CNRS No 108, Mécanique de la Turbulence, Editions CNRS, 1961.

Y. Nagano, T. Tsuji, et T. Houra, Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19 :563–572, 1998.

K.H. Ng et D.B. Spalding, Turbulence model for boundary layers near walls, *Physics of Fluids*, 15 :20, 1972.

N. Ninomiya et N. Kasagi, Measurement of the Reynolds stress budgets in a axisymetric free jet with the aid of three-dimensional particle tracking velocimetry, In *Proceedings of the 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Kyoto, Japan, August 1993.

M. Oberlack et S. Guenther, Two point similarity solutions of shear-free turbulent diffusion, diffusion waves and its implications for RANS models, In *3nd international symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, volume 1, pages 287–292, Sendai, Japan, june 2003.

S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

R.P. Patel, An experimental study of a plane mixing layer, *AIAA Journal*, 11(1) :2034–2042, 1973.

V.C. Patel et G. Scheuerer, Calculation of two-dimensional near and far wakes, *AIAA Journal*, 20(7), 1982.

V.G. Patel, W. Rodi, et G. Scheuerer, Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows : A review, *AIAA Journal*, 23(9) :1308–1319, September 1985.

A.J. Paullay, R.E Melnik, A. Rubel, S. Rudman, et M.J. Siclari, Similarity solutions for plane and radial jets using a $k - \varepsilon$ turbulence model, *Journal of Fluids Engineering*, 107 :79–85, 1985.

O.M. Phillips, The irrotational motion outside a free turbulent boundary, In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 51, January 1955.

S.B. Pope, An explanation of the turbulent round jet/plane jet anomaly, *AIAA Journal*, 16(3) :279–281, 1978.

S.B ; Pope, PDF methods for turbulent reactive flows, *Prog. Energy Combust. Sci.*, 11 :119–192, 1985.

S.B. Pope, On the relationship between stochastic Lagrangian models of turbulence ans second-moment closures, *Physics of Fluids*, 6(2) :973–985, 1994.

S.B. Pope, Turbulent Flows, Cambridge University Press, 2000.

R.O.S. Prasad et H.A. Hassan. An evaluation of the two-equation $k - l$ model for simple shear flows. AIAA Paper 98-0321, 36^{th} Aerospace Science Meeting & Exhibit, Reno, Nevada, January 12-15 1998.

W.C. Reynolds et S.C. Kassinos, One-point modelling of rapidly deformed homogeneous turbulence, In Proc. Roy Soc. Lond., Éd., *Osborne Reynolds Centenary Volume*, pages 87–104, 1995.

M.M. Rogers et R.D. Moser, Direct simulation of a self-similar turbulent mixing region, *Physics of Fluids*, 6 (2) :903–923, 1994.

J.C. Rotta, Statistiche Theorie Nichthomogener Turbulentz, *Z. Phys.*, pages 129–547, 1951.

A.E. Samuel et P.M. Joubert, A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient, *Journal of Fluid Mechanics*, 66(3) :481–505, 1974.

U. Schumann, Realisability of Reynolds stress turbulence model, *Physics of Fluids*, 20 :721–725, 1977.

T.H. Shih, A. Shabbir, et J.L. Lumley, Realisability in second moment turbulence closures revisited, NASA Technical Memorandum 106469, January 1994.

P.E. Skåre et P.A. Krogstad, A turbulent equilibium boundary layer near separation, *Journal of Fluid Mechanics*, 272 :319–348, 1994.

B.R. Smith, The $k - kl$ turbulence model and wall layer model for compressible flows, In *AIAA 90-1483*, Seattle, WA, June 1990.

B.R. Smith, A near-wall model for the $k - l$ two equation turbulence model, In *AIAA Paper 94-2386*, 25th fluid dynamics conference, Colorado Springs, CO, june 1994.

R.W. Smith et A.J. Smits, Flate plate, zero-pressure-gradient turbulent boundary layer, In *A selection of Test Cases fot the Validation of Large-Eddy Simulations*, AGARD Advisory Report 345, pages 161–162, 1998.

R.M.C. So, H.S. Zhang, et C.G. Speziale, Near-wall modeling of the dissipation-rate equation, *AIAA Journal*, 29(12) :2069–2076, December 1991.

P.R. Spalart, Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$, *Journal of Fluid Mechanics*, 187 :61–98, 1988.

P.R. Spalart et S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA Paper 92-0439, 30^{th} Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 6-9 1992.

P.R. Spalart et S.R. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *La Recherche Aérospatiale*, 1 :5–21, 1994.

C.G. Speziale, R. Abid, et P.A. Durbin, New results on the Realisabiliy of Reynolds stress turbulence closures, NASA, October 1993.

C.G. Speziale, S. Sarkar, et T.B. Gatski, Modelling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach, *Journal of Fluid Mechanics*, 227 :245–272, 1991.

K.R. Sreenivasan, The utility of dynamical systems approaches, In *Wither Turbulence ? Turbulence at crossrads*, Lectures notes in Physics (357), pages 269–291, Berlin, 1990.

R.W. Stewart, Irrotational motion associated with free turbulent flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 1957.

D.B. Taulbee, An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding non-linear stress model, *The Physics of Fluids A*, 4(11) :2555–2561, November 1992.

H. Tennekes, Lecture notes on turbulence, *World Scientific*, pages 20–36, 1989.

A.A. Townsend, The structure of turbulent shear flow, Cambridge Univ. Press, 1976.

C. Truesdell, Introduction à la mécanique rationelle des milieux continus, Masson, 1974.

P.R. van Slooten, Jayesh, et S.B. Pope, Advances in PDF modeling for inhomogeneous turbulent flows, *Physics of Fluids*, 10(1) :246–263, 1997.

P.R. van Slooten et S.B. Pope, PDF modeling for inhomogeneous turbulence with exact representation of rapid distortions, *Physics of Fluids*, 9(4) :1085–1105, 1997.

G.N. Vanderplaats, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications, McGraw-Hill Inc., 1984.

D.C. Wilcox, Reassesment of scale-determining equation for advanced turbulence models, *AIAA Journal*, 26 (11), 1988.

M. Wolfshtein, On the length scale of turbulence equation, In *Israel Journal of Technology*, volume 8 of *Proc XII Israel Ann. Conf. AVIATION and ASTRONAUTICS*, pages 87–99, March 1970.

I. Wygnanski et H.E. Fiedler, Some mesurements in the self-preserving jet, *Journal of Fluid Mechanics*, 38 : 549, 1969.

I. Wygnanski et H.E. Fiedler, The two-dimensional mixing region, *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2) :327–361, 1970.

K.S. Yajnik, Asymptotic theory of turbulent flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 42 :411–427, 1970.